0819
Duplicada

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

SECCION DE ESTRUCTURAS

TESIS DE MAESTRIA

"EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA TEORIA LINEAL DE PLACAS ELASTICAS"

QUE PRESENTA:

MANUEL ALBERTO SALAZAR ARECHIGA

México, D. F.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE ESTRUCTURAS

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA TEORIA LINEAL DE PLACAS ELASTICAS

TESIS QUE PRESENTA

MANUEL ALBERTO SALAZAR ARECHIGA

Para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

CREDITOS ASIGNADOS A LA TESIS 12

JURADO:

Presidente:	DR. GUSTAVO AYALA MILIAN
Vocal:	M EN I LUIS ALFONSO REYES A.
Secretario:	DR. GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ
Suplente:	ING. NEFTALI RODRIGUEZ C.
Suplente:	M EN I RAMON CERVANTES BELTRAN

COORDINADOR DE LA SECCION

ING. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS

SECRETARIO ACADEMICO

M EN I GABRIELA MOELLER CHAVEZ

Cd. Universitaria, octubre de 1984.

El presente trabajo está dedicado

A mis padres:

Alberto Salazar Cárdenas

y

Dolores Aréchiga Duarte

A mis hermanas:

Dolores Guadalupe

Angélica

María Lorena

A mi esposa e hijo:

María de Lourdes

y

Javier Alberto

A G R A D E C I M I E N T O

Agradezco muy especialmente este trabajo a mis maestros y amigos Dr. Gonzalo Alduncin G. y al M. en I. Luis A. Reyes A., por haberme transmitido los conocimientos básicos indispensables en la elaboración de esta Tesis; además de su constante empuje para llegar al fin y no quedarme a la mitad del camino.

I N D I C E

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En términos generales, el objetivo de este trabajo es el desarrollo del Análisis Cualitativo y el Análisis de Aproximaciones por medio de EL METODO DEL ELEMENTO FINITO para el caso de problemas estáticos de placas delgadas linealmente elásticas.

En el Análisis Cualitativo se estudiarán los siguientes puntos:

a) existencia de soluciones,

b) unicidad de soluciones,

c) dependencia continua respecto a los datos,

d) regularidad de soluciones,

y posteriormente en el Análisis de Aproximaciones se analizarán:

e) existencia y unicidad de soluciones aproximadas,

f) convergencia

g) estimación del error,

h) orden (velocidad) de convergencia.

En la primera parte (Cap. 2), se formula el modelo mecánico para una placa sobre la que actuan cargas normales a su plano medio aplicadas en su cara superior y fuerzas de cuerpo. Para ello, se desarrollan las ecuaciones de campo de la elasticidad lineal tridimensional (ver Gurtin [1981]) y se supone que los desplazamientos satisfacen las hipótesis de Kirchhoff, de ésta manera, se obtienen algunos términos que pueden ser eliminados en forma justificada al llevar a cabo la aproximación del problema tridimensional a bidimensional. Entonces, al ser aplicado los balances de momento lineal y angular al cuerpo bidimensional, se determina el modelo mecánico que rige a tal proble_ ma. También se especifica las condiciones que debe satisfacer el modelo bi_ dimensional para cumplir con el tipo de apoyo de empotramiento, mismo que se_ rá usado en partes subsecuentes de este trabajo. A partir del modelo bidimen_ sional se obtiene el modelo de la teoría lineal de Kirchhoff de placas elás_ ticas.

Es importante hacer notar que usualmente se construye el modelo de flexión de placas considerando únicamente fuerzas de cuerpo normales a su plano medio, sin tomar en cuenta ningún tipo de carga externa; por tanto se debe justificar el hacer uso de tal acción externa.

El siguiente paso (Cap. 3) es la formulación matemática del problema de placas sujetas a flexión en términos del problema de minimización de la ener_ gía potencial, y así aplicar el Método Variacional en el Análisis Cualitativo. Cuando la energía de deformación es simétrica, continua y positiva, y el tra_ bajo de las fuerzas externas es continuo, entonces es posible establecer un problema variacional, equivalente al problema del mínimo. Además, se muestra la equivalencia del problema variacional al distribucional o de valores en la frontera, que consiste en las ecuaciones de equilibrio y condiciones de fron_ tera.

Para demostrar la existencia y fundamentalmente la unicidad del modelo matemático, es necesario la K-elipticidad de la forma bilineal (energía de de_ formación) correspondiente, misma que depende de las condiciones de frontera; en este trabajo únicamente se desarrolla para el tipo de apoyo empotrado.

El contenido del Cap. 4 es primordial para el desarrollo de esta Tesis, en él se da una introducción al Método del Elemento Finito. Este método, en su forma más simple es un método de aproximación que consiste en definir pro_ blemas similares al cual se quiere aproximar, llamados problemas discretos, sobre subespacios de dimensión finita $\underline{V}_h$ del espacio de desplazamientos cinemáticamente admisibles $\underline{V}$.

Para esto, serán usados métodos conformes y no conformes. Por método conforme se entiende si se cumple: (a) $\underline{V}_h$ es un subespacio de $\underline{V}$ y (b) las formas bilineal y lineal, las cuales son usadas en la definición del problema discreto, son idénticas a los del problema original. Si al menos una condición no se cumple se dice que el método es no conforme. En la aproximación del problema esta diferencia se notará claramente en la estimación del error.

Haciendo uso de métodos conformes y no conformes, en el Cap. 5 se determina la convergencia y exactitud de las soluciones aproximadas del problema de flexión de placas. El elemento finito rectángulo de Bogner-Fox-Schmit es usado en el método conforme, éste cumple con las hipótesis mínimas que aseguran convergencia en su aproximación de desplazamientos que son: $\underline{u} \in H^2(\Omega)$ y $P_2(K) \subset P_K$, $K \in \tau_h$. En este caso se obtiene una velocidad de convergencia igual a dos (2), en lo cual es de gran ayuda la demostración del Lema de Cea. Pero el caso no conforme, se usa el elemento finito rectángulo de Adini, donde la inclusión $\underline{V}_h \subset \underline{V}$ es violada. Aqui se aplica el segundo Lema de Strang, para obtener una velocidad de convergencia de uno (1).

En el último capítulo de este trabajo, Cap. 6, se presentan las técnicas de implementación numérica del problema de empotramiento, aproximado mediante el rectángulo de Adini. Con ello se genera un programa de computadora, cuyos experimentos numéricos son comparados con los que se obtienen de otros programas ya elaborados para diferentes elementos finitos. Uno de ellos es el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, el cual presenta mejor aproximación de los diferentes parámetros a los obtenidos con el rectángulo de Adini; esto sustenta lo desarrollado en el Gap. 5 para tales elementos.

CAPITULO 2

MODELO MECANICO DEL PROBLEMA DE PLACAS

En este capítulo se desarrollará el modelo mecánico de la teoría lineal de Kirchhoff de placas elásticas lineales, como una aproximación de un cuerpo elástico lineal isótropo tridimensional. Además, se supondrá que actúan cargas externas normales a su plano medio y fuerzas de cuerpo.

Para obtener los componentes del tensor de deformaciones tridimensionales se partirá de las hipótesis de desplazamientos, llamadas hipótesis de Kirchhoff. Una vez determinadas las componentes del tensor de deformaciones se procederá a obtener los correspondientes del tensor de esfuerzos haciendo uso de las relaciones constitutivas. Posteriormente, se aproximan las ecuaciones de campo obtenidas en el caso tridimensional para obtener un modelo mecánico que llamaremos modelo mecánico bidimensional, para el cual serán construidas las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos para el caso estático. Se obtendrán como un caso particular las ecuaciones de campo, condiciones de frontera y el modelo mecánico de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales.

2.1 Hipótesis Básicas

Las hipótesis básicas correspondientes a este problema son:

H1: (Hipótesis Geométricas). En su estado no deformado, la placa, considerada como un medio en dos dimensiones ocupa una región Ω, tal que:

Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ con una frontera regular $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$.

En realidad la placa es un cuerpo tridimensional que ocupa una región B

de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$B = \left\{x \mid x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2) \in \bar{\Omega}, \right.$$
$$\left. -1/2\ h\ (x_1,x_2) \leq x_3 \leq 1/2\ h\ (x_1,x_2)\right\}$$

donde $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, representa el espesor de B. La frontera de B, ∂B, es tal que $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \partial B_3$, $\partial B_1 = \partial\Omega_i \times \{h/2\}$, $\partial B_2 = \partial\Omega_2 \times \{-h/2\}$, $\partial B_3 = \partial\Omega_3 \times \{x_3\}$, $-1/2\ h < x_3 < 1/2\ h$.

