UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA DE GRADUADOS

DIVISION DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA SANITARIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO
POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CALCULO DE PROBABILIDADES APLICADOS A LA BACTERIOLOGIA DEL AGUA Y SU APLICACION A PURIFICADORES PARA PEQUEÑOS CAUDALES.

TESIS

QUE PRESENTA EL

ING. JORGE H. SALINAS CACERES

PARA EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

ESPECIALIZADO EN INGENIERIA SANITARIA

MEXICO

1957

A MIS MAESTROS.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

ESCUELA DE GRADUADOS
DIVISION DE INGENIERIA
DEPTO. DE INGENIERIA SANITARIA

ESCUELA DE GRADUADOS
Dirección
No. 72 - 00601
Exp. 72-/1292

Cd. Universitaria, D. F., 31 de octubre de 1956

Ing. Sanit.
Jorge Hernán Salinas Cáceres,
P r e s e n t e.

Me es grato informar a usted que el tema y programa de investigación de la tesis para el Grado de Maestro en Ciencias especializado en Ingeniería Sanitaria, "Principios Fundamentales de Cálculo de Probabilidades Aplicados a la Bacteriología del Agua y su Aplicación a Purificadores para Pequeños Caudales", ha sido aceptada y puede iniciar desde luego los trabajos correspondientes.

A la vez recuerdo a usted que debe rendir informe mensual de estos trabajos a la Dirección de la Escuela, con el VO.BO. del Director de tesis.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
P. A. del Director
El Secretario

Lic. Roberto González Ríos

C.c.p. Sr. Ing. Francisco Montejano Uranga, agradeciéndole haya aceptado dirigir la tesis de referencia.

jnj/das

ESCUELA DE GRADUADOS
DIVISION DE INGENIERIA
DEPTO. DE INGENIERIA SANITARIA

CAPITULO I.-

Introducción.-

El presente trabajo tiene como objetivo, el aclarar una teoría y su aplicación, con fines exclusivamente didácticos, tomando en cuenta la forma muy general y poco explicativa como viene tratada, en los libros de consulta.

Las circunstancias mencionadas han dado como resultado, una comprensión muy limitada de este problema, por parte de las personas que se inician en las actividades de Salud Pública, redundando muchas veces en malas interpretaciones de los procedimientos y Reglamentos.

No está demás advertir que la parte teórica de este trabajo es solo una exposición detallada de una teoría ya conocida, explicando con pormenores que sirvan a los estudiantes o personas que por primera vez se internan en las actividades relacionadas con el control de la potabilidad de una agua.

Estimación de la pureza bacteriológica del agua.

Es bien sabido que el agua sirve de vehículo en la transmisión de enfermedades, cuyos gérmenes tienen su origen en el conducto digestivo del hombre, siendo por ésto necesario el conocimiento de métodos que permiten determinar, si en el agua, hay la posibilidad de la existencia de micro-organismos patógenos provenientes del intestino humano.

Como los procedimientos de laboratorio para la determinación de cada uno de estos gérmenes patógenos, son demasiado laboriosos e imprecisos, se ha convenido en la aplicación de métodos que acusan la presencia de gérmenes, que no son patógenos, pero que por su abundancia, origen y facilidad para determinarlos, han sido elegidos como organis mos indicadores de contaminación.

La presencia y cantidad de estos organismos indicadores, es la expresión del grado de contaminación que tiene un agua y acusa la posibilidad mayor o menor de la presencia de gérmenes patógenos.

Los organismos indicadores que se han seleccionado son los comprendidos en el grupo COLI y los procedimientos para determinar su presencia y cantidad, son los señalados por los "Métodos Normales para los Exámenes de Aguas, Aguas Negras y Desechos Industriales".

El procedimiento apropiado es el uso de medio de cultivo líquido de caldo lactosado, el cual permite la presunción de la existencia de los gérmenes Coli, cuando hay formación de gas.

Suposiciónes en la estimación de la densidad bacteriana.-

De hecho la densidad bacteriana puede estimarse en forma muy rudimentaria a partir de ciertas suposiciones básicas que expondré en el segundo capítulo.

Un método mas racional que las estimaciones obtenidas directamente de las mencionadas suposiciones básicas, es el obtenido por el cálculo de probabilidades, porque ayuda a una mejor interpretación de los resultados obtenidos en el laboratorio.

En adelante el desarrollo de la parte teórica de este trabajo, tratará de los métodos matemáticos que permiten estimar en forma indirecta, la cantidad de gérmenes Coli que se encuentran por unidad de volumen.

Para darle mayor claridad al tema, creo conveniente hacer una revisión de los principios fundamentales de la Teoría de Probabilidades, antes de entrar en la aplicación de las fórmulas que se emplean en la estimación de las densidades bacterianas.

Probabilidades.-

Dos definiciones son comunmente asignadas a la palabra Probabilidad y ellas son: La primera Subjetiva y una segunda Objetiva.

La primera es la más común y se define según Kramer como la medida de la incertidumbre que existe en la mente de un observador, relativa a que suceda o no un evento.

La segunda está ligada con la observación de ciertos fenómenos de la naturaleza que se presentan con extraña regularidad en las repetidas ocurrencias de ciertos eventos, que se supone ocurren enteramente al azar.

Puede también definirse la Probabilidad, como la posibilidad de que suceda un fenómeno al azar, o como la respuesta a la pregunta que uno se haga sobre la posibilidad que tiene de ganar al apostar en un juego de suerte.

Hay dos maneras como se puede medir o estimar la probabilidad y ellas son: 1o)- Por el Método Teórico o a Priori y 2o) Por el Método Experimental o a Posteriori.

Algunas veces es posible la aplicación del primer método y otras veces se aplica el segundo. En casos en que es posible la aplicación de los dos métodos, uno sirve como comprobación del otro.

La determinación a priori dice: La probabilidad de que suceda un evento, se expresa por la razón:

$$P = \frac{\text{Número de casos favorables de que ocurran}}{\text{Número total de casos posibles.}}$$

Considerando cada caso como igualmente posible.

Kramer da como medida de la Probabilidad el siguiente cociente:

$$P = \frac{\text{Número de maneras en que ocurre un evento}}{\text{Número posible de maneras en que puede ocurrir el evento.}}$$

En muchos casos la expresión siguiente se ajusta más al concepto de probabilidades.

$$P = \frac{\text{Número de maneras semejantes en que ocurre un evento}}{\text{Número posible de maneras en que puede ocurrir.}}$$

Considerando la semejanza como la característica común que ligue o identifique a los casos que ocurren.

La determinación a posteriori, se hace en los casos donde es posible la resolución experimental y en este caso la Probabilidad se estima como la razón siguiente:

$$P = \frac{\text{Número de veces en que ocurrió el evento}}{\text{Número total de tentativas ejecutadas.}}$$

Los siguientes ejemplos expuestos a continuación ayudarán a aclarar, las definiciones dadas sobre Probabilidades.

Primer Ejemplo.-

Si arrojamos al aire un dado una sola vez, el número posible de maneras distintas en que puede caer el dado, es "6", por tener 6 caras el dado; el número de maneras en que puede caer un número determinado (supongamos "3") es "1" porque solo hay un 3 en el dado. Luego de acuerdo a las definiciones, la Probabilidad de que salga "3", será:

$$P = 1/6$$

Segundo Ejemplo.-

Si se arroja al aire una moneda una vez, el número posible de maneras en que puede caer la moneda es "2" y el número de maneras en que caiga de una forma dada (supongamos Cara) es "1" y la probabilidad será:

$$P = 1/2$$

Tercer Ejemplo.-

Si tenemos una baraja de 52 cartas; el número posible de maneras en que se puede tomar una carta es 52. El número de maneras en que puede tomarse un As de corazones es "1". La probabilidad de tomar este As en una tentativa es:

$$P = 1/52$$

Si lo que se desea es obtener una carta de corazones, el número de maneras de tomar una carta de corazones es de "13" y la probabilidad será:

$$P = 13/52$$

Cuarto Ejemplo.-

Si se hicieron con un dado 600 jugadas o tentativas y de éstas salieron 100 veces As, la probabilidad de que salga As es:

$$P = 100/600 = 1/6$$

Principios y Fundamentos de las Probabilidades.

Los ejemplos vistos se pueden expresar matemáticamente de la siguiente manera: Si un hecho o evento puede suceder de "a" maneras y fallar de "b" maneras, de suerte que el total de maneras posibles sea "a + b", la probabilidad de que ocurra el evento será:

$$P = a/a + b$$

La probabilidad de que no ocurra o falle el evento, será:

$$q = b/a + b$$

Si sumamos la probabilidad de que ocurra el evento con la probabilidad de que falle, tendremos:

$$P + q = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

$q = 1 - P$ y si $P = 1$, $q = 0$ ó a la inversa.

Esto se explica de la siguiente manera: Si todos los casos posibles son favorables, hay la certeza de que ocurra el evento y por lo tanto la probabilidad es "1". Si por el contrario ninguno de los casos posibles es favorable, es imposible que el evento ocurra y en este caso la probabilidad es "0".

Explicación de los términos.

Evento o Suceso.- Es la probabilidad de que ocurra el fenómeno en observación.

Tentativa.- Es la oportunidad que se da para que ocurra o no un evento.

Evento Favorable.- Es cuando el suceso ocurre.

Evento desfavorable.- Es cuando el evento falla o no ocurre.

Permutaciones y Combinaciones.

En el cálculo a Priori de las Probabilidades es necesario conocer algunas veces la Teoría de las Permutaciones y Combinaciones, para estar en capacidad de determinar el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Permutaciones.-

El número posible de permutaciones o diferentes órdenes en que se pueden poner "n" objetos diferentes es igual a: Factorial de "n" ($= n\,!$). La ley general del número de permutaciones de "n" cosas diferentes se ha determinado por inducción matemática.

De la misma manera se ha deducido la fórmula que dá el número de permutaciones de "m" cosas tomadas de "n" maneras a la vez.

$$P_n^m = m!/(m-n)!$$

De la misma manera el número de permutaciones de "n" objetos tomados de "m" maneras a la vez,será:

$$P_m^n = n!/(n-m)!$$

Y el número de permutaciones de "m" objetos tomados de "m" maneras a la vez es:

$$P_m^m = m!$$

Finalmente el número de maneras en que se puede disponer un grupo compuesto de "s" clases de objetos "m_1" de una clase, "m_2" de otra clase, y así sucesivamente, es:

$$P_{m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_s} = m!/(m_1! \, . m_2! . m_3! \ldots m_s!)$$

Ejemplo de Aplicación.-

De cuantas maneras pueden acomodarse las letras de la palabra "Cámara". En Cámara hay seis letras de las cuales 3 son "a". 1 "c". 1 "m" y 1 "r", aplicando la fórmula tendré:

$$P = 6!/(3!.1!.1!.1!.) = (6\times5\times4\times3\times2\times1)/(3\times2\times1\times1\times1\times1)$$

$$P = 120 \text{ permutaciones.}$$

Combinaciones.-

El número de combinaciones de "m" cosas tomadas de "n" en "n", está dada por la siguiente fórmula:

$$C_n^m = m!/(m-n)!.n!$$

Ejemplo.-

Encontrar el número de combinaciones que pueden hacerse con tres letras tomadas de dos en dos (a,b,c.)

$$C_2^3 = 3!/(3-2)!.2! = 3 \qquad ab,\ ac,\ bc.$$

Análisis Combinatorio en las Probabilidades.-

Segundo Principio.- Si una cosa se puede hacer de "m" maneras diferentes y otra puede hacerse de "n" maneras distintas, las dos cosas pueden hacerse juntas o en formas sucesivas de "mxn" maneras.

Ejemplos de Aplicación.-

Dos monedas que se arrojan simultáneamente al aire, pueden caer de las siguientes maneras diferentes:

A-S , A-A , S-A , S-S (4 maneras)

La probabilidad en que caigan de una de cualquiera de las cuatro formas será:

$P = 1/4$

La probabilidad de que caigan mostrando iguales será:

$P = 1/2$

Ejemplo 2.-

Si se arrojan al aire un par de dados, éstos pueden caer de 6 x 6 = 36 maneras diferentes. La probabilidad de que en una tirada caigan los dados y sumen "8", será:

2-6 , 3-5 , 4-4 , 5-3 y 6-2 entonces

$P = 5/36$

Eventos Independientes.-

Se dice que un grupo de eventos son independientes -

cuando, el acontecimiento de cualquiera de ellos no está - influenciado por el acontecimiento de cualquiera de los -- otros. En caso contrario cuando la ocurrencia de cualquiera de los eventos afecta al acontecimiento de los otros, - se trata de Eventos Dependientes.

__Tercer Principio.-__

Si las probabilidades de que ocurran "n" eventos independientes son $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, la posibilidad de que- ocurran todos esos eventos será:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_n$$

__Ejemplo.-__

Cuál es la probabilidad de obtener un doble "6" en - dos tiradas de un dado?

$$P = 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

Porque la probabilidad en el primer caso de obtener "6" es de 1/6 y en la segunda tirada es también de 1/6.

__Cuarto Principio.-__

Si la probabilidad de que ocurra un evento es p_1 y - si después de que haya ocurrido ese evento es p_2 la probabilidad de que ocurra un segundo, la probabilidad de que ocurran los dos eventos en sucesión será:

$$p_1 \times p_2.$$

__Ejemplo.-__

Cuál es la probabilidad de extraer dos ases sucesivamente de una baraja de 52 cartas, si no se devuelven las - cartas que se van sacando.

La probabilidad de extraer 1 As en la primera tentativa, será: $P = 4/52$. Si se tuvo éxito en la primera tentativa quedarán 3 ases y 51 cartas, entonces la probabilidad de extraer nuevamente As será: $P = 3/51$ y la probabilidad de extraer dos Ases sucesivamente será:

$$P = 4/52 \times 3/51 = 1/221$$

Ejemplo 2.-

Cuál es la probabilidad de que aparezca un As cuando menos una vez en "n" tiradas de un dado?

La probabilidad de que salga cualquier otro número que no sea As es de $5/6$ en una tirada. En "n" tiradas será:

$$P = 5/6 \times 5/6 \ldots\ldots \times 5/6 = (5/6)^n.$$

Por lo tanto la probabilidad de que aparezca por lo menos un As será:

$$P = 1 - (5/6)^n.$$

Si las tiradas son dos, la probabilidad de que salga al menos un As será:

$$P = 1 - (5/6)^2 = 11/25$$

Ejemplo 3.-

En una ánfora hay 30 bolas negras y 20 bolas blancas. Cuál es la probabilidad de que: a) Se extraigan una bola blanca y una negra en sucesión, b) Una negra y una blanca en sucesión y c) 3 negras en sucesión?.

a) La probabilidad de extraer una bola blanca es 20/50; después de sacar esta bola, la probabilidad de sacar una negra es de 30/49. En consecuencia la probabilidad de sacar una bola blanca primero seguida de una negra será:

$$P = 20/50 \times 30/49 = 12/49$$

b) La probabilidad de extraer una bola negra es ---

30/50 y la probabilidad de extraer después una blanca es- 20/49. La probabilidad de extraer primero una negra seguida de una blanca es:

$$P = 30/50 \times 20/49 = 12/49$$

c) La probabilidad de sacar tres bolas negras en sucesión es:

$$P = 30/50 \times 29/49 \times 28/48 = 29/140$$

Ejemplo 4.-

La probabilidad de que Pablo resuelva un problema - es de 1/4 y la probabilidad de que Juan lo resuelva es de 2/3. Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto si Pablo y Juan trabajan independientemente?.

El problema será resuelto a menos que Pablo y Juan - fallen. La probabailidad de que falle Pablo es:

$$P_1 = 1 - 1/4 = 3/4$$

La probabilidad de que Juan falle es:

$$P_2 = 1 - 2/3 = 1/3$$

La probabilidad de que ambos fallen es:

$$P = 3/4 \times 1/3 = 3/12 = 1/4$$

En consecuencia la probabilidad de que resuelvan el pro-- blema es:

$$P = 1 - 1/4 = 3/4$$

Ejemplo 5.-

Cuál es la probabilidad de sacar 4 bolas blancas en una sola tentativa, de una bolsa que contiene 10 bolas -- blancas, 4 bolas negras y tres rojas?.

El número posible de maneras en que se pueden escoger 4 bolas blancas de un total de 10 bolas blancas, es igual al número de combinaciones:

$$C_4^{10} = 10!/(4!.6!) = 210 \text{ maneras.}$$

El número total de maneras en que pueden sacarse 4 bolas de las 17 que hay en total es:

$$C_4^{17} = 17!/(4!.13!) = 2{,}380.$$

La probabilidad de sacar 4 bolas blancas de la bolsa citada, será:

$$P = C_4^{10}/ C_4^{17} = (10!.4!.13!)/(4!.6!.17!) = 3/34$$

Si lo que se desea es extraer en una sola tentativa 4 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas de la bolsa, la probabilidad será:

$$P = (C_4^{10} . C_3^{4} . C_2^{3})/ C_9^{17} = 252/2{,}431$$

Ejemplo 6.-

Una bolsa contiene 20 bolas de las cuales 10 blancas, 7 negras y 3 rojas. Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola al azar sea roja?.

El número total de maneras de extraer una sola bola es 20. La probabilidad de sacar una roja es: 3/20; la probabilidad de que sea blanca es 10/20 y la probabilidad de que salga negra es 7/20.

Si se desea sacar 2 bolas blancas, Cuál será su probabilidad?

El número total de maneras de sacar 2 bolas es:

$$C_2^{20} = 20!/(2!.18!)$$

El número total de maneras de sacar 2 bolas blancas de las 10 será:

$$C_2^{10} = 10!/(\ 2!.8!\ )$$

La probabilidad de que las dos bolas sean blancas, - será:

$$P = C_2^{10} / C_2^{20} = (\ 10!.2!.18!\ )/(\ 2!.8!.20!\ ) = 9/38.$$

Si se sacan 10 bolas, cuál es la probabilidad de que 5 sean blancas, 2 sean negras y 3 rojas?,

Las 10 bolas se pueden sacar en total de C_{10}^{20} maneras.

Las 5 bolas blancas se pueden sacar de C_5^{10} maneras.

Las 2 bolas negras se pueden sacar de C_2^7 maneras.

Las 3 bolas rojas se pueden sacar de C_3^3 maneras.

$$P = (\ C_5^{10}\ .\ C_2^7\ .\ C_3^3\ )/C_{10}^{20}\ .=(10!.7!.10!10!)/(5!.5!.2!.5!.2_0!)$$

$$P = 1{,}323/46{,}189$$

Ejemplo 7.-

Demostrar que siete es la tirada más probable cuando se arrojan dos dados.

Las diferentes maneras en que pueden caer dos dados son:

$m \times n = 36$

	P
La probabilidad de que salga 2 será:	
1 - 1	1/36
De que salga 3	2/36
1 - 2 ; 2 - 1.	
De que salga 4	
1 - 3 ; 2 - 2 ; 3 - 1	3/36

De que salga 5 1 - 4 ; 2 - 3 ; 3 - 2 ; 4 - 1	4/36
De que salga 6 1 - 5 ; 2 - 4 ; 3 - 3 ; 4 - 2 ; 5 - 1	5/36
De que salga 7 1 - 6 ; 2 - 5 ; 3 - 4 ; 4 - 3 ; 5 - 2 ; 6 - 1	6/36
De que salga 8 2 - 6 ; 3 - 5 ; 4 - 4 ; 5 - 3 ; 6 - 2	5/36
De que salga 9 3 - 6 ; 4 - 5 ; 5 - 4 ; 6 - 3	4/36
De que salga 10 4 - 6 ; 5 - 5 ; 6 - 4	3/36
De que salga 11 5 - 6 ; 6 - 5	2/36
De que salga 12 6 - 6	1/36

Se ve que el "7" es el número que tiene mayor probabilidad de salir es decir el "7" es la tirada Más Probable.

