

0529

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA



TURBULENCIA EN LA HIDRAULICA



T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

P R E S E N T A L A

ING. MARIA JOSELINA CLEMENCIA ESPINOZA AYALA

MEXICO, D.F.

FEBRERO DE 1985



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPTO.

T. UNAM

1985

ESP

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
SECCION DE HIDRAULICA

TESIS QUE PRESENTA LA  
ING. MARIA JOSELINA CLEMENCIA ESPINOZA AYALA

para obtener el grado de  
MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

Créditos Asignados a la Tesis 10

JURADO


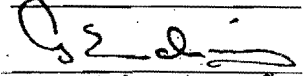
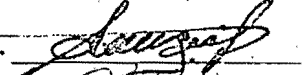
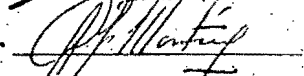

Dr. Enzo Levi Lattes

Dr. Gabriel Echávez Aldape

M. en I. Felipe I. Arreguín C.

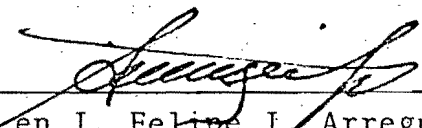
M. en I. Polioptro Martínez A.


M. en I. Jesús Gracia Sánchez

JEFE DE LA SECCION

SECRETARIA ACADEMICA

  
M. en I. Felipe I. Arreguín C.

  
M. en I. Gabriela Moeller de J.

A mis padres:

Quienes siempre han tenido una gran  
confianza en que llegue a ser alguien

A mis hermanos

# T E M A R I O

	Pág
I. INTRODUCCION	1
II. ECUACIONES FUNDAMENTALES	5
II. 1 Ecuaciones de movimiento	6
II. 2 Ecuación de continuidad	8
II. 3 Ecuaciones de Reynolds	9
II. 4 Ecuación de la energía	
II. 5 Flujo turbulento entre placas paralelas	15
III. ESTABILIDAD DE FLUJOS	17
III. 1 Antecedentes	17
III. 2 Método de energía	19
III. 3 Análisis lineal de estabilidad	21
III. 4 Características de estabilidad de algunos flujos típicos.	26
IV. TRANSICION	33
IV. 1 Turbulencia de pared	33
IV. 2 Distribución de velocidad en las diferentes regiones de la capa límite	36
IV. 3 Transición en la capa límite	39
V. TEORIA ESTADISTICA DE LA TURBULENCIA	49
V. 1 Introducción	49
V. 2 Correlaciones en turbulencia y ecuaciones de Karman - Howarth	53
V. 3 Espectro de la turbulencia	59
V. 4 Interpretación del espectro	69

	Pág
VI. ESTRUCTURA DE LA CAPA-LIMITE TURBULENTA	77
VI. 1. Estudio de la región de la pared y fenómeno de los rompimientos (burst)	77
VI. 2. Mecanismos que producen la estructura de la capa límite.	89
VII INTRODUCCION AL CALCULO DE FLUJOS TURBULENTOS	108
VII.1 Modelos de flujos turbulentos	109
VII.2 Modelos de cero ecuaciones	110
VII.3 Modelo de una ecuación	116
Apéndice	124
Bibliografía	126

## I. INTRODUCCION

Los flujos turbulentos se caracterizan por un movimiento irregular de las partículas de fluido las cuales muestran un comportamiento de continuo mezclado y agitación. Hinze [1] definió la turbulencia como "una condición irregular del flujo en el cual algunas propiedades del flujo (tales como la velocidad y la presión) muestran una variación aleatoria en el espacio y tiempo, de manera que se hace uso de estadísticas para describirlas".

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que los flujos más comunes en la naturaleza tales como los escurrimientos en los ríos, las corrientes oceánicas o el flujo de aire en la atmósfera son turbulentos. Por lo tanto el estudio de la turbulencia es de gran importancia para el desarrollo tecnológico de la aerodinámica, hidráulica, ingeniería naval e ingeniería química, y constituye uno de los problemas más importantes por resolver en la actualidad.

En la mecánica de los fluidos, el estudio del movimiento de estos se basa en la aplicación de los principios de conservación a un elemento o volumen de control en el que se supone las partículas siguen una trayectoria que puede determinarse perfectamente tal es la derivación de las Ec de Euler para fluidos perfectos (sin viscosidad) y más recientemente las ec de Navier-Stokes considerando la viscosidad.

Las ecuaciones de movimiento, o de Navier-Stokes, constituyen una idealización de los flujos reales puesto que no consideran las fuertes variaciones locales de velocidad que ocurren en los flujos turbulentos las cuales originan grandes pérdidas de energía. Al respecto en 1878 Boussinesq en una memoria fundamental presentada ante la academia de Paris afirmaba "resulta claro que en movimientos de este género tienen que desarrollarse resistencias muchos mayores que las asociadas con movimientos continuos" [2]. De manera que se empezó a tomar en cuenta la importancia de incluir estos efectos en las ecuaciones de movimiento.

En 1895 O. Reynolds propuso tratar la turbulencia considerando un flujo medio al que se superponía un flujo fluctuante. Con este enfoque las va-



riables del flujo se dividen asimismo en una parte media y otra fluctuante las cuales sustituidas en las ecuaciones de Navier-Stokes dan por resultado un sistema de ecuaciones idéntico al original excepto por los terminos de los esfuerzos convectivos resultantes de promediar los productos de las fluctuaciones de velocidad, denominados esfuerzos de Reynolds.

De acuerdo a lo anterior se llega a una situación en la que se tienen más incógnitas que ecuaciones, para cerrar el sistema de ecuaciones es necesario establecer una relación adicional entre los esfuerzos convectivos y el campo de velocidades medias. Para la solución de este problema se han hecho suposiciones de manera que el número de incógnitas sea igual al de ecuaciones, lo que dió por resultado las teorías semiempíricas de Prandtl [1925] y de Taylor [1932] en las que los esfuerzos convectivos se relacionaron al flujo medio usando conceptos como los de "viscosidad vorticosa" a semejanza de la viscosidad molecular, y de "longitud de mezcla", en analogía con la teoría cinética de los gases. Sin embargo la turbulencia no es una característica de los fluidos, como se considera en la teoría de Taylor, sino una característica del flujo de éstos.

Se han realizado grandes esfuerzos con el fin de resolver el problema de la turbulencia particularmente en los últimos 25 años, lo que ha dado por resultado la publicación de un gran número de artículos en revistas científicas; y aunque este problema sigue sin resolverse, sí se ha logrado entender mejor el fenómeno físico.

Las principales herramientas que se han utilizado para el estudio de los flujos turbulentos son las técnicas estadísticas, las técnicas de visualización del flujo y los modelos matemáticos.

#### Técnicas Estadísticas

G. I. Taylor [1935] desarrolló la teoría estadística para la turbulencia homogénea e isotrópica, en donde las propiedades estadísticas del flujo son idénticas en cualquier punto del espacio y en cualquier dirección que se midan. Esta teoría considera al flujo en un estado de desor

den total lo cual se presenta en la práctica en regiones muy apartadas de las fronteras sólidas. Desafortunadamente, por lo general los problemas que más interesan son los flujos cercanos a paredes.

En las mediciones experimentales es muy útil hacer uso de correlaciones estadísticas, por medio de las cuales se determinan las características de los remolinos generados en el campo de flujo.

### Visualización de flujo

El desarrollo de la óptica y la electrónica ha revolucionado las técnicas experimentales, pues la existencia de aparatos como los anemómetros de hilo caliente, que permiten la obtención de registros de fluctuaciones de velocidad instantáneas puntuales, los generadores de burbujas de hidrógeno, que proporcionan patrones de las trayectorias de las partículas mostrando distribuciones instantáneas de velocidad, y el uso de colorantes, entre otros, han permitido una visualización más detallada del flujo. Kim, Kline, Reynolds, Runstadler [3,4] han utilizado estas técnicas, por otro lado Corino y Brodkey [5] han utilizado partículas coloidales en suspensión. El uso de las técnicas de visualización ha llevado a comprender mejor el fenómeno de la turbulencia dándole un nuevo enfoque al problema, ya que se empezó a tomar interés en el origen y desarrollo de ésta dentro de una región muy cercana a la pared, logrando deducir modelos de los mecanismos que la producen.

### Modelos Matemáticos

Debido al desarrollo de las computadoras, éstas se han convertido en una herramienta muy importante para aproximarse a la solución de las ecuaciones de movimiento, utilizando métodos numéricos. Un cierto número de investigadores se ha dedicado al estudio de la turbulencia proponiendo ecuaciones basadas en hipótesis simplificadoras que, conjuntamente a las ecuaciones de Reynolds, modelan las propiedades de algunos flujos turbulentos.

Los modelos más simples basados en el concepto de longitud de mezcla son los de uso más común en ingeniería; este tipo de modelos si cuenta con

bastante experiencia de manera que existe una gran cantidad de publicaciones sobre este tema.

Por otro lado los modelos matemáticos que se han investigado recientemente son aquellos que modelan el comportamiento de los remolinos en el flujo.

El objeto del presente trabajo es mostrar el estado del arte de las principales tendencias de investigación del problema de la turbulencia. Con este fin la presentación se ha organizado de la manera siguiente.

En el segundo capítulo se tratarán las ecuaciones de continuidad, ecuaciones de Reynolds y ecuaciones de energía para un flujo turbulento. En el tercer capítulo se verán los criterios usados para determinar cuando un flujo es estable o inestable, es decir cuando éste puede volverse turbulento, así como las características de estabilidad de los flujos típicos de la mecánica de fluidos. En el capítulo cuarto se revisarán los trabajos recientes sobre los experimentos realizados en la transición de flujo laminar a turbulento, lo cual ha tomado gran importancia en los últimos años. El siguiente capítulo se ocupará de la teoría estadística de la turbulencia: correlaciones, escalas de turbulencia y espectros de energía. En el capítulo VI se verán los trabajos más importantes sobre el estudio de la estructura de la capa límite turbulenta, continuando con los mecanismos propuestos para explicar la producción de turbulencia. Finalmente en el último capítulo se dará una breve introducción a los modelos matemáticos de la turbulencia.

## II ECUACIONES FUNDAMENTALES

El movimiento turbulento como se dijo anteriormente, es de naturaleza aleatoria; por lo que para describir sus características se usan valores promedio con respecto al espacio y al tiempo.

De la observación de los flujos turbulentos se deduce que estos promedios existen, ya que en un punto dado, en un campo de flujo turbulento, un patrón de flujo se repite más o menos regularmente en un cierto tiempo; y a su vez en un tiempo dado la estructura del flujo se repite casi regularmente dentro de un espacio considerado.

Si se observa un registro de la velocidad en función del tiempo en un punto fijo, se obtendría una curva irregular (fig 2.1).

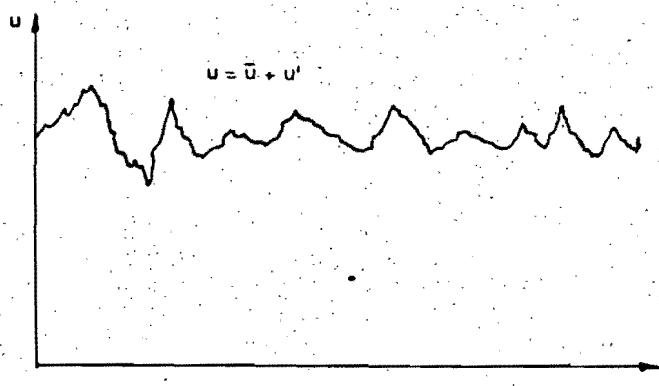


Fig 2.1 Componente  $u$  de la velocidad en función del tiempo

Así la velocidad instantánea del flujo se expresa como la suma de una velocidad media más una fluctuación.

$$u = \bar{u} + u' \quad (2.1)$$

donde:

$\bar{u}$  es la velocidad promedio

$u'$  fluctuación de la velocidad

Los valores promedios se pueden determinar de varias formas. Si el campo de flujo es casi permanente se pueden usar promedios con respecto al tiempo. En el caso de una turbulencia homogénea se pueden considerar valores promedio con respecto al espacio. Si el campo de flujo no es ni permanente ni homogéneo, el promedio se toma sobre los resultados obtenidos en una serie de experimentos en los que se tengan las mismas condiciones iniciales y de frontera.

La velocidad promedio  $\bar{u}$  se puede definir en relación a un tiempo  $T$  como:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad (2.2)$$

Donde  $T$  es un tiempo mayor que la escala de tiempos del movimiento turbulento, siendo ésta igual a la longitud característica del conducto entre la velocidad del flujo medio.

## II.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento para un flujo turbulento se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes cuyo principio expresa la conservación de cantidad de movimiento de un fluido continuo. Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible se expresan de la manera siguiente, usando una notación tensorial:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.3)$$

donde:

$\frac{\partial u_i}{\partial t}$  = aceleración local; cambio de velocidad con respecto al tiempo en el punto  $(x, y, z)$ ; si el flujo es permanente es cero

$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  = aceleración convectiva; cambio de la velocidad debido a un cambio de posición; es cero si el flujo es uniforme

$\rho X_i$  = fuerzas de cuerpo. Generalmente se considera el peso

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \text{esfuerzos normales de presión}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \text{esfuerzos tangenciales debidos a la fricción}$$

A Reynolds se debe el hacer uso de las ecuaciones de Navier-Stokes para el análisis del flujo turbulento, introduciendo cada valor instantáneo de la velocidad como la suma de su valor medio y una fluctuación. En el estudio de la turbulencia, generalmente se usa una barra sobre la variable o variables para indicar valores promedios o la operación de promediar.

Como se necesitará tomar valores promedios de algunas combinaciones de las cantidades fluctuantes, se dan a continuación un conjunto de reglas:

$$\text{Si } a = \bar{a} + a' \quad \text{y} \quad b = \bar{b} + b'$$

$\bar{a}$  y  $\bar{b}$  pueden considerarse constantes y el valor medio de la fluctuación es cero:  $\bar{a}' = \bar{b}' = 0$

ahora:

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{\bar{a} \bar{b}} = \bar{a} \bar{b}$$

$$\overline{\bar{a} b'} = \bar{a} \bar{b}' = 0$$

$$\overline{a b} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \bar{b}' + \bar{b} \bar{a}' + \overline{a' b'}$$

$$\overline{a b} = \bar{a} \bar{b} + \overline{a' b'}$$

Se desarrollarán las ecuaciones de movimiento para flujo turbulento; el método es básicamente el mismo en cada caso. Se escriben inicialmente las ecuaciones para las cantidades instantáneas; luego se toman promedios en ambos lados, teniendo en cuenta que si la igualdad es válida instantáneamente, también lo es para los valores promedio.

## II.2 ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad debe cumplirse para el movimiento turbulento tanto como para el laminar. Esta ecuación en notación tensorial es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.4)$$

donde:  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$  y  $u_i = \bar{u}_i + u_i'$

sustituyendo en la ec (2.4) y promediando resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_i + u_i') = 0$$

aplicando las reglas de Reynolds, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho' u_i'}) = 0$$

para un fluido incompresible, se transforma

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

pero como  $\bar{u}'_i = 0$  por definición, luego

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

y consecuentemente

$$\frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0$$

de manera que tanto las componentes del movimiento medio como las componentes de las fluctuaciones deben satisfacer la condición de continuidad.

### II.3 ECUACIONES DE REYNOLDS

Si en las ecuaciones de Navier-Stokes (2.3) se sustituyen los valores instantáneos en función de los valores promedio

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad P = \bar{P} + P'$$

Sustituyendo resulta:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u'_i) + \rho (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = \rho x_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{P} + P') + \mu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

Si se desarrolla y promedia cada termino se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \\ \rho \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho x_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}'_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{si} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = \bar{u}'_i \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} + \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j}$$

$$\text{Por continuidad} \quad \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} = 0$$

Sustituyendo en (2.6) y arreglando términos,

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} = \rho x_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{-u'_i u'_j}) \quad (2.7)$$

Las ecuaciones 2.6 se denominan Ecuaciones de Reynolds; y de éstas se puede concluir que las componentes medias de la velocidad del flujo turbulento satisfacen las ecuaciones para flujo laminar, con excepción de los esfuerzos viscosos los cuales se incrementan debido a la acción de los esfuerzos adicionales o aparentes representados por los últimos términos de la ec (2.6), denominados de Reynolds. Estos esfuerzos son producidos por las fluctuaciones turbulentas y están dados por los valores medios cuadráticos de las fluctuaciones turbulentas en el tensor de es-



fuerzos:

$$-\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

En el tensor de esfuerzos se considera a los términos de la diagonal ( $i = j$ ) como esfuerzos normales de presión y a los restantes como esfuerzos tangenciales; pero de hecho estos términos indican un cambio de la cantidad de movimiento debido a la turbulencia. Esto puede analizarse de la siguiente manera: si se considera un elemento de superficie  $dS$  perpendicular a la dirección  $x_2$ , como se muestra en la fig 2.2, y además solo se considera al movimiento turbulento, entonces  $\rho \overline{u'^2} dS$  denota el porcentaje de cantidad de movimiento a través de la superficie  $dS$  y puede escribirse como  $\rho \overline{u'_2 u'_2} dS$ . Dicho cambio de momento causa una reacción, en este caso una presión sobre  $dS = -\rho \overline{u'_2 u'_2} dS$ .

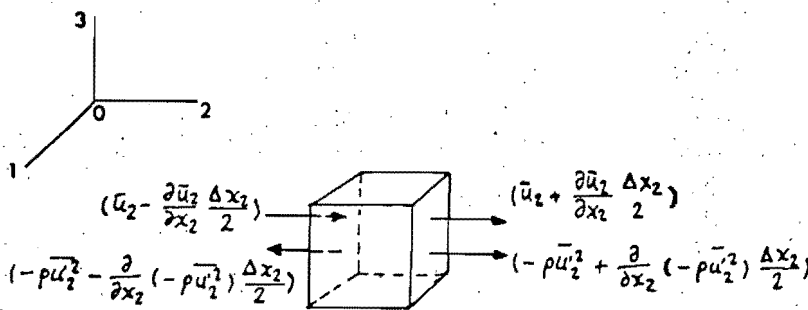


Figura 2.2 Trabajo hecho por las componentes de los esfuerzos de Reynolds de la diagonal principal, para  $j = 2$ .

## II.4 ECUACION DE LA ENERGIA

Considerese el análisis de las relaciones de energía que ocurren en el flujo turbulento. De acuerdo al principio de conservación de la energía ésta debe mantenerse constante en el flujo turbulento; de donde surge la pregunta ¿Cómo se mantiene esta energía?.. Con el fin de resolver esta interrogante se obtendrán las ecuaciones de energía cinética del flujo medio y luego las ecuaciones de energía cinética de la turbulencia; dichas ecuaciones se derivan de las ecuaciones de Reynolds y de Navier-Stokes. Como se verá, solo puede haber un equilibrio si la energía del flujo medio producida principalmente por esfuerzos cortantes, es balanceada por la energía que se pierde en el transporte ejercido por el flujo medio, la difusión, de la cual ocurre debido a la naturaleza aleatoria de la turbulencia y a la disipación en calor.

La energía por unidad de masa de un fluido, cuando no se consideran efectos externos se puede escribir como:

$$E = E \text{ cinética} + E \text{ interna}$$

donde  $E$  interna se debe a los efectos de compresibilidad más disipación.

En fluidos con propiedades constantes solo la energía cinética resulta de interés.

La energía cinética media de la turbulencia por unidad de volumen de fluido, es:

$$\frac{1}{2} \rho \overline{q^2} = \frac{1}{2} \rho (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = \frac{1}{2} \rho \overline{u'i u'i}$$

Las ecuaciones de Reynolds

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'i u'j}) \quad (2.8)$$

y la de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u'_i) + \rho (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) = \rho x_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{P} + P') + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i) \quad (2.9)$$

La ecuación de energía cinética del flujo medio se obtiene multiplicando la ecuación (2.7) por  $\bar{u}_i$  y tomando en cuenta que  $\bar{q}^2 = \bar{u}_i \bar{u}_i$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} \right) = \rho \bar{u}_i x_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{P} \bar{u}_i) + \mu \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (2.10)$$

La ecuación de la energía cinética total se obtendrá multiplicando la ecuación (2.10) por  $\bar{u}_i + u'_i$ ; si se hacen las adiciones necesarias para que resulten terminos en  $\bar{q}^2$  y  $\bar{q}'^2$  y se promedia, se tendrá:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} + \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} + \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j} \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) = \rho \bar{u}_i x_i - \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \bar{u}_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_i P'} \right) + \mu \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para obtener la ecuación de la energía cinética del flujo turbulento, de la ec. (2.11) para la energía cinética total se resta la ec (2.10) de la energía cinética del flujo medio, resultando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j} \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{P' u'_i} \right) + \mu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

En la ec. (2.10) si se desarrolla el laplaciano  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}$  y utilizando continuidad, se pueden escribir:

$$\bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{u}_i \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]$$

Similarmente:

$$u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u'_i \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \left[ \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right]$$

De donde la ecuación 2.9 resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u'_i u'_j \bar{u}_i} \right) - \left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \\ \rho \bar{u}_i \chi_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \bar{u}_i \right] &- \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ecuación de la energía cinética del flujo medio.

Donde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} \right) = \text{Cambio local de energía cinética por unidad de volumen para el flujo medio.}$$

Cuando el flujo es permanente es igual a cero

$$\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}^2}{2} \right) = \text{Efecto convectivo del flujo medio sobre la energía cinética. Si el flujo es uniforme es igual a cero.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u'_i u'_j \bar{u}_i} \right) = \text{Representa el trabajo hecho por los esfuerzos de Reynolds al mover sus puntos de aplicación con el flujo medio}$$

$$\left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \text{Representa la transferencia de energía del flujo medio a la turbulencia, o sea la producción de turbulencia}$$

$$\left[ \rho \bar{u}_i \chi_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} \bar{u}_i \right] = \text{Trabajo hecho por las fuerzas de cuerpo y de presión media sobre la superficie}$$

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \bar{u}_i \right]$  = Trabajo hecho sobre un elemento de fluido por los esfuerzos viscosos del flujo medio

$\mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  = Representa la disipación de energía en calor

La ecuación de energía cinética de la turbulencia ec (2.12) si se desarrolla el laplaciano  $\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j \rho \frac{q'^2}{2}} \right) &= \left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{P' u'_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) u'_i} \right] &- \left[ \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ecuación de energía cinética de la turbulencia en donde:

$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right)$  = Cambio local de energía cinética de la turbulencia

$\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{q}'^2}{2} \right)$  = Convección de la energía cinética de la turbulencia debido a las fluctuaciones de velocidad (difusión)

$-\left( \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$  = Producción de energía de la turbulencia a causa de una transferencia de energía del flujo medio

$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{P' u'_i} \right)$  = Trabajo hecho sobre un elemento de fluido por las fluctuaciones de presión y velocidad

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) u'_i} \right]$  = Trabajo hecho por los esfuerzos viscosos correspondientes a las fluctuaciones de velocidad

$\overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$  = Disipación resultante de las fluctuaciones de velocidad

## II.5 FLUJO TURBULENTO ENTRE PLACAS PARALELAS

Se considera, como un ejemplo de aplicación de las ecuaciones de Reynolds, el movimiento permanente y uniforme en la dirección  $x$ , entre placas paralelas horizontales.

En estas condiciones.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial (v)}{\partial x} = 0, \quad \bar{v} = 0$$

Las ecuaciones de Reynolds en las direcciones  $x$  y  $y$  resultan,

$$\begin{aligned} 0 &= \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ 0 &= \rho g_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

de la segunda ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = 0$$

integrando,

$$(\bar{p} + \gamma h) + \rho \overline{v'^2} = C$$

Por lo tanto, la distribución de la presión estática en planos perpendiculares a la dirección del flujo difiere de la hidrostática en  $\rho \overline{v'^2}$ .

Esta cantidad es pequeña, pero puede ser importante en casos especiales.

En la primera de las ecuaciones (2.5.1), si se desprecia la contribución de la turbulencia al esfuerzo tangencial, se tendrá,

$$\frac{\partial (\bar{p} + \gamma h)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

donde  $\partial (\bar{p} + \gamma h)/x$  es independiente de  $y$ . Integrando con respecto a  $y$ , se tiene:

$$\frac{d(\bar{P} + \gamma h)}{\partial x} y = -\rho \overline{u'v'} = \tau$$

La cual es una relación lineal para el esfuerzo tangencial. Así para flujos uniformes, laminares y turbulentos, la distribución del esfuerzo tangencial es lineal, con respecto a la distancia desde la pared.

### III. ESTABILIDAD DE FLUJOS

#### III.1 Antecedentes

La existencia de dos tipos de movimiento del flujo laminar y turbulento fue observada inicialmente por Hagen (1839), quién utilizó tubos de vidrio para poder observar las partículas suspendidas en un chorro en el que aceleraba la transición calentando el agua.

En la publicación de sus experimentos Hagen dice "Las observaciones especiales que hice utilizando tubos de vidrio mostraron muy claramente ambos tipos de movimientos. Cuando introduje partículas de aserrín en el agua, noté que a bajas presiones estas se movían solamente en dirección axial, mientras que a altas presiones se aceleraban de un lado a otro moviéndose en forma de remolino" [6].

En 1883 O. Reynolds realizó sus famosos experimentos, inyectando tinta en el agua que fluía a través de un tubo de vidrio. La corriente de tinta seguía una trayectoria recta si el gasto era pequeño, siendo el movimiento en líneas de corriente paralelas o láminas. Al incrementarse el gasto por encima de un cierto valor, la corriente de tinta se rompía y se mezclaba en la sección transversal del tubo.

Reynolds presentó un parámetro adimensional que lleva su nombre; Número de Reynolds, como un criterio para determinar el régimen o tipo de movimiento de los fluidos, este parámetro relaciona las fuerzas de inercia con las viscosas:

$$R = \frac{VD}{\nu}$$

donde: V-veloc. característica

D-Long. característica

$\nu$ -viscosidad cinemática

En el caso de tubos estableció que la transición a turbulencia ocurre para un número de Reynolds crítico de aproximadamente 2300. Por lo que si un flujo



tiene un  $R > R_{crit}$ . se espera sea turbulento.

Por otro lado de los estudios realizados sobre la transición se desprende que ésta se origina debido a la presencia de perturbaciones en el flujo, que dan por resultado fuertes gradientes de velocidad. Por lo tanto el flujo puede permanecer laminar más allá del número de Reynolds crítico, si las condiciones del flujo se aislan de toda perturbación.

Las investigaciones sobre estabilidad de flujos se basan en la suposición de que éstos, inicialmente laminares, son afectados por pequeñas perturbaciones tales como las causadas a la entrada de un tubo.

El problema principal en estabilidad de flujos es como se comportarán las perturbaciones al transcurrir el tiempo. Si las perturbaciones decaen, el flujo es estable y permanecerá siendo laminar, si la perturbación persiste o se amplifica, el flujo es inestable de manera que podrá ajustarse a un nuevo estado de flujo, o transformarse en turbulento.

Se cree que la turbulencia es el resultado de una pérdida sucesiva de estabilidad de flujos con una estructura más simple, como son los laminares, a flujos de estructura complicada.

En el estudio de la estabilidad de flujos, no existe una teoría matemática completa debido a que el fenómeno de la transición es conocido parcialmente de una manera cualitativa. Es por esta razón que los estudios de estabilidad generalmente se refieren a tipos especiales de flujos, que satisfagan las ecuaciones de Navier-Stokes, las condiciones de frontera dadas; que puedan resolverse analíticamente y a su vez puedan comprobarse experimentalmente.

A continuación se verán dos métodos para el análisis de estabilidad de un flujo; estos son el método de energía, el cual solo se verá brevemente, y el método de las pequeñas perturbaciones, siendo éste método el de uso más común en la determinación de la estabilidad de un flujo.

### III. 2 METODO DE ENERGIA

En este método, se analiza la transferencia de energía que ocurre entre el flujo básico del que se desea conocer la estabilidad y una perturbación superpuesta a éste.

El método consiste en adicionar al flujo básico un patrón de perturbaciones en un instante dado, y ver si la energía asociada a éstas se incrementa o decrece después de un cierto tiempo. A menos que el flujo sea estable con respecto a todas las perturbaciones, no se puede establecer ninguna conclusión. A este análisis de estabilidad se le llama global y en él las perturbaciones pueden ser de cualquier tamaño y forma.

En el análisis es muy importante el mecanismo que produce la transferencia de energía del flujo básico a las perturbaciones. Se cree que el mecanismo que lo produce se deba a un cambio de fase de dos de las componentes de la velocidad de la oscilación por las fuerzas viscosas en las paredes. Esto produce esfuerzos que convierten energía del flujo básico a las perturbaciones.

Este método se basa en el análisis de la ecuación de la energía para un flujo perturbado, y estas relaciones son usadas comúnmente en el estudio de la turbulencia completamente desarrollada.

El mecanismo de transformación, en el caso de perturbaciones bidimensionales periódicas en un flujo entre placas paralelas, se puede describir por medio de una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho M - \mu N \quad 3.1$$

en donde:

$$E = \iint \rho/2 (u'^2 + v'^2) \quad dx \quad dy \quad 3.2$$

donde E representa el porcentaje de incremento de la energía cinética de las perturbaciones.

$$\rho M = - \rho \iint u'v' \quad \frac{d\bar{u}}{dy} \quad dx \quad dy \quad 3.3$$

$\rho M$  es la conversión de energía del flujo básico a las perturbaciones

$$\mu N = \mu \iint \zeta'^2 dx dy \quad 3.4$$

$$\zeta = v'x - u'y$$

$\mu N$  representa la disipación viscosa.

En las ecuaciones anteriores  $u'$  y  $v'$  son las velocidades de la perturbación y  $\bar{u}$  la velocidad del flujo básico.

La magnitud relativa de los términos del lado derecho de 3.1 determina cuando se incrementa o decrece la energía de la perturbación. Su relación es:

$$\frac{\rho M}{\mu N} = R \frac{M'}{N'} \quad 3.5$$

donde  $R$  - es el número de Reynolds,  $M'$  y  $N'$  son formas adimensionales de  $M$  y  $N$ .

Las perturbaciones decaerán si  $RM'/N' < 1$ , esto es si el número de Reynolds es menor que la relación  $N'/M'$ .

El valor mínimo de  $N'/M'$  da un número de Reynolds crítico; para  $R$  menores que este valor, el movimiento es completamente estable. Un análisis más detallado se puede ver en [8,13].

### III. 3 ANALISIS LINEAL DE ESTABILIDAD

Consiste en superponer al flujo estable original una perturbación muy pequeña; el crecimiento o decaimiento de ésta es el criterio usado para clasificarlo. El tratamiento del problema de estabilidad por este método implica que para las pequeñas perturbaciones consideradas, las ecuaciones de movimiento sean lineales. Por lo tanto se supone que las fluctuaciones de velocidad superpuestas al flujo sean pequeñas, en el sentido de que los términos cuadráticos de las componentes de las fluctuaciones pueden despreciarse con respecto a los lineales. A este análisis se le denomina local, ya que en él solo se consideran pequeñas perturbaciones. El criterio de la teoría lineal solo puede establecer las condiciones suficientes para inestabilidad, ya que un flujo que ha sido considerado estable por la teoría lineal puede ser inestable a disturbios de mayor tamaño. En este sentido la teoría lineal y la teoría de la energía se complementan; la primera dando condiciones suficientes para inestabilidad y la segunda condiciones suficientes para estabilidad.

#### Análisis Lineal de Estabilidad de un Flujo Plano Paralelo.

En la teoría de estabilidad lineal se supone que las variables del flujo básico son afectadas por pequeñas perturbaciones. Las variables para el flujo perturbado serán igual a la suma de las correspondientes para el flujo básico, más la perturbación, y se escriben:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' & , & w &= \bar{w} + w' \\ \text{y} & P &= \bar{P} + p' \end{aligned} \qquad \qquad \qquad 3.6$$

donde  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  y  $p'$  son las características de una perturbación no permanente, muy pequeña comparada con las características correspondientes del flujo básico.

A continuación se considerará el caso de los flujos planos tales como los que se presentan en un canal con paredes paralelas, o un tubo a una cierta distancia de la sección de entrada. El flujo en la capa límite puede considerarse

como una buena aproximación al flujo paralelo, ya que la variación de la velocidad  $\bar{u}$  con respecto a  $x$  es mucho más pequeña que con respecto a  $y$ .

El flujo en este caso es bidimensional y la perturbación superpuesta también lo es.

Para simplificar el problema, es conveniente que la velocidad  $\bar{u}$  dependa solamente de  $y$  o sea  $\bar{u} = \bar{U}(y)$  mientras que las componentes  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  sean igual a cero en cualquier parte, esto es:

$$\bar{u} = \bar{U}(y) \quad , \quad \bar{v} = \bar{w} = 0 \quad 3.7$$

condiciones que se cumplen en los flujos paralelos.

Sustituyendo las ecuaciones (3.6) en las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo bidimensional incomprensible, no-permanente, en la dirección  $x$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + v' \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \nu \left[ \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \right] \quad 3.8$$

donde  $\bar{u} = u(y)$ ; entonces la ecuación anterior se simplifica:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \nu \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \right] \quad 3.9$$

El flujo básico debe satisfacer las ec de Navier-Stokes

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad 3.10$$

Y despreciando términos  $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$  en comparación con  $\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}$  resulta

$$\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad 3.11$$

Y Similarmente en dirección y:

$$\bar{y} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad 3.12$$

Las características de las perturbaciones deben cumplir con la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad 3.13$$

Se pretende obtener una solución de las ecuaciones 3.6, 3.7 y 3.8 con las condiciones de frontera  $u' = v' = 0$  en las paredes que contienen al flujo. Esto no se hace en forma directa, pues con objeto de reducir el problema a uno de una sola variable independiente, se define una función de corriente para la perturbación de la velocidad, y se sustituye tanto en las ecuaciones como en las condiciones de frontera.

#### Forma de las Perturbaciones

Se supone que toda perturbación se compone de fluctuaciones de las características del flujo base, cada una de las cuales consiste en una onda que se propaga en dirección del flujo  $x$ . Dicho movimiento ondulatorio admite un análisis de Fourier y puede expresarse como la suma de varias ondas de forma definida. Si la perturbación se representa por una función de corriente de la forma:

$$\Psi(x, y, t) = F(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad 3.14$$

Donde:  $\alpha$  es un número de onda real y está relacionado a la longitud de onda de las perturbaciones por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$$

y  $\beta$  es un número complejo.

$$\beta = \beta_r + i \beta_i$$

donde  $\beta_r$  es la frecuencia de oscilación y  $\beta_i$  determina al decaimiento o amplificación de las perturbaciones; si  $\beta_i = 0$ , las perturbaciones son amortiguadas y el flujo es estable, mientras que para  $\beta_i > 0$  aparece inestabilidad.

Es conveniente introducir una relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  luego:

$$c = \beta/\alpha = c_r + i c_i$$

donde  $c_r$  denota la velocidad de propagación de la onda en la dirección  $x$ , o velocidad de fase, mientras que  $c_i$  determina el grado de amortiguamiento o amplificación de ésta, dependiendo de su signo.