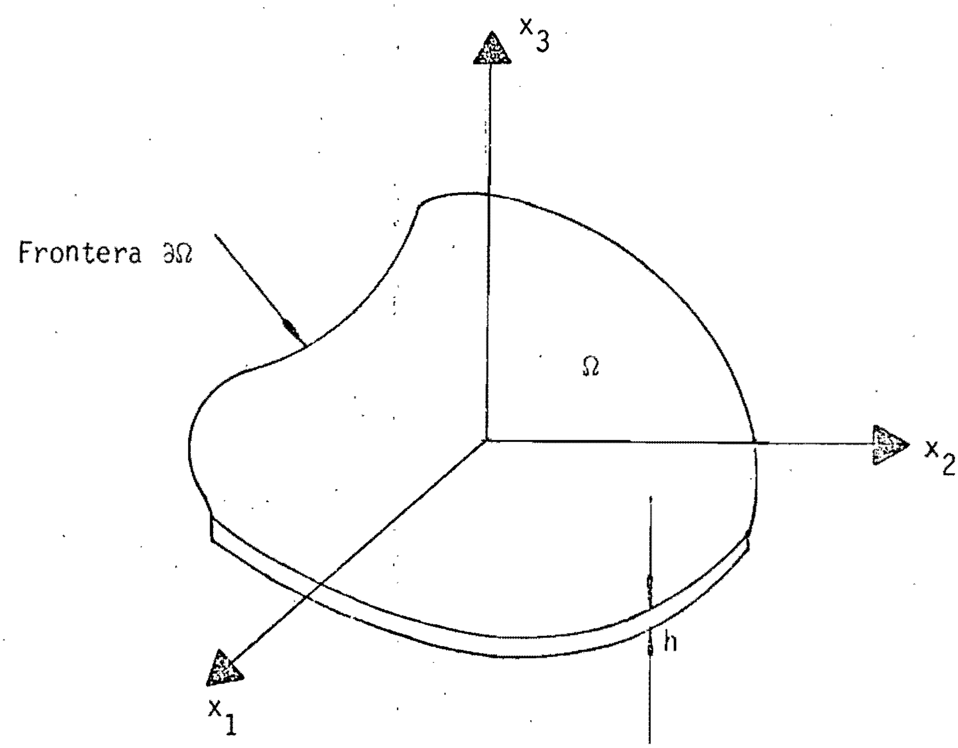


Figura 2.1 Geometría de una placa delgada de espesor constante.

H2: El material que constituye la placa, es homogeneo, isótropo y cumple con la Ley de Hooke. En este caso, las ecuaciones de campo de la elasticidad lineal tridimensional están dadas por

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\sim}{e} = 1/2 \left[\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^{t}\right],\\
&\underset{\sim}{S} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underset{\sim}{e} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{e})\ \underset{\sim}{1}\right],\\
&-\ \mathrm{Div}\ \underset{\sim}{S} = \underline{b},\\
&\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^{t}
\end{aligned}\right\}\ \text{en } B \tag{2.1.1}$$

donde E es el modulo de Young, $E > 0$, y ν el módulo de Poisson, $0<\nu<1/2$. El tensor de esfuerzos, tensor de deformaciones, vector de desplazamientos y las fuerzas de cuerpo, están representadas por $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{e}$, $\underline{u}$ y $\underline{b}$, respectivamente.

H3: La carga externa $q = q(\underline{x},h/2)$, $\underline{x} \in \Omega$, actúa normal al plano medio de la placa, además de la acción de las fuerzas de cuerpo $\underline{b} = b(x_1,x_2,x_3)$, $(x_1,x_2,x_3) \in B$.

H4: Las fuerzas aplicadas a la placa son tales que los desplazamientos satisfacen las hipótesis de Kirchhoff modificadas (ver Duvaut y Lions [1976]).

$$u_1\ (x_1,x_2,0) = u_2\ (x_1,x_2,0) = 0,\ (x_1,x_2) \in \Omega \tag{2.1.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_1\ (x_1,x_2,x_3) = x_3\ u_{1,3}(x_1,x_2,0)\\
&u_2\ (x_1,x_2,x_3) = x_3\ u_{2,3}(x_1,x_2,0)\\
&u_3\ (x_1,x_2,x_3) = u_3\ (x_1,x_2,0) + x_3\ u_{3,3}\ (x_1,x_2,0)\\
&\qquad\qquad + \frac{x_3^2}{2}\ u_{3,33}(x_1,x_2,0)
\end{aligned}\right\}\ (x_1,x_2,x_3) \in B \tag{2.1.3}$$

2.2 Componentes del Tensor de Deformaciones y Esfuerzos.

Usando las ecuaciones de campo (2.1.1) y las hipótesis de Kirchhoff (2.1.3) se construyen las expresiones de los componentes del tensor de deformaciones $\underset{\sim}{e}$ y de esfuerzos $\underset{\sim}{S}$ del cuerpo B, donde

i) $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$; $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$,

$$- 1/2\ h\ (x_1, x_2) \leq x_3 \leq 1/2\ h\ (x_1, x_2)$$

ii) $$\left.\begin{aligned} \bar{u}_{i,j} &= u_{i,j}\ (x_1, x_2, 0) \\ \bar{u}_{i,jk} &= u_{i,jk}\ (x_1, x_2, 0) \\ \bar{u}_{i,jkl} &= u_{i,jkl}\ (x_1, x_2, 0) \end{aligned}\right\} i,j,k,l = 1,2,3$$

$$\left.\begin{aligned}
e_{11}(x) &= x_3\ \bar{u}_{1,31} \\
e_{22}(x) &= x_3\ \bar{u}_{2,32} \\
e_{33}(x) &= \bar{u}_{3,3} + x_3\ \bar{u}_{3,33} \\
e_{12}(x) &= \tfrac{1}{2}\ x_3\ (\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31}) \\
e_{13}(x) &= \tfrac{1}{2}\ (\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + x_3\ \bar{u}_{3,31} + \tfrac{1}{2}\ x_3^2\ \bar{u}_{3,331}) \\
e_{23}(x) &= \tfrac{1}{2}\ (\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + x_3\ \bar{u}_{3,32} + \tfrac{1}{2}\ x_3^2\ \bar{u}_{3,332}) \\
e_{21}(x) &= e_{12}(x) \\
e_{31}(x) &= e_{13}(x) \\
e_{32}(x) &= e_{23}(x) \\
\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{e}(x) &= \bar{u}_{3,3} + x_3\ [\bar{u}_{1,31} + \bar{u}_{2,32} + \bar{u}_{3,33}]
\end{aligned}\right\} x = (x_1, x_2, x_3) \in B \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}(x) &= \frac{E}{1+\nu}\left[x_3\ \bar{u}_{1,31} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{e})\ (x)\right] \\
S_{22}(x) &= \frac{E}{1+\nu}\left[x_3\ \bar{u}_{2,32} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{e})\ (x)\right] \\
S_{33}(x) &= \frac{E}{1+\nu}\left[\bar{u}_{3,3} + x_3\ \bar{u}_{3,33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{e})\ (x)\right] \\
S_{12}(x) &= \frac{x_3\ E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31}\right]
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{13}(x) &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + x_3\,\bar{u}_{3,31} + \frac{1}{2}x_3^2\,\bar{u}_{3,331}\right] \\ S_{23}(x) &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + x_3\,\bar{u}_{3,32} + \frac{1}{2}x_3^2\,\bar{u}_{3,332}\right] \\ S_{21}(x) &= S_{12}(x) \\ S_{31}(x) &= S_{13}(x) \\ S_{32}(x) &= S_{23}(x) \end{aligned}\right\}\ x = (x_1,x_2,x_3)\ \varepsilon\ B \tag{2.2.2}$$

Se tiene la siguiente expresión que relaciona las tracciones de superficie que actuan sobre la frontera $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \partial B_3$ con las tracciones internas

$$\underline{S} = \underset{\sim}{S}\,\underline{n} \tag{2.2.3}$$

como solo actuan fuerzas normales al plano medio, entonces $n = (0,0,1)$; por tanto

$$S_i = S_{i3}\,n_3 = S_{i3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} S_1 &= S_{13} = 0 \\ S_2 &= S_{23} = 0 \\ S_3 &= S_{33} = q \end{aligned}\right\},\ x\ \varepsilon\ \partial B_1 \\ &\left.\begin{aligned} S_1 &= S_{13} = 0 \\ S_2 &= S_{23} = 0 \\ S_3 &= S_{33} = 0 \end{aligned}\right\}\ \ x\ \varepsilon\ \partial B_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.4}$$

las cuales deben necesariamente satisfacer las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
S_{13}(x_1,x_2,+h/2) &= 0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{1,3}+\bar{u}_{3,1}+\frac{h}{2}\,\bar{u}_{3,31}+\frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331}\right]\\
S_{23}(x_1,x_2,+h/2) &= 0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{2,3}+\bar{u}_{3,2}+\frac{h}{2}\,\bar{u}_{3,32}+\frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,332}\right]\\
S_{33}(x_1,x_2,+h/2) &= q = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{3,3}+\frac{h}{2}\,\bar{u}_{3,33}+\frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{e}\,(x_1,x_2,+h/2)\right]
\end{aligned}\right\}(x_1,x_2)\in\partial\Omega_1\\
&\left.\begin{aligned}
S_{13}(x_1,x_2,-h/2) &= 0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{1,3}+\bar{u}_{3,1}-\frac{h}{2}\,\bar{u}_{3,31}+\frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331}\right]\\
S_{23}(x_1,x_2,-h/2) &= 0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{2,3}+\bar{u}_{3,2}-\frac{h}{2}\,\bar{u}_{3,32}+\frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,332}\right]\\
S_{33}(x_1,x_2,-h/2) &= 0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\bar{u}_{3,3}-\frac{h}{2}\bar{u}_{3,33}+\frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{e}\,(x_1,x_2,-h/2)\right]
\end{aligned}\right\}(x_1,x_2)\in\partial\Omega_2
\end{aligned}\right\}\quad(2.2.5)$$

donde, $h = h\,(x_1,x_2)$.