Eventos Mutuamente Exclusivos.-

Se llaman así porque cuando uno de ellos sucede, impide la ocurrencia de los otros.

Quinto Principio.-

La probabilidad de que acontezca ya uno o ya el otro de dos eventos mutuamente exclusivos, es igual a la suma de las Probabilidades de los eventos si fuesen solos. La prueba de este teorema resulta de la definición de probabilidad.

Supongamos dos eventos mutuamente exclusivos A y B;

por su naturaleza no pueden ocurrir simultaneamente y los casos posibles como pueden presentarse son los siguientes:

1o) A ocurre y B falla
2o) B ocurre y A falla
3o) A y B fallan

Si "a" es el número favorable de casos en que A ocurre y B falla y "b" es el número de casos favorables en que B ocurre y A falla y "g" es el número de casos favorables en que ambos fallan. El número total de casos igualmente favorables será: a + b + g.

La probabilidad de que ocurra cualquiera de los casos "A" o "B" será:

$$P = (a + b)/(a + b + g)$$

La probabilidad de que ocurra solamente los "A" será:

$$P = a/(a + b + g)$$

La probabilidad de que ocurra B, será:

$$P = b/(a + b + g)$$

La probabilidad de que ocurra A o B es igual a la suma de las probabilidades de cada una de ellas. Este mismo teorema puede aplicarse a cualquier número de eventos mutuamente exclusivos.

Problema de Aplicación.-

Una bolsa contiene 10 bolas blancas y 15 negras. Si se extraen dos bolas sucesivamente, qué probabilidad hay de que sea una negra y la otra blanca?.

Los eventos mutuamente exclusivos del problema son:

a) Sacar una bola blanca en la primera tentativa y una bola negra en la segunda tentativa.

b) Sacar una bola negra en la primera tentativa y una blanca en la segunda tentativa.

En el caso "a" la probabilidad será:

$P = 10/25 \times 15/24$

En el caso "b" la probabilidad será:

$P = 15/25 \times 10/24$

La probabilidad de que ocurra el caso "a" o el "b" será:

$P = 10 \times 15/(25 \times 24) + (15 \times 10)/(25 \times 24) = 1/2$

Problema 2.-

Pablo y Juan se comprometen en un juego en el que intervienen en forma alternativa, sacando una moneda de una bolsa que contiene 3 monedas de plata y 2 de oro. Una vez sacadas las monedas no se devuelven a la bolsa.

Si Pablo inicia el juego, encontrar la probabilidad para cada jugador de que le toque ser el primero en sacar una moneda de oro.

La probabilidad de que Pablo le atine en la primera tentativa es:

$P = 2/5$

La probabilidad de que Juan le atine si Pablo falló, es:

$P = (1 - 2/5) \times 2/4 = 3/5 \times 2/4 = 3/10.$

La probabilidad de que Pablo le atine en su segunda-tentativa si Juan también falló, es:

$P = 3/5 \times 2/4 \times 2/3 = 1/5$

La probabilidad de que Juan le atine si Pablo volvió a fallar, es:

$$P = 3/5 \times 2/4 \times 1/3 \times 2/2 = 1/10$$

Después de tres fallas sucesivas en sacar las monedas de oro, quedan solo en la bolsa las dos monedas de oro y en este caso Juan estará seguro de sacar una moneda de oro.

La probabilidad total de Pablo es:

$$P = 2/5 + 1/5 = 3/5$$

La probabilidad total de Juan es:

$$P = 3/10 + 1/10 = 2/5$$

Expectativa.-

La expectativa de ganar cualquier premio se define como el valor del premio, multiplicando por la probabilidad de ganarlo.

Tentativas repetidas e Independientes.-

Frecuentemente es necesario calcular la probabilidad de que ocurra un evento en "n" tentativas, cuando se conoce la Probabilidad de que ocurra ese evento en una sola tentativa. Por ejemplo puede presentarse el problema de conocer la Probabilidad de que salga un As en seis tiradas de un solo dado.

Los casos mutuamente excluyentes posibles son:

1o) Un As en la primera tirada y ninguno en las otras 5
2o) No As en la primera tirada; As en la segunda y nada en las cuatro restantes.
3o) No As en la primera y segunda tirada; As en la tercera y nada en las tres restantes.
4o) No As en las tres primeras; As en la cuarta y nada en las dos restantes.

5o) No As en las cuatro primeras tiradas; As en la - quinta y nada en la sexta.
6o) No As en las cinco primeras tiradas; As en la -- sexta.

La Probabilidad de que salga As en una sola tirada - es: 1/6.

La probabilidad de que ocurra el caso 1o) es:

$$P = (1/6)(5/6)^5 = 1/6(5/6)^5$$

La probabilidad de que ocurra el caso 2o) es:

$$P = (5/6)(1/6)(5/6)^4 = 1/6\,(5/6)^5$$

La probabilidad de que ocurra el caso 3o) es:

$$P = (5/6)^2(1/6)(5/6)^3 = 1/6(5/6)^5$$

La probabilidad de que ocurra un caso determinado de los anotados es:

$$P = 1/6\,(5/6)^5$$

Como los casos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra una u otra de las seis combinaciones, será:

$$P = 6(1/6)(5/6)^5 = (5/6)^5$$

Debe observarse que la probabilidad de obtener cualquier combinación de 1 As y 5 no ases, es siempre la misma de tal manera que para obtener la probabilidad de que ocurra uno de los del juego de casos mutuamente exclusivos, todo lo que se necesita, es multiplicar la probabilidad de - acontecimiento de cualquiera de las combinaciones especificadas, por el número de formas diferentes en que pueden ocurrir los eventos. Esto conduce a poder formular un teorema muy importante que se conoce como la Ley del Binomio.

Ley del Binomio.-

Teorema 1.- Si la probabilidad de que ocurra un evento en una simple tentativa es P; la probabilidad de que ocurra exactamente "r" veces en "n" tentativas independientes es:

$$P_r = C_r^n \cdot p^r (1-p)^{n-r}$$

siendo

$$C_r^n = n!/(n-r)!.r!$$

El método de prueba de este teorema es obvio a partir de la discusión del caso específico precedente. La probabilidad de que ocurra un evento en un grupo particular de "r" tentativas y que falle en las (n-r) tentativas restantes es igual a:

$$p^r(1-p)^{n-r}$$

Pero como el número de tentativas es "n", el número de maneras en que puede ocurrir el evento "r" veces y fallar (n-r) veces, es igual al número de combinaciones de "n" objetos tomados de "r" en "r". De aquí que la probabilidad es igual a:

$$P_r = C_r^n \cdot p^r(1-p)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}(p^r)(1-p)^{n-r}.$$

Este es el teorema fundamental, de probabilidades y que se conoce como la Ley del Binomio; en esta fórmula el factor C_r^n es igual al coeficiente del término en el que X está elevado a la "r" potencia en el desarrollo de binomio $(X + Y)^n$ y que puede ser encontrado por inducción matemática.

Ejemplo si n = 7 y r = 3. El valor del factor C_r^n será:

$$C_3^7 = 7!/(7-3)!.3!$$

Por otra parte desarrollando el binomio $(X + Y)^7$ - tendré:

$$= X^7 + 7X^6Y + \frac{7\times6}{2!}X^5Y^2 + \frac{7\times6\times5}{3!}X^4Y^3 + \frac{7\times6\times5\times4}{4!}X^3Y^4 + \ldots.$$

El coeficiente del término con X a la "r" o sea X^3 es:

$\frac{7\times6\times5\times4}{4!}$ es igual a C_3^7 como se puede apreciar si multiplicamos este factor por una cantidad igual el numerador y - denominador, igual a $3!$.:

$$\frac{7\times6\times5\times4 \times 3!}{4! \times 3!} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

Ejemplo de aplicación.-

Cuál es la probabilidad de que aparezca un As cuatro veces en el curso de 10 tiradas de un dado?.

De acuerdo con la fórmula:

$P = C_4^{10} \times(1/6)^4(5/6)^6 = 0.0108$

siendo $C_4^{10} = 10!/(4!.6!)$ y $1-p = 1 - 1/6 = 5/6$

Ejemplo 2.-

Se tiran 10 monedas simultáneamente al aire, Cuál es la Probabilidad de que 2 de ellas muestren cara?

$$P_2 = C_2^{10}(1/2)^2(1-1/2)^{10-2} = \frac{10!}{8!.2!}(1/2)^2(1/2)^8 = 45/1,024$$

$P_2 = 0.0439$

Ejemplo 3.-

Si se tira un dado 6 veces, cuál es la probabilidad de que aparezca al menos un As?

Para resolver el problema se hace la siguiente argumentación:

El As aparecerá al menos una vez en el caso 1o; al menos dos veces en el caso 2o; al menos tres veces en el caso 3o, etc.
En el caso 1o. la probabilidad será:

$$p_1 = C_1^6 \, (1/6)^1 (5/6)^5$$

En el caso 2o. la probabilidad será:

$$p_2 = C_2^6 \, (1/6)^2 (5/6)^4.$$

En el caso 3o. la probabilidad será:

$p_3 = C_3^6 \, (1/6)^3 (5/6)^3$ Y así sucesivamente, en el caso 6o. la probabilidad será:

$$p_6 = C_6^6 \, (1/6)^6 .1.$$

Estos eventos compuestos son mutuamente exclusivos de manera de que la probabilidad de que un As aparezca al menos 1 vez es igual a la suma de $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$.

El teorema general que incluye a este problema como un caso especial es el siguiente:

Teorema 2.- Si la probabilidad de que ocurra un evento en una simple tentativa es "p", la probabilidad de que ese evento ocurra al menos "r" veces en el curso de "n" tentativas independientes es

$$P_{\geqslant r} = p^n + C_1^n p^{n-1} q + C_2^n p^{n-2} q^2 + \ldots + C_{n-r}^n p^r q^{n-r}$$

en donde $q = 1-p$

C^n_{n-r} es el coeficiente de p^r en el desarrollo del binomio $(p + q)^n$ y es igual a C^n_r. El valor de $P \geqslant r$ es la suma de los primeros "n-r + 1" términos en la expansión de $(p + q)^n$..

De manera similar si deseamos encontrar la probabilidad de que al menos 2 de las monedas muestren águila, cuando se arrojan simultáneamente 5 monedas tendremos:

$$P_2 = (1/2)^5 + C^5_1(1/2)^4(1/2) + C^5_2(1/2)^3(1/2)^2 + \\ + C^5_3(1/2)^2(1/2)^3 = 13/16$$

El primer término de esta suma representa la probabilidad de que salgan 5 águilas; el segundo término representa la probabilidad de 4 águilas; el tercero de que salgan 3 águilas y el último la probabilidad de que salgan 2 águilas.

Ley Hipergeométrica.- (tentativas dependientes)

Cuando las tentativas no son independientes y el resultado de éstas depende del resultado de las tentativas anteriores, la ley toma una forma diferente, que se conoce como la Ley Hipergeométrica, llamada así por su correlación que guardan con las series hipergeométricas.

Por ejemplo, una urna contiene "m" bolas rojas y "n" bolas negras, totalmente mezcladas. Las bolas se extraen de la urna una a continuación de la otra y sin reponerlas. En un total de p + q sacadas, cuál es la probabilidad de extraer exactamente p bolas rojas y q negras?.

La probabilidad se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$P_{p,q} = \frac{C^m_p \, C^n_q}{C^{m+n}_{p+q}}$$

Esta fórmula está de acuerdo con la definición de probabilidades, en la cual

$$C_{p+q}^{m+n}$$

Es el número posible de maneras y $C_p^m \, C_q^n$ es el número de casos favorables.

Igualmente como la suma del desarrollo del binomio es igual a la unidad, la suma de:

$$\frac{C_p^m \, C_q^n}{C_{p+q}^{m+n}} = 1$$

Si se reemplazan las bolas después de cada extracción y se mezclan en la urna, la ley hipergeométrica se reduce a la Ley del Binomio.

Ejemplo de aplicación.-

Considerar la probabilidad de sacar 2 bolas rojas en 3 sacadas de una urna que contiene justamente 3 bolas rojas y 2 de otro color. Aplicando la ecuación tendré:

$$P_2 = C_2^3 \, C_1^2 \, / C_3^5 = 3 \times 2/10 = 0.6$$

La probabilidad de que en la primera sacada sea roja es de 3/5.
La probabilidad de que en la segunda sacada sea roja es de 2/4 porque sólo quedan 4 bolas de las cuales 2 son rojas.
La probabilidad de que la tercera no salga roja es 2/3, porque dos no son rojas del total de tres que quedan y solo se desea encontrar la probabilidad de sacar 2 bolas rojas en 3 sacadas. La probabilidad combinada en este caso es:

$$P = (3/5)(2/4)(2/3)$$

Pero el resultado deseado se puede obtener de cualquiera de las tres posibles permutaciones. Y la probabilidad requerida será:

$$P_2 = 3 \times (3/5)(2/4)(2/3) = 3/5 = 0.6,$$

El valor encontrado es igual al obtenido por la fórmula de la Ley Hipergeométrica.

Curva de Distribución de Frecuencias.-

De la forma usada para los eventos independientes repetidos, pueden deducirse algunas conclusiones interesantes, para lo cual presentaré un ejemplo que reúna algunas características del caso general.

Tenemos una bolsa en la que se echan 2 monedas de plata y 3 de oro. Determinar la probabilidad de sacar exactamente "r" monedas de plata en "n" tentativas sucesivas, si la moneda que se saca se vuelve a echar en la bolsa.

La probabilidad de "r" eventos con éxito en "n" tentativas está dada por la Ley del Binomio.

$$P_r = C_r^n \, p^r(1-p)^{n-r}$$

donde la probabilidad (p) de extraer una moneda de plata en una simple tentativa es 2/5.

Si el número de extracciones es $n = 5$, la probabilidad de que ninguna de las extracciones de una moneda de plata, es:

$$P_o = C_o^5(2/5)^o(3/5)^5 = 0.07776$$

La probabilidad de que de una moneda de plata en las mismas tentativas, es:

$$P_1 = C_1^5(2/5)(3/5)^4 = 0.2592$$

La tabla que aparece a continuación, muestra los va lores que representan las probabilidades de extraer 0,1, 2,3,4,5 monedas de plata en 5 tentativas.

Probabilidades de "r" sucesos favorables en 5 tentativas.

Valores de "r"	Valores de P_r
0	0.0778
1	0.2592
2	0.3456
3	0.2304
4	0.0768
5	0.0102

Se observará que para "r" igual a 2 da la mayor probabilidad o el Valor Más Probable de P_r; ésto es fácilmente comprendido si vemos que la probabilidad de sacar una moneda de plata en una tentativa es 2/5 es decir que en 5 tentativas seguidas debe esperarse que salgan 2 monedas de plata.

Si se realizan 10 tentativas las probabilidades de extraer 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 monedas de plata serán las que aparecen en la tabla siguiente:

Probabilidades de "r" sucesos favorables em 10 tentativas.

Valores de "r"	Valores de P_r
0	0.0060
1	0.0403
2	0.1209
3	0.2150
4	0.2508
5	0.2007
6	0.1115
7	0.0425
8	0.0106
9	0.0016
10	0.0001

Otra vez resulta que el número Más Probable de even tos con éxito en "n" tentativas es igual a la probabilidad de que suceda el evento en una simple tentativa, multiplicado por el número de tentativas.

N.M.P. = P × n. = 2/5 × 10 = 4

De igual manera si se hicieran 30 tentativas, el Número Más Probable (N.M.P.) se encuentra:

N.M.P. - 2/5 × 30 = 12

Para un valor de r = 12; P_r = 0.1474. Se puede observar que a medida que aumenta el número de tentativas, el valor de P_r disminuye.

Los resultados, expuestos en las tablas, pueden representarse mejor por medio de gráficas, poniéndose como abcisas los valores de "r" y como ordenadas los valores de P_r. Estas representaciones gráficas pueden ser por medio de Polígonos, Histogramas o Curva de distribución de frecuencias.

El área total bajo la curva de distribución es unitaria y ella representa la suma de las probabilidades de 0, 1,2,.....n. eventos con éxito.

Número Mas Probable.-

Se llama número más probable el número "r" de eventos favorables para el cual corresponde mayor probabilidad.

El Número Más Probable se encuentra multiplicando la probabilidad que suceda el evento en una tentativa por el número de tentativas.

La probabilidad de atinarle al Número Más Probable de eventos certeros, decrece a medida que aumenta el número de tentativas.

La probabilidad de errarle al Número Más Probable de eventos certeros o la probabilidad de que no suceda el fenómeno en el Número Más Probable de eventos certeros,-

por una cantidad especificada, crece a medida que aumenta el número de tentativas "n".

El Número Más Probable no tiene significación si el producto de p × n no es un número entero ejemplo si n = 24 y p = 2/5 p.n. = 48/5. En este caso el Número Más Proba-ble es uno de los dos enteros entre los que cae el producto p × n.

La siguiente aseveración es la que hay que tomar en-cuenta: el Número Mas Probable de hechos certeros, es el - mayor entero menor que np + p. Si np + p es un entero hay dos Números Mas Probables y ellos son "np + p" y "np + p - 1".

Ejemplos de Aplicación.-

Si se arroja 100 veces una moneda al aire, cuál es - el N.M.P. de que salgan águilas? Cuál es la probabilidad - de ese N.M.P.?

La probabilidad de que salga águila en una tirada es: 1/2. E. N.M.P. de águilas es = n.p = 100 × 1/2 = 50

La probabilidad de que en 100 tiradas salgan 50 águi las es:

$$P_{50} = C_{50}^{100} \times (0.5)^{100}$$

Aproximaciones a la Ley del Binomio.-

Fórmula de Stirling.- La Ley del Binomio es exacta y en ella se basa la mayor parte de la teoría de las probabi lidades; sin embargo tiene la desventaja de ser muy compli cada en su aplicación, así el cálculo de los valores corres pondientes a los factoriales que entran en C_r^n se hace muy-difícil cuando "n" es grande, por cuya razón se han busca-do fórmulas, que dan aproximadamente los valores de "n!". J. Stirlin desarrolló una fórmula asintótica que da buena-aproximación de los valores de n!. Esta fórmula se denomina asintótica porque los errores que da en % van disminu-yendo a medida que aumenta el valor de "n". Para valores de "n" mayores de 10 el error cometido al usar la fórmula de Stirling es menor del 1%.

$$n! = n^n . e^{-n} \sqrt{2 \pi n}.$$

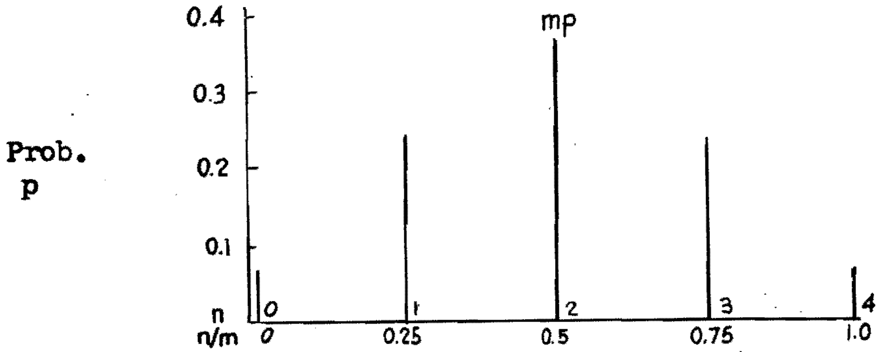
Ley de los números Grandes o de Bernoulli.

Esta ley tiene que ver en las probabilidades envueltas en experimentos de tentativas repetidas. En cierto sentido puede decirse que constituyen el eslabón entre las probabilidades teóricas y las experimentales.

