



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UN PUENTE ENTRE ARREGLOS DE CURVAS,  
GRÁFICAS Y SUPERFICIES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICA**

**P R E S E N T A:**

**SARA JANI MURILLO GARCIA**



**DRA. ISABEL ALICIA HUBARD ESCALERA:  
2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



There are no shortcuts to happiness.

El corazón de las matemáticas  
son sus propios problemas.

*Paul Halmos*

---

## Agradecimientos

---

La labor de esta tesis ha sido, sin duda alguna, una de las cosas más laboriosas y complejas que he hecho hasta ahora; y uno de los procesos más importantes de mi carrera. Por lo mismo, este proceso ha influido de muchas maneras en este último año, desde darme emoción, euforia, felicidad: el entender el corazón del problema, el poner el último punto; y el desánimo al ver que el último punto no era realmente el último, sino que faltarían muchos más. Ahora que veo el trabajo realizado, no puedo dejar de pensar en todas aquellas personas y momentos, que me ayudaron a seguir adelante.

Quiero agradecer, antes que nada, a mi papá. Desde siempre ha estado muy pendiente, no sólo de mi educación, sino más importante de mi persona, de que siempre fuera congruente con mis ideales y mis actos. Esto es algo que nunca voy a olvidar. Por dejarme en el corazón y en la mente, la lucha por las ideas, lo justo y lo correcto. ¡Gracias papá!

A mi hermano, porque más que lazos de sangre, hay lazos más fuertes

---

que ni siquiera puedo describir, y es sin duda, uno de los pilares más fuertes en mi vida.

A mis grandes amigos, Alfredo Lozano y Guillermo Olicón, ambos amigos de la carrera de Matemáticas. Gracias a los dos por esas tardes de dominó, de esas conversaciones de matemáticas y de la vida. Al negro Memo, porque sus consejos siempre han sido sinceros, y hemos recorrido hombro a hombro nuestras vidas fuera y dentro de las matemáticas. Al gran poeta Alf, porque es un amigo incondicional y me ha transmitido mucho conocimiento. Cuando recuerdo todo lo que hemos pasado los tres, no puedo decir más que gracias.

A mis amigos del baile, sobre todo a Alejandro Olvera, que siempre me impulsó a nunca darme por vencida y me recordaba lo importante que era seguir persiguiendo mis ideales cuando se me olvidaba hacerlo.

A mis amigos de la montaña y los que he conocido en mis viajes. He aprendido muchas cosas de ellos, muchas experiencias. Sobre todo me hicieron volver a valorar la naturaleza, la convivencia y la armonía. En especial quiero agradecer a Emiliano Fuentes porque fue un gran apoyo en el proceso final de la tesis.

A la Dra. Isabel Hubard, porque ha sido una gran directora de tesis, profesora y tutora, además de que es una maravillosa persona. Sin ella este trabajo no hubiera sido posible.

A todos los profesores que influyeron de manera indirecta o directa en el camino que tomé en la carrera. En especial quiero agradecer al Dr. Carlos Álvarez Jiménez, porque sus clases de geometría fueron de gran motiva-

---

ción. Al Dr. Javier Bracho, por esas clases de geometría tan maravillosas. Al Dr. Rodolfo San Agustín Chi, que abrió ese portal de la combinatoria aplicada a la geometría. De nuevo, a la Dra. Isabel Hubard, por dar una plática de politopos coloridos en el seminario de Combinatoria, y por esto, conocerla a ella y a su trabajo. Al Dr. Ricardo Strausz (mejor conocido como Dino) por haberme presentado al Dr. Jürgen Bukowski, cuyo artículo es el que exployo en esta tesis, y por haber sido un buen mentor. A Dr. Steve Wilson, porque sin su gran imaginación e inteligencia no estoy segura de que los dibujos de esta tesis fueran a resultar tan bonitos. También quiero agradecer a la “Escuela de Verano en Simetrías de Estructuras Combinatorias” y a la “Escuela de Invierno de Matemáticas Discretas”, porque gracias a éstas he aprendido mucho y he conocido grandes matemáticos.

Finalmente quiero agradecer a la UNAM, porque haber sido mi casa de estudios.

---

# Índice

---

Índice	6
1. Introducción	8
2. Topología de superficies	17
3. Mapas	30
4. Arreglo de pseudolíneas	54
4.1. Conceptos básicos y definiciones . . . . .	55
4.2. Propiedades de los arreglos de pseudolíneas . . . . .	58
5. Asociación de un arreglo de pseudolíneas con el encaje de una gráfica.	68
6. Arreglos de curvas	81
6.1. La combinatoria en un arreglo de curvas . . . . .	83
6.2. Mapas petriales asociados a un arreglo de curvas . . . . .	96
6.3. El caso especial de $K_4$ . . . . .	107
6.4. Arreglos de curvas completos . . . . .	113
6.4.1. Arreglos de curvas completos sobre superficies no-orientables . . . . .	119

6.4.2. Arreglos de curvas completos sobre superficies orientables . . . . .	121
---	-----

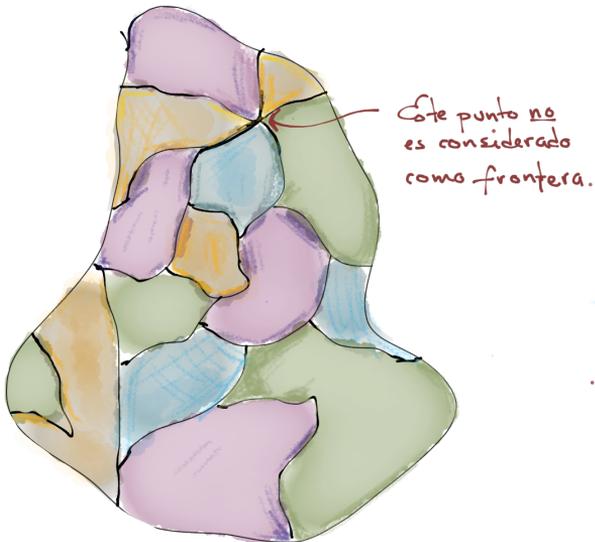
<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>
---------------------	------------

---

## Introducción

---

El indicar el día en el que surgieron las ideas que conllevaron a realizar este trabajo, puede que sea imposible. Si nacieron con Euler, con los griegos, o tal vez, más atrás. Lo que sí se sabe es que las ideas despertaron cuando en 1852 un abogado quiso colorear el mapa de Inglaterra.

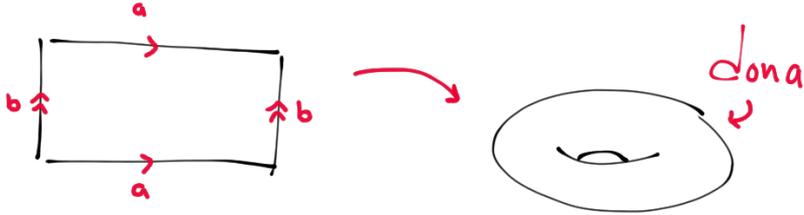


---

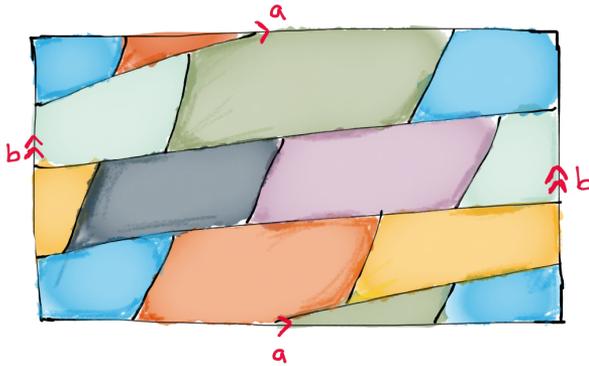
Este abogado, Francis Guthrie se percató que podía colorear el mapa con cuatro colores, y no sólo eso, si no que 3 no eran suficientes. Y con colorear el mapa nos referimos a que dos regiones no pueden tener el mismo color si comparten una línea de frontera. En 1890, P.J. Heawood, publicó un teorema al cual llamó *el teorema de los cuatro colores*. Este teorema dice lo siguiente: cualquier mapa se puede colorear con cuatro colores. Es decir, si imaginamos un mapa geográfico en la esfera, por ejemplo, el de la Antigua Grecia, o si se prefiere uno más moderno, como el de Cuba o el de Europa; y se quiere colorear las regiones del mapa de manera que dos de éstas no tengan el mismo color si comparten una frontera, sólo se necesitan 4 colores. Tal vez se pueda colorear con menos colores, pero lo que sí es cierto, es que nunca tendrás que utilizar 5 y que se puede hacer con 4. Esta proposición, que pudiera parecerle incumbir sólo a los geógrafos y a los que les gustan colorear mapas, no sólo resultó que era un problema matemático, sino que desató una bola de nieve de resultados de combinatoria, geometría, topología y álgebra. Este es un problema topológico, y esto lo que quiere decir, es que no importa cuántas regiones se tengan o de qué forma sean, sino dónde es que vive el mapa. En el caso de la Antigua Grecia, Cuba o Europa, es que son mapas que viven en la esfera. Al final, *el teorema de los cuatro colores* es parte de un problema más grande. Para verlo, sólo se necesita imaginar superficies diferentes a la esfera. Por ejemplo, si imaginamos que en vez de tener un mundo esférico tuviéramos un mundo tipo dona, entonces, un mapa ahí necesita a lo más 7 colores. Fue Heawood quien logró idear un mapa en la dona que no pudiera colorearse con menos de 7

---

colores. Para poder ver esto, basta poder ver a la dona desde otro ángulo.



Imaginemos que tomamos un rectángulo e identificamos los lados paralelos como se muestra en la siguiente figura. Al realizar la identificación, se obtiene la dona, que en realidad es una superficie conocida como *toro*. Así, Heawood expuso un mapa que se muestra en el rectángulo de abajo, que al hacer las identificaciones correspondientes, termina en un mapa en

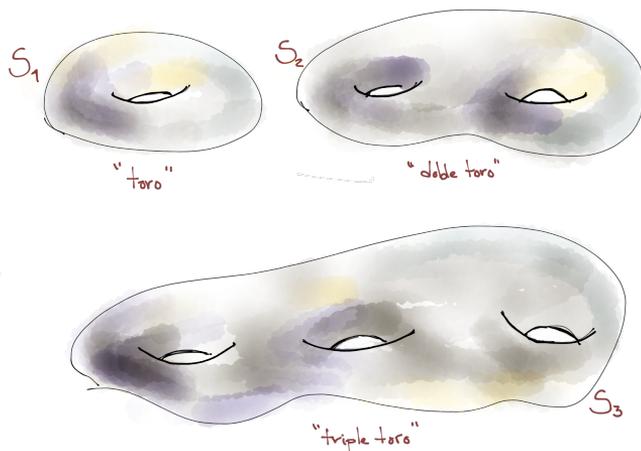


el toro.

Si la superficie fuera un poco más compleja, como “unión” de un número  $n$  de toros, entonces el número de colores que se necesitan es diferente para

---

cada  $n$ . Por ejemplo, la siguiente superficie representa la unión de 2 y 3 toros.



En el desarrollo de la tesis se definirá de manera muy formal todos estos conceptos, pero por el momento tratemos de utilizar la imaginación y la intuición. Este modelo estándar de superficies se denotan como  $S_p$ , donde  $p$  indica el número de toros que se unieron para formar la superficie, también se puede pensar como el número de “hoyos” que tiene la superficie. Entonces  $S_0$  denota la esfera y  $S_1$  denota el toro,  $S_2$  el doble toro, y así sucesivamente.

Si  $S$  es una superficie y se tiene que para todo mapa en  $S$  sus regiones se pueden colorear con  $m$  colores, mientras que existe al menos un mapa que no se pueda colorear con  $m - 1$  colores, entonces decimos que  $m$  es el número cromático de  $S$  y se escribe como  $\chi(S_p) = m$ . Así que el teorema de los cuatro colores formulado por Heawood podría abreviarse así:  $\chi(S_0) = 4$ . Mientras que para el toro se tiene  $\chi(S_1) = 7$ . En el artículo que Heawood

---

publicó, él probó la siguiente desigualdad sobre el número cromático de  $\chi(S_p)$ , para  $p \geq 1$ :

$$\chi(S_p) \leq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil,$$

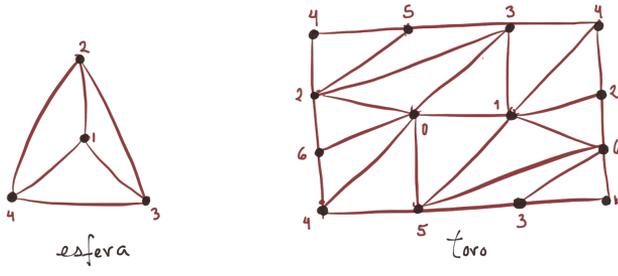
donde  $\lceil x \rceil$  es el mayor entero que no es más grande que  $x$ . Fue hasta 1968, ese año tan polémico, que se demostró que,

$$\chi(S_p) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil.$$

Más o menos por la misma época, se planteó el siguiente problema. Dados dos enteros  $n$  y  $p$ , con  $n \geq 3$  y  $p \geq 0$ , se pueden escoger  $n$  puntos en una superficie  $S_p$  y conectar cada uno de esos puntos con todos los demás con una curva simple (un hilo), sin que las curvas se intersecten. Este planteamiento se llama el “problema del hilo”<sup>1</sup>, y salió en el libro de D. Hilbert y S. Chon-Vossen. Entonces la pregunta es básicamente si la pareja  $(n, p)$  es realizable. Es obvio que si  $(n, p)$  es posible, entonces las parejas  $(n, p+1)$  y  $(n-1, p)$  también lo son. Si se fija a  $n$ , se quiere saber, de todas las parejas  $(n, p)$ , cuál es la  $p$  más pequeña para la que  $(n, p)$  es posible. A la  $p$  más pequeña que cumple esa propiedad se le denota como  $\gamma(n)$ .

---

<sup>1</sup>En inglés, the “Thread Problema”



Del dibujo se puede ver que  $(4, 0)$  y  $(7, 1)$  son parejas posibles, así que  $\gamma(4) = 0$  y  $\gamma(7) \leq 0$ , sin embargo se puede probar que  $\gamma(7) = 1$ . El “problema del hilo” fue resuelto para  $n \geq 3$ , también en 1968:

$$\gamma(n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}$$

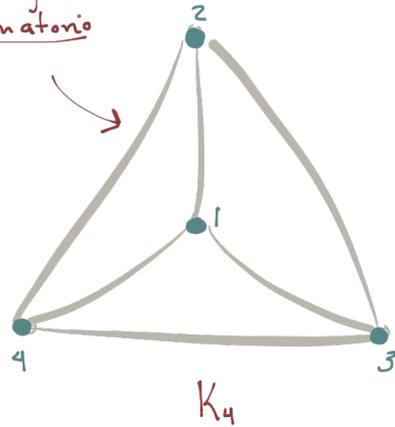
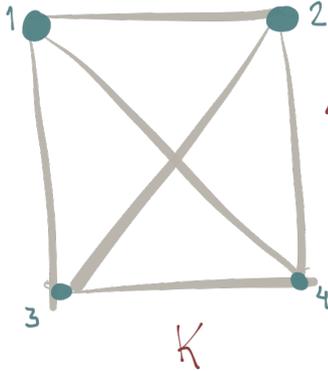
El hecho de que ambos problemas se hayan resuelto al mismo tiempo no es una coincidencia.

El problema del hilo, puede tener otra interpretación. Imaginemos que tenemos el conjunto de los  $n$  puntos y tenemos una regla de incidencia, y ésta es que cualesquiera dos puntos deben estar conectados, es decir, son vértices adyacentes. Entonces podemos pensar a los puntos como vértices y a las conexiones como aristas. A grosso modo, esto es a lo que se conoce como gráfica. Es un objeto combinatorio, al que todavía no le estamos asociando una superficie. Simplemente nos da la información de incidencia. A estos objetos se les llama *gráficas*.

---

En el plano,  
son realizaciones  
geométricas distintos

Definen el  
mismo objeto  
combinatorio



Las gráficas que cumplen que todo vértice es adyacente a otro, se llaman completas, y se denotan como  $K_n$ , donde  $n$  es el número de vértices. Las gráficas pueden tener realizaciones geométricas en las superficies, se pueden dibujar en distintas superficies. Por ejemplo, en el dibujo se muestran dos realizaciones geométricas de  $K_4$  en el plano. Se puede observar que una de las realizaciones tiene que las aristas se intersectan, mientras que la otra realización no tiene aristas que se intersecten. ¿Se va viendo la relación con el problema del hilo? Como otro ejemplo se tiene a  $K_5$ , esta gráfica no se puede dibujar en el plano sin que al menos dos aristas se intersecten, pero en el toro si se puede dibujar de manera que las aristas no se intersecten.

Entonces surge la siguiente definición, el género de una gráfica es la mínima  $p$  para la cual la gráfica  $G$  se pueda dibujar sin autointersecciones de sus aristas en  $S_p$ , y se denota como  $\gamma(G) = p$ . Otra manera de verlo es

---

que si  $\gamma(G) = p$  entonces  $G$  puede dibujarse bien en  $S_p$ , pero no en  $S_{p-1}$ . Por ejemplo,  $\gamma(K_4) = 0$  y  $\gamma(K_5) = 1$ . Se puede demostrar que cuando la gráfica es la completa  $K_n$ , entonces

$$\gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \quad (1)$$

El siguiente teorema vincula el resultado anterior con el teorema de los colores de una mapa.

**Teorema 1.1.** *Si es la ecuación (1) es cierta, entonces*

$$\chi(S_p) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil,$$

para  $p \geq 1$

La prueba de este teorema se puede encontrar en el libro de Ringel [6]. De hecho, en este libro se puede encontrar un amplio panorama sobre el teorema de los cuatro colores.

Por ello, dado  $K_n$ , es importante encontrar la mínima superficie en la que se puede dibujar sin que se crucen sus aristas. Algunas de las representaciones de  $K_n$  tendrán que sus “regiones” serán triángulos y otras no. Por ejemplo  $K_4$  en la esfera, está formada de puros triángulos. Cuando sucede esto, se dice que el encaje de  $K_n$  es triangular. Y esto sucede cuando  $n$  es congruente con 0, 3 y 7, módulo 12. Entonces ya se sabía qué gráficas completas tenían una realización geométrica de manera que las regiones fueran triangulares. En 1999, Bracho y Strausz [3] demostraron que para  $K_9$  había 3 encajes triangulares no isomorfos en la misma superficie, donde

---

por no isomorfo se refiere a que no hay una función biyectiva de los vértices en los vértices que preserve adyacencias.

Así que la siguiente pregunta a tratar es: dada  $K_n$ , de existir un encaje triangular, ¿cuántos hay? Jürgen Bukowski y Tomas Pisanski [2] publicaron un artículo en que establecen un puente entre los encajes de gráficas y otros objetos combinatorios, para trasladar la pregunta a otro campo, que son los arreglos de curvas. Justo ese artículo es la motivación de esta tesis.

<<Un poco más avanzado que el caos,  
tal vez en el primer o segundo día de la creación,  
tengo un mundo de ideas que chocan,  
se entrecruzan y a veces,  
se organizan. >>

*Carta de Ernesto Guevara  
a Charles Bettelheim.  
24 de octubre 1964*

## 2

---

## Topología de superficies

---

La palabra topología viene del griego  $\tau \acute{o} \pi \omicron \varsigma$ , lugar, y  $\lambda \acute{o} \gamma \omicron \varsigma$ , estudio; se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas. La topología deja a un lado nociones cuantitativas como longitud, ángulo, área y volumen, propias de la geometría clásica y se ocupa de las nociones cualitativas como, por ejemplo, si tiene agujeros o no, borde, o si se puede partir en componentes conexas. En esta sección se dará la definición de

---

superficie, y el trabajo ahondará en aquellas que son compactas. Antes de entrar en el detalle de la formalidad, se define el disco unitario abierto como  $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Una 2-variedad es un espacio topológico, Hausdorff y segundo numerable, en el cual cada punto tiene una vecindad homeomorfa al disco unitario en  $\mathbb{R}^2$ . Ejemplos muy conocidos de 2-variedades son el plano y la esfera.

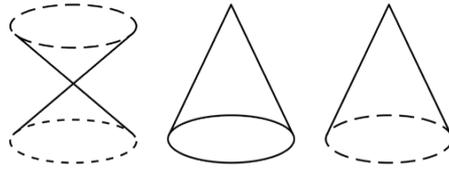


Figura 2.1: Sólo la última figura es un ejemplo de 2-variedad.

Una 2-variedad es compacta si para toda familia infinita de conjuntos abiertos que la cubre existe una subfamilia finita de abiertos que la cubre. Cuando se pide que una 2-variedad sea compacta se excluyen 2-variedades como el plano y la 2-variedad de la figura anterior. Se dice que una 2-variedad es conexa si dados cualesquiera dos puntos en la 2-variedad existe un camino en la 2-variedad que los une. Cuando se pide que una 2-variedad sea conexa se excluyen casos como que dos esferas o dos semiplanos sean considerados como una sola cosa.

**Definición 2.1.** Una superficie es una 2-variedad conexa y compacta.

En la siguiente figura se muestran ejemplos de superficies:

Una superficie  $S$  es orientable, si se puede colocar un círculo con una orientación fija en  $S$  de manera que, no importe cómo recorra el círculo la superficie, preserve un mismo sentido de rotación en el momento en que se

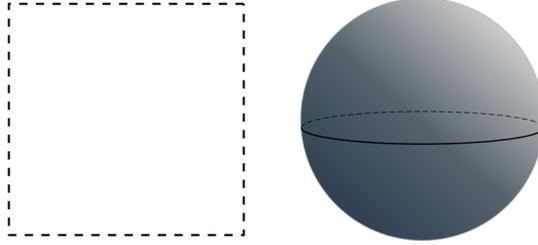


Figura 2.2: La primera figura representa al plano euclidiano que es una 2-variedad no compacta. La segunda figura representa a la esfera que es una 2-variedad compacta.

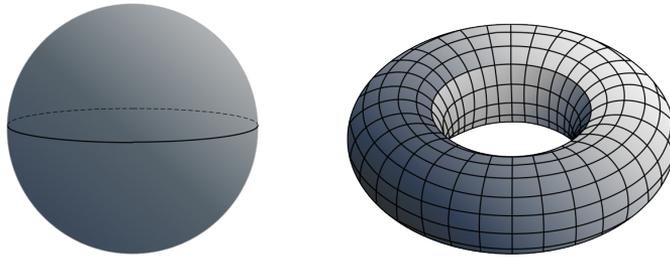


Figura 2.3: Ejemplos de superficies

regrese al punto en el que empezó el recorrido. En caso contrario se dice que  $S$  es no-orientable.

Hay objetos muy conocidos que no son superficies que ejemplifican la orientabilidad y la no-orientabilidad, que son el aro y la banda de Möbius, respectivamente. En las figuras 2.5 y 2.6 se muestra como se construyen estos objetos. Cabe recalcar que ni la banda de Möbius ni el aro son superficies puesto que tienen frontera y ahí, los puntos no tienen una vecindad homeomorfa al disco. Sin embargo son un claro ejemplo sobre la orientabilidad y no-orientabilidad.

En otras palabras, una superficie es orientable si se le puede asignar

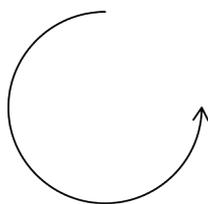


Figura 2.4: Una orientación

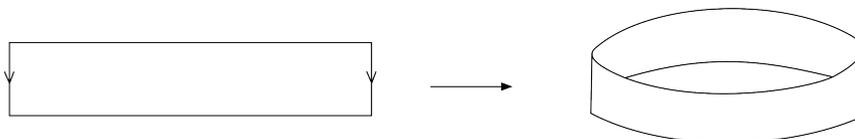


Figura 2.5: El aro

una orientación consistente y no-orientable si no. Debido a que la banda de Möbius es un objeto no-orientable, una superficie es orientable si no contiene una banda de Möbius, y es no-orientable en caso contrario.

Una superficie orientable puede ser formada a partir añadiéndole a una esfera un número finito de asas. Por ejemplo, para formar un toro se le añade sólo un asa, como se muestra en la figura 2.8.

Esta operación es equivalente a la suma conexa de una esfera con un toro. La suma conexa de dos superficies (sean orientables o no-orientables) consiste en quitarle un disco a las dos superficies y luego pegarlas en la frontera de ese disco. (Ver figura 2.9 para un ejemplo). El género de una superficie orientable corresponde al número de toros que se le sumaron a la esfera. A una superficie orientable con género  $n$  se le denotará como  $M_n$ . La esfera es la superficie  $S_0$ .

Una superficie no-orientable está formada a partir de una esfera añ-

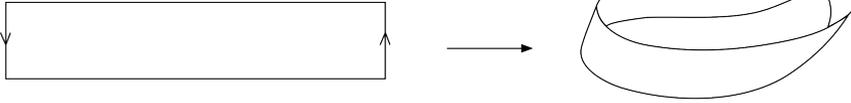


Figura 2.6: La banda de Möbius

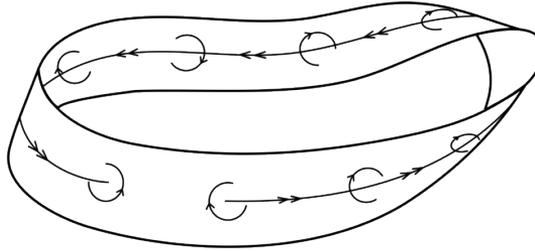


Figura 2.7: La banda de Möbius no tiene un orientación consistente.

diéndole un número finito de “cross-caps”. Un “cross-cap” está representado en la figura 2.10 y en la figura 2.11 se tiene una representación de cómo se vería identificando las aristas.

De igual manera que en el caso de superficies orientables, la operación de añadirle cross-caps a la esfera es equivalente a la suma conexa de una esfera con planos proyectivos. En la figura 2.12 se muestra el ejemplo de la suma conexa de una esfera con un plano proyectivo. El género de una superficie no-orientable corresponde al número de cross-caps que se le sumaron a la esfera. A una superficie no-orientable con género  $n$  se le denotará como  $N_n$ . El plano proyectivo es la superficie  $N_1$

La suma de una esfera con dos cross-caps da una superficie no-orientable de género 2 llamada la botella de Klein,  $N_2$ , representada en la figura 2.13. Así como el cross-cap, la botella de Klein no puede puede representarse en el espacio tridimensional.

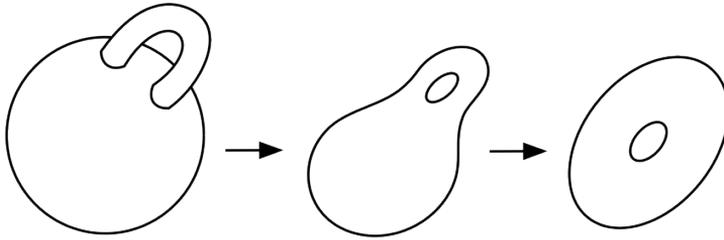


Figura 2.8: Si a una esfera se le suma un asa, se obtiene un toro.