El siguiente paso es expresar los componentes del vector desplazamiento en términos de las funciones $\bar{u}_3$, $\bar{u}_{3,jkl}$, $\bar{u}_{3,jklm}$, $j,k,l,m = 1,2,3$. De (2.2.5) se tiene que

$$S_{13}(x_1,x_2,+h/2)+S_{13}(x_1,x_2,-h/2) = 0 = \bar{u}_{1,3}+\bar{u}_{3,1}+\frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_{1,3} = -\,\bar{u}_{3,1} - \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331},\\
&\text{similarmente}\\
&\bar{u}_{2,3} = -\,\bar{u}_{3,2} - \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,332},\\
&\bar{u}_{3,3} = \frac{(1+\nu)\;(1-2\nu)}{2\,E(1-\nu)}\,q\;,\\
&\bar{u}_{3,33} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{h\,E(1-\nu)}\,q + \frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,11}+\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\bar{u}_{3,3322})\right]
\end{aligned}\right\}\begin{gathered}(x_1,x_2)\in\partial\Omega_1\\ (2.2.6)\end{gathered}$$

lo cual permite, de acuerdo a las ecuaciones (2.1.3) y (2.2.6) obtener

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2,x_3) &= -\,x_3\left[\bar{u}_{3,1} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331}\right]\\
u_2(x_1,x_2,x_3) &= -\,x_3\left[\bar{u}_{3,2} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,332}\right]\\
u_3(x_1,x_2,x_3) &= \bar{u}_3 + x_3\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\,E\,(1-\nu)}\,q\left[1 + \frac{x_3}{h}\right] +\\
&\quad + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,11}+\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3311}+\bar{u}_{3,3322})\right]
\end{aligned}\right\}\ \text{en } B \qquad (2.2.7)$$

Las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) pueden expresarse en términos de la función $\bar{u}_3$ y sus derivadas, al hacer uso de las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7). Entonces, las expresiones de los componentes del tensor de deformaciones son

$$\left.\begin{aligned}
e_{11}(x) &= -x_3(\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}\,u_{3,3311})\\
e_{22}(x) &= -\,x_3(\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\,u_{3,3322})\\
e_{33}(x) &= \bar{u}_{3,3}+x_3\,\bar{u}_{3,33} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right]\,q\,+\\
&\quad + x_3\,\frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,11}+\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\bar{u}_{3,3322})\right]\\
e_{12}(x) &= -\,x_3(\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3312})\\
e_{13}(x) &= \frac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,q_{,1}\left(x_3 + \frac{x_3^2}{h}\right) +\\
&\quad + \frac{x_3^2}{4}\,\frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,111}+\bar{u}_{3,221} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,33111}+\bar{u}_{3,33221})\right]\\
e_{23}(x) &= \frac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,q_{,2}\left(x_3 + \frac{x_3^2}{h}\right) +\\
&\quad + \frac{x_3^2}{4}\,\frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,112}+\bar{u}_{3,222}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112}+\bar{u}_{3,33222})\right]\\
\operatorname{tr}\,\underset{\sim}{e}(x) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\,q\left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right] -\\
&\quad - x_3\,\frac{\nu}{1-\nu}\left[\bar{u}_{3,11}+\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\bar{u}_{3,3322})\right]
\end{aligned}\right\}\ \text{en } B \qquad (2.2.8)$$

$$
\left.\begin{aligned}
e_{21}(x) &= e_{12}(x)\\
e_{31}(x) &= e_{13}(x)\\
e_{32}(x) &= e_{23}(x)
\end{aligned}\right|
$$

La ecuación (2.2.8) permite expresar los componentes del tensor de esfuerzos mediante las siguientes expresiones:

$$
\left.\begin{aligned}
S_{11}(x) &= -x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left[\bar{u}_{3,11}+\nu\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\nu\bar{u}_{3,3322})\right]+\\
&\quad+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{x_3}{h}\right)q\\
S_{22}(x) &= -x_3\frac{E}{1-\nu^2}\left[\bar{u}_{3,22}+\nu\bar{u}_{3,11}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322}+\nu\bar{u}_{3,3311})\right]+\\
&\quad+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{x_3}{h}\right)q\\
S_{33}(x) &= \left(\frac{1}{2}+\frac{x_3}{h}\right)q\\
S_{12}(x) &= -x_3\frac{E}{1+\nu}\left(\bar{u}_{3,12}+\frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312}\right)\\
S_{13}(x) &= \frac{1}{4}\frac{1-2\nu}{1-\nu}q_{,1}\left(x_3+\frac{x_3^2}{h}\right)+\\
&\quad+\frac{x_3^2}{4}\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\left[\bar{u}_{3,111}+\bar{u}_{3,221}+\frac{h}{8}(\bar{u}_{3,33111}+\bar{u}_{3,33221})\right]\\
S_{23}(x) &= \frac{1}{4}\frac{1-2\nu}{1-\nu}q_{,2}\left(x_3+\frac{x_3^2}{h}\right)+\\
&\quad+\frac{x_3^2}{4}\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\left[\bar{u}_{3,112}+\bar{u}_{3,222}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112}+\bar{u}_{3,33222})\right]\\
S_{21}(x) &= S_{12}(x)\\
S_{31}(x) &= S_{13}(x)\\
S_{32}(x) &= S_{23}(x)
\end{aligned}\right\}\ x\in B \qquad (2.2.9)
$$

2.3 Ecuaciones de Campo Bidimensionales de Kirchhoff y Modelo Mecánico del Problema Aproximado.

En esta sección se presenta una aproximación de las ecuaciones de campo tridimensional de Kirchhoff a bidimensional, y con esta construir el modelo mecánico del problema aproximado.

Sea $f : \bar{B} \to \mathbb{R}$, se dice que $f(u)$ se aproxima más rápido al cero que α si se cumple

$$\left.\begin{array}{l} f(u) = O(\alpha) \text{ si} \\ \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \dfrac{\|f(u)\|}{\|\alpha\|} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.3.1)$$

Por tanto, al tomar en cuenta la ecuación (2.3.1), los componentes del vector de desplazamientos (2.2.7) pueden expresarse como:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x_1,x_2,x_3) = -\, x_3\, \bar{u}_{3,1} + O(h^2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) = -\, x_3\, \bar{u}_{3,2} + O(h^2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) = \bar{u}_3 + \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\,E(1-\nu)}\, q \left[1 + \dfrac{x_3}{h}\right] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{x_3^2}{2}\, \dfrac{\nu}{1-\nu} \left[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}\right] + O(h^3) \end{array}\right\} \text{ en } B \qquad (2.3.2)$$

Similarmente, los componentes del tensor de deformaciones (2.2.8) y de esfuerzos (2.2.9) pueden expresarse, respectivamente, de la siguiente manera:

$$e_{11}(x) = -\, x_3\, \bar{u}_{3,11} + O(h^2)$$

$$e_{22}(x) = -\, x_3\, \bar{u}_{3,22} + O(h^2)$$

$$\left.\begin{aligned}
e_{33}(x) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right] q + \\
&\quad + x_3 \frac{\nu}{1-\nu} \left[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}\right] + O(h^2) \\
e_{12}(x) &= - x_3 \, \bar{u}_{3,12} + O(h^2) \\
e_{13}(x) &= \frac{1}{4} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q_{,1} \left[x_3 + \frac{x_3^2}{h}\right] + \\
&\quad + \frac{x_3^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} \left[\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221}\right] + O(h^3) \\
e_{23}(x) &= \frac{1}{4} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q_{,2} \left[x_3 + \frac{x_3^2}{h}\right] + \\
&\quad + \frac{x_3^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} \left[\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222}\right] + O(h^3) \\
\operatorname{tr} \underset{\sim}{e}(x) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q \left[\frac{1}{2} + \frac{x_3^2}{h}\right] - \\
&\quad - x_3 \frac{\nu}{1-\nu} \left[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}\right] + O(h^2) \\
e_{21}(x) &= e_{12}(x) \\
e_{31}(x) &= e_{13}(x) \\
e_{32}(x) &= e_{23}(x)
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{en B} \\ \\ (2.3.3)\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x) &= - x_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left[\bar{u}_{3,11} + \nu \bar{u}_{3,22}\right] + \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right] q + O(h^2) \\
S_{22}(x) &= - x_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left[\bar{u}_{3,22} + \nu \bar{u}_{3,11}\right] + \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right] q + O(h^2) \\
S_{33}(x) &= \left[\frac{1}{2} + \frac{x_3}{h}\right] q \\
S_{12}(x) &= - x_3 \frac{E}{1+\nu} \bar{u}_{3,12} + O(h^2)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{13}(x) &= \frac{1}{4}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,q_{,1}\left[x_3+\frac{x_3^2}{h}\right]+\\
&\quad+\frac{x_3^2}{4}\,\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\,(\bar{u}_{3,111}+\bar{u}_{3,221})+O(h^3)\\
S_{23}(x) &= \frac{1}{4}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,q_{,2}\left[x_3+\frac{x_3^2}{h}\right]+\\
&\quad+\frac{x_3^2}{4}\,\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\,(\bar{u}_{3,112}+\bar{u}_{3,222})+O(h^3)\\
S_{21}(x) &= S_{12}(x)\\
S_{31}(x) &= S_{13}(x)\\
S_{32}(x) &= S_{23}(x)
\end{aligned}\right\}\quad x\ \varepsilon\ B \qquad (2.3.4)$$

Una vez determinados en forma aproximada los componentes del campo de desplazamientos (2.3.2), del tensor de deformaciones (2.3.3) y del tensor de esfuerzos (2.3.4), se procede a construir las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos del cuerpo bidimensional de Kirchhoff.