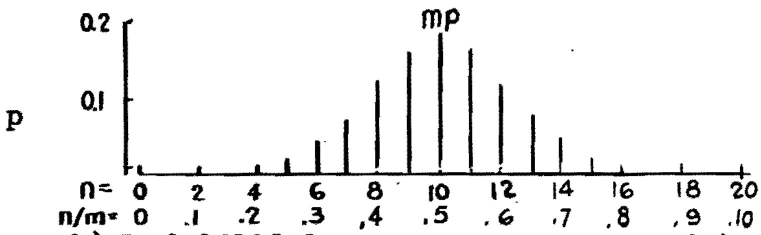
La primera parte de la Ley de los Números Grandes dice que si "p" es la probabilidad de que suceda un evento en una sola tentativa, en "m" tentativas repetidas, el N. M.P. es igual a (p)(m).

La segunda parte y que es en esencia la Ley de los Números Grandes dice: La probabilidad de la frecuencia relativa de sucesos favorables que difieren en cualquier cantidad dada (tan pequeña como uno quiera) del valor mas probable, se aproxima a Cero a medida que el número de tentativas crece indefinidamente.

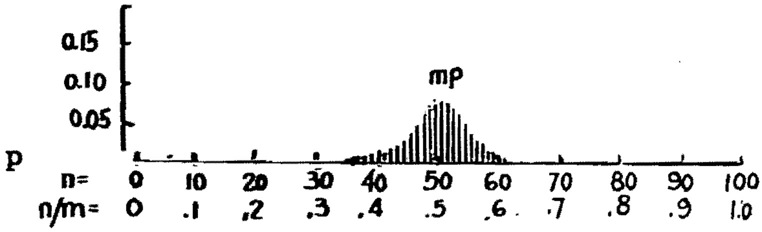
Para comprender mejor esta ley veamos el caso presentado en la figura 1.



a) Probabilidades para n sucesos en cuatro tentativas.



b) Probabilidades para n sucesos en veinte tentativas.



c) Probabilidades para n sucesos en cien tentativas.

Fig. 1.- Distribución de probabilidades para un evento en el cual $p = 1/2$

Lo primero que se observa al examinar las partes a, b, y c de la figura es que la ordenada más grande, que es el valor que tiene mayor probabilidad, ocurre en el valor de la abscisa "n" siendo éste igual a $p \times m$ (En el primer caso $n = 1/2 \times 4 = 2$).

Se ve también claramente al observar las tres partes de la figura 1, que las ordenadas se van juntando hacia el valor más probable, ($m \times p$) cuando el número de tentativas crece.

El primer caso muestra que la probabilidad de la frecuencia relativa que difiere en mas de 0.1 de la del valor mas probable que es 0.5 en cuatro tentativas es 0.625 --- (0.0625 + 0.25 + 0.25 + 0.0625 = 0.625 o lo que es igual a 1 - 0.375). Los valores de las ordenadas se encuentran aplicando la Ley del Binomio $(p + q)^m$ o aplicando la fórmula ya conocida.

$$P_r = C_r^m (p)^r.(q)^{m-r}.$$

La probabilidad de la frecuencia relativa se obtuvo- por la suma de todas las ordenadas que se encuentran fuera de la zona 0.5 ± 0.1

Para el segundo caso en que el número de tentativas- es 20 la probabilidad de la frecuencia relativa de sucesos favorables que difiere en más de 0.1 del valor mas probable es solo 0.26. Se ve claramente en la figura que la zona ± 0.1 encierra a las ordenadas que corresponden a valores de r que va de 8 a 12 y cuyos valores se han determina do igualmente como en el primer caso y los cuales son respectivamente 0.12;0.16;0.18;0.16:y 0.12. La suma de estas ordenadas- da 0.74 y por lo tanto la probabilidad de la frecuencia relativa de sucesos favorables que difiere en mas de 0.1 será: 1 - 0.74 = 0.26. Finalmente en el tercer caso para 100 tentativas, la probabilidad de que la frecuencia relativa- q, difiere en 0.1 del valor mas probable, es solo de 0.024.

Las conclusiones de esta ley son sólo aplicadas a las probabilidades teóricas, y en el caso en que las probabilidades experimentales se aproximan a las teóricas que es -- cuando el número de tentativas crece indefinidamente.

La ley de los Números Grandes, se puede aprovechar - también, haciendo uso del Teorema de Tchebycheff en cuyo - caso la probabilidad para la frecuencia relativa de sucesos que están entre los límites p ± e está dada por la expre-- sión

$$P \geq 1 - \sigma^2/e^2 \quad \text{pero} \qquad \sigma = \sqrt{p.q/m}$$

reemplazando

$$P \geq 1 - (p.q)/(m.e^2)$$

Ley de la Probabilidad Pequeña o Ley de Poisson.

Esta ley fué enunciada por primera vez por Poisson - en 1837 como una aproximación de la Ley del Binomio, bajo- la condición de que la "expectativa" o promedio "a" de sucesos favorables de un evento, sea muy pequeña, comparadacon el número total posible (esto es cuando la probabilidad de que suceda un evento es muy pequeña, pero que al realizar un número suficientemente grande de tentativas, dan lugar a que el evento suceda ocasionalmente).

Poisson da la siguiente fórmula para encontrar el valor de la probabilidad.

$$P_n = (a^n e^{-a})/n!$$

P_n es la probabilidad de n sucesos favorables cuando la expectativa, o en la práctica el número promedio, es conocido.

Para aclarar el concepto expresado, veremos el ejemplo clásico al cual fué aplicada por primera vez.

El registro de soldados muertos por patadas de caballos en un batallón del ejército Prusiano. A primera vista paracе extraño que tales accidentes sigan una ley definida, pero ese es el caso. En este ejemplo se cumplen ambas condiciones necesarias para la aplicación de la Ley. La probabilidad de que un soldado sea golpeado por un caballo en el curso del día es muy pequeña; pero el número total posible es muy grande, dado que el registro comprende al total de soldados del batallón y en un número grande de años. En el presente caso se encontró que el número esperado o la expectativa "a" era pequeña e igual a 0.61 por batallón y por año.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla siguiente junto con los resultados esperados basados en la ley de Poisson. Los valores teóricos fueron calculados aplicando la Ley de Poisson y para un valor de a = 0.61. Se puede apreciar la simplicidad de la Ley ya que, sólo encierra al parámetro "a".

Núm. de muertes por Año en el Batallón	Frecuencia observada	Frecuencia Teórica.
0	109	108.7
1	65	66.3
2	22	20.2
3	3	4.1
4	1	0.6
5	0	0.1
6	0	0.0

Se aprecia la concordancia entre los valores calculados y los observados en los registros.

La Ley de Poisson tiene también su aplicación en el estudio de otros fenómenos de rara ocurrencia como los suicidios que ocurren entre los niños o niñas de escuela, etc.

La primera aplicación de importancia de esta ley en biología está en relación con la cuenta precisa de colonias de levaduras, las cuales se hallan distribuídas al azar en pequeñas áreas de un campo de microscopio.

La siguiente tabla muestra la comparación de las predicciones teóricas y los resultados por experimentación.

Núm. de colonias de levaduras en 1/400 mm^2.	Teórica	Observada
0	3.71	0
1	17.37	20
2	40.65	43
3	63.41	53
4	74.19	86
5	69.44	70
6	54.16	54
7	36.21	37
8	21.18	18
9	11.02	10
10	5.16	5
11	2.19	2
12	0.86	2

Estudios extensivos han mostrado que la Ley de Poisson da un método bastante preciso al tratar con la desviación probable del promedio, para eventos que ocurren al azar, cuando el valor promedio no es mas del 3 por ciento del valor posible más grande.

CAPITULO II

Aplicación del cálculo de probabilidades al estudio de la Bacteriología DEL AGUA.

Densidad bacteriana en el agua.

1o.- Es posible determinar la densidad bacteriana en el agua indirectamente, aprovechando las propiedades que caracterizan a los gérmenes Coli, cuando se les incuba en un medio de caldo lactosado y siguiendo métodos de laboratorio bien establecidos.

Su presencia es descubierta por la propiedad que tienen estos organismos índice de producir gas, al fermentar la lactosa.

2o.- Su cantidad se estima partiendo de las siguientes suposiciones fundamentales:

a) Los gérmenes Coli están distribuídos al azar en todo el volúmen de agua que se estudia.

b) Cuando se obtienen resultados positivos y negativos en una serie de tubos de cultivo, la densidad de gérmenes Coli, es tan baja, que se puede suponer que en ciertos tubos (los que dieron resultado positivo) se tomaron los gérmenes existentes en el volumen de muestra en estudio, dejando el resto de agua sin gérmenes de cuya parte se tomaron los tubos con resultado negativo.

c) Se supone que cada tubo con gas, fué el resultado de la reproducción en medio favorable, de sólo un Coli, tomado en la cantidad de agua puesta originalmente en el tubo.

El hechc de que existiera inicialmente unos cuantos gérmenes, dió lugar a que unos tubos resultaran positivos y otros negativos.

Estas consideraciones, inducen a solucionar el problema llegando a una dilución tal de la muestra, que habiendo tan pocos gérmenes, sea posible, al incubar los tubos de fermentación, que unos salgan positivos y otros negativos y así se pueda suponer que el gas de un tubo fué producido por un organismo solamente.

Es obvio que si no se obtiene ese cambio de signo en la misma serie de tubos de la muestra estudiada, no es posible determinar la densidad bacteriana, puesto que cada resultado positivo, en lo que se refiere a la producción de gas, puede tener origen en un número muy grande de gérmenes Coli.

El agua posiblemente potable, por contener naturalmente pocos gérmenes Coli, no necesita de diluciones, pues sólo con incubar varios tubos se obtiene esa diversidad de positivos y negativos que hacen posible la determinación de la densidad.

Existen dos métodos muy comunes para la determinación de la densidad de organismos Coli a partir de los resultados obtenidos en la incubación de tubos; ellos son: a) El Indice de Phelps y el del Número Mas Probable (N.M.P.)

Existe un tercer método llamado de la Membrana Filtro, para la cuenta directa de las colonias de organismos Coli originados por organismos sencillos.

En el presente trabajo trataré solamente de los dos primeros métodos, por ser los más usados y más económicos en los trabajos rutinarios, relacionados con el control de la potabilidad del agua.

Indice de Phelps.-

Este índice consiste en tomar como densidad de organismo Coli, el recíproco de la mayor dilución positiva de la serie decimal de diluciones de la misma muestra estudiada. Así por ejemplo si se incuban las siguientes porciones que aparecen en la tabla anotando los resultados con relación a la producción de gas tendré:

Porciones.	Resultado.
10.0 cm^3	+
1. cm^3	+
0.1 cm^3	+
0.01 cm^3	-

La densidad será de 1 Coli en 0.1 cm^3 o sea 10 Colis por cm^3. Esto se hace mejor tomando el recíproco. El recíproco de 0.1 (1/10) es 10/ cm^3.

Como se ve, el Indice de Phelps consiste en suponer que a medida que se hacen las diluciones decimales, la densidad de Coli va disminuyendo geométricamente hasta llegar a una dilución en la que ya no hay gérmenes, la cual sirve de índice, para considerar la dilución positiva anterior como producida por la presencia de un solo germen inicial.

En los casos en que los signos resultan en desorden, como por ejemplo que a determinada dilución dé negativo y la mayor dilución siguiente dé resultado positivo; se ordenan, invirtiendo la posición del último positivo con respecto al negativo y se hace la interpretación en la misma forma del ejemplo anterior.

Porciones	Resultados obtenidos	Ordenación
10 cm^3	+	+
1 "	+	+
0.1 "	-	+
0.01 "	+	-
0.001 "	-	-

El resultado es la inversa de 0.1 o sea 10 Coli por cm^3. Esto se explica suponiendo que como los gérmenes están distribuídos al azar, accidentalmente el germen único quedó en la mayor dilución; error que hay que corregir en la forma indicada para hacer una interpretación correcta.

Número Mas Probable.-

En el método en que se aplica el N.M.P. para la determinación de la cantidad de organismos Coli, se tienen que tomar en cuenta lo siguiente:

a) Que las bacterias están distribuídas al azar en la muestra.
b) Que las bacterias viven independientemente.
c) Que un solo organismo, es suficiente para producir una prueba positiva.

El valor obtenido para la densidad de gérmenes Coli, por este método, está definido por H.K. Hoskins y Butterfield, como aquélla densidad bacteriana que de haber existido realmente en la muestra que se está examinando, habría dado mayor frecuencia que ninguna otra, en los resultados analíticos observados, al hacerse un número grande de pruebas.

La expresión "con mayor frecuencia" obviamente implica el Valor Mas Probable o N.M.P. del cual ya se ha hecho una explicación matemática en el Capítulo I.

Al expresar "los resultados analíticos observados" me refiero a los resultados positivos o negativos de las pruebas de laboratorio, relativas a la presencia de gas.

En términos muy generales puede compararse la obtención de pruebas positivas y negativas con los resultados a que se llegan en el "problema de los dados", que se ha estudiado en el Capítulo I y en el cual se vió que al arrojar dos dados simultáneamente al aire, un número muy grande de veces, la pareja Mas Frecuente de caras que se presentan es la que suma "siete" por ser esta suma la que tiene mayor número de combinaciones de sumandos, que dan el resultado citado.

Es oportuno aquí indicar que no es lo mismo el Número Mas Probable que la Mayor Probabilidad; así en el caso de los dados en N.M.P. es el "7" y en cambio la Mayor probabilidad es 6/36 = 1/6. Lo que sí va siempre relacionado es, --

que el N.M.P. es el que tiene mayor probabilidad de acontecer.

Muchos fenómenos naturales acontecen en forma tal, que la distribución de sus frecuencias es simétrica y sus valores pueden hallarse aplicando directamente la expresión matemática de la Ley del Binomio de Newton. A la distribución simétrica de frecuencias se le llama en estadística Curva Normal de Distribución de Frecuencias y el cálculo de la ordenada de cualquier punto de la curva, puede obtenerse mediante la aplicación de la fórmula del Binomio o con la Ecuación de Gauss que representa a la curva normal, y que dá un valor para el cálculo de las ordenadas igual a:

$$Y = (N/\delta \ \sqrt{2\pi})e^{- x^2/\delta^2}$$

Hemos visto también que un gran número de fenómenos naturales y artificiales, siguen un desarrollo de acuerdo a Leyes que difieren en algo de la Ley del Binomio; así por el ejemplo el caso de la reproducción de Bacterias y levaduras a las cuales puede aplicarse la ley de la pequeña probabilidad o ley de Poisson, como ya se indicó anteriormente.

Se puede definir también que el N.M.P. de organismos Coli en una muestra de agua, es la densidad que tiene mayor posibilidad de producir un resultado analítico particular.

J. Greenwood and G,Undy Yule, en sus estudios realizados sobre "Interpretación Estadística de algunos métodos bacteriológicos empleados en Análisis de Aguas", muestran que la distribución de "n" organismos en "V" ml. de agua, de donde se supone que se extraen al azar porciones de 1 ml., los Números Probables de porciones de 1 ml. conteniendo 0,1,2,3,4, etc. organismos en cada porción de 1 ml. están dados por el desarrollo de la expresión binomial siguiente:

$$\left(\frac{V-1}{V} + \frac{1}{V}\right)^n$$

Como tanto "n" como "V" son numéricamente grandes es posible de acuerdo con Poisson transformar esta expresión en la siguiente:

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + (\lambda^2/2!)\, e^{-\lambda} + (\lambda^3/3!)\, e^{-\lambda} + \ldots .$$

Sabemos que $\lambda = n/V$ (densidad promedio de coliformes) reemplazando el valor de n.

$$\left(\frac{V-1}{V} + \frac{1}{V}\right)^n = \left(\frac{V-1}{V} + \frac{1}{V}\right)^{\lambda V}$$

Desarrollando este último binomio tendré:

$$\left(\frac{V-1}{V} + \frac{1}{V}\right)^{\lambda V} = \left(\frac{V-1}{V}\right)^{\lambda V} + \lambda V \left(\frac{V-1}{V}\right)^{\lambda V - 1} .1/V +$$

$$+ (\lambda V/2!)(\lambda V - 1)\left(\frac{V-1}{V}\right)^{\lambda V - 2} .1/V^2 + \ldots .$$

Ahora bien sabemos que el binomio $(1 + 1/V)^V = e$ (base de los logaritmos Neperianos) por ser V muy grande y desde luego

$$(1 + 1/V)^{\lambda V} = e^{\lambda}$$

siguiendo el mismo criterio

$$\left(\frac{V-1}{V}\right)^{\lambda V} = (1 - 1/V)^{\lambda V} = e^{-\lambda}$$

Reemplazando los valores encontrados en el binomio desarrollado tendré:

$$\left(\frac{V-1}{V} + 1/V\right)^{\lambda V} = e^{-\lambda} + \lambda V e^{-\lambda} . 1/V + \frac{\lambda^2 V^2}{2!} e^{-\lambda} . 1/V^2 + \ldots$$

Se ha tomado en cuenta que "λV" es practicamente --- igual a "$\lambda V - 1$"

Simplificando llegamos a:

$$\left(\frac{V - 1}{V} + 1/V\right)^{\lambda V} = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + (\lambda^2/2!)e^{-\lambda} + (\lambda^3/3!)\,e^{-\lambda} + \dots$$

Los términos sucesivos de la serie representan respectivamente la probabilidad de que la porción de 1 ml., contenga exactamente 0. 1. 2. 3. etc. bacterias Coli. De aquí que la probabilidad de que la porción de muestra de 1 ml.- no contenga bacterias Coli, es decir que sea negativa, es "$e^{-\lambda}$" y la probabilidad de que sea positiva es $(1 - e^{-\lambda})$

Para porciones que contienen "N" mls. de muestra, similarmente la probabilidad de que el resultado sea negativo es:

$$e^{-N\lambda}$$

Y la probabilidad de que resulte positivo es:

$$(1 - e^{-N\lambda})$$

Un desarrollo más avanzado del N.M.P. se puede tener mediante ejemplos como el siguiente:

Supóngase una serie decimal en la que resultan positivas las porciones de 100 y 10 ml., en lo que se refiere a bacterias Coli y que las porciones de 1, 0.1, y 0.01 ml. salen negativas.

La probabilidad "p" de que estos resultados ocurran al mismo tiempo y que la densidad de bacterias Coli caiga entre los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = \lambda$, es entonces:

$$P = \frac{\int_0^{\lambda} (1-e^{-100\lambda})(1-e^{-10\lambda})e^{-\lambda}.e^{-0.1\lambda}.e^{-0.01\lambda}.d\lambda}{\int_0^{\infty} (1-e^{-100\lambda})(1-e^{-10\lambda})e^{-\lambda}.e^{-0.1\lambda}.e^{-0.01\lambda}.d\lambda}$$

El denominador es una integral definida con un valor numérico de a = 0.8100018. El numerador desarrollando el - producto e integrando da:

$$+\ e^{-1.11\lambda} - e^{-11.11\lambda} - e^{-101.11\lambda} + e^{-111.11\lambda} \quad \text{luego:}$$

$$Y = 1.234565(e^{-1.11\lambda} - e^{-11.11\lambda} - e^{-101.11\lambda} + e^{-111.11\lambda})$$

Y tiene un valor modal máximo cuando $\lambda = n/V = 0.23$

Se pueden deducir ecuaciones, curvas y valores máximos similares para otras combinaciones de resultados.

Si se hacen siembras múltiples de porciones decimales, son significativos los resultados de solo tres.

La forma como se escogen y los ajustes que tienen que hacerse con los resultados, en los casos aparentemente anormales, se explica en los "Métodos Normales". Tenemos - que hacer referencia de esta fuente de Tablas útiles del N.M.P., asociadas con los diversos resultados de pruebas de laboratorio.