Las superficies se pueden representar como polígonos con sus aristas propiamente identificadas. Esta manera "poligonal" de representar una superficie se puede formalizar por medio de una serie de letras que representan las aristas. Si a una esfera hecha de un material flexible se le hace un corte a lo largo de un arco con extremos  $P$  y  $Q$  y se separan, queda un polígono curvo de dos lados con aristas identificadas como se muestra en la figura 2.14. De manera conversas, si se tiene el bígono con esas identificaciones, al pegar las aristas correspondientes se obtiene la esfera. En otras palabras, la esfera se puede obtener de un polígono de dos lados.

Si le damos un sentido de orientación al perímetro del polígono se le puede asignar a cada arista del bígono un signo  $+$  o  $-$  dependiendo si la flecha de la arista tiene la misma orientación del polígono o no. Y de esta manera se puede representar simbólicamente la esfera como  $a^+a^-$ , como se muestra en la figura 2.15.

El toro (ver figura 2.16) se puede representar como un polígono de cuatro lados. Si se nombran las aristas con las letras del alfabeto y si se le da un sentido de orientación al perímetro, es este caso en contra de las manecillas del reloj, el toro queda representado por las letras  $a^+b^+a^-b^-$ .

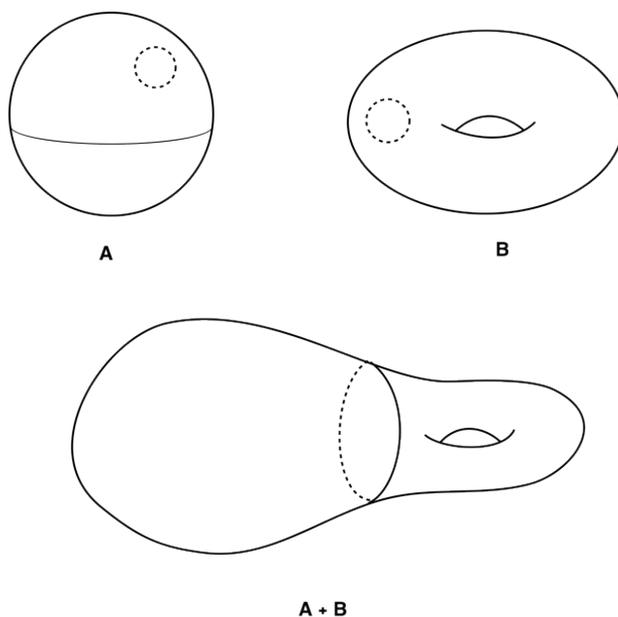


Figura 2.9: Suma conexas de superficies orientables.

Si se empieza con un polígono con un número par de lados tal que las aristas están identificadas por pares, como el de la figura 2.17, se puede reconstruir la superficie a la que está asociado. En este caso, el polígono tiene representación simbólica  $a^+b^+a^-b^-c^+d^+c^-d^-$ . Al pegar las aristas con las identificaciones respectivas queda que el polígono es un *doble toro*.

Si se generaliza un paso más la representación simbólica del toro y el doble toro se tiene  $a^+b^+a^-b^-c^+d^+c^-d^-c^+f^+c^-f^-$ , lo cual representa al triple toro.

De manera más general se puede representar el toro con  $p$  hoyos em-

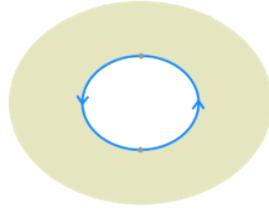


Figura 2.10: Un cross-cap

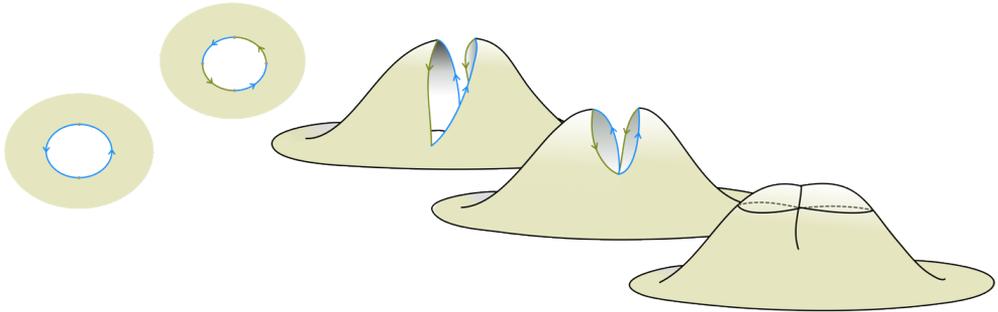


Figura 2.11: En este dibujo se puede observar que hay intersecciones del cross-cap consigo mismo. Pero estas intersecciones son aparentes, puesto que un cross-cap no cabe en un espacio tridimensional. Puede ser representado sin intersecciones en un espacio de cuatro dimensiones.

pezando con un polígono de  $4p$  lados y con la siguiente palabra

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

De hecho, se tiene un resultado más fuerte que dice que toda superficie orientable es de esta manera. (Para ver la demostración ver Fréchet y Fan [5]).

Las superficies no-orientables también se pueden representar a través de una palabra. Si se toma un bígono con las identificaciones como se

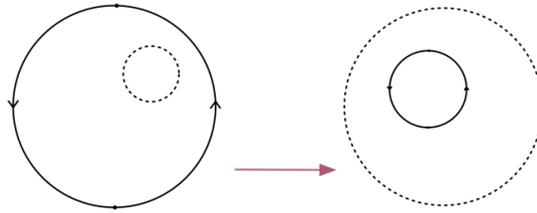


Figura 2.12: Aquí se puede observar que si a un plano proyectivo se le quita un disco queda un cross-cap. Se “pega” la línea punteada de  $A$  con la línea punteada de  $B$ .

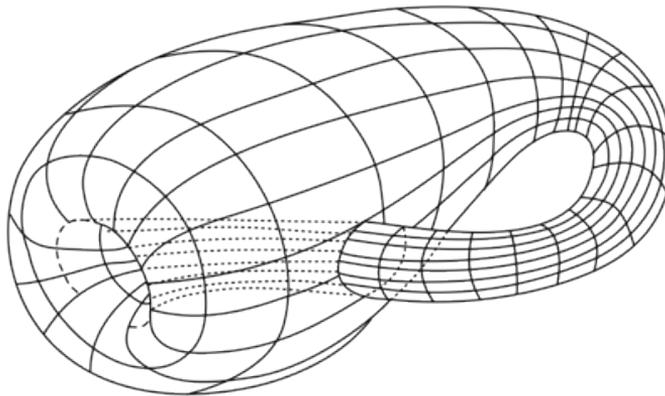


Figura 2.13: Botella de Klein

muestra la figura 2.19, tenemos la palabra  $a^+a^+$ . Esta superficie se conoce como el plano proyectivo y de hecho es la suma conexas de un cross-cap con una esfera como se muestra en la figura 2.12

Ahora si se considera el polígono  $a^+a^+b^+b^+$  y se hacen las identificaciones se tiene la botella de Klein.

Al igual que en el caso de las superficies orientables se puede generalizar la palabra a

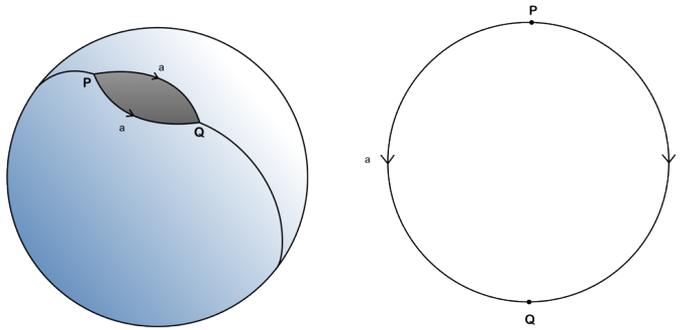


Figura 2.14: La esfera vista como un bígono con aristas propiamente identificadas

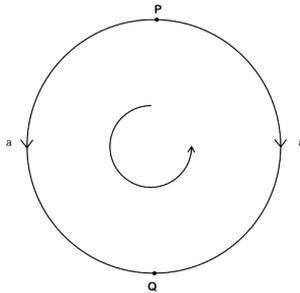


Figura 2.15:  $a^+a^-$

$$a_1^+ a_1^+ a_2^+ a_2^+ \dots a_q^+ a_q^+,$$

y se obtiene una superficie no-orientable con  $q$  cross-caps.

Toda superficie, orientable o no, puede ser representada por un polígono (ver Fréchet and Fan, [5] p.63). Esto queda plasmado en el siguiente teorema:

**Teorema 2.1** (Fréchet and Fan). *Toda superficie está asociada con un*

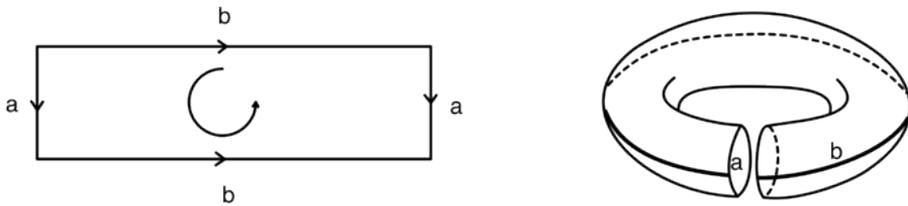


Figura 2.16: El toro, que tiene representación simbólica  $a^+b^+a^-b^-$ .

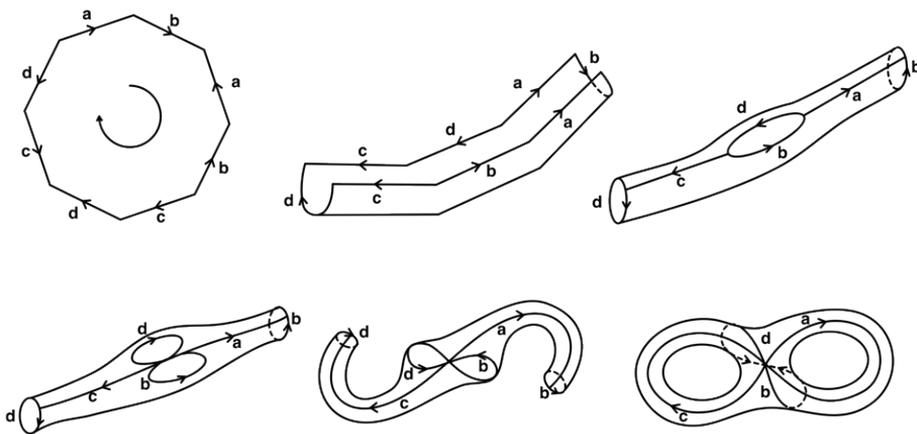


Figura 2.17: El doble toro, que viene de la suma conexa de la esfera con dos toros.

*polígono cuya representación tiene una de la siguientes formas:*

1.  $aa^{-1}$
2.  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$
3.  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_q a_q$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$

La forma (1) corresponde a la esfera, (2) corresponde a la esfera con  $p$  toros ( $M_p$ ), y (3) representa a la esfera con  $q$  cross-caps. ( $N_q$ ). Las formas

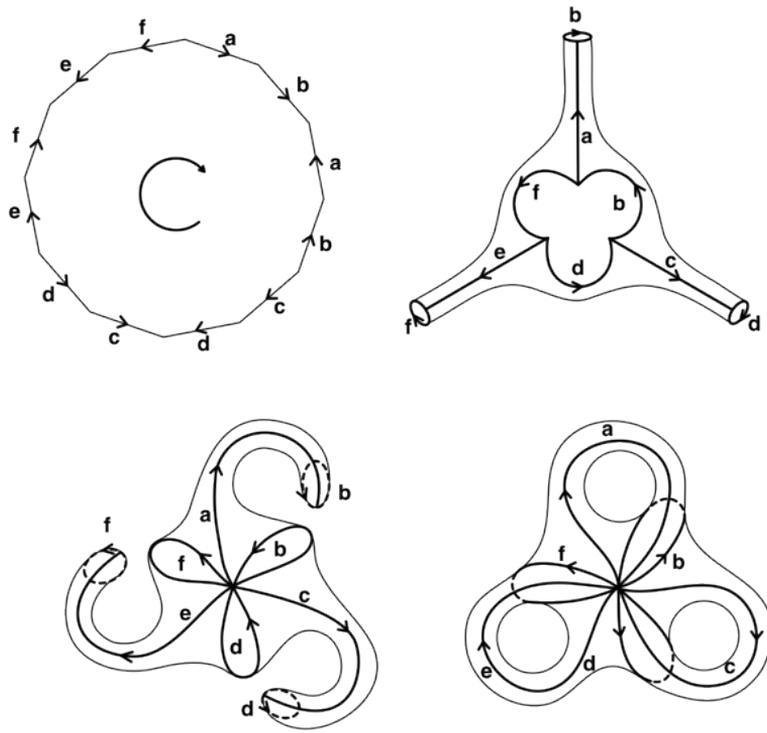


Figura 2.18: El triple toro, que viene de la suma conexa de la esfera con tres toros.

(1) y (2) representan 2-variedades orientables, mientras que (3) representa a las no-orientables.

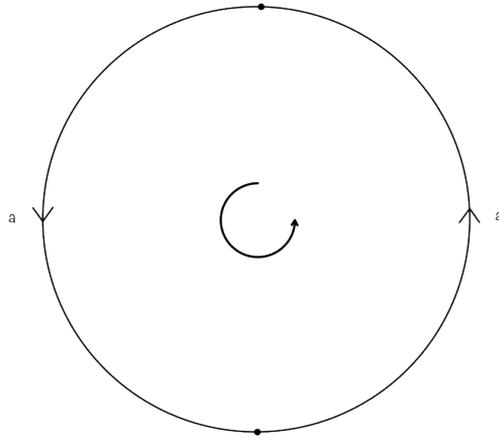


Figura 2.19: El plano proyectivo, que tiene representación  $a^+a^+$

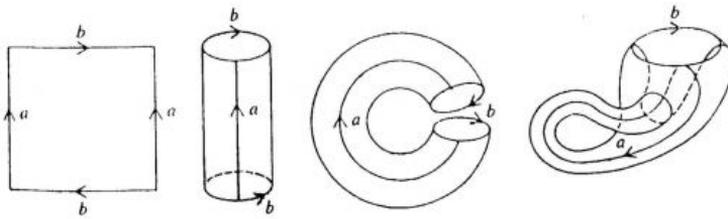


Figura 2.20: La botella de Klein, que viene de la suma conexa de una esfera con dos planos proyectivos y su representación gráfica es  $a^+a^+b^+b^+$ .

<<We are told to remember the idea, not the man,  
 because a man can fail. He can be caught.  
 He can be killed and forgotten. But four hundred  
 years later an idea can still change the world. >>

*V for Vendetta*

<<I do not fear. I do not fear to be alone  
or to be spurned for another  
or to leave whatever I have to leave.  
And I am not afraid to make a mistake,  
even a great mistake, a lifelong mistake,  
and perhaps as long as eternity too. >>

*James Joyce*

*A Portrait of the Artist as a Young Man*

### 3

---

## Mapas

---

En esta sección se introducirá el concepto de *mapa*, que la misma palabra le da al lector una idea bastante aproximada a lo que se definirá en el transcurso de la sección. Pero para dar la definición formal primero se verá el concepto de gráfica. La teoría de gráficas es una parte de las matemáticas discretas que permite modelar sistemas que tengan una relación binaria entre ciertos objetos; por lo que tiene aplicaciones muy generales, que van de la combinatoria, la topología, el análisis numérico, el álgebra. En este caso, el enfoque que interesa es el de la topología.

---

Una gráfica  $G$  es una pareja ordenada  $G = (V(G), E(G))$  donde  $V(G)$  y  $E(G)$  son conjuntos finitos y ajenos, y cuyos elementos se llaman vértices y aristas respectivamente, junto con una función de incidencia  $\psi_G$  que asocia a cada arista de  $G$  una pareja no ordenada de vértices. Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices tales que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , se dice que  $e$  une a  $u$  con  $v$  o que  $u$  y  $v$  son adyacentes; y los vértices  $u$  y  $v$  son llamados los extremos de  $e$ . A continuación se muestran dos ejemplos de gráficas para ilustrar la definición.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $H_1 = (V(H_1), E(H_1))$ , con  $V(H_1) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $E(H_1) = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , donde  $\psi_{H_1}$  es

$$\begin{aligned} \psi_{H_1}(e_0) &= \{v_0, v_1\} & \psi_{H_1}(e_1) &= \{v_1, v_2\} & \psi_{H_1}(e_2) &= \{v_1, v_3\} \\ \psi_{H_1}(e_4) &= \{v_1, v_4\} & \psi_{H_1}(e_5) &= \{v_2, v_4\} & \psi_{H_1}(e_3) &= \{v_2, v_3\} \\ \psi_{H_1}(e_6) &= \{v_3, v_4\} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.2.** Sea  $H_2 = (V(H_2), E(H_2))$ , con  $V(H_2) = \{a, b, c, d, e, f\}$  y  $E(H_2) = \{r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ , donde  $\psi_{H_2}$  es

$$\begin{aligned} \psi_{H_2}(r) &= \{a, a\} & \psi_{H_2}(s) &= \{a, b\} & \psi_{H_2}(t) &= \{a, c\} & \psi_{H_2}(v) &= \{d, c\} \\ \psi_{H_2}(w) &= \{d, f\} & \psi_{H_2}(x) &= \{b, g\} & \psi_{H_2}(y) &= \{f, g\} & \psi_{H_2}(z) &= \{f, g\} \\ \psi_{H_2}(u) &= \{b, d\} \end{aligned}$$

Las gráficas también tienen su nombre porque se pueden representar gráficamente. Es decir, se puede dibujar una gráfica en el plano de la siguiente manera. A cada vértice se le asociará un punto y a cada arista una línea uniendo los puntos que representarán sus extremos. En la figura 3.1 se muestran representaciones gráficas de  $H_1$  y  $H_2$ .

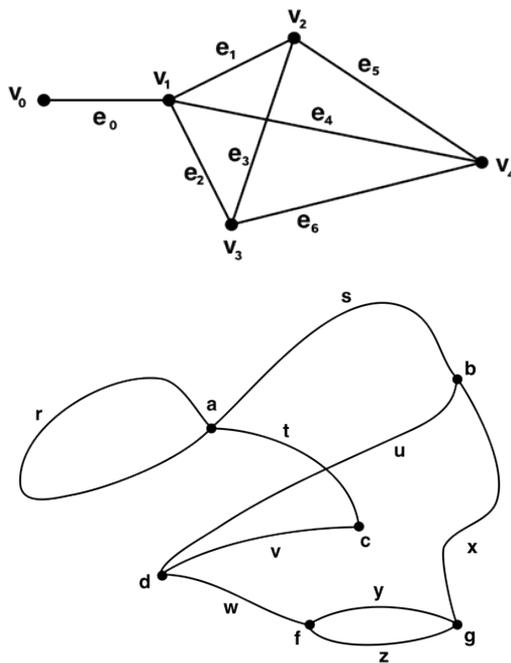


Figura 3.1: Dibujos de las gráficas  $H_1$  y  $H_2$ .

Se dice que una gráfica tiene un *lazo* si una arista tiene vértices extremos idénticos (como la arista  $r$  de la figura 3.1), y se dice que tiene *aristas múltiples* si dos o más aristas tienen los mismos vértices como extremos (como las aristas  $y$  y  $z$  de la figura 3.1). Una gráfica es simple si no tiene bucles ni aristas múltiples.

No hay una sola manera de dibujar una gráfica. La posición de los puntos que representan a los vértices y las líneas que representan las aristas pueden variar, sin embargo esto no es de gran relevancia. Incluso en la figura 3.1, la gráfica  $H_2$  tiene curvas que representan a las aristas. Lo que es de gran importancia es que el diagrama represente la incidencia mar-

---

cada por la función  $\psi$ . Por ejemplo, consideremos la siguiente gráfica. Sea  $H_3 = (V(H_3), E(H_3))$ , con  $V(H_3) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E(H_3) = \{a, b, c, d, e, f\}$ , donde  $\psi_{H_3}$  tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$\begin{array}{lll} \psi_{H_3}(a) = \{1, 2\} & \psi_{H_3}(b) = \{1, 3\} & \psi_{H_3}(c) = \{1, 4\} \\ \psi_{H_2}(d) = \{2, 3\} & \psi_{H_2}(e) = \{2, 4\} & \psi_{H_2}(f) = \{3, 4\} \end{array}$$

Los siguientes dos dibujos representan a la gráfica  $H_3$ .

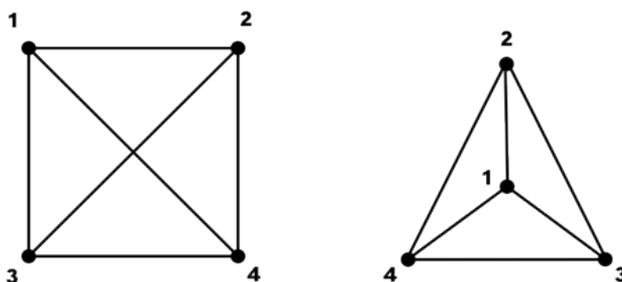


Figura 3.2: Dos representaciones de la misma gráfica. Se puede ver que en el primer dibujo las aristas sólo se intersectan en sus vértices; mientras que en el segundo dibujo, las aristas  $d$  y  $f$  se intersectan, pero ese punto no es un elemento de la gráfica.

Una gráfica con  $n$  vértices que tenga la propiedad de que cualesquiera dos vértices son adyacentes, se le denomina como la gráfica completa de  $n$  vértices ( $K_n$ ). Esta gráfica aparecerá en el desarrollo de este trabajo. En la figura 3.2 se tiene el ejemplo de la gráfica completa con 4 vértices.

Hasta ahora se han visto gráficas representadas de manera gráfica en el plano. Una de las ramas que se estudia mucho en la teoría de gráficas es el dibujo de las gráficas mismas. Sobre todo se ahonda en saber cuándo una gráfica se puede dibujar en el plano de manera que sus aristas no

---

se intersecten. En el ejemplo de la figura 3.2 se tienen dos dibujos de la misma gráfica. En el primer dibujo de la figura 3.2 las aristas se intersectan, mientras que en el segundo no; lo cual implica que esta gráfica se puede dibujar “bien” en el plano, donde por dibujar “bien” se entiende a que existe un dibujo que no admite aristas que se intersecten en puntos que no sean vértices de la gráfica misma.

Hay muchos ejemplos de gráficas que no se pueden dibujar “bien” en el plano, como la de la figura 3.3. Sin embargo si se puede dibujar “bien” en otras superficies, como en el toro. Para la demostración del enunciado anterior y para ahondar más sobre las gráficas que se pueden dibujar “bien” en el plano ver Bondy [1]. En resumen, puede que una gráfica no se pueda dibujar “bien” en el plano, pero hay otros espacios en los que sí, y es ahí donde entran las superficies que se estudiaron en la sección anterior. Después de toda esta introducción se puede entrar con toda formalidad a las definiciones.

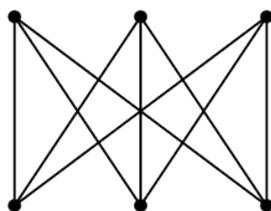


Figura 3.3: Una gráfica que no se puede dibujar “bien” en el plano pero sí en el toro.

Una gráfica se dice que está encajada en una superficie  $S$  si está “dibujada” en  $S$  de tal manera que sus aristas se intersectan sólo en sus vértices

---

comunes. Es decir, si existe una función que va de la gráfica  $G$  a la superficie  $S$  tal que los vértices de  $G$  están representados por puntos en  $S$  y las aristas por arcos en  $S$  homeomorfos al intervalo  $[0, 1]$ , tal que se cumple que,

1. Los puntos finales del arco asociado a una arista, son puntos asociados a vértices de  $G$ .
2. Ningún arco contiene otros vértices que no sean los extremos.
3. Dos arcos en  $S$  nunca se intersectan en un punto interior de los arcos.

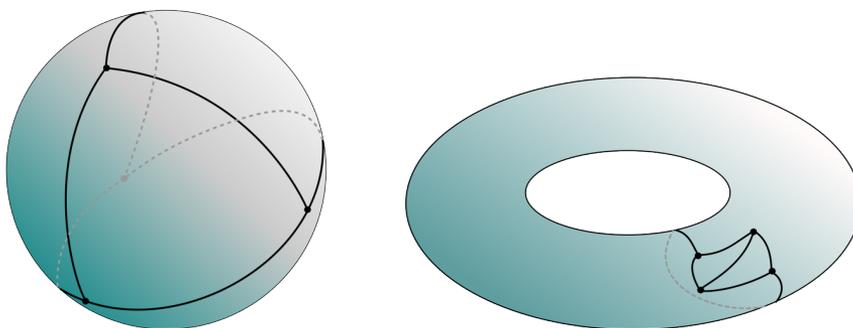


Figura 3.4: La gráfica  $K_4$  está encajada tanto en la esfera como en el toro. El encaje de la esfera es 2-celular, mientras que el del toro no lo es.

Dado un encaje de una gráfica  $G$  en una superficie  $S$ , las componentes de  $S - G$  se llaman las regiones o caras del encaje. Una región de un encaje de una gráfica en una superficie se dice que es una 2-célula si es homeomorfa al disco unitario abierto. Si todas las regiones del encaje son 2-células entonces se dice que el encaje en la superficie es 2-celular.

---

Al conjunto de vértices, aristas y caras del encaje celular de una gráfica en una superficie  $S$  se llama complejo celular. A los puntos del encaje se les denota como vértices  $V(M)$ , a los arcos como aristas  $E(M)$  y a las regiones o caras como  $F(M)$ .

**Definición 3.1.** Un mapa es un encaje 2-celular de una gráfica en una superficie  $S$ .

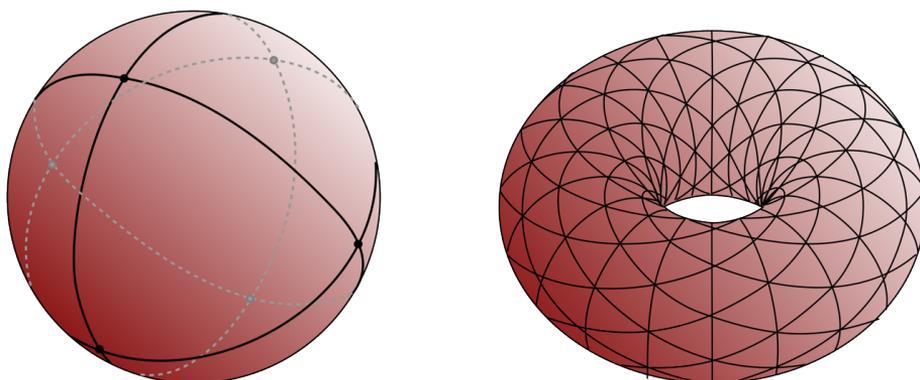


Figura 3.5: Ejemplos de mapas en diferentes superficies. El primero es un mapa en la esfera y el segundo un mapa en el toro.