Para esto, supóngase que B_1 es una parte de B con una frontera regular $\partial B_1 = \partial S_1 \cup \partial S_2$, así que

$$B_1 = \left\{x \mid x=(x_1,x_2,x_3)\ \varepsilon\ \mathbb{R}^3,\ (x_1,x_2)\ \varepsilon\ \Omega_1,\ -\frac{1}{2}\,h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq \frac{1}{2}\,h(x_1,x_2)\right\}$$

donde, Ω_1 es un subconjunto de Ω con frontera regular $\partial\Omega_1$,

$$\partial S_1 = \Omega_1 \times \{-h/2,\ +h/2\},$$

$$\partial S_2 = \partial\Omega_1 \times \{x_3\},\ -\frac{1}{2}\,h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq \frac{1}{2}\,h(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\ \varepsilon\ \partial\Omega_1$$

El cuerpo $B\text{-}B_1$ ejerce un sistema de fuerzas sobre B_1, el cual, en equilibrio, junto con las fuerzas de cuerpo $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ y la carga externa $q = q(\underline{x},\ h/2)$, $\underline{x}\ \varepsilon\ \Omega$, sobre la frontera ∂S_2, forman un sistema estáticamente equivalente a cero. Aplicando los principios de balance lineal y angular, respectivamente, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} &\int_{B_1} \underline{b}\, d\, V_1 + \int_{\partial B_1} \underset{\sim}{S}\, \underline{n}\, d\, B_1 = 0 \\ &\int_{B_1} \left[\underline{m} + (\underline{x} x \underline{b})\right] d\, V_1 + \int_{\partial B_1} \left[\underset{\sim}{M}\, \underline{n} + (\underline{x} x \underset{\sim}{S}\, \underline{n})\right] dB_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.5)$$

Como $\partial\Omega_1$ es regular y además que en las ecuaciones de campo del problema bidimensional aproximado de Kirchhoff la variable x_3 está explicita, entonces (2.3.5) es equivalente a

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} b_i\, d\, \Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \Sigma_{ij}\, n_j\, d\, \Omega_1 \\ &\int_{\Omega_1} \left[m_i + (\underline{x} \times b_i)\right] \partial\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \left[M_{ij}\, n_j + (\underline{x} \times \Sigma_{ij}\, n_j)\right] d\, \Omega_1 = 0 \end{aligned}\right\} (2.3.6)$$

donde,

$$\left.\begin{aligned} b_i^*(x_1,x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} b_i(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 \\ m_i(x_1,x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k}\, x_3\, b_k(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 \\ \Sigma_{ij}(x_1,x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{ij}(x_1,x_2,x_3) dx_3 \\ M_{ij}(x_1,x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k}\, x_3\, S_{kj}\, dx_3 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.7)$$

Debido a que B_1 es una región arbitraria de B, entonces al transformar las integrales de superficie en integrales de volumen en (2.3.5) y considerando $n_3=0$, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, respectivamente

$$\Sigma_{\alpha\beta,\beta} + b_\alpha = 0, \tag{2.3.8}$$

$$M_{2\alpha,\alpha 1} - M_{1\alpha,\alpha 2} - m_{1,2} + m_{2,1} + b_3 \tag{2.3.9}$$

Observación 2.3.1. Los índices Romanos i,j,k tienen rango de 1 a 3; y los índices Griegos α,β de 1 a 2.

Sustituyendo (2.3.4) en $(2.3.7)_3$, se tiene

$$\Sigma_{11} = \Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \Sigma_{22} = O(h^3) \tag{2.3.10}$$

de (2.3.8), (2.3.10) y $(2.3.7)_2$, se obtiene que

$$b_1^* = b_2^* = 0 \implies m_1 = m_2 = 0 \tag{2.3.11}$$

Ahora, sustityendo (2.3.4) en $(2.3.7)_4$, se tiene

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \bar{u}_{3,12} + O(h^4), \\ M_{22} &= -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \bar{u}_{3,12} + O(h^4), \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} - \frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu} q + O(h^4), \\ M_{21} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu} q + O(h^4). \end{aligned}\right\} \tag{2.3.12}$$

Si definimos el desplazamiento vertical del plano medio por

$$\omega(x_1,x_2) = u_3\,(x_1,x_2,0), \quad x_1,x_2 \in \Omega \tag{2.3.13}$$

y sustituyendo (2.3.11) y (2.3.12) en (2.3.9) y suponiendo los términos $O(h^2)$, $O(h^3)$, $O(h^4)$ despreciables, se obtiene

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\omega_{,1111} + \nu\omega_{,1122}) + \frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu}q_{,11} - \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\omega_{,1122} -$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\omega_{,1111} - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\omega_{,2222} + \nu\omega_{,1122}) + \frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu}q_{,22} + b_3 = 0$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\omega_{,1111} + \omega_{,2222}) - \frac{2\,Eh^3\,(\nu\omega_{,1122}) - 2\,Eh^3\,(1-\nu)(\omega_{,1122})}{12(1-\nu^2)} +$$

$$+\frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu}(q_{,11} + q_{,22}) + b_3 = 0$$

redefiniendo

$\frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu}(q_{,11} + q_{,22}) + b_3^* = \bar{q}$; se determina que

$$D\,\Delta^2\omega = \bar{q} \tag{2.3.14}$$

donde

$$\Delta^2\omega = \Delta\Delta\omega = \omega_{,1111} + 2\omega_{,1122} + \omega_{,2222}$$

y $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, el cual es llamado el modulo de rigidez a flexión de la placa; por tanto, el desplazamiento vertical del plano medio de nuestro modelo bidimensional es gobernado por la ecuación (2.3.14).

Observación 2.3.2. Se dice que un cuerpo bidimensional de Kirchhoff satisface condiciones de empotramiento si

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = u_2(x_1,x_2,x_3) = u_3(x_1,x_2,x_3) = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega_1$$

condiciones que son satisfechas, de acuerdo a (2.3.6), si y solo si

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{,1} = \omega_{,2} = \omega = 0 \\ \\ q\left[1 + \frac{x_3}{h}\right] = 0 \Longleftrightarrow q = 0 \end{array}\right\} \text{ sobre } \partial\Omega_1 \qquad (2.3.15)$$

Observación 2.3.3. Obsérvese que para el caso particular de $q = 0$ sobre ∂B_1 y $\underline{b} = (0,0,b_3)$ en Ω, las ecuaciones de campo del problema bidimensional de Kirchhoff que se modificarían son:

$$e_{13}(x) = \frac{x_3^2}{4}\frac{\nu}{1-\nu}\left[\omega_{,111} + \omega_{,221}\right],$$

$$e_{23}(x) = \frac{x_3^2}{4}\frac{\nu}{1-\nu}\left[\omega_{,222} + \omega_{,112}\right],$$

$$e_{33}(x) = x_3\frac{\nu}{1-\nu}\left[\omega_{,11} + \omega_{,22}\right],$$

$$\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{e}(x) = -\,x_3\frac{\nu}{1-\nu}\left[\omega_{,11} + \omega_{,22}\right],$$

$$S_{13}(x) = \frac{x_3^2}{4}\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\left[\omega_{,111} + \omega_{,221}\right],$$

$$S_{23}(x) = \frac{x_3^2}{4}\frac{E\nu}{1-\nu^2}\left[\omega_{,222} + \omega_{,112}\right],$$

$$S_{33}(x) = 0 .$$

y similarmente el modelo mecánico que se obtendría es

$$D\,\Delta^2\omega = b_3^* \qquad (2.3.16)$$

Por tanto, resultan las ecuaciones de campo de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales, tal como lo trata Duvaut y Lions [1976]. Para este problema, se dice que cumple condiciones de empotramiento si y solo si

$$\omega = \omega_{,1} = \omega_{,2} = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega_1 \tag{2.3.17}$$

<u>Observación 2.3.4.</u> Modelos similares a (2.3.14) son obtenidos en Sanders [1969], donde se aplican las teorias de placas de Hencky y Reissner.

CAP. 3. ANALISIS DEL MODELO

El objetivo de este capítulo es formular y analizar los problemas del Cálculo de Variaciones, Variacional o Débil y Distribucional o de Valores en la Frontera para el modelo mecánico de placas linealmente elásticas sujetas a flexión, el cual se estudió en el capítulo anterior.

3.1. Problemas del Cálculo Variacional

Consideremos la siguiente hipótesis:

H1. Sea Ω el plano medio de la región ocupada poruna placa con la siguiente regularidad:

Ω es acotado, está en un solo lado de su frontera $\partial\Omega$, y $\partial\Omega$ es de clase C^m, donde $m \geq 2$ y

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2, \quad \mathring{S}_1 \cap \mathring{S}_2 = \phi$$

Entonces, bajo esta hipótesis estudiaremos el problema del Cálculo de Variaciones del mínimo de la funcional de energía potencial del modelo de placas establecidas en el capítulo 2:

Dados $q \varepsilon L^2(\Omega)$, $\hat{\omega} \varepsilon H^{3/2}(S_1)$, $\hat{\theta} \varepsilon H^{1/2}(S_1)$ $\hat{F} \varepsilon L^2(S_2)$ y $\hat{M} \varepsilon L^2(S_2)$, encuentre una función $\omega \varepsilon K$: (M)

$$J(\omega) \leq J(v), \ \forall \ v \varepsilon K$$

Aquí

K = la familia de desplazamientos débiles cinemáticamente admisibles

$$= \{ v \varepsilon V = H^2(\Omega) : \gamma_0 v|_{S_1} = \hat{\omega} \text{ y } \gamma_1 v|_{S_1} = \hat{\theta} \} \tag{3.1.1}$$

$$J(v) = \text{la energía potencial} = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v), \ \forall \ v \varepsilon H^2(\Omega) \tag{3.1.2}$$

donde la forma $a(.,.)$: $H^2(\Omega) x H^2(\Omega) \to R$ está dada por

$$a(\omega,v) = D\int_{\Omega}\{\Delta\omega\ \Delta v + (1-\nu)(2\omega_{,12}\ v_{,12}-\omega_{,11}v_{,11}-\omega_{,22}v_{,22})\}d\Omega \quad (3.1.3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

y

$f : H^2(\Omega)\to R$ está dada por

$$f(v) = \int_{\Omega} q.v\ d\Omega + \int_{S_2} \hat{F}.\gamma_0 v\ dS_2 + \int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1 v\ dS_2 \quad , \ v \in H^2(\Omega) \qquad (3.1.4)$$

donde

q = fuerzas normales sobre Ω , incluyendo fuerzas de cuerpo .

