



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Existencia de vórtices anulares
con frontera cercana a líneas de
corriente internas del vórtice
esférico de Hill

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Lauro Morales Montesinos.

TUTORES:

Dr. Gilberto Flores Gallegos.



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno:

Morales Montesinos Lauro
55 3051 6741
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Físico
406049706

Tutor:
Dr. Flores Gallegos Gilberto

Sinodales:

Dr. Zenit Camacho José Roberto
Dr. Málaga Iguñiz Carlos
Dr. Flores Gallegos Gilberto
Dr. Capella Kort Antonio
Dr. Panayotaros Panayotis

Datos del trabajo escrito:

Existencia de vórtices anulares con frontera cercana a líneas de corriente internas del vórtice esférico de Hill.
202 p
2013

*Dedicado a
mi familia: Irma, Tomás, Vero, y Jorge*

Agradecimientos

Me siento muy feliz al culminar una etapa más en mi vida, claro que ello no lo hubiera logrado sin la presencia de estas siete personas en mi vida.

Las dos primeras son mis padres Tomás Morales e Irma Montesinos, a ellos debo todo lo que tengo y lo que soy, agradezco todo el amor y cariño que me regalaron sin esperar nada a cambio. Gracias por su infinita paciencia y comprensión.

Agradezco a Vero por siempre estar a mi lado y apoyarme en todas mis locuras, por animarme cada vez que no encontraba la salida, por ser mi pareja, mi apoyo, ese hombro que siempre es necesario para seguir adelante, gracias amor!

Otra persona muy importante para mi fue el Dr. Jorge Ize Lamache a quien debo gran parte de mi formación académica, fue un gusto enorme haberme encontrado con él, ser su alumno y tesista fue una maravillosa experiencia. Siento una pena enorme por no haber terminado con él este trabajo, pero Dios no nos quiso regalar más tiempo. Confío que mi tesis sea de su entero agrado, pues sé que desde donde quiera que él este, continuo dirigiendo este trabajo.

Me siento en deuda con el Dr. Salvador Godoy por su apoyo y consejos durante la carrera, y por brindarme la oportunidad de ser su ayudante.

De igual forma agradezco al Dr. Minzoni por entregar toda esa pasión en sus clases, por transmitirnos ese tremendo amor por las matemáticas y sobre todo, por confiar tanto en nosotros sus alumnos. Ser estudiante y posteriormente ayudante en sus cursos de Cálculo fue maravilloso.

También agradezco al Dr. Gilberto Flores por acceder a continuar supervisando mi tesis.

Por último a CONACYT por el apoyo económico brindado, al ser ayudante de investigador del Dr. Ize.

Resumen

En este trabajo se prueba la existencia de vórtices anulares con frontera cercana a una línea de corriente interna al vórtice de Hill. Para ello buscamos soluciones de tipo potencial en la ecuación de vorticidad. Se planteó una ecuación integral no lineal y se probó la existencia de soluciones usando un mapeo de contracción. Además obtuvimos una descripción aproximada de la frontera de los vórtices buscados.

Introducción

En hidrodinámica se entiende un vórtice anular como una distribución de vorticidad con simetría axial que se mueve a velocidad constante, sin cambiar de forma en un fluido no acotado que se encuentra en reposo en infinito.

El ejemplo más simple de vórtices anulares es el vórtice esférico de Hill, en el cual la vorticidad tiene una distribución lineal respecto a la distancia al eje de simetría. Este es el único resultado analítico que se conoce a las ecuaciones de vorticidad.

Como continuidad al trabajo de Hill [13], los vórtices anulares se han estudiado extensamente. En particular Fraenkel [11] probó la existencia de vórtices anulares de sección transversal pequeña usando un mapeo de contracción, asumiendo que los vórtices buscados son también cercanos a líneas de corriente del vórtice de Hill. Estos trabajos sugieren que tanto el vórtice de Hill como los descritos por Fraenkel son solo algunos miembros de una familia de vórtices anulares que se mueven a velocidad constante respecto a infinito, con vorticidad en el núcleo lineal respecto a la distancia al eje de simetría.

Siguiendo estas ideas Norbury [12] realizó su trabajo de tesis doctoral buscando vórtices anulares cercanos a líneas de corriente del vórtice de Hill pero con sección transversal cercana a la del semicírculo frontera. Cabe señalar que la forma de atacar el problema fue semejante a la usada por Fraenkel, solo que en este caso se tiene una complicación desde el punto de vista topológico pues el semicírculo frontera (que no es una curva cerrada) del vórtice de Hill es una línea de corriente admisible en la región de trabajo. Para evitar esto utilizó una línea de corriente cerrada (∂H_ϵ) en el vórtice esférico y la distancia normal (q) de ∂H_ϵ a la curva de estudio $\partial\Omega$. Notemos que al buscar soluciones de tipo potencial sobre la región $\partial\Omega$, la incógnita q se encuentra en los límites de integración. Mediante un desarrollo en series de Taylor a la representación integral de la solución y un cambio de variable logró expresarlo en la siguiente forma

$$u - \mathcal{K}_\epsilon u = f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u$$

Analizó cada uno de los sumandos y probó que dicha expresión puede verse como un mapeo de contracción en cierto espacio, de modo que allí tiene solución única; además dio un esquema iterativo para aproximar numéricamente a

la solución.

Posterior a este trabajo, Norbury [12] prueba numéricamente la existencia de toda la familia de vórtices anulares señalada anteriormente; y son Fraenkel y Berger [10] quienes con teoría de ecuaciones diferenciales parciales y métodos variacionales encuentran la solución al problema general de vórtices anulares en flujo ideal.

Existen estudios numéricos posteriores [14] muestran que perturbaciones a la frontera del vórtice esférico se deforman a vórtices anulares algunos de ellos son semejantes a los descritos en esta tesis.

Este trabajo de tesis es una revisión y exposición amplia y detallada del trabajo original de Norbury [12], en el cual se han completado y revisado a fondo los cálculos de dicho trabajo, encontrando en ciertas partes correcciones y mejores implementaciones a los propuestos por el autor original del artículo.

Índice general

1. Preliminares	1
Referencias	8
2. Ecuación de Laplace	10
2.1. Ecuación de Laplace en dominios no acotados	24
Referencias	29
3. Modelo Matemático	31
Referencias	44
4. Vórtice de Hill	46
4.1. Solución a la ecuación diferencial	46
4.2. Solución a la ecuación integral	48
Referencias	50
5. Ecuación no lineal	52
Referencias	64
6. Estimaciones útiles	66
Referencias	79
7. Estimación de \mathcal{S}	81
7.1. Expansión exterior	88
7.2. Expansión media	93
Referencias	96
8. Análisis del Término lineal	98
8.1. Construcción de la división de $[0, \pi] \times [0, \pi]$	99
8.1.1. Selección de términos dominantes	111
8.2. Cotas para el término lineal	114
8.3. Análisis sobre la región E_2	116
8.4. Análisis del término lineal para $0 \leq t \leq \epsilon^{2/3}$	121
Referencias	125

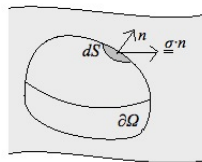
9. Existencia de $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$	127
Referencias	132
10. Análisis de términos no lineales	134
10.1. Elección del espacio de trabajo y su partición	139
10.1.1. Partición de E_1	139
10.2. Análisis de \mathcal{N}_1 con $t < \epsilon^{2/3}$	151
10.2.1. Partición de la region de trabajo.	151
10.2.2. Integrales sobre E_{1a} , E_{1b} y E_{1c}	152
10.2.3. Integrales sobre E_{1e} , E_{1f} y E_{1g}	153
10.2.4. Integral sobre E_{1d}	154
10.3. Análisis del término no lineal \mathcal{N}_2	155
Referencias	168
11. Resultados Principales	170
Referencias	172
Conclusiones	174
A. Estudio de una función auxiliar (Capítulo 10)	175
Referencias	178
B. Estimación de $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dt}{d\theta}$, $\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt}$ y f_ϵ	180
B.1. Otra estimaciones	180
B.1.1. Estimación de $\frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{dt}{d\theta}$	180
B.1.2. Estimación de $\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt}$	182
B.2. Estimación de f_ϵ	185
Referencias	191

Capítulo 1

Preliminares

En la dinámica de los medios continuos existen dos tipos de fuerzas; *las de cuerpo y las de corto alcance*. Las primeras tienen gran alcance afectando a cada parte del medio continuo, generalmente dependen de algunas propiedades del mismo como la densidad; mientras que *las fuerzas de contacto o superficiales* son fuerzas de corto alcance. Se dan entre dos elementos del medio separados por una “superficie”, es decir una parte del sistema actúa con su vecino por medio de esta; (ello resulta un poco ambiguo, pues físicamente no existe tal, sino que sólo es una herramienta para describir la interacción en el sistema). Debido a que la interacción entre los elementos es a través de la superficie que los une, es conveniente usar en vez de fuerzas, esfuerzos que es el cociente de la fuerza entre el área.

La herramienta matemática para describir los esfuerzos son los tensores. Así, decimos que $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos y el esfuerzo en la dirección \mathbf{n} está dado por:



$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \tag{1.1}$$

La fuerza neta sobre un volumen Ω es:

$$\mathbf{F} = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dV + \iint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS$$

Donde \mathbf{f} son las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y \mathbf{n} la normal exterior a $\partial\Omega$.

Si el medio es un fluido, definimos el momento por unidad de volumen en un elemento de este como $\rho \mathbf{v}$ con ρ la densidad del medio. Con esto, la segunda ley de Newton para un volumen fijo queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV \right] = \iiint_{\Omega} \mathbf{f} dV + \iint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2)$$

Pero como d/dt es la derivada lagrangeana, es decir está vista con respecto a un sistema de referencia que se mueve con el cuerpo entonces la masa ρdV no varía, de modo que entra en el signo de integración y se aplica solo a \mathbf{v} .

Usando el teorema de Gauss a la integral sobre la superficie del fluido se tiene que:

$$\iiint_{\Omega} \left[\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right] dV = 0$$

Como el volumen es fijo pero arbitrario, el integrando es cero

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.3)$$

Solo falta saber como se relaciona el tensor de esfuerzos con la velocidad y otras propiedades del fluido.

El tensor σ_{ij} es la entrada ij del tensor $\underline{\underline{\sigma}}$ entonces ella representa la coordenada i -ésima del esfuerzo sobre una superficie que tiene como normal a un vector en la dirección j -ésima; entonces la entrada σ_{ii} es la parte del esfuerzo que es perpendicular a la superficie. Esta componente del esfuerzo tiende a comprimir o expandir al fluido en dirección normal a la superficie en ese punto. Veamos como podemos descomponer este tensor para darle una interpretación más sencilla.

Tomemos una superficie cerrada muy pequeña donde supongamos $\underline{\underline{\sigma}}$ es constante en el volumen delimitado por la superficie, y calculemos el promedio de la componente normal del esfuerzo sobre ella; por simplicidad usemos a una esfera y notación de índices para los vectores y tensores.

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\tilde{V}} \sigma_{ij} n_i n_j R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\sigma_{ij}}{4\pi} \iint_{\tilde{V}} n_i n_j \sin \theta d\theta d\varphi$$

Como n_i puede ser cualquiera de las componentes del vector radial unitario cuando el producto $n_i n_j$ tenga un $\sin \varphi$ o $\cos \varphi$ la integral sobre ese término es nula, así $n_3 n_1, n_1 n_3, n_3 n_2, n_2 n_3$ no cuentan en el promedio, mientras que $n_2 n_1 = n_1 n_2 = \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$ también son cero pues al integrar sobre φ tenderemos un $\sin^2 \varphi$ que se cancela al evaluar en los límites de integración, por lo tanto la integral sobre componentes con índices distintos es cero mientras que para los que tienen índices repetidos es:

$$\frac{\sigma_{11}}{4\pi} \iint_{\tilde{V}} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi + \frac{\sigma_{22}}{4\pi} \iint_{\tilde{V}} \sin^3 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi + \frac{\sigma_{33}}{4\pi} \iint_{\tilde{V}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta + \frac{\sigma_{33}}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{4} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \\
 &= \frac{\sigma_{ii}}{3}
 \end{aligned}$$

i.e. el promedio de las componentes normales de los esfuerzos en la superficie es un tercio de la traza del tensor, estas son las que hacen que la superficie se deforme a otra semejante a la original, por ello se conocen como esfuerzos expansivos.

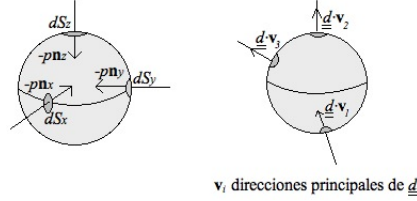
Se acostumbra llamar *presión* a:

$$p = -\frac{\sigma_{ll}}{3} \quad (1.4)$$

pues ella es la causante de la compresión del cuerpo cuando $p > 0$ y de la expansión si $p < 0$.

Así separamos al tensor de esfuerzos como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij} \quad (1.5)$$



donde el tensor \underline{d} (conocido como *tensor debiatórico*) tiene traza cero, es decir los valores propios de este tensor no pueden tener todos el mismo signo. Físicamente dichas cantidades son las magnitudes de los esfuerzos en las direcciones dadas por los vectores propios, así el tensor \underline{d} no puede representar esfuerzos compresivos ó expansivos. Por eso decimos que es el causante de que el fluido se deslice, pero al hacerlo en las capas de fluido aparecerá la fricción interna del fluido en otras palabras viscosidad. Si el fluido tiene una relación lineal del tensor debiatórico con el gradiente de la velocidad y es isotrópico se dice que es un *fluido newtoniano*.

Sustituyendo (1.5) en la ecuación (1.3) vemos que:

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f} + \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \underline{d}] \quad (1.6)$$

En nuestro caso, nos interesan sólo fluidos ideales (sin términos viscosos) donde $\underline{d} \equiv \underline{0}$. Obteniendo la ecuación de Euler para fluidos ideales

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p \quad (1.7)$$

Ahora sólo resta abrir la derivada total de la velocidad con respecto al tiempo; para ello supongamos un elemento de fluido que se mueve en una trayectoria $\underline{X}(t)$ y queremos analizar la evolución de la propiedad $\gamma(\underline{X}(t), t)$ conforme el volumen avanza sobre la trayectoria.

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] \gamma \quad (1.8)$$

Sustituyendo (1.8) en (1.7) obtendremos la Ecuación de Euler en su forma estándar

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p \quad (1.9)$$

Si pensamos que la fuerza por unidad de masa es conservativa ($\mathbf{f}/\rho = -\nabla\phi$), la expresión anterior es dada por:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\phi \quad (1.10)$$

De (1.10) tomemos la componente i -ésima del término $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ y juguemos un poco con ella:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_i &= v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{v}|^2}{\partial x_i} + v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

La parte entre paréntesis en la ecuación anterior es un tensor antisimétrico que está aplicado a un vector; entonces este lo podemos ver como un producto cruz entre el vector \mathbf{v} y otro al que llamaremos $\vec{\omega}$ es decir:

$$v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -(\mathbf{v} \times \vec{\omega})_i \quad \text{con} \quad \vec{\omega} = \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right]^T$$

donde $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ es la *vorticidad* asociada al campo de velocidades. Sustituyendo esto en la ecuación (1.10)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\phi \quad (1.11)$$

Analicemos un poco qué es físicamente la vorticidad.

Pensemos en que tenemos un fluido ideal, y queremos ver como varía la velocidad en un tiempo dado entre dos puntos muy cercanos \mathbf{x} y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ con $\|\mathbf{h}\| \ll \|\mathbf{x}\|$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \nabla \mathbf{v}|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h} + O(\|h\|^2) \\ &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v}_{\mathbf{x}} + \nabla \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^T] \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v}_{\mathbf{x}} - \nabla \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^T] \cdot \mathbf{h} + O(\|h\|^2) \quad \text{con} \quad \nabla \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{v}|_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

de la ecuación (1.11), es fácil identificar que el segundo término en corchetes como el producto cruz de \mathbf{w} y \mathbf{h}

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v}_x + \nabla\mathbf{v}_x^T] \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{2}\mathbf{h} \times \vec{\omega} \quad (1.12)$$

Es decir la velocidad en el punto $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ es la misma que en \mathbf{x} salvo por dos términos, el primero es un tensor simétrico (tiene valores propios reales) con tres direcciones principales en las cuales el fluido tiende a moverse de modo que esta contribución de la velocidad tiende a “cuadrar” el volumen; mientras que la otra parte es una velocidad debida a la rotación del elemento de volumen con una velocidad angular local Ω dada por:

$$\Omega = \frac{\vec{\omega}}{2}$$

Decimos que *la vorticidad es una medida de la velocidad angular en un punto del fluido.*

La vorticidad es otra forma de encontrar el campo de velocidades, ya que conociendo esta en todo el dominio, la velocidad puede determinarse con una integración (posteriormente ahondaremos en esto). En algunos problemas resulta conveniente escribir la ecuación de flujo ideal en términos de la vorticidad. Para hacer esto tomamos el rotacional de la ecuación (1.11)

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \vec{\omega} \right] = -\nabla \times \left[\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi \right]$$

Como el rotacional de un gradiente es cero, y el rotacional conmuta con la derivada parcial con respecto al tiempo conmutan tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

Usando la expresión $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ¹, el sumando que lleva el término de la divergencia de $\vec{\omega}$ es cero por ser este el rotacional de un vector:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \quad (1.13)$$

Si el fluido es barotrópico *i.e.* las curvas de nivel de la presión son paralelas a las de la densidad tendremos que el último término de la expresión (1.13) es cero.

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.14)$$

En la dinámica de fluidos así como en otras ramas de la física no relativista, la masa debe conservarse, es decir, si consideramos un volumen Ω fijo que no tiene fuentes ni sumideros (simplemente conexo) se debe cumplir que el cambio

¹ver ([9]).

en la masa contenida allí es originada por la entrada y salida de fluido en la frontera del volumen ($\partial\Omega$).

Si la masa contenida dentro de Ω la denotamos por M y al flujo de masa en las fronteras por F veremos que:

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dV \quad \text{y} \quad F = - \iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{con } \mathbf{n} \text{ normal exterior}$$

Usando el teorema de la divergencia en la expresión para F , y como el cambio en la masa está dado por dM/dt , igualamos estas partes.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dV = - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

Como el volumen es fijo tendemos que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dV = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

De las expresiones anteriores se tiene:

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Como el volumen es fijo pero arbitrario, concluimos que el integrando es cero.

Así la ecuación de conservación de masa se escribe como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.15)$$

Un caso particular de esta ecuación es cuando decimos que el fluido es incompresible (la densidad es constante en todo el volumen) allí la expresión (1.15) se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.16)$$

Abriendo la ecuación (1.15), podemos despejar el término de $\nabla \cdot \mathbf{v}$ y sustituirlo en (1.14).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \mathbf{v} \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\vec{\omega}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\vec{\omega}}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) \end{aligned}$$

Multiplicando toda la ecuación anterior por $1/\rho$ tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho)$$

$$= \frac{1}{\rho}(\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \vec{\omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \quad \text{por (1.8)}$$

Juntando los dos términos de las derivadas totales con respecto al tiempo la expresión se reduce a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

O su forma más compacta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1.17)$$

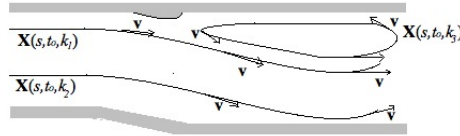
Sabemos que si el gradiente de la velocidad es Lipschitz continua, la solución para el cociente $\vec{\omega}/\rho$ existe y es única dadas las condiciones iniciales. Entonces si en el medio conocemos la velocidad del fluido, la ecuación anterior nos dice que la evolución temporal del cociente de vorticidad entre la densidad depende del valor que tiene en ese momento, en otras palabras las partículas de fluido que no tengan vorticidad continuarán así a lo largo de toda la trayectoria que sigan. Entonces, decimos que la vorticidad está confinada a una región en el espacio que evoluciona con el tiempo pero se constituye de las mismas partículas de fluido que originalmente formaban la región de vorticidad tiempo atrás. De modo que dicha frontera de la región resulta importante, pues separa al fluido con vorticidad del fluido sin vorticidad.

Otro concepto importante que usaremos es el de *líneas de corriente* a las curvas $\mathbf{X}(s, t)$ que para un tiempo t_0 fijo, la tangente a dicha curva es paralela al campo de velocidades en ese tiempo t_0 , en otras palabras $\mathbf{X}(s, t_0)$ es línea de corriente si cumple:

$$\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{X}}{ds} = 0 \quad (1.18)$$

Definimos $\Psi(x, y, z, t)$ *función de corriente* si sus curvas de nivel a un tiempo t_0 fijo están formadas por familias de líneas de corriente; Ψ debe estar definida en todo el dominio donde \mathbf{v} lo está, por ello decimos que:

$$\Psi(x, y, z, t_0) = cte \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(s, t_0, k) \quad \text{es línea de corriente para } k \text{ fijo}$$



Derivando esta expresión con respecto a s ó k tendremos que se debe cumplir que

$$\Psi_x dx + \Psi_y dy + \Psi_z dz = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \Psi \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (1.19)$$

En algunos casos esta función está íntimamente ligada con la velocidad, por ejemplo en flujo potencial en dos dimensiones, o en flujos simétricos respecto a un eje.

Estos son los conceptos básicos de dinámica de fluidos que usaremos en el desarrollo de este trabajo, se recomienda al lector revisar las referencias para profundizar en los temas señalados.

Bibliografía

- [1] GUYON E. *Physical hydrodynamics* Oxford, 2001, New York USA.
- [2] BATCHELOR G. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. (2002). New York USA.
- [3] LANDAU L. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, sexta edición. (1987). New York USA.
- [4] LAMB H. *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, sexta edición. (1997). New York USA.
- [5] CHORIN J. y MARSDEN J. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, tercera edición, 1993, New York USA.
- [6] CURRIE I. *Fundamental Mechanics of Fluids*, Mc Graw-Hill, tercera edición. (1993). New York USA.
- [7] SAFFMAN P. *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, primera edición. (1993). New York USA.
- [8] FUNG Y. *A First Course in Continuum Mechanics* Prentice Hall. tercera edición, (1994) New Jersey.
- [9] GRIFFITHS D. *Introduction to electrodynamics* Prentice Hall. tercera edición, (1999) New Jersey.
- [10] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132**
- [11] FRAENKEL L. E. *On steady vortex rings of small cross section in an ideal fluid* Proc. Roy. Soc. Lond. A. (1970) Vol. **316**, pp 29-62
- [12] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [13] HILL M. *On a Spherical Vortex* Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, Vol. **185**, (1894), pp. 213- 245.
- [14] POZRIKIDIS C. *The nonlinear instability of Hill's vortex* J. Fluid Mech. Vol. **168**, (1986), pp. 337-367.

Capítulo 2

Ecuación de Laplace

Comunmente en algunas ramas de la física, nos encontramos con ecuaciones en derivadas parciales, en su mayoría, son no lineales. Sin embargo en casos muy ideales se puede reducir el problema a uno que sí sea lineal, y como se ve en la teoría de ecuaciones parciales [6], todas las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes se pueden llevar medio transformaciones a la ecuación de onda, la ecuación de Laplace, o la de calor. En esta sección revisaremos la segunda por ser de suma importancia para continuar con este análisis.

La ecuación de Laplace es muy utilizada en la física. En la rama que es más conocida es electromagnetismo, pues es la ecuación que satisfacen los potenciales escalar y vectorial. Otra rama en la que es usada es la elasticidad, modelando la deformación de una membrana elástica (con ciertas condiciones a la frontera) cuando se le aplica una fuerza. La aplicación de esta ecuación que nos interesa es a la dinámica de fluidos.

Por el momento, en este capítulo no haremos relación con esta rama de la física, y nos dedicaremos sólo al tratamiento matemático de ella, dejando pendiente la relación con los fluidos para el siguiente capítulo.

La ecuación a estudiar es la siguiente:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y acotado y $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$, definimos

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

con x, y, z coordenadas cartesianas. Llamamos ecuación de Laplace a:

$$\begin{cases} \Delta u = h(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f(\mathbf{x}) & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

donde α, β son constantes y $f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$ son funciones conocidas en Ω y $\partial\Omega$.

Decimos que es *el problema de Dirichlet* si $\beta = 0$, *de Neumann* si $\alpha = 0$ o *de Robin* si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Para continuar, daremos un repaso a las identidades de Green.

Supongamos $u, v \in C^2(\Omega)$ y calculemos $\nabla \cdot (u\nabla v)$.

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \quad \rightarrow \quad u\Delta v = \nabla \cdot (u\nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v$$

Integrando sobre el dominio Ω y usando el teorema de Gauss llegamos a:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} u\Delta v \, dV &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla v) \, dV - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dV \\ \Rightarrow \iiint_{\Omega} u\Delta v \, dV &= \iint_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \mathbf{n} \, dS - \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dV \end{aligned} \quad (2.2)$$

con \mathbf{n} normal exterior a la frontera. La ecuación anterior es *la primera identidad de Green*.

Si en la expresión (2.2) intercambiamos u por v y la que resulte la restamos a la original obtendremos *la segunda identidad de Green*:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dV = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \quad (2.3)$$

Recordemos que $\nabla v \cdot \mathbf{n}$ es la derivada de v en la dirección \mathbf{n} . Para continuar, definamos que es una solución fundamental.

Decimos que $K(x, y)$ es solución fundamental a la ecuación de Laplace como en 2.1 si dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ se cumple:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 && \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ \iiint_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} &= \phi(\mathbf{y}) \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si buscamos soluciones a la ecuación de Laplace homogénea tal que sea invariante bajo rotaciones pedimos

$$u = u(r) \quad \text{con} \quad r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Con u de la forma señalada, aplicamos el operador de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u' \frac{x_i}{r} \right) = \sum_{i=1}^n u'' \left(\frac{x_i}{r} \right)^2 + u' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right)$$

$$\Delta u = u'' + \frac{(n-1)}{r} u' = 0$$

Resolviendo para u' tenemos:

$$u' = cr^{1-n} \tag{2.5}$$

Integrando esta expresión:

$$\begin{aligned} c \log r + b & \quad \text{si } n = 2 \\ \frac{c}{2-n} r^{2-n} + b & \quad \text{si } n > 2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde c, b son constantes por determinar.

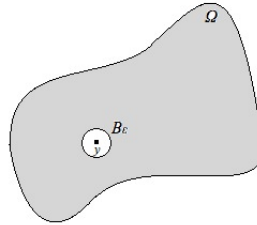
Notemos que ambas son soluciones de la ecuación (2.1) si $r > 0$, mientras que para $r = 0$ estas divergen, entonces haciendo el cambio $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, y una elección adecuada de las constantes c, b las expresiones anteriores pueden ser soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace.

Tomemos $b \equiv 0$.

Para encontrar el valor de c , usaremos la ecuación (2.3) con

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} cr'^{(1-n)} dr' \quad \mathbf{y} \quad v(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.7}$$

Usaremos como región de integración a $\Omega_\epsilon \equiv \Omega - B_\epsilon(\mathbf{y})$ donde $B_\epsilon(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$



$$\iiint_{\Omega_\epsilon} u \Delta_x v dV_x - \iiint_{\Omega_\epsilon} v \Delta_x u dV_x = \iint_{\partial \Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

Como u es solución de la ecuación homogénea de Laplace para $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, la segunda integral es cero, pues hemos quitado a Ω la bola que contiene a \mathbf{y} ; como $\partial \Omega_\epsilon = \partial \Omega \cup \partial B_\epsilon$ abrimos la integral de superficie en ambas partes. Ahora bien, como B_ϵ es una esfera, la perpendicular a la superficie es paralela al vector radial.

Pero queremos la normal exterior en $\partial\Omega_\epsilon$ es decir ella es radial y apunta hacia \mathbf{y} .

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega_\epsilon} u \Delta_x v dV_x = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS$$

Analicemos los sumandos sobre la frontera de la bola de radio ϵ y veamos que:

$$\iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} u \frac{\partial v}{\partial r} dS = \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} \int_\epsilon^{\epsilon} c r'^{(1-n)} dr' \frac{\partial v}{\partial r} dS$$

Tomando valores absolutos a la expresión y recordando que $\|\mathbf{n}\| = 1$, se cumple la siguiente relación:

$$\partial v / \partial n = \nabla v \cdot \mathbf{n} \leq \|\nabla v\| \quad \text{por el teorema de Pitágoras.}$$

tendremos

$$\left| \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} u \frac{\partial v}{\partial r} dS \right| \leq |u(\epsilon)| \epsilon^{n-1} w_n \sup_{B_\epsilon(\mathbf{x})} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \leq |u(\epsilon)| \epsilon^{n-1} w_n \sup_{B_\epsilon(\mathbf{x})} \|\nabla v\|$$

con w_n superficie de la esfera unitaria de dimensión n . Ahora analicemos el término $|u(\epsilon)| \epsilon^{n-1}$

$$|u(\epsilon)| \epsilon^{n-1} = |c| \left| \int_\epsilon^\epsilon \left(\frac{r'}{\epsilon} \right)^{(1-n)} dr' \right| = |c| \epsilon \left| \int^1 v^{(1-n)} dv \right| \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\therefore \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} u \frac{\partial v}{\partial r} dS \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0$$

Mientras que en la otra integral tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial r} dS &= \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} v c \epsilon^{1-n} dS \\ &= c w_n \frac{1}{w_n \epsilon^{n-1}} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\epsilon} v dS \rightarrow c w_n v(\mathbf{y}) \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

En el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$

$$\iiint_{\Omega} u \Delta_x v dV_x + \iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = c w_n v(\mathbf{y}) \quad (2.8)$$

Usado que $v \in C_0^\infty$:

$$c w_n v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} u \Delta_x v dV_x \quad (2.9)$$

Así u es solución fundamental si $c = 1/w_n$.

Si $v \notin C_0^\infty$, pero $v \in C_0^2$ con $\Delta v = 0$ en Ω , veremos que v está completamente determinado por sus valores en la frontera.

$$v(\mathbf{y}) = \iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (2.10)$$

Otro punto importante es que la solución fundamental *no es única*, ya que si $K(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ lo es también $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con $\Delta_x W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Para ver lo anterior tomemos Ω abierto en \mathbb{R}^n y $v \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces se tiene:

$$\Delta_x [K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + W(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \Delta_x K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Delta_x W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta_x K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{si } x \neq y$$

$$\iiint_{\Omega} (K + W) \Delta_x v dV = v(\mathbf{y}) + \iiint_{\Omega} W \Delta_x v dV$$

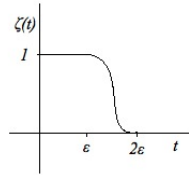
Usando la segunda identidad de Green en la integral restante veremos que:

$$\iiint_{\Omega} (K+W) \Delta_x v dV = v(\mathbf{y}) + \iiint_{\Omega} v \Delta_x W dV + \iint_{\partial\Omega} \left(W \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial W}{\partial n} \right) dS = v(\mathbf{y})$$

Lo anterior es cierto porque v es función de prueba y W es armónica en \mathbf{x} .

Si tenemos el (2.1) con $h(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ podemos encontrar una solución particular a dicha ecuación. Recordemos que para llegar a la expresión (2.9) necesitamos $v \in C_0^\infty(\Omega)$ es decir, esta función es muy regular, por ello debemos encontrar una forma de “suavizar” y hacer que fuera de Ω , $h(\mathbf{x})$ y todas sus derivadas vayan a cero. Para esto, definamos una función auxiliar ζ con las siguientes propiedades:

$$\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \zeta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 2\epsilon \end{cases} \quad \text{y } \zeta \in C(\Omega)^\infty[0, \infty)$$



Definiendo $h(\mathbf{x}) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - \Omega$, y usando $h(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) + (1 - \zeta(\mathbf{x}))h(\mathbf{x})$ y $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ solución fundamental en (2.9) y sea

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h(\mathbf{x}) dV_x = \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\zeta(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) + (1 - \zeta(\mathbf{x}))h(\mathbf{x})] dV_x$$

Notemos que la función ζh es de soporte compacto en Ω al igual que todas sus derivadas, y $(1 - \zeta)h \equiv 0$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$.

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV + \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) dV_x$$

Aplicemos a esta expresión el operador laplaciano y recordemos que la integral sobre Ω la podemos extender a todo \mathbb{R}^n . Para la primer integral tendremos:

$$\Delta_y \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV_x = \Delta_y \iiint_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV_x$$

Como u es una función que depende del escalar $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ pero no de los vectores de forma independiente y la integral es sobre todo el espacio, podemos hacer el cambio de variable $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$, así la integral resultante es:

$$\begin{aligned} \Delta_y \iiint_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV_x &= \Delta_y \iiint_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{z}) \zeta(\mathbf{y} + \mathbf{z}) h(\mathbf{y} + \mathbf{z}) dV_z \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{z}) \Delta_y [\zeta(\mathbf{y} + \mathbf{z}) h(\mathbf{y} + \mathbf{z})] dV_z \end{aligned}$$

Si regresamos a la variable \mathbf{x} llegaremos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta_y \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV_x &= \iiint_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_x [\zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})] dV_x \\ &= \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_x [\zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})] dV_x \end{aligned}$$

Debido a que $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es solución fundamental concluimos:

$$\Delta_y \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \zeta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) dV = \zeta(\mathbf{y}) h(\mathbf{y}) = h(\mathbf{y}).$$

Para el segundo sumando de $\Delta_y v(\mathbf{y})$, existe el término $[1 - \zeta]$ que se hace idénticamente cero cuando estamos dentro de la bola de radio ϵ centrada en \mathbf{y} . Con esto, la parte de la región de integración que contribuye es $\Omega - B_\epsilon(\mathbf{y})$ así:

$$\begin{aligned} \Delta_y \iiint_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) dV_x &= \Delta_y \iiint_{\Omega - B_\epsilon} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) dV_x \\ &= \iiint_{\Omega - B_\epsilon} [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) \Delta_y u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \end{aligned}$$

Como el laplaciano esta formado sólo por términos de la forma $\partial^2 / \partial x_i^2$ y $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(r)$ con $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Por la definición de r sabemos que $\partial/\partial x_i = -\partial/\partial y_i$ entonces

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial r}{\partial y_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y_i^2} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i^2}$$

$$\therefore \Delta_y u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta_x u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Entonces

$$\iiint_{\Omega - B_\epsilon} [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) \Delta_y u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x = \iiint_{\Omega - B_\epsilon} [1 - \zeta(\mathbf{x})] h(\mathbf{x}) \Delta_x u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x$$

Como u es solución fundamental $\Delta_x u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0$ en todo $\Omega - B_\epsilon$ el segundo sumando se anula. Así concluimos que:

$$\Delta_y u(\mathbf{y}) = \zeta(\mathbf{y}) h(\mathbf{y}) = h(\mathbf{y})$$

Esta solución se obtuvo por medio de una función de soporte compacto en Ω , es decir, al extender $h(\mathbf{x}) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - \Omega$ estamos diciendo que $h(\mathbf{x}) = 0$ en $\partial\Omega$.

Por lo tanto

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} h(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \quad (2.11)$$

es solución particular a la ecuación

$$\Delta v = h(\mathbf{y}) \quad \text{en } \Omega \quad (2.12)$$

si $h(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega)$ y $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ solución fundamental.

Se puede ver que no es necesario que $h(\mathbf{y}) \in C^2(\Omega)$, esta demostración la haremos a continuación para completar este capítulo, además será de gran utilidad más adelante.

Pensemos en $v(\mathbf{y})$ como en (2.11), consideremos la sucesión de funciones $v(\epsilon, \mathbf{y})$ y veamos que la aproximación de la última es uniforme.

Para hacer esto, tomemos una función auxiliar $\eta(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sea $C^\infty(\mathbb{R})$ y este definida como:

$$\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases} \quad 0 \leq \eta' \leq 2 \quad (2.13)$$

Notemos que:

$$v(\epsilon, \mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} h(\mathbf{x}) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right) dV_x \quad (2.14)$$

es una función regular y suave en todo punto, pues el núcleo ηu lo es. Mostraremos que en Ω , la sucesión $v(\epsilon, \mathbf{y})$ converge uniformemente a $v(\mathbf{y})$ si $h(\mathbf{y}) \in C^1(\Omega)$ y acotada

$$|v(y) - v(\epsilon, \mathbf{y})| = \left| \iiint_{\Omega} h(x) u(\|x - y\|) \left(1 - \eta \left(\frac{\|x - y\|}{\epsilon}\right)\right) dV_x \right| \quad M = \sup_{x \in \Omega} |h(x)|$$

Como $v(\mathbf{y})$ y $v(\epsilon, \mathbf{y})$ sólo difieren en la bola de radio 2ϵ , la integral sobre Ω se reduce a ser la integral de $B_{2\epsilon}(\mathbf{y})$. Notemos también que la diferencia $0 \leq (1 - \eta) \leq 1$ pues dentro de la bola $0 \leq \eta \leq 1$.

Entonces

$$|v(y) - v(\epsilon, \mathbf{y})| \leq M \iiint_{B_{2\epsilon}(y)} |u(\|x - y\|)| dV_n$$

Dependiendo de la dimensión del espacio en el cuál esté contenida Ω (es decir el valor de n) tendremos una cota distinta.

Si $n > 2$, podemos usar la expresión para la solución fundamental y sustituirla en la ecuación anterior. Así encontramos

$$|v(y) - v(\epsilon, \mathbf{y})| \leq M \int_0^{2\epsilon} \frac{r}{n-2} dr = \frac{2M}{n-2} \epsilon^2$$

Con $n = 2$ usaremos la expresión correspondiente para la solución fundamental y obtendremos

$$|v(y) - v(\epsilon, \mathbf{y})| \leq M \int_0^{2\epsilon} r |\log r| dr = \frac{Mr^2}{4} (1 - 2 \log r) \Big|_0^{2\epsilon}$$

Notemos que en esta segunda cota al hacer ϵ tender a cero, la cota superior también tiende a cero solo que lo hace en forma logarítmica, pero aun así la aproximación sigue siendo uniforme.

Diferenciando v se tiene

$$v_j(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} h(\mathbf{x}) dV_x \quad (2.15)$$

v_j esta bien definida pues $\partial u / \partial y_j$ es $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{1-n})$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow 0$, es decir, es integrable.

Ahora bien si tomemos la derivada $\partial v(\epsilon, \mathbf{y}) / \partial y_j$ y restemosla a la expresión anterior:

$$v_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right)\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \right] h(\mathbf{x}) dV_x$$

Hagamos el cambio de variable $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\begin{aligned} v_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} &= \iiint_{\Omega - \mathbf{y}} \frac{-z_j}{\|\mathbf{z}\|} \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{z}\|} \left[\left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u(\|\mathbf{z}\|) \right] h(\mathbf{z} + \mathbf{y}) dV_z \\ &= \iiint_{\Omega - \mathbf{y}} \frac{z_j}{\|\mathbf{z}\|} \left[\frac{\eta'}{\epsilon} u(\|\mathbf{z}\|) - \left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u'(\|\mathbf{z}\|) \right] h(\mathbf{z} + \mathbf{y}) dV_z \end{aligned}$$

Como $\eta = 1$ para $\|\mathbf{z}\| \geq 2\epsilon$ y $\eta' = 0$ para $\|\mathbf{z}\| > 2\epsilon$ la integral sobre el complemento de la bola de radio 2ϵ con centro en \mathbf{y} es cero, reduciéndose a:

$$v_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} = \iiint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \frac{z_j}{\|\mathbf{z}\|} \left[\frac{\eta'}{\epsilon} u(\|\mathbf{z}\|) - \left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u'(\|\mathbf{z}\|) \right] h(\mathbf{z} + \mathbf{y}) dV_z$$

Vemos que podemos acotar la diferencia para $n > 2$

$$\left| v_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq M \iiint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \left(\frac{2|u(\|\mathbf{z}\|)|}{\epsilon} + |u'(\|\mathbf{z}\|)| \right) dV_z \leq M(4+2)\epsilon = 6M\epsilon$$

Esto último es gracias a que para todo $n \geq 1$ se cumple

$$u'(\|\mathbf{z}\|) = \frac{1}{w_n} r^{1-n} \quad \rightarrow \quad \iiint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} u' dV_z = 2\epsilon$$

Usando esto, tendremos una cota para el caso $n = 2$

$$\left| v_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq M \iiint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \left(\frac{2|u(\|\mathbf{z}\|)|}{\epsilon} + |u'(\|\mathbf{z}\|)| \right) dV_z = \frac{Mr^2}{2\epsilon} (1 - 2 \log r) \Big|_0^{2\epsilon} + 2\epsilon$$

Así la aproximación es uniforme. Decimos que $v \in C^1(\Omega)$ con $\partial v / \partial y_j = v_j$.

Como las derivadas con respecto a x_j se pueden cambiar por derivadas respecto a $-y_j$ tendremos:

$$v_j(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x = - \iiint_{\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial x_j} dV_x$$

Pensamos en el vector $\mathbf{L} \in \Omega$ definido por:

$$\mathbf{L} = (l_1, l_2, l_3) \text{ con } l_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ h(\mathbf{x})(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Con ayuda de este vector, y como la integral es sobre una región con frontera regular, podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial x_j} dV_x &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - \frac{\partial}{\partial x_j} [h(\mathbf{x})u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)] dV_x \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - \nabla_x \cdot \mathbf{L} dV_x \end{aligned}$$

$$\therefore v_j(\mathbf{y}) = - \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x})u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)n_j dS_x + \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x$$

Con n_j la componente j -ésima del vector normal exterior a $\partial\Omega$.

Para continuar y ver que efectivamente $v(\mathbf{y})$ es dos veces diferenciable y solución a la ecuación de Laplace no homogénea, usaremos de nuevo otra sucesión de funciones para aproximar uniformemente a v_j :

$$\begin{aligned} v_j(\epsilon, \mathbf{y}) &= - \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x})\eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)n_j dS_x \\ &\quad + \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \end{aligned}$$

Se puede ver que esta función es regular en el origen y está bien definida.

$$\begin{aligned} |v_j(\mathbf{y}) - v_j(\epsilon, \mathbf{y})| &\leq \left| \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}) \left(1 - \eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right)\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)n_j dS_x \right| \\ &\quad + \left| \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left(1 - \eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right)\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \right| \end{aligned}$$

Supongamos que tomamos ϵ suficientemente pequeño para que $\partial\Omega \cap \partial B_{2\epsilon}(\mathbf{y}) = \emptyset$, así la integral sobre la frontera se anula, dando como resultado:

$$|v_j(\mathbf{y}) - v_j(\epsilon, \mathbf{y})| \leq \left| \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left(1 - \eta\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon}\right)\right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \right|$$

Si

$$M_j = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

podemos ver que si $n > 2$:

$$|v_j(\mathbf{y}) - v_j(\epsilon, \mathbf{y})| \leq M_j \iiint_{\Omega} |u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)| dV_x \leq M_j \int_0^{2\epsilon} \frac{r}{n-2} dr = \frac{2M_j}{n-2} \epsilon^2$$

Mientras que en $n = 2$ tenemos:

$$|v_j(\mathbf{y}) - v_j(\epsilon, \mathbf{y})| \leq M_j \iiint_{\Omega} |u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)| dV_x \leq M_j \int_0^{2\epsilon} r |\log r| dr \left. \frac{M_j r^2}{4} (1 - 2 \log r) \right|_0^{2\epsilon}$$

Vemos que la aproximación es uniforme.

De nueva cuenta volvemos a definir otra función

$$v_{jj} = - \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x + \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x \quad (2.16)$$

y veamos que la derivada $\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})/\partial y_j$ aproxima uniformemente a v_{jj} . Al igual que arriba supondremos ϵ lo suficientemente pequeño para que la intersección de la frontera del dominio con la frontera de la bola de radio 2ϵ sea vacía tendremos:

$$\left| v_{jj} - \frac{\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq \left| \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon} \right) \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \right] dV_x \right|$$

haciendo el cambio $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$ vemos

$$\left| v_{jj}(\mathbf{y}) - \frac{\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq \left| \iiint_{\Omega - \mathbf{y}} \frac{-z_j}{\|\mathbf{z}\|} \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{z}\|} \left[\left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u(\|\mathbf{z}\|) \right] \frac{\partial h(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{\partial z_j} dV_z \right|$$

$$\leq \left| \iiint_{\Omega - \mathbf{y}} \frac{z_j}{\|\mathbf{z}\|} \left[\frac{\eta'}{\epsilon} u(\|\mathbf{z}\|) - \left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u'(\|\mathbf{z}\|) \right] \frac{\partial h(\mathbf{z} + \mathbf{y})}{\partial z_j} dV_z \right|$$

Como $\eta = 1$ para $\|\mathbf{z}\| \geq 2\epsilon$ y $\eta' = 0$ para $\|\mathbf{z}\| > 2\epsilon$, la integral sobre el complemento de la bola de radio 2ϵ con centro en \mathbf{y} es cero.

$$\left| v_{jj}(\mathbf{y}) - \frac{\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| = M_j \iiint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \frac{z_j}{\|\mathbf{z}\|} \left[\frac{\eta'}{\epsilon} u(\|\mathbf{z}\|) - \left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{z}\|}{\epsilon} \right) \right) u'(\|\mathbf{z}\|) \right] dV_z$$

Entonces resulta para $n > 2$

$$\left| v_{jj}(\mathbf{y}) - \frac{\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq M \iint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \left(\frac{2|u(\|\mathbf{z}\|)|}{\epsilon} + |u'(\|\mathbf{z}\|)| \right) dV_z \leq M(4+2)\epsilon = 6M\epsilon$$

Mientras que para $n = 2$ se obtiene:

$$\left| v_{jj}(\mathbf{y}) - \frac{\partial v_j(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right| \leq M \iint_{\|\mathbf{z}\| \leq 2\epsilon} \left(\frac{2|u(\|\mathbf{z}\|)|}{\epsilon} + |u'(\|\mathbf{z}\|)| \right) dV_z \leq \frac{Mr^2}{2\epsilon} (1 - 2 \log r) \Big|_0^{2\epsilon} + 2\epsilon$$

De nuevo la aproximación es uniforme.

Decimos que $v_j(\mathbf{y}) \in C^1(\Omega)$ con $\partial v_j/\partial y_j = v_{jj}$.¹

¹Apesar que la demostración solo se hizo para el caso de índices de derivación repetidos, es la misma para el caso de índices diferentes.

Usando (2.16) podemos trabajar un poco esta expresión. Como $\partial h(\mathbf{y})/\partial x_j = 0$ se ve que:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x = \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x$$

Con el teorema de la divergencia y un vector similar a \mathbf{L} se puede ver

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x = \\ & \iint_{\partial\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x - \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x \\ & = \iint_{\partial\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x + \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \end{aligned}$$

Por lo tanto una expresión alterna a (2.16) para la segunda derivada es:

$$v_{jj}(\mathbf{y}) = -h(\mathbf{y}) \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x + \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \quad (2.17)$$

Parece que no cualquier $h(\mathbf{x})$ hace que la segunda integral exista, para ello analicemos un poco este término.

Notemos que para que sea integrable es necesario hacer que la singularidad de u en $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$ se remueva, lo cual se logra pidiendo que:

$$[h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} = O(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\mu-n}) \quad \text{con } \mu > 0$$

Observemos que la segunda derivada se puede acotar, para ello encontremos su valor explícitamente.

$$\frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} = -\frac{1}{w_n} r^{1-n} \frac{x_j - y_j}{r} \quad \text{con } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Derivando una segunda vez:

$$\frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} = +\frac{1}{w_n} r^{-n} - \frac{1}{w_n} n r^{-n} \frac{(x_j - y_j)^2}{r^2}, \quad \left\| \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} \right\| \leq \frac{1}{w_n} (1+n) r^{-n}$$

Entonces en la integración tenemos:

$$\left\| \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \right\| \leq \iiint_{\Omega} \|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\| \frac{1}{w_n} (1+n) r^{-n} dV_x$$

Cambiando la integración a coordenadas esféricas centradas en \mathbf{y} tenemos

$$\left\| \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \right\| \leq \iiint_{\Omega} \|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\| \frac{1}{w_n} (1+n) r^{-1} dr dw_n$$

De la teoría de cálculo sabemos que para que la expresión anterior sea integrable es necesario que:

$$|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\mu$$

con μ, c constantes y $0 < \mu$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

La importancia de esta última expresión es que no contiene derivadas en h , lo que motiva a buscar la clase de funciones que permiten a v ser dos veces diferenciable sin que h sea diferenciable. Esta clase de funciones son las llamadas *Hölder continua*. Es decir para cualquier par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ se cumple:

$$|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\mu$$

con μ, c constantes y $0 < \mu \leq 1$.²

Con (2.17) es fácil ver que v es solución a la ecuación de Laplace no homogénea pues tomando el laplaciano de v resulta:

$$\Delta_y v = -h(\mathbf{y}) \iint_{\partial\Omega} \nabla_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \cdot \mathbf{n} dS_x + \iiint_{\Omega} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \Delta_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x$$

Como $\Delta_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, la segunda integral en la expresión anterior se anula. Mientras que la primera integral podemos pasarla a una de volumen con el teorema de la divergencia.

$$\begin{aligned} \Delta_y v &= -h(\mathbf{y}) \iint_{\partial\Omega} \nabla_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \cdot \mathbf{n} dS_x = -h(\mathbf{y}) \iiint_{\Omega} \nabla_x \cdot \nabla_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \\ &= h(\mathbf{y}) \iiint_{\Omega} \nabla_y \cdot \nabla_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x = h(\mathbf{y}) \iiint_{\Omega} \Delta_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x = h(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Con esto terminamos la demostración.

Ahora bien, debido a que la solución fundamental no es única pensemos en que existe $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que aparte de cumplir las condiciones (2.4) satisface:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ e } \mathbf{y} \in \Omega \quad (2.18)$$

Si tomamos el problema:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = f(\mathbf{x}) & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Resultará por la expresión (2.8):

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} G \Delta_x v dV_x + \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial v}{\partial n} dS = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

²Si el lector se interesa por la demostración antes mencionada se le invita a revisar el libro de *Courant & Hilbert Vol.II* [1].

Para juntar esta solución con la del problema (2.12) pediremos $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con W armónica en la primera entrada.

Como $G = 0$ en $\partial\Omega$ vemos que las condiciones sobre W serán:

$$\begin{cases} \Delta_x W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 & \text{en } \Omega \\ W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

Notemos que W es única por ser solución de la ecuación de Laplace homogénea con condiciones de Dirichlet, porque si suponemos que existen dos soluciones W_1 y W_2 de (2.20), la resta $W = W_1 - W_2$ también es solución de esta con condición de Dirichlet $W = 0 \in \partial\Omega$. Usando la primera identidad de Green con $u = v = w$ tenemos:

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla_x W\|^2 dV_x = 0$$

Entonces $\nabla_x W = 0$, implicando que W es constante como función de \mathbf{x} , en particular tiene el valor que le corresponde cuando $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, en otras palabras $W = 0$ en Ω , por lo tanto $w_1 = w_2$, por eso la solución es única. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se conoce como *la función de Green* para la ecuación (2.19).

Se puede mostrar que

$$\iiint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h(\mathbf{x}) dV_x$$

Es solución al problema.³

$$\begin{cases} \Delta v = h(\mathbf{y}) & \text{e } \Omega \\ v(\mathbf{y}) = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Con esto concluimos que:

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\Omega} G h(\mathbf{y}) dV_x + \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (2.21)$$

Es la solución al sistema:

$$\begin{cases} \Delta v = h(\mathbf{y}) & \text{en } \Omega \\ v(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f(\mathbf{y})$ continua, $h(\mathbf{y}) \in C^2(\Omega)$ y $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ función de Green como en (2.18).

Adicionalmente, se puede ver que para que exista la solución al problema anterior no es necesario que h sea dos veces diferenciable sino basta con que sea $C^1(\Omega)$ ⁴ o mejor aun Hölder continua.⁵

³Ver *Courant & Hilbert Vol. II* página 263 [1].

⁴La demostración es idéntica a la realizada líneas arriba en el caso de la solución fundamental.

⁵Ver *Courant & Hilbert Vol. II* [1].

2.1. Ecuación de Laplace en dominios no acotados

Si el dominio no es acotado, (en particular \mathbb{R}^n), no mucho de lo hecho es de utilidad, pues gran parte de las demostraciones se basaron en la aplicación de las identidades de Green, válidas sólo para dominios acotados con frontera suficientemente regular para aplicar el teorema de la divergencia.

Para el caso de $n = 2$, con ayuda del teorema de mapeo conforme se puede encontrar solución a problemas en dominios abiertos no acotados y simplemente conexos distintos a \mathbb{R}^2 ; pues en estos espacios el teorema mencionado dice que existe una función 1-1 y sobre que mapea el dominio en estudio a la bola unitaria, mandando el interior y la frontera de una en el interior y la frontera de la otra respectivamente.

Para estudiar el caso no acotado en \mathbb{R}^3 , primero debemos estudiar que pasa con la integral de potencial en dicho dominio, es decir debemos ver si existe la solución a la ecuación (2.11) cuando Ω es reemplazado por \mathbb{R}^3 . Para ello, parece claro que deben existir condiciones sobre la función $h(\mathbf{x})$.

Consideremos dos subconjuntos más contenidos en el espacio anterior. Sea B_ρ, B_ϵ dos bolas abiertas de radios ρ, ϵ centradas en \mathbf{y} tal que $\epsilon < \rho$.

La integral sobre todo el dominio se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x &= \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x + \iiint_{B_\rho - B_\epsilon} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \\ &\quad + \iiint_{B_\epsilon} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \end{aligned}$$

En la parte anterior se observó que la singularidad de $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es removible así:

$$\iiint_{B_\epsilon} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0$$

Mientras que

$$\iiint_{B_\rho - B_\epsilon} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \rightarrow v_\rho(y) \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0$$

con $v_\rho(y)$ solución al problema (2.12), $\Omega = B_\rho$, $h(\mathbf{x}) \in C^1(B_\rho)$ y $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ solución fundamental dada en (2.7). Usando esto encontramos:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x - v_\rho(y) = \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x$$

Como

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x = \int_\rho^\infty \iint_{\partial B_{\rho'}(\mathbf{y})} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \rho'^2 d\rho'$$

Decimos que

$$\left| \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x - v_\rho(\mathbf{y}) \right| \leq c \int_\rho^\infty \max_{x \in \partial B_{\rho'}(\mathbf{y})} |h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \rho'^2 d\rho' \quad (2.22)$$

con c constante.

Nombremos $M(\rho, \mathbf{y})$ al máximo de $|h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ en la superficie de la bola de radio ρ y centro en \mathbf{y} .