De la ec. 3.14 se obtienen las componentes de velocidad de las perturbaciones:

$$\left. \begin{aligned} u' &= - \frac{\partial \psi}{\partial y} = - F'(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v' &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \alpha F(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \end{aligned} \right\} \quad 3.15$$

Para la solución del sistema de ecuaciones 3.11, 3.12, es conveniente eliminar  $P'$ , lo que se obtiene derivando la ecuación (3.11) con respecto a "y" y la ecuación (3.12) con respecto a "x", y restando la segunda ecuación de la primera; de donde resulta una ecuación que contiene solamente las variables  $u'$  y  $v'$ , éstas se sustituyen por la función de corriente de acuerdo a 3.15, resultando la siguiente ecuación, cuya obtención puede verse con detalle en el apéndice.

$$(\bar{U} - c)(F'' - \alpha^2 F) - \bar{U}''' F = - i \frac{v}{\alpha} (F'''' - 2\alpha^2 F'' + \alpha^4 F) \quad 3.16$$

La ecuación anterior, junto con las condiciones de frontera, constituye un problema de valores característicos para el parámetro "c". Su solución da respuesta al problema de estabilidad planteado. Tomando en cuenta la forma asumida para la perturbación, se concluye que si  $c_i$  es positiva la perturbación crece

exponencialmente y si es negativa decrece exponencialmente. Cuando  $c_1 = 0$  se tiene estabilidad neutra.

Cuando se pretende calcular  $c$  es muy útil manejar la ecuación diferencial así como a las condiciones de frontera en forma adimensional. Esto permite conocer cuales son los principales parámetros adimensionales que intervienen en el problema.

La ecuación anterior puede hacerse adimensional utilizando las relaciones:

$$\bar{U}^* = \frac{\bar{U}}{U_0}$$

$$X^* = \frac{X}{L}$$

$$Y^* = \frac{Y}{L}$$

$$t^* = \frac{L}{U_0}$$

$$R = \frac{U_0 L}{\nu}$$

$$\alpha^* = \alpha$$

$$c = \frac{c^*}{U_0}$$

donde  $U_0$  Velocidad de referencia

$L$  longitud de referencia

Sustituyendo en la ecuación 3.16 y en las condiciones de frontera, se obtiene la forma adimensional del problema de valores característicos:

$$(\bar{U}^* - c^*)(F' - \alpha^{*2}F) - \bar{U}^{*''}F = -\frac{i}{\alpha^* R} (F'''' - 2\alpha^{*2}F'' + \alpha^{*4}F) \quad 3.17$$

La ec 3.17 es conocida como ec. de Orr-Sommerfeld.

El problema de estabilidad de flujos paralelos consiste en resolver la ec.

3.17, sujeta a las condiciones de frontera del tipo de flujo particular de que se trate. En el presente trabajo no se tratara el problema de valores característicos; sin embargo en Schlichting [7] se puede encontrar la solución al problema en el caso de una capa limite; en Lin [8] y Chandrasekhar [9] se puede ver algunos otros tipos de flujo, como es el caso de un flujo plano de



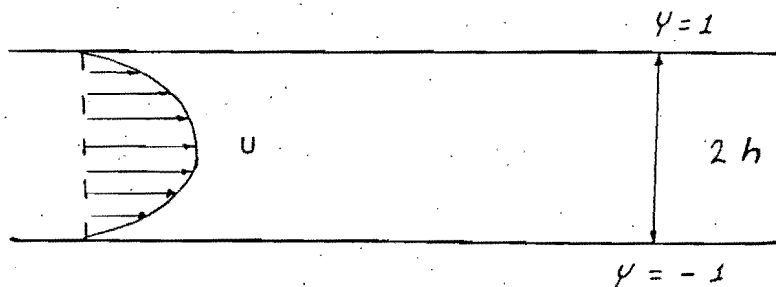
Poiseuille, flujo de Couette.

En el caso de una capa límite los parámetros de interés en la solución de la ecuación 2.14 son  $\alpha^*$ ,  $R$  y  $ci$  de donde las soluciones definen relaciones entre éstos las cuales se presentan en forma de curvas o contornos de estabilidad en un plano  $\alpha^* - R$ , como se muestra en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3. Es de importancia determinar  $R_c = R_{min}$  en la curva de estabilidad neutral ya que para  $R < R_c$  (Reynolds crítico) toda oscilación causada por perturbaciones tiende a amortiguarse y desaparecer con el tiempo, mientras que para  $R > R_c$  hay posibilidad de amplificación. Este límite de estabilidad teórico no corresponde a la transición de régimen laminar a turbulento, sino que en este límite se pueden producir perturbaciones inestables.

### III. 4 CARACTERISTICAS DE ESTABILIDAD DE ALGUNOS FLUJOS TIPICOS

#### 1. Flujo Plano de Poiseuille.

Flujo paralelo entre dos placas fijas, con gradiente de presión.



El número de Reynolds es:  $R = \frac{U h}{\nu}$

donde:

$U$  = velocidad máxima

$2h$  = distancia entre las placas

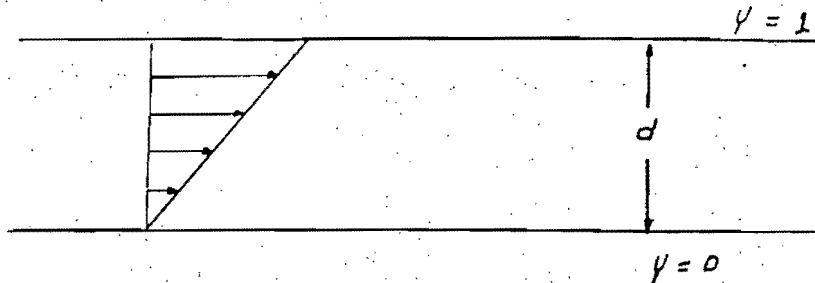
$\nu$  = viscosidad cinemática

La transición de flujo laminar a turbulento ocurre experimentalmente en un rango de  $R$  que va de 1000 a 2500 (Davies and White, Tillmann); pero la inestabilidad a pequeñas perturbaciones ocurre teórica y experimentalmente para

números de Reynolds arriba de 5 800.

## 2. Flujo Plano de Couette.

Producido por el movimiento de una de las dos placas paralelas.



El número de Reynolds es:  $R = \frac{U d}{\nu}$

donde

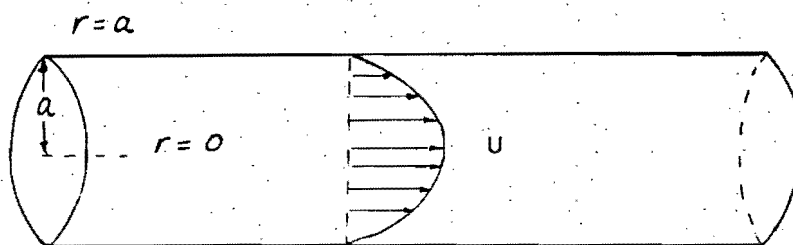
$U$  = velocidad máxima

$d$  = distancia entre placas.

La transición a turbulencia ocurre experimentalmente para números de Reynolds en el rango de 1000 a 2000 (Taylor, Reichardt). Se acepta generalmente que no ocurre inestabilidad a pequeñas perturbaciones pero esto no se ha probado rigurosamente.

## 3. Flujo de Hagen - Poiseuille.

Flujo producido por un gradiente de presiones en un tubo circular.



El número de Reynolds es:  $R = \frac{U a}{\nu}$

donde:

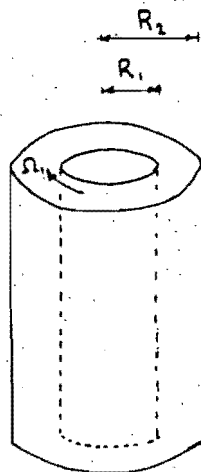
$U$  = velocidad máxima

$a$  = radio del tubo.

Si el flujo se mantiene sin perturbaciones, puede mantenerse en estado laminar experimentalmente para números de Reynolds mayores de 50,000 (Ekman, Taylor); Por otro lado, si se permite la existencia de perturbaciones de amplitud finita, la turbulencia puede ocurrir para  $R$  menores de 2 000. En este flujo, así como en el de Couette, se acepta generalmente que no ocurre inestabilidad con pequeñas perturbaciones; sin embargo, esto no se ha probado rigurosamente. [10].

#### 4. Flujo entre dos cilindros concéntricos que rotan.

En el estudio de estabilidad de flujos e inicio de turbulencia es de gran importancia el fenómeno estudiado por G.I. Taylor en un flujo de Couette entre cilindros concéntricos, debido a las transiciones que se presentan en éste. El flujo de Couette entre cilindros concéntricos se origina debido a la rotación de uno de los cilindros, que generalmente es el interno, mientras el externo permanece en reposo.



El número de Reynolds es

$$R = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$$

donde:

$R_1$ ,  $R_2$  son los radios del cilindro interno y externo respectivamente.

$\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  las velocidades angulares del cilindro interno y externo.

$d$  es el claro entre los cilindros  $= R_2 - R_1$

$L$  denota la altura del fluido en los cilindros.

Siendo los parámetros adimensionales de interés:

La relación de los radios  $\eta = R_1 / R_2$

La relación de aspecto

$$\Gamma = L / d$$

número de Reynolds

$$R = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$$

número de Taylor

$$T = 2R^2 (1-\eta)/(1 + \eta)$$

El flujo de Couette entre cilindros concéntricos sigue un proceso de transición característico, el cual se presenta de la siguiente manera: Cuando el número de Reynolds se incrementa hasta alcanzar un valor crítico  $R_c$  un poco menor que 100, se desarrolla una serie de vórtices toroidales, o celdas de Taylor, cuyo eje está localizado a lo largo de la circunferencia; dichos vórtices rotan en sentidos contrarios alternadamente. En la Fig 3.4 se observan los vórtices de Taylor. A la aparición de las celdas de Taylor se le conoce como primera inestabilidad, y las condiciones para que esta se produzca se obtienen con bastante aproximación por medio de la teoría propuesta por Taylor quien usó una hipótesis lineal para este propósito, en la cual considera a los cilindros de longitud infinita ( $L \rightarrow \infty$ ) y al movimiento como una perturbación arbitrariamente periódica del flujo circular de Couette.

Si se continúa incrementando el número de Reynolds hasta alcanzar cierto valor  $R_w$ , el flujo se hace inestable, siendo perturbado el patrón de celdas de Taylor por ondas circunferenciales moviéndose con una velocidad de onda definida en la dirección tangencial, las cuales producen una ondulación de las celdas. A esta inestabilidad se le llama segunda y se muestra en la Fig 3.5. Tales flujos son denominados "flujos doblemente periódicos" debido a que la estructura celular es periódica en la dirección axial, y las ondas circunferenciales son periódicas en la dirección tangencial [11].

#### - Flujos múltiplemente estables.

En base a los experimentos realizados por diferentes investigadores, se ha establecido que para valores del número de Reynolds alrededor de  $R_c$ , se pueden realizar flujos celulares, con diferente número de celdas para un mismo  $R$

y con un aparato de las mismas dimensiones [14].

Coles [11] encontró para la segunda inestabilidad, que conforme se incrementaba muy despacio la velocidad del cilindro o se disminuía, el patrón de flujo cambiaba, abruptamente, de un estado a otro al alcanzar una cierta velocidad crítica. El cambio de estado involucra un cambio en el número de celdas o en el número de ondas circunferenciales, y depende de la manera en que se llevó a cabo el experimento. Dependiendo de la secuencia que se siga al realizar el experimento es decir de la historia del experimento, se pueden lograr varios estados de flujo estable para un mismo  $R$ , con diferentes combinaciones de números de ondas circunferenciales y números de celdas. Dichos estados se producen ya sea incrementando la velocidad de rotación del cilindro interno, o disminuyéndola (Fig 3.6).

Si se incrementa  $R$  hasta valores suficientemente grandes, se observa un estado de turbulencia débil, la cual exhibe aún vestigios de la estructura celular.

#### Relación de Aspecto en Aparato de Taylor.

En la teoría de estabilidad de este tipo de flujos, se considera a los cilindros de longitud infinita  $\Gamma = \infty$ . Sin embargo, actualmente se cree que la incipiente de movimiento celular se desprende de los extremos de los cilindros; por lo tanto los estudios más recientes se han enfocado a establecer el efecto que produce el realizar el experimento de Taylor con aparatos de longitud finita y con diferentes relaciones de aspecto  $\Gamma = L/d$ .

En el caso de la primera inestabilidad  $R_c(\eta, \Gamma)$  Cole [12] mostró experimentalmente, para rangos de relación entre radios de  $\eta = 0.894$  a  $0.954$  que  $R_c$  no es sensible a  $\Gamma$  para  $\Gamma > 8$ . En este caso,  $R_c$  depende fuertemente de  $\eta$ . El flujo de los vórtices de Taylor fué calculado por Davey [15] para algunos valores de  $\eta$  y para  $R$  a  $R_c$  pequeños.

En la segunda inestabilidad  $R_w(\eta, \Gamma)$  Cole [12] mostró que, para valores de  $\eta$  cercanos a 1, las predicciones teóricas de  $R_w$  son realistas solo cuando  $\Gamma > 40$  y pueden esperarse diferencias de 15% con la teoría si  $\Gamma < 20$ .

También encontró que  $R_w/R_c = 1.24$  para  $\eta = 0.954$  y  $\Gamma = 20$ ; dicha relación de crece cuando se tienen valores grandes de  $\Gamma$ .

El primer trabajo sobre inestabilidad de los vórtices de Taylor fue el de Davey, Di Prima y Stuart en 1968. Ellos derivaron un conjunto de ecuaciones no lineales para las amplitudes de las perturbaciones axisimétricas (a los vórtices o celdas) y no axisimétricas (a las ondas circunferenciales) para el flujo básico de Couette.

T.B. Benjamin [14] realizó una serie de experimentos con el fin de encontrar  $R_w$  en función de  $\Gamma$ . Los experimentos consistieron en elevar gradualmente la velocidad hasta que las ondas circunferenciales aparecieran, encontrando el valor de  $R_w$ . Después de que las ondas habían alcanzado una amplitud constante, se empezó a disminuir la velocidad, y cuando las ondas desaparecieron se obtuvo una velocidad crítica y por tanto un  $R'_w$ . En la mayoría de los casos, se observó una histéresis bien definida. En la fig. 3.7 se muestra una gráfica de  $\Gamma$  contra  $R_w$ .

La característica más importante de las curvas experimentales de  $R_w$  contra  $\Gamma$  es que estas presentan picos muy pronunciados, siendo el máximo  $R_w$  alrededor de 15 veces el valor de  $R_w$  estimado sobre unas bases similares e ignorando los efectos de los extremos de los cilindros.

Otra propiedad importante es que las ondas, en ciertos rangos de  $\Gamma$ , perturbaban solo una parte del flujo celular, y en el resto no se percibían inestabilidades.

Mientras tales observaciones indican que puede aparecer una gran variedad de fenómenos ondulatorios en el límite de estabilidad para flujo celular, y que

este límite es muy sensible a los efectos de los extremos de los cilindros. se encontró que la velocidad angular adimensional de las ondas circunferenciales fue más o menos independiente de  $R$  y de  $m$  (número de onda), teniendo un valor medio 0.32.

Dicho valor es muy cercano al de 0.37 encontrado por Coles para mediciones realizadas en un aparato con un  $\Gamma$  más grande.

CONCLUSIONES. La teoría de estabilidad de flujos no se ha desarrollado de una manera completa; esto se debe a que no se ha entendido el fenómeno físico. En la actualidad se ha dado más importancia al entendimiento del proceso por el cual se hace inestable un flujo; con este fin se han llevado a cabo numeros trabajos de investigación, en los que una técnica muy común es la de visualización. En el capítulo siguiente se revisarán algunos de los trabajos más importantes en los que se estudia la transición del flujo laminar a turbulento.

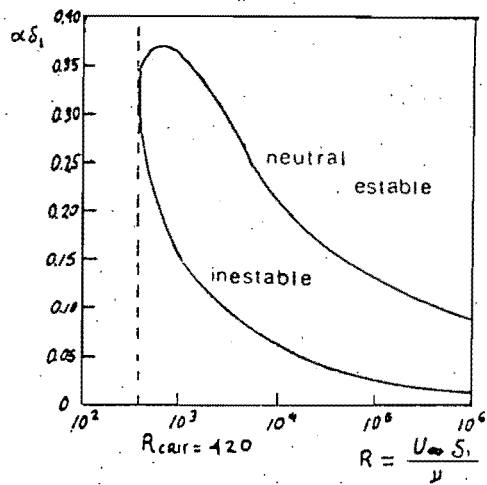


Fig. 3.1 Curva de estabilidad neutral para perturbaciones de longitud de onda en funcion del numero de Reynolds en una capa limite sobre una placa plana (perfil de Blasius)

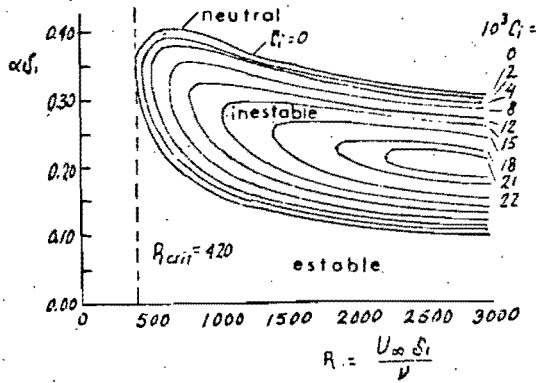


Fig. 3.2 Curvas de amplificacion para una capa limite sobre una placa plana, de acuerdo con S. F. Shen

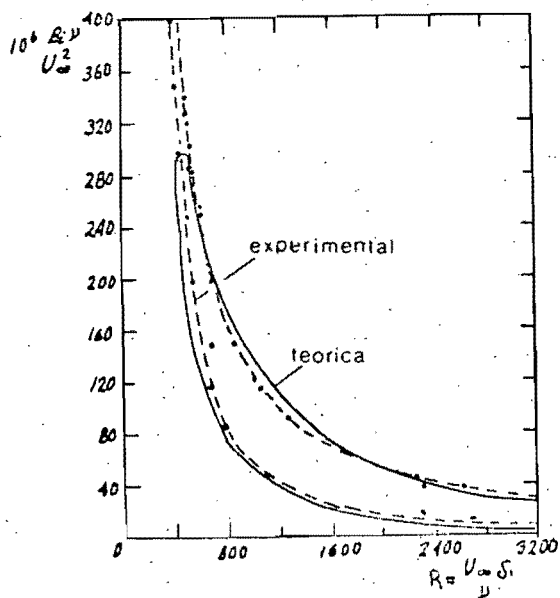


Fig. 3.3 Curvas de estabilidad neutral para una capa limite sobre una placa plana. Curva experimental por Schubauer y Skramstad (---). Curva teorica por Tollmien (—)



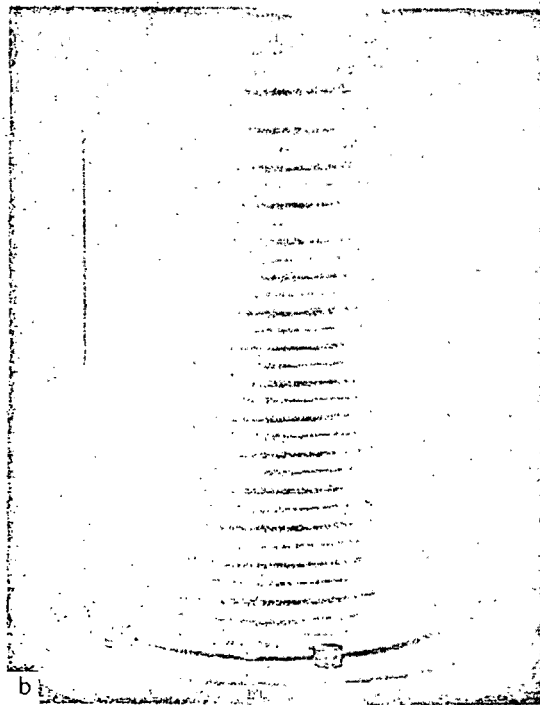


Fig. 3.4 Flujo laminar de Couette singularmente periodico;  
 $R_1/R_2 = 1.135$  ,  $\Omega_1 = 8090$  ,  $\Omega_2 = 7350$

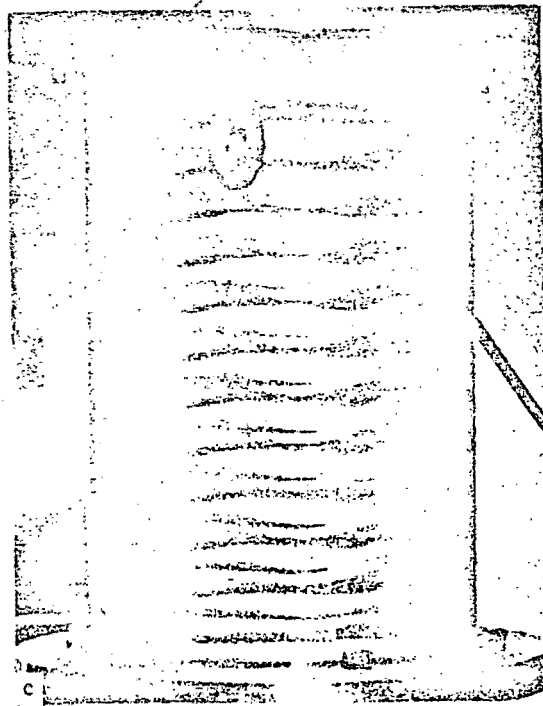


Fig. 3.5 Flujo laminar de Couette doblemente periodico  
 $R_1/R_2 = 1.135$  ;  $\Omega_1 = 1800$  ,  $\Omega_2 = 0$

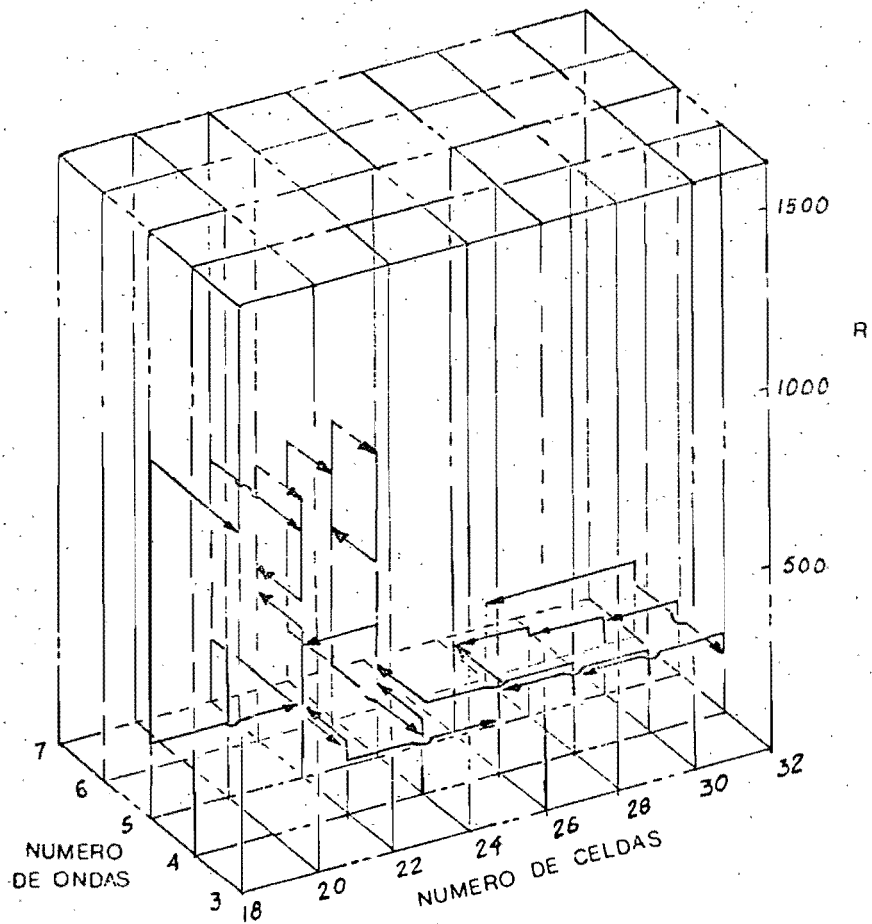


Fig. 3.6 Estados de transición en flujo doblemente periódico de Couette con el cilindro externo en reposo ( $r_0/r_1 = 1.144$ )

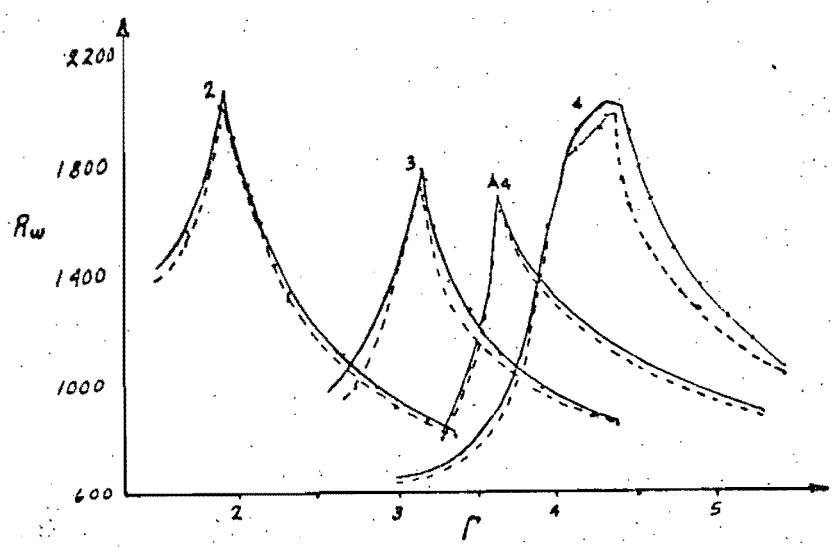


Fig. 3.7 Límite superior de estabilidad e histeresis

## IV TRANSICION

El estudio de la transición de flujo laminar a turbulento ha sido el objeto de interés de numerosas investigaciones, en las que se pretende entender el mecanismo por el que se produce la turbulencia.

En el presente capítulo se tratarán algunos de los trabajos sobre la transición. Sin embargo, debido a que el origen de turbulencia se asocia con los flujos cercanos a paredes sólidas, se dará una breve introducción sobre las características de este tipo de escurrimientos, en particular sobre el concepto de capa límite y las leyes de distribución de velocidades en ésta.

### IV.1 TURBULENCIA DE PARED

La turbulencia de pared se genera en el flujo, debido a la presencia de esfuerzos tangenciales producidos por la existencia de una frontera sólida. Se puede clasificar en dos grupos: un grupo comprende los flujos alrededor de cuerpos rígidos, el segundo grupo comprende los flujos a través de un espacio limitado por paredes sólidas.

Dos casos típicos de estos grupos son: el flujo sobre una placa plana y el flujo a través de un tubo de sección circular constante. La diferencia entre estos grupos es que, en el primero, la turbulencia de pared se extiende incrementando su espesor a lo largo del cuerpo en la dirección aguas abajo, mientras que en el segundo, ésta permanece restringida por las paredes.

Al primer grupo de flujos se les llama usualmente "flujos de capa límite" ya que los efectos de la turbulencia se confina en una capa delgada a lo largo de la superficie del cuerpo. Esta capa se incrementa en espesor en dirección aguas abajo; fuera de esta capa se tiene la corriente libre.

## Capa Límite

Los fluidos de mayor importancia para el hombre son el agua y el aire, ambos se caracterizan por tener una viscosidad pequeña por lo que en el análisis estos se consideran como fluidos no viscosos lo cual es aceptable para algunos usos prácticos. Sin embargo el flujo de un fluido viscoso (real) en una región muy cercana a la pared es bastante diferente del de un fluido ideal, no obstante que la viscosidad sea tan pequeña.

Prandtl en 1903 introdujo la noción de capa límite como la de una capa de fluido delgada adyacente a la superficie sólida en la que son dominantes los esfuerzos viscosos, y donde se pueden aplicar formas aproximadas de las ecuaciones de movimiento; fuera de esta capa los efectos de la viscosidad son despreciables y el análisis del flujo es potencial.

## Características de la capa límite

Considerese un fluido en movimiento en contacto con una frontera sólida fig 4.1. El esfuerzo tangencial retarda al fluido, estableciéndose una zona llamada capa límite. El flujo en la capa límite es inicialmente laminar (capa límite laminar); si el número de Reynolds excede un cierto valor crítico el flujo se torna inestable y puede hacerse turbulento aguas abajo.

Conforme se incrementa la distancia aguas abajo la acción retardadora de la placa se extiende hacia afuera de la pared, aumentando el espesor de la capa límite. La turbulencia engloba a la capa límite laminar original, e invade la corriente libre mezclando más fluido y formando una capa límite más gruesa. Al mismo tiempo aumenta la velocidad media inmediata a la frontera, resultando un perfil de velocidad más uniforme que el producido en una capa límite laminar, como se puede observar en la fig 4.2 .

## Espesores de la capa límite

La velocidad en la capa límite es cero en el punto de contacto con la frontera sólida; aproximándose asintóticamente a la velocidad de la corriente libre.

Fuera de la capa límite el gradiente de velocidad es prácticamente cero por lo que también lo es el esfuerzo cortante y los efectos viscosos; el campo de velocidades medias es casi equivalente al de un flujo potencial. Aunque existe una variación suave y continua de la velocidad media, de la pared hacia el interior del flujo no turbulento, la frontera instantánea entre los flujos turbulento y no turbulento es irregular cambiando continuamente de manera que no existe un límite bien definido del espesor de la capa límite; ya que el fluido externo no turbulento en un instante dado puede penetrar bastante dentro de la capa límite y a su vez las turbulencias de la capa límite pueden extenderse a la región externa a ella.

Si se miden las velocidades instantáneas en la frontera de la capa límite, se encuentran registros de condiciones de turbulencia y no turbulencia, de donde resulta el concepto de intermitencia; siendo el factor de intermitencia  $\gamma$ , la relación del tiempo en el que el flujo es turbulento y el tiempo en el que no lo es.

Algunos espesores convencionales de la capa límite de uso más común son:

1. Espesor de la capa límite  $\delta$ , definido como la distancia en la que la velocidad alcanza un valor de 99% del de la velocidad de la corriente libre  $U$ .

2. Espesor de desplazamiento  $\delta^*$ .

El gradiente de velocidad en la capa límite causa una "disminución" o "defecto" de la cantidad de masa que fluye en la zona adyacente a la capa límite.

El espesor de desplazamiento representa el espesor de una capa de la corriente libre cuyo porcentaje de flujo de masa es igual a esta deficiencia.

Por continuidad, este defecto es equivalente a desplazar las líneas de corriente hacia afuera de la capa límite, a una distancia finita  $\delta_D$  definida por:

$$\rho \delta_D U_o = \int_0^{\infty} \rho (U_o - u) dy$$

$$\delta_D = \int_0^{\infty} (1 - u/U_o) dy$$

3. Espesor de la Cantidad de Movimiento. La disminución del gasto dentro de  $\delta$  da origen a una reducción de la cantidad de movimiento de la masa que fluye por unidad de tiempo. El espesor de la cantidad de movimiento se define como el espesor de una capa de fluido de la corriente libre; para la cual la cantidad de movimiento es igual a la reducción causada por el perfil de velocidad. Este espesor está definido por:

$$\rho \delta_M U_o^2 = \int_0^{\infty} \rho u (U_o - u) dy$$

$$\delta_M = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_o} (1 - \frac{u}{U_o}) dy$$

Dichos espesores se usan generalmente como longitudes características en el número de Reynolds.

#### IV.2 DISTRIBUCION DE VELOCIDAD EN LAS DIFERENTES REGIONES DE LA CAPA LIMITE

En la capa límite turbulenta se pueden distinguir dos regiones principalmente; una región adyacente a la pared, en la que el flujo está afectado directamente por la condición de frontera. Esta condición se expresa por el esfuerzo cortante en la pared, en el caso de una pared lisa, o por la rugosidad de la pared si la rugosidad es bastante pronunciada. A esta región se le denomina como "región de la pared" o región interna de la capa límite. Más allá de la pared existe otra región afectada solo indirectamente por los es-

fuerzos cortantes de la pared. Esta segunda región es denominada región "externa", pero en el caso de flujo en tubos o canales se refiere a ella como región del "núcleo" [1]

La variación de la velocidad media en la región de la pared puede determinarse por medio de análisis dimensional de la manera siguiente.

La velocidad  $\bar{u}$  depende de la distancia  $y$  a la pared, del esfuerzo cortante promedio en la pared  $\bar{\tau}_0$ , de la densidad del fluido  $\rho$ , de la viscosidad  $\mu$ :

$$\bar{u} = f(y, \tau_0, \rho, \mu)$$

Aplicando el teorema de Buckingham, se infiere que esta ecuación tiene que ser equivalente a una relación entre dos variables adimensionales.

Si se introduce la velocidad de fricción

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

la relación adimensional será

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f\left(y \frac{u_\tau}{\nu}\right)$$

comunmente expresada como

$$u^+ = f(y^+) \quad 4.1$$

En donde:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

Muy cerca de la pared existe una capa bastante delgada donde el flujo es predominantemente viscoso, por lo que se le llama subcapa viscosa. En esta capa la velocidad es  $\bar{u} \equiv u$  y el gradiente de velocidad  $\partial u / \partial y$  es casi constante, de donde se supone que el esfuerzo cortante es constante,

expresado como

$$\tau_0 = \mu \bar{u}' / y'$$

lo que puede escribirse como

$$u^+ = y^+$$

El rango de transición o "buffer layer" es la capa que se encuentra entre la subcapa viscosa y la turbulencia completamente desarrollada; en esta región son de importancia tanto los efectos viscosos como los inerciales, lo que hace difícil encontrar teóricamente una expresión simple para la ec 4.1.

La subcapa viscosa y la capa de transición son muy delgadas comparadas con el espesor local de la capa límite. El conjunto de estas dos regiones usualmente conocidas como región de la pared alcanza aproximadamente un 15% del espesor de la capa límite. En la región externa los efectos viscosos dejan de tener importancia. La distribución de velocidades sigue una ley logarítmica derivada de la ecuación:

$$\tau = \rho \ell^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

la cual depende del modelo de longitud de mezcla de Prandtl, en donde  $\ell = Ky$  y  $\tau$  es el esfuerzo cortante en la pared, constante. La ecuación anterior se integra, resultando

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C$$

En donde generalmente  $K$  tiene un valor de 0.4 y  $C = 5.5$ .

En la región interna de la capa límite, los valores empíricos obtenidos por Clauser [16] para las constantes  $K$  y  $C$  son:  $K = 0.41$  y  $C = 4.9$ , los cuales son válidos para aproximadamente  $y/\delta = 0.15$ .

En la fig 4.3 se presentan las diferentes leyes de distribución de ve



locidades para cada región de la capa límite.

#### IV.3 TRANSICION EN LA CAPA LIMITE

Transición en una capa límite sobre una placa.

De los estudios realizados teórica y experimentalmente sobre la transición de una capa límite laminar; particularmente de aquellos realizados en la región de la subcapa laminar y la capa de transición (buffer layer) en una capa límite turbulenta completamente desarrollada, se ha llegado a la conclusión de que existe una gran similitud en muchos aspectos entre el mecanismo que produce la transición y la generación de turbulencia en flujos cercanos a una pared.

En el estudio de la transición destacan los trabajos realizados por Schubauer [17, 20], Schubauer y Klebanoff [8] y el de Klebanoff Tidstrom y Sargent [19].

En el trabajo de Schubauer [17] el primer paso fué una exploración de la región de transición, tratando de encontrar el punto en el cual el flujo cambiaba de laminar a turbulento. La investigación se realizó en un túnel de viento, usando una placa de aluminio de 30 cm de largo.

Para registrar velocidades, se usó la técnica de anemómetro de hilo caliente.

Los resultados más importantes en este trabajo son: No se observó un punto de transición sino una zona de transición en la que aparecen el flujo laminar y el turbulento alternativamente. Los registros de las fluctuaciones de velocidad de la región de transición se identifican con los obtenidos por el paso de una mancha (spot) de turbulencia. En la fig 4.4 se presentan los registros para la zona de transición y para un spot.

De lo anterior se desprende que la turbulencia inicialmente aparece como manchas de turbulencia en crecimiento. El origen de las manchas de turbulencia se relacionó con la amplificación de ondas.