Se puede obtener un solo valor numérico de una serie de resultados analíticos encontrando el N.M.P. de cada resultado y calculando la mediana de los Números Mas Probables.

La forma general de la curva de probabilidades de las densidades de Coliformes para tres resultados significativos es:

$$Y = (1/a)\left((1-e^{-N1\lambda})^{p}(e^{-N1\lambda})^{q}\right)\left((1-e^{-N2\lambda})^{r}(e^{-N2\lambda})^{s}\right)\left((1-e^{-N3\lambda})^{t}(e^{-N3\lambda})^{u}\right)$$

En esta fórmula N_1, N_2 N_3, etc., son cantidades en - ml. de las porciones de muestra inoculada en los tubos de fermentación. p,r,t, etc., son los números de porciones de dimensiones respectivas que dan resultado positivo de bacterias Coliformes.. q,s,u, etc., son el número de porciones

de dimensiones respectivas que dan resultado negativo.
λ = Concentración de Coliformes por ml. e = base de los logaritmos Neperianos (2.7182818.) a = una constante.
Y = Probabilidad de ocurrencia de un resultado particular si la concentración de la muestra sacada es λ

El Modo de esta curva de probabilidades y por lo tanto el N.M.P. de organismos Coliforme (λ) se determina encontrando el valor de λ que produce un máximo valor de Y o igualando a cero la primera derivada. Derivando la ecuación 1 y luego ordenando después de igualar a cero, tenemos la ecuación 2.

$$qN_1 + sN_2 + uN_3 \ldots = pN_1 \left(\frac{1}{e^{N_1\lambda} - 1} \right) + rN_2 \left(\frac{1}{e^{N_2\lambda} - 1} \right) + tN_3 \left(\frac{1}{e^{N_3\lambda} - 1} \right) + \ldots 2.$$

Se observará que estas dos ecuaciones generales, cubren cualquier combinación posible de resultados analíticos sin importar el número de tubos, el número de diluciones y si están o no en serie geométrica.

Los métodos analíticos para determinar la densidad de Coliformes en una muestra, mediante el método de tubos de fermentación, cae en uno de los diversos casos, dependiendo de la secuencia de diluciones de una muestra inoculada en tubos de fermentación.

<u>Primer Caso</u>.- Todos los tubos son inoculados con la misma cantidad de muestra.

En este caso $N_2.N_3$.etc. = 0 y la ecuación 2, se convierte en:

$$qN_1 = pN_1 \left(\frac{1}{e^{N_1\lambda} - 1} \right)$$ y desarrollando nos dá:

$$\lambda N_1 = 2.302585 \log(K/q) \qquad (3)$$

En donde K es igual a p + q, o sea el número total - de tubos inoculados con una cantidad N_1 y el valor 2.302585 es la inversa del logaritmo con base 10, de "e"(0.4342945).

La expresión 3 puede ser dibujada fácilmente en forma de gráfica en papel aritmético de probabilidades (da una - linea recta) de donde puede leerse directamente el N.M.P. que corresponde a cualquier resultado analítico observado; donde se han inoculado un número cualquiera de tubos de porciones iguales de muestra. La tabla que aparece en la página siguiente muestra el número más probable (N.M.P.) para todas las combinaciones posibles de resultados de 1 a 10 tubos sembrados con porciones de 10 ml. de muestra.

Segundo Caso.- Tubos inoculados con porciones de muestra - en serie geométrica.

Las porciones mas comunmente seleccionadas son varios números de tubos en "3" diluciones en serie geométrica, tal como porciones de 10, 1, 0.1 ml. de muestra. En este caso N_1, N_2 N_3 tienen valores de 10 , 1 y 0.1 respectivamente. Sustituyendo estos valores en la ecuación 2, nos dá:

$$10q + s + 0.1u = 10p\left(\frac{1}{e^{10\lambda}-1}\right) + r\left(\frac{1}{e^{\lambda}-1}\right) + 0.1t\left(\frac{1}{e^{0.1\lambda}-1}\right). \quad (4)$$

La solución de esta ecuación para el valor de λ es- complicada, pero se simplifica empleando el método de tanteos con ayuda de los valores tabulados de la función $1/(e^{\lambda}- 1)$ para diversos valores de λ. Tales valores aparecen en la tabla N. 2

El método para resolver la ecuación 4 mediante el uso de estos valores tabulados, se puede mostrar viendo los -- ejemplos siguientes.

a) Supóngase que se inoculan tubos con porciones de-

Tabla 1
Número Mas Probable en 100 ml. para porciones sembradas de 10 ml.

Número de tubos positivos	Número de tubos sembrados de 10 ml.								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6.931	4.055	2.877	2.231	1.823	1.542	1.335	1.178	1.054
2		10.986	6.931	5.108	4.055	3.365	2.877	2.513	2.231
3			13.863	9.163	6.931	5.596	4.700	4.055	3.567
4				16.094	10.986	8.473	6.931	5.878	5.108
5					17.918	12.528	9.808	8.109	6.931
6						19.459	13.863	10.986	9.163
7							20.794	15.041	12.040
8								21.972	16.094
9									23.026

ESCUELA DE GRADUADOS
DIVISION DE INGENIERIA
DEPTO. DE INGENIERIA SANITARIA

TABLA 2-A

Valores de la función $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ y múltiplos de ésta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1}\times$ 1	2	3	4	5	6
1.0	0.5820	1.1640	1.7460	2.3280	2.9100	3.4920
0.10	9.5067	19.0114	28.5171	38.0228	47.5285	57.0342
0.010	99.5025	199.0050	298.5075	398.0100	497.5125	597.0150
1.1	.4990	.9980	1.4970	1.9960	2.4950	2.9940
0.11	8.5985	17.1970	25.7955	34.3940	42.9925	51.5910
0.011	90.9091	181.8182	272.7273	363.6364	454.5455	545.4546
1.2	.4310	.8620	1.2930	1.7240	2.1550	2.5860
0.12	7.8431	15.6862	23.5293	31.3724	39.2155	47.0586
0.012	82.6446	165.2892	247.9338	330.5784	413.2230	495.8676
1.3	.3746	.7492	1.1238	1.4984	1.8730	2.2476
0.13	7.4738	14.9476	22.4214	29.8952	37.3690	44.8428
0.013	76.3359	152.6718	229.0077	305.3436	381.6795	458.0154
1.4	.3273	.6546	.9819	1.3092	1.6365	1.9638
0.14	6.6534	13.3068	19.9602	26.6136	33.2670	39.9204
0.014	70.9220	141.8440	212.7660	283.6880	354.6100	425.5320
1.5	.2872	.5744	.8616	1.1488	1.4360	1.7232
0.15	6.1804	12.3608	18.5412	24.7216	30.9020	37.0824
0.015	66.2252	132.4504	198.6756	264.9008	331.1260	397.3512
1.6	.2530	.5060	.7590	1.0120	1.2650	1.5180
0.16	5.7637	11.5274	17.2911	23.0548	28.8185	34.5822
0.016	62.1118	124.2236	186.3354	248.4472	310.5590	372.6708
1.7	.2235	.4470	.6705	.8940	1.1175	1.3410
0.17	5.3967	10.7934	16.1901	21.5868	26.9835	32.3802
0.017	58.4795	116.9590	175.4385	233.9180	293.3975	350.8770
1.8	.1980	.3960	.5940	.7920	.9900	1.1880
0.18	5.0710	10.1420	15.2130	20.2840	25.3550	30.4260
0.018	54.9451	109.8902	164.8353	219.7804	274.7255	329.6706
1.9	.1759	.3518	.5277	.7036	.8795	1.0554
0.19	4.7779	9.5558	14.3337	19.1116	23.8895	28.6674
0.019	52.0833	104.1666	156.2499	208.3332	260.4165	312.4998
2.0	.1565	.3130	.4695	.6260	.7825	.9390
0.20	4.5167	9.0334	13.5501	18.0668	22.5835	27.1002
0.020	49.5050	99.0100	148.5150	198.0200	247.5250	297.0300

TABLA 2-B

Valores de la función $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ y multiplos de ésta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1} \times$ 1	2	3	4	5	6
2.1	0.1395	0.2790	0.4185	0.5580	0.6975	0.8370
0.21	4.2790	8.5580	12.8370	17.1160	21.3950	25.6740
0.021	47.1698	94.3396	141.5094	188.6792	235.8490	283.0188
2.2	.1246	.2492	.3738	.4984	.6230	.7476
0.22	4.0634	8.1268	12.1902	16.2536	20.3170	24.3804
0.022	45.0450	90.0900	135.1350	180.1800	225.2250	270.2700
2.3	.1114	.2228	.3342	.4456	.5570	.6684
0.23	3.8670	7.7340	11.6010	15.4680	19.3350	23.2020
0.023	42.9185	85.8370	128.7555	171.6740	214.5925	257.5110
2.4	.0998	.1996	.2994	.3992	.4990	.5988
0.24	3.6860	7.3720	11.0580	14.7440	18.4300	22.1160
0.024	41.1523	82.3046	123.4569	164.6092	205.7615	246.9138
2.5	.0894	.1788	.2682	.3576	.4470	.5364
0.25	3.5211	7.0422	10.5633	14.0844	17.6055	21.1266
0.025	39.5257	79.0514	118.5771	158.1028	197.6285	237.1542
2.6	.0802	.1604	.2406	.3208	.4010	.4812
0.26	3.3681	6.7362	10.1043	13.4724	16.8405	20.2086
0.026	38.0228	76.0456	114.0684	152.0912	190.1140	228.1368
2.7	.0720	.1440	.2160	.2880	.3600	.4320
0.27	3.2258	6.4516	9.6774	12.9032	16.1290	19.3548
0.027	36.4964	72.9928	109.4892	145.9856	182.4820	218.9784
2.8	.0647	.1294	.1941	.2588	.3235	.3882
0.28	3.0950	6.1900	9.2850	12.3800	15.4750	18.5700
0.028	35.2113	70.4226	105.6339	140.8452	176.0565	211.2678
2.9	.0582	.1164	.1746	.2328	.2910	.3492
0.29	2.9727	5.9454	8.9181	11.8908	14.8635	17.8362
0.029	34.0136	68.0272	102.0408	136.0544	170.0680	204.0816
3.0	.0524	.1048	.1572	.2096	.2620	.3144
0.30	2.8580	5.7160	8.5740	11.4320	14.2900	17.1480
0.030	32.7869	65.5738	98.3607	131.1476	163.9345	196.7214
3.1	.0472	.0944	.1416	.1888	.2360	.2832
0.31	2.7518	5.5036	8.2554	11.0072	13.7590	16.5108
0.031	31.7460	63.4920	95.2380	126.9840	158.7300	190.4760
3.2	.0425	.0850	.1275	.1700	.2125	.2550
0.32	2.6518	5.3036	7.9554	10.6072	13.2590	15.9108
0.032	30.7692	61.5384	92.3076	123.0768	153.8460	184.6152
3.3	.0383	.0766	.1149	.1532	.1915	.2298
0.33	2.5575	5.1150	7.6725	10.2300	12.7875	15.3450
0.033	29.8507	59.7014	88.5521	119.4028	149.2535	179.1042
3.4	.0345	.0690	.1035	.1380	.1725	.2070
0.34	2.4697	4.9394	7.4091	9.8788	12.3485	14.8182
0.034	28.9017	57.8034	86.7051	115.6068	144.5085	173.4102
3.5	.0311	.0622	.0933	.1244	.1555	.1866
0.35	2.3861	4.7722	7.1583	9.5444	11.9305	14.3166
0.035	28.0899	56.1798	84.2697	112.3596	140.4495	168.5394
3.6	.0281	.0562	.0843	.1124	.1405	.1686
0.36	2.3079	4.6158	6.9237	9.2316	11.5395	13.8474
0.036	27.2480	54.4960	81.7440	108.9920	136.2400	163.4880
3.7	.0254	.0508	.0762	.1016	.1270	.1524
0.37	2.2336	4.4672	6.7008	8.9344	11.1680	13.4016
0.037	26.5252	53.0504	79.5756	106.1008	132.6260	159.1512
3.8	.0229	.0458	.0687	.0916	.1145	.1374
0.38	2.1631	4.3262	6.4893	8.6524	10.8155	12.9786
0.038	25.8398	51.6796	77.5194	103.3592	129.1990	155.0388
3.9	.0207	.0414	.0621	.0828	.1035	.1242
0.39	2.0964	4.1928	6.2892	8.3856	10.4820	12.5784
0.039	25.1256	50.2512	75.3768	100.5024	125.6280	150.7536

TABLA 2-C

Valores de la función $\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$ y multiplos de ésta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1}\times$					
	1	2	3	4	5	6
4.0	0.0187	0.0374	0.0561	0.0748	0.0935	0.1122
04.0	2.0333	4.0666	6.0999	8.1332	10.1665	12.1998
0.040	24.5098	49.0196	73.5294	98.0392	122.5490	147.0588
4.1	.0169	.0338	.0507	.0676	.0845	.1014
0.41	.9732	3.9464	5.9196	7.8928	9.8660	11.8392
0.041	23.8663	47.7326	71.5989	95.4652	119.3315	143.1978
4.2	.0152	.0304	.0456	.0608	.0760	.0910
0.42	1.9157	3.8314	5.7471	7.6628	9.5785	11.4942
0.042	23.3100	46.6200	69.9300	93.2400	116.5500	139.8600
4.3	.0138	.0276	.0414	.0552	.0690	.0828
0.43	1.8612	3.7224	5.5836	7.4448	9.3060	11.1672
0.043	22.7790	45.5580	68.3370	91.1160	113.8950	136.7400
4.4	.0124	.0248	.0372	.0496	.0620	.0744
0.44	1.8093	3.6186	5.4279	7.2372	9.0465	10.8558
0.044	22.2222	44.4444	66.6666	88.8888	111.1110	133.3332
4.5	.0112	.0224	.0336	.0448	.0560	.0672
0.45	1.7596	3.5192	5.2788	7.0384	8.7980	10.5576
0.045	21.7391	43.4782	65.2173	86.9564	108.6955	130.4346
4.6	.0102	.0204	.0306	.0408	.0510	.0612
0.46	1.7120	3.4240	5.1360	6.8480	8.5600	10.2720
0.046	21.2314	42.4628	63.6942	84.9256	106.1570	127.3884
4.7	.0092	.0184	.0276	.0368	.0460	.0552
0.47	1.6667	3.3334	5.0001	6.6668	8.3335	10.0002
0.047	20.7900	41.5800	62.3700	83.1600	103.9500	124.7400
4.8	.0083	.0166	.0249	.0332	.0415	.0498
0.48	1.6231	3.2462	4.8693	6.4924	8.1155	9.7386
0.048	20.3252	40.6504	60.9756	81.3008	101.6260	121.9512
4.9	.0075	.0150	.0225	.0300	.0375	.0450
0.49	1.5815	3.1630	4.7445	6.3260	7.9075	9.4890
0.049	19.9203	39.8406	59.7609	79.6812	99.6015	119.5218
5.0	.0068	.0136	.0204	.0272	.0340	.0408
0.50	1.5415	3.0830	4.6245	6.1660	7.7075	9.2490
0.050	19.4932	38.9864	58.4796	77.9728	97.4660	116.9592
5.1	.0061	.0122	.0183	.0244	.0305	.0366
0.51	1.5031	3.0062	4.5093	6.0124	7.5155	9.0186
0.051	19.1205	38.2410	57.3615	76.4820	95.6025	114.7230
5.2	.0055	.0110	.0165	.0220	.0275	.0330
0.52	1.4663	2.9326	4.3989	5.8652	7.3315	8.7978
0.052	18.7266	37.4532	56.1798	74.9064	93.6330	112.3596
5.3	.0050	.0100	.0150	.0200	.0250	.0300
0.53	1.4308	2.8616	4.2924	5.7232	7.1540	8.5848
0.053	18.3824	36.7648	55.1472	73.5296	91.9120	110.2944
5.4	.0045	.0090	.0135	.0180	.0225	.0270
0.54	1.3966	2.7932	4.1898	5.5864	6.9830	8.3796
0.054	18.0180	36.0360	54.0540	72.0720	90.0900	108.1080
5.5	.0041	.0082	.0123	.0164	.0205	.0246
0.55	1.3637	2.7274	4.0911	5.4548	6.8185	8.1822
0.055	17.6991	35.3982	53.0973	70.7964	88.4955	106.1946
5.6	.0037	.0074	.0111	.0148	.0185	.0222
0.56	1.3321	2.6642	3.9963	5.3284	6.6605	7.9926
0.056	17.3611	34.7222	52.0833	69.4444	86.8055	104.1666
5.7	.0034	.0068	.0102	.0136	.0170	.0204
0.57	1.3016	2.6032	3.9048	5.2064	6.5080	7.8096
0.057	17.0358	34.0716	51.1074	68.1432	85.1790	102.2148
5.8	.0030	.0060	.0090	.0120	.0150	.0180
0.58	1.2723	2.5446	3.8169	5.0892	6.3615	7.6338
0.058	16.7504	33.5008	50.2512	67.0016	83.7520	100.5024

TABLA 2-D

Valores de la función $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ y multiplos de esta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1}\times$ 1	2	3	4	5	6
5.9	0.0027	0.0054	0.0081	0.0108	0.0135	0.0162
0.59	1.2438	2.4876	3.7314	4.9752	6.2190	7.4628
0.059	16.4474	32.8948	49.3422	65.7896	82.2370	98.6844
6.0	.0025	.0050	.0075	.0100	.0125	.0150
0.60	1.2164	2.4328	3.6492	4.8656	6.0820	7.2984
0.060	16.1812	32.3624	48.5436	64.7248	80.9060	97.0872
6.1	.0022	.0044	.0066	.0088	.0110	.0132
0.61	1.1899	2.3798	3.5697	4.7596	5.9495	7.1394
0.061	15.8983	31.7966	47.6949	63.5932	79.4915	95.3898
6.2	.0020	.0040	.0060	.0080	.0100	.0120
0.62	1.1643	2.3286	3.4929	4.6572	5.8215	6.9858
0.062	15.6250	31.2500	46.8750	62.5000	78.1250	93.7500
6.3	.0018	.0036	.0054	.0072	.0090	.0108
0.63	1.1395	2.2790	3.4185	4.5580	5.6975	6.8370
0.063	15.3846	30.7692	46.1538	61.5384	76.9230	92.3076
6.4	.0017	.0034	.0051	.0068	.0085	.0102
0.64	1.1154	2.2308	3.3462	4.4616	5.5770	6.6924
0.064	15.1286	30.2572	45.3858	60.5144	75.6430	90.7716
6.5	.0015	.0030	.0045	.0060	.0075	.0090
0.65	1.0923	2.1846	3.2769	4.3692	5.4615	6.5538
0.065	14.8810	29.7620	44.6430	59.5240	74.4050	89.2860
6.6	.0014	.0028	.0042	.0056	.0070	.0084
0.66	1.0697	2.1394	3.2091	4.2788	5.3485	6.4182
0.066	14.6628	29.3256	43.9884	58.6512	73.3140	87.9768
6.7	.0012	.0024	.0036	.0048	.0060	.0072
0.67	1.0480	2.0960	3.1440	4.1920	5.2400	6.2880
0.067	14.4300	28.8600	43.2900	57.7200	72.1500	86.5800
6.8	.0011	.0022	.0033	.0044	.0055	.0066
0.68	1.0268	2.0536	3.0804	4.1072	5.1340	6.1608
0.068	14.2045	28.4090	42.6135	56.8180	71.0225	85.2270
6.9	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060
0.69	1.0063	2.0126	3.0189	4.0252	5.0315	6.0378
0.069	14.0056	28.0112	42.0168	56.0224	70.0280	84.0336
7.0	.0009	.0018	.0027	.0036	.0046	.0055
0.70	0.9864	1.9728	2.9592	3.9456	4.9320	5.9184
0.070	13.7931	27.5862	41.3793	55.1724	68.9655	82.7586
7.1	.0008	.0016	.0025	.0033	.0041	.0049
0.71	.9671	1.9342	2.9013	3.8684	4.8355	5.8026
0.071	13.5870	27.1740	40.7610	54.3480	67.9350	81.5220
7.2	.0007	.0015	.0023	.0030	.0038	.0045
0.72	.9484	1.8968	2.8452	3.7936	4.7420	5.6904
0.072	13.3869	26.7738	40.1607	53.5476	66.9345	80.3214
7.3	.0007	.0014	.0020	.0027	.0034	.0041
0.73	.9301	1.8602	2.7903	3.7204	4.6505	5.5806
0.073	13.2100	26.4200	39.6300	52.8400	66.0500	79.2600
7.4	.0006	.0012	.0018	.0024	.0031	.0037
0.74	.9125	1.8250	2.7375	3.6500	4.5625	5.4750
0.074	13.0208	26.0416	39.0624	52.0832	65.1040	78.1248
7.5	.0006	.0011	.0017	.0022	.0028	.0033
0.75	.8953	1.7906	2.6859	3.5812	4.4765	5.3718
0.075	12.8370	25.6740	38.5110	51.3480	64.1850	77.0220
7.6	.0005	.0010	.0015	.0020	.0025	.0030
0.76	.8785	1.7570	2.6355	3.5140	4.3925	5.2710
0.076	12.6582	25.3164	37.9746	50.6328	63.2910	75.9492
7.7	.0005	.0009	.0013	.0018	.0023	.0027
0.77	.8622	1.7244	2.5866	3.4488	4.3110	5.1732
0.077	12.5000	25.0000	37.5000	50.0000	62.5000	75.0000