Como

$$|u(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq \frac{c_1}{\rho'} \quad \text{con } c_1 = \text{cte}$$

pedimos adicionalmente (para asegurar la convergencia de la integral) que:

$$|h(\mathbf{x})| \leq \frac{c_2}{\rho'^{2+\gamma}} \quad \text{para } \|\mathbf{x}\| = \rho', \quad \gamma > 0$$

De este modo tendremos

$$M(\rho, \mathbf{y}) \leq \frac{k'}{\rho^{3+\gamma}} \quad \text{con } k' = \text{cte}$$

Sustituyendo la cota para M en (2.22) resultará:

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x - v_\rho(\mathbf{y}) \right| &\leq k \int_\rho^\infty \rho'^{-1-\gamma} d\rho' \quad k = \text{cte} \\ \Rightarrow \left| \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x - v_\rho(\mathbf{y}) \right| &\leq \frac{k}{\gamma} \rho^{-\gamma} \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\rho \rightarrow \infty$ vemos que la diferencia entre $v_\rho(\mathbf{y})$ y la integral de potencial sobre todo el espacio se hace arbitrariamente pequeña independientemente de \mathbf{y} .

Por esto, el siguiente resultado que nos interesa demostrar es:

Teorema 1. Dado $h(\mathbf{y}) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ con $h(\mathbf{y}) = O(\|\mathbf{y}\|^{-2-\gamma})$, $\gamma > 0$ y $|h(\mathbf{y})| \leq M$ en \mathbb{R}^3 la solución al sistema

$$\begin{cases} \Delta v = h(\mathbf{y}) & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ v(\mathbf{y}) \rightarrow 0 & \text{si } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.23)$$

es

$$v(\mathbf{y}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_x \quad (2.24)$$

Demostración. Para ver esto usaremos de nueva cuenta la función auxiliar η como en (2.13) y con ella definiremos como antes a la función $v(\epsilon, \mathbf{y})$ (ver (2.14)) cambiando Ω por \mathbb{R}^3 .

La función $v(\epsilon, \mathbf{y})$ esta bien definida pues es regular en cero y como en este caso $h(\mathbf{x})$ es $O(\|\mathbf{x}\|^{-2-\gamma})$ la integral converge para valores grandes de $\|\mathbf{x}\|$.

Sabemos que $v(\mathbf{y})$ y $v(\epsilon, \mathbf{y})$ son diferentes solo en la bola de radio 2ϵ centrada en \mathbf{y} , por lo tanto la demostración de la aproximación uniforme es análoga que en el caso de dominio abierto y acotado.

Al igual que en el caso acotado definimos $v_j(\mathbf{y})$, sólo que ahora el dominio de integración es todo \mathbb{R}^3 . Esta función está bien definida pues si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow 0$, $|v_j| \leq \text{cte } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; y si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow \infty$ $\partial u / \partial y_j$ es $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n+1})$ lo que hace que la integral exista para valores grandes de $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Para ver que $v(\mathbf{y}) \in C^1$ y su derivada es $v_j(\mathbf{y})$ usamos la derivada de $v(\epsilon, \mathbf{y})$ para aproximar a la función antes mencionada.

Notemos que los integrandos $v_j(\mathbf{y})$ y $\partial v(\epsilon, \mathbf{y}) / \partial y_j$, sólo difieren en $B_{2\epsilon}(\mathbf{y})$, por lo tanto, la demostración de la convergencia uniforme a $v_j(\mathbf{y})$ es análoga al caso acotado.

Concluimos que:

$$v_j = \iiint_{\mathbb{R}^3} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x \quad (2.25)$$

es la derivada de $v(\mathbf{y})$.

Tomemos (2.25) y partamos la integral en dos, una sobre una bola de radio ρ con centro en \mathbf{y} y otra sobre su complemento. En la primera integral podemos usar la expresión obtenida para $v(\mathbf{y})$ para el caso acotado; este procedimiento lo podemos hacer para ambas funciones v_j y $\partial v(\epsilon, \mathbf{y}) / \partial y_j$ de este modo resulta:

$$\begin{aligned}
v_j &= - \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) n_j dS_x \\
&\quad + \iiint_{B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x + \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x \\
\frac{v(\mathbf{y})}{y_j} &= - \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \eta \left(\frac{\|x - y\|}{\epsilon} \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) n_j dS_x \\
&\quad + \iiint_{B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \eta \left(\frac{\|x - y\|}{\epsilon} \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \\
&\quad + \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \eta \left(\frac{\|x - y\|}{\epsilon} \right) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x
\end{aligned} \tag{2.26}$$

con n_j la componente j -ésima del vector normal exterior a $\partial B_\rho(\mathbf{y})$. Ahora bien, si definimos otra función más como:

$$\begin{aligned}
v_{jj} &= - \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x \\
&\quad + \iiint_{B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} dV_x + \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \\
&= -h(\mathbf{y}) \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x \\
&\quad + \iiint_{B_\rho(\mathbf{y})} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \\
&\quad + \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x
\end{aligned} \tag{2.27}$$

La dos expresiones anteriores se deben a (2.16) y (2.17) respectivamente.

Usando la última expresión para v_{jj} podemos mostrar que:

$$v_{jj} = \frac{1}{3} h(\mathbf{y}) + \iiint_{\mathbb{R}^3} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j^2} dV_x \tag{2.28}$$

Esto es cierto porque se puede ver que la integral sobre la frontera de la bola es independiente del valor de ρ pues:

$$-h(\mathbf{y}) \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x = -\frac{1}{4\pi} h(\mathbf{y}) \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \frac{(x_j - y_j)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} dS_x$$

Recordemos que n_j es la coordenada j -ésima del vector radial unitario. Si hacemos el cambio a esféricas con eje polar sobre el vector \mathbf{P} con p_i entradas cartesianas definidas por $p_i = \delta_{ij}(x_j - y_j)$, la integral será fácil de resolver:

$$-h(\mathbf{y}) \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_j} n_j dS_x = -\frac{1}{2} h(\mathbf{y}) \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{h(\mathbf{y})}{3}$$

Si hacemos $\rho \rightarrow \infty$ tendremos:

$$\left| \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_i^2} dV_x \right| \leq c_3 \left| \int_\rho^\infty \frac{1}{\rho'^{3+\gamma}} d\rho' \right| \leq \frac{c_3}{2-\gamma} \rho^{2-\gamma} \rightarrow 0$$

Observemos que (2.27) está bien definida al tomar $\rho \rightarrow \infty$

Tomemos la derivada de $\partial v(\epsilon, \mathbf{y})/y_j$ con respecto a y_j .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_i^2} &= - \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon} \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \right] n_j dS_x + \\ &\quad \iiint_{B_\rho(\mathbf{y})} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon} \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \right] dV_x \\ &\quad + \iiint_{\mathbb{R}^3 - B_\rho(\mathbf{y})} h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon} \right) \frac{\partial u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\partial y_i} \right] dV_x \end{aligned}$$

y restemos a v_{jj} la última expresión obtenida. Al igual que antes, pensemos en que ρ es lo suficientemente grande para que $\partial B_{2\epsilon} \cap \partial B_\rho = \Phi$. Con esta suposición aseguramos que la integral sobre ∂B_ρ se anula y que en la integral sobre el complemento de B_ρ , $\eta = 1$ haciendo también cero a dicha integral.

Así resulta:

$$\left| v_{jj} - \frac{\partial^2 v(\epsilon, \mathbf{y})}{\partial y_i^2} \right| \leq \iiint_{B_{2\epsilon}} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left(1 - \eta \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\epsilon} \right) \right) u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \leq \text{cte } \epsilon^2$$

Con esto concluimos que $v(\mathbf{y}) \in C^2$ con $\partial v/\partial y_j = v_j$ y $\partial^2 v/\partial y_j^2 = v_{jj}$.

Ahora mostraremos usando (2.28) que $v(\mathbf{y})$ es solución a la ecuación de Laplace no homogénea.

Tomemos $\Delta_y v$.

$$\begin{aligned} \Delta_y v &= h(\mathbf{y}) + \iiint_{\mathbb{R}^3} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \Delta_y u(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dV_x \\ &= h(\mathbf{y}) + \iiint_{\mathbb{R}^3} [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_x = h(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

□

Como último mostraremos que esta solución es única. Para ello usaremos el principio del máximo.

Teorema 2. *Sea Ω abierto y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, y se cumple que $\Delta u \geq 0$ en Ω , entonces u alcanza su máximo en $\partial\Omega$.*

Demostración. Supongamos $\Delta u > 0$ en Ω . Si existiera un máximo para un punto $\mathbf{y}_m \in \Omega$ entonces debería cumplirse en ese punto que:

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{y}_m)}{\partial y_i^2} \leq 0 \quad \forall i \leq n$$

Con n la dimensión de Ω .

De este modo $\Delta u(\mathbf{y}_m) \leq 0$, lo cual es una contradicción.

Para el caso general, tomemos $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ con $v(\mathbf{y}) > 0$ y $\Delta v > 0$ por ejemplo $v(\mathbf{y}) = \exp(\|\mathbf{y}\|)$. es claro que:

$$\Delta(u + \epsilon v) = \Delta u + \epsilon \Delta v > 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con } \epsilon > 0$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} (u + \epsilon v) &= \max_{\partial\Omega} (u + \epsilon v) \\ \therefore \sup_{\Omega} u + \epsilon \inf_{\Omega} v &\leq \max_{\partial\Omega} u + \epsilon \max_{\partial\Omega} v \end{aligned}$$

Dado que esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, está demostrado el teorema. \square

Para demostrar la unicidad al problema, supongamos dos soluciones v_1, v_2 soluciones al problema 2.23 de modo que la resta $w = v_1 - v_2$ es solución a al mismo problema pero fijando $h(\mathbf{y}) = 0$.

Por la condición $w \rightarrow 0$ si $\|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty$ y la continuidad de la solución, sabemos que podemos hacer que $|w| < \epsilon$ si $\|\mathbf{y}\| > R$. Además usando el principio del máximo afirmamos que $|w| < \epsilon$ para $\|\mathbf{y}\| \leq R$. Esto es cierto para cada ϵ .

$$\therefore w = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

Bibliografía

- [1] COURANT R. y HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics Vol. 2*, Interscience Publishers, 1966, USA.
- [2] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [3] McOWEN R. *Partial differential equations: methods and applications* Prentice Hall. (2003) New Jersey
- [4] JOST J. *Partial differential equations* Springer. Segunda edición. (2000) New York
- [5] TAYLOR M. *Partial differential equations: Basic theory* Springer. (1999) New York
- [6] JOHN F. *Partial differential equations*, Springer, 1981, New York USA.

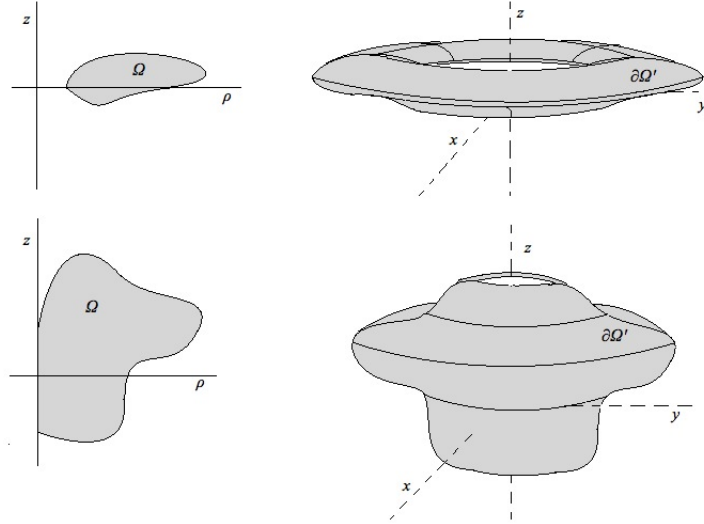
Capítulo 3

Modelo Matemático

Para comenzar nuestro estudio acerca de los vórtices anulares supondremos que el fluido cumple las siguientes propiedades:

1. El flujo es simétrico con respecto a un eje y llena todo el espacio \mathbb{R}^3
2. Se considera que estamos en un caso ideal (sin viscosidad), incompresible y barotrópico.
3. La velocidad del fluido tiene magnitud U en la dirección z cuando $\rho^2 + z^2 \rightarrow \infty$
4. No existen fuentes ni sumideros en todo el espacio.
5. La velocidad en el fluido no tiene componente angular.

Si el problema tiene simetría axial el valor de la velocidad para algún punto (ρ, z) lo tendrá toda una espira alrededor del eje z en el espacio físico del fluido (\mathbb{R}^3) Por eso decimos que este problema consiste en el estudio de los vórtices anulares, pues cualquier región Ω en el semiplano (ρ^+, z) será mapeada a un cuerpo de revolución en el espacio físico. En algunos casos, cuando la intersección entre el eje z y la frontera Ω no tiene medida cero, su imagen correspondiente en \mathbb{R}^3 no tendrá hoyos.



Con las condiciones señaladas podemos encontrar una función escalar a partir de la cual la velocidad del fluido en cada punto puede ser obtenida; esta es conocida como *función de corriente* pues tiene las mismas propiedades que en el caso de flujo potencial en dos dimensiones.

Para encontrar la función de corriente tomaremos el hecho que el fluido es incompresible, es decir el campo de velocidades (V) en cada punto \mathbf{v} tiene la siguiente propiedad.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

Pasaremos esta ecuación a coordenadas cilíndricas donde ρ , es la componente radial, φ la componente angular y z la componente cartesiana¹:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Dado que la velocidad no tiene componente angular:

$$v_\varphi = 0$$

entonces la ecuación para la incompresibilidad se reduce a lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Antes de continuar notemos que el dominio del campo de velocidades es el semiplano derecho (ρ^+, z):

¹VeÁise Griffiths [7]

$$\mathbf{v} : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Definamos una función $\Psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que:

$$\Psi(\rho, z) = \int_{C(P_0, P)} \left(\rho v_z \frac{d\rho}{ds} - \rho v_\rho \frac{dz}{ds} \right) ds$$

Donde

$C(P_0, P)$ curva que tenga a P_0, P como extremos y
 P_0 punto fijo en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$
 $P \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$

Sabemos que si fluido es incompresible se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Como el espacio de trabajo es simplemente conexo, dicha función $\Psi(\rho, z)$ satisface

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\rho v_\rho \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \rho v_z \quad (3.4)$$

independientemente de la curva C que una los puntos P_0, P . Esta función auxiliar Ψ es la función de corriente del sistema estudiado y será de suma importancia de aquí en adelante.

El campo de velocidades tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.5)$$

Observemos que la función Ψ es al menos una vez diferenciable *i.e.* continua. Adicionalmente debemos pedir que sus parciales de primer orden también lo sean porque ellas determinan la velocidad (en el problema no estamos planteando la existencia de algún obstáculo o fuente que pueda crear dicha discontinuidad en el campo de velocidades).

Por la incompresibilidad del fluido podemos tomar a \mathbf{v} como el rotacional de un potencial vectorial \mathbf{A} . Tomemos $A_z = 0$, entonces A_x, A_y deben cumplir

$$v_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad v_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Así

$$A_x = \alpha(x, y) + \int_{z_0}^z v_y(x, y, \gamma) d\gamma, \quad A_y = \beta(x, y) - \int_{z_0}^z v_x(x, y, \gamma) d\gamma$$

Donde $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ son funciones libres hasta ahora, pero las ajustaremos para cumplir la tercera condición. Derivemos y calculemos la expresión en v_z

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z) &= \frac{\partial\beta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\alpha(x, y)}{\partial y} - \int_{z_0}^z \frac{\partial v_y(x, y, \gamma)}{\partial y} d\gamma - \int_{z_0}^z \frac{\partial v_x(x, y, \gamma)}{\partial x} d\gamma \\ &= \frac{\partial\beta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\alpha(x, y)}{\partial y} - \int_{z_0}^z \nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, \gamma) d\gamma + \int_{z_0}^z \frac{\partial v_z(x, y, \gamma)}{\partial z} d\gamma \end{aligned}$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y usando el teorema fundamental del cálculo, la expresión anterior se reduce a:

$$v_z(x, y, z) = \frac{\partial\beta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\alpha(x, y)}{\partial y} + v_z(x, y, z) - v_z(x, y, z_0)$$

Entonces tendremos la relación

$$v_z(x, y, z_0) = \frac{\partial\beta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial\alpha(x, y)}{\partial y}$$

Como α , β son funciones libres, escogamos $\alpha \equiv 0$

$$\beta(x, y) = \int_{x_0}^x v_z(\delta, y, z_0) d\delta$$

Así construimos un potencial \mathbf{A} que cumpla:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$$

De la deducción del potencial vectorial hecha líneas arriba, sabemos que $A_z = 0$. Usamos que en coordenadas cilíndricas el rotacional de un vector $\mathbf{B} = B_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + B_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ es ²

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_z$$

En nuestro caso dado que $A_z = 0$ proponemos que dicho potencial es:

$$\mathbf{A} = A_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + A_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Por lo tanto

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_z$$

Notemos que el uso de un potencial escalar es solo una herramienta matemática para facilitar el análisis del problema pero lo verdaderamente importante es el campo de velocidades. Hacemos esta aclaración para remarcar que la elección del potencial vectorial es un poco arbitraria, la única condición es que

²VeÁise el Griffiths [7]

la velocidad con las condiciones planteadas sea el rotacional de este.

Como nuestra expresión para la velocidad no tiene componente en la dirección φ , el coeficiente del rotacional en esa dirección es cero.

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} = 0$$

De esta forma vemos que A_ρ no depende de z , y la dependencia en φ es a lo más lineal, para que en el rotacional (*i.e.* en la velocidad) no haya dependencia en la variable angular. Por esto:

$$A_\rho = h(\rho)\varphi$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - h(\rho) \right] \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Debido a que los vectores $\hat{\mathbf{e}}_\rho$, $\hat{\mathbf{e}}_z$ son linealmente independientes tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - h(\rho) \\ \Rightarrow \Psi(\rho, z) &= \rho A_\varphi - \int^\rho h(\gamma) d\gamma + k \quad \text{con } k = \text{cte} \\ \therefore A_\varphi &= \frac{1}{\rho} \left[\Psi(\rho, z) + \int^\rho h(\gamma) d\gamma + k\rho \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

El potencial \mathbf{A} es:

$$\mathbf{A} = h(\rho)\varphi \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\Psi(\rho, z) + \int^\rho h(\gamma) d\gamma + k\rho \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Tomando el potencial vectorial con divergencia cero habrá una condición más para la función $h(\rho)$

$$\frac{d}{d\rho}(\rho h(\rho)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho h(\rho) = h_0 = \text{cte}$$

Así \mathbf{A} se simplifica

$$\mathbf{A} = \frac{h_0}{\rho} \varphi \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left[\frac{\Psi(\rho, z)}{\rho} + \frac{h_0}{\rho} \log \rho + k \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Recordemos que la elección de la función $h\rho^{-1}$ (ahora ya reducida a una constante) es arbitraria, por ello podemos fijar $h_0 \equiv 0$; así el potencial \mathbf{A} solo tendrá componente en la dirección angular. En este momento no escogeremos el valor de k , pues posteriormente se le dará una interpretación a esta constante.

Como se vió en el primer capítulo, el rotacional del campo de velocidades mide localmente el momento angular de las partículas en el fluido, es decir, la tendencia a rotar localmente los elementos del fluido.

La vorticidad del campo de velocidades es:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.7)$$

como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}^3$$

Sabemos que $h_0 = 0$, esto anula la divergencia del potencial concluimos:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}$$

Tomando el rotacional de la velocidad:

$$-\vec{\omega} = -\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (3.8)$$

Es decir en el caso de un fluido ideal no compresible con simetría axial la vorticidad está orientada en la dirección φ ; el hecho de que la vorticidad esté en la dirección señalada sugiere que el fluido rota en el plano $\varphi = cte$ (es lo esperado intuitivamente por la simetría) y fue un requisito al inicio de este capítulo.

Proposición 1. *En un fluido ideal, incompresible, barotrópico y con simetría axial y sin fuentes ni sumideros se cumple que:*

- i) *En un sistema de referencia fijo a un elemento de fluido la distribución radial de vorticidad es constante.*
- ii) *La norma de la vorticidad está dada por $\|\vec{\omega}\| = \rho f$, donde f es escalar y no depende explícitamente del tiempo.*
- iii) *$f \in C^1$ y se cumple que $\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0$.*

Demostración.

i)

Pensemos que $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ por (3.8) y calculemos la derivada total con respecto al tiempo del cociente de la vorticidad entre el radio.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} v_\rho \quad (3.9)$$

No debemos confundir ϱ la densidad del fluido con ρ la componente radial. Expandamos el primer sumando de la igualdad de arriba con ayuda de (1.8) y la ecuación de Euler en términos de la vorticidad (1.14).

³Ver la referencia 9 del capítulo 1.

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + v_z \hat{\mathbf{e}}_z)$$

Como el flujo es axial (la velocidad no depende de la posición angular) y $\partial \hat{\mathbf{e}}_\rho / \partial \varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ vemos:

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega} = \frac{v_\rho \omega}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{v_\rho}{\rho} \vec{\omega}$$

Usando esta expresión en (3.9) obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Es decir, en un sistema de referencia que se mueve con un elemento de fluido, el cociente de la vorticidad entre la componente radial de ese sistema es constante. Así, el elemento de fluido “ve” que los demás elementos a cierta posición y vorticidad conocida no se alejan de él conforme avanza el tiempo, es decir *desde ese sistema el flujo es estacionario*.

ii)

En el sistema que se mueve con el cuerpo la vorticidad cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= 0 \\ \text{i.e. } \vec{\omega} &= \omega \hat{\mathbf{e}}_\varphi = f \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde f es un escalar que no depende explícitamente del tiempo.

iii)

Con *i*) sabemos que desde el sistema donde el fluido es estacionario, la ecuación (3.10) se reduce a:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\vec{\omega}}{\rho} = 0 \quad (3.12)$$

Usando (3.11) resulta:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (f \hat{\mathbf{e}}_\varphi) = 0$$

La relación anterior es equivalente a:

$$\left(v_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \left(v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Lo anterior es cierto pues \mathbf{v} no tiene componente en φ , entonces el producto $\mathbf{v} \cdot \nabla$ no tiene derivadas en φ , además $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ no depende de ρ ó z . Así tenemos:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{w}{\rho} \right) = 0 \quad (3.13)$$

□

De la proposición anterior se desprenden dos corolarios importantes

Corolario 1. *El cociente ω/ρ es constante a lo largo de las líneas de corriente.*

Demostración. Para este caso donde el fluido tiene simetría axial y la velocidad no tiene componente angular, sabemos que ω no tiene dependencia angular, de lo contrario la velocidad también la tendría. Calculemos el producto interno entre \mathbf{v} y $\nabla\Psi$ (usando la expresión (3.5)).

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\Psi = v_\rho\Psi_\rho + v_z\Psi_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0$$

Así \mathbf{v} , $\nabla\Psi$ y ∇f están en el plano $\varphi = cte$ y como \mathbf{v} es ortogonal a los otros dos concluimos que ellos son paralelos entre si:

$$\nabla\Psi = \alpha\nabla f \quad \Rightarrow \quad \Psi = \alpha f + \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \text{ constantes}$$

Por lo tanto, las curvas de nivel de Ψ son paralelas a las curvas de nivel de f . Como las curvas de nivel de Ψ son una familia de líneas de corriente a un tiempo dado concluiremos que *sobre las líneas de corriente $f = \omega/\rho$ es constante*. Esto justifica buscar funciones $f = f(\Psi)$, pues así f es bien definida. \square

Corolario 2. *Si consideramos al fluido estacionario incompresible, axial, no viscoso, y además la función de vorticidad f depende explícitamente de la función de corriente, entonces la expresión para la velocidad dada por (3.5) es solución a la ecuación de vorticidad de Euler para flujo ideal (1.14).*

Demostración. Como el fluido es axial e incompresible sabemos que:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\Psi = 0$$

Además dado que f es constante sobre las curvas de nivel sabemos que:

$$\nabla\Psi = \alpha\nabla f$$

Nota: $\alpha \neq 0$ de lo contrario estudiaríamos el caso de fluido estático. Juntando estas dos últimas expresiones veremos que:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = \mathbf{v} \cdot \left(\nabla \frac{\omega}{\rho} \right) = 0$$

Como $\mathbf{v} \cdot \nabla$ es un operador que no aplica sobre φ , podemos multiplicar el resultado anterior por $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ para obtener una expresión vectorial.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla f)\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{v} \cdot \nabla (f\hat{\mathbf{e}}_\varphi) = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0$$

Como el sistema es estacionario, la vorticidad no depende explícitamente del tiempo; así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0$$

Sumando los últimos dos resultados concluimos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0$$

Abriendo términos en la derivada total respecto al tiempo resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = -\frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

Como la derivada total respecto al tiempo de ρ es v_ρ , se obtiene:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{\omega}}{\rho} v_\rho$$

Usando que $\vec{\omega} \cdot \nabla = (\omega/\rho) \partial_\varphi$ podemos ver que:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{v} = \frac{\omega}{\rho} v_\rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Dado que el fluido es incompresible, podemos restar a la expresión anterior el término $\vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ de donde se obtiene la ecuación de vorticidad de Euler para flujo ideal:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

□

La expresión para Ψ fue definida salvo por una constante. De la proposición 1 sabemos que existe un sistema de referencia donde la dinámica es estacionaria, desde este veremos que la región (Ω') en el espacio físico donde se encontraban las partículas con vorticidad distinta de cero tiempo atrás no cambia. Sin embargo las partículas dentro de esta región se mueven sin salir de ella, para esto diremos que $\partial\Omega'$ es una superficie formada por líneas de corriente, *i.e.* es una curva de nivel de Ψ . Entonces decimos que si $\Omega \subset (\rho^+, z)$ es la región asociada a Ω' por la simetría axial del problema podemos escoger

$$k = \Psi|_{\partial\Omega'} = \Psi|_{\partial\Omega} = 0$$

De igual modo, por la simetría tenemos que la velocidad en un punto (ρ, z) es la misma para todo punto en el círculo de radio ρ a una altura z sobre el eje. Así se induce que los puntos sobre el eje de simetría es una curva de nivel de Ψ (en este caso degenerada a una recta en \mathbb{R}^3).

Para dar un significado al valor de la curva de nivel sobre el eje supondremos que la frontera de la región Ω no tiene puntos sobre este. Si nombramos $P_{min} = (\rho^*, z^*) \in \partial\Omega$ al punto que dista menos del eje z , (supongamos que el vórtice se mueve con una velocidad $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{e}}_z$ respecto del fluido en infinito.) y calculemos el flujo de masa a través del círculo $\rho < \rho^*$, $z = z^*$, y $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_z$ (recordemos que un punto material de fluido visto desde el sistema de referencia del toro, se

mueve con una velocidad es negativa, pues en este sistema dicho punto material viaja en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_z$, así usando (3.5) vemos que:

$$\begin{aligned} F &= \iint_{\substack{\rho < \rho^* \\ z = z^*}} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \varrho \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^*} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \rho d\rho d\varphi \\ &= 2\pi \varrho [\Psi(\rho^*, z^*) - \Psi(0, z^*)] = -2\pi \varrho \Psi(0, z^*) \end{aligned}$$

Lo anterior es cierto, pues $\Psi(\rho^*, z^*) \in \partial\Omega$ y allí la función de corriente es cero. Renombrando a $\Psi(0, z^*) = -k_0$ ($k_0 \geq 0$)⁴, el flujo de masa en el eje está dado por:

$$F = 2\pi \varrho k_0 \quad \text{con } k_0 \geq 0 \quad (3.14)$$

Así encontramos que

$$\Psi|_{\rho=0} = -k_0$$

con todos los puntos en claro, podemos enunciar el problema que nos interesa resolver.

Sea \mathbb{R}^3 el espacio físico en donde el fluido está confinado, Ω' la localización de la vorticidad dentro del fluido y $\Xi = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ la región en el plano (ρ, z) asociado al espacio físico. Dadas la velocidad relativa $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{e}}_z$ del vórtice respecto al fluido en infinito, ϱ la densidad del fluido, la constante k_0 (i.e. el flujo de masa en el eje) y la forma de la función de vorticidad $f(\Psi)$, encontrar la función de corriente $\Psi(\rho, z)$ y la región $\Omega \subset \Xi$.

Las ecuaciones del modelo en el espacio físico serán:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = \Delta \left(\frac{\Psi}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right) &= \begin{cases} -\rho f(\Psi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \text{en } \Omega' \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 - \Omega' \end{cases} \\ \Psi &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega' \\ \Psi &= -k_0 \quad \text{en } \rho = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mientras que en Ξ están dada por (3.8) más las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \Psi &= \begin{cases} -\rho^2 f(\Psi) & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \Xi - \Omega \end{cases} \\ \Psi &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \\ \Psi &= -k_0 \quad \text{en } \rho = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ambos problemas son el mismo, solo que por la simetría axial reducimos el primero al segundo.

⁴La demostración de esto es por el principio del máximo, pues si suponemos que el eje está fuera de la región de vorticidad distinta de cero y $\Psi(\rho, z^*) = 0$ en la frontera, este principio fuerza a que $\Psi(0, z^*) \leq 0$ fuera de la región con vorticidad distinta de cero, entonces la función de corriente es negativa en el eje. Para mayor referencia vease la referencia [5]

En estos sistemas falta incluir la condición de que la velocidad del vórtice respecto a infinito es constante, para ello pediremos:

$$\Psi + U \frac{\rho^2}{2} + k_0 \rightarrow 0 \quad \text{si } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

A continuación justificaremos esta condición de “radiación”.

Busquemos la forma de las soluciones para estas ecuaciones.

Si pensamos en que $f(\Psi)$ es una función lineal de su argumento podemos buscar soluciones para el caso homogéneo y después tratemos de decir algo sobre el no homogéneo. Para esto usaremos el sistema (3.16).

Como la velocidad tiende a ser constante en la dirección z para puntos muy distantes, en ellos la función Ψ se comporta como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} &\sim 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &\sim -U \end{aligned} \quad \text{si } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Entonces estudiaremos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \Psi = 0 & \text{en } \Xi \\ \Psi = -k_0 & \text{en } \rho = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \rightarrow -U & \text{si } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Para simplificar este análisis usaremos coordenadas polares en dicho plano, pues la condición $\rho^2 + z^2 \rightarrow \infty$ sugiere dicho cambio, entonces tomemos:

$$\rho = \xi \sin \eta \quad z = \xi \cos \eta$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\sin \eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\cos \eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Calculemos las segundas derivadas con respecto a z y ρ , usaremos una notación reducida, $\partial_l^m = \partial^m / \partial l^m$.

$$\partial_z^2 = \frac{\sin \eta}{\xi^2} \partial_\eta (\sin \eta \partial_\eta) - \frac{\sin \eta}{\xi} \partial_\eta (\cos \eta \partial_\xi) + \cos^2 \eta \partial_\xi^2 - \sin \eta \cos \eta \partial_\xi (\xi^{-1} \partial_\eta)$$

$$\partial_\rho^2 = \frac{\cos \eta}{\xi^2} \partial_\eta (\cos \eta \partial_\eta) + \frac{\cos \eta}{\xi} \partial_\eta (\sin \eta \partial_\xi) + \sin^2 \eta \partial_\xi^2 + \sin \eta \cos \eta \partial_\xi (\xi^{-1} \partial_\eta)$$

Abriendo $\partial_z^2 + \rho \partial_\rho (\rho^{-1} \partial_\rho) = \partial_z^2 - \rho^{-1} \partial_\rho + \partial_\rho^2$ el operador correspondiente en las coordenadas ξ, η es:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 - \rho^{-1} \partial_\rho + \partial_\rho^2 &= -\frac{\cos \eta}{\xi^2} \sin \eta \partial_\eta + \frac{\cos^2 \eta}{\xi^2} \partial_\eta^2 + \frac{\sin^2 \eta}{\xi^2} \partial_\eta^2 + \frac{\sin \eta \cos \eta}{\xi^2} \partial_\eta \\ &\quad + \frac{\cos^2 \eta}{\xi} \partial_\xi + \frac{\sin \eta \cos \eta}{\xi} \partial_\xi \partial_\eta - \frac{\sin \eta \cos \eta}{\xi} \partial_\xi \partial_\eta + \frac{\sin^2 \eta}{\xi} \partial_\xi \\ &\quad + \sin^2 \eta \partial_\xi^2 + \cos^2 \eta \partial_\xi^2 - \frac{1}{\xi^2 \tan \eta} \partial_\eta - \frac{1}{\xi} \partial_\xi \\ &= \frac{1}{\xi^2} \left(\partial_\eta^2 - \frac{\cos \eta}{\sin \eta} \partial_\eta \right) + \partial_\xi^2 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\nu = \cos \eta$, con $-1 < \nu \leq 1$ el problema anterior se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{(1-\nu^2)}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Psi = 0 & \text{en } \Xi \\ \Psi = -k_0 & \text{en } \nu = 1 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \rightarrow -U & \text{si } \xi^2 \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Proponemos $\Psi = (1-\nu^2)f(\xi) + c$, con c constante, así la ecuación se transforma en una ordinaria:

$$\left[\frac{(1-\nu^2)}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \{(1-\nu^2)f(\xi) + c\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2f + \xi^2 f'' = 0$$

La expresión que determina $f(\xi)$ es la ecuación de Euler, por lo que proponemos $f(\xi) = a\xi^n$ con a constante

$$-2f + \xi^2 f'' = 0 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} n_+ = 2 \\ n_- = -1 \end{array}$$

Entonces, la solución a la ecuación homogénea es:

$$\Psi = (1-\nu^2)[a\xi^2 + b\xi^{-1}] + c \quad \text{con } a, b, c \text{ constantes a determinar por la condiciones} \quad (3.20)$$

Queremos que Ψ sea definida en todo el espacio, por lo tanto $b = 0$, y como $\Psi(\xi, \nu)|_{\nu=1} = -k_0$ entonces $c = -k_0$, además la expresión resultante a las variables ρ, z para aplicar la última condición tendremos:

$$\Psi = a(1 - \nu^2)\xi^2 - k_0 = a\rho^2 - k_0$$

Esta expresión satisface $\partial\Psi/\partial z \rightarrow 0$ si $\xi^2 \rightarrow \infty$.

Tomando ahora la condición restante

$$\lim_{\xi^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = \lim_{\xi^2 \rightarrow \infty} 2a = -U \quad \Rightarrow \quad a = -U/2$$

Resumiendo las líneas anteriores, una solución al sistema (3.18) es:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{U}{2}\rho^2 - k_0 \quad (3.21)$$

Esta solución representa a un fluido que viaja a velocidad constante de magnitud U en la dirección z .

De este resultado se desprende un teorema muy útil

Teorema 3. *Si en el sistema (3.16) $f(\Psi)$ no depende explícitamente de Ψ , la solución a es única.*

Demostración. Supongamos Ψ_1 y Ψ_2 soluciones al sistema (3.16), y construimos la función $u = \Psi_1 - \Psi_2$, u es solución al sistema homogéneo (3.18) con $k_0 = 0$ y $U = 0$. Por el análisis anterior, la solución a dicho sistema es $u = 0$. Por lo tanto $\Psi_1 = \Psi_2$ \square

Ahora bien, para tener la solución completa al problema, usaremos el sistema (3.15). Como el operador Δ es escalar, es decir, el aplicarlo sobre un vector es hacer que opere en cada una de las entradas cartesianas. Entonces este sistema son tres problemas de la ecuación de Laplace. Usando lo visto en el capítulo 2 para dominios acotados y $f(\Psi)$ dada en función de las variables espaciales, una solución particular al problema

$$\Delta \left(\frac{\Psi}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right) = \begin{cases} -\rho f(\Psi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \text{en } \Omega' \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 - \Omega' \end{cases}$$

$$\Psi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega'$$

fue dada por el análisis hecho en la última parte del segundo capítulo de este trabajo. Si seguimos pensando en que f es conocida, y como el fluido está en todo el espacio \mathbb{R}^3 , sabemos que la solución al problema sería:

$$\frac{\Psi}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'^2 f(\Psi)}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2]^{1/2}} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi'} d\varphi' d\rho' dz'$$

Ahora el problema es encontrar la frontera donde el fluido con $f \neq 0$, es decir encontrar Ω .

Siguiendo esta idea decimos que por la simetría axial del problema podemos hacer $\varphi = 0$, pues lo que pasa a este ángulo dados ρ, z pasa para todo $\varphi \in [0, 2\pi]$; el hacer esta simplificación muestra que la integración sobre la primera entrada es cero, es decir:

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'^2 f(\Psi)}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \sin \varphi' d\varphi' d\rho' dz' = 0$$

Pues el integrando es impar sobre un intervalo simétrico.

Por ello para $\varphi = 0$, la función de corriente se deduce de la segunda entrada del potencial vectorial:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2 f(\Psi) \cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' d\rho' dz' \quad (3.22)$$

Juntando ambos resultados (3.21 y 3.22), una solución al problema lineal es:

$$\Psi = -\frac{U}{2}\rho^2 - k_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2 f(\Psi) \cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' d\rho' dz' \quad (3.23)$$

A pesar de que esta expresión para Ψ cumple las condiciones en el origen y en infinito, no es claro que cumpla la condición de ser constante sobre la frontera. pero con esta expresión que es valida para el caso lineal, buscaremos la existencia de soluciones de este tipo para el caso no lineal es decir:

Planteamiento del problema 1. *Dado un medio fluido ideal con simetría axial que llena todo \mathbb{R}^3 donde es conocida la función de vorticidad $f(\Psi)$, la densidad del medio ρ , la constante k_0 y la velocidad relativa $\mathbf{U} = U\hat{e}_z$ de la región de vorticidad respecto al fluido en infinito, se pretende buscar la existencia de soluciones de tipo (3.23) al problema (3.16) cuyos dominios Ω son cercanos a la esfera en el caso del vórtice de Hill.⁵*

⁵dicho caso es el único que se sabe tiene solución analítica a las ecuaciones (3.16) y será estudiado en el siguiente capítulo.

Bibliografía

- [1] GUYON E. *Physical hydrodynamics* Oxford, 2001, New York USA.
- [2] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [3] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132**
- [4] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [5] POZRIKIDIS C. *The nonlinear instability of Hill's vortex* Journal of Fluid Mechanics.(1986) Vol. **168**, pp 337-367
- [6] FRAENKEL L. E. *On steady vortex rings of small cross section in an ideal fluid* Proc. Roy. Soc. Lond. A. (1970) Vol. **316**, pp 29-62
- [7] GRIFFITHS D. *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999, New Jersey.

Capítulo 4

Vórtice de Hill

El vórtice esférico de Hill, es un caso particular del problema de vórtices anulares. Bajo las mismas hipótesis usadas en el capítulo anterior se considera una región esférica de radio a que se mueve con el fluido, en donde la vorticidad está confinada. Desde un sistema de referencia fijo a esta esfera, la distribución de la vorticidad es:

$$\omega = \begin{cases} A\rho & \text{si } \rho^2 + z^2 < a^2 \\ 0 & \text{si } \rho^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \quad A = cte$$

Observemos que $f(\Psi) = A$ es constante; por el teorema 1 del capítulo anterior, la solución a este problema es única.

4.1. Solución a la ecuación diferencial

Notemos que este problema es un poco diferente al anterior pues aquí nos dan la región donde el vórtice está confinado. La constante k_0 indirectamente está dada pues al encerrar origen el flujo neto del fluido a través de una región perpendicular al eje es cero, pues el fluido está recirculando en toda la esfera, pero no sale de esta; por ello decimos:

$$k_0 = 0$$

Para continuar con este análisis, es conveniente usar la formulación (3.16) en coordenadas polares.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{(1-\nu^2)}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \Psi = \begin{cases} -A\xi^2(1-\nu^2) & \text{si } \xi^2 < a^2 \\ 0 & \text{si } \xi^2 > a^2 \end{cases} \\ \Psi = 0 & \text{en } \nu = 1 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \rightarrow -U & \text{si } \xi^2 \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

La solución para la ecuación homogénea es de la forma (3.20). En la solución particular propondremos como antes $\Psi = f(\xi)(1 - \nu^2)$, para obtener la siguiente ordinaria:

$$-A\xi^4 = -2f + \xi^2 f''$$

si proponemos a $f(\xi) = \sum_{n=0}^4 a_n \xi^n$, y sustituimos arriba, tendremos:

$$-2a_0 - 2a_1\xi + \sum_{n=2}^4 (n(n-1) - 2)a_n \xi^n = -A\xi^4$$

por la unicidad de los polinomios, podemos igualar coeficientes donde resulta:

$$a_0 = a_1 = a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{A}{10}, \quad a_2 \text{ libre}$$

Entonces, juntando las soluciones de la homogénea y la particular, dentro de la región esférica tenemos:

$$\Psi = \left(-\frac{A}{10}\xi^4 + B\xi^2 + C\xi^{-1} \right) (1 - \nu^2)$$

Para satisfacer la condición $\Psi = 0$ en el eje, sin importar el valor de ξ , pedimos $C = 0$, mientras que para tener $\Psi|_{\partial\Omega} = 0$ se debe cumplir

$$\Psi|_{\xi=a} = 0 \quad \forall \nu \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad \left(B - \frac{A}{10}a^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{A}{10}a^2$$

$$\therefore \Psi = \frac{A}{10}\xi^2(1 - \nu^2)(a^2 - \xi^2) \quad \text{si } \xi^2 < a^2, \quad -1 \leq \nu \leq 1 \quad (4.1)$$

Sabemos que fuera de la esfera, la solución de la homogénea es:

$$\Psi = (B\xi^2 + C\xi^{-1})(1 - \nu^2)$$

Aplicando la condición de que tanto Ψ como $\nabla\Psi$ deben ser continuas en la frontera del vórtice ($\xi = a$), debemos hacer que Ψ y $\partial\Psi/\partial\xi$ coincidan en la frontera.

$$\Psi|_{\xi=a} : \quad Ba^2 + Ca^{-1} = 0$$

$$(\partial_\xi \Psi)|_{\xi=a} : \quad 2Ba - Ca^{-2} = -2\frac{A}{10}a^3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior encontramos

$$B = -\frac{1}{15}Aa^2, \quad C = \frac{1}{15}Aa^5$$

Entonces, la solución general será:

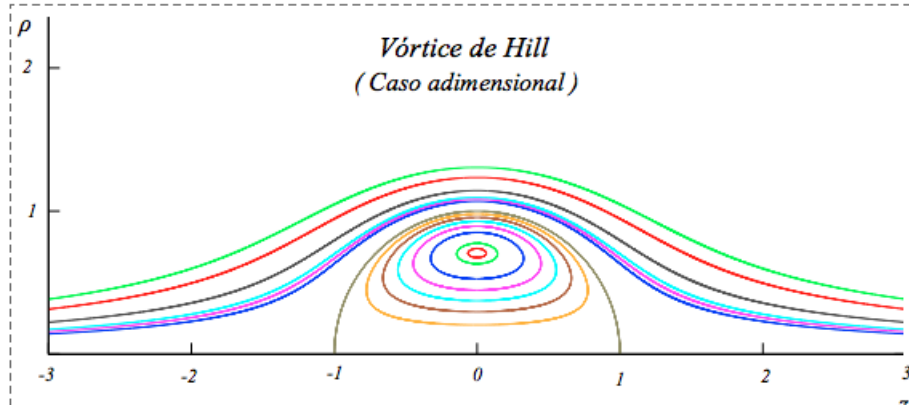
$$\Psi = \begin{cases} \frac{A}{10}\xi^2(1 - \nu^2)(a^2 - \xi^2) & \text{si } \xi^2 < a^2, \quad -1 < \nu < 1 \\ -\frac{Aa^2}{15}\xi^2(1 - \nu^2) \left(1 - \frac{a^3}{\xi^3} \right) & \text{si } \xi^2 > a^2, \quad -1 \leq \nu \leq 1 \end{cases}$$

Pasando a las coordenadas ρ, z resulta

$$\Psi = \begin{cases} \frac{A}{10}\rho^2(a^2 - \rho^2 - z^2) & \text{si } \rho^2 + z^2 < a^2 \\ -\frac{Aa^2}{15}\rho^2 \left(1 - \frac{a^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\right) & \text{si } \rho^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Sometiendo a la última condición ($\rho^2 + z^2 \rightarrow \infty$) resultará $Aa^2/15 = U/2$, es decir, la velocidad con la que se desplaza el vórtice esférico con respecto al fluido lejano a este es

$$U = \frac{2Aa^2}{15} \quad (4.3)$$



En nuestro estudio de los Vórtices anulares tomaremos como primera aproximación a la curva solución, una de las líneas de corriente dentro de la frontera del vórtice esférico, ya que estas curvas al ser cerradas en el plano (ρ, z) representan en el espacio físico a un volumen de fluido en forma de toro dentro del cual el fluido está girando. Veremos en el siguiente capítulo el tratamiento que usaremos para nuestro fin.

4.2. Solución a la ecuación integral

Por otra parte, en el apéndice (B.2) que podemos expresar al núcleo G de la siguiente forma:

$$G = \pi\rho\rho^2 \frac{x_2^n}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) P_n^1(\cos\theta')$$

De esta forma en el vórtice esférico de Hill tenemos¹

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_0} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz'$$

¹hay que notar que en este punto todas las variables son adimensionales

$$= -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \pi \rho \rho'^2 \frac{x_2^n}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta') \sigma' d\sigma' d\theta'$$

con

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma, & x_2 &= \sigma'/\sigma & \text{si } \sigma' \leq \sigma \\ x_1 &= \sigma', & x_2 &= \sigma/\sigma' & \text{si } \sigma' > \sigma \end{aligned}$$

Si en el segundo sumando, dado que la serie converge uniformemente podemos intercambiar la suma por las integrales, además notemos que cada sumando de esta serie es separable pues x_1 y x_2 son funciones de θ y θ' , es decir

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 + 5\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \int_0^1 l_n(\sigma, \sigma') d\sigma' \int_0^\pi P_n^1(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Con

$$l_n(\sigma, \sigma') = \begin{cases} \frac{\sigma'^{(n+3)}}{\sigma^{(n+1)}} & \text{si } \sigma' \leq \sigma \\ \frac{\sigma^n}{\sigma'^{(n-2)}} & \text{si } \sigma' > \sigma \end{cases}$$

Además como los polinomios asociados de Legendre se pueden expresar en términos de los polinomios de Legendre tenemos (ver [4])

$$P_n^1(\cos \theta') = \sin \theta' \frac{dP_n(\cos \theta')}{d(\cos \theta')}$$

Con esta igualdad y haciendo el cambio $\nu = \cos \theta'$ tendremos:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 + 5\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \int_0^1 l_n(\sigma, \sigma') d\sigma' \int_{-1}^1 (1-\nu^2) \frac{dP_n(\nu)}{d\nu} d\nu$$

Integrando por partes sobre ξ encontramos:

$$\int_{-1}^1 (1-\nu^2) \frac{dP_n(\nu)}{d\nu} d\nu = (1-\nu^2)P_n(\nu)|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \nu P_n(\nu) d\nu$$

El primer sumando del lado derecho es cero. Como $P_1(\nu) = \nu$ y por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre resulta

$$\int_{-1}^1 \nu P_n(\nu) d\nu = \int_{-1}^1 P_1(\nu) P_n(\nu) d\nu = \frac{2}{3} \delta_{1n}$$

Con δ_{ij} delta de Kronecker. Entonces

$$\int_{-1}^1 (1-\nu^2) \frac{dP_n^1(\nu)}{d\nu} d\nu = \frac{4}{3} \delta_{1n}$$

así la suma se reduce a un solo término.

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{10}{3}\rho P_1^1(\cos \theta) \int_0^1 l_1(\sigma, \sigma') d\sigma'$$

Integrando ahora en σ' tenemos:

$$\int_0^1 l_1(\sigma, \sigma') d\sigma' = \begin{cases} \int_0^\sigma \frac{\sigma'^4}{\sigma^2} d\sigma' + \int_\sigma^1 \sigma \sigma' d\sigma' = \frac{\sigma^3}{5} + \frac{\sigma}{2} (1 - \sigma^2) & \text{si } \sigma < 1 \\ \int_0^1 \frac{\sigma'^4}{\sigma^2} d\sigma' = \frac{1}{5\sigma^2} & \text{si } \sigma \geq 1 \end{cases}$$

Como

$$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$$

Tendremos:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 + \begin{cases} \rho^2 (1 - \sigma^2) & \text{si } \sigma < 1 \\ -\frac{2}{3}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^3}\right) & \text{si } \sigma \geq 1 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son la versión adimensional de la función de corriente del vórtice esférico dentro y fuera del núcleo (ver ecuaciones (5.3) y (5.4) del siguiente capítulo).

Observemos que la función de corriente en la frontera $\sigma = 1$ es cero. Este hecho lo usaremos ampliamente en los cálculos siguientes

Bibliografía

- [1] GUYON E. *Physical hydrodynamics* Oxford, 2001, New York USA.
- [2] HILL M. *On a Spherical Vortex* Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, Vol. **185**, (1894), pp. 213- 245.
- [3] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132**
- [4] SOMMERFELD A. *Partial Differencial Equations in Physics* Academic Press 1949, New York USA
- [5] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.

Capítulo 5

Ecuación no lineal

En este capítulo estudiaremos como atacar el problema de no conocer la frontera para el vórtice anular. Para ello usaremos como comentamos antes las líneas de corriente cerradas del Vórtice de Hill con el objeto de cuantificar que tan lejos o cerca está la frontera de nuestro vórtice. Antes de comenzar es conveniente trabajar con números adimensionales, para esto usaremos el teorema π^1 .

Tomemos la expresión para las líneas de corriente para $\rho^2 + z^2 < a^2$, es decir:

$$\Psi(\rho', z') = \frac{A}{10} \rho'^2 (a^2 - \rho'^3 - z'^2)^2 \quad (5.1)$$

Aquí tenemos 4 magnitudes con las cuales se determina a dichas líneas. Ahora bien si denotamos las unidades de cada magnitud con corchetes cuadrados tendremos:

$$\begin{aligned} [\rho'] &= m \\ [z'] &= m \\ [a] &= m \\ [A] &= (ms)^{-1} \\ [\Psi'] &= m^3 s^{-1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Es decir la expresión

$$k(\Psi', \rho', a, z', A) = \Psi' - \frac{A}{10} \rho'^2 (a^2 - \rho'^3 - z'^2) = 0$$

Se puede poner en términos de tres cantidades adimensionales. Para esto tomaremos las cantidades propias del sistema a y A , para ver que:

$$\begin{aligned} [\rho'] &= [a] \\ [z'] &= [a] \\ [\Psi'] &= [Aa^4] \end{aligned}$$

¹VeÅse referencia [7]

²Usamos ρ' y z' en lugar de ρ, z .

Entonces diremos que las variables adimensionales son:

$$\begin{aligned}\rho' &= a\rho \\ z' &= az \\ \Psi' &= \frac{Aa^4}{10}\Psi\end{aligned}$$

Usando esto en (4.2), se obtiene:

$$\Psi = \rho^2(1 - \rho^2 - z^2) \quad (5.3)$$

$$\Psi = -\frac{2}{3}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\right) \quad (5.4)$$

Como el objetivo es estudiar la existencia de vórtices anulares para dominios Ω cuya frontera es cercana a las líneas de corriente del vórtice de Hill, tomaremos al radio a de dicho vórtice como magnitud propia del sistema. Supondremos también que la velocidad del vórtice anular delimitado por $\partial\Omega$ se mueve con respecto al fluido en infinito con la velocidad dada en el capítulo anterior para el caso esférico.

Adimensionalizando la expresión integral (3.23) en el caso donde $f(\Psi) = A = cte$, tendremos ocho magnitudes que determinan la dinámica del sistema físico y solo dos unidades fundamentales, *i.e.* el sistema está descrito por seis cantidades adimensionales.³

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= a\rho & \tilde{\rho}' &= a\rho' \\ \tilde{z} &= az & \tilde{z}' &= az' \\ \tilde{\Psi} &= \frac{Aa^4}{10}\Psi & \tilde{k}_0 &= \frac{Aa^4}{10}k_0\end{aligned}$$

Usando estos cambios de variable en (3.23) y si suponemos U para estos vórtices anulares igual que la del vórtice esférico de Hill, U está dada por (4.3), resultando:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 - k_0 + \frac{5}{2\pi} \iint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2 \cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' d\rho' dz' \quad (5.5)$$

Recordemos que en el vórtice esférico, al ajustar las condiciones de frontera se ve que la derivada normal en la frontera es negativa (es de esperarse por el principio del máximo para ecuaciones elípticas), es decir para valores de $\rho^2 + z^2$ cercanos a 1 por abajo, $\Psi \geq 0$ y es decreciente localmente hasta llegar a cero en la frontera. Si en nuestro estudio tomamos líneas de corriente del vórtice de Hill cercanas a la frontera, la función Ψ será pequeña sobre esta curva. A su vez, la frontera buscada para nuestros vórtices anulares es cercana a las líneas de corriente antes mencionadas, por ello se espera que la función de corriente de

³Al igual que antes, las cantidades en términos de las unidades fundamentales se diferencian de las magnitudes adimensionales por la ' extra en las primeras

nuestros vórtices anulares evaluada sobre su frontera sea cero por la condición de frontera de (3.16).

$$\Psi|_{(\rho,z) \in \partial\Omega} = 0$$

De modo que:

$$k = -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{2\pi} \iint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2 \cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' d\rho' dz'$$

recordemos que en el vórtice de Hill $k_0 = 0$, esta cantidad representa el flujo en el eje, en nuestro caso por ser $\partial\Omega$ cercano a una línea de corriente del vórtice esférico que a su vez es cercana a ∂H_0 podemos pensar que $k_0 \ll 1$, en particular para hacer énfasis en este hecho reemplazaremos k_0 por ϵ^2 (pues $k_0 \geq 0$). Así tendremos:

$$\epsilon^2 = -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{2\pi} \iint_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2 \cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' d\rho' dz' \quad (5.6)$$

Volviendo al vórtice esférico sabemos que dentro de la esfera de radio 1, $\rho^2 + z^2 < 1$, *i.e.* en (5.3) $\Psi \geq 0$, y que $\Psi = cte$ son líneas de corriente. Por simplicidad pediremos que esta constante sea de la forma $\epsilon^2(1 - \epsilon^2)$ con ϵ como antes, es decir una línea de corriente interna está descrita por:

$$\rho^2(1 - \rho^2 - z^2) = \epsilon^2(1 - \epsilon^2) \quad (5.7)$$

Con la expresión anterior es inmediato el siguiente corolario.

Corolario 3. *Si una línea de corriente en el vórtice de Hill está dada por (5.7) con $\epsilon \ll 1$ cumple:*

- $z = 0$ para $\rho = \epsilon$ y $\rho = \sqrt{1 - \epsilon^2}$.
- El flujo de masa F entre el eje z y la línea de corriente es $F = 2\pi\rho\epsilon^2(1 - \epsilon^2)$.

Demostración. El cruce de $\partial\Omega$ en $z = 0$ está dado por:

$$\rho^4 - \rho^2 + \epsilon^2(1 - \epsilon^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \begin{cases} \epsilon^2 \\ 1 - \epsilon^2 \end{cases}$$

Es decir, el cruce de las líneas de corriente con el eje ρ se dan en $\rho = \epsilon$ y $\rho = \sqrt{1 - \epsilon^2}$.