Con objeto de examinar el proceso de amplificación de las ondas y su rompimiento en turbulencia, Schubauer y Skramstad desarrollaron la técnica de "la banda vibrante" por medio de la cual se generan ondas de frecuencia y longitud controladas.

La técnica consiste en hacer pasar una corriente eléctrica a través de una banda metálica colocada muy cerca de la pared y formar un campo magnético por medio de electroimanes en el lado opuesto de la pared. Alternando la corriente en la banda, se consigue que vibre. El diseño se muestra en la fig 4.5 .

Schubauer [20] y Klebanoff y Tidstrom [19] observaron que las perturbaciones introducidas (ondas de Tollmien-Schlichting) no permanecían bidimensionales, sino que mostraban variaciones en la dirección transversal, en donde la intensidad de la componente de la velocidad mostró una variación casi periódica en la intensidad, como se puede ver en la fig 4.6; en la cual se observan los picos y valles de las ondas ocupando posiciones fijas formando avenidas de alta y baja intensidad. El rompimiento de las ondas ocurrió solamente en los picos de éstas como se aprecia en el oscilograma de la fig 4.6 .

Klebanoff [19] modificó la técnica de la banda vibrante tratando de controlar la variación de la amplitud de onda de la perturbación en la dirección transversal; para esto pegó cinta de papel celofán en la pared bajo la banda vibrante, dejando huecos con un espaciamiento igual al tramo de cinta pegado.

De los trabajos analizados, se deduce que existe una evolución progresiva de eventos, por medio de la cual las ondas bidimensionales de Tollmien-Schlichting se desarrollan formando turbulencia. Dicha evolución comprende tres estados de desarrollo: un primer estado que es gobernado por las teorías de estabilidad lineal de las ondas bidimensionales, un segundo estado en el que se observan fuertes efectos tridimensionales y un tercer estado en donde aparecen las manchas turbulentas.

En la fig 4.7 se observa la intensidad de las fluctuaciones para picos y valles, donde los puntos A, B, C y D denotan las diferentes posiciones aguas abajo en las que se hicieron mediciones; el punto A de esta figura corresponde al punto hasta donde finaliza el primer estado y el punto D corresponde al rompimiento. Es evidente que la variación transversal, así como el desarrollo de la onda depende, marcadamente de la distancia a la pared.

De este trabajo se concluye que:

- a) Existe tridimensionalidad en las ondas por la diferencia en intensidad entre picos y valles
- b) Las diferencias de intensidad entre picos y valles se incrementan al transcurrir el tiempo, conforme se acerca el rompimiento de las ondas
- c) El desarrollo de la onda depende marcadamente de la distancia a la pared
- d) Del estudio de perfiles de velocidad, principalmente de la distribución de la componente transversal de la velocidad media  $w$ , obtenida a una distancia de la pared a  $0.11 \delta$ , comparadas con las obtenidas a una distancia  $0.31 \delta$ , se nota que a los lados de un pico se exhibe un máximo cuando  $y = 0.3 \delta$ , mientras que un mínimo para  $y = 0.11 \delta$  (ver fig 4.8).

De lo anterior se concluye que la tridimensionalidad se debe a vórtices longitudinales rotando en sentido horario por un lado del pico y en sentido antihorario por otro lado.

El proceso de colapso o rompimiento se caracteriza por intensas fluctuaciones en la dirección de la velocidad más baja que ocurra para cada ciclo de la onda primaria, y la amplitud de estas fluctuaciones alcanza a ser del orden de 40% de la velocidad de la corriente libre.

El rompimiento de las ondas tridimensionales en turbulencia resulta como consecuencia de una inestabilidad; dicha inestabilidad involucra la generación de vórtices en forma de horquilla, y es similar a la

inestabilidad inflexional (dicha inestabilidad y ocurre cuando se tiene un punto de inflexión en el perfil de velocidades).

- Transición en la capa límite de un cohete

Knapp [21] realizó un estudio de la transición en la capa límite que se produce en un cohete cilíndrico. El estudio de Knapp comprende dos casos estos son:

La transición natural para un flujo sin gradiente de presión y la transición en un flujo con un gradiente de presión.

a) El proceso de transición natural sin gradiente de presiones es de la siguiente manera:

Existe una región  $R_1$  donde se forma un conjunto de ondas bidimensionales de Tollmien-Schlichting; un poco más abajo una región  $R_2$  donde las ondas se ondulan haciéndose tridimensionales.

La región  $R_3$  corresponde a la formación de vórtices en forma de punta de flecha.

En la región  $R_4$  los vórtices se rompen en turbulencia, después de este rompimiento se inicia de nuevo el ciclo de manera que la región  $R_{1-4}$  corresponderá de nuevo a una zona de flujo laminar.

En la Fig 4.9 se observan las zonas citadas en el párrafo anterior.

Se puede decir que la transición está compuesta por una serie de eventos que ocurren periódicamente. A la ocurrencia de este ciclo se le llama frecuencia de intermitencia, en donde la intermitencia implica que las regiones definidas no son fijas en el cilindro.

b) La transición natural en un gradiente de presión adverso.

En este caso las regiones aparecieron más arriba en el cilindro, y el fenómeno fue exagerado, así que todas las regiones fueron visibles más claramente.

El proceso de transición fue similar al observado sin gradiente de presión, excepto que: a) la formación y rompimiento de las ondas ocurrió con mayor frecuencia, de manera que parecía un proceso continuo b) la forma de los vórtices en punta de flecha de la región  $R_3$  fue diferente. Debido a que existe un gradiente de presión, los vórtices en punta de flecha no están sujetos a fuerzas cortantes como las que se tienen en un flujo sin gradiente de presión; por lo tanto ahora estos aparecen con la punta redondeada, la cual se separa formando un vórtice anular cuando ocurre el rompimiento.

En la Fig 4.10 se observa el proceso de transición para un flujo con un gradiente de presión adverso.

Debido a que la vorticidad se intensifica particularmente en las estructuras de punta redondeada; las componentes de la velocidad  $u_1$  y  $u_2$  se incrementan en la región cercana a la punta, resultando una deformación del perfil de velocidades en la capa límite, y consecuentemente un intenso cortante.

La deformación del perfil de velocidades puede verse en la Fig 4.11, la cual muestra algunas fotografías obtenidas por Hama y Nutant en una capa límite producida en un flujo de agua, en donde se usó una técnica de visualización de burbujas de hidrógeno (esta técnica se explicará con más detalle en el capítulo VI). En estas fotografías cada curva indica la posición de las burbujas generadas al mismo tiempo por el alambre que las produce.

En la Fig 4.11 se observa que las distribuciones de velocidad muestran fuertes cambios; dichos cambios se asocian a capas cortantes las cuales son altamente inestables, de donde se deduce el rompimiento de las estructuras vorticosas en manchas de turbulencia.

El concepto de manchas de turbulencia originadas aleatoriamente en una capa límite en transición se debe a Emmons (1951). El observó que una perturbación se desarrolla tanto en el sentido de la corriente como en el sentido

transversal, dando origen a una mancha de turbulencia.

Emmons, de acuerdo a sus observaciones, concluyó que las manchas generadas aleatoriamente crecen uniformemente, actuando independiente una de otra conforme son arrastradas aguas abajo, continuando un rompimiento de la capa límite en turbulencia.

Elder [22] investigó las condiciones requeridas para el rompimiento turbulento y el grado de interacción entre manchas turbulentas adyacentes, indicando que el rompimiento depende de las condiciones locales, siendo esencialmente independiente del número de Reynolds y del espesor de la capa límite, y que el número de Reynolds es solo un indicador de la amplificación de disturbios naturales más que un criterio para la existencia de turbulencia.

El observó la interacción entre dos manchas de turbulencia generadas artificialmente, las cuales se desplazaban una junto a la otra encontrando que no había un crecimiento notable de una de las manchas debido a la presencia de la otra; lo cual fue un descubrimiento muy significativo en vista de que se sugiere que los rompimientos, o bursts, en una capa límite turbulenta son análogos a las manchas de turbulencia (Offen & Kline [23]).

La forma de las manchas de turbulencia, así como su velocidad de propagación aguas abajo de la corriente libre, fueron determinadas por Schubauer y Klebanoff (Fig 4.12). El hecho de que la forma de las manchas de turbulencia parece ser similar universalmente, indica la existencia de un alto grado de orden en las mismas.

- Transición en un tubo.

Sobre el proceso de transición en tubos son de interés los experimentos llamados a cabo por Lindgren [24] y los de Wygnanski y Champagne [25].

Lindgren usó en sus experimentos dos tubos rectos transparentes, con diámetro

interior de 6mm y 23.7 mm respectivamente. En el caso del tubo pequeño, para perturbar el flujo usó un pequeño disco perpendicular al eje del tubo, colocado a una distancia variable desde la entrada. Para el otro tubo, usaba una entrada con una rendija que variaba de tamaño. Usó como fluido agua, adicionando bentonita de 0.1 a 1 por ciento.

Lindgren incrementó gradualmente el  $R_{ed}$  ( $R_{ed} = \frac{v d}{\nu}$ ) observando los siguientes fenómenos: Cuando  $R_{ed} < 200$ , cualquier perturbación inicial fue amortiguada en la sección de entrada. Para  $R_{ed} > 200$  las perturbaciones iniciales se desarrollaron en manchas turbulentas llamadas slugs sobre una distancia de 20 a 70 d. Dichos slugs mostraron tener altas frecuencias y fluctuaciones de fuerte intensidad. Cuando  $R_{ed} < (R_{ed})_{crit} = 2000$ , después de 100 a 130 d de distancia aguas abajo los slugs desaparecieron debido a un amortiguamiento.

Cuando  $R_{ed} > (R_{ed})_{crit}$  el tiempo de vida de los slugs se incrementó. Estos se hicieron cada vez más estables; al mismo tiempo la ocurrencia, y con ello la intermitencia, se incrementó.

Cuando  $R_{ed} > R_{ed\ crit} = 2400$  los slugs crecieron en longitud y, al propagarse aguas abajo, se superpusieron unos a otros de manera que prácticamente no se observó intermitencia.

Lindgren distinguió un límite inferior y otro superior del número de Reynolds crítico, sugiriendo que la transición no es un fenómeno abrupto, y por lo tanto  $2000 < (R_{ed})_{crit} < 2400$ . Esto es válido también en el caso de transición en una capa límite, en donde la transición a turbulencia tiene lugar en una cierta distancia en la cual el número de Reynolds  $u_0/\nu$  se incrementa.

Cuando  $R_{ed} > 2400$ , los slugs incrementan su longitud tomando una forma de flecha, con una velocidad de propagación del frente más alta que la velocidad de la parte posterior de estos.

De las observaciones de esta investigación se aclara del fenómeno de los slugs: La turbulencia se genera en la pared. Esta es movida por convección con una velocidad mucho mayor a la media local. Al mismo tiempo ocurre un transporte de turbulencia al centro del tubo, mientras que hay un decaimiento de los vórtices pequeños. Probablemente debido a las fluctuaciones de presión de la turbulencia generada inicialmente en la entrada, las perturbaciones son inducidas a la pared en la parte delantera del slug. Dentro del slug, la distribución de velocidad media es consistente con la de un flujo completamente desarrollado. En el extremo posterior del slug, se introduce flujo turbulento mientras que en el frente de éste el flujo turbulento se hace laminar nuevamente, lo que hace pensar en la posibilidad de retransición a flujo laminar o relaminarización.

En la Fig. 4.13 se muestra un esquema con las características enunciadas anteriormente.

Los slugs generados por el crecimiento de pequeñas perturbaciones en la capa límite laminar fueron estudiados por Wygnanski y Champagne. Ellos usaron un tubo de aluminio de 33mm de diámetro y una longitud de 500 diámetros. En este trabajo se diferenciaron dos fenómenos que aparecen dependiendo del grado de perturbación a la entrada; el fenómeno que ocurría cuando se tenían perturbaciones grandes a la entrada se asoció al visto por Lindgren y en este trabajo se le denomina puffs y se le relaciona con un proceso de relaminarización, mientras que el segundo fenómeno, que se presenta es la transición debida a la inestabilidad de la capa límite a pequeñas perturbaciones, denominado slug se presenta para  $R_{ed} > 2700$

En la Fig. 4.14 se muestra una gráfica, en donde se observa los rangos de  $R$  y el grado de perturbación necesario para que se presenten dichos fenómenos. Algunas de las observaciones más importantes en este trabajo son:



La longitud de los slugs varía de uno a otro para un mismo  $R$ , siendo su longitud comparable con la longitud del tubo. La turbulencia en el interior del slug fué similar a la que ocurre en un flujo completamente desarrollado. Cerca de las intercaras laminar-turbulento, turbulento-laminar, los perfiles de velocidad mostraron inflexiones.

Se puede comparar el fenómeno de los slugs con el de las manchas de turbulencia en una capa límite laminar, o spots.

Las similitudes entre estos son: los slugs y los spots son de forma alargada en la dirección de la corriente, en forma de punta de flecha. Los frentes posteriores de ambos se mueven con una velocidad menor que la velocidad con que se propagan los frentes delanteros para un  $R_{ed} = 3600$  se tiene una relación  $U_T / \bar{U}_x \text{ máx} = 0.5$  y  $U_L / \bar{U}_x \text{ máx} = 0.88$  donde  $U_T$  es la velocidad de frente posterior del slug mientras que  $U_L$  es la velocidad del frente del slug, y  $\bar{U}_x \text{ máx}$  velocidad media máxima en la dirección  $x$ . Para una mancha turbulenta o spot cercano a una pared se tiene  $U_T / U_o = 0.5$  y  $U_L / U_o$ , donde  $U_o$  es la velocidad de la corriente libre. En un slug y en un spot se producen corrientes secundarias similares, debido a que se requiere una redistribución de fluido durante el paso de estado laminar a turbulento.

Sin embargo, los spots se diferencian de los slugs en que estos crecen en espesor dentro de la capa límite, y por lo tanto la velocidad media del spot no permanece constante, mientras que en el caso de los slugs, como están limitados por las fronteras, estos tienen una velocidad media constante.

#### CONCLUSIONES:

En la revisión de los trabajos anteriores sobre la transición, se ha observado en todos ellos que la transición no es un cambio brusco de un estado de flujo a otro, sino un proceso en el que ondas bidimensionales producidas por pequeñas perturbaciones en el flujo se amplifican haciéndose tridimensionales, y rompiendo finalmente en turbulencia, la cual inicialmente se presenta en forma

de manchas aisladas.

En el capítulo VI se tratarán los mecanismos propuestos por algunos investi  
gadores para la producción de turbulencia, lo cual está muy relacionado con  
lo expuesto en este capítulo.

Fig.4.1. Capa limite sobre una placa plana paralela al flujo

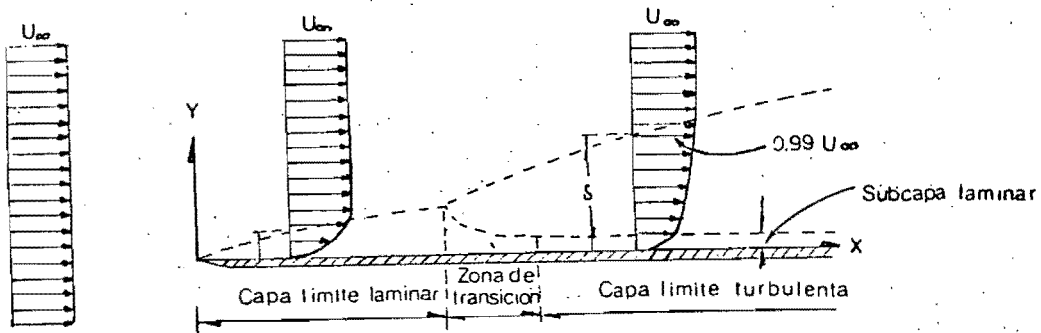
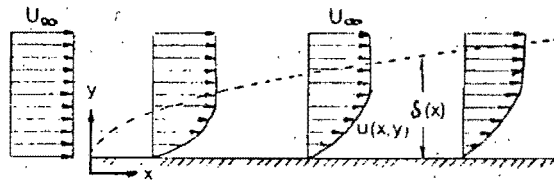


Fig 4.2 Zonas de la capa limite.

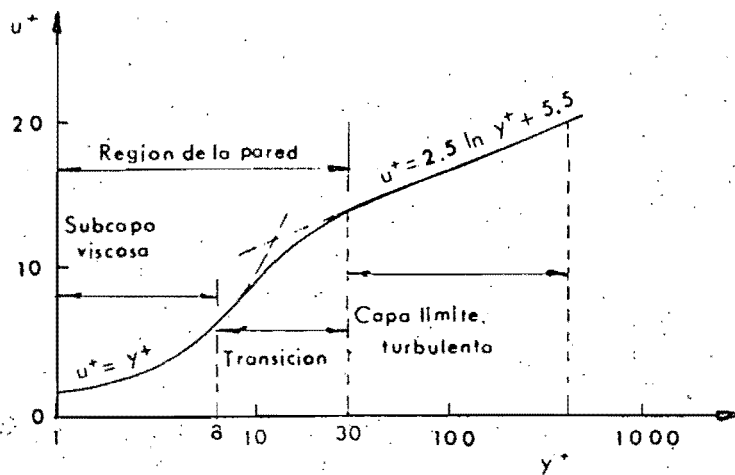


Fig 4.3 Leyes de distribución de velocidad

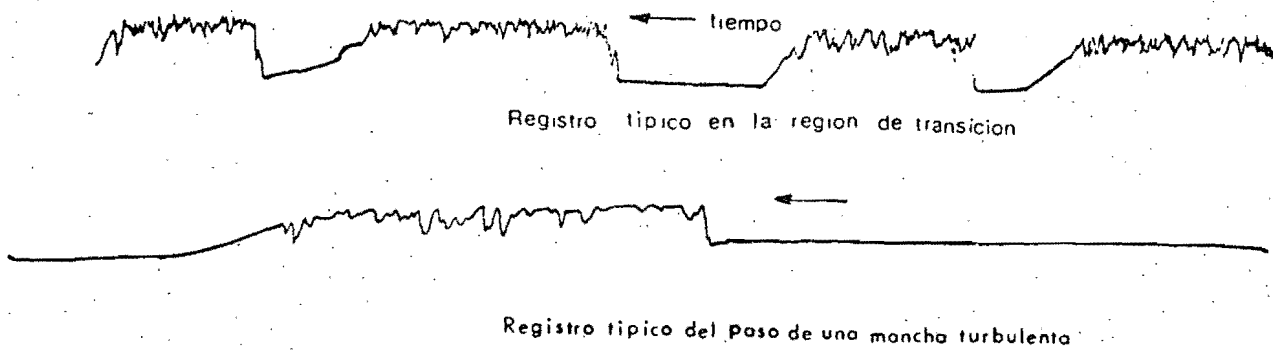


Fig 4.4 Oscilograma de las fluctuaciones de velocidad  $-u$  típico de la región de transición en una placa plana y del paso de una mancha turbulenta.

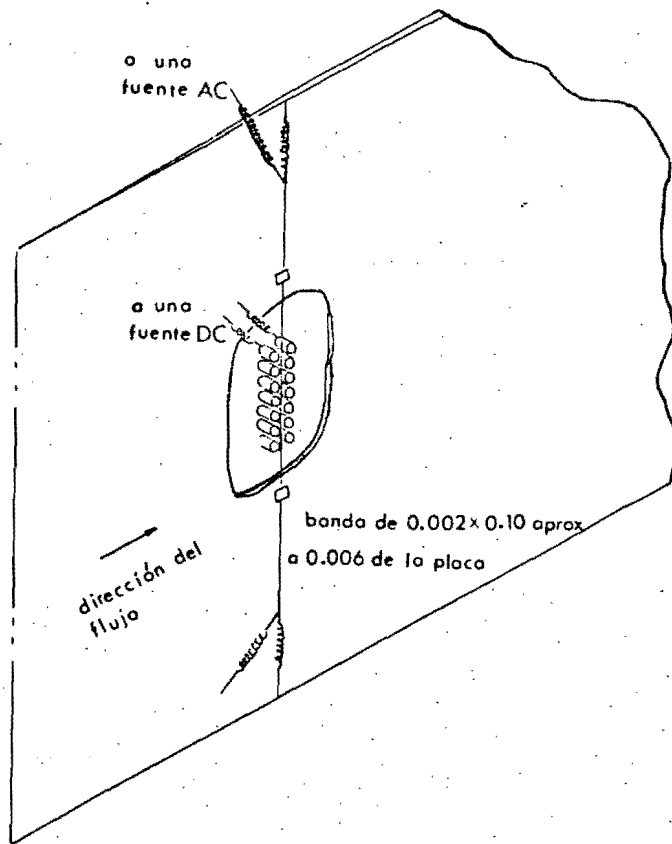


Fig. 4.5 Instalación utilizada para producir ondas en la capa límite sobre una placa con la técnica de la banda vibrante. Las dimensiones están en pulgadas.

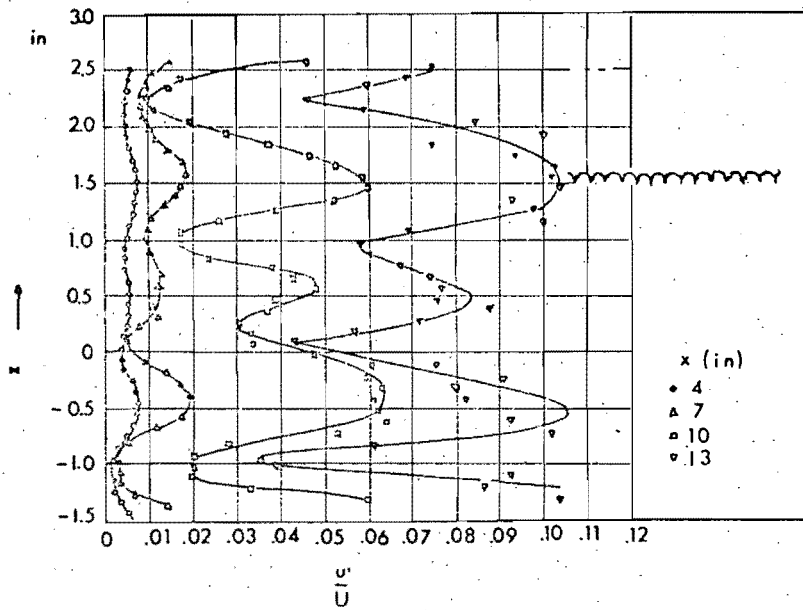


Fig. 4.6 Desarrollo de una onda producida por una banda vibrante, formándose regiones de alta y baja velocidad. El oscilograma muestra que los rampamientos ocurren en los picos.  $u/U =$  raíz de la media de los cuadrados de la fluctuación de velocidad- $u$ /velocidad de la corriente.  $x =$  distancia desde la banda.  $Y/\delta = 0,23$ .  $U = 16,44$  m/s

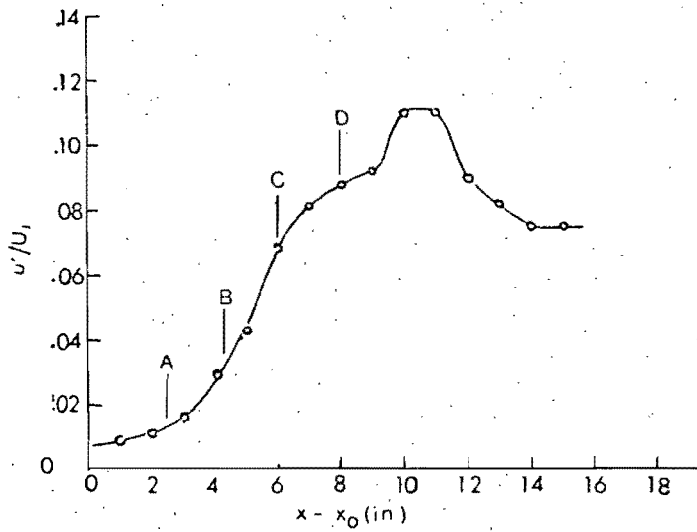


Fig. 4.7 Intensidad de las fluctuaciones  $u'$  medidas en diferentes Puntos.  $y=0.045$  in;  $U/\omega = 3.1 \times 10^5$  ft<sup>-1</sup>;  $\omega$  de 145 c/s

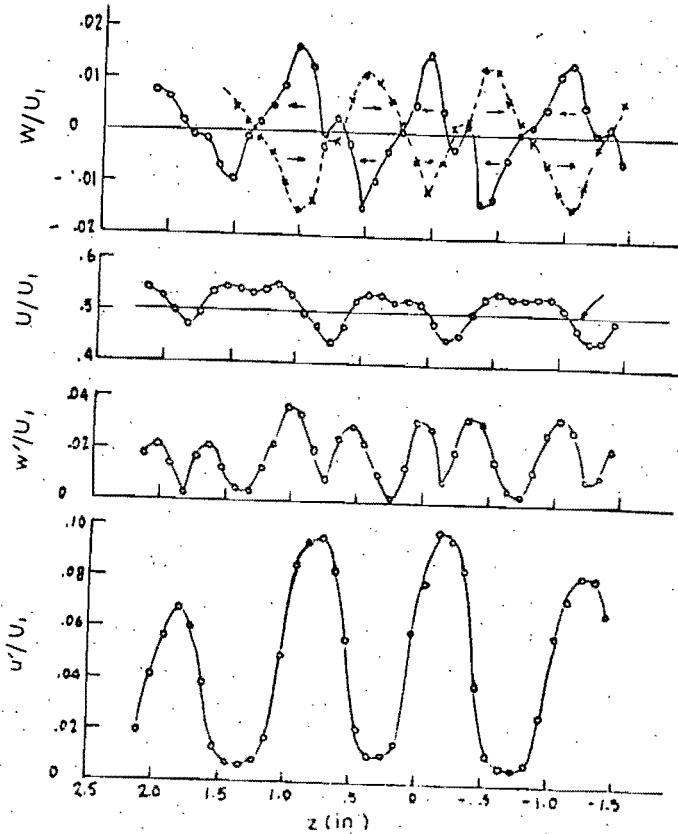


Fig. 4.8 Distribuciones de la velocidad media y componentes de la velocidad en una sección transversal;  $\omega$  de 145 c/s; —  $y = .31 \delta$     - - -  $y = .11 \delta$

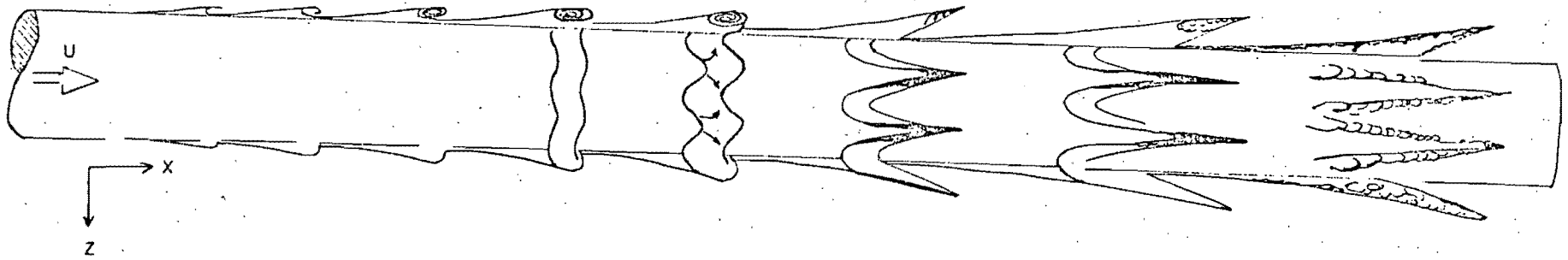


Fig 4.9 Proceso de transición en una capa límite alrededor de un cilindro en forma de cohete.

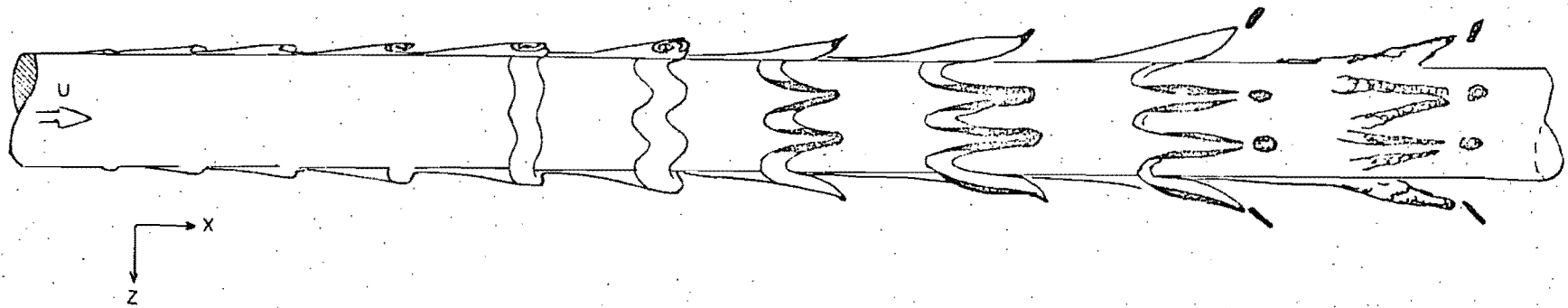


Fig 4.10 Proceso de transición en una capa límite al rededor de un cilindro en forma de cohete cuando se tiene un gradiente de presión adverso.

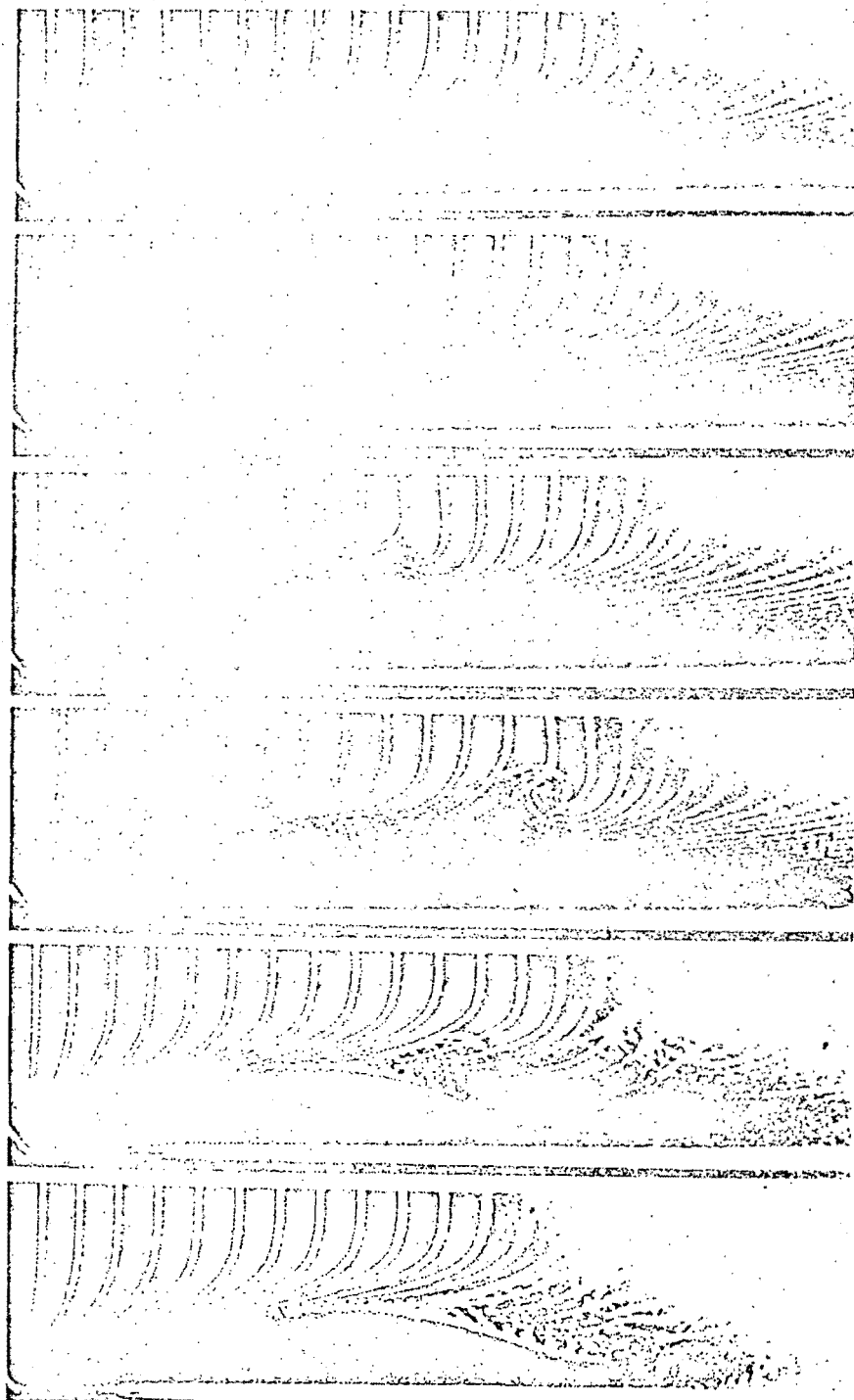


Fig. 4.11 Inestabilidad anterior al rompimiento (Hama, E R, y Nutant)



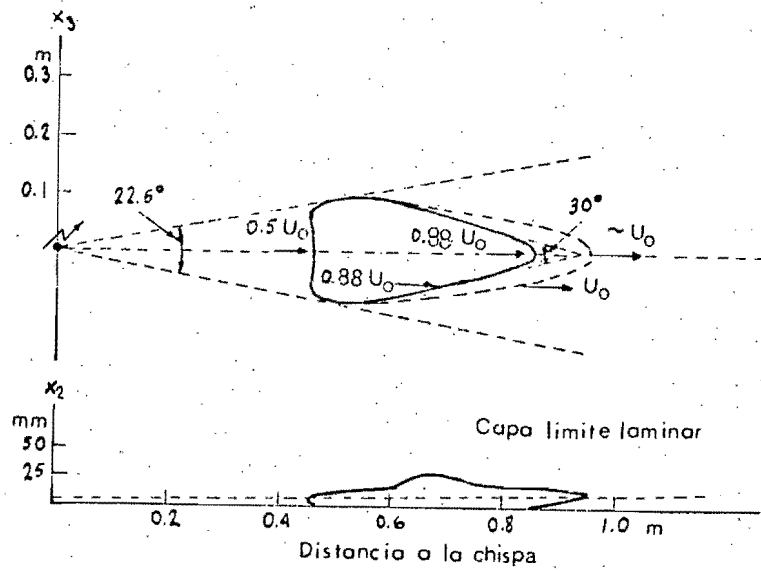


Fig 4.12. Vistas en planta y de perfil de una mancha turbulenta generada por una chispa eléctrica.  $U_0 = 9 \text{ m/s}$

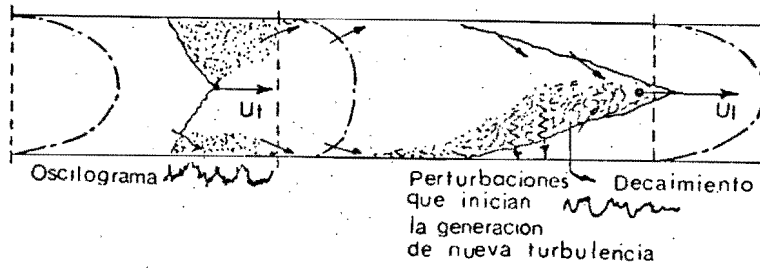


Fig 4.13 Esquema de un slug para un  $Re_D > 2400$

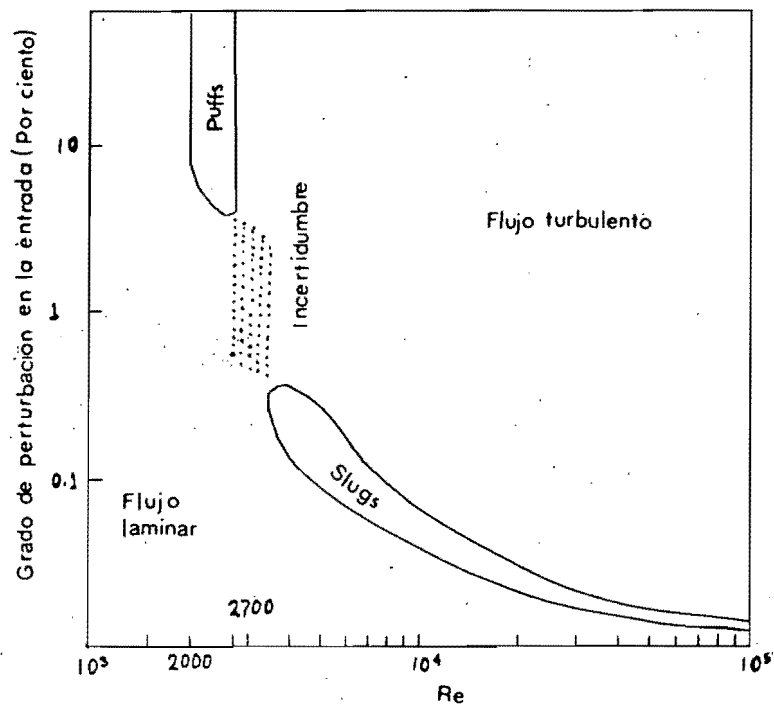


Fig 4.14 Regiones en que ocurren los puffs y slugs para un flujo en transición en un tubo en función de el grado de perturbación inicial.