Recordando lo que se vio en la sección 2, se tiene que una superficie es orientable si se le puede dar una orientación consistente, es decir, si se puede dibujar una circunferencia en cada punto de la superficie de tal manera que dado un sentido cíclico fijo (a favor o contrario a las manecillas del reloj) cualesquiera dos circunferencias tienen el mismo sentido. Dado un mapa en una superficie orientable con una orientación fija, se le puede inducir esa orientación a cada región y por cada región se le asocia esa orientación a cada arista que pertenezca a esa región. En la figura 3.6 se

---

exhibe un ejemplo con el tetraedro, que es un mapa en la esfera. Debido que cada arista se encuentra en dos regiones recibe dos orientaciones. Las orientaciones de dos caras que comparten la misma arista se dice que son compatibles si inducen dos orientaciones opuestas a la arista, y si para cualesquiera dos regiones que compartan arista esto sucede se dice que la orientación es compatible. En la figura 3.6 se ve que cada arista del tetraedro recibe dos orientaciones opuestas. Y viceversa, dado un mapa en una superficie orientable, existe una elección de orientaciones de las regiones tal que cada arista recibe exactamente dos orientaciones opuestas. Si la superficie es no-orientable, para cualquier mapa se tiene que no existe ninguna orientación compatible. En la sección 2, se vio que una superficie es no-orientable si contiene una banda de Möbius, por lo que falta ver que la banda de Möbius no tiene ninguna orientación compatible, no importando la subdivisión poligonal que se se le haga. Ver figura 3.7.

Un mapa también se puede ver como un poliedro encajado en una superficie. Por ejemplo, en la figura 3.5, el encaje de  $K_4$  en la esfera es la proyección del tetraedro en la esfera. De ahí que hay ciertos mapas que tienen una estrecha relación con los poliedros, pues resultan de proyecciones de poliedro en superficies. Ludwig Schläfli <sup>2</sup> desarrolló una notación para clasificar a los poliedros regulares que también puede ser usada para los mapas que guarden la relación geométrica del poliedro. Se dirá que un es de tipo  $\{p, q\}$  si tiene caras de  $p$  lados y hay  $q$  de ellas alrededor de cada vértice del poliedro. Por ejemplo, el cubo tendría como símbolo de Schläfli

---

<sup>2</sup>Fue un geómetra y estudioso del análisis de variable compleja suizo, una de las figuras clave en el desarrollo de la noción de espacios de dimensiones mayores que 3.

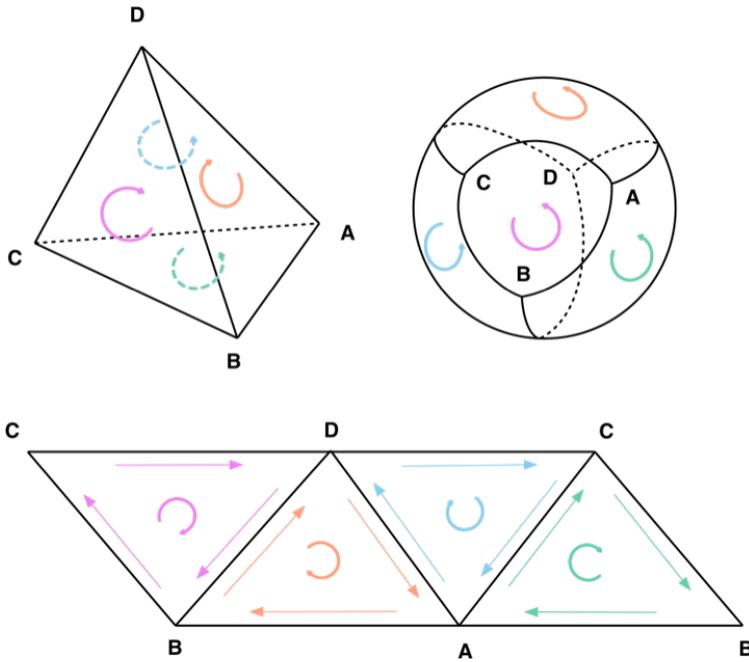


Figura 3.6: Orientabilidad por aristas

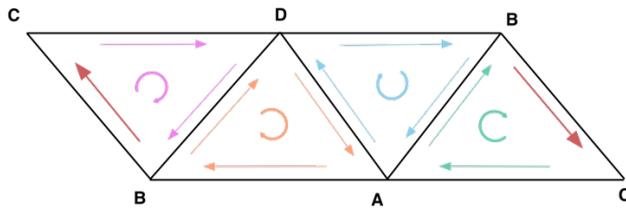


Figura 3.7: La banda de Möbius no tiene una orientación compatible.

---

$\{4, 3\}$ , pues todas sus caras son cuadrados y en cada vértice hay tres de ellos.

En 1750 Leonhard Euler <sup>3</sup> encontró una relación entre el número de caras, aristas y vértices de los mapas que se pueden dibujar en la esfera. Demostró que no importa cómo fuera el mapa se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos; es decir,  $V - E + F = 2$ . El estudio y la generalización (en otras superficies) de esta fórmula, realizada específicamente por Cauchy <sup>4</sup> y L'Huilier, <sup>5</sup> es el origen del estudio de la topología. Por ello, dado un mapa, el número  $V - E + F$  adquirió gran importancia y por ello la siguiente definición:

**Definición 3.2.** *La característica de Euler de un mapa  $M$  en una superficie  $S$  es el número  $V - E + F$  y se denota como  $\chi(M)$ .*

Uno de los teoremas más importantes con respecto a la característica de Euler es que se menciona a continuación, que habla sobre la relación que hay entre el número de caras, aristas y vértices de los mapas sobre cualquier superficie.

---

<sup>3</sup>Leonhard Euler fue un físico y matemático suizo. Hizo importantes descubrimientos en cálculo infinitesimal y teoría de gráficas. Introdujo mucho de la notación matemática moderna, en particular para el análisis, como la noción de función. También es reconocido por sus trabajos en mecánica, dinámica de fluidos, óptica y astronomía. Euler es considerado como uno de los matemáticos más importantes y trascendentes del siglo XVIII.

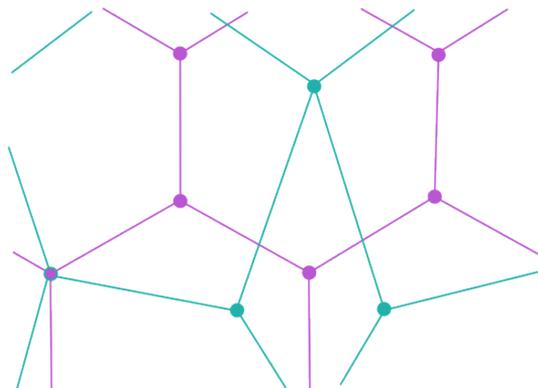
<sup>4</sup>Augustin Louis Cauchy fue un matemático francés. Nació el 21 de agosto de 1789 en París. Fue uno de los pioneros del análisis. Demostró varios resultados importantes en análisis complejo e inició el estudio de grupos de permutaciones en álgebra abstracta.

<sup>5</sup>Matemático suizo, conocido por sus investigaciones sobre el concepto de límite matemático (fue quien introdujo la notación *lim*). Trabajo en el campo del análisis matemático y la generalización de la fórmula de Euler relativa a las gráficas planas y a los poliedros regulares.

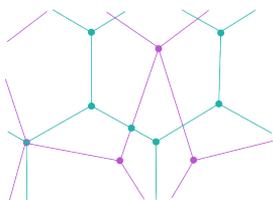
---

**Teorema 3.1.** *Para cualesquiera dos mapas en una misma superficie se tiene que  $V - A + F$  es un número invariante.*

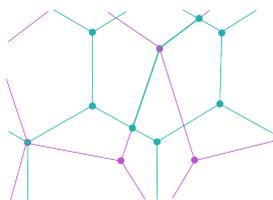
*Demostración.* Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos mapas en una misma superficie. Sea  $M$  el mapa obtenido por sobreponer  $M_1$  y  $M_2$  de tal manera que dos aristas tengan a lo más un número finito de intersecciones al momento de sobreponerlos. Así como se muestra en la siguiente figura.



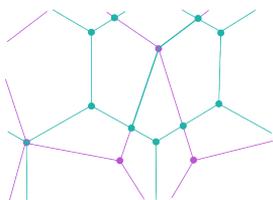
Si se dibuja el mapa  $M_1$  de color morado y el mapa  $M_2$  de color verde, se puede ver de manera gradual que  $V - A + F$  no cambia. Para ello se considerarán dos operaciones, el de agregar vértices y aristas verdes con la finalidad de crear un sólo mapa y ver que la característica de Euler no cambia. La idea de la demostración es bastante sencilla, al fusionar los dos mapas se irán anexando vértices, aristas y caras del mapa morado al mapa verde. Cuando se anexa un vértice morado, se crea una arista más, por lo que  $V - A + F$  no cambia. De igual manera cuando se anexa una arista se crea una cara y  $V - A + F$  no cambia.



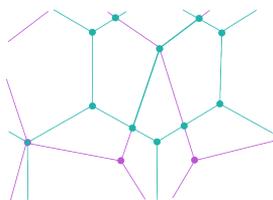
En esta figura se muestran los dos mapas superpuestos.



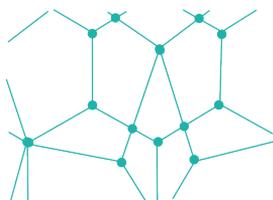
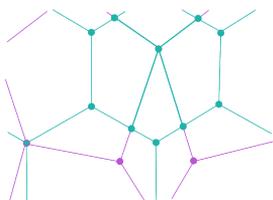
Si se le inserta una arista, entonces se crea una cara más dejando que  $V - E + F$  sólo crezca por  $0 - 1 + 1 = 0$



Si se le inserta un vértice, entonces se crea una arista más dejando que  $V - E + F$  sólo crezca por  $1 - 1 + 0 = 0$



Se repite la operación y  $V - A + F$  queda invariante



Quedando así demostrado el teorema.

□

---

En lo siguiente se verá una nueva definición que es esencial para el desarrollo de este trabajo. Dado un mapa  $M$ , consideremos un camino cerrado de sus aristas (una sucesión ordenada de sus aristas), tal que cumpla que cualesquiera dos aristas consecutivas están en una cara de  $M$  pero tres consecutivas ya no (incluyendo la primera y la última). A un camino que cumpla esta propiedad se le llama camino de Petrie<sup>6</sup> y se le denotará como  $PP$ , por su nombre en inglés Petrie Paths. Un mapa se puede descomponer en caminos de Petrie. En la figura 3.8, se muestra como el cubo tiene exactamente 4 caminos de Petrie. Cuando un mapa del tipo  $\{p, q\}$  y tenga  $r'$  caminos de Petrie, se dirá que es de la forma  $\{p, q\}^{r'}$ . Cuando todos los caminos del mapa tengan la misma longitud, lo cual no siempre sucede, se dirá que es de la forma  $\{p, q\}_r$ . Y si se quiere tener ambos datos en la notación se denotará así:  $\{p, q\}_r^{r'}$

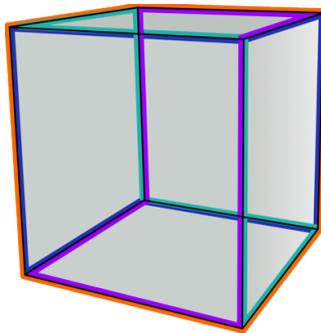


Figura 3.8: Los 4 caminos de Petrie del cubo.

---

<sup>6</sup>John Flinders Petrie (1907 - 1972) fue un matemático inglés, quien demostró una notable aptitud geométrica en su juventud. Cuando era un estudiante, conoció al gran geómetra Donald Coxeter, comenzando una amistad de toda la vida. Profundizaron en el área de los poliedros.

---

Ahora se definirán ciertos operadores que transformarán un mapa en otro. Estos operadores se basaran en los caminos de Petrie antes vistos y conceptos básicos. Se analizará cada operador, para determinar sus propiedades, pues será parte de la base de esta tesis.

### Dual

Sea  $M$  un mapa, el dual de  $M$ ,  $Du(M)$ , es un a mapa que está en la misma superficie que  $M$ . Se obtiene del mapa original de la siguiente manera: los vértices de  $Du(M)$  están identificados uno a uno por cada región de  $M$  y dos vértices en  $Du(M)$  serán adyacentes si las regiones asociadas a esos vértices compartían una arista en  $M$ . Se puede observar que las regiones de  $Du(M)$  serán los vértices de  $M$  y además la longitud de cada región de  $Du(M)$  corresponde al grado del vértice en  $M$ .

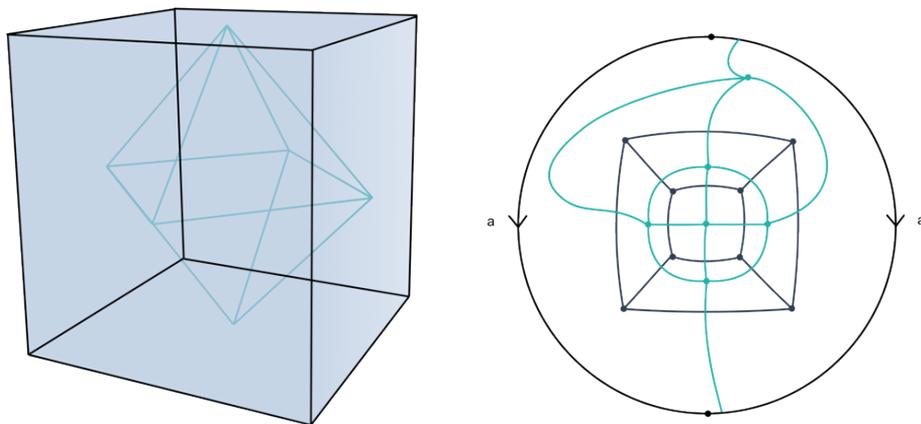


Figura 3.9: El mapa del cubo en la esfera y su dual, que es el octaedro.

Se puede notar que cada arista de  $Du(M)$  está asociada con una arista de  $M$ , pues la arista en  $M$  que incide en dos regiones se convierte en la

---

arista que une a dos vértices en  $D(M)$ . Por lo tanto es una relación uno a uno. Además, mientras una región de  $M$  es un vértice en  $Du(M)$ , el converso también es cierto, por lo que  $Du(Du(M)) = M$ .

### 3.1: Mapa dual

Mapa	Vértices	Artistas	Caras	Petrie P.
$M$	V	A	F	PP
$Du(M)$	F	A	V	PP

Esta operación deja los caminos de Petrie invariantes, es decir, que si un camino es de Petrie en  $M$ , también lo será en  $Du(M)$ . Para ver esto sean  $e_1, e_2$  y  $e_3$  tres aristas consecutivas en un camino de Petrie de  $M$ , como se muestra en la figura 3.10. Se tiene que  $e_1$  y  $e_2$  inciden en un vértice, digamos  $v_1$ , mientras que  $e_2$  y  $e_3$  inciden en otro, digamos  $v_2$ . Además  $e_1$  y  $e_2$  se encuentran en una cara y  $e_2$  y  $e_3$  en otra. Sean  $e'_1, e'_2$  y  $e'_3$  las imágenes de  $e_1, e_2$  y  $e_3$  bajo  $Du(M)$  respectivamente. Como  $Du(M)$  cambia vértices por caras y caras por vértices, las imágenes de  $v_1$  y  $v_2$ ,  $v'_1$  y  $v'_2$ , serán ahora caras en  $Du(M)$  y se tiene que  $e'_1$  y  $e'_2$  inciden en  $v'_1$ , mientras que  $e'_2$  y  $e'_3$  inciden  $v'_2$ . Por lo tanto  $e'_1, e'_2$  y  $e'_3$  están en un camino de Petrie de  $Du(M)$ . En la figura 3.10 se muestran un  $PP$  de un mapa junto con el correspondiente del dual.

#### Medial

Dado un mapa  $M$ , el mapa medial se denota como  $Me(M)$ , y también se encuentra en la misma superficie que  $M$ . Se obtiene de la siguiente manera: los vértices de  $Me(M)$  están identificados uno a uno con cada arista de  $M$ , y dos vértices son adyacentes si las aristas en  $M$  eran incidentes y

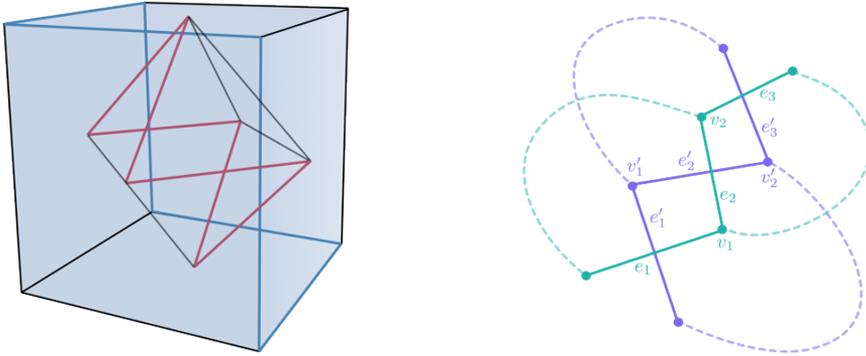


Figura 3.10: La operación dual en mapas deja invariantes los caminos de Petrie.

consecutivas, es decir, cuando las dos aristas en  $M$  tienen un vértice y una región en común. Las regiones de  $Me(M)$  están en relación uno a uno con los vértices y con las regiones de  $M$ . Es fácil ver que cualquier vértice de  $Me(M)$  tiene valencia 4, ya que cada arista tiene en cada extremo 2 aristas incidentes consecutivas.

### 3.2: Mapa medial

Mapa	Vértices	Artistas	Caras
$M$	V	A	F
$Me(M)$	A	2A	F+V

#### Petrie

El dual de Petrie de un mapa  $M$  se denota como  $Pe(M)$ . Los vértices y las aristas de  $Pe(M)$  son los vértices y las aristas de  $M$ . Las caras de  $Pe(M)$  son los caminos de Petrie de  $M$ . Como los vértices y las aristas son las mismas pero las caras cambian, el dual de Petrie afecta la característica de Euler. Así que se puede ser distinta la superficie en la que viven  $M$  y

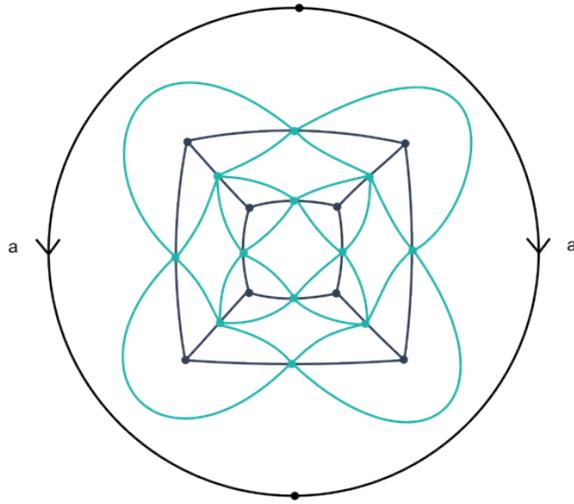


Figura 3.11: El mapa medial del cubo en la esfera.

$Pe(M)$ . Más aún, puede cambiar la orientabilidad de la superficie a la hora de hacer la operación. En las figuras 3.12 y 3.13 se muestran ejemplos de esta operación de mapas. La primera figura ilustra un ejemplo en donde la operación cambia la superficie pero ambas son orientables; mientras que la segunda ilustra un ejemplo en el que sí se cambia la orientabilidad de la superficie.

### 3.3: Mapa Petrial

Mapa	Vértices	Artistas	Caras	Petrie P.
$M$	V	A	F	PP
$Pe(M)$	V	A	PP	F

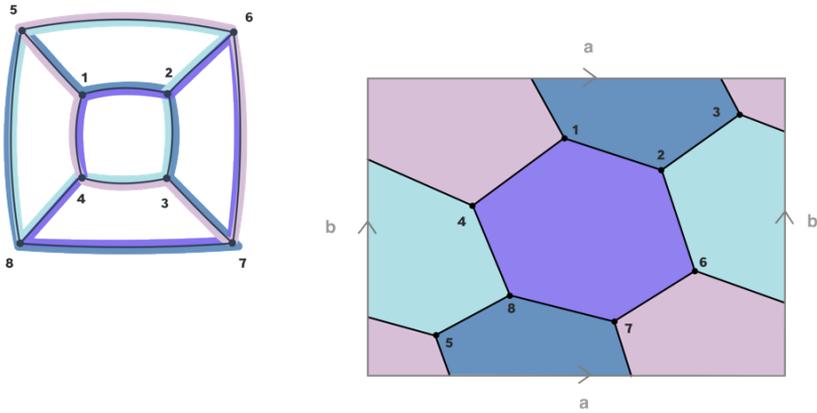


Figura 3.12: Aquí se muestra al cubo y su Petrie dual, que está formado por 4 caras hexagonales en el toro. Ambas superficies son orientables. En el mapa del cubo están marcados con colores los caminos de Petrie y en el Petrie dual las caras están coloreadas de manera correspondiente.

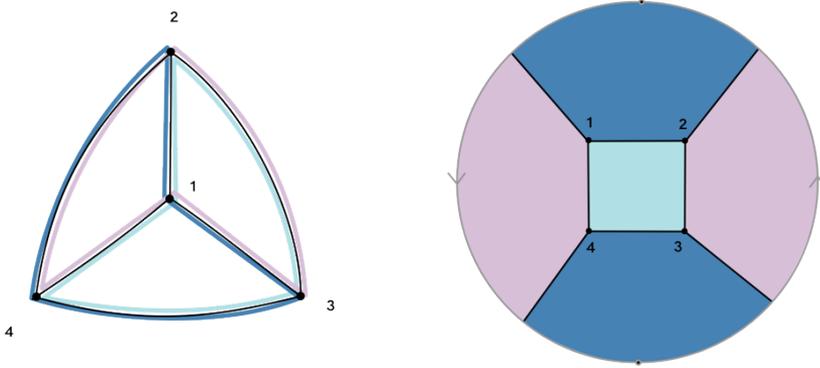


Figura 3.13: El tetraedro, es decir, el encaje de  $K_4$  en la esfera, es un caso en el que  $Pe(M)$  cambia su orientabilidad. El Petrie del tetraedro, es el hemicubo, que está en el plano proyectivo, que es una superficie no-orientable.

---

### Opuesto

Dado un mapa  $M$ , su opuesto  $opp(M)$ , se obtiene de asignarle a las aristas una etiqueta y una orientación. Luego se corta el mapa a través de las aristas y se vuelven a pegar de tal manera que tengan la misma etiqueta pero en dirección contraria. El opuesto de un mapa  $M$  tiene como vértices a los caminos de Petrie de  $M$  y como caminos de Petrie a los vértices de  $M$ . Esto se debe a que por cada vez que se cambia la orientación de la cara se recorre el camino de Petrie.

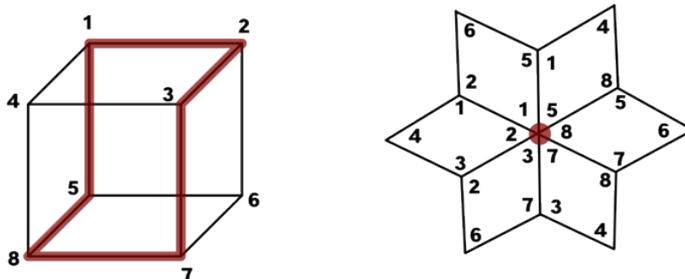


Figura 3.14: Ejemplo del mapa opuesto del cubo. Con color está marcado uno de los caminos de Petrie y se muestra cómo el vértice en el mapa opuesto tiene como etiqueta el camino de Petrie.

#### 3.4: Mapa Opuesto

Mapa	Vértices	Artistas	Caras	Petrie P.
$M$	V	A	F	PP
$Opp(M)$	PP	A	F	V

---

### Derivadas Directas

Como el operador  $Du$  intercambia vértices por caras, mientras deja los caminos de Petrie intactos y el operador  $Pe$  intercambia los caras por los caminos de Petrie, mientras deja los vértices y las aristas intactos; se puede ver que al aplicar  $Du$  y  $Pe$  de manera sucesiva, se puede llegar a obtener a lo más 6 mapas diferentes a partir de  $M^7$ . La siguiente tabla muestra la relación que hay entre todas las operaciones de mapas que se han visto:

#### 3.5: Derivadas directas

Mapa	Vértices	Artistas	Caras	Petrie P.
$M$	V	A	F	PP
$Du(M)$	F	A	V	PP
$Pe(M)$	V	A	PP	F
$Du(Pe(M))$	PP	A	V	F
$Pe(Du(M))$	F	A	PP	V
$Opp(M)$	PP	A	F	V

Al aplicarle a  $M$  el dual, luego el petrie y luego el dual, se obtiene el mapa opuesto; es decir  $opp(M) = Du(Pe(Du(M)))$ . Esto se puede ver en la figura 3.15.

Además  $opp(M) = Pe(Du(Pe(M)))$ , lo cual es muy fácil de deducir viendo la tabla de arriba. El hecho de que al aplicar estas operaciones se

---

<sup>7</sup>Esto lo demostró Steve E. Wilson, de la Universidad de Arizona. Para ver los detalles de esta afirmación se puede consultar su artículo, Operators Over Regular Maps, Pacific Journal Of Mathematics, Vol. 81, No. 2, 1979)

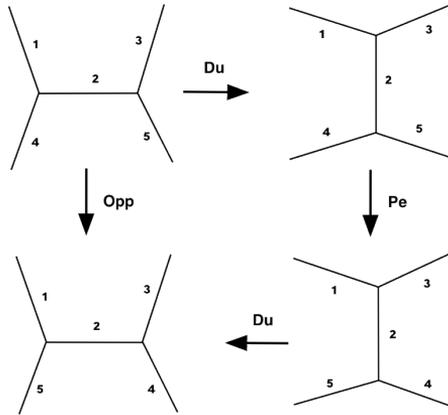


Figura 3.15:  $opp(M) = Du(Pe(Du(M)))$

puedan obtener hasta seis mapas es porque si se tiene un mapa que es autodual, es decir que  $M = Du(M)$  entonces se obtendrán tres mapas. Un ejemplo de un mapa autodual es el tetraedro, que se muestra en la figura 3.17.

En la siguientes figuras se tienen los ejemplos de los seis mapas que se pueden obtener a partir del cubo y los tres que se pueden obtener a partir del tetraedro.

