DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

"FENOMENOS OSCILATORIOS EN SISTEMAS A PRESION, RESONADORES Y EXCITADORES."

AMALIA ADRIANA CAFAGGI FELIX

T E S I S

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
como requisito para obtener
el grado de
MAESTRA EN INGENIERIA
(HIDRAULICA)

Ciudad Universitaria

Septiembre de 1985

FENOMENOS OSCILATORIOS EN SISTEMAS A PRESION.

RESONADORES Y EXCITADORES.

Créditos asignados a la tesis ocho (8)

APROBADA POR EL JURADO:

Presidente: M.EN I GILBERTO SOTELO AVILA

Vocal: DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

Secretario: DR. RAFAEL GUARGA FERRO

Suplente: M EN I GUSTAVO PAZ SOLDAN C.

Suplente: M EN I MOISES BEREZOWSKY V.

Universidad Nacional Autónoma

Prof. Rafael Guarga Ferro,
P r e s e n t e.

Comunico a usted que a propuesta del Coordinador de la Sección de Hidráulica, ha sido designado como director de tesis de la alumna AMALIA ADRIANA CAFAGGI FELIX para obtener el grado de M en I en HIDRAULICA.

Mucho he de agradecerle su comunicación por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 25 de junio de 1985.
EL JEFE DE LA DIVISION

DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO

.geg.

DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO
Jefe de la División de Estudios de
Posgrado de la Facultad de Ingeniería.
P r e s e n t e .

En contestación a su oficio de fecha 25 de junio del presente año, en el que me solicita proponer tema de tesis para que sea desarrollado por la alumna AMALIA ADRIANA CAFAGGI FELIX, para obtener el grado de M. en I. en HIDRAULICA, me permito someter a su consideración el siguiente:

"FENOMENOS OSCILATORIOS EN SISTEMAS A PRESION. RESONADORES Y EXCITADORES".

A t e n t a m e n t e .

Cd. Universitaria, D. F., a 16 de julio de 1985.

DR. RAFAEL GUARGA FERRO.

INDICE

CAPITULO 1. INTRODUCCION

Dentro de las condiciones de operación de turbinas tipo Francis, se ha observado que cuando operan fuera de las condiciones de diseño, existe un flujo helicoidal pulsante en el tubo de succión de la máquina. Este flujo induce fluctuaciones periódicas de presión y por tanto constituye un excitador permanente del sistema de conducción de una planta hidroeléctrica.

Aunque el problema es mundial, en México surge la preocupación por el estudio del problema antes expuesto, debido a las dificultades que se tuvieron en la planta hidroeléctrica "Belisario Domínguez" también conocida como "La Angostura", la cual desde que comenzó su operación presento problemas serios de oscilaciones de presión en la tubería de presión aguas arriba de la turbina; estas oscilaciones llegaron al 60% de la carga de diseño. Es obvio que este problema reduce la vida útil de la planta, pues los materiales sujetos a tales condiciones de trabajo, se debilitan por fatiga. Además, la actual tendencia en el diseño de turbinas Francis es de aumentar la potencia de cada unidad, y como la eficiencia hidráulica de la máquina no aumenta con su potencia hidráulica, la potencia residual no controlada es proporcional a la potencia hidráulica de la máquina, lo cual puede aumentar la magnitud del fenómeno excitador dentro del sistema de conducción.

El estudio del problema de "La Angostura" /1/, confirmó que se tenía un fenómeno de resonancia de las pulsaciones producidas por el vórtice (flujo helicodal) en la tubería de descarga (excitador), con la tubería de presión del sistema hidráulico (resonador).

El fenómeno de resonancia observado en la P.H "La Angostura" no se pudo reproducir en el banco de pruebas del modelo de turbinas que efectúa el fabricante, debido a que éste no cuenta con la tubería de presión aguas arriba de la turbina, y es precisamente esta tubería la que en prototipo trabaja como resonador. Para poder prevenir en la etapa de diseño de una planta hidroeléctrica los posibles fenómenos de resonancia, se requiere de la construcción de un modelo físico que simule de manera conjunta tanto al excitador (flujo helicoidal en el desfogue), como al resonador (galería de alimentación y tubo de presión).

En el capítulo 2 de este trabajo se presenta el modelo lineal a partir del cual, se desarrolla en el capítulo 3 la teoría de la resonancia, la cual permite calcular en cuáles puntos del sistema y con que frecuencias se producen las máximas oscilaciones de presión. Una vez conocidas las características del posible resonador (galería de alimentación, tubería de presión y desfogue), se tiene la necesidad de conocer el mecanismo de oscilación del vórtice (excitador). Aunque los tubos de succión son cónicos y presentan cambios de dirección, el estudio de los fenómenos básicos en tubos cilíndricos, permite un camino más simple para comprender el comportamiento del vórtice.

En el capítulo 4 se presentan los resultados experimentales obtenidos en el Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., al estudiar flujo helicoidal, turbulento y confinado en tubos cilíndricos, empleando agua como fluido de trabajo. Se proponen dos modelos teóricos para calcular la distribución de velocidades axial y tangencial y se comparan con los resultados obtenidos experimentalmente. A partir de uno de los modelos propuestos se calcula la distribución de presiones en la dirección radial y se comparan los resultados con los obtenidos experimentalmente. Se muestra experimental y teóricamente la relación que existe entre el radio del núcleo del vórtice (presentado en forma adimensionada), con el flujo del momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante con respecto a un punto del eje del tubo, presentado también en forma adimensionada (parámetro de giro). Se introduce el método del momento de la cantidad de movimiento (técnica del parámetro de giro), el cual permite aplicar a prototipos, en los cuales el flujo helicoidal se produce con un rotor, los resultados obtenidos al generar el vórtice con elementos estáticos.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos en el Instituto de Ingeniería al estudiar las características oscilatorias del flujo helicoidal, turbulento y confinado en tubos cilíndricos, empleando aire y agua como fluidos de trabajo. Se encuentran relaciones funcionales entre la frecuencia de oscilación del vórtice, presentada en forma adimensionada (parámetro de frecuencia), el parámetro de giro a la entrada del tubo y la longitud adimensionada. Se plantea un modelo teórico simple para evaluar la disminución del parámetro de giro a lo largo del tubo. Dicho modelo se calibra con los resultados experimentales obtenidos, y se emplea para determinar una nueva relación funcional entre el parámetro de frecuencia y el parámetro de giro a la salida del tubo.

Debe aclararse que los capítulos 2 y 3 son básicamente teóricos, y proporcionan las herramientas para poder preveer y evitar en la etapa de diseño las frecuencias resonantes, en cambio, en los capítulos 4 y 5 se presentan los resultados experimentales que se han obtenido al estudiar el comportamiento del flujo helicoidal dentro de tubos cilíndricos, lo cual es apenas el primer paso del estudio del fenómeno físico que origina la inestabilidad o pulsación del vórtice.

CAPITULO 2 MODELO LINEAL EN TUBERIAS

Las oscilaciones estacionarias son oscilaciones de presión y de gasto que se establecen en un sistema de conducción como consecuencia de una excitación periódica aplicada al sistema. Estas oscilaciones difieren del golpe de ariete , ya que este es un fenómeno transitorio, y las oscilaciones se denominan estacionarias debido a que su amplitud, frecuencia y fase no varían con el tiempo.

En el estudio del comportamiento de las oscilaciones estacionarias se emplean las ecuaciones de continuidad y dinámica, las cuales serán linealizadas. El modelo lineal, que será expuesto a continuación, ha sido empleado desde la década de los sesentas por Wylie/2/ y por Brown /3/, quienes desarrollan los conceptos de"impedancia hidráulica" y de "matriz de transferencia".En 1970, Chaudry /4/ aplica el concepto de matriz de transferencia para conductos a presión con flujo turbulento. La verificación de este modelo que supone la linealización de la formulación matemática, ha sido realizada con buenos resultados. Entre las verificaciones experimentales se pueden citar los trabajos de Fanelli/5/ y de Guarga /6/,/7/ y /8/. Fashbaugh y Streeter /9/ y Zielke/10/ hacen uso del modelo lineal para el estudio del comportamiento oscilatorio; en ambos casos el método responde satisfactoriamente a la comparación con los resulados experimentales.

En este capítulo se expondrá el modelo lineal, el cual se usará posteriormente en la formulación de la teoría de la resonancia.

2.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un flujo no permanente en un conducto a presión son: /4/:

-La ecuación dinámica y la ecuación de continuidad

$$\frac{\delta H}{\delta x} + \frac{1}{gA}\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{f Q^2}{2gDA} = 0 \qquad (2.1) \qquad ; \qquad \frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{gA}{c^2}\frac{\delta H}{\delta t} = 0 \qquad (2.2)$$

donde:

H carga piezométrica instantánea

Q gasto instantáneo

A área de la sección del conducto

g aceleración debida a la gravedad

t tiempo

f factor de fricción de Darcy-Weisbah

c celeridad de la onda de presión

x absisa medida según el eje de la tubería en el sentido del flujo

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 deben cumplir con las siguientes hipótesis:

a) El flujo se considera unidimensional

b) El fluido y el conducto se comportan elásticamente.

c) Son válidas las fórmulas de pérdidas de energía para flujo permanente, aunque este no lo sea.

d) Se cumple $|V/c| \ll 1$

e) $| \Delta p/E | << 1$. Δp es la máxima variación de presión esperada en el sistema. E es el módulo de elasticidad de Young

f) $| \Delta p/K | << 1$. K es el módulo de compresibilidad del fluído.

Considerando que el gasto y la carga instantánea se pueden expresar como la suma del valor medio más su correspondiente fluctuación, se tiene :

$$Q = Q_0 + q^* \qquad 2.3$$

$$H = H_0 + h^* \qquad 2.4$$

donde

$$|q^*/Q_0| << 1 \qquad 2.5$$

Sustituyendo 2.3 y 2.4 en las ecuaciones 2.1 y 2.2 y teniendo en cuenta 2.5 y que en una tubería sin ramificaciones $\delta Q_0/\delta x = 0$ y $\delta H_0/\delta x = -f Q_0^2/2gDA^2$, se tiene:

$$\frac{\delta h^*}{\delta x} + \frac{1}{gA}\frac{\delta q^*}{\delta t} + R'q^* = 0 \qquad 2.6$$

y

$$\frac{\delta q^*}{\delta x} + \frac{gA}{c^2}\frac{\delta h^*}{\delta t} = 0 \qquad 2.7$$

donde $R' = f\, Q_0/gDA^2$

Se puede observar que las ecuaciones 2.6 y 2.7 son lineales en h^* y q^*, que son respectivamente las variaciones instantáneas de la carga piezométrica y el gasto.

Al considerar oscilaciones estacionarias, interesa estudiar soluciones en las que se cumpla:

$$q^*(x,t) = q^*(x,t+T)$$
$$h^*(x,t) = h^*(x,t+T) \qquad 2.8$$

siendo T un valor constante.

Si las funciones q^* y h^* cumplen 2.8 y además son definidas y uniformes excepto posiblemente en un número finito de puntos del intervalo $0<t<T$, y $q^*, h^*, \delta q^*/\delta t$ y $\delta h^*/\delta t$ son contínuas en el mismo intervalo (condiciones de Dirichlet), pueden desarrollarse en serie de Fourier:

$$q^*(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q_n(x)\ e^{jn\omega_0 t}$$

$$h^*(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h_n(x)\ e^{jn\omega_0 t}$$

donde $j=\sqrt{-1}$; $\omega_0 = 2\pi/T$; $\omega = 2\pi n/T$

$$q_n(x) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} q^*(x,t)\ e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$h_n(x) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} h^*(x,t)\ e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

En consecuencia, cualquier solución del tipo 2.8 buscado puede expresarse como suma de soluciones del tipo:

$$q^*(x,t) = \mathrm{Re}\{q(x)\, e^{j\omega t}\} = q^*$$

2.9

$$h^*(x,t) = \mathrm{Re}\{h(x)\, e^{j\omega t}\} = h^*$$

donde q y h son variables complejas que solo dependen de x, y Re{ } indica la parte real de { }.

Al derivar el sistema 2.9 , se tiene:

$$q^*_t = \mathrm{Re}\{q(x)\, j\omega e^{j\omega t}\} \qquad q^*_x = \mathrm{Re}\{q(x)_x\, e^{j\omega t}\}$$

$$q^*_{tt} = -\mathrm{Re}\{q(x)\, \omega^2 e^{j\omega t}\} \qquad q^*_{xx} = \mathrm{Re}\{q(x)_{xx} e^{j\omega t}\}$$

2.10

$$h^*_t = \mathrm{Re}\{h(x)\, j\omega e^{j\omega t}\} \qquad h^*_x = \mathrm{Re}\{h(x)_x\, e^{j\omega t}\}$$

$$h^*_{tt} = -\mathrm{Re}\{h(x)\, \omega^2 e^{j\omega t}\} \qquad h^*_{xx} = \mathrm{Re}\{h(x)_{xx} e^{j\omega t}\}$$

Sustituyendo 2.10 en 2.6 y 2.7 y operando se llega a:

$$q(x)_{xx} - \mu^2 q(x) = 0 \qquad 2.11$$

$$h(x)_{xx} - \mu^2 h(x) = 0 \qquad 2.12$$

donde

$$\mu^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{jgA\omega R'}{c^2} \qquad 2.13$$

las soluciones de las ecuaciones 2.11 y 2.12 son:

$$q(x) = C_1 \operatorname{senh} \mu x + C_2 \cosh \mu x \qquad 2.14$$

$$h(x) = -Z_c \left[C_2 \operatorname{senh} \mu x + C_1 \cosh \mu x \right] \qquad 2.15$$

Aquí se introduce el concepto de "impedancia característica"

$$Z_c = \frac{\mu c^2}{j\omega g A} \qquad 2.16$$

Se denomina "impedancia hidráulica" en la sección "i" cualquiera de la tubería, al cociente

$$Z_i = \frac{h_i}{q_i} \qquad 2.17$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales. Para mayor detalle de la deducción de las ecuaciones 2.14 y 2.15 se puede consultar /8/. Estas ecuaciones deben sustituirse en 2.9 para obtener las expresiones de q^* y h^* bajo la forma de ondas estacionarias, esto es,oscilaciones cuyas amplitudes y fases no dependen del tiempo.

2.2 MATRICES DE TRANSFERENCIA

2.2.1 *Matriz de campo de un conducto.*

Considérese una tubería con las secciones 1 y 2 en sus extremos

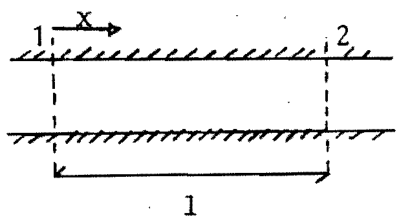


Figura 2.1 Conducto simple

en $x=0$,$h=h_1$ y $q=q_1$,sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones 2.14 y 2.15, se tiene:

$$C_1 = - Z_c h_1 \qquad y \qquad C_2 = q_1$$

en $x=l$, $h=h_2$ y $q=q_2$; teniendo presentes los valores de C_1 y C_2 las ecuaciones 2.14 y 2.15 se pueden escribir

$$q_2 = \cosh \mu l \; q_1 - \frac{1}{Z_c} \operatorname{senh} \mu l \; h_1 \qquad 2.18$$

$$h_2 = -Z_c \operatorname{senh} \mu l \; q_1 + \cosh \mu l \; h_1 \qquad 2.19$$

Las expresiones 2.18 y 2.19 pueden escribirse con notación matricial

$$\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}_2 = M_c \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}_1$$

donde

$$M_c = \begin{bmatrix} \cosh \mu l & -\frac{1}{Z_c} \operatorname{senh} \mu l \\ -Z_c \operatorname{senh} \mu l & \cosh \mu l \end{bmatrix} \qquad 2.19$$

Si la fricción se puede considerar despreciable, $R' = 0, Z_c = \frac{c}{gA}$ y la matriz de campo se reduce a:

$$M_c = \begin{bmatrix} \cos \omega l/c & -j \frac{1}{Z_c} \operatorname{sen} \omega l/c \\ -j \, Z_c \operatorname{sen} \omega l/c & \cos \omega l/c \end{bmatrix} \qquad 2.20$$

La matriz M_c se denominará matriz de transferencia del conducto que va de la sección 1 a la sección 2. Para diferenciar las matrices de transferencia de las singularidades con parámetros concentrados, de las matrices de transferencia con parámetros distribuídos, estas se denominarán " matrices de campo" y las matri ces de las singularidades se llamarán "matrices de punto"

2.2.2 Matriz de transferencia de las singularidades

El comportamiento oscilatorio de la carga y el gasto en un sistema de conductos a presión, se ve afectado por la presencia de elementos cuyo efecto puede considerarse concentrado en un punto, tal efecto puede representarse por la matriz de transferencia de dicho elemento, la cual, relaciona los valores de q* y h* antes y después de la singularidad o discontinuidad.

El desarrollo de las matrices de punto o de singularidades, es el que presenta Guarga en /12/.

Entre las singularidades que se pueden presentar en un sistema de conductos a presión,se pueden citar los cambios de sección, válvulas,cámaras de oscilación, máquinas , etc.

En la figura 2.2 se muestra el esquema de un elemento genérico.

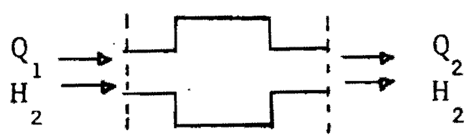


Fig. 2.2 Esquema de una singularidad

De las ecuaciones de conservación de masa y dinámica se tiene:

$$Q_2 = \xi(Q_1, \dot{H}_1, \Phi) \qquad 2.21$$

$$H_2 = \psi(Q_1, \dot{Q}_1, H_1, \Lambda) \qquad 2.22$$

donde $\dot{H}$ y $\dot{Q}$ son las primeras derivadas de la carga y el gasto con respecto al tiempo, Φ y Λ son variables que permiten perturbar H_2 y Q_2 sin alterar H_1 y Q_1 y dependen de la singularidad en cuestión. Al igual que en 2.3 y 2.4 se considerará que la perturbación instantánea se puede expresar como la suma de un valor medio más su variación.

$$\Phi = \Phi_0 + \phi^*$$
$$\Lambda = \Lambda_0 + \lambda^* \qquad 2.23$$

Desarrollando las ecuaciones 2.21 y 2.22 en serie de Taylor se tiene:

$$Q_0 + q_2^* = \xi(Q_0, \Phi_0) + \xi_Q q_1^* + \xi_{\dot{H}} \dot{h}_1^* + \xi_\Phi \phi^* + \frac{1}{2}\left[\xi_{QQ} q_1^{*2} + \xi_{\dot{H}\dot{H}} \dot{h}_1^{*2} + 2\xi_{Q\dot{H}} q_1^* \dot{h}_1^* + 2\xi_{Q\Phi} q^* \phi^* + 2\xi_{\dot{H}\Phi} \dot{h}^* \phi^* + \xi_{\Phi\Phi} \phi^{*2} \right] + \frac{1}{6}\left[\xi_{QQQ} q_1^{*3} + \ldots \right] + \ldots \qquad 2.24$$

$$H + h_2^* = \psi(Q_0, H_{01}, \Lambda_0) + \psi_Q q_1^* + \psi_{\dot{Q}} \dot{q}_1^* + \psi_H h_1^* + \psi_\Lambda \lambda^* + \frac{1}{2}\left[\psi_{QQ} q_1^{*2} + \psi_{\dot{Q}\dot{Q}} \dot{q}_1^{*2} + \psi_{HH} h_1^{*2} + \psi_{\Lambda\Lambda} \lambda^{*2} + 2\psi_{Q\dot{Q}} q^* \dot{q}^* + \ldots \right] + \frac{1}{6}\left[\psi_{QQQ} q_1^{*3} + \psi_{\dot{Q}\dot{Q}\dot{Q}} \dot{q}_1^{*3} + \ldots \right] + \ldots \qquad 2.25$$

donde $\psi_Q = \partial\psi/\partial Q|_0$, $\xi_{Q\dot{H}} = \partial^2\xi/\partial Q\, \partial\dot{H}|_0$, etc.