## V. TEORIA ESTADISTICA DE LA TURBULENCIA

### V. 1 INTRODUCCION

La teoría estadística considera como característica fundamental de la turbulencia la noción de que las variables que definen al flujo (velocidad y presión) varían aleatoriamente con respecto al espacio y al tiempo.

El concepto de aleatoriedad se puede entender de la siguiente manera: Si se tienen los registros de las velocidades instantaneas en un punto dado para una serie de experimentos realizados en condiciones idénticas, los detalles de estas corridas serán muy diferentes. Pero las propiedades de probabilidad serán las mismas de un registro a otro. El comportamiento de una variable aleatoria  $u'$  puede describirse mediante una función de densidad de probabilidades  $f(u')$ . La función de probabilidad normal o gaussiana es comúnmente asociada a la turbulencia, ya que del teorema del límite central se establece que la suma de un gran número de procesos independientes es gaussiana; esto es:

$$f(u') = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{[-(u-\bar{u})^2 / 2\sigma^2]}$$

donde: la media es

$$\mu = \bar{u}$$

y la variancia

$$\sigma^2 = \overline{u'^2} = \bar{u'^2}$$

Las fluctuaciones de dos componentes de la velocidad en un mismo punto, digamos  $u'_1$  y  $u'_2$ , en general tendrán valores diferentes para un mismo tiempo. Se sugiere que estas fluctuaciones de velocidad puedan estar relacionadas entre sí; una manera de medir su relación es el coeficiente de correlación  $R_{12}$ .

$$R_{12} = \frac{\overline{u_1' u_2'}}{\overline{u_1'^2} \overline{u_2'^2}}$$

Una distribución de probabilidad puede describirse cuando se conocen sus momentos. En el caso de una distribución Gaussiana el primer momento es la media  $\mu = \overline{u'}$  y el segundo momento es la variancia  $\sigma^2 = \overline{u'^2}$ . Para dos fluctuaciones de velocidad en un mismo punto, el momento que se obtiene es la covarianza de la distribución, momento conocido como esfuerzos de Reynolds y que en teoría estadística indica el grado de correlación entre  $u_1'$  y  $u_2'$ . En la teoría estadística dichas correlaciones se usan con el fin de conocer la configuración espacial o estructura del flujo.

Si se considera a la turbulencia como una gran cantidad de remolinos superpuestos al flujo medio, se sugiere que componentes de velocidad medidas en dos puntos al mismo tiempo estarán relacionados si corresponden al mismo remolino. Por ejemplo la velocidad  $(u_a)_A$  en la dirección 1 en el punto A estará correlacionada con la velocidad  $(u_b)_B$  (Fig. 5.2) si el punto A y B corresponde, al mismo remolino; si existe correlación entre  $(u_a)_A$  y  $(u_b)_B$  para distancias pequeñas, significa que los remolinos son pequeños; de esta manera la correlación de las fluctuaciones de velocidad en dos puntos esta relacionada al tamaño de los remolinos y por tanto a la estructura de la turbulencia.

En el estudio estadístico de la turbulencia, es común trabajar con promedios; la razón es que generalmente no es de interés conocer en detalle el comportamiento de las componentes de velocidad y de presión. En la mayoría de los casos, solo se requieren estadísticas tales como porcentajes medios de transferencia de masa y de cantidad de movimiento.

En general, los promedios de las cantidades fluctuantes se toman con respecto a un tiempo promedio, idea que tiene sentido si se escoge un tiempo promedio suficientemente grande de manera que las cantidades fluctuantes sean estadísticamente estacionarias, es decir que sus valores medios sean independientes del tiempo.

Para las correlaciones en dos puntos, se asume que las velocidades en las series de experimentos, son ergódicas. Por ergódicas se quiere decir que, en una serie de experimentos, las velocidades en puntos particulares serán diferentes de un experimento a otro para un mismo tiempo de iniciado el experimento y para las mismas condiciones iniciales y de frontera; pero los valores de las velocidades promedio tenderán a converger en toda la serie de experimentos.

En la teoría estadística usualmente y por razones de simplicidad se supone una turbulencia homogénea e isotrópica con respecto a un sistema coordinado, moviéndose con la velocidad media del flujo.

Se entiende por turbulencia homogénea aquella en la que los parámetros estadísticos que definen al flujo no varían con la traslación de los ejes. Esto significa que los parámetros estadísticos son los mismos para todos los puntos en el campo de flujo. Y cualquier gradiente de velocidad media diferente de cero debe ser uniforme a través de él.

La turbulencia isotrópica se presenta cuando los parámetros estadísticos del flujo no tienen direcciones preferenciales y son invariantes a cualquier rotación o reflexión de los ejes. Fig. 5.1.

Los gradientes de velocidad media deben ser cero en cualquier parte. Es este tipo de turbulencia es el más simple ya que para describir las caracterís

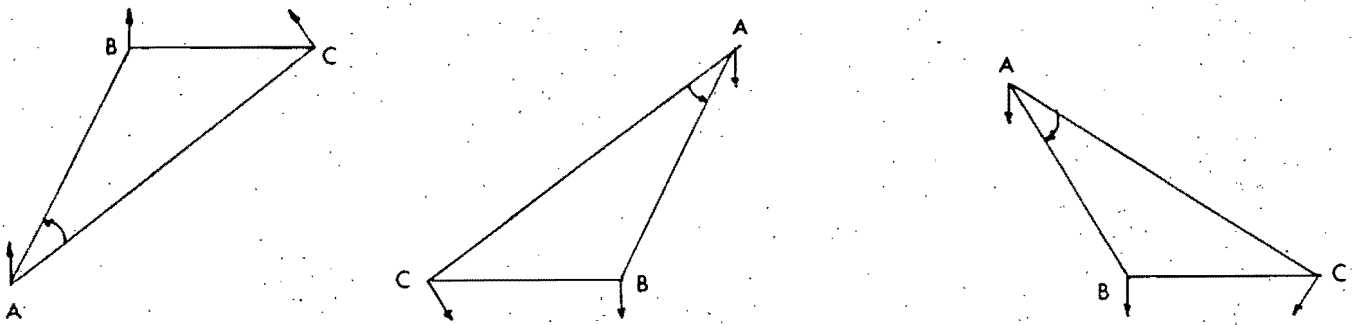


Fig. 5.1 Definición de a) Rotación; b) Reflexión en un plano.

ticas del flujo es necesario un número mínimo de parámetros y de relaciones. En los estudios experimentales ésta se genera en un túnel de viento, usando una rejilla a través de la cual pasa el flujo de aire antes de llegar a la sección de trabajo del túnel.

La turbulencia isotrópica es un tipo hipotético, irreal, que simplifica los problemas de manera que puedan analizarse matemáticamente y comprobarse experimentalmente.

En la teoría estadística, comúnmente el comportamiento de la turbulencia se describe con la ayuda de correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad y presión del campo de flujo. Las relaciones entre correlaciones se deducen a partir de la condición de isotropía, de las ec. de continuidad y de las ecuaciones de Navier - Stokes, como se verá a continuación.

## V. 2 Correlaciones en Turbulencia y Ecuación de Karman - Howarth

Si se consideran las correlaciones de dos componentes de la velocidad en dos puntos, para campos de flujo casi permanentes en los que el patrón de flujo promedio no cambia con el tiempo, la correlación  $Q_{AB}$  es una función de la localización de los puntos A y B y de las direcciones a y b de las fluctuaciones.

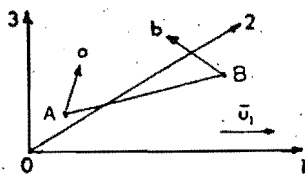


Fig 5.2 Definición de las velocidades  $u_a$  y  $u_b$ .

$$Q_{AB} = \overline{(u_a)_A (u_b)_B}$$

Si la velocidad media del flujo es  $\bar{u}_1$  paralela

a 01 las componentes de

la velocidad son:

$$u_a = \bar{u}_1 e_{a1} + u'_a$$

$$y u_b = \bar{u}_1 e_{b1} + u'_b$$

La correlación  $\overline{u_a u_b} = \bar{u}_1^2 e_{a1} e_{b1} + \overline{u'_a u'_b}$

Todos los valores medios de  $u'$  son cero. Solo se considera el segundo término con relación a la turbulencia:

$$Q_{AB} = \overline{u_a u_b} = \overline{u'_a u'_b}$$

$$(Q_{ij})_{AB} = \overline{(u'_i)_A (u'_j)_B}$$

Esta correlación es un tensor de segundo orden y puede describirse en términos de nueve correlaciones parciales  $(u'_i)_A (u'_j)_B$ .

Si el flujo es isotropico, la interpretación se simplifica de la sig. manera:

Usando la definición de isotropía.

$$(Q_{ij})_{AB} = \overline{(u'_i)_A (u'_j)_B} = 0 \text{ para } i \neq j$$

quedando tres correlaciones

$$\overline{(u'_1)_A (u'_1)_B}$$

$$\overline{(u'_2)_A (u'_2)_B}$$

$$\overline{(u'_3)_A (u'_3)_B}$$

Las dos últimas correlaciones son iguales, porque el sistema coordenado es invariante a la rotación del campo de referencia alrededor del eje 01. Por lo tanto  $Q_{AB}$  es determinado por dos correlaciones, de velocidad longitudinal f y lateral g.

En el caso en el que A y B coinciden y si la turbulencia es isotrópica.

$$\overline{u'^2_1} = \overline{u'^2_2} = \overline{u'^2_3}$$

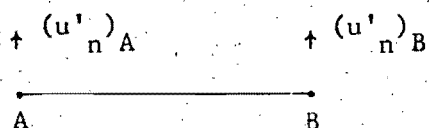
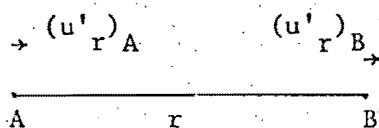
$$(Q_{ij})_A = \overline{u'^2_1} = \overline{u'^2_2} = \overline{u'^2_3}$$

Escribiendo

resulta:

$$u^{*2} = \overline{u'^2_1} = \overline{u'^2_2} = \overline{u'^2_3} \quad (Q_{ij})_A = u^{*2} \delta_{ij}$$

En lugar de usar correlaciones directamente es común usar los coeficientes de correlación f y g definidos a continuación:





$$f(r) = \frac{(u'_r)_A (u'_r)_B}{u^{*2}}$$

$$g(r) = \frac{(u'_n)_A (u'_n)_B}{u^{*2}}$$

donde el subíndice  $r$  indica la dirección de la componente y  $n$  una dirección normal a ésta.

Entonces el tensor de correlación  $(Q_{ij})_{AB}$  puede expresarse por medio de los coeficientes de correlación de la manera siguiente:

$$(Q_{ij})_{AB} = u^{*2} [f(r) - g(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + u^{*2} g(r) \delta_{ij} \quad (5.1)$$

donde  $r_i, r_j$  son las componentes de  $r$ .

De la ecuación 5.1, después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene una ecuación que relaciona a  $f$  y  $g$ :

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \quad (5.2)$$

Esta ecuación fue desarrollada por Von Karman y Howarth, quienes mostraron su similitud con el tensor de esfuerzos.

En la fig. 5.3 se muestra la forma de las correlaciones dobles para turbulencia isotrópica, donde  $g$  negativo representa un flujo invertido.

La ec. 5.2 se usa para eliminar  $g(r)$  de la ec. 5.1, resultando

$$(Q_{ij})_{AB} = u^{*2} \left\{ -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) r_i r_j + \left( f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) \delta_{ij} \right\} \quad (5.3)$$

Si  $i = j$  entonces

$$(Q_{ij})_{AB} = u^{*2} (3f(r) + r \frac{\partial}{\partial r} f(r)) = \frac{u^{*2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 f(r)] \quad (5.4)$$

Si A y B coinciden  $r = 0$ ,  $f(r) = 1$

$$(Q_{ij})_A = 3u^*{}^2 = 2 \times \text{energía cinética de la turbulencia por unidad de masa.}$$

En los fluidos reales, los esfuerzos viscosos en el movimiento turbulento hacen que se disipe la energía cinética del movimiento en calor. Si no existen efectos externos que suplan continuamente la energía para mantener la turbulencia, ésta decaerá en el transcurso del tiempo.

Es interesante investigar como cambia el patrón de flujo y las relaciones de las velocidades con el tiempo durante el decaimiento. Se considerará el cambio de  $(Q_{ij})_{AB}$  con el tiempo; para esto se usan las ec. de Navier - Stokes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{(u'_j)_A (u'_j)_B} - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{(u'_i)_A (u'_k)_A (u'_j)_B} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{(u'_i)_A (u'_k)_B (u'_j)_B} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{P_A (u'_j)_B} - \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{P_B (u'_i)_A} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \overline{(u'_i)_A (u'_j)_B} \end{aligned} \quad (5.5)$$

En esta ecuación  $\overline{(u'_i)_A (u'_j)_B} = (Q_{ij})_{AB}$ ; además aparecen otras correlaciones:

$$(S_{ik,j})_{AB} = \overline{(u'_i)_A (u'_k)_A (u'_j)_B} \quad \text{y} \quad (S_{i,kj})_{AB} = \overline{(u'_i)_A (u'_k)_B (u'_j)_B}$$

$$(K_{p,j})_{AB} = \overline{P_A (u'_j)_B} \quad \text{y} \quad (K_{i,p})_{AB} = \overline{P_B (u'_i)_A}$$

El subíndice p en las correlaciones K identifica las correlaciones de presión - velocidad.

Las correlaciones S son tensores con 3<sup>3</sup> componentes de la condición de isotropía:

$$(K_{p,j})_{AB} = (K_{i,p})_{AB} = 0 \quad \text{y} \quad \overline{(u'_i)_A (u'_k)_B (u'_j)_B} = - \overline{(u'_k)_A (u'_j)_A (u'_i)_B}$$

$$(S_{i,kj})_{AB} = -(S_{kj,i})_{AB}$$

El tensor S es determinado por tres funciones escalares representadas en la fig. 5.4

$$K(r) = \frac{\overline{(u'_r)_A^2 (u'_r)_B}}{u^{*3}}$$

$$h(r) = \frac{\overline{(u'_n)_A^2 (u'_r)_B}}{u^{*3}}$$

$$q(r) = \frac{\overline{(u'_r)_A (u'_n)_A (u'_n)_B}}{u^{*3}}$$

además las funciones K, q y h están relacionadas unas con otras por la ec. de continuidad. Por lo tanto el tensor  $(S_{ik,j})_{AB}$  puede expresarse como función de h solamente.

Como se vió anteriormente,  $(Q_{ij})_{AB}$  puede escribirse en términos de f(r), y  $(S_{ik,j})_{AB}$  puede escribirse en términos de h(r), y considerando las simplificaciones por isotropía, la ecuación 5.1 se transforma en la ecuación de Karman-Howarth [26].

$$-\frac{\partial}{\partial t}(u^* f) + 2(u^{*3}) \left( \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4}{r} h \right) = 2\nu u^{*2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (5.6)$$

Esta ecuación contiene dos variables independientes h y f, y no se puede resolver para f(r) y por lo tanto tampoco para  $(Q_{ij})_{AB}$ .

El problema que se presenta es el mismo que para las ecuaciones de Reynolds: existen más incógnitas que ecuaciones, por lo que esta teoría no permite una solución a las ecuaciones.

Es posible derivar de las ecuaciones de movimiento una ecuación que describa el comportamiento de  $h(r)$ , pero tal ecuación contiene correlaciones de velocidad de cuarto orden, las cuales constituirán una función desconocida. Dicho procedimiento puede continuarse y obtener un número infinito de ecuaciones siempre menor que el número de incógnitas.

Una dificultad adicional es que al aumentar el orden de las correlaciones se requiere definir escalares, incrementándose el número de términos indefinidamente.

Por otro lado, es de esperarse que las correlaciones de alto orden contribuyan poco a la descripción del comportamiento estadístico de la turbulencia. Batchelor [1] indicó que es posible hacer una descripción con suficiente grado de aproximación, considerando un número finito de correlaciones de velocidad y un número igual de ecuaciones dinámicas, haciendo alguna suposición para determinar la correlación del orden próximo superior.

En un estudio de la presión turbulenta en el flujo de un canal bidimensional, Chou mostró que la divergencia de la correlación cuarta de velocidad era pequeña comparada con la correlación triple entre la fluctuación del gradiente de presión y la fluctuación de la velocidad, de donde hizo la suposición de que la correlación cuarta puede despreciarse en este caso [1].

En general la teoría estadística de la turbulencia no permite una solución al problema; solo ayuda a un entendimiento de su estructura.

### V 3. Espectro de la Turbulencia

Se puede pensar en la turbulencia como una superposición de movimientos periódicos cada vez más pequeños, asociando la periodicidad de las fluctuaciones de velocidad a los movimientos de los remolinos y a su magnitud en el campo de flujo.

Si la turbulencia es completamente desarrollada, estará compuesta de remolinos de diferentes tamaños; estos poseen una cierta energía cinética, determinada por la intensidad de las fluctuaciones de velocidad para su frecuencia correspondiente.

La distribución de la energía cinética en las diferentes frecuencias o espectro de energía es muy importante, debido a que como se dijo anteriormente, cada fluctuación se asocia a un remolino dependiendo de la frecuencia con que ocurra; entonces, el espectro de energía refleja el estado de la turbulencia en un lugar particular y en un tiempo dado. Por otro lado también es útil para conocer cómo es que ésta evoluciona al transcurrir el tiempo.

En esta sección se verá inicialmente como está relacionado el espectro con la transformada de Fourier. Se pasará después a ver el espectro unidimensional, continuando con el tridimensional y las relaciones entre estos. Por último se presentan las teorías desarrolladas en función del análisis espectral.

Espectro y su relación con la transformada de Fourier.

Si se tiene una función periódica tal que  $f(t) = f(t + T)$ , donde  $T$  es el período Fig. 5.5, se puede expresar en términos de una combinación lineal de funciones periódicas conocidas, dentro del mismo intervalo. Las funciones comúnmente usa

das son las funciones seno y coseno expresadas como una serie:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos 2 \frac{n\pi t}{T} + b_n \operatorname{Sen} 2 \frac{n\pi t}{T} \right) \quad (5.7)$$

A esta serie se le llama serie de Fourier, y sus coeficientes estan definidos por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left( 2n \frac{\pi}{T} t \right) dt \quad (5.8)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{Sen} \left( \frac{2n\pi}{T} t \right) dt \quad (5.9)$$

En forma compleja

Si un número complejo se expresa como

$$Z = a + i b$$

donde

Z es el número complejo

a es la parte real

b es la parte imaginaria;  $i = \pm \sqrt{-1}$

Por otro lado la identidad de Euler indica que:

$$e^{-i \theta} = \cos \theta + i \operatorname{Sen} \theta$$

Considerando esto, Z en forma polar se escribe como

$$Z = r e^{i \theta}$$

De lo anterior la serie de Fourier expresada en números complejos es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n e^{i n \frac{2\pi}{T} t} \quad (5.10)$$

en donde  $x_n$  es el coeficiente complejo igual a:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \frac{2\pi}{T} t} dt$$

y considerando que  $x_n = |x_n| e^{-i n \frac{2\pi}{T} t}$  se tiene:

$$x_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

De la serie de Fourier dada por (5.10), sustituyendo en términos de la frecuencia  $f = \frac{1}{T}$ ,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i n 2\pi f t}$$

en donde

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i n 2\pi f t} dt$$

y sustituyendo en la ec. anterior:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i n 2\pi f t} dt \right] e^{i n 2\pi f t}$$

Cuando el período  $T \rightarrow \infty$ ,  $df \rightarrow 0$ , la función deja de ser periódica y su límite puede escribirse como una integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt \right] e^{i 2\pi f t} dt \quad (5.11)$$

Si

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2 \pi f t} dt \quad (5.12)$$

Se tendrá

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{i 2 \pi f t} dt \quad (5.13)$$

En donde la función  $x(f)$  es la transformada de Fourier de  $x(t)$  (ec. 5.12) y la ecuación 5.7 es la transformada inversa, o antitransformada de Fourier.

En el análisis espectral es común usar números de onda en lugar de frecuencias, en donde estos se relacionan con las frecuencias de la manera siguiente:

Considérese un campo de flujo visto por un observador en reposo relativo al campo: si la velocidad media del campo de flujo es  $\bar{u}$  y la frecuencia de las fluctuaciones de velocidad es  $n$ , el número de onda  $k$  se puede expresar como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\bar{u}}$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

La transformada de Fourier para la correlación de dos componentes de la velocidad en dos puntos ( $Q_{ij}$ ) está dada por:

$$\phi_{ij}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r) e^{-i k \cdot r} dr$$

donde:

$Q_{ij}$  es el tensor de correlación definido anteriormente

$$i = \sqrt{-1}$$



$\phi_{ij}(k)$  es un tensor de segundo orden; cada una de sus nueve componentes corresponde a las componentes de  $Q_{ij}(r)$ , y su posición esta definida por el vector  $k$ .

La transformación inversa es:

$$Q_{ij}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(k) e^{i k \cdot r} dk \quad (5.14)$$

Si la turbulencia es homogénea,  $\phi_{ij}(k)$  y  $Q_{ij}(r)$  son simétricos y tienen seis componentes diferentes.

En la ecuación (5.14) es de interés la suma de las componentes de la diagonal  $\phi_{ii} = \phi_{11} + \phi_{22} + \phi_{33}$ , porque representa la energía cinética para un número de onda dado. Lo anterior se demuestra si se considera que

$$Q_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(k) dk \quad (5.15)$$

$$Q_{ii}(0) = \overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} = 2 \times \text{energía cinética} \quad (5.16)$$

de la turbulencia por  
unidad de masa.

$\phi_{ij}(k)$  es conocido como tensor del espectro de energía.

### V. 3.1 Espectro Unidimensional

En un flujo turbulento, las mediciones de las fluctuaciones de velocidad pueden hacerse: a) en diferentes puntos a lo largo de una línea recta, para un mismo tiempo; b) en un punto fijo, a distintos tiempos, c) siguiendo el movi-

el espectro longitudinal  $\phi_{11}$ , relacionado con la correlación longitudinal  $f(r_1)$ , y el espectro transversal  $\phi_{22}$  relacionado a la correlación transversal  $g(r_1)$ , que se definen como:

$$\phi_{11}(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(k) dk_2 dk_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{11}(r_1) e^{-i k_1 r_1} dr_1$$

$$\phi_{11}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u^{*2} f(r_1) \cos(k_1 r_1) dr_1$$

$$\phi_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{*2} g(r) e^{-i k_1 r_1} dr_1$$

Un problema que se tiene en el espectro unidimensional es el siguiente: al tomar mediciones de las fluctuaciones de velocidad, no es posible distinguir entre fluctuaciones de número de onda "k", cuyo vector esté alineado con el flujo y fluctuaciones de número de onda mayores que "k", cuyo vector es oblicuo a la línea de medición; por lo tanto, el espectro unidimensional obtenido en un campo tridimensional, contiene para un número de onda k contribuciones de las componentes de todos los números de onda mayores que k (fig. 5.7)

El espectro unidimensional no es muy apropiado para la descripción de la turbulencia ya que ésta es tridimensional.

### 5.3.2 Espectro tridimensional.

En un campo de flujo, es posible medir las fluctuaciones de velocidad en todas las direcciones que se desee, lo que produce un espectro en función del número de onda  $k_i$ ; siendo  $k_i$  los vectores en las direcciones i medidas.

Desafortunadamente esto da más información de la que se puede manejar. Con el fin de eliminar información, el espectro se integra sobre una superficie

esférica alrededor del origen de el espacio de números de onda, y el valor de ésta integral representa la energía total para tal número de onda. El espectro de energía se considera distribuido uniformemente sobre la esfera de radio  $k$ , y corresponde a los remolinos de tamaño  $k^{-1}$  en el espacio físico.

La distribución del tensor de energía sobre la superficie de la esfera de radio  $k$  es  $\psi$  dada por:

$$\psi_{ij}(k) = \int_A \phi_{ij}(k) dA(k)$$

$$\int_0^\infty \psi_{ij}(k) dk = \int_{-\infty}^\infty \phi_{ij}(k) dk = Q_{ij}(0)$$

pero como

$$Q_{ii}(0) = \overline{u_i'^2} = \int_0^\infty \psi_{ii}(k) dk$$

Si la función del espectro de energía esta definida por:

$$E(k) = \frac{1}{2} \psi_{ii}(k)$$

resulta

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}$$

Si la turbulencia es isotrópica, la energía cinética es independiente de la dirección de  $k$ , y en este caso

$$E(k) = \frac{1}{2} \psi_{ii}(k) = \frac{1}{2} \int_A \phi_{ii}(k) dA(k) =$$

$$\frac{1}{2} \phi_{ii}(k) \int_A dA(k)$$

$$E(k) = 4\pi k^2 \frac{1}{2} \phi_{ij}(k)$$

Consecuentemente

$$\int_0^{\infty} E(k) dk = \frac{3}{2} u_*^2$$

En la práctica solamente se mide el espectro uni-dimensional; sin embargo es interesante conocer la relación entre este y el tensor tridimensional de energía.

A continuación se dan algunas relaciones entre el espectro unidimensional y el espectro tridimensional; dichas relaciones se obtienen considerando que la turbulencia es isotrópica.

El tensor del espectro tridimensional de energía está dado por:

$$\phi_{ij}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(r) e^{-i k_1 \cdot r} dr$$

El espectro unidimensional longitudinal está relacionado con la función del espectro de energía

$$\phi_{11}(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k} dk$$

cuya relación inversa es:

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{k} \frac{d\phi_{11}(k)}{dk} \right)$$

El espectro unidimensional transversal de energía está relacionado con el longitudinal, de la siguiente manera:

$$\phi_{22}(k_1) = \frac{1}{4} \int_{k_1}^{\infty} \left(1 + \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k} dk$$

$$\phi_{22}(k_1) = \frac{1}{2} \phi_{11}(k_1) - \frac{1}{2} k_1 \frac{d\phi_{11}(k_1)}{dk_1}$$

El significado físico de los límites de integración es que sólo las longitudes de onda  $2\pi/k$  del espectro para las que  $2\pi/k \leq 2\pi/k_1$ , en donde  $k > k_1$ , contribuyen al valor de la longitud de onda  $2\pi/k_1$  del espectro unidimensional (fig. 5.7)

De las ecuaciones anteriores se puede observar que  $\phi_{11} \propto k_1^n$  y  $\phi_{22} \propto k_1^n$  entonces  $E(k)$  puede representarse por una ley de la potencia  $E \propto k^n$ ; El exponente deberá ser negativo, de manera que la función del espectro sea cero cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Como se verá más adelante, en la mayor parte del espectro  $E \propto k^{-5/3}$ , si todos los espectros son proporcionales a  $k^{-5/3}$ , el espectro unidimensional transversal estará relacionado al espectro unidimensional longitudinal:

$$\phi_{22} = \frac{4}{3} \phi_{11}$$

Las relaciones de  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{22}$  y  $E(k)$  dan una indicación de la forma de estos espectros. Así por ejemplo el espectro de  $E$  empieza de cero incrementándose en forma de parábola cuártica hacia arriba, mientras que  $\phi_{22}$  es una parábola hacia arriba, cuyo vértice se encuentra desplazado del origen como se muestra en la fig. 5.8

## V. 4 Interpretación del Espectro

### El Espectro como una Cascada de Energía

Si se considera el campo de flujo formado por remolinos de diferentes tamaños, las interacciones entre éstos producen una energía que es aprovechada por los remolinos pequeños, de tal manera que existe una transferencia de energía entre los remolinos grandes y los pequeños.

Esta transferencia de energía puede explicarse si por ejemplo se sigue el proceso de estiramiento de un remolino grande. Por ejemplo el que se muestra en la fig. 5.9, el cual es un remolino forzado a estirarse por las condiciones del campo de flujo.

Al estirarse el remolino se reduce su área y su momento de inercia. Pero, como el momento angular debe permanecer constante, si no existen esfuerzos viscosos, la velocidad angular se incrementará en el sentido del estiramiento. El estiramiento de un remolino implica un cambio en la escala de longitud de éste, y está asociado a un intercambio de energía por el esfuerzo requerido por el trabajo de deformación de éste.

Aparentemente, la mayor parte de energía intercambiada a través de los números de onda en el espectro proviene de los remolinos más grandes a los más pequeños, lo que hace pensar en una cascada de energía.

El efecto de estiramiento de los remolinos hace más fina la estructura de la turbulencia, tendiendo a la isotropía en la última parte del espectro, donde los remolinos son cada vez más pequeños y al mismo tiempo los efectos de la viscosidad y con ello la disipación toman más importancia [28].

En un flujo turbulento completamente desarrollado los remolinos grandes no son los que tienen la máxima energía cinética, pues estos remolinos aunque son los de mayor duración, su energía cinética es de cuando mucho 20% de la energía total.

En el espectro de energía el rango en el que los remolinos hacen su aportación más importante al total de energía cinética de la turbulencia es el rango llamado de "remolinos portadores de energía"; en este rango el espectro tiene su máximo. Se asocia un número de onda  $k_e$  para indicar éste máximo.

Conforme decrece el tamaño de los remolinos, los efectos de la disipación por la viscosidad se incrementan, alcanzando un máximo para un cierto tamaño de remolinos. Se asocia un número de onda  $k_d$  al número de onda de los remolinos que contribuyen a la máxima disipación como se muestra en la fig. 5.10

Si se considera un número  $R$  suficientemente grande, de manera que el rango de los remolinos portadores de energía esté suficientemente separado del rango de máxima disipación,  $k_e \ll k_d$ .

En el rango  $k \gg k_e$  los remolinos obtienen su energía por transferencia de los remolinos más grandes. En este rango la energía transferida a través de los remolinos es mayor que el porcentaje de cambio de su propia energía. El total de energía que entra en este rango es igual al flujo de energía más la disipación.

Por otro lado, la turbulencia para números de onda grandes puede considerarse isotrópica y permanente estadísticamente en sus valores medios e independiente de las condiciones externas, y solo puede determinarse por parámetros resultantes de las condiciones internas.

Kolmogoroff introdujo la hipótesis de que existe un rango de valores de  $k$  en los que el carácter de la turbulencia es el mismo en todos los flujos, independientemente del origen de ésta. La turbulencia en este "rango de equilibrio universal" es isotrópica. Se puede decir que un conjunto de remolinos relativamente grandes son los portadores de energía, mientras que toda la disipación ocurre en los remolinos más pequeños. Entre los dos conjuntos de remolinos existe un "subrango inercial", donde:

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial t} E(k) = 0$$

porque la energía en este rango es despreciable,

- b) la viscosidad es despreciable, ya que este rango se encuentra afuera del rango de disipación.

Este subrango inercial del espectro se encuentra en equilibrio, ya que la energía que entra procedente de los remolinos grandes al mismo tiempo es extraída por los remolinos pequeños disipadores de energía.

Dentro de este rango el espectro es independiente de la viscosidad, y puede determinarse por el porcentaje de disipación

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} E(k) dk = \epsilon$$

Usando un argumento dimensional, Kolmogoroff dedujo que esta parte del espectro debe tener la forma

$$E(k) \propto k^{-5/3}$$

En el rango de equilibrio universal, como ya se dijo, los parámetros relevantes son la disipación de energía  $\epsilon$  y la viscosidad cinemática  $\nu$ , y pueden definirse escalas de velocidad y de longitud por medio de relaciones adimensionales



nales tales como:

$$\begin{aligned} \eta &= (\nu^3/\epsilon)^{1/4} && \text{escala de longitud} \\ \nu &= (\nu/\epsilon)^{1/2} && \text{escala de velocidad} \end{aligned}$$

y considerando estas escalas de Kolmogoroff, se obtiene el número de Reynolds

$$\frac{\nu \eta}{\nu} = 1$$

y la forma adimensional de la función del espectro de energía como

$$E(k) = \nu^2 \eta \theta(k\eta)$$

donde  $\theta(k\eta)$  es una función de las variables adimensionales  $k\eta$ .

En el subrango inercial,  $E(k)$  es independiente de la viscosidad, de manera que

$$\theta(k\eta) \propto (k\eta)^{-5/3} \quad \text{y} \quad E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

A la ec. anterior frecuentemente se le llama:

ley del espectro de Kolmogoroff, por haber sido éste ser el primero en llegar a este resultado.

Los resultados de la ley de Kolmogoroff han sido confirmados experimentalmente por varios investigadores (Raichlen [29] Laufer y Favre [30]). En la fig. 5.11 se muestran los espectros de energía medidos por Raichlen en un canal en donde,  $y/y_0$  es la relación entre la distancia desde el punto de medición al fondo y el tirante total; y  $R_e = 4 m \bar{U}/\nu$ , donde  $m$  es el radio hidráulico medio.

La explicación del espectro de energía dada anteriormente se basa en el análisis dimensional; a continuación se verán algunas explicaciones en las que se considera un mecanismo de transferencia de energía entre los remolinos de mayor tamaño a los más pequeños, en base a diferentes hipótesis. Para esto se analizará el tensor de energía en más detalle.

Sí:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ij}(r) = S_{ij}(r) + P_{ij}(r) + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{ij}(r)}{\partial r_k \partial r_k}$$

donde

$$P_{ij}(r) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r_i} K_{p_{ij}} - \frac{\partial}{\partial r_j} K_{ip} \right) \text{ es la}$$

correlación de presión/velocidad.

La transformada de Fourier de esta ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_{ij}(k) = \Omega_{ij}(k) + \pi_{ij}(k) - 2\nu k^2 \phi_{ij}(k)$$

Ecuación dinámica del espectro de turbulencia en donde:

$\pi_{ij}(k)$  describe la acción de las fluctuaciones de presión al transferir energía de una componente de velocidad a las otras.

Si  $i = j$ ,  $P_{ij}(r)$  es cero por continuidad y para un fluido incompresible, y consecuentemente  $\pi_{ij}(k) = 0$

y las correlaciones de presión-velocidad no tendrán ningún efecto sobre la densidad total de energía cinética  $\phi_{ij}(k)$ .

$\Omega_{ij}(k)$  describe el efecto de la transferencia de energía de una componente de la velocidad de un número de onda al siguiente.

$2\nu k^2 \phi_{ii}(k)$  representa la disipación de energía por viscosidad.