En el planteamiento del problema vimos que el flujo de masa (F) a través una superficie anular que une a dos familias de líneas de corriente ($\Psi = k_1, \Psi = k_2$) con k_1, k_2 constantes es:

$$F = 2\pi\rho(k_1 - k_2)$$

En particular, si la superficie que une a ambas familias está sobre el plano $z = 0$ diremos que

$$F = 2\pi\rho(\Psi(\rho_1, 0) - \Psi(\rho_2, 0))$$

Así el flujo de masa entre el eje z y línea de corriente dada por ϵ es:

$$F = 2\pi\rho(\Psi(\epsilon, 0) - \Psi(0, 0)) = 2\pi\rho\Psi(\epsilon, 0) = 2\pi\rho\epsilon^2(1 - \epsilon^2)$$

□

Volviendo al análisis de las líneas de corriente, vemos que podemos obtener una expresión simple para z^2 :

$$z^2 = 1 - \rho^2 - \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\rho^2} \quad (5.8)$$

Corolario 4. Si $f(\rho) \equiv 1 - \rho^2 - \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\rho^2}$ con $\epsilon^2 \leq \rho^2 \leq 1 - \epsilon^2$, $\rho \geq 0$ y $\epsilon = \text{cte} > 0$ entonces $f(\rho) \geq 0$.

Demostración. Para mostrarlo basta tomar el producto:

$$\rho^2 f(\rho) = \rho^2 - \rho^4 - \epsilon^2 + \epsilon^4 = (\rho^2 - \epsilon^2) - (\rho^4 - \epsilon^4) = (\rho^2 - \epsilon^2) - (\rho^2 - \epsilon^2)(\rho^2 + \epsilon^2)$$

Haciendo $v \equiv (\rho^2 - \epsilon^2)$, sabemos que $v \geq 0$, así podemos escribir:

$$\rho^2 f(\rho) = v(1 - \rho^2 - \epsilon^2) \geq 0$$

Pues $1 - \epsilon^2 \geq \rho^2$. □

Como $f(\rho) = z^2$ concluimos que la línea de corriente es simétrica respecto al eje ρ .

Ahora bien, esta línea de corriente toca al eje ρ en ϵ y $\sqrt{1 - \epsilon^2}$ y es continua en este intervalo cerrado, concluimos que allí existe al menos un punto donde la derivada es cero.

Por otro lado, si $dz^2/d\rho = 0$ con $\epsilon < \rho < \sqrt{1 - \epsilon^2}$, tendremos que en los valores que anulan a $dz^2/d\rho$ se alcanzan los extremos de z (por que en el intervalo de trabajo no existe algún valor que anule a $z(\rho)$, y como $dz^2/d\rho = 2z dz/d\rho$).

Así encontramos:

$$\frac{dz^2}{d\rho} = -2\rho + \frac{2\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\rho^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = (\epsilon^2(1 - \epsilon^2))^{1/4} \quad \text{es punto crítico real positivo}$$

Sabemos que $z^2 \geq 0$ si $\rho \in [\epsilon, \sqrt{1 - \epsilon^2}]$ y los ceros solo se alcanzan en los extremos del intervalo, entonces concluimos que el punto crítico es un máximo si $z > 0$ o mínimo si $z < 0$ por la simetría de la curva respecto al eje ρ .

Para continuar describiendo la forma de la función $z(\rho)$ necesitaremos de otro lema.

Lema 1. Dado $\beta > 0$ se cumple la desigualdad $\frac{1}{(1+\beta)^{1/2}} \geq 1 - \frac{\beta}{2}$

Demostración. Como $\beta \geq 0$ tenemos $(1 + \beta)^{-1/2} \leq 1$ entonces:

$$0 < 1 - \frac{1}{(1 + \beta)^{1/2}} = \frac{(1 + \beta)^{1/2} - 1}{(1 + \beta)^{1/2}}$$

Si multiplicamos por el conjugado tendremos:

$$0 \leq \frac{\beta}{(1 + \beta)^{1/2} [(1 + \beta)^{1/2} + 1]} \leq \frac{\beta}{2}$$

Así resulta:

$$\frac{1}{(1 + \beta)^{1/2}} \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

□

Lema 2. Dado $\beta \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $\frac{1}{(1+\beta)^n} \geq 1 - n\beta$

Demostración.

$$0 \leq 1 - \frac{1}{(1 + \beta)^n} = \frac{(1 + \beta)^n - 1}{(1 + \beta)^n} = \frac{\beta}{(1 + \beta)^n} \sum_{i=1}^n (1 + \beta)^{n-i}$$

entonces

$$1 - \frac{1}{(1 + \beta)^n} = \beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \beta)^i} \leq n\beta$$

Así concluimos

$$1 - n\beta \leq \frac{1}{(1 + \beta)^n}$$

□

Lema 3. Dado $1 > \beta \geq 0$ se cumple la desigualdad $\frac{1}{(1-\beta)^n} \geq 1 + n\beta$

Demostración.

$$0 \geq 1 - \frac{1}{(1 - \beta)^n} = \frac{(1 - \beta)^n - 1}{(1 - \beta)^n}$$

El numerador se puede escribir como:

$$(1 - \beta)^n - 1 = -\beta \sum_{i=1}^n (1 - \beta)^{n-i}$$

así llegamos a:

$$1 - \frac{1}{(1 - \beta)^n} = -\beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \beta)^i} \leq -n\beta$$

de la última expresión se desprende que:

$$1 + n\beta \leq \frac{1}{(1 - \beta)^n}$$

□

El siguiente paso de nuestro estudio, es analizar el crecimiento de la línea de corriente cerca de los cruces con el eje ρ . Esto se resume en el siguiente corolario.

Corolario 5. *Para valores cercanos a $\rho = \epsilon$ es decir $\rho = \epsilon + \alpha$ con $\alpha > 0$ y $\alpha = O(\epsilon)$ se tiene $dz/d\rho \geq O(\epsilon^{-1})$; mientras que en puntos cercanos a $\rho = \sqrt{1-\epsilon}$ ($\rho = \sqrt{1-\epsilon} - \alpha$ con α como antes) $dz/d\rho = O(\epsilon^{-1/2})$*

Demostración. ■ $\rho = \epsilon + \alpha$

Una vez que se tiene la expresión para $dz^2/d\rho$ tomemos $\rho = \epsilon + \alpha$

$$2z \frac{dz}{d\rho} \Big|_{\rho=\epsilon+\alpha} = -2(\epsilon + \alpha) + \frac{2\epsilon^2(1-\epsilon^2)}{(\epsilon + \alpha)^3} = -2(\epsilon + \alpha) + \frac{2(1-\epsilon^2)}{\epsilon(1+\alpha/\epsilon)^3}$$

Usando la desigualdad del lema 2 llegamos a

$$2z \frac{dz}{d\rho} \Big|_{\rho=\epsilon+\alpha} \geq -2(\epsilon + \alpha) + \frac{2}{\epsilon}(1-\epsilon^2)(1-3\alpha/\epsilon) = 4\alpha - 4\epsilon + \frac{2}{\epsilon} - \frac{6\alpha}{\epsilon^2}$$

Es decir

$$2z \frac{dz}{d\rho} \Big|_{\rho=\epsilon+\alpha} \geq 4(\alpha - \epsilon) + \frac{2}{\epsilon}(1-3\alpha/\epsilon)$$

Por otro lado para z^2 podemos encontrar una cota, es decir

$$z^2 \Big|_{\rho=\epsilon+\alpha} = 1 - (\epsilon + \alpha)^2 - \frac{\epsilon^2(1-\epsilon^2)}{(\epsilon + \alpha)^2} \leq 1 - (\epsilon + \alpha)^2 + (1-\epsilon^2)(2\frac{\alpha}{\epsilon} - 1)$$

Entonces llegamos a

$$z^2 \Big|_{\rho=\epsilon+\alpha} \leq \frac{2\alpha}{\epsilon} - \alpha^2 - 4\alpha\epsilon$$

Notemos que el signo de igualdad se alcanza cuando $\alpha = 0$, y que la proximidad de esta cota al valor exacto de z^2 está garantizada por el desarrollo de Taylor. Entonces decimos que si α es pequeño y ϵ se considera constante entonces

$$z^2 = O\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right) \rightarrow z^2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\epsilon}} + o(\epsilon)$$

Por otro lado, podemos usar los mismos argumentos anteriores para decir que si α es pequeño y ϵ pequeño pero fijo entonces

$$z \frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{\epsilon}(1-3\alpha/\epsilon) + O(\epsilon) \quad (5.9)$$

Usando estas dos expresiones resulta

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha\epsilon}}(1+3\alpha/\epsilon) + O(\epsilon) \quad (5.10)$$

En particular si $\alpha = O(\epsilon)$

$$\frac{dz}{d\rho} = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Más aún, notemos que si escogemos $\alpha = k\epsilon$ con k suficientemente pequeña y $\epsilon < 1/\sqrt{2}$ podemos hacer que la cota inferior⁴ para $2z dz/d\rho$ sea mayor a cero *i.e.* este producto es positivo, es decir la función como su derivada son del mismo signo.

■ $\rho = \sqrt{1 - \epsilon^2} - \alpha$

Si $\rho = \sqrt{1 - \epsilon^2} - \alpha$ obtendremos:

$$\begin{aligned} 2z \frac{dz}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{1-\epsilon^2}-\alpha} &= -2(\sqrt{1-\epsilon^2} - \alpha) + \frac{2\epsilon^2(1-\epsilon^2)}{(\sqrt{1-\epsilon^2} - \alpha)^3} \\ &= -2(\sqrt{1-\epsilon^2} - \alpha) + \frac{2\epsilon^2}{\sqrt{1-\epsilon^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^3} \end{aligned}$$

Usando el resultado de los lemas anteriores tendremos:

$$2z \frac{dz}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{1-\epsilon^2}-\alpha} \geq -2\sqrt{1-\epsilon^2} + 2\alpha + \frac{2\epsilon^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} + 6\frac{\alpha\epsilon^2}{1-\epsilon^2}$$

Al igual que antes, por la proximidad de la cota al valor exacto para valores pequeños de α (suponiendo ϵ fijo) resulta:

$$z \frac{dz}{d\rho} = -\sqrt{1-\epsilon^2} + \alpha + O(\epsilon^2) = O(1) \quad (5.11)$$

Mientras que para z^2 encontraremos:

$$z^2 \Big|_{\rho=\sqrt{1-\epsilon^2}-\alpha} = 1 - (\sqrt{1-\epsilon^2} - \alpha)^2 - \frac{\epsilon^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2}$$

Usando las desigualdades de los lemas queda

$$z^2 \Big|_{\rho=\sqrt{1-\epsilon^2}-\alpha} \leq \epsilon^2 - \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{1-\epsilon^2} - \epsilon^2 \left(1 + 2\frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)$$

⁴si $\alpha = k\epsilon$ la cota inferior para $z dz/d\rho$ se escribe como:

$$2(\alpha - \epsilon) + \frac{1}{\epsilon}(1 - 3\alpha/\epsilon) = k(2\epsilon^2 - 3) + (1 - 2\epsilon^2) \geq 0$$

Una cota inferior para k es:

$$k > \frac{1 - 2\epsilon^2}{3 - 2\epsilon^2} > 0$$

Para $k > 0$ pediremos que $\epsilon < 1/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 &= -\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{1-\epsilon^2} - 2\frac{\alpha\epsilon^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\
 &\leq -\alpha^2 + 4\alpha\sqrt{1-\epsilon^2} - \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \leq 2\alpha \frac{1-2\epsilon^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \alpha^2
 \end{aligned}$$

Por los argumentos usados anteriormente y si α cercano a cero, z^2 es:

$$z^2 = O(\alpha) \quad \rightarrow \quad z = O(\alpha^{1/2})$$

Entonces con este último resultado concluimos que

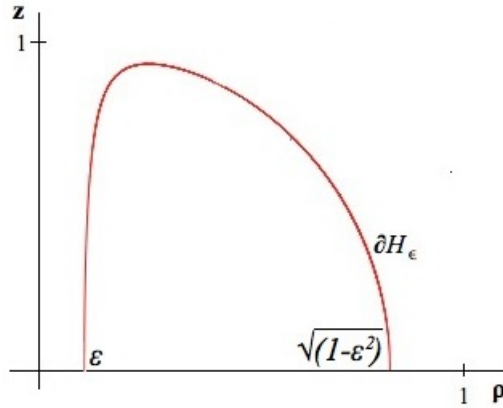
$$\frac{dz}{d\rho} = O\left(\frac{1}{\alpha^{1/2}}\right)$$

En particular si $\alpha = O(\epsilon)$, $dz/d\rho = O(\epsilon^{-1/2})$

□

Del corolario anterior vemos que la derivada decrece del mismo orden que z^{-1} lo hace para valores de ρ cercanos a $\sqrt{1-\epsilon^2}$. En el caso de ρ cercano a ϵ la derivada $dz/d\rho$ es ϵ^{-1} veces más grande que el valor de z , es decir esta función crece mucho más rápido alrededor de este cero que lo que decrece alrededor del otro (Veáse las ecuaciones (5.9) y (5.11)). Es por eso que decimos que los análisis posteriores requieren mucho mayor cuidado alrededor de este punto que en cualquier otro.

$z(\rho)$ es semejante a la siguiente figura.



Usemos coordenadas polares para describir a la línea de corriente ($\rho = \sigma \sin \theta$, $z = \sigma \cos \theta$).

$$\sigma^2 \sin^2 \theta (1 - \sigma^2) = \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \tag{5.12}$$

esta expresión es una cuadrática en σ^2 , se obtiene:

$$\sigma^4 - \sigma^2 + \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta} = 0$$

Al igual que antes, esta expresión es un cuadrática en σ^2 , de modo que tendremos:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}$$

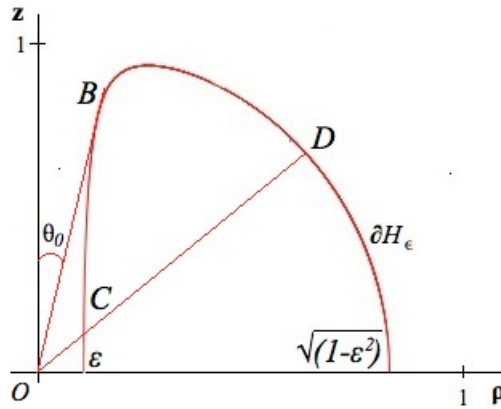
Es decir existen dos posibles valores positivos para σ^2 , ya que el término de la raíz es menor a $1/2$.

La condición para que σ^2 esté en los reales es:

$$\sin^2 \theta \geq 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2) \quad (5.13)$$

pues ello hace al radicando mayor o igual a cero. Es decir existe un ángulo crítico θ_c donde se alcanza la igualdad de la expresión (5.13); para este valor del radio, y a partir de ese valor (θ_c) se bifurca en dos valores de σ para cada $\theta \in (\theta_c, \pi/2]$, o no existen algún valor real de σ si $\theta < \theta_0$.

El siguiente dibujo muestra el ángulo crítico (el segmento OB) muestra el único radio, mientras que los segmentos OC y OD son los dos posibles radios para un ángulo mayor al crítico.



Por esta situación es conveniente usar coordenadas polares pero con el eje polar sobre la recta $\rho = \epsilon$, el precio a pagar es que para valores del nuevo ángulo polar cercanos a cero el radio crecerá demasiado rápido, en donde debemos hacer el análisis antes mencionado.

Tomaremos entonces el siguiente cambio de coordenadas:

$$\rho = \epsilon + \mathcal{S} \sin t \quad z = \mathcal{S} \cos t \quad 0 < t < \pi/2$$

Si la curva ($\partial\Omega$) que nos interesa encontrar es cercana a ∂H_ϵ podemos escribir un punto sobre la primera usando los vectores radiales y tangenciales a la segunda. Es decir, si $\hat{\mathcal{S}}$ es el vector unitario radial en el nuevo sistema de coordenadas y $\hat{\nu}$ es el vector normal a la curva ∂H_ϵ , diremos que si $p \in \partial\Omega$ entonces:

$$p = \mathcal{S}(\epsilon, t)\hat{\mathcal{S}}(\epsilon, t) + q(\epsilon, t)\hat{\nu}(\epsilon, t) \quad (5.14)$$

De (5.5) sabemos que la función de corriente esta dada por:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 - \epsilon^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \quad (5.15)$$

Con

$$G(\rho, \rho', z, z') = \frac{\rho\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} d\varphi' \quad (5.16)$$

Como deseamos aproximar a la curva $\partial\Omega$ por ∂H_ϵ la integral sobre Ω la partiremos en dos integrales una sobre H_ϵ y la otra sobre $\Omega - H_\epsilon$. Así evaluando en la frontera de nuestro vórtice tenemos:

$$\epsilon^2 = -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' + \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \quad (5.17)$$

Con $(\rho, z) \in \partial\Omega$.

Si suponemos que la frontera buscada $\partial\Omega$ es cercana a ∂H_ϵ podemos hacer un desarrollo de Taylor en los primeros dos términos de la expresión anterior. Para ello recordemos que si A es una función escalar definida en todo el dominio de estudio Ω diremos que su crecimiento a lo largo de una dirección está dado por la derivada direccional. Más aún si dicha función se evalúa sobre una curva, el crecimiento puede descomponerse en una contribución normal y otra tangencial a ella (pensando en dos dimensiones), es decir:

$$\text{si } A : H_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Entonces si $\Omega \subset H_0$ y se conoce el valor de A sobre la frontera diremos que con $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ tenemos:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = A(\mathbf{x}) + \nabla A|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$$

si $\mathbf{h} = h_\tau \hat{\tau} + q\hat{\nu}$ resultará:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = A(\mathbf{x}) + h_\tau \frac{\partial A}{\partial \tau} + q \frac{\partial A}{\partial \nu}$$

En nuestro caso, A son los primeros dos sumandos derechos de la expresión (5.17). Entonces esta función A es la función de corriente para un vórtice confinado a H_ϵ de vorticidad semejante a la del vórtice de Hill + un flujo laminar. Como

sabemos que en la frontera (∂H_ϵ) A se torna constante entonces $\partial A/\partial \tau = 0$ de donde resulta:

$$\begin{aligned} A|_{\partial\Omega} &= \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial\Omega} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ &\quad + q \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} + \mathcal{N}_1(q) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Donde $\mathcal{N}_1(q)$ es el error de la aproximación.

Para la integral restante se plantea algo semejante. Por la proximidad de las curvas $\partial\Omega$ y ∂H_ϵ podemos pensar que $G(\rho, \rho', z, z')$ es constante en la dirección normal a ∂H_ϵ entre las dos curvas. A primer orden tenemos:

$$\frac{5}{\pi} \iint_{\Omega-H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \Big|_{\partial\Omega} = \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') q(\rho', z') d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} + \mathcal{N}_2(q) \quad (5.19)$$

Con $\mathcal{N}_2(q)$ el error en la aproximación.

Juntando estas expresiones, la ecuación (5.17) es de la forma:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial\Omega} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ &\quad + q \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ &\quad + \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') q(\rho', z') d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} + \mathcal{N}_2(q) + \mathcal{N}_1(q) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Es decir, a primer orden, consideramos que el problema es la suma de tres contribuciones: *a)* el efecto de un vórtice confinado a H_ϵ más el flujo laminar, *b)* más el cambio de este flujo en la dirección normal, *c)* el efecto de una hoja de vórtices ∂H_ϵ , *d)* más los términos no lineales.

La variable q es la variable física del problema, pero para continuar debemos hacer un cambio de variable adecuado si es que queremos tratarlo como un problema de punto fijo. El planteamiento sugiere naturalmente hacer el cambio

de variable siguiente.

$$u = qg \quad \text{con} \quad g = \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \right] \Big|_{\partial H_\epsilon} \quad (5.21)$$

Dividiendo entre ρ la expresión (5.20) se puede llevar a:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{\rho} = & \left(-\frac{2}{3} \rho + \frac{5}{\rho\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ & - \frac{-q}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ & + \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \frac{G(\rho, \rho', z, z') u(\rho', z')}{\rho g(\rho', z')} d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} + \frac{\mathcal{N}_2(q) + \mathcal{N}_1(q)}{\rho} \end{aligned}$$

Para simplificar la notación usemos que si una función ($f(\rho, z)$) está evaluada en las variables primadas, al escribir f' se entenderá que esta se evalúa en las variables mencionadas.

Haciendo el cambio de variable señalado en (5.21) tendremos:

$$\frac{\epsilon^2}{\rho} - \left(-\frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{\rho\pi} \iint_{H_\epsilon} G d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} = -u + \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \frac{Gu'}{\rho g'} d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} + \frac{\mathcal{N}_2(q) + \mathcal{N}_1(q)}{\rho}$$

Si renombramos los términos de la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -f_\epsilon & \equiv \frac{\epsilon^2}{\rho} - \left(-\frac{2}{3} \rho + \frac{5}{\rho\pi} \iint_{H_\epsilon} G d\rho' dz' \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ \mathcal{H}_\epsilon u & \equiv \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \frac{Gu'}{\rho g'} d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} \\ \mathcal{N}_\epsilon u & \equiv \frac{\mathcal{N}_2(q) + \mathcal{N}_1(q)}{\rho} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Obtendremos la siguiente ecuación no lineal en u :

$$u - \mathcal{H}_\epsilon u = f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u \quad (5.23)$$

f_ϵ puede determinarse explícitamente. Además no es necesario usar otro sistema de coordenadas para conocer su valor pero por el momento haremos esperar este cálculo para el final.

En los otros dos sumando usaremos las coordenadas \mathcal{S}, t con el objeto de tener una dependencia explícita del parámetro perturbativo. Entonces reescribamos sus expresiones correspondientes en estas coordenadas.

Renombraremos $K_\epsilon(t, t')$ al núcleo de la integral de \mathcal{K}_ϵ , es decir:

$$\mathcal{K}_\epsilon u = \frac{5}{\pi} \int_0^\pi K_\epsilon(t, t') u' dt' = \frac{5}{\pi} \int_0^\pi \frac{G}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t) g'} \frac{d\tau'}{dt'} u' dt'$$

$$\mathcal{N}_\epsilon u \equiv \frac{\mathcal{N}_2(q) + \mathcal{N}_1(q)}{\epsilon + \mathcal{S} \sin t}$$

Con estas expresiones se pretende plantear el problema como uno de punto fijo en algún espacio adecuado a las condiciones del sistema.

Se mostrará más adelante que el núcleo del operador $(I - \mathcal{K}_\epsilon)$ es vacío lo que nos sirve para justificar la existencia de la inversa de dicho operador y a su vez la unicidad de las soluciones a la ecuación $(I - \mathcal{K}_\epsilon)u = g$.

Ello será de utilidad después al hacer el proceso iterativo del método punto fijo ya que se propondrá:

$$(I - \mathcal{K}_\epsilon)u_0 = f_\epsilon$$

$$(I - \mathcal{K}_\epsilon)u_i = f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u_{i-1} \quad \text{para } i \geq 1$$

Lo que implica ver que al menos en un subconjunto pequeño en el espacio de trabajo, el operador $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}[f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u]$ es una contracción como función de u .

Por el momento terminaremos este capítulo aquí, para en el siguiente calcular algunas cotas que serán de utilidad posteriormente.

Bibliografía

- [1] GUYON E. *Physical hydrodynamics* Oxford, 2001, New York USA.
- [2] PROTTER M. H. y WEINBERGER H. F. *Maximum principles in differential equations* Springer-Verlag, 1984, New York USA.
- [3] KOLMOGOROV A. N. y FOMIN S. V. *Introductory real analysis* Dover Publications Inc., 1970, USA.
- [4] COURANT R. y HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics Vol. 2*, Interscience Publishers, 1966, USA.
- [5] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132**
- [6] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [7] BOYLING B. *A Short Proof of the Pi Theorem of Dimensional Analysis* Journal of Applied Mathematics and Physics (1979), Vol. 30 pp 531-533

Capítulo 6

Estimaciones útiles

En esta sección encontraremos algunas cotas que nos serán de utilidad para demostrar en capítulos siguientes la existencia de la inversa de los operadores mencionados anteriormente.

Teorema 4. *De la expresión (5.16) se muestra que G está acotado de las formas siguientes:*

$$0 \leq G \leq \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \sinh^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}a} \quad (6.1)$$

$$0 \leq G \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{4a^3} \quad (6.2)$$

$$\text{Con } a^2 = \frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{4\rho\rho'}.$$

Demostración. En ambas expresiones vemos que la cota inferior es cero, hagamos esta desigualdad.

La expresión para el integrando de G es simétrico respecto a 0, entonces la integral de $[-\pi, \pi]$ es dos veces la de $[0, \pi]$, por eso estudiaremos en algunos casos este último intervalo.

Partiendo la región de integración en $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$ y evaluamos el integrando en cada una resulta:

$$\blacksquare \varphi' \in [0, \pi/2]$$

$$\cos \varphi' \geq 0 \text{ entonces } -2\rho\rho' \cos \varphi' \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \geq \frac{\cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$\blacksquare \varphi' \in [\pi/2, \pi]$$

$$\cos \varphi' \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -2\rho\rho' \cos \varphi' \geq 0$$

$$0 \leq \frac{1}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \leq \frac{1}{[\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

Multiplicando por $\cos \varphi'$

$$0 \geq \frac{\cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \geq \frac{\cos \varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \geq \int_0^\pi \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = 0$$

Es decir $G \geq 0$.

Las cotas superiores se harán de manera independiente; sabemos que G tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\rho\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\rho\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 2\rho\rho'(1 - \cos \varphi')]^{1/2}} \\ &= \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[a^2 + \sin^2 \frac{\varphi'}{2}]^{1/2}} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $\sin \varphi'/2 \equiv v$ tendremos:

$$\cos \varphi' = 1 - 2v^2 \quad \frac{d\varphi'}{dv} = \frac{2}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Así la expresión para G se transforma en

$$G = \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = \rho^{1/2}\rho'^{3/2} \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} \quad (6.3)$$

Notemos que el signo del integrando es el mismo que el de $(1 - 2v^2)$ que es positiva si $v < 1/\sqrt{2}$, cero en la igualdad y negativo para el complemento.

Como $G \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\rho^{1/2}\rho^{3/2}} &= \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} - \left| \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \right| \\ &\leq \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \end{aligned}$$

Como:

$$\frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{1-v^2} - \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} \leq 1 \quad \text{para } v \in [0, 1]$$

$$\therefore \frac{G}{\rho^{1/2}\rho^{3/2}} \leq \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \leq \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Así

$$0 \leq G \leq \rho^{1/2}\rho^{3/2} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Para la segunda expresión recordemos que:

$$\int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} dv = \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta = 0 \quad (6.4)$$

Así tendremos:

$$0 \leq \frac{G}{\rho^{1/2}\rho^{3/2}} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \left(\left[1 + \frac{v^2}{a^2} \right]^{-1/2} - 1 \right) dv$$

Como $G \geq 0$ partiremos la integral en dos

$$\begin{aligned} \frac{G}{\rho^{1/2}\rho^{3/2}} &= \frac{1}{a} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \left(\left[1 + \frac{v^2}{a^2} \right]^{-1/2} - 1 \right) dv \\ &\quad + \frac{1}{a} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \left(\left[1 + \frac{v^2}{a^2} \right]^{-1/2} - 1 \right) dv \end{aligned}$$

Es decir, la primera integral es negativa mientras que la segunda es positiva. Usando las cotas de los lemas del capítulo anterior resulta

$$0 \geq \left[1 + \frac{v^2}{a^2}\right]^{-1/2} - 1 \geq -\frac{v^2}{2a^2}$$

$$\frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \left(\left[1 + \frac{v^2}{a^2}\right]^{-1/2} - 1 \right) \leq -\frac{1-2v^2}{2\sqrt{1-v^2}} \frac{v^2}{a^2} \quad \text{con } v \in [1/\sqrt{2}, 1]$$

Así llegamos

$$0 \leq \frac{G}{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}} \leq \frac{-1}{2a^3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} v^2 dv$$

Entonces

$$-\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} v^2 dv = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin^2 x - 1) \sin^2 x dx \leq -\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x dx \leq \frac{1}{2} \quad (6.5)$$

pues $\sin^2 x \leq 1$.

Con esta última cota queda demostrado que:

$$0 \leq G \leq \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{4a^3} \quad \forall a$$

□

De la expresión (6.1) se ve el carácter logarítmico de G cuando $(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 \rightarrow 0$, mientras que (6.2) será útil cuando $\rho \rightarrow 0$ o $\rho' \rightarrow 0$ dejando a z o z' fijos.

Volviendo al tema, queremos ver que si \mathcal{K}_ϵ es cercano \mathcal{K}_0 para ϵ pequeño y \mathcal{K}_0^{-1} existe, entonces \mathcal{K}_ϵ también.

Necesitamos encontrar una expresión para \mathcal{K}_0 .

Lema 4. De la expresión para $K_\epsilon(t, t')$ se obtiene una expresión para $K_0(t, t')$.

$$K_0(t, t') = \begin{cases} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} & \text{sobre } (0, \pi) \times (0, \pi), \quad t \neq t' \\ 0 & \text{para } t, t' = 0 \text{ ó } \pi \quad t \neq t' \end{cases} \quad (6.6)$$

$\Gamma_\epsilon(t, t')$ se usa para denotar al operador $G(\rho, \rho', z, z')$ evaluado en $(\rho', z'), (\rho, z) \in \partial H_\epsilon$

Demostración. Sabemos que si $\epsilon = 0$ estamos sobre la frontera del vórtice de Hill es decir $\mathcal{S} = 1$. Por otro lado, estamos trabajando en las coordenadas polares

usuales (σ, θ) , entonces usando la expresión (5.21) tendremos para $g(0, t)$ lo siguiente:

$$g(0, t) = \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3} \rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_0} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \right] \Big|_{\partial H_0}$$

El término después de la derivada normal sabemos (por el capítulo anterior) que es la expresión (5.3), mientras que la derivada normal en ese caso será la derivada con respecto a σ , pues estamos sobre una esfera.

$$g(0, t) = \left[-\frac{1}{\sigma \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \sigma} \{ \rho^2 (1 - \rho^2 - z^2) \} \right] \Big|_{\partial H_0} = -2 \sin \theta (1 - 2\sigma^2) \Big|_{\sigma=1} = 2 \sin \theta$$

En la frontera del vórtice de Hill la longitud de arco esta dada por $\tau = \theta' + cte$ entonces es fácil ver:

$$\frac{d\tau'}{dt'} = \frac{d\tau'}{d\theta'} = 1$$

Juntando todas las expresiones anteriores se tiene:

$$\mathcal{H}_0(t, t') = \mathcal{H}_\epsilon(t, t') \Big|_{\epsilon=0} = \frac{5}{\pi} \frac{G \frac{d\tau'}{dt'}}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t) g'} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'}$$

Recordemos que esta expresión es válida si $t \neq t'$ (es singular en $t = t'$). Si $a = 0$, entonces

$$G = \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{v}$$

es divergente.

Ahora bien si t o t' son 0 ó π ($t \neq t'$) y usando (6.2) con $\epsilon = 0$ tenemos

$$0 \leq \frac{G}{\sin t \sin t'} \Big|_{\epsilon=0} \leq \frac{2\rho^2 \rho'^3}{\sin t \sin t' [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{2 \sin t \sin^2 t'}{[(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Por lo tanto si t o t' son 0 ó π y $t \neq t'$

$$K_0 = 0$$

□

Lo siguiente por hacer es dar una estimación para el cambio en G al evaluar en puntos cercanos, pues se usará al estimar la diferencia entre $\mathcal{H}_\epsilon - \mathcal{H}_0$.

Teorema 5. Si G está dado como en la expresión (5.16) y llamando $\bar{G} = G(\rho + \xi, \rho' + \xi', z + \eta, z' + \eta')$ con $h_0 = \|(\xi, \eta)\| \ll \sigma$ y $h'_0 = \|(\xi', \eta')\| \ll \sigma'$ y $G = G(\rho, \rho', z, z')$ entonces

$$|\bar{G} - G| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{4a^3} \left[\frac{2|\xi|}{\rho} + \frac{3|\xi'|}{\rho'} + \frac{3(h_0 + h'_0)}{\varsigma} \right] \quad (6.7)$$

$$|\bar{G}-G| \leq \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{2} \left[\left(\frac{|\xi|}{\rho} + \frac{|\xi'|}{\rho'} \right) \left(\sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + 1 \right) + \frac{2(h_0 + h'_0)}{\varsigma} + 2\frac{\xi'}{\rho'} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right] \quad (6.8)$$

con $\varsigma^2 = (\rho - \rho')^2 + (z - z')^2$

Demostración. si h_0 y h'_0 son mucho menores a uno podemos usar serie de Taylor para estimar esta diferencia:

$$\bar{G} - G = G_\rho \xi + G_{\rho'} \xi' + G_z \eta + G_{z'} \eta' + O(h_0^2 + h'_0{}^2) \quad (6.9)$$

Si

$$f(a) = \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{a^2+v^2}} dv \geq 0 \quad (6.10)$$

entonces tendremos:

$$G_\rho = \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\rho'^{3/2}f(a) + \rho^{1/2}\rho'^{3/2}\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial \rho}, \quad G_z = \rho^{1/2}\rho'^{3/2}\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial z}$$

$$G'_\rho = \frac{3}{2}\rho^{1/2}\rho'^{1/2}f(a) + \rho^{1/2}\rho'^{3/2}\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial \rho'}, \quad G'_z = \rho^{1/2}\rho'^{3/2}\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial z'}$$

Por una derivación vemos que:

$$\frac{df}{da} = -a \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+v^2)^{3/2}} dv$$

Corolario 6. Dada $f(a)$ como en (6.10) entonces $\frac{df}{da} \leq 0$

Demostración. Para ver que signo tiene esta expresión partiremos la integral en dos, como hicimos para G

$$\frac{-1}{a} \frac{df}{da} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+v^2)^{3/2}} dv + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+v^2)^{3/2}} dv$$

y observemos que si $v \in [0, 1/\sqrt{2}]$

$$\begin{aligned} 1-2v^2 &\geq 0 \\ \frac{1}{(a^2+v^2)^{3/2}} &\geq \frac{1}{(a^2+1/2)^{3/2}} \\ \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+v^2)^{3/2}} &\geq \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+1/2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Así

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}(a^2+v^2)^{3/2}} dv \geq \frac{1}{(a^2+1/2)^{3/2}} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} dv \geq 0 \quad (6.11)$$

Ahora bien si $v \in [1/\sqrt{2}, 1]$

$$\begin{aligned} 1 - 2v^2 &\leq 0 \\ \frac{1}{(a^2 + v^2)^{3/2}} &\leq \frac{1}{(a^2 + 1/2)^{3/2}} \\ 0 &\geq \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}(a^2 + v^2)^{3/2}} \geq \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}(a^2 + 1/2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Con esto

$$0 \geq \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}(a^2 + v^2)^{3/2}} dv \geq \frac{1}{(a^2 + 1/2)^{3/2}} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} dv \quad (6.12)$$

Entonces juntando (6.11) y (6.12) concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{a} \frac{df}{da} &\geq \frac{1}{(a^2 + 1/2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} dv = \frac{1}{(a^2 + 1/2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0 \\ \therefore \frac{df}{da} &\leq 0 \end{aligned}$$

□

Tomamos la expresión para a y derivamos respecto a ρ , ρ' , z ó z'

$$\begin{aligned} 2a \frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{(z - z')}{2\rho\rho'} = 2 \frac{\varsigma^2}{4\rho\rho'} \frac{(z - z')}{\varsigma^2} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial z} = a \frac{(z - z')}{\varsigma^2} \\ 2a \frac{\partial a}{\partial z'} &= -\frac{(z - z')}{2\rho\rho'} = -2 \frac{\varsigma^2}{4\rho\rho'} \frac{(z - z')}{\varsigma^2} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial z'} = -a \frac{(z - z')}{\varsigma^2} \\ 2a \frac{\partial a}{\partial \rho} &= \frac{(\rho - \rho')}{2\rho\rho'} - \frac{\varsigma^2}{4\rho^2\rho'} = 2 \frac{\varsigma^2}{4\rho\rho'} \left(\frac{(\rho - \rho')}{\varsigma^2} - \frac{1}{2\rho} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial \rho} = a \left(\frac{(\rho - \rho')}{\varsigma^2} - \frac{1}{2\rho} \right) \\ 2a \frac{\partial a}{\partial \rho'} &= -\frac{(\rho - \rho')}{2\rho\rho'} - \frac{\varsigma^2}{4\rho\rho'^2} = -2 \frac{\varsigma^2}{4\rho\rho'} \left(\frac{(\rho - \rho')}{\varsigma^2} + \frac{1}{2\rho'} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial \rho'} = -a \left(\frac{(\rho - \rho')}{\varsigma^2} + \frac{1}{2\rho'} \right) \end{aligned}$$

Juntando estos resultados en (6.9)

$$\begin{aligned} \bar{G} - G &= \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\frac{\xi}{2\rho} f(a) + \xi \frac{df}{da} \frac{\partial a}{\partial \rho} + \frac{3\xi'}{2\rho'} f(a) + \xi' \frac{df}{da} \frac{\partial a}{\partial \rho'} + \eta \frac{df}{da} \frac{\partial a}{\partial z} + \eta' \frac{df}{da} \frac{\partial a}{\partial z'} \right] \\ &\quad + O(h_0^2 + h_0'^2) \end{aligned}$$

Reagrupando la expresión anterior y substituyendo los valores para las parciales de a vemos que

$$\begin{aligned} \bar{G} - G &= \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\frac{\xi}{2\rho} \left(f(a) - a \frac{df}{da} \right) + \frac{\xi'}{2\rho'} \left(3f(a) - a \frac{df}{da} \right) \right. \\ &\quad \left. + a \frac{df}{da} \left(\frac{(\rho - \rho')\xi + (z - z')\eta}{\varsigma^2} - \frac{(\rho - \rho')\xi' + (z - z')\eta'}{\varsigma^2} \right) \right] \\ &\quad + O(h_0^2 + h_0'^2) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Ahora encontremos una cota para $-a \frac{df}{da}$

$$0 \leq -a \frac{df}{da} = a^2 \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2} (a^2 + v^2)^{3/2}} dv = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \left[\left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-3/2} - 1 \right] dv$$

el último paso esta justificado por la identidad (6.4). Observemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-3/2} &= \left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-1} \left[\frac{v^2}{a^2} + 1 - \left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-1/2} \right] \\ &\leq \left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-1} \left[\frac{v^2}{a^2} + \frac{v^2}{2a^2} \right] \leq \frac{3}{2} \frac{v^2}{a^2} \end{aligned}$$

De este modo:

$$0 \geq \left(1 + \frac{v^2}{a^2} \right)^{-3/2} - 1 \geq -\frac{3}{2} \frac{v^2}{a^2}$$

Para concluir que:

$$-a \frac{df}{da} \leq \frac{-3}{2a^3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} v^2 dv \leq \frac{3}{4a^3}$$

Este último paso es gracias a (6.5). Aplicando esta cota llegamos a:

$$\begin{aligned} |\bar{G} - G| &\leq \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\frac{|\xi|}{\rho} \frac{1}{2a^3} + \frac{|\xi'|}{2\rho'} \frac{3}{2a^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4a^3} \left| \frac{(\rho - \rho')\xi + (z - z')\eta}{\varsigma^2} - \frac{(\rho - \rho')\xi' + (z - z')\eta'}{\varsigma^2} \right| \right] \end{aligned}$$

Notemos que los términos dentro del valor absoluto pueden verse como productos internos del vector $(\rho - \rho', z - z')$ con (ξ, η) ó (ξ', η') ; entonces por las propiedades de este producto sabemos que:

$$\begin{aligned} |(\rho - \rho')\xi + (z - z')\eta| &\leq \varsigma h_0 \\ |(\rho - \rho')\xi' + (z - z')\eta'| &\leq \varsigma h_0' \end{aligned}$$

Llegando a la expresión final

$$|\bar{G} - G| \leq \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{4a^3} \left[\frac{2|\xi|}{\rho} + \frac{3|\xi'|}{\rho'} + 3\frac{h_0 + h'_0}{\varsigma} \right]$$

Con esto terminamos la primera cota.

Para la segunda, volvamos a la expresión (6.13) y recordemos que

$$f(a) \leq \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} 0 &\leq -a \frac{df}{da} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)^{-3/2} dv \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)^{-3/2} dv = \frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2}} \leq 1 \end{aligned}$$

Usando estas expresiones en 6.13 resulta la cota

$$|\bar{G}-G| \leq \rho^{1/2}\rho'^{3/2} \left[\frac{|\xi|}{2\rho} \left(\sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + 1 \right) + \frac{|\xi'|}{2\rho'} \left(3 \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + 1 \right) + \frac{h_0 + h'_0}{\varsigma} \right]$$

Reacomodando llegamos a la expresión final,

$$|\bar{G}-G| \leq \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{2} \left[\left(\frac{|\xi|}{\rho} + \frac{|\xi'|}{\rho'} \right) \left(\sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + 1 \right) + 2\frac{h_0 + h'_0}{\varsigma} + 2\frac{|\xi'|}{\rho'} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right]$$

□

Estas cotas, al igual que las obtenidas para G se usarán dependiendo de la región en la que evaluamos, porque recordemos:

$$\text{si } \Gamma_0(t, t') \rightarrow \epsilon = 1, \quad \mathcal{S} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varsigma^2 &= (\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 = (\sin t - \sin t')^2 + (\cos t - \cos t')^2 = 2(1 - \cos |t - t'|) \\ \therefore \quad \varsigma^2 &= 4 \sin^2 \frac{|t - t'|}{2} \end{aligned}$$

Entonces, si $t = t'$ es claro que $\varsigma = 0$, es decir para puntos $t \sim t'$ se usará la segunda cota mientras que si t no es cercano a t' usaremos la primera.

Otra cota que será útil en el desarrollo de este trabajo es la siguiente.

Teorema 6. Si G está dado como en la expresión (5.16) y en \bar{G} tomamos $h'_0 = 0$ (ver teorema 5) y $h_0 \ll \sigma$ es cierto que:

$$\left| \bar{G}|_{h'_0=0} - G - h_0 \frac{\partial G}{\partial h_0} \right| \leq \begin{cases} 22 h_0^2 \frac{\rho^{1/2} \rho^{3/2}}{a^3} \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\rho^2} \right] \\ 18 h_0^2 \rho^{1/2} \rho^{3/2} \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right] \end{cases} \quad (6.14)$$

Este teorema, solo menciona que la suma de los términos de orden mayor o igual a dos en el desarrollo de Taylor de \bar{G} están acotados. Para probar esto, tendremos que calcular segundas derivadas del núcleo. Usando las expresiones calculadas antes para las primeras derivadas tenemos:

$$G_\rho = \frac{1}{2} \rho^{-1/2} \rho^{3/2} f(a) + \rho^{1/2} \rho^{3/2} a \left(\frac{\rho - \rho'}{\zeta^2} - \frac{1}{2\rho} \right) \frac{df}{da} \quad (6.15)$$

$$G_z = \rho^{1/2} \rho^{3/2} a \left(\frac{z - z'}{\zeta^2} \right) \frac{df}{da} \quad (6.16)$$

Derivando 6.15 respecto a ρ y 6.16 respecto a z y ρ tenemos:

$$G_{\rho\rho} = -\frac{1}{4} \rho^{-3/2} \rho^{3/2} f(a) + \rho^{-1/2} \rho^{3/2} a \left(\frac{\rho - \rho'}{\zeta^2} - \frac{1}{2\rho} \right) \frac{df}{da} \\ + a \rho^{1/2} \rho^{3/2} \left[\left(\frac{1}{\zeta^2} - 2 \frac{(\rho - \rho')^2}{\zeta^4} + \frac{1}{2\rho^2} \right) \frac{df}{da} + \left(\frac{\rho - \rho'}{\zeta^2} - \frac{1}{2\rho} \right)^2 \left(\frac{df}{da} + a \frac{d^2 f}{da^2} \right) \right]$$

$$G_{zz} = \frac{a \rho^{1/2} \rho^{3/2}}{\zeta^2} \left[\frac{df}{da} + \frac{(z - z')^2}{\zeta^2} \left(a \frac{d^2 f}{da^2} - \frac{df}{da} \right) \right]$$

$$G_{z\rho} = \frac{1}{2} \rho^{-1/2} \rho^{3/2} a \left(\frac{z - z'}{\zeta^2} \right) \frac{df}{da} \\ + a \rho^{1/2} \rho^{3/2} \left[-2 \frac{(z - z')(\rho - \rho')}{\zeta^4} \frac{df}{da} + \left(\frac{z - z'}{\zeta^2} \right) \left(\frac{\rho - \rho'}{\zeta^2} - \frac{1}{2\rho} \right) \left(\frac{df}{da} + a \frac{d^2 f}{da^2} \right) \right]$$

De cálculos anteriores sabemos que:

$$f(a) \leq \frac{1}{4a^3} \quad |f'(a)| < \frac{3}{4a^4}$$

Falta encontrar una estimación semejante para $f''(a)$, para ello hay que derivar la expresión de $f'(a)$.

$$f''(a) = - \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{(a^2 + v^2)^{3/2}} + 3a^2 \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{(a^2 + v^2)^{5/2}}$$

Es fácil ver de la cota para $f'(a)$ que la primera integral se acota por $3/(4a^5)$, mientras que en la segunda integral solo hay que notar que es positiva pues podemos partir en dos.

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}}$$

en la primera parte el integrando es positivo mientras que en la segunda, es negativo, y cada una de ellas se acota por abajo como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} &> \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+\frac{1}{2})^{5/2}} \\ \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} &> \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+\frac{1}{2})^{5/2}} \\ \therefore \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} &> \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+\frac{1}{2})^{5/2}} = 0 \end{aligned}$$

Procediendo como antes resulta que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} &= \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} - \frac{1}{a^5} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} dv \\ &= \frac{1}{a^5} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{(1+\frac{v^2}{a^2})} \left(\left[1+\frac{v^2}{a^2}\right]^{-3/2} - 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) dv \end{aligned}$$

Haciendo el mismo desarrollo que en el caso de $f'(a)$ se llega a:

$$\int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} \leq -\frac{5}{2a^7} \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} v^2 dv \leq \frac{5}{4a^7}$$

Concluyendo así que:

$$f''(a) \leq \frac{18}{4a^5}$$

Si usamos que $(z-z')/\varsigma \leq 1$ y $(\rho-\rho')/\varsigma \leq 1$ podemos acotar las segundas derivadas de G de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} |G_{\rho\rho}| &\leq \frac{1}{4} \rho^{-3/2} \rho'^{3/2} f(a) + \rho^{-1/2} \rho'^{3/2} \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right) \left| a \frac{df}{da} \right| \\ &\quad + a \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\left(\frac{3}{\varsigma^2} + \frac{1}{2\rho^2} \right) \left| \frac{df}{da} \right| + \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right)^2 \left(\left| \frac{df}{da} \right| + a \left| \frac{d^2f}{da^2} \right| \right) \right] \end{aligned}$$

$$|G_{zz}| \leq \frac{a \rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{\varsigma^2} \left[\left| \frac{df}{da} \right| + \left(a \left| \frac{d^2f}{da^2} \right| + \left| \frac{df}{da} \right| \right) \right]$$

$$|G_{z\rho}| \leq \frac{1}{2\varsigma} \rho^{-1/2} \rho'^{3/2} a \left| \frac{df}{da} \right| \\ + a \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[2 \frac{1}{\varsigma^2} \left| \frac{df}{da} \right| + \left(\frac{1}{\varsigma} \right) \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right) \left(\left| \frac{df}{da} \right| + a \left| \frac{d^2f}{da^2} \right| \right) \right]$$

El siguiente paso es sustituir las cotas para $f(a)$ y sus derivadas.

$$|G_{\rho\rho}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left[\frac{17}{8\rho^2} + 3 \frac{2}{\varsigma\rho} + \frac{30}{4\varsigma^2} \right]$$

$$|G_{zz}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \frac{6}{\varsigma^2}$$

$$|G_{z\rho}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left[\frac{3}{2} \frac{2}{\varsigma\rho} + \frac{27}{4\varsigma^2} \right]$$

Para continuar, solo habrá que recordar que $2/(\varsigma\rho) \leq \rho^{-2} + \varsigma^{-2}$, con esto llegamos a

$$|G_{\rho\rho}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left[\frac{41}{8\rho^2} + \frac{7}{\varsigma^2} \right]$$

$$|G_{zz}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left[\frac{6}{\varsigma^2} \right]$$

$$|G_{z\rho}| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left[\frac{33}{4\varsigma^2} + \frac{3}{2\rho^2} \right]$$

Por el desarrollo de Taylor, sabemos que

$$\bar{G}|_{h'_0=0} - G - h_0 \frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T [\text{Hess}G|_{\mathbf{R}_0}] \mathbf{R} \quad \text{con} \quad \mathbf{R} = k(\xi, 0, \eta, 0), \quad \mathbf{R}_0 = (\rho, \rho', z, z') \quad k < 1$$

Usando que $\xi = kh_0 \sin \alpha$ y $\eta = kh_0 \cos \alpha$ y las relaciones encontradas líneas arriba tendremos:

$$\left| \bar{G}|_{h'_0=0} - G - h_0 \frac{\partial G}{\partial h_0} \right| \leq 22h_0^2 \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{a^3} \left\{ \frac{1}{\varsigma^2} + \frac{1}{\rho^2} \right\} \Big|_{\mathbf{R}_0}$$

Esta es la primera cota buscada.

Para la restante se hace algo análogo, solo que aquí el punto clave esta en notar que

$$\int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \geq 0 \quad \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} \geq 0 \quad \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{5/2}} \geq 0$$

esto se mostró anteriormente, cada uno por separado. Con esto en mente, las integrales sobre el intervalo $[0, 1/\sqrt{2}]$ domina sobre el integral en el intervalo restante; de este modo encontramos:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} \leq \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Lo mismo se puede hacer en las demás

$$\int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} \leq \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{2a^2+1}} \leq \frac{1}{a^2}$$

Entonces $|f'(a)| \leq 1/a$. Por otro lado

$$\begin{aligned} |f''(a)| &\leq \max_{0 \leq v \leq 1} \left| \frac{3a^2}{a^2+v^2} - 1 \right| \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{(a^2+v^2)^{3/2}} dv \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1-2v^2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} \leq 2 \int_0^1 \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} \leq 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dv}{(a^2+v^2)^{3/2}} \leq \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

Con las estimaciones anteriores podemos encontrar:

$$|G_{\rho\rho}| \leq \rho^{1/2}\rho^{3/2} \left\{ \frac{1}{4\rho^2} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right) + \left(\frac{3}{\varsigma^2} + \frac{1}{2\rho^2} \right) + 3 \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right)^2 \right\}$$

$$|G_{zz}| \leq 4 \frac{\rho^{1/2}\rho^{3/2}}{\varsigma^2}$$

$$|G_{z\rho}| \leq \rho^{1/2}\rho^{3/2} \left\{ \frac{1}{2\rho\varsigma} + 2 \frac{1}{\varsigma^2} + \frac{3}{\varsigma} \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right) \right\}$$

Usando de nuevo el hecho de que $2/(\rho\varsigma) \leq \rho^{-2} + \varsigma^{-2}$ llegamos a:

$$|G_{\rho\rho}| \leq \rho^{1/2}\rho^{3/2} \left\{ \frac{8}{\varsigma^2} + \frac{15}{4\rho^2} + \frac{1}{4\rho^2} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right\}$$

$$|G_{zz}| \leq 4 \frac{\rho^{1/2}\rho^{3/2}}{\varsigma^2}$$

$$|G_{z\rho}| \leq \rho^{1/2} \rho^{3/2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \frac{6}{\varsigma^2} \right\}$$

Con esto llegamos a:

$$\left| \bar{G}|_{h'_0=0} - G - h_0 \frac{\partial G}{\partial h_0} \right| \leq 18h_0^2 \rho^{1/2} \rho^{3/2} \left[\frac{1}{\varsigma^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \right]$$

Bibliografía

- [1] PROTTER M. H. y WEINBERGER H. F. *Maximum principles in differential equations* Springer-Verlag, 1984, New York USA.
- [2] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [3] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132**
- [4] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.

Capítulo 7

Estimación de \mathcal{S}

En los capítulos anteriores señalamos que era mejor opción describir a las líneas de corriente dentro del vortice de Hill en función de las variables \mathcal{S}, t , pero no mencionamos como encontrar una expresión manejable para la variable radial. En este capítulo encontramos dicha expresión y sus desarrollos asintóticos.

El problema central de este capítulo es hacer el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}\rho &= \epsilon + \mathcal{S} \sin t \\ z &= \mathcal{S} \cos t\end{aligned}$$

en la expresión (5.7). Si lo hacemos llegamos a:

$$(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)^2(1 - \epsilon^2 - \mathcal{S}^2 - 2\epsilon\mathcal{S} \sin t) = \epsilon^2(1 - \epsilon^2)$$

De este modo, los valores de \mathcal{S} donde la igualdad anterior es cierta, son los mismos que anulan a la expresión siguiente:

$$\mathcal{G}(\mathcal{S}, t, \epsilon) = \mathcal{S} \mathcal{F}(\mathcal{S}, t, \epsilon)$$

Con

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}, t, \epsilon) = -\mathcal{S}^3 \sin^2 t - 2\epsilon\mathcal{S}^2 \sin t(1 + \sin^2 t) + \mathcal{S}[\sin^2 t - \epsilon^2(1 + 5\sin^2 t)] + 2\epsilon \sin t(1 - 2\epsilon^2) \quad (7.1)$$

Sabemos que $\mathcal{S} = 0$ solo pasa para el caso $t = 0$, pues hay que recordar que la constante $\epsilon^2(1 - \epsilon^2)$ se eligió para que la curva corte al eje ρ en $\rho = \epsilon$.

Por tanto es conveniente estudiar los ceros de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}, t, \epsilon)$.

Supongamos que t, ϵ son fijos con $\epsilon > 0$ y suficientemente pequeño. \mathcal{F} es un polinomio cúbico en \mathcal{S} , y para estudiarlo habrá que analizar sus derivadas.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = -3\mathcal{S}^2 \sin^2 t - 4\epsilon\mathcal{S} \sin t(1 + \sin^2 t) + \sin^2 t - \epsilon^2(1 + 5\sin^2 t) \quad (7.2)$$

Es decir $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ es una parábola que abre hacia abajo.

Calculemos $\mathcal{F}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ para ver donde la derivada de \mathcal{F} alcanza su máximo.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = -6\mathcal{S} \sin^2 t - 4\epsilon \sin t(1 + \sin^2 t) \quad (7.3)$$

Así $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ alcanza su máximo en:

$$\mathcal{S}^* = \frac{-2\epsilon(1 + \sin^2 t)}{3 \sin t} = -\frac{2\epsilon}{3} \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) < 0$$

Si se cumple que $\sin^2 t \geq \epsilon^2/(1 - 5\epsilon^2)$ una de las raíces (\mathcal{S}_+) de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ es positiva mientras que la otra (\mathcal{S}_-) es negativa *i.e.* tenemos dos puntos críticos de \mathcal{F} .