Despreciando términos de orden superior, las expresiones 2.24 y 2.25 pueden escribirse:

$$q_2^* = \xi_Q q_1^* + \xi_{\dot{H}}\dot{h}_1^* + \xi_\Phi \phi^* \qquad 2.27$$

$$h_2^* = \psi_Q q_1^* + \psi_{\dot{Q}}\dot{q}_1^* + \psi_H h_1^* + \psi_\Lambda \lambda^* \qquad 2.28$$

Como interesa la solución de oscilaciones de tipo periódico,se debe cumplir:

$$\begin{aligned} q^*(t) &= q^*(t + T) \\ h^*(t) &= h^*(t + T) \\ \phi^*(t) &= \phi^*(t + T) \\ \lambda^*(t) &= \lambda^*(t + T) \end{aligned} \qquad 2.29$$

Si las variables del sistema 2.29 cumplen con las condiciones de Dirichlet, al igual que el sistema 2.8, sus soluciones pueden expresarse como suma de soluciones del tipo

$$\begin{aligned} q^* &= \mathrm{Re}\{q\ e^{j\omega t}\} \\ h^* &= \mathrm{Re}\{h\ e^{j\omega t}\} \\ \phi^* &= \mathrm{Re}\{\phi\ e^{j\omega t}\} \\ \lambda^* &= \mathrm{Re}\{\lambda\ e^{j\omega t}\} \end{aligned} \qquad 2.30$$

donde q, h, ϕ, y λ son variables complejas.

Del sistema 2.30 sutituyendo en 2.27 y 2.28 se tiene:

$$\mathrm{Re}\left\{ \left[q_2 - \xi_Q q_1 - \xi_{\dot{H}} j\omega h_1 - \xi_\Phi \phi \right] e^{j\omega t} \right\} = 0 \qquad 2.31$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \left[h_2 - \psi_Q q_1 - \psi_{\dot{Q}} j\omega q_1 - \psi_H h_1 - \psi_\Lambda \lambda \right] e^{j\omega t} \right\} = 0$$

despejando:

$$q_2 = \xi_Q q_1 + j\omega \xi_{\dot{H}} h_1 + \xi_\Phi \phi \qquad 2.32$$

$$h_2 = (\psi_Q + j\omega \psi_{\dot{Q}}) q_1 + \psi_H h_1 + \psi_\Lambda \lambda \qquad 2.33$$

estas ecuaciones pueden escribirse en notación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_Q & j\omega\xi_{\dot{H}} & \xi_\Phi \phi \\ \psi_Q + j\omega\psi_{\dot{Q}} & \psi_H & \psi_\Lambda \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_s} \begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix}_1 \qquad 2.34$$

La matriz M_s es la genérica de las singularidades mencionadas, y los valores de sus elementos dependerán dela singularidad en particular.

Como ejemplos, a continuación se determinarán las matrices de algunas singularidades

-CAMBIO DE SECCION

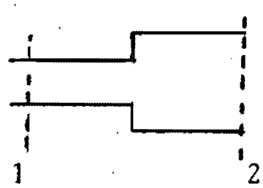


Figura 2.3 Cambio de sección

De las ecuaciones de conservación de masa y dinámica se tiene:

$Q_2 = Q_1$

$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 - KQ_1^2$

donde $\mathcal{H} = H + Q^2/2gA^2$; K = coeficiente de pérdida de energía.

De 2.3 y 2.4, y haciendo $\alpha = \dfrac{1}{2g}(1/A_1^2 - 1/A_2^2)$, se tiene:

Conservación de masa

$Q_{02} + q_2^* = Q_{01} + q_1^*$

como $Q_{01} = Q_{02} = Q_0$

$$q_2^* = q_1^* \qquad 2.35$$

Ecuación dinámica

$H_{01} + h_2^* = H_{01} + h_1^* + (\alpha - K)(Q_0^2 + 2Q_0 q_1^* + q_1^{*2})$

como $\dot{q}_1^* = 0$; y eliminando las condiciones estacionarias de ambos lados

$$h_2^* = h_1^* + (\alpha - K)2Q_0 q_1^* \qquad 2.36$$

Igualando 2.35 y 2.36 con las ecuaciones 2.27 y 2.28 respectivamente, se tiene $\xi_Q = 1$, $\xi_{\dot{H}} = 0$, $\xi_\phi = 0$, $\psi_Q = 2(\alpha - K)Q_0$, $\psi_{\dot{Q}} = 0$, $\psi_H = 1$ y $\psi_\Lambda = 0$; valores que sustituídos en la matriz 2.34, proporcionan la matriz de transferencia del cambio de sección.

$$M_{CS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(\alpha-K)Q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2.37$$

En el caso de un orificio entre las secciónes 1 y 2, en las cuales $A_1 = A_2$,$\alpha = 0$ y se puede usar la matriz 2.37 haciendo $\psi_Q=-2KQ_0$

-PISTON OSCILANTE

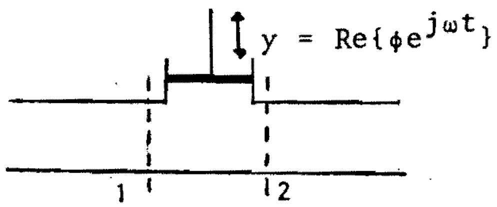


Figura 2.4 Pistón oscilante

El oscilador de pistón, de área A', se presenta en la figura 2.4. La diferencia de gastos entre las secciones 1 y 2 está determinada por el movimiento del pistón que se considerará armónico de la forma $y = Re\{\phi e^{j\omega t}\}$. Si se desprecian las pérdidas de energía debidas a la bifurcación, las ecuaciones de conservación de masa y dinámica se pueden expresar:

$$Q_2 = Q_1 - \Phi A'$$

$$H_2 = H_1$$

donde $\Phi = \dot{y} = -\phi\omega \text{sen } \omega t$ 2.38

Al descomponer las ecuaciones de conservación de masa y dinámica en la suma de las componentes estacionarias más las oscilatorias, se tiene:

$$Q_{02} + q_2^* = Q_{01} + q_1^* - (\Phi_0 + \phi^*) A'$$

$$Q_{02} + q_2^* = Q_{01} + q_1^* - \Phi_0 A' - \phi^* A'$$

$$q_2^* = q_1^* - \phi^* A' \qquad 2.39$$

y

$$H_{02} + h^*_2 = H_{01} + h^*_1$$

$$h^*_2 = h^*_1 \qquad 2.40$$

Igualando las ecuaciones 2.39 y 2.40 que relacionan la carga y el gasto oscilante, con las ecuaciones 2.27 y 2.28 respectivamente, se tiene $\xi_Q=1$, $\xi_{\dot{H}}=0$, $\xi_\Phi=A'$, $\psi_Q=0$, $\psi_{\dot{Q}}=0$, $\psi_H=1$ y $\psi_\Lambda=0$. La matriz de transferencia del pistón oscilante, bajo las consideraciones indicadas es:

$$M_{PO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A'_\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.41$$

-VALVULA OSCILANTE

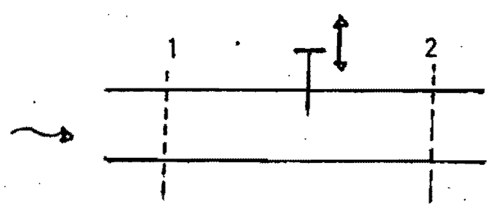


Figura 2.5 Válvula oscilante

Las ecuaciones que describen el comportamiento de la válvula oscilante son:

$$Q_2 = Q_1$$

$$H_2 = H_1 - KQ_1^2 - K\Lambda Q_1^2$$

donde $\Lambda = Re\{\lambda e^{j\omega t}\}$ (variable de perturbación) y K = factor de pérdida de energía.

Descomponiendo las ecuaciones en su parte estacionaria más su parte oscilatoria y considerando $q^{*2} \doteq 0$ y $q^{*}\lambda^{*} \doteq 0$, se tiene:

$$Q_{02} + q_2^* = Q_{01} + q_1^*$$

$$q_2^* = q_1^* \qquad 2.42$$

y

$$H_{02} + h_2^* = H_{01} + h_1^* - K(Q_0 + q_1^*)^2 - K(\Lambda_0 + \lambda^*)(Q_0 + q_1^*)^2$$

$$h_2^* = h_1^* - 2KQ_0 q_1^* - KQ_0^2\lambda^* \qquad 2.43$$

De 2.42 y 2.43 se tiene: $\xi_Q=1$, $\xi_H=0$, $\xi_\Phi=0$, $\psi_Q=-2KQ_0$, $\psi_H=1$ y $\psi_\Lambda=-KQ_0^2$; por lo que la matriz de transferencia de la vávula oscilante es:

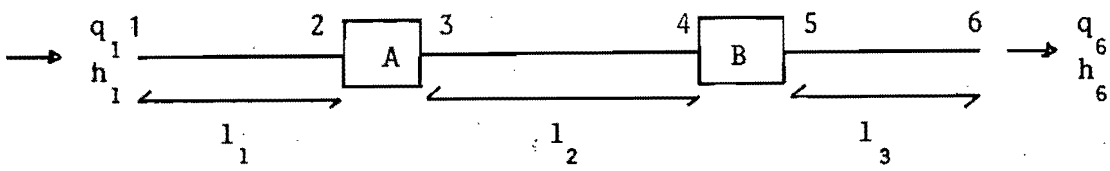
$$M_{VO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2KQ_0 & 1 & -KQ_0^2\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.44$$

Para obtener las matrices de transferencia de otras singularidades, basta con seguir el procedimiento mostrado en los ejemplos.

2.2.3 Aplicación del método de las matrices de transferencia.

Un sistema hidráulico a presión está compuesto por el arreglo de conductos simples más las singularidades propias del sistema, por lo que es posible relacionar sus diferentes secciones usando las matrices de transferencia que corresponden al tramo en estudio. /4/,/8/.

A manera de ejemplo , se verá como relacionar dos extremos de un conducto en serie.



Las matrices de transferencia se denominarán M_C cuando correspondan a una tubería y M_S cuando correspondan a una singularidad. Llamando z_i al vector columna cuyos elementos son el gasto pulsante, la carga pulsante y la unidad en el punto "i", se tiene:

$$z_i = \begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix}_i \qquad 2.45$$

y el sistema de ecuaciones matriciales es:

$$\begin{aligned} z_2 &= M_{C_1} z_1 \\ z_3 &= M_{SA}\, z_2 \\ z_4 &= M_{C_2} z_3 \\ z_5 &= M_{SB}\, z_4 \\ z_6 &= M_{C_3} z_5 \end{aligned} \qquad 2.46$$

haciendo $M_T = M_{C_3} M_{SB} M_{C_2} M_{SA} M_{C_1}$; se tiene:

$$\begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix}_6 = M_T \begin{bmatrix} q \\ h \\ 1 \end{bmatrix}_1$$

CAPITULO 3 . TEORIA DE LA RESONANCIA

Al proyectista de un sistema hidráulico le interesa conocer en que puntos del sistema y para cuales frecuencias, se producen las máximas amplitudes de la oscilación de presión.

Hasta 1982, las dos teorías de resonancia conocidas eran las propuestas por Wylie /2/ y por Zielke/13/.

Wylie limita su teoría a sistemas con tanque de carga constante en el extremo aguas arriba y con la excitación producida en el extremo aguas abajo; en este tratamiento ubica de antemano el punto más peligroso junto al excitador y asocia las frecuencias que producen la máxima oscilación a aquellas asociadas al máximo del módulo de la impedancia terminal.

Zielke no indica limitaciones en cuanto a los sistemas considerados; propone que las oscilaciones libres son causadas por una excitación inicial y tienen duración limitada en el tiempo. Obtiene las ecuaciones libres de oscilación, de las de transferencia de Chaudry, sustituyendo $j\omega$ por $\sigma + j\omega$ para considerar el efecto del amortiguamiento y determina las frecuencias resonantes cuando el excitador presenta lo que se llaman "frecuencias propias del sistema". No presenta resultados experimentales que verifiquen la teoría.

En /8/, Guarga realiza el análisis teórico de cuatro sistemas simples empleando la teoría de Zielke y la de Wylie, y observa que las frecuencias teóricas de resonancia no coinciden en algunos de los casos; después estudia experimentalmente los mismos sistemas y encuentra que ninguna de las teorías proporciona el resultado experimental correcto para los cuatro casos. En la misma referencia /8/, Guarga propone una teoría de resonancia a la que denomina "Teoría de la localización de máximos" , la cual, al aplicar a los citados sistemas, verifica satisfactoriamente. En 1984 /11/, introduce el concepto de"función de ganancia", la cual es producto de una función de "receptividad" que depende de las características del sistema,y de funciones llamadas de"forma modal" , que vinculan la ganancia con la posición de los puntos a lo largo de la tubería. Esta teoría es la que se expondrá en este capítulo.

3.1 RESONANCIA Y RECEPTIVIDAD EN TUBERIAS UNIFORMES

En /8/ se definen las "frecuencias de resonancia" como aquellas para las cuales en uno o más puntos del sistema se presentan máximos de amplitud en las oscilaciones estacionarias de la carga piezométrica. Además, para cada frecuencia de resonancia, interesa localizar la posición de los puntos en los cuales se produ los mencionados máximos.

Cuando el excitador de las oscilaciones se ubica en el subsistema aguas abajo de la tubería estudiada, se tiene un sistema que se denominará "tipo I" (fig. 3.1), y cuando se ubica aguas arriba, se tiene un sistema que se denominará del "tipo II" (fig. 3.2). Debido a que el desarrollo de la teoría se apoya en el modelo lineal, todo sistema hidráulico puede considerarse como una combinación de los sistemas I y II.

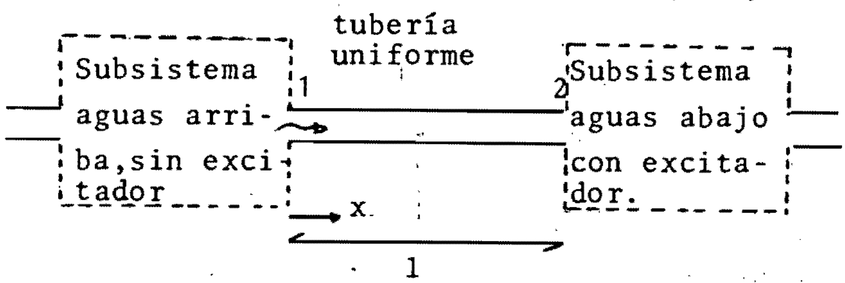


Figura 3.1 Sistema tipo I .

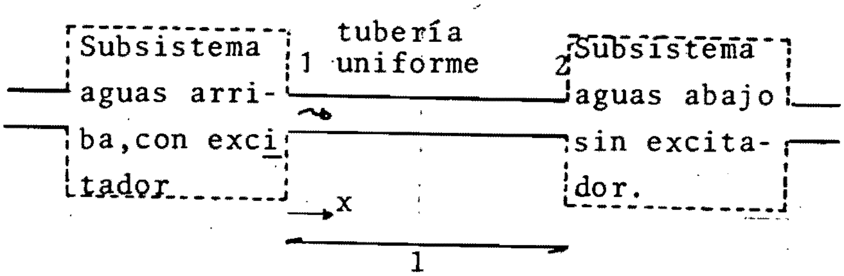


Figura 3.2 Sistema tipo II.

3.1.1 *Cálculo de $h(x,\omega)$ para los sistemas del tipo I .*

Para calcular $h(x, \omega)$ se requieren las condiciones de frontera en 1 y en 2 , las cuales en un sistema tipo I son las siguientes:

$$h_1 = Z_1 q_1 \tag{3.1}$$

$$h_2 = Z_2 q_2 + \tilde{e} \tag{3.2}$$

siendo Z_1 y Z_2 impedancias complejas que dependen de las carácterísticas de los respectivos subsistemas y de la frecuencia ω de la oscilación. Z_1 depende del subsistema aguas arriba y Z_2 depende del subsistema aguas abajo; $\tilde{e}$ es el término de la excitación.

Sustituyendo la ecuación 3.1 en las expresiones 2.18 y 2.19, se tiene:

$$q_2 = (\cosh \mu l - \frac{Z_1}{Z_c} \operatorname{senh} \mu l)\ q_1 \tag{3.3}$$

$$h_2 = Z_2 q_2 + \tilde{e} = (-Z_c \operatorname{senh} \mu l + Z_1 \cosh \mu l)\ q_1 \tag{3.4}$$

Aplicando 3.4 en 3.3 y despejando q_1 se llega a:

$$q_1 = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{\tilde{e}}{(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c})\cosh \mu l + (\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1)\operatorname{senh} \mu l} \tag{3.5}$$

Aplicando 2.19 para un tramo de tubería que va desde el extremo aguas arriba 1 y el punto de abscisa x y empleando 3.1, se tiene:

$$h(x,\omega) = Z_c\left(\frac{Z_1}{Z_c}\cosh \mu x - \operatorname{senh} \mu x\right) q_1 \qquad 3.6$$

sustituyendo 3.5 en 3.6, se tiene finalmente para $h(x,\omega)$

$$h(x,\omega) = \left(\frac{Z_1}{Z_c}\cosh \mu x - \operatorname{senh} \mu x\right) \cdot \frac{\tilde{e}}{\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)\cosh \mu l + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)\operatorname{senh}\mu l} \qquad 3.7$$

Procediendo de igual manera para los sistemas del tipo II con condiciones de frontera

$$h_1 = Z_1 q_1 + \tilde{e} \qquad 3.8$$

$$h_2 = Z_2 q_2 \qquad 3.9$$

se llega a que la expresión para $h(x,\omega)$ para los sistemas tipo II es :

$$h(x,\omega) = \left[\operatorname{senh}\mu(x-l) - \frac{Z_2}{Z_c}\cosh\mu(x-l)\right] \cdot \frac{\tilde{e}}{\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)\cosh\mu l + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)\operatorname{senh}\mu l} \qquad 3.10$$

3.1.2 *Definición de variables adimensionales y de la función ganancia.*

A continuación se definen las siguientes variables adimensionadas reales.

$$\Omega = \frac{\omega l}{c} \quad , \qquad X = \frac{x}{l} \quad , \qquad \nu = \frac{R' gAl}{c} \qquad 3.11$$

$$\beta_i = \frac{|Z_i|}{c/gA} \qquad \theta_i = \arg Z_i \quad , \quad i = 1,2 \qquad 3.12$$

Recordando las expresiones de μ, R' y Z_c , y aplicando las variables definidas en 3.11 se tiene:

$$\mu l = \Omega^{\frac{1}{2}} \, (-\Omega + j\nu)^{\frac{1}{2}} \qquad 3.13$$

$$\mu x = \Omega^{\frac{1}{2}} \, (-\Omega + j\nu)^{\frac{1}{2}} \, . \, X \qquad 3.14$$

$$Z_c = \frac{\mu l}{j\Omega} \, . \, \frac{c}{gA} \qquad 3.15$$

Utilizando las variables definidas en 3.12, los cocientes de impedancia que aparecen en las expresiones de $h(x,\omega)$ pueden expresarse :

$$\frac{Z_i}{Z_c} = \beta_i e^{j\theta i} \, . \, \frac{j\Omega}{\mu l} \qquad 3.16$$

3.1.3 Funciones de ganancia.

Con base a las variables adimensionadas, se tiene que para los dos tipos de sistemas considerados:

$$\frac{h}{\tilde{e}} = \Psi_1(X, \Omega, \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) \qquad \text{Sistemas tipo I} \qquad 3.17$$

$$\frac{h}{\tilde{e}} = \Psi_2(X, \Omega, \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) \qquad \text{Sistemas tipo II} \qquad 3.18$$

Como en general β_i y θ_i $(i=1,2)$ son constantes o funciones de Ω , las relaciones funcionales 3.17 y 3.18 pueden escribirse:

$$\frac{h}{\tilde{e}} = \P_1(X, \Omega) \qquad \text{Sistemas tipo I} \qquad 3.19$$

$$\frac{h}{\tilde{e}} = \P_2(X, \Omega) \qquad \text{Sistemas tipo II} \qquad 3.20$$

De las funciones complejas 3.19 y 3.20 interesan sus módulos, se definen entonces las "funciones de ganancia" $|\P_1| = G_1$ y $|\P_2| = G_2$. Utilizando las expresiones 3.7 y 3.10 de $h(x,\omega)$, se obtiene:

$$\left|\frac{h}{\tilde{e}}\right| = G_1(X, \Omega)$$

$$\left|\frac{h}{\tilde{e}}\right| = \frac{|(Z_1/Z_c)\cosh(\mu l \cdot X) - \operatorname{senh}(\mu l \cdot X)|}{\left|\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)\cosh\mu l + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)\operatorname{senh}\mu l\right|} \qquad 3.21$$

y

$$\left|\frac{h}{\tilde{e}}\right| = G_2(X, \Omega)$$

$$\left|\frac{h}{\tilde{e}}\right| = \frac{|\operatorname{senh}[\mu l(X-1)] - (Z_2/Z_c)\cosh[\mu l(X-1)]|}{\left|\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)\cosh\mu l + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)\operatorname{senh}\mu l\right|} \qquad 3.22$$

La expresión 3.21 corresponde a los sistemas tipo I y la expresión 3.22 corresponde a los sistemas tipo II.