Si  $\pi_{ij}(k) = 0$  entonces la ec. 5.15 resulta

$$\frac{d}{dt} \phi_{ii}(k) = \Omega_{ii}(k) - 2\nu k^2 \phi_{ii}(k)$$

Si la turbulencia es isotrópica, y si se multiplica la ec. anterior por  $2\pi k^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} [E(k)] = 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_{ii}(k)\right) - 2\nu k^2 E(k)$$

en donde se relaciona a la función del espectro de energía  $E(k)$  con la función de transferencia de energía y con la función de disipación.

Siendo la función de transferencia

$$F(k) = 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_{ii}(k)\right) \quad 5.16$$

la manera de resolver estas ecuaciones es suponer alguna relación entre la función de transferencia, la función del espectro de energía y el número de onda.

Se han propuesto varios modelos, todos ellos basados en la hipótesis de algún mecanismo físico que explique la transferencia de energía a través de los números de onda.

El modelo más común es el propuesto por Heisenberg, quien supuso que la transferencia de energía es similar cualitativamente a la conversión de energía

mecánica en energía térmica a través de movimiento molecular. De manera que la transferencia de energía puede describirse usando una viscosidad de los remolinos análoga a la viscosidad molecular, y puede escribirse

$$\int_0^k F(k) dk = - 2 \epsilon_H(k) \int_0^k k^2 E(k) dk$$

donde  $\epsilon_H(k)$  es la viscosidad cinemática de la turbulencia causada por los remolinos de números de onda de 0 a  $\infty$ .

El porcentaje de transferencia de energía estará dado por el producto de una viscosidad efectiva producida por el movimiento de los remolinos pequeños y una integral igual al valor medio cuadrado de la vorticidad de los remolinos grandes.

De consideraciones dimensionales:

$$\epsilon_H(k) = \gamma \int_k^\infty \frac{E(k)}{k^3} dk$$

donde  $\gamma$  es una constante con valor del orden de 1 consecuentemente

$$\int_0^k F(k) dk = - 2\gamma \int_0^\infty \frac{E(k)}{k^3} dk \int_0^k k^2 E(k) dk$$

En el rango de equilibrio universal

$$\epsilon = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k) dk$$

y después de algunos pasos algebraicos

$$E(k) = \left(\frac{8\varepsilon}{9\gamma}\right)^{2/3} k^{-5/3} \left[1 + \frac{8}{3\gamma^2} (k\eta)^4\right]^{-4/3}$$

Dicha expresión es consistente con la hipótesis de Kolmogoroff en el rango de equilibrio en donde  $E(k) \propto k^{-5/3}$ , pero para valores grandes de  $k$  la función del espectro de energía tiene la forma  $E(k) \propto k^{-7}$  (fig 5.11).

En la expresión de transferencia de energía presentada por Heisenberg, el significado físico de su hipótesis puede aplicarse cuando el intercambio de energía es entre números de onda más distantes que en el caso más importante cuando el intercambio de energía es entre números de onda del mismo orden de magnitud.

La hipótesis de Heisenberg, de una viscosidad de la turbulencia debida a los remolinos pequeños, no es consistente con el requerimiento de una independencia estadística entre los remolinos pequeños y los grandes. Esta objeción se hace más seria si se considera el rango viscoso  $k > 0.5k$  en donde ocurre la mayor parte de la disipación en este rango la hipótesis falla, y la función del espectro de energía  $E(k) \propto k^{-7}$  no es aplicable (Batchelor [31]).

#### Conclusiones

La transferencia de energía no se puede representar adecuadamente por postulados físicos simples como el de Heisenberg, el de Obukhoff (1941) y el de Kovaznay (1948).

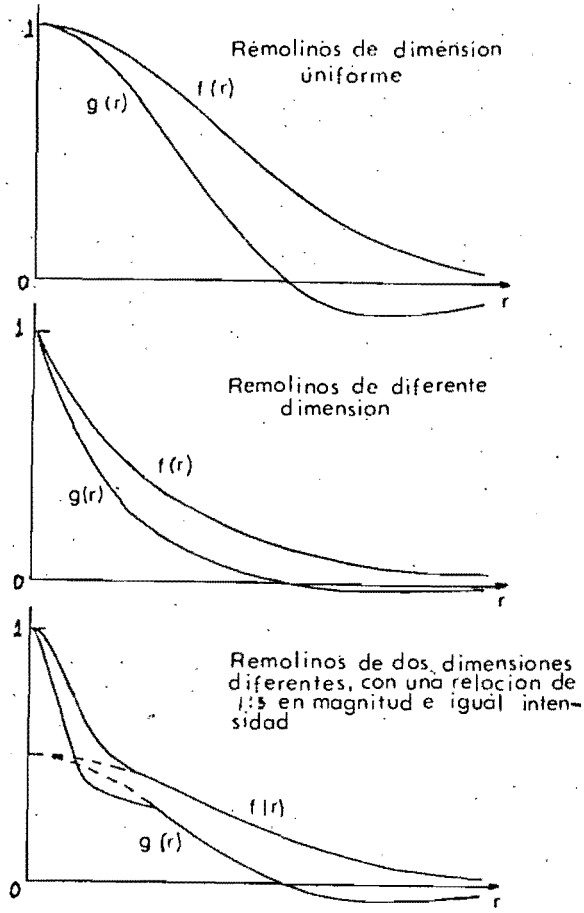


Fig. 5.3a Forma de las correlaciones dobles en turbulencia isotrópica de acuerdo a los modelos matemáticos de Townsend.

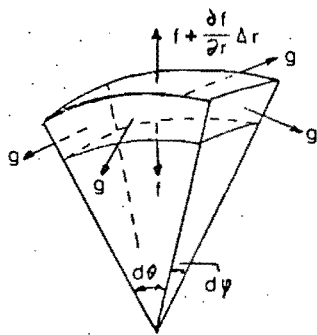


Fig 5.3b Tensor de esfuerzos con simetría esférica.

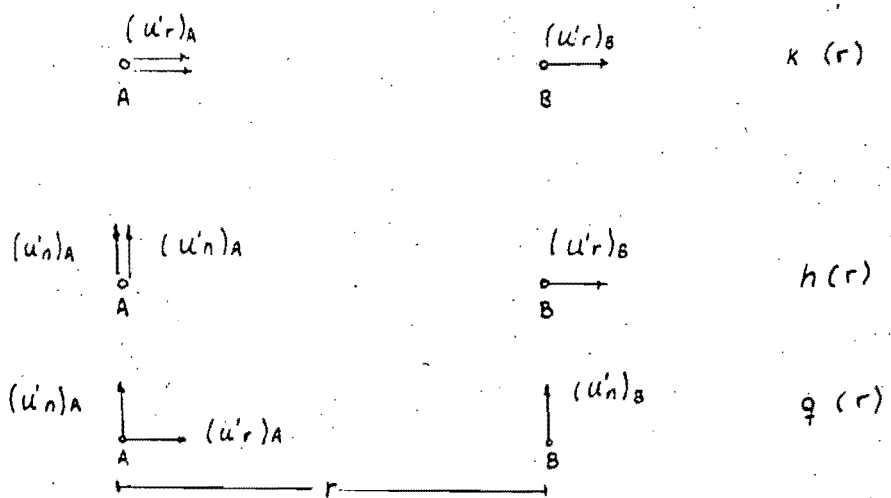


Fig 5.4 Correlaciones triples

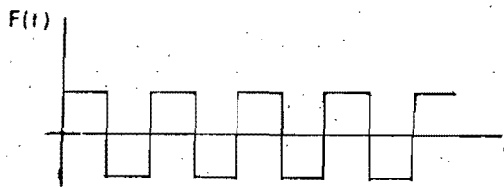


Fig. 5.5 Ejemplo de una función periodico

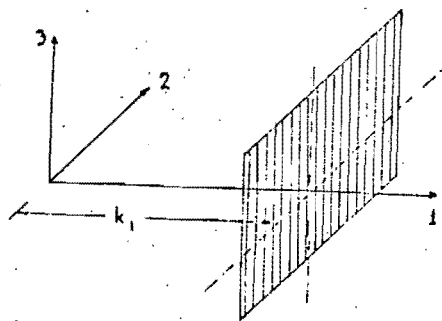


Fig. 5.6 Plano de la función del espectro unidimensional en el espacio de números de onda

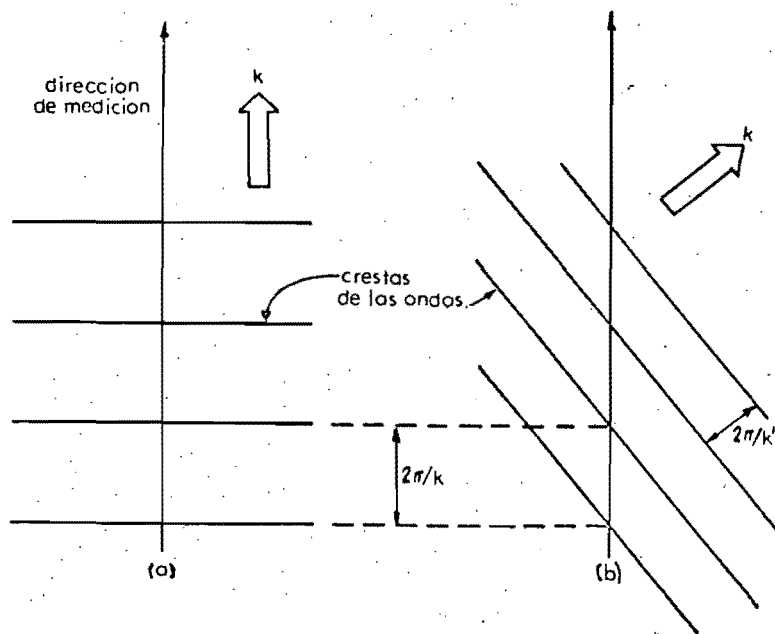


Fig 5.7 a) Onda de número de onda  $k$  alineado con la línea de medición  
 b) Onda de número de onda  $k' > k$  con un vector oblicuo a la línea de medición



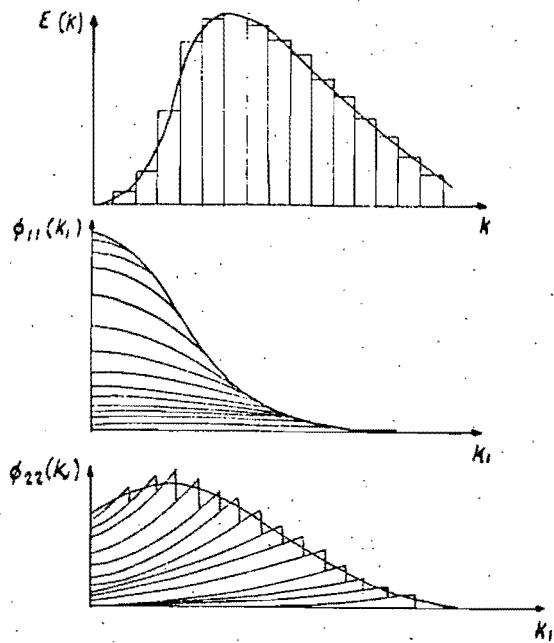


Fig 5.8 Espectro uni-dimensional para una función del espectro de energía dada de acuerdo a Corrsin

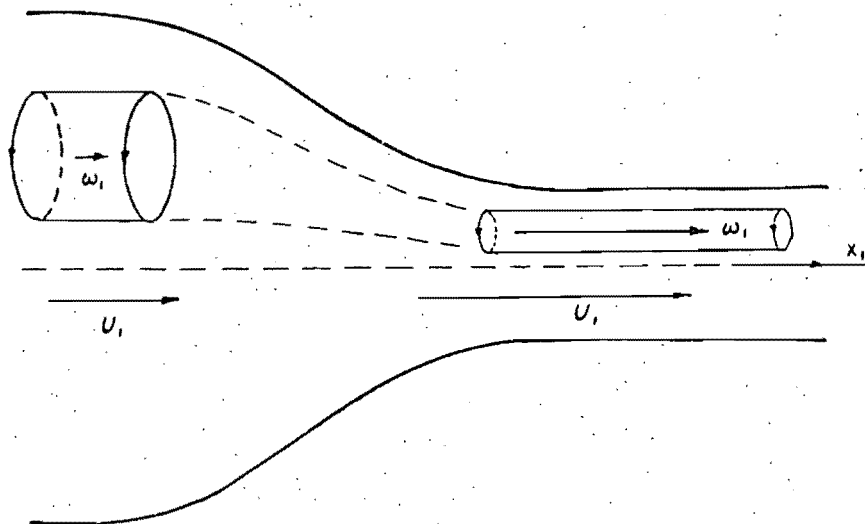


Fig 5.9 Estiramiento de un vortice en la contracción de un tunel de viento. La velocidad se incrementa al aproximarse a la contracción, la componente  $\omega_1$  se amplifica debido a la conservación de momento angular

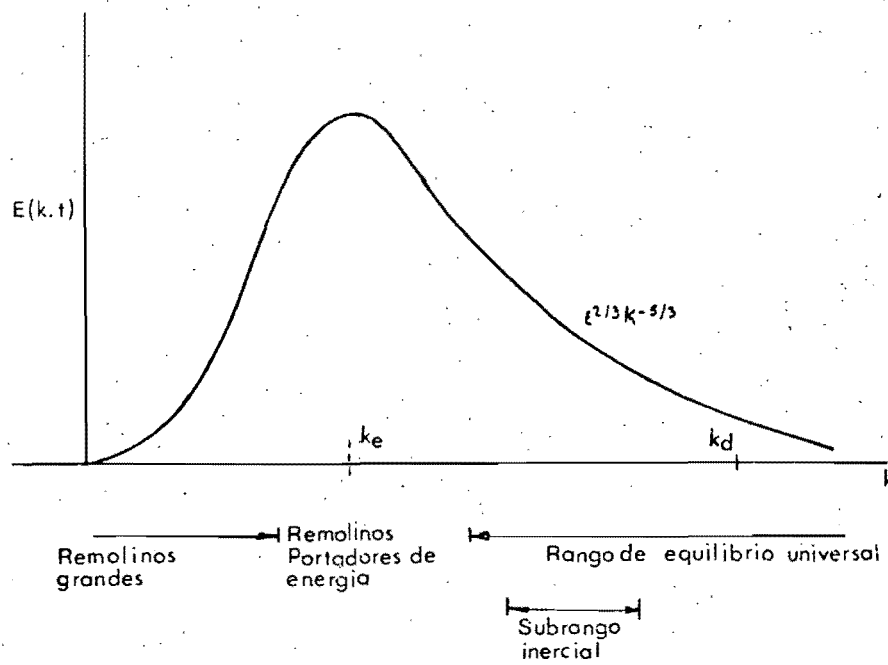


Fig 5.10 Forma del espectro tri-dimensional  $E(k,t)$  en varios rangos de número de onda

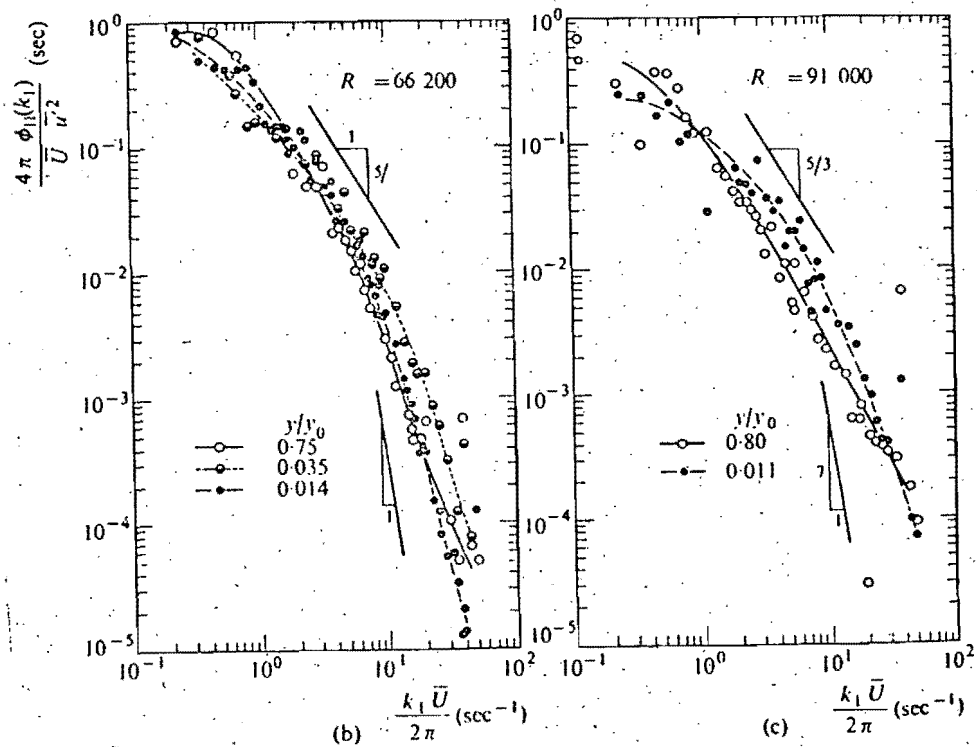


Fig 5.11. Espectro de energía medido por Raichlen, en un canal,  $y/y_0$  es la distancia del punto de medición al fondo, entre el tirante,  $R = 4mU/\nu$ , siendo  $m$  el radio hidráulico medio.

## VI Estructura de la Capa Límite turbulenta.

### Antecedentes.

El estudio de la región muy cercana a la pared en una capa límite turbulenta fue motivado debido a los resultados presentados por Klebanoff, [33] quién midió la producción de energía de la turbulencia en una capa límite (ver fig 6.1, donde se muestra que la mitad de la producción total de energía ocurre en la región más próxima a la pared). Estos resultados motivaron a que los investigadores se interesaran en el estudio del flujo en la región de la pared.

Debido a que esta región generalmente es de un espesor muy pequeño, fue necesario que se desarrollaran nuevas técnicas de visualización del flujo.

En el presente capítulo se revisarán algunos de los trabajos más importantes sobre la estructura del flujo en la capa límite.

En este capítulo se denomina estructura a todo patrón o forma característica que aparezca en el flujo al usar burbujas de hidrógeno o colorante, y que pueda describirse por algún movimiento común del fluido (generalmente se asocia a vórtices o remolinos), o en términos geométricos [23].

### VI 1. Estudios de la Región de la Pared y Fenómeno de los Rompimientos (burst).

Los estudios llevados a cabo en la subcapa viscosa por Kline y Runstadler [33] usando una técnica de inyección de colorante, muestran que la configuración de la subcapa viscosa en esta región no es bidimensional sino tridimensional, generándose un patrón bien definido de estrías en la dirección del flujo, las cuales inicialmente se presentaban como una serie de islas de

excitación seguidas de vórtices longitudinales y un rompimiento de estos en turbulencia (fig. 6.2).

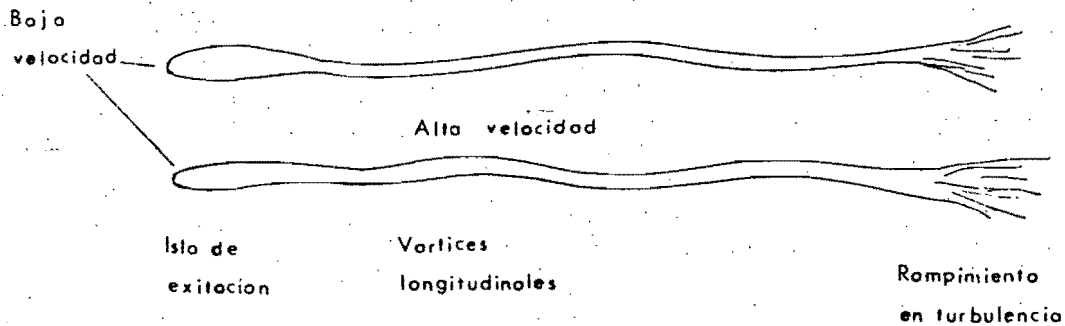


Fig.6.2 Estrías de la pared

Usando una técnica de generación de burbujas de hidrógeno Kline, Rünstandler, Schraub y Reynolds [3] ampliaron el estudio de la estructura de la capa límite turbulenta. Dicha técnica consiste en introducir un alambre fino de platino como catodo de un sistema de dos electrodos; el hilo de platino generalmente se coloca en la región de interés y el otro electrodo se coloca fuera de esta. Al aplicar un voltaje apropiado entre los electrodos, el agua junto al hilo se electroliza, dando lugar a la aparición de pequeñas burbujas de hidrógeno. Pulsando el voltaje al hilo, se generan líneas de burbujas para un tiempo. Estas líneas no solo permiten la visualización del flujo en un tramo más grande, sino que se usan para determinar distribuciones de velocidad instantáneas.

De las observaciones visuales se encontró en la subcapa viscosa la existencia de movimientos bien organizados, dando por resultado la formación de estrías de alta y baja velocidad alternadas en la dirección transversal de la corriente. Las estrías son estructuras características a una distancia  $y^+ = 2.7 - y^+ = 4.5$ , Dichas estrías ondean dentro de la subcapa viscosa, y se levantan

intermitentemente pasando algunas veces fuera de la capa límite. Las estrías tienden a ser más cortas y a oscilar más violentamente en flujos con gradiente de presión adverso, y ser más largas y tranquilas en gradientes de presión favorables.

Kline sugiere que un mecanismo importante en la producción de turbulencia es la eyección violenta de fluido de baja velocidad de regiones muy cercanas a la pared; por este motivo se llevaron a cabo estudios cuantitativos con el fin de determinar la estructura de las estrías y su interacción con el flujo externo.

Una característica importante de las estrías es su espaciamiento medio  $\lambda$ . Relacionado con parámetros de la capa de pared tales como la velocidad cortante y la viscosidad,  $\lambda$  se expresa adimensionalmente como  $\lambda^+ = \lambda \frac{u_\tau}{\nu}$ . De estudios visuales, Kline (1967) se sugiere que  $\lambda^+$  corresponde aproximadamente a  $\lambda^+ = 100$ . Esta es probablemente la dimensión característica más aceptada universalmente en el estudio de la estructura de la capa límite; como lo confirman los reportes de varios trabajos de investigación como son el de Kim 1971, Grass 1971, Praturi y Brodkey (1978) y algunos otros.



DEPFI

Una segunda característica, la más importante de las estrías, es su eyección de la pared y rompimiento. A este respecto Kline observó una secuencia de levantamiento, oscilación y rompimiento de las estrías al que aplicó el término "bursting".

El proceso de rompimiento se desarrolla de la siguiente manera: inicialmente las estrías se mueven aguas abajo de la corriente y cada estría se levanta muy despacio hacia afuera de la pared. Cuando la estría alcanza una altura  $y^+$  entre 8 y 12, esta empieza a oscilar, la oscilación se amplifica y termina

en un abrupto rompimiento en una región entre  $10 < y^+ < 30$ .

Después del rompimiento, las estrías se contorsionan y estiran y una porción de éstas es expulsada hacia afuera a lo largo de una trayectoria identificable. Además observaron que, más allá de  $y^+ = 40$ , el fluido expulsado de la capa límite continúa moviéndose con una velocidad de 80% de la velocidad media en la región externa de la capa límite.

#### Rompimiento (Bursting)

Corino y Brodkey estudiaron la región cercana a la pared en el caso de turbulencia completamente desarrollada en el flujo a través de un tubo.

Ellos usaron una técnica de visualización consistente en introducir partículas sólidas de tamaño coloidal a un líquido, y usarlas como trazadores y filmar sus movimientos por medio de una cámara de cine de alta velocidad siguiendo el flujo.

En contraste con Kline, Corino y Brodkey [5] observaron que la subcapa viscosa ( $y^+ < 5$ ) era esencialmente pasiva.

En la región  $5 < y^+ < 15$  se originaba la mayoría de las expulsiones de fluido. Dichas expulsiones ocurrían aleatoriamente en el espacio y tiempo, y formaban parte de una secuencia de eventos.

El primer evento consistía en una desaceleración de la velocidad axial del fluido dentro de una región local cercana a la pared. La desaceleración se producía por el reemplazo del fluido que se movía con una velocidad igual a la media local, por una masa de fluido de velocidad menor. Una característica importante fue la desaparición del gradiente de velocidad en esta región; y la observación de una diferencia de velocidades de hasta 50% de la veloci-

dad media local.

El segundo evento de la secuencia fue una aceleración correspondiente a una masa de fluido proveniente de aguas arriba con una velocidad igual a la media local, la cual entraba a la región desacelerada y empezaba a acelerarla pero éstas regiones no interactuaban entre sí, aunque eran opuestas.

El tercer evento fue la expulsión de fluido de baja velocidad; las expulsiones generalmente ocurrían antes de que la totalidad del fluido desacelerado fuera completamente acelerada. La expulsión era un movimiento violento hacia afuera de la pared, y en numerosas ocasiones mientras se desarrollaba una expulsión sucedían otras aguas abajo.

El fluido así expulsado se encontraba rápidamente con un fluido de velocidad muy grande, produciéndose una fuerte interacción en una zona de  $7 < y^+ < 30$ , fig. 6.3.

El último evento fue la entrada de un fluido procedente de aguas arriba moviéndose casi paralelo a la pared. A esta corriente, que barría casi todas las perturbaciones de la pared reestableciendo el perfil de velocidades, le denominaron "barrido", fig. 6.4.

El ciclo anterior se repetía aleatoriamente en el espacio y tiempo.

Corino y Brodkey estimaron que aproximadamente el 70% de los esfuerzos de Reynolds medidos por Laufer (1954) correspondían a las expulsiones.

Estos resultados fueron confirmados por Kim [4], quién mostro que toda la energía de la turbulencia ocurre durante los burst en una región  $0 < y^+ < 100$ . Kim usó una técnica de visualización consistente en colocar dos hilos generadores de burbujas, uno transversal a la corriente y otro normal a la pared.



Kim describe al burst como el levantamiento de una estría de baja velocidad, creando un punto de inflexión en el perfil de velocidades, seguido por un movimiento oscilatorio que termina en un rompimiento. La fig. 6.5 muestra el proceso de levantamiento de una estría de baja velocidad.

Kim observó que la oscilación de las estrias se presentaba de tres maneras diferentes siendo la más común la de "un vórtice en la dirección de la corriente"; la siguiente es un "movimiento ondulatorio" y la menos frecuente es "un vortice transversal". En la fig. 6.6 se puede apreciar la forma típica de estos movimientos oscilatorios.

Los resultados de Kim son consistentes con la suposición de que los tres tipos de movimientos oscilatorios sean estelas, desprendidas cuando al levantarse una estría se encuentra con el flujo externo de mayor velocidad [34].

Desde este punto de vista los tres diferentes tipos de movimiento oscilatorio corresponden a diferentes números de Reynolds locales, dependiendo de la distancia a la pared en que ocurra la interacción de la estría de baja velocidad con el flujo externo. De aquí que el "vórtice en dirección de la corriente sea el más frecuente en una región cercana a la subcapa viscosa este movimiento corresponde a una estela del tipo 2 de Margavey y Bishop. En la fig. 6.7 se muestran los diferentes tipos de estelas según Margavey y Bishop.

A una distancia mayor de la pared ocurre el vórtice ondulado correspondiente a una estela de tipo 3 de Margavey, y un poco más lejos ocurre el vórtice transversal o anular, correspondiente a una estela de lazos del 4° tipo de Margavey; el cual es poco frecuente ya que es muy difícil que una estría se levante hasta una región lejana de la pared sin interactuar con el flujo externo. Estos tres tipos de vórtices se muestran esquemáticamente en la fig.

## 6.8.

Usando una técnica de burbújas de hidrógeno, Grass [35] estudió visual y cuantitativamente la capa límite turbulenta; él se interesó en estudiar los efectos de rugosidad de la superficie.

Grass observó dos eventos bien definidos independientemente de la rugosidad de la pared: la expulsión de fluido de baja velocidad desde la pared, y la entrada de fluido de alta velocidad hacia la pared, a lo que llamó barrido.

Grass obtuvo los perfiles de velocidad instantáneos para una pared lisa, una pared de transición con arena de 2 mm de diámetro y una pared con rugosidades de 9 mm. Estos perfiles se muestran en la fig. 6.9 en donde se puede apreciar en las fases de expulsión y barrido.

En base a una gran cantidad de mediciones de los perfiles instantáneos de velocidad, obtuvo las intensidades de la turbulencia y los esfuerzos de Reynolds. En la fig. 6.10 se muestran estos, graficados contra los valores de  $y/D$  ( $D =$  tirante).

De aquí se puede deducir que, cuando la rugosidad se incrementa, la intensidad longitudinal  $u'$  decrece y la intensidad vertical  $v'$  se incrementa. A una cierta distancia de la pared, la intensidad de la turbulencia se hace independiente de la rugosidad, dependiendo solamente de la velocidad cortante  $u_T$  y de la distancia a la pared; y los esfuerzos de Reynolds dentro de la capa de pared tienden a incrementarse con un incremento de la rugosidad.

Como se vio anteriormente, Corino estimó que aproximadamente el 70% de los esfuerzos de Reynolds eran producidos por las expulsiones; Grass por otro lado observa que los dos eventos más importantes que contribuyen a los esfuer-

zos de Reynolds son las expulsiones y los barridos. En el trabajo de Corino se habla además de otro tipo de eventos, denominados interacciones que ocurren cuando el flujo de baja velocidad expulsado es desviado hacia la pared o hacia afuera de la pared. Estos eventos se consideran en el trabajo de Wallace Eckelmann y Brodkey investigadores del Instituto Max Planck de Gotinga han publicado varios artículos sobre el estudio experimental de las contribuciones al esfuerzo de Reynolds de los cuatro tipos de movimiento en la región de la pared de un flujo turbulento. Los estudios se llevaron a cabo en un canal, usando como fluido aceite; ésto se hizo con el fin de incrementar el espesor de la capa límite. El aceite usado con una viscosidad cinemática de  $6 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$  a  $25^\circ \text{ C}$ , en un canal de 22 cm de ancho, 85 cm de profundidad y 8 m de largo. El número de Reynolds tomando como longitud característica el ancho del canal, fue de 7 700 para una velocidad máxima de operación de 21 cm/s. En estas condiciones, una distancia de 1 cm desde la pared correspondió a  $y^+ \sim 18$ , lo que permitió colocar una prueba en X (dos anemómetros de hilo caliente en cruz), registrándose señales de las componentes de velocidad u y v, su intensidad y signo (fig. 6.11) [36].

De acuerdo a los signos de las fluctuaciones de velocidad, se detectaron las contribuciones de cada tipo de evento a los esfuerzos de Reynolds. Así, por ejemplo, en un barrido se tendría un fluido de alta velocidad moviéndose hacia la pared, esto es ( $u > 0, v < 0$ ).

En la tabla siguiente se presentan los diferentes tipos de movimiento identificados:

Signo de $u'$	Signo de $v'$	Esfuerzo de Reynolds	Tipo de Movimiento
-	+	+	Expulsión o bursting
+	-	+	Entrada o barrido
-	-	-	Interacción hacia la pared
+	+	-	Interacción hacia afuera de la pared.

Clasificando de esta manera los esfuerzos de Reynolds, obtuvieron que las expulsiones y los barridos contribuyen positivamente en un 70% cada uno y las interacciones en un 40%.

En la fig. 6.12 se muestran los esfuerzos de Reynolds normalizados con el cuadrado de la velocidad de fricción para cada tipo de evento; en esta figura se observa que las máximas contribuciones al esfuerzo de Reynolds ocurren en la región  $20 \lesssim y^+ \lesssim 40$ .

Para definir mejor las características de los eventos, se definieron los tiempos promedios de cada evento. Así en la fig. 6.13 el evento de expulsión es 1/3 más grande que el de barrido en  $y^+ = 30$ ; sin embargo en la región muy cercana a la pared existe mayor contribución de los barridos al esfuerzo de Reynolds, ya que en esta región su duración es mayor [37].

Para valores  $y^+ > 30$ , esencialmente todos los valores instantáneos de  $u'v'$  muy grandes ( $u'v' > 8\overline{u'v'}$  se considera que corresponden a expulsiones); mientras que en la región  $y^+ = 3$  estos valores provendrán de los barridos esto concuerda bastante con las observaciones de Corino y Brodkey, quienes vieron que las expulsiones se originan en una región  $5 < y^+ < 30$ , pero el barrido llega hasta la pared.

En los estudios iniciales sobre el proceso de los rompimientos, se veía este fenómeno limitado esencialmente a la región de la pared, y sus características se relacionaban a parámetros de la capa de pared como son  $u_T$  y  $v$ .

Sin embargo Rao, Narasimha, Narayanam [38] llevaron a cabo estudios de este fenómeno, tomando registros de las fluctuaciones de velocidad en función del tiempo, procesando las señales y haciendo uso de filtros para extraer las partes no deseadas de la señal; observaron en los registros períodos bien definidos de alta actividad (burst) alternados con períodos de baja actividad.

De estos estudios concluyeron que la frecuencia media de los rompimientos es independiente del filtro usado, y el promedio de burst no varía mucho con la distancia a la pared.

Después de examinar una gran cantidad de datos en un rango de número de Reynolds entre  $600 < R\theta < 9000$  concluyeron que el período medio de los burst se puede expresar adimensionalmente como  $T^+ = T u_T^2 / \nu$  el cual depende del número de Reynolds en la capa límite.

Rao trató de relacionar  $T^+$  con los parámetros de la región externa de la capa límite ( $U, \delta$ ) encontrando que  $T$  es del orden de  $\delta/u$ , siendo  $T^+ = UF / \delta$ , el cual es independiente de  $R\theta$ .

El hecho de que  $F$  sea del orden de  $\delta/U$  sugiere que el burst corresponde a regiones de vorticidad concentrada, las cuales están separadas a una distancia promedio  $L \sim UT$ .

De los resultados obtenidos por Rao se deduce:

1. La capa de pared no es pasiva, ni es la única responsable de la produc-

ción de energía de la turbulencia, sino que también es muy importante la interacción de esta región con la región externa.

2. De los resultados preliminares tras una rejilla y en estelas se ha observado que los burst están relacionados con el fenómeno de intermitencia en estructuras turbulentas de pequeña escala, por lo que se puede decir que los burst quizá sean una estructura característica de todos los flujos turbulentos.

Los trabajos revisados hasta el momento se refieren al estudio de regiones muy cercanas a la pared; En 1971 Nychas [39] realiza un estudio visual de la capa límite turbulenta sobre una placa plana; usando una técnica similar a la usada por Corino y Brodkey, visualizó una región comprendida desde la pared hasta  $y^+ = 600$ .

Nychas observó una secuencia similar a la observada por Corino la que describe de la siguiente manera: El primer evento fue una desaceleración del flujo seguida por una aceleración las cuales se extienden desde la pared hasta la región externa  $y^+ = 150$ ; la aceleración ocurre más rápidamente en la región externa.

Ahora el evento más importante observado en la región externa fue la aparición de un vórtice transversal a la corriente, correspondiente a un movimiento de gran escala, el cual se movía aguas abajo y hacia afuera de la pared a una velocidad un poco menor a la media local (fig. 6.14).

La formación del vórtice parece ser el resultado de la interacción inestable de las zonas de alta y baja velocidad (inestabilidad de Helmholtz). Dichos vórtices ocurrían en ambos sentidos de giro.

Una observación importante es la asociación que parece existir entre el fluido de la región de la pared y los vórtices transversales; el fluido de la región cercana a la pared permanece pasivo hasta que aparece el vórtice transversal. De donde se sugiere que los vórtices transversales introducen en la región de la pared las condiciones necesarias que dan origen a las expulsiones de fluido. Es muy probable que este mecanismo se produzca por la modificación del campo de presiones debida al vórtice transversal.