Se puede tener el caso en el que  $M = Du(M) = Pe(M)$ . En tal caso se dice que es auto-todo y sólo tienen una derivada directa que es él mismo. El único mapa conocido que cumple esta última condición en el mapa de tipo  $\{9, 9\}_9$  que tiene 126 aristas. Un mapa  $M$  que no sea igual a  $Pe(M)$  o a  $Du(M)$  y tenga  $Pe(Du(M)) = M$ , es decir que tenga dos derivadas directas, no existe. Para ver las demostraciones de esto y más ejemplos de derivadas directas se puede ver [8].

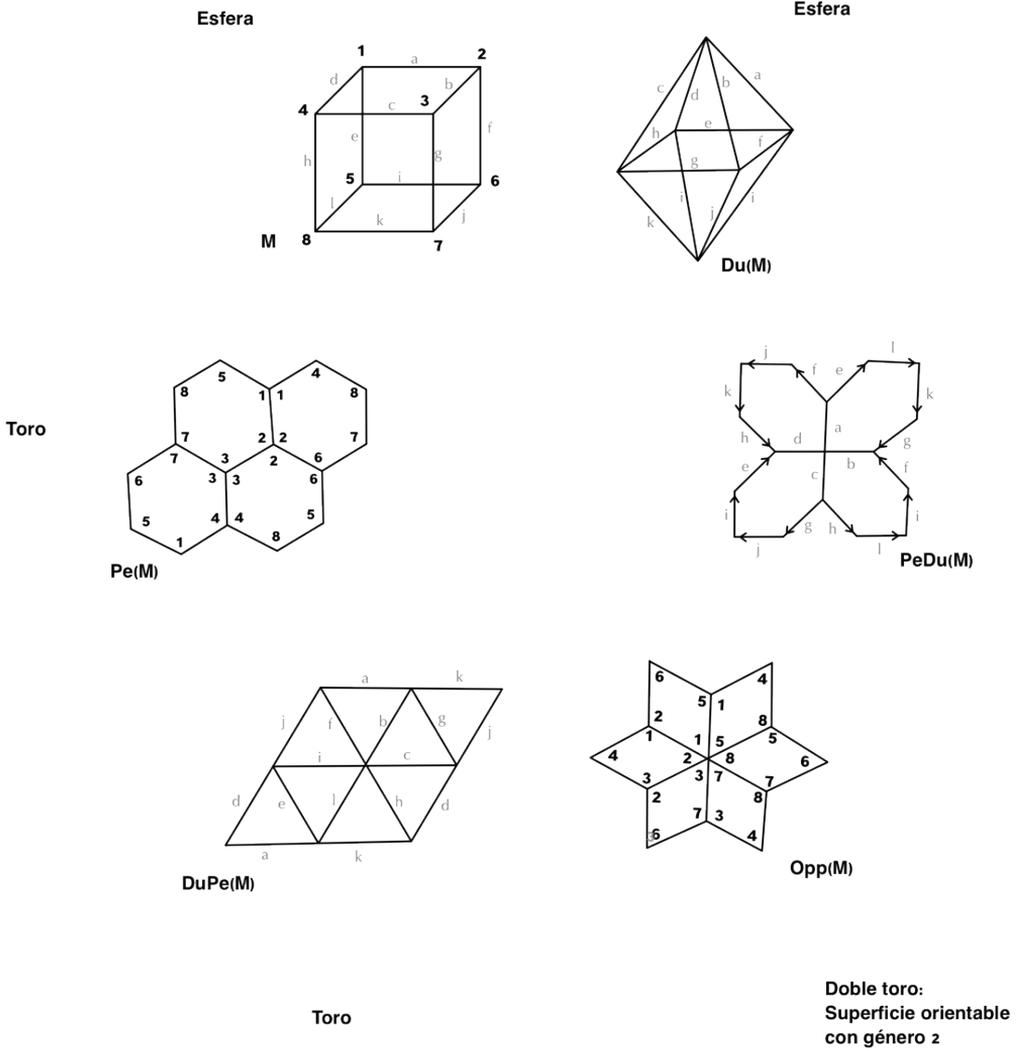


Figura 3.16: El cubo y sus derivadas directas.

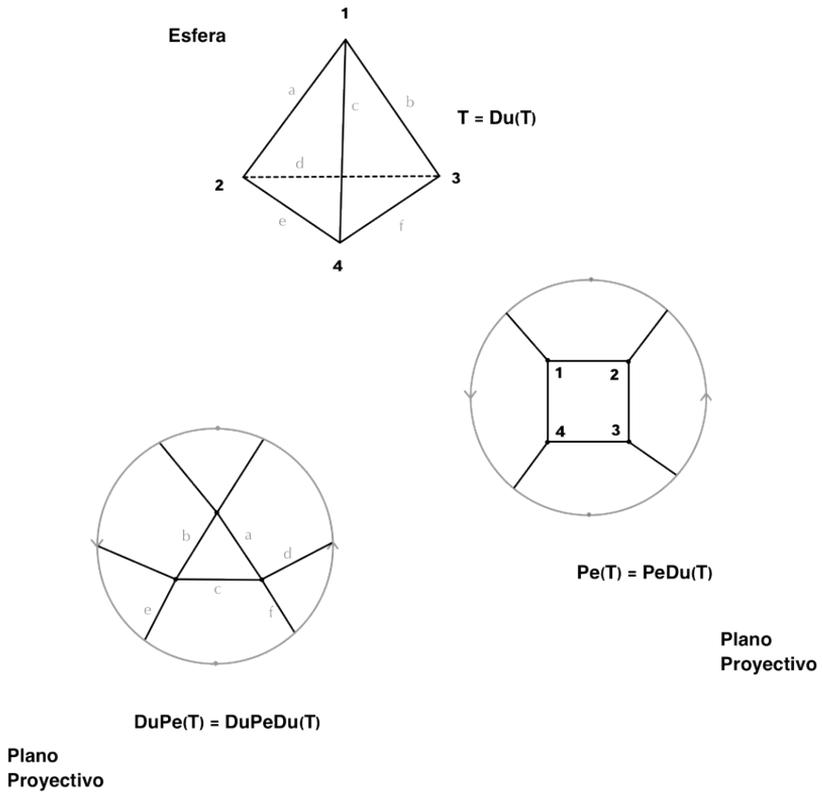


Figura 3.17: El tetraedro y sus derivadas directas.



<<No hacen falta alas  
para alzar el vuelo. >>

*Silvio Rodriguez*

<<I believe that scientific knowledge has fractal properties;  
that no matter how much we learn,  
whatever is left, however small it may seem,  
is just as infinitely complex as the whole was to start with.  
That, I think, is the secret of the Universe. >>

*Isaac Asimov*

*De su biografía: I. Asimov*

## 4

---

### Arreglo de pseudolíneas

---

Lo que sigue ahora es estudiar algunos mapas en el plano proyectivo. Pero para esto se le dará un enfoque diferente. Se definirá lo que es un *arreglo de pseudolíneas*, para poder visualizar esta estructura desde un punto de vista combinatorio. No importando que se definirán nuevos conceptos, en el fondo todo se refiere a algunos mapas que se vieron en la sección anterior en el plano proyectivo.

---

#### 4.1. Conceptos básicos y definiciones

Un arreglo de pseudolíneas en el plano proyectivo es un conjunto ordenado  $\mathcal{A}$  de  $n$  curvas simples y cerradas en el plano proyectivo,  $\mathbb{P}^2$ , tal que cualesquiera dos se intersectan en exactamente un punto y no todas pasan por un mismo punto. A estas dos propiedades de intersección las llamaremos *P.1.*. A las curvas simples y cerradas se les llama pseudolíneas.

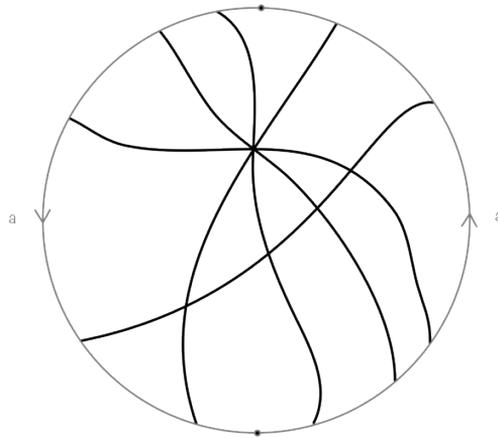


Figura 4.1: Un ejemplo de un arreglo con 5 pseudolíneas.

Un arreglo de pseudolíneas  $\mathcal{A}$  en el plano proyectivo define de manera natural un mapa, donde los vértices son las intersecciones de las curvas, las aristas los segmentos de curva y las caras las componentes resultantes de hacer  $\mathbb{P}^2 - \mathcal{A}$ . Las caras serán homeomorfas a un disco puesto que el plano proyectivo es un disco con los puntos de su frontera identificados y las pseudolíneas son curvas cerradas. Cuando se tenga un mapa  $K$  inducido por un arreglo de pseudolíneas  $\mathcal{A}$  se dirá que el mapa  $K$  está asociado

---

al arreglo de pseudolíneas  $\mathcal{A}$  y se denotará como  $K(\mathcal{A})$ . A los conjuntos de caras, aristas y vértices de  $K(\mathcal{A})$  se denotan como  $f(\mathcal{A})$ ,  $e(\mathcal{A})$  y  $v(\mathcal{A})$ , respectivamente. El número de caras que son incidentes a exactamente  $k$  aristas es denotado como  $p_k(\mathcal{A})$ . A partir de aquí se empleará la siguiente notación  $f := |f(\mathcal{A})|$ ,  $e := |e(\mathcal{A})|$ ,  $v := |v(\mathcal{A})|$  y  $p_k := p_k(\mathcal{A})$  cuando sea claro de qué arreglo de pseudolíneas se está refiriendo. Diremos que dos arreglos de pseudolíneas son isomorfos si definen el mismo mapa.

Dado un arreglo de pseudolíneas se tienen las siguientes relaciones:

$$\sum_{p_k \geq 3} p_k = f$$

$$\sum_{p_k \geq 3} k p_k = 2e$$

Se dice que el arreglo es simple si cada punto de intersección pertenece a exactamente dos pseudolíneas. A esta última propiedad le llamaremos *P.2*. En un arreglo simple de pseudolíneas se tiene que hay  $\frac{n(n-1)}{2}$  vértices en  $K(\mathcal{A})$ , pues debido a que hay  $n$  pseudolíneas y cada dos se intersectan, cada pseudolínea contiene  $n - 1$  vértices pero se están contando dos veces, por lo que:

$$\binom{n}{2} = v$$

Además cada vértice en  $K(\mathcal{A})$  es incidente a exactamente 4 aristas (dos aristas por cada pseudolínea) por tanto  $\frac{2e}{4} = v$ , es decir  $e = 2v$ . Como

---

cada pseudolínea es intersectada por  $n - 1$  pseudolíneas, entonces se tienen  $n(n - 1)$  aristas.

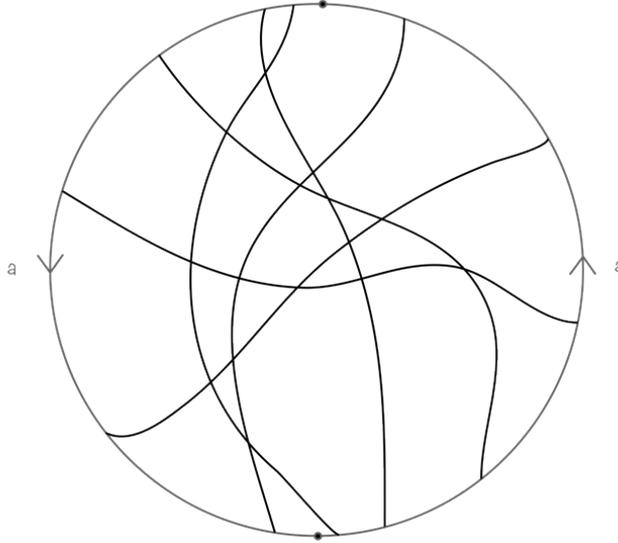


Figura 4.2: Un arreglo simple de pseudolíneas con 6 elementos.

La característica de Euler dispone para un mapa en el plano proyectivo lo siguiente:

$$v - e + f = 1 \tag{2}$$

Juntando los puntos antes mencionados y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} v - e + f &= 1, \\ \frac{n(n-1)}{2} - n(n-1) + f &= 1, \\ f &= \frac{n(n-1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

---

Resumiendo se tienen estas tres condiciones que cumple un arreglo de pseudolíneas simple:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{n(n-1)}{2}, \\
 e &= n(n-1), \\
 f &= \frac{n(n-1)}{2} + 1.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

A continuación se tienen dos pequeños lemas que hablan sobre la estructura que tienen los arreglos de pseudolíneas, que aunque son parecen ser pequeños serán de gran utilidad a lo largo de esta sección porque caracterizan las limitaciones que tienen los mapas inducidos por los arreglos de pseudolíneas simples. De ahora en adelante cuando se refiera a un arreglo de pseudolíneas, se entenderá que es simple.

## 4.2. Propiedades de los arreglos de pseudolíneas

**Lema 4.1.** *Dado un arreglo simple de  $n \geq 4$  pseudolíneas, dos triángulos no pueden ser adyacentes a una misma arista.*

*Demostración.* Si suponemos que una arista  $e$  es incidente a dos caras triangulares entonces las dos pseudolíneas que bordean al triángulo que no contienen a  $e$  se intersectarían dos veces (ver figura 4.3), lo cual lleva a una contradicción por la propiedad P.1.; por lo que el tercer vértice del triángulo que no está en  $e$  debe ser el mismo. Pero si esto sucede, entonces para  $n \geq 4$ , las pseudolíneas restantes intersectarían dos veces

a pseudolínea definida por  $e$  o intersectarían a las dos pseudolíneas que bordean al triángulo, con lo cual la arista  $e$  ya no sería adyacente a dos triángulos.  $\square$

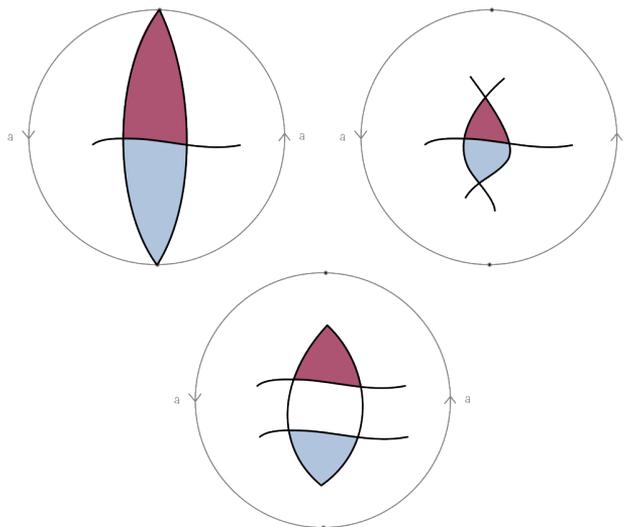


Figura 4.3: En las primeras dos figuras vemos como una arista no puede ser adyacente a dos triángulos y en la figura de la derecha vemos cómo un cuadrado no puede tener dos triángulos en ambas aristas opuestas.

**Lema 4.2.** *Dado un arreglo simple de pseudolíneas  $\mathcal{A}$  con  $n \geq 5$ , dos aristas opuestas de un cuadrilátero no pueden tener simultáneamente dos triángulos.*

*Demostración.* Si dos aristas opuestas de un cuadrilátero tienen un triángulo entonces las dos pseudolíneas que bordean al cuadrilátero se intersectarían dos veces (ver figura 4.3) lo cual es una contradicción con la propiedad  $P.1$ ; por lo que queda que el vértice de intersección debe ser el

---

mismo. Entonces supongamos que se tienen  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  las pseudolíneas que conforman al cuadrado, y  $p_1$  y  $p_2$  las pseudolíneas que bordean a los dos triángulos. Si se quisiera una quinta pseudolínea y se quisiera conservar esa estructura no se podría, pues la quinta pseudolínea no puede pasar por ningún punto de intersección de las pseudolíneas  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ , pues el arreglo es simple, ni intersectar a los triángulos ni al cuadrado pues se deshace la estructura de cada uno de los polígonos. Por lo tanto, para conservar esta estructura  $n = 4$   $\square$

Estos lemas inducen de manera natural una serie de preguntas. Como por ejemplo, ¿cuál es el número máximo de triángulos que puede tener un arreglo de pseudolíneas? ¿Cuántos cuadrados o pentágonos podrá tener? Estas preguntas van sobre la estructura de las regiones de los arreglos simples. La siguiente proposición contestará algunas de estas interrogantes.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\mathcal{A}$  un arreglo simple de  $n > 4$  pseudolíneas, entonces:*

1.  $3p_3 + p_4 \leq n(n - 1)$ .
2. La igualdad  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3}$  es sólo realizable si cada arista del arreglo es incidente a un triángulo.
3. Si  $n$  es impar entonces  $p_3 \leq \frac{n(n-2)}{3}$ .

*Demostración.* Como cualesquiera dos pseudolíneas se intersectan, cada pseudolínea se intersecta con las otras  $n - 1$ , lo cual nos lleva a que el

---

número total de aristas es  $n(n-1)$ . Por el lema 4.1 se sabe que un triángulo no puede ser adyacente a otro triángulo, por lo que si se suma el número de triángulos,  $p_3$ , se tiene que  $3p_3$  es una cota inferior del número total de aristas, es decir  $3p_3 \leq n(n-1)$ . Ahora, por el lema 4.2 todo cuadrado puede ser adyacente a lo más a dos triángulos, lo cual implica que hay al menos dos aristas del cuadrado que no son adyacentes a un triángulo. Así, que al contar el total de cuadrados y por cada uno considerar las dos aristas que no son adyacentes a un triángulo se tiene que  $3p_3 + 2p_4 \leq n(n-1)$ , y de ahí  $3p_3 + p_4 \leq n(n-1)$ , lo cual demuestra (1).

Para ver (2) sólo hay que considerar que si toda arista es incidente a un triángulo, sólo puede ser incidente a uno por el lema 4.1. Contando que son  $n(n-1)$  aristas en total y en cada arista hay un solo triángulo entonces hay  $\frac{n(n-1)}{3}$ , pues por cada triángulo se están contando tres aristas. Así que cuando un arreglo de pseudolíneas tiene un triángulo en cada artista, no puede tener caras cuadrangulares.

Para probar (3) consideremos un arreglo simple de pseudolíneas, donde las pseudolíneas se encuentran etiquetadas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  con  $n \geq 3$  impar. Se puede observar que si  $n < 3$  las líneas no podrían formar un triángulo y no tendría sentido la proposición. Si se fija una pseudolínea, por decir  $q_1$ , dado que cualesquiera dos se intersectan, hay  $n-1$  intersecciones del resto de las pseudolíneas con  $q_1$  y eso define  $n-1$  aristas en la pseudolínea. Supongamos que cada arista en  $q_1$  es incidente a un triángulo, ver figura 4.4. La franja que rodea a  $q_1$ , dado que está en el proyectivo, es una banda de Möbius, y por lo tanto no se preserva la orientación al mo-

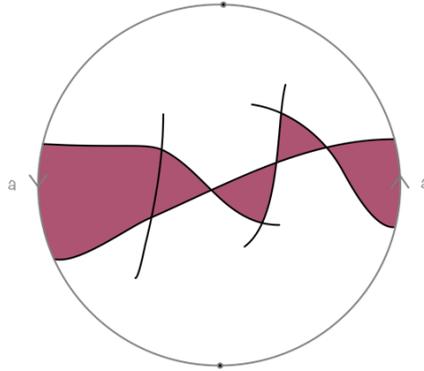


Figura 4.4: Una pseudolínea en un arreglo simple con un número impar de elementos puede bordear a lo más  $n - 2$  triángulos

mento de recorrer dicha pseudolínea (ver figura 4.4). Lo cual hace que haya dos triángulos adyacentes a una misma arista, contradiciendo el lema 4.1. Por lo tanto, si  $n$  es impar, cada pseudolínea puede bordear a lo más  $n - 2$  triángulos. Contando que tenemos  $n$  pseudolíneas se tiene  $p_3 \leq \frac{n(n-2)}{3}$ .

□

Antes de proseguir introduciré algunas nuevas definiciones y nueva notación con la finalidad de demostrar que toda pseudolínea bordea al menos tres caras de longitud 4 o 5. Sea  $F$  una cara del arreglo simple de pseudolíneas y sean  $q$  y  $q'$  dos pseudolíneas adyacentes a aristas distintas de  $F$  (ver figura 4.5). La cara  $F$  junto con las dos pseudolíneas determinan de manera natural a lo más cuatro secciones en el plano proyectivo que son: la cara  $F$ , el exterior determinado por  $q$  y  $q'$  relativo a  $F$ , y las dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  formadas por  $q$  y  $q'$ . Si  $F$ ,  $q$  y  $q'$  tienen un punto en común, entonces las secciones se reducen a tres. En caso contrario se tienen cuatro

secciones. De aquí se tienen los siguientes resultados.

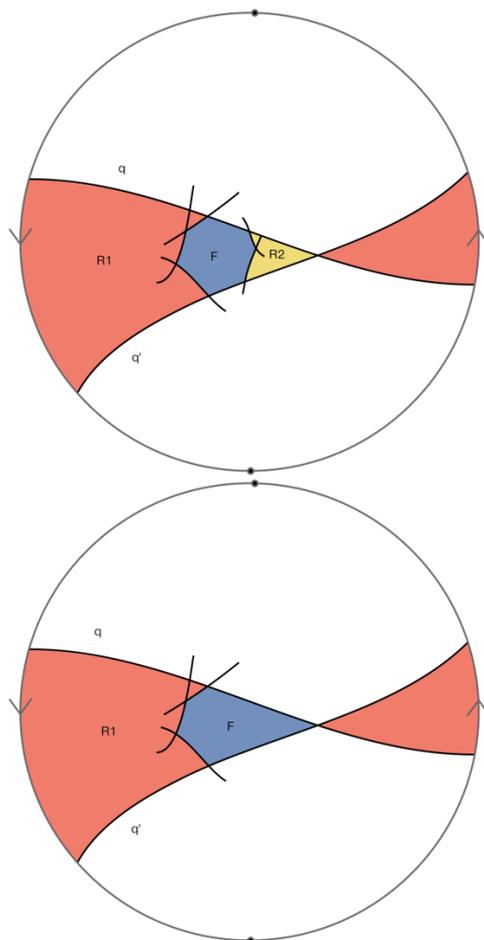


Figura 4.5: Las regiones en el plano proyectivo determinadas por  $F$ ,  $q$  y  $q'$ .

Sea  $\mathcal{A}$  un arreglo simple de pseudolíneas,  $F$ ,  $q$  y  $q'$  como antes, y sea  $R \in \{R_1, R_2\}$  una de las dos regiones determinada por  $F$ ,  $q$  y  $q'$ . Como el arreglo es simple, el número de aristas de  $\mathcal{A}$  incluidas en  $R \cap q$  es igual al número de aristas incluidas en  $R \cap q'$ . A este número se le denotará  $s(R)$ .

---

**Lema 4.3.** *Si  $s(R) \geq 2$ , existe al menos un cuadrilátero o un pentágono dentro de la región  $R$  que bordea a  $q$ .*

*Demostración.* La demostración es por un argumento recursivo. Si  $s(R) = 2$  entonces se tienen dos casos. El primero es que las dos intersecciones lo formen una pseudolínea que pertenece a la cara  $F$  y una pseudolínea que no. El segundo es que las dos intersección las formen dos pseudolíneas que pertenecen a la cara  $F$ , ver figura 4.6. En cualquier caso es fácil ver que la proposición se cumple. Supongamos ahora que  $s(R) \geq 3$ . Por el lema 4.1, sabemos que existe una cara  $F'$  que no es triangular que es adyacente a  $q$  y por la propiedad *P.2* está contenida en  $R$ . Si  $F'$  es un cuadrilátero o un pentágono, queda demostrada la proposición. Supongamos que  $F'$  es de la forma  $p_k$  (es decir, una polígono con  $k$  lados), con  $k \geq 6$  y sean  $e_1, e_2, \dots, e_k$  las aristas de  $F'$  descritas de manera cíclica tal que  $e_1 \subseteq q$ . Sea  $q''$  la pseudolínea que contiene a  $e_4$  y consideremos la nueva región  $R'$  formada por  $F'$ ,  $q$  y  $q''$ , y  $R' \subseteq R$ . Como  $k \geq 6$ , tenemos que  $2 \leq s(R') \leq s(R) - 1$ . Si en la nueva región  $R'$  hay un pentágono o un cuadrilátero adyacente a  $q$ , queda demostrado. Si no se vuelve a aplicar el paso anterior hasta terminar.  $\square$

La siguiente proposición habla sobre la cantidad de cuadrados y de pentágonos que puede tener un arreglo de pseudolíneas. Es bastante interesante, pues se da una cota inferior que es  $4p_4 + 5p_5 \geq 3n$ , que es lo mismo que decir que toda pseudolínea bordea al menos tres caras de 4 o 5 lados

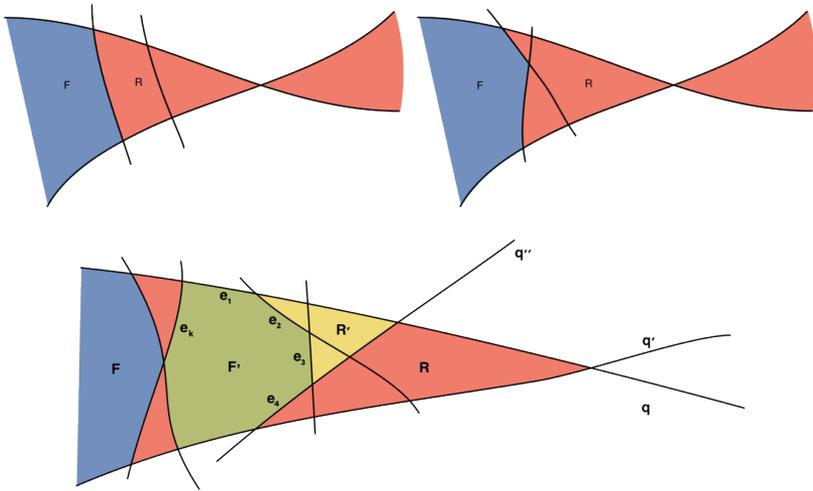


Figura 4.6

**Proposición 4.2.** *Dado un arreglo simple de pseudolíneas con  $n \geq 4$  se tiene que  $4p_4 + 5p_5 \geq 3n$ , es decir, toda pseudolínea bordea al menos tres caras de 4 o 5 lados.*

*Demostración.* Sea  $q$  una pseudolínea cualquiera. Como el arreglo es simple,  $q$  está dividida en  $n - 1$  aristas. Las caras más pequeñas que puede bordear una pseudolínea son triángulos. Pero por el lema 4.1, una arista no puede ser adyacente a dos triángulos, por lo tanto si una arista fuera adyacente a un triángulo, la otra cara adyacente a esa misma arista cumple que debe ser un  $k$ -ágono, con  $k \geq 4$ .

Si  $q$  bordeara a caras de longitud a lo más 5, se tiene que hay al menos  $n - 1$  caras con longitud 4 o 5, que es lo que se quiere demostrar.