De (7.1) notamos que si $\epsilon \leq 1/\sqrt{2}$, $\mathcal{F}(0) \geq 0$ y como \mathcal{F} es monótona continua, decreciente para $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}_+, \infty)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \rightarrow -\infty$ si $\mathcal{S} \rightarrow \infty$ afirmamos (por el teorema del valor intermedio) que existe una única raíz \mathcal{S}_3 de \mathcal{F} que satisface $\mathcal{S}_3 \geq 0$. Por un argumento similar se garantiza la existencia de una segunda raíz simple (\mathcal{S}_1) en el intervalo $(-\infty, \mathcal{S}_-)$.

Tomando los ceros de $F_{\mathcal{S}}$ tenemos:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} -\frac{2}{3}\epsilon\left(\frac{1}{\sin t} + \sin t\right) + \sqrt{3 + \epsilon^2\left(4\sin^2 t - 7 + \frac{1}{\sin^2 t}\right)}/3 \equiv \mathcal{S}_+ \\ -\frac{2}{3}\epsilon\left(\frac{1}{\sin t} + \sin t\right) - \sqrt{3 + \epsilon^2\left(4\sin^2 t - 7 + \frac{1}{\sin^2 t}\right)}/3 \equiv \mathcal{S}_- \end{cases}$$

Si hacemos una expansión suponiendo $\epsilon \ll \sin t$ obtendremos las siguientes expresiones.

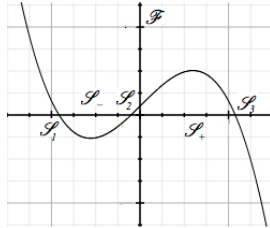
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sin t} + \sin t\right)\epsilon + \frac{\epsilon^2}{6\sqrt{3}}\left(4\sin^2 t - 7 + \frac{1}{\sin^2 t}\right) + O(\epsilon^4) \\ \mathcal{S}_- &= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sin t} + \sin t\right)\epsilon - \frac{\epsilon^2}{6\sqrt{3}}\left(4\sin^2 t - 7 + \frac{1}{\sin^2 t}\right) + O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Estas raíces son cercanas a $\pm 1/\sqrt{3}$. Entonces si evaluamos la función \mathcal{F} en \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- y nos quedamos con términos a orden cero en ϵ tendremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{S}_+) &= \frac{2}{3}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{3}} + O(\epsilon) > 0 \\ \mathcal{F}(\mathcal{S}_-) &= -\frac{2}{3}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{3}} + O(\epsilon) < 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Con esto se ve que \mathcal{F} es creciente en el intervalo $(\mathcal{S}_-, \mathcal{S}_+)$ *i.e.* existe una segunda raíz \mathcal{S}_2 de la función entre estos valores, es más como la función en ese intervalo es monótona y $\mathcal{F}(0) \geq 0$ podemos garantizar que $\mathcal{S}_2 \leq 0$. $\mathcal{F}(\mathcal{S}_-) < 0$ para ϵ suficientemente pequeño. Sabemos que la función es continua y que $\mathcal{F}(\mathcal{S}_-) < 0$ y además $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \rightarrow \infty$ si $\mathcal{S} \rightarrow -\infty$, por lo tanto debe existir otra

raíz $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_- \leq 0$. Entonces existe solo una raíz real positiva, que para nuestros fines es la que consideraremos porque \mathcal{S} es una componente radial.¹



Para encontrar las raíces de esta función primero debemos estudiar como obtenerlas para un polinomio cúbico cualquiera.

Sabemos del teorema fundamental del álgebra que un polinomio cúbico con coeficientes complejos tiene tres raíces también complejas; en particular podemos mostrar que:

Lema 5. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y x_1 es raíz de P_n entonces x_1^* (x_1 conjugado) también es raíz de P_n .

Demostración. Sabemos que

$$P_n(x_1) = \sum_{i=0}^n a_i x_1^i = 0 \quad \text{con} \quad a_i = a_i^*$$

$$\Rightarrow (P_n(x_1))^* = \left(\sum_{i=0}^n a_i x_1^i \right)^* = \sum_{i=0}^n (a_i x_1^i)^* = \sum_{i=0}^n a_i^* (x_1^i)^* = \sum_{i=0}^n a_i (x_1^*)^i = P_n(x_1^*)$$

Entonces

$$P_n(x_1^*) = (P_n(x_1))^* = 0^* = 0 \quad \therefore \quad P(x_1^*) = 0$$

□

Por lo tanto si los coeficientes de un polinomio son reales, las raíces de este vienen a pares, es decir, en los polinomios de grado impar hay al menos una raíz real.

Tomemos el polinomio cúbico de la forma

$$y^3 + py + q = 0 \tag{7.6}$$

y consideremos que y_1, y_2, y_3 son sus raíces, podemos decir varias cosas interesantes de ello.

¹Puede darse el caso que existan más de una raíz positiva, esto sucede cuando $\mathcal{F}(0) \leq 0$ y existe algún $\xi > 0$ tal que $\mathcal{F}(\xi) > 0$, este caso también se estudiará en las expansiones asintóticas.

Proposición 2. Si $P_3(y)$ es un polinomio cúbico de la forma de (7.6) y y_1, y_2, y_3 sus raíces decimos que se cumplen las siguientes relaciones:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0^2 \quad (7.7)$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \quad (7.8)$$

$$-y_1y_2y_3 = q \quad (7.9)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2p \quad (7.10)$$

$$y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2 = p^2 \quad (7.11)$$

$$y_iy_j - y_k^2 = p \quad \text{con } i \neq j \neq k \quad (7.12)$$

$$(y_i - y_j)^2 = -4p - 3y_k^2 \quad \text{con } i \neq j \neq k \quad (7.13)$$

Demostración. ■ (7.7), (7.8), (7.9)

Si y_1, y_2, y_3 son raíces de (7.6) podemos escribirla de manera única como

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) &= y^3 - y^2(y_1 + y_2 + y_3) + y(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) - y_1y_2y_3 \\ &= y^3 + py + q \end{aligned}$$

Como un polinomio es igual a otro si sus coeficientes son iguales las primeras tres identidades están probadas.

■ (7.10)

Para este caso tomemos el cuadrado de (7.7) y usemos (7.8).

$$\begin{aligned} 0 &= (y_1 + y_2 + y_3)^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2p \\ &\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2p \end{aligned}$$

■ (7.11)

Tomemos el cuadrado de (7.8) y usemos (7.7).

$$p^2 = y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2 + 2y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) = y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2$$

Como las expresiones (7.7), ..., (7.11) son invariantes ante cualquier permutación de los índices i, j, k , haremos las pruebas de las últimas dos expresiones para algún conjunto de índices y quedará demostrado para las demás.

■ (7.12)

Tomemos las expresiones (7.7) y (7.8). Notemos que:

$$p = y_1y_2 + y_3(y_1 + y_2) = y_1y_2 + y_3(-y_3) = y_1y_2 - y_3^2$$

²Esta proposición puede mostrarse con variable compleja.

■ (7.13)

Abramos el cuadrado:

$$(y_1 - y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

Sustituycamos la expresión $p + y_3^2 = y_1y_2$

$$(y_1 - y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 - 2p - 2y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2p - 3y_3^2 = -4p - 3y_3^2$$

□

Con las identidades anteriores podemos definir una cantidad que nos indique el carácter de las raíces. Esto es importante, pues no hay necesidad de resolver el polinomio cúbico para saber cuantas raíces reales tenemos.

Llamamos *discriminante* del polinomio a:

$$D = (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \quad (7.14)$$

Lema 6. *El discriminante de un polinomio cubico de la forma (7.6) es:*

$$D = -4p^3 - 27q^2 \quad (7.15)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} D &= (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \\ &= -(4p + 3y_1^2)(4p + 3y_2^2)(4p + 3y_3^2) \\ &= -[64p^3 + 48p^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 36p(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2) + 27y_1^2y_2^2y_3^2] \\ &= -[64p^3 - 96p^3 + 36p^3 + 27q^2] \\ &= -4p^3 - 27q^2 \end{aligned}$$

□

La conclusión del siguiente lema es muy sencilla pero a la vez muy útil.

Lema 7. *Dado un polinomio de la forma (7.6) con $p, q \in \mathbb{R}$, si $D > 0$ entonces sus tres raíces son reales; por otro lado, si $D = 0$ hay una raíz de multiplicidad mayor o igual a dos (puede o no ser real) y si $D < 0$ hay una real y dos conjugadas.*

Demostración. Si $D = 0$ la demostración es inmediata de la definición de D . Consideremos $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_i - y_j \in \mathbb{R} &\Rightarrow (y_i - y_j)^2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \neq j \\ &\Rightarrow D > 0 \end{aligned}$$

Si $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow y_3 = y_2 * \quad \text{por el lema 1}$$

Usando la expresión para D obtenemos

$$D = [(y_1 - y_2)^2(y_1 - y_2^*)^2(y_2 - y_2^*)^2] = [y_1^2 + \|y_2\|^2 - 2y_1 \operatorname{Re}(y_2)]^2 (2i \operatorname{Im}(y_2))^2$$

El término en [] es positivo pues cada uno de sus sumandos es real, mientras que el segundo término al ser puramente imaginario, su cuadrado es negativo, concluyendo

$$D < 0$$

□

Por el momento guardemos estos resultados para unas líneas después. Ahora volvamos al problema original, pues nos interesan las raíces de un polinomio cúbico de la forma:

$$P_3(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} \quad (7.16)$$

con $\tilde{a} \neq 0$ pues de otro modo sería un polinomio cuadrático del cuál la solución es bien conocida.

Tomemos en cuenta el polinomio:

$$G_3(x) \equiv \frac{P_3(x)}{\tilde{a}} \quad 3$$

y renombramos los coeficientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{P_3(x)}{\tilde{a}} &= x^3 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}x^2 + \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}x + \frac{\tilde{d}}{\tilde{a}} \equiv x^3 + ax^2 + bx + c \\ G_3(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \end{aligned} \quad (7.17)$$

Proposición 3. *Las raíces del polinomio cúbico de la forma (7.17) están dadas por la siguiente expresión:*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}} - \frac{a}{3} \quad (7.18)$$

Con:

$$\begin{aligned} q &= \frac{a}{3} \left(\frac{2a^2}{9} - b \right) + c \\ p &= b - \frac{a^2}{3} \\ D &= -27q^2 - 4p^3 \end{aligned}$$

³Pues los ceros de $G_3(x)$ son los mismos de $P_3(x)$

Demostración. En el polinomio $G_3(x)$ hagamos el cambio $x = y - a/3$

$$\begin{aligned} G_3(y - a/3) &= (y - a/3)^3 + a(y - a/3)^2 + b(y - a/3) + c \\ &= y^3 + y(b - \frac{a^2}{3}) + \frac{a}{3} \left(\frac{2a^2}{9} - b \right) + c \\ &= y^3 + py + q \end{aligned}$$

Si buscamos los ceros de esta ecuación proponemos $y = u + v$ con $u, v \neq 0$ ⁴ y ambas desconocidas.

$$G_3(u + v - a/3) = u^3 + v^3 + (u + v)(p + 3uv) + q = 0$$

Como hemos agregado una variable más a la expresión, necesitamos una ecuación más, para ello pedimos que G no dependa explícitamente de $u + v$, así obtenemos dos expresiones:

$$p + 3uv = 0 \quad (7.19)$$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad (7.20)$$

Despejemos v de (7.19) y sustituyamos su valor en (7.20)

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$$

Multiplicando por u^3 esta expresión llegamos a una cuadrática en u^3

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \Rightarrow u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{-\frac{D}{108}}$$

Como

$$v^3 = -q - u^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{-\frac{D}{108}}$$

es decir se obtendrá la misma solución si se toma la raíz positiva o negativa para u^3 .

$$\therefore y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{D}{108}}}$$

Como $x = y - a/3$ la expresión (7.18) está demostrada. \square

Hay que observar que las tres raíces de la cúbica pueden encontrarse de la expresión (7.18) usando notación compleja para el término u^3 . Además si $D > 0$ y los coeficientes de $G_3(x)$ son reales entonces los tres ceros de dicha función quedan expresados en términos de valores complejos.

Lo siguiente a realizar es aplicar el método descrito para encontrar las soluciones a la expresión (7.1).

⁴de ser una cero, tendríamos la expresión de la que partimos.

Como $0 < t < \pi/2$, no existe algún valor para t que anule al coeficiente que acompaña a \mathcal{S}^3 en la expresión (7.1), de modo que podemos dividir entre dicho término toda la expresión para obtener:

$$\mathcal{S}^3 + 2\epsilon\mathcal{S}^2 \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) + \mathcal{S} \left(\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + 5\epsilon^2 - 1 \right) - \frac{2\epsilon(1 - 2\epsilon^2)}{\sin t}$$

Si en la ecuación resultante hacemos el cambio

$$\mathcal{S} = y - \frac{2}{3}\epsilon \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) \quad (7.21)$$

de acuerdo con el método descrito obtendremos:

$$\begin{aligned} y^3 + y \left[\epsilon^2 \left(\frac{7}{3} - \frac{4\sin^2 t}{3} - \frac{1}{3\sin^2 t} \right) - 1 \right] \\ + \left(\frac{16\sin^3 t}{27} - \frac{2}{27\sin^3 t} + \frac{16}{9\sin t} - \frac{14\sin t}{9} \right) \epsilon^3 + \left(\frac{2\sin t}{3} - \frac{4}{3\sin t} \right) \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Renombrando tenemos

$$\begin{aligned} p &= \epsilon^2 \left(\frac{7}{3} - \frac{4\sin^2 t}{3} - \frac{1}{3\sin^2 t} \right) - 1 \\ q &= \left(\frac{16\sin^3 t}{27} - \frac{2}{27\sin^3 t} + \frac{16}{9\sin t} - \frac{14\sin t}{9} \right) \epsilon^3 + \left(\frac{2\sin t}{3} - \frac{4}{3\sin t} \right) \epsilon \end{aligned} \quad (7.23)$$

La solución exacta para \mathcal{S} es:

$$\mathcal{S} = -\frac{2}{3}\epsilon \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}} \quad (7.24)$$

Esta expresión es poco manejable, por eso nos daremos a la tarea de realizar expansiones de ella en donde la región amerite estudio.

7.1. Expansión exterior

La primera de estas aproximaciones es cuando consideramos que $\epsilon \ll \sin t$.⁵ Calculemos para q y p de (7.23).

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} &= \frac{\epsilon^2}{9} \left(7 - 4\sin^2 t - \frac{1}{\sin^2 t} \right) - \frac{1}{3} \\ -\frac{q}{2} &= \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (7.25)$$

⁵Para facilitar los cálculos solo tomaremos expresiones hasta orden menor a ϵ^3 .

Con estas igualdades calcularemos al discriminante para así analizar el carácter de las raíces.

$$\begin{aligned} \frac{-D}{108} &= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ &= \frac{\epsilon^2}{3^2} \left(\sin t - \frac{2}{\sin t}\right)^2 - \frac{1}{3^3} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{3} \left(4 \sin^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 7\right)\right]^3 + O(\epsilon^4) \\ &= -\frac{1}{3^3} \left[1 + \epsilon^2 \left(\sin^2 t - \frac{11}{\sin^2 t} + 5\right)\right] + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Como ϵ es muy pequeño, la parte independiente del parámetro perturbativo es la que controla el signo de la expresión; por eso decimos que $D > 0$ *i.e.* existen tres raíces reales de la expresión (7.1) para $\sin t \gg \epsilon$.⁶

Ahora que conocemos a D , es fácil calcular la raíz positiva.

$$\sqrt{\frac{-D}{108}} = \frac{i}{3^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\sin^2 t - \frac{11}{\sin^2 t} + 5\right)\right] + O(\epsilon^4)$$

Llamemos

$$w \equiv -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}} = \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t\right) + \frac{i}{3^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\sin^2 t - \frac{11}{\sin^2 t} + 5\right)\right] + O(\epsilon^3)$$

La norma de w esta dada por:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{D}{108} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ \therefore \|w\| &= \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Usando esto

$$\|w\| = \frac{1}{3^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(4 \sin^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 7\right)\right] + O(\epsilon^4) \quad (7.26)$$

Si $\phi = \text{Arg}(w)$

$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{3^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\sin^2 t - \frac{11}{\sin^2 t} + 5\right)\right] + O(\epsilon^4)}{\frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t\right) + O(\epsilon^3)} = \frac{1 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\sin^2 t - \frac{11}{\sin^2 t} + 5\right) + O(\epsilon^4)}{\sqrt{3}\epsilon \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t\right) (1 + O(\epsilon^2))}$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{1}{\sqrt{3}\epsilon \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t\right)} + O(\epsilon)$$

Así concluimos que ϕ es cercano a $\pi/2$. Supongamos a $\phi = \pi/2 - \alpha$ con $\alpha > 0$.

$$\tan \phi = \tan(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

⁶Esto fue lo predicho con el análisis cualitativo hecho a inicio de capítulo.

Ahora bien, tomemos α muy pequeño, más aun, pensemos que es una serie de potencias de ϵ , es decir:

$$\begin{aligned}\alpha &= a\epsilon + b\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ \rightarrow \tan \alpha &= a\epsilon + b\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ \rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} &= \frac{1}{a\epsilon} \left(1 - \frac{b}{a}\epsilon\right) + O(\epsilon) = \frac{1}{a\epsilon} - \frac{b}{a^2} + O(\epsilon)\end{aligned}$$

Igualando esta expresión con la que se obtuvo para $\tan \phi$ encontramos:

$$a = \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right), \quad b = 0$$

Es decir

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\epsilon \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) + O(\epsilon^3)$$

Sabemos de variable compleja, que a w también la podemos escribir como:

$$w = \|w\|e^{i(\phi+2\pi n)}$$

Observemos que las raíces de \mathcal{F} se pueden expresar en términos de w

$$\begin{aligned}w &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}} & w^* &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}} \\ \mathcal{S} &= -\frac{2}{3}\epsilon \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) + w^{1/3} + w^{*1/3} \\ &= -\frac{2}{3}\epsilon \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) + 2\|w\|^{1/3} \cos \left(\frac{\phi+2\pi n}{3} \right)\end{aligned}\tag{7.27}$$

Por esta razón es fundamental encontrar explícitamente cada una de los sumandos de la ecuación anterior. Para el ángulo debemos tomar el valor de n que nos haga \mathcal{S} positivo.

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\phi+2\pi n}{3} \right) &= \cos \frac{\pi}{6}(1+4n) \cos \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) + O(\epsilon^3) \right] \\ &\quad + \sin \frac{\pi}{6}(1+4n) \sin \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) + O(\epsilon^3) \right]\end{aligned}$$

Usando las aproximaciones del seno y del coseno para ángulos pequeños tendremos

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\phi+2\pi n}{3} \right) &= \cos \frac{\pi}{6}(1+4n) \left[1 - \frac{\epsilon^2}{6} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right)^2 \right] \\ &\quad + \sin \frac{\pi}{6}(1+4n) \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) \right] + O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{7.28}$$

si definimos $\phi' = \phi + 2n\pi$ tenemos los siguientes casos:

- $n = 0$

Sabemos que

$$0 < \phi' < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\phi'}{3} < \frac{\pi}{6}$$

Como el coseno es una función decreciente en el intervalo $(0, \pi)$ tendremos como consecuencia

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \frac{\phi'}{3} < 1$$

Es decir el coseno de un tercio del argumento es positivo.

- $n=1$

$$2\pi < \phi' < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \frac{\phi'}{3} < \frac{5\pi}{6}$$

Como el coseno es una función decreciente en el intervalo $(0, \pi)$ tendremos como consecuencia

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \frac{\phi'}{3} < -\frac{1}{2}$$

Es decir el coseno de un tercio del argumento es negativo, *i.e.* corresponde a una raíz negativa de \mathcal{S} .

- $n=2$

$$4\pi < \phi' < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \frac{\phi'}{3} < \frac{3\pi}{2}$$

Como el coseno es una función creciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ tendremos como consecuencia

$$-\frac{1}{2} < \cos \frac{\phi'}{3} < 0$$

De hecho con la expresión (7.28) se ve que

$$\cos \phi'/3 = -\sin \frac{\alpha}{3} = -\left[\frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) \right] + O(\epsilon^3) < 0$$

Es decir, este valor de n corresponde a una raíz negativa pequeña de \mathcal{S} .

Por los motivos expuestos, el único valor de n admisible es 0.

Sustituyendo dicho valor en la expresión (7.28) se tiene:

$$\cos \left(\frac{\phi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{\epsilon^2}{6} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) \right] + O(\epsilon^3)$$

Reacomodando la expresión llegamos a:

$$\cos \left(\frac{\phi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 + \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) - \frac{\epsilon^2}{6} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right)^2 \right] + O(\epsilon^3) \quad (7.29)$$

Si de (7.26) tomamos la raíz cúbica y multiplicamos por dos tendremos:

$$2\|w\|^{1/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{6} \left(4\sin^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 7 \right) \right] + O(\epsilon^4)$$

Usando los últimos resultados en (7.27):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\frac{2}{3}\epsilon \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) \\ &+ \left[1 + \frac{\epsilon^2}{6} \left(4\sin^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 7 \right) \right] \left[1 + \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) - \frac{\epsilon^2}{6} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right)^2 \right] + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión resultará la expansión buscada:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 1 - \frac{2\epsilon}{3} \left(\frac{1}{\sin t} + \sin t \right) + \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{2}{\sin t} - \sin t \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\sin^2 t - \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) + O(\epsilon^3) \\ \mathcal{S} &= 1 - \epsilon \sin t - \frac{\epsilon^2}{2} \left(\cos^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} \right) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Esta expresión señala que si el ángulo t es mucho mayor a ϵ , el valor de \mathcal{S} es menor a 1, de hecho muy cercano. Ello era de esperarse, pues sabemos que la función \mathcal{S} crece muy rápido para valores de t que hacen a $\sin t$ y ϵ del mismo orden.⁷ Estudiemos un poco más este último hecho.

Supongamos ahora que t es pequeño de modo que

$$\sin t = \epsilon^\beta T \quad \text{con } T = O(1) \text{ y } \beta > 0$$

Pedimos que $\beta > 0$ ya que si ésta fuera negativa tendríamos:

$$1 \geq \sin t = \frac{T}{\epsilon^{|\beta|}} \Rightarrow \epsilon^{|\beta|} \geq T \Rightarrow T = o(\epsilon^{|\beta|})$$

En particular podemos suponer $T = k\epsilon^{|\beta|+\gamma}$ con $\gamma > 0$ y regresariamos al problema de escoger un exponente positivo para ϵ .

Si sustituimos $\sin t = \epsilon^\beta T$ en las expresiones de p, q (ecuaciones 7.23) resultará:

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} &= -\frac{1}{3} + \frac{\epsilon^2}{9} \left(7 - 4\epsilon^{2\beta} T^2 - \frac{1}{\epsilon^{2\beta} T^2} \right) \\ \frac{q}{2} &= \left(\epsilon^\beta T - \frac{2}{\epsilon^\beta T} \right) \frac{\epsilon}{3} + \left(8\epsilon^{3\beta} T^3 - \frac{1}{\epsilon^{3\beta} T^3} + \frac{24}{\epsilon^\beta T} - 21\epsilon^\beta T \right) \frac{\epsilon^3}{27} \end{aligned}$$

Reacomodando términos llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} &= -\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\epsilon^2 - \frac{4}{9}\epsilon^{2(1+\beta)} T^2 - \frac{\epsilon^{2(1-\beta)}}{9T^2} \\ \frac{q}{2} &= \frac{\epsilon^{1+\beta} T}{3} - \frac{2}{3} \frac{\epsilon^{1-\beta}}{T} + \frac{8}{27}\epsilon^{3(1+\beta)} T^3 - \frac{1}{27} \frac{\epsilon^{3(1-\beta)}}{T^3} + \frac{8}{9} \frac{\epsilon^{3-\beta}}{T} - \frac{7}{9}\epsilon^{3+\beta} T \end{aligned} \quad (7.31)$$

⁷esto se señaló en el corolario 5 del capítulo 5.

Si llamamos

$$\eta \equiv \epsilon^{1-\beta} T^{-1} \quad (7.32)$$

Las ecuaciones (7.31) se escriben así:

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} &= -\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\epsilon^2 - \frac{4}{9}\frac{\epsilon^4}{\eta^2} - \frac{\eta^2}{9} \\ \frac{q}{2} &= \frac{\epsilon^2}{3\eta} - \frac{2}{3}\eta + \frac{8}{27}\frac{\epsilon^6}{\eta^3} - \frac{1}{27}\eta^3 + \frac{8}{9}\epsilon^2\eta - \frac{7}{9}\frac{\epsilon^4}{\eta} \end{aligned} \quad (7.33)$$

De las ecuaciones (7.32) observemos que η tiene los siguientes comportamientos

β	Comportamiento de η
$0 < \beta \ll 1$	$\epsilon < \eta \ll 1$
$\beta > 1$	$\eta \gg 1$
$\beta = 1$	$\eta = O(1)$

Los dos últimos casos representan la expansión interior mientras que el primero representa la expansión exterior y media. Las páginas restantes de este capítulo se centrarán en el análisis de estas ecuaciones (7.31), (7.33) y los posibles valores β .

7.2. Expansión media

Si vemos con cuidado las expresiones de (7.31) notaremos que si $\beta \in \mathbb{N}$ hay contribuciones que no tomamos en cuenta; ellas pueden recobrase con valores fraccionarios de β . Para hacer más clara esta observación, exigimos la condición de que los exponentes de ϵ en (7.31) sean menor a tres.

1. $2(1 + \beta) < 3 \rightarrow \beta < 1/2$
2. $2(1 - \beta) < 3 \rightarrow -1/2 < \beta$
3. $(1 + \beta) < 3 \rightarrow \beta < 2$
4. $(1 - \beta) < 3 \rightarrow -2 < \beta$
5. $3(1 + \beta) < 3 \rightarrow \beta < 0$
6. $3(1 - \beta) < 3 \rightarrow 0 < \beta$
7. $(3 - \beta) < 3 \rightarrow 0 < \beta$
8. $3 + \beta < 3 \rightarrow \beta < 0$

Notemos que de los únicos valores que no podemos tener contribuciones son de los 5 y 8, estos provienen de la simplificación en $q/2$ de

$$-\frac{7}{9}\epsilon^{3+\beta}T \quad \frac{8}{27}\epsilon^{3(1+\beta)}T^3$$

y requieren el hecho de que:

$$\beta < 0 \quad ^8$$

lo cual no es posible.

Así decimos que estos términos no afectan demasiado para t muy pequeño, solo afectan ligeramente para $t \gg \epsilon$.

Es fácil notar del listado anterior si $0 < \beta < 1/2$, las 6 condiciones restantes son satisfechas. Mientras que si $\beta > 1/2$ solo se cumplen cinco de las seis condiciones restantes, pues el término restante es $o(\epsilon^2)$ si $\sin t = \epsilon^\beta T$, es decir, las expresiones que se tienen de p y q en el caso exterior no se modifican significativamente, pues los cambios son de orden $o(\epsilon^2)$.

Si al igual que en la expansión exterior tomamos términos de orden menor a ϵ^3 el sistema (7.33) se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} &= -\frac{1}{3} - \frac{\eta^2}{9} + \frac{7}{9}\epsilon^2 - \frac{4}{9}\frac{\epsilon^4}{\eta^2} \\ -\frac{q}{2} &= \frac{2}{3}\eta - \frac{\epsilon^2}{3\eta} + \frac{1}{27}\eta^3 - \frac{8}{9}\epsilon^2\eta + o(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (7.34)$$

El último sumando de la expresión de $p/3$ y los últimos dos de la de $-q/2$ son términos $o(\epsilon^2)$ que no aparecen en la expansión exterior. Entonces, mostraremos un teorema básico de cálculo que nos será de gran utilidad.

Teorema 7. *Dado un polinomio*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{i_0} x^i$$

Con a_i constantes y $x \in \mathcal{R}$, las raíces simples de $P_n(x)$ dependen continuamente de las constantes a_i .

Demostración. Si x_0 es raíz simple de $P_n(x)$ tendremos:

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_0) \neq 0$$

Ahora supongamos la siguiente generalización del polinomio anterior

$$F(\{a_i\}, x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in \left(a_{i_0} - \frac{h_i}{2}, a_{i_0} + \frac{h_i}{2} \right)$$

y h_i constantes.

⁸Recordemos que no podemos tomar exponentes negativos, por ello no hay forma de tener estas contribuciones considerando terminos mayores a ϵ^3 .

Es claro que

$$F(\{a_{i_0}\}, x_0) = P_n(x_0) = 0, \quad \frac{\partial F(\{a_{i_0}\}, x)}{\partial x} = P'_n(x)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F(\{a_{i_0}\}, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = P'_n(x_0) \neq 0$$

entonces el teorema de la función implícita garantiza que podemos encontrar x_0 como función C_1 de las variables a_i , de hecho:

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = - \frac{\partial F}{\partial a_i} / \frac{\partial F}{\partial x}$$

De modo que a primer orden tenemos

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^n \left. \frac{\partial x}{\partial a_i} \right|_{a_{i_0}} (a_i - a_{i_0}) + O(\|\mathbf{h}\|^2) \quad \text{con } \mathbf{h}_i = h_i$$

Haciendo suficientemente pequeño a $\|\mathbf{h}\|$ tenemos un control en la calidad de aproximación. Demos cuenta que x es también raíz de P_n cuando los coeficientes a_{i_0} se cambian por los coeficientes a_i . \square

Con este teorema ajustado a nuestro problema concluimos que la expansión exterior para \mathcal{S} funciona bien (los términos dominantes se conservan) hasta el momento que estamos cerca de una raíz doble. Para analizar donde sucede esto tendremos que revisar cuando se anula la expresión completa del discriminante del polinomio (7.1).

Usando que $-D = 27q^2 + 4p^3$, y las expresiones de p y q dadas en (7.23), podemos llegar a la siguiente expresión (simplificada) del discriminante:

$$D = \frac{(\epsilon^2 - 1)}{27 \sin^4 t} [\sin^4 t + (\sin^4 t + 6 \sin^2 t - 11)\epsilon^2 \sin^2 t$$

$$+ (7 \sin^6 t - 19 \sin^4 t + 17 \sin^2 t - 1)\epsilon^4]$$

Por la expansión exterior y análisis previos sabemos que si $\sin t \gg \epsilon$ tenemos una raíz simple, por ello nos interesa cuando $\sin t = O(\epsilon)$. Así resulta claro que anular el discriminante a segundo orden en ϵ es resolver la siguiente expresión:

$$\sin^2 t + (\sin^4 t + 6 \sin^2 t - 11)\epsilon^2 = 0$$

Esta última se anula para:

$$\sin^2 t = \frac{\sqrt{(6 + \frac{1}{\epsilon^2})^2 + 44} - (6 + \frac{1}{\epsilon^2})}{2} \leq \frac{11\epsilon^2}{1 + 6\epsilon^2} < 11\epsilon^2$$

$$\therefore \sin t \leq \sqrt{11}\epsilon$$

Es decir, existe una raíz doble de la expresión de \mathcal{S} en algún t tal que $\sin t < \sqrt{11}\epsilon$. Entonces para valores de $t = O(\epsilon)$ la expansión exterior ya no es válida y habrá que hacer otra expansión de \mathcal{S} o encontrar otra forma de atacar el problema; nosotros tomaremos la segunda opción, pues la expansión interior necesaria no es muy compacta y resultará difícil de manejar en cálculos posteriores.

Bibliografía

- [1] BIRKHOFF G. y MAC LANE S. *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan Publishing Co., Cuarta edición. (1977). New York USA.
- [2] NAYFEH A. H. *Perturbation Methods* John Wiley & sons, 1973, New York USA.
- [3] NAYFEH A. H. *Introduction to Perturbation Techniques* John Wiley & sons, 1993, New York USA.
- [4] FRAENKEL L. E. *On the method of matched asymptotic expansions* Proc. Cambridge Philos. Soc. (1969) Vol. **65** 209.Pág. 209-231
- [5] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.

Capítulo 8

Análisis del Término lineal

El espacio de trabajo debe ser un espacio de Banach pues debe tener una métrica, ser completo para garantizar que la solución es un elemento de nuestro espacio y que puede ser aproximada por sucesiones de funciones que convergen a la solución en la norma adecuada.

Dado que nuestro estudio se basa en las líneas de corriente del vórtice esférico y ellas son simétricas respecto al eje ρ , pedimos que la solución también tenga esta propiedad, por eso es natural que tomemos al espacio de funciones $C^0[0, \pi]$ simétricas respecto a $\pi/2$ con la norma del máximo.

Teorema 8. $\mathcal{U} = \{u | u \in C^0[0, \pi], u(t) = u(\pi - t)\}$ con $\|u\| = \max_{t \in [0, \pi]} |u(t)|$ es un espacio de Banach.

Demostración. Debemos probar que si $\{u_i\} \rightarrow u$ con $u_i \in \mathcal{U}$ entonces $u \in \mathcal{U}$.

Recordemos que $C^0[0, \pi]$ con la norma del máximo es de Banach y como $u_i \in \mathcal{U} \subset C^0[0, \pi]$, entonces la sucesión converge a un elemento $u \in C^0[0, \pi]$, i.e. la función límite es continua en $[0, \pi]$. Por otro lado sabemos que la norma del máximo es la norma de la convergencia uniforme y $u_i \in \mathcal{U}$ entonces $u(t) = u(\pi - t)$, así $u \in \mathcal{U}$, entonces \mathcal{U} es de Banach. \square

Lo siguiente por hacer es mostrar que \mathcal{K}_ϵ aproxima uniformemente a \mathcal{K}_0 para ϵ suficientemente pequeño.

Teorema 9. El operador lineal \mathcal{K}_ϵ aproxima uniformemente a \mathcal{K}_0 en \mathcal{U} , esto es:

$$\|\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{K}_0\| \leq C\epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon) \quad (8.1)$$

Demostración. Como sabemos que la curva buscada del problema global es simétrica respecto al eje ρ , bastará con probar este resultado para $t \in [0, \pi/2]$.

Para demostrar esto recordemos que:

$$|(\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{K}_0)u| \leq \int_0^\pi |K_\epsilon(t, t') - K_0(t, t')| |u(t')| dt' \leq \|u\| \max_{0 \leq t \leq \pi} \int_0^\pi |K_\epsilon(t, t') - K_0(t, t')| dt'$$

y dado que:

$$\|\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{K}_0\| = \max_{u \in \mathcal{U}} |(\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{K}_0)u| \leq \|u\| \max_{0 \leq t \leq \pi} \int_0^\pi |K_\epsilon(t, t') - K_0(t, t')| dt'$$

Entonces todo se centra en calcular una cota para la integral

$$\int_0^\pi |K_\epsilon(t, t') - K_0(t, t')| dt'$$

Sabemos que K_ϵ depende de Γ_ϵ el cual es singular para $t' = t$, por ello debemos separar al intervalo de integración de modo que en una región podamos usar las estimaciones calculadas del capítulo 6 para la diferencia de $|\Gamma_\epsilon - \Gamma_0|$ mientras que en lo sobrante (de longitud pequeña) acotaremos a cada sumando. Entonces debemos encontrar como partir al espacio $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

8.1. Construcción de la división de $[0, \pi] \times [0, \pi]$

Como en las cotas que pretendemos usar se involucra a los términos $h_0 + h'_0$, encontraremos una estimación para estos valores.

Observemos que los argumentos de $\Gamma_\epsilon(t, t')$ y $\Gamma_0(t, t')$ son los mismos, excepto que el parámetro perturbativo es cero ó ϵ , es decir podemos encontrar el punto (ρ, z) que se encuentra a un ángulo t sobre la circunferencia de radio 1, si conocemos el punto (ρ, z) al mismo ángulo t sobre la línea de corriente interna para un valor ϵ , trasladando paralelamente al origen la línea que pasa por $(\epsilon + \mathcal{S} \sin t, \mathcal{S} \cos t)$ y $(\epsilon, 0)$; el lugar donde corta al círculo de radio 1 lo llamamos (ρ, z) . Entonces decimos

$$(\rho, z)|_{\epsilon=0} = (\rho, z) = (\sin t, \cos t)$$

$$(\rho, z)|_{\epsilon \neq 0} = (\rho + \xi, z + \eta) = (\epsilon + \mathcal{S} \sin t, \mathcal{S} \cos t)$$

Por lo tanto podemos escribir

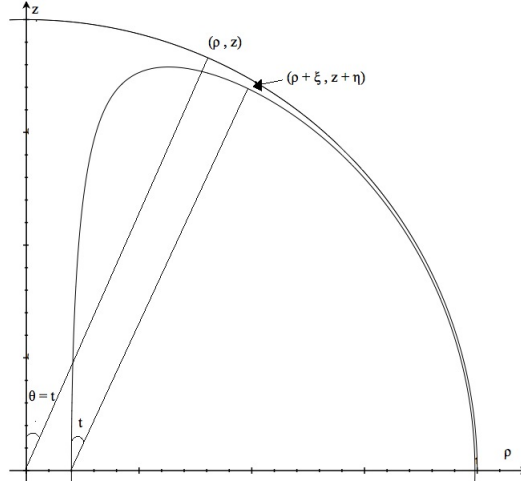
$$h_0^2 = \xi^2 + \eta^2 = \epsilon^2 + (1 - \mathcal{S})(1 - \mathcal{S} - 2\epsilon \sin t)$$

Usando la expansión exterior del capítulo 7 y que $\cos^2 t \leq 1 \leq \frac{1}{\sin^2 t}$ tendremos:

$$h_0^2 \leq \frac{\epsilon^4}{\sin^4 t} + \epsilon^2(1 - \sin^2 t) \leq \left(\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \epsilon \right)^2$$

$$\therefore h_0 \leq \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \epsilon$$

Una cota semejante se puede obtener para h'_0 , con el mismo método.



Entonces encontramos que:

$$h_0 + h'_0 \leq \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} + 2\epsilon \tag{8.2}$$

Para usar las cotas (6.7) y (6.8) debemos hacer que el miembro derecho de (8.2) sea menor a ς pues se debe cumplir que $\varsigma > h_0 + h'_0$, para ello bastará mostrar:

$$\varsigma \geq \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} + 2\epsilon \tag{8.3}$$

Como se aprecia en (8.2), hay intervalos de t para los cuales domina ϵ y otros donde domina el otro. Se ve que el valor de t para el cual ϵ y $\epsilon^2/\sin^2 t$ son del mismo orden es $t = \epsilon^{1/2}$.¹ Por ello en la región donde las cotas (6.7) y (6.8) sean válidas se tendrá que hacer el análisis en dos partes, una donde el parámetro libre cumpla que $t \in [\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}]$ y otro donde $t \in [\epsilon^{1/2}, \pi/2]$.

Con esta partición debemos poner restricciones sobre el parámetro de integración t' , la primera restricción es $t' > \epsilon^{2/3}$ pues allí sabemos que funciona bien la expansión exterior.

La siguiente restricción se escoge en base al término dominante en la cota (8.2), de modo que cuando t' sea cercano a t no incluyamos la singularidad en nuestro dominio y además sea cierto la desigualdad (8.3). Cuando hacemos

¹esto es cierto pues:

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} = \epsilon \quad \rightarrow \quad \sin^2 t = \epsilon$$

Como $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, encontramos

$$\epsilon^{1/2} \geq \frac{2t}{\pi}$$

$\epsilon = 0$ estaremos en ∂H_0 allí $\sigma = 1$ así tenemos

$$\begin{aligned}\varsigma^2 &= (\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 = 4 \sin^2 \frac{|t - t'|}{2} \\ \varsigma &= 2 \sin \frac{|t - t'|}{2}\end{aligned}\tag{8.4}$$

Podemos acotar a ς de la siguiente manera:

$$\varsigma > \frac{2}{\pi} |t - t'|$$

Si $t' \geq t$ y $t \in [\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}]$ entonces se cumple:

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} > \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} \quad \text{y} \quad \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} > \epsilon$$

De manera que se puede acotar:

$$h_0 + h'_0 \leq \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} + 2\epsilon \leq 4 \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$$

Forzando a que esta cota sea menor que la obtenida para ς

$$\varsigma \geq \frac{2}{\pi} |t - t'| \geq 4 \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \geq h_0 + h'_0$$

Por ello necesitamos que se cumpla

$$|t - t'| \geq \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}\tag{8.5}$$

La gráfica de esta región es fácil de reconocer, ya que está acotada por las siguientes curvas

$$t' = t + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \quad \text{si } t' \geq t\tag{8.6}$$

$$t' = t - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \quad \text{si } t' \leq t\tag{8.7}$$

Esta parece ser buena región de trabajo, solo que hay que restringir un poco más para que funcione bien, pues al pedir que

$$2 \sin \frac{|t - t'|}{2} \geq \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} + 2\epsilon\tag{8.8}$$

debemos acotar más el intervalo para t , de no ser así habrá lugares donde no sea válida.

Notemos que (8.5) no es válida para todo $t > \epsilon^{2/3}$, pues la curva $t' = t - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$ corta el eje t para valores algún $\frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}\epsilon^{2/3} > t > \sqrt[3]{2\pi}\epsilon^{2/3}$.² Mientras que el valor de t en el cual se tocan la curva $t' = t - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$ con $t' = \epsilon^{3/2}$ es para un $2\epsilon^{2/3} < t < 3\epsilon^{2/3}$.³

Entonces para $t > 3\epsilon^{2/3}$ existen valores de $t' > \epsilon^{2/3}$ que cumplan la desigualdad (8.8).

Para saber donde la curva $t' = t - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$ corta a la frontera de la región (8.8), debemos resolver la ecuación:

$$2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right) = \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 \left(t - \frac{2\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right)} + 2\epsilon \quad (8.9)$$

Es claro que una solución exacta no es fácil de encontrar, pero buscaremos puntos donde esa ecuación sea cercana a cero. Es sencillo ver que si $t \sim \epsilon^{2/3}$ podría existir una raíz pues ambos miembros son del mismo orden, algo semejante sucede para $t \sim \epsilon^{1/2}$, de hecho se encuentra por un desarrollo en serie de Taylor para $t \ll 1$ que existen al menos dos valores de $t > 0$ en la intersección de las curvas para los cuales $t' > 0$. Esto son

$$t = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{2\pi-1}{\pi-1}} \left(\pi + \sqrt{\pi^2 - \frac{2(\pi-1)}{2\pi-1}} \right) \epsilon^{2/3} + O(\epsilon) \\ \sqrt{\pi-1} \epsilon^{1/2} + O(\epsilon) \end{cases}$$

Entonces sabemos que existen al menos dos puntos de contacto de las dos fronteras de las regiones de interés. Para mostrar que existen solo cuatro puntos de contacto entre las curvas (en el primer cuadrante del plano tt'):

$$|t - t'| = \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t} \quad \text{y} \quad 2 \sin \frac{|t - t'|}{2} = \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} + 2\epsilon \quad (8.10)$$

²Esto se debe a que forzando la siguiente relación

$$t = \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t} \quad \rightarrow \quad t \sin^2 t = 2\pi\epsilon^2$$

Como $x > \sin x > 2x/\pi$ llegamos a

$$t^3 > 2\pi\epsilon^2 > \frac{4t^3}{\pi^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{\sqrt[3]{2}}\epsilon^{2/3} > t > \sqrt[3]{2\pi}\epsilon^{2/3}$$

³Con las mismas cotas para el seno usadas en el pie de página anterior y si proponemos $t = \alpha\epsilon^{2/3}$ las curvas se cortan si

$$\epsilon^{2/3} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} = t \quad \Rightarrow \quad 2\pi < \alpha^2(\alpha - 1) < \frac{\pi^3}{2}$$

Para $\alpha = 2$ se cumple la desigualdad derecha, mientras que en $\alpha = 3$ se cumple la izquierda.

Definiremos dos funciones auxiliares como sigue:

$$H(t, t') = 2 \sin \frac{|t - t'|}{2} - 2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right), \quad G(t, t') = 2 \sin \frac{|t - t'|}{2} - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} - 2\epsilon$$

Es claro que cuando $H(t, t') = 0$ se cumple la primera ecuación de 8.10 (rama principal), y cuando $G(t, t') = 0$ se cumple la segunda, entonces, si forzamos a que ambas curvas sean iguales y las restamos obtendremos una curva la cual contiene como caso particular a los puntos que nos interesan (que hacen $H = G = 0$), entonces:

$$2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} - 2\epsilon = 0$$

Del resultado anterior se desprende que los puntos que nos interesan cumplen simultaneamente que:

$$\sin^2 t' = \frac{\epsilon^2}{2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} - 2\epsilon}, \quad |t - t'| = \frac{2\pi \epsilon^2}{\sin^2 t}$$

Para ello estudiemos la primera de estas ecuaciones. Observemos que la siguiente función es simétrica respecto a $t = 0$ y de período π :

$$f(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} - 2\epsilon}}$$

$f(t)$ se indetermina cuando:

$$k(\xi, \epsilon) \equiv \xi - 2(\sin \pi \xi - \epsilon) \geq 0, \quad \xi = \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$$

$f(t)$ no esta definida a partir de las dos raíces positivas de $k(\xi, \epsilon)$ si $\epsilon \ll 1$, una de ellas cercano a cero, mientras que el otro es cercano a 1. Observemos que si suponemos ξ independiente de ϵ , es fácil notar que $\xi = 0$ es un cero simple de $k(\xi, 0)$. Como k es continua en ambas variables el cero se preserva, solo que se deslaza, entonces la primera aproximación a dicha raíz de $k(\xi, \epsilon)$ se obtiene suponiendo que es muy pequeña.

$$\sin \pi \xi \sim \pi \xi \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{2\epsilon}{2\pi - 1} + O(\epsilon^3)$$

la segunda raíz positiva se asegura al notar que $k(1/2, \epsilon) < 0$ y $k(1, \epsilon) > 0$ (el valor se puede aproximar usando el método de Newton, por el momento no es relevante conocerlo con alguna precisión, solo nos basta con saber que es $O(1)$). Afirmamos que es la última raíz positiva ya que en el siguiente mínimo $k(5/2, \epsilon) > 0$, y como en esta función cada mínimo es menor que el siguiente,

no existe otra raíz positiva.

Del análisis anterior se encontró que $f(t)$ es singular para:

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} = \begin{cases} \frac{2}{2\pi-1}\epsilon + O(\epsilon^3) & \Rightarrow t_1 = O(\epsilon^{1/2}) \\ l \quad \frac{1}{2} < l < 1 & \Rightarrow t_2 = O(\epsilon) \end{cases}$$

y es indefinida (pues suponemos ξ real) para $0 \leq t \leq t_2$ y $t_1 \leq t \leq \pi/2$, además usando la simetría y periodicidad señalada, se tiene un bosquejo global de la función. En resumen, $f(t)$ es convexa, y esta definida para $t_2 = O(\epsilon) < t < t_1 = O(\epsilon^{1/2}) < \pi/2$ (con sus correspondientes periodicidades y simetrías.) Estudiando $t' = \sin^{-1} f(t)$ nos damos cuenta que las funciones $f(t)$ y $\sin^{-1} x$ son ambas convexas, además esta última es también creciente en la región estudiada, de manera que $\sin^{-1} f(t)$ es también convexa; es de remarcar que esta función es acotada, además hay partes de la región estudiada que no pertenecen al dominio de dicha función, esto se ve de la condición siguiente:

$$\sin^2 t' \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^2 \leq 2 \sin \pi \xi - \xi - 2\epsilon$$

Es decir, las graficas de $\sin^{-1} f(t)$ y $f(t)$ son parecidas, con la excepción, de que el dominio de la primera esta contenido en el de la segunda (aunque la diferencia en distancias de una de la otra es $o(\epsilon)$) y la primera es acotada por $\pi/2$.

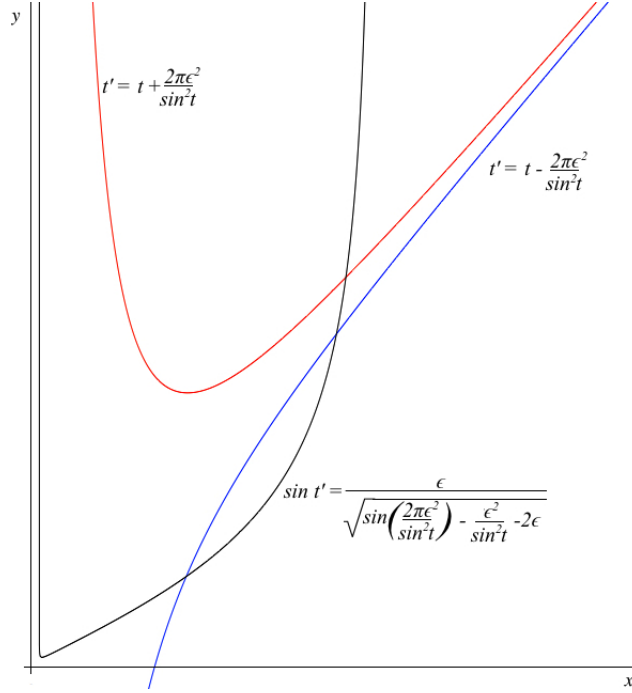
Ahora bien, las curvas definidas por las ecuaciones (8.6) y (8.7), tienen como segundas derivadas a:

$$\frac{d^2 t'}{dt^2} = \begin{cases} \frac{4\pi\epsilon^2}{\sin^4 t} (1 + 2 \cos^2 t) & \text{si } t' \geq t \\ -\frac{4\pi\epsilon^2}{\sin^4 t} (1 + 2 \cos^2 t) & \text{si } t' \leq t \end{cases}$$

Es decir, para $t' > t$ tenemos una función convexa, mientras que en $t' < t$ es concava, ambas son no acotadas y divergen positiva y negativamente (respectivamente) para multiples enteros de π , de modo que la intersección de cada una de estas funciones con la función $\sin^{-1} f(t)$ son solo dos puntos (o ningun punto si fuera el caso de que no se tocaran) para cada una de las rectas; dichos puntos de intersección se alcanzan para valores de t comprendidos en el intervalo (t_2, t_1) . Ahora bien, solo bastará mostrar que la función (8.7) interseca a la frontera de la región (8.8); como sabemos que la curva (8.6) es mayor que la curva (8.7) en todo punto, *i.e.* parte de la curva (8.6), se encuentra en la región

$$B = \left\{ (t, t') \left| \sin t' \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{2 \sin \left(\frac{\pi \epsilon^2}{\sin^2 t} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} - 2\epsilon}} \right. \right\}$$

Ademas B tiene soportes en t para valores $t_2^* = O(\epsilon)$, $t_1^* = O(\epsilon^{1/2})$, mientras que la curva definida en (8.6) se acerca asintóticamente a $t = 0$ por la izquierda, de modo que se cruzan una vez en algún $t = O(\epsilon)$. Por la derecha, y debido a que la curva en (8.6) es convexa con un mínimo para algún $t = O(\epsilon^{2/3}) \in B$, las curvas se cruzarán de nuevo después del mínimo.



Por el análisis anterior concluimos que:

$$E_1 = \left\{ (t, t') \mid t \in [3\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad |t - t'| > \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}, \quad \epsilon^{2/3} < t < \pi - \epsilon^{2/3} \right\} \quad (8.11)$$

es el espacio de trabajo a utilizar.

Para el caso donde $t > \epsilon^{1/2}$ es un poco más simple, pues recordemos que la frontera de (8.7) se cruza con la de (8.8) en algún valor cercano a $t^* = \sqrt{\pi - 1}\epsilon^{1/2}$ quiere decir que a partir de dicho punto no podemos garantizar que en (8.7) se satisfaga la condición (8.8), para forzar esto escogemos

$$2 \sin \frac{|t - t'|}{2} \geq \frac{2\pi}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad |t - t'| \geq \frac{\pi^2}{\epsilon}$$

De modo que el otro espacio de trabajo será:

$$E_1 = \left\{ (t, t') \mid t \in [\epsilon^{1/2}, \frac{\pi}{2}], \quad |t - t'| > \pi^2\epsilon, \quad \epsilon^{2/3} < t < \pi - \epsilon^{2/3} \right\}$$

ya que el miembro derecho de (8.8) es decreciente como función de t , el máximo valor de $\epsilon^2/\sin^2 t$ es ϵ , ahora como estamos en puntos donde $t \sim t'$ entonces $t' = O(\epsilon)$. De hecho $t = t^* + O(\epsilon)$ y $t' = t^* - 2\pi\epsilon + O(\epsilon^2)$.

Sabemos que E_1 como en (8.11), las cotas (6.7) y (6.8) son aplicables. Como ya habíamos mencionado, una del ellas es mejor para $t' \sim t$ mientras que la otra es mejor para las partes restantes, ahora bien como este espacio se basa en $|t - t'|$, usaremos las rectas $t' = t/2$ y $t' = 3t/2$ para delimitar en donde podemos usar cada una de las cotas (6.7) y (6.8). Si queremos que para un t fijo los valores $t' = t/2$ y $t' = 3t/2$ estén en E_1 debemos aplicar otra restricción más, ella se obtiene pidiendo que:

$$\frac{t}{2} > \frac{\pi^3 \epsilon^2}{2t^2} > \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t} \quad \rightarrow \quad t > \pi\epsilon^{2/3}$$

Entonces acortando un poco al intervalo de t tendremos

$$E_1 = \left\{ (t, t') \mid t \in [\pi\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad |t - t'| > \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}, \quad \epsilon^{2/3} < t < \pi - \epsilon^{2/3} \right\}$$

En este espacio, procederemos a realizar las cotas correspondientes. Sabemos que:

$$\begin{aligned} \int_{E_1} [K_\epsilon - K_0] dt' &= \frac{5}{\pi} \left\{ \int_{E_1} \Gamma_\epsilon(t, t') \left[\frac{d\tau'/dt'}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t \sin t'} \right] dt' \right. \\ &\quad \left. + \int_{E_1} \frac{\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')}{2 \sin t \sin t'} dt' \right\} \end{aligned}$$

El siguiente paso es acotar cada uno de estos sumandos. Comencemos con el primero.

Proposición 4. Para valores de $(t, t') \in E_1$ se tiene la siguiente cota:

$$\left| \frac{d\tau'/dt'}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t \sin t'} \right| < \frac{\gamma_1 \epsilon^{\frac{1}{3} + \delta}}{\sin t \sin t'} + \frac{\gamma_2 \epsilon}{\sin t \sin^2 t'} + \frac{\gamma_3 \epsilon}{\sin^2 t \sin t'}$$

Con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ constantes y $\delta > 0$ ⁴

Demostración. notemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d\tau'/dt'}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t \sin t'} &= \frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} \left(\frac{1}{\epsilon + \mathcal{S} \sin t} - \frac{1}{\sin t} \right) + \frac{1}{\sin t} \left(\frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t'} \right) \\ &= \frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} \left(\frac{\sin t - \epsilon - \mathcal{S} \sin t}{\sin t(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)} \right) + \frac{1}{\sin t} \left(\frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t'} \right) \end{aligned}$$

⁴observemos que el primer sumando del miembro izquierdo se reduce al segundo sumando del mismo miembro para $\epsilon = 0$, es decir solo estamos tratando de probar continuidad de ese termino respecto a ϵ con $t \neq 0$ ó π .