Nychas encontró que en la región cercana a la pared el flujo no es laminar y los eventos más importantes de esta región son las expulsiones y los barridos. Por último observó, se presentan dos movimientos de gran escala: las entradas y las salidas; las cuales se extienden desde la región externa hasta una capa adyacente a la pared. Por lo general una entrada sigue a una salida, y aparecen algún tiempo después del vórtice transversal.

En el trabajo de Nychas se presenta un esquema muy ilustrativo que trata de explicar el mecanismo de generación del flujo turbulento (fig. 6.15).

En este mecanismo los vórtices transversales actúan transfiriendo energía entre la región interna y externa de la pared.

## VI. 2 MECANISMOS QUE PRODUCEN LA ESTRUCTURA DE LA CAPA LIMITE

En esta sección se tratará sobre los mecanismos y modelos propuestos por algunos investigadores para explicar la formación de las estructuras que se observan en la capa límite turbulenta, como lo son las estrías de transición, las estrías de la subcapa viscosa y los burst o rompimientos del flujo en turbulencia.

En primer lugar se verá la explicación de Kline para la formación de las estrías (Kline [3]). En este trabajo Kline dice "el rompimiento de las estrías de la pared es muy importante en la determinación de la estructura de la capa límite turbulenta; en particular nosotros creemos que este rompimiento domina el proceso de transferencia entre la región interna y externa".

Una explicación física de la formación de las estrías fue propuesta por Lighthill, 1963, quién observó que un efecto natural del flujo cercano a una pared es un intercambio de flujo hacia la pared y hacia afuera de ésta como se muestra en la fig. 6.16.

Esta acción de cambio de flujo actúa alterando la componente transversal de la vorticidad.

La componente transversal de la vorticidad será estirada en las regiones donde el flujo es hacia la pared y comprimida en regiones donde el flujo es hacia afuera. Debido a que la componente más importante de la vorticidad es  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , si el flujo es hacia la pared, la vorticidad se incrementa al aumentar la velocidad local  $u$ . Esto se debe a que la velocidad del fluido externo es mayor; lo contrario ocurre cuando el flujo es hacia afuera de la pared.



De manera que el estiramiento y compresión de la vorticidad en la dirección Z, dará por resultado una variación de la velocidad  $u$  en la sección transversal.

Por otro lado, una variación de la velocidad  $u$  en la sección transversal puede desarrollarse en forma natural como resultado de la tridimensionalidad de la turbulencia. De esta variación de la velocidad se genera una vorticidad en la dirección de la corriente, la cual colecta fluido de baja velocidad cerca de la pared formando las estrías de la capa de pared.

Para el mecanismo de rompimiento de las estrías se hace analogía con las estrías de transición, en donde Klebanoff [19] Kovaznay, Komoda y Vasudeva [40] observaron que periódicamente se formaban capas de intenso cortante (concentración de vorticidad) en la porción externa de una capa límite en transición, y éstas se localizaban con un espaciamiento correspondiente a las estrías. Esto parece ser debido al estiramiento de un vórtice en la región externa de la capa límite. Stuart (1965) propone un modelo simple para el mecanismo de estiramiento de los vórtices. Stuart trabajó considerando las estrías de transición. Se sugiere que el estiramiento de un vórtice da por resultado la formación intermitente de capas cortantes y el rompimiento de la estría, en la fig. 6.17 se muestra esquemáticamente este modelo.

Con el objeto de encontrar alguna relación entre el flujo externo y el comportamiento de las estrías de la pared, Offen y Kline [23] observaron una capa límite turbulenta usando dos inyectores de colorante y un generador de burbujas de hidrógeno; los inyectores se usaron con el fin de ampliar la zona de visualización. De este trabajo se concluye que cada levantamiento o expulsión está asociado con una perturbación originada en la región logarítmica de la capa límite, y es caracterizado por un movimiento de fluido hacia la pared. Tales perturbaciones son generadas aguas arriba por la interac-

ción de una expulsión anterior con el fluido de la región externa. De esta manera se forma un ciclo en el que la interacción entre la región interna y externa de la capa límite es la clave del mecanismo que produce la turbulencia.

Algunos Investigadores han asociado las estrías de la pared a vórtices longitudinales. Así la existencia de vórtices longitudinales en la región de la pared en una capa límite ha sido sugerida por Stuart [3] y Hama y Nutant [1]. Bakewell [41] establece que el fenómeno dominante que ocurre en la subcapa viscosa es el proceso de estiramiento de vórtices pares girando en direcciones contrarias; Clark y Markland [42] muestran un esquema de estos vórtices longitudinales con sus dimensiones medias (fig. 6.18). En este trabajo se observa que existen, además de los vórtices longitudinales, vórtices transversales los cuales se mueven aguas abajo paralelos a la pared, incrementando su diámetro conforme se desplazan (fig. 6.19).

Una característica notable es que, conforme se incrementa la distancia a la pared, el tiempo de vida longitudinal de un vórtice transversal se incrementa alcanzando distancias de  $\Delta x^+ = 1000$ .

Se cree que existe una conexión entre los vórtices longitudinales y los transversales, pues un vórtice transversal precede a la formación de dos vórtices longitudinales. "El mecanismo de formación de estas estructuras vórticosas podría ser una inestabilidad en la región de intenso cortante próxima a la pared".

Más recientemente Blackwelder y Eckelmann [43] realizaron un estudio bastante detallado de la estructura de las estrías de pared. Usando hot films, sensores y arreglos de anemómetros de hiló caliente en la pared, analizaron

las componentes de la velocidad en la dirección de la corriente, las componentes de la velocidad en la dirección transversal, así como los gradientes de estas componentes en dirección normal a la pared; concluyendo que las estrías de baja velocidad vistas por Kline y otros investigadores se producen en una región situada entre dos vórtices longitudinales rotando en sentido contrario, los cuales expulsan el fluido hacia afuera de la pared para formar las estrías de baja velocidad, como se puede apreciar en la fig. 6.20. Esta acción de expulsión de fluido continúa hasta que es interrumpida por un barrido proveniente de la región externa. La longitud de dichos vórtices tiende a indicar que son casi estables y solamente son destruidos por la acción de los barridos. El fluido de alta velocidad de los barridos hace que se produzca un perfil de velocidad, con inflexión.

Registrando correlaciones espacio-temporales de los gradientes de las componentes de la velocidad en la dirección de la corriente así como en la dirección transversal, encontraron que las correlaciones alcanzaban una extensión  $\Delta x^+ > 1000$  lo que puede verse como longitud característica de los vórtices longitudinales y a su vez de las estrías.

En los trabajos revisados anteriormente, se sugiere que los vórtices pares en la región de la pared son los que producen la salida de flujo de baja velocidad atrapado entre ellos. En contraste con esto, Praturi y Brodkey [44] sugieren que los vórtices de la región de la pared son el resultado de la interacción entre la entrada de fluido de alta velocidad proveniente de la región externa de la capa límite y la salida de fluido de baja velocidad de la región de la pared.

Praturi utilizó una técnica de fotografía estereoscópica para tomar los movi

mientos de las partículas en tres dimensiones. Usó partículas suspendidas en el flujo como trazadores. En este trabajo se propone un modelo fenomenológico que intenta explicar las características estructurales observadas en la capa límite.

El modelo se inicia con la aparición de un frente de fluido de alta velocidad; aguas abajo el fluido se mueve a una velocidad menor; la diferencia de velocidades entre las capas de fluidos da por resultado una inestabilidad de tipo Helmholtz y culmina en la formación de un vórtice transversal en la región externa de la capa límite, fig 6.21. Esto concuerda con lo observado por Nychas [39].

En el segundo estado el vórtice se mueve por convección del flujo. La región de la pared empieza a entrar en actividad, la cual es caracterizada por las expulsiones y los movimientos vórticosos. Se cree que las expulsiones pueden ser una consecuencia del fluido de baja velocidad que queda atrapado en el frente de fluido de alta velocidad por continuidad, el flujo que entra fuerza a que salga el de baja velocidad.

Las expulsiones se originan en una región  $5 < y^+ < 30$  y pueden llegar hasta una distancia  $y^+ = 100$ .

Los movimientos vorticosos en la región de la pared (vórtices longitudinales y vórtices transversales) parecen ser el resultado del fuerte cortante que se produce entre el frente de alta velocidad que se mueve hacia la pared y la salida de fluido de baja velocidad atrapado por éste. La fig. 6.21 es una sección bidimensional. En la realidad el frente de alta velocidad no es uniforme a través de la sección transversal, y más bien parece como en forma de dedos en los cuales queda atrapado fluido de velocidad baja.

Estos dedos son muy largos y corresponden a las estrías de alta y baja velocidad de la región de la pared. Nótese que en éste modelo el factor que causa la aparición de los vórtices es el cortante producido por las capas de fluido de alta y baja velocidad, y que estos vórtices son pequeños y muchos, ya que en este modelo los vórtices son una consecuencia, más que un factor que cause la formación de estrías.

El tercer estado del ciclo se caracteriza por un decaimiento del vórtice transversal, el cual se hace menos intenso; y por esto la actividad en la región de la pared cesa. El vórtice transversal conforme se mueve aguas abajo consume la capa de cortante, desapareciendo las zonas de alta y baja velocidad las cuales son reemplazadas por un flujo más uniforme. La circulación del vórtice hace que se ondule la intercara entre de flujo laminar y turbulento e induce la entrada de fluido de la región de flujo irrotacional. A esta entrada de fluido por continuidad corresponderá una salida de flujo de la capa límite esto se muestra en la fig. 6.21, d y e.

En la fig. 6.22 se muestra esquemáticamente el modelo fenomenológico y se muestran las interrelaciones entre las estructuras observadas en la capa límite. En este modelo el frente de alta y baja velocidad es el factor principal, el cual causa tanto la formación de los vórtices transversales como los pequeños vórtices longitudinales observados en la región de la pared.

Dos puntos importantes en este trabajo son:

- 1) Se considera que los eventos de la región externa del flujo son los que motivan la acción en la región de la pared. Algunos autores sugieren que las expulsiones de fluido son las que causan la ondulación de la intercara turbulento-no turbulento; entre ellos Blackwelder y Kovaznay (1972), Kim, Kline, Reynolds (1971). Sin embargo en este trabajo las ondulacio-

nes se asocian al movimiento de los vórtices transversales en la región externa esto es; el frente de alta y baja velocidad es el que produce las condiciones necesarias para la actividad de la región de la pared.

- 2) En este modelo los vórtices longitudinales de la región de la pared son el resultado de la interacción entre el fluido de alta velocidad que entra y el fluido de baja velocidad que sale. Esto en contraste con algunos autores que han sugerido modelos de, páres de vórtices rotando en sentido contrario en la región de la pared como los responsables de las expulsiones de fluido de baja velocidad localizado entre ellos. [ejem. Bakewell y Lumley 1967 , Kline 1971].

En el trabajo de Nychas (1973) los vórtices transversales dan por resultado cambios de presión que causan la salida de flujo de baja velocidad, lo que puede ser verdad, pero en el trabajo de Praturi se sugiere la posibilidad de que las expulsiones de fluido sean una mera consecuencia de continuidad.

Sin embargo de las mediciones con anemometría es difícil establecer cual de los dos mecanismos propuestos anteriormente es el correcto, puesto que ambos dan en promedio más o menos la misma apariencia. Es importante enfatizar que un mecanismo requiere de los vórtices longitudinales, mientras que el otro no; pero no es necesario el excluírlos, de hecho se puede esperar que existan y que se observen con frecuencia en el flujo.

#### Modelo Ondulatorio de la turbulencia.

Un modelo ondulatorio para la formación de las estructuras de la capa límite en transición y la capa límite turbulenta es el propuesto por Levi [45]. Este modelo se basa en la ley universal de Strouhal, la cual establece que

la frecuencia con la que oscila una masa de fluido refrenada de espesor  $d$ , excitada por el flujo externo de velocidad  $U$ , es aproximadamente igual a la frecuencia teórica de un oscilador armónico de longitud  $d$ , dotado con una energía específica  $\frac{U^2}{2}$ .

La energía mecánica específica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2} (2 \pi d f)^2$$

mientras que la energía cinética disponible es  $U^2/2$ ; igualando ambas energías resulta:

$$S = \sqrt{E / (U^2/2)} = 2 \pi f \frac{d}{U} = 1$$

Siendo la longitud de onda de las perturbaciones ondulatorias

$$\lambda = \frac{\alpha U}{f} = 2 \pi \alpha d$$

Evidencias de la validez de la ley universal de Strouhal se pueden observar en el caso de estelas, chorros, ondas de choque, autorrotación de alas [47].

De acuerdo con Knapp y Roche [21] y otros investigadores, el proceso de transición se caracteriza por la aparición de ondas longitudinales las cuales se hacen transversales un poco aguas abajo. La longitud de las ondas longitudinales es casi igual a la de las ondas transversales y aproximadamente igual a  $2 \pi \delta$ .

Levi sugiere ondas estacionarias transversales superpuestas a ondas longitudinales de longitud de onda  $2 \pi \delta$  como un mecanismo que explique la formación de las estrias de transición. Este se muestra en la fig. 6.23. Donde se puede observar que un ascenso de una onda estacionaria extrae flujo de

baja velocidad hacia afuera de la pared creando una zona de baja velocidad por otro lado, un descenso de la onda transporta fluido de alta velocidad hacia la pared creando una zona de alta velocidad.

En una capa límite completamente desarrollada en la región cercana a la pared se forma la subcapa viscosa, la cual se caracteriza por la formación de estrias de alta y baja velocidad análogas a las estrias de transición; pero su espaciamiento es menor.

Si las estrias de la capa de pared son formadas al igual que las de transición por ondas estacionarias transversales, de acuerdo a la ley de Strouhal la capa de fluido refrenada sería el espesor de la capa de pared  $\delta_w$  el cual se puede deducir aproximadamente del trabajo de Blackwelder y Eckelman en donde  $\delta_w = 30\nu/u_T$ . Ahora el espaciamiento entre estrias de baja velocidad sería  $\lambda_w = \pi\delta_w = 94\nu/u_T$ , valor que concuerda con el medido por Kline.

Este modelo de ondas transversales implica que la longitud promedio de las estrias esté limitada por el cambio de fase de la onda puesto que en donde existía una estria de baja velocidad aparecía una de alta y viceversa. La longitud de las estrias se deduce de el trabajo de Emmerling [47], quien investigó la presión instantánea en la región de la pared en una capa límite turbulenta con  $U = 8.5$  m/s,  $U_T/\nu = 22.5 \text{ mm}^{-1}$ , descubriendo fases alternadas de fluctuaciones de amplitud alta con fases de amplitud baja.

De un registro típico se muestra una fase de 7.5 ms de duración, en la cual las fluctuaciones de amplitudes altas se mueven con una velocidad de convección  $U_c = 0.7U$ . De aquí se deduce que la longitud cubierta en cada fase será  $L = T U_c = 100.4 \nu/u_T$ . Un valor similar fue encontrado por Blackwelder y Eckelmann [43] como se vio anteriormente en el caso de los vórtices longitudinales. Levi concluye que las ondas estacionarias transversales en la pa



red están asociadas a ondas de longitud  $2\pi\alpha\delta$  donde  $\alpha$  es un coeficiente de velocidad convectiva, por ejemplo 0.7. En la capa límite turbulenta Badri Narayanan y Marvin [48] extendieron la región de mediciones de las fluctuaciones de velocidad en la pared, realizados por Narahari Rao [38] a toda la capa límite, encontrando número de Strouhal de  $f\delta/U = 0.166$ .

Esto sugiere la presencia de ondas de longitud  $\lambda = 2\pi\delta$ .

A estas ondas se asocia las regiones de fluido de alta velocidad y baja velocidad en la dirección de la corriente, observadas por Nychas, de manera que el flujo de baja velocidad corresponde a una salida de flujo de la región interna y a la mitad de la longitud de onda, el fluido de alta velocidad corresponderá a la otra, como se observa en la fig. 6.24.

El evento de los burst con este modelo se explica de la manera siguiente. De acuerdo a lo observado por Nychas [39], en la intercara de fluido de alta velocidad con el fluido de baja velocidad, se forma un vórtice transversal creado por el esfuerzo cortante el cual se mueve hacia afuera de la capa límite; éste succiona fluido de baja velocidad de la subcapa viscosa, de donde resultan los burst al formarse una estela detrás de el fluido de baja velocidad. Esto explica la asociación de la frecuencia de los burst con las variables que definen la región externa de la capa límite.

De acuerdo a lo anterior, Levi propone un modelo oscilatorio para la turbulencia de pared, el cual se muestra en la fig. 6.25, en donde el eje X es en la dirección del flujo, el eje Y es perpendicular a la pared y el eje Z es transversal a éste.

Las ondas A en el sentido longitudinal y las ondas transversales B, de longitud  $2\pi\delta$  (siendo  $\delta$  el espesor de la capa límite) aparecen en la transición

y persisten en la turbulencia completamente desarrollada.

En la transición las ondas B explican la formación de estrías de transición y la combinación de las ondas A y B genera las estructuras en punta de flecha y Spots característicos de la transición. En un flujo turbulento las ondas A explican la alternación de fluido de alta velocidad y baja velocidad observada por Nychas, y como resultado de ésta la aparición de los burst.

En la región de la pared, las ondas estacionarias transversales C de longitud  $\pi\delta\omega$  ( $\delta\omega$  es el espesor de la capa de pared) producen las estrías de la subcapa viscosa y definen su espaciamiento. Su longitud es controlada por ondas longitudinales A' de longitud de onda  $\lambda = 2\pi\delta$  ( $\alpha$  es el coeficiente de convección de la velocidad definida como la relación entre la velocidad local en la dirección de la corriente y la velocidad en la región externa de flujo libre).

Este modelo justifica la creación de remolinos turbulentos; se supone que en el flujo se presentan, al mismo tiempo que las ondas A de longitud de onda  $\lambda = 2\pi\delta$ , ondas de longitud  $\lambda/2, \lambda/3, \dots$ , correspondientes a las armónicas  $2f, 3f$  de la frecuencia fundamental  $f = U/2\pi\delta$ . Estas ondas longitudinales forzan a las partículas a girar con la frecuencia de la onda, siguiendo trayectorias en forma de óvalo, cuyo tamaño disminuye conforme decrece la distancia a la pared. De manera que la oscilación de la capa límite crea remolinos de varias frecuencias.

Bajo estas suposiciones, Levi determina teóricamente el aspecto de energía a través de una aproximación de la mecánica cuántica, de la manera siguiente.

Si se admite que los remolinos de frecuencias  $f_n = nf$  (donde  $f$  es el modo fundamental y  $n=1, 2, 3, \dots$  las armónicas) son capaces de recibir o emitir energía

a través de cuantos  $\epsilon_n$ .

$$\epsilon_n = \eta S_n^2$$

en el cual  $\eta$  es un factor energético, función del número de  $R$  de la corriente libre y  $S_n = nS = n/2\pi$  donde  $S_n$  representa también la relación de energía  $f_n \delta U/2$ , asociada con la frecuencia  $f_n$  y la energía cinética total  $U^2/2$ . Debido a que existe un gran número de remolinos, la probabilidad de encontrar un remolino de frecuencia  $f_n$ , que emita un cuanto de energía, será proporcional a  $e^{-S_n}$ , la probabilidad de encontrar un remolino con dos cuantos de energía será proporcional a  $e^{-2S_n}$  y así sucesivamente.

De donde se deduce que el número de remolinos con frecuencia  $f_n$  y  $K$  cuantos de energía ( $K = 0, 1, 2, \dots$ ) se puede escribir como  $N_K = C e^{-KS_n}$ , donde  $C$  es una constante numérica.

El número total de remolinos de frecuencia  $f_n$  será

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots = C (1 + e^{-S_n} + e^{-2S_n} + \dots) =$$

$$C (1 - e^{-S_n})^{-1}$$

de donde

$$C = N (1 - e^{-S_n})$$

La energía total  $E_t$  correspondiente a la totalidad de los remolinos será

$$E_t = N_1 \epsilon_n + N_2 (2\epsilon_n) + \dots = C e^{-S_n} \epsilon_n (1 + 2e^{-S_n} + 3e^{-2S_n} + \dots)$$

$$= C e^{-S_n} \epsilon_n (1 - e^{-S_n})^{-2}$$

Sustituyendo el valor de  $C$ ,

$$E_t = N \epsilon_n (e^{S_n} - 1)^{-1}$$

Sustituyendo ahora el valor de  $E_n$  en la ec. anterior y dividiendo por  $N$  se obtiene:

$$E_m = \eta S_n^2 (e^{S_n} - 1)^{-1}$$

donde  $E_m = E_t/N$  = energía media de los remolinos de frecuencia  $f_n$ . Si además se sustituye  $S_n = \eta/2\pi$  se puede escribir

$$4 \pi^2 E_m/\eta = n^2 (e^{n/2\pi} - 1)^{-1}$$

Dicha ecuación ha sido graficada en la fig. 6.26 en donde  $4 \pi^2 E_m/\eta$  aparece en función de los múltiplos de la frecuencia. La curva resultante concuerda cualitativamente con el espectro de energía deducido en base al análisis dimensional [46].

En este capítulo se ha hablado de las estructuras observadas en la capa límite, así como de los mecanismos y modelos propuestos para su generación.

De esto se puede concluir que:

- 1) Se ha observado la presencia de estructuras bien organizadas en la capa límite en transición y la capa límite turbulenta.
- 2) Las estructuras coherentes se forman debido a algún tipo de inestabilidad, tal como puede ser una inestabilidad inflexional sugerida por Kim ó una inestabilidad del tipo de Kelvin -Helmholtz debido al esfuerzo cortante entre dos capas de fluido de diferente velocidad.
- 3) Las estructuras características que se han observado y estudiado más son las manchas de turbulencia o spots, y las estriás de transición en una capa límite en transición; en una capa límite turbulenta las estructuras más importantes son las estriás de la subcapa viscosa y el

fenómeno de los burst. En un gran número de trabajos se presentan las características de estas estructuras tales como su longitud, espaciamiento, frecuencia, y se ha observado una buena concordancia en los resultados presentados en estos, por ejemplo el espaciamiento entre estrías de la subcapa viscosa es  $\lambda^+ = 100$ , la longitud de estos es de  $\Delta x^+ = 1000$  y la frecuencia de los burst se escala con  $T_b U_\infty / \delta = 6$ .

- 4) De los mecanismos propuestos para la formación de turbulencia se deduce que existe una interacción entre el fluido de la corriente libre, el fluido de la capa límite y el fluido de la región de la pared. Dicha interacción da por resultado estructuras turbulentas; pero aún no se ha aclarado completamente como es que ocurre.
- 5) Los estudios de visualización generalmente son típicamente cualitativos, presentando bastante información cualitativa pero pocos datos, mientras que, cuando se usan anemómetros de hilo caliente o anemómetros de rayo laser, se obtienen muchos datos pero su significado físico es muy limitado. Consecuentemente se debe manejar en una investigación tanto la visualización como la información cuantitativa.

Recientemente Hussain [51] ha realizado una revisión sobre el tema de estructuras coherentes. En este trabajo se define una estructura coherente como la extensión sobre la cual existe una componente organizada de la vorticidad que tiene correlación en fase.

Hussain dice "La turbulencia consiste de movimientos coherentes y movimientos incoherentes o de fase aleatoria superpuestos, extendiéndose los movimientos no coherentes más allá del límite de las estructuras coherentes".

El tamaño de una estructura coherente es comparable a la longitud caracte-

rística del flujo (extensión transversal del flujo). Sin embargo existen movimientos coherentes cuyo tamaño es menor que dicha longitud característica, por lo que a estas estructuras las denomina subestructuras coherentes por ejemplo los remolinos, las estriás, etc.

Con respecto a las características de estas estructuras, una estructura coherente es responsable del transporte de masa, calor y momento, pero no es en sí misma altamente energética, pues la mayor parte de la energía cinética de la turbulencia se asocia a la turbulencia incoherente; siendo ésta de gran importancia sobre todo en flujos completamente desarrollados.

El mecanismo de formación es el resultado de la inestabilidad de un flujo. Dos mecanismos pueden ser: a) después de que una estructura ha decaído, el flujo turbulento es susceptible a una inestabilidad determinada por el estado del flujo en ese instante, resultando una nueva estructura. b) Una segunda posibilidad es que las estructuras no decaigan totalmente, y las estructuras distorsionadas o subdivididas por medio de interacciones mutuas se combienen y resurjan. En contraste con algunos investigadores que han sugerido una inestabilidad debida al perfil de velocidades medio, Hussain cree que la dinámica local debe controlar la inestabilidad.

Hussain, y Reynolds y Hussain [49, 50] proponen un tratamiento analítico usando estructuras coherentes, considerando que, si las estructuras coherentes en un flujo cortante turbulento fueran idénticas se podrían describir por medio de sus características en una fase determinada. Similarmente al concepto de tiempo promedio usado en el análisis estadístico de la turbulencia, usan un artificio llamado "fase promedio". Este es el promedio de cualquier propiedad en un estado particular o fase de una estructura,

esto es

$$\langle f(x, y, z, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x, y, z, t + t_i)$$

donde  $t$  es el tiempo correspondiente a la fase de referencia (o estado inicial) y  $t_i$  denota los instantes de ocurrencia de estructuras sucesivas de la fase seleccionada. Cuando estas estructuras ocurren a intervalos regulares, esta definición se reduce a una fase periódica promedio

$$\langle f(x, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x, t + iT)$$

donde  $T$  es el período de ocurrencia de la estructura y  $t$  es el instante correspondiente a la fase de referencia.

Se supone una triple descomposición del flujo se considera que cada variable instantánea consiste de tres componentes: una componente independiente del tiempo, la componente coherente, y la componente de la turbulencia incoherente; de manera que una variable instantánea se expresa por

$$f(x, t) = F(x) + \tilde{f}_c(x, t) + f_r(x, t)$$

donde  $\bar{f} = F$ ,  $\langle f \rangle = F + \bar{f}_c$

y  $\bar{f}$  es el promedio en el tiempo de  $f$

y  $\langle f \rangle$  es la fase promedio de  $f$

En cualquier parte se pueden determinar los tres campos de la turbulencia.

El flujo de energía entre los campos componentes de la turbulencia se presentan esquemáticamente en la fig. 6.27, en donde aparecen las relaciones entre el flujo medio, las estructuras coherentes y las incoherentes, así co-

mo los términos de la disipación de energía. En esta figura, el ancho de cada flecha representa el flujo relativo de energía; estos anchos dependerán de la región del flujo y del tipo de este. Tanto la disipación del flujo medio como la de las estructuras coherentes será menor que la disipación de la turbulencia incoherente, esto es  $\bar{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_c \ll \epsilon_r$ .

En los estados de formación de las estructuras coherentes, el término I será mucho más grande que el II pero en regiones de flujo completamente desarrollado éstas se hacen comparables.

No obstante que no exista una correlación entre las partes coherentes e incoherentes de la turbulencia  $\overline{f_c g_r} = 0$ , estas no son independientes. Las estructuras coherentes producen y organizan la turbulencia incoherente.

La triple descomposición es atractiva, pero sufre de la limitación de que una estructura coherente se trata como una perturbación superpuesta al flujo medio, el cual por otro lado está formado por muchas estructuras coherentes. De modo que una estructura coherente no solo es una perturbación del flujo sino que en una región ocupada por una estructura coherente la estructura es el flujo y no una mera perturbación.

Hussain [49] intenta usar una descomposición del flujo en movimientos coherentes e incoherentes solamente.

$$f(x, t) = f_c(x, t) + f_r(x, t)$$

en donde los movimientos se deben describir en un sistema de coordenadas moviéndose con una partícula en el campo de flujo coherente.

Esta descomposición del flujo es útil al explicar las interacciones entre movimientos coherentes y no coherentes; sin embargo no explica la evolución



de las estructuras coherentes ni su extracción de energía del flujo medio en el cual se encuentran.

Se sugiere que posiblemente se pudiera lograr una aproximación casi-Lagrangiana en la descripción del movimiento de una estructura coherente, utilizando un sistema coordinado fijo en el centro de la estructura y moviéndose con la velocidad de convección de la estructura. Un problema aquí sería que la velocidad de convección tiene una dispersión bastante fuerte en cualquier flujo. No obstante, una formulación mejor podría ser una lagrangiana o una solución numérica bajo el punto de vista Euleriano.

Sin embargo Hussain habla de que no se ha establecido la importancia de las estructuras coherentes en la dinámica de los flujos turbulentos; de los estudios que se han realizado parece ser que estas son muy importantes en los estados iniciales de formación de turbulencia y posiblemente pueden representar al flujo turbulento, dejando de tener importancia en flujos completamente desarrollados. Cabe aclarar que en los flujos de la capa límite y sobre todo en la región más cercana a la pared, las estructuras coherentes son de gran importancia.

La observación de las estructuras coherentes en los flujos turbulentos considerados anteriormente como flujos en los que las partículas se mueven en un desorden total, ha sido de gran importancia, puesto que bajo este punto de vista es posible y se han realizado modelos determinísticos que los representan. Sin embargo, hasta ahora no se ha logrado llegar a un modelo completo de los flujos turbulentos, debido a que los investigadores utilizan diferentes técnicas de medición; cada método de visualización tiene sus ventajas o desventajas; por otro lado de los registros de aparatos de medición como son los anemómetros se obtiene bastante información cuantitativa pero

muchas veces se pierde el sentido físico de ésta, mientras que la visualización ofrece una interpretación más física del fenómeno pero el problema que lleva es la interpretación de los resultados.

El problema de la turbulencia se ha comparado con la fábula de cinco hombres que observan un elefante; cada hombre explora una pequeña parte del animal y hace sus conclusiones acerca de la naturaleza total del animal.

En este sentido se puede decir que es necesario estudiar más este fenómeno con el fin de llegar a una conclusión correcta.

Con esto se concluye lo que se refiere a la estructura de la capa límite turbulenta. En el capítulo siguiente se verá una introducción a los modelos matemáticos de la turbulencia.

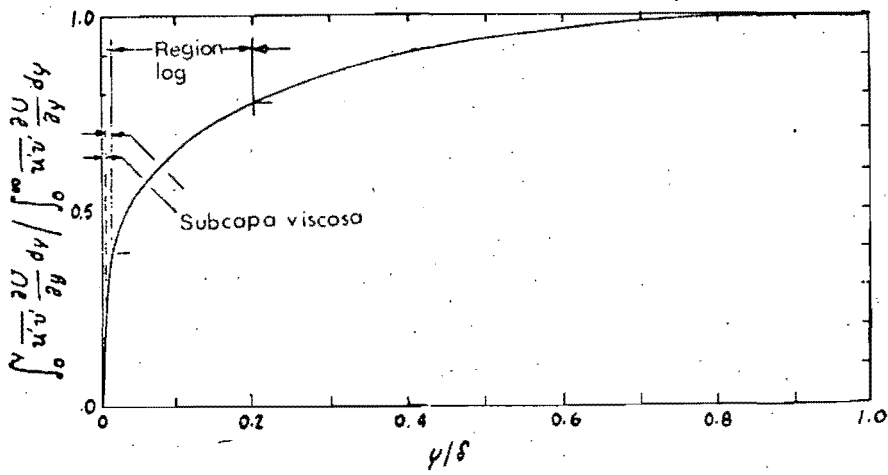


Fig 6.1 Porcentaje de producción de energía de turbulencia en una capa límite turbulenta (Klebanoff 1954)

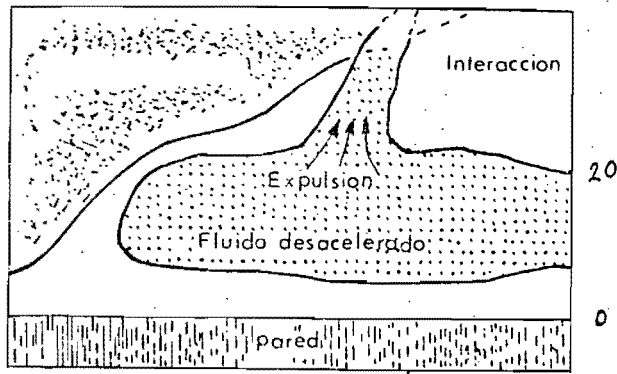


Fig 6.3 Expulsion de fluido de baja velocidad, proceso por el que se producen los rompimientos

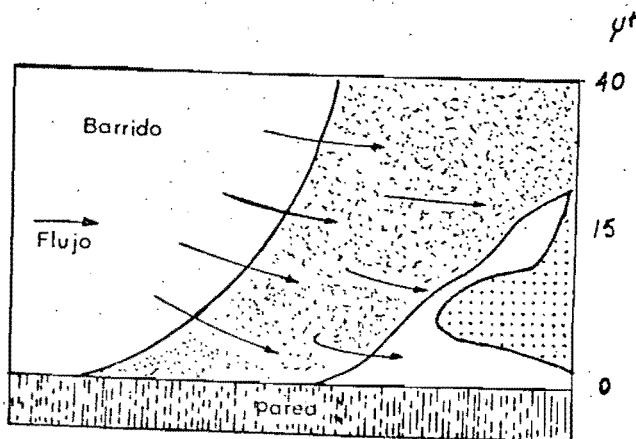


Fig 6.4 Representacion esquematica de la entrada de fluido de alta velocidad a la region de la pared: barrido

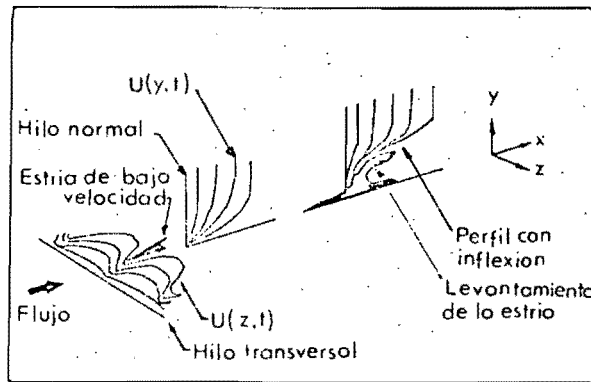


Fig 6.5 Levantamiento de una estria de baja velocidad durante el proceso de rompimiento

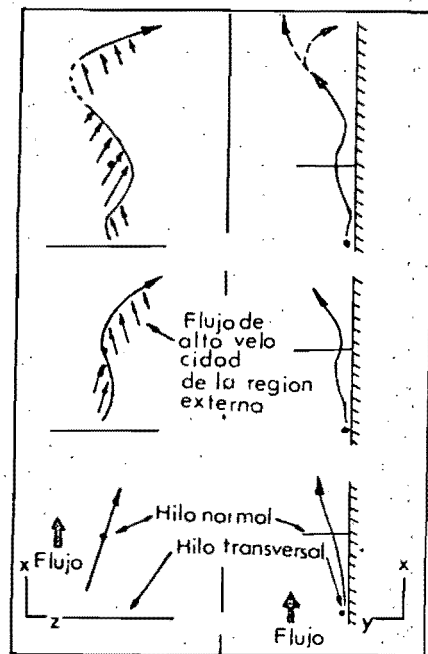
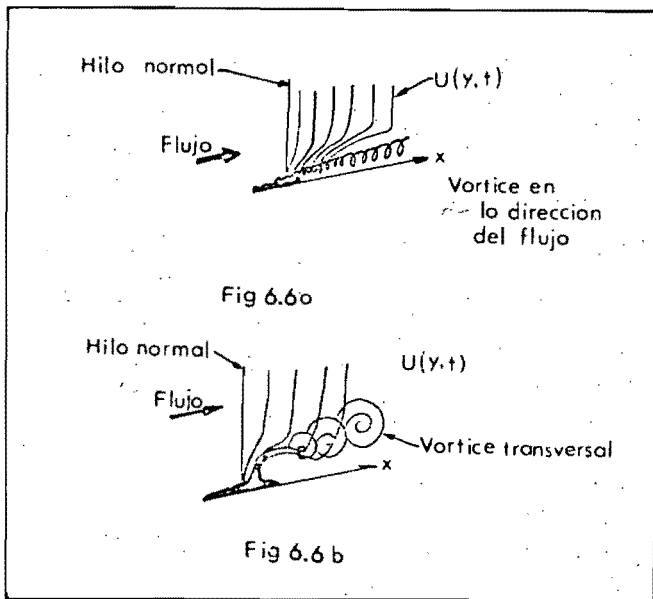
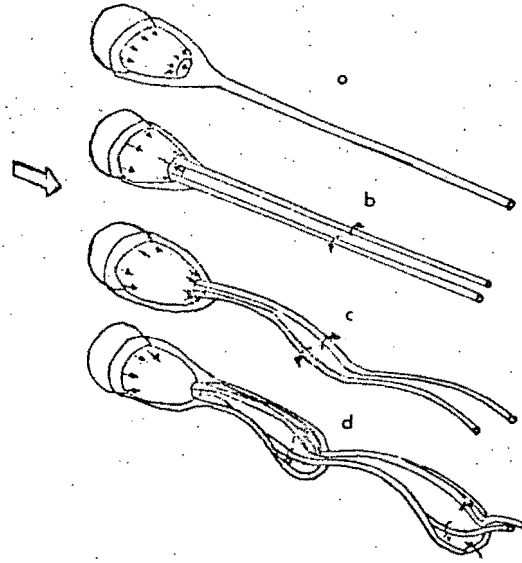


Fig 6.6 c

Fig 6.6 Movimientos típicos de la oscilación de una estria.