Las funciones G_i (i=1,2) establecen la ganancia o amplificación en cada punto X y para cada frecuencia Ω entre la amplitud de la excitación $|\tilde{e}|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en ese punto X de la tubería y para la frecuencia Ω .

El campo de definición de las funciones G_i es la región del plano

$$0 < X < 1 \quad , \qquad \Omega_m < \Omega < \Omega_M \tag{3.23}$$

siendo Ω_m la frecuencia adimensional mínima y Ω_M la máxima que interesan estudiar en el caso particular.

3.1.4 *Receptividad y formas modales.*

De las expresiones 3.21 y 3.22, las funciones G_i pueden escribirse como el producto de dos funciones

$$G_1 = R(\Omega)F_1(X, \Omega) \qquad \text{y} \qquad G_2 = R(\Omega)F_2(X, \Omega) \tag{3.24}$$

siendo

$$R(\Omega) = \frac{1}{\left|\left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)\cosh \mu l + \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)\operatorname{senh} \mu l\right|} \tag{3.25}$$

a $R(\Omega)$ se le denominará "receptividad" de la tubería, y

$$F_1(X, \Omega) = \left|\frac{Z_1}{Z_c}\cosh(\mu l \cdot X) - \operatorname{senh}(\mu l \cdot X)\right| \tag{3.26}$$

$$F_2(X, \Omega) = \left| \operatorname{senh}[\mu l(X - 1)] - (Z_2 / Z_c) \cosh[\mu l(x - 1)] \right| \quad 3.27$$

a las funciones $F_i(X, \Omega)$ $(i=1,2)$ se les denominarán "formas modales " de la oscilación.

Nótese que si se fija una frecuencia de excitación de la tubería (Ω), las funciones F_i son las que establecen como varían las ganancias con la abscisa adimensional X, siendo $|\tilde{e}|$ y $R(\Omega)$ independientes de X. Las gráficas de las funciones F_i respecto a X son, a la escala $|\tilde{e}|R(\Omega)$, las curvas de la amplitud de la componente oscilatoria de la carga piezométrica $|h|$. Esta curva indica la forma de oscilar del modo particular determinado por Ω. Por ello se denominarán "formas modales".

3.1. 5 *Resonancia.*

Examinando las expresiones 3.21 y 3.22 es evidente que los puntos X_0 de la tubería y las frecuencias Ω_0 de la excitación que hacen máxima la ganancia G_i $(i=1,2)$ son de gran interés para el diseño de la tubería. En estos puntos y para estas frecuencias se producirán las máximas ganancias o amplificaciones entre la magnitud de la excitación $|\tilde{e}|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en la tubería. En consecuencia, se definirán los siguientes conceptos.

<u>Frecuencias de resonancia</u>. Son las frecuencias Ω_0 que producen máximas ganancias entre la amplitud de la excitación $|\tilde{e}|$ y la amplitud de la oscilación de la carga piezométrica $|h|$ en los "puntos peligrosos" X_0 .

<u>Puntos peligrosos</u>. Son los puntos X_0 en los que, para las "frecuencias de resonancia" Ω_0 , se producen las máximas ganancias entre la magnitud de la excitación $|\tilde{e}|$ y la amplitud de $|h|$.

De las definiciones anteriores se tiene que, las frecuencias de resonancia y los puntos peligrosos se pueden encontrar cuando se presentan los valores máximos de la función G_i ,(max G_i) , en la región definida en 3.23 del plano X, Ω, esto es, cuando:

$$\frac{\partial G_i}{\partial X} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial G_i}{\partial \Omega} = 0 \qquad 3.28$$

3.1.6 Simplificaciones en el cálculo de X_0 y Ω_0.

El procedimiento general de solución admite considerables simplificaciones cuando la fricción distribuída es nula ($\nu = 0$) y la impedancia Z_1 es constante (sistemas tipo I) o Z_2 es constante (sistemas tipo II).

Se analizará como ejemplo, la solución del sistema de ecuaciones 3.28 para los sistemas del tipo I. De 3.24 se tiene:

$$\frac{\partial G_1}{\partial X} = R(\Omega)\ F_1' \cdot \Omega = 0 \qquad 3.29$$

donde $F_1' = dF_1/d\eta$, siendo $\eta = X\Omega$. Como se buscan máximos de G_1, no puede haber solución en la que $R(\Omega_0) = 0$, pues en ese caso $G_1 = 0$. Tampoco es posible que $\Omega_0 = 0$ pues no habría oscilación. De manera que para la búsqueda de máximos de G_1 , 3.29 es equivalente a :

$$F_1'(X, \Omega) = 0 \qquad 3.30$$

Por otro lado también debe verificarse

$$\frac{\partial G_1}{\partial \Omega} = \frac{dR(\Omega)}{d\,\Omega} \cdot F_1 + R(\Omega) F_1' \cdot X = 0 \qquad 3.31$$

Debiendo verificarse simultáneamente 3.30 y 3.31; de 3.31 resulta:

$$\frac{dR(\Omega)}{d\Omega} = 0 \qquad 3.32$$

pues $F_1(X, \Omega_0)$ debe ser un máximo de la forma modal y por lo tanto no nulo.

Para los sistemas del tipo II, la demostración es análoga pero trabajando con $X' = (X - 1)$ como variable de posición.

De 3.32 se puede observar que para una tubería con fricción distribuída nula y Z_1 constante para los sistemas del tipo I, o Z_2 constante para los sistemas del tipo II, las frecuencias de resonancia son aquellas que hacen máxima la función de receptividad $R(\Omega)$.

Los puntos peligrosos en la tubería se obtienen para cada una de las frecuencias de resonancia halladas a partir de 3.32, resolviendo para X la ecuación 3.30 y escogiendo entre las soluciones aquellas que correspondan a máximos de la forma modal correspondiente.

En el caso de $\nu = 0$ y además Z_1 y Z_2 sean constantes reales, se tiene un caso particular de lo expuesto anteriormente, por lo que son válidas las expresiones encontradas.

La función $R(\Omega)$ resultante bajo las hipótesis realizadas, es la siguiente para ambos tipos de sistemas.

$$R(\Omega) = \frac{1}{(C_1 + C_2 \operatorname{sen}^2 \Omega)} \qquad 3.33$$

donde

$$C_1 = \left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)^2 \qquad 3.34$$

y

$$C_2 = \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_c^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{Z_1}{Z_c} - \frac{Z_2}{Z_c}\right)^2 = \beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 1 \qquad 3.35$$

por lo que 3.32 puede expresarse:

$$\frac{dR(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{C_2 \operatorname{sen} 2\Omega}{(C_1 + C_2 \operatorname{sen}^2 \Omega)^{3/2}} = 0 \qquad 3.36$$

Los máximos de la función $R(\Omega)$ se ubicarán, de acuerdo al sig no de C_2 en:

$$C_2 > 0 \;, \quad \Omega_{max} = m\pi \;; \qquad m = 1,2,3,..... \qquad 3.37$$

$$C_2 < 0 \;, \quad \Omega_{max} = (2m-1)\frac{\pi}{2} \;; \quad m = 1,2,3,..... \qquad 3.38$$

De 3.37 y 3.38 se concluye que el signo de C_2 es el que determina los máximos de $R(\Omega)$, y en consecuencia las frecuencias de resonancia de la tubería.

Como en este caso definieron Z_1 y Z_2 constantes y reales, se tiene $\beta_1 = |Z_1/Z_c|$ y $\beta_2 = |Z_2/Z_c|$. Con la ayuda del diagrama de la figura 3.3 se obtiene el signo de C_2 a partir de los valores de β_1 y β_2, y con 3.37 y 3.38 se pueden determinar fácilmente las frecuencias de resonancia de la tubería.

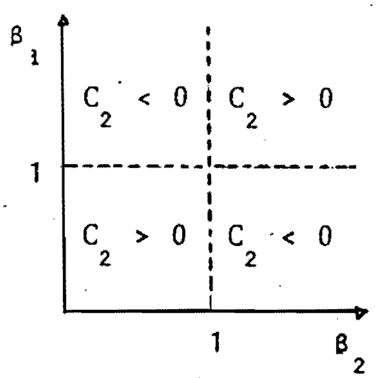


Figura 3.3. Signo de C_2 en función de β_1 y β_2.

3.2 EJEMPLO NUMERICO

En la figura 3.4 se muestra en forma esquemática una instalación experimental en la cual se genera flujo helicoidal (esta instalación es la descrita en los capítulos 4 y 5 de este trabajo).

El tanque de carga constante que se encuentra aguas arriba de la tubería fija un nodo para la componente oscilatoria de la presión, por lo que puede considerarse un subsistema sin excitación. Aguas abajo de la tubería de presión se encuentran un sistema de álabes estáticos que generan vórtices y el tubo de desfogue, estos elementos serán considerados como un subsistema con excitación. El tubo de presión está construído con acrílico y se pueden considerar despreciables los efectos de fricción (se ha calculado $\nu=0.025$). Otros datos del sistema son:

l = 2.54 m.

D = 0.10 m.

c = 343 m/s.

Se desea calcular cuales son las frecuencias resonantes del sistema.

Solución:

La instalación puede tratarse como un subsistema del tipo I, en el que se tiene debido a las condiciones de frontera, que la impedancia hidráulica en la sección 1 es nula ($Z_1=0$) y por lo tanto β_1 también lo es. La impedancia en la sección 2 se considera similar a la de un orificio/26/ y se calcula siguiendo el procedimiento indicado en la sección 2.2.2 , llegándose a:

$$Z_2 = \frac{2\Delta H_0}{Q_0}$$

donde ΔH_0 es la pérdida de carga que introduce el sistema de álabes. Para la condición de máximo gasto (Q_0 = 0.278 m³/s), y por lo tanto de máxima pérdida en el sistema de álabes (ΔH_0 = 114.8 m.c. aire), se tiene:

$$\beta_2 = \frac{Z_2}{Z_c} = \frac{2\Delta H_0 gA}{Q_0 c} = 0.226 < 1$$

del diagrama de la figura 3.3 resulta que $C_2 > 0$. Por lo tanto las frecuencias de resonancia, para todo gasto, son según la condición 3.38 ; $\Omega_{max} = m\pi$. Recordando que $\Omega = \omega l/c$ y que $f = 2\pi\omega$, se tiene:

$$f = \frac{mc}{2l}$$

Para m=1, la frecuencia fundamental es f=65.5 Hz.

Para m=2, el primer armónico es f= 135 Hz, etc.

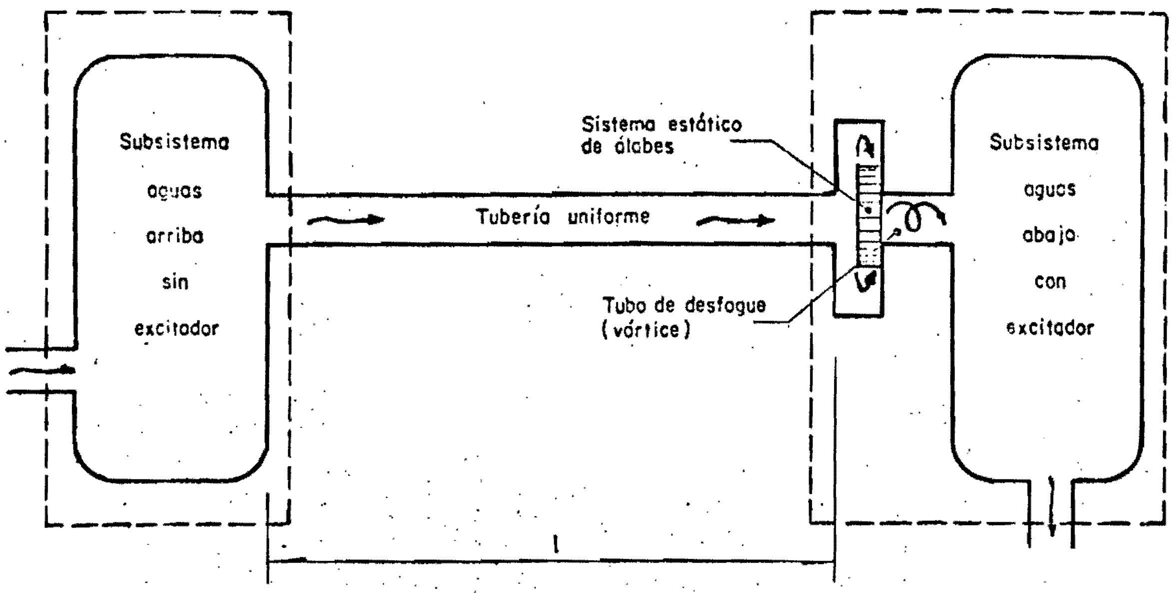


Fig. 3.4 Esquema simplificado de la instalación experimental.

CAPITULO 4 . FLUJO HELICOIDAL EN TUBOS CILINDRICOS

Cuando una turbina opera fuera de las condiciones de diseño, en el tubo de desfogue de la misma, se presenta un flujo helicoidal comúnmente conocido como vórtice o torcha. Si el gasto de operación es menor que el de diseño, el giro del flujo es en el mismo sentido que el de rotación del rodete; si el gasto es mayor que el de diseño, el giro es en el sentido contrario; cuando se opera en condiciones de diseño solo se presenta flujo axial y no se presenta flujo helicoidal.

En el diagnóstico que hacen Guarga e Hiriart sobre los problemas de oscilaciones de presión más importantes que se presentan en la planta hidroeléctrica "La Angostura" /14/, se muestra que el origen de dichas oscilaciones es el flujo helicoidal que se presenta en el desfogue de la turbina cuando ésta opera fuera de las condiciones de diseño. El diagnóstico presentado en /14/ clasifica las oscilaciones de presión como las del tipo I, las cuales se presentan en la aducción excitadas por el flujo helicoidal del desfogue y amplificadas por resonancia. Para tener una idea de los problemas que pueden causar las oscilaciones de presión, basta decir que en la campaña de mediciones realizada por el Instituto de Ingeniería en diciembre de 1981 /15/, para una carga bruta en el vaso de 104.3 m, se midieron oscilaciones en el tubo de presión, cuya magnitud llegó a ser hasta de 63.2 m de columna de agua, es decir, del orden del 60% de la carga bruta.

La magnitud del problema resonante hace necesario encontrar métodos de control del vórtice y evitar su comportamiento como excitador. Esto hace necesario profundizar en el fenómeno físico que origina la pulsación o inestabilidad del vórtice. La primer pregunta a contestar es si el vórtice está inexorablemente vinculado a la presencia de un rotor, o puede ser generado empleando elementos estáticos.

Desde los últimos años de la década de los años sesenta, el United States Bureau of Reclamation (U.S.B.R.) comenzó a trabajar sobre la tesis de que el fenómeno pulsante estaba ligado al momento de la cantidad de movimiento del fluido entrante en el tubo de desfogue. Entre los trabajos que corroboran esta tesis pueden mencionarse los de Cassidy /16/, Nishi /17/ y Guarga /18/. Los trabajos realizados por Cassidy para el U.S.B.R., tienen la virtud de haber analizado múltiples formas geométricas en condiciones de flujo muy diversas, pero tienen la enorme limitación de haber usado solamente aire como fluido de trabajo. Esto significa la imposibilidad de analizar los efectos de la cavitación sobre el fenómeno pulsante. En los trabajos de Nishi se utilizó agua como fluido de trabajo, lo cual permite introducir el parámetro de cavitación y analizar su efecto sobre las pulsaciones, tanto en frecuencia de las mismas como en su amplitud. En /18/ --

se confirma la relación funcional que existe entre la frecuencia de oscilación del vórtice con el flujo del momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante, el número de Reynolds, la longitud del tubo y el parámetro de cavitación.

En los trabajos antes mencionados se observó que la presencia de un rotor como generador de vórtices no es necesaria, y que este se puede suplir con un sistema de álabes estáticos que reproduzca los parámetros que definen el fenómeno pulsante.

Antes de analizar las características oscilatorias del flujo helicoidal, las cuales se exponen en el capítulo 5 , es conveniente conocer las características del flujo helicoidal tales como distribución de velocidades y de presiones en la dirección radial, así como la magnitud del núcleo del vórtice. En este capítulo se expone el método del momento de la cantidad de movimiento y su aplicación a turbinas. Se presentan los resultados recientemente obtenidos en el Instituto de Ingeniería /20/, sobre el comportamiento del flujo helicoidal empleando agua como fluido de trabajo. Se presentan dos modelos teóricos para calcular las distribuciones de velocidades axial y tangencial y un modelo para calcular la distribución de presiones. Los modelos se comparan con los resultados obtenidos en las experiencias realizadas con agua. Se muestra experimentalmente la relación que existe entre el parámetro de giro y el radio del núcleo del vórtice. Se propone un modelo que demuestra dicha relación y se comparan resultados.

4. 1 METODO DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (TECNICA DEL PARAMETRO DE GIRO) Y SU APLICACION A TURBINAS.

Cassidy y H. Falvey /16/ muestran a partir de las ecuaciones de Navier Stokes, que es razonable esperar que para un conducto de sección circular, la frecuencia "f" de las pulsaciones del vórtice verifiquen

$$\frac{fD^3}{Q_0} = \overline{F}\ (\Omega_e D/\rho Q_0^2\ ,\ R_e\ ,\ \text{geometría}) \qquad 4.1$$

siendo Ω_e la proyección sobre el eje orientado en el sentido del flujo medio del flujo del momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante con respecto a un punto del eje, D el diámetro del conducto y Q_0 el gasto volumétrico medio. A fD^3/Q_0 se le denomina parámetro de frecuencia y a $\Omega_e D/\rho Q_0^2 = G_o$, se le conoce como parámetro de giro.

En sus trabajos experimentales, Nishi /17/ muestra que al trabajar con agua, en la relación 4.1 debe incorporarse el parámetro de cavitación $K_a = (p - p_v)/(\rho V_0^2/2)$, donde p es la presión en un punto representativo y p_v es la presión del vapor, por lo que propone la relación

$$\frac{fD^3}{Q_0} = \overline{F}\ (\Omega_e D/\rho Q_0^2\ ,\ R_e\ ,\ K_a\ ,\ \text{geometría}) \qquad 4.2$$

La relación 4.2 indica que para una geometría dada, conociendo el parámetro de giro, el número de Reynolds y el parámetro de cavitación, se puede encontrar la frecuencia "f" de la oscilación del vórtice.

La aplicación a una turbina de la relación 4.2 implica conocer cual es el momento de la cantidad de movimiento del flujo entrante en el tubo de desfogue. Para ello debe usarse la relación:

$$M = \Omega_{e_1} - \Omega_{e_2} \tag{4.3}$$

siendo M el par ejercido sobre el rodete por el fluido, Ω_{e_1} y Ω_{e_2} el flujo del momento de la cantidad de movimiento (respecto al eje de la turbina) a la entrada y a la salida del rodete respectivamente. La ecuación anterior también puede expresarse

$$\frac{P_T}{\omega} = \Omega_{e_1} - \Omega_{e_2} \tag{4.4}$$

siendo P_T la potencia en el eje de la máquina y ω la velocidad angular de rotación del eje. Multiplicando 4.4 por $D/\rho Q_0^2$ y despejando al término que contiene a Ω_{e_2}, se tiene

$$\frac{\Omega_{e_2} D}{\rho Q_0^2} = \frac{\Omega_{e_1} D}{\rho Q_0^2} - \frac{P_T D}{\rho \omega Q_0^2} \tag{4.5}$$

que es el valor del parámetro de giro que debe reemplazarse en la expresión 4.2.