Si existe un cara  $F$  de  $k$  lados con  $k > 5$  tal que  $q$  la bordea, se etiquetan las aristas de manera cíclica con  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ , de tal manera que  $e_1$  esté

en la pseudolínea  $q$ . Sea  $q'$  la pseudolínea que contiene a  $e_4$ . Ver figura 4.7.

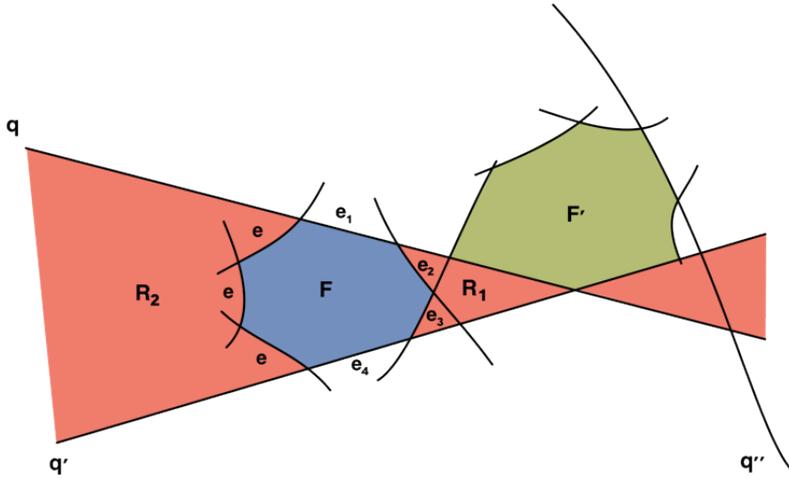


Figura 4.7

Consideremos las regiones  $R_1$  y  $R_2$  formadas por la prolongación de  $q$  y  $q'$  que contienen a la cara  $F$ . Como las pseudolíneas generadas por  $e_2$  y  $e_3$  intersectan  $q$  y  $q'$ , se tiene que  $s(R_1) \geq 2$  y por el lema 4.3 hay al menos un cuadrilátero o un pentágono bordeando a  $q$ . De manera análoga en  $R_2$  las pseudolíneas generadas por  $e_{k-1}, e_{k-2}, \dots, e_5$  intersectan a  $q$  y  $q'$  por lo que  $s(R_2) \geq 2$  y por el lema 4.3 hay al menos un cuadrilátero o un pentágono. De esta manera se ha garantizado de que hay al menos dos caras de longitud 4 o 5 que la pseudolínea  $q$  bordea. Falta asegurar la existencia de un tercer cuadrado o pentágono.

Sea  $F'$  una cara en la parte exterior de las regiones formadas por  $F$ ,  $q$  y  $q'$  tal que tenga más de 3 lados y uno de sus lados esté contenido en  $q$ . Se puede tomar la cara que contiene al punto de intersección de  $q$  y  $q'$ , y que

---

dos de sus lados estén en  $q$  y  $q'$  (como se muestra en la figura 4.7). Notemos que esta cara no puede ser un triángulo, de lo contrario se tendría que la pseudolínea que contiene a  $e_3$  y  $q'$  se intersectarían dos veces. Si  $F'$  tiene cuatro o cinco lados, el punto (2) queda demostrado. Si  $F'$  tiene 6 o más lados se puede tomar, como anteriormente, una pseudolínea  $q''$  diferente de  $q'$  que bordee a  $F'$ . Luego se tienen las regiones  $R'_1$  y  $R'_2$ , que forman  $F'$ ,  $q$  y  $q''$ , cumplen que  $s(R'_1) \geq 2$  y  $s(R'_2) \geq 2$  y por el lema 4.3 esto garantiza que tiene hay al menos un cuadrado o un pentágono. Con lo que ya se tiene que hay al menos tres cuadrados o pentágonos que bordean a  $q$ .  $\square$

<<La eternidad por fin comienza un lunes  
y el día siguiente apenas tiene nombre  
y el otro es el oscuro, el abolido...  
...La eternidad ignora las costumbres,  
le da lo mismo rojo que azul tierno,  
se inclina al gris, al humo, a la ceniza...  
...Y sin embargo, ves, me aferro al lunes  
y al día siguiente doy el nombre tuyo  
y con la punta del cigarro escribo  
en plena oscuridad: aquí he vivido. >>

*Eliseo Diego*

*Fragmentos del poema "Comienza un lunes"*

Nada es seguro, todo es posible.

*Nietzche*

## 5

---

### Asociación de un arreglo de pseudolíneas con el encaje de una gráfica.

---

Ahora se conjuntará todo lo que se ha visto para empezar con el tema central de la tesis. Ya habiendo estudiado los mapas y los arreglos de pseudolíneas y viendo un poco de teoría de gráficas, se definirá una función que le asocia a un arreglo de pseudolíneas un par de mapas. El objetivo de esta función radica en tratar de encontrar encajes de gráficas completas a partir de un arreglo de pseudolíneas. Sin embargo no todos los arreglos de pseudolíneas servirán para asociarle este par de mapas. Los arreglos con los que se trabajará son los *2-coloreables*, que se definen en el siguiente párrafo.

**Definición 5.1.** *Un arreglo de pseudolíneas se dice que es 2-coloreable si es simple y sus regiones se pueden colorear con 2 colores de tal manera que una arista no sea adyacente a dos regiones con el mismo color.*

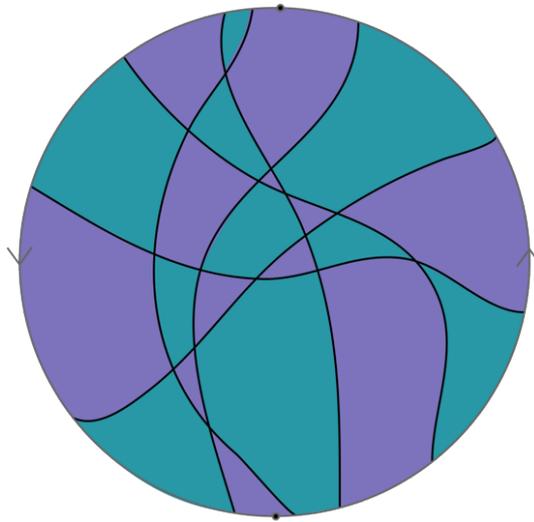


Figura 5.1: Un arreglo de pseudolíneas que es 2-coloreable

Se asociará un par de mapas a un arreglo de pseudolíneas 2-coloreable y para ello se toma cada una de sus dos clases cromáticas por separado. Es decir, a cada clase cromática se le asociará un mapa. Cada cara se transforma en su cara polar dual como se muestra en la figura 5.2. Las aristas de una cara polar dual están en correspondencia uno a uno con los vértices de la cara original. Dos caras del arreglo se transforman en un par de caras polares duales de las mismas longitudes que las originales, pegadas a lo largo de su arco correspondiente en donde, localmente, la cara adyacente ha revertido su orientación. Se verá que pegando todas las caras polares duales correspondientes a una clase cromática, se obtiene globalmente una superficie. Más aún esta asociación define (por cada clase cromática) un nuevo mapa en una superficie. Esto se debe a que como cada vértice en el arreglo de pseudolíneas es 4 regular induce, por cada clase

cromática, una arista que se usa dos veces. Además como cada pseudolínea en el arreglo induce un vértice en el nuevo mapa, las intersecciones de las otras pseudolíneas con ella, debido a que están ordenadas, inducen un orden cíclico de las aristas en los vértices del nuevo mapa.

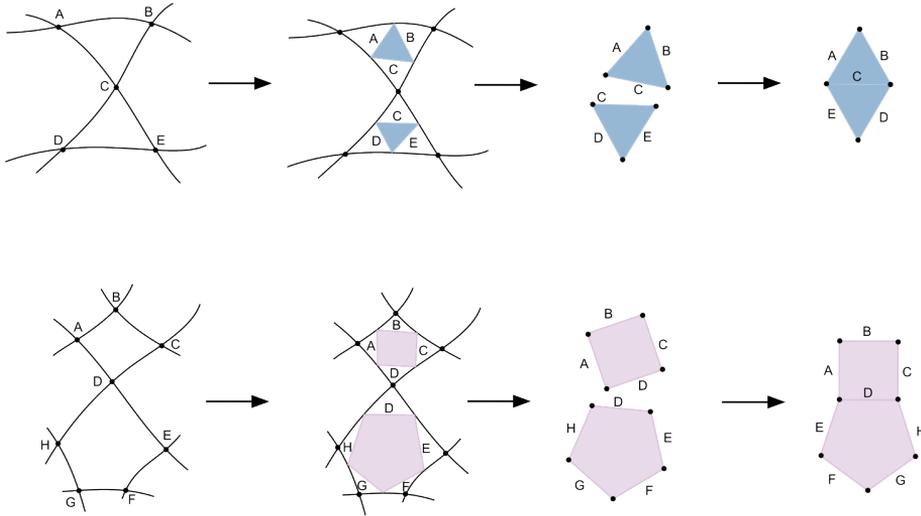


Figura 5.2: Cómo transformar una clase cromática en su polar dual.

Si se toma como ejemplo el arreglo de pseudolíneas de la figura 5.1, los mapas que resultarían al aplicar esta operación se muestra en la figura 5.3.

Obsérvese que ambos mapas son encajes de la gráfica completa  $K_6$ , sin embargo se encuentran en diferentes superficies. Para comprobar esto sólo basta calcular la característica de Euler de cada uno. Pero la esencia del ejemplo es que por cada clase cromática se obtuvo un encaje de la gráfica completa  $K_6$ . Lo cual, nos da a pensar que dado un arreglo de pseudolíneas 2-coloreable con  $n$  elementos, se le pueden asociar dos encajes de  $K_n$ . Esto último es cierto y se demostrará más adelante. Por ahora se estudiarán

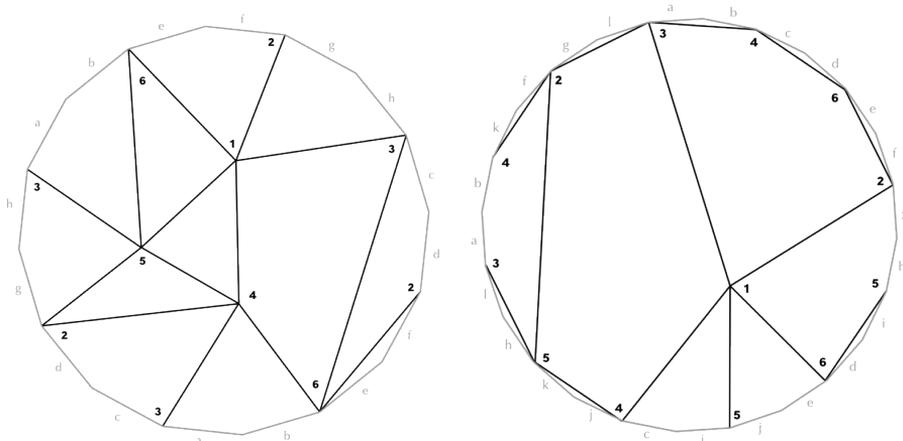


Figura 5.3: Los dos nuevos mapas provenientes del arreglo de pseudolíneas de la figura 5.1.

los arreglos de pseudolíneas 2-coloreables, para poder saber qué tipos de encajes se pueden obtener.

**Proposición 5.1.** *Un arreglo de pseudolíneas 2-coloreable tiene un número par de pseudolíneas.*

*Demostración.* Sea  $n$  el número de pseudolíneas que tiene el arreglo 2-coloreable. Sea  $q$  una pseudolínea. Como en el plano proyectivo cualesquiera dos pseudolíneas se intersectan, por  $q$  pasan  $n - 1$  pseudolíneas. Como el arreglo debe ser 2-coloreable no puede haber una arista adyacente a dos caras del mismo color. Así que la pseudolínea  $q$  debe tener un número de impar de aristas, pues como  $q$  está en el proyectivo al recorrer la pseudolínea por el infinito se revierte la orientación. Ver figura 5.4.  $\square$

Como se vio en el ejemplo de la figura 5.3, las gráficas completas se

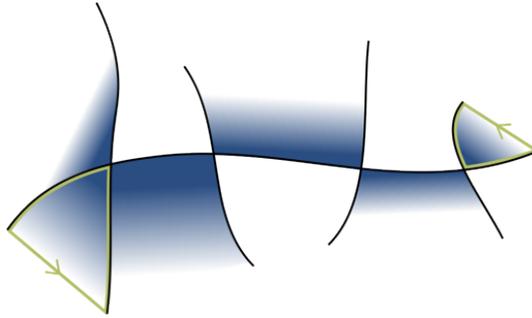


Figura 5.4: Un arreglo de pseudolíneas que es 2-coloreable tiene un número par de elementos.

encuentran encajadas, pero si se quiere que el encaje de una gráfica en una superficie fuera triangular, es decir, todas las caras son triángulos, entonces es natural pedir que una de las clases cromáticas del arreglo de pseudolíneas esté compuesta de puros triángulos, (como los de la figura 5.5).

**Definición 5.2.** *Un arreglo de pseudolíneas es triangular, cuando es simple, 2-coloreable y una clase cromática consiste en triángulos solamente.*

**Proposición 5.2.** *Un arreglo triangular de pseudolíneas no puede tener cuadrados.*

*Demostración.* Como el arreglo de pseudolíneas es triangular cada arista debe ser incidente a un triángulo, pero por el lema 4.2, dos aristas opuestas de un cuadrado no pueden ser adyacentes a un triángulo.  $\square$

Entonces, si se quiere obtener a partir de un arreglo de pseudolíneas 2-coloreable con  $n$  elementos un encaje de una gráfica completa que sea

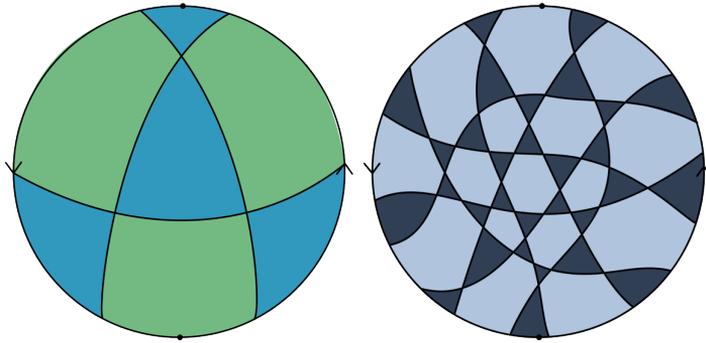


Figura 5.5: El ejemplo más pequeño de un arreglo de pseudolíneas triangular con 4 pseudolíneas. La línea al infinito está considerada como un elemento del arreglo de pseudolíneas. A la derecha un ejemplo de un arreglo de pseudolíneas triangular de 10 elementos. La línea al infinito está considerada como un elemento del arreglo de pseudolíneas.

triangular, el arreglo de pseudolíneas debe ser triangular. Enseguida nace la siguiente pregunta. Dado un encaje de una gráfica completa triangular, ¿se puede obtener el arreglo de pseudolíneas que lo tiene como clase cromática? Antes de contestar esta pregunta, se muestra la demostración formal de que dado un arreglo de pseudolíneas triangular se puede obtener un encaje de una gráfica completa triangular.

**Teorema 5.1.** *Para cualquier arreglo triangular de pseudolíneas con  $n$  elementos, se puede construir un mapa en una superficie no-orientable con género  $k = \frac{(n-3)(n-4)}{6}$  que represente el encaje triangular de la gráfica completa  $K_n$ .*

*Demostración.* Para que el arreglo sea triangular, se tiene que  $n$  debe ser par por la proposición 4.1. Se toma la clase cromática que tiene triángulos como caras y se forma la nueva superficie con los triángulos polares duales

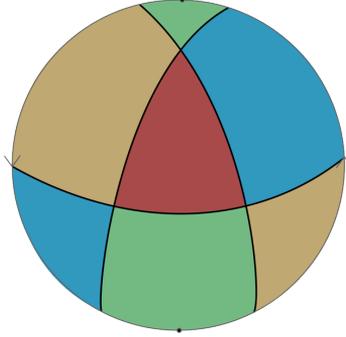


Figura 5.6: El ejemplo más pequeño de un arreglo simple de pseudolíneas en el proyectivo que no es triangular con 3 pseudolíneas aún cuando todas sus caras son triangulares. No es triangular pues no es 2-coloreable.

(como se muestra en la figura 5.2). Sea este nuevo mapa  $M_S$  visto como un encaje en una superficie  $S$ . Se mostrará primero que la superficie  $S$  es siempre no-orientable. Como el arreglo es triangular, por el lema 4.3, hay al menos un pentágono (de hecho hay al menos tres), y los triángulos que rodean al pentágono forman un banda de Möbius en la nueva superficie al momento de pegarlos (ver figura 5.7). Por lo que la superficie resulta ser no-orientable.

Sean  $v_M$ ,  $e_M$  y  $f_M$  los vértices, las artistas y las caras de  $M_S$ , respectivamente. Por las observaciones antes hechas, cada pseudolínea en el arreglo tiene asociado un vértice en  $M_S$ , por lo que  $|v_M| = n$ . Luego, las aristas están determinadas por el número de intersecciones de las pseudolíneas, con lo que se tiene  $|e_M| = \frac{n(n-1)}{2}$ . Y por último como la clase cromática que se está considerando es la de los triángulos, que por el lema 4.2 se tiene que  $|f_M| = \frac{n(n-1)}{3}$ . Ahora si se considera la fórmula de Euler superficies no-orientables,  $|v_M| - |e_M| + |f_M| = 2 - k$ , nos lleva a la igualdad

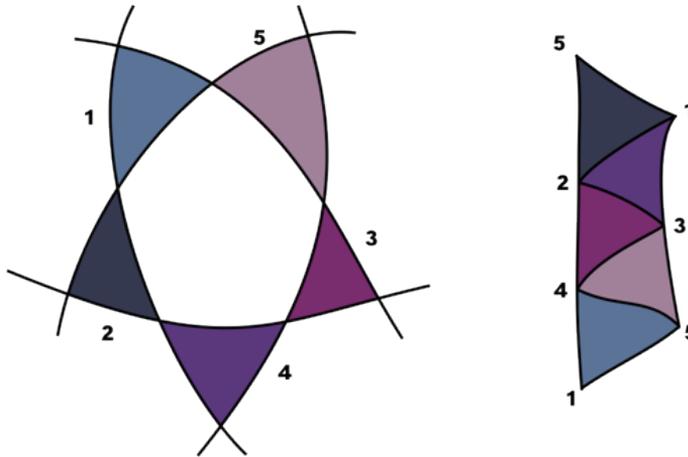


Figura 5.7: Un pentágono en el arreglo de pseudolíneas induce una banda de Möbius en la nueva superficie, por lo tanto la superficie será no-orientable.

$$k = 2 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{3} \text{ y de ahí que } k = \frac{(n-3)(n-4)}{6}. \quad \square$$

Este teorema, aunque pueda parecer bastante fuerte, excluye muchos encajes de gráficas completas, como  $K_n$  con  $n$  impar. De hecho hay más restricciones a los arreglos de pseudolíneas que sean triangulares como se muestra en las siguientes proposiciones.

**Proposición 5.3.** *Dado un arreglo triangular de pseudolíneas  $\mathcal{A}$  con  $n$  elementos se tiene que  $n$  es divisible por 6 o es congruente con 4 módulo 6.*

*Demostración.* Consideremos el complejo celular  $K(\mathcal{A})$  asociado al arreglo de pseudolíneas  $\mathcal{A}$ . Por lo que se vio al principio de la sección 4 se tiene que  $f = \frac{n(n-1)}{2} + 1$  (ver 3 en la página 58). Como el arreglo es triangular se tiene que  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3}$  por la proposición 4.1. Luego si se cuentan las

---

caras que no son triangulares se tiene que

$$\begin{aligned} f - p_3 &= f - \frac{n(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + 1 - \frac{n(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n-1)}{6} + 1 \end{aligned}$$

De aquí que  $n(n-1)$  debe ser divisible por 6. Como  $n$  debe ser par se tienen dos casos. El primer caso sería que  $2 \mid n$  y  $3 \mid n$ , por lo que de ahí se tendría que  $6 \mid n$ . El segundo caso sería que  $2 \mid n$  y  $3 \mid n-1$ . Resolviendo el sistema, se tiene que como  $2 \mid n$  entonces  $n = 2k$  para algún  $k$  en los enteros. Por otra parte se tiene que  $3 \mid n-1$ , es decir,  $n = 3s + 1$  para algún  $s$  en los enteros, pero como  $n$  es par, entonces  $3s$  debe ser impar, luego  $n = 3(2t+1) + 1$ , por lo que  $n = 6t + 4$ , es decir que  $n$  es congruente con  $4 \pmod{6}$ .

□

La proposición anterior dicta que de existir un arreglo triangular de pseudolíneas entonces éste tiene  $n$  elementos con  $n$  divisible por 6 o  $n$  congruente con 4 módulo 6. Con esta serie de resultados, a uno le gustaría saber si se pueden caracterizar los arreglos de pseudolíneas que no son triangulares, pues la proposición anterior no es un si y sólo si. Sin embargo en el siguiente resultado vemos como es que no existe un arreglo triangular con 12 pseudolíneas, aún cuando éste es divisible por 6.

---

**Proposición 5.4.** *No existe un arreglo simple de  $n$  pseudolíneas que cumpla  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3}$  para  $n = 12$ .*

*Demostración.* De existir tal arreglo, por la proposición 4.2 se tiene que  $4p_4 + 5p_5 \geq 36$ . Por el lema 4.2 el arreglo no tiene cuadrados, pues la igualdad  $p_3 = \frac{n(n-1)}{3}$  indica que cada arista debe ser incidente a un triángulo. Así  $p_4 = 0$  y  $5p_5 \geq 36$ , por lo que el arreglo tiene al menos 8 pentágonos. Al contar las aristas de todos los pentágonos y asociar a cada arista la pseudolínea que la contiene, se están contando al menos tres veces el número de pseudolíneas, ya que la proposición 4.2 dice que cada pseudolínea bordea a al menos 3 pentágonos.

Por lo tanto si hay al menos 8 pentágonos entonces  $\lfloor \frac{8 \cdot 5}{3} \rfloor = 13$ , lo que implica que existe al menos una pseudolínea que bordea al menos 4 pentágonos. Los cual lleva a que hay dos pentágonos que tienen necesariamente un vértice en común. (Ver figura 5.8).

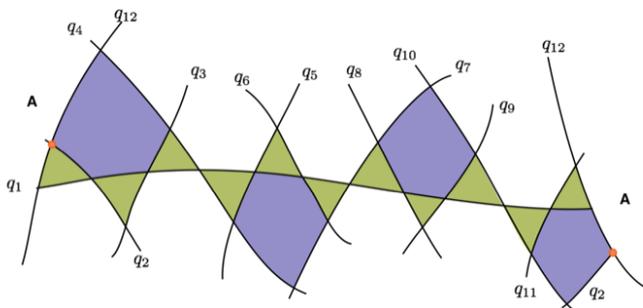


Figura 5.8: Si existe una pseudolínea que bordea 8 pentágonos, necesariamente dos pentágonos tendrán un vértice en común. Aquí se muestra que si se intenta acomodar cuatro pentágonos en las 11 aristas que forman las otras pseudolíneas, necesariamente 2 comparten un vértice.

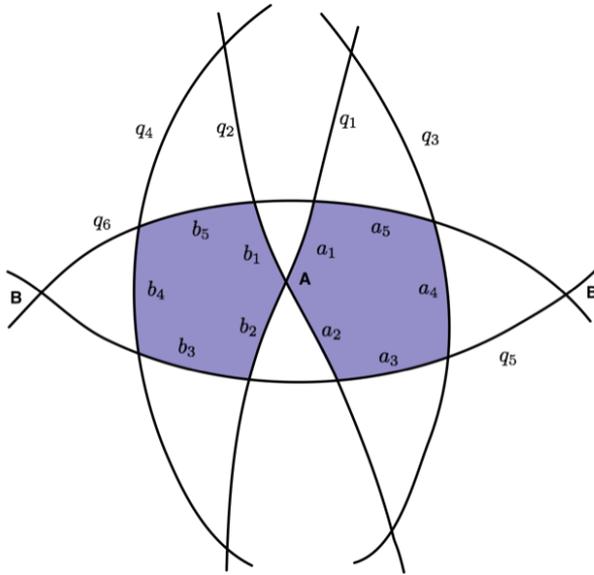


Figura 5.9: Una arreglo triangular con 12 pseudolíneas no existe.

Entonces supongamos que dos pentágonos  $P_1$  y  $P_2$  comparten un vértice, sea éste el vértice  $A$ . Sean  $a_1, a_2, \dots, a_5$  las aristas de  $P_1$ ; y  $b_1, b_2, \dots, b_5$  las aristas de  $P_2$ . Como comparten el vértice  $A$ , sin pérdida de generalidad, sean  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$  las aristas que inciden en  $A$ . (Ver figura 5.9). Sean  $q_1$  y  $q_2$  las pseudolíneas que contienen a  $a_1$  y  $b_2$ ; y  $a_2$  y  $b_1$  respectivamente. Y sean  $q_3$  y  $q_4$  las pseudolíneas que contienen a  $a_4$  y  $b_4$  respectivamente. Como el arreglo debe ser triangular, las aristas  $a_3$  y  $b_3$  deben pertenecer a una sola pseudolínea, al igual que las aristas  $a_5$  y  $b_5$ . Sean estas pseudolíneas,  $q_5$  y  $q_6$  respectivamente. Como  $a_4$  y  $b_4$  deben tener un triángulo, las pseudolíneas  $q_5$  y  $q_6$  se intersectan en un vértice, sea éste  $B$ , haciendo que el triángulo en  $a_4$  y el triángulo en  $b_4$  compartan el vértice  $B$ . Con esto se tiene que cualquier otra pseudolínea del arreglo deberá pasar por la región

---

que encierran  $q_3$  y  $q_4$  (pues cualesquiera dos pseudolíneas se intersectan) y que contiene a los dos pentágonos. Esto obliga a que éstas sólo puedan ser  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$ . Así que no puede haber más pseudolíneas en el arreglo, pues de haber una más ya no se tendría esta estructura. Lo que impone que  $n = 6$ , lo cual es una contradicción, puesto que  $n = 12$ .  $\square$

Así que si de encontrar encajes de gráficas completas a través de un arreglo de pseudolíneas es claro que habrá una infinidad de gráficas que no se podrán encontrar. Debido a esta limitación se pensó en generalizar esta función que asigna a arreglos de pseudolíneas dos encajes de gráficas. Esta generalización la trabajaron Jurgen Bokowski y Tomaz Pisanski [2] en el 2007. Y la manera de generalizar fue considerar un dominio mucho más amplio de la función. En este dominio se incorporan los arreglos de curvas que se estudian en la siguiente sección.