- a) Vortice longitudinal. b) Vortice transversal. c) Movimiento ondulatorio de la estria

Fig 6.7 Los cuatro tipos de estelo, según Mogarvey y Bishop. a) Filamento rectilíneo ( $Re < 210$ ). b) Dos filamentos rectilíneos ( $210 < Re < 270$ ). c) Dos filamentos ondulados ( $270 < Re < 290$ ). d) Estela en forma de lazos ( $290 < Re < 410$ ).  
Estelas de una esfera



SUBCAPA VISCOSA			
PARED			
TIPO DE INTERACCION	vortice en dirección del flujo	vortice ondulado	vortice anular

Fig.6.8 Los tres tipos de vortices pueden ser producidos como estelas de las lenguas de baja velocidad expulsadas por la subcapa viscosa. Cada tipo corresponde a distintas distancias de la pared, y por lo tanto a diferentes velocidades locales.

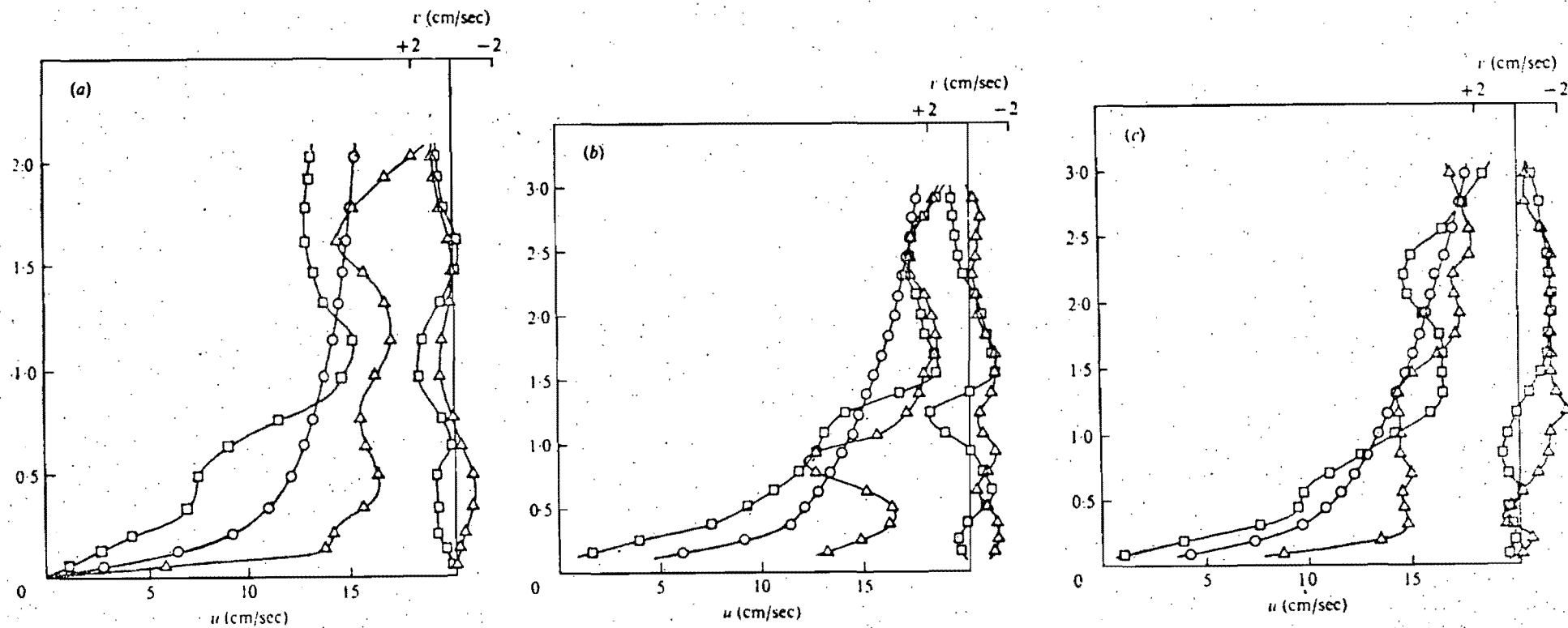


Fig. 6.9  $\square$  Perfiles de velocidad  $u, v$  en la fase de expulsión,  $\Delta$  perfiles de velocidad en un barrido,  $\circ$  perfil de velocidad medio.

a) pared lisa ; b) pared en transición; c) pared rugosa

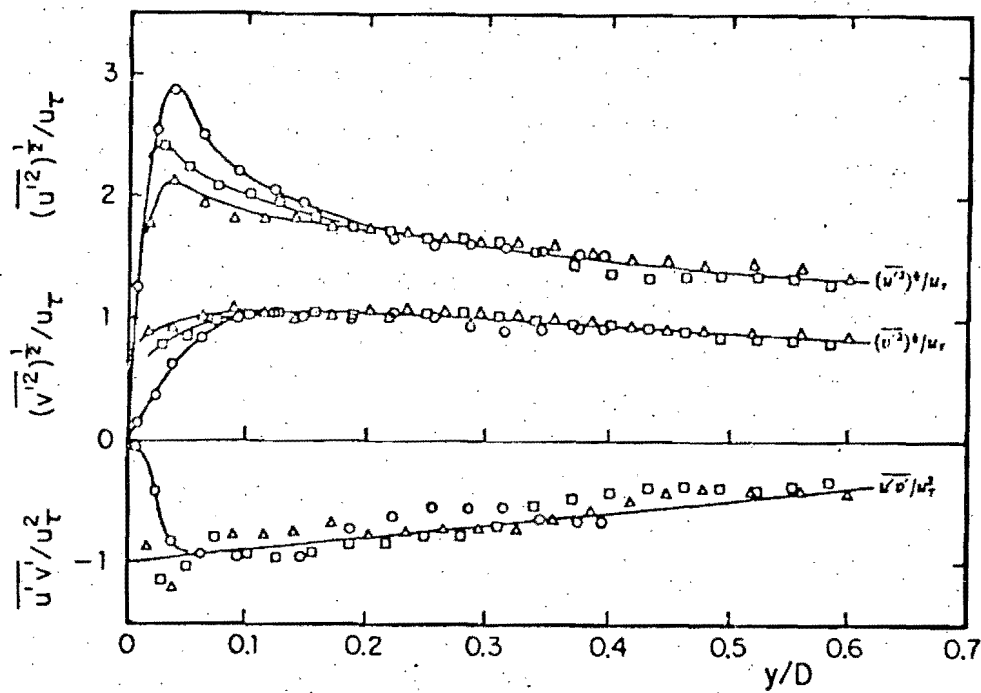


Fig 6.10. Intensidad de la turbulencia y esfuerzos de Reynolds. (simbología igual que en la figura anterior)

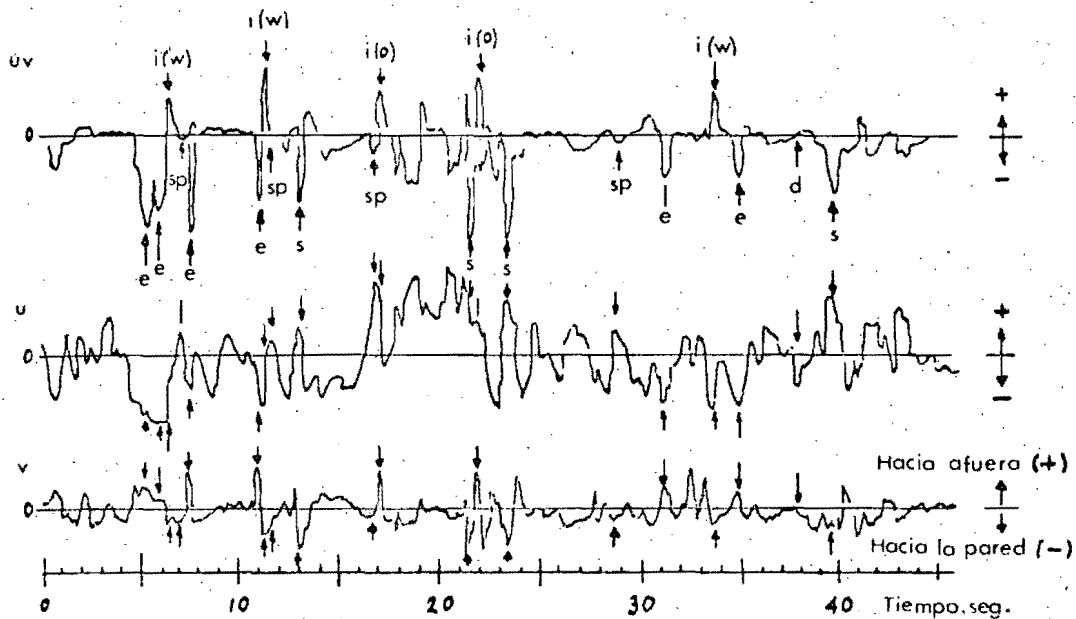


Fig 6.11. Registros instantáneos de  $uv$ ,  $u$  y  $v$ . e, indica una expulsión; s, un barrido; d, desaceleración; sp, barrido paralelo a la pared;  $i(o)$ , interacción hacia afuera;  $i(w)$  interacción hacia la pared.



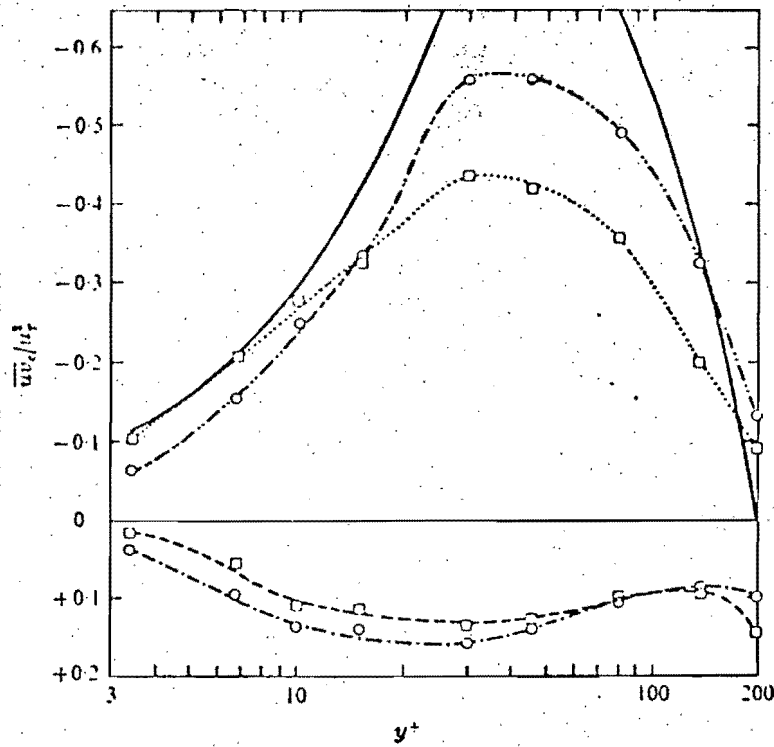


Fig. 6.12 Esfuerzos de Reynolds normalizado con la velocidad cortante al cuadrado; para cada evento. En esta figura; ..... barrido; ..... expulsión; ..... interacción hacia afuera; ..... interacción hacia la pared; — total.

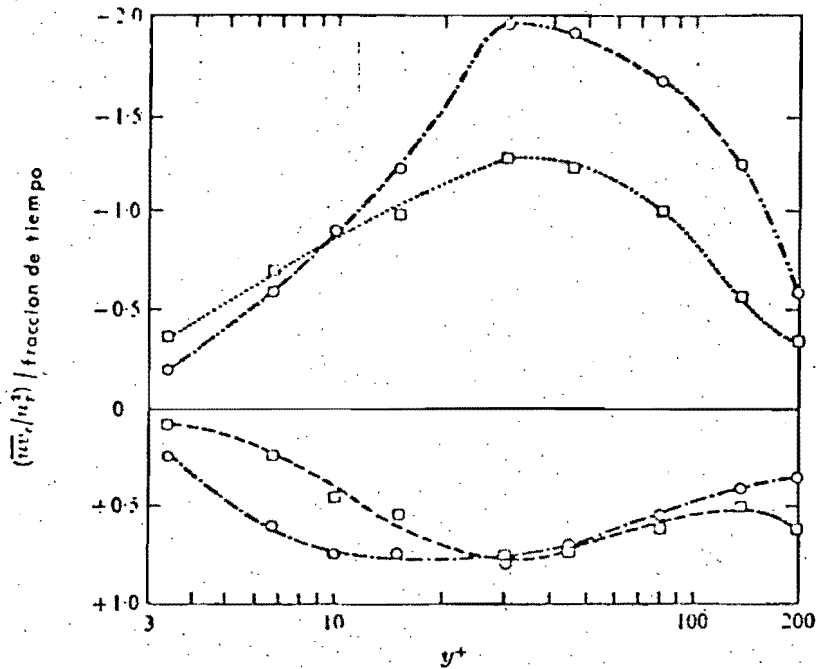


Fig. 6.13 Esfuerzos de Reynolds normalizados y divididos por la fracción de tiempo en cada tipo de evento. Los símbolos son los mismos de la figura anterior.

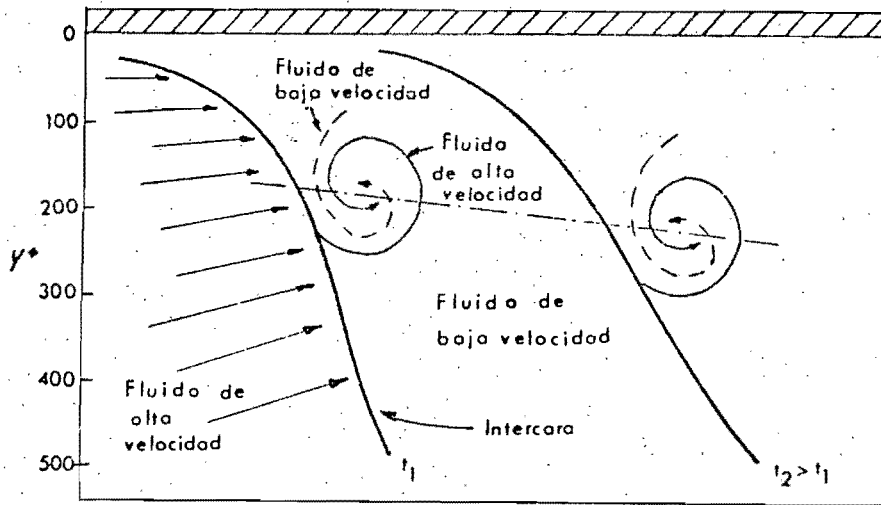


Fig.6.14 Vortice transversal, relacionado con las regiones de alta y baja velocidad.

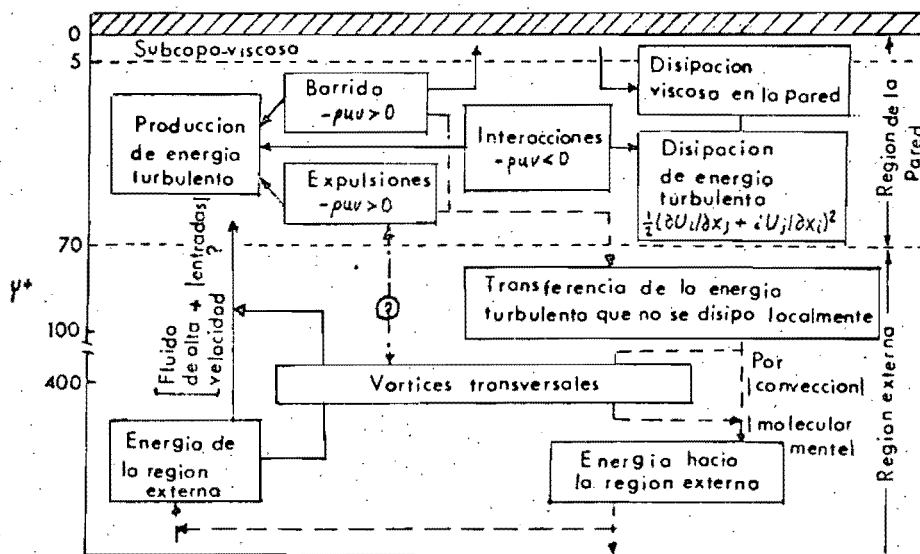


Fig. 6.15 Producción, disipación, e intercambio de energía turbulenta.

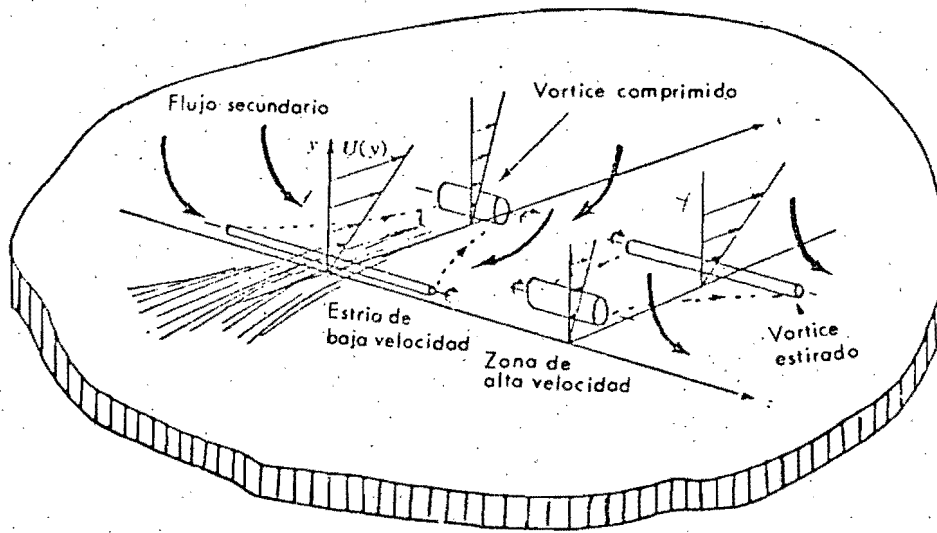


Fig.6.16 Mecanismo de formación de las estrias.

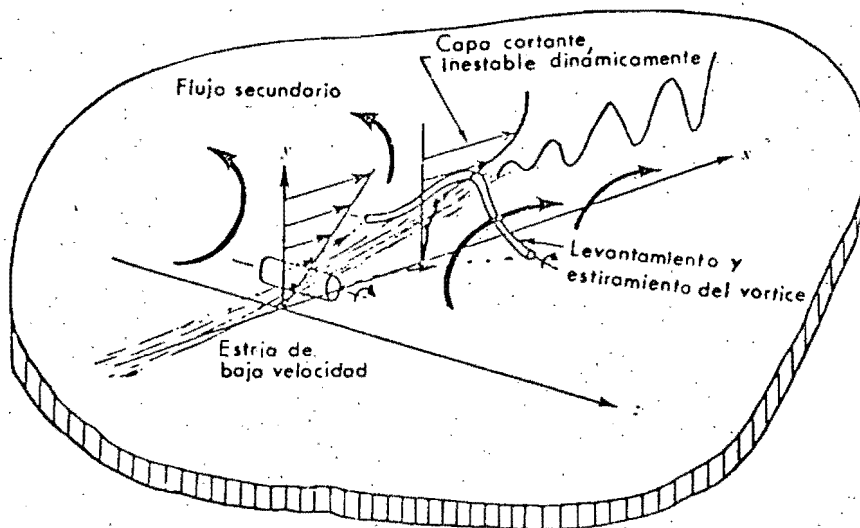


Fig.6.17 Mecanismo de rompimiento de las estrias.

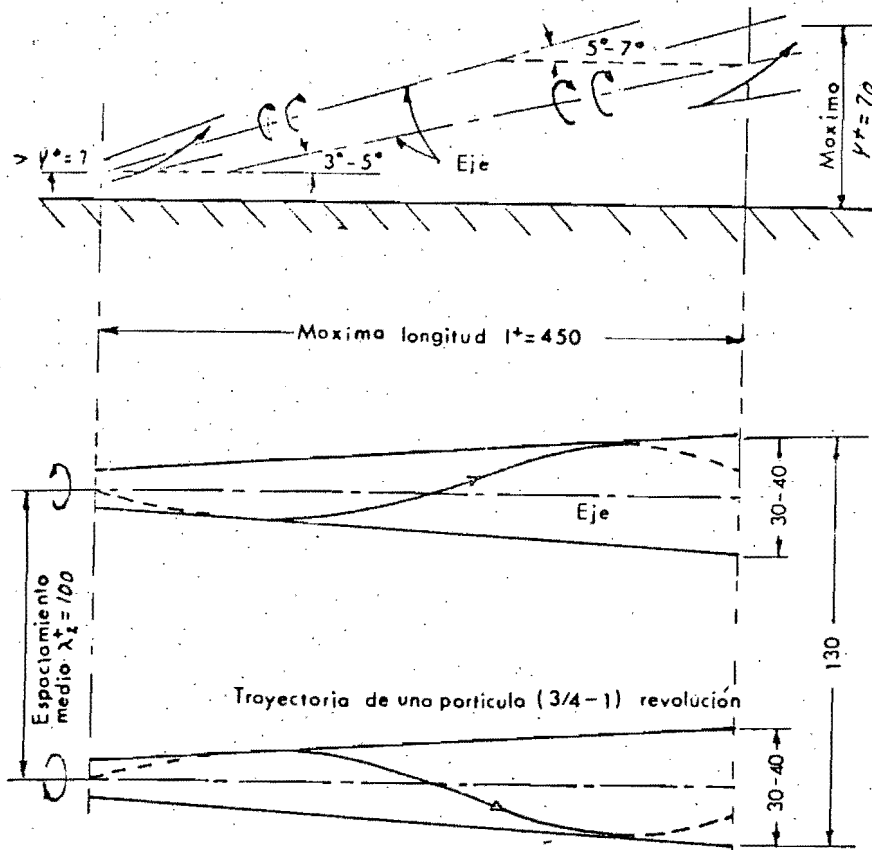


Fig 6.18 Esquema de los vortices longitudinales en la capa limite.

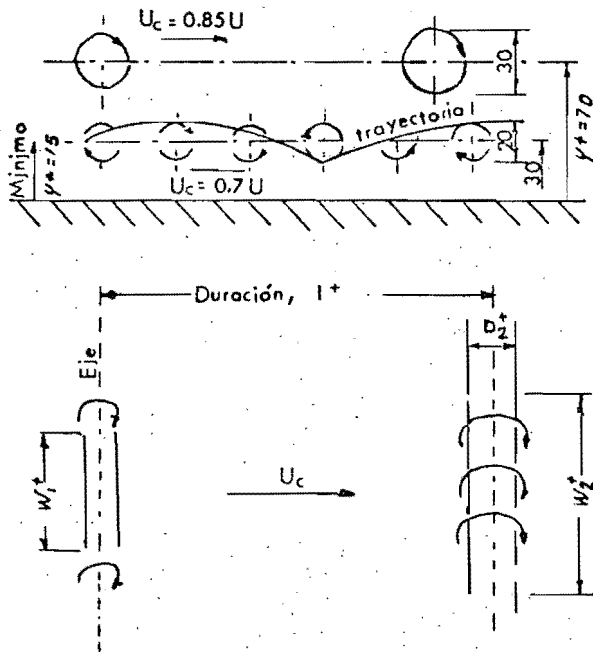


Fig.6.19 Esquema de los vortices transversales en la capa limite. al viajar aguas abajo estas crecen en su ancho y diámetro

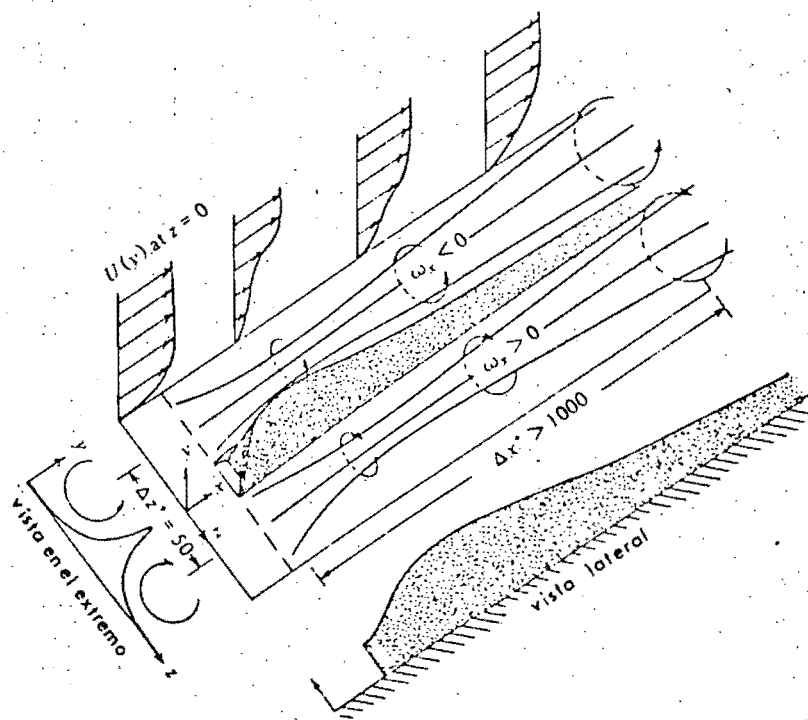


Fig. 6.20 Modelo de vórtices longitudinales rotando en sentidos contrarios, junto con las estrias de baja velocidad resultantes. Los perfiles de velocidad se deben a Black-welder y Kaplan ( ).

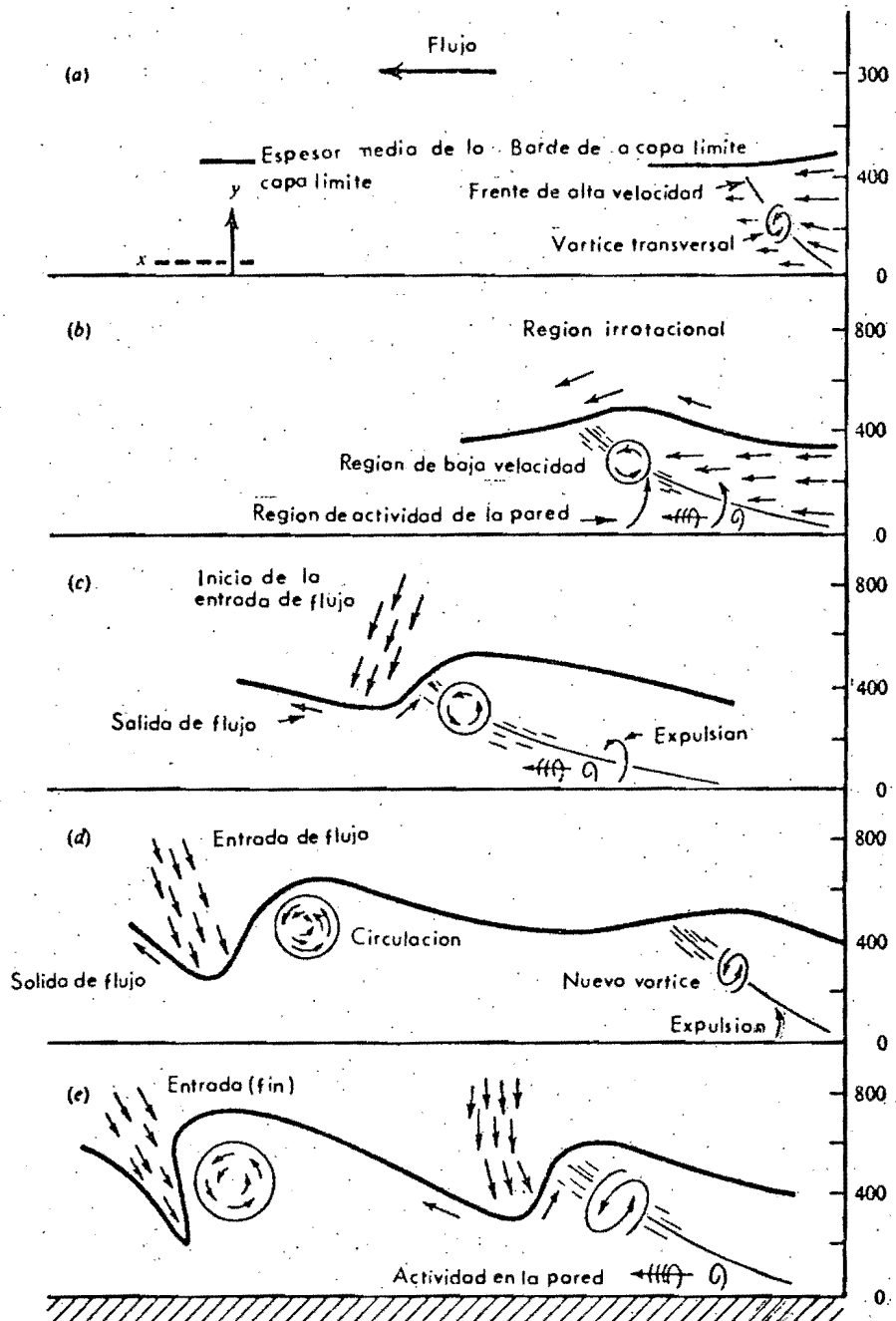


Fig. 6-21 Esquema de la secuencia de eventos que se presentan en el flujo.

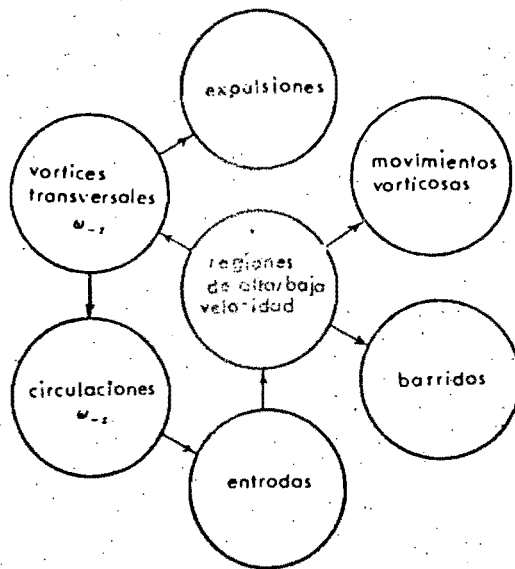


Fig. 6.22 Modelo de interacciones

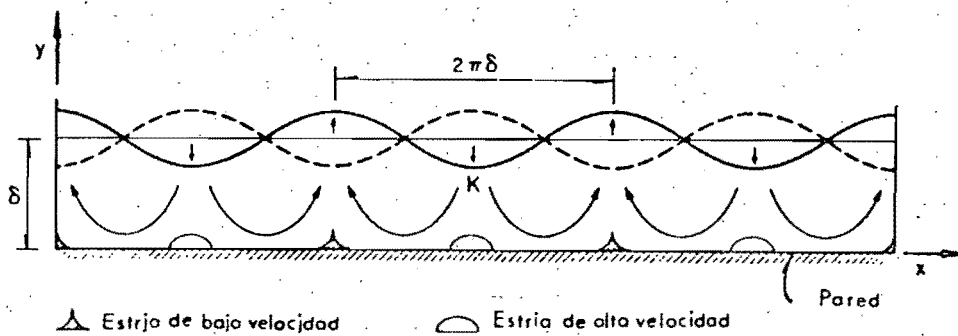


Fig 6.23 Mecanismo por el cual las ondas estacionarias transversales inducen velocidades alternadas en la pared.

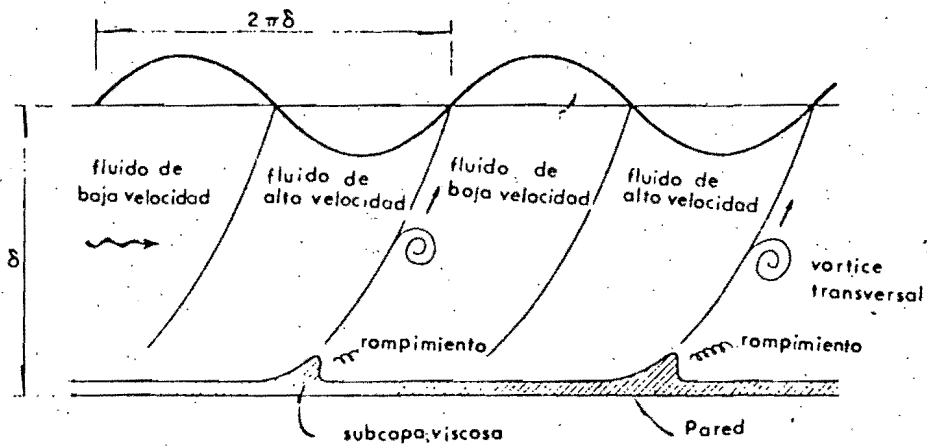


Fig. 6.24 Onda longitudinal desplazándose en dirección del flujo como una explicación de la producción de regiones de alta y baja velocidad; y excitación de los rompimientos en la pared.

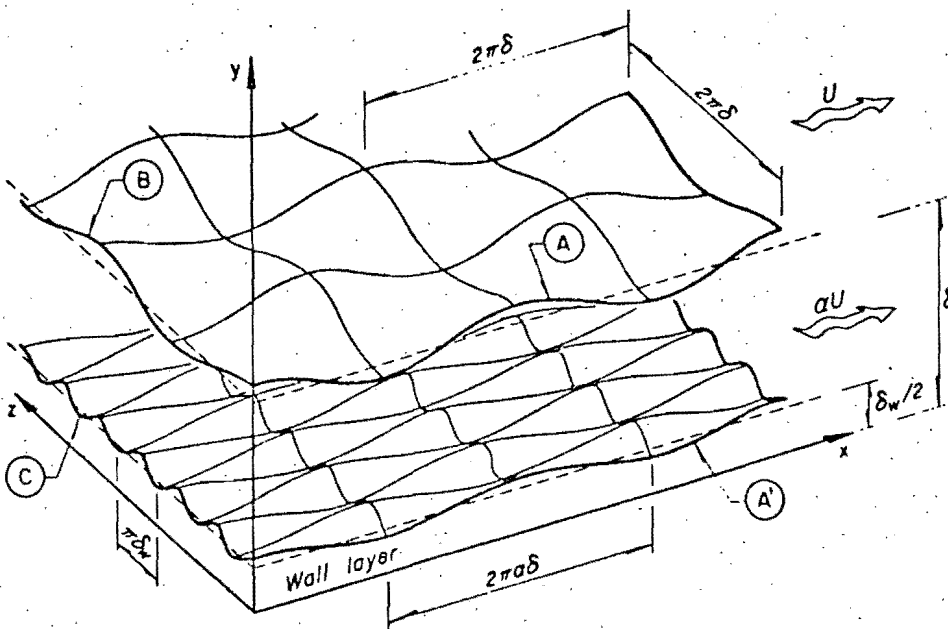


Fig. 6.25 Principales tipos de ondas que actúan en la capa límite. Las ondas longitudinales A son responsables de la alternación de la velocidad en la dirección del flujo y de los rompimientos en flujos turbulentos. A las ondas estacionarias B se deben los estrias en la transición. Las ondas A y B con el tiempo forman los remolinos. La longitud y el espaciado de las estrias de la subcapa viscosa están definidos por las ondas A' y C respectivamente.