4.1.1 *Cálculo del parámetro de giro* $(\Omega_e D/\rho Q_0^2)$ *empleando el método gráfico.*

El parámetro de giro a la entrada del rodete se determina teniendo en cuenta (ver figura 4.1) que en promedio:

$$\Omega_e = \rho Q_0 R_1 V_0 \operatorname{sen}\alpha_f \qquad 4.6$$

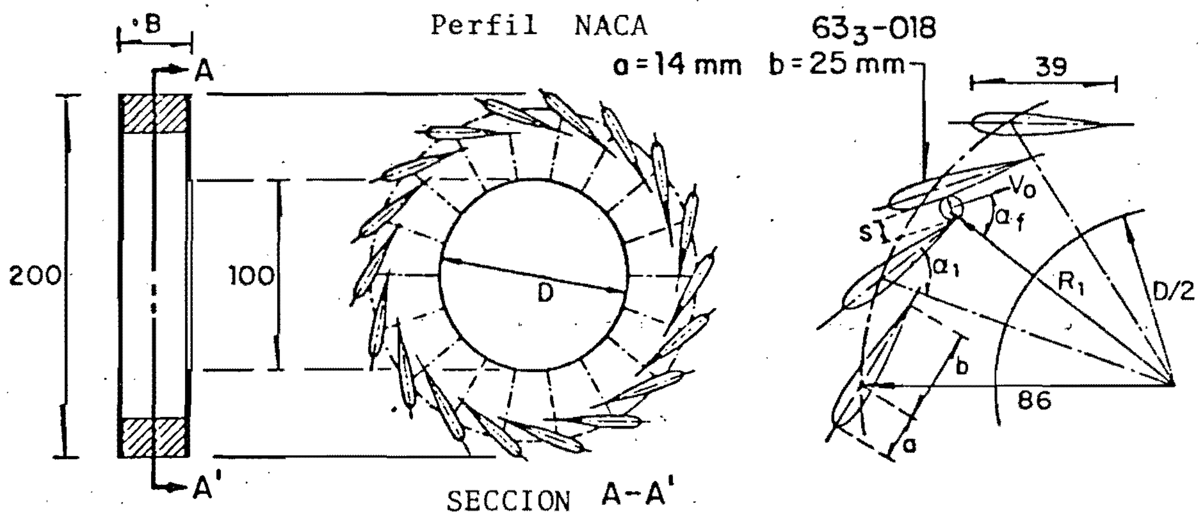
y

$$Q_0 = N.s.B.V_0. \qquad 4.7$$

siendo s la separación entre álabes; B la altura de los álabes y N el número de los mismos. Utilizando las expresiones 4.6 y 4.7 puede calcularse el parámetro de giro que resulta:

$$G_o = \frac{\Omega_e\, D}{\rho\, Q_0^2} = \frac{D\, R_1 \operatorname{sen}\alpha_f}{B.N.s.} \qquad 4.8$$

En la figura 4.1 se muestran las características geométricas de siete sistemas de álabes y su correspondiente valor de G_o calculado con la expresión 4.8.



Dimensiones en mm.

Vane System	α_1 (°)	B (mm)	R_1 (mm)	s (mm)	α_f (°)	G_o
I	40	40	73.62	14.58	46.25	0.507
II	50	40	76.75	11.00	53.00	0.774
III	56	40	78.85	8.59	56.50	1.063
IV	60	39	79.65	7.00	59.50	1.397
V	56	20	78.85	8.59	56.50	2.126
VI	61	20	79.95	6.60	60.00	2.914
VII	65	20	81.00	5.00	63.00	4.010

Fig. 4.1 Diagrama de definición de R_1, s, α_1, α_f. Valores de G_o para siete diferentes sistemas de álabes.

4.2 EXPERIENCIAS DEL INSTITUTO DE INGENIERIA USANDO AGUA COMO FLUIDO DE TRABAJO.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos por el Instituto de Ingeniería en las pruebas realizadas en el generador de vórtices del propio Instituto , durante el periodo comprendido de noviembre de 1984 a marzo de 1985 y que también serán publicados en /20/.

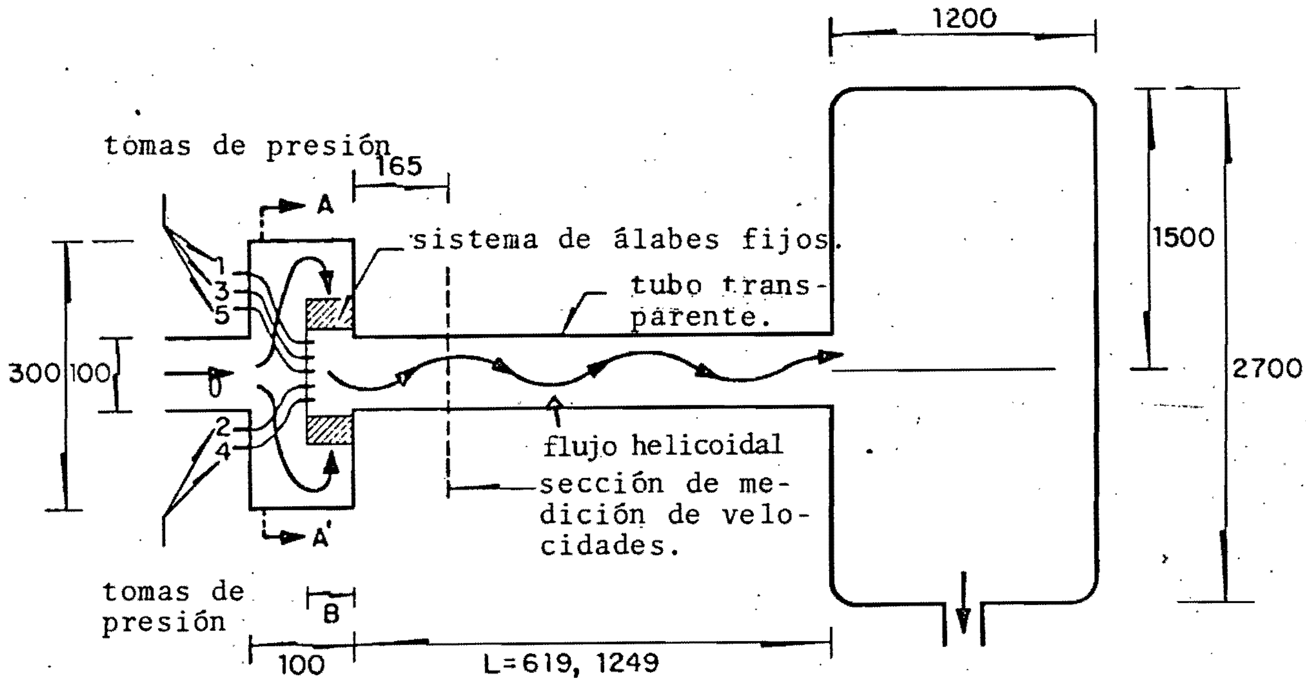
Los flujos estudiados se encuentran entre los siguientes intervalos:

$0.84 \leq R_e \times 10^{-5} \leq 1.2$

$0.507 \leq G_o \leq 2.126$

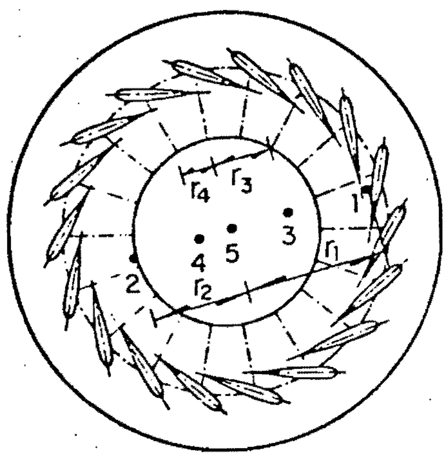
$L/D = 6.19,\ 12.49$

El trabajo experimental se realizó en una instalación que produce el flujo helicoidal mediante varios sistemas intercambiables de álabes fijos (generador de vórtices, ver figura 4.2). El agua



Dimensiones en mm..

Fig. 4.2 Diagrama esquemático del generador de vórtices.



Sist. álabes	posición r/R				
	1	2	3	4	5
I	1.467	1.082	0.700	0.350	0
IV	1.500	1.100	0.700	0.350	0
V	1.480	1.090	0.700	0.350	0

Sección A-A' de la fig. 4.2

Fig. 4.3 Posición de las tomas de presión sobre la tapa de los sistemas de álabes.

después de pasar por los álabes, entra a un tubo de lucita transparente de longitud "L" y de 100 mm de diámetro interior. El extremo aguas abajo del tubo se conecta con un tanque de 2.81 m^3 de volumen; por la parte inferior del tanque el agua pasa a un canal donde se afora el gasto con un vertedor triangular de pared delgada. La longitud del tubo de lucita puede cambiarse, y al combinarse con los diferentes sistemas de álabes y variando el gasto, se obtienen combinaciones de R_e , G_o y L/D.

En este estudio se usaron dos relaciones L/D y tres sistemas de álabes. Cada sistema de álabes está construído con dieciocho perfiles fijos tipo NACA 63.018 (fig 4.1). Los valores del parámetro de giro de los sistemas usados, calculados con la expresión 4.8 son G_o = 0.507, 1.397 y 2.126 , es decir, se emplearon los álabes I, IV y V .

Las presiones se midieron en las tomas 1,2, 3 y 4 ubicadas en la tapa de los sistemas de álabes (fig 4.3) . Todas las presiones se midieron con manómetros diferenciales de mercurio, tomando como presión de referencia la correspondiente a la toma 5 ubicada en el eje del sistema.

La medición de velocidades medias tangenciales (v_θ) y axiales (v_z), se realizó con un equipo LASSER T.S.I. Incorporated, modelo 9100-3 de He-Ne de un solo rayo y con 0.035 w de potencia. La sección de mediciones se ubicó a 0.165 m del plano de salida del sistema de álabes, en cuatro posiciones a lo largo del radio de la sección.

Para las combinaciones de G_o = 0.507 y 2.122 y con L/D =6.19 y 12.49 se experimentaron tres gastos, los cuales se caracterizan por sus respectivos números de Reynolds. En las combinaciones de L/D con G_o = 1.397, se experimentó solo con dos gastos. Las presiones fueron medidas en todos los casos y las velocidades solo cuando se emplearon lo valores del parámetro de giro de los extremos. En todas las experiencias se mantuvo una presión aproximada de 2×10^5 N/m^2 en el tubo, para evitar la aparición de la fase gaseosa en los puntos de menor presión.

Para visualizar la posición de la línea de presiones mínimas en el flujo, se introdujo en el tanque de entrada a los álabes, una pequeña cantidad de aire comprimido. En las figuras 4.4 y 4.5 se muestra la posición de este volumen de aire, el cual coincide con el eje del tubo en todo el largo del tubo y es estable, excepto en las proximidades de la salida, donde pierde la simetría axial.

Los resultados de las mediciones de presión se presentan en forma adimensionada en las figuras 4.7 p_i es la presión en el punto i según la numeración que se indica en la figura 4.4. Como -- puede observarse, la distribución radial de presiones es función de G_o y L/D e independiente del número de Reynolds. El parámetro adimensionado que caracteriza las presiones es $D^4(p_i - p_5)/\rho Q_0^2$.

Los resultados de las mediciones de las velocidades se presentan en forma adimensionada en las figuras 4.6a y 4.6b; siendo v_θ la velocidad tangencial (media temporal), v_z la velocidad axial (me-

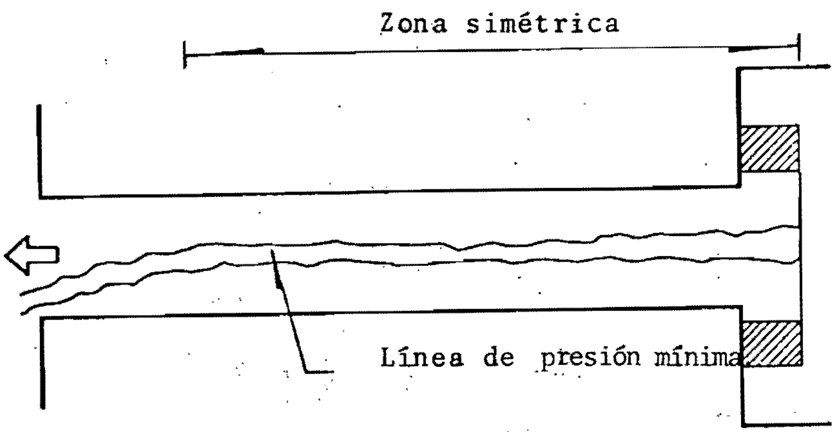


Fig.4.4 Localización de la línea de mínima presión. Exposición 1/2000 s

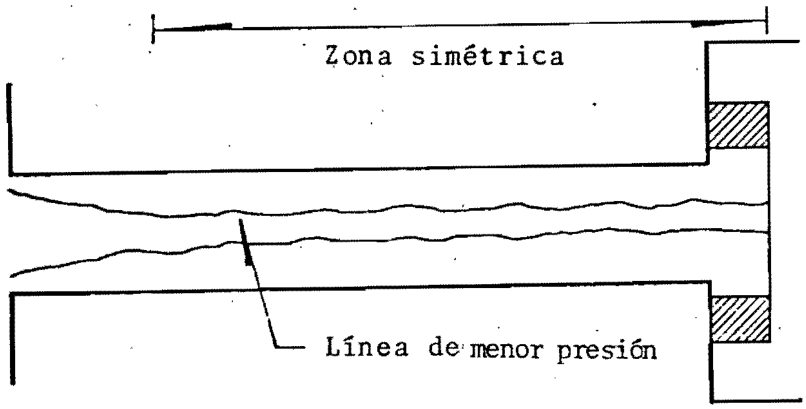


Fig. 4.5 Movimiento de la línea de mínima presión. Exp. 1/4 s.

dia temporal) y $\bar{V}_z = Q_0/\pi R^2$ .Como puede observarse, la distribución de velocidades es función de G_o y L/D,e independiente del número de Reynolds, al igual que lo obtenido en la distribución de presiones.

4.2.1 Determinación del núcleo del flujo

Para calcular la magnitud del núcleo del flujo (de radio r_n), el cual se puede considerar como la zona del flujo donde se concentra la vorticidad, se presentan dos modelos:

MODELO DEL VORTICE CIRCULAR (V.C). Se adopta al flujo helicoidal el modelo de un vórtice circular confinado donde se cumple

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = \omega r \qquad v_z = 0 \qquad 0 \le r \le r_{n1}$$

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad v_z = \frac{Q_0}{\pi(R^2-r^2)} \qquad r_{n1} \le r \le R$$

4.11

siendo v_r , v_θ y v_z las componentes de velocidad en coordenadas cilíndricas (r,θ,z). De la expresión de v_θ , se tiene que la vorticidad de este modelo está concentrada en su totalidad dentro del núcleo. De las expresiones 4.11, igualando las velocidades tangenciales en $r = r_{n1}$, haciendo $K_v = \Gamma/2\pi$, donde Γ es la circulación ,se tiene:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_{n1}^2} = \frac{K_v}{r_{n1}^2} \qquad 4.12$$

Calculando el momento de la cantidad de movimiento en un punto cualquiera (i) ubicado a una distancia r_i del eje del tubo, se tiene:

$$\Omega_e = \rho r_i v_{\theta i} Q_0 \qquad 4.13$$

De 4.11 y 4.12 en 4.13 y despejando K_v , se tiene:

$$K_v = \frac{\Omega_e}{\rho Q_0} = \frac{G_o Q_0}{D} \qquad 4.14$$

Sustituyendo 4.14 y 4.12 en las expresiones 4.11 y haciendo intervenir la velocidad axial media $\overline{V}_z$ y definiendo $\sigma = r/R$ y $\sigma_n = r_n/R$, se tiene

$$\frac{v_\theta}{\overline{V}_z} = \frac{\pi G_o}{2\sigma_{n1}^2}\cdot\sigma \quad , \quad \frac{v_z}{\overline{V}_z} = 0 \qquad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{n1}$$

4.15

$$\frac{v_\theta}{\overline{V}_z} = \frac{\pi G_o}{2\sigma} \quad , \quad \frac{v_z}{\overline{V}_z} = \frac{1}{1-\sigma_{n1}^2} \qquad \sigma_{n1} \leq \sigma \leq 1$$

De las expresiones 4.15 se observa que el campo adimensional de velocidades solo depende de G_o y σ_{n1} .

Según el modelo seguido, y recordando que la toma de presión 5 se encuentra en el eje del tubo, se tiene:

$$\frac{p_5}{\gamma} + \frac{\omega^2 r_i^2}{2g} = \frac{p_i(r)}{\gamma} \quad , \qquad 0 \leq r \leq r_{n1}$$

4.16

De la ecuación de la energía entre la toma 0 (ubicada aguas arriba del sistema de álabes) y un punto comprendido en $r \geq r_{n1}$, se tiene:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g} \qquad 4.17$$

Haciendo $r_i = r_{n_1}$, considerando $V_0 \doteq 0$ y sustituyendo 4.16 en 4.17 se llega a:

$$\frac{p_0 - p_5}{\gamma} = \frac{\omega^2 r_{n_1}^2}{2g} - \frac{v_n^2}{2g} \qquad 4.18$$

donde

$$v_n^2 = (v_\theta^2 + v_z^2)_n$$

Con las expresiones 4.15 sustituidas en 4.18, se puede calcular la distribución de presiones resultante referida a la presión adimensionada en el centro del flujo $(p_5 D^4/\rho Q_0^2)$, teniéndose:

$$\left(\frac{p_i - p_5}{\rho}\right)\frac{D^4}{Q_0^2} = 2G_0^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_{n_1}^4} \qquad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{n1}$$

$$4.19$$

$$\left(\frac{p_i - p_5}{\rho}\right)\frac{D^4}{Q_0^2} = 2G_0^2 \left(\frac{2}{\sigma_{n_1}^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) \qquad \sigma_{n_1} \leq \sigma \leq 1$$

Las curvas teóricas correspondientes a este modelo descrito por 4.15 para las velocidades adimensionadas y por 4.19 para las presiones adimensionadas, se muestran en las figuras 4.6 y 4.7 respectivamente, superpuestas a los resultados experimentales.

El valor del radio del núcleo adimensionado (σ_n) se determinó para cada pareja G_0, L/D, despejándolo de la expresión 4.19

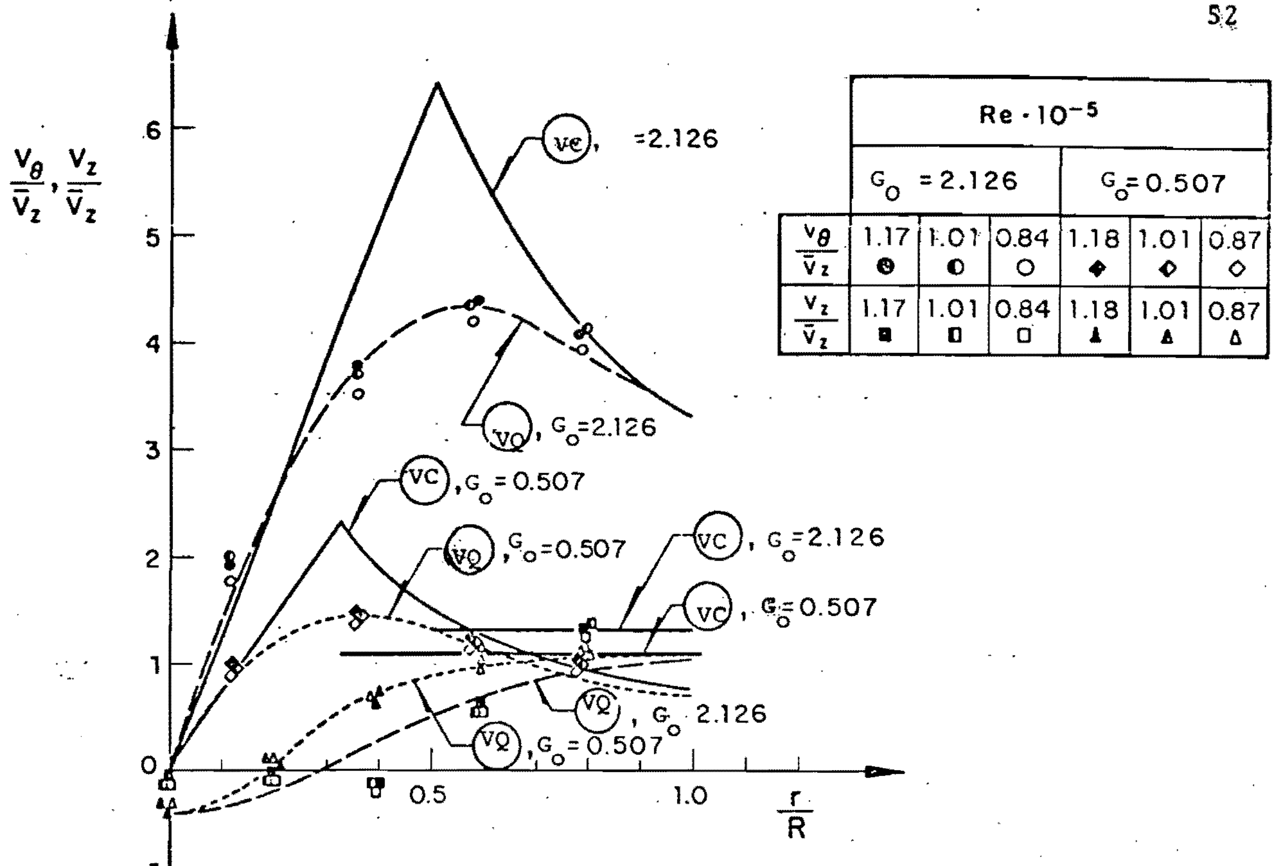


Fig. 4.6a Distribución radial de $v_\theta/\bar{v}_z$ y $v_z/\bar{v}_z$. (L/D = 6.19)