Usando el resultado del lema 1 en el apéndice (B.1)

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \epsilon \sin t + o(\epsilon)$$

Integrando la aproximación (B.4) respecto a t hayamos:

$$\theta = t + \epsilon \cos t - \epsilon \cos t_0 + (\theta_0 - t_0) + o(\epsilon)$$

Si usamos que $\theta_0 = t_0 = \pi/2$ encontraremos

$$\theta = t + \epsilon \cos t + o(\epsilon) \quad (8.12)$$

Esta expresión es válida para $t \sim \pi/2$. Para regiones no tan cercanas a π haremos uso de identidades trigonométricas.

Sabemos que:

$$\tan(a+b) = \tan a + \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} - \frac{\tan a - \tan^2 a \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \tan a + \frac{\tan b \sec^2 a}{1 - \tan a \tan b}$$

Comparando este resultado con la expresión (B.2) suponiendo que $a + b = \theta$ y $a = t$ encontramos que

$$\frac{\epsilon}{\mathcal{S}} = \frac{\tan(\theta - t) \sec t}{1 - \tan t \tan(\theta - t)} = \frac{\tan(\theta - t)}{\cos t - \sin t \tan(\theta - t)}$$

Despejando $\tan(\theta - t)$, y usando que $\theta = t + (\theta - t) = \tan^{-1}[-1][\tan(\theta - t)]$ encontramos que:

$$\theta = t + \tan^{-1} \left(\frac{\cos t}{\mathcal{S}/\epsilon + \sin t} \right) \quad (8.13)$$

Esta expresión es un resultado exacto, solo falta conocer a \mathcal{S} para tener la expresión completa; si usamos la expansión exterior en esta, obtendremos el resultado de (8.12). Si contamos con la expansión interior tendríamos otro resultado.

Para calcular a $d\tau/dt$ recordemos la longitud de arco en coordenadas polares y el teorema de la función implícita podemos encontrar una expresión para $d\sigma/d\theta$.⁵ Para $\partial_\sigma \Psi \neq 0$ tenemos:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)^2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 (\partial_\sigma \Psi)^2 + (\partial_\theta \Psi)^2}}{|\partial_\sigma \Psi|} = \frac{\sigma}{|\partial_\sigma \Psi|} \sqrt{(\partial_\sigma \Psi)^2 + \left(\frac{1}{\sigma} \partial_\theta \Psi \right)^2}$$

La expresión dentro de la raíz es el cuadrado de la norma del gradiente de Ψ en polares.

$$\therefore \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\sigma}{|\partial_\sigma \Psi|} |\nabla \Psi| \quad (8.14)$$

⁵Pues $\Psi = \sigma^2 \sin^2 \theta (1 - \sigma^2) = cte$ es una línea de corriente.

El siguiente paso es encontrar una expresión para $g(t, \epsilon)$, usando la expresión (5.21) para una línea de corriente interna del vórtice esférico de Hill

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_0} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \\ &= -\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' + \frac{5}{\pi} \iint_{H_0-H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz'\end{aligned}$$

Usando el hecho de que:

$$g = \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \iint_{H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') d\rho' dz' \right) \right] \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Encontramos

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\Psi \Big|_{\partial H_\epsilon} - \frac{5}{\pi} \iint_{H_0-H_\epsilon} G(\rho, \rho', z, z') \Big|_{(\rho, z) \in \partial H_\epsilon} d\rho' dz' \right)$$

Sabemos que $\Psi = cte$ sobre la curva ∂H_ϵ , por ello, la derivada de Ψ en la dirección tangencial a la curva ∂H_ϵ es cero. Mientras que derivada normal a la curva se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Psi = \nabla \Psi \cdot \nu = -|\nabla \Psi| \quad ^6$$

$$\therefore g = \frac{1}{\rho} |\nabla \Psi| + \frac{5}{\pi} \iint_{H_0-H_\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \nu} G(\rho, \rho', z, z') \Big|_{(\rho, z) \in \partial H_\epsilon} d\rho' dz' \quad (8.15)$$

Se puede mostrar (al igual que se hace para f_ϵ) que el segundo sumando de la expresión para $g(t, \epsilon)$ es $O(\epsilon^{4/3})$. Entonces:

$$g = \frac{1}{\rho} |\nabla \Psi| + O(\epsilon^{4/3}) \quad (8.16)$$

Calculemos el valor explícito de g . Usando

$$\partial_\sigma \Psi = 2\sigma(1 - 2\sigma^2) \sin^2 \theta \quad \partial_\theta \Psi = 2\sigma^2(1 - \sigma^2) \sin \theta \cos \theta \quad (8.17)$$

se encuentra que

$$\therefore \frac{|\nabla \Psi|}{\rho} = 2\sqrt{(1 - 2\sigma^2)^2 \sin^2 \theta + (1 - \sigma^2) \cos^2 \theta}$$

Para ver el orden de magnitud de este término podemos reagrupar el radicando de la expresión anterior.

⁶El signo negativo que acompaña al gradiente, es por que dentro de ∂H_0 , $\psi \geq 0$, mientras que fuera es negativo, es decir la función Ψ decrece al movernos en la dirección normal (recordemos que ∂H_ϵ es cercana a ∂H_0).

$$\left(\frac{|\nabla\Psi|}{2\rho}\right)^2 = (1 - \sigma^2) + -\sigma^2(2 - 3\sigma^2)^2 \sin^2 \theta \quad (8.18)$$

Usando que

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}\right), \quad 2 - 3\sigma^2 = \frac{1}{2} \left(1 - 3\sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}\right)$$

Sustituyendo en la expresión (8.18) encontramos:

$$\left(\frac{|\nabla\Psi|}{2\rho}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}} - \frac{3\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}\right) \sin^2 \theta$$

Recordemos que en E_1 , $\theta = t + \epsilon \cos t + o(\epsilon)$. Entonces si $t > \epsilon^{2/3}$ $\theta = \epsilon^{2/3} + \epsilon + o(\epsilon)$. Dado que el término $4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)/\sin^2 \theta$ es menor a uno en E_1 , podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor para ver:

$$\left(\frac{|\nabla\Psi|}{2\rho}\right)^2 \geq \gamma\epsilon^{4/3}$$

con ello concluimos:

$$g = \frac{1}{\rho} |\nabla\Psi| (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (8.19)$$

Juntando las ecuaciones (B.4), (8.14) y (8.16), llegamos a la expresión buscada.

$$\frac{d\tau/dt}{g(t, \epsilon)} = \frac{\rho\sigma}{|\partial_\sigma\Psi|} (1 - \epsilon \sin t + o(\epsilon))(1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (8.20)$$

Esta expresión se puede llevar a algo más simple.

$$\frac{d\tau/dt}{g(t, \epsilon)} = \frac{\rho\sigma}{2\sigma|1 - 2\sigma^2|\sin^2 \theta} (1 - \epsilon \sin t + o(\epsilon))(1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Con la igualdad (8.12), encontramos una expresión para el $\sin \theta$.

$$\sin \theta = \sin t + \epsilon \cos^2 t + o(\epsilon) \quad (8.21)$$

Con ella podemos encontrar

$$\rho = \sin t + \epsilon \cos^2 t + o(\epsilon) \quad (8.22)$$

$$|1 - 2\sigma^2| = 1 - \frac{2\epsilon^2}{\sin^2 t} + \frac{4\epsilon^3 \cos^2 t}{\sin^3 t} + o(\epsilon) \quad (8.23)$$

⁷Para E_2 puede mostrarse lo mismo solo que en este caso debemos usar que la expresión para σ^2 tiene un signo negativo antes de la raíz cuadrada, es decir el $\sigma^2 < 1/2$.

Susbtituyendo (8.21), (8.22) y (8.23) en la expresión de $d\tau/dt$ y tomando términos dominantes se llega a

$$\frac{d\tau/dt}{g(t, \epsilon)} = \frac{1 + \epsilon \frac{\cos^2 t}{\sin t} + o(\epsilon^{1/3})}{2 \sin t (1 + 2 \frac{\epsilon \cos^2 t}{\sin t} + o(\epsilon^{1/3}))}$$

Usando de nuevo el desarrollo geométrico se tiene:

$$\therefore \frac{d\tau/dt}{g(t, \epsilon)} = \frac{1}{2 \sin t} \left(1 - \epsilon \frac{\cos^2 t}{\sin t} + o(\epsilon^{1/3}) \right) \quad (8.24)$$

Con esta expresión y colocando las tildes a las variables t, τ, g encontramos una estimación útil.

$$\left| \frac{1}{\sin t} \left(\frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t'} \right) \right| \leq \frac{\gamma_1 \epsilon^{\frac{2}{3}}}{\sin t \sin t'} + \frac{\gamma_2 \epsilon}{\sin t \sin^2 t'} \quad (8.25)$$

con γ_1 y γ_2 constantes.

Para el resto de la cota hay que usar la expresión (8.22) de σ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} \left(\frac{\sin t - \epsilon - \mathcal{S} \sin t}{\sin t (\epsilon + \mathcal{S} \sin t)} \right) \right| &\leq \left| \frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} \right| \left| \frac{\sin t - \rho}{\rho \sin t} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin t'} \left| \frac{-\epsilon \cos^2 t + o(\epsilon)}{\sin^2 t + \epsilon \sin t \cos^2 t + o(\epsilon)} \right| \\ &\leq \frac{\gamma_3 \epsilon}{\sin t' \sin^2 t} \end{aligned} \quad (8.26)$$

con γ_3 constante.

Juntando (8.25) y (8.26) queda demostrada la proposición. \square

Lo que resta es hacer las estimaciones de la integral:

$$\int_{E_1} \Gamma_\epsilon(t, t') \left| \frac{d\tau'/dt'}{(\epsilon + \mathcal{S} \sin t)g(t', \epsilon)} - \frac{1}{2 \sin t \sin t'} \right| dt' \leq C\epsilon^{2/3}.$$

El análisis de esta parte es idéntico al que haremos adelante para acotar la integral de la diferencia $|\tilde{G} - G|$, por ello se omitirá esta parte, pues no resulta provechoso.

Ahora realicemos las cotas para la segunda parte en E_1 . Para ello usaremos las expresiones (6.7) y (6.8).

La partición de E_1 mencionada es la siguiente:

$$E_1 = E_{1a} \cup E_{1b} \cup E_{1c} \cup E_{1d}$$

Con

$$E_{1a} = \left\{ t \in [\pi\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad t' \in [\epsilon^{2/3}, t/2] \right\}$$

$$E_{1b} = \left\{ t \in [\pi\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad t' \in [t/2, t - \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}] \right\}$$

$$E_{1c} = \left\{ t \in [\pi\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad t' \in [t + \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}, 3t/2] \right\}$$

$$E_{1d} = \left\{ t \in [\pi\epsilon^{2/3}, \epsilon^{1/2}], \quad t' \in [3t/2, \pi - \epsilon^{2/3}] \right\}$$

En E_{1a} y E_{1d} usaremos (6.7) mientras que en los intervalos restantes usaremos (6.8). Para usar estas estimaciones diremos que $\bar{G} = \Gamma_\epsilon(t, t')$ y $G = \Gamma_0(t, t')$; Con ello sabemos de inmediato que $\rho = \sin t$, $\rho = \sin t'$ y ς esta dado por (8.8).

8.1.1. Selección de términos dominantes

En las expresiones (6.7) y (6.8) intervienen los términos ξ/ρ , h_0/ς y sus análogos primados, para no hacer trabajo de más buscaremos cuales de los términos dominantes involucrados en dichas expresiones y los acotaremos. Entonces lo principal es comparar

$$K = \left| \frac{\xi}{\rho} \right| + \left| \frac{\xi'}{\rho'} \right| \leq \left| \frac{\epsilon}{\sin t} \right| + \left| \frac{\epsilon}{\sin t'} \right| + \left| \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} \right| + \left| \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \right|$$

con

$$L = \frac{h_0 + h'_0}{\varsigma} \leq 2 \frac{\epsilon}{\sin \frac{|t-t'|}{2}} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t \sin \frac{|t-t'|}{2}} + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t' \sin \frac{|t-t'|}{2}}$$

En E_1 .

Sabemos que:

$$\xi = \epsilon + \mathcal{S} \sin t - \sin t = \epsilon \cos^2 t - \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{\sin t} + \cos^2 t \sin t \right) + O(\epsilon^3)$$

$$\therefore \left| \frac{\xi}{\rho} \right| \leq \left| \frac{\epsilon}{\sin t} \right| + \left| \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \right| \quad \text{y} \quad \left| \frac{\xi'}{\rho'} \right| \leq \left| \frac{\epsilon}{\sin t'} \right| + \left| \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} \right|$$

Observemos que el primer sumando de la primera cota, es mayor que el segundo para $\sin t > \epsilon$. Para el segundo sumando de ξ/ρ podemos encontrar la siguiente cota:

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t \sin \frac{|t-t'|}{2}} > \left| \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} \right|$$

El término $|\epsilon/\varsigma|$ en la cota para L no podemos garantizar que siempre sea mayor a $\epsilon/\sin t$, pero si podemos buscar donde es cierto que:

$$\frac{\epsilon}{\sin t} < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t \sin \frac{|t-t'|}{2}}$$

Para que esto pase es necesario que

$$\sin t \sin \frac{|t-t'|}{2} < \epsilon$$

Notemos que hay valores de t' cercamos a $\pi/2$ donde la desigualdad anterior no es válida. Es necesario estudiar más a detalle donde es válido despreciar estos términos y donde no lo es. Partiremos la región de integración de t' en varios cachos

- $\epsilon^{2/3} < t' < t < \epsilon^{1/2}$. Aquí se cumple:

$$\sin t > \sin t' \quad \rightarrow \quad K \leq \frac{4\epsilon}{\sin t'} \quad \text{y} \quad L < 4 \frac{\epsilon^2}{\sin \frac{|t-t'|}{2} \sin^2 t'} \quad 8$$

En esta región la cota de L también es de K .

- $4\epsilon^{2/3} < t < t' < \epsilon^{1/2}$ Aquí se cumple:

$$\sin t' > \sin t \quad \rightarrow \quad K \leq \frac{4\epsilon}{\sin t} \quad \text{y} \quad L < 4 \frac{\epsilon^2}{\sin \frac{|t-t'|}{2} \sin^2 t} \quad 9$$

Al igual que antes, la cota de L sobreestima a K .

- $4\epsilon^{2/3} < t < \epsilon^{1/2} < t' < \pi - t$ Aquí se cumple:

$$\sin t' > \sin t \quad \rightarrow \quad K \leq \frac{4\epsilon}{\sin t} \quad \text{y} \quad L < 4 \frac{\epsilon^2}{\sin \frac{|t-t'|}{2} \sin^2 t} \quad 10$$

⁸hay que recordar que para $t' < \epsilon^{1/2}$ se cumple que:

$$\epsilon < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'}$$

⁹Es cierto pues en $t < \epsilon^{1/2}$ se cumple que:

$$\epsilon < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$$

¹⁰El límite superior para t' se puede modificar pidiendo $\epsilon^{1/2} < t' < \pi - \epsilon^{1/2}$ donde es cierto que

$$\frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} < \epsilon < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}.$$

Mientras que para $\pi - \epsilon^{1/2} < t' < \pi - t$ es cierto lo siguiente

$$\epsilon < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'} < \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}.$$

En ambos casos se obtiene la misma cota para L .

En esta parte la cota de L no necesariamente es de K porque no podemos garantizar que $\sin |t - t'|/2$ sea mayor a ϵ .

- $\pi\epsilon^{2/3} < t < \epsilon^{1/2}$, $\pi - t < t' < \pi - \epsilon^{2/3}$. En este último intervalo se cumple:

$$\sin t' < \sin t \quad \rightarrow \quad K \leq \frac{4\epsilon}{\sin t'} \quad \text{y} \quad L < 4 \frac{\epsilon^2}{\sin \frac{|t-t'|}{2} \sin^2 t'}$$

Al igual que antes, la cota de L es ajena a K .

Resumiendo tenemos lo siguiente:

En E_{1a} usamos:

$$\frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} \leq \frac{22 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^4} \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'}$$

En E_{1d} tomaremos:¹¹

$$\frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} \leq \begin{cases} \frac{12 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^3} \left\{ \frac{\epsilon}{\sin t} + \frac{\epsilon^2}{\zeta \sin^2 t} \right\} & \text{si } 3t/2 < t' < \pi - t \\ \frac{12 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^3} \left\{ \frac{\epsilon}{\sin t'} + \frac{\epsilon^2}{\zeta \sin^2 t'} \right\} & \text{si } 3t/2 < t' < \pi - t \end{cases}$$

En los dos intervalos restantes, nos damos cuenta que el ancho de ellos esta en función de t , de modo que como t es a lo más $\epsilon^{1/2}$ y t' es del mismo orden, podemos extender el intervalo donde la cota de L es también cota de K con el fin de que ambos intervalos E_{1b} y E_{1c} , usemos la misma cota.

La desigualdad (6.8) se puede expresar de la forma

$$|\bar{G} - G| \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2} (h_0 + h'_0)}{2\zeta} \left[3\sqrt{2} \left(\frac{\rho' |\xi| + \rho |\xi'|}{\sqrt{\rho\rho'} (h_0 + h'_0)} \right) \left(\frac{\zeta}{\sqrt{2\rho\rho'}} \right) \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} + 4 \right]$$

De esta expresión, el primer sumando dentro de los corchetes se puede hacer menor a 1 escogiendo ϵ suficientemente pequeño, pues es fácil ver que el primer factor de dicho sumando es menor a $1/\sqrt{\rho\rho'}$,¹² mientras que el factor restante tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$.¹³

¹¹Norbury, el autor original del trabajo desprecia el primer sumando de las cotas correspondientes a esta región.

¹²Pues $|\rho| \leq 1$ y $|\rho'| \leq 1$ y $|\xi| + |\xi'| < h_0 + h'_0$.

¹³

$$0 \leq \frac{\zeta}{\sqrt{2\rho\rho'}} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\zeta} \leq \frac{\zeta}{\sqrt{2\rho\rho'}} \log \left(\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\zeta} + 1 \right) \rightarrow 0 \quad \text{si } \zeta \rightarrow 0$$

Por ello, en la región de trabajo este término puede hacerse menor a uno escogiendo ϵ lo suficientemente pequeño. Por lo tanto encontramos:

$$|\bar{G} - G| \leq \frac{9}{2} \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \frac{(h_0 + h'_0)}{\varsigma}$$

Por lo tanto tendremos las siguientes cotas

En E_{1b}

$$\frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} \leq 9 \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} \frac{1}{\varsigma} \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t'}$$

y en E_{1c}

$$\frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} \leq 9 \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} \frac{1}{\varsigma} \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t}$$

8.2. Cotas para el término lineal

El siguiente paso es usando esto, calcular las integrales correspondientes.

■ E_{1a}

$$\int_{E_{1a}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq 22 \epsilon^2 \sin t \int_{E_{1a}} \frac{dt'}{\varsigma^4} \leq \frac{11 \pi^4}{8} \epsilon^2 t \int_{E_{1a}} \frac{dt'}{|t - t'|^4}$$

Al acotar por el máximo de la función se tiene

$$\int_{E_{1a}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq 11 \pi^4 \frac{\epsilon^2}{t^2} \leq 11 \pi^2 \epsilon^{2/3} \quad \text{pues } t > \pi \epsilon^{2/3}$$

■ E_{1b}

$$\int_{E_{1b}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \int_{E_{1b}} \frac{9}{\varsigma} \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} \frac{\epsilon^2 dt'}{\sin^2 t'} \leq \int_{E_{1b}} \frac{9 \pi^3 \epsilon^2}{8 t'^2 |t - t'|} \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} dt'$$

Esta expresión puede simplificarse más si notamos que $\sin t > \sin t'$ y $t \neq 0$ en la región de integración. De modo que la raíz del cociente es menor a uno, así el término resultante es integrable con el cambio $t' = t \sin^2 \phi$. de modo que

$$\int_{E_{1b}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \int_{E_{1b}} \frac{9 \pi^3 \epsilon^2}{8} \frac{dt'}{t'^2 |t - t'|} = \frac{9 \pi^3 \epsilon^2}{8 t^2} \log \frac{t'}{t - t'}$$

Al evaluar y tomando términos dominantes

$$\int_{E_{1b}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \frac{9 \pi^3 \epsilon^2}{8 t^2} \log \left(\frac{t \sin^2 t}{2 \pi \epsilon^2} - 1 \right) \leq \frac{9 \pi}{16} \epsilon^{2/3} \log \frac{1}{\epsilon}$$

La cota es del orden deseado.

■ E_{1c}

$$\int_{E_{1c}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \int_{E_{1c}} \frac{9}{\zeta} \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} dt'$$

En este caso es fácil ver que el radicando está acotado por $\sqrt{3\pi}/2$, de modo que también se puede integrar de manera muy sencilla y encontrar

$$\int_{E_{1c}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \frac{9\sqrt{3\pi^3}}{16} \epsilon^{2/3} \int_{E_{1c}} \frac{1}{|t - t'|} dt' \leq \frac{9\sqrt{3\pi^3}}{32} \epsilon^{2/3} \log \frac{1}{\epsilon}$$

Que tiene el orden adecuado.

■ E_{1d} En este caso, partiremos el intervalo de integración en dos, de modo que:

$$\int_{E_{1d}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' = \int_{3t/2}^{\pi-t} + \int_{\pi-t}^{\pi-\epsilon^{2/3}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt'$$

Entonces usando las cotas para este caso llegaremos a:

$$\begin{aligned} \int_{E_{1d}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' &\leq \int_{3t/2}^{\pi-t} \frac{12 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^3} \left\{ \frac{\epsilon}{\sin t} + \frac{\epsilon^2}{\zeta \sin^2 t} \right\} dt' \\ &+ \int_{\pi-t}^{\pi-\epsilon^{2/3}} \frac{12 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^3} \left\{ \frac{\epsilon}{\sin t'} + \frac{\epsilon^2}{\zeta \sin^2 t'} \right\} dt' \end{aligned}$$

Podemos acotar fácilmente para:

$$\int_{3t/2}^{\pi-t} \frac{12 \sin t \sin^2 t'}{\zeta^4} \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} dt' \leq \frac{3\pi^4 \epsilon^2}{4 \sin t} \int_{3t/2}^{\pi-t} \frac{t'^2}{|t - t'|^4} dt'$$

Integrando por partes (varias veces) y tomando términos dominantes llegaremos a:

$$\frac{3\pi^4 \epsilon^2}{4 \sin t} \int_{3t/2}^{\pi-t} \frac{t'^2}{|t - t'|^4} dt' \leq \frac{13\pi^4 \epsilon^2}{2t \sin t} \leq \frac{13\pi^3}{4} \epsilon^{2/3}$$

Es de la forma buscada. Mientras que para la otra integral también integraremos por partes repetidas veces,

$$12\epsilon \int_{3t/2}^{\pi-t} \frac{\sin^2 t'}{\zeta^3} dt' \leq \frac{3\pi^3 \epsilon}{2} \left(\frac{9}{2} + 3 + \log \frac{2(\pi - 2t)}{t} \right) < 3\pi^3 \epsilon \log \frac{2}{\epsilon}$$

que es aun más chico de lo que se necesita.

En las dos integrales restantes haremos el cambio de variable $t' = \pi - \vartheta$ y usaremos que $\cos(x) \geq -\frac{2x}{\pi} + 1$ ¹⁴ para tener

$$\int_{\pi-t}^{\pi-\epsilon^{2/3}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq \int_{\epsilon^{2/3}}^t \frac{\vartheta d\vartheta}{8 \left(1 - \frac{\vartheta+t}{\pi}\right)^3} + \int_{\epsilon^{2/3}}^t \frac{d\vartheta}{16 \left(1 - \frac{\vartheta+t}{\pi}\right)^4}$$

Se encuentra fácilmente que ambas integrales son menores a ϵ .

Por lo tanto:

$$\int_{E_{1d}} \frac{|\Gamma_\epsilon(t, t') - \Gamma_0(t, t')|}{2 \sin t \sin t'} dt' \leq 3\pi^3 \epsilon \log \frac{2}{\epsilon} + \frac{13\pi^3}{4} \epsilon^{2/3} + 2\epsilon$$

Es decir, la mayor contribución se obtuvo de los términos que el autor del trabajo original desprecio; apesar de ello sigue convergiendo.

8.3. Análisis sobre la región E_2

Lo siguiente por hacer es calcular algo semejante en E_2 . Para ello partiremos a este intervalo en tres más:

$$E_{2a}: 0 \leq t' \leq \epsilon^{2/3}, \quad E_{2b}: t - \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t} \leq t' \leq t + \frac{2\pi\epsilon^2}{\sin^2 t}, \quad E_{2c}: \pi - \epsilon^{2/3} \leq t' \leq \pi$$

Sabemos que

$$\left| \int_{E_2} \mathcal{K}_\epsilon(t, t') - \mathcal{K}_0(t, t') dt' \right| \leq \int_{E_2} |\mathcal{K}_\epsilon(t, t')| dt' + \int_{E_2} |\mathcal{K}_0(t, t')| dt'$$

con $\pi\epsilon^{2/3} \leq t \leq \epsilon^{1/2}$.

En estos casos usaremos las estimaciones (6.1) y (6.2). Comencemos con la integral de K_0 y usemos la igualdad (6.6).

$$\int_{E_2} |K_0(t, t')| dt' = \int_{E_2} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt'$$

¹⁴al igual que se encontró la cota inferior para el $\sin(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$, podemos encontrar una para el $\cos(x)$ en el mismo intervalo, basta observar que el coseno es mayor que la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(\pi/2, 0)$. entonces decimos que:

$$\cos(x) \geq -\frac{2x}{\pi} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} < \frac{1}{1 - \frac{2x}{\pi}}$$

- E_{2a} .

Si tomamos (6.2) y recordamos que Γ_0 es G evaluado sobre la curva ∂H_0 .

$$\int_{E_{2a}} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt' \leq \frac{5}{\pi} \sin t \int_{E_{2a}} \frac{\sin^2 t'}{\varsigma^3} dt' \leq \frac{5\pi^2}{8} \int_{E_{2a}} \frac{tt'^2}{|t-t'|^3} dt'$$

Al acotar el integrando por su máximo se tiene

$$\int_{E_{2a}} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt' \leq 5 \left(\frac{\pi}{2(\pi-1)} \right)^3 \epsilon^{2/3}$$

- E_{2c} .

En este caso es conveniente usar el cambio $t' = \pi - \vartheta$ y usar que $\cos(x) \geq 1 - 2x/\pi$ para tener

$$\int_{E_{2c}} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt' \leq \frac{5 \sin t}{\pi} \int_{\pi-\epsilon^{2/3}}^{\pi} \frac{\sin^2 t'}{\varsigma^3} dt' \leq \frac{5 \sin t}{8\pi} \int_0^{\epsilon^{2/3}} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{t+\vartheta}{\pi}\right)^3} \leq \frac{5}{3\pi} t \epsilon^2$$

La última desigualdad se obtiene al usar que $t + \nu < \pi/2$ y acotar el integrando por su máximo.

- E_{2b} . En esta parte usaremos (6.1) para Γ_0 .

$$\int_{E_{2b}} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt' \leq \frac{5}{2\pi} \int_{t-l}^{t+l} \sqrt{\frac{\sin t'}{\sin t}} \log \left| \frac{2\sqrt{2 \sin t \sin t'}}{\varsigma} + 1 \right| dt'$$

con $l = 2\pi\epsilon^2 / \sin^2 t$.

Considerando que $\varsigma > 2|t-t'|/\pi$ y proponemos $t' = t + \alpha$, podemos sobre estimar por algo más simple al argumento del logaritmo:

$$2^{3/2} \frac{\sqrt{\sin t \sin t'}}{\varsigma} \leq \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{t(t+\alpha)}}{|\alpha|} \leq \sqrt{2\pi} \frac{t}{|\alpha|} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{t}} \leq \sqrt{2\pi} \frac{t}{|\alpha|} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Como $\alpha < 2\pi\epsilon^2 / \sin^2 t$

$$\frac{t}{\alpha} \geq \frac{t \sin^2 t}{2\pi\epsilon^2} \geq \frac{2t^3}{\pi^3\epsilon^2} \geq 2$$

Es decir el término $2\sqrt{2\rho\rho'}/\varsigma + 1 < 2\pi t/|\alpha|$. Además sabemos que:

$$\sqrt{\frac{\sin(t+\alpha)}{\sin t}} \leq \sqrt{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{t}} \leq \sqrt{\pi/2} \left(1 + \frac{\alpha}{2t}\right)$$

Como

$$\frac{t}{\alpha} \geq 2 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2t} \leq \frac{1}{4}$$

Por lo tanto tendremos:

$$\int_{E_{2b}} \frac{5}{2\pi} \frac{\Gamma_0(t, t')}{\sin t \sin t'} dt' \leq \frac{25}{4\sqrt{2\pi}} \int_0^l \log \left| \frac{2\pi t}{\alpha} \right| d\alpha \leq \frac{25\sqrt{2\pi}}{8} \epsilon^{2/3} \log \frac{1}{\epsilon^{1/2}}$$

Ahora lo que resta es acotar la integral sobre E_2 de K_ϵ , aquí debemos ser más cuidadosos, pues al usar las cotas de las ecuaciones (6.1) y (6.2) las variables ρ, z, ρ', z' son coordenadas de puntos sobre la frontera ∂H_ϵ , lo que complica más los cálculos. Aparte, en la región E_{2a} hay que partirlo en dos subintervalos, uno donde sea válida la expansión exterior y otro donde sea aplicable la interior.

Por conveniencia, cuando estemos en la región donde es válido el desarrollo interior, realizaremos los cálculos en las variables polares (σ, θ) en vez de (\mathcal{S}, t) , de esta forma evitamos usar la expansión interior para \mathcal{S} . Esto mismo es aplicable en E_{2c} .

$$\int_{E_2} |K_\epsilon(t, t')| dt' = \int_{\theta(E_2)} \frac{|\Gamma_\epsilon(\theta, \theta')| \frac{d\tau'}{d\theta'}}{\rho g(\theta', \epsilon)} d\theta'$$

NOTA: En todo E_{2a} no podemos usar la expresión (8.24), por que ella se usó suponiendo que la expansión exterior es válida.

- E_{2a} . Esta región debe de trabajarse en dos partes, una de ellas donde $\sigma < 1/\sqrt{2}$ y $\theta \in (\theta_c, \pi/2]$ en esta parte el radio disminuye conforme crece el ángulo, mientras que en el segundo caso $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$, y $\theta \in (\theta_c, \theta(\epsilon^{2/3})]$, ahora el radio crece conforme el ángulo aumenta.

De la expresión (8.12) vemos que $\theta_f \equiv \theta(\epsilon^{2/3}) = \epsilon^{2/3} + \epsilon + o(\epsilon)$. Entonces, con esto podemos dar a E_{2a} en términos de la variable θ .

$$\theta(E_{2a}) = [\theta_c, \pi/2] \cup [\theta_c, \theta_f]$$

Entonces tendremos

$$\left| \int_0^{\epsilon^{2/3}} K_\epsilon(t, t') dt' \right| \leq \left| \int_{\pi/2}^{\theta_c} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| + \left| \int_{\theta_c}^{\theta_f} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right|$$

En la primera de estas hay que notar que la longitud de arco disminuye conforme θ crece, es decir, $d\tau/d\theta < 0$, esto nos permite cambiar los límites

de integración

$$\left| \int_{\pi/2}^{\theta_c} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| \leq \int_{\theta_c}^{\pi/2} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' = \int_{\theta_c}^{\pi/2} \frac{\Gamma_\epsilon(\theta, \theta') \left| \frac{d\tau'}{d\theta'} \right|}{\rho g(\theta', \epsilon)} d\theta'$$

Con las expresiones (8.14), (8.19) y (8.17) encontraremos:

$$\left| \int_{\pi/2}^{\theta_c} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| \leq \rho \int_{\theta_c}^{\pi/2} \frac{\sigma'^4 \sin^2 \theta'}{\varsigma^3 (1 - 2\sigma'^2)} d\theta' \quad (8.27)$$

Recordemos que $\sigma' \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, mientras el mínimo de σ se alcanza para algún $\theta_m = \pi\epsilon^{2/3} + 2\pi\epsilon^2/3 + O(\epsilon^3)$, usando este valor se encuentra que

$$\sigma \geq 1 - \frac{\epsilon^{2/3}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varsigma^3} \leq \frac{1}{|\sigma - \sigma'|^3} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\epsilon^{2/3}}{2}\right)^3} \leq 4^3$$

para ϵ suficientemente pequeño.

Usando esto y el hecho que $\rho' \leq \rho$ y $\sigma'^2 < 1/2$ podemos llegar a la siguiente expresión fácil de integrar

$$\left| \int_{\pi/2}^{\theta_c} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| \leq 16\rho^3 \int_{\theta_c}^{\pi/2} \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2) - \cos^2 \theta}} = 8\pi\rho^3 \leq 8\pi\epsilon^{3/2}$$

En la otra integral hay que hacer algo semejante.

$$\left| \int_{\theta_c}^{\theta_f} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| \leq \int_{\theta_c}^{\theta_f} \frac{|\Gamma_\epsilon(\theta, \theta')| \frac{d\tau'}{d\theta'}}{\rho g(\theta', \epsilon)} d\theta' \leq \rho \int_{\theta_c}^{\theta_f} \frac{\sigma'^4 \sin^2 \theta'}{\varsigma^3 (2\sigma'^2 - 1)} d\theta'$$

Lo primero que hay que ver es que ς está acotado por debajo, recordemos:

$$\varsigma \geq |\sigma - \sigma'| \geq \min_{4\epsilon^{2/3} \leq t \leq \epsilon^{1/2}} \sigma(\theta(t)) - \max_{\theta_c \leq \theta \leq \theta_f} \sigma(\theta)$$

con

$$\min \sigma^2 \geq 1 - \frac{\epsilon^{2/3}}{2} + O(\epsilon) \quad \text{y} \quad \max \sigma'^2 \leq 1 - \epsilon^{2/3} + O(\epsilon)$$

Entonces tendremos:

$$|\sigma - \sigma'| \geq \frac{\epsilon^{2/3}}{2} + O(\epsilon)$$

Además $\sin \theta \leq \theta \leq \theta_f = \epsilon^{2/3} + O(\epsilon)$. Observemos que en el integrando existe el término $\rho\rho'^2\sigma'^2/\varsigma^3$ el cual se puede acotar como sigue:

$$\frac{\rho\rho'^2\sigma'^2}{\varsigma^3} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{4\rho\rho'}{\varsigma^2} \right)^{3/2} \leq \frac{\pi^3}{8} \left(\frac{\theta\theta'}{|\theta - \theta'|^2} \right)^{3/2} \leq \frac{\pi^3}{8} \left(\frac{\pi}{(\pi - 1)^2} \right)^{3/2}$$

Con esto y usando que $\sigma > \sigma'$ y $t > t'$ la integral se acota por:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\theta_c}^{\theta_f} K_\epsilon(\theta, \theta') d\theta' \right| &\leq \left(\frac{\pi^{3/2}}{2(\pi-1)} \right)^3 \int_{\theta_c}^{\theta_f} \frac{d\theta'}{2\sigma'^2 - 1} \\ &= \left(\frac{\pi^{3/2}}{2(\pi-1)} \right)^3 \cos^{-1} \frac{\cos \theta_f}{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)} \leq 15 \left(\frac{\pi^{3/2}}{2(\pi-1)} \right)^3 \theta_f \end{aligned}$$

Es del orden buscado pues $\theta_f = \epsilon^{2/3}(1 + O(\epsilon^{1/2}))$.

- E_{2b} En este intervalo si podemos usar el desarrollo encontrado para $(d\tau'/dt')/g'$ en (8.24).

$$\frac{d\tau'/dt'}{g(t', \epsilon)} \leq \frac{1}{2 \sin t'}$$

Usando que $\rho \geq \sin t$ y $\rho' \leq 2 \sin t'$ ¹⁶ la integral será:

$$\int_{E_{2b}} K_\epsilon dt' \leq \int_{E_{2b}} \sqrt{2} \left(\frac{\sin t'}{\sin t} \right)^{3/2} \log \left| \frac{2\sqrt{2} \sin t \sin t'}{\varsigma} + 1 \right| dt'$$

Para $\epsilon^{2/3} < t < \pi - \epsilon^{2/3}$, $\mathcal{S}(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces se llega fácilmente a

$$\varsigma \geq \sqrt{2} \sin \left(\frac{|t - t'|}{2} \right)$$

Con ello

$$\int_{E_{2b}} K_\epsilon dt' \leq \int_{E_{2b}} \sqrt{2} \left(\frac{\sin t'}{\sin t} \right)^{3/2} \log \left| \frac{4\sqrt{\sin t \sin t'}}{2 \sin \left(\frac{|t - t'|}{2} \right)} + 1 \right| dt'$$

Que es la misma integral encontrada al acotar la integral de K_0 *i.e.* es del mismo orden.

- E_{2c} En esta última región usaremos coordenadas polares.

$$\int_{E_{2c}} K_\epsilon dt' \leq \rho \left[\int_{\pi - \epsilon^{2/3}}^{\pi - \theta_c} + \int_{\pi - \theta_c}^{\pi/2} \frac{\sigma'^4 \sin^2 \theta' d\theta'}{\varsigma^3 |1 - 2\sigma'^2|} \right]$$

¹⁵Este paso es fácil de ver si observamos que la función $\arccos(x)$ es decreciente para $0 < x < \pi/2$ y $0 < 1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2) < 1$. Con esto podemos afirmar que

$$\frac{\cos \theta_f}{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)} \geq \cos \theta_f$$

aplicando la función inversa (que es monótona decreciente) resulta lo afirmado.

$$\arccos \frac{\cos \theta_f}{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)} \leq \arccos(\cos \theta_f) = \theta_f$$

¹⁶esto es muy sencillo de ver usando la expansión exterior.

Observemos que en este caso $\varsigma \geq \mathcal{S}(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, y con $\sigma' < 1$ tendremos:

$$\int_{E_{2c}} K_\epsilon dt' \leq \frac{\rho}{\mathcal{S}^3} \left[\int_{\pi-\epsilon^{2/3}}^{\pi-\theta_c} + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{\sqrt{1-4\epsilon^2(1-\epsilon^2)-\cos^2 \theta'}} \right]$$

Si hacemos el cambio $\theta' = \pi - \vartheta$ y usando $\sin \theta \leq \theta \leq \epsilon^{2/3}$ llegamos

$$\int_{E_{2c}} K_\epsilon dt' \leq \frac{\rho}{\mathcal{S}^3} \epsilon^{4/3} \left[\int_{\theta_c}^{\epsilon^{2/3}} + \int_{\theta_c}^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1-4\epsilon^2(1-\epsilon^2)-\cos^2 \vartheta}} \right]$$

Cuando acotamos la integral de K_0 en el mismo intervalo encontramos que las integrales de arriba están acotadas, a lo más son $\pi/2$, con esto

$$\int_{E_{2c}} K_\epsilon dt' \leq \pi \frac{\rho}{\mathcal{S}^3} \epsilon^{4/3} \leq 2\sqrt{2}\pi \epsilon^{4/3}$$

Resumiendo los cálculos anteriores para $4\epsilon^{2/3} \leq t \leq \epsilon^{1/2}$ encontramos

$$\left| \int_0^\pi K_\epsilon(t, t') - K_0(t, t') dt' \right| \leq C t \epsilon^{2/3} \log 1/\epsilon$$

8.4. Análisis del término lineal para $0 \leq t \leq \epsilon^{2/3}$

Para el intervalo $0 \leq t \leq 4\epsilon^{2/3}$ partiremos la integral en tres más.

$$\int_0^\pi |K_\epsilon(t, t')| + |K_0(t, t')| dt' = \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^{3t/2} + \int_{3t/2}^\pi |K_\epsilon(t, t')| + |K_0(t, t')| dt'$$

Cuando se integra K_0 es fácil encontrar las cotas adecuadas

$$\int_0^{t/2} |K_0(t, t')| dt' \leq \frac{5\pi^2}{8} \sin t \int_0^{t/2} \frac{\sin^2 t' dt'}{(t-t')^3} \leq \frac{5\pi^2}{8} \int_0^{t/2} \frac{t t'^2 dt'}{(t-t')^3} \leq \frac{5\pi^2}{4} \epsilon^{2/3} \log \frac{1}{\epsilon}$$

Esto se obtiene usando que $\sin t \leq t$ e integrando por partes repetidamente. Algo semejante obtendremos en la integral sobre $[3t/2, \pi]$. Usando las mismas cotas tendremos:

$$\int_{3t/2}^\pi |K_0(t, t')| dt' \leq \frac{5\pi^2}{8} \sin t \int_{3t/2}^\pi \frac{t'^2}{(t'-t)^3} dt' \leq C \epsilon^{2/3} \log \frac{1}{\epsilon}$$

Para la integral restante usaremos los resultados obtenidos en la integral de K_0 sobre la región E_{2b} es decir, con exactamente los mismos métodos usados en esa integral podemos llegar a lo siguiente considerando $\frac{2\pi t}{\alpha} \geq 4\pi \geq e$.

$$\int_{t/2}^{3t/2} K_0 dt' = \frac{25}{4\sqrt{2}\pi} \int_0^{t/2} \log \left| \frac{2\pi t}{\alpha} \right| d\alpha \leq 25 \sqrt{\frac{\pi}{2}} t \leq 50\sqrt{2}\pi \epsilon^{2/3}$$

Solo resta integrar K_ϵ , para estimar dicho valor tenemos que partir el intervalo de integración en tres partes, con el fin de que en dos de ellos usemos valores de la expansión interior y en el resto, resultados de la expansión exterior.

$$[0, \pi] = \left[0, \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}, \pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}\right] \cup \left[\pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}, \pi\right]$$

Recordemos que:

$$\int_0^\pi K_\epsilon(t, t') dt' \leq \int_0^\pi \frac{\Gamma_\epsilon(t, t')}{\rho g(t', \epsilon)} dt'$$

Dado que $\Gamma_\epsilon(t, t')$ se puede acotar por una función que depende inversamente de $|t - t'|$ y además $0 < t < \pi\epsilon^{2/3}$, la integral sobre el primer subintervalo es mayor a la integral sobre el tercero *i.e.* solo debemos acotar dos integrales, en una de ellas es posible usar la expansión exterior, mientras que en la otra haremos las estimaciones correspondientes en el sistema (ρ, z) para omitir la expansión interior.

En el capítulo 5, obtuvimos:

$$\mathcal{H}_\epsilon u = \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \frac{Gu'}{\rho g'} d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Entonces para escribirla en términos de ρ' tenemos que calcular $d\tau'/d\rho$. Al igual que se hizo en coordenadas polares podemos obtener

$$\mathcal{H}_\epsilon u = \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \frac{\Gamma_\epsilon u' \rho'}{\rho |\partial_{z'} \Psi|} d\rho' \Big|_{\partial H_\epsilon} \quad (8.28)$$

De (5.7) se obtiene

$$\partial_{z'} \Psi = -2z' \rho'^2 \quad \Rightarrow \quad z' = \pm \frac{\sqrt{(\rho'^2 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 - \rho'^2)}}{\rho'}$$

Con esta última expresión (tomando $z \geq 0$) y las ecuaciones 6.1 y 8.28 obtenemos

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}} |K_\epsilon| dt' \leq \frac{5}{\pi} \int_\epsilon^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \frac{\rho'^{3/2} \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{s} \right)}{\rho^{1/2} \sqrt{(\rho'^2 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 - \rho'^2)}} d\rho' \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Aquí es conveniente partir la integral.

$$\int_\epsilon^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} |K_\epsilon|(\rho, \rho') d\rho' = \int_\epsilon^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} + \int_{\frac{\rho+\epsilon}{2}}^\rho + \int_\rho^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} |K_\epsilon|(\rho, \rho') d\rho'$$

En el primer segmento de integración, al usar que $\rho' < \rho$ y acotando el integrando por su máximo se tiene

$$\int_{\epsilon}^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' \leq \max_{\epsilon \leq \rho' \leq \frac{\rho+\epsilon}{2}} \left[\frac{5}{\pi} \sqrt{\frac{\rho'}{(1-\epsilon^2-\rho'^2)}} \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right) \right] \int_{\epsilon}^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'-\epsilon}}$$

La función a la que se le obtiene el máximo es creciente, por ende su mayor valor lo alcanza en $\rho' = (\epsilon + \rho)/2$.

$$\int_{\epsilon}^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' \leq \sqrt{\frac{\rho^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2 - \rho^2}} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{8\rho}}{\rho - \epsilon}$$

Esta expresión tiende a cero si $\rho \rightarrow \epsilon$.

Para el siguiente intervalo hacemos algo semejante, solo que habrá que usar $\sinh^{-1} x \leq \log(1 + 2x)$ y el cambio $\alpha = \rho' - (\epsilon + \rho)/2$ encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\rho+\epsilon}{2}}^{\rho} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' &\leq \frac{5}{\pi} \sqrt{\frac{\rho + \epsilon}{(\rho - \epsilon)(1 - \epsilon^2 - \rho^2)}} \int_0^{\frac{\rho-\epsilon}{2}} \log \frac{4\rho}{\alpha} d\alpha \\ \therefore \int_{\frac{\rho+\epsilon}{2}}^{\rho} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' &\leq \frac{5}{\pi} \sqrt{\frac{\rho + \epsilon}{1 - \epsilon^2 - \rho^2}} \sqrt{\rho - \epsilon} (\log \frac{8\rho}{\rho - \epsilon} - 1) \end{aligned}$$

Esta expresión al igual que en la pasada tiende a cero si $\rho \rightarrow \epsilon$. Solo resta una integral:

$$\int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' = \frac{5}{\pi} \int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \frac{\rho'^{3/2} \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right)}{\rho^{1/2} \sqrt{(\rho'^2 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 - \rho'^2)}} d\rho'$$

Aquí puede haber dos opciones, una de ellas es $\rho = \epsilon$ y la otra $\rho \neq \epsilon$, para el primer caso tenemos singularidades en el numerador y en el denominador del integrando para $\rho' = \rho = \epsilon$, además las dos integrales pasadas son cero; es en este caso cuando debemos integrar ambos términos singulares. En la otra opción solo existe la singularidad en el numerador.

Antes de continuar hay que observar que en $\epsilon \leq \rho \leq \rho'$ es cierto que

$$\frac{\rho'^{3/2}}{\sqrt{-\rho'^4 + \rho^2 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} \leq \frac{\rho'}{\sqrt{(\rho' - \rho)(1 - 2\rho')}}}$$

Usando lo anterior y que $\rho' < 1$ encontramos que

$$\int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' \leq M \int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \frac{\log \left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\rho' - \rho} \right)}{\sqrt{\rho' - \rho}} d\rho'$$

Con M dada por:

$$M = \max_{\rho \leq \rho' \leq \rho(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \left[\frac{\frac{5}{\pi}\rho'}{\sqrt{\rho(1-2\rho')}} \right] \leq \frac{\frac{5}{\pi}(\epsilon + \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})}{\sqrt{\rho(1-2\epsilon-3\pi\epsilon^{2/3})}} \leq \frac{\frac{5}{\pi}(\epsilon^{1/2} + \frac{3\pi}{2}\epsilon^{1/6})}{\sqrt{(1-2\epsilon-3\pi\epsilon^{2/3})}}$$

Es decir M es a lo más $O(\epsilon^{1/6})$. Solo resta mostrar que la integral está acotada.

$$\int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\rho' - \rho}\right)}{\sqrt{\rho' - \rho}} d\rho' = \int_0^{\alpha^*} \left(\frac{\log(\alpha + \sqrt{8\rho})}{\sqrt{\alpha}} - \frac{4\log\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \right) d\alpha$$

con $\alpha^* = \rho(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}) - \rho$. Integrando por partes la primera, y por integración directa la segunda llegamos a:

$$\int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} \frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\rho' - \rho}\right)}{\sqrt{\rho' - \rho}} d\rho' = 2\sqrt{\alpha^*} \log\left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\alpha^*}\right) + 4\sqrt[4]{8\rho} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^*}{\sqrt{8\rho}}}$$

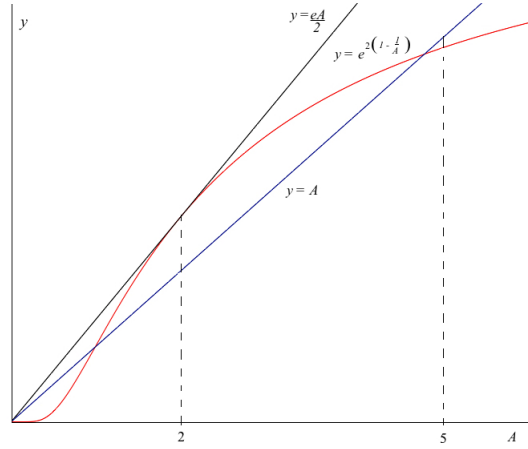
Para ver que el primer sumando es acotado se analizará los puntos críticos por medio de la siguiente expresión

$$0 = \log A - 2\left(1 - \frac{1}{A}\right) \Rightarrow A = e^{2(1-\frac{1}{A})}$$

con $A = (\sqrt{8\rho} + \alpha^*)/\alpha^*$. Es decir, las raíces están dadas por la intersección de la identidad y la función $y = \exp(2 - \frac{2}{A})$, se puede ver que está última función tiene asintóticamente a $y = e^2$, además de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} y(A) &\geq 0 & \text{para } A \in \mathbb{R} & \quad \frac{dy}{dA} = \frac{2y}{A} \geq 0 \\ \lim_{A \rightarrow 0^+} y(A) &= 0 & y(A) < e^2 & \text{ si } A > 0 \\ \lim_{A \rightarrow 0^-} y(A) &= \infty & y(A) > e^2 & \text{ si } A < 0 \end{aligned}$$

Puede ser que se tengan a lo más dos raíces para $A > 0$, buscaremos para qué m la recta $y = mA$ toca tangente a $y = \exp(2 - \frac{2}{A})$. Esto lo trataremos como un problema de multiplicadores de Lagrange buscando un mínimo de la función $F(y, A) = y/A$ condicionado a la curva $G(y, A) = \exp(2 - \frac{2}{A}) - y = 0$. Si hacemos esto encontramos que el punto de tangencia es $(A, y) = (2, e)$ de modo que $m = e/2 > 1$. Es decir, la identidad es secante a la curva $y = \exp(2 - \frac{2}{A})$, entonces hay dos raíces: $2 > A_1 > 0$ y $A_2 > 2$. Se puede ver por inspección que $A_1 = 1$ y $5 > A_2 > 2$. De estos dos valores, el único que tiene sentido para nosotros es A_2 . Con este podemos encontrar una cota para el valor de α^* en el cuál se alcanza el máximo del término a acotar.



$$\begin{aligned}
 5 > A_2 > 2 &\rightarrow \sqrt{8\rho} > \alpha^* > \sqrt{\frac{\rho}{2}} \rightarrow \log 5 > \log \left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\alpha^*} \right) > \log 2 \\
 &\Rightarrow \sqrt[4]{8\rho} \log 5 > \alpha^{*1/2} \log \left(1 + \frac{\sqrt{8\rho}}{\alpha^*} \right) \\
 \therefore \int_{\rho}^{\rho'(\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3})} |K_{\epsilon}|(\rho, \rho') d\rho' &\leq 2M(\log 5 + \pi) \sqrt[4]{8\rho} = O(\epsilon^{1/3})
 \end{aligned}$$

Para el intervalo restante podemos usar la expansión exterior en t' se tiene

$$\therefore \frac{1}{\varsigma} \leq \frac{1}{\mathcal{S}' \sin \left(\frac{|t' - t|}{2} \right)} \quad (8.29)$$

Usando esta última cota (8.29), la obtenida en (6.2), $\rho \leq 2\pi\epsilon^{2/3}$ y $\rho' \leq 2\mathcal{S}' \sin t'$ se llega a

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}}^{\pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}} K_{\epsilon} dt' &\leq \int_{\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}}^{\pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}} \frac{16\pi \sin^2 t'}{\sin^3 \left(\frac{|t' - t|}{2} \right)} dt' \leq (2\pi)^4 \epsilon^{2/3} \int_{\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}}^{\pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}} \frac{t'^2}{|t' - t|^3} dt' \\
 &\int_{\frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}}^{\pi - \frac{3\pi}{2}\epsilon^{2/3}} K_{\epsilon} dt' \leq C\epsilon^{2/3} \log(\epsilon^{2/3})
 \end{aligned}$$

Con $C \leq 1$.

El análisis para $\epsilon^{1/2} \leq t \leq \pi/2$ no lo haremos pues es un cálculo repetitivo incluso resulta mucho más sencillo pues las curvas ∂H_{ϵ} y ∂H_0 son muy cercanas, de modo que las cotas que se obtienen son de un orden menor o igual a las obtenidas en estas secciones. □

Bibliografía

- [1] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [2] COURANT R. JOHN F. *Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol. 1*, Limusa, 1982, USA.
- [3] FRAENKEL L. E. y BERGER M. S. *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid* Acta mathematica.(1974) Vol. **132** Pág 14-50.
- [4] NAYFEH A. H. *Perturbation Methods* John Wiley & sons, 1973, New York USA.
- [5] NAYFEH A. H. *Introduction to Perturbation Techniques* John Wiley & sons, 1993, New York USA.
- [6] FRIGYES R. y NAGY B. *Functional Analysis* Blackie & son limited, 1956, London & Glasgow .

Capítulo 9

Existencia de $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$

Recordemos que en el capítulo 5, propusimos plantear el problema como uno de punto fijo, donde es de suma importancia la existencia del siguiente operador:

$$(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$$

No es inmediato concluir la existencia de dicho operador, por ello haremos uso de algunos teoremas estandares de análisis funcional además de la proximidad del operador \mathcal{K}_0 a \mathcal{K}_ϵ .

Lema 8. *Los operadores lineales integrales \mathcal{K} y \mathcal{K}_ϵ definidos en (5.22) son compactos y mapean \mathcal{U} en si mismo.*

Demostración. Primero mostremos la compacidad y continuidad.

Con la desigualdad (6.1) se puede ver que:

$$G \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{\varsigma^\delta} \varsigma^\delta \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} = \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2}}{\varsigma^\delta} \varsigma^\delta \log \left(\frac{\sqrt{2\rho\rho'} + \sqrt{\varsigma^2 + 2\rho\rho'}}{\varsigma} \right)$$

$$\therefore G \leq \frac{\rho^{1/2} \rho'^{3/2} \varsigma^\delta \log \left(\frac{4}{\varsigma} \right)}{\varsigma^\delta} \varsigma^\delta \log \left(\frac{4}{\varsigma} \right) = \frac{\tilde{M}(x, x')}{\varsigma^\delta}$$

con $x = (\rho, z)$, $x' = (\rho', z')$ y $\delta > 0$. Observemos que $\tilde{M}(x, x')$ es acotado para todo $\delta > 0$. Además sabemos que

$$K_\epsilon = \frac{G}{\rho\rho'} \left(\frac{\rho' d\tau'}{g' dt'} \right) \quad \text{con } x, x' \in \partial H_\epsilon$$

Por la ecuación (B.11) el factor entre paréntesis es acotado, mientras que $(\rho\rho')^{-1}$ también lo es. Por tanto:

$$K_\epsilon \leq \frac{M(x, x')}{\varsigma^\delta} \quad \forall \delta > 0$$

Algo análogo pasa para K_0 . Es decir ambos núcleos son débilmente singulares¹ i.e. los operadores \mathcal{K}_ϵ , \mathcal{K}_0 son compactos y $\mathcal{K}_\epsilon v$ y $\mathcal{K}_0 v$ son continuas en t si v lo es.² Además como los operadores son compactos, entonces son acotados.