TABLA 2-E

Valores de la función $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ y multiplos de esta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1}\times$ 1	2	3	4	5	6
7.8	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.0021	0.0025
0.78	.8464	1.6928	2.5392	3.3856	4.2320	5.0784
0.078	12.3305	24.6610	36.9915	49.3220	61.6525	73.9830
7.9	.0004	.0007	.0011	.0015	.0018	.0022
0.79	.8310	1.6620	2.4930	3.3240	4.1550	4.9860
0.079	12.1655	24.3310	36.4965	48.6620	60.8275	72.9930
8.0	.0003	.0007	.0010	.0014	.0017	.0020
0.80	.8160	1.6320	2.4480	3.2640	4.0800	4.8960
0.080	12.0048	24.0096	36.0144	48.0192	60.0240	72.0288
8.1	.0003	.0006	.0009	.0012	.0015	.0018
0.81	.8013	1.6026	2.4039	3.2052	4.0065	4.8078
0.081	11.8483	23.6966	35.5449	47.3932	59.2415	71.0898
8.2	.0003	.0005	.0008	.0011	.0014	.0016
0.82	.7871	1.5742	2.3613	3.1484	3.9355	4.7226
0.082	11.6959	23.3918	35.0877	46.7836	58.4795	70.1754
8.3	.0002	.0005	.0007	.0010	.0012	.0015
0.83	.7732	1.5464	2.3196	3.0928	3.8660	4.6392
0.083	11.5607	23.1214	34.6821	46.2428	57.8035	69.3642
8.4	.0002	.0004	.0007	.0009	.0011	.0013
0.84	.7596	1.5192	2.2788	3.0384	3.7980	4.5576
0.084	11.4155	22.8310	34.2465	45.6620	57.0775	68.4930
8.5	.0002	.0004	.0006	.0008	.0010	.0012
0.85	.7465	1.4930	2.2395	2.9860	3.7325	4.4790
0.085	11.2740	22.5480	33.8220	45.0960	56.3700	67.6440
8.6	.0002	.0004	.0006	.0007	.0009	.0011
0.86	.7336	1.4672	2.2008	2.9344	3.6680	4.4016
0.086	11.1359	22.2718	33.4077	44.5436	55.6795	66.8154
8.7	.0002	.0003	.0005	.0007	.0008	.0010
0.87	.7210	1.4420	2.1630	2.8840	3.6050	4.3260
0.087	11.0011	22.0022	33.0033	44.0044	55.0055	66.0066
8.8	.0002	.0003	.0005	.0006	.0007	.0009
0.88	.7088	1.4176	2.1264	2.8352	3.5440	4.2528
0.088	10.8696	21.7392	32.6088	43.4784	54.3480	65.2176
8.9	.0001	.0003	.0004	.0005	.0007	.0008
0.89	.6968	1.3936	2.0904	2.7872	3.4840	4.1808
0.089	10.7411	21.4822	32.2233	42.9644	53.7055	64.4466
9.0	.0001	.0002	.0004	.0005	.0006	.0007
0.90	.6851	1.3702	2.0553	2.7404	3.4255	4.1106
0.090	10.6157	21.2314	31.8471	42.4628	53.0785	63.6942
9.1	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0007
0.91	.6737	1.3474	2.0211	2.6948	3.3685	4.0422
0.091	10.4932	20.9864	31.4796	41.9728	52.4660	62.9592
9.2	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006
0.92	.6626	1.3252	1.9878	2.6504	3.3130	3.9756
0.092	10.3734	20.7468	31.1202	41.4936	51.8670	62.2404
9.3	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0005
0.93	.6517	1.3034	1.9551	2.6068	3.2585	3.9102
0.093	10.2564	20.5128	30.7692	41.0256	51.2820	61.5384
9.4	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005
0.94	.6410	1.2820	1.9230	2.5640	3.2050	3.8460
0.094	10.1420	20.2840	30.4260	40.5680	50.7100	60.8520
9.5	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0004
0.95	.6306	1.2612	1.8918	2.5224	3.1530	3.7836
0.095	10.0301	20.0602	30.0903	40.1204	50.1505	60.1806
9.6	.0001	.0001	.0002	.0003	.0003	.0004
0.96	.6205	1.2410	1.8615	2.4820	3.1025	3.7230
0.096	9.9206	19.8412	29.7618	39.6824	49.6030	59.5236

193664—40——2

TABLA 2-F

Valores de la funcion $\frac{1}{e^{\lambda}-1}$ y multiplos de ésta del 1 al 6

λ	$\frac{1}{e^{\lambda}-1}\times$					
	1	2	3	4	5	6
9.7	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004
0.97	.6105	1.2210	1.8315	2.4420	3.0525	3.6630
0.097	9.8135	19.6270	29.4405	39.2540	49.0675	58.8910
9.8	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003
0.98	.6007	1.2014	1.8021	2.4028	3.0035	3.6042
0.098	9.7087	19.4174	29.1261	38.8348	48.5435	58.2522
9.9	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003
0.99	.5913	1.1826	1.7739	2.3652	2.9565	3.5478
0.099	9.6061	19.2122	28.8183	38.4244	48.0305	57.6366
10.0	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003
1.00	.5820	1.1640	1.7460	2.3280	2.9100	3.4920
0.100	9.5057	19.0114	28.5171	38.0228	47.5285	57.0342

10 ml; 1 ml; y 0.1 ml y que los resultados son los siguientes:

10 ml	1.ml	0.1 ml.
5 +	3 +	0 +
0 -	2 -	5 -

Aplicando la ecuación 4, tenemos p = 5; q = 0 ; r = 3 s = 2 ; t = 0 ; u = 5 y sustituyendo estos valores nos da:

$$0 + 2 + 0.1 \times 5 = 10 \times 5 \frac{1}{e^{10\lambda} - 1} + 3 \frac{1}{e^{\lambda} - 1} + 0$$

Es necesario seleccionar por tanteos el valor de λ - que mas balancee la ecuación. Con la ayuda de los valores de la Tabla 2 y suponiendo valores de λ como sigue:

Valores asumidos para λ =	0.60	0.70	0.75	0.78	0.79	0.80
Valores de $10 \times 5 \frac{1}{e^{10\lambda} - 1}$	0.125	0.046	0.028	0.021	0.018	0.017
Valores de $3 \times \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$	3.649	2.959	2.686	2.539	2.493	2.448
2.5 aproximado	3.774	3.005	2.714	2.560	2.511	2.465

El valor de $\lambda = 0.79$ es el que satisface con mas --- aproximación la ecuación y por lo tanto el N.M.P. de este resultado particular es 0.79 organismos por ml o 79 en 100 ml de muestra.

Se notará que la suma de los términos del lado derecho de la ecuación decrece en magnitud a medida que "λ" - crece; ésto ofrece una pauta para la selección sucesiva - por tanteos, de los valores de λ .

b) Supongamos el resultado:

10 ml	1. ml	0.1 ml.
3 +	1 +	0 +
2 -	0 -	0 -

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4 nos da:

$$20.0 = 10 \times 3 \frac{1}{e^{10\lambda} - 1} + \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$$

Empleando las tablas como en el ejemplo anterior y - asumiendo valores para λ :

Valores de λ =	0.10	0.11	0.12	0.13
Valores de la función $10 \times 3 \frac{1}{e^{10\lambda} - 1}$	17.460	14.970	12.930	11.238
$\frac{1}{e^{\lambda} - 1}$	9.506	8.599	7.843	7.474
20 aproximado	26.966	23.569	20.773	18.712

En este caso el valor del N.M.P. es 0.12 por ml o de 12 por 100 ml.

c) Supongamos el siguiente resultado:

1.ml	0.1 ml	0.01 ml	0.001 ml
5 +	6 +	4 +	0 +
0 -	1 -	6 -	8 -

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4 tendré:

$$0.168 = 5 \times \frac{1}{e^{\lambda} - 1} + 0.1 \times 6 \frac{1}{e^{0.1\lambda} - 1} + 0.01 \times 4 \frac{1}{e^{0.01\lambda} - 1}$$

Valores asumidos de λ =	26	27	28
Valores de la función			
$5 \frac{1}{e^{\lambda} -1}$	0.0	0.0	0.0
$0.1 \times 6 \frac{1}{e^{0.1\lambda} -1}$	0.0481	0.0432	0.0388
$0.01 \times 4 \frac{1}{e^{0.01\lambda} -1}$	0.1347	0.1290	0.1238
0.168 aproximado	0.1828	<u>0.1722</u>	0.1626

El valor del N.M.P. es de 27 por ml.

<u>Tercer Caso</u>.- Un número de tubos tomados al azar con varias diluciones con porciones de muestras tomadas también al -- azar. Este método de siembra de tubos no es muy empleado - pero puede servir de ayuda en aquellos casos especiales -- que requieren gran aproximación. Se puede aplicar la misma fórmula general "2" y el número mas probable (N.M.P.) se e calcula usando los valores de la función de la tabla 2; poniendo atención particular a los valores del exponente. -- Veamos el siguiente ejemplo de aplicación.

10 ml	5 ml	2 ml	1 ml
6 +	4 +	2 +	0 +
1 -	8 -	5 -	8 -

Sustituyendo estos valores en la ecuación 2, tenemos:

$$10 + 40 + 10 + 8 = 10 \times 6 \frac{1}{e^{10\lambda} -1} + 5 \times 4 \frac{1}{e^{5\lambda} -1} + 2 \times 2 \frac{1}{e^{2\lambda} -1}$$

Seleccionando los valores de la tabla para los valores de tanteo de λ tenemos:

Valores de $\lambda =$	0.10	0.11	0.12	0.13
Valores de la función				
$10 \times 6 \frac{1}{e^{10\lambda} - 1}$	34.920	29.940	25.860	22.476
$5 \times 4 \frac{1}{e^{5\lambda} - 1}$	30.830	27.274	24.328	21.846
$2 \times 2 \frac{1}{e^{2\lambda} - 1}$	18.067	16.254	14.744	13.472
68 aproximado =	83.817	73.468	64.932	57.794

En este caso el N.M.P. es 0.12 o de 12 por 100 ml.

Para hacer el desarrollo de estos problemas, vemos que es necesario encontrar por tanteos el valor de "λ". Una manera burda para determinar entre qué valores varía mas o menos λ es considerando como que se trata de un caso en que la dilución es igual luego es posible la aplicación de la ecuación 3. Para esta aproximación de λ se toma la dilución media; con este valor se comienza el primer tanteo.

De todas maneras el cálculo del número mas probable, sobre todo en el último caso, requiere de un trabajo laborioso, razón por la cual se han elaborado tablas en las que se puede encontrar fácilmente estos valores. Dichas tablas contienen el mayor número de combinaciones posibles que se pueden sembrar, considerando no más de tres diluciones diferentes, así se han escogido las diluciones de 10; 1 y 0.1 ml. y para muestras que varían de 1 a 5 porciones. Hay también tablas que han tomado las diluciones de 50; 10 y 1 ml. e igualmente para muestras que varían de 1 a 5 porciones. En estas tablas es fácil encontrar los valores del número mas probable aún de muestras diferentes a las indicadas, pero que fácilmente pueden ser acomodadas a las de la tabla por ser múltiplos de cualquiera de éstas(Tab.3-4)

Del estudio del N.M.P. se pueden sacar conclusiones de interés práctico; así podremos decir que los valores mas bajos del N.M.P. están muy bien limitados por el tamaño de la porción mayor sembrada; están limitados en un grado menor por el número de porciones sembradas de esa dilución y no varían en absoluto por el incremento en el número de porciones de menor cantidad que esta porción mas grande considerada. Así el valor mas bajo del N.M.P. obtenible de un tubo positivo de 10 ml., en cualquier serie en la que 10 ml. es la porción mas grande sembrada, varía desde 23 Coli por 100 ml. cuando la serie es de 1-1-1, hasta 2.0 Coli por 100 ml. cuando la serie es de 5-5-5. Un aumento en el número de porciones sembradas, si tienden a medir mas aproximadamente el valor del N.M.P. de la muestra dentro de los límites de la zona de variación, porque los valores obtenibles dentro de la zona de variación son siempre menores en "1" al número de tubos sembrados. Por ejemplo en la serie 1-10; 1-1 y 1-0.1 solo 2 valores son posibles 23 Coli por 100 ml. en el caso en que el primer tubo es positivo y 240 Coli por 100 ml. en el caso en que el primero y segundo tubo dan resultado positivo. En cambio en la serie 5-10; 5-1 y 5-0.1 ml. son posibles cualquiera de los 14 valores que se encuentran entre 2.0 Coli por 100 ml y 1,600 Coli por 100 ml. dependiendo del número de combinaciones de resultados positivos y negativos que pueden resultar

Por eso se recomienda sembrar el mayor número de porciones en la zona de variación correspondiente a esta estimación, en lugar de tomar igual número de tubos de la misma porción en una zona indiscriminada.

Este principio es particularmente aplicable al análisis bacteriológico de los abastecimientos de agua potable. En este caso se requiere que el límite superior llene las especificaciones que fija el Reglamento pertinente. Así por ejemplo en E.U.A. el Departamento del Tesoro pone como condición de 1.05 organismos Coliformes en 100 ml. a pesar de que ningún número razonable de porciones de 10 -

ml. de muestra miden el contenido de organismos Coli por-debajo de 2 en 100 ml.Reed hablando al respecto hace notar que el padrón de medida es demasiado tosco para este propósito particular. Consecuentemente cuando se siembran porciones de 10 ml. el operador de la planta Purificadora de Aguas, no tiene manera de saber en qué momento el contenido bacterial se acerca a este límite superior que se fija para las aguas tratadas, y su prueba bacteriológica no -- constituye para él una prueba del valor máximo como debía ser. Esta dificultad se puede allanar si en lugar de porciones de 10 ml, se plantan o siembran porciones de 100 ml. Así por ejemplo en el caso de sembrar 5 porciones de 100 ml. la zona de variación del N.M.P. de organismos Coli va de 0.22 a 1.6 por 100 ml. o si se siembran 5 tubos de 50 - ml. la zona de variación será de 0.44 a 3.2 organismos Coli por 100 ml. en lugar de los 2.2 a 16 por 100 ml. que se -- puede temer cuando se siembran 5 porciones de 10 ml. Por - la razón expuesta sería deseable, aumentar el tamaño de - la porción examinada con el objeto de mejorar el valor de esta prueba rutinaria. Tal procedimiento no ofrece dificultad en la técnica de laboratorio, necesitándose solamente mayores cantidades de medio de cultivo, tubos o depósitos mas grandes para la siembra y mayor espacio de incubación. Usualmente es satisfactorio en la siembra emplear caldo -- lactosado de doble concentración como de 75 ml. para la -- porción de 100 ml.

En el trabajo rutinario de laboratorio hay un límite definido práctico en lo que se refiere al número de tubos que pueden ser examinados, por lo que es de particular interés sacar la mayor posible ventaja de los resultados analíticos. La selección cuidadosa de las series de diluciones empleadas, aumentará la utilidad de la prueba y al mismo - tiempo reducen el volumen del trabajo de rutina del laboratorio. Se puede aceptar para un trabajo de rutina, 5 porciones de cada muestra, como suficientes. En general una - selección cuidadosa de la combinación de esas series, satisfará la mayor parte de los requisitos de rutina. En casos- especiales cuando la densidad bacteriana de la muestra, no puede ser estimada, la siembra de una o mas porciones de - cada dilución de una serie extensa es posiblemente el mejor procedimiento; y entonces para el propósito de interpretación se descartan los resultados positivos y negativos con excepción sólo de aquellos que están inmediatamente abajo y encima del punto en que cambia el signo. Así la serie de combinaciones, 5 -1 ; 5-1-1 o 1-5-1, pueden extenderse mediante tubos solos, en series geométricas de diluciones mas bajas o mas altas, e interpretarse los resultados con el uso de tablas sin importar en qué dilución ocurrió el cambio.

Para ayudar a la selección de las combinaciones apropiadas de porciones, en la práctica de purificación de aguas, la mejor guía es la experiencia que se tiene con las aguas materia del tratamiento. Streeter ha demostrado que para las diversas etapas del proceso de tratamiento, comprendiendo la coagulación, filtración rápida y cloración, ciertas concentraciones de organismos coliformes, marcan el límite presente que debe haber, si se quiere que el efluente llene la condición que fija el reglamento para las aguas potables. Estos números límites están dados en la tabla siguiente, con combinaciones sugeridas, de porciones de muestra, las cuales cubren la zona de variación de densidades ya establecidas.

Agua	Concentrac. límite del N.M.P. por 100 ml.	Combinación de porciones examinadas.	Límites de la zona del N.M.P. por 100 ml.
Cruda	9,000	2-0.1, 3-0.01 ml.	570 a 11,000
Sedimentada	3,700	4-0.1, 1-0.01 ml.	280 a 3,700
Filtrada	35	3-10 , 2-0.01 ml.	3.8 a 71
Clorada	1.05	5-100 ml.	0.22 a 1.6

Las combinaciones dadas en la tabla son a manera de ilustración del método de selección. Se pueden escoger otras combinaciones en las tablas que se ajusten mas a condiciones específicas o cuando es necesario extender la zona de variación ya sea por encima o por debajo de cierta densidad estimada, de organismos coliformes. En general donde la densidad bacteriana de una agua, cambia poco de un día al otro, una serie seleccionada apropiadamente, empleando un total de 5 porciones de muestra, llenará los re quisitos rutinarios de la mayor parte de los casos y proporcionará una idea bien definida del contenido de Coliformes.