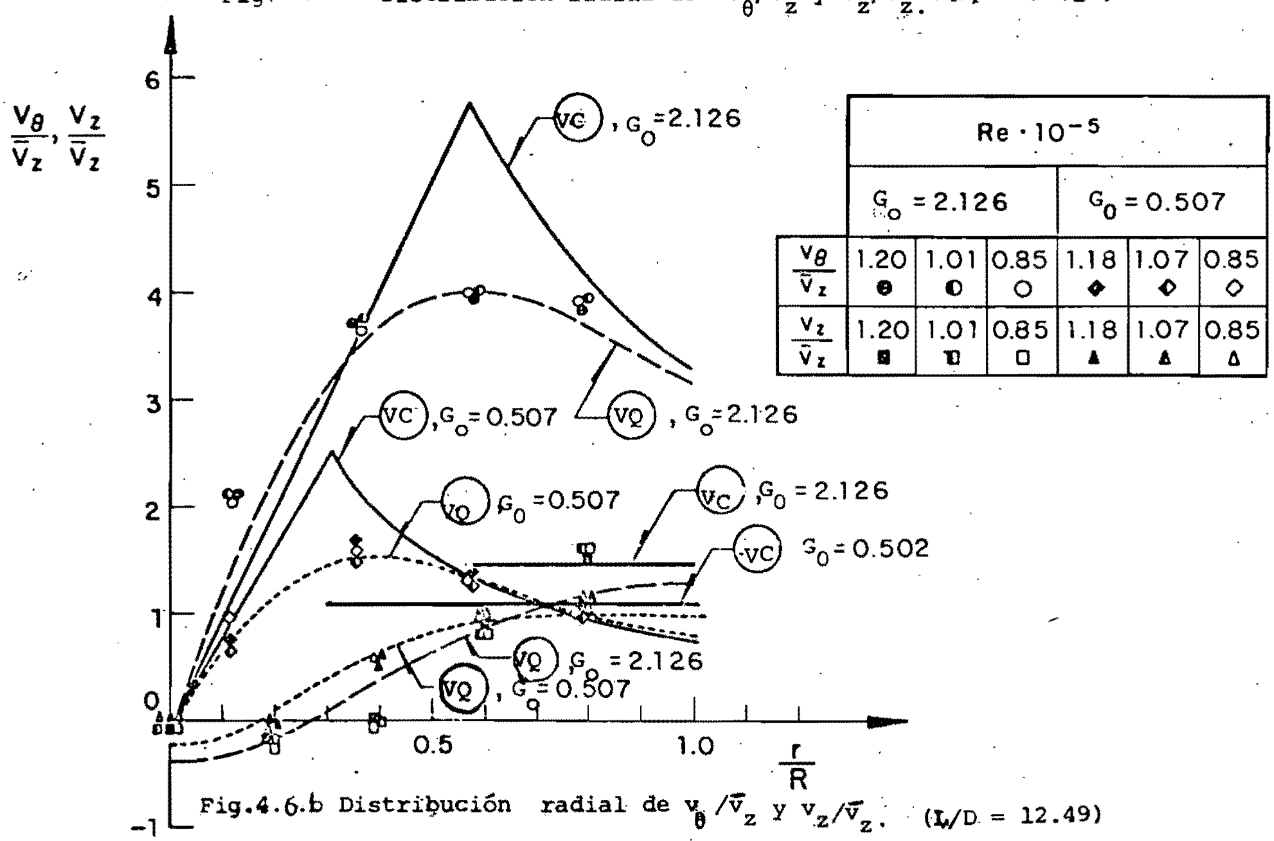
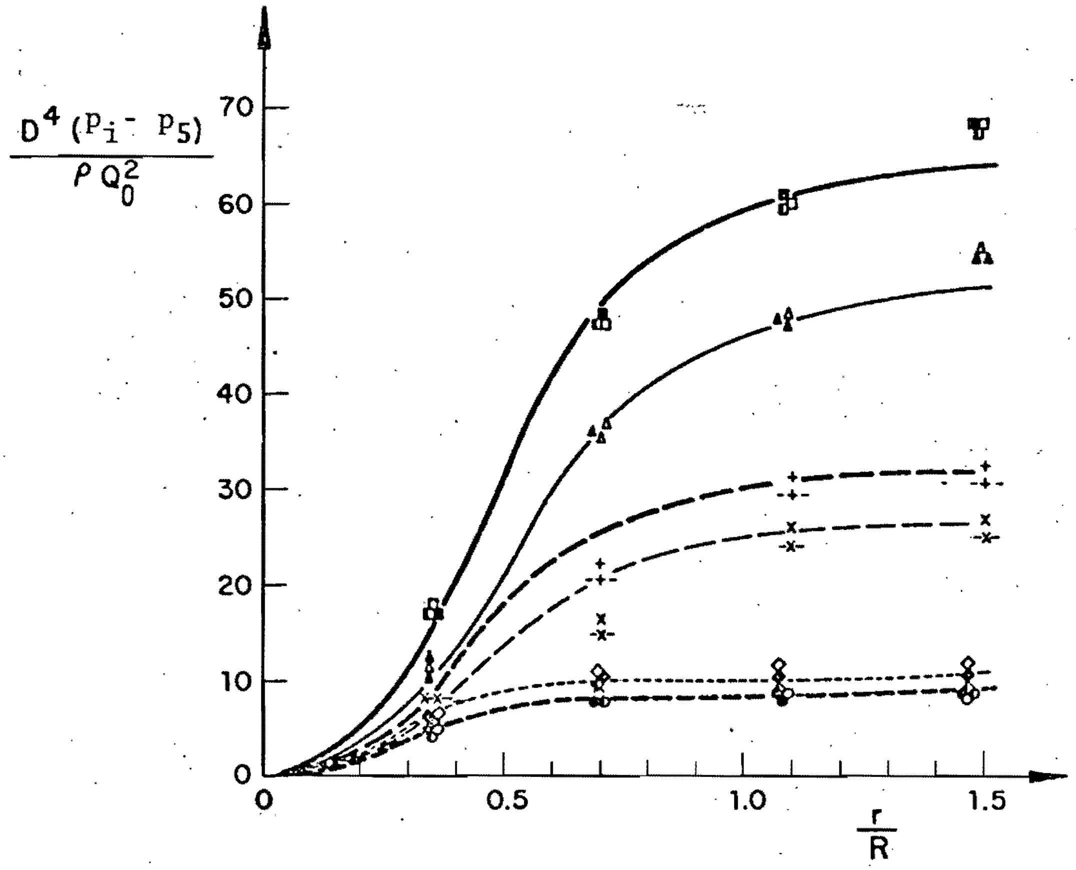


Fig.4.6.b Distribución radial de $v_\theta/\bar{v}_z$ y $v_z/\bar{v}_z$. (L/D = 12.49)



L/D	G_o	$Re \cdot 10^{-5}$			Ecc. 4.19
6.19	0.507	1.18 ●	1.00 ◐	0.87 ○	- - - - -
	1.397	1.20 x +		0.86 –x– +	— — —
	2.126	1.17 ■	1.01 ◧	0.84 □	———
12.49	0.507	1.18 ◆	1.07 ◇	0.85 ◇	---------
	1.397	1.19 x		0.86 –x–	— — —
	2.126	1.20 ▲	1.01 ▲	0.85 △	———

Fig.4.7 Distribución de presiones en la tapa de los álabes.

correspondiente a $\sigma_{n_1} \leq \sigma \leq 1$., Los valores obtenidos son el promedio del valor encontrado para cada $(p_i - p_5)D^4/\rho Q_0^2$ para la toma ubicada en $\sigma \doteq 1$. Se observó que σ_{n_1} no varía con el número de Reynolds. Para cada relación L/D , σ_{n_1} solo varía con G_o (ver tabla 4.1).

L/D \ G_o	0.507	1.397	2.126
6.19	0.3340	0.4818	0.5147
12.49	0.3055	0.5212	0.5917

Tabla 4.1 Valores de σ_{n_1} en función de G_o, calculados con el modelo del vórtice circular.

En la figura 4.7 se observa el buen ajuste entre las mediciones de presión en la tapa de los álabes y los resultados del modelo del vórtice circular (V.C). Este modelo solo es válido para $\sigma \leq 1$, ya que para $\sigma > 1$ se tiene flujo radial en el dispositivo experimental, lo cual no concuerda con el modelo propuesto por 4.11. En las figuras 4.6a y 4.6b se observa el ajuste del modelo V.C con respecto a las velocidades medidas. El ajuste es bueno en los puntos cercanos al centro del tubo y en los cercanos a la pared, y es malo en los entornos de σ_n ,esto es explicable, ya que las velocidades se miden en una sección ubicada 165 mm aguas abajo del plano de salida de los álabes, donde ya se presentan las tensiones turbulentas generadas en el seno del flujo, las cuales no son contempladas en el modelo,

MODELO DEL VORTICE-Q (V.Q) Este modelo propone los perfiles de velocidades

$$\frac{v_r}{\overline{V}_z} = 0 \quad ; \quad \frac{v_\theta}{\overline{V}_z} = \frac{u}{\alpha\sigma}(1-e^{-\alpha\sigma}) \quad ; \quad \frac{v_z}{\overline{V}_z} = W_1 + W_2 e^{-\alpha\sigma^2} \qquad 4.20$$

donde u y α son constantes a determinar para poder obtener mediante mínimos cuadrados el mejor ajuste posible con las curvas experimentales de velocidad tangencial; W_1 y W_2 son las constantes a determinar para obtener el ajuste con las curvas experimentales de velocidades axiales. El radio del núcleo σ_{n_2} para este modelo se define como la absisa del máximo de la curva $v_\theta/\overline{V}_z$.

En las figuras 4.6a y 4.6b se muestran sobre los puntos experimentales las curvas obtenidas al aplicar este modelo. Este modelo proporciona buen ajuste para las velocidades tangenciales adimensionadas, no siendo así para todos los valores de las velocidades axiales adimensionadas, donde el ajuste es bueno con G_o = 0.507 y malo con G_0 = 2.126.

En la tabla 4.2 se muestran los valores de u, α, W_1 y W_2 obtenidos del ajuste de las ecuaciones 4.20, a partir de los valores experimentales. Nótese que al igual que en el modelo V.C, σ_{n_2}

solo depende de G_o.

G_o / L/D	0.507				2.126			
	u	α	W_1	W_2	u	α	W_1	W_2
6.19	7.678	10.319	1.071	-1.441	13.515	3,926	1.114	-1.44
	σ_{n_2} = 0.360				σ_{n_2} = 0.580			
12.49	7.429	8,805	1.047	-1.232	12.545	3,851	1,397	-1.71
	σ_{n_2} = 0.360				σ_{n_2} = 0,570			

Tabla 4.2 Resultados del modelo V.Q. y los valores de σ_{n_2}.

4.2.2 Determinación teórica del radio del núcleo

Como se mostró en 4.2.1 , no importa cual sea el modelo seguido para determinar σ_n , este solo depende del parámetro de giro, y para cada valor de G_o, los valores de σ_{n_1} y σ_{n_2} son muy próximos entre sí. En la figura 4.8 se muestran en forma gráfica los valores de σ_{n_1} y σ_{n_2} en función de G_o. Se han incorporado con fines de comparación los valores del radio del núcleo adimensionado definido con el modelo V.Q. y presentados por Senoo y Nagata en /19/.

En la figura 4.8 se ha dibujado una curva ajustada por mínimos cuadrados sobre los puntos experimentales obtenidos por el Instituto de Ingeniería y que son presentados en 4.3.1 y los obtenidos por Senoo. La ecuación de la curva es $\sigma_n = 0.426\ G_o^{0.408}$ válida para $0 \le G_o \le 2.126$ y representa un ajuste con un coeficiente de correlación lineal de 0.961 .

De los resultados experimentales presentados en 4.3.1, se deduce la existencia de una relación funcional entre σ_n y G_o. A continuación se fundamenta teóricamente a partir del principio de Hamilton /21/, la existencia de dicha relación, tal como lo propone Guarga en /20/.

El principio de Hamilton establece que un fluido perfecto e incompresible que ocupa un volumen $\forall$ se mueve de forma tal que verifica:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_c + \delta U_e)\,dt = 0 \qquad 4.21$$

para todos los desplazamientos virtuales δP del movimiento que satisfagan (ver figura 4.9):

$$\nabla \cdot \delta P = 0 \quad y \quad \delta P = 0 \qquad en\ t = t_0, t_1 \qquad 4.22$$

La energía cinética del fluido contenido en $\forall$ es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,\rho \int_{\forall} v^2\,d\forall \qquad 4.23$$

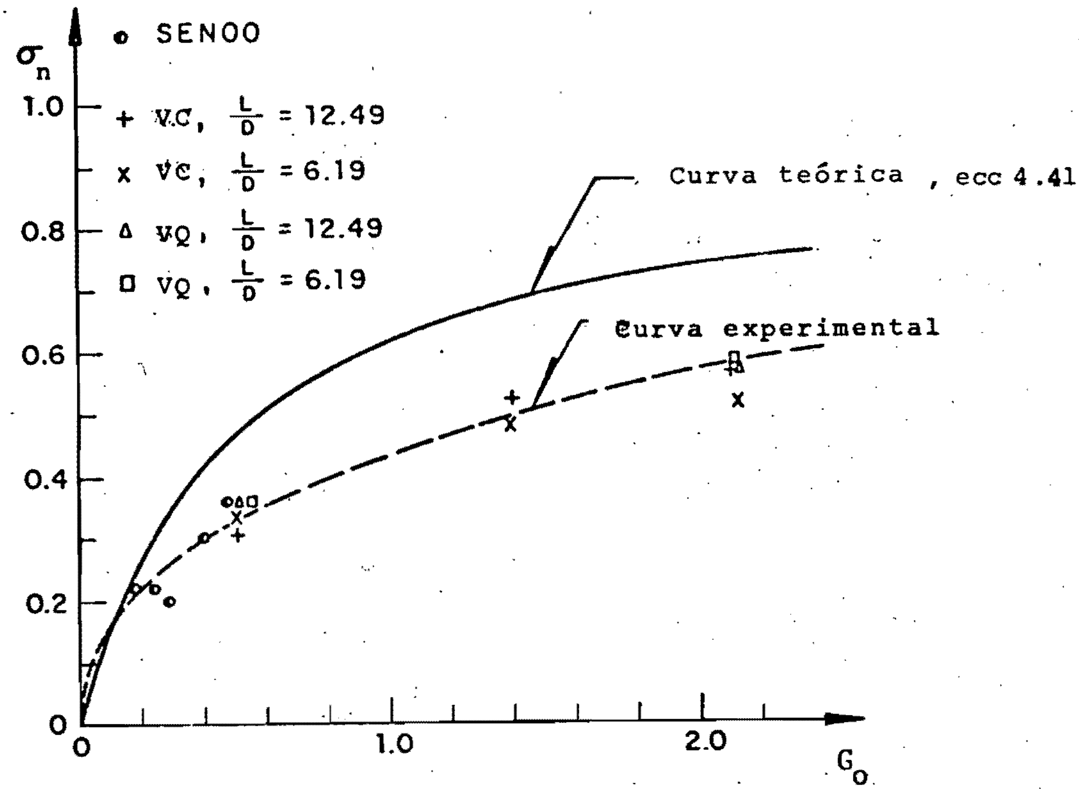


Fig. 4.8 Valores del radio del núcleo adimensionado (σ_n) en función del parámetro de giro, empleando los modelos VC y VQ. Curva teórica G_o - σ_n .

donde $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2$

δU_e es el trabajo virtual realizado contra las fuerzas exteriores de cuerpo $(\overline{F})$ y de superficie $(\overline{f})$ y que se requiere para pasar de la posición real a la virtual.

$$\delta U_e = \int_{\forall} \rho \overline{F} \cdot (\delta P) d\forall + \int_S \overline{f} \cdot \delta P \, dA \qquad 4.24$$

donde S es la superficie del volumen $\forall$; t_0 y t_1 son dos instantes del movimiento; δ P debe estar determinado, ser continuamente diferenciable y debe satisfacer las condiciones de frontera impuestas al fluido en su movimiento.

Para aplicar el principio de Hamilton para explicar la relación "G_o-σ_n", se considera un fluido perfecto e incompresible en movimiento dentro de un tubo recto de sección circular. Considerando que el campo de velocidades corrresponde al modelo circular(V.C), explicado en 4.2.1 , se tiene que la zona de flujo está comprendida en $r_{n_1} \leq r \leq R$. El volumen $\forall$ en t_0 ocupa una distancia axial Δz (fig. 4.10).

Para poder satisfacer las condiciones 4.22, δP se define en coordenadas cilíndricas como:

$$\delta P = \varepsilon f(t) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r} - r \right), \ 0 \ , \ z \right] \qquad 4.25$$

donde ε es una constante arbitraria y

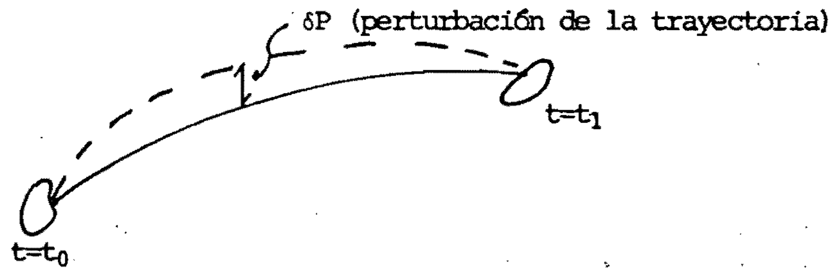


Fig. 4.9 Posiciones en $t=t_0$ y $t=t_1$ de una partícula de fluido que verifica el principio de Hamilton.