Para mostrar que $\mathcal{K}v$ (ó $\mathcal{K}_\epsilon v$) es simétrica respecto al eje ρ si $v(t)$ lo es, solo hay que usar la linealidad del operador, es decir si $u(t) = v(\pi - t)$ entonces

$$\mathcal{K}_0 u - \mathcal{K}_0 v = \mathcal{K}_0(u - v) = \mathcal{K}_0(0) = 0$$

Pues si es continua entonces es continua en cero.

$$\therefore \mathcal{K}_0 v(t) = \mathcal{K}_0 u(t) = \mathcal{K}_0 v(\pi - t)$$

□

Ahora para mostrar que el operador $(I - \mathcal{K}_0)^{-1}$ existe y está bien definido, debemos mostrar que el único elemento en el núcleo de $(I - \mathcal{K}_0)$ es la función cero.

Teorema 10. *El núcleo de $(I - \mathcal{K}_0)$ en el subespacio \mathcal{U} es 0.*

Demostración. Comencemos por escribir al operador en una expresión conocida; para eso recordemos que \mathcal{K}_0 está evaluado en ∂H_0 , i.e. sobre un círculo, entonces por la simetría del problema esperamos que el operador buscado pueda expresarse en un desarrollo de Fourier usando como base a los polinomios de Legendre.

Usando la expresión de G en coordenadas polares tenemos:

$$G = \frac{\rho\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi)}}$$

Notemos que el factor que acompaña al término $\sigma\sigma'$ es menor que 1 entonces podemos escribirlo como el coseno de algún ángulo Θ , de manera que el integrando la función generadora de los polinomios de Legendre:

$$G = \frac{\rho\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \Theta) x_2^n \cos \varphi d\varphi$$

con

$$\begin{array}{l} x_1 = \sigma, \quad x_2 = \sigma'/\sigma \quad \text{si } \sigma' < \sigma \\ x_1 = \sigma', \quad x_2 = \sigma/\sigma' \quad \text{si } \sigma' > \sigma \end{array} \quad \text{y} \quad \cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi$$

¹Se dice que un núcleo es débilmente singular si cumple que para todo $x, y \in G \subset \mathcal{R}^n$ con $x \neq y$ existe una constante positiva N y $\alpha \in (0, n]$ tal que:

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha - m} \quad \forall x, y \in G, \quad x \neq y$$

²Esta conclusión viene hecha a detalle en la referencia [1].

Recordemos que este desarrollo se obtiene de la generalización del binomio de Newton, cuya serie converge uniformemente (ver [4]), de manera que podemos cambiar el orden de integración y llegar a:

$$G = \frac{\rho\rho'^2}{2} \frac{x_2^n}{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(\cos \Theta) \cos \varphi \, d\varphi$$

Para integrar hay que observar que $\cos \Theta$ es invariante ante el cambio $(\theta, \theta') \rightarrow (\theta', \theta)$, entonces si pudieramos expresar a $P_n(\cos \Theta)$ como una serie donde cada sumando es de la forma $f_1(\theta)f_1(\theta')f_2(\varphi)$ para reflejar la simetría señalada; esto recuerda los criterios de adición de los polinomios de Legendre (ver [3]).

$$P_n(\Theta) = P_n(\theta)P_n(\theta') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta)P_n^m(\cos \theta') \cos m\varphi$$

Cuya serie es también converge uniformemente, de este modo obtendremos en la expresión de G lo siguiente.

$$G = \frac{\rho\rho'^2}{2} \frac{x_2^n}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} P_n(\theta)P_n(\theta') \cos \varphi \, d\varphi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta)P_n^m(\cos \theta') \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\varphi \cos \varphi \, d\varphi \right]$$

Usando la ortogonalidad de las funciones $\cos mx$ podemos eliminar la segunda suma y encontrar

$$G = \pi\rho\rho'^2 \frac{x_2^n}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta)P_n^1(\cos \theta')$$

esta expresión es singular para $(\sigma, \theta) = (\sigma', \theta')$. Usemos este resultado para encontrar la expresión de K_0 y \mathcal{K}_0 , para el primero tenemos:

$$K_0 = \frac{5}{2\pi} \frac{G|_{\partial H_0}}{\sin \theta \sin \theta'} = \frac{5}{2} \sin \theta' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta)P_n^1(\cos \theta')$$

Así tenemos que

$$\mathcal{K}_0 u = \int_0^{\pi} K_0 u'|_{\partial H_0} d\theta' = \frac{5}{2} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta)P_n^1(\cos \theta') \right) u' \sin \theta' d\theta'$$

$$\therefore \mathcal{K}_0 u = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\xi)P_n^1(\xi') u(\xi') d\xi'$$

De este modo el operador que nos interesa queda escrito de la siguiente forma.

$$(I - \mathcal{K}_0)u = u - \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\xi) P_n^1(\xi') u(\xi') d\xi'$$

Es claro que el núcleo de $(I - \mathcal{K}_0)$ es el subespacio generado por las funciones propias de \mathcal{K}_0 para el valor propio 1, entonces, resulta conveniente encontrar los valores y funciones propias de dicho operador. Para esto, hay que darse cuenta que $\mathcal{U} \subset C(-1, 1) \subset L_2(-1, 1)$, de manera que en L_2 tenemos que:

$$\mathcal{K}_0 u_n = l_n u_n, \quad \|u_n\| = 1$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en L_2 ([3])

$$\int_{-1}^1 P_n^1(\xi) P_m^1(\xi) d\xi = \delta_{mn} \frac{2n(n+1)}{(2n+1)}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Si suponemos que la serie converge uniformemente podemos cambiar el orden de la suma por la integral, de donde al escoger

$$u_n = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2n(n+1)}} P_n^1(\xi')$$

resultará:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 u_n &= \frac{5}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} P_m^1(\xi) \sqrt{\frac{(2n+1)}{2n(n+1)}} \int_{-1}^1 P_m^1(\xi') P_n^1(\xi') d\xi' \\ &= \frac{5}{2} \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{(2n+1)}} P_n^1(\xi) = \frac{5}{(2n+1)} u_n \end{aligned}$$

Así

$$l_n = \frac{5}{(2n+1)}$$

De estos valores propios solo nos interesa el caso $l_n = 1$, este valor se alcanza para $n = 2$, y la función propia asociada a ese valor es

$$\begin{aligned} l_2 = 1 &\Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{5}{12}} P_2^1(\xi) = \sqrt{\frac{5}{12}} P_2^1(\cos \theta) \\ &= \sqrt{\frac{5}{12}} \sin \theta \frac{d}{d(\cos \theta)} P_2(\cos \theta) = \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Entonces el espacio generado por la función u_2 se encuentra en el núcleo del operador buscado, en el espacio L_2 . Observemos que esta función a pesar de ser continua, no es una función simétrica respecto a $\pi/2$, de hecho es antisimétrica respecto a ese punto *i.e.* $u_2 \notin \mathcal{U}$, lo que nos hace concluir que:

$$N(I - \mathcal{K}_0) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{K}_0 u = u, \quad \text{para } u \in \mathcal{U} \Leftrightarrow u = 0$$

□

Con esto se puede concluir lo siguiente:

Lema 9. *La ecuación lineal $u - \mathcal{K}_0 u = f$ para $f \in \mathcal{U}$, tiene una única solución $(I - \mathcal{K}_0)^{-1} f$; dicha solución depende continuamente del valor de f y $(I - \mathcal{K}_0)^{-1}$ es lineal y acotado.*

La demostración de este lema, se basa en la teoría hecha por Riesz acerca de las ecuaciones integrales lineales de segundo tipo para operadores compactos; para mayor referencia, invitamos al lector a revisar la magnífica exposición realizada en [1], que dedica un capítulo completo al desarrollo claro y conciso de esta teoría.

Antes de continuar y con el lema principal, mostraremos dos teoremas importante.

Teorema 11. *Sea X espacio de Banach y suponga A un operador lineal y acotado de X en sí mismo con la propiedad que la serie $\sum_0^\infty A^n$ converge. Entonces $I - A$ es invertible en el mismo espacio. Además:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} A^0 = I \\ A^n v = A^{n-1}(Av) \end{array}$$

Una condición suficiente para que esto pase es que $\|A\| < 1$. En este caso se cumple que:

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$$

Demostración. Llamemos $B = \sum_0^\infty A^n$, entonces, es claro que:

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = BA \quad \Rightarrow \quad B - AB = B - BA = I$$

Agrupando adecuadamente la línea anterior se encuentra:

$$(I - A)B = B(I - A) = I$$

Es decir B es la inversa derecha e izquierda de $(I - A)$, y con ello se ha mostrado la existencia. Si $\|A\| < 1$ podemos usar que $\|A^n\| < \|A\|^n$, entonces:

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

□

Teorema 12. *Sea X como antes, y A, B operadores lineales y acotados de X en sí mismo, A es invertible con inversa acotada y B cumple $\|A - B\| < 1/\|A^{-1}\|$ entonces B es invertible y acotado.*

Demostración. Para mostrar ello, solo hay que mostrar que $A^{-1}B$ es invertible; para ello observemos que $A^{-1}B = I - (I - A^{-1}B)$, entonces por el teorema anterior bastará con probar que $\|I - A^{-1}B\| < 1$, lo cual es fácil de mostrar pues:

$$\|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < 1$$

Entonces $(A^{-1}B)^{-1}$ existe, además recordemos que $B = A(A^{-1}B)$ así $B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$. Usando el último resultado del teorema anterior encontramos que:

$$\|B^{-1}\| \leq \|(A^{-1}B)^{-1}\| \|A^{-1}\| < \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|I - A^{-1}B\|} < \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$$

□

El lema anterior y los dos teoremas anteriores nos capacitan para demostrar el resultado principal enunciado a continuación.

Lema 10. *La ecuación lineal $u - \mathcal{K}_\epsilon u = f$ para $f \in \mathcal{U}$, tiene una única solución $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}f$; dicha solución depende continuamente del valor de f y $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$ es lineal y acotado.*

Demostración. Si llamamos $A = I - \mathcal{K}_0$, ya hemos mostrado que este operador es invertible, entonces haciendo $B = I - \mathcal{K}_\epsilon$ encontramos que

$$\|A - B\| = \|\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{K}_0\| < C\epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon)$$

Como $(I - \mathcal{K}_0)^{-1}$ es lineal y acotado, se tiene que

$$\|(I - \mathcal{K}_0)^{-1}\| = \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|(I - \mathcal{K}_0)^{-1}\|} = M$$

donde M constante independiente de ϵ . Además podemos encontrar $\epsilon_1 > 0$ de modo que:

$$C\epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon) < M \quad \forall \quad 0 < \epsilon < \epsilon_1$$

Con ello se garantiza por el teorema anterior que $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$ existe y es acotado; por otro lado, la linealidad se tiene de la linealidad de $(I - \mathcal{K}_\epsilon)$, i.e. $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$ depende continuamente de la función a la que se aplica. □

Bibliografía

- [1] KRESS R. *Linear Integral Equations* Springer-Verlag 1999, segunda edición, New York USA.
- [2] FRIGYES R. y NAGY B. *Functional Analysis* Blackie & son limited, 1956, London & Glasgow .
- [3] SOMMERFELD A. *Partial Differential Equations in Physics* Academic Press 1949, New York USA
- [4] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [5] COURANT R. y HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics Vol. 1 y 2*, Interscience Publishers, 1966, USA.
- [6] LEVEDEV. N. *Special Functions and their Applications* Dover, 1972, New York USA.
- [7] TAYLOR A. *Perturbation Methods* John Wiley & sons, 1973, New York USA.
- [8] HOSCHSTADT H. *Integral equations* Wiley-Interscience Publications 1973, Canada
- [9] MIKHLIN S. *Linear Integral Equations* 1960, Hindustan.
- [10] SMIRNOV V. *A Course of Higher Mathematics V*. Pergamon Press (1964) New York USA.
- [11] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.

Capítulo 10

Análisis de términos no lineales

En este capítulo analizaremos los términos no lineales de nuestra ecuación funcional, dicho estudio se realizará con ideas semejantes a las del capítulo (8).

Nuestro objetivo será probar el siguiente resultado:

Teorema 13. *El operador no lineal \mathcal{N}_ϵ definido en el capítulo (5) mapea \mathcal{B} en \mathcal{U} ; más aún satisface las siguientes relaciones para $t \in [0, \pi]$.*

$$|\mathcal{N}_\epsilon u| \leq C_2 \|u\| (\epsilon^{-4/3} \|u\| + \epsilon) \quad (10.1)$$

$$|\mathcal{N}_\epsilon u_1 - \mathcal{N}_\epsilon u_2| \leq C_3 \|u_1 - u_2\| (\epsilon^{-4/3} [\|u_1\| + \|u_2\|] + \epsilon) \quad (10.2)$$

Demostración. Lo primero por hacer es escribir a los términos no lineales de una forma un poco más manejable, Despejando \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 como continuación se señala.

Definamos

$$\Psi_A(\rho, z) = -\frac{2}{3}\rho^2 - k_0 + \frac{5}{\pi} \iint_A G dA'$$

Reescribiendo la ecuación (5.18) tenemos:

$$\Psi_{H_\epsilon}(\rho, z)|_{\partial\Omega} = \Psi_{H_\epsilon}(\rho, z)|_{\partial H_\epsilon} + q \frac{\partial \Psi_{H_\epsilon}(\rho, z)}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} + \mathcal{N}_1$$

Es posible escribir a $\Psi_{H_\epsilon}(\rho, z)$ en términos de H_0 ,

$$\Psi_{H_\epsilon}(\rho, z) = \Psi_{H_0}(\rho, z) - \frac{5}{\pi} \iint_{H_0 - H_\epsilon} G dA'$$

Para ahorrar escritura ignoremos las variables (ρ, z) en la función Ψ anotandolas cuando sea necesario. Despejando \mathcal{N}_1 de (5.18) se llega a

$$\mathcal{N}_1 = \Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \left. \frac{\partial \Psi_{H_0}}{\partial \nu} \right|_{\partial H_\epsilon} - \frac{5}{2} \iint_{H_0 - H_\epsilon} G|_{\partial\Omega} - G|_{\partial H_\epsilon} - q \left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{\partial H_\epsilon} dA' \quad (10.3)$$

Para \mathcal{N}_2 ocurre algo semejante pues recordemos que este término es definido por la ecuación (5.19)

$$\frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} G dA' \Big|_{\partial\Omega} = \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} Gq(\rho', z') d\tau' \Big|_{\partial H_\epsilon} + \mathcal{N}_2(q) \quad (10.4)$$

Para continuar, habrá que hacer un cambio de coordenadas muy particular. La región $\Omega - H_\epsilon$ se puede expresar en términos de las coordenadas (τ, ν) , donde τ es la longitud de arco de la curva ∂H_ϵ medida desde el punto $(\epsilon, 0)$ y ν es la distancia (medida normalmente a ∂H_ϵ) que separa al punto de estudio en $\Omega - H_\epsilon$ y al punto de referencia en ∂H_ϵ . Es decir, si $\partial\Omega$ y ∂H_ϵ son lo suficientemente cercanas para que dos normales a ∂H_ϵ (en puntos disntintos) se corten fuera de la región $\Omega - H_\epsilon$ podemos escribir de manera única a un punto en la región antes señalada como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\tau) + \nu \mathbf{n} \quad \text{con } \mathbf{n}(\tau) \text{ normal exterior unitario y } \mathbf{X}_0(\tau) \in \partial H_\epsilon$$

Entonces, el jacobiano de la transformación es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(\nu, \tau)} &= \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \nu} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right\| = \left\| \left[\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{X}_0}{d\tau} + \nu \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} \right] \right\| \\ \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(\nu, \tau)} &= \left\| \mathbf{n} \times \left(\hat{\tau} + \nu \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} \right) \right\| = \left\| \mathbf{n} \times \left(\hat{\tau} + \nu \left[-\frac{1}{k} \frac{dk}{d\tau} \mathbf{n} + \frac{1}{k} \frac{d^2 \hat{\tau}}{d\tau^2} \right] \right) \right\| \end{aligned}$$

¹Dada una curva suave y τ la longitud de arco, podemos definir al vector tangente $\hat{\tau}$, normal \mathbf{n} y la curvatura k de la siguiente forma:

$$\hat{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}$$

Este vector es unitario; entonces se encuentra que

$$\frac{d}{d\tau} \|\hat{\tau}\|^2 = 2\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{d\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\tau} \perp \frac{d\hat{\tau}}{d\tau}$$

si expresamos a $\hat{\tau}$ en términos de α , el ángulo que hace la tangente con el eje x , también podemos escribir al vector tangente como:

$$\hat{\tau} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{d\hat{\tau}}{d\tau} = \frac{d\alpha}{d\tau} (-\sin \alpha, \cos \alpha) = k\mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \hat{\tau}}{d\tau^2} = \frac{dk}{d\tau} \mathbf{n} - k^2 \hat{\tau}$$

Pues recordemos que la curvatura se define como la razón de cambio del ángulo de la tangente (con la horizontal) respecto a la longitud de arco. Entonces tenemos

$$k = \left\| \frac{d\hat{\tau}}{d\tau} \right\| \quad \text{y} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d\hat{\tau}}{d\tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(\nu, \tau)} &= \left\| \mathbf{n} \times \left(\hat{\tau} + \nu \left[-\frac{1}{k} \frac{dk}{d\tau} \mathbf{n} + \frac{1}{k} \left\{ \frac{dk}{d\tau} \mathbf{n} - k^2 \hat{\tau} \right\} \right] \right) \right\| \\ \therefore \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(\nu, \tau)} &= (1 - k\nu) \end{aligned} \quad (10.5)$$

Con esta expresión del jacobiano, podemos escribir la siguiente identidad:

$$\frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} G dA' \Big|_{\partial\Omega} = \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} G|_{\partial\Omega} (1 - k'\nu') d\nu' d\tau'$$

Observemos que la integral de línea en (10.4) se puede expresar como una integral de superficie.

$$\frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} G|_{\partial H_\epsilon} q' d\tau' = \frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \Gamma_\epsilon(t, t') \int_0^{q(t')} d\nu' d\tau' = \frac{5}{\pi} \int_0^{\tau(\pi)} \int_0^{q(t')} \Gamma_\epsilon(t, t') d\nu' d\tau'$$

Multiplicando el integrando por el factor $1 - k'\nu' + k'\nu'$ y reagrupando tenemos

$$\frac{5}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} G|_{\partial H_\epsilon} q' d\tau' = \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} \Gamma_\epsilon(t, t') dA' + \frac{5}{\pi} \int_0^{\tau(\pi)} \int_0^{q(t')} \Gamma_\epsilon(t, t') k'\nu' d\nu' d\tau'$$

Como la curvatura k y Γ_ϵ son funciones que dependen solamente de la longitud de arco, podemos realizar la primera integral en el segundo sumando del miembro derecho de modo que

$$\mathcal{N}_2 = \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} (G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t')) dA' - \frac{5}{\pi} \int_0^{\tau(\pi)} \Gamma_\epsilon(t, t') \frac{k'q'^2}{2} d\tau' \quad (10.6)$$

Para continuar la demostración probaremos que \mathcal{N}_ϵ mapea a \mathcal{B} en \mathcal{U} . Notemos que \mathcal{N}_ϵ es la adición de los dos sumandos no lineales antes calculados dividida por ρ . Analicemos término a término.

$$\mathcal{N}_1 = \Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial\Psi_{H_0}}{\partial\nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} - \frac{5}{2} \iint_{H_0 - H_\epsilon} G|_{\partial\Omega} - G|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial G}{\partial\nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA'$$

La primera parte de esta expresión vemos que es invariante ante el cambio de $t \rightarrow \pi - t$ (esta transformación induce el cambio $z \rightarrow -z$), además sabemos que $\Psi_{H_0} = \rho^2(1 - \rho^2 - z^2)$, de modo que $\Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial\Psi_{H_0}}{\partial\nu} \Big|_{\partial H_\epsilon}$ se puede determinar explícitamente, *i.e.* la continuidad se muestra fácilmente.

La invarianza de las integrales ante el cambio $t \rightarrow \pi - t$, se debe a la simetría de la región de integración, pues a las primeras dos integrales las podemos pensar como la resta de dos funciones de corriente de dos vórtices anulares de sección transversal $H_0 - H_\epsilon$ y misma función de vorticidad pero distinto signo, que se evalúan sobre las curvas $\partial\Omega$ y ∂H_ϵ respectivamente, mientras que la invarianza del término con derivada normal se garantiza pues podemos escribirlo como

$$-q \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{5}{2} \iint_{H_0 - H_\epsilon} G \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} \quad (10.7)$$

Esta cantidad mide el cambio de la función de corriente de un vórtice anular en $H_0 - H_\epsilon$ evaluada sobre ∂H_ϵ . Entonces, la invarianza de la función de corriente ante el cambio $t \rightarrow \pi - t$ y la simetría de la curva ∂H_ϵ garantizan la invarianza de (10.7), y con ello la del término \mathcal{N}_1 .

Para \mathcal{N}_2 los mismos argumentos se aplican en la integral de superficie, pues $\partial\Omega$ es simétrica respecto al eje r así como lo es ∂H_0 . En la integral de línea Γ_ϵ es invariante ante el cambio mencionado, así como la curvatura de ∂H_ϵ y la cantidad $q'(\tau')$, dependen de $\partial\Omega$ y ∂H_ϵ . Por lo tanto \mathcal{N}_2 es invariante ante el cambio $t \rightarrow \pi - t$.

Por otra parte la continuidad se muestra usando las mismas ideas que en el capítulo (9), es decir, esta propiedad es consecuencia directa de que el operador G y G^2 tengan singularidad de tipo logarítmica y logarítmica cuadrada, (son integrables), y la frontera de $H_0 - H_\epsilon$ y $\Omega - H_\epsilon$ son continuas; *i. e.* el operador resultante es compacto.²

Con esto concluimos que $\mathcal{N}_\epsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}$.

El resto del capítulo consiste en mostrar (10.1) y (10.2). Comencemos con los términos que no involucran integrales, es decir:

$$\Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial \Psi_{H_0}}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \quad (10.8)$$

Es fácil ver que esta parte es el residuo de una serie de Taylor a segundo orden de $\Psi_{H_0}|_{\partial\Omega}$ en términos de $\Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon}$ pues Ψ_{H_0} es constante sobre la curva ∂H_ϵ por ser línea de corriente.

Si llamamos α el ángulo de la normal a ∂H_ϵ con el eje z podemos descomponer al incremento en sus componentes ρ, z y ver que

$$\rho|_{\partial\Omega} = \rho|_{\partial H_\epsilon} + q \sin \alpha \quad z|_{\partial\Omega} = z|_{\partial H_\epsilon} + q \cos \alpha$$

²Ver ([3]) y ([4]).

$$\Rightarrow \Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} = \rho^2|_{\partial\Omega}(1 - z^2|_{\partial\Omega} - \rho^2|_{\partial\Omega})$$

Sustituyendo las primeras dos expresiones en la tercera, agrutando adecuadamente en potencias de q encontramos que

$$R_2 = q^2\rho \left[\sin^2\alpha \frac{1 - z^2 - \rho^2}{\rho} - \rho(1 + 4\sin^2\alpha) - 2z\sin 2\alpha \right. \\ \left. - q\sin\alpha \left\{ 2 + 2\sin^2\alpha + \frac{z}{\rho}\sin 2\alpha + \frac{q}{\rho}\sin^2\alpha \right\} \right]$$

Hay que resaltar que el factor que acompaña a $q^2\rho$ es acotado entonces:

$$\frac{\Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial \Psi_{H_0}}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon}}{\rho} \leq Cq^2 \leq C \frac{\|u\|^2}{g^2}$$

Además g también lo es (ver ecuación (8.19)), de hecho

$$g \geq \sqrt{(1 - 2\sigma^2)^2 \sin^2\theta + (1 - \sigma^2)^2 \cos^2\theta} \quad (10.9)$$

Para dar una mejor cota inferior a g probaremos el siguiente teorema.

Teorema 14. *Dado el punto $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$ la siguiente cota de g es válida.*

$$g < C\epsilon^{-2/3} \quad (10.10)$$

Demostración. Como g es evaluado sobre ∂H_ϵ , podemos expresar al $\sin\theta$ y $\cos\theta$ como función de σ , de manera que al sustituirlas en (10.9) tenemos

$$g^2 \geq (1 - \sigma^2)^2 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2) \frac{2 - 3\sigma^2}{1 - \sigma^2} \equiv f(\sigma)$$

σ buena variable de f pues $t \in [0, \pi]$ implica que σ sea creciente. Esta función solo tiene un punto crítico (mínimo) para $\sigma > 0$ dado por

$$f'(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{2}}$$

Con un poco de manipulación algebraica tenemos

$$g^2 \geq f\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{2}}\right) = \frac{3}{2^{2/3}}\epsilon^{4/3}(1 - O(\epsilon^{2/3}))$$

De aquí identificamos que $C \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

□

Por tanto acotamos la primer parte no lineal por:

$$\frac{\Psi_{H_0}|_{\partial\Omega} - \Psi_{H_0}|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial \Psi_{H_0}}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon}}{\rho} \leq C^{-2} \|u\|^2 \epsilon^{-4/3}$$

Para mostrar (10.2) en este término no lineal, solo basta con hacer el análisis anterior dos veces y recordar la factorización de una diferencia de cuadrados.

10.1. Elección del espacio de trabajo y su partición

El siguiente paso es acotar las integrales de la expresión (10.3). Al igual que en los desarrollos anteriores tendremos que partir el integrando en dos regiones para t' de modo que con $t \in [0, \pi/2]$ la integral sea pequeña (de orden q^2) pues el integrando es chico, mientras que en la segunda el integrando puede o no estar acotado³ y la región de integración es pequeña de manera que la integral también lo es. Para este fin se definen dos espacios:

$$E_1 = \{(\rho', z') | (\rho', z') \in H_0 - H_\epsilon, \zeta \leq 2q\} \quad E_2 = H_0 - H_\epsilon - E_1 \quad (10.11)$$

donde $\zeta^2 = (\rho - \rho')^2 + (z - z')^2$ con $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$.

Al igual que antes, usaremos las cotas obtenidas en (6), cada una servirá dependiendo la región de trabajo; por ejemplo si tomamos $\epsilon^{2/3} < t \leq \pi/2$, habrá que dividir a E_1 en dos regiones una donde usaremos la primera de las cotas obtenidas en (6.14) (regiones alejadas de $t = t'$) y otra donde trabajaremos con la segunda (regiones cercanas a $t = t'$). Para hacer esto, nos basaremos en $\zeta^2/(4\rho\rho')$.

Supongamos que tomamos $u \in \mathcal{B}$, y como $|g^{-1}| \leq C^{-1}\epsilon^{-2/3}$, podemos afirmar que $|q| \leq C^{-2}\epsilon^{4/3}$, ya que $q = u/g$.

10.1.1. Partición de E_1

Para designar la partición de E_1 haremos el siguiente análisis.

$$\frac{\zeta^2}{4\rho\rho'} = \frac{(\sigma - \sigma')^2 + 4\sigma\sigma' \sin^2 |\theta - \theta'|/2}{4\sigma\sigma' \sin \theta \sin \theta'} \geq \frac{1}{\pi^2} \frac{|\theta - \theta'|^2}{\theta\theta'} = \frac{1}{\pi^2} \left[\sqrt{\frac{\theta}{\theta'}} - \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \right]^2$$

³Si no es acotado, la singularidad que posee es removible

La manera más simple de hacer que el término de la derecha sea independiente de ϵ , es que $\theta' \geq \alpha_1 \theta$ ó $\theta \geq \alpha_2 \theta'$ con $\alpha_i = \text{cte.}$ ⁴ En particular forzamos la condición:

$$\left[\sqrt{\frac{\theta}{\theta'}} - \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \right]^2 > 1$$

Se encuentra que

$$\sqrt{\frac{\theta}{\theta'}} - \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \geq 1 \rightarrow \frac{\theta}{2} \geq \theta', \quad \sqrt{\frac{\theta}{\theta'}} - \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \leq -1 \rightarrow \theta' \geq \frac{3}{2}\theta$$

Escogiendo $\alpha_1 = 3/2$ y $\alpha_2 = 2$ podemos garantizar que $\varsigma^2 > q^2$ ⁵
 $t \geq \epsilon^{2/3}$ implica que $\theta/2 \geq \theta_c$, entonces definimos:

$$E_{1a} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid \theta_c \leq \theta' \leq \frac{\theta}{2}, \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \theta_c < \theta' \leq \frac{\pi}{2}, \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (10.12)$$

$$E_{1b} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid \frac{\theta}{2} \leq \theta' < \theta, \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (10.13)$$

$$E_{1c} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid \theta < \theta' \leq \frac{3}{2}\theta, \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (10.14)$$

$$E_{1d} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid \frac{3}{2}\theta \leq \theta' \leq \pi - \theta_c, \sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta' < \pi - \theta_c, \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (10.15)$$

con (ρ, z) fijo y $\epsilon^{2/3} \leq t \leq \pi/2$. y $\sin^2 \theta_c = \epsilon^2(1 - \epsilon^2)$.

En E_{1a} y E_{1d} es aplicable la primera cota de (6.14) mientras que en E_{1b} y E_{1c} se aplica la segunda. Entonces podemos acotar al término no lineal como sigue:

$$\left| \iint_{H_0 - H_\epsilon} G|_{\partial\Omega} - G|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' \right| \leq \iint_{E_1} \left| G|_{\partial\Omega} - G|_{\partial H_\epsilon} - q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' \quad (10.16)$$

$$+ \iint_{E_2} G|_{\partial\Omega} + G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' \quad (10.17)$$

Para evitar problemas, la parte de E_{1a} y E_{1d} donde $\sigma < 1/\sqrt{2}$, se cubrirá con una franja de ancho 3ϵ , pues $\sigma(\theta_c) \sin \theta_c = \epsilon\sqrt{2(1 - \epsilon^2)} < 3\epsilon$ es decir toda la región donde $\sigma \leq 1/\sqrt{2}$ queda cubierta por la franja

$$\{(\rho, z) \mid 0 \leq \rho \leq 3\epsilon, \quad -1 < z < 1\}$$

⁴Si θ' es cercano a θ la cota inferior puede hacerse tan pequeña como se desee.

⁵como $\rho \geq \epsilon \geq q$, $\rho' \geq \epsilon \geq q$ entonces $\rho\rho' \geq q^2$.

Para cubrir el resto de E_1 debemos estudiar la expresión para σ . Tomemos

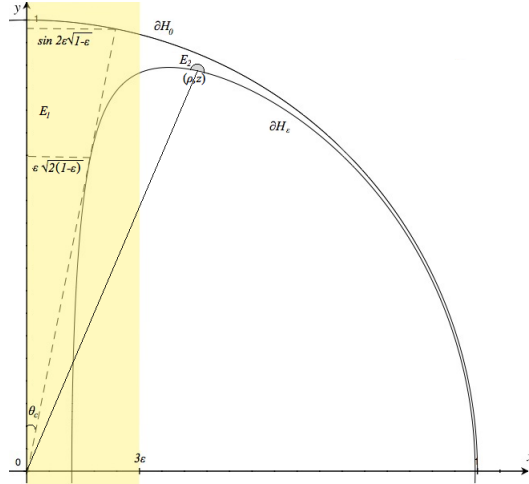
$$f(h) = \sqrt{1-h} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1}{n} \frac{h^n}{n!} \quad h \ll 1$$

Donde $(l)_s = l(l+1)(l+2)\cdots(l+s-1)$ y $s \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que cada término de la sumatoria es negativo (para $h > 0$). Entonces si definimos $J(h) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-h}}$ su desarrollo en serie de Taylor es:

$$J(h) = \sqrt{1 - \frac{\gamma(h)}{2}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1}{m} \frac{\gamma^m(h)}{2^m m!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1}{n} \frac{h^n}{n!} \equiv -\gamma$$

Se puede observar fácilmente que $\epsilon < \sqrt{1-2/\sqrt{5}}$ implica

$$\therefore 1 - \beta \geq \sigma \geq 1 - 4\beta, \quad \beta = \frac{\epsilon^2}{2 \sin^2 \theta} \quad (10.18)$$



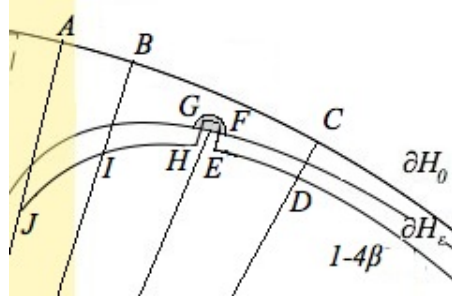
Con esto, la integral sobre $E_{1a} \cup E_{1d}$ se acota por:

$$\int_{E_{1a} \cup E_{1d}} |\dots| dA' \leq \int_0^{3\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \dots |dz' d\rho'| + \left(\int_{3\epsilon}^{\theta/2} \int_{1-4\beta'}^1 + \int_{3\epsilon/2}^{\pi-3\epsilon} \int_{1-4\beta'}^1 \right) |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta'$$

Mientras que la integral $E_{1b} \cup E_{1c}$ se sobre estima por:

$$\int_{E_{1b} \cup E_{1c}} |\dots| dA' \leq \left(\int_{\theta_2}^{\theta - \sqrt{2}|q|} \int_{1-4\beta'}^1 + \int_{\theta + \sqrt{2}|q|}^{3\theta/2} \int_{1-4\beta'}^1 + \int_{\theta - \sqrt{2}|q|}^{\theta + \sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \right) |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta'$$

La región de integración es la comprendida por la figura BCDEFGHI en el siguiente diagrama.



Por definición de E_2 , la integral en esa parte se acota por

$$\iint_{E_2} |\dots| dA' \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2|q|} |\dots| \zeta d\zeta d\phi \quad \text{con} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{z - z'}{\rho - \rho'}$$

Comencemos por la integral sobre $E_{1a} \cup E_{1d}$. En el primer sumando de dicha expresión usamos la primera de las cotas encontradas en (6.14), integrando con el cambio de variable $\phi(z') = \tan^{-1} \frac{z - z'}{\rho - \rho'}$ y usando que $\left| \sin \phi \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{3} \right) \right| \leq \frac{2}{3}$ tendremos:

$$K = \int_0^{3\epsilon} \int_{-1}^1 |\dots| dz' d\rho' \leq 448 \frac{\|u\|^2}{g^2} \left(\frac{2}{3} \left| \int_0^{3\epsilon} \frac{\rho^2 \rho'^3}{(\rho - \rho')^4} d\rho' \right| + \left| \int_0^{3\epsilon} \frac{\rho'^3}{(\rho - \rho')^2} d\rho' \right| \right)$$

Si $t \geq \epsilon^{2/3}$ entonces $\mathcal{S} \geq 1/\sqrt{2}$, de modo que $\rho \geq \frac{\sqrt{2}t}{\pi}$ $\rho' \leq 3\epsilon$, usando esto y (10.10) encontramos

$$K \leq \frac{\tilde{C}72\pi^4\rho^2}{C^2} \epsilon \|u\|^2 \quad \text{con} \quad \tilde{C} = O(1) \quad (10.19)$$

Ahora pasemos al segundo sumando de $E_{1a} \cup E_{1d}$, donde al usar que $\rho \leq \sigma\theta$ y la misma expresión (con variables primadas) para ρ' , aunado a $\theta \geq \sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ se acota como sigue

$$\int_{3\epsilon}^{\theta/2} \int_{1-4\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta' \leq 18q^2 \int_{3\epsilon}^{\theta/2} \int_{1-4\beta}^1 \left(\frac{\sigma^2 \sigma'^3 \theta^2 \theta'^3}{\zeta^5} + \frac{\sigma'^3 \theta'^3}{\zeta^3} \right) \sigma' d\sigma' d\theta' \equiv L$$

Al usar $\zeta^2 \geq 4\sigma\sigma' \sin^2 \frac{|\theta - \theta'|}{2} \geq \sigma\sigma'\theta^2/\pi^2$ (pues $\theta' \leq \theta/2$), la expresión resultante se puede integrar de modo que

$$L \leq 18\pi^3(\pi^2+1)q^2 \int_{3\epsilon}^{\theta/2} \frac{\theta'^3}{\theta^3} \int_{1-4\beta'}^1 \sigma' d\sigma' d\theta' \leq \frac{9\pi^3(\pi^2+1)}{2C^2} \|u\|^2 \leq \frac{9\pi^4(\pi^2+1)}{\sqrt{8}C^2} \epsilon^{-2/3} \|u\|^2 \rho^6 \quad 6$$

El tercer y último sumando de $E_{1a} \cup E_{1d}$ de manera analoga a los casos anteriores se llega a:

$$\int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \int_{1-4\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta' \leq 36C^{-2}\pi^4(\pi^2+2)\rho\epsilon^{-2/3}\|u\|^2$$

Ahora comencemos con las integrales para la región $E_{1b} \cup E_{1c}$, antes mostraremos la siguiente

Proposición 5. Si $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$ y $(\rho', z') \in E_{1b} \cup E_{1c}$ entonces se cumple que

$$\sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \log \frac{6\theta}{\|\theta - \theta'\|} \quad (10.20)$$

Demostración. Se sabe que en esta región $\theta/2 < \theta' < 3\theta/2$

$$\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \frac{\pi\sqrt{\theta\theta'}}{\sqrt{2}|\theta - \theta'|} \leq \frac{\pi\sqrt{3}\theta}{2|\theta - \theta'|}$$

Se observa que

$$\frac{\pi\sqrt{3}\theta}{2|\theta - \theta'|} \geq \pi\sqrt{3} \Rightarrow 1 + 2\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq (1 + 2\pi\sqrt{3})\frac{\theta}{2|\theta - \theta'|} < \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|}$$

$$\therefore \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \log \left(1 + \frac{\sqrt{8\rho\rho'}}{\varsigma} \right) \leq \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|}$$

□

Con este resultado nos es posible continuar. Tomemos la primera de ellas y acotemosla usando la segunda expresión de (6.14)

$$\int_{\theta/2}^{\theta-\sqrt{2}|q|} \int_{1-4\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta' \leq 18q^2 \int_{\theta/2}^{\theta-\sqrt{2}|q|} \int_{1-4\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\frac{1}{\varsigma^2} + \frac{2}{\rho^2} \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|} \right] \sigma' d\sigma' d\theta' \equiv N$$

⁶Esta última desigualdad se tiene al multiplicar y dividir por ρ y usar que $\rho \geq \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}\theta}{\pi}$

Primero integremos el término ς^{-2} . Con $\rho' < 2\rho$ y $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$ y $\sigma' \geq 1/\sqrt{2}$, e integrando en σ' (y usando que $\tan^{-1} x \leq \pi/2$) tenemos

$$\int_{1-4\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \frac{1}{\varsigma^2} \sigma' d\sigma' \leq 2\sqrt{2}\rho^2 \int_{1-4\beta'}^1 \frac{1}{(\sigma' - \sigma)^2 + 2\frac{|\theta - \theta'|^2}{\pi^2}} d\sigma' \leq \frac{\pi^2 \rho^2}{|\theta - \theta'|}$$

Para el otro integrando usaremos que $\rho'/\rho < 2$

$$\int_{1-4\beta'}^1 \frac{2\rho'^{3/2}}{\rho^{3/2}} \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|} \sigma' d\sigma' \leq 16\sqrt{2}\beta' \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|} \leq \sqrt{8}\pi^2 \frac{\epsilon^2}{\theta^2} \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|}$$

Con esto, podemos acotar a N como sigue:

$$N \leq 18\pi^2 q^2 \rho \int_{\theta/2}^{\theta - \sqrt{2}|q|} \left[\frac{\rho}{|\theta - \theta'|} + \frac{\sqrt{8}\epsilon^2}{\theta\theta^2} \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|} \right] d\theta'$$

Integrando directamente el primer sumando y por partes (repetidas veces) el segundo tendremos

$$N \leq 18\pi^2 q^2 \rho \left[\rho \log \frac{\theta}{2\sqrt{2}|q|} + \frac{\sqrt{8}\epsilon^2}{\theta^2} \log 12 \right]$$

Como se ve en (B.2) el cociente $\rho/g < C_2$, y por 10.10 llegamos a

$$N \leq 18C_2 C^{-1} \pi^2 \epsilon^{-2/3} \|u\|^2 \rho \left[\frac{2}{3} \log \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{8} \log 12 \right]$$

Es decir esta parte de la integral es del orden señalado en (10.1).

Los cálculos hechos antes pueden modificarse para calcular la segunda integral de $E_{1b} \cup E_{1c}$, pero antes debemos relacionar ρ con ρ' , para ello notemos que $2\sigma > \sigma'$. Para relacionar $\sin \theta$ con $\sin \theta'$ no es tan sencillo pues $\sin x$ oscila. Para ello analizamos los casos posibles para $\theta \leq \pi/2$ (pues la curva es simétrica).

- $\epsilon^{2/3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ implica $\frac{3\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$; como $\sin x$ se ve fácilmente que $\sin \theta \leq \sin \theta' \leq 2 \sin \theta$. Pues $\cos \theta \geq 0$ en esa región.
- Si $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ entonces $\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$ de manera que $1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$. Así $\frac{3}{2} \sin \theta \geq \sin \theta'$.

Concluimos que $\sin \theta' \leq 2 \sin \theta$ i.e. $\rho' \leq 4\rho$. Entonces

$$\int_{\theta + \sqrt{2}|q|}^{3\theta/2} \int_{1-4\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta' \leq 18 \cdot 8 q^2 \int_{\theta + \sqrt{2}|q|}^{3\theta/2} \int_{1-4\beta'}^1 \frac{\rho^2}{\varsigma^2} + 2 \log \frac{6\theta}{|\theta - \theta'|} \sigma' d\sigma' d\theta' \equiv P$$

Apartir de aquí, los pasos para acotar a P son exactamente los mismos que se hicieron para N , de modo que llegaremos a la misma cota.

$$\therefore P \leq 18\sqrt{8}C_2C^{-1}\pi^2 \epsilon^{-2/3}\|u\|^2\rho \left[\frac{2}{3} \log \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{8} \log 12 \right]$$

Que es la estimación buscada.

Falta encontrar la última de las integrales sobre $E_{1b} \cup E_{1c}$, es decir

$$\int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta'$$

Para hacerlo cambiaremos la cota en el \sinh^{-1} del integrando. Observemos que

$$\frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \frac{\sqrt{2}\theta}{|\sigma - \sigma'|} = \frac{\sqrt{8}\theta \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}{\epsilon^2 |\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta|} \left(1 + O\left(\frac{\epsilon^4}{\sin^4 \theta} + \frac{\epsilon^4}{\sin^4 \theta'} \right) \right)$$

Si estimamos el orden de magnitud de esta cantidad encontramos:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{8}\theta \sin^2 \theta \sin^2 \theta'}{\epsilon^2 |\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta|} \left(1 + O\left(\frac{\epsilon^4}{\sin^4 \theta} + \frac{\epsilon^4}{\sin^4 \theta'} \right) \right) = O\left(\frac{\theta^4}{\epsilon^2 q} \right) \\ \therefore \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} & \leq \frac{\sqrt{2}\theta}{|\sigma - \sigma'|} = O(\epsilon^{-2/3}) \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \frac{2\theta}{|\sigma - \sigma'|} \end{aligned}$$

Con este resultado tenemos

$$\sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \log \frac{2\theta}{|\sigma - \sigma'|}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & \int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 |\dots| \sigma' d\sigma' d\theta' \\ & \leq 18q^2 \int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\frac{1}{\varsigma^2} + \frac{2}{\rho^2} \log \frac{2\theta}{|\sigma - \sigma'|} \right] \sigma' d\sigma' d\theta' \equiv Q \end{aligned}$$

Recordemos que sobre esta región no existen singularidades, pues así fue construida, aprovechando esto integremos cada sumando; en el primero usemos que $\varsigma > |\sigma - \sigma'|$, $\sigma' < 2\sigma$ y $\theta' < 2\theta$

$$\int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \frac{\sigma' d\theta' d\sigma'}{\varsigma^2} \leq \sqrt{2}\pi\rho \int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \theta' \int_{1-\beta'}^1 \frac{\sigma'^2}{(\sigma - \sigma')^2} d\sigma' d\theta'$$

Integrando directamente la primera vez y acotando por el máximo a la función resultante se tiene

$$\int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho^{3/2} \frac{\sigma' d\theta' d\sigma'}{\zeta^2} \leq 8\sqrt{\pi}\rho \left[\frac{\pi^2\theta q}{5\beta^2} + \sigma\theta q \log \frac{1}{4\beta^2} \right]$$

Para el otro integrando se usa $2\rho > \rho'$ y se integra por partes

$$\begin{aligned} & \int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho^{3/2} \frac{2}{\rho^2} \log \frac{2\theta}{|\sigma - \sigma'|} \sigma' d\sigma' d\theta' \\ & \leq 16 \int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \log \frac{2\theta}{(\sigma' - \sigma)} \sigma' d\sigma' d\theta' \end{aligned}$$

pues $2\rho > \rho'$ y en la región de integración $\sigma < \sigma'$, a integrar por partes la primera vez y acotando por el máximo la función restante tendremos:

$$\int_{\theta-\sqrt{2}|q|}^{\theta+\sqrt{2}|q|} \int_{1-\beta'}^1 \rho^{1/2} \rho^{3/2} \frac{2}{\rho^2} \log \frac{2\theta}{|\sigma - \sigma'|} \sigma' d\sigma' d\theta' \leq 64\sqrt{2}q\beta \log \frac{\theta}{\beta^2}$$

Con este resultado concluimos que:

$$Q \leq 18\|u\|^2 \rho \left[8\sqrt{\pi} \left(\frac{\pi^2\theta\|u\|}{5g^3\beta^2} + 2\frac{\sigma\theta\|u\|}{g^3} \log \frac{1}{4\beta^2} \right) + 64\sqrt{2}\beta\|u\| \frac{1}{\rho g^3} \log \frac{\theta}{\beta^2} \right]$$

Ahora usemos que $\beta = \epsilon^2/2 \sin^2 \theta$, y que $\rho/g \leq 1 + O(\epsilon^2)$ y que $\|u\| \leq \epsilon^2$ entonces

$$Q \leq 288\|u\|^2 \rho \left[\sqrt{\pi} \left(\sqrt{2} \frac{\pi^2}{5} \epsilon^{-1} + C^{-2} \log \frac{1}{4\epsilon^2} \right) + 16C^{-3} \log \frac{4}{\epsilon^{5/2}} \right]$$

Solo resta encontrar la integral sobre E_2 .

$$\iint_{E_2} |\dots| dA' \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2|q|} |\dots| \zeta d\zeta d\phi \quad \text{con} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{z - z'}{\rho - \rho'}$$

El autor original del artículo realiza una expansión en serie de Taylor del núcleo $G|_{\partial\Omega}$ alrededor de la curva ∂H_ϵ , toma los términos “dominates” a primer orden e integra; en lo personal no creo que sea una buena idea pues se crea una singularidad que no existe en el punto $(\rho', z') = (\rho, z)$ (mueve la singularidad de lugar), además los términos de la serie de orden igual o mayor a q^2 no se garantiza que vayan a cero, pues en el punto $(\rho', z') = (\rho + q \sin \alpha, z + q \cos \alpha)$ $G|_{\partial\Omega}$ es singular, pero $G|_{\partial H_\epsilon}$ es regular entonces los términos restantes en la serie deben recobrar el carácter singular de la expresión original. Por ello proponemos renombrar al punto $(\rho + q \sin \alpha, z + q \cos \alpha) \equiv (\tilde{\rho}, \tilde{z})$ y trabajarlo de esta forma.

Si definimos

$$E_3 = \left\{ (\rho', z') \in H_0 - H_\epsilon \mid \tilde{\zeta} = \sqrt{(\tilde{\rho} - \rho')^2 + (\tilde{z} - z')^2} \leq 4\sigma \right\}$$

Es fácil ver que $E_2 \subset E_3$. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} G|_{\partial\Omega} + G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| dA' &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2|q|} G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| \varsigma d\varsigma d\phi \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{4|q|} G|_{\partial\Omega} \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} d\tilde{\phi} \end{aligned}$$

con $\phi = \tan^{-1} \frac{z-z'}{\rho-\rho'}$, y $\tilde{\phi} = \tan^{-1} \frac{\tilde{z}-z'}{\tilde{\rho}-\rho'}$.

Podemos usar de nuevo las cotas obtenidas en el capítulo (6) para G y sus parciales. Tomando (6.15) y (6.16) y las cotas para $|f(a)|$ y $|f'(a)|$ tenemos

$$q \frac{\partial G}{\partial \nu} \leq q|G_\rho| + q|G_z| \leq \rho^{1/2} \rho'^{3/2} q \left[\frac{1}{2\rho} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} + \frac{2}{\varsigma} + \frac{1}{2\rho} \right] \quad (10.21)$$

Entonces

$$G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| \leq \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} + \frac{q}{2} \left(\frac{4}{\varsigma} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right) \right]$$

Como en los cálculos pasados, absorvemos la contribución de ρ^{-1} notando que si $\theta > \epsilon^{2/3}$ entonces $\theta' > \theta/2$ si el punto $(\rho', z') \in E_2$ de modo que $\sqrt{2\rho\rho'} \geq \varsigma$. De este modo tenemos:

$$\sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \leq \log \frac{3\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \quad \text{y} \quad \log \frac{3\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} > 1$$

Así

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} G|_{\partial\Omega} + G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| dA' \\ \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2|q|} \rho^{1/2} \rho'^{3/2} \left[\log \frac{3\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} + q \left(\frac{2}{\varsigma} + \frac{1}{\rho} \log \frac{3\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right) \right] \varsigma d\varsigma d\phi \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^{4|q|} \tilde{\rho}^{1/2} \rho'^{3/2} \log \frac{3\sqrt{2\tilde{\rho}\rho'}}{\tilde{\zeta}} \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} d\tilde{\phi} \end{aligned}$$

Usemos que $\rho\rho' \leq 2$, $\rho' \leq \rho + 2q \leq 2\rho$ y $\rho' \leq \tilde{\rho} + 2q \leq 2\tilde{\rho}$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} G|_{\partial\Omega} + G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| dA' \\ \leq 2\sqrt{2}\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{2|q|} \left[\frac{2q\rho}{\varsigma} + (q + \rho) \log \frac{3}{\varsigma} \right] \varsigma d\varsigma d\phi + 2\sqrt{2}\tilde{\rho}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4|q|} \log \frac{3}{\tilde{\zeta}} \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} d\tilde{\phi} \end{aligned}$$

Integrando directamente y usando que $\rho^2/g^2 \leq (1-2\epsilon)^{-1}$ en conjunto con que $\tilde{\rho} \leq \rho$ y que $\rho = \sigma \sin \theta \geq \frac{\sin \epsilon^{2/3}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{2}\epsilon^{2/3}}{\pi}$ llegamos a:

$$\begin{aligned} & \iint_{E_2} G|_{\partial\Omega} + G|_{\partial H_\epsilon} + \left| q \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{\partial H_\epsilon} dA' \\ & \leq \frac{8\sqrt{2}\pi}{1-2\epsilon} \|u\|^2 \rho \left[\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}\pi^3 \right) \epsilon^{-2/3} \log \frac{1}{\|u\|} \right. \\ & \quad \left. - 2\sqrt{2}\pi \epsilon^{-2/3} \left(\pi^2 - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \log \frac{2}{3g} + 2\pi^2 \log \frac{4}{3g} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi C}{2} \log \frac{1}{\|u\|} - \frac{\pi C}{2} \log \frac{2}{3g} - \frac{\pi C}{4} \right] \end{aligned}$$

Que muestra el caracter buscado.

Para estudiar el comportamiento de $\mathcal{N}_\epsilon u_1 - \mathcal{N}_\epsilon u_2$, habrá que analizar los siguientes términos.

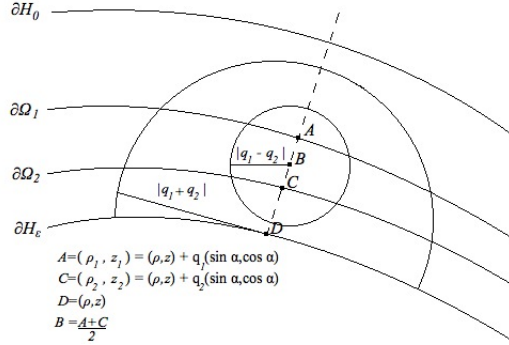
$$\iint_{H_0 - H_\epsilon} G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial\Omega_2} - (q_1 - q_2) \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' \quad (10.22)$$

Al igual que antes, debemos definir un espacio E_1 donde los operadores son semejantes, y otro (E_2) donde la región de integración sea pequeña. La definición de E_1 es casi igual que en (10.11), pero cambiando $2q$ por $q_1 + q_2$. Entonces, la integral sobre $H_0 - H_\epsilon$ se parte en las integrales sobre E_1 y E_2 . Como las singularidades de los núcleos están en E_2 , podemos expresar (sobre E_1) $G|_{\partial\Omega_1}$ ó $G|_{\partial\Omega_2}$ en serie de Taylor respecto a la curva ∂H_ϵ es decir, que el término de orden cero sea $G|_{\partial H_\epsilon}$ y garantizar la convergencia de la serie. Para ello modificaremos la demostración hecha en el capítulo (6) teorema (6.14), pues si a la expresión (10.22) sumamos y restamos $G|_{\partial H_\epsilon}$ en el integrando y reagrupamos encontramos:

$$\begin{aligned} & \iint_{E_1} G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial H_\epsilon} - q_1 \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} - \left(G|_{\partial\Omega_2} - G|_{\partial H_\epsilon} - q_2 \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right) dA' = \\ & \iint_{E_1} (q_1^2 - q_2^2) (\sin^2 \alpha G_{\rho\rho} + 2 \sin \alpha \cos \alpha G_{\rho z} + \cos^2 \alpha G_{zz}) |_{\partial H_\epsilon} + O(q_1^3 - q_2^3) dA' \end{aligned}$$

De este modo, se ve que se llega a las mismas cotas obtenidas en el teorema (6.14) a excepción de que se cambia el término q^2 por $q_1^2 - q_2^2 = (|q_1| - |q_2|)(|q_1| + |q_2|)$. Es claro que el trabajo a realizar para acotar ésta integral es exactamente el mismo que se realizó para la integral (10.16) pero ahora se debe sustituir el término mencionado. Por tal motivo omitiremos estos pasos y centraremos nuestra atención en la integral sobre E_2 .

Recordemos que una vez que se fija el valor de t , se fija el punto $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$ y con ello, la normal a dicha curva en ese punto, que a su vez la intersección de esta normal con las curvas $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ determinan los puntos (ρ_1, z_1) y (ρ_2, z_2) respectivamente.