$\hat{F}$ = fuerzas normales prescrita sobre S_2

$\tilde{M}$ = momento flexionante prescrito alrededor del vector tangante a S_2

$\hat{\omega}$ = desplazamiento vertical prescrito sobre S_1

$\hat{\theta}$ = giro prescrito alrededor del vector tangente a S_1

Antes de proceder a el análisis del problema (M) damos las siguientes definiciones. Sea V en espacio de Hilbert real, V' el dual topológico de V, K un subconjunto no vacio de V, y sea $J:V\to R$ una funcional:

° $J:K\to R$ es convexo si K es convexo y sí $\forall\lambda\in(0,1)$

$$J(\lambda\omega+(1-\lambda)v)\leq\lambda J(\omega)+(1-\lambda)J(v),\ \forall\omega,v\in K.$$

° $J:V\to \bar{R}$ es semicontinua débilmente por abajo en V si

$\forall\{v_n\}\subset V$ débilmente convergente a $v\in V$

$$J(v) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(v_n) \equiv \sup_{j\geq 0}\left\{\inf_{n\geq j} J(v_n)\right\}$$

° $J:V\to R$ cumple con la propiedad de crecimiento en $v\in K$, sí, para algún $R>0$,

$\omega\in K$ y $||\omega-v||\geq R$ implica $J(\omega)>J(v)$

° $J:V\to R$ es cuadrática, si es de la forma

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v)-f(v),\ \forall v\in V$$

donde

i. $a(.,.): V\times V\to\mathbb{R}$ es bilineal, simétrica y continua ,

ii. $f: V\to\mathbb{R}$, $f\in V'$, i.e., $f: V\to\mathbb{R}$ es lineal y continua.

° $J:K\to\mathbb{R}$ es Gâteux differenciable (G-diferenciable) en $\omega\in K$, si K es convexo y existe el límite.

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1}{\theta} \{J(\omega+\theta(v-\omega)) - J(\omega)\} = J'(\omega)(v-\omega), \ \forall v\in K$$

donde $J'(\omega)\in V'$.

° Sea $J:K\to\mathbb{R}$ G-diferenciable en todo K. Entonces al operador

$$J' : K\to V'$$

se le llama el gradiente de J en K y a J se le llama el potencial de J'.

° Al gradiente $J':K\to V'$ de una funcional $J:K\to\mathbb{R}$ se le llama coercivo si,

$$\frac{J'(\omega)\omega}{||\omega||_V} \to +\infty \text{ cuando } \omega\in K, \ ||\omega||_V\to\infty$$

(Aquí K siendo no acotado).

A continuación damos resultados abstractos sobre existencia y unicidad de problemas de minimización, y proposiciones sobre propiedades que garantizan las condiciones de existencia. Para la demostración de estos resultados véase , e.g., SHOWALTER (1977).

Teorema 3.1.1. (Teorema de Existencia): Suponga que

I1. K es cerrado y convexo

I2. J es semicontinua débilmente por abajo en K,

I3. { K es acotado o J satisface la propiedad de crecimiento en algún punto de K.

Entonces el problema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Encuentre } \omega\in K:\\ J(\omega) \leq J(v),\ \forall\ v\in K\end{array}\right\} \quad (A)$$

posee al menos una solución □

<u>Teorema 3.1.2. (Teorema de Unicidad)</u> Sea $J: K\to\mathbb{R}$ estrictamente convexa en K, i.e., J es convexa en K y

$\forall\omega\neq v$ y $\lambda\in(0,1)$, $J(\lambda\omega+(1-\lambda)v)<\lambda J(\omega)+(1-\lambda)J(v)$.

Entonces el problema (A) posee a lo más una solución □

<u>Proposición 3.1.3.</u> Sea $J: K\to\mathbb{R}$ G-diferenciable en K. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i). $J: K\to\mathbb{R}$ es convexa.

ii). $J'(\omega)(v-\omega) \leq J(v)-J(\omega)\ \forall\omega, v\in K$,

iii). $J': K\to V'$ es monotónico, i.e.,

$$\{J'(\omega)-J'(v)\}(\omega-v) \geq 0 \quad \forall\omega, v\in K.$$ □

<u>Proposición 3.1.4.</u> Sea $J: K\to\mathbb{R}$ G-diferenciable y convexa en K. Entonces J es semicontinua débilmente por abajo en K. □

<u>Proposición 3.1.5.</u> Sea $J: K\to\mathbb{R}$ G-diferenciable en K con gradiente $J': K\to V'$ coercivo. Entonces

$J(\omega)\to+\infty$ cuando $\omega\in K$, $||\omega||_V\to\infty$ y, en consecuencia,

J posee la propiedad de crecimiento en todo punto de K. □

<u>Proposición 3.1.6.</u> Sea $J: K\to\mathbb{R}$ G-diferenciable en K. Entonces J es estrictamente convexa sí, y solo sí, su gradiente $J': K\to V'$ es estrictamente monotónico, i.e., J' es monotónico y $\forall\omega\neq v$

$$\{J'(\omega)-J'(v)\}(\omega-v)>0.$$ □

<u>Proposición 3.1.7.</u> Sea $J: V\to\mathbb{R}$ cuadrática. Entonces

i). J es G-diferenciable en todo V con gradiente

$$J'(\omega)(v) = a(\omega,v)-f(v) \quad \forall\omega,v\in V$$

ii). J es convexa (resp. estrictamente convexa) si, y solo si,

$a(.,.)$: $V\times V\to R$ es positiva (resp. positiva definida), i.e.,

$$a(\omega,\omega) \geq 0 \quad \forall \omega\in V,$$

(resp. $a(\omega,\omega) > 0$, $\forall \omega \neq 0, \omega\in V$).

iii). $J(\omega)\to +\infty$ cuando $\omega\in K$ y $||\omega||_V\to\infty$ si $a(.,.)$: $V\times V\to R$ es coarciva, i.e.,

$$\lim_{\substack{\omega\in K \\ ||\omega||_V\to\infty}} \frac{a(\omega,\omega)}{||\omega||_V} = +\infty$$

iv). $a(.,.)$: $V\times V\to R$ es coerciva y positiva definida, si es K-elíptica, i.e.,

$$\exists\ \gamma>0 : a(\omega-v,\omega-v) \geq \gamma||\ \omega-v||_V^2 \quad \forall\ \omega,v\in K$$ □

Considerando estos resultados, para el caso de funcionales cuadráticas, los teoremas de existencia (3.1.1) y unicidad (3.1.2) se pueden particularizar en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.8. (Teorema de Existencia y Unicidad: Caso Cuadrático).

Sea J: $V\to R$ cuadrática: Entonces el problema (A) posee una y solo una solución sí:

i). K es cerrado y convexo

ii). $a(.,.)$: $V\times V\to R$ es K-elíptico. □

A continuación aplicaremos el teorema 3.1.8 a el problema (M).

Demostraremos primeramente que K es cerrado y convexo y, entonces que la funcional de energía potencial (3.1.2) es cuadrática y convexa. La K-elipticidad de la funcional se analizará en las secciones 3.3 y 3.4 para los casos $S_1 \neq \phi$ y $S_1 = \phi$, respectivamente.

Teorema 3.1.9. El conjunto $K\subset H^2(\Omega)$ (3.1.1) es cerrado y afín, por tanto es cerrado y convexo.

Demostración. Primeramente demostraremos que K es cerrado. Sea $\{\omega_k\}\subset K$ una sucesión convergente a ω en $H^2(\Omega)$. Puesto que

$\gamma_0 \epsilon \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^{3/2}(\partial\Omega))$, $\gamma_1 \epsilon \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega))$

entonces,

$\gamma_0\omega_k \to \gamma_0\omega$ en $H^{3/2}(\partial\Omega)$ y $\gamma_1\omega_k \to \gamma_1\omega$ en $H^{1/2}(\partial\Omega)$

pero

$\gamma_0\omega_k\Big|_{S_1} = \hat{\omega}\epsilon H^{3/2}(\partial\Omega)$, ya que $\{\omega_k\}\subset K \Rightarrow \gamma_0\omega\Big|_{S_1} = \hat{\omega}\epsilon H^{3/2}(\partial\Omega)$

$\gamma_1\omega_k\Big|_{S_1} = \hat{\theta}\epsilon H^{1/2}(\partial\Omega)$, ya que $\{\omega_k\}\subset K \Rightarrow \gamma_1\omega\Big|_{S_1} = \hat{\theta}\epsilon H^{1/2}(\partial\Omega)$

por tanto $\omega\epsilon K$ y concluimos que K es cerrado.

Por otro lado demostremos que K es afín, entonces $\forall\omega\neq v\epsilon K$, $\lambda\epsilon\mathcal{R}$ tenemos que

$$\gamma_0\{\lambda\omega+(1-\lambda)v\} = \lambda\gamma_0\omega+(1-\lambda)\gamma_0 v = \lambda\hat{\omega}+(1-\lambda)\hat{\omega} = \hat{\omega} \text{ en } S_1,$$
$$\gamma_1\{\lambda\omega+(1-\lambda)v\} = \lambda\gamma_1\omega+(1-\lambda)\gamma_1 v = \lambda\hat{\theta}+(1-\lambda)\hat{\theta} = \hat{\theta} \text{ en } S_1,$$

por lo que $\lambda\omega+(1-\lambda)\omega \epsilon K$, por tanto K es afín, con lo que concluimos que K es cerrado y afín lo que implica que K es convexo. □

Teorema 3.1.10. La funcional de energía potencial J: $H^2(\Omega)\to\mathcal{R}$ (3.1.2) es cuadrática, para material elástico lineal.