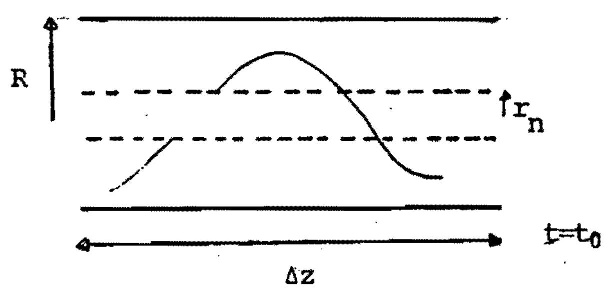


Fig. 4.10 Posición del volumen V en $t=t_0$.

$$f(t) = (t-t_0)\ (t_1-t) \qquad 4.26$$

Como se puede observar, la expresión 4.25 está determinada, es continuamente diferenciable y satisface las condiciones de -- frontera ($\delta P_r=0$, en $r=R$) y $\nabla\cdot\delta P=0$

$$\nabla\cdot\delta P = \left\{ \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left[-r-\frac{1}{2}(\frac{R^2}{r} - r)\right] + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta\theta}(0) + \frac{\delta z}{\delta z} \right\} = 0 \qquad 4.27$$

Cuando δP se refiere al movimiento virtual del radio del núcleo, 4.25 se escribe:

$$\delta r_n = \varepsilon f(t)\frac{1}{2}(\frac{R^2}{r_n} - r_n) \qquad 4.28$$

despejando $\varepsilon f(t)$ se tiene:

$$\varepsilon f(t) = \frac{2\delta r_n}{(\frac{R^2}{r_n} - r_n)}$$

La variación de Δz debido a la perturbación es:

$$\delta(\Delta z) = \varepsilon f(t)\Delta z = \frac{2\delta r_n}{(\frac{R^2}{r_n} - r_n)} \cdot \Delta z \qquad 4.29$$

Calculando la energía cinética aplicando 4.23 y el modelo del vórtice circular, se tiene:

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_{V} \left(\frac{K_v}{r}\right)^2 dV + \frac{\rho}{2}\int_{V} \left(\frac{Q}{A_c}\right)^2 dV \qquad 4.30$$

donde $A_c = \pi(R^2 - r_n^2)$; integrando 4.30 se tiene:

$$E_c = \Delta z \; 2\pi \; \frac{\rho}{2} \left[K_v^2 \; Ln\frac{R}{r_n} + \frac{Q_0^2}{2\pi A_c} \right] \qquad 4.31$$

Procediendo de igual manera, la energía cinética después de la perturbación es:

$$E_c' = (\Delta z + \delta\Delta z) 2\pi \; \frac{\rho}{2} \left[K_v^2 \; Ln \frac{R}{r_n + \delta r_n} + \frac{Q_0^2}{2\pi A_c'} \right] \qquad 4.32$$

De 4.31 y 4.32, la perturbación $\delta E_c = E_c - E_c'$ es:

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \rho\pi\delta r_n \; \Delta z \left\{ -\frac{K_v^2}{r_n^2} + \frac{2r_n}{R^2 - r_n^2} \left[K_v^2 Ln \frac{R}{r_n} + \frac{Q_0^2}{\pi^2 (R^2 - r_n^2)} \right] \right\} \qquad 4.33$$

Calculando δU_e se tiene:

$$\delta U_e = p_n \; 2\pi \; r_n \; \Delta z \; \delta r_n - \delta(\Delta z) 2\pi \int_{r_n}^{R} p(r) r \; dr \qquad 4.34$$

donde p_n es la presión desde el núcleo al fluido. Haciendo:

$$C_a = p + \frac{v^2 \rho}{2} \qquad 4.35$$

se tiene:

$$p = C_a + \frac{\rho}{2}(v_\theta^2 + v_z^2)$$

y 4.36

$$p_n = C_a + \frac{\rho}{2}(v_\theta^2 + v_z^2)_{r=r_n}$$

entonces

$$\int_{A_c} p(r)\, dA = C_a A_c - \frac{\rho}{2}\int_{A_c}(v_\theta^2 + v_z^2)\, dA =$$

$$= C_a A_c - 2\pi \frac{\rho}{2}\left[K_v^2 \operatorname{Ln}\frac{R}{r_n} + \frac{Q_0^2}{A_c^2}\frac{(R^2 - r_n^2)}{2}\right] \qquad 4.37$$

y

$$p_n\, 2\pi\, r_n\, \Delta z\, \delta r_n = C_a(2\pi\, r_n\, \Delta z\, \delta r_n) - \frac{\rho}{2}\, 2\pi\, r_n\, \Delta z\, \delta r_n \left[\frac{K_v^2}{r_n^2} + \frac{Q_0^2}{A_c^2}\right] \qquad 4.38$$

de 4.28, 4.37 y 4.38,se tiene:

$$\delta U_e = \frac{1}{2}\rho\pi\,\varepsilon f(t)\left(\frac{R^2}{r_n} - r_n\right)\Delta z \left\{ -\frac{K_v^2}{r_n^2} + \frac{2r_n}{R^2 - r_n^2}\left[K_v^2 \operatorname{Ln}\frac{R}{r_n} + \frac{Q_0^2}{\pi^2(R^2 - r_n^2)}\right]\right\} \qquad 4.39$$

Sustituyendo 4.33 y 4.39 en 4,21,y recordando que en el modelo V.C $, r_n = r_{n_1}$, se tiene que para verificar 4.21 se debe cumplir:

$$- \frac{K_v^2}{r_{n1}^2} + \frac{2r_{n_1}K_v}{R^2 - r_{n_1}^2} \mathrm{Ln} \frac{R}{r_{n_1}} + \frac{Q_0 r_{n_1}}{\pi^2 (R^2 - r_{n_1}^2)^2} = 0 \qquad 4.40$$

recordando que $K_v = G_o Q_0/D$ y $\sigma = r_n/R$, 4.40 puede escribirse:

$$G_o^2 \left[\frac{1}{4\sigma_{n1}} + \frac{\sigma_{n_1}}{(1-\sigma_{n_1}^2)} \mathrm{Ln}\, \sigma_{n_1} \right] = \frac{\sigma_{n_1}}{\pi^2 (1-\sigma_{n_1}^2)^2} \qquad 4.41$$

es decir, se define una relación funcional $G_o = G_o(\sigma)$. Como se puede observar, el radio del núcleo adimensionado solo depende del parámetro de giro, siendo independiente de las otras características del flujo. Cualitativamente la expresión 4.41 proporciona mayores valores de σ_{n_1} que los medidos experimentalmente. La diferencia de resultados indica que las tensiones turbulentas presentes en el fenómeno real, tienden a reducir el efecto de un incremento de G_o respecto al incremento de σ_{n_1} correspondiente, en relación a lo previsto en la expresión 4.11.

4.2.3 Comprobación del valor del parámetro de giro

Por definición del momento de la cantidad de movimiento,se tiene:

$$\Omega_e = \int_S \rho\,(a-o)\times\overline{V}(\overline{V}\cdot n)\ dA \qquad 4.42$$

donde "a" es un punto genérico, "o" un punto fijo sobre el eje del sistema de álabes,"$\overline{V}$"la media temporal de la velocidad en en el punto "a", $\overline{n}$ la normal saliente en la superficie de integración y S la superficie de integración.

Proyectando sobre el eje del tubo, se tiene:

$$\Omega_e = 2\pi\rho \int r^2 v_\theta v_z\ dr \qquad 4.43$$

multiplicando por R^3/R^3 el lado derecho de 4.43, se llega a:

$$\Omega_e = 2\pi\rho R^3 \int \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_\theta v_z\ d\left(\frac{r}{R}\right) \qquad 4.44$$

expresando 4.44 en forma adimensionada, se tiene:

$$G_o = \frac{\Omega_e D}{\rho Q_0^2} = \frac{4\pi^2 R}{Q_0^2} \int \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_\theta v_z\ d\left(\frac{r}{R}\right) \qquad 4.45$$

En la tabla 4.3 se muestran los valores de v_θ y v_z obtenidos experimentalmente, medidos a diferentes distancias r/R , con G_o = 0.507 (calculado con el método gráfico) y $Q_0 = 9.238\times10^{-3} m^3/s$. Al calcular G_o empleando 4.45, haciendo la integración de forma gráfica (fig. 4.11) se obtubo G_o = 0.482. Esto muestra lo valioso de la técnica del parámetro de giro, ya que los valores solo difieren un 5%.

r/R (σ)	v_z (m/s)	v_θ (m/s)
0.0	-0.090	0.0
0.2	0.029	1.514
0.4	0.764	1.935
0.6	1.222	1.641
0.8	1.372	1.282
1.0	1.111	1.029

Tabla 4.3 Valores de v_z y v_θ medidos cuando Q=9.238 l/s y G_o = 0.507 (calculado con el método gráfico).

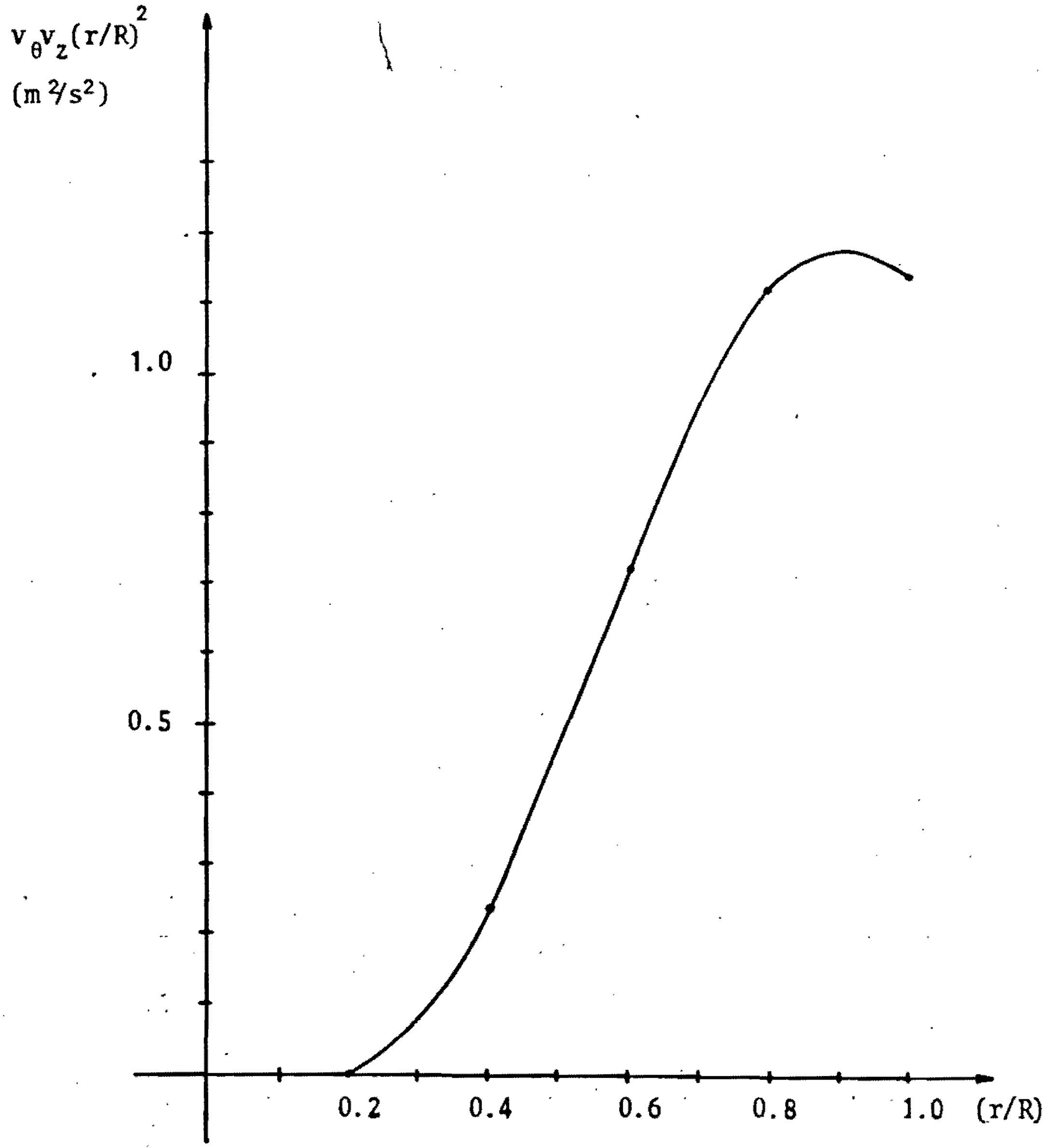


Fig. 4.11 Curva $(r/R)^2$ - $v_\theta v_z(r/R)^2$, para determinar el valor del parámetro de giro.

CAPITULO 5 . CARACTERISTICAS OSCILATORIAS DEL FLUJO HELICOIDAL TURBULENTO Y CONFINADO

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos en el Instituto de Ingeniería al estudiar el flujo helicoidal, turbulento y sin cavitación en el interior de tubos rectos de sección circular , para números de Reynolds y parámetros de giro altos. Este estudio es la primer etapa de un proyecto más amplio orientado a mejorar el conocimiento básico de los fenómenos hidrodinámicos asociados al flujo helicoidal que se produce en la descarga de las turbinas Francis, cuando estas operan fuera de las condiciones de diseño. Los fluidos de trabajo empleados son aire y agua. Los resultados aquí presentados también se publicarán en /22/.

En este estudio se analizan los espectros de las señales de presión en el extremo aguas abajo del tubo y se encuentran experimentalmente relaciones funcionales entre el parámetro de frecuencia, el parámetro de giro a la entrada del tubo y la longitud adimensionada. Se plantea un modelo teórico simple para evaluar la disminución del parámetro de giro a lo largo del tubo. Dicho modelo se calibra con los resultados experimentales obtenidos, y se emplea para determinar una nueva relación funcional entre el parámetro de frecuencia y el parámetro de giro a la salida del tubo. En dicha relación no interviene la longitud del tubo.

El flujo se caracteriza por medio de tres parámetros adimesionados básicos: el número de Reynolds (R_e), el parámetro de giro (G_o) y la relación entre la longitud del tubo y el diámetro interior del mismo (L/D). El parámetro de giro se define para cualquier sección recta del tubo, dentro de la cual se establece flujo helicoidal, pero como se demuestra en este trabajo, G_o decrece en el sentido del flujo, por ello, cuando se haga referencia a G_o en el extremo aguas arriba del tubo, este se designará con G_{oe}.

Los intervalos de los números adimensionados dentro de los que se trabajó en las pruebas de laboratorio presentadas en este capítulo son las siguientes:

$$0.25 < R_e\ 10^{-5} < 2$$

$$0.507 < G_{oe} < 4.010 \qquad 5.1$$

L/D = 1.82, 3.45, 6.19, 12.49, 18.69 y 24.94.

5.1 *DESCRIPCION DEL TRABAJO EXPERIMENTAL*

El trabajo de laboratorio se ha efectuado empleando una instalación experimental que funciona con aire o con agua. Esta instalación es la descrita en la sección 4.3 y cuyo diágrama esquemático se muestra en la figura 4.2. Cuando el fluido de trabajo empleado es agua, el gasto es aforado con un vertedor triangular.

Cuando el fluido de trabajo es aire, el aforo se hace con un orificio ubicado aguas arriba del sistema de álabes. Los tubos de lucita y los sistemas de álabes pueden cambiarse para modificar L/D y G_{oe} respectivamente.

Las características geométricas de los sistemas de álabes se indican en la figura 4.1 , donde además se indica el valor del parámetro de giro calculado con el método gráfico, y que para el caso en estudio corresponde a G_{oe} (parámetro de giro a la entrada del tubo).

Las mediciones de presión se realizaron a lo largo del tubo, mediante tomas alineadas sobre una generatriz, y distantes entre sí 150 mm. Para la medición de presiones oscilatorias en aire, se emplearon transductores marca National, modelo LX 1802 DZ con un alcanze de 0-15 psi en la presión, de 0-85°C en la temperatura y frecuencia de resonancia de 50 k Hz. Cuando se empleó agua, se usaron transductores marca Gould-Statham, modelo PA 822-200, alcanze de 0-200 psi en la presión y -53.9a121.1°C en la temperatura. En ambos casos se procesaron las señales sin incorporar filtros, usando un analizador Hewlett Packard, modelo HP 3582A, con el cual se obtuvieron los espectros de módulos. Esta información fue grabada y procesada gráficamente mediante una grabadora y expresada gráficamente mediante una computadora Apple II y un dispositivo de expresión gráfica Hewlett Packard modelo HP 7440A.

Usando aire como fluido de trabajo, se realizaron pruebas combinando los siete sistemas de álabes indicados en la figura 4.1, con las seis longitudes de tubo indicadas en las expresiones 5.1. Se ensayaron por lo tanto, cuarenta y dos combinaciones G_{oe}-L/D. Para cada combinación se ensayaron varios números de Reynolds (máximo ocho, mínimo cuatro). El mayor valor de R_e utilizado en cada combinación, quedo fijado por el gasto máximo que el ventilador era capaz de suministrar, en tanto que el menor se escogió mayor de 0.25×10^5 . Cuando se uso agua, se ensayaron tres sitemas de álabes (G_{oe}) y dos longitudes diferentes de tubo (L/D). En consecuencia, fueron ensayadas seis combinaciones. Para cada combinación se ensayaron varios números de Reynolds (máximo tres, mínimo dos)

El mayor R_e utilizado en cada combinación estuvo fijado por el máximo gasto que la bomba era capaz de suministrar, en tanto que el menor nunca fue inferior de 0.84×10^5 . Al trabajar con agua, la presión en el tubo se mantuvo aproximadamente en 2×10^5 N/m^2, con el objeto de evitar la fase gaseosa en el interior del tubo.

Los resultados de las pruebas experimentales empleando aire ya fueron publicados en /18/. Las pruebas experimentales empleando agua se realizaron simultaneamente a las descritas en la sección 4.3 .

En cada experiencia (con aire o con agua), se obtubo el espectro de módulos (espectro RMS , promedio de 32 muestras) de la señal de presión dada por el transductor ubicado en una toma distante 40 mm del plano de salida del tubo recto. Del ánalisis de dicho espectro se determinó la frecuencia correspondiente a la amplitud máxima la cual se denomina "frecuencia del vórtice" (f). Dicha frecuencia interviene en el parámetro de frecuencia $F = fD^3/Q_0$, el cual ya se había definido en la sección 4.1 .

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran dos fotografías, una tomada con exposición de 1/2000 s y la otra con 1/4 s, ambas corresponden a una experiencia donde se usó agua como fluído de trabajo con G_{oe} = 2.126, L/D = 6.19 y R_e = 0.84×10^5 . Antes de fotografiar, se introdujo aguas arriba de los álabes, una pequeña cantidad de aire con objeto de visualizar el fenómeno. Dentro del flujo el aire se desplaza hacia la zona de presiones mínimas y allí permanece por varios minutos antes de desaparecer por a-arrastre y dilución. Dicha zona coincide con el eje del tubo recto, excepto en la proximidad de la salida del tubo (extremo aguas abajo), donde el fenómeno pierde simetría axial, la línea de presiones mínimas se aparta del eje (fig. 4.4) y gira con el flujo. Esto puede observarse en la fotografía con 1/4 s de exposición (fig. 4.5) , Al colocar dos transductores de presión, uno a 40 mm y otro a 190 mm del plano de salida, se registraron los espectros de módulos mostrados en las figuras 5.1a y 5.1b respectivamente. Como puede observarse, la oscilación cuya

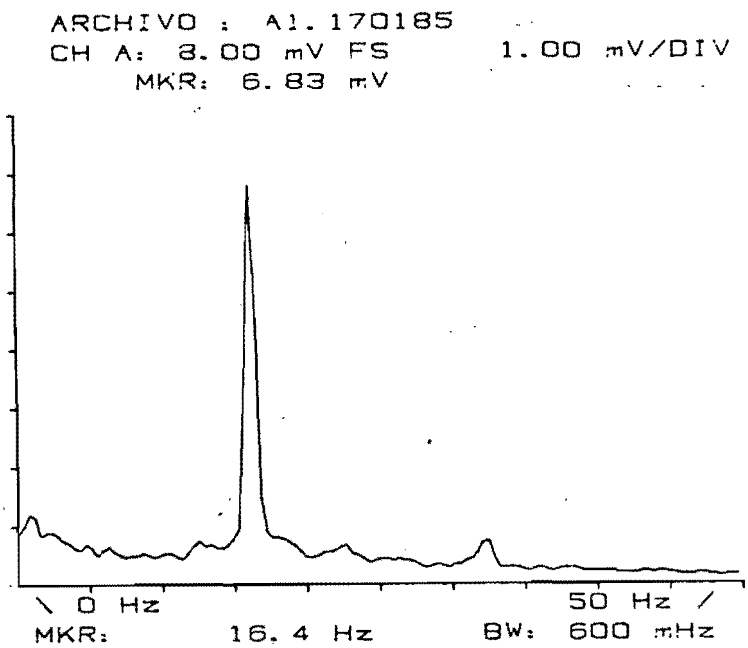


Fig. 5.1a Espectro de modulos de la señal de presión correspondiente a la toma ubicada 40 mm aguas arriba del plano de salida del tubo recto.

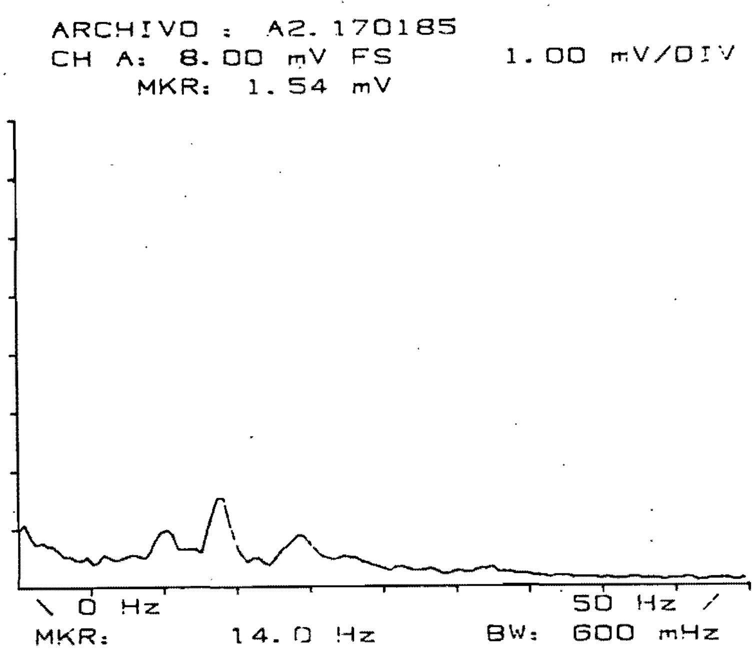


Fig. 5.1b Espectro de módulos de la señal de presión correspondiente a la toma ubicada 190 mm aguas arriba del plano de salida del tubo recto.

amplitud electrónica alcanza 6,83 mV (fig. 5.1a) corresponde al transductor ubicado en el extremo aguas abajo, en tanto que en el otro transductor se registra una amplitud máxima de 1,54 mV. Es por esto que se ha caracterizado al fenómeno oscilatorio como un fenómeno local, vinculado con el extremo aguas abajo del tubo recto. El fenómeno presentado en las figuras 4.4, 4.5, 5.1a y 5.1b, si bien corresponde a un caso particular, es representativo de un conjunto de observaciones semejantes en todas las experiencias en las que se empleó agua.