---

«No es fácil ser cronopio. Lo sé por razones profundas,  
por haber tratado de serlo durante toda mi vida;  
conozco los fracasos, las renunciaciones y las traiciones.  
Ser fama o esperanza es simple,  
basta con dejarse ir y la vida hace el resto.  
Ser cronopio es contrapelo, contraluz, contranovela,  
contradanza, contratado, contrabajo, contrafagote,  
contra y recontra cada día contra cada cosa que los demás aceptan  
y que tiene fuerza de ley. »

*Julio Cortázar*

<<The intuitive mind is a sacred gift  
and the rational mind is a faithful servant.  
We have created a society that honors the servant  
and has forgotten the gift.>>

*Albert Einstein*

## 6

---

### Arreglos de curvas

---

Una curva se define como un conjunto  $c$  en una superficie  $S$  donde existe una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  tal que  $c = \alpha([a, b])$ . Una curva es simple cuando la función  $\alpha$  es inyectiva, lo cual hace que la curva no tenga auto intersecciones. Una curva es cerrada cuando  $\alpha(0) = \alpha(1)$ .

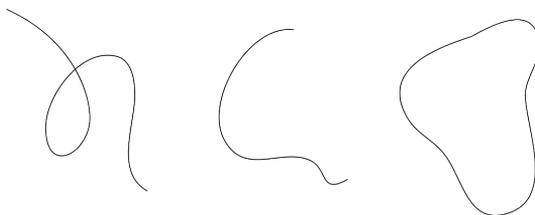


Figura 6.1: Una curva, una curva simple, una curva cerrada y simple

En la sección 4 se habló sobre las propiedades que cumplían los arreglos

---

de pseudolíneas simples que estaban en el plano proyectivo. Ahora se hará de manera similar con curvas cerradas y simples en cualquier superficie, ya no se restringirá al plano proyectivo.

**Definición 6.1.** *Un arreglo de curvas  $C$  en una superficie  $S$  es un conjunto de curvas simples y cerradas, tal que cualesquiera dos curvas se intersectan de manera transversal y tienen a lo más un punto de intersección, y es 2-celular, es decir, que el complemento de las curvas es la unión de discos abiertos.*

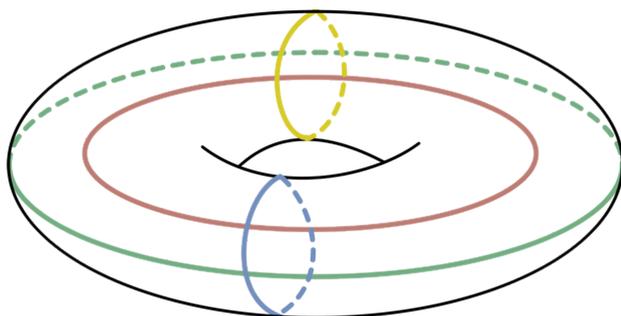


Figura 6.2: Un ejemplo de un arreglo de curvas en el toro con cuatro elementos.

Se dice que el arreglo de curvas es completo si cualesquiera dos curvas se intersectan. Notemos que la figura 6.2 muestra un arreglo de curvas no completo y la figura 6.3 no es un arreglo de curvas, pues tiene una región que no es homeomorfa al disco. Un arreglo de curvas es  $k$ -regular si cada curva se intersecta con exactamente  $k$  curvas. Se puede observar que un arreglo de  $n$  curvas es completo si y sólo si es  $(n - 1)$ -regular. En la figura 6.8 se muestra un arreglo de curvas completo en la botella de Klein. Al

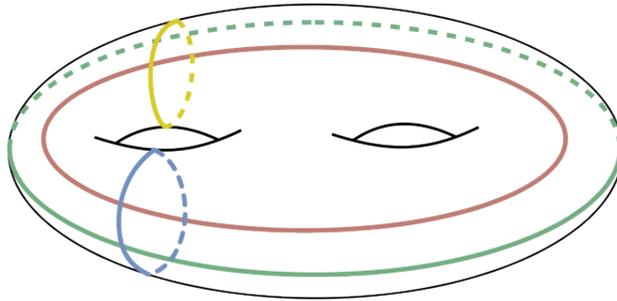


Figura 6.3: Esta superficie es el doble toro y las curvas dibujadas no forman un arreglo de curvas porque hay una región que no es homomorfa al disco.

igual que en el caso de los arreglos de pseudolíneas, un arreglo de curvas  $C$  es simple si por cada punto de él pasan a lo más dos curvas. De ahora en adelante siempre se trabajará con arreglos de curvas completos.

En un arreglo de curvas sobre una superficie  $S$ , para cada curva  $i$  hay una vecindad  $S_i \subset S$  a lo largo de una curva que es una banda de Möbius o una banda cilíndrica, que se denota como  $RN(i) = MS$  y  $RN(i) = CS$  respectivamente, (la notación  $RN$  viene del inglés "regular neighborhood"). Es claro que los arreglos de pseudolíneas son un caso particular de los arreglos de curvas (pues las pseudolíneas son curvas cerradas dentro del plano proyectivo) y en ese caso se tiene que en un arreglo de pseudolíneas  $RN(i) = MS$  para toda curva  $i$  en él.

### 6.1. La combinatoria en un arreglo de curvas

Todo lo que se ha visto tiene un punto de vista topológico. Pero es posible ver a los arreglos de curvas como estructuras combinatorias. Se puede crear una tabla que guarde toda la información de incidencia de los

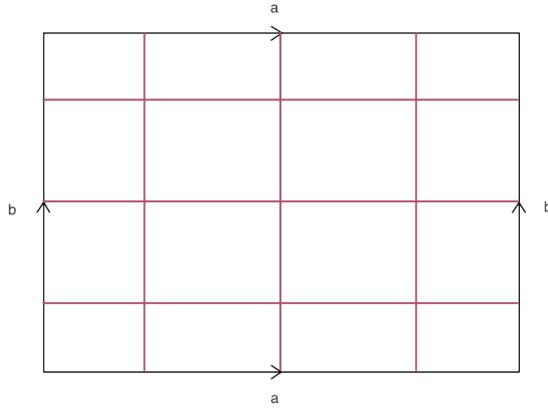


Figura 6.4: Un ejemplo de un arreglo de curvas que es  $k$ -regular en el toro

arreglos. La idea es tomar una curva del arreglo y considerar su vecindad junto con las intersecciones de las demás pseudolíneas tomando en cuenta orientaciones. Estos datos se pueden poner en una tabla y así tener la información del arreglo. Vale la pena recordar que se está trabajando con arreglos de curvas completos, aunque la tabla se puede hacer para cualquier arreglo de curvas, sea completo o no. Esta sería la idea intuitiva. Antes de formalizar este concepto se muestra cómo hacer una tabla con un arreglo de pseudolíneas, que es un caso particular de un arreglo de curvas.

Sea  $\mathcal{A}$  un arreglo de pseudolíneas. Primero se etiquetan las pseudolíneas y luego se le da una orientación arbitraria a cada una de las pseudolíneas del arreglo. Dada una pseudolínea fija orientada se puede obtener la información del orden en que las demás pseudolíneas la cruzan; además se le puede asignar un signo a cada pseudolíneas para indicar las orientaciones locales de los puntos de intersección con la pseudolínea fija. Para fijar ideas

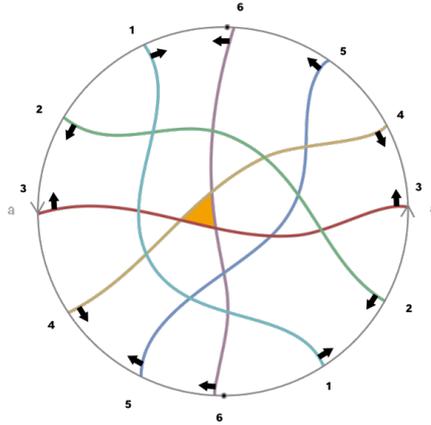


Figura 6.5: Un arreglo con 6 pseudolíneas con una orientación dada.

consideremos la figura 6.5, que es un ejemplo de un arreglo de 6 pseudolíneas, en el que a las pseudolíneas se les dio una orientación particular. Están orientadas de tal manera que las flechas apuntan hacia el triángulo marcado. Se fija una pseudolínea  $p_i$  cualquiera y se recorre para obtener el orden en que el resto de las pseudolíneas la intersectan. A esa pseudolínea  $p_i$  se le asocia un renglón, cuyos elementos son el resto de las pseudolíneas ordenados con respecto al orden de intersección obtenido. Luego, a cada pseudolínea del renglón se le asigna un signo,  $+$  o  $-$ , dependiendo de cómo cruza cada una a la pseudolínea  $p_i$ . Para obtener los signos se recorre la pseudolínea  $p_i$  y para cada pseudolínea que la cruza se le asigna  $+$  si en el momento del cruce la pseudolínea tiene la misma orientación que el recorrido; y  $-$  en caso contrario. Se puede observar que los signos cambian si se recorre la pseudolínea en una dirección o en otra. En la figura 6.6 se muestra la estructura combinatoria del arreglo de pseudolíneas mostrado

en la figura 6.5.

Estructura combinatoria

1.	+6	+5	-4	+3	-2
2.	+1	-6	+4	-3	-5
3.	+4	+2	-5	+6	-1
4.	+1	+5	-6	-2	-3
5.	+2	+3	+6	-4	-1
6.	+2	+4	-5	-3	-1

Estructura combinatoria normalizada

1.	+2	+6	+5	-4	+3
2.	+1	-6	+4	-3	-5
3.	+1	+4	+2	-5	+6
4.	+1	+5	-6	-2	-3
5.	+1	+3	+3	+6	-4
6.	+1	+2	+4	-5	-3

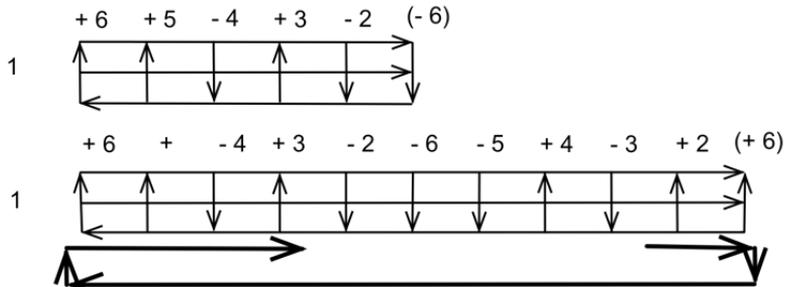


Figura 6.6: Estructura combinatoria de un arreglo de pseudolíneas

---

Diferentes orientaciones resultan en diferentes estructuras combinatorias y diferentes recorridos cambian los signos de cada renglón. Con la finalidad de poder organizar la estructura combinatoria se puede "normalizar". La forma normalizada se obtiene de la original, haciendo que cada renglón empiece con el menor elemento (de pseudolíneas) y cambiándole el signo a positivo, si es que tenía signo negativo. En la figura 6.5 se muestra la estructura combinatoria de la original y un ejemplo de cómo se le pueden cambiar los signos a la pseudolínea con etiqueta 1.

La siguiente definición trata sobre la tabla que se le asocia a un arreglo de curvas en general, para así poder establecer el puente entre la combinatoria y la topología.

**Definición 6.2.** *Dado un conjunto  $E := \{1, \dots, n\}$ , por cada elemento  $i \in E$ , definimos un subconjunto ordenado  $e(i)$  de  $E \setminus \{i\}$ , al cual llamaremos renglón, tal que para cada  $j \in e(i)$  se tenga que  $i \in e(j)$ . A cada elemento de  $e(i)$  se le asigna un signo, ya sea positivo o negativo en función de formar un conjunto ordenado valuado  $E(i)$ . Para cada pareja  $(i, E(i))$  se le asigna una etiqueta  $MS$  o  $CS$ . Además se va a pedir que sea una estructura conexa, es decir que para cualesquiera dos renglones  $e(i), e(j)$  exista un camino de renglones que lleve uno en el otro, es decir el resultado de esta estructura se le llama patrón de intersección  $IP$ .*

Entonces, para obtener el  $IP$  de un arreglo de curvas primero se etiquetan todas las curvas  $C := \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  y se le da una orientación arbitraria a cada curva. Se toma una curva  $c_i$  del arreglo y se considera la vecindad a lo largo de esa curva, (que puede ser cilíndrica o con forma de

---

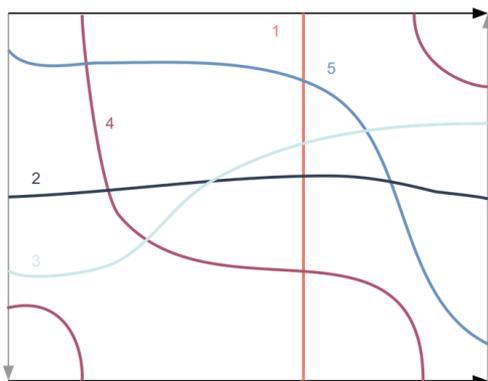
Patrón de intersección				
1.	+3	+2	+4	CS
2.	-4	+3	-1	MS
3.	-4	-2	-1	MS
4.	+2	+3	-1	CS

Figura 6.7: Un ejemplo de un patrón de intersección.

Banda de Möbius). Se corta la franja a lo largo de la curva  $c_i$  empezando justo antes de la intersección con la curva  $c_m$  donde  $m$  es el mínimo de las etiquetas dentro de los índices de las curvas que intersectan a  $c_i$ . Se pone una imagen homeomorfa de la franja en el plano, tal que la curva  $c_i$  se vuelve un segmento de línea y la orientación de la curva está dirigida de izquierda a derecha, de tal manera que la orientación de la curva  $c_m$  apunte hacia arriba y se le da el signo  $+$ ,  $(+m)$ . Entonces se anota para esa curva  $c_i$  cómo y en qué orden el resto de las curvas la intersectan. En un renglón se anota una secuencia de números que representa el orden en que el resto de las curvas intersectaron a  $c_i$  y a cada número se le da un signo para indicar la manera en la que cruzan a la curva  $c_i$ . Se pone un  $+$  si la curva en cuestión apunta hacia arriba o  $-$  en caso contrario.

Como esto se hace para cada curva se obtienen una serie de renglones que se acomodan en una tabla. En la figura 6.8 hay un ejemplo de esto con un arreglo con 5 curvas en la botella de Klein. Es claro que dado un arreglo de curvas puede haber varios patrones de intersección asociados, pues se pueden dar diferentes etiquetas y orientaciones a las curvas. Por esta razón un patrón de intersección se puede normalizar, así como las matrices, de la siguiente manera: cada renglón debe tener como primer elemento al más

pequeño con signo positivo, conservando el orden. Un renglón del tipo  $MS$  se puede normalizar, como en el caso de las pseudolíneas (ver 6.6), mientras que un renglón del tipo  $CS$  se puede permutar de manera cíclica.



Patrón de intersección						Patrón de intersección normalizado					
1.	+5	+3	+2	+4	CS	1.	+2	+4	+5	+3	CS
2.	-4	+3	-1	-5	MS	2.	+1	+5	+4	-3	MS
3.	-4	-2	-1	-5	MS	3.	+1	+5	+4	+2	MS
4.	+5	+2	+3	-1	MS	4.	+1	-5	-2	-3	MS
5.	-4	-1	+3	+2	MS	5.	+1	-3	-2	+4	MS

Figura 6.8: Un ejemplo de un arreglo de curvas completo en la botella de Klein con 5 elementos, junto con su patrón de intersección y el normalizado.

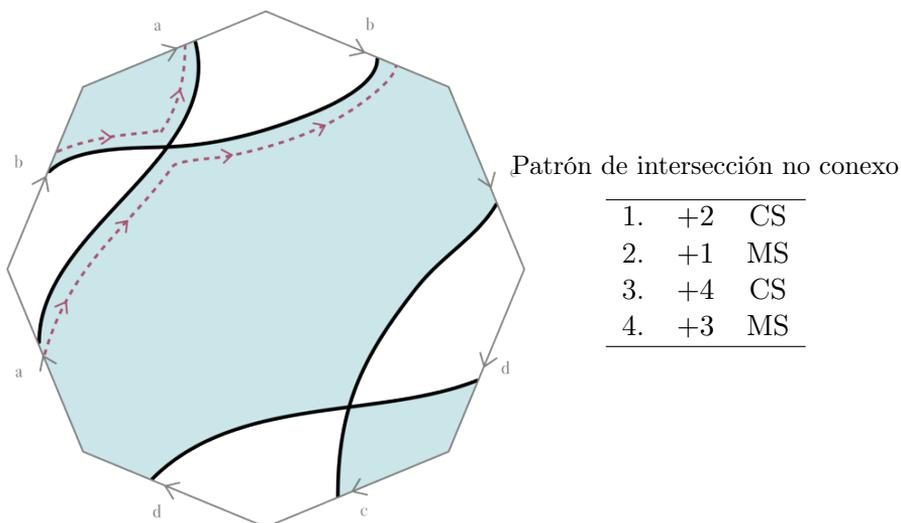


Figura 6.9: Un ejemplo en el que un arreglo combinatorio no cumple con la conexidad para ser un patrón de intersección y su representación no da un arreglo de curvas, pues tiene una región que no es 2-celular.

La pregunta que nace de este concepto de empaquetar la información de un arreglo de curvas es, si uno tiene un patrón de intersección, ¿se puede construir el arreglo de curvas tenga asociado ese patrón? Más aún, si uno da arbitrariamente un patrón de intersección, ¿existirá un arreglo de curvas que induzca ese patrón de intersección? ¿Qué características deberá tener un patrón para que defina un arreglo de curvas? Veremos que con la definición de patrón de intersección basta para que éste defina un arreglo de curvas. En el siguiente párrafo se muestra cómo construir dicho arreglo.

Dado un patrón de intersección  $IP$  con  $n$  elementos, se le puede asociar un arreglo de curvas  $CA$  sobre una superficie  $S$  de la siguiente manera. Cada renglón en el patrón de intersección se puede ver como una franja,

---

ya sea del tipo  $CS$  o  $MS$ , y la intersección de todas las demás curvas está dada. Se pegan todas las franjas, inducidas por cada renglón, de manera propia con respecto al patrón de intersección. La intersección de las curvas está determinada de manera única, debido al patrón de intersección. Se inserta un disco por cada región cerrada por curvas. Entonces se ha demostrado que empezando por un patrón de intersección  $IP$  se puede obtener un arreglo de curvas en una superficie  $S$ . Es decir, se acierta que un arreglo de curvas puede ser valorado desde su patrón de intersección. Por lo que el patrón de intersección es una estructura de datos que se puede analizar con el fin de ahondar en el estudio de los arreglos de curvas.

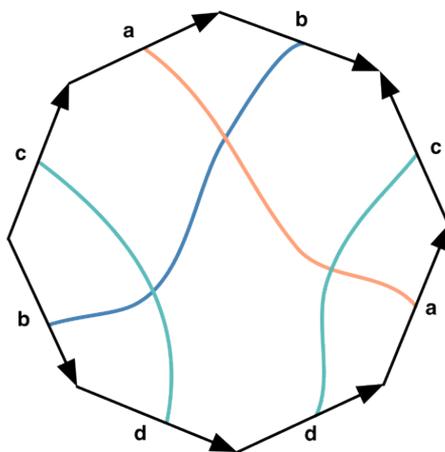


Figura 6.10: Un arreglo de curvas tal que todas su curvas son del tipo  $CS$  sin embargo el arreglo se encuentra en una superficie no-orientable. Se tiene que la característica de Euler de esta superficie es  $\chi = V - A + F = 3 - 6 + 2 = -1$ , que es la característica de tres proyectivos.

Notemos que el hecho que un patrón de intersección tenga todas sus curvas del tipo  $CS$  no implica que el arreglo de curvas se encuentre en una superficie orientable (ver figura 6.10). De todas maneras, hay una manera de verificar si un arreglo de curvas está en una superficie orientable, y es si y sólo si todas sus curvas son del tipo  $CS$  y si puede ser escrito de una manera en la que el signo de  $i$  en el renglón  $j$  difiere del signo de  $j$  en el renglón  $i$ .

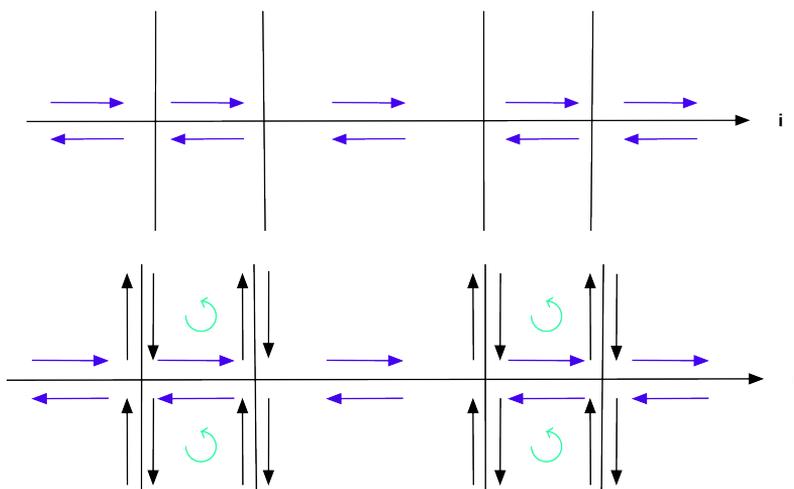


Figura 6.11: En la parte superior se ve la curva  $i$ , cuyas aristas superiores están orientadas de izquierda a derecha, y las inferiores, de derecha a izquierda. En figura inferior se muestra cómo todas las demás aristas de la demás curvas reciben una orientación inducida por la orientación que se le dio a las aristas de  $i$ .

---

Si sucede que el signo de  $i$  en el renglón  $j$  difiere del signo de  $j$  en el renglón  $i$ , para cualesquiera dos curvas, entonces se puede exhibir una orientación consistente a las aristas, inducidas por el arreglo de curvas, y con ello demostrar que la superficie es orientable. Consideremos la curva  $i$ , vista como una franja, que es del tipo  $CS$ , con todas sus respectivas intersecciones que están dadas por el  $IP$ . A cada curva  $i$  se le da la orientación que se muestra en la figura 6.11, donde las aristas que están en la parte superior de  $i$  se orientan de izquierda a derecha, y las de la parte inferior, de derecha a izquierda. Al dar esta orientación de las aristas de  $i$ , queda completamente determinada la orientación de las aristas de todas las demás curvas, si queremos dar una orientación consistente (ver figura 6.11). De hecho se obliga a que las regiones en contra de las manecillas del reloj. Se va a mostrar que esta orientación respeta el  $IP$  y además es una orientación consistente, es decir, que toda región recibe la orientación en contra de las manecillas del reloj. Las curvas que intersectan a  $i$  tienen dos opciones, que apunten hacia arriba (porque en el renglón de  $i$  en el  $IP$  tenían signo  $+$ ) o apunten hacia abajo (porque en el renglón de  $i$  en el  $IP$  tenían signo  $-$ ). Supongamos que en el renglón de  $i$ ,  $j$  es una curva con signo  $+$  y  $k$  una curva con signo  $-$ , para considerar los dos casos. Como se cumple que en la curva  $j$ ,  $i$  tiene signo  $-$ , la orientación se preserva, sigue siendo en contra de las manecillas del reloj (ver figura 6.12). Y en la curva  $k$ ,  $i$  tiene signo  $+$ . La orientación de las curvas se preserva y también se tiene la orientación en contra de las manecillas del reloj (ver figura 6.12). Por lo tanto la superficie es orientable.

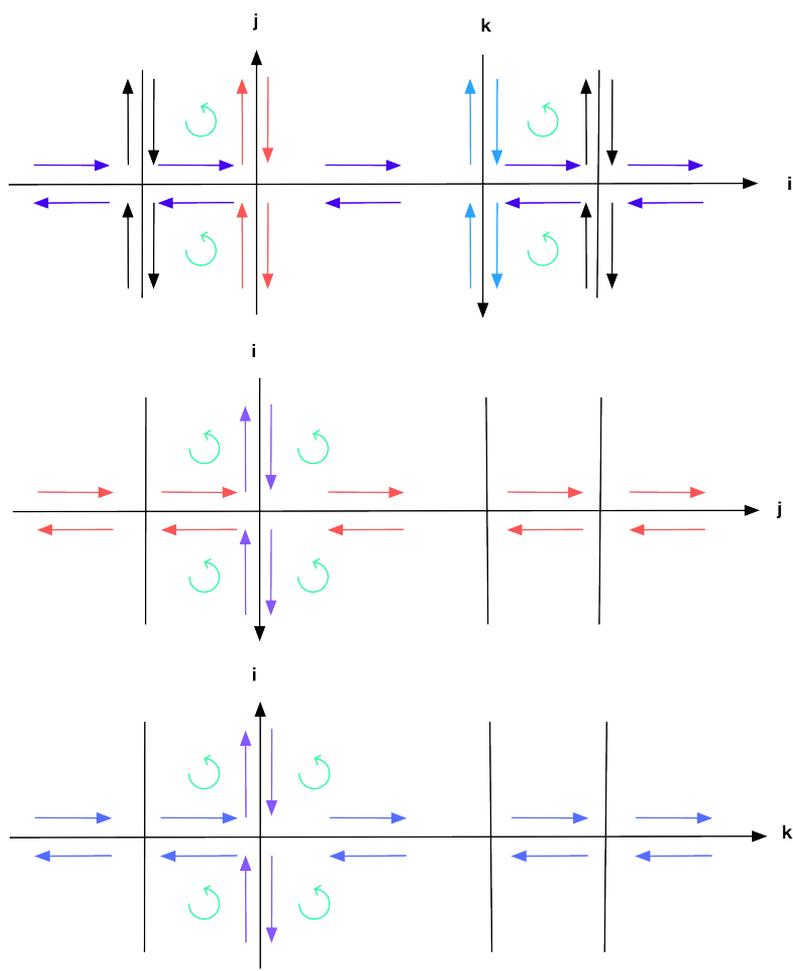


Figura 6.12: En la parte superior se ve la curva  $i$ , y se marcan las curvas  $j$  y  $k$ . En la figura del medio se muestra cómo la curva  $j$  respeta la orientación dada, y la figura inferior muestra cómo la curva  $k$  respeta la orientación dada.

Ahora supongamos que existen al menos un par de curvas  $i$  y  $j$  tal que el signo de  $i$  en el renglón de  $j$  no difiere del signo de  $j$  en el renglón de  $i$ , y supongamos que la superficie en la que vive el arreglo de curvas es orientable. Entonces se le puede asignar una orientación consistente, sin pérdida de generalidad se ésta la que va en contra de las manecillas del reloj. Si consideramos a la curva  $i$  como una franja, que el del tipo  $CS$  con todas sus intersecciones, las aristas ya tienen una orientación fija, como la que se muestra en la figura 6.13.