Demostración:

$a(.,.): H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)\to$ es bilineal. En efecto, tenemos que

$$a(\omega,v) = D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(\omega,v)\}d\Omega$$

donde

$$(\omega,v) = 2\omega_{,12}\, v_{,12} - \omega_{,11} v_{,22} - \omega_{,22} v_{,11}$$

entonces

$$a(\omega,\alpha v+\beta u) = D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta\ (\alpha v+\beta u) + (1-\nu)(\omega,\alpha v+\beta u)\}d\Omega$$
$$= D\int_\Omega \{\Delta\omega(\alpha\Delta v+\beta\Delta u)+(1-\nu)\{(\omega,\alpha v)+(\omega,\beta u)\}\}d\Omega$$

$$= \alpha D\int_{\Omega}\{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(\omega,v)\}\,d\Omega + \beta D\int_{\Omega}\{\Delta\omega\Delta u + (1-\nu)(\omega,u)\,d\Omega$$

$$= \alpha a(\omega,v) + \beta a(\omega,u)$$

análogamente se procede para $a(.,v)\colon H^2(\Omega) \to R$

Se observa que

$$a(\omega,v) = D\int_{\Omega}\{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(\omega,v)\}\,d\Omega = D\int_{\Omega}\{\Delta v\Delta\omega + (1-\nu)(v,\omega)\}d\Omega$$

$= a(v,\omega)$, por tanto $a(.,.)\colon H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\to R$ es simétrica.

Ahora demostraremos que $a(.,.)\colon H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\to R$ es continua. Tenemos que:

$$(\omega,v) = 2\omega_{,12}v_{,12} - \omega_{,11}v_{,22} - \omega_{,22}v_{,11},$$

$$\omega_{,ij}\in L^2(\Omega) = H^0(\Omega)\ \forall\ i,j = 1,2\ ,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} > 0,$$

entonces

$$|a(\omega,v)| = |D\int_{\Omega}\{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(\omega,v)\}d\Omega|$$

$$\leq D\{\|\Delta\omega\|_{L^2}\|\Delta v\|_{L^2} + |1-\nu|(2\|\omega_{,12}\|_{L^2}\|v_{,12}\|_{L^2} + \|\omega_{,11}\|_{L^2}\|v_{,22}\|_{L^2} + \|\omega_{,22}\|_{L^2}\|v_{,11}\|_{L^2})\}$$

$$\leq C\|\omega\|_{H^2}\|v\|_{H^2}\ ,\quad C = \text{cte.} > 0$$

por tanto $a(.,.)\colon H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\to R$ es acotada o equivalentemente continua.

Ahora demostraremos que $f\in L(V,R)$. En efecto, $f\colon H^2(\Omega)\to R$ es lineal ya que:

$$f(\alpha v+\beta u) = \int_{\Omega} q.(\alpha v+\beta u)d\Omega + \int_{S_2}\hat{F}.\gamma_0(\alpha v+\beta u)dS_2 + \int_{S_2}\hat{M}.\gamma_1(\alpha v+\beta u)dS_2$$

$$= \alpha\int_{\Omega} q.v\,d\Omega + \beta\int_{\Omega} q.u\,d\Omega + \alpha\int_{S_2}\hat{F}.\gamma_0 v\,dS_2 + \beta\int_{S_2}\hat{F}.\gamma_0 u\,dS_2 +$$

$$\alpha\int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1 v dS_2+\beta\int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1 u dS_2 = \alpha f(v) +\beta f(u), \ \forall \ u,v\in H^2(\Omega)\alpha \ , \ \beta\in R$$

por tanto $f: H^2(\Omega)\to R$ es lineal.

Finalmente veamos que $f:H^2(\Omega)\to R$ sea continua. Tenemos que si $v\in H^2(\Omega) \Rightarrow v\in L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$

$\gamma_0 v\in H^{3/2}(\partial\Omega)$

$\gamma_1 v\in H^{1/2}(\partial\Omega)$

entonces

$$|f(v)|= |\int_{\Omega} q.vd\Omega+\int_{S_2} F.\gamma_0 v \ dS_2+\int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1 v \ dS_2|$$

Hölder

$$\leq ||q||_{L^2}||v||_{L^2} +||\hat{F}||_{L^2,S2}||\gamma_0||_{L(H^2(\Omega),H^{3/2}(\partial\Omega))}||v||_{H^2} +$$

$$||\hat{M}||_{L^2,S2}||\gamma_1||_{L(H^2(\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega))}||v||_{H^2}$$

$$\leq ||q||_{L^2} \ ||v||_{H^2} + C^* \ ||v||_{H^2}$$

$$= \ C||v||_{H^2} \quad ,C > 0$$

por tanto $f: V\to R$ es continua.

Con esto concluimos que $J: H^2(\Omega)\to R$ es cuadrática. □

Teorema 3.1.11. La funcional de energía potencial $J: H^2(\Omega)\to R$ (3.1.2) es convexa.

Demostración: Verificaremos la convexidad de J de su caracterización en términos de la monotonía de su gradiente, i.e.,

$\{J'(\omega)-J'(v)\}(\omega-v) \geq 0, \ \forall\omega ,v \in H^2(\Omega)$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\{J'(\omega) -J'(v)\} (\omega-v) &= a(\omega,\omega-v)-f(\omega-v)- a(v,\omega-v)+ f(\omega-v)\\ &= a(\omega-v,\omega-v)\\ &= D\int_{\Omega}\{\Delta (\omega-v) \ \Delta(\omega-v)+ (1-\nu)[\omega-v,\omega-v]\} \ d\Omega\end{aligned}$$

definiendo $u=\omega-v$, se tiene

$$\begin{aligned}\{J'(\omega)-J'(v)\}(\omega-v) &= a(u,u)\\ &= D\int_\Omega \{ (\Delta u)^2+(1-\nu)(2u^2{}_{,12}-u_{,11}u_{,22}-u_{,22}u_{,11})\}\, d\Omega\\ &= D\int_\Omega \{\nu\, (\Delta u)^2+(1-\nu)(u^2{}_{,11}+u^2{}_{,22}+2u^2{}_{,12})\}\, d\Omega\\ &\geq D\{\nu\|\Delta u\|^2_{L^2} + (1-\nu)|u|^2_{H^2}\} \geq 0 \quad \forall\, u\in H^2(\Omega)\end{aligned}$$

ya que $D>0$, $0<\nu<1/2$, por tanto $J:H^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ es convexa. $\square$

3.2 Problema Variacional o Débil

Hasta ahora tenemos que la funcional J (3.1.2) es G-diferenciable, ya que es cuadrática, esto como un resultado de la proposición 3.1.7. Entonces nuestro siguiente propósito es establecer que bajo estas condiciones, el problema de minimización (M) es equivalente al problema variacional dado en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. Si J es G-diferenciable y convexa, el problema de minimización (A) es equivalente al problema variacional

$$\left.\begin{aligned}&\text{Encuentre } \omega\in K:\\ &J'(\omega)(v-\omega)\geq 0,\ \forall v\in K\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Demostración: Sea $\omega\in K$ solución de (A), entonces de la definición de G-diferenciable, ω es solución de (B). Sea $\omega\in K$ solución de (B), por tanto de (ii) en la proposición (3.1.3) ω es solución de (A). $\square$

Por tanto el problema (M) está caracterizado por el siguiente problema variacional

Teorema 3.2.2. El problema del cálculo de variaciones (M) es equivalente al problema variacional:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dados } q\epsilon L^2(\Omega),\ \hat{\omega}\epsilon\ H^{3/2}(S_1),\ \hat{\theta}\epsilon\ H^{1/2}(S_1),\ \hat{F}\epsilon L^2(S_2) \\ \text{y } \tilde{M}\ \epsilon L^2(S_2), \text{ encuentre una funcion } \omega\epsilon\ K: \\ \qquad a(\omega,v-\omega)= f(v-\omega),\ \forall v\epsilon K \end{array}\right\} \quad (V)$$

Demostracion: De acuerdo al teorema 3.2.1, solo resta por demostrar que la desigualdad variacional viene a ser una igualdad variacional debido a las propiedades más fuertes de K: K es afin. En este caso la desigualdad en (V) toma la forma

$$a(\omega,v-\omega) \geq f(v-\omega),$$

tomando v por 2ω-v, lo cual es permisible ya que $\gamma_0(2\omega-v)|_{S_1} = 2\hat{\omega}-\hat{\omega}=\hat{\omega}$ y $\gamma_1(2\omega-v)|_{S_1} = 2\hat{\theta}-\hat{\theta}=\hat{\theta}$, obtenemos

$$a(\omega,\ v-\omega) \leq f(v-\omega).$$

Entonces, al ser $a(\omega,v-\omega)$ $\geq$ y $\leq$ que $f(v-\omega)$, se concluye la igualdad en (V). □

3.3. Existencia y Unicidad: Caso $S_1 \neq \phi$

Del teorema 3.1.8 solamente se ha demostrado que K es cerrado y convexo por lo que nos faltaría verificar la K-elipticidad de la forma a(.,.): $V\times V\to R$, dependiente de las condiciones de frontera. Para el caso $S_1 \neq \phi$ con medida $\neq$ 0 restringiremos nuestra atención a la situación más simple (†): El problema de la placa empotrada, el cual está dado por la siguiente formulación variacional

---

(†) En general los resultados dados aquí siguen siendo válidos bajo la condición en que Ω es convexo (c.f. Ciarlet (1978)).

$$\left.\begin{aligned} K &= H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v = v_{,n} = 0 \text{ sobre } S_1 = \partial\Omega\} \\ a(\omega,v) &= D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(2\omega_{,12}v_{,12} - \omega_{,11}v_{,11} - \omega_{,22}v_{,22}\} \, d\Omega \\ &= D\int_\Omega \{\nu\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(\omega_{,11}v_{,11} + \omega_{,22}v_{,22} + 2\omega_{,12}v_{,12}\} \, d\Omega \end{aligned}\right\} \quad (3.3.1)$$

$$f(v) = \int_\Omega q.v d\Omega$$

Antes de demostrar la K-elipticidad de $a(.,.)$: $V\times V\to R$, demos el siguiente lema que será de gran utilidad (cf., e.g., Showalter (1977)).