5.2 RESULTADOS OBTENIDOS

En la figura 5.2 se presentan los resultados obtenidos al determinar el parámetro de frecuencia F para $L/D = 12.49$, usando aire y agua. Se observa que al crecer R_e, F se mantiene constante para G_{oe}. Esta independencia del número de Reynolds (cuando $R_e > 0.8\times10^5$) se observó en todas las pruebas realizadas, independientemente del valor de L/D. Nótese también que no hay diferencias importantes al emplearse aire o agua.

En la figura 5.3 se presenta el valor límite de F para R_e altos correspondiente a cada pareja de G_{oe} y F . Nótese la fuerte influencia que ejerce L/D sobre para igual G_{oe}. En la figura 5.4 se han dibujado las curvas de la forma

$F = aG_{oe}^2 + bG_{oe} + c$, ajustadas por mínimos cuadrados a los da-

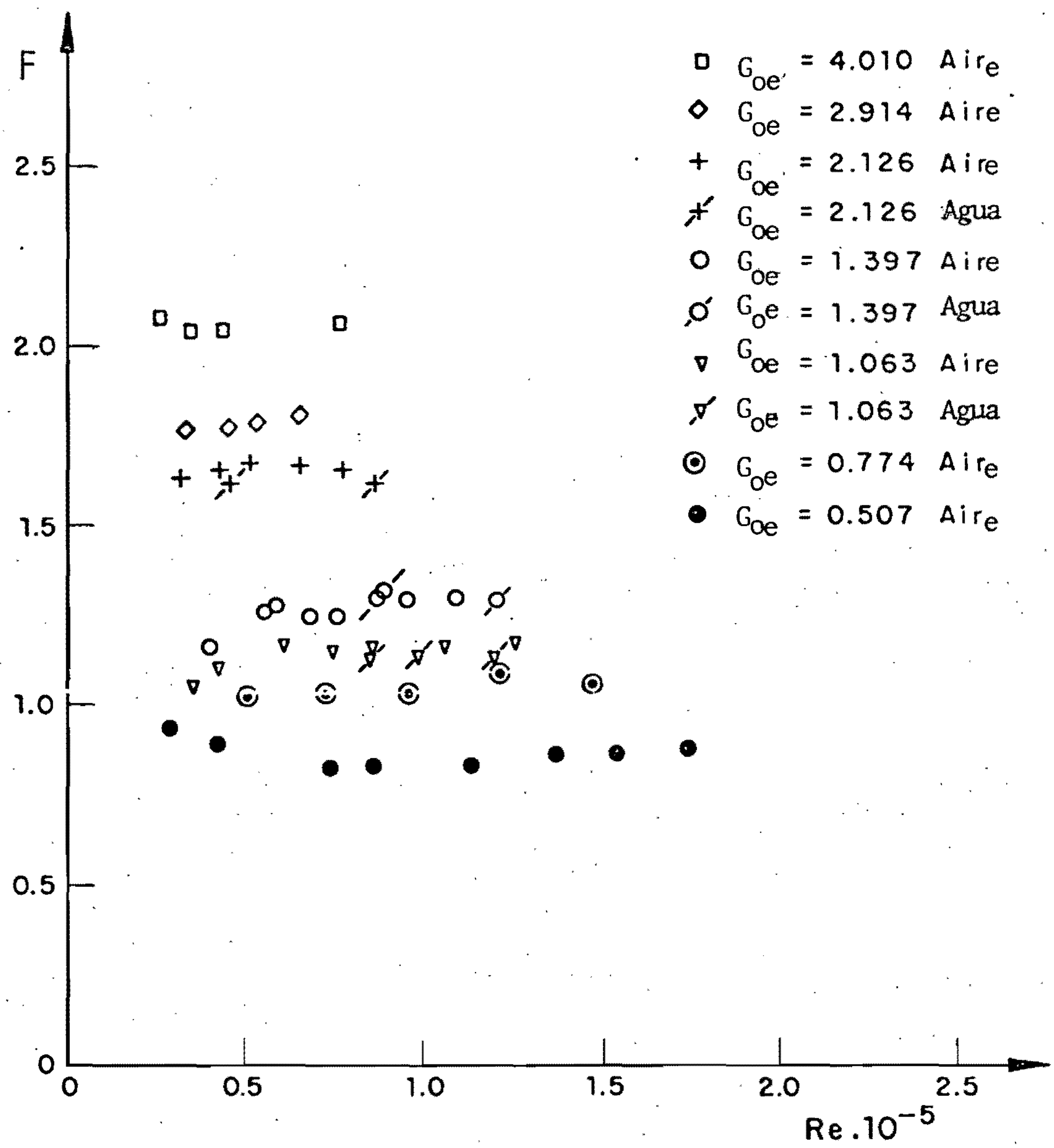


Fig. 5.2 Parámetro de frecuencia en función del número de Reynolds para tubo cilíndrico. L/D = 12.49. (Experiencias con aire y con agua) .

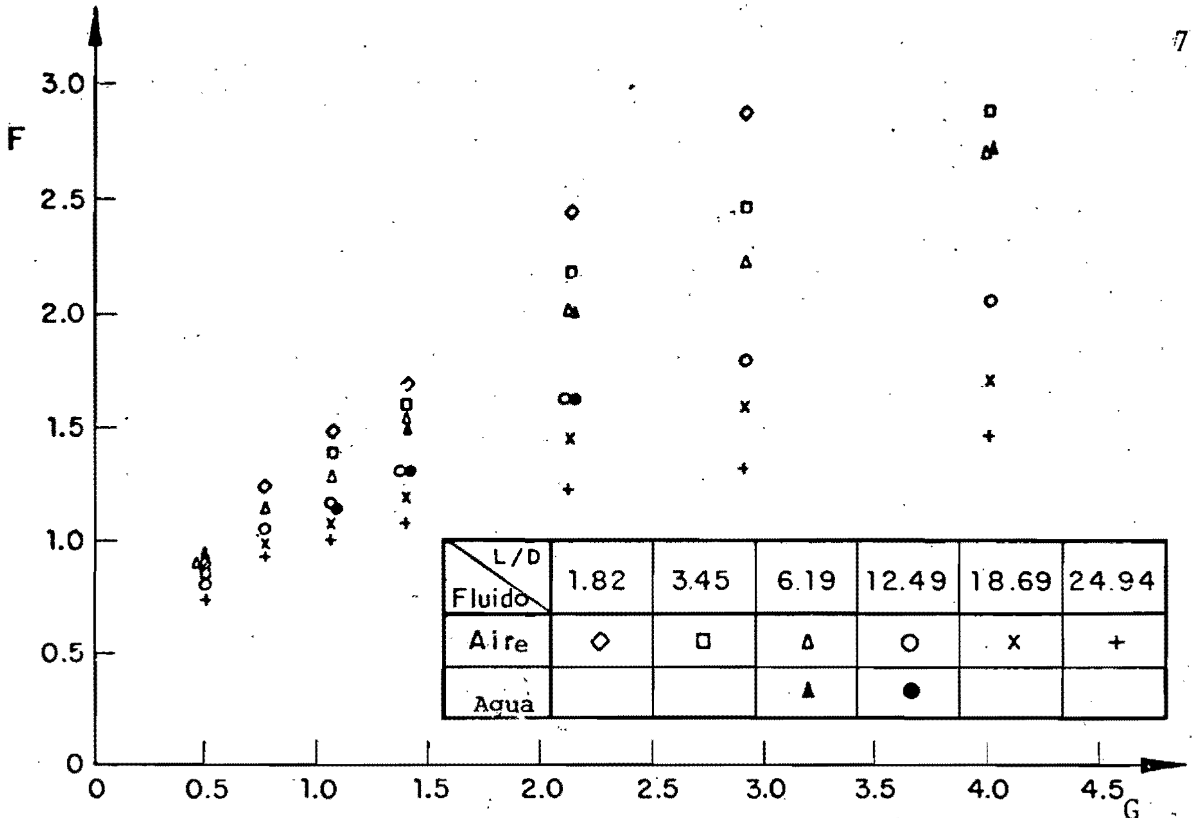


Fig 5.3 Parámetro de frecuencia en función del parámetro de giro a la entrada del tubo. (Puntos experimentales).

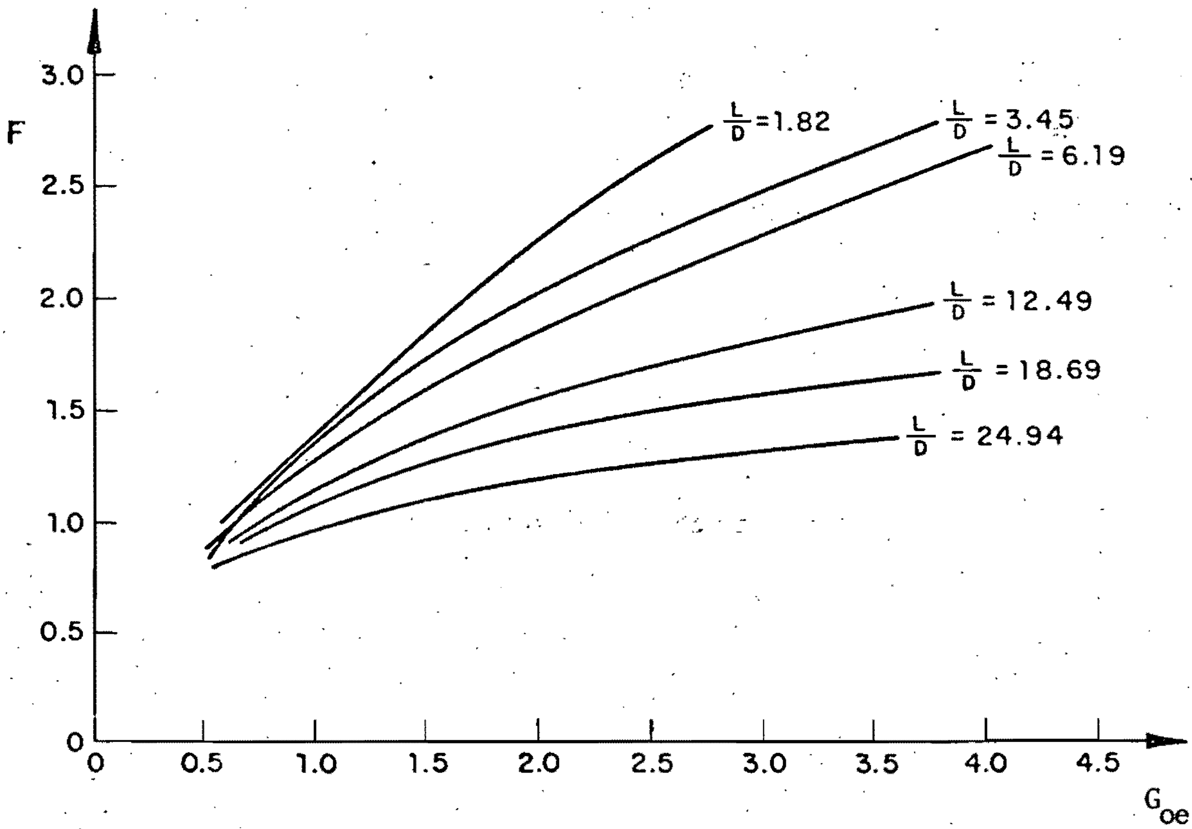


Fig. 5.4 Parámetro de frecuencia en función del parámetro de giro a la entrada del tubo. (Curvas ajustadas por mínimos cuadrados).

tos experimentales. Estas curvas son utilizadas en la sección 5.3 para evaluar la fricción.

5.3 *EVALUACION DEL DECAIMIENTO DEL PARAMETRO DE GIRO A LO LARGO DEL TUBO*

Recordando que el fenómeno oscilatorio en el extremo aguas abajo del tubo es local, es razonable pensar que el parámetro de frecuencia F, está condicionado por el parámetro de giro en la salida (G_{os}). Al observar los resultados obtenidos en la figura 5.4 dado un F, el valor de G_{oe} necesario para obtener el mismo F depende de L/D. También se observa que para el mismo F a mayor L/D, mayor G_{oe}. Esto implica que para obtener el mismo G_{os} (a la salida), se requiere un G_{oe} (a la entrada), que crece con L/D. Esa disminución del parámetro de giro a lo largo del tubo se produce por fricción, siendo el propósito de esta sección presentar un modelo tórico sencillo para evaluarla, y poder calcular entonces, dados G_{oe} y L/D, el G_{os} resultante.

Aplicando la ecuación del momento de la cantidad de movimiento a un volumen limitado por el tubo y dos secciones transversales del mismo, separadas Δz, y proyectando dicha ecuación sobre el eje del tubo y haciendo tender Δz a cero, se obtiene la siguiente ecuación escalar en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{d\Omega_e}{dz} = -\tau_\theta R^2 2\pi \qquad 5.2$$

donde el eje z está orientado en el sentido del flujo medio, y τ_θ es la componente tangencial de la tensión cortante (τ) ejercida por la pared del tubo sobre el fluido. La tensión rasante puede evaluarse a partir de la distribución de velocidades en el flujo helicoidal, admitiendo una ley de distribución de velocidad de potencia 1/7, para la capa límite tridimensional cercana a la pared. En este caso se tiene según /23/:

$$\phi = 8.74\eta^{\frac{1}{7}} \qquad 5.3$$

donde $\phi = v/v_*$ y $\eta = \delta v_*/\nu$; siendo v la velocidad en el exterior de la capa límite, δ el espesor de la capa límite y $v_*^2 = (\tau/\rho)$ la velocidad de fricción. De la expresión 5.3 puede obtenerse la tensión rasante en función de v y η, resultando:

$$v_* = \frac{v}{8.74\ \eta^{1/7}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

despejando a τ se tiene:

$$\tau = \frac{\rho v^2}{76.39\eta^{2/7}} \qquad 5.4$$

La velocidad v, se calcula mediante el modelo del vórtice circular, descrito en las expresiones 4.11. Calculando la componen te tangencial de la tensión rasante, se tiene;

$$\tau_\theta = \tau \frac{v_\theta}{v} \qquad 5.5$$

despejando τ de 5,5 y sustituyendo en 5,4 se llega a:

$$\tau_\theta = \frac{\rho v_\theta v}{76,39 n^{2/7}} \qquad 5.6$$

recordando que $v^2 = (v_\theta^2 + v_z^2 + v_r^2)$, y sustituyendo los valores de v_θ y v_z según las expresiones 4.11 , se tiene:

$$\tau_\theta = \frac{\rho}{76.39 n^{2/7}} \cdot \frac{K_v}{r} \sqrt{\frac{K_v^2}{r^2} + \frac{Q_0^2}{A_c^2}} \qquad 5.7$$

derivando Ω_e con respecto a z, a partir de 4.14, se llega a:

$$\frac{d\Omega_e}{dz} = \frac{\rho Q_0^2}{D} \frac{dG_o}{dz} \qquad 5.8$$

sustituyendo en 5,2 el valor de τ_θ proporcionado por 5.7, igualando 5,8 con 5,2, haciendo $Z = z/D$ y teniendo en cuenta 4.14, se puede plantear la siguiente expresión adimensional.

$$\frac{dG_o}{dZ} = -C\, G_o^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2}{\pi(1-\sigma_n^2)G_o} \right]^2 \right\}^{1/2} \qquad 5.9$$

donde $C = 2\pi/76.39 n^{2/7}$, .El radio adimensionado del núcleo σ_n es función de G_o, como se ha demostrado experimentalmente por

Senoo /19/ y experimental y teóricamente en la sección 4.2. Para poder expresar σ_n en función de G_o, en la sección 4.2.2 se propuso la función:

$$\sigma_n = 0.426\ G_o^{0.408} \qquad 5.10$$

Para integrar la ecuación 5.9 se admite provisionalmente que C es constante, hipótesis que luego se confrontará con los resultados experimentales. Al realizar la integración en Z, entre Z_1 y Z_2, se tiene:

$$F(G_{o_2}) - F(G_{o_1}) = C(Z_1 - Z_2)$$

siendo

$$F(G_o) = \int dG_o/G_o^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2}{\pi(1-\sigma_n^2)G_o} \right]^2 \right\}^{1/2} \qquad 5.11$$

La función $F(G_o)$ se presenta gráficamente en la figura 5.6, la cual es algo más compleja que la función homóloga empleada en 5.2, pues en $F(G_o)$ se ha introducido la hipótesis sobre la distribución de velocidades en la capa límite, con lo cual se obtienen resultados consistentes con la hipótesis de C constante, lo cual no ocurre si se procede como en 5.2. Como en la ecuación integrada aparecen únicamente las diferencias $F(G_{o_2})-F(G_{o_1})$, el origen de las coordenadas en $F(G_o)$ puede fijarse arbitrariamente . Para la determinación de C, se utilizaron las curvas $F(G_{oe},L/D)$ obtenidas experimentalmente. Para ello se empleó el siguiente procedimiento: en la figura 5.5 se presenta el esquema de dos curvas experimentales, correspondientes a $(L/D)_1$ y $(L/D)_2$. Tomando un valor cualquiera del parámetro de frecuencia F_C se determinaron dos puntos A y B, uno rn cada curva. El parámetro de giro de entrada al tubo con $(L/D)_1$ que origina un parámetro de frecuencia F_C en la salida es G_{oeA}, y en el tubo con $(L/D)_2$ es G_{oeB}. Como F_C es el mismo para los dos tubos, el parámetro de giro en la salida de ambos también deberá ser el mismo (G_{osC}). Por tanto, aplicando las ecuaciones 5.11 se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\left.\begin{array}{ll}
F(G_{oeA}) - F(G_{oeC}) = C\, Z_1 \;; & Z_1 = (L/D)_1 \\
F(G_{oeB}) - F(G_{oeC}) = C\, Z_2 \;; & Z_2 = (L/D)_2
\end{array}\right. \qquad 5.12
$$

restando miembro a miembro, se tiene:

$$
C = \frac{F(G_{oeB}) - F(G_{oeA})}{Z_2 - Z_1} \qquad 5.13
$$

La ecuación 5.13 se aplicó a distintos parámetros de frecuencia dados por la ecuación $F_C = 1 + 0.1n$ (donde n es entero y $1 \leq n < 17$), tomando en cada caso todas las combinaciones posibles de parejas de curvas interceptadas por la recta $F = F_C$ y promediando para cada F_C, se obtiene $\bar{C}$. En la figura 5.7 se muestra que los valores medios de $\bar{C}$ son sensiblemente constantes, justificando con ello la hipótesis inicial de C = cte.