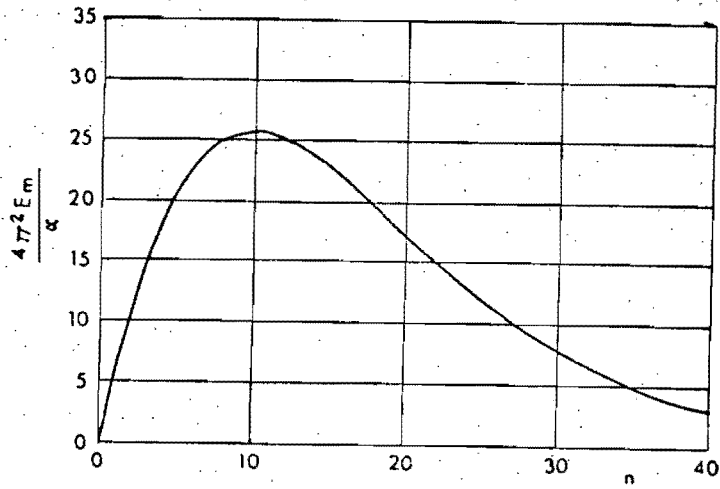


Fig. 6.26 Espectro de energía en función de la frecuencia.

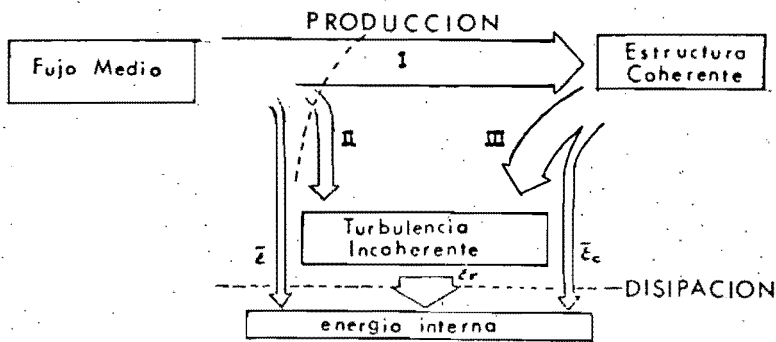


Fig. 6.27 Representación esquemática del flujo de energía entre los tres campos: el medio, el coherente y el incoherente.

## VII INTRODUCCION AL CALCULO DE FLUJOS TURBULENTOS

### Antecedentes

En los años 60 las computadoras empezaron a tener gran impacto debido a su habilidad para realizar muchas operaciones aritméticas en poco tiempo. Esto dio lugar a que los investigadores desarrollaran programas de computación para la simulación de flujos. Dichos programas implican el cumplimiento de las leyes de conservación de momento, masa y energía. Con programas de este tipo es posible simular flujos bidimensionales y ciertos tipos de flujos tridimensionales. Las predicciones generadas por estos programas son bastante buenas cuando se trata de flujos laminares, pero no pasa lo mismo cuando estos son turbulentos.

Sin embargo en los últimos años se han desarrollado métodos que han dado más confianza al cálculo de flujos turbulentos.

Como se dijo anteriormente, en principio se aplican las ec. de Navier-Stokes al movimiento turbulento; pero al ingeniero generalmente le interesa conocer solo los efectos de las características medias en el tiempo.

El proceso de promediar las características del flujo en el tiempo da por resultado la aparición de correlaciones estadísticas de fluctuaciones de velocidad en las ecuaciones de conservación de movimiento. No existe una manera directa de conocer la magnitud de estos términos (a menos que se midan experimentalmente) de modo que sus efectos se "modelan" en términos de cantidades que puedan determinarse. Entonces un modelo de turbulencia se entiende como un conjunto de ecuaciones las cuales, al resolverse con las ecuaciones del flujo medio, permiten el cálculo de las correlaciones pertinentes y así simular el comportamiento de fluidos reales.

Este capítulo es solo una introducción a los modelos de los flujos turbulen

tos. Se tratará inicialmente de los tipos de modelos existentes, en que consisten y se verá un poco los métodos más antiguos, generalmente los más simples, que han alcanzado un estado de desarrollo estable.

## VII 1. MODELOS DE FLUJOS TURBULENTOS

Los modelos de flujos turbulentos se clasifican de acuerdo al número de ecuaciones adicionales a las del flujo medio que se usen para la simulación.

Así se tendrán:

- a) Modelos de Cero Ecuaciones: Estos modelos solo usan las ecuaciones diferenciales parciales para el campo de velocidades del flujo medio y ninguna ecuación diferencial parcial para la turbulencia.
- b) Modelos de una Ecuación: Involucran una ecuación diferencial parcial relacionada a la escala de velocidad de la turbulencia, en adición a las ecuaciones diferenciales parciales del flujo medio.
- c) Modelos de dos Ecuaciones: Usan una ecuación diferencial parcial adicional relacionada a la longitud de escala de la turbulencia.
- d) Modelos de Ecuaciones de Esfuerzos: Involucran ecuaciones diferenciales parciales para todas las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds, y en general también para una longitud de escala.
- e) Modelos de Simulación de Remolinos Grandes: Calculan la estructura de los remolinos grandes (tridimensionales y dependientes del tiempo), y un modelo de nivel inferior para modelar turbulencia de pequeña escala.

Los modelos de cero ecuaciones son los de uso más común en la industria; los de una ecuación también se aplican en alguna ocasión. Los modelos de

dos ecuaciones son de uso académico y no se han usado extensivamente en ingeniería. Los modelos de esfuerzos están en intenso desarrollo; estos modelos son esenciales en el manejo de los flujos más difíciles. La simulación de remolinos grandes están en su infancia, y se ha utilizado para evaluar los modelos de nivel inferior para turbulencia de pequeña escala.

## VII 2. MODELOS DE CERO ECUACIONES

Concepto de Viscosidad Turbulenta.

El primer intento de un modelo de turbulencia puede atribuirse a Boussinesq (1877). El sugirió que los esfuerzos cortantes turbulentos resultantes de las correlaciones de fluctuaciones de velocidad se pueden reemplazar por el producto del gradiente de velocidad media y una cantidad llamada "viscosidad turbulenta". Así si se reemplaza  $\tau_t = -\overline{\rho u' v'}$  por el producto

$$\mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$$

donde  $\mu_t$  no es una propiedad del fluido, sino una propiedad del estado local de la turbulencia.

La consideración de  $\mu_t$  es una herramienta para la construcción de un modelo de turbulencia, restando el trabajo de expresar la viscosidad turbulenta en términos de cantidades conocidas o calculadas.

La mayoría de los métodos de cero ecuaciones en alguna forma se basan en el concepto de "viscosidad vorticosa". Las versiones más conocidas son la fórmula de la "Longitud de mezcla":

$$-\overline{uv} = \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad 7.1$$

y la fórmula de la viscosidad vorticiosa, la cual aplicada a una capa delgada resulta

$$\overline{-uv} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad 7.2$$

La hipótesis de Longitud de Mezcla

La hipótesis de longitud de mezcla, propuesta por Ludwig Prandtl (1925) en analogía con la teoría de la energía cinética de los gases, consta de dos partes las cuales generalmente se aplican juntas, como se verá a continuación.

Prandtl adoptó la idea de Boussinesq y supuso que la viscosidad turbulenta  $\mu_t$ , debería ser el producto de la densidad, una longitud y una velocidad aleatoria, esto es

$$\mu_t = \frac{1}{3} \rho \ell v$$

En un flujo turbulento la longitud (longitud de mezcla) y la velocidad aleatoria variarán de un lugar a otro y tendrán valores influenciados por el patrón de velocidad del flujo medio.

De la hipótesis anterior se concluye que para cada punto los valores de " $\ell$ " y " $v$ " serán diferentes, por lo que Prandtl introdujo la segunda parte de su hipótesis, de manera de reducir el número de incógnitas a una:

La idea es como sigue: La magnitud de las fluctuaciones de la velocidad lateral es proporcional a las de la velocidad longitudinal, y a su vez éstas son proporcionales a la distancia desde donde proviene la masa de fluido, multiplicada por el gradiente de velocidad media; lo cual se expresa:

$$v = \ell \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

de donde  $\tau_t \equiv \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \ell \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\mu_t = \rho \left( \frac{\tau_t}{\rho} \right)^{1/2} \ell$$

El problema ahora es como determinar  $\ell$  ; Prandtl propuso que la longitud de mezcla fuese proporcional a la distancia a la pared más cercana. Sin embargo, ésta se puede obtener experimentalmente.

En el caso de la capa límite sobre una placa plana, Escudier, analizando una serie de datos experimentales, llegó a la conclusión de que la longitud de mezcla se desarrolla de una forma tal como la que se representa en la fig.

7.1 y se expresa por las relaciones:

Si

$$\frac{y}{\delta} < \frac{\lambda}{K} ; \quad \frac{\ell}{\delta} = K \frac{y}{\delta}$$

Si

$$\frac{y}{\delta} > \frac{\lambda}{K} ; \quad \frac{\ell}{\delta} = \lambda$$

donde:

$$K = 0.41$$

$$\lambda = 0.09$$

Estas relaciones son válidas para tanto para flujos de densidad uniforme como para aquellos de densidad variable; y no es aplicable en la región de la subcapa viscosa.

Por otro lado, en el caso de flujos completamente desarrollados en tuberías, es ya conocida la fórmula de Nikuradse para la distribución de la longitud de mezcla

$$\frac{\ell}{R} = 0.14 - 0.08 (1 - y/R)^2 - 0.06 (1 - y/R)^4$$

la cual se representa gráficamente en la fig. 7.2

En esta figura se aprecia que en la región cercana a la pared la distribución de longitud de mezcla tiene una pendiente de 0.4 similarmente a la distribución de longitud de mezcla sobre una placa plana.

En la mayoría de los métodos de cálculo, la capa límite se considera compuesta por una región interna y una externa, y las distribuciones de " $\ell$ " y  $v_t$  son descritas por expresiones empíricas en cada región.

Por ejemplo si no se toma en cuenta la subcapa viscosa cercana a la pared, " $\ell$ " es proporcional a la distancia de la pared " $y$ " en la región interna, y es proporcional a " $\delta$ " en la región externa.

$$\ell = \begin{cases} K y & [y_0 \leq y \leq y_c] & 7.3 \\ \alpha_1 \delta & [y_0 \leq y \leq \delta \quad \delta = \delta_{.995}] & 7.4 \end{cases}$$

donde  $y_0$  es el espesor de la subcapa viscosa igual a  $40 \nu/u_\tau$  y  $y_c$  es el límite entre la región interna y externa.

Los parámetros empíricos  $K$  y  $\alpha_1$  varían muy poco, de acuerdo a datos experimentales. Para flujos con altos números de Reynolds  $R_\theta > 5000$  y  $R_\theta = U_e \theta/\nu$  generalmente toman un valor de  $K = 0.4$  y  $\alpha_1 = 0.075$ . De acuerdo a estudios recientes [52], para números de Reynolds bajos  $R_\theta < 5000$ ,  $\alpha_1$  varía con este parámetro.

Similarmente, de acuerdo a varios estudios,  $v_t$  varía linealmente con " $y$ " en la región interna donde  $-\overline{\rho u v}$  tiene un valor muy cercano a  $\tau$ , y es casi constante en la región externa. Las variaciones de  $v_t$  pueden describirse usando las siguientes fórmulas:

$$v_t \left| \begin{array}{l} \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left( y_0 \leq y \leq y_c \right) \\ \alpha \left| \int_0^\infty (U_e - U) dy \right| \left( y_c \leq y \leq \delta \right) \end{array} \right.$$

donde:

$U_e$  es la velocidad en  $y = \delta(x)$

$\ell$  esta dado por 7.3

El parámetro  $\alpha$  generalmente se considera como constante universal igual a 0.0168 para  $R_\theta > 5000$  Como  $\alpha$  también varia con el número de Reynolds cuando  $R_\theta < 5000$ , de acuerdo a Cebeci [53] éste está dada por:

$$\alpha = 0.0168 \frac{1 + \pi_0}{1 + \pi}$$

donde  $\pi$  esta relacionado con la energía de la estela; su valor para números  $R_\theta$  altos es  $\pi_0 = 0.55$  y su variación con  $R_\theta$  está definida por:

$$\pi = 0.55 [1 - \exp(0.243 Z_1^{1/2} - 0.298 Z_1)]$$

$$Z_1 = R_\theta / 425 - 1$$

Se han realizado numerosos intentos para extender la fórmula 7.3 de manera que incluya la subcapa viscosa; a continuación se verá la hipótesis de Van Driest [54], la cual es una de las más populares.

En ésta hipótesis se expresa la viscosidad efectiva como la suma de las viscosidades laminar y turbulenta, para el caso de una región semilaminar en donde ambas viscosidades juegan un papel importante:

$$\mu_{eff} = \mu + \rho \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$



para un flujo sobre una placa plana.

Donde:

$$\ell = Ky [ 1 - \exp (-y/A) ] \quad 7.5$$

$$A = \frac{A^+ (\tau/\rho)^{1/2}}{v}$$

$A^+$  es una constante empírica = 26

$\tau$  es el esfuerzo cortante total en la pared, y se puede expresar como:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{uv}$$

De acuerdo a la ecuación 7.5, la longitud de mezcla no es igual a  $Ky$  sino que es multiplicada por los términos encerrados en el paréntesis cuadrado en donde  $\ell$  disminuirá cuando el argumento del exponencial sea cercano a cero. Sin embargo cuando el argumento es grande (y negativo), el término exponencial es muy pequeño; y

$$\ell = Ky$$

Ventajas y Desventajas de la Hipótesis de Longitud de Mezcla.

Existen tres atributos importantes en favor de este modelo:

- 1) Es el modelo más simple y no requiere de ecuaciones diferenciales adicionales.
- 2) Si se elige una buena distribución de la longitud de mezcla, este modelo permite predicciones realistas de la velocidad y de la distribución de esfuerzos cortantes, así como del comportamiento general de la capa límite.
- 3) La experiencia de su uso es muy grande, y se puede conseguir por medio de publicaciones de algunos investigadores.

En contra de la hipótesis de Longitud de Mezcla se puede decir:

1. No se ha usado para predecir flujos recirculantes debido a que las relaciones entre esfuerzos y gradientes de velocidad son muy complicadas.
2. Lo anterior implica que la viscosidad efectiva desaparezca cuando el gradiente de velocidad es cero.
3. Este modelo no considera el proceso de convección o difusión de la turbulencia.

Este modelo se considera físicamente erróneo, ya que se basa en la hipótesis de que los remolinos interactúan en colisiones intermitentes de la misma manera que las moléculas, siendo la longitud de mezcla análoga a la distancia entre las colisiones moleculares. Sin embargo, los remolinos turbulentos no son pequeños en comparación con el espesor o tirante del flujo medio; además este modelo no representa la estructura real del flujo.

No obstante lo dicho anteriormente en contra del modelo de longitud de mezcla, éste es el de mayor aplicación en la práctica, por lo que se ha logrado una gran experiencia; por otro lado debe tenerse en cuenta que éste es solo un precursor de los modelos de turbulencia.

### VII 3 Modelo de Una Ecuación

Prandtl y Kolmogorov sugieren que en lugar de relacionar la velocidad aleatoria de la turbulencia al gradiente de velocidad media, se elija una propiedad de la turbulencia, como lo es la raíz cuadrada del valor medio en el tiempo de la energía cinética de la turbulencia, esperando que con esto se obtenga una mejor manera para determinar  $\mu_t$ ; ya que por ejemplo para la línea central de un tubo, el gradiente de velocidad media es cero, pero la ener

gía cinética de la turbulencia no lo es. Lo anterior se puede expresar como:

$$v \propto \sqrt{K}$$

donde

$$K \equiv \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

Para determinar la energía cinética de la turbulencia, Prandtl y Kolmogorov propusieron una ecuación de transporte de K. Estas ecuaciones son capaces de tomar en cuenta la influencia de las regiones vecinas en la energía local de la turbulencia.

La ecuación de la energía cinética para una capa límite bidimensional se puede derivar de las ecuaciones de Navier-Stokes, multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento para cada dirección coordenada por la fluctuación de velocidad correspondiente. Promediando para un tiempo "t" y sumando las tres ecuaciones se tiene:

$$\rho \frac{DK}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho v' K'}) + \overline{v' P'} - \overline{\rho u' v'} \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \Sigma \left( \frac{\partial \overline{u' i}}{\partial X_j} \right)^2 \quad 7.6$$

flujo convectivo = difusión + producción - disipación

donde:

El primer miembro de la ecuación es el cambio de energía cinética a lo largo de una línea de corriente;

El primer término de la derecha se interpreta como la difusión neta de energía cinética. El segundo término generalmente es la producción de energía, expresa el porcentaje de energía cinética media que se convierte en energía de turbulencia, debido al trabajo ejercido por los esfuerzos de Reynolds contra el gradiente de velocidad media. El último término es el porcentaje de energía de la turbulencia disipado por la acción de la viscosidad.

Modelación de las ecuaciones:

La ecuación que se ha presentado es una ecuación exacta para K; pero en esta ecuación las correlaciones que aparecen del lado derecho deben aproximarse a cantidades que puedan determinarse. A continuación se verán las aproximaciones hechas por Prandtl y Kolmogorov:

- 1) La acción difusiva de la turbulencia es similar al proceso de difusión molecular. El transporte de la energía de la turbulencia se toma como el producto del gradiente espacial de K y la viscosidad turbulenta, entre en número efectivo de Prandtl para la difusión de la energía de la turbulencia  $\sigma_K$ , esto es:

$$- (\rho \overline{v'K'} + \overline{\rho'v'}) = \text{constante} \times \rho K^{1/2} \ell \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\mu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y}$$

- 2) En el término de producción de energía; la correlación que aparece es debido a los esfuerzos cortantes turbulentos; y se reemplaza por el producto de  $\mu_t$  por el gradiente de velocidad medio:

$$- \rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$$

- 3) La disipación de energía cinética de la turbulencia ocurre predominantemente en los remolinos más pequeños. El porcentaje de disipación de energía será controlado por el proceso de transferencia de energía de los remolinos grandes a los más pequeños; este proceso de "cascada" se supone depende solamente de  $\rho$ , K y  $\ell$  y se puede expresar:

$$- \mu \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)^2 = (\text{isotropía local}) = C_D \frac{\rho K}{\ell}^{3/2}$$

Sustituyendo estos términos en la ec. 7.6, la ec. final resulta:

$$\rho \frac{DK}{D_t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_D \rho \frac{K^{3/2}}{\ell}$$

Esta ecuación es válida para flujos en una capa límite bidimensional, y se resuelve simultáneamente con la ec. de cantidad de movimiento y con las ecuaciones para otras variables del flujo medio que puedan ser de interés. Para resolver estas ecuaciones existe un programa de computadora de Patankar y Spalding [55].

Antes de solucionar las ecuaciones, se deben asignar los valores de las constantes  $C_D$  y  $\sigma_K$  y la distribución de la escala de longitud  $\ell$ .

Para la turbulencia cercana a una pared, la convección y difusión de energía son casi siempre despreciables, así que hay un balance entre los términos de producción y disipación.

En estas circunstancias la ec. de la energía se reduce (después de multiplicar el término de la producción por  $\mu_t$  y el término de la disipación por  $\rho K^{1/2} \ell$ ) a la forma

$$\tau^2 = \left[ \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 = C_D \rho^2 K^2$$

y de aquí

$$\frac{\tau}{\rho K} = C_D^{1/2}$$

Esta relación entre esfuerzos y energía tiene su origen en experimentos en flujos cercanos a paredes, siendo el cociente igual a 0.25 y 0.3; de donde se sugiere un valor de  $C_D$  de 0.08.

Si ahora se elimina  $K$  del término de disipación introduciendo la definición de  $\mu_t$ , la ecuación de la energía cinética (todavía despreciando la convec-

ción y difusión de energía) puede expresarse como:

$$\tau = C_D^{1/2} \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

este resultado puede conocerse como equivalente al de la hipótesis de longitud de mezcla. Por esto es por lo que al modelo de longitud de mezcla algunas veces se considera como un modelo para turbulencia en "equilibrio local"; porque ésta es la forma a la que se reduce la ec. de la energía cinética cuando la turbulencia se produce y se disipa en el mismo lugar.

De los experimentos sobre la distribución de velocidad media cerca de una pared se deduce una variación en la longitud de escala. Las mediciones indican que el gradiente de velocidad media varía con la distancia a la pared de acuerdo a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\tau/\rho} / Ky$$

La sustitución de esta fórmula en la anterior da por resultado que, igualmente que la longitud de mezcla, la escala de longitud de Prandtl-Kolmogorov deberá incrementarse linealmente con la distancia.

Weighardt propone el perfil de longitud de mezcla de Nikuradse por un tubo multiplicada por  $C_D^{1/4}$

$$\ell = C_D^{1/4} Ky$$

Este modelo requiere modificaciones en la vecindad inmediata a la pared, donde la viscosidad laminar se hace importante.

La viscosidad laminar afecta al flujo de dos maneras:

- Primeramente, la energía de la difusión viscosa se hace apreciable, de ma-

nera que el término despreciado en las ec. anteriores debe ser incluido;

- Segundo: la escala de longitud de la turbulencia es disminuida por la acción viscosa conforme el número de Reynolds del movimiento turbulento disminuye.

La escala de longitud entra al modelo de turbulencia en dos lugares: a través de la fórmula para  $\mu_t$  y en el denominador del término de disipación.

Wolfshtein [56] encontró que para números de Reynolds bajos, fue necesario adoptar dos escalas de longitud distintas en cada caso.  $\ell_\mu$  para la escala de longitud de la viscosidad y  $\ell_D$  como una longitud característica en el término de disipación. El propone

$$\ell_\mu \propto y [1 - \exp(-A_\mu R)]$$

$$\ell_D \propto y [1 - \exp(-A_D R)]$$

donde:

$$R = \rho K^{1/2} y / \mu \quad ; \quad A_\mu = 0.016, \quad A_D = 0.263$$

Estos perfiles de  $\ell$  tienen una forma similar a la modificación de Van Driest a la distribución de la longitud de mezcla.

Nótese sin embargo que ahora el exponente en el término del paréntesis cuadrado ha reemplazado al esfuerzo cortante por la energía de la turbulencia; de manera que éste puede interpretarse como el número de Reynolds de la turbulencia.

## Ventajas y Limitaciones del Modelo

### Ventajas.

1. Una ventaja es que, para predecir el desarrollo del flujo turbulento en un tubo, puede usarse la misma escala de longitud que para un flujo completamente desarrollado; lo cual no es válido en el modelo de longitud de mezcla, ya que cerca de la línea central del tubo,  $V$  no está bien representada por  $\ell \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ ; por otro lado, con el modelo de energía no ocurre lo mismo, puesto que la energía no puede hacerse despreciable, ni  $\mu_t$ .
2. Otra ventaja es la que se presenta en flujos recirculantes. Por ejemplo en el caso de transferencia de calor en el flujo alrededor de un cilindro. En este caso los gradientes de velocidad media son usualmente pequeños pero los coeficientes de transferencia de calor son comparativamente altos. Los valores medidos de los últimos son mucho más altos que los predichos por el modelo de longitud de mezcla. En este tipo de flujos el uso de  $K^{1/2}$  como escala de velocidad característica de la turbulencia tiene una ventaja decisiva.

### Principales Limitaciones del Modelo.

1. En los flujos recirculantes como el expuesto anteriormente se puede decir que mientras que  $K^{1/2}$  es una buena escala de velocidad de la turbulencia, ya que toma en cuenta los efectos convectivos sobre  $K$ , los efectos de transporte sobre la longitud de escala de la turbulencia no son tomados en cuenta.
2. Raramente puede hacerse una prescripción algebraica de  $\ell$  suficientemen



te precisa para cualquier flujo de la capa límite. Este es el punto débil de los modelos de una ecuación. En aquéllos flujos de capa límite donde la convección y difusión de energía no son importantes, será preferible usar el modelo de longitud de mezcla, ya que este modelo da prediciones comparables a las del modelo de energía.

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u}{\delta} \sim \frac{\rho}{\kappa} \frac{\lambda}{\delta} = \kappa \frac{u}{\delta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u}{\delta} \sim \frac{\rho}{\kappa} \frac{\lambda}{\delta} = \lambda$$

$$\kappa \approx .41$$

$$\lambda \approx .09$$

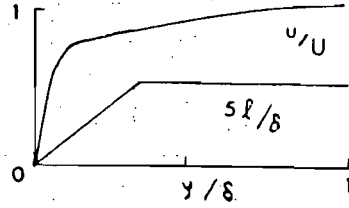


Fig. 7.1 Distribución de la longitud de mezcla en una capa límite. Esta fórmula necesita modificarse muy cerca de la pared.

$$\frac{l}{R} = 0.14 - 0.08(1-y/R)^2 - 0.06(1-y/R)^4$$

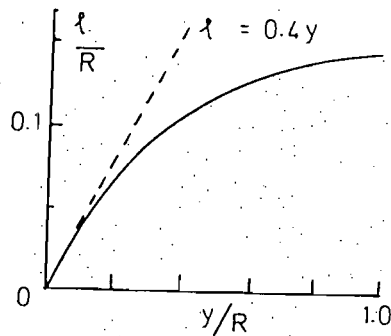


Fig 7.2 Distribución de la longitud de mezcla para flujo turbulento en un tubo.

## A p e n d i c e

Derivando la ec. 1.5 con respecto a x y la 1.6 con respecto a y se tiene:

$$\bar{u} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t \partial x} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y \partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad A.1$$

$$\bar{u} \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} \bar{u}' + v' \bar{u}'' + \bar{u}' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial y} = \frac{1}{p} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) \quad A.2$$

Sustituyendo las derivadas correspondientes en las ec. A.1 y A.2 y restando la segunda ecuación de la primera resulta:

$$\bar{u} i^3 \alpha^3 F - i^3 \alpha^2 \beta F = \gamma (i^4 \alpha^4 F + i^2 \alpha^2 F'') \quad A.3$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} -\bar{u}(-i\alpha F'') - (-i\alpha F'') \bar{u}' - i\alpha F \bar{u}'' - \bar{u}' i\alpha F' - i\beta F'' = \\ -\gamma (-i^2 \alpha^2 F'' - F''''') \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \bar{u} i^3 \alpha^3 F - i^3 \alpha^2 \beta F + \bar{u} i \alpha F'' - i\alpha F \bar{u}'' - i\beta F'' = \\ \gamma (i^4 \alpha^4 F + i^2 \alpha^2 F'' + i^2 \alpha^2 F'' + F''''') \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \bar{u} i^3 \alpha^3 F - i^3 \alpha^2 \beta F + \bar{u} i \alpha F'' - i\alpha F \bar{u}'' = \\ \gamma (\alpha^4 F - 2\alpha F'' + F''''') \end{aligned}$$

Si se multiplica por  $-i$ , se divide entre  $\alpha$  y se sabe que  $c = \beta/\alpha$  se obtiene.

$$-\bar{u} F'' - \bar{u} \alpha^2 F + c F'' + c \alpha^2 F - \bar{u} F = -\frac{i\nu}{\alpha} (\alpha^4 F - 2\alpha^2 F'' + F'''' )$$

factorizando:

$$(\bar{u} - c) (F'' - \alpha^2 F) - \bar{u}'' F = -\frac{i\nu}{\alpha} (F'''' - 2\alpha F'' + \alpha^4 F)$$

## B I B L I O G R A F I A

1. Hinze, J.O; "Turbulence" Second edition Mc. Graw Hill, 1975.
2. Levi, E; Notas Seminario Flujos Inestables, Periódicos y turbulentos, DEPTI 1983.
3. Kline, S. J., Reynolds, W.C., Schraub, F.A, Runstadler, PW.; "The structure of turbulent boundary layers", J. Fluid Mechanics Vol 30, P.741 - 773, 1967.
4. Kim, H.T., Kline; S J.Reynolds, W.C., "The production of the wall region in Turbulent flow", J. Fluid Mechanics Vol 50, P 133 - 160, 1971.
5. Corino, E. R. Brodkey R.S.; "A visual investigation of the wall region in turbulent flow", J. Fluid Mech Vol 30; Pág 1-30 1969.
6. Rouse H. And Simon Ince; "History of Hydraulics" Iowa Institute of Hydraulic Research, 1980.
7. Schlichting H., "Boundary Layer Theory" Mc. Graw - Hill, 1968.
8. Lin, C.C.; "The theory of Hydrodynamic Stability". Cambridge, University Press, 1967.
9. Chandrasekhar, S; "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford, Clarendon, 1961.
10. Stuart, J.T; "Instability and transition in Pipes and Channels" en "Transition and turbulence"; R.E. Meyer, Academic Press 1985.
11. Coles, A. "Transition in Circular Couette flow", J. Fluid Mech Vol 21 pág 385 - 425, 1965.
12. Cole, J.A. "Taylor - vortex instability and annulus - length effects" J. Fluid Mech. Vol. 75, pp. 1-15. 1976.
13. Daniel, D. "Stability of Fluid Motions I"; Springer Verlag Berlin, 1976.

14. T. Brooke Benjamin,  
"New Observations in the Taylor Experiment" "Transition and turbulence" R.E. Meyer, Academic Press, 1981.
15. Diprima, R. C; "Transition in Flow between Rotating Concentric Cylinders". Transition and Turbulence R. E. Meyer, Academic Press, 1981.
16. Clauser, F. H. "The turbulent Boundary Layer" en "Advances in Applied Mech", Vol IV. Academic Press, 1956.
17. Schubauer G.B. and H.K. Skramstad. "Laminar Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate". NACA, Rep 909, 1948.
18. Schubauer G B., and Klebanoff, "Contributions on the mechanics of Boundary-Layer Transition", NACA Rep. 1289, 1956.
19. P S. Klebanoff, K.D. Tidstrom and L.M. Sargent "The three-dimensional nature of boundary-layer instability". J. Fluid Mech, Vol. 12, pp. 21-34.
20. Shubauer, G.B. "Mechanism of transition at subsonic speeds" Symposium Freiburg of Boundary Layer Research. 1957.
21. Knapp, C.F., Roaché P.J., "A combined visual and Hot-wire anemometer investigation of Boundary Layer Transition". A.I.A.A. Journal Vol. 6, pp. 29-36, 1968.
22. Wygnansky, I. "On a turbulent 'Spot' in a laminar boundary layer" J. Fluid Mech, Vol. 78 p. 785, 1976.
23. Offen G.R., and Kline S.J. "Combined dye - streak and hydrogen-bubble visual observations of a turbulent boundary layer" J. Fluid Mech. Vol 62, pp 223-239, 1974.
24. Lindgren, E.R, Phys, of Fluids, Vol. 12, p. 418.
25. Wygnanski I.J. and Champagne F.H. "On transition in a pipe" Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug, J. Fluid Mech, Vol 59, pp. 281-335, 1973.

26. Raudkivi A.J., and Callander R.A., "Advance Fluid Mechanics an Introduc  
tion", Arnold, 1975.
27. Doebelin E. "Diseño y aplicación de Sistemas de medición", Diana,  
1980.
28. Tennekés, H. "A first curse in turbulence", Cambridge, 1972.
29. Raichlen F. "Some turbulence measurements in water". J. Engrs. Mech.  
Div., ASCE, Vol, 93, p. 73
30. Favre, A. Gaviglio, J. and Dumas, R. "Quel ques mesures de correlation  
dans le temps et espace en soufflerie". Recherche aeronaut. No. 32  
p. 21, 1953.
31. Batchelor G.K., "Homogeneous Turbulence". Cambridge, University Press,  
1960.
32. Klebanoff, P.S., NACA TN 3178, 1954.
33. Kline S.J. and Runstadler P.W., "Some preliminary results of the flow  
model of the wall layers of the turbulent boundary layer", J. Applied.  
Mech. ASME. P. 166, Junio 1959
34. Levi, E., "Eddy Production inside wall layers" Journal of Hydraulic  
Research. Vol. 16 pp 107-122, 1978.
35. Grass. A.J. "Structural features of turbulent flow over smooth and  
rough boundaries". J. Fluid Mech., Vol. 50, pp. 223-256, 1971.
36. Wallace, James M., Helmut Eckelmann and Robert S. Brodkey. "The wall  
region in turbulent shear flow" J. Fluid Mech., Vol. 54 pp. 39-48,  
1972.
37. Robert. Brodkey, J.M. Wallace and H. Eckelmann "Some propieties of  
truncated turbulence signals in bounded shear flows". J. Fluid Mech.  
Vol 63, pp. 209-244, 1974.

38. Rao, J.N., Narasimha, R. Narayanan, M. "Bursting in a turbulent boundary layer". J. Fluid Mech., Vol. 48, pp. 339-52, 1971.
39. Nychas, S.G. Hershey, H.C. "A visual study of turbulent shear flow" J. Fluid Mech. Vol 61, pp 513-40, 1973.
40. Kovasnay, L.S., Komoda, H., Vasudeva, B.R., "Proc. Heat transfer, and Fluid Mech". Institute, Stanford University Press 1962.
41. Backwell J.R., and J.L. Lumley, Phys of Fluids, Vol. 10, p. 1880, 1967.
42. Clark J.A. and Eric Markland. "Flow visualization in turbulent boundary layers" J. of the Hydraulics Division p. 1653, octu 1971.
43. Blackwelder, R.F., Eckelmann H. "Streamwise vortices associated with the bursting phenomenon". J. Fluid Mech. Vol. 94, pp. 577-94. 1979.
44. Praturi, A.K., Brodkey, R.S. "A stereoscopic visual study of coherent structures in turbulent shear flow". J. Fluid Mech. Vol 89, pp. 251-72 1978.
45. Levi, E., "An oscillatory Approach to turbulence" Symposium. Toulouse France, May 1981, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
46. Enzo Levi. "Universal Strouhal law, evidence and applications" Kinam, Vol 5, pp. 255-74, 1983.
47. Emmerling, R., Max-Planck-Institut fur Stromungsforschung, Rep 9, 1973.
48. Badri Narayanan y Marvin, "Workshop on coherent structures in turbulent boundary layers". Lehigh University, 380, 1978.
49. Hussain A.K. M.F., Ph, D. Tesis, Stanford University, 1970.
50. Reynolds W.C. and Hussain A.K.M.F., J. Fluid Mech., Vol. 54, p. 263, 1972.



51. Hussain, A.K.M.F.; "Coherent structures-reality and myth," *Physics of Fluids*, Vol. 26, p. 2816, 1983.
52. D.M. Bushnell, A.M. Cary, B.B. Holley, *AIAA Journal*, Vol. 13, p.119, 1975.
53. T. Cebeci, *AIAA Journal*, Vol. 11, p. 102, 1973.
54. Van Driest, E.R., "On turbulent flow near a wall", *J. Aero, Sci*, Vol 23, p. 1007, 1956.
55. Patankar, S.V. and Spalding, D.B., "Heat and Mass Transfer in boundary layers", 2nd Edition, Intertext Book, London 1970.
56. Launder and Spalding, "Lectures in Mathematical Models of turbulence", Academic Press, 1972.