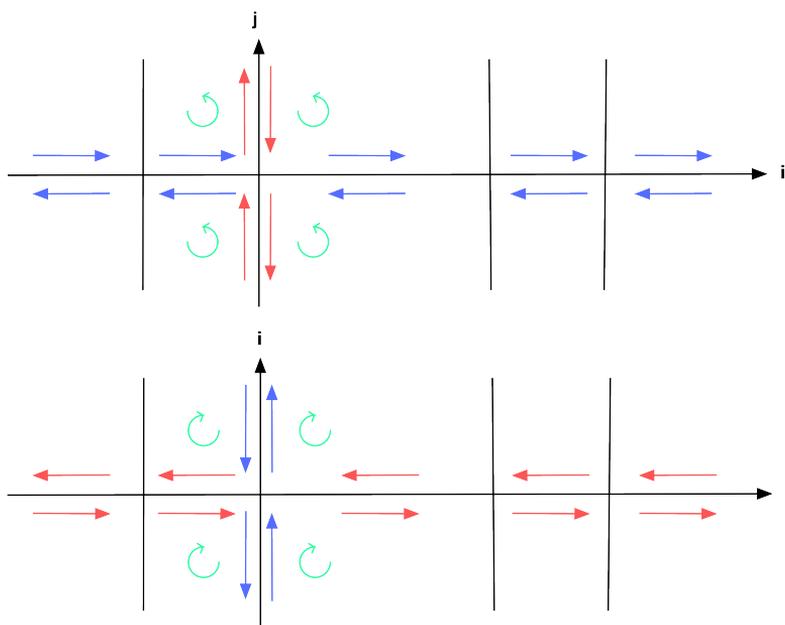


Figura 6.13: En la parte superior se ve la curva  $i$ , y se marcan las curvas  $j$  y  $k$ . En la figura del medio se muestra cómo la curva  $j$  respeta la orientación dada, y la figura inferior muestra cómo la curva  $k$  respeta la orientación dada.

---

De hecho todas las curvas y las aristas ya tienen una orientación fija, que heredan de la orientación de la curva  $i$ , en particular la curva  $j$ . La orientación que recibe  $j$  es la que indica que si se va en dirección de la curva  $i$ , se gira en la dirección de la curva  $j$ . Ahora, si consideramos la franja de la curva  $j$ , y le damos la orientación antes mencionada, se puede ver que, ahora en la vecindad de la franja de  $j$ , se tiene la orientación a favor de las manecillas del reloj. Pero esta es una contradicción por que ya se le había asignado la orientación en contra de las manecillas del reloj, por lo tanto no es orientable.

## 6.2. Mapas petriales asociados a un arreglo de curvas

Al igual que en el caso de pseudolíneas se considerarán arreglos de curvas 2-coloreables con la finalidad de asociarle dos mapas. Un arreglo de curvas es 2-coloreable si se pueden colorear sus regiones con dos colores de manera que ninguna arista sea adyacente a dos regiones con el mismo color. En el caso de los arreglos de pseudolíneas, se pedía que fuera 2-coloreable, para que por cada clase cromática se obtuviera un mapa. En este caso, se hará lo mismo que en el caso de los arreglos de pseudolíneas. Se tomará cada clase cromática y se le asociará un nuevo mapa con los polígonos polares duales. El proceso es esencialmente el mismo en el caso de los arreglos de pseudolíneas.

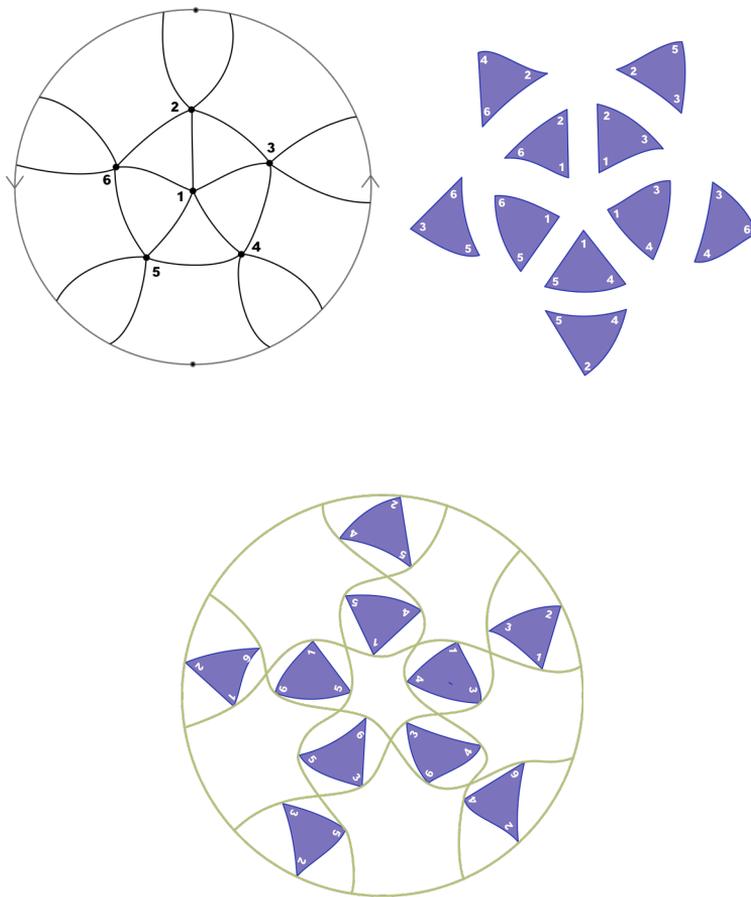


Figura 6.14: La función inversa de Petrie, que se define en la siguiente hoja, está bien definida. En la parte superior izquierda se tiene a  $K_6$  encajada en plano proyectivo,  $M(K_6)$ . En la parte superior derecha se tienen separadas las regiones de  $K_6$  en plano proyectivo. En la parte inferior se tiene el arreglo de curvas que tiene como clase cromática a dicho encaje. Se puede observar que la otra clase cromática tiene 6 caras pentagonales. Por lo que el Petrie de  $M(K_6)$  en el plano proyectivo tiene característica  $\chi = 6 - 15 + 6 = -3$ , pues tiene 6 vértices, 15 aristas y 6 caras. Así que el Petrie se encuentra en 5 proyectivos. El arreglo de curvas se encuentra en el plano proyectivo, pues  $\chi = 15 - 30 + (10 + 6) = 1$ , 15 vértices, 30 aristas y 16 caras.

---

**Definición 6.3.** *Dado un arreglo de curvas 2-coloreable en una superficie  $S$ , definimos la función par de Petrie  $p$ ,  $p : CA(S) \mapsto (P_1(S_1), P_2(S_2))$ , que al arreglo de curvas  $CA(S)$  le asocia un par de nuevos mapas  $P_1(S_1)$  y  $P_2(S_2)$  de la siguiente manera: Por cada clase cromática se toman los polígonos polares duales en cada célula y luego se pegan las aristas de estos nuevos polígonos con la orientación correcta.*

En la sección 3 se vio que un polígono de Petrie de un mapa es un polígono tal que cualesquiera dos artistas consecutivos pero no tres, pertenecen a una misma cara del mapa. Para un ejemplo regresar a la figura 3.8 en la página 42. El hecho de que esta función se llame par de Petrie, se debe a que, como veremos, el par de mapas que provienen de un arreglo de curvas serán Petries uno del otro, es decir  $Pe(P_1(S_1)) = P_2(S_2)$  y  $Pe(P_2(S_2)) = P_1(S_1)$ . Para demostrar esto basta con observar lo siguiente.

Sea  $C$  una cara de un arreglo de curvas  $CA(S)$  dos coloreable, perteneciente a una de sus dos clases cromáticas, digamos la *roja*; y sean  $C_1, C_2, \dots, C_k$  las caras adyacentes a  $C$  que pertenecen a la segunda clase cromática, digamos la *azul*, donde  $k$  representa la longitud de  $C$ . Sean  $C'$  y  $C'_i$  los polígonos polares duales de  $C$  y  $C_i$  respectivamente para  $i = \{1, 2, \dots, k\}$ . Se tiene que por cada arista  $i$  de  $C$ , pasa una sola curva, que sin pérdida de generalidad la podemos etiquetar con  $i$ . De igual manera, los polígonos polares duales heredan la etiqueta  $i$  en sus vértices. Observemos que por cada vértice del arreglo de curvas induce 4 aristas, tanto en el arreglo de curvas como en los polígonos polares duales. Si se tiene el vértice que viene de la intersección de la curva  $a$  con la curva  $b$ , al aplicar  $p(CA(S))$ , se

obtienen 4 aristas  $ab$ , dos para una clase cromática y dos para la otra clase cromática. Y estas 4 aristas encierran al vértice. Ver la figura 6.15.

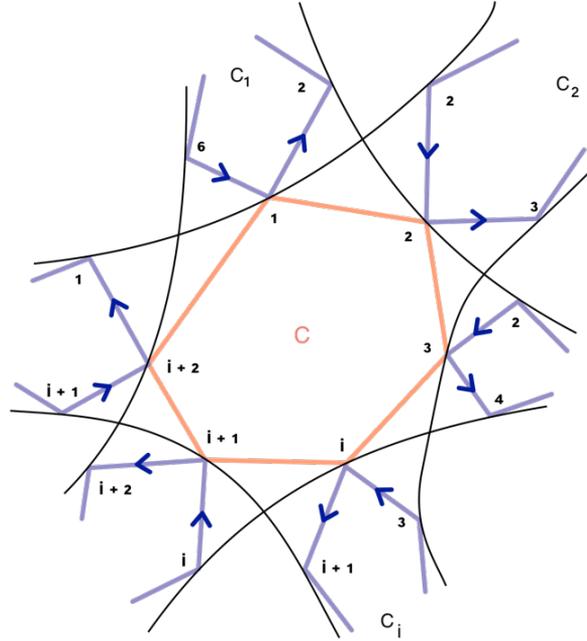


Figura 6.15: La cara de una clase cromática es un polígono de petrie de la otra clase cromática.

Sea  $PP$  el camino de aristas que conforman la cara  $C'$ . Se necesita probar que  $PP$  es un camino de Petrie de la otra clase cromática. Se puede observar que las aristas de  $PP$  también son aristas de la clase cromática azul, puesto que están en biyección con los vértices de  $C$ . Observemos que las aristas  $\{i, i + 1\}$  e  $\{i + 1, i + 2\}$  que se encuentran en  $C'$ , también son aristas en la cara  $C'_{i+1}$ . La tercera arista de  $PP$  es  $\{i + 2, i + 3\}$ , que resulta estar en el camino de Petrie empezado por  $\{i, i + 1\}$  e  $\{i + 1, i + 2\}$ , debido a que la función  $p$ , por definición, revierte la orientación al momento de

---

hacer el pegado. Si se sigue haciendo esto, resulta que el camino de Petrie será justo  $PP: \{i, i + 1, i + 2, i + 3, \dots, i + (l - 1)\}$ . Como esto fue para cualquier cara en el arreglo de curvas se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 6.1.** *Para un arreglo de curvas  $CA(S)$  2-coloreable en una superficie, la función par de Petrie define una pareja de mapas  $(P_1(S_1), P_2(S_2))$ , tal que  $P_1(S_1)$  y  $P_2(S_2)$  son duales de Petrie. Es decir, los caminos de Petrie de  $P_1$  son las caras de  $P_2$  y viceversa.*

Ahora se puede pensar en la función inversa. Es decir, dados dos mapas  $P_1$  y  $P_2$  que cumplan que  $Pe(P_1) = P_2$  y  $Pe(P_2) = P_1$ , ¿existe un arreglo de curvas  $CA(S)$  tal que  $p : CA(S) \mapsto (P_1(S_1), P_2(S_2))$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son las superficies en las que se encuentran  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente? La respuesta es afirmativa. Así que si se logra demostrar esto, se podría formular la siguiente definición.

**Definición 6.4.** *Dado un par de mapas duales de Petrie  $(P_1(S_1), P_2(S_2))$ , la preimágen de la función de Petrie  $p^{-1}$  es un arreglo de curvas  $CA(S)$ , el cual se llama la representación dual de Petrie de  $P_1$  y  $P_2$ .*

En la figura 6.24 se ilustra la idea de la función par Petrie y su inversa, que más adelante se demuestra que efectivamente es una función bien definida. Se tomó como ejemplo el encaje de  $K_4$  en la esfera, se sacó  $Pe(K_4)$  y se encontró el arreglo de curvas que tiene a  $K_4$  y  $Pe(K_4)$  como clases cromáticas.

Para ver que efectivamente se obtiene un arreglo de curvas 2-coloreable consideremos lo siguiente. Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos mapas, tal que  $Pe(M_1) = M_2$

y  $Pe(M_2) = M_1$ . Sean  $1, 2, 3, \dots, n$  los vértices de  $M_1$ . Como el operador Petrie deja los vértices invariantes,  $1, 2, 3, \dots, n$  también son vértices de  $M_2$ .

Sean  $R_1 = \{r | r \text{ es una región de } M_1\}$  y  $R_2 = \{r | r \text{ es una región de } M_2\}$ . Ahora, por cada región  $r \in R_1, R_2$  consideremos su polígono "inverso dual", donde por cada arista se pone un vértice fuera de la región, y dos vértices son adyacentes si las aristas originales eran incidentes. En la figura 6.16

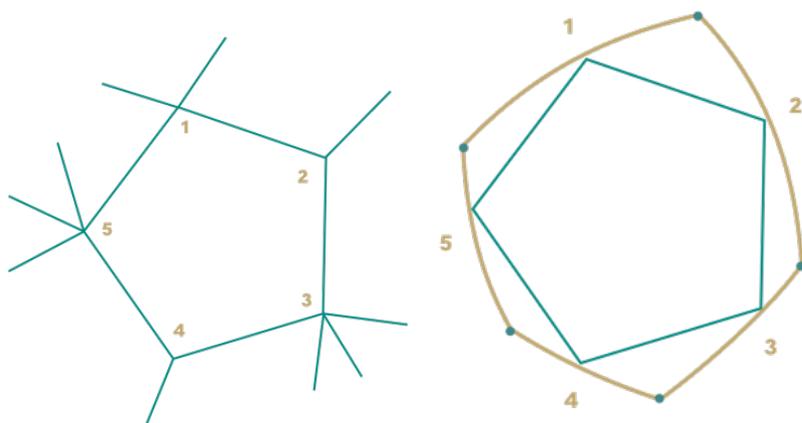


Figura 6.16: Las regiones del mapa se transforman en su polígono "inverso dual".

se muestra como a una región se le asocia su polígono "inverso dual". Las aristas del polígono inverso dual heredan la etiqueta de los vértices de las regiones, y los vértices heredan la etiqueta de la arista (ver figura 6.16). Sean  $R'_1$  y  $R'_2$  los conjuntos que tienen a los polígonos inversos duales de  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos colorear los polígonos de  $R'_1$  con el color 1 y los de  $R'_2$  con el color 2. Y ahora consideremos estas nuevas regiones bicoloradas como piezas de rompecabezas para construir el arreglo de curvas. Sea  $s \in R'_1$  una región de longitud

$k$ , donde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  son sus aristas. Se tiene que cada  $a_i = j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  (pues las aristas heredan la etiqueta de los vértices de las regiones originales).

Cada arista de la región  $s$  la consideraremos como un pedazo de curva, que hereda la etiqueta de la arista. Consideremos una arista de la región  $s$ , sin pérdida de generalidad sea ésta la arista  $a_1 = b$  (con  $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). Sean  $a_2$  y  $a_3$  las aristas de  $r$  que son adyacentes a  $a_1$ , entonces tenemos la sucesión de aristas  $a_1, a_2, a_3$ , que corresponden a etiquetas  $b, c$ , y  $a$  con  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Notemos que esta sucesión de aristas  $abc$  vienen de una suce-

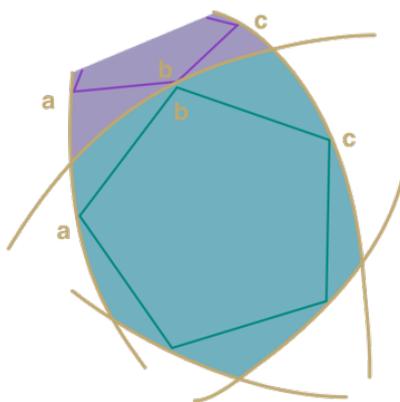


Figura 6.17: El arreglo de curvas es 2-coloreable

sión de vértices  $abc$  de la región original en  $R_1$ . Entonces existe un único camino de Petrie de  $M_2$  que contiene a la sucesión de vértices  $abc$ . Pero los caminos de Petrie de  $M_1$  son las regiones de  $M_2$ , entonces la sucesión  $abc$  de vértices está en exactamente una de las regiones de  $R_2$ , lo que implica que hay una región en  $R'_2$  que tiene a la sucesión de aristas  $abc$ , sea ésta  $s'$ . Esa región  $s'$  la pegamos en la arista  $a$  con la región  $s$  (ver figura 6.17). Como esto fue para una arista arbitraria, se tiene que toda arista de la región  $s$  es incidente a una región de  $R'_2$  (no necesariamente todas las regiones son distintas).

Con esto último se tendría garantizada la 2-coloreabilidad, y sólo falta ver que las curvas son simples y cerradas, y que las regiones del arreglo son homeomorfas con a un disco. Como por cada vértice en  $M_1$  se tiene un orden cíclico y cerrado en las aristas, esto hace que al tomar los polígonos inversos duales, la curva que pasa por el vértice sea simple y cerrada (ver figura 6.18). Y el hecho de que las regiones sean homeomorfas a un disco viene de que las regiones del arreglo coinciden con los elementos de  $R'_1$  y  $R'_2$ , que son homeomorfos a un disco.

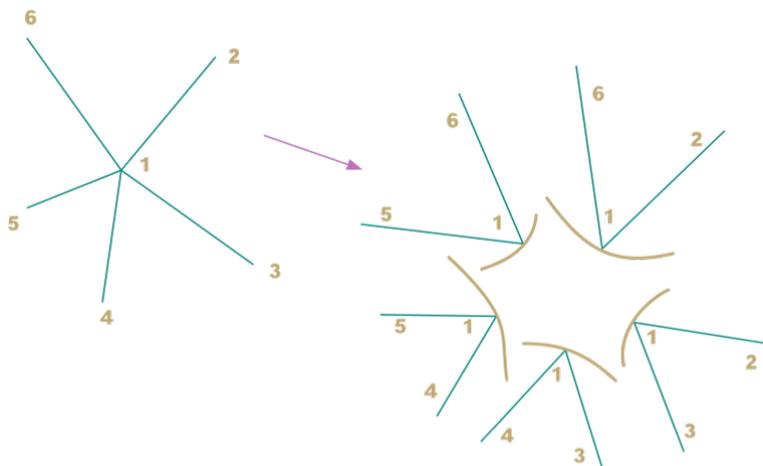


Figura 6.18: El orden cíclico de las aristas que inciden en un vértice garantizan que la curva sea cerrada y simple.

Para fijar ideas se muestra un ejemplo con el mapa dual del encaje de  $K_6$  en el plano proyectivo que se muestra en la figura 6.14. Este mapa  $M := Du(M(K_6))$ , representado en la figura 6.19, también está en el plano proyectivo, pues el operador dual deja la superficie invariante.

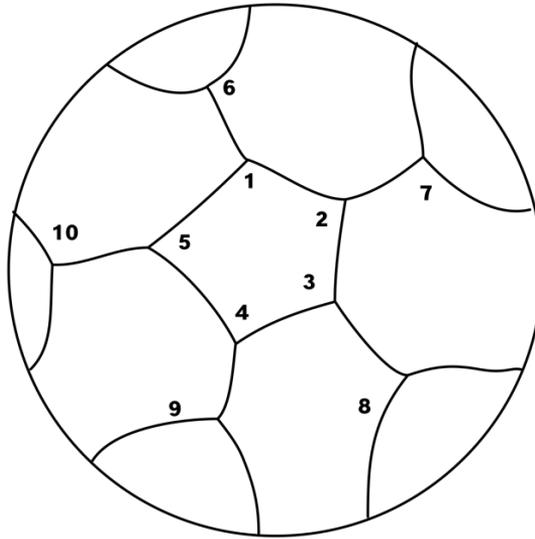


Figura 6.19: El mapa  $Du(M(K_6))$ , tiene 10 vértices, 15 aristas y 6 caras. Yace en el plano proyectivo.

$M$  tiene 10 vértices, 15 aristas y 6 caras. Tiene 6 caminos de Petrie, así que si consideramos al operador Petrie,  $Pe(Du(M(K_6)))$ , también yace sobre el plano proyectivo. Se puede checar muy rápido que los caminos de Petrie son: 15(10)72, 23861, 34972, 438(10)5, 54961 y 697(10)8. Si se toman las regiones de  $M$  y de  $Pe(M)$  y se les aplica la operación "inversodual", quedan como en la figura 6.20. Estos polígonos constituyen los conjuntos  $R'_1$  y  $R'_2$ . Luego se toma la región  $12345 \in R'_1$ , y se ve qué regiones de  $R'_2$  son adyacentes a 12345, para ir las pegando, como en la figura 6.21

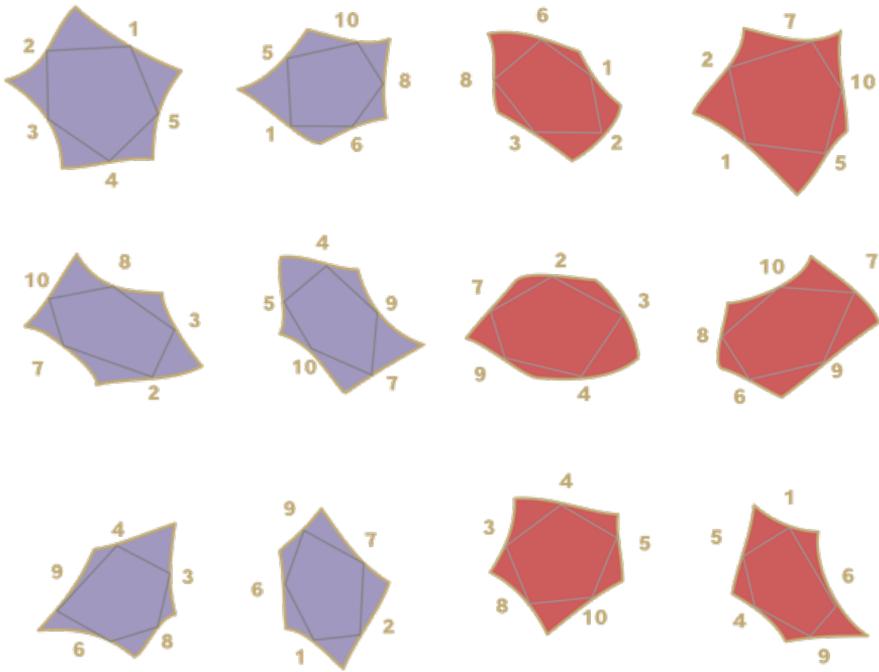


Figura 6.20: Aquí se tienen descritos los conjuntos  $R'_1$  y  $R'_2$

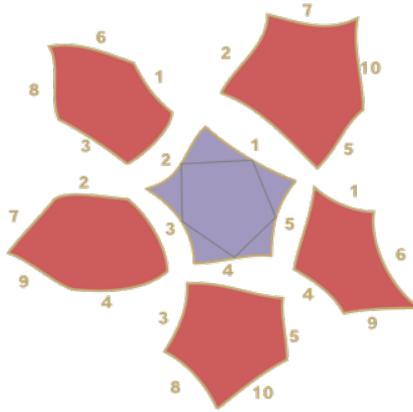


Figura 6.21: La cara 12345 de la clase cromática morada, se pega con las regiones de  $R'_2$ , de la siguiente manera. La arista 1 se pega con la región 15(10)72, la arista 2 se pega con la región 23861, la arista 3 se pega con la región 34972, la arista 4 se pega con la región 438(10)5, y la arista 5 se pega con la región 54961. Donde 15(10)72, 23861, 134972, 438(10)5 y 54961 corresponden a los caminos de Petrie de  $M$ .

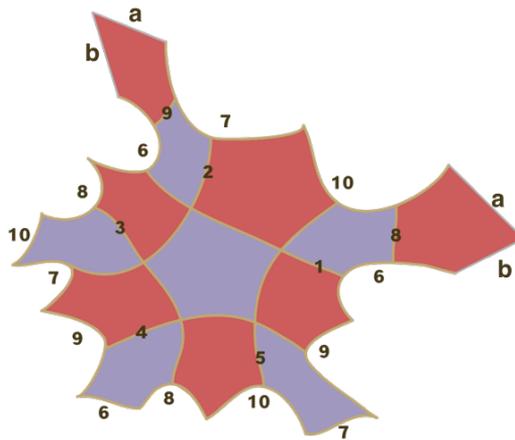


Figura 6.22: El arreglo de curvas que tiene a  $M$  y  $Pe(M)$  como clases cromáticas

---

### 6.3. El caso especial de $K_4$

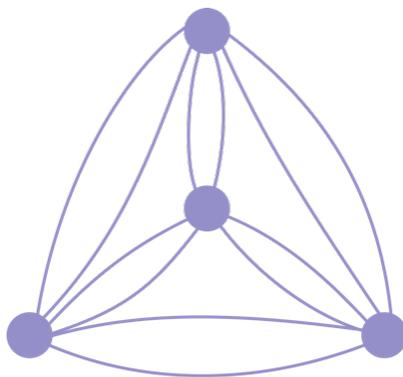


Figura 6.23

El objetivo de establecer el puente entre los encajes de gráficas y los arreglos de curvas es el de encontrar todos los encajes de una gráfica, en particular, en este trabajo interesan las gráficas completas y sus encajes triangulares. Sin embargo utilizando las derivadas directas de un mapa se encontraron todos los encajes posibles de  $K_4$ , no sólo los triangulares, así como todos los arreglos de curvas que tienen encajes de  $K_4$  como clases cromáticas. Para ver esto hay que observar el siguiente fenómeno.

Se tiene que cada arista de  $K_4$  se utiliza dos veces en el encaje (una por cada cara). Entonces si se considera  $K_4$ , pero en vez de que dados cualesquiera dos vértices haya una arista se ponen dos, entonces cada descomposición en ciclos que se puedan hacer en esta nueva gráfica, induce el conjunto de caras que tendrá el encaje en la superficie (ver figura 6.23). Es fácil verificar a mano que los únicos conjuntos de ciclos que se pueden

---

formar son: 4 de longitud 3; 3 de longitud 4; 1 de longitud 4 y otro de longitud 8; 1 de longitud 3 y otro de longitud 9; y 1 de longitud 12. Esto significa que las caras de cualquier encaje debe pertenecer a uno de estos conjuntos de ciclos. Pero con esto no se sabe sobre qué superficie estarán los encajes. Por otra parte, también se pueden aplicar derivadas directas para obtener los encajes.

Si se empieza con el encaje de  $K_4$  en la esfera, y se obtienen todas sus derivadas directas (ver figura 6.23) se tienen todas las parejas de encajes que son duales de Petrie. Se puede observar que todos los encajes tienen como caras a uno de los conjuntos de  $K_4$ . En los siguientes dibujos se muestran las parejas de Petrie, junto con su respectivo arreglo de curvas.