Para tener la dependencia de $|q_1| - |q_2|$ partiremos E_2 en dos regiones más.

$$E_{2a} = \left\{ (\rho', z') \in E_2 \left| \sqrt{\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \rho'\right)^2 + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z'\right)^2} \leq |q_1 - q_2| \right. \right\}$$

$$E_{2b} = E_2 - E_{2a}$$

Así

$$\iint_{E_2} G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial\Omega_2} - (q_1 - q_2) \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' \leq \iint_{E_{2a}} G|_{\partial\Omega_1} + G|_{\partial\Omega_2} dA'$$

$$+ \iint_{E_{2b}} |G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial\Omega_2}| dA' + |q_1 - q_2| \iint_{E_2} \left| \frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{\partial H_\epsilon} \right| dA'$$

Primero acotaremos la integral que involucra la suma de los núcleos, posteriormente la diferencia y por último la integral con la derivada normal.

Observemos que $(\rho_1, z_1) \in E_{2a}$ y $(\rho_2, z_2) \in E_{2a}$, aunque no se garantiza que $(\rho, z) \in E_{2a}$. Ahora bien observemos que $G|_{\partial\Omega_1}$ tiene una singularidad para $(\rho', z') = (\rho_1, z_1)$ al igual que $G|_{\partial\Omega_2}$ tiene una singularidad para $(\rho', z') = (\rho_2, z_2)$; pero la singularidad de un núcleo no es singularidad del otro, entonces es claro que:

$$\iint_{E_{2a}} G|_{\partial\Omega_1} + G|_{\partial\Omega_2} dA' \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{3|q_1 - q_2|/2} \rho_1^{1/2} \rho^{3/2} \log \frac{3}{\varsigma_1} \varsigma_1 d\varsigma_1 d\phi_1$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{3|q_1 - q_2|/2} \rho_2^{1/2} \rho^{3/2} \log \frac{3}{\varsigma_2} \varsigma_2 d\varsigma_2 d\phi_2$$

Donde

$$\varsigma_i = \sqrt{(\rho_i - \rho')^2 + (z_i - z')^2} \quad \phi_i = \tan^{-1} \frac{z_i - z'}{\rho_i - \rho'} \quad \text{con } i = 1 \text{ ó } 2$$

Usando que $\rho' \leq 2\rho$ y $\rho_i \leq 2\rho$ para $i = 1$ ó 2 e integrando directamente se encuentra:

$$\iint_{E_{2a}} G|_{\partial\Omega_1} + G|_{\partial\Omega_2} dA' \leq 9\sqrt{2}\pi|q_1 - q_2|^2 \rho^2 \left(\log \frac{2}{|q_1 - q_2|} + \frac{1}{2} \right)$$

Para la integral en E_{2b} hay que usar las cota (6.8) del capítulo (6); como en esta parte no hay singularidades de los núcleos G , expresaremos a uno en función del otro tomando las variables de integración comunes a ambos núcleos.

$$\iint_{E_{2b}} |G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial\Omega_2}| dA' \leq |q_1 - q_2| \iint_{E_{2b}} \frac{\rho'^{3/2} \rho_2^{1/2}}{2} \left[\frac{2}{\varsigma_2} + \frac{1}{\rho_2} \left(1 + \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho_2\rho'}}{\varsigma_2} \right) \right] dA'$$

$$\leq |q_1 - q_2| \int_0^{2\pi} \int_{\varsigma_1^*}^{\varsigma_2^*} \frac{\rho'^{3/2} \rho_2^{1/2}}{2} \left[2 + \frac{\varsigma_2}{\rho_2} \left(1 + \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho_2\rho'}}{\varsigma_2} \right) \right] d\varsigma_2 d\phi_2$$

con

$$\varsigma_1^* = \frac{q_1 - q_2}{2} \left[-\cos(\phi_2 - \alpha) + \sqrt{1 + \cos^2(\phi_2 - \alpha)} \right]$$

$$\varsigma_2^* = -q_2 \cos(\phi_2 - \alpha) + \sqrt{(q_1 + q_2)^2 - q_2 \sin^2(\phi_2 - \alpha)}$$

Lo anterior es cierto, pues se sabe que $E_{2b} \subset B_{|q_1+q_2|}(\rho, z) - E_{2a}$; de este modo, ς_1^* y ς_2^* no son más que los radios de dichos círculos medidos desde el punto (ρ_2, z_2) en función del ángulo ϕ_2 .

Como $\rho' \leq 2\rho_2 \leq 2$, $1 \leq \sinh^{-1} \frac{2}{\varsigma_2}$, $\sinh^{-1} x \leq \log(3x)$ si $x \geq 1$, es cierto que:

$$\begin{aligned} \iint_{E_{2b}} |G|_{\partial\Omega_1} - G|_{\partial\Omega_2}| dA' &\leq 2\sqrt{2}|q_1 - q_2|\rho_2 \left\{ \int_0^{2\pi} \rho_2 \varsigma_2^*(\phi_2) + \frac{\varsigma_2^{*2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{6}{\varsigma_2^*} \right) d\phi_2 \right\} \\ &\leq 8\sqrt{2}\pi|q_1 - q_2| \cdot |q_1 + q_2|\rho_2 \left\{ \rho_2 + |q_1 + q_2| \left(\frac{1}{2} + \log \frac{3}{|q_1 + q_2|} \right) \right\}^7 \end{aligned}$$

⁷Esto se obtuvo de usar que $\varsigma_2^* < 2|q_1 + q_2|$.

Ahora solo resta la última integral. Para encontrar su valor tomemos la expresión (10.21) y usemos las mismas cotas de antes para llegar a:

$$\begin{aligned} |q_1 - q_2| \iint_{E_2} \left| \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{\partial H_\epsilon} dA' &\leq 2\sqrt{2}|q_1 - q_2|\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{|q_1+q_2|} \left[2\rho + \varsigma \log \frac{6}{\varsigma} \right] d\varsigma d\phi \\ &\leq 4\sqrt{2}\pi|q_1 - q_2| \cdot |q_1 + q_2|\rho \left[2\rho + \frac{|q_1 + q_2|}{2} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{6}{|q_1 + q_2|} \right) \right] \end{aligned}$$

Este resultado aunado a los obtenidos anteriormente muestran que para $\theta \geq \epsilon^{2/3}$, el operador no lineal $\mathcal{N}_1 u$ presenta el comportamiento señalado en el teorema.

10.2. Análisis de \mathcal{N}_1 con $t < \epsilon^{2/3}$

10.2.1. Partición de la region de trabajo.

Al igual que en $t \geq \epsilon^{2/3}$, usaremos la misma definición (10.11) del espacio E_1 , que es donde los núcleos son cercanos entre si. De la misma manera E_2 es el complemento de E_1 en $H_0 - H_\epsilon$. Lo que ahora cambiará, sera la forma de dividir E_1 , pues aquí usaremos rectangulos en ves de sectores circulares como en el otro caso. Este estudio solo se hará para $t \leq \pi/2$, pues la integral sobre el resto da una contribución menor o igual a la que se obtenga en el estudio que haremos.

Notemos que:

$$\frac{4\rho\rho'}{\varsigma^2} = \frac{4\rho\rho'}{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} \geq 1 \quad \text{si } |z - z'| \geq \epsilon \quad \text{ó } |\rho - \rho'| \geq \epsilon$$

para ϵ suficientemente pequeño; es por ello que partiremos a E_1 como sigue:

$$E_{1a} = \{(\rho', z') \in E_1 \mid -\epsilon \leq z' \leq 1, \quad 0 \leq \rho' \leq \rho - \epsilon\} \quad (10.23)$$

$$E_{1b} = \{(\rho', z') \in E_1 \mid -\epsilon \leq z' \leq z - \epsilon, \quad \rho - \epsilon \leq \rho' \leq \rho\} \quad (10.24)$$

$$E_{1c} = \{(\rho', z') \in E_1 \mid z + \epsilon \leq z' \leq 1, \quad \rho - \epsilon \leq \rho' \leq \rho + \epsilon\} \quad (10.25)$$

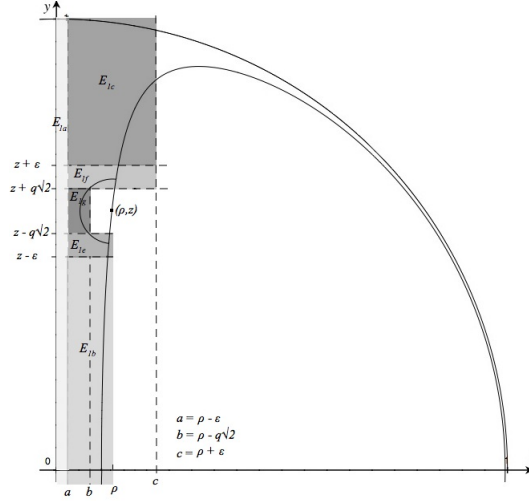
$$E_{1d} = \{(\rho', z') \in E_1 \mid 2\epsilon \leq \theta' \leq \pi/2, \quad 1 \geq \sigma' \geq 1 - 4\beta'\} \quad (10.26)$$

$$E_{1e} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid z - \epsilon \leq z' \leq z - q\sqrt{2}, \quad \rho - \epsilon \leq \rho' \leq \rho \right\} \quad (10.27)$$

$$E_{1f} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid z + q\sqrt{2} \leq z' \leq z + \epsilon, \quad \rho - \epsilon \leq \rho' \leq \rho + \epsilon \right\} \quad (10.28)$$

$$E_{1g} = \left\{ (\rho', z') \in E_1 \mid z - q\sqrt{2} \leq z' \leq z + q\sqrt{2}, \quad \rho - \epsilon \leq \rho' \leq \rho - q\sqrt{2} \right\} \quad (10.29)$$

Con (ρ, z) fijo y $\epsilon^{2/3} \geq t$.



De este modo, en las regiones E_{1a} , E_{1b} , E_{1c} y E_{1d} , usaremos la primera de las cotas en (6.14), mientras que en las restantes usaremos la segunda desigualdad, pues allí se cumple que $\sqrt{2\rho\rho'}/\zeta > 1$.

10.2.2. Integrales sobre E_{1a} , E_{1b} y E_{1c}

En E_{1a} se cumple $4\rho\rho' \leq \zeta^2$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^1 \int_0^{\rho-\epsilon} \frac{\rho'^{1/2}}{2^5 \rho^{1/2}} + \frac{\rho'^{3/2}}{8\rho^{3/2}} d\rho' dz' &\leq (1+\epsilon) \left(\frac{(\rho-\epsilon)^{3/2}}{48\rho^{1/2}} + \frac{(\rho-\epsilon)^{5/2}}{20\rho^{3/2}} \right) \\ &\leq \frac{17}{240}(1+\epsilon)\rho \leq \frac{17}{120}\rho \end{aligned}$$

Que en conjunto con el g^{-2} da el comportamiento buscado.

La siguiente región es E_{1b} . con la misma desigualdad encontraremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{z-\epsilon} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho} \frac{\rho'^{1/2}}{2^5 \rho^{1/2}} + \frac{\rho'^{3/2}}{8\rho^{3/2}} d\rho' dz' &\leq z \left(\frac{\rho^{3/2} - (\rho-\epsilon)^{3/2}}{48\rho^{1/2}} + \frac{\rho^{5/2} - (\rho-\epsilon)^{5/2}}{20\rho^{3/2}} \right) \\ &\leq \frac{17}{240}z\rho \end{aligned}$$

Que al igual que antes, tiene el mismo comportamiento.

En la integral sobre E_{1c} , procederemos de manera análoga.

$$\int_{z+\epsilon}^1 \int_{\rho-\epsilon}^{\rho+\epsilon} \frac{\rho'^{1/2}}{2^5 \rho^{1/2}} + \frac{\rho'^{3/2}}{8\rho^{3/2}} d\rho' dz'$$

$$\leq (1 - z - \epsilon) \left(\frac{(\rho + \epsilon)^{3/2} - (\rho - \epsilon)^{3/2}}{48\rho^{1/2}} + \frac{(\rho + \epsilon)^{5/2} - (\rho - \epsilon)^{5/2}}{20\rho^{3/2}} \right)$$

Con un poco de manipulación algebraica se tendrá:

$$\int_{z+\epsilon}^1 \int_{\rho-\epsilon}^{\rho+\epsilon} \frac{\rho'^{1/2}}{2^5\rho^{1/2}} + \frac{\rho'^{3/2}}{8\rho^{3/2}} d\rho' dz' \leq (1 - z - \epsilon)\rho \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5} \right) \leq \frac{23}{30}(1 - z - \epsilon)\rho$$

Esta integral es al igual que las demás, de la forma buscada.

10.2.3. Integrales sobre E_{1e} , E_{1f} y E_{1g}

Realizaremos el cálculo sobre E_{1e} , en esta parte $\sqrt{2\rho\rho'}/\varsigma \geq 1$, entonces debemos estimar la siguiente ecuación:

$$\int_{z-\epsilon}^{z-q\sqrt{2}} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho} \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{\varsigma^2} + 2\frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{3/2}} \log \left[\frac{6\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right] d\rho' dz'$$

En el primer sumando, usaremos que $\rho' \leq \rho$ y el cambio $\tan \phi = (\rho - \rho')/(z - z')$ para después integrar por partes⁸ para tener

$$\begin{aligned} \int_{z-\epsilon}^{z-q\sqrt{2}} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho} dz' d\rho \frac{\rho^{1/2}\rho'^{3/2}}{\varsigma^2} &\leq \rho^2 \left[\log x \tan^{-1} \frac{1}{x} \Big|_{q\sqrt{2}/\epsilon}^1 + x(\log x - 1) \Big|_{q\sqrt{2}/\epsilon}^1 \right] \\ &\leq \rho^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{q\sqrt{2}}{\epsilon} \right) \log \frac{\epsilon}{q\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Que es de la forma buscada, para el otro sumando de la integral $\rho' \leq \rho \leq \epsilon^{2/3}$, al usar esto y considerando el cambio $\xi = \rho - \rho'$, e integramos obtenemos:

$$\int_{z-\epsilon}^{z-q\sqrt{2}} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho} 2\frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{3/2}} \log \left[\frac{6\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right] d\rho' dz' \leq \rho\epsilon \left(\log \frac{36}{\epsilon^{2/3}} + 2(\pi + 2) \right)$$

Que tiene el orden buscado.

En la región E_{1f} y E_{1g} usaremos estimaciones análogas, al caso anterior, de donde se obtiene

para E_{1f} :

$$\int_{z+q\sqrt{2}}^{z+\epsilon} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho+\epsilon} 2\frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{3/2}} \log \left[\frac{6\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right] d\rho' dz' \leq 2\sqrt{2}\rho\epsilon \left(\log \frac{36}{\epsilon^{2/3}} + (3\pi + 4) \right)$$

y para E_{1g}

$$\int_{z-q\sqrt{2}}^{z+q\sqrt{2}} \int_{\rho-\epsilon}^{\rho-q\sqrt{2}} 2\frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{3/2}} \log \left[\frac{6\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right] d\rho' dz' \leq 2\sqrt{8}\rho\epsilon^{4/3} \log \frac{6}{\epsilon^{2/3}}$$

⁸En algún momento en la integración habrá que usar que $x^2 + 1 \geq 1$ para acotar una integral que resulta ser elíptica.

Es decir ambas integrales son de la forma buscada.

10.2.4. Integral sobre E_{1d}

La parte restante sobre E_1 es la integral en E_{1d} .

$$L \equiv \int_{2\epsilon}^{\pi/2} \int_{1-4\beta'}^1 \rho^2 \rho'^3 \left(\frac{1}{\zeta^5} + \frac{1}{\rho^2 \zeta^3} \right) \sigma' d\sigma' d\theta'$$

Como $4\rho\rho' \leq \zeta^2$ en esta parte, integramos para llegar a

$$L \leq \int_{2\epsilon}^{\pi/2} \left[\frac{[1 - (1 - 4\beta')^{5/2}] \sin^{1/2} \theta'}{80\rho^{1/2}} + \frac{[1 - (1 - 4\beta')^{7/2}] \sin^{3/2} \theta'}{28\rho^{3/2}} \right] d\theta'$$

Usando aritmética sencilla podemos ver que:

$$L \leq \int_{2\epsilon}^{\pi/2} \frac{\beta' \sin^{1/2} \theta'}{\sqrt{\rho}} \left[\frac{1}{20} \sum_{n=0}^4 (1 - 4\beta')^n + \frac{\sin \theta'}{7\rho} \sum_{n=0}^6 (1 - 4\beta')^n \right] d\theta'$$

Como cada sumando en los corchetes cuadrados es menor o igual a 1, y que $\sin \theta' \geq 2\theta'/\pi$ se tiene:

$$L \leq \int_{2\epsilon}^{\pi/2} \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\rho} \sin \theta'} \left[\frac{1}{4 \sin \theta'} + \frac{1}{\rho} \right] d\theta' \leq \rho \left(\frac{\pi^{3/2} \epsilon^{3/2}}{8\rho^{3/2}} + \frac{\pi \epsilon^2}{2\rho^{5/2}} \right)$$

A primera vista podría parecer que el último sumando no es una buena cota, pues en conjunto con g^{-2} no daría el comportamiento buscado, pero eso es por que tenemos en mente que $g^{-2} \leq C^{-2} \epsilon^{-4/3}$, lo cuál es cierto, pero es una mala cota, en algunas regiones, es decir:

Sabemos que g^2 es decreciente (como función de ρ) antes del mínimo ($\sin \theta = \sqrt[3]{2\epsilon^{2/3}}$) y además se acota por

$$g^2 \geq (1 - \sigma^2)^2 - \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \frac{2 - 3\sigma}{1 - \sigma}$$

- Si $\sigma \leq 1/\sqrt{2}$, se ve fácilmente que $g^2 \geq C$ con C constante menor a 1 e independiente de ϵ ; de modo que:

$$\frac{\pi \epsilon^2}{2\rho^{5/2} g^2} \leq \frac{\pi}{2C^2} \epsilon^{-1/2}$$

- Si $\theta_c \leq \theta = O(\epsilon)$ y $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$, podemos deducir de la serie para σ en función de θ y de la expresión para g que es posible acotar $g^2 \geq C$ con C constante menor a 1 e independiente de ϵ .

$$\frac{\pi\epsilon^2}{2\rho^{5/2}g^2} \leq \frac{\pi}{8\sqrt{2}C^2} \frac{\epsilon^{-1/2}}{(1-\epsilon^2)^{5/2}}$$

- Si $\epsilon^{2/3} \geq \theta = O(\epsilon^{2/3})$ y $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$ entonces $g \geq C\epsilon^{2/3}$ y $\rho = C_2\epsilon^{2/3}$ de modo que:

$$\frac{\pi\epsilon^2}{2\rho^{5/2}g^2} \leq \frac{\pi}{2C_2^{5/2}C^2} \epsilon^{-1}$$

Es decir, los exponentes de ϵ en todos los casos son mayores a $-4/3$, por ello estas cotas son útiles para lo que se desea.

Mostrado que sobre E_1 la parte no lineal tiene el comportamiento mencionado, solo falta probarlo para E_2 . Los pasos para encontrar esta integral son exactamente los mismos que se realizaron para el caso $\theta \geq \epsilon^{2/3}$, pues en ese desarrollo nunca se uso dicha propiedad de la región, hacer el cálculo nuevamente sería copiar las líneas obtenidas antes, lo cual no deja algo al lector.

Para hacer el caso de la diferencia de $\mathcal{N}_\epsilon u_1 - \mathcal{N}_\epsilon u_2$, es claro que sobre E_1 no hay que hacer mucho, solo cambiar en la definición de E_1 a $2q$ por $q_1 + q_2$, y en las estimaciones de (6.14) cambiar q_2 por $q_1^2 - q_2^2$; la justificación del por que de estos cambios es la misma que se dio en el caso $\theta \geq \epsilon^{2/3}$. Con los cambios mencionados, la integración sobre E_1 , es de la forma buscada, mientras que la integración sobre E_2 es idéntica a la correspondiente para el caso $\theta \geq \epsilon^{2/3}$. Dado que los siguientes cálculos son repetitivos serán omitidos.

10.3. Análisis del término no lineal \mathcal{N}_2 .

Resulta más productivo analizar al operador lineal \mathcal{N}_2 (10.6) restante. Escribamos la expresión de nuevo.

$$\mathcal{N}_2 = \frac{5}{\pi} \iint_{\Omega-H_\epsilon} (G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t')) dA' - \frac{5}{\pi} \int_0^\pi \Gamma_\epsilon(t, t') \frac{k'q'^2}{2} d\tau'$$

En esta parte resulta útil tener una estimación de la curvatura, pues esta se involucra en el jacobiano (10.5) en la integral de superficie, por ello la haremos en este momento.

Como sabemos la curvatura es la razón de cambio del ángulo entre la tangente a la curva y el eje x respecto a la longitud de arco, además la curva ∂H_ϵ para $t \geq \epsilon^{1/2}$ es muy parecida a un círculo de radio menor a 1, de manera que la curvatura es cercana pero mayor a 1, mientras en $t \sim 0$ la curva es casi vertical,

es decir la curvatura es muy pequeña; dado que la curva es suave entonces la curvatura es continua, de este modo al trazar una recta horizontal ($k > k_0 > 2$) en la gráfica de la curvatura dependiente de t esta recta cortará en dos puntos a la curva, entonces por el teorema del valor medio, existe un punto en el dominio t donde la tangente a la gráfica es horizontal, *i.e.* se tiene un punto crítico (en este caso máximo). Además, como la curva ∂H_ϵ en un principio es muy vertical y después cambia la razón de crecimiento para tener un máximo, es natural pensar que el máximo de la curvatura se alcanzará para algún punto cercano al máximo de ∂H_ϵ ($\rho_m, z(\rho_m)$). Como en esta región es válida la expansión exterior de \mathcal{S} usaremos la expresión de la curvatura en términos de dicha variable radial, entonces si tomamos una curva $(\rho(t), z(t))$ tenemos

$$\tan \alpha = \dot{z}/\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{1}{\sec^2 \alpha} \left(\frac{\dot{\rho}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{\rho}}{\dot{\rho}^2} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{\rho}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{\rho}}{(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}$$

Ahora bien, si usamos que $\rho = \epsilon \mathcal{S}(t) \sin t$ y $z = \mathcal{S}(t) \cos t$, derivando encontramos:

$$k = -\frac{\mathcal{S}^2 + 2\dot{\mathcal{S}}^2 - \mathcal{S}\ddot{\mathcal{S}}}{(\dot{\mathcal{S}}^2 + \mathcal{S}^2)^{3/2}}$$

Si tomamos de la expansión exterior para \mathcal{S} los primeros tres términos que son los dominantes encontraremos que

$$k = -\frac{1 + 2\frac{\epsilon^4}{\sin^6 t} + \frac{3\epsilon^2}{\sin^4 t} + O(\epsilon^2/t^2)}{(\dot{\mathcal{S}}^2 + \mathcal{S}^2)^{3/2}} = O(\epsilon^{-2/3})$$

pues el término dominante en el numerador para $\epsilon^{2/3} \leq t \leq \epsilon^{1/2}$ es $\frac{3\epsilon^2}{\sin^4 t}$ y el denominador es $O(1)$. Así $k\nu \leq O(\epsilon^{2/3})$ de manera que:

$$\frac{5}{\pi} \iint_{\Omega - H_\epsilon} (G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t')) dA' \leq \frac{10}{\pi} \int_{\partial H_\epsilon} \int_0^{q'} (G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t')) d\nu' d\tau'$$

Para integrar esta expresión haremos otra partición del intervalo, donde la diferencia de los dos núcleos involucrados sea pequeña, mientras que en la otra, la integral se controla por el ancho del intervalo. Entonces definimos:

$$E_1 = \left\{ (\rho, z) \in \Omega - H_\epsilon \mid \varsigma = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} > \frac{4\|u\|}{g} \right\}$$

Con $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$. Así $E_2 = \Omega - H_\epsilon - E_1$. Una vez que se tiene esta partición, en E_1 podemos usar las cotas (6.7) y (6.8) obtenidas en el capítulo (6), para este caso $\xi = q \sin \alpha$, $\xi' = \nu' \sin \alpha'$ y $h_0 = q$, $h'_0 = \nu'$. De modo que:

$$|G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t')| \leq \frac{\rho^2 \rho'^3}{\varsigma^3} [|q|(\rho^{-1} + \varsigma^{-1}) + |\nu|(\rho^{-1} + \varsigma^{-1})] \quad (10.30)$$

$$|G|_{\partial\Omega} - \Gamma_\epsilon(t, t') \leq 2\rho^{1/2}\rho'^{3/2} \left[\frac{|\nu| + |q|}{\varsigma} + \left(\frac{|\nu|}{\rho'} + \frac{|q|}{\rho} \right) \left(\sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} + 1 \right) \right] \quad (10.31)$$

Con $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$ y $(\rho', z') \in \partial H_\epsilon \cap E_1$.

Para trabajar en E_1 se tienen dos cotas para la integral original, en $\theta' \geq 3\epsilon/2$ y $\theta' \leq \theta/2$ resulta más cómodo usar (10.30) y en la restante es mejor usar (10.31).

Comencemos en las regiones más sencillas.

$$\begin{aligned} S &\equiv \int_{3\theta/2}^{\pi} \int_0^{|q'|} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| \, d\nu' \, d\tau' \\ &\leq \int_{3\theta/2}^{\pi} \frac{\rho^2 \rho'^3}{\varsigma^3} \left[|q||q'| \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{|q'|^2}{2} \left(\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\rho'} \right) \right] \frac{d\tau'}{dt'} \, d\nu' \, dt' \end{aligned}$$

Esto integrando directamente. Observemos que tanto q como q' , son la distancia que separa a ∂H_ϵ de $\partial\Omega$ evaluadas en los parametros t y t' respectivamente, entonces $|q| \leq \|u\|/g(t)$ y $|q'| \leq \|u\|/g(t')$, si aunado a esto usamos que $\varsigma^{-1} < (2\rho)^{-1} + (2\rho')^{-1}$ tendremos

$$S \leq \frac{3}{2} \|u\|^2 \rho \int_{3\theta/2}^{\pi} \frac{\rho \rho'^3}{\varsigma^3} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'} \right) \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{dt'} \, dt'$$

Se puede ver con el análisis del capítulo (6) que

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\sigma}{|2(1 - 2\sigma^2) \sin \theta|} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (10.32)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{g} \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\sigma^2}{2|1 - 2\sigma^2|} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (10.33)$$

Por la simplicidad de estas expresiones será conveniente integrar sobre el parámetro θ' en lugar de t' . (10.33) es singular para $\sigma = \pm 1/\sqrt{2}$, es decir en $\theta = \theta_c$ y $\theta = \pi - \theta_c$, por esta razón, la integral se partirá en regiones.

Como σ^2 es creciente como función de $\theta < \pi/2$ (usando el signo positivo de la raíz), en la región que estamos se tiene

$$\sigma^2 \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{6} + O(\epsilon^2)$$

con esto último y dado que el término dominante de (10.33) es decreciente como función de σ en el intervalo de $3\theta/2 \leq \theta' \leq \pi - 3\theta$ y $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$, se encuentra

$$\text{máx} \frac{\rho'}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Además σ^2 es creciente en el intervalo $\pi - 3\epsilon \geq \theta \geq \pi/2$ y $\sigma \leq 1/\sqrt{2}$ de modo que

$$\sigma^2 \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{6} + O(\epsilon^2) \Rightarrow \max \frac{\rho' d\tau'}{g' d\theta'} \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Si partimos la integral encontramos

$$\begin{aligned} S \leq & \frac{3(3 + \sqrt{5})}{8\sqrt{5}} \|u\|^2 \rho \int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \frac{\rho'_{>}}{\varsigma^3} (\rho'_{>} + \rho) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{>}} \right) d\theta' \\ & + \frac{3(3 - \sqrt{5})}{8\sqrt{5}} \int_{\pi-3\epsilon}^{\pi/2} \frac{\rho'_{<}}{\varsigma^3} (\rho'_{<} + \rho) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{<}} \right) d\theta' \\ & + \int_{\pi-3\epsilon}^{\pi-\theta_c} \frac{\rho'^2_{>}}{\varsigma^3} (\rho'_{>} + \rho) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{>}} \right) \frac{1}{g'_{>}} \frac{d\tau'_{>}}{d\theta'} d\theta' \\ & + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-3\epsilon} \frac{\rho'^2_{<}}{\varsigma^3} (\rho'_{<} + \rho) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{<}} \right) \frac{1}{g'_{<}} \frac{d\tau'_{<}}{d\theta'} d\theta' \end{aligned}$$

Donde el subíndice $>$ se usa para denotar la evaluación en $\sigma \geq 1/\sqrt{2}$ y $<$ se usa para la evaluación en $\sigma \leq 1/\sqrt{2}$. Usando que $g^{-1} \leq C^{-1}\epsilon^{-2/3}$, la expresión (10.32) y tomando en cuenta que en las últimas tres integrales se cumple

$$\rho' \leq \rho, \quad \sigma_{>} \leq 1, \quad \sigma_{<} \leq 1/\sqrt{2}, \quad |1 - 2\sigma'^2| = \sqrt{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)/\sin^2 \theta'}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} S \leq & C^{-1} \frac{3(3 + \sqrt{5})}{8\sqrt{5}} \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} \left[\int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \frac{\rho'_{>}}{\varsigma^3} (\rho'_{>} + \rho) d\theta' + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})} \int_{\pi-3\epsilon}^{\pi/2} \frac{\rho \rho'_{<}}{\varsigma^3} d\theta' \right] \\ & + C^{-1} \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \int_{\pi-3\epsilon}^{\pi-\theta_c} \rho'_{>} \frac{\rho \rho'_{>}}{\varsigma^3} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta' - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} d\theta' \\ & + C^{-1} \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-3\epsilon} \rho'_{<} \frac{\rho \rho'_{<}}{\varsigma^3} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 \theta' - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} d\theta' \end{aligned}$$

Esta las cuatro integrales se cumple $4\rho\rho'/\varsigma^2 \leq 1$ mientras que en las tres últimas se satisface

$$\varsigma \geq z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}, \quad \rho'_{<} = \sigma'_{<} \sin \theta' < \sin \theta' / \sqrt{2}, \quad \rho'_{>} = \sigma'_{>} \sin \theta' < \sin \theta'$$

llegaremos a la siguiente cota:

$$S \leq C^{-1} \frac{3(3 + \sqrt{5})}{32\sqrt{5}} \frac{\|u\|^2 \rho}{\epsilon^{2/3}} \left[\int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{\rho_{>}^2}{\zeta^2} \right) d\theta' + \frac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{1-4\epsilon^2(1-\epsilon^2)}} \right] \\ + \frac{C^{-1}(1 + O(\epsilon^{2/3}))}{\sqrt{8}\sqrt{1-4\epsilon^2(1-\epsilon^2)}} \frac{\|u\|^2 \rho}{\epsilon^{2/3}} \left[\int_{\pi-3\epsilon}^{\pi-\theta_c} \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} + \int_{\pi-\theta_c}^{\pi-3\epsilon} \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} \right]$$

Ahora hay que ver que con $v = \cos 2\theta'$ se tiene:

$$\int_{\theta_c}^{3\epsilon} \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int_{\theta_c}^{3\epsilon} \frac{2 \sin 2\theta' d\theta'}{\cos \theta' \sqrt{\cos 2\theta_c - \cos 2\theta'}} \leq \frac{\sqrt{\cos 2\theta_c - \cos 6\epsilon}}{2} \leq \sqrt{\frac{3}{\pi}} \epsilon^9$$

Con la expresión anterior

$$S \leq \frac{3(3 + \sqrt{5})}{32C\sqrt{5}} \frac{\|u\|^2 \rho}{\epsilon^{2/3}} \left[\int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{\rho_{>}^2}{\zeta^2} \right) d\theta' + \pi\sqrt{8}(1 + O(\epsilon^2)) \right] \\ + \sqrt{\frac{3}{2C^2\pi}} \|u\|^2 \rho \epsilon^{1/3} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

En la integral restante usamos que

$$\rho_{>} \leq \theta', \quad \zeta^2 \geq 2 \frac{|\theta - \theta'|^2}{\pi^2}$$

Para obtener:

$$\int_{3\theta/2}^{\pi-3\epsilon} \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{\rho_{>}^2}{\zeta^2} \right) d\theta' \leq \frac{46\pi}{\sqrt{2}} \log \frac{3}{\epsilon} \quad (10.34)$$

Así concluimos que:

$$S \leq \frac{3\pi(3 + \sqrt{5})}{16C\sqrt{10}} \frac{\|u\|^2 \rho}{\epsilon^{2/3}} \left[23 \log \frac{3}{\epsilon} + 2 \right] + \sqrt{\frac{3}{2C^2\pi}} \|u\|^2 \rho \epsilon^{1/3} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Ahora calcularemos la siguiente integral

$$\int_0^{\tau'(\theta/2)} \int_0^{|q'|} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| d\nu' d\tau' \equiv R$$

Para hacerlo será conveniente usar como variable de integración a θ' . Supongamos $2\theta_c < \theta$, $\rho > 1/\sqrt{2}$, entonces la región en la que integraremos

⁹Pues $1 \geq \cos x \geq 1 - 2x/\pi$ para $0 \leq x \leq \pi/2$

será $\pi/2 \geq \theta' \geq \theta_c$ con $\sigma' \leq 1/\sqrt{2}$ unión $\theta_c \leq \theta/2$, $\rho > 1/\sqrt{2}$. Mientras que si $\theta_c \leq \theta \leq 2\theta_c$, el intervalo se reduce a $\pi/2 \geq \theta' \geq \theta_c$, $\sigma' \leq 1/\sqrt{2}$. Con esta aclaración en mente comenzamos a estimar. Por razones similares a las usadas en la región $\theta' \geq 3\theta/2$ se llega a:

$$R \leq \frac{3}{2} \|u\|^2 \rho \left[\int_{\pi/2}^{\theta_c} \frac{\rho'_{\leq}}{\varsigma^3} (\rho + \rho'_{\leq}) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{\leq}} \right) \frac{1}{g'_{\leq}} \frac{d\tau'_{\leq}}{d\theta'} d\theta' \right. \\ \left. + \int_{\theta_c}^{\theta/2} \frac{\rho'_{\geq}}{\varsigma^3} (\rho + \rho'_{\geq}) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{\geq}} \right) \frac{1}{g'_{\geq}} \frac{d\tau'_{\geq}}{d\theta'} d\theta' \right]$$

NOTA: existen casos donde la segunda integral no tiene sentido.

Ahora usaremos que en esta región $\rho \geq \rho'$ y $4\rho\rho \leq \varsigma^2$ llegando a

$$R \leq 3 \|u\|^2 \rho \left[\int_{\pi/2}^{\theta_c} \frac{\rho'_{\leq}}{4\varsigma} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{\leq}} \right) \frac{1}{g'_{\leq}} \frac{d\tau'_{\leq}}{d\theta'} d\theta' + \int_{\theta_c}^{\theta/2} \frac{\rho'_{\geq}}{4\varsigma} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'_{\geq}} \right) \frac{1}{g'_{\geq}} \frac{d\tau'_{\geq}}{d\theta'} d\theta' \right]$$

Como $\rho/g \leq (1 - 2\epsilon^2)^{-1/2} = 1 + O(\epsilon^2)$ y $\rho' \leq \rho$ tenemos

$$R \leq \frac{3 \|u\|^2 \rho}{4\sqrt{1 - 2\epsilon^2}} \left[\int_{\pi/2}^{\theta_c} \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{g'_{\leq}} \frac{d\tau'_{\leq}}{d\theta'} d\theta' + \int_{\theta_c}^{\theta/2} \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{g'_{\geq}} \frac{d\tau'_{\geq}}{d\theta'} d\theta' \right] \quad (10.35)$$

Antes de continuar, notemos que

$$\sigma - \sigma' = \frac{\sigma^2 - \sigma'^2}{\sigma + \sigma'} = \frac{1}{2(\sigma + \sigma')} \left(\sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}} + \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta'}} \right)$$

Como σ es creciente como función de θ , $1 \geq \sigma \geq \sigma'$ y $\theta \geq 3\epsilon$ se llega a:

$$\sigma - \sigma' \geq \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 3\epsilon}} \geq \frac{\sqrt{5}}{12} (1 + O(\epsilon^2)) \Rightarrow \frac{1}{4\varsigma} \leq \frac{1}{4(\sigma - \sigma')} \leq \frac{3}{\sqrt{5}} + O(\epsilon^2)$$

Usando este resultado y la expresión (10.32) en (10.35) y escogiendo a tal que $\theta_c < a < \pi/4$ llegamos a

$$R \leq \frac{9 \|u\|^2 \rho}{2\sqrt{5}} \left[\int_a^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta' - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} + \int_{\theta_c}^a \frac{\cos \theta' d\theta'}{\cos \theta' \sqrt{\sin^2 \theta' - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} \right. \\ \left. + \int_{\theta_c}^{\theta/2} \frac{\cos \theta' d\theta'}{\cos \theta' \sqrt{\sin^2 \theta' - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} \right] (1 + O(\epsilon^2))$$

Es fácil ver que la singularidad del integrando es logarítmica. En la primera y no tenemos singularidad, mientras que en la segunda y tercera podemos acotar (suponiendo $t \leq \pi/2$), integrando y usando $\pi/2 > \sqrt{2}$ llegamos a

$$R \leq \frac{9\pi\|u\|^2\rho}{4\sqrt{5}} \left[\log \frac{\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)})}{a + \sqrt{a^2 - \pi^2\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} \right. \\ \left. + \log \frac{(\sin a + \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \theta_c}) \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \theta_c} \right)}{\sin^2 \theta_c} \right] (1 + O(\epsilon^2))$$

Como $\theta_c < a < \pi/4$, $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ y $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}$ es creciente, se tiene

$$\therefore R \leq \frac{27\pi}{4\sqrt{5}} \|u\|^2 \rho \log \frac{\pi}{\theta_c} (1 + O(\epsilon^2))$$

En las regiones sobrantes usaremos la otra cota (10.31). Si integramos en ν y usamos que $|q| \leq \|u\|/g$, $|q'| \leq \|u\|/g'$ y $(\rho\rho')^{1/2} \leq \sqrt{3}\rho$ tenemos

$$T \equiv \int_{\tau(\theta+4\|u\|/g)}^{\tau(3\theta/2)} \int_0^{q'} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| \, d\nu' d\tau' \\ T \leq 2\|u\|^2 \rho \int_{\theta+4\|u\|/g}^{3\theta/2} \left[\left(\frac{\rho'}{2g'} + \frac{\rho'}{g} \right) \frac{1}{\varsigma} + \left(\frac{1}{2g'} + \frac{3}{g} \right) \left(1 + \sinh^{-1} \frac{\sqrt{6}\rho}{\varsigma} \right) \right] \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta'$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} = \frac{\sigma'}{2\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 3\epsilon - \sin^2 \theta_c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{5}\epsilon} (1 + O(\epsilon^2))$$

Usando este resultado junto con $\rho g^{-1} \leq 1/\sqrt{1 - 2\epsilon^2} = 1 + O(\epsilon^2)$ y $\rho \leq \rho' \leq 3\rho$ tenemos

$$T \leq \frac{7}{2\sqrt{5}} \epsilon^{-1} \|u\|^2 \rho (1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta+4\|u\|/g}^{3\theta/2} \left[\frac{1}{\varsigma} + \frac{2}{\rho} \log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\varsigma} \right] d\theta' \quad 10$$

Al usar que $\varsigma^2 \geq 4\sigma\sigma' \sin^2 \frac{|\theta - \theta'|}{2} \geq 2 \frac{|\theta - \theta'|^2}{\pi^2}$ las cotas resultan ser integrables, de modo que

$$T \leq \frac{7}{2\sqrt{5}} \epsilon^{-1} \|u\|^2 \rho \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \frac{\theta g}{8\|u\|} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\theta}{2} \log \frac{6\pi\sqrt{3}\rho}{\theta} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4\|u\|}{g} \log \frac{3\pi\sqrt{3}\rho g}{4\|u\|} \right] \right\} (1 + O(\epsilon^2))$$

¹⁰Eliminar el uno que acompaña al \sinh^{-1} con un factor de dos se justifica fácilmente en la región de integración. después se uso que $\sinh^{-1} x \leq \log(2x + 1) \leq 3x$ (para $x > 1$).

Como

$$\theta \geq \rho \geq \frac{\sqrt{2}\theta}{\pi} \Rightarrow \frac{\theta}{2\rho} \log \frac{6\pi\sqrt{3}\rho}{\theta} \leq \frac{\pi}{\sqrt{8}} \log 6\pi\sqrt{3} \quad \text{además} \quad \frac{4\|u\|}{\rho g} \leq \frac{4}{C}\epsilon^{1/3} < 3\pi\sqrt{3}$$

Llegamos a:

$$T \leq \frac{7}{2\sqrt{5}}\|u\|^2\rho\epsilon^{-1} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \frac{C}{32\epsilon^{1/3}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}} \log 6\pi\sqrt{3} \right\} (1 + O(\epsilon^2))$$

que es de la forma buscada. Ahora, para terminar el análisis en E_1 , haremos la integral sobre el intervalo restante. Usando procedimientos análogos a la primera parte llegaremos a:

$$\int_{\tau(\theta/2)}^{\tau(\theta-4\|u\|/g)} \int_0^{g'} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| \, dv' d\tau' \equiv U$$

$$U \leq 2\|u\|^2\rho(1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta/2}^{\theta-4\|u\|/g} \left[\frac{3}{2\varsigma} + 2 \left(\frac{1}{2\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\varsigma} \right] \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta'$$

Aquí al igual que en la integración del intervalo $0, \tau(t/2)$ hay dos opciones, una de ellas es que $3\epsilon \leq \theta \leq 6\epsilon$ y la otra es $6\epsilon \leq \theta$, es decir, hay dos posibles integrales:

$$U \leq 2\|u\|^2\rho(1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta/2}^{\theta-4\|u\|/g} \left[\frac{3}{2\varsigma} + 2 \left(\frac{1}{2\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \log \frac{3\sqrt{2}\rho}{\varsigma} \right] \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta' \quad (10.36)$$

para el caso $\theta \geq 6\epsilon$, mientras que en el otro integraremos:

$$U \leq 2\|u\|^2\rho(1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta_c}^{\theta-4\|u\|/g} \left[\frac{3}{2\varsigma} + 2 \left(\frac{1}{2\rho'} + \frac{1}{\rho} \right) \log \frac{3\sqrt{2}\rho}{\varsigma} \right] \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta' \quad (10.37)$$

En esta última el integrando tiene singularidad solo en θ_c ya que $\theta' = \theta$ no está dentro de la región de integración; por otro lado dicha región es muy pequeña (una distancia del orden 4ϵ) lo que facilitará el acotar. Procedamos con (10.37).

Dado que $\theta \leq 6\epsilon$ entonces:

$$\epsilon\sqrt{2(1-\epsilon^2)} = \rho'(\theta_c) \leq \rho' < \rho < \sin 6\epsilon < 6\epsilon \leq \frac{6}{\sqrt{2(1-\epsilon^2)}}\rho' < 4\rho'$$

lo que implica

$$U \leq 6\|u\|^2\rho(1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta_c}^{\theta-4\|u\|/g} \left[\frac{1}{2\varsigma} + \frac{2}{\rho} \log \frac{3\sqrt{2}\rho}{\varsigma} \right] \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta'$$

$$\leq 6\|u\|^2 \rho \max_{\theta_c \leq \theta' \leq \theta - 4\|u\|/g} \left[\frac{1}{2\varsigma} + \frac{2}{\rho} \log \frac{3\sqrt{2}\rho}{\varsigma} \right] (1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta_c}^{\theta - 4\|u\|/g} \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta'$$

Como $\varsigma^2 \geq 4\sigma\sigma' \sin^2 |\theta - \theta'|/2 \geq \frac{32}{\pi^2} \frac{\|u\|^2}{g^2}$ y $\epsilon \leq \rho < 6\epsilon$ encontramos:

$$U \leq 6\|u\|^2 \rho \left[\frac{\pi g}{8\sqrt{2}\|u\|} + 2\epsilon^{-1} \log \frac{3\pi g \epsilon}{4\|u\|} \right] (1 + O(\epsilon^2)) \int_{\theta_c}^{\theta - 4\|u\|/g} \frac{1}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta'$$

Ahora bien, hay que usar que:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_c}^{\theta - 4\|u\|/g} g'^{-1} \frac{d\tau'}{d\theta'} d\theta' &= \int_{\theta_c}^{\theta - 4\|u\|/g} \frac{\sigma'(1 + O(\epsilon^{2/3})) d\theta'}{2\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} \leq \int_{\theta_c}^{\theta - 4\|u\|/g} \frac{\cos \theta' d\theta' (1 + O(\epsilon^{2/3}))}{2\sqrt{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta_c}} \\ &\leq \log \frac{8\pi}{3\sqrt{1 - \epsilon^2}} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \leq \frac{8\pi}{3} (1 + \epsilon^2) (1 + O(\epsilon^{2/3})) \end{aligned}$$

una vez con este resultado se llega a

$$U \leq 16\pi\|u\|^2 \rho \left[\frac{\pi g}{8\sqrt{2}\|u\|} + 2\epsilon^{-1} \log \frac{3\pi g \epsilon}{4\|u\|} \right] (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Para el caso (10.36) se usa un procedimiento análogo al acotar T , de modo que se llega a:

$$U \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \|u\|^2 \rho \left\{ \frac{3\pi}{\sqrt{8}} \epsilon^{-1} \log \frac{C}{8\epsilon^{1/3}} + \frac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{2}} \pi \epsilon^{-1} \log 6\pi \right\} (1 + O(\epsilon^2))$$

Con esto terminamos la integración sobre E_1 , y solo resta la integración sobre E_2 , que haremos a continuación.

En esta parte usaremos que

$$\int_{E_2} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq \int_{E_2} G_{\partial\Omega} + G_{\partial H_\epsilon} dA' \leq \int_{B_1} G_{\partial H_\epsilon} dA' + \int_{B_2} G_{\partial\Omega} dA'$$

Donde $B_1 = B_{\frac{4\|u\|}{g}}(\rho, z)$ y $B_2 = B_{\frac{5\|u\|}{g}}(\rho + q \sin \theta, z + q \cos \theta)$ son bolas con centro en (ρ, z) y $(\rho + q \sin \theta, z + q \cos \theta)$ y radios $4\|u\|/g$ y $5\|u\|/g$ respectivamente.

Si usamos la cota del capítulo (6) para el núcleo G y que $\rho' \leq 3\rho$ tendremos

$$\int_{E_2} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq 6\sqrt{3} \pi \rho^2 \left(\int_0^{4\|u\|/g} \log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\varsigma'} \varsigma' d\varsigma' + \int_0^{5\|u\|/g} \log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\varsigma'} \varsigma' d\varsigma' \right)$$

Integrando directamente se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{E_2} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' &\leq 3\sqrt{3} \pi \rho^2 \left[\zeta^2 \left(\log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\zeta'} + \frac{1}{2} \right) \Big|_0^{5\|u\|/g} + \zeta^2 \left(\log \frac{3\sqrt{6}\rho}{\zeta'} + \frac{1}{2} \right) \Big|_0^{4\|u\|/g} \right] \\ &\leq 123\sqrt{3} \pi \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} \left(\log \frac{3\sqrt{6}\rho}{5C\epsilon^{4/3}} + \frac{1}{2} \right) (1 + O(\epsilon^{2/3})) \end{aligned}$$

Es de la forma buscada.

Para terminar el análisis del operador \mathcal{N}_2 tendremos que ver que efectivamente cumple las condiciones pedidas para la $t \leq 3\epsilon$. En esta región es conveniente dividir al igual que en casos anteriores en los dos espacios (E_1 y E_2), para ello se usarán las mismas definiciones, teniendo en cuenta que lo que será distinto, son las particiones de E_1 es decir:

$$E_1 = \left\{ (\rho', z') \in \Omega - H_\epsilon \mid \zeta = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2} \leq 4 \frac{\|u\|}{g} \right\} \quad E_2 = \Omega - H_\epsilon - E_1$$

con $(\rho, z) = (\epsilon + \mathcal{S} \sin t, \mathcal{S} \cos t) \in \partial H_\epsilon$ para $t \leq 3\epsilon$.

Al subdividir E_1 usaremos las rectas $z' = z \pm \epsilon$, estas rectas separan en regiones donde es más fácil usar unas cotas que otras.

Para facilitar las estimaciones, es conveniente usar en la integración algún parametro angular en vez de las coordenadas rectangulares, es decir, debemos encontrar para que valores de t' ó θ' las curvas $z \pm \epsilon$ intersectan a ∂H_ϵ . A continuación haremos estas estimaciones que serán de utilidad.

Es fácil ver que dada la componente z' de un punto sobre ∂H_ϵ , ρ debe de cumplir que:

$$\rho'^2 = \frac{1 - z'^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - z'^2)^2 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}$$

Por la región en la que estamos (antes del mínimo) usaremos el signo negativo. Si usamos que $z' = z \pm a$ entonces $1 - z'^2 = 1 - z^2 - a(a \pm 2z)$, de modo que tenemos:

$$\begin{aligned} \rho'^2 &= \frac{1 - z^2}{2} - \frac{a(a \pm 2z)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - z^2)^2 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)} \sqrt{1 - \frac{2a(1 - z^2)(a \pm 2z) - a^2(a \pm 2z)^2}{(1 - z^2)^2 - 4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}} \end{aligned}$$

Como $0 < z^2 < \frac{3+\sqrt{5}}{6}$ entonces $1 - z^2 \geq \frac{3-\sqrt{5}}{6}$, ello permite obtener la serie de Taylor de la expresión para ρ'^2 (consideraremos que $a = O(\epsilon)$). Por una serie de cálculos se tiene.

$$\rho'^2 = \begin{cases} \rho^2 \pm \epsilon^2 \frac{2az}{(1-z^2)^2} + O(a^4(a \pm 2z)^4) & \text{si } z = O(1) \\ \rho^2 + a\epsilon^2(a \pm 2z)(1 - \epsilon^2 + 2z^2) \\ + a^2\epsilon^2(a \pm 2z)^2 + O(a^4(a \pm 2z)^4) & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases}$$

Estas expresiones ayudan a estimar los valores del ángulo t' en función de t ; con un poco de esfuerzo obtenemos:

$$t' = \begin{cases} t \pm \frac{zk}{(z \pm a)} a \rho^2 + O\left(\frac{a^4(a \pm 2z)^4}{\rho}\right) & \text{si } z = O(1) \\ t \pm \frac{a\epsilon}{2} + O(\epsilon^4) & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases}$$

Con $k = \frac{\epsilon^2 \rho}{(\rho^4 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2))^2} - \frac{1}{(\rho + \epsilon)(1 - \rho^2 - \epsilon^2)}$ y al menos $a = O(\epsilon)$.

Si expresamos a un punto $(\tilde{\rho}, \tilde{z})$ en E_1 por $(\rho, z) + \nu(\sin \alpha, \cos \alpha)$, donde $(\rho, z) \in \partial H_\epsilon$, $0 < \nu \leq q$ y α el ángulo que hace la normal a la curva ∂H_ϵ en el punto (ρ, z) con el eje z ; E_1 quedará dividido por:

$$E_{1a} = \{(\tilde{\rho}', \tilde{z}') \in E_1 \mid 0 \leq t'(\rho', z') \leq t_1, \quad 0 < \nu' \leq q\}$$

$$E_{1b} = \{(\tilde{\rho}', \tilde{z}') \in E_1 \mid t_1 \leq t'(\rho', z') \leq t_2 < t, \quad 0 < \nu' \leq q\}$$

$$E_{1c} = \{(\tilde{\rho}', \tilde{z}') \in E_1 \mid t < t_3 \leq t'(\rho', z') \leq t_4, \quad 0 < \nu' \leq q\}$$

$$E_{1d} = \{(\tilde{\rho}', \tilde{z}') \in E_1 \mid t_4 \leq t'(\rho', z') \leq t_5, \quad 0 < \nu' \leq q\}$$

$$E_{1e} = \{(\tilde{\rho}', \tilde{z}') \in E_1 \mid t_5 \leq t'(\rho', z') \leq \pi, \quad 0 < \nu' \leq q\}$$

Donde

$$t_1 = \begin{cases} t - \frac{\rho^3}{\epsilon} & \text{si } z = O(1) \\ t - \frac{\epsilon^2}{2} & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases} \quad t_2 = \begin{cases} t - \frac{2\sqrt{2}q\rho^3}{\epsilon^2} & \text{si } z = O(1) \\ t - \sqrt{2}q\epsilon^2 & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases}$$

$$t_3 = \begin{cases} t + \frac{2\sqrt{2}q\rho^3}{\epsilon^2} & \text{si } z = O(1) \\ t + \sqrt{2}q\epsilon^2 & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases} \quad t_4 = \begin{cases} t + \frac{\rho^3}{\epsilon} & \text{si } z = O(1) \\ t + \frac{\epsilon^2}{2} & \text{si } z = O(\epsilon) \end{cases}$$

$$t_5 = t(\rho + \epsilon)$$

Como antes, en las regiones E_{1a} y E_{1d} es mejor usar la cota (6.7), mientras que en E_{1b} y E_{1c} es mejor usar (6.8). Comencemos con E_{1a} .

$$K \equiv \int_{E_{1a}} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq \int_0^{t_1} \int_0^{q'} \frac{\rho^2 \rho'^3}{\varsigma^3} \left(\frac{q}{\rho} + \frac{\nu'}{\rho'} + \frac{q + \nu'}{\varsigma} \right) d\nu' \frac{d\tau'}{dt'} dt'$$

Notemos que $\varsigma \geq \epsilon$ y $3\epsilon > \rho > \rho' \geq \epsilon$, entonces:

$$K \leq 36\rho \int_0^{t_1} \int_0^{q'} (q + \nu') d\nu' \frac{d\tau'}{dt'} dt'$$

Integrando respecto a ν' y observando que $|q| \leq \|u\|/g$ y $g < C\epsilon^{-2/3}$ encontramos:

$$K \leq 36\rho \int_0^{t_1} \left(q|q'| + \frac{|q'|^2}{2} \right) \frac{d\tau'}{dt'} dt' \leq 54C\rho \|u\|^2 \epsilon^{-4/3} \int_0^{\tau(t_1)} d\tau'$$

Como la longitud de arco está acotada por una cantidad M (longitud total de la curva) tendremos:

$$\therefore K \leq 54CM\rho \|u\|^2 \epsilon^{-4/3}$$

Para E_{1b} usaremos la cota (6.8), $\rho/3 \leq \rho' \leq \rho < 3\epsilon$ y por (B.1) se ve que el término $\rho g^{-1} d\tau'/dt' \leq 5$ de modo que:

$$\begin{aligned} \int_{E_{1b}} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' &\equiv F \\ &\leq 25C \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\rho} \left(1 + \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2\rho\rho'}}{\varsigma} \right) \right] dt' \end{aligned}$$

Lo siguiente por notar es que $\varsigma \geq 2\sqrt{2}q$, además hay que observar que $t_2 - t_1 < 27\epsilon^2$ (para $z = O(\epsilon)$, se tiene $t_2 - t_1 < 2\epsilon^2$); entonces, como el integrando no tiene singularidades en la región de integración podemos acotar por el máximo de este multiplicado por el ancho del intervalo obteniendo ¹¹

$$F \leq 25 * 27C \|u\|^2 \rho \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\epsilon^{4/3}}{\rho} \log \frac{3\rho}{2q} \right]$$

Es decir, F tiene el caracter buscado.