Lema 3.3.1. Suponga que Ω es un conjunto abierto en R^n con $\sup\{|x_j| : (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega\} = K<\infty$, $1 \le j \le n$. Entonces

$$||v||_{L^2(\Omega)} \le 2K||v_{,1}||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega). \qquad \square$$

Teorema 3.3.2. Para el caso de la placa empotrada, existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$a(v,v) \ge \gamma||v||_2^2, \quad \forall\, v\in H_0^2(\Omega)$$

i.e., $a(.,.)$ es $H_0^2(\Omega)$ - elíptica.

Demostración; Si $v\in H_0^2(\Omega) \Rightarrow v_{,j}\in H_0^1(\Omega)$, por tanto

$$||\nabla v||_0^2 = ||v_{,1}||_0^2 + ||v_{,2}||_0^2 \le C|v|_2^2, \quad \forall v\in H_0^2(\Omega) \qquad (3.3.2)$$

y utilizando el resultado del lema 3.3.1 se tiene

$$||v||_2^2 = ||v||_0^2 + ||\nabla v||_0^2 + |v|_2^2 \le C||\nabla v||_0^2 + |v|_2^2 \le C|v|_2^2. \qquad (3.3.3)$$

De la relación dada por CIARLET (1978),

$$||\Delta v||_0 = |v|_2 \quad \forall v\in H_0^2(\Omega), \qquad (3.3.4)$$

se concluye finalmente que

$$a(v,v) = D\{\nu||\Delta v||_0^2 + (1-\nu)|v|_2^2\} = D|v|_2^2 \ge C^{-1}||v||_2^2 = \gamma||v||_2^2 \quad \forall v\in H_0^2(\Omega). \qquad \square$$

Entonces al verificar la K-elipticidad de $a(.,.)$: $V\times V\to R$ podemos afirmar que existe una única función $v\in H_0^2(\Omega)$ la cual minimiza la energía potencial total de la placa:

$$\left.\begin{aligned} J(y) &= \frac{1}{2}\,a(y,y) - f(y) \\ &= \frac{D}{2}\int_\Omega \{(\Delta y)^2 + 2(1-\nu)((y,_{12})^2 - y,_{11}y,_{22})\}d\Omega - \int_\Omega q.y d\Omega \end{aligned}\right\} \quad (3.3.5)$$

sobre el espacio $H_0^2(\Omega)$, o, equivalentemente, la cual es solución de la ecuación variacional

$$D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta v + (1-\nu)(2\omega,_{12}v,_{12} - \omega,_{11}v,_{22} - \omega,_{22}v,_{11}\}d\Omega = \int_\Omega q.v d\Omega \ . \quad (3.3.6)$$

3.4 Existencia y Unicidad: Caso $S_1 = \phi$

Considerando la hipótesis del caso

H1: $S_1 = \phi \Longleftrightarrow S_2 = \partial\Omega$

nuestro objetivo será establecer las propiedades dadas en el teorema 3.1.8 para la funcional de energía potencial, y así establecer la existencia y unicidad del presente problema.

Sin embargo la funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\ a(v,v) - f(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad (3.4.1)$$

no satisface dichas propiedades, por lo que se reformulará el problema en un espacio de Banach apropiado. Este espacio será el siguiente Espacio Cociente:

$$V/P = H^2(\Omega)/P = \{[v]: v \in H^2(\Omega)\} \quad (3.4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} [v] &= \text{clase de equivalencia de } v \in H^2(\Omega) \\ &= \{v+p : p \in P\} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

con estructura algebráica

$$\begin{aligned} &[u]+[v] = [u+v], \quad \forall u,v \in H^2\ \Omega \\ &\alpha\ [v] = [\alpha v], \quad \alpha \in R,\ v \in H^2(\Omega) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

y norma

$$||[v]||_2 = \inf_{p\varepsilon P} ||v+p||_2. \tag{3.4.5}$$

Aquí P es el subespacio cerrado de $H^2(\Omega)$ constituido por la familia de desplazamientos de cuerpo rígido débiles cinemáticamente admisibles.

El espacio cociente (3.4.2) es de Banach (completo) y separable ya que así lo es $H^2(\Omega)$.

Una nueva hipótesis será:

H2: $\int_\Omega q.p \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \hat{F}\cdot\gamma_0 p \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \hat{M}\cdot\gamma_1 p \, d\Omega = 0 \quad \forall p\varepsilon P$

siendo la negación de esta condición, una condición suficiente de no existencia, por lo que supondremos que H2 se cumple en esta sección. Esta condición contempla el equilibrio de las cargas actuantes sobre la placa.

A continuación mostramos que la energía potencial es invariante a desplazamientos de cuerpo rígido débiles cinemáticamente admisibles.

<u>Teorema 3.4.1</u>. En la funcional de energía potencial $J([v])= \frac{1}{2} a([v],[v])- f([v]) \ \forall \ [v]\varepsilon H^2(\Omega)/P$, tenemos que

$$a([\omega],[v])= a(\omega,v)$$

y

$$f([v]) = f(v).$$

<u>Demostración</u>: En efecto, tenemos que

$$a([\omega], [v]) = D\int_\Omega \Delta[\omega]\Delta[v]+ (1-\nu)(2[\omega],_{12}[v],_{12} - [\omega],_{11} [v],_{22}- [\omega],_{22}[v],_{11} \}d\Omega$$

$$= D\int_\Omega\{\Delta(\omega+p)\Delta(v+p)+(1-\nu)[2(\omega+p),_{12}(v+p),_{12} - (\omega+p),_{11}(v+p),_{22}-(\omega+p),_{22}(v+p),_{11}]\} \, d\Omega$$

y como $p\varepsilon P$ es un desplazamiento de cuerpo rígido, entonces

$p,_{ij} = 0$, $i,j = 1,2$ y $\Delta p = 0$, $\forall p\varepsilon P$. Por tanto

$$a([\omega], [v]) = a(\omega, v).$$

Ahora sea

$$f([v]) = \int_{\partial\Omega} q.[v]d\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{F}.\gamma_0[v]d\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{M}.\gamma_1[v]d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} q.(v+p)d\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{F}.\gamma_0(v+p)d\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{M}.\gamma_1(v+p)d\Omega$$

$$= f(v) + \int_{\Omega} q.pd\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{F}.\gamma_0 pd\Omega + \int_{\partial\Omega}\hat{M}.\gamma_1 pd\Omega$$

por lo que teniendo en cuenta (H2) se llega a que

$$f([v]) = f(v).$$ □

Procediendo de manera completamente similar a la sección anterior la V/P - elipticidad de la forma bilineal $a(.,.)$: $V\times V\to R$ se concluye, por tanto la existencia y "unicidad" del problema se infieren del teorema 3.1.8. El concepto de unicidad dentro de esta formulación en espacios cocientes corresponde a la unicidad del campo de desplazamientos excepto por desplazamientos de cuerpo rígido.

3.5 Problema Distribucional o de Valores en la Frontera

Nuestro propósito en esta sección es identificar el problema de valores en la frontera que corresponde al problema variacional en la sección 3.2. En el siguiente teorema mostraremos que este resulta ser el problema mixto de valores en la frontera.

Teorema 3.5.1. El problema (M) o (V) es equivalente al problema de valores en la frontera:

Dados $q\varepsilon L^2(\Omega)$, $\hat{\omega}\varepsilon H^{3/2}(S_1)$, $\hat{\theta}\varepsilon H^{1/2}(S_1)$, $\hat{F}\varepsilon L^2(S_2)$ y $\hat{M}\varepsilon L^2(S_2)$, encuentre una función $\omega\varepsilon H^2(\Omega)$:

$$\left.\begin{array}{l}
D\Delta^2\omega = q \text{ en } L^2(\Omega) \\
\left.\begin{array}{l}\omega = \hat{\omega} \\ \\ \omega_{,n} = \hat{\theta}\end{array}\right\} \quad \text{en} \quad L^2(S_1) \\
\left.\begin{array}{l}-D\{\Delta\omega_{,n} + (1-\nu)\left[n_1n_2\,(\omega_{,11}-\omega_{,22}) + (n_1^2-n_2^2)\omega_{,12}\right]_{,t}\} = \hat{F} \\ \\ D\{\Delta\omega + (1-\nu)(2n_1n_2\omega_{,12}-n_2^2\omega_{,11}-n_1^2\omega_{,22})\} = \hat{M}\end{array}\right\} \quad \text{en} \quad L^2(S_2)
\end{array}\right\} \text{(VF)}$$

donde n_1 y n_2 son las componentes de la normal unitaria exterior n a $\partial\Omega$, y t es la tangente unitaria obtenida de n por medio de una rotación de $+\pi/2$.