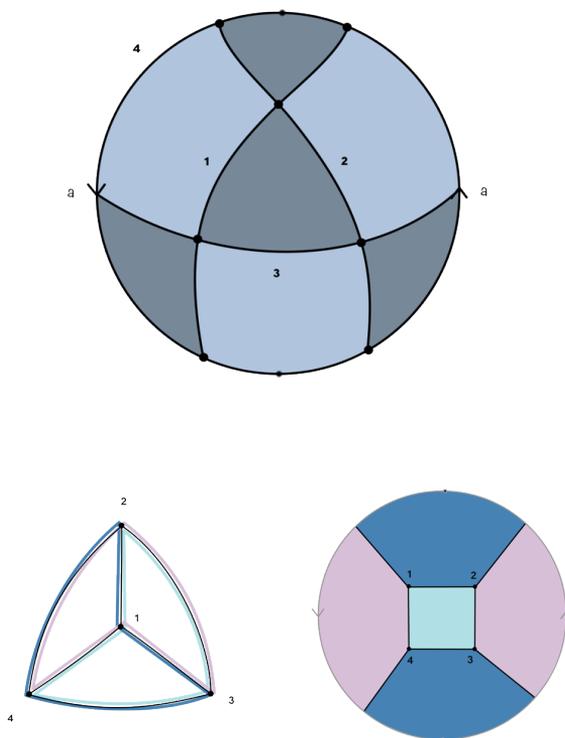


Figura 6.24: En la parte inferior dos encajes de  $K_4$ , el primero en la esfera y el segundo en el plano proyectivo. Se puede observar que éstos son Petrie uno del otro. En la parte superior su correspondiente arreglo de curvas que resulta estar en el plano proyectivo.

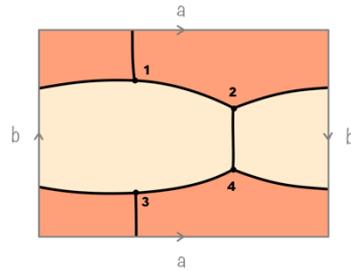
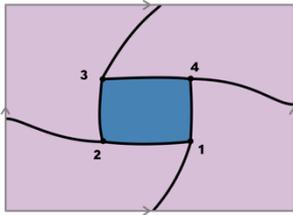
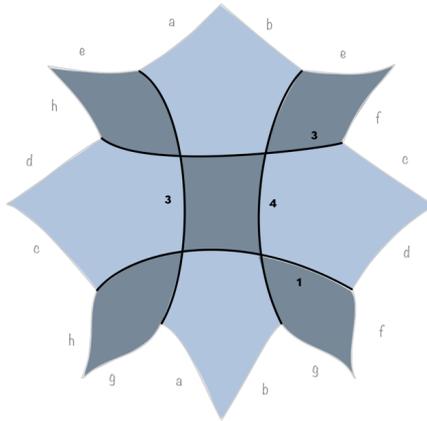


Figura 6.25: En la parte inferior dos encajes de  $K_4$ , el primero en el toro y el segundo en la botella de Klein, y éstos son Petries uno del otro. En la parte superior su correspondiente arreglo de curvas que resulta estar en 4 proyectivos.

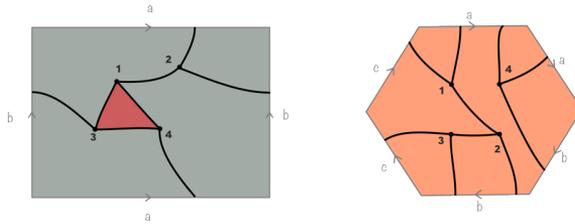
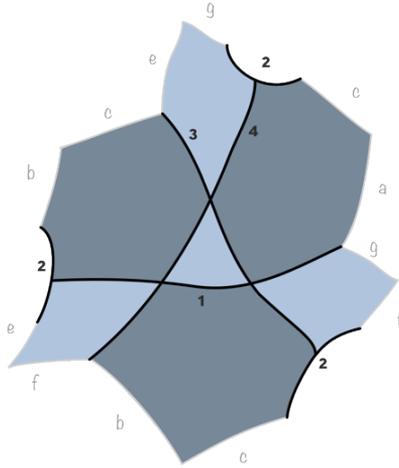


Figura 6.26: En la parte inferior dos encajes de  $K_4$ , uno en el toro y el otro en 3 proyectivos, y éstos son Petries uno del otro. En la parte superior su correspondiente arreglo de curvas que resulta estar en 5 proyectivos.

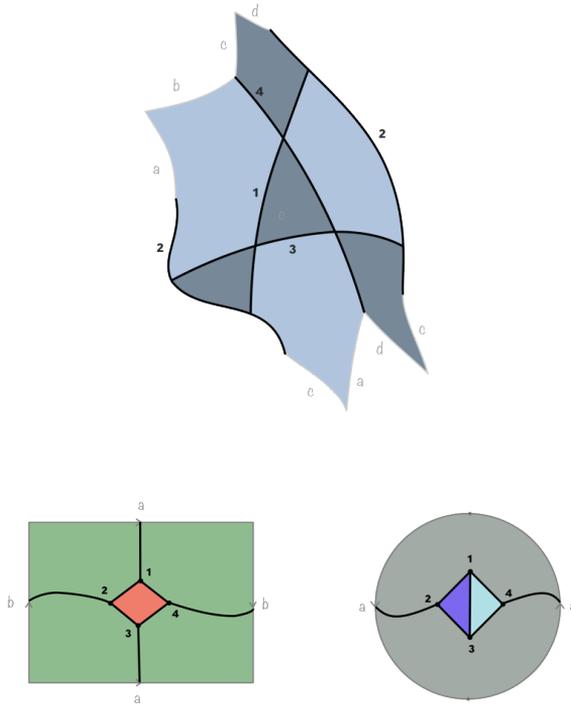


Figura 6.27: En la parte inferior dos encajes de  $K_4$ , el primero en la botella de Klein y el segundo en el plano proyectivo, y éstos son Petries uno del otro. En la parte superior su correspondiente arreglo de curvas que resulta estar en 5 proyectivos.

---

## 6.4. Arreglos de curvas completos

Se puede ver que todos los arreglos de curvas del ejemplo anterior además de ser 2-coloreables son completos, es decir, cualesquiera dos curvas se intersectan. Y eso es por que la gráfica que se está tratando es una completa. Cuando se trabaja con una gráfica completa se tiene que cualesquiera dos vértices son adyacentes, lo que implica que en el arreglo de curvas cualesquiera dos curvas se intersectan, pues cada vértice en la gráfica representa una curva en el arreglo. Como se va a trabajar con gráficas completas, el arreglo de curvas 2-coloreable debe ser completo y una de las primeras observaciones que se puede hacer es que si tiene un número par de curvas, entonces todas las franjas que rodean las curvas son una banda de Möbius  $MS$ , mientras que si se tiene un número impar de curvas, todas las franjas que rodean las curvas son bandas cilíndricas  $CS$ . La razón de ello se puede deducir fácilmente de las figuras 6.28 y 6.29.

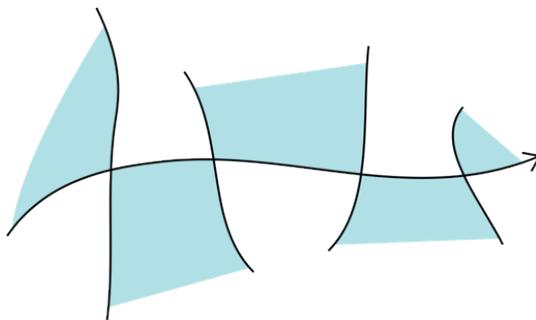


Figura 6.28: Si se tiene un número impar de curvas, cada franja es homeomorfa a una banda cilíndrica  $CS$ .

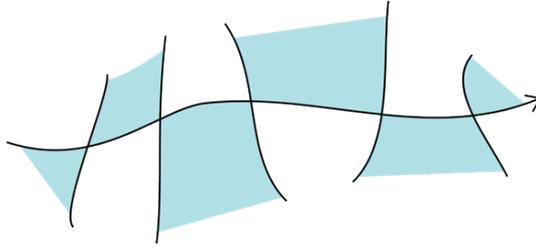


Figura 6.29: Si tiene un número par de curvas, cada franja es homeomorfa a una banda de Möbius  $MS$ .

Resumiendo lo anterior:

**Proposición 6.1.** *Un arreglo de curvas completo con un número par de elementos cumple que todas las franjas son del tipo  $MS$ , mientras que si tiene un número impar de elementos entonces todas las franjas son del tipo  $CS$ .*

**Corolario 6.1.** *Un arreglo de curvas con un número par de elementos yace en una superficie no-orientable.*

Sin embargo no se puede decir nada acerca de la superficie si el arreglo 2-coloreable completo tiene un número impar de elementos, pues puede yacer en una superficie orientable o una no-orientable como se ve en la figura 6.10.

Si se va a trabajar con gráficas completas encajadas en alguna superficie se debe pedir además que el arreglo de curvas tenga una clase cromática formada de puros triángulos.

---

**Definición 6.5.** *Un arreglo de curvas en una superficie se dice que es triangular cuando las células en la descomposición celular en una superficie son 2-coloreables y una de las clases cromáticas consiste de puros triángulos.*

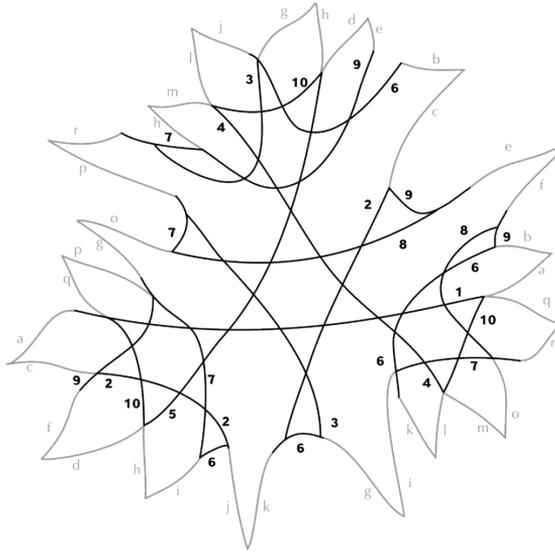


Figura 6.30: Un arreglo de curvas triangular con 10 elementos.

**Teorema 6.2.** *Dado un arreglo de curvas triangular  $CA(S)$  sobre una superficie se tiene que una componente  $P_1(S_1)$  o  $P_2(S_2)$  bajo la imagen de la función  $p$  es un encaje triangular de una gráfica completa. Más aún se pueden obtener todos los encajes triangulares de una gráfica completa a través de los arreglos de curvas.*

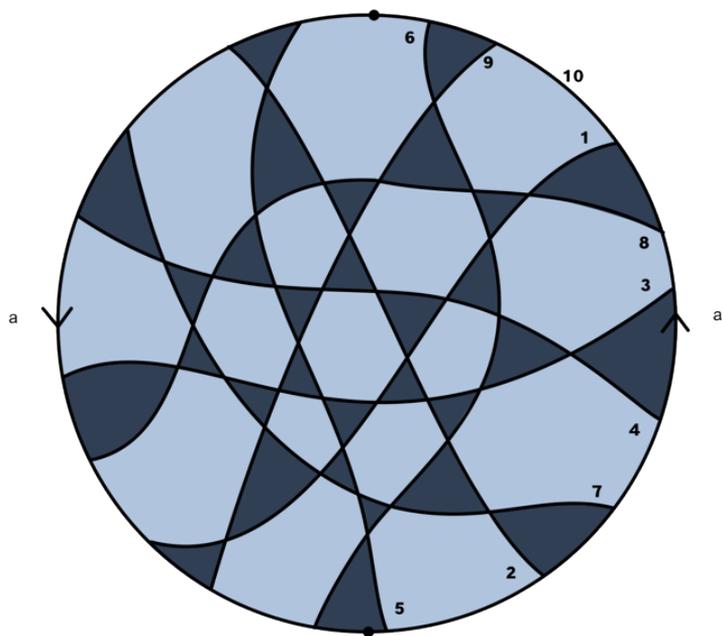
*Demostración.* Esto se sigue del teorema 6.1 tomando la clase cromática triangular; y por las observaciones que se hicieron sobre la función inversa

---

de  $p$ . Se pueden obtener todas, ya que para cualquier encaje triangular de la gráfica completa hay un arreglo de curvas  $CA(S)$  tal que tiene el encaje como una de las componentes de  $p(CA(S))$

□

El 1999, Bracho y Strausz [3], demostraron que una gráfica completa puede tener diferentes encajes no isomorfos en una misma superficie. De hecho demostraron que la gráfica con orden más pequeño, que tiene encajes no isomorfos es  $K_9$  y que  $K_{10}$  tiene 14 encajes no isomorfos. En las siguientes figuras se muestran dos arreglos de curvas triangulares con 10 curvas y cada uno representa un encaje diferente de  $K_{10}$ .



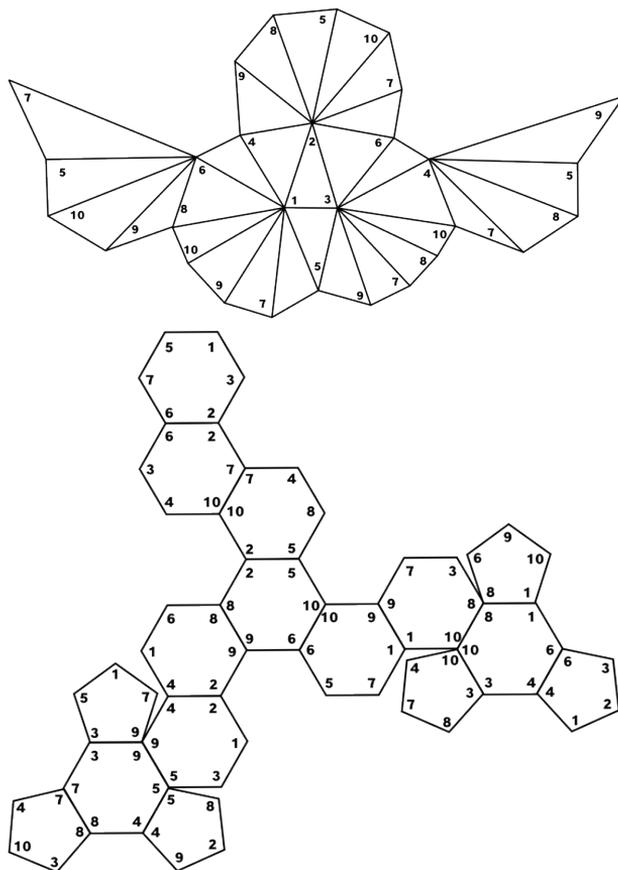


Figura 6.31: En la parte inferior dos encajes de  $K_{10}$ , el primero en el toro y el segundo en la botella de Klein. En la hoja anterior, se tiene su correspondiente arreglo de curvas triangular que resulta estar en el plano proyectivo.

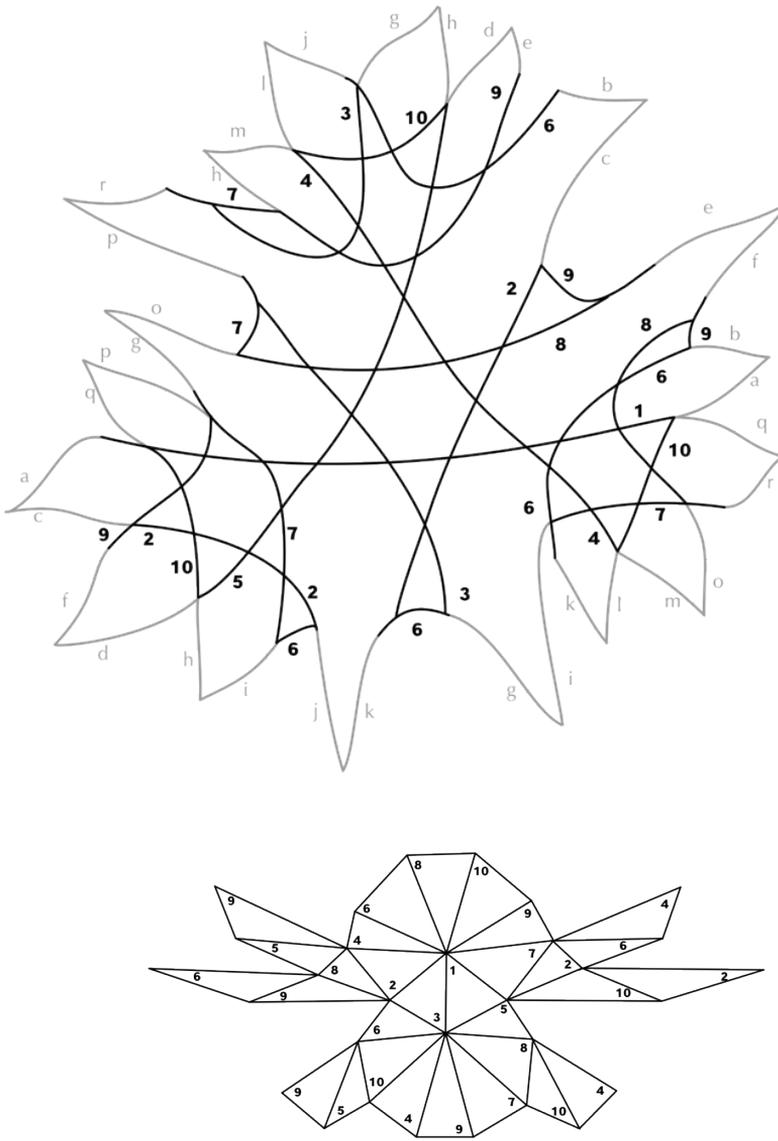


Figura 6.32: En la parte inferior dos encajes de  $K_{10}$ , el primero en el toro y el segundo en la botella de Klein. En la parte superior su correspondiente arreglo de curvas triangular que resulta estar en 4 proyectivos.

---

**Teorema 6.3.** *Sea  $CA(S)$  un arreglo de curvas triangular. La componente triangular bajo  $p(CA(S))$  yacerá en una superficie no-orientable si la otra componente tiene un polígono con un número impar de vértices.*

*Demostración.* Los triángulos que son adyacentes a una cara con un número impar de lados forman una banda de Möbius a la hora de aplicar la función  $p$ . Esto se debe a que se revierte la orientación un número impar de veces, por lo que queda no-orientable. Ver figura 5.7.  $\square$

**Proposición 6.2.** *Un arreglo de curvas triangular con un número par de elementos yace en una superficie no-orientable.*

*Demostración.* Se sigue inmediato de la proposición 6.1.  $\square$

Ahora se analizará el número de elementos que puede tener un arreglo de curvas completo dependiendo si está en una superficie orientable o en una no-orientable. Los dos casos son diferentes, pues en el caso de las superficies no-orientables el número de curvas puede ser arbitrariamente largo, mientras que en el caso de las superficies orientables está acotado por una función lineal.

#### 6.4.1. Arreglos de curvas completos sobre superficies no-orientables

**Teorema 6.4.** *Para cada superficie no-orientable con género  $k \geq 2$  y por cada  $N \geq 2k - 2$ , existe un arreglo de curvas completo con  $N$  curvas.*

*Demostración.* Sea  $A$  un arreglo de pseudolíneas simple arbitrario en el plano proyectivo con  $N$  elementos, que se dibujará en el polígono funda-

mental  $aa$ . Se etiqueta cada una de las pseudolíneas de  $1, 2, \dots, N$  a lo largo de la frontera  $a$  del polígono fundamental. Se subdivide el polígono en  $2k - 2$  partes tal que  $a \mapsto a_1, a_2, \dots, a_{2k-2}$  y tal que cada pseudolínea  $i$  intersece a la frontera en el segmento  $a_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 2k - 2$  y a  $a_1$  para  $a_i$  con  $i > 2k - 2$ . Ahora se cambia la dirección de una copia de  $a_{2j}$  para  $j = 1, 2, \dots, k$ . La frontera de la nueva superficie tiene representación  $a_1, a_2, \dots, a_{2k-2}, a_1, a_2^{-1}, a_3, a_4^{-1}, \dots, a_{2k-1}, a_{2k-2}^{-1}$ , que es una superficie no-orientable con género  $k$ . En la figura 6.33 se muestra un ejemplo.

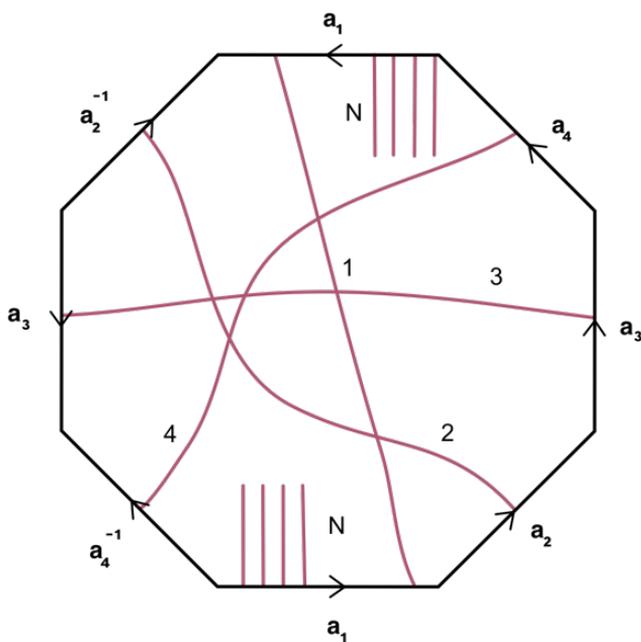


Figura 6.33: Un ejemplo con  $k = 3$

□

---

### 6.4.2. Arreglos de curvas completos sobre superficies orientables

Como se había dicho, el caso de las superficies no-orientables es completamente diferente, pues se verá que la cantidad de arreglos que caben en una superficie está acotado, a diferencia del caso no-orientable.

Primero se clasifican los casos orientables con género 0, 1 y 2. Es muy fácil ver que en el caso de género 0, es decir la esfera, no hay arreglos de curvas completos con más de un elemento; ya que cualesquiera dos curvas se intersectan en al menos dos puntos o en ninguno (ver figura ??). En el caso con género igual a 1, es decir, el toro, es fácil ver que no hay arreglos de curvas completos con más de 3 elementos (ver figura ??). En el caso en que el género sea 2, es fácil ver que si se ponen 3 o menos curvas no se tendrá un arreglo 2-celular, es decir, habrá regiones que no sean homeomorfas al disco. Con un programa hecho en Haskell por Jürgen Bokowski, (para mayor referencia ver [2]) se demostró que hay exactamente seis arreglos de curvas con 5 elementos diferentes en una superficie de género 2, donde por diferente se refiere a que no hay un homomorfismo de las curvas en las curvas que preserve incidencia. Sin embargo con un poco de paciencia uno se puede convencer de que no hay un arreglo de curvas con 6 elementos en una superficie de género 2. En la figura ??, se muestran estos 6 arreglos de curvas. El siguiente teorema trata el caso general:

**Teorema 6.5.** *En cada superficie orientable con género  $g$  existe un arreglo de curvas completo con  $2g + 1$  curvas.*

*Demostración.* Se obtiene un ejemplo para cada género. Consideremos un arreglo de pseudolíneas en el plano proyectivo con  $2g + 1$  elementos. La línea al infinito se convierte en un polígono con  $2(2g + 1)$  aristas, a las que se les da orientaciones alternadas. La construcción es de manera similar a cómo se hizo en el caso de las no-orientables. Pero las etiquetas son tales que se encuentran identificadas aristas antípodas. En la figura 6.34 se tiene un pequeño ejemplo en un doble toro. Así se obtiene una superficie con

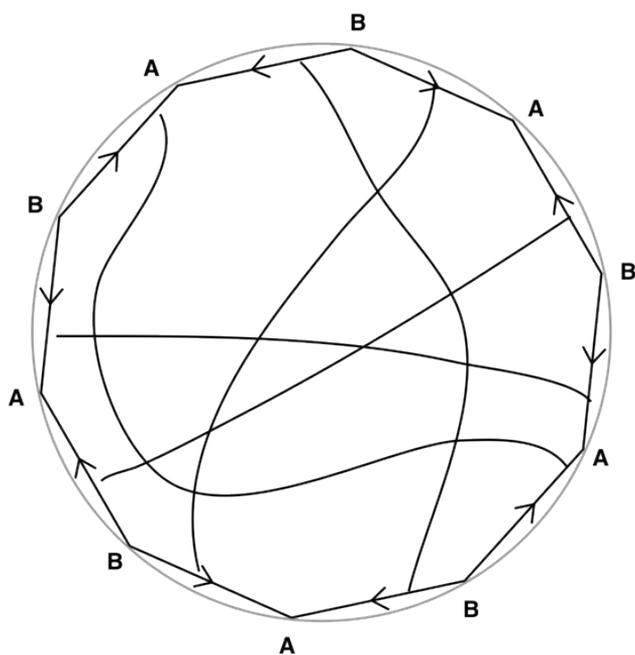


Figura 6.34

género  $g$ . Sólo falta ver que la superficie es orientable. Se puede observar que del polígono  $f_0 = 2$ ,  $f_1 = 2g + 1$ ,  $f_2 = 1$ . De ahí se obtiene que  $f_0 - f_1 + f_2 = 2 - 2g$  que es la característica de Euler para superficies

---

orientables.



«Estamos en la plena cultura del envase.  
El contrato de matrimonio importa más que el amor,  
el funeral más que el muerto,  
la ropa más que el cuerpo  
y la misa más que Dios.»

*Eduardo Galeano*

«Ojalá podamos tener el coraje de estar solos  
y la valentía de arriesgarnos a estar juntos,  
porque de nada sirve un diente fuera de la boca,  
ni un dedo fuera de la mano.  
Ojalá podamos ser desobedientes,  
cada vez que recibimos órdenes  
que humillan nuestra conciencia  
o violan nuestro sentido común.»

*Eduardo Galeano*

*Los caminos del viento*

---

## Bibliografía

---

- [1] Bondy, A. y Murty, U.S.R. *Graph Theory* 2008, Springer
- [2] Jurgen Bokowski y Tomaz Pisanski *Oriented Matroids and Complete-Graph Embeddings on Surfaces* 2007: Journal of Combinatorial Theory, Series A 114 (2007) 1–19
- [3] Javier Bracho, Ricardo Strausz *Nonisomorphic complete triangulations of a surface* 2001: Journal of Discrete Mathematics - DM vol. 232, no. 1-3, pp. 11-18
- [4] J. Conway, J. H. y Burgiel, H. and Goodman-Strauss, C. *The Symmetry of Things* 2008.
- [5] Maurice Frechet, Ky Fan *Combinatorial Topology 21.479*. 1991.
- [6] Gerhard Ringel, *Map Color Theorem* PhD thesis, l'Université Paris 6, 1987.
- [7] J.P. Roudneff, *Matroïdes orientés et arrangements de pseudodroites* 1970.
- [8] Steve Wilson *Operators over Regular Maps* Pacific Journal of Mathematics. Volume 81, Number 2 (1979), 559-568.