Para acotar la integral sobre la región E_{1c} hay que hacer algo análogo solo hay que notar que $\varsigma \geq 2\sqrt{2}q$, y que $t_4 - t_3 < 27\epsilon^2$ (para $z = O(\epsilon)$, se tiene $t_4 - t_3 < 2\epsilon^2$). Por métodos análogos al caso anterior llegamos a

$$E \leq 15 * 27C \|u\|^2 \rho \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\epsilon^{4/3}}{\rho} \log \frac{3\rho}{\sqrt{2}q} \right]$$

Es decir, E tiene el caracter buscado.

¹¹ Hay que recordar que $q = O(\epsilon^{4/3})$

Para tener una cota burda de t_5 , basta notar que si $\rho < 3\epsilon$ entonces $\rho + \epsilon < 4\epsilon$, por otro lado

$$z(4\epsilon) = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 - \rho^2)}}{\rho} \Big|_{4\epsilon} = \frac{\sqrt{15}}{4} \sqrt{1 - 17\epsilon^2} \Rightarrow t \leq \tan t' \leq \frac{3\epsilon}{z(4\epsilon)}$$

$$\therefore t' \leq \frac{12\epsilon}{\sqrt{15}\sqrt{1 - 17\epsilon^2}} < 4 \quad \text{para } \epsilon \text{ suficientemente pequeño}$$

De modo que al igual que antes se cumple $\rho \leq \rho' \leq 2\rho$ y con ello

$$\int_{E_{1d}} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \equiv D$$

$$D \leq 15C\sqrt{2}\|u\|^2\rho\epsilon^{-2/3} \int_{t_4}^{t_5} \left[\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\rho} \left(1 + \sinh^{-1} \frac{2\rho}{\varsigma} \right) \right] dt'$$

Lo siguiente por notar es que $\varsigma \geq \epsilon$ además $t_5 - t_4 < 4\epsilon$; entonces, obtenemos:

$$D \leq 60C\|u\|^2\rho\epsilon^{-2/3} \left[1 + \frac{2\epsilon}{\rho} \log \frac{6\rho}{\epsilon} \right]$$

Es decir, D tiene el caracter buscado.

Ahora vayamos con la integral sobre la región $E_{1\epsilon}$, de manera que:

$$H \equiv \int_{E_{1d}} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq$$

$$\frac{5}{4}\|u\|^2\rho \int_{t_5}^{\pi} \frac{\rho\rho'^2}{\varsigma^3} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{g'} \right) \frac{\rho'}{g'} \frac{d\tau'}{dt'} dt' \quad (10.38)$$

Como en la región que estamos $\rho' \geq \rho + \epsilon \geq 2\epsilon > \rho_c = \epsilon\sqrt{2(1 - \epsilon^2)}$, sabemos que $\theta' > \theta_c$; de hecho $\sin \theta' = 4\epsilon/\sqrt{3 + \epsilon^3}$ implica $\rho' = 2\epsilon$. Para ello recordemos que:

$$\rho' = \sigma' \sin \theta' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}} \sin \theta = 2\epsilon$$

Así encontramos que:

$$2\sigma'^2 - 1 = \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta'}} \geq \sqrt{1 - \frac{(1 - \epsilon^2)(3 + \epsilon^2)}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{4}} > \frac{1}{2}$$

Entonces, si en (10.38) integramos respecto a θ , el término $\rho' g'^{-1} d\tau'/d\theta'$ se acota por:

$$\frac{\rho'}{g'} \frac{d\tau'}{d\theta'} = \frac{\sigma^2}{2(2\sigma^2 - 1)} (1 + O(\epsilon^{2/3})) < 1$$

Otro término que causa un poco de problema es el factor ς^{-1} , para estudiar su orden de magnitud usaremos que la distancia entre los puntos (ρ, z) y $(\rho + \epsilon, z(\rho + \epsilon))$ es menor a la distancia entre los puntos (ρ, z) y (ρ', z') . Esta diferencia se estima con serie de Taylor, con un poco de esfuerzo se encuentra

$$z(\rho + \epsilon) - z = \frac{\sqrt{\rho(\rho + 2\epsilon)}}{\rho + \epsilon} \sqrt{1 - \rho^2 - 2\epsilon(\epsilon + \rho)} - \frac{\sqrt{\rho^2 - \epsilon^2}}{\rho} \sqrt{1 - \epsilon^2 - \rho^2}$$

$$z(\rho + \epsilon) - z \geq \frac{7}{12(3\sqrt{15} + 8\sqrt{2})} - \rho^2 \left(\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - \epsilon^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) - \rho\epsilon \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)$$

Con este resultado, y recordando que la diferencia en ρ es ϵ tenemos:

$$\therefore \varsigma = \sqrt{(z(\rho + \epsilon) - z)^2 + \epsilon^2} \geq \sqrt{\frac{7}{12(3\sqrt{15} + 8\sqrt{2})}} (1 + O(\epsilon^2))$$

De este modo la ecuación (10.38) se simplifica considerablemente, al punto de tener un integrando muy simple.

$$H \leq \frac{5}{4C} \left(\frac{12(3\sqrt{15} + 8\sqrt{2})}{7} \right)^{3/2} \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \int_{t_5}^{\pi - 3\epsilon} \rho' (\rho + \rho') d\theta'$$

$$\leq \frac{5\pi}{2C} \left(\frac{12(3\sqrt{15} + 8\sqrt{2})}{7} \right)^{3/2} \|u\|^2 \rho \epsilon^{-2/3}$$

Con esto se completa la demostración solo en la región E_1 , para que sea válido en toda la región de trabajo habrá que hacer una integral más.

$$\int_{E_2} |G_{\partial\Omega} - G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq \int_{E_2} |G_{\partial\Omega}| + |G_{\partial H_\epsilon}| dA' \leq \int_{E_2} |G_{\partial H_\epsilon}| dA' + \int_{\tilde{E}_2} |G_{\partial\Omega}| dA'$$

Donde \tilde{E}_2 es un círculo de radio $5\|u\|g^{-1}$. Ya anteriormente se han realizado integrales de esta forma y hemos visto que se pueden acotar como se enuncia en el teorema principal. No creo que sea necesario hacer estos cálculos, pues son análogos a muchos otros hechos anteriormente.

Acotar a la diferencia $\|\mathcal{N}_2 u_1 - \mathcal{N}_2 u_2\|$, es completamente análogo a lo que se realizó en esta parte. Con todo esto hemos mostrado que el teorema principal se cumple.

□

Bibliografía

- [1] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [2] COURANT R. JOHN F. *Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol. 1*, Limusa, 1982, USA.
- [3] MIKHLIN S. *Linear Integral Equations* 1960, Hindustan.
- [4] KRESS R. *Linear Integral Equations* Springer-Verlag 1999, segunda edición, New York USA.

Capítulo 11

Resultados Principales

En el apéndice (C) se mostró que el término f_ϵ es negativo, de hecho se concluyó que $f_\epsilon = O(\epsilon^2)$. Con este resultado y los teoremas (9) y (13) estamos listos para mostrar la existencia de la solución por un método constructivo.

Teorema 15. *Para $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$, M constante y ϵ_* suficientemente pequeño, existe una única $u \in \mathcal{B}(M\epsilon^2) \subset \mathcal{U}$ solución a la ecuación integral no lineal*

$$u - \mathcal{K}_\epsilon u = f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u \quad (11.1)$$

Demostración. Para esta demostración bastará con ver que el operador

$$\mathcal{A}_\epsilon u = (I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}(f_\epsilon + \mathcal{N}_\epsilon u) \quad (11.2)$$

es una contracción.¹ Es decir, cumple que:

$$\mathcal{A}_\epsilon u \in \mathcal{B}(M\epsilon^2) \quad \forall u \in \mathcal{B}(M\epsilon^2) \quad (11.3)$$

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u_1 - \mathcal{A}_\epsilon u_2\| \leq \mu \|u_1 - u_2\| \quad (\mu < 1), \quad \forall u \in \mathcal{B}(M\epsilon^2) \quad (11.4)$$

Observemos que si $u \in \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{N}_\epsilon u \in \mathcal{U}$ (esto se probó en el capítulo (10)), además $f_\epsilon \in \mathcal{U}$ pues la continuidad se garantiza por ser una integral de potencial y el dominio de integración abierto y conexo, mientras que la simetría se sigue de la simetría de ∂H_ϵ y la del núcleo.

Así $\mathcal{A}_\epsilon u \in \mathcal{U}$, además si $u, u_1, u_2 \in \mathcal{B}$ y con los teoremas (9) y (13) tendremos:

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u\| \leq \|(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}\|(\|f_\epsilon\| + \|\mathcal{N}_\epsilon u\|)$$

¹Decimos que T es contracción en el espacio de Banach B si $T : B \rightarrow B$, es acotado y para cuales quiera $y_1, y_2 \in B$ se cumple

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \gamma \|y_1 - y_2\| \quad \gamma < 1$$

Sabemos por el teorema (12) y el lema (11) que $(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}$ es acotado, supon- gamos que $\|(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}\| = c$, como $f_\epsilon = C_1\epsilon^2$ tendremos:

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u\| \leq c(C_1\epsilon^2 + C_2\|u\|[\epsilon^{-4/3}\|u\| + \epsilon]) \leq c\epsilon^2(C_1 + C_2M[M\epsilon^{2/3} + \epsilon])$$

pues $u \in B(M\epsilon^2)$. Por otro lado si usamos la ecuación (10.2) encontraremos

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u_1 - \mathcal{A}_\epsilon u_2\| \leq \|(I - \mathcal{K}_\epsilon)^{-1}\| \|\mathcal{N}_\epsilon u_1 - \mathcal{N}_\epsilon u_2\| \leq c(\epsilon^{-4/3}\|u_1\| + \epsilon^{-4/3}\|u_2\| + \epsilon)\|u_1 - u_2\|$$

Usando que $u_1, u_2 \in \mathcal{B}(M\epsilon^2)$ llegaremos a

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u_1 - \mathcal{A}_\epsilon u_2\| \leq c(2M\epsilon^{2/3} + \epsilon)\|u_1 - u_2\|$$

Con estas dos relaciones y fijando $M = 2cC_1$ podemos escoger ϵ_* y μ tal que:

$$\begin{aligned} cC_1(1 + 2cC_2[2cC_1\epsilon_*^{2/3} + \epsilon_*]) &\leq 2cC_1 \\ c(2cC_1\epsilon_*^{2/3} + \epsilon_*) &\leq \mu < 1 \end{aligned}$$

De este modo \mathcal{A}_ϵ es un mapeo de contracción de la bola $\mathcal{B}(M\epsilon^2)$ en si mismo *i.e.* existe un único punto fijo $u \in \mathcal{B}(M\epsilon^2)$ tal que $u = \mathcal{A}_\epsilon u$. De aquí la afirmación del teorema es evidente. \square

Como último hay que mostrar que la solución encontrada da paso a una solución $(\Psi, \partial\Omega)$ al problema original (3.16)

Teorema 16. *Sea u, ϵ_* como en el teorema (15). Para $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$ la frontera $(\partial\Omega)$ del núcleo descrita por la distancia normal $q = u/g$ a la curva ∂H_ϵ es continua. La función de corriente Ψ dada en (3.23) es suficientemente regular en Ξ , y el sistema $(\Psi, \partial\Omega)$ es solución al problema original (3.16). Más aun, $\partial\Omega$ es la única curva solución a dicho problema dentro de una franja de ancho $M\epsilon^2/g$ de ∂H_ϵ .*

Demostración. El hecho de que $\partial\Omega$ sea continua se tiene pues $u \in B(M\epsilon^2) \subset \mathcal{U} \subset C[0, \pi]$, ∂H_ϵ y su normal exterior dependen continuamente de la longitud de arco y de que g es continuo sobre ∂H_ϵ . Así un punto sobre la curva $\partial\Omega$ esta dado por la expresión (5.14).

La continuidad de $\partial\Omega$ y la expresión (5.14) definen a un conjunto acotado (pues dista a lo más $M\epsilon_*^2/g$ en cada punto de ∂H_ϵ) abierto (pues usamos $A = A^\circ$) y conexo A ; entonces por la teoría de potencial desarrollada la sección 2.2 y como A tiene soporte compacto, la función Ψ dada en (3.23) es continuamente diferenciable en Ξ , única y satisface las ecuaciones (3.15) y (3.16).²

Notemos que la ecuación integral no lineal (11.1) no es más que la primera condición sobre la frontera del núcleo en los sistemas (3.15) y (3.16), y por ser

²Por el momento no hemos mostrado que son satisfechas las condiciones de frontera.

un problema de punto fijo sabemos que la solución satisface la ecuación integral no lineal (11.2) *i.e.* la condición mencionada. La segunda condición (condición de radiación de Sommerfeld) en los sistemas (3.15) y (3.16) es satisfecha pues Ψ es una integral de potencial para un dominio no acotado (ver sección 2.2).

La unicidad de la solución $\partial\Omega$ en una franja de ancho $M\epsilon^2/g$ se garantiza por ser u punto fijo a la ecuación (11.2) *i.e.* solución a (11.1) en $\mathcal{B}(M\epsilon^2)$ \square

Bibliografía

- [1] KRESS R. *Linear Integral Equations* Springer-Verlag 1999, segunda edición, New York USA.
- [2] FRIGYES R. y NAGY B. *Functional Analysis* Blackie & son limited, 1956, London & Glasgow .
- [3] COURANT R. y HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics Vol. 2*, Interscience Publishers, 1966, USA.
- [4] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [5] KELLOGG O. *Potencial Theory*, Springer-Verlag, 1963, New York USA.
- [6] TAYLOR A. *Perturbation Methods* John Wiley & sons, 1973, New York USA.
- [7] HOSCHSTADT H. *Integral equations* Wiley-Interscience Publications 1973, Canada Press (1964) New York USA.

Conclusiones

En este trabajo se probó la existencia de vórtices anulares con frontera cercana a una línea de corriente interna al vórtice de Hill, esto se logró buscamos soluciones de tipo potencial en la ecuación de vorticidad. Las soluciones encontradas tienen distribución de vorticidad lineal respecto a la distancia al eje de simetría, misma velocidad en infinito que el vórtice esférico de Hill y flujo en el eje de orden ϵ . De hecho si $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$ la frontera $(\partial\Omega)$ del núcleo es continua y la función de corriente Ψ es suficientemente regular; además se probó que el sistema $(\Psi, \partial\Omega)$ es la única solución al problema original (3.16) en una franja de ancho $M\epsilon^2/g$ de ∂H_ϵ .

El método para resolver el problema fue buscar soluciones integrales y con ello plantear el problema como un mapeo de contracción, de este modo podemos determinar la frontera buscada con un proceso iterativo, y conocerla con tanta precisión como se desee, al menos numéricamente. Una vez conocida la frontera, con la solución integral podemos determinar la función de corriente y con ello el campo de velocidades en todo el espacio *i.e.* la dinámica del sistema. Hay que resaltar que con este razonamiento se resolvió un problema de frontera libre, con un método fundamental de análisis.

Apéndice A

Estudio de una función auxiliar (Capítulo 10)

En este apéndice haremos una cota que será de gran utilidad para el término \mathcal{N}_1 . El fin es estudiar la función

$$f(\rho) = \frac{\epsilon^2 \rho^3}{(\rho^4 + \epsilon^2(1 - \epsilon^2))^2} - \frac{\rho^2}{(\rho + \epsilon)(1 - \epsilon^2 - \rho^2)}$$

para valores $\rho = O(\epsilon)$, como sabemos que $\rho = \epsilon + \mathcal{S} \sin t \geq \epsilon$; proponemos que $\rho = \alpha\epsilon$ con $\alpha \geq 1$, sustituyendo esto, encontraremos:

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \tilde{f}(\alpha) = \frac{\epsilon\alpha^3}{(\epsilon^2\alpha^4 + (1 - \epsilon^2))^2} - \frac{\alpha^2\epsilon}{(\alpha + 1)(1 - \epsilon^2 - \alpha^2\epsilon^2)} \\ &= \alpha^2\epsilon \left(\frac{\alpha}{(\epsilon^2\alpha^4 + (1 - \epsilon^2))^2} - \frac{1}{(\alpha + 1)(1 - \epsilon^2 - \alpha^2\epsilon^2)} \right) \end{aligned}$$

De esta expresión observemos el segundo cociente.

$$K \equiv \frac{1}{(\alpha + 1)(1 - \epsilon^2(1 + \alpha^2))} = \frac{1}{1 + \alpha - \epsilon^2(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)} \leq \frac{1}{1 + \alpha - \alpha\epsilon^2(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)}$$

Pues $\alpha \geq 1$ y $\epsilon \ll 1$. Si suponemos que $\alpha \geq 2\alpha\epsilon^2(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)$, concluimos que:

$$K \leq \frac{1}{(1 + \epsilon^2\alpha(1 + \alpha)(1 + \alpha^2))}$$

Además, para el primer cociente podemos encontrar otra cota usando que $(\alpha^4 - 1) = (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) \leq \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)$.

$$\frac{\alpha}{(1 + \epsilon^2(\alpha^4 - 1))^2} \geq \frac{\alpha}{(1 + \epsilon^2\alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1))^2}$$

Juntando esta última expresión y la correspondiente para K tendremos:

$$\tilde{f}(\alpha) \geq \epsilon\alpha^2 \left[\frac{\alpha}{(1 + \epsilon^2\alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1))^2} - \frac{1}{(1 + \epsilon^2\alpha(1 + \alpha)(1 + \alpha^2))} \right]$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha) &\geq \frac{\epsilon\alpha^2}{(1 + \epsilon^2\alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1))^2} (\alpha - 1 - \epsilon^2\alpha(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)) \\ &= \frac{\epsilon\alpha^2}{(1 + \epsilon^2\alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1))^2} (-1 + \alpha(1 - \epsilon^2) - \epsilon^2\alpha^2 - \epsilon^2\alpha^3 - \epsilon^2\alpha^4) \end{aligned}$$

Ahora bien nombremos:

$$y(\alpha) \equiv -1 + \alpha(1 - \epsilon^2) - \epsilon^2\alpha^2 - \epsilon^2\alpha^3 - \epsilon^2\alpha^4, \quad g'(\alpha) = (1 - \epsilon^2) - 2\epsilon^2\alpha - 3\epsilon^2\alpha^2 - 4\epsilon^2\alpha^3$$

Para ver cualitativamente el comportamiento de y habrá que estudiar los puntos críticos de esta función con la teoría desarrollada en el capítulo 8.

$$P(\alpha) = -\frac{1 - \epsilon}{4\epsilon^2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha^3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1 - \epsilon^2}{4\epsilon^2}$$

Entonces encontramos:

$$\begin{aligned} q &= \frac{a}{3} \left(\frac{2a^2}{9} - b \right) + c = -\frac{3}{32} - \frac{1 - \epsilon^2}{4\epsilon^2} \quad \Rightarrow \quad -27q^2 = -\frac{27}{16\epsilon^4} \left(1 - \frac{5}{8}\epsilon^2 \right)^2 \\ p &= b - \frac{a^2}{3} = \frac{5}{16} \quad \Rightarrow \quad -4p^3 = -\frac{5^3}{4^3} \end{aligned}$$

Dado que ambos términos son negativos, $D = -4p^3 - 27q^2 < 0$ por el lema 8 del capítulo 8 concluimos que solo existe una raíz real, *i.e.* solo un punto crítico, entonces:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{27}{16\epsilon^4} \left(1 - \frac{5}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{-D}{108}} = \frac{1}{8\epsilon^2} \left(1 - \frac{5}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right) \\ &\Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4\epsilon^2/3}} \sqrt[3]{1 - \frac{5}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^4)} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4\epsilon^2/3}} + O(\epsilon^{4/3}) \end{aligned}$$

Entonces el punto crítico se alcanza en $\alpha_c = \frac{1}{\sqrt[3]{4\epsilon^2/3}} + O(\epsilon^{4/3})$, que por cierto es un máximo, pues $y'' < 0$ siempre. Por otro lado, es fácil ver que $y(\alpha)$ tiene un cero para algún $\alpha_0 = 1 + 5\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$. Así que

$$\tilde{f}(\alpha) \geq H(\alpha) \equiv \frac{\epsilon\alpha^2 y(\alpha)}{(1 + \epsilon^2\alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1))^2} \quad \text{para} \quad \alpha \geq 1$$

Hay que notar que

$$\tilde{f}(1) \geq H(1) = \frac{\epsilon y(1)}{(1+4\epsilon^2)^2} = -\frac{5\epsilon^3}{(1+4\epsilon^2)^2} < 0$$

Por otro lado, al usar la serie geométrica se encuentra que:

$$H(\alpha) \approx \epsilon \left(\frac{\alpha^3}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta} \right) \quad \text{con} \quad \beta = 1 - \epsilon^2 \alpha \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha}$$

Entonces

$$H'(\alpha) \sim \epsilon \left(\frac{3\alpha^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha}{\beta} + \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha^3}{\beta^3} \right] \beta' \right) = \frac{\epsilon \alpha^2}{\beta^2} \left(3 - \frac{2\beta}{\alpha} + \left[1 - \frac{2\alpha}{\beta} \right] \beta' \right)$$

Se puede ver fácilmente que $\beta' = O(\epsilon^2)$, además:

$$\frac{2\alpha}{\beta} = 2\alpha + O(\epsilon^2), \quad \frac{2\beta}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} + O(\epsilon)$$

Entonces

$$h'(\alpha) = \frac{\epsilon \alpha^2}{\beta^2} \left(3 - \frac{2}{\alpha} + O(\epsilon^2) \right) > 0 \quad \text{pues} \quad \alpha \geq 1 > \frac{2}{3}$$

En particular se cumple que $h'(\alpha_0) > 0$; es decir en la raíz de h la función es creciente, y como existe un único punto crítico en $\alpha_M = (2\epsilon)^{-2/3} \gg \alpha_0$, la función estudiada es positiva al menos para $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_M$. Con esto mostramos que:

$$\tilde{f}(\alpha) \geq 0 \quad \text{para} \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_M$$

entonces solo falta acotar para $1 \leq \alpha < \alpha_0$, para ello notemos que

$$h''(\alpha) = 2h' \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta'}{\beta} \right) + \frac{\epsilon \alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{2\beta}{\alpha^2} - \frac{2\beta'}{\alpha} + \frac{d}{d\alpha} \left(\left[1 - \frac{2\alpha}{\beta} \right] \beta' \right) \right)$$

Es fácil notar que $\beta'' = O(\epsilon^2)$ al igual que β' , por lo tanto si usamos $\beta = 1 + O(\epsilon^2)$ se tiene

$$h''(\alpha) = \frac{2\epsilon \alpha}{\beta^2} \left(6 - \frac{1}{\alpha} + O(\epsilon^2) \right) > 0 \quad \text{para} \quad \alpha \geq 1$$

Es decir, la función h es convexa, y por ende $\tilde{f}(\alpha)$ también lo es. Por este hecho, podemos acotar a la función por la recta tangente en $\alpha = 1$

$$\therefore \tilde{f}(\alpha) \geq \tilde{f}(1) + \tilde{f}'(1)(\alpha - 1)$$

Si calculamos $\tilde{f}(1)$ y $\tilde{f}'(1)$ tendremos:

$$f(1) = \epsilon \left(1 - \frac{1}{2(1-2\epsilon^2)} \right), \quad f'(1) = \frac{\epsilon(9 - 78\epsilon^2 + 176\epsilon^4 - 128\epsilon^6)}{4(1-2\epsilon^2)^2}$$

Entonces

$$\tilde{f}(\alpha) \geq \epsilon \frac{2 - 12\epsilon^2 + 16\epsilon^4 - (9 - 78\epsilon^2 + 176\epsilon^4 - 128\epsilon^6)(\alpha - 1)}{4(1 - 2\epsilon^2)^2}$$

Usando que $\alpha = 1 + 5\xi\epsilon^2$ con $0 \leq \xi$ y $\xi = O(1)$.

$$\tilde{f}(\alpha) \geq \epsilon \frac{2 + (45\xi - 12)\epsilon^2 + (390\xi + 16)\epsilon^4 + 880\xi\epsilon^6 - 640\xi\epsilon^8}{4(1 - 2\epsilon^2)^2}$$

$$\therefore \tilde{f}(\alpha) \geq 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq \alpha \leq \alpha_0$$

De manera que en conjunto obtenemos:

$$f(\rho) \geq 0 \quad \text{para} \quad \epsilon \leq \rho \leq 2^{-2/3}\epsilon^{1/3}$$

Bibliografía

- [1] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.

Apéndice B

Estimación de $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dt}{d\theta}$, $\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt}$ y f_ϵ

B.1. Otra estimaciones

B.1.1. Estimación de $\frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{dt}{d\theta}$

Una parte muy importante en el desarrollo del texto es encontrar la dependencia de la longitud de arco respecto a los dos parámetros angulares t y θ (cada uno por separado).

Primero tomemos las expresiones para ρ, z en los dos sistemas coordenados:

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma \sin \theta = \epsilon + \mathcal{S} \sin t \\ z &= \sigma \cos \theta = \mathcal{S} \cos t\end{aligned}\tag{B.1}$$

Haciendo el cociente de estas expresiones llegaremos a:

$$\tan \theta = \tan t + \frac{\epsilon}{\mathcal{S} \cos t},\tag{B.2}$$

Derivando implícitamente respecto a t encontramos:

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \left(1 - \frac{\epsilon}{\mathcal{S}} \left[\frac{d\mathcal{S}/dt}{\mathcal{S}} \cos t - \sin t \right] \right) \sec^2 t$$

Usando

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = \left(1 + \frac{2\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + \frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2} \right) \sec^2 t$$

tenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1 - \frac{\epsilon}{\mathcal{S}} \left[\frac{d\mathcal{S}/dt}{\mathcal{S}} \cos t - \sin t \right]}{1 + \frac{2\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + \frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2}}\tag{B.3}$$

Esta ecuación por si sola no da mucha información para valores de t donde la expansión interior es válida, ya que la expresión de \mathcal{S} es poco manejable, sin embargo resulta útil con la expansión exterior.

Si restringimos un poco más el dominio de t en la ecuación B.3 podemos obtener un resultado simpático:

Lema 11. Para $t > \epsilon^{2/3}$, se ve que

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \epsilon \sin t + o(\epsilon) \quad (\text{B.4})$$

Demostración. Sea $t > \epsilon^{2/3}$ sabemos por la expansión exterior que $\epsilon < \mathcal{S} < 1$, entonces usando serie de Taylor en B.3 tendremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(1 - \frac{\epsilon}{\mathcal{S}} \left[\frac{d\mathcal{S}/dt}{\mathcal{S}} \cos t - \sin t \right] \right) \left(1 - \frac{2\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + O\left(\frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2}\right) \right)$$

de la expresión (7.30) vemos que $d\mathcal{S}/dt = O(\epsilon)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \left(1 + \frac{\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + O\left(\frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2}\right) \right) \left(1 - \frac{2\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + O\left(\frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{\mathcal{S}} \sin t + O\left(\frac{\epsilon^2}{\mathcal{S}^2}\right) \end{aligned}$$

Usando la expresión de \mathcal{S} encontramos

$$\frac{1}{\mathcal{S}} = 1 + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 t} + \epsilon \sin t + O(\epsilon^2) \quad 1$$

Con lo anterior llegamos a:

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \epsilon \sin t + o(\epsilon)$$

□

Manipulando algebraicamente la expresión B.1 podemos llegar a:

$$\tan t = \tan \theta - \frac{\epsilon}{\sigma \cos \theta}$$

Si se deriva implícitamente respecto a θ encontraremos

$$\sec^2 t \frac{dt}{d\theta} = \left(1 + \frac{\epsilon}{\sigma} \left[\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \cos \theta - \sin \theta \right] \right) \sec^2 \theta$$

¹ $\epsilon^2/\sin^2 t$ es el término dominante para $t < \epsilon^{1/2}$.

Usando como antes que:

$$\sec^2 t = \left(1 - \frac{2\epsilon \sin \theta}{\sigma} + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2}\right) \sec^2 \theta$$

Se encuentra que:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1 + \frac{\epsilon \dot{\sigma}}{\sigma^2} \cos \theta - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta}{1 - \frac{2\epsilon \sin \theta}{\sigma} + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2}} \quad (\text{B.5})$$

A diferencia de (B.3), en este caso si se puede obtener una expresión relativamente simple para $\dot{\sigma}$, para ello habrá que derivar implícitamente (respecto a θ) la ecuación que nos determina una línea de corriente dentro del vórtice de Hill, es decir:

$$\sigma^4 - \sigma^2 + \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{\sigma(2\sigma^2 - 1) \tan \theta} \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta} = \frac{\sigma(1 - \sigma^2)}{(2\sigma^2 - 1) \tan \theta}$$

Usando esta expresión para $\dot{\sigma}$ en (B.5) tenemos:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta + \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{(1 - \sigma^2)}{(2\sigma^2 - 1)} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}}{1 - \frac{2\epsilon \sin \theta}{\sigma} + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2}} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Donde } \sigma^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{4\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\sin^2 \theta}}.$$

Posteriormente usaremos esta expresión.

B.1.2. Estimación de $\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt}$

Una de las estimaciones más usadas e importantes en este trabajo es acotar los términos:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{g} \frac{d\tau}{d\theta}$$

El realizar dichos cálculos no es difícil, sino más bien tedioso.

Del capítulo 8 la ecuación (8.20) se puede escribir como sigue:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\rho}{2|(1 - 2\sigma^2)| \sin^2 \theta} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (\text{B.7})$$

Si usamos ahora la ecuación (B.6) junto con la ecuación anterior encontramos que:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\tau}{d\theta} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^{-1} = \frac{\sigma}{2 \sin \theta} \frac{\left[\left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \right] (1 + O(\epsilon^{2/3}))}{\left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right) |(1 - 2\sigma^2)| + \frac{\epsilon}{\sigma} (1 - \sigma^2) \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}} \cdot h$$

Donde $h = \text{Sgn}(2\sigma^2 - 1)$.

Factorizando h (no hay que olvidar que h es un signo, de modo que $h^{-1} = h$, $|1 - 2\sigma^2| = |2\sigma^2 - 1|$ y $h|1 - 2\sigma^2| = (2\sigma^2 - 1)$). Metiendo el primer factor en el denominador tenemos:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = h \frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta}{2 \frac{\sin \theta}{\sigma} \left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right) (2\sigma^2 - 1) + \frac{\epsilon}{\sigma^2} (1 - \sigma^2) \cos^2 \theta} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Si analizamos un poco el denominador, encontramos que:

$$\frac{\sin \theta}{\sigma} \left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right) (2\sigma^2 - 1) + \frac{\epsilon}{\sigma^2} (1 - \sigma^2) \cos^2 \theta = \frac{1 - 2\sigma^2}{\sigma} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} - \sin \theta\right) + \epsilon \cos^2 \theta$$

Con esto, se obtiene:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = h \frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma} \sin \theta\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta}{2 \left(\frac{1 - 2\sigma^2}{\sigma}\right) \left(\frac{\epsilon}{\sigma} - \sin \theta\right) + \epsilon \cos^2 \theta} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Si ahora multiplicamos y dividimos por σ^2 llegaremos a:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = h \frac{(\sigma - \epsilon \sin \theta)^2 + \epsilon^2 \cos^2 \theta}{2 (2\sigma^2 - 1) (\sigma \sin \theta - \epsilon) + \epsilon \sigma^2 \cos^2 \theta} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Sustituyendo las expresiones de ρ, z dadas en (B.1) para obtener:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = h \frac{(\sigma^2 + \epsilon^2 - 2\sigma\epsilon \sin \theta)}{2 (2\sigma^2 - 1) (\mathcal{S} \sin t) + \epsilon z^2} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Es fácil ver que en el numerador de nuestra igualdad tenemos a \mathcal{S}^2 , pues por la ley de cosenos tenemos:

$$\mathcal{S}^2 = \sigma^2 + \epsilon^2 - 2\sigma\epsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Entonces:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = h \frac{\mathcal{S}}{2 (2\sigma^2 - 1) \sin t + \epsilon \mathcal{S} \cos^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (\text{B.8})$$

Guardemos este resultado un poco para analizar un término de este.

También por ley de cosenos, podemos observar que:

$$\sigma^2 = \mathcal{S}^2 + \epsilon^2 - 2\mathcal{S}\epsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \mathcal{S}^2 + \epsilon^2 + 2\mathcal{S}\epsilon \sin t$$

Entonces:

$$2\sigma^2 - 1 = 2\mathcal{S}(\mathcal{S} + 2\epsilon \sin t) - (1 - 2\epsilon^2)$$

De la ecuación (7.1) del capítulo (7), tenemos:

$$-(1 - 2\epsilon^2) = \frac{\mathcal{S}}{2\epsilon \sin t} \left\{ -\mathcal{S}^2 \sin^2 t - 2\epsilon \mathcal{S} \sin t (1 + \sin^2 t) + [\sin^2 t - \epsilon^2 (1 + 5 \sin^2 t)] \right\}$$

Así se encuentra:

$$(2\sigma^2 - 1) \sin t = \mathcal{S} \left\{ 2\mathcal{S} \sin t + 4\epsilon \sin^2 t - \frac{1}{2\epsilon} \mathcal{S}^2 \sin^2 t - \mathcal{S} \sin t (1 + \sin^2 t) + \frac{1}{2\epsilon} [\sin^2 t - \epsilon^2 (1 + 5 \sin^2 t)] \right\}$$

Ahora simplifiquemos:

$$(2\sigma^2 - 1) \sin t = \mathcal{S} \left[\mathcal{S} \sin t \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2\epsilon} (1 - \mathcal{S}^2) - \frac{\epsilon}{2} (1 - 3 \sin^2 t) \right]$$

sustituyendo en la ecuación (B.8) tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} &= \frac{h}{2} \frac{1}{\mathcal{S} \sin t \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2\epsilon} (1 - \mathcal{S}^2) - \frac{\epsilon}{2} (1 - 3 \sin^2 t) + \epsilon \cos^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \\ &= \frac{h}{2\mathcal{S} \sin t \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{\epsilon} (1 - \mathcal{S}^2) + 2\epsilon - \epsilon \cos^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \end{aligned}$$

Manipulando un poco más la expresión concluimos:

$$\frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\text{sgn}(2\sigma^2 - 1)}{\epsilon + 2\mathcal{S} \sin t \cos^2 t + \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon^2 - \mathcal{S}^2) \sin^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (\text{B.9})$$

Tomando el valor absoluto de (B.9) y observando que el denominador es positivo se encuentra:

$$\left| \frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} \right| = \frac{1}{\epsilon + 2\mathcal{S} \sin t \cos^2 t + \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon^2 - \mathcal{S}^2) \sin^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3}))$$

Si usamos que $0 \leq \mathcal{S} \leq \sqrt{1 - \epsilon^2} - \epsilon$, entonces $1 - \mathcal{S}^2 \geq 2\epsilon\sqrt{1 - \epsilon^2}$, esto aunado a que $2\mathcal{S} \sin t \cos^2 t > 0$ para $t \leq \pi$ obtenemos:

$$\left| \frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} \right| \leq \frac{1}{\epsilon + (2\sqrt{1 - \epsilon^2} + \epsilon) \sin^2 t} (1 + O(\epsilon^{2/3})) \quad (\text{B.10})$$

Aquí se observa que este término va como ϵ^{-1} para $t \ll 1$.

Como un resultado extra, multipliquemos la última expresión por ρ .

$$\rho \left| \frac{1}{g} \frac{d\tau}{dt} \right| \leq \frac{\epsilon + \sin t}{\epsilon + (2\sqrt{1 - \epsilon^2} + \epsilon) \sin^2 t} = O(1) \quad (\text{B.11})$$

B.2. Estimación de f_ϵ

Lo que ahora nos concierne es acotar el término f_ϵ que se definió en el capítulo 3. Recordemos que:

$$f_\epsilon = \left(-\frac{2}{3}\rho + \frac{5}{\pi\rho} \int_{H_\epsilon} G dA' - \frac{\epsilon^2}{\rho} \right) \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Ahora bien si usamos que

$$-\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{5}{\pi} \int_{H_0} G dA' = \rho^2(1 - \rho^2 - z^2)$$

Tendremos

$$f_\epsilon = \frac{\epsilon^2(1 - \epsilon^2)}{\rho} + \left(-\frac{5}{\pi\rho} \int_{H_0 - H_\epsilon} G dA' - \frac{\epsilon^2}{\rho} \right) \Big|_{\partial H_\epsilon} = -\frac{5}{\pi} \int_{H_0 - H_\epsilon} \frac{1}{\rho} G \Big|_{\partial H_\epsilon} dA' - \frac{\epsilon^4}{\rho} \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Esta expresión es semejante a la que se obtuvo cuando se estimó a $g(t, \epsilon)$, de hecho mencionamos que el análisis para dicho término, es análogo al que realizaremos acá. En resumen lo que debemos hacer es acotar f_ϵ , para ello usaremos algo de series. Usando la notación del capítulo (10), encontramos que:

$$(1 - h)^a = \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{h^k}{k!}$$

Donde $(a)_k = (a)(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$, $k \in N$, $(a)_0 = 1$ y $h < 1$.

Observemos que podemos escribir a la integral que nos interesa como:

$$\rho^{-1}G = \frac{\rho'^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' + (z - z')^2}} = \frac{\rho'^2}{2\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{1 - \xi \cos \varphi'}}$$

Con $\eta^2 = \rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2$ y $\xi = \frac{2\rho\rho'}{\eta^2}$; como $\xi < 1$ podemos aplicar el desarrollo de arriba y encontrar:

$$\rho^{-1}G = \frac{\rho'^2}{2\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_k \frac{\xi^k}{k!} \cos^{k+1} \varphi' d\varphi'$$

Dado que la suma converge uniformemente para $\xi < q < 1$, (ver sección 7.6 de [5]) podemos intercambiar la integral por la suma.

$$\rho^{-1}G \equiv \frac{\rho'^2}{2\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_k \frac{\xi^k}{k!} \cos^{k+1} \varphi' d\varphi' = \frac{\rho'^2}{2\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_k \frac{\xi^k}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{k+1} \varphi' d\varphi'$$

En esta relación es fácil ver que solo se tendrá contribución cuando el índice $k = 2i + 1$ con $i \in \mathcal{N}$ y $i \geq 0$, de modo que la integral se transforma en:

$$\rho^{-1}G = \frac{\rho'^2}{2\eta} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_{2i+1} \frac{\xi^{2i+1}}{(2i+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2i+2} \varphi' d\varphi'$$

Nuestro problema ahora consiste en encontrar la integral de

$$A_{i+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2i+2} x dx$$

Integrando por partes llegamos a:

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2i} x (1 - \sin^2 x) dx = A_i - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2i} x \sin^2 x dx \\ &= A_i + \left. \frac{\sin x \cos^{2i+1} x}{2i+1} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{A_{i+1}}{2i+1} \end{aligned}$$

Despejando A_{i+1} encontramos:

$$A_{i+1} = \frac{2i+1}{2i+2} A_i$$

Iterando repetidamente llegamos a:

$$A_{i+1} = \frac{2(i+1)-1}{2(i+1)} A_i = \left(\frac{2(i+1)-1}{2(i+1)} \right) \left(\frac{2(i)-1}{2(i)} \right) \left(\frac{2(i-1)-1}{2(i-1)} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \right) A_0$$

Donde

$$A_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

$$\therefore A_{i+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2i+2} x dx = \left(\frac{2(i+1)-1}{2(i+1)} \right) \left(\frac{2(i)-1}{2(i)} \right) \left(\frac{2(i-1)-1}{2(i-1)} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \right) 2\pi$$

Por otro lado, hay que observar que:

$$\left(\frac{2(i+1)-1}{2} \right) \left(\frac{2(i)-1}{2} \right) \left(\frac{2(i-1)-1}{2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(i+1)!} = \frac{(2i+1)!}{2^{2i+1} i! (i+1)!}$$

Con este último resultado encontramos:

$$\rho^{-1} G = \frac{\rho'^2 \pi \xi}{\eta} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)_{2i+1} \frac{1}{2^{2i+1} (i+1)!} \frac{(\xi^2)^i}{i!}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \right)_{2i+1} &= -\frac{1}{2^{2i+1}} \prod_{j=0}^i (4j-1)(4j+1) = -2^{2i+3} \prod_{j=0}^i \left(j - \frac{1}{4} \right) \left(j + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2^{2i-1} \prod_{j=1}^i \left(j - \frac{1}{4} \right) \left(j + \frac{1}{4} \right) = 2^{2i-1} \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{3}{4} \right) \left(j + \frac{5}{4} \right) = 2^{2i-1} \left(\frac{3}{4} \right)_i \left(\frac{5}{4} \right)_i \end{aligned}$$

Por otra parte, es facil ver que $(i+1)! = (2)_i$, de modo que al sustituir lo anterior llegaremos a:

$$\rho^{-1}G = \frac{\pi\rho'^2\xi}{4\eta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)_i \left(\frac{5}{4}\right)_i}{(2)_i} \frac{(\xi^2)^i}{i!} = \frac{\pi\rho'^2\xi}{4\eta} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, \xi^2\right)$$

Con F , la función hipergeométrica. Entonces:

$$\rho^{-1}G = \frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{3/2} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, \xi^2\right)$$

En la referencia [1] capítulo 7, podemos encontrar que:

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})(2z)^{\nu+1}} F\left(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right)$$

Tomemos $\nu = 1/2$

$$Q_{1/2}(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)(2z)^{3/2}} F\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{1}{z^2}\right)$$

Como $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, además que $F(a, b, c, d) = F(b, a, c, d)$ tenemos

$$Q_{1/2}(z^{-1}) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{3/2} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, z^2\right)$$

Con esto es claro que:

$$\rho^{-1}G = \frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{1/2}} Q_{1/2}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\rho'^{3/2}}{\rho^{1/2}} Q_{1/2}\left(\frac{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2}{2\rho\rho'}\right)$$

Ahora usemos la identidad (1) de la sección 13.22 de la referencia [2] (pag. 389) e identificando $a = |z - z'|$, $b = \rho$, $c = \rho'$ y $\nu = 1$, encontramos

$$\rho^{-1}G = \pi\rho'^2 \int_0^\infty e^{-|z-z'|k} J_1(\rho k) J_1(\rho' k) dk \quad (\text{B.12})$$

Ahora usemos este resultado en f_ϵ

$$f_\epsilon = -5 \iint_{H_0 - H_\epsilon} \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk dA' - \frac{\epsilon^4}{\rho} \Big|_{\partial H_\epsilon}$$

Como resulta complicada la integración, cambiaremos de región, pues como sabemos que $\rho^{-1}G > 0$, entonces al integrar sobre una región A de modo que $H_0 - H_\epsilon \subset A$, la integral de $\rho^{-1}G$ en A es mayor que la integral sobre la región inicial.

Escojamos $A = T \cup U$ con T y U como sigue:

$$T = \{(\rho', z') | 0 \leq \rho' \leq s, -\infty < z < \infty\}$$

$$U = \{(\rho', z') \mid s \leq \theta' \leq \pi - s, 1 - 4\beta' \leq \sigma' \leq 1\}$$

Con $s \ll 1$ por definir.

De este modo

$$\iint_{H_0 - H_\epsilon} \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk \leq \iint_A \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk$$

Hagamos la integral sobre T :

$$\int_0^s \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk dz' d\rho'$$

Cambiando el orden de integración llegamos:

$$\int_0^s \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk dz' d\rho' = 2 \int_0^s \int_0^\infty \frac{\rho'^2}{k} J_1(\rho k) J_1(\rho' k) dk d\rho'$$

Recurriendo de nuevo a [2] (sección 13.42 página 405) encontramos que:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ak) J_\nu(bk)}{k} dk = \begin{cases} \frac{1}{2\nu} \left(\frac{b}{a}\right)^\nu & \text{si } b \leq a \\ \frac{1}{2\nu} \left(\frac{a}{b}\right)^\nu & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

Usando esta identidad tenemos:

$$\int_0^s \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk dz' d\rho' = \begin{cases} \int_0^s \frac{\rho'^3}{\rho} d\rho' & \text{si } \rho' \leq \rho \\ \int_0^s \rho \rho' d\rho' & \text{si } \rho \leq \rho' \end{cases}$$

Ahora bien, podemos acotar por:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{\rho'^3}{\rho} d\rho' &\leq \int_0^s \rho'^2 d\rho' \leq \int_0^s \rho'^2 d\rho' & \text{si } \rho' \leq \rho \\ \int_0^s \rho \rho' d\rho' &\leq \int_0^s \rho'^2 d\rho' & \text{si } \rho \leq \rho' \end{aligned}$$

Con una última integración llegamos a:

$$\int_0^s \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \rho'^2 J_1(\rho k) J_1(\rho' k) e^{-|z-z'|k} dk dz' d\rho' \leq \frac{s^3}{3}$$

Entonces:

$$f_\epsilon \geq -\frac{5s^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{\rho}$$

Si queremos que

$$|f_\epsilon| = O(\epsilon^2) \quad \Rightarrow \quad s = O(\epsilon^{2/3})$$

Es decir esta cota es válida hasta r del orden de $\epsilon^{2/3}$, pero en esta región tanto t como θ son del mismo orden, de ello para ese orden la expansión exterior

para \mathcal{S} funciona bien y dado que $\theta_c \ll \epsilon^{2/3}$, en la expansión para σ podemos usar serie de Taylor para aproximar su valor. es decir, en esta región las cosas funcionan bien e incluso podemos afirmar que ambos contornos (∂H_o y ∂H_ϵ) son muy cercanos. de hecho para $t > \epsilon^{2/3}$ ∂H_ϵ es muy parecida a un círculo. A continuación estudiaremos la integral sobre U y lograremos expresar un poco mejor la forma de la variable s con el fin de que $|f_\epsilon|$ sea del orden deseado.

Ahora bien, para atacar la región restante (U) usaremos los mismos métodos que en la ecuación (5.12), más específicamente en el segundo sumando, es decir aproximaremos como:

$$\begin{aligned} \iint_{H_0-H_\epsilon} (G\rho^{-1})|_{\partial H_\epsilon} dA' &= \frac{5}{\pi} \int_0^\pi \Gamma_\epsilon(t, t') q' \frac{d\tau'}{dt'} dt' + \mathcal{N}_1(q) \\ &\equiv \mathcal{K}_\epsilon u + \mathcal{N}_1(q) = \int_0^\pi K_\epsilon u' dt' + \mathcal{N}_1(q) \end{aligned}$$

Donde $u = gq$ y

$$K_\epsilon(t, t') = \frac{5}{\pi} \frac{\Gamma_\epsilon(t, t') \frac{d\tau'}{dt'}}{\rho g'}$$

Aquí $u \notin \mathcal{U}$, pero en la prueba del teorema (4) capítulo 8 encontramos que:

$$\int_0^\pi (K_\epsilon - K_0)u dt' \leq \|u\| \epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon)$$

este no es el resultado general del teorema, pero es igualmente cierto. Entonces usemos estos resultados para acotar a $|f_\epsilon|$.

$$\begin{aligned} \left| \iint_{H_0-H_\epsilon} (G\rho^{-1})|_{\partial H_\epsilon} dA' \right| &\leq \int_0^\pi |K_\epsilon u| dt' + |\mathcal{N}_1(q)| \\ &\leq \left(\int_0^\pi |K_0 u| dt' + \|u\| \epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon) \right) + |\mathcal{N}_1(q)| \end{aligned}$$

Ahora el problema central es aproximar los valores de $\|u\|$ y de la integral de K_0 . Para ello estimemos el orden de q para $\rho = O(\epsilon^{2/3})$. Parametricemos a ∂H_ϵ en función de ρ es decir, si $\mathbf{R} \in \partial H_\epsilon$ entonces:

$$\mathbf{R} = (\rho, z(\rho)) \quad \rightarrow \quad \hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{z + \left(z \frac{dz}{d\rho}\right)^2}} \left(z, z \frac{dz}{d\rho} \right)$$

Pero $z^2 = 1 - \rho^2 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2)/\rho^2$ entonces $z dz/dt = -\rho(1 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2)/\rho^4)$. Si llamamos $\eta^2 = \epsilon^2(1 - \epsilon^2)$, entonces veremos que el vector tangente ($\hat{\tau}$) y normal (\hat{n}) se escriben como:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}} \left(\sqrt{1 - \rho^2 - \frac{\eta^2}{\rho^2}}, -\rho \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^4} \right) \right)$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}} \left(\rho \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^4} \right), \sqrt{1 - \rho^2 - \frac{\eta^2}{\rho^2}} \right)$$

Para encontrar a q habrá que resolver la ecuación

$$\|\mathbf{R} + q\hat{n}\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q = -\mathbf{R} \cdot \hat{n} \pm \sqrt{1 + (\mathbf{R} \cdot \hat{n})^2 - \|\mathbf{R}\|^2}$$

Es fácil ver que $1 - \|\mathbf{R}\|^2 = \eta^2/\rho^2$ y además

$$\mathbf{R} \cdot \hat{n} = \frac{1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}}{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}}$$

Si usamos estos resultados en la expresión para q con el signo positivo de la raíz (pues es el que nos interesa) encontramos:

$$q = -\frac{1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}}{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}} + \sqrt{\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\left(1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}\right)^2}{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}}$$

Es sencillo ver que el segundo sumando del radicando es $1 + O(\eta^2/\rho^2)$ de modo que

$$q = \frac{1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}}{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}} \left[\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\rho^2} \frac{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}{\left(1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}\right)^2}} - 1 \right] \leq \frac{\eta^2}{2\rho^2} \frac{\sqrt{1 - 3\frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\eta^4}{\rho^6}}}{1 - 2\frac{\eta^2}{\rho^2}} \leq C \frac{\eta^2}{2\rho^2}$$

Entonces encontramos:

$$\int_0^\pi |K_0 u| dt' \leq C \frac{5}{2\pi} \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \int_0^\pi \frac{\Gamma_\epsilon(t, t') \frac{d\tau'}{dt'}}{\rho \rho'^2} dt'$$

Ahora hay que tomar la expresión de G y notar que:

$$\rho^{-1} \rho'^{-2} G = \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi}}$$

Con un poco de manipulación (ver capítulo 6) llegaremos a:

$$\rho^{-1} \rho'^{-2} G = 2 \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 + 4\rho\rho' \sin \frac{\varphi}{2}}}$$

Restringiendo (ρ, z) y (ρ', z') a ∂H_0 y sustituyendo en la integral de K_0 tenemos:

$$\int_0^\pi |K_0 u| dt' \leq C \frac{5}{\pi} \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\zeta^2 + 4\rho\rho' \sin \frac{\varphi}{2}}} \frac{d\tau'}{dt'} dt'$$

Ahora solo hay que ver que:

$$\begin{aligned} \rho|_{\partial H_0} = \sin t & & \frac{d\tau'}{dt'} \Big|_{\partial H_0} &= 1 \\ \Rightarrow & & & \\ \rho'|_{\partial H_0} = \sin t' & & \zeta^2 = 4 \sin^2 \frac{|t-t'|}{2} & \end{aligned}$$

Con ello llegamos a:

$$\int_0^\pi |K_0 u| dt' \leq C \frac{5}{2\pi} \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{|t-t'|}{2} + \sin t \sin t' \sin \frac{\varphi}{2}}} d\varphi dt'$$

El integrando que se obtuvo es singular para $(t = t', \varphi = 0)$, pero a pesar de esta singularidad, afirmamos que dicha integral está acotada por una constante, pues la singularidad que se obtiene después de la primera integración, es una singularidad logarítmica, que como ya hemos visto en repetidas ocasiones está acotada. A continuación mostraremos esto.

Proponemos los cambios de variable $\sin \varphi/2 = v$ y $a^2 = \sin^2 \frac{|t-t'|}{2} / (\sin t \sin t')$ de modo que:

$$\int_0^\pi |K_0 u| dt' \leq C \frac{5}{2\pi} \epsilon^2 (1 - \epsilon^2) \int_0^\pi \int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{a^2 + v^2} \sqrt{1 - v^2}} dv dt'$$

Ahora bien, en el capítulo (6) vimos que:

$$\int_0^1 \frac{1 - 2v^2}{\sqrt{a^2 + v^2} \sqrt{1 - v^2}} dv \leq \begin{cases} \sinh^{-1} \frac{1}{a\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4a^3} \end{cases}$$

De manera que la primera cota muestra el caracter logarítmico para $t = t'$. Entonces si se desea calcular dicha constante solo hay que partir la región de integración en tres: $0 \leq t' \leq t/2$, $t/2 \leq t' \leq 3t/2$ y $3t/2 \leq t' \leq \pi$; en la primera y última región usaremos la segunda cota, mientras que en la segunda usaremos la primera cota. Dicho cálculo no se realizará pues es análogo a casos anteriores.

Ahora bien, para ver que el término $\mathcal{N}_1(q) = O(\epsilon^2)$ hay que hacer un análisis idéntico al realizado para estimar el orden del mismo término pero en el caso donde una frontera era $\partial\Omega$, de hecho se encontró que:

$$|\mathcal{N}_1(q)| \leq C \|u\|^2 r|_{\partial H_\epsilon} \epsilon^{2/3} \log(1/\epsilon)$$

Entonces, solo basta con escoger $s > k\epsilon^{2/3+\alpha}$ con $\alpha > 0$, para garantizar que las integrales sobre U y T son acotadas de la forma deseada y en consecuencia el término

$$f_\epsilon = O(\epsilon^2)$$

Bibliografía

- [1] LEVEDEV. N. *Special Functions and their Applications* Dover, 1972, New York USA.
- [2] WATSON G. *A Treatise of Bessel Functions* Cambridge at the University Press 1922.
- [3] SOMMERFELD A. *Partial Differential Equations in Physics* Academic Press 1949, New York USA
- [4] COURANT R. y HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics Vol. 1 y 2*, Interscience Publishers, 1966, USA.
- [5] COURANT R. y JOHN F. *Introduction to Calculus and Analysis Vol. 2*, Springer, 1989, New York USA.
- [6] NORBURY J. *On steady vortex rings close to Hill's Spherical Vortex* Proc. Camb. Phil. Soc. (1972) Vol. **72**, pp 253-284.
- [7] NAYFEH A. H. *Perturbation Methods* John Wiley & sons, 1973, New York USA.
- [8] NAYFEH A. H. *Introduction to Perturbation Techniques* John Wiley & sons, 1993, New York USA.
- [9] FRAENKEL L. E. *On the method of matched asymptotic expansions* Proc. Cambridge Philos. Soc. (1969) Vol. **65** 209.Pág. 209-231