TABLA 3-A

Número mas probable por 100 ml. en porciones de muestra sembradas de no mas de 3 diluciones

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 ml. respectivamente																													
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
0	0	1		9.0	9.0	9.0	8.8	8.7		8.3	8.3	8.2	8.1	8.0		7.7	7.6	7.5	7.5	7.4		6.9	6.9	6.8	6.8	6.8		6.5	6.4	6.4	6.3	6.3
0	0	2			17	17	17	17			17	16	16	16			15	15	15	15			14	14	14	14			13	13	13	13
0	1	0	9.5	9.4	9.3	9.3	9.2	9.1	8.7	8.6	8.6	8.5	8.4	8.4	8.0	7.9	7.9	7.8	7.7	7.7	7.4	7.4	7.3	7.3	7.2	7.1	6.9	6.8	6.8	6.8	6.7	6.7
0	1	1		19	19	19	18	18		17	17	17	17	17		16	16	16	16	15		15	15	15	14	14		14	14	14	13	13
0	2	0							18	18	18	18	18	17	17	17	16	16	16	16	15	15	15	15	15	15	14	14	14	14	14	14
0	2	1								27	27	27	27	26		25	25	25	24	24		23	23	23	23	22		21	21	21	21	21
0	3	0													26	26	26	26	25	25	24	24	24	24	23	23	22	22	22	22	22	22
1	0	0	24	23	22	22	21	20	18	18	17	17	16	16	15	14	14	14	14	14	13	12	12	12	12	12	11	11	11	11	10	10
1	0	1		95	87	80	75	70		50	48	46	45	43		36	35	34	33	33		29	28	28	27	27		24	24	23	23	23
1	0	2			180	170	150	140			95	91	87	83			65	62	61	59			50	49	47	46			41	40	39	39
1	0	3				250	240	220				140	130	130				95	92	89				72	71	69				58	57	56
1	1	0		240	180	150	130	110	67	64	61	58	55	53	43	43	40	39	38	37	33	32	31	31	30	29	27	26	25	25	25	25
1	1	1			670	430	330	270		140	130	120	110	110		81	78	75	72	70		57	56	55	53	52		45	44	43	43	42
1	1	2				1,100	700	590			210	190	180	170			120	120	110	110			85	83	80	78			68	65	64	62
1	1	3					1,400	920				280	260	240				160	150	150				110	110	110				87	86	84
1	1	4						1,600					350	320					200	190					140	140					110	110
1	2	0								300	240	200	160	160	110	100	98	93	89	84	70	67	65	63	61	59	52	51	49	48	47	46
1	2	1									700	450	350	300		170	160	150	140	130		100	100	97	94	91		76	75	73	71	69
1	2	2										1,100	700	530			230	210	200	190			140	130	130	130			100	99	96	94
1	2	3											1,400	920				290	270	260				170	170	160				130	130	120
1	2	4												1,600					350	330					210	200					150	150
1	2	5																		420						240						180
1	3	0														340	280	240	210	190	140	130	130	120	110	110	93	89	86	84	81	79
1	3	1															710	460	370	320		190	180	170	160	160		120	120	120	110	110
1	3	2																1,100	700	530			250	230	220	210			150	150	150	140
1	3	3																	1,400	920				300	280	270				190	180	160
1	3	4																		1,600					360	340					220	210
1	3	5																								420						250
1	4	0																				370	300	270	240	220	160	150	150	140	140	130
1	4	1																					690	470	390	330		210	200	190	190	170
1	4	2																						1,100	700	640			200	240	230	220
1	4	3																							1,400	920				310	300	280
1	4	4																								1,600					370	340
1	4	5																														430
1	5	0																										330	330	290	260	240
1	5	1																											720	480	400	360
1	5	2																												1,100	700	640
1	5	3																													1,400	920
1	5	4																														1,600

TABLA - 3 B

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 ml. respectivamente											
			2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			0	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	0	0	1	0	1	2	3	4	5	0	1	2
0	1	0	—	4.9	4.9	4.7	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.5	4.4	4.4
0	1	1	—	—	9.7	—	9.3	9.2	9.2	9.2	9.1	—	8.9	8.8
0	2	0	—	—	—	9.5	9.5	9.4	9.4	9.3	9.3	9.1	9.1	9.0
0	2	1	—	—	—	—	14	14	14	14	14	—	14	14
0	3	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	14	14
1	0	0	6.9	6.5	6.4	6.1	6.0	6.0	6.0	5.9	5.9	5.7	5.7	5.6
1	0	1	—	—	13	—	12	12	12	12	12	—	12	12
1	1	0	—	14	14	13	13	13	13	13	13	12	12	12
1	1	1	—	—	22	—	20	20	20	20	19	—	19	19
1	1	2	—	—	—	—	—	28	27	27	27	—	—	26
1	2	0	—	—	—	21	21	21	21	20	20	19	19	19
1	2	1	—	—	—	—	29	29	28	28	28	—	27	26
1	3	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28	28	27
1	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	36	36
2	0	0	—	30	30	24	24	23	23	23	23	20	20	20
2	0	1	—	—	95	—	52	50	48	46	45	—	38	38
2	0	2	—	—	—	—	—	95	91	87	83	—	—	65
2	0	3	—	—	—	—	—	—	140	140	130	—	—	—
2	1	0	—	—	240	69	88	82	57	54	51	45	42	42
2	1	1	—	—	—	—	140	130	120	110	110	—	81	77
2	1	2	—	—	—	—	—	210	190	180	170	—	—	120
2	1	3	—	—	—	—	—	—	280	260	240	—	—	—
2	2	0	—	—	—	—	300	240	200	180	180	110	100	98
2	2	1	—	—	—	—	—	690	450	380	300	—	170	160
2	2	2	—	—	—	—	—	—	1,100	700	510	—	—	230
2	2	3	—	—	—	—	—	—	—	1,400	990	—	—	—
2	2	4	—	—	—	—	—	—	—	—	1,600	—	—	—
2	3	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	340	280
2	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	690
2	3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	3	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	5	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	5	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	5	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 ml. respectivamente														
			2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
0	1	0	4.4	4.4	4.4	4.3	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2	4.1	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0
0	1	1	8.8	8.8	8.7	—	8.5	8.5	8.4	8.4	8.4	—	8.1	8.1	8.1	8.1	8.0
0	2	0	9.0	8.9	8.9	8.7	8.7	8.6	8.6	8.5	8.5	8.3	8.3	8.3	8.2	8.2	8.2
0	2	1	14	14	13	—	13	13	13	13	13	—	12	12	12	12	12
0	3	0	14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
1	0	0	5.6	5.6	5.5	5.4	5.4	5.3	5.3	5.3	5.2	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1
1	0	1	12	12	11	—	11	11	11	11	11	—	10	9.9	9.9	9.9	9.9
1	1	0	12	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10
1	1	1	18	18	18	—	18	17	17	17	17	—	16	16	16	16	16
1	1	2	25	25	25	—	—	24	24	24	23	—	—	22	22	22	22
1	2	0	19	19	19	18	18	18	18	18	18	17	17	17	17	17	17
1	2	1	26	26	26	—	25	25	24	24	24	—	23	23	23	23	23
1	3	0	27	27	27	26	26	25	25	25	25	24	24	24	24	23	23
1	3	1	35	35	35	—	33	33	33	32	32	—	31	31	30	30	30
2	0	0	20	19	19	18	18	18	17	17	17	16	18	16	18	15	15
2	0	1	37	36	35	—	32	31	31	30	30	—	27	27	27	26	26
2	0	2	63	61	59	—	—	50	49	48	47	—	—	42	41	40	40
2	0	3	95	92	90	—	—	—	72	71	69	—	—	—	58	57	56
2	1	0	41	40	39	35	34	34	33	33	32	29	29	29	28	28	28
2	1	1	74	72	69	—	57	56	54	53	51	—	46	45	45	44	43
2	1	2	120	110	110	—	—	85	83	80	78	—	—	66	65	64	62
2	1	3	160	150	150	—	—	—	110	110	110	—	—	—	87	86	84
2	2	0	93	89	85	69	67	65	63	61	59	53	51	50	49	48	47
2	2	1	150	140	140	—	100	100	97	94	91	—	77	75	73	71	70
2	2	2	210	200	190	—	—	140	140	130	130	—	—	100	99	96	94
2	2	3	290	270	260	—	—	—	170	170	160	—	—	—	180	130	120
2	2	4	—	350	340	—	—	—	—	210	200	—	—	—	—	150	150
2	3	0	240	210	190	140	130	130	120	110	110	90	89	88	84	81	79
2	3	1	410	390	220	—	190	180	170	160	160	—	120	120	120	110	110
2	3	2	1,100	700	510	—	—	250	230	220	210	—	—	160	150	150	140
2	3	3	—	1,400	990	—	—	—	300	280	270	—	—	—	190	180	180
2	3	4	—	—	1,600	—	—	—	—	380	340	—	—	—	—	220	210
2	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	420	—	—	—	—	—	250
2	4	0	—	—	—	—	370	300	270	240	290	180	160	150	140	140	180
2	4	1	—	—	—	—	—	690	470	390	330	—	210	200	190	190	170
2	4	2	—	—	—	—	—	—	1,100	700	510	—	—	260	240	230	220
2	4	3	—	—	—	—	—	—	—	1,400	990	—	—	—	310	290	280
2	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	1,600	—	—	—	—	370	350
2	4	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	430
2	5	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	390	330	290	280	240
2	5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	720	480	400	350
2	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,100	700	540
2	5	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,400	990
2	5	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,600

TABLA 3-C

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 respectivamente																							
			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
			0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
0	1	0		3.3	3.3	3.2	3.2	3.2	3.1	3.1	3.1	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9
1	0	0	4.1	3.9	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.5	3.5	3.5	3.5	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.3	3.3	3.3	3.3
1	1	0		8.1	8.0	7.7	7.7	7.7	7.4	7.4	7.4	7.3	7.3	7.3	7.2	7.1	7.1	7.1	7.1	7.0	6.9	6.9	6.9	6.8	6.8	6.8
1	2	0				12	12	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10
1	2	1					16	16		16	15	15	15	15		15	15	15	15	15		14	14	14	14	14
1	3	0							16	16	16	16	16	16	15	16	15	16	15	15	16	15	15	15	14	14
1	3	1								20	20	20	20	20		19	19	19	19	19		18	18	18	18	18
2	0	0	11	10	10	9.8	9.8	9.7	9.6	9.3	9.2	9.1	9.1	9.1	8.9	8.8	8.8	8.7	8.7	8.7	8.6	8.6	8.4	8.4	8.3	8.3
2	0	1			16		15	15		15	14	14	14	14		14	14	14	14	13		13	13	13	13	13
2	1	0		17	17	16	16	16	16	15	15	14	15	15	14	14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13
2	1	1			24		22	22		21	21	20	20	20		20	19	19	19	19		19	18	18	18	18
2	2	0				23	23	23	21	21	21	21	21	21	20	20	20	20	20	20	19	19	19	19	19	19
2	2	1					30	30		28	28	28	27	27		26	26	26	26	26		25	25	24	24	24
2	3	0							29	29	29	29	28	28	27	27	27	27	27	26	26	25	25	25	25	25
2	3	1								37	36	36	36	36		34	34	34	33	33		32	32	31	31	31
2	4	0													35	35	35	35	34	34	33	33	33	32	32	32
2	4	1														43	43	42	42	42		40	40	39	39	39
2	5	0																			42	41	41	41	40	40
2	5	1																				49	49	48	48	48
2	5	2																					57	56	56	56
3	0	0		24	23	28	27	27	24	24	23	23	23	23	21	21	21	21	21	20	19	19	19	19	19	19
3	0	1			35		53	51		40	39	39	38	37		34	33	33	32	32		29	29	29	29	28
3	0	2						95			65	64	62	60			51	50	49	48			43	42	41	40
3	0	3										95	92	90				73	71	69				59	58	57
3	1	0				71	66	63	46	45	44	43	42	41	37	36	36	35	35	34	32	31	31	30	30	30
3	1	1					140	130		81	78	75	72	70		59	57	56	54	53		47	46	46	45	44
3	1	2						210			120	120	110	110			85	83	81	78			67	65	64	63
3	2	0					300	140	110	100	93	93	89	86	69	67	65	63	61	59	51	50	49	48	47	46
3	2	1						700		170	160	150	140	130		100	100	97	94	91		77	75	73	71	69
3	2	2									230	210	200	190			140	140	130	130			100	99	97	94
3	2	3										290	270	260				170	170	180				130	130	120
3	2	4											350	330					210	210					150	150
3	2	5												420						240						180
3	3	0								340	280	240	210	190	140	130	130	120	110	110	92	89	86	83	81	79
3	3	1									690	460	370	320		190	180	170	160	160		120	120	120	110	110
3	3	2										1,100	700	530			250	230	220	210			160	150	150	140
3	3	3											1,400	920				300	280	270				190	180	180
3	3	4												1,600					360	340					220	210
3	3	5																		420						250
3	4	0														270	300	270	240	290	160	150	150	140	140	130
3	4	1															710	470	390	330		210	200	190	180	170
3	4	2																1,100	700	540			290	240	230	220
3	4	3																	1,400	920				310	290	280
3	4	4																		1,600					370	350
3	4	5																								430
3	5	0																				390	330	290	280	240
3	5	1																					720	480	400	350
3	5	2																						1,100	700	540
3	5	3																							1,400	920
3	5	4																								1,600

TABLA 3-D

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 respectivamente																					
			4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
			0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
1	0	0	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
1	1	0		5.7	5.7	5.6	5.5	5.5	5.4	5.4	5.4	5.4	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1	5.1
1	2	0				8.5	8.5	8.5	8.3	8.2	8.2	8.2	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	7.9	7.8	7.8	7.8	7.8	7.7	7.7
2	0	0	6.9	6.7	6.7	6.5	6.4	6.4	6.3	6.2	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	5.9	5.9	5.9	5.8	5.8	5.8
2	1	0		11	10	10	10	10	9.7	9.7	9.6	9.5	9.4	9.4	9.3	9.3	9.3	9.2	9.1	9.1	9.1	9.1	9.1	9.1
2	2	0				14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13	13	13	13	12	12	12	12	12
3	0	0	14	13	13	13	12	12	12	12	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
3	0	1			18		17	17		17	16	16		16	16	16	16	16		15	15	15	15	15
3	1	0		19	19	18	18	18	17	17	17	17	16	16	16	16	16	16	16	15	15	15	15	15
3	1	1			25		24	24		22	22	22		21	21	21	21	21		20	20	20	20	20
3	2	0				25	24	24	23	23	23	23	22	22	22	22	21	21	21	21	21	20	20	20
3	2	1					31	31		29	29	29		27	27	27	27	27		26	26	26	26	25
3	3	0							30	30	30	30	28	28	28	28	28	28	27	27	26	26	26	26
3	3	1								37	37	37		35	35	34	34	34		33	32	32	32	32
3	4	0											36	36	36	35	35	35	34	34	33	33	33	33
4	0	0		37	33	30	30	30	27	26	26	26	24	24	24	23	23	23	22	22	22	21	21	21
4	0	1			95		54	52		42	41	40		35	35	34	34	33		31	31	31	30	30
4	0	2						95			66	64			52	51	50	49			44	43	42	42
4	0	3										95				73	71	70				59	58	57
4	1	0			240	71	67	63	47	46	45	44	39	38	37	37	36	36	33	33	33	32	32	31
4	1	1					140	130		81	78	75		59	58	56	55	54		48	47	46	45	45
4	1	2						210			120	120			85	83	81	78			67	65	64	63
4	1	3										160				110	110	110				87	86	84
4	2	0					300	240	110	100	93	93	70	68	68	64	63	61	54	53	52	50	50	49
4	2	1						700		170	160	150		100	100	97	94	91		77	75	73	71	70
4	2	2									230	210			140	140	130	130			100	99	96	94
4	2	3										290				170	170	160				130	130	120
4	2	4															210	210					160	150
4	2	5																240						180
4	3	0								340	330	340	140	130	130	130	110	110	93	89	86	84	81	79
4	3	1									710	480		190	180	170	160	160		120	120	120	110	110
4	3	2										1,100			250	230	220	210			150	150	150	140
4	3	3														300	280	270				190	180	180
4	3	4															350	340					220	210
4	3	5																420						250
4	4	0												370	300	270	240	220	160	150	150	140	140	130
4	4	1													710	470	390	350		210	200	190	190	170
4	4	2														1,100	700	540			260	240	230	220
4	4	3															1,400	700				310	290	280
4	4	4																1,600					370	350
4	4	5																						430
4	5	0																		390	330	290	260	240
4	5	1																			720	480	400	350
4	5	2																				1,100	700	540
4	5	3																					1,400	920
4	5	4																						1,600

TABLA 3-E

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 ml. respectivamente																				
			5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
			0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
10 ml.	1 ml.	0.1 ml.	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
1	0	0	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
1	1	0		4.4	4.4	4.3	4.3	4.3	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.1	4.0	4.0	4.0
1	2	0				6.6	6.6	6.6	6.5	6.4	6.4	6.4	6.5	6.3	6.3	6.3	6.3	6.2	6.2	6.2	6.2	6.1	6.1
2	0	0	5.1	5.0	5.0	4.8	4.8	4.8	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
2	1	0		7.6	7.6	7.5	7.4	7.4	7.3	7.2	7.2	7.2	7.1	7.1	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9	6.9	6.8	6.8
2	2	0				10	10	10	9.9	9.9	9.8	9.8	9.7	9.6	9.6	9.6	9.6	9.4	9.4	9.4	9.3	9.3	9.3
3	0	0	9.2	8.8	8.8	8.8	8.6	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.1	8.1	8.0	8.0	7.8	7.8	7.8	7.8	7.8	7.8	7.8
3	1	0		12	12	12	12	12	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
3	2	0				15	15	15	15	15	15	15	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
3	2	1					19	19		18	18	18		18	18	18	18		17	17	17	17	17
3	3	0							19	19	19	19	18	18	18	18	18	18	17	17	17	17	17
3	4	0											22	22	22	22	22	21	21	21	21	21	21
4	0	0	16	16	16	15	15	15	14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
4	1	0		21	21	20	20	20	19	19	19	19	19	18	18	18	18	17	17	17	17	17	17
4	1	1			27		25	25		24	24	24		23	22	22	22		22	21	21	21	21
4	2	0				26	26	26	24	24	24	24	23	23	23	23	23	23	22	22	22	22	22
4	2	1					32	32		30	30	30		28	28	28	28		27	27	27	27	26
4	3	0							31	31	31	31	29	29	29	29	29	28	28	28	27	27	27
4	3	1																					33
4	4	0											37	37	36	36	36	35	34	34	34	34	34
4	4	1												44	44	43	43		41	41	40	40	40
4	5	0																43	42	42	42	41	41
5	0	0		33	33	33	33	33	29	28	28	28	26	26	26	25	25	24	24	24	23	23	23
5	0	1			96		55	53		43	42	41		37	36	36	35		33	32	32	32	31
5	0	2						96			66	64			52	51	50			44	44	43	43
5	0	3										95				73	71				60	59	58
5	1	0			240	73	67	64	48	47	46	46	40	39	39	38	38	35	34	34	34	33	33
5	1	1					140	130		81	78	70		59	58	57	56		49	48	47	46	46
5	1	2						210			120	110			85	83	81			67	66	64	64
5	1	3										160				110	110				88	86	84
5	2	0					300	240	110	100	68	93	70	68	68	64	63	54	53	53	51	50	49
5	2	1						700		170	130	150		100	100	98	94		77	75	73	72	70
5	2	2									230	220			140	130	130			100	99	96	95
5	2	3										290				170	170				130	120	120
5	2	4															210					150	150
5	2	5																					180
5	3	0								240	230	240	140	130	130	120	110	93	89	86	84	81	79
5	3	1									700	480		190	180	170	160		120	120	120	110	110
5	3	2										1,100			240	230	220			160	150	150	140
5	3	3														300	280				190	180	180
5	3	4															360					220	210
5	3	5																					250
5	4	0												370	300	270	240	130	130	130	140	140	130
5	4	1													710	470	380		270	200	190	180	170
5	4	2														1,100	700			300	240	230	220
5	4	3															1,400				310	290	280
5	4	4																				370	350
5	4	5																					430
5	5	0																	390	330	290	280	240
5	5	1																		720	480	400	350
5	5	2																			1,100	700	540
5	5	3																				1,400	920
5	5	4																					1,600