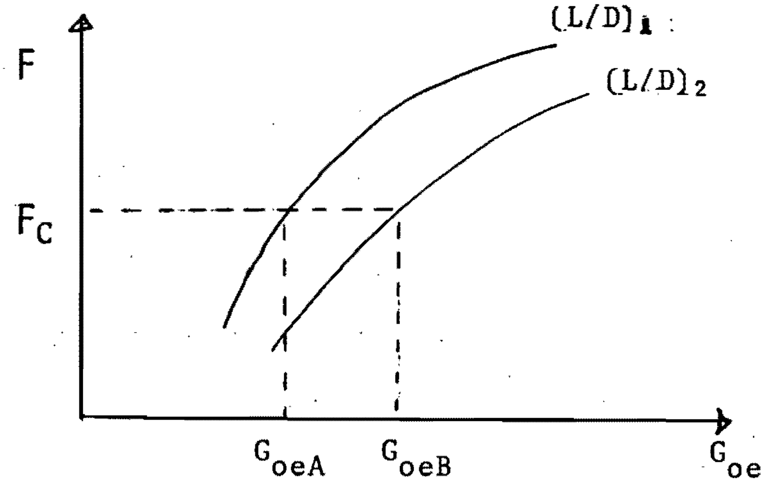


Fig. 5.5 Esquema auxiliar para calcular el decaimiento del parámetro de giro

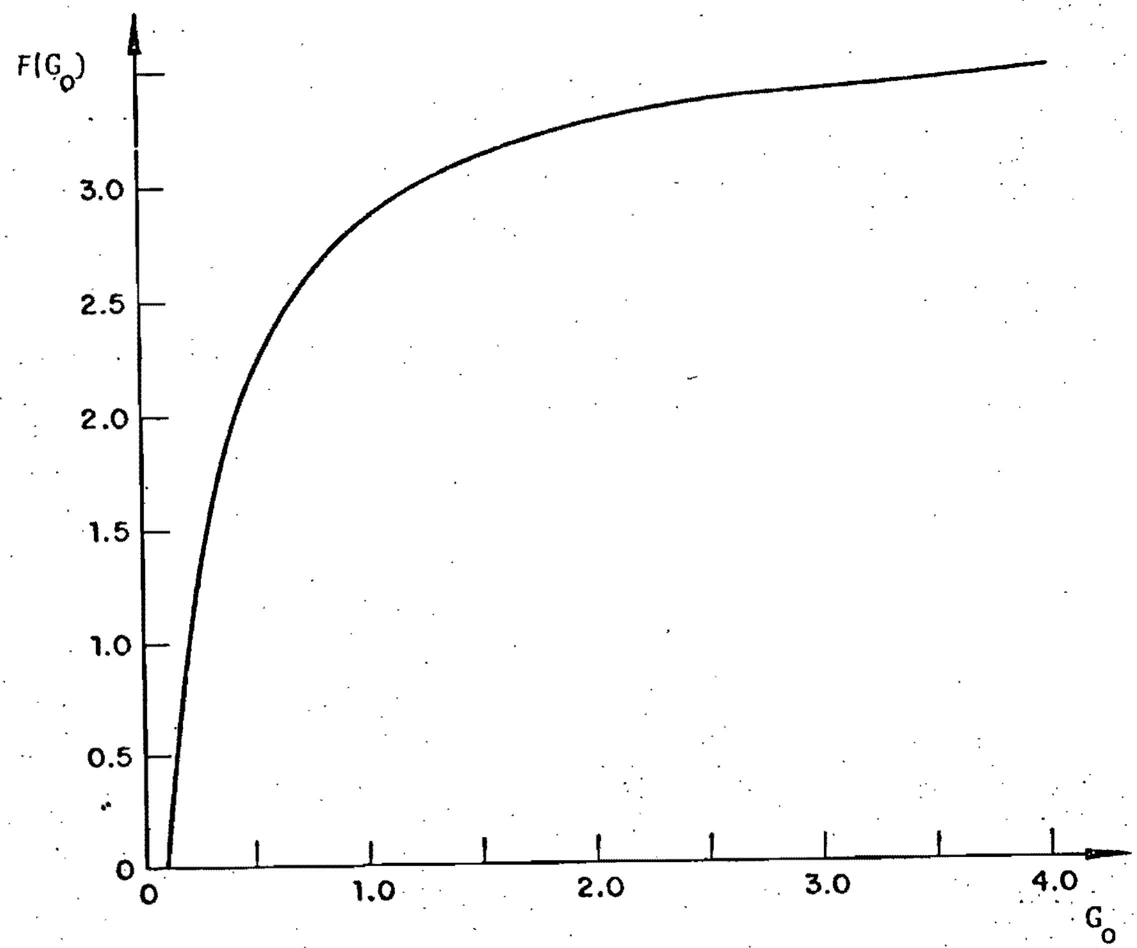


Fig. 5.6 Curva G_o - $F(G_o)$.

El valor medio de $\overline{C}$ es $C_0 = 0,0273$. Con este valor de C_0 se calcula el valor de n_0 que le corresponde según la definición de C . Dicho valor es $n_0 = 47,47$, que justifica la utilización de la ley propuesta por 5.3, aplicable al intervalo de fricción mixta laminar-turbulento $(5 < n < 70)$.

5.4 RELACION ENTRE EL PARAMETRO DE FRECUENCIA Y EL PARAMETRO DE GIRO A LA SALIDA DEL TUBO

Como el propósito del modelo tórico es, dados G_{oe} y L/D , calcular el parámetro de giro a la salida (G_{os}), se procederá a hacerlo con el valor de C_0 encontrado. La secuencia es la siguiente: Dado G_{oeA}, se calcula $F(G_{oeA})$ empleando la figura 5.6, luego con $(L/D)_1$ y $C_0=0,0273$ se calcula $F(G_{oAC}) = F(G_{oeA}) - C\,Z_1$; con este valor y empleando nuevamente la curva $F(G_o)$, se determina G_{osC} . Por otra parte, G_{oeA} y $(L/D)_1$ definen el parámetro de frecuencia F_C . Por lo tanto se ha logrado encontrar un parámetro de giro local (en la salida) asociado a un parámetro de frecuencia F_C dado. Procediendo sistemáticamente para cada uno de los diecisiete F_C definidos anteriormente, pudo construirse la tabla 5.1 en la cual aparece el valor de G_{os} obtenido para cada F, y los resultados correspondientes de cada una de las curvas encontradas experimentalmente. Nótese que para un valor de F , deberá encontrarse un mismo G_{os}, independientemente de la curva elegida, y esto es precisa

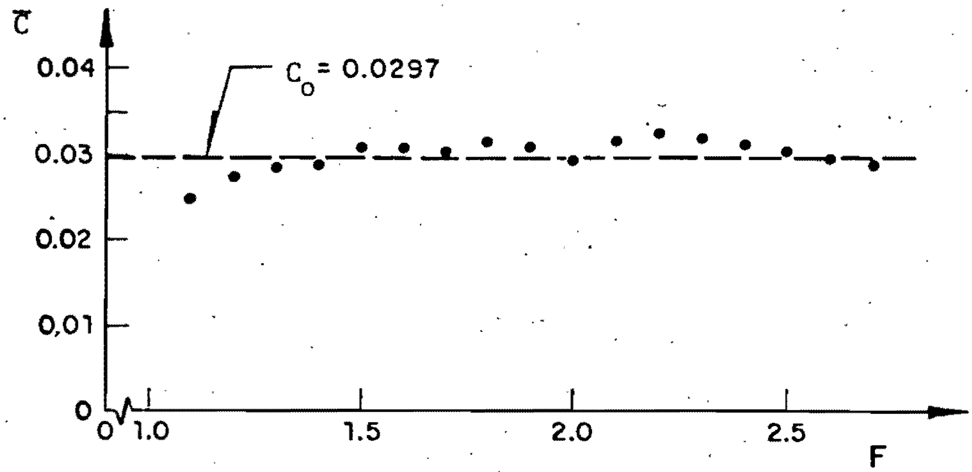


Fig. 5.7 Valores de $\overline{C}$ en función del parámetro de frecuencia.

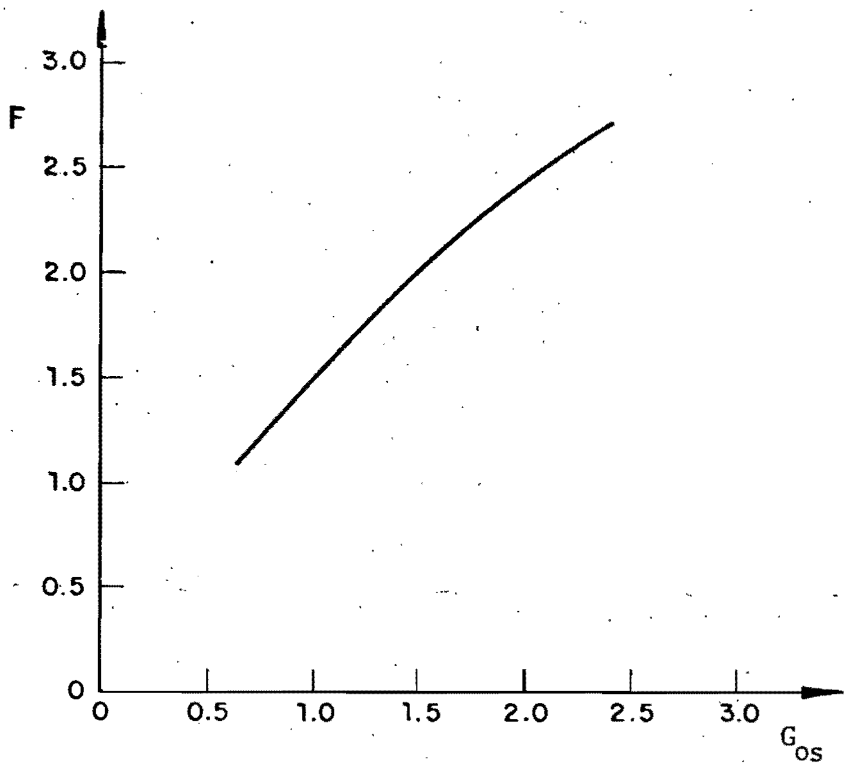


Fig. 5.8 Parámetro de frecuencia en función del parámetro de giro a la salida del tubo.

F_c	$\bar{C}$	Parámetros de giro G_{os} calculados						Promedio
		L/D=1.82	L/D = 3.45	L/D=6.19	L/D=12.49	L/D = 16.69	L/D = 24.94	
1.1	0.0249	0.650	0.651	0.637	0.638	0.604	0.690	0.645
1.2	0.0275	0.744	0.735	0.733	0.733	0.698	0.762	0.734
1.3	0.0284	0.829	0.810	0.835	0.819	0.794	0.837	0.820
1.4	0.0289	0.931	0.917	0.928	0.930	0.894	0.902	0.917
1.5	0.0308	1.002	0.992	1.001	0.991	0.951	-	0.988
1.6	0.0309	1.113	1.103	1.116	1.096	1.007	-	1.087
1.7	0.0303	1.201	1.218	1.223	1.206	1.116	-	1.193
1.8	0.0317	1.306	1.334	1.311	1.261	-	-	1.303
1.9	0.0310	1.405	1.442	1.422	1.355	-	-	1.406
2.0	0.0294	1.513	1.570	1.544	1.498	-	-	1.531
2.1	0.0317	1.583	1.687	1.612	-	-	-	1.627
2.2	0.0326	1.705	1.809	1.706	-	-	-	1.740
2.3	0.0319	1.823	1.939	1.803	-	-	-	1.855
2.4	0.0312	1.917	2.095	1.904	-	-	-	1.972
2.5	0.0305	2.020	2.226	2.012	-	-	-	2.086
2.6	0.0297	2.170	2.366	2.180	-	-	-	2.239
2.7	0.0289	2.317	2.423	2.349	-	-	-	2.363

TABLA 5.1 Valores de G_{os} calculados a partir de los datos experimentales

mente lo que ocurre con un error máximo del 7.4% . En consecuencia, este resultado valida el modelo empleado dentro de los intervalos de G_{oe} y L/D en los que se realizaron las pruebas.

En resumen, se ha determinado una relación funcional entre el parámetro de frecuencia F y el de giro G_{os} que es independiente de R_e y L/D. Esta relación expresada gráficamente para los valores medios de G_{os}, se muestra en la figura 5.8. Nótese que esta gráfica y la mostrada en 5.4 difieren en el eje de las absisas, pues mientras en una (fig 5.8) se presenta el parámetro de giro a la salida del tubo (G_{os}), en la otra se presenta el parámetro de giro a la entrada.

CAPITULO 6 CONCLUSIONES

En la etapa de diseño de una planta hidroeléctrica, es necesario preveer los posibles fenómenos de resonancia causados por el vórtice pulsante que se presenta en la tubería de descarga de las turbinas tipo Francis. Para esto se requiere conocer el mecanismo por el cual el vórtice excita al resonador.

En este trabajo se expuso brevemente la teoría de la resonancia, la cual se desarrolla con base en el método de las matrices de transferencia. Esta teoría permite conocer con cuales frecuencias y en cuales puntos del sistema hidráulico se pueden presentar amplitudes máximas en las oscilaciones de presión. En consecuencia, resta saber preveer el comportamiento del excitador que en las plantas hidroeléctricas es el vórtice en la descarga de las turbinas Francis. Por la complejidad del flujo que produce este vórtice (helicoidal y turbulento), el camino a seguir para su comprensión debe hacerse por etapas. El estudio de las características cinemáticas y oscilatorias del flujo helicoidal (en tubos cilíndricos) , que se presentaron en los capítulos cuatro y cinco, respectivamente, es la primera de ellas.

Como se ha visto, la técnica del parámetro de giro es un valioso auxiliar en el estudio experimental, ya que no se requiere de un rodete para generar el vórtice, bastando conocer la geometría de un sistema de álabes fijos, para poder extrapolar a un prototipo los resultados experimentales.

Para determinar el radio del núcleo ($\bar{r}_n$), se propusieron dos modelos: el del vórtice circular (V.C) y el vórtice-Q (V.Q). El modelo V.C considera que desde el centro del tubo y hasta una distancia r_n, el flujo se comporta como un vórtice confinado (sólido rígido) y no se presentan velocidades axiales , y que de r_n a las paredes , el comportamiento es el de un vórtice libre; este modelo ya había sido propuesto por Shogenji desde 1933 /25/.El modelo V.Q. propone una distribución exponencial para la distribución de velocidades tangenciales y considera que se presentan velocidades axiales en todo el tubo; la desventaja del segundo modelo es que requiere ser calibrado con datos experimentales. El ajuste del modelo C.V. es bueno en los puntos cercanos a la pared y malo en los entornos de σ_n . El modelo V.Q. proporciona buen ajuste para la distribución de velocidades tangenciales, no siendo así con la distribución de velocidades axiales. De cualquier manera, ambos modelos proporcionan valores de σ_n similares. Los resultados experimentales mostraron que σ_n es función del parámetro de giro (G_o), e independiente de la relación L/D. A partir del principio de Hamilton trabajando con un fluido ideal, se justifica esa relación. Las curvas σ_n-G_o , obtenidas experimental y teóricamente son cualitativamente semejantes. La diferencia de resultados cuantitativos se debe a que se empleó un modelo con fluido ideal a un fenomeno real.

En el estudio experimental de las características oscilatorias del flujo helicoidal, se mostró la relación funcional $fD/Q = \bar{F}(G_o, L/D)$, para números de Reynolds altos. Esta relación proporciona resultados cuantitativamente similares empleando aire o agua como fluidos de trabajo.

Según lo observado en las fotografías del vórtice, el descentramiento de este, y por lo tanto el fenómeno oscilatorio, es un fenómeno local que se presenta a la salida del tubo. Para conocer el parámetro de giro a salida (zona de descentramiento), se requiere conocer la pérdida del momento de la cantidad de movimiento a lo largo del tubo, la cual se debe a los efectos de la fricción.En este trabajo se propuso un modelo que permite calcular dicha pérdida y poder así, relacionar el parámetro de giro a la salida con la frecuencia de la oscilación. El modelo se calibró con los resultados obtenidos, considerando inicialmente un valor de η constante, consideración que fue verificada posteriormente, también se necesitó conocer σ_n, lo cual hizo necesario usar los resultados obtenidos en el capítulo cuatro.

Como ya se comentó, la excitación pulsante está causada por la pérdida de simetría axial del fluido que acontece a la entrada al tanque de desfogue. Dicha pérdida de simetría axial puede deberse al gradiente de presiones que el flujo produce a la salida del tubo. Pruebas preliminares realizadas en el Instituto de Ingeniería corroboran esta hipótesis. Por lo tanto, al proseguir este estudio en la orientación indicada, no solo permitirá conocer mejor el comportamiento del vórtice y por lo tanto preveerlo, sino que podrá llegarse a formas técnicamente factibles de controlarlo.

El siguiente paso será estudiar el comportamiento del flujo helicoidal dentro de tubos cónicos y de ahí pasar al modelo a escala del sistema tubería de presión-turbina-tubería de desfogue. Los aspectos teóricos y la determinación de escalas de este modelo ya fueron presentados por Aguilar /24/.

AGRADECIMIENTOS

Los resultados experimentales y teóricos presentados en los capítulos 4 y 5, fueron obtenidos por el grupo de hidromecánica del Instituto de Ingeniería que está a cargo del Dr. Rafael Guarga Ferro. Quiero manifestar mi agradecimiento a las autoridades del Instituto de Ingeniería y a las de la Facultad de Ingeniería, el haberme permitido colaborar dentro del mencionado grupo de trabajo durante el período en el que se realizó este trabajo.

Agradezco también al Dr. Guarga sus valiosas enseñanzas y su esmerado apoyo en la dirección de esta trabajo, asimismo, mi reconocimiento a todo el grupo de hidromecánica , y de manera muy especial al ingeniero Jesús Gracia Sánchez y al ingeniero Alejandro Sánchez Huerta quién siempre me ha brindado su ayuda y su amistad.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

1 Guarga,R. y Torres JJ. "Reducción de las oscilaciones de presión en la P.H. 'La Angostura" mediante inyección de aire". Proyecto 1118 del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M. 1982.

2 Wylie,B & Streeter ,V. " Fluid Transients" . Mc. Graw Hill Co. 1978.

3 Brown,F.T.,Margolis,D.L & Shah,R. "Small-amplitude frequency behaivor of fluid lines with turbulent flow", ASME transactions, Dec. 1969, pp 578-693.

4 Chaudry,H. "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1979.

5 Fanelli, M "Risposta dinamica di una condotta in pressione con parete elastica smorzante". L. Energia Elettica,No 1, 1973.

6 Guarga,R.,Hiriart,G & Torres,J. " Oscillatory problems at Mexico's Angostura Plant" Water Power and Dam Construccion October 1983, pp 33-36.

7 Guarga,R,Hiriart,G "Informe de diagnóstico sobre las P.H. de Malpaso y Angostura",Informe del Instituto de Ingeniería. Proyecto 9103. Mayo de 1983.

8 Guarga,R."Resonancia en sistemas de conductos a presión" Tesis doctoral.Publicación del Instituto de Ingeniería.

9 Fashbaug,R & Streeter, V. "Resonance in liquid rocket engine systems", ASME. J. of Basic Engineering, Dec 1965 pp 1011-1017.

10 Zielke,W.,Wylie,B. &Keller, R. "Forced and self excited oscillation in propellant lines", ASME. J. of Basic Engineering Dec. 1969. pp671-677.

11 Guarga, R. "Resonance and receptance in uniform pipes". Instituto de Ingeniería N. E-55. Febrero de 1985. pp 1-45.

12 Guarga,R. " Seminario de oscilaciones y estabilidad de sistemas hidráulicos a presión" Impartido en el Instituto de Ingeniería, 1984. Notas sin publicar.

13 Zielke, W. & Hack, H. "Resonance frequencies and associated mode shapes of pressurized systems" Int. Conf. on Pressure Surges. Set,1982, Canterbury, England. pp G1-1-13.

14 Guarga, R. e Hiriart, G. "Informe diagnóstico sobre las P.H. de"Malpaso" y "La Angostura"" Proyecto 9103 del Instituto de Ingeniería. Mayo de 1980

15 Guarga, R. "Oscilaciones en plantas hidroeléctricas. Mediciones en 'La Angostura' Proyecto 9103 del Instituto de Ingeniería. Mayo de 1980.

16 Cassidy,J & Falvey, H."Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown" Journal of Fluid Mechanics, Vol 41 Part 4, 1970. pp727-736.

17 Nishi, . "Study of Swirl flow and surge in elbow type draft tube" IAHR. Simposio de Tokio, Vol 1, 1980.

18 Guarga,R.,Torres,J. "Desarrollo de mejores métodos de control del vórtice en la descarga de las turbinas Francis. Publicación 2107 del Instituto de Ingeniería.1983

19 Senoo, Y. & Nagata .M "Swirl flow in long pipes with different roughness" Bulletin of the JSME 5 Vol 15, N°90. 1972,1514-1521.

20 Guarga ,R. Gracia,J.,Sánchez,A et al. " L.D.V. and pressure mesurements in confined turbulent swirling flow" Proceedings of the second meeting of the IAHR Work Group."On the behaivior of the hydraulic machinery under steady oscillatory condi--tions' Sept 18-21. 1985 México.

22 Guarga,R.,Gracia,J.,Sánchez,A. y Cafaggi,A."Oscillatory characteristics of swirling, confined, turbulent and non cavitating flows" Proceedings of the second meeting of the IAHR Work Group. 'On the behauvior of the hydraulic machinery under steady oscillatory conditions' Sept 18-21. 1985 .México.

21 Milne and Thompson "Theorical Aerodinamics", Fourth Edition, Chap 4. Dover Publications, Inc. New York 1973 pp. 70-73.

23 Schlichting, H. "Boundary Layer Theory" Mc Graw Hill Book Coo. Fourth Edition. Chap 20, 1960. p.p. 507.

24 Aguilar, L. "Planteamiento y construcción del modelo hidro-elástico de la unidad número 3 de la planta hidroeléctrica 'La Angostura'" Tesis de maestría. Fac . de Ingeniería. UNAM. Dic. de 1983

25 Shogenji, K. & Shimoyama, Y. "On the flow of water through the draft tube of a water turbine". Journal of the Faculty of Engineering, Kyushu Imperial University, September, 1933.

26 Sánchez, A. "Resonancia hidráulica en tuberías, excitada por un flujo helicoidal" Tesis de licenciatura. Fac . de Ing. U.N.A.M. 1984.