TABLA 4-A

Número de tubos positivos.			Combinacion de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 respectivamente																																
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
			1	1	1	2	2	3	4	4	5	1	2	2	3	3	3	0	1	1	2	3	3	0	1	2	3	0	1	1	2	3	3	4	5
50 ml.	10 ml.	1 ml.	1	2	3	1	2	1	0	1	1	1	1	2	0	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1.7	1.6	1.6	1.4	1.4	1.2		1.1	1.0	0.90	0.83	0.83		0.7	0.76			0.62			0.55							0.38			0.35		
0	0	2		3.3	3.2		2.8							1.7			1.5																		
0	1	0	1.8	1.8	1.7	1.5	1.5	1.3	1.2	1.2	1.0	.94	.86	.86	0.80	.	.79		.65	.64	0.61	0.57	.57		0.49	0.47	0.44		0.39	.39	0.38	.36	0.36	0.35	0.34
0	1	1	3.6	3.6	3.5	3.1	3.0	2.7		2.3	2.1	1.9	1.7	1.7		1.	1.6			1.3			1.1							.78					
0	2	0				3.3	3.3	2.8	2.5	2.5	2.2		1.8	1.8	1.7	1.	1.6				1.8										.77				
0	3	0						4.6	4.1						2.6	2.	2.6					1.8	1.8				1.4					1.1	1.1	1.1	1.1
1	0	0	3.4	3.5	3.9	2.4	2.4	1.9	1.6	1.6	1.8	1.8	1.1	1.1	.97	.	.95	.81	.75	.74	.70	.65	.64	0.58	.54	.52	.49	0.44	.48	.43	.41	.40	.39	.38	.36
1	0	1	9.9	9.1	8.5	5.7	5.5	4.2		3.4	2.9	2.5	2.2	2.2		2.	1.9			1.5			1.3							.86			.80		
1	0	2		18	17		9.7							3.4			3.0																		
1	1	0	24	13	15	7.2	6.8	4.8	3.8	3.7	3.1	2.7	2.8	2.8	2.1	2.	2.1		1.6	1.6	1.5	1.4	1.4		1.1	1.1	1.0		.88	.87	.84	.81	.80	.78	.75
1	1	1		69	43	14	13	8.3		6.1	4.9	4.2	3.6	3.5		3.	3.2			2.4			2.1							1.3					
1	1	2			110		21							4.9			4.8																		
1	2	0				30	24	11	7.8	7.2	5.5		3.9	3.8	3.4	3.	3.8				2.8	2.1	2.1			1.7	1.6				1.3	1.3	1.2	1.2	1.1
1	2	1					70	17		11	7.9		5.4	5.8		4.	4.6						2.9										1.7		
1	2	2												6.9			5.9																		
1	3	0						34	14	13	9.0				5.1	5.	4.9					3.0	3.0				2.2					1.7	1.7	1.6	1.6
1	3	1								19	12					6.	6.1						3.8										2.1		
1	4	0								37	15																							2.1	2.0
1	5	0									39																								2.5
2	0	0										4.6	3.5	3.4	2.9	2.	2.8	2.2	2.0	1.9	1.8	1.6	1.6	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	.97	.97	.93	.88	.88	.85	.83
2	0	1										11	6.3	6.1		4.	4.7			3.1			2.1										1.8		
2	1	0										24	7.6	7.8	5.6	5.	5.8		3.3	3.2	2.9	2.6	2.6		2.0	1.9	1.8		1.5	1.5	1.4	1.4	1.4	1.3	1.3
2	1	1											14	13		8.	8.3			4.6			3.6							2.0			1.8		
2	2	0											30	34	11	11	10				4.8	3.8	3.8			2.7	2.5				2.0	1.9	1.9	1.6	1.7
2	2	1												70		17	16						5.0										2.4		
2	3	0														34	23					5.8	5.8				3.3					2.4	2.4	2.3	2.2
2	3	1															71						6.7										3.0		
3	0	0																	3.6	5.4	4.8	3.6	3.5	2.8	2.5	2.3	2.1	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.5	1.5	1.4
3	0	1																		10			5.8							2.3			2.1		
3	1	0																		24	3.8	3.0	5.9		3.7	3.3	3.0		2.4	2.4	2.3	2.1	2.1	2.0	1.9
3	2	0																				11	11			4.7	4.2				3.0	2.6	2.8	2.7	2.5
3	3	0																					34				5.6					3.0	3.0	3.4	3.2
4	0	0																							6.1	4.8	4.0	3.3	3.0	2.9	2.7	2.5	2.5	2.8	2.9
4	1	0																								5.6	6.4		4.1	4.0	3.7	3.4	3.4	3.1	2.9
4	2	0																									11				4.0	4.4	4.4	4.1	3.8
4	3	0																														5.0	5.7	5.9	4.7
5	0	0																											5.5	5.5	5.9	4.4	4.4	4.0	5.6
5	1	0																												24	6.0	6.0	6.5	5.0	4.9
5	2	0																														12	11	6.9	6.7
5	3	0																																14	9.8
5	4	0																																	16

193664—40——4

TABLA 4-B

Número de tubos positivos			Combinación de tubos sembrados, 10, 1 y 0.1 respectivamente.																																
			0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
			5	1	1	1	2	2	3	4	4	5	1	2	2	3	3	0	1	1	2	3	3	0	1	2	3	0	1	1	2	3	3	4	5
100 ml.	50 ml.	10 ml.	0	1	2	3	1	2	1	0	1	1	1	1	2	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1		0.65	0.61	0.57	0.49	0.47	0.39		0.33	0.28	0.39	0.33	0.32	0.28	0.27			0.28			0.22							0.18			0.15		
0	0	2			1.3	1.2		.95							.65		.56																		
0	1	0	0.44	.78	.74	.65	.61	.52	.43	0.36	.35	.32	.43	.35	.34	.30	.29		0.31	.30	0.27	0.24	.23		0.24	.21	0.19		0.19	.19	0.17	0.16	.16	0.15	0.14
0	1	1		1.6	1.5	1.4	1.1	1.1	.88		.72	.61	.88	.72	.69	.61	.59			.61			.46							.38			.32		
0	2	0	1.0				1.3	1.2	.97	.81	.78	.65		.78	.75	.65	.63				.58	.50	.49			.45					.36	.34	.33	.31	.28
0	3	0	1.6						1.7	1.4	1.3	1.1				1.1	1.0					.81	.79				.64					.52	.52	.48	.44
1	0	0		.98	.89	.81	.65	.61	.49	.41	.29	.33	.49	.39	.37	.33	.32	0.41	.34	.33	.29	.25	.25	0.29	.25	.23	.20	0.23	.20	.20	.18	.17	.16	.15	.14
1	0	1		2.3	2.0	1.8	1.4	1.3	1.0		.81	.67	1.00	.81	.77	.67	.65			.67			.48							.40			.33		
1	0	2				3.1		2.1							1.2		.99																		
1	1	0		3.9	3.0	2.5	1.7	1.5	1.2	.93	.89	.78	1.2	.89	.85	.72	.69		.75	.72	.63	.54	.53		.54	.48	.42		.42	.42	.38	.35	.34	.32	.30
1	1	1			7.6	5.1	2.9	2.6	1.9		1.4	1.1	1.9	1.4	1.3	1.1	1.1			1.1			.81												
1	1	2				11.0		4.0							1.9		1.5													.63			.52		
1	2	0					5.0	3.8	2.2	1.7	1.6	1.2		1.6	1.5	1.2	1.2				1.0	.89	.86			.77	.68				.61	.55	.54	.51	.47
1	2	1						6.0	3.4		2.2	1.7		2.2	2.1	1.7	1.6						1.2										.73		
1	3	0							5.8	3.0	2.7	1.9				1.9	1.8					1.3	1.3				.97					.78	.76	.71	.65
1	3	1									3.8	2.6				2.6	2.4						1.6										.97		
1	4	0									5.1	3.1																							
1	5	0										6.5																						.94	1.1
2	0	0											1.5	1.0	.98	.81	.78	1.1	.85	.81	.69	.59	.57	.69	.59	.51	.45	.51	.45	.44	.41	.37	.36	.34	.31
2	0	1											2.6	1.7	1.5	1.3	1.2			1.3			.88							.68			.55		
2	1	0											4.2	2.2	1.9	1.4	1.4		1.5	1.4	1.2	.98	.94		.98	.83	.73		.73	.71	.65	.58	.57	.53	.49
2	1	1												3.1	2.8	2.1	2.1			2.1			1.3							.97			.78		
2	2	0												5.0	4.0	2.5	2.8				1.9	1.5	1.4			1.2	1.1				.93	.83	.81	.75	.68
2	2	1													6.0	3.5	3.2						1.9										1.0		
2	3	0														5.7	4.5					2.2	2.1				1.5					1.1	1.1	1.0	.90
2	3	1															5.4						2.7										1.3		
3	0	0																	1.9	1.8	1.4	1.1	1.1	1.4	1.1	.93	.79	.92	.79	.77	.69	.63	.61	.56	.51
3	0	1																		2.8			1.9							1.1			.83		
3	1	0																		4.4	2.4	1.7	1.7		1.7	1.7	1.2		1.2	1.1	1.0	.89	.87	.79	.72
3	2	0																				2.9	2.6			2.1	1.6				1.4	1.2	1.2	1.1	.96
3	3	0																					5.7				2.3					1.6	1.5	1.4	1.2
4	0	0																							2.2	1.6	1.3	1.6	[illegible]	1.3	1.1	.96	.93	.85	.76
4	1	0																								2.6	1.9		1.9	1.3	1.6	1.3	1.3	1.2	1.0
4	2	0																									3.0					1.3	1.7	1.5	1.3
4	3	0																														2.5	2.3	2.0	1.7
5	0	0																											2.4	2.2	1.8	1.5	1.4	1.3	1.1
5	1	0																												4.7	2.8	2.1	2.0	1.7	1.5
5	2	0																														3.1	2.9	2.3	1.9
5	3	0																															5.8	3.4	2.8
5	4	0																																	3.7

CAPITULO III

Estudio Práctico de la eficiencia de un Purificador de agua.

La estimación de la densidad de organismos Coli, mediante el uso de la teoría del N.M.P., en los procedimientos de laboratorio, anteriormente descritos, tiene multitud de aplicaciones prácticas, tales como: a) Control de potabilidad en las Plantas de Tratamiento de Agua, b) Determinación de la eficiencia de los diversos procesos de tratamiento, c) Determinación de cargas unitarias en función de los mismos organismos índices, para propósitos de proyecto, en lo que se refiere a procedimientos de purificación de carácter municipal o pequeños abastecimientos de agua, d) Control de la potabilidad de una agua en el sistema de distribución, e) Eficiencia de los diversos procesos de tratamiento de aguas negras, f) Determinación de contaminación de corrientes, y g) Control de alimentos incluyendo los procedimientos especializados para la estimación de los organismos Coli en mariscos, bebidas, helados, etc.

El trabajo práctico que comprende este capítulo, es sólo una de esta múltiples aplicaciones de la teoría del N.M.P. y se refiere a la estimación de cargas adecuadas, eficiencia y demás características de un tipo de purificador Casero muy usado en la actualidad.

Descripción General del Trabajo.-

Antes de describir las pruebas efectuadas al purificador elegido, trataré someramente sobre los purificadores caseros.

Se conoce como purificadores caseros aquellos aparatos que se emplean para el tratamiento de pequeños caudales de agua, con el fin de abastecer a una casa, hoteles, hospitales, edificios, etc., con agua potable.

El principio de purificación de éstos se basa en la filtración previa del agua o dentro del mismo aparato y más la acción de un agente bactericida, que puede ser por lo general cloro, rayos ultravioletas, iones metálicos, etc. Cuando la filtración se efectúa dentro del mismo aparato, es a presión y a través de una bujía que puede ser de barro vitrificado, porcelana, tierra diatomácea, carbón activado u otro medio filtrante que tenga características similares.

El objeto del estudio de estos purificadores obedece a las siguientes razones:

a) Como una aplicación práctica a la Teoría sobre el N.M.P.

b) A su uso cada día mayor, por el público, siendo por lo tanto imperioso señalar hasta qué punto es posible el empleo de éstos en los pequeños abastecimientos de agua para bebida.

c) Para determinar la eficiencia de cada caso particular de purificador.

d) Para dar normas y pautas a seguir en el empleo de éstos, garantizando su buen funcionamiento, señalando además los peligros que puede traer su mal funcionamiento.

Es importante remarcar el deseo del hombre por conservar y mejorar su salud y por ende el de mejorar el agua que dispone para su consumo como bebida; este propósito ha inducido al uso de medios de purificación que estén a su alcance.

La aparición de los purificadores caseros, desde no hace muchos años, ha venido a satisfacer en parte esta necesidad.

Anteriormente a éstos, se usaba la sedimentación y filtración como medios de tratamiento casero, pero no eran suficientes para eliminar todas las impurezas y bacterias-que tiene, cominmente, una agua superficial; he ahí la razón para la prevalencia de las enfermedades de origen hídrico, como la tifoidea, disentería, cólera, etc., en las zonas donde no se cuenta con abastecimiento de agua potable.

Los purificadores caseros, fruto de contimuos estudios e investigaciones han venido en ayuda de la resolucióm de este problema, aunque naturalmente, dentro de ciertos límites, marcados por el grado de contaminación del agua, que se va a tratar, por la eficiencia o rendimiento de que son capaces estos purificadores y por el desembolso económico que significa su adquisición.

Muchos tipos de purificadores caseros se encuentran para su venta en el mercado y sus diferencias radican en las patentes de cada fabricante, mas que en factores técnicos, ya que como se ha dicho mas adelante, se pueden agrupar de acuerdo al principio bactericida que emplean. Tomando en cuenta este factor, voy a mencionar algunos tipos de purificadores caseros, en forma agrupada.

1) Purificadores que emplean como agente bactericida los Rayos Ultravioletas.

En este grupo tenemos el "Filtro Aquafine", fabricado en Los Angeles, California; "Filtro Adogar"; "Filtro Bi-Tec"; "Filtro Atómico" y "Filtro Wesfat", éste último emplea además carbón activado.

2) Purificadores que emplean los iones de plata como agente bactericida.

En este grupo tenemos los siguientes: "Filtro Katadyn" fabricado en Suiza; "Filtro Visacor"; "Filtro Neptuno" de la fábrica de porcelana Frichex, emplea además de los iones de plata, aluminio, carbón activado y asbestos especiales para bacterias; "Aparatos Hyla" o "Puratón".

3) Purificadores que emplean el cloro como agente bactericida.

En este grupo tenemos: "Filtro Apsa" emplea una solu ción de hipoclorito de calcio como desinfectante; "Hipoclorador de tabletas H.T.H. (hay varios modelos).

4) Purificadores que emplean cualquier otra sustancia como agente bactericida o simplemente sistema de filtración.

En este grupo tenemos como ejemplo los siguientes: "Aparatos Ogden" trabajan combinadamente a base de filtración y cargas eléctricas generadas por iones metálicos; -- "Filtro Schumacher" del tipo de bujía Chamberlain; "Aparatos Arther" que trabajan con discos filtrantes.

De estos tipos de purificadores caseros enumerados, - se ha elegido en el presente trabajo a los "Filtros Katadyn" por las razones siguientes:

a) Son de uso muy difundido.
b) Tienen como agente bactericida los iones de plata, metal costoso y cuya acción bactericida y residual no está completamente estudiada.
c) Era uno de los aparatos existentes en la Escuela con que se contaba para la experimentación.

Filtro Katadyn.-

Este aparato fabricado en Zurich, Suiza, tiene su patente; su principio purificador se basa en el poder bactericida que tienen ciertos metales cuando se encuentran en estado iónico, tal el caso del cobre (Cu^{++}) y la plata (Ag^{+}).

El proceso catalítico de estos iones es conocido como Oligodinámico. El proceso se pone en marcha al entrar el - agua, que se está tratando, en contacto con la plata Katadyn, la que se ioniza.

Esencialmente el Filtro Katadyn consta de una bujía filtrante y del catalizador de plata que ejerce la acción bactericida y que se encuentra contenido dentro de la bujía.

La acción purificadora del filtro Katadyn se reduce a la eliminación de la turbidez y bacterias que contiene el agua a tratar; en cambio el contenido mineral del agua permanece constante; es decir que una agua dura no se ablanda ni viceversa.

La turbiedad y otras impurezas que contenga el agua se van depositando en la superficie porosa de la bujía, que es de cerámica, hasta llegar el momento en que el rendimiento del filtro baja notablemente, siendo entonces necesario lavar la bujía con mucho cuidado, usando un cepillo blando para quitar la suciedad que se ha juntado y que impide el filtrado.

Tipos de Filtros Katadyn.-

Los diferentes tipos de filtros Katadyn que se han confeccionado, se pueden agrupar en dos series a saber:

1) Filtros Katadyn que pueden instalarse directamente sobre una tubería de agua corriente, y para lo cual están debidamente acondicionados con su rosca respectiva(rosca estandar de 1/2").

2) Filtros Katadyn que se usan con bomba de mano y que se expenden completos, es decir con bomba.

Entre la primera serie tenemos los tipos "HFA-M" "MF-3" y "MF+7", de 1, 3 y 7 bujías respectivamente, estos últimos se instalan cuando se desea un mayor rendimiento de agua; estos filtros van instalados en lugar de la llave de agua. El tipo HFA-S de 1 bujía se usa cuando se requiere flujo continuo de agua.

Entre los de la segunda serie tenemos el KF que se emplea en lugares donde no hay servicios de agua corriente, como en zonas rurales. El tipo PF se le llama también de bolsillo, por ser para uso individual, como para un excursionista, explorador, etc. y ser de tamaño reducido.

Existe un último tipo de filtro Katadyn que se conoce con el nombre de "Electro Katadyn" y que se emplea cuando se desean cantidades de agua mayores. El funcionamiento de este tipo de filtro, está basado en la formación constante de iones de plata por medio de una débil corriente eléctrica a través de un electrodo de plata que se halla instalado dentro del aparato. La cantidad de plata que libera el electrodo al agua que se está tratando, es muy pequeña, de modo que no afecta la composición química ni el olor ni sabor del agua. Igualmente no tiene ninguna acción nociva en el organismo humano.

El aparato Electro Katadyn se instala de manera que trabaje sincronizadamente con el funcionamiento de las bombas que lleva el sistema de agua que se desea tratar.

Rendimiento de los Filtros Katadyn.-

La tabla siguiente indica en forma aproximada los rendimientos de los diferentes tipos de filtros Katadyn.

PRESION		Rendimientos en litros por hora		
		Filtros con		
Atmósferas o Kls/cm^2	Altura de caída del agua	1 bujía	3 bujías	7 bujías
0.5	5 metros	30	90	210
1.0	10 "	60	180	420
1.5	15 "	90	270	630
2.0	20 "	120	360	840
2.5	25 "	150	450	1,050
3.0	30 "	180	540	1,260
3.5	35 "	210	630	1,470
4.0	40 "	240	720	1,680
5.0	50 "	300	900	2,100

Como se puede apreciar en la tabla el rendimiento de los filtros varía de acuerdo con la presión de filtrado, siendo máximo a una presión de 5.0 Kls/cm^2.

Clases de Pruebas.-

Hay varias clases de pruebas que pueden efectuarse para encontrar la eficiencia de un purificador de agua; unas tienden a determinar la carga máxima de organismos Coli que puede contener un influente dado, para que el --- efluente salga con el máximo de organismos Coli permitidos a una agua de bebida. Hay otras que miden la vida del purificador, es decir el máximo de agua de una característica- conocida, que debe filtrarse, después de la cual el agente bactericida debe renovarse. Finalmente se mide también la- eficiencia de un proceso de tratamiento por medio de la D. B.O.

En el caso del Filtro Katadyn, se sugieren las si--- guientes pruebas a seguirse para determinar su eficiencia:

1) Filtrado de un volumen conocido de agua clara, -- previamente contaminado con bacilos Coli, e ir aumentando- la concentración de bacilos hasta encontrar la carga máxima del influente, que da el máximo permitido de organismos Coli en el efluente.

2) Filtrado de una agua clara previamente contaminada con una cantidad conocida de bacilos Coli y a la cual se agrega diferentes concentraciones de cloruros, para ver si tienen interferencias en el tratamiento de purificación.

3) Filtrado de un volumen de agua destilada, grande, y determinar en el efluente la concentración de iones de - plata que pasan en el agua.

4) Filtrado de una cantidad de agua con turbiedad conocida para determinar el máximo caudal que pasa entre cada limpiado de bujía.

5) Filtrado constante de una cantidad de agua hasta encontrar el volumen total que se puede tratar entre carga y carga de la bujía con la plata Katadyn.

6) Filtrado de una agua para ver el efecto residual- de los iones de plata en el efluente.

En el caso presente se efectuaron solamente las pruebas 1, 2, y 4. Las pruebas 3, 5 y 6 no se llevaron a cabo- por necesitar para las dos primeras pruebas de un método - para la determinación de iones plata en el agua, el cual -

no pudo encontrarse. La prueba 6 requiere de mucho tiempo de trabajo del Katadyn.

Las pruebas se efectuaron en el laboratorio de la - Escuela de Graduados, Departamento de Ingeniería Sanitaria, de la manera siguiente:

Primeramente se intentaron pruebas de filtrado utilizando la presión dada por el tinaco, pero se desistió - por no contar con la presión suficiente (5 ms. es la mínima). Seguidamente se instaló una bomba de mano la cual daba una presión también baja, además del trabajo manual -- que era un inconveniente. Finalmente se utilizó una bomba eléctrica con la cual ya fué posible efectuar las pruebas. La bomba empleada es de las siguientes características: Bomba Robbins y Myers Modelo C-120. Potencia de 1/4 de HP y 3,450 R.P.M. 60/50 ciclos y para 115/230 voltios. La -- presión de trabajo de la bomba fué de 1.75 Kls/cm^2. El -- aparato Katadyn empleado en las pruebas es del tipo HFA-M de una sola bujía. El gasto máximo conseguido a través del Katadyn fué de 100 litros por hora, bajando hasta 50 litros, momento en el cual se procedía a limpiar la bujía.- En cada experimento, se filtraron 200 litros de agua. En- el total de todas las pruebas se tomaron 187 porciones de agua para siembra en caldo lactosado. El total de tubos - con caldo lactosado, empleado fué de 195.

Para los efectos de la contaminación del agua con - bacilos Coli, se solicitó al Intituto de Enfermedades Tropicales, cultivos de bacilos Coli no patógenos, habiéndonos suministrado dos tubos con concentrado de estos bacilos.

El primer trabajo realizado, consistió en la preparación del medio de cultivo de acuerdo a lo indicado por los "Métodos Normales"; seguidamente se colocó el caldo - lactosado en tubos de ensaye provistos de su respectivo - tubito Durant y luego se esterilizaron. En 8 de estos tubos se sembró Coli del concentrado y se pusieron a incubación durante 24 hrs. y a 37°C. Una vez conseguido ésto, - se estuvo en condiciones de iniciar las pruebas propiamente dichas.

Primera Prueba.- Se llenó el cilindro de bombeo de- 200 litros de capacidad, con agua del abastecimiento pú-- blico, luego se infectó con una porción del líquido contenido en los tubos con Coli; se mezcló debidamente el agua y se inició el filtrado, poniendo en funcionamiento la -- bomba. Después de un filtrado aproximado a los 200 litros se tomaron muestras de agua del cilindro contaminado, y - del efluente del filtro Katadyn haciendo las siembras respectivas en caldo lactosado, obteniendo los resultados -- que aparecen en las tablas siguientes. Para todas las demás pruebas efectuadas se siguió la misma rutina.

1.-)

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el Filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de - agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml. de - agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	10	+ + + + +	5	10	- - - - -
5	1	+ + + + +	1	1	-
5	0.1	+ + + + +	1	0.1	-

2.-) Repetición de la prueba.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml. de - agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml. de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
1	0.001	+	5	10	- - - - -
1	0.0001	+	1	1	-
1	0.00001	-	1	0.1	-
1	0.000001	-			

3.-)

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	0.01	+ + + + +	5	10	- - - - -
5	0.001	+ + + + -	1	1	-
5	0.0001	+ + + - -	1	0.1	-
5	0.00001	- - - - -			

N.M.P. 280,000 Coli por 100 ml.

4.-) Se infectó con mayor cantidad de Organismos Coli

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	0.01	+ + + + +	5	10	+ - - - -
5	0.001	+ + + + +	1	1	-
5	0.0001	+ + - - -	1	0.1	-
5	0.00001	- - - - -			

N.M.P. en el influente 540,000 Coli por 100 ml.
N.M.P. en el efluente 2.2 Coli por 100 ml.

5.-) Se infectó con mayor cantidad de Coli que las pruebas anteriores.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	0.0001	+ + + + +	5	10	+ + + + +
5	0.00001	+ + + + +	5	1	+ + - - -
5	0.000001	+ + + + -	1	0.1	+
5	0.0000001	- - - - -	1	0.01	-

N.M.P. en el influente 130'000,000 de organismos Coli por 100 ml.
N.M.P. en el efluente 76 organismos Coli por 100 ml.

Segunda Parte.- Prueba con cloruros. Esta segunda serie de pruebas se realizaron con el objeto de ver si los cloruros de una agua interfieren en el proceso de purificación de los filtros Katadyn, por contener éstos, iones de plata. En las tres primeras pruebas siguientes, se emplearon concentraciones de Coli de 260,000 como N.M.P. en 100 ml.; es decir igual concentración que las últimas usadas en la primer serie que dieron resultado negativo en el efluente.

6.-) Prueba con 100 p.p.m. de cloruros. Se utilizó en todos los casos cloruro de amonio.

Agua contaminada con bacilos Coli — Agua tratada en el filtro Katadyn

# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
			5	10	- - - - -
			1	1	-
			1	0.1	-

7.-) Prueba con 500 p.p.m. de cloruros.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
			5	10	- - - - -
			1	1	-
			1	0.1	-

8.-) Prueba con 1,000 p.p.m. de cloruros.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
			5	10	- - - - -
			1	1	-
			1	0.1	-

9.-) Prueba con 1,500 p.p.m. de cloruros y mayor concentración de organismos Coli.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	0.001	+ + + + -	5	10	+ - - - -
5	0.0001	+ + + - -	1	1	-
5	0.00001	+ - - - -	1	0.1	-

N.M.P. de organismos Coli por 100 ml en el influente 330,000
N.M.P. de organismos Coli por 100 ml en el efluente 2.2

10.-) Prueba con 1,000 p.p.m. de cloruros y mayor -- concentración de organismos Coli.

Agua contaminada con bacilos Coli			Agua tratada en el filtro Katadyn		
# de tubos	Concentrac. en ml. de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.	# de tubos	Concentrac. en ml. de agua	Resultado de incubac. a 37°C por 24 hrs.
5	0.001	+ + + + +	5	10	+ + - - -
5	0.0001	+ + - - -	1	1	-
5	0.00001	+ - - - -	1	0.1	-

N.M.P. de organismos Coli por 100 ml en el influente 700,000
N.M.P. de organismos Coli por 100 ml en el efluente 5.

Cada 200 litros de agua filtrada era necesario limpiar la bujía del filtro Katadyn pues disminuía el gasto - en forma notoria.

A manera de información inserto un cuadro de las pruebas efectuadas con el mismo filtro Katadyn por parte de la Secretaría de Salubridad con el objeto de aprobar su venta en el mercado.

La prueba mencionada tuvo una duración de tres meses y se efectuó en la planta de bombeo de "La Noria" en Xochimilco D.F. Según los datos obtenidos, las aguas de ese lugar dan alrededor de 160 Bacilos Coli por litro.

Indudablemente el agua no es de calidad muy mala, y corresponde a una agua de pozo. El N.M.P. de 16 organismos Coli por 100 ml. resulta de la siembra de 5 porciones de 10 en caldo lactosado de las cuales 4 resultan positivas.

Resultado de las pruebas hechas con el aparato Katadyn.

Año 1955	5 tubos sembrados Posit.	- Negat.	N.M.P. B.Coli p.lt.	Año 1955	5 tubos sembrados Posit.	- Negat.	N.M.P. B.Coli p.lt.
Octubre				Dcbre.			
1	0	5	20	22	0	5	20
2	0	5	"	23	0	5	"
3	0	5	"	24	0	5	"
Nvbre.							
4	0	5	"	25	0	5	"
5	0	5	"	26	0	5	"
6	0	5	"	27	0	5	"
7	0	5	"	28	0	5	"
8	0	5	"	Enero 1956			
9	0	5	"	29	0	5	"
10	0	5	"	30	0	5	"
11	0	5	"	31	0	5	"
12	0	5	"	32	0	5	"
13	0	5	"	33	0	5	"
14	0	5	"	34	0	5	"
15	0	5	"	35	0	5	"
Dcbre.				36	0	5	"
16	0	5	"	37	0	5	"
17	0	5	"	38	0	5	"
18	0	5	"	39	0	5	"
19	0	5	"	40	0	5	"
20	0	5	"	41	0	5	"
21	0	5	"	-			

Determinación de la Eficiencia del Purificador.-

En el Capítulo II se ha tratado ligeramente sobre los límites superiores del N.M.P. de organismos Coli que debe- contener una agua, según la clase de tratamiento a seguir, para que el efluente no pase el límite máximo permitido por los Reglamentos para que una agua sea potable. Es decir que una agua a tratar no puede tener un número muy grande de - organismos Coli, si se quiere que el efluente esté por debajo del límite permisible. Esto se debe indudablemente a que los procesos de tratamiento que se aplican al agua no- son 100 % eficientes.

El presente acápite tiene por objeto explicar la manera como puede determinarse la eficiencia del Filtro Katadyn a fin de fijar el límite máximo del N.M.P. que debe tener el agua a tratar para obtener en el efluente agua potable.

La eficiencia de un purificador casero, puede determinarse, considerando a esta unidad, como un proceso o conjunto de procesos de tratamiento (según el tipo de purificador) de una Planta Potabilizadora; las razones que inducen a considerarlos así es que en realidad un pequeño purificador encierra uno o varios procesos limitados solamente por su pequeña capacidad.

En el libro Abastecimiento de Agua y Disposición de- Aguas Negras de Fair y Geyer, al tratar sobre los rendimientos y cargas permisibles a los filtros, hace ver la importancia que esto significa no solo para purificación de --- aguas sino en saneamiento de corrientes. Luego habla que - para determinar la eficiencia bacterial se ha establecido- una fórmula empírica entre la concentración "E" del efluente que ha sido sometido a ciertos procesos de purificación y el influente o agua cruda con una concentración "R" de - organismos Coliformes.

$$E = cR^n \qquad o \qquad \text{Log } E = \text{Log } c + n\log R$$

En esta fórmula "c" y "n" son coeficientes que refle jan respectivamente la magnitud del efluente para una cuenta dada de agua cruda y el cambio relativo en la cuenta del efluente, cambiando la del agua cruda. Un bajo valor de "c" representa fundamentalmente una alta eficiencia y un bajo valor de "n" un gran rendimiento constante con la variación de la calidad del agua cruda. Observando los valores de "c" y "n" y del número probable de organismos coliformes por 100 ml. en el agua cruda (R_o) esta puede reducirse por diferentes procesos de tratamiento a los admitidos por los reglamentos para el agua de bebida de casi 1 Coli por 100 ml en el efluente. Ver tabla siguiente.

Procesos de tratamiento	Agua turbia de río			Agua clara de lago		
	$C \times 10^3$	n	R_o	$C \times 10^3$	n	R_o
1) Cloración	15	0.96	80	50	0.76	50
2) Floculación Sedimentación y filtración Rápida.	70	0.60	80	87	0.60	60
3) El 2) y precloración.	--	--	3,500	--	--	--
4) El 2) y poscloración.	11	0.52	6,000	40	0.38	4,500
5) El 2) y doble cloración.	--	--	20,000	--	--	--
6) El 4) y doble sedimentación.	64	0.25	60,000	--	--	--

En esta tabla se han considerado las eficiencias de los procesos relativos de tratamiento.

Si estudiamos detenidamente la tabla anterior, veremos que el tratamiento que se aplica al agua en el filtro-Katadyn, puede compararse al proceso # 4 de la tabla que comprende, floculación, sedimentación, filtración rápida y poscloración, porque exactamente la acción de los iones plata comienza después de la filtración a través de la bujía. En este caso la eficiencia podría representarse por la fórmula dada $E = cR^n$, en la cual "c" y "n" tengan valores aproximadamente iguales a 0.011 y 0.52 respectivamente.

En efecto si tomamos datos de los obtenidos en los experimentos y uno de los valores de las constantes para el caso 4, tendremos:

Para $E = 76$, $R = 130'000,000$ y $n = 0.52$

$\text{Log.}76 = \text{Log.}c + 0.52 \text{ Log } 130'000,000$ de donde

$c = 0.0046$

El valor encontrado para c es muy inferior al dado para el caso 4 que es 0.011, lo que indica que los filtros Katadyn tienen una eficiencia mayor que el proceso 4 de la tabla.

En forma similar si tomamos como dato el valor de c, tendremos

Para $E = 76$, $R = 130'000,000$ y $c = 0.011$

$\text{Log.}76 = \text{Log } 0.011 + n \text{ Log } 130'000,000$

$n = 0.473$

Este valor encontrado para n es menor del 0.52 dado en la tabla, lo que confirma también una mayor eficiencia para el filtro Katadyn.

Ahora, si nos apegamos enteramente a los datos obtenidos en los experimentos, y tomando los mas desfavorables, podemos deducir los valores de las constantes "c" y "n", desarrollando las ecuaciones formadas.

$E = cR^n$ y para $E_1 = 2.2$; $R_1 = 330,000$; $E_2 = 76$ y

$R_2 = 130'000,000$

$$\text{Log. } 2.2 = \text{Log } c + n\text{Log } 330,000 \qquad (\text{I})$$

$$\text{Log } 76 = \text{Log } c + n\text{Log } 130'000,000 \qquad (\text{II})$$

De aquí tenemos:

$\text{Log } c = \text{Log } 76 - n \text{ Log } 130'000,000$

reemplazando este valor en la ecuación (I) tendremos

$\text{Log } 2.2. = \text{Log } 76 + n \text{ Log } (330,000/130'000,000)$ y desarrollando operaciones

$n = 0.593$

De igual manera reemplazando en la ecuación (I) o (II) se encuentra un valor para c igual a:

$c = 0.0012$

De aquí tendríamos que la fórmula de la eficiencia del filtro Katadyn estudiado es:

$E = 0.0012.R^{0.593}$

Aplicando esta fórmula para determinar la carga máxima del efluente que puede aplicarse al filtro Katadyn, cuando se trabaja en condiciones normales, y para obtener en el efluente no más de 1 bacilo Coli en 100 ml como N.M.P., tendremos:

Para $E = 1$, $c = 0.0012$ y $n = 0.593$

$\text{Log } 1 = \text{Log } 0.0012 + 0.593 \text{ Log } R_o$

$0 = \bar{3}.079 + 0.593 \text{ Log } R_o$

$0 = - 2.921 + 0.593 \text{ Log } R_o$

$\text{Log } R_o = 2.921/0.593 = 4.92$

$R_o = 83,000$

Luego la carga máxima encontrada es de 83,000 Bacilos Coli como N.M.P. en 100 ml.

CAPITULO IV

Conclusiones y Recomendaciones.-

1.- El objeto del presente trabajo, es prestar ayuda a los estudiantes en la interpretación de la Teoría sobre el N.M.P. aplicada a la bacteriología del agua.

2.- Es fundamental para comprender el significado del N.M.P. estudiar el desarrollo matemático que se sigue para llegar a él.

3.- Es de gran importancia el valor que tiene en la bacteriología del agua la aplicación de la Teoría sobre el N.M.P.

4.- El N.M.P. no da la cuenta exacta de organismos Coli existentes en una agua, pero sí indica la mayor posibilidad de que exista esa cantidad de organismos.

5.- En la actualidad se aplica para la cuenta de organismos un método directo, llamado de La Membrana Filtro. Este procedimiento es recomendable cuando las condiciones económicas lo permiten.

6.- El Método del N.M.P. y el de La Membrana Filtro dan resultados muy parecidos.

7.- La Ley del Binomio es aplicable a infinidad de fenómenos naturales.

8.- Las leyes de aproximación sirven para facilitar el cálculo de la Ley del Binomio.

9.- Estas leyes se acoplan más a ciertos fenómenos particulares de la naturaleza, por ser mas específicas.

10.- En una agua contaminada, las bacterias se en--

cuentran distribuídas al azar.

11.- La Ley de Poisson es la mas indicada para el -- cálculo del N.M.P. de organismos Coli en una agua.

12.- La cuenta de organismos Coli en el influente y efluente de una agua, miden la eficiencia del tratamiento a que ha sido sometida.

13.- Es indispensable trabajar el Filtro Katadyn a - una presión media (mínimo 1.75 Kls/cm^2) para obtener un rendimiento adecuado en volumen de agua.

14.- Deben ejecutarse todas las pruebas sugeridas en el Capítulo III, para determinar exactamente la eficiencia y vida de un purificador casero. Estas pruebas requieren - mucho tiempo para su ejecución.

15.- Es grande la acción bactericida que ejercen los iones de plata en el filtro Katadyn.

16.- Probablemente los iones de plata son mas efectivos que el Cloro.

17.- Los Cloruros de una agua interfieren poco en la acción bactericida de los iones de plata del filtro Katadyn.

18.- Trabajando en condiciones normales, el filtro - Katadyn, es un tratamiento suficiente para una agua superficial, corriente, de no mas de 20,000 bacilos Coli como N.M.P.

19.- Deben exigirse a los fabricantes, pruebas totales de eficiencia de los purificadores que ponen en venta al público.

20.- Deben darse al público las condiciones de trabajo de los purificadores y sus limitaciones.

21.- Es poco probable el empleo de iones de plata en el tratamiento de grandes volúmenes de agua, por su costo elevado.

BIBLIOGRAFIA

1.- An Outline of Probability and Its Uses.- Burgess Publishing Co.426 SO.Sixth St. Minneapolis Minn.- Autor: Maurice C. Holmes.

2.- Higher Mathematics for Engineers and Physicists.- Mc Graw-Hill Book Company.Inc-New York - London.- Autores: Ivan S. Sokolnikoff y Elizabeth S. Sokolnikoff.

3.- Cálculo Integral.- Autor: Granville.

4.- Water Supply an Waste-Water Disposal.- Autor: Gordon Mas Kew Fair and John Charles Geyer.

5.- Most Probable Numbers for Evaluation of Coli Aerogenes Test By Fermentation Tube Method.- Reprint No. 1621 From The Public Health Reports.- Autor: J. K. Hoskins.

6.- Métodos Normales para Exámenes de Aguas, Aguas Negras y Desechos Industriales.- American Public Health.- Association American Water Works Association.- Federation of Sewage and Industrial Wastes Associations. Traducción: Ing. P.S. Caballero.

7.- Introduction to Statics.- Autor H. P. Kramer.

8.- Apuntes Mimeográficos de la Escuela de Ingeniería Sanitaria de México.