<u>Demostración</u>: Sea $\omega\varepsilon K$ una solución de (V). Es claro que las condiciones de frontera sobre S_1 son satisfechas. Sea $v = \omega+\phi$, $\phi\varepsilon D(\Omega)$. Es claro que $v\varepsilon K$, y consecuentemente

$$a(\omega, v-\omega) = f(v-\omega), \ \forall v\varepsilon K,$$

ó

$$a(\omega,\phi) = f(\phi), \ \forall\phi\varepsilon D(\Omega).$$

Entonces,

$$D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta\phi + (1-\nu)(2\omega_{,12}\phi_{,12}-\omega_{,11}\phi_{,22}-\omega_{,22}\phi_{,11}\}d\Omega = \int_\Omega q.\phi d\Omega \qquad (3.5.1)$$

y, consecuentemente, $D\Delta^2\omega= q$ en $D(\Omega)$. Perteneciendo q a $L^2(\Omega)$ concluimos

$$D\Delta^2\omega=q \text{ en } L^2(\Omega) \qquad (3.5.2)$$

Ahora, tomando $v=\omega+\phi$, $\phi\varepsilon D(S_2)$, tenemos que

$$\begin{array}{l} D\int_\Omega \{\Delta\omega\Delta\phi + (1-\nu)(2\omega_{,12}\phi_{,12}-\omega_{,11}\phi_{,22}-\omega_{,22}\phi_{,11})\}d\Omega = \\ \int_\Omega q.\phi d\Omega + \int_{S_2} \hat{F}.\gamma_0\phi d S_2 + \int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1\phi dS_2 \end{array} \qquad (3.5.3)$$

Usando las fórmulas de Green

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta\omega\Delta\phi \, d\Omega = \int_\Omega \Delta^2\omega\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \Delta\omega \, ,_n\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Delta\omega\phi,_n \, d\Omega \\
&\text{y} \\
&\int_\Omega (2\omega,_{12}\phi,_{12} - \omega,_{11}\phi,_{22} - \omega,_{22}\phi,_{11}) \, d\Omega = \\
&\int_{\partial\Omega} \{ 2n_1n_2\omega,_{12} - n_2^2\omega,_{11} - n_1^2\omega,_{22}\}\phi,_n \, d\Omega - \\
&\int_{\partial\Omega} \{n_1n_2(\omega,_{11}-\omega,_{22}) + (n_1^2-n_2^2)\omega,_{12}\},_t\phi \, d\Omega .
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.4)$$

Se tiene

$$D\int_{\partial\Omega} \Delta\omega \, \gamma_1\phi d\Omega + D(1-\nu)\int_{\partial\Omega} \{2n_1n_2\omega,_{12} - n_2^2\omega,_{11} - n_1^2\omega,_{22}\}\gamma_1\phi \, d\Omega$$

$$-D\int_{\partial\Omega} \Delta\omega,_n \gamma_0\phi d\Omega - D(1-\nu)\int_{\partial\Omega} \{n_1n_2(\omega,_{11}-\omega,_{22}) + (n_1^2-n_2^2)\omega,_{12}\},_t\gamma_0\phi d\Omega$$

$$= \int_{S_2} \hat{F}.\gamma_0\phi dS_2 + \int_{S_2} \hat{M}.\gamma_1\phi dS_2 .$$

Por tanto

$$\left.\begin{aligned}
&-D \{\Delta\omega,_n + (1-\nu)[n_1n_2(\omega,_{11}-\omega,_{22}) + (n_1^2-n_2^2)\omega,_{12}]\},_t = \hat{F} \\
&D \{\Delta\omega + (1-\nu)(2n_1n_2\omega,_{12} - n_2^2\omega,_{11} - n_2^2\omega,_{22})\} = \hat{M}
\end{aligned}\right\} \text{ sobre } L^2(S_2)$$

ya que $\hat{F}$, $\hat{M} \in L^2(S_2)$. (3.5.5)

Inversamente, ahora supongamos que ω es una solución del problema (VF). Entonces $\omega\in K$ y multiplicando escalarmente $(VF)_1$ por $(v-\omega)$, $v\in K$, y aplicando la fórmula de Green (3.5.4), se demuestra que

$a(\omega,v-\omega) = f(v-\omega)$, $\forall v\in K$.

Por tanto el problema (M) o (V) es equivalente al problema de valores en la frontera (VF). □

CAP. 4. FUNDAMENTOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

La idea principal es introducir "el método del elemento finito" y dar una descripción completa del uso de este método para aproximar las soluciones del problema de placas (cuarto orden) formulado variacionalmente sobre un espacio V (espacio de Hilbert). Un esquema bién conocido para aproximar tales problemas es el método de Galerkin, el cual consiste en definir problemas similares, llamados "problemas discretos", sobre subespacios de dimensión finita V_h del espacio V. Entonces el método del elemento finito en su forma simple es un método de Galerkin caracterizado por tres aspectos básicos en la construcción del espacio V_h:

i) Una "triangulación" T_h es establecida sobre el conjunto $\bar{\Omega}$, i.e., el conjunto $\bar{\Omega}$ es representado como una unión finita de elementos finitos $K \varepsilon T_h$

ii) La función $v_h \varepsilon V_h$ se expresa mediante polinomios, en el sentido que para cada $K \varepsilon T_h$, los espacios $P_K = \{v_h|_K : v_h \varepsilon V_h\}$ consisten de polinomios.

iii) Existe una base en el espacio V_h cuyas funciones tienen soporte pequeño.

Describiremos varios ejemplos de elementos finitos cuyos grados de libertad son ya sea todos valores de función (elemento finito Lagrangiano) o incluyendo valores de derivadas direccionales (elemento finito Hermitiano). En estos casos la inclusión $V_h \subset H^1(\Omega)$ (elemento finito clase C°) y la inclusión $V_h \subset H^2(\Omega)$ (Elemento finito clase C^1) se llega a cumplir, respectivamente, bajo ciertas condiciones.

De mucha importancia son la noción de una familia afín de elementos finitos (donde los elementos finitos de la familia pueden ser obtenidos como imágenes por medio de transformaciones afines de un elemento finito de referencia) y la noción del operador P_K- interpolación, ya que juegan un papel importante en la teoría de interpolación en espacios de Sobolev. Estos se tratarán en la sección 4.5.

También definiremos la "convergencia" y el "orden de convergencia" para una familia de problemas discretos. En el análisis correspondiente el lema de Cea jugará un papel muy importante; éste consiste en estimar el error $||u-u_h||_V$ mediante la distancia entre la solución u y el subespacio V_h.

4.1. Aspectos Básicos del Método del Elemento Finito.

Para la clase de problemas variacionales que se estudian en este trabajo sobre un conjunto no vacío, cerrado y convexo K, se observa que K viene a ser un subespacio lineal si las condiciones de frontera en desplazamientos y giros son homogeneos. La homogenidad en dicho tipo de condiciones de frontera siempre se puede obtener mediante un simple cambio de la variable dependiente. Por tanto restringiremos nuestra atención al caso en que K es un subespacio lineal y de hecho, seleccionado apropiadamente al espacio V, igual al espacio V. Entonces siendo K= V el problema variacional abstracto (B) (cf. sec. 3.2) toma la forma

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dado } f\varepsilon V', \text{ encuentre } u\varepsilon V: \\ \quad a(u,v) = f(v), \quad \forall v\varepsilon V,\end{array}\right\} \qquad (4.1.1)$$

y el teorema 3.1.8 se reduce al lema de Lax Milgram. De aquí la condición de existencia y unicidad del problema (4.1.1) viene a ser:

C1: $a(.,.)$: $V\times V\to R$ es K-elíptica

condición que se supondrá satisfecha de aquí en adelante.

Los Métodos de Galerkin y Ritz.

El método de Galerkin para aproximar la solución del problema (4.1.1) consiste en definir problemas similares en subespacios de dimensión finita del espacio V. Más especificamente, con cualquier subespacio de dimensión finita V_h de V, asociamos el problema discreto:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Encuentre } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h,v_h) = f(v_h),\ \forall v_h \in V_h. \end{array}\right\} \qquad (4.1.2)$$

Aplicando el lema de Lax Milgram observamos que dicho problema tiene una y solo una solución u_h, llamada solución discreta.

Observación 4.1.1. Cuando la forma bilineal $a(.,.)$ es simétrica, la solución discreta es caracterizada por la propiedad

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h), \qquad (4.1.3)$$

donde la funcional J está dada por $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v)$. Esta otra definición de la solución discreta da lugar al método de Ritz.

Los tres Aspectos Básicos del Método del Elemento Finito. Método del Elemento Finito Conforme.

Este método da una técnica para construir familias de subespacios de aproximación V_h del espacio V, donde V es de la forma:

$V = H^m_o(\Omega)$ para problemas de tipo Dirichlet homogeneo

$H^m_o(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ (propiamente) para problemas mixtos

$V = H^m(\Omega)$ para problemas de tracción.

Aquí, Ω es un subconjunto abierto de R^n, con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua, y $2m$ es el orden de la ecuación formal en derivados parciales (dos veces el orden de las derivadas parciales en la forma $a(u,v)$).

La construcción de V_h está caracterizada por tres aspectos básicos:

A). La triangulación T_h es establecida sobre el conjunto $\bar{\Omega}$, i.e., el conjunto $\bar{\Omega}$ es subdividido en un número finito de subconjuntos K, llamados elementos finitos, de manera tal, que las siguientes propiedades son satisfechas:

i. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K\in T_h} K$

ii. para cada $K \in T_h$ el conjunto K es cerrado y el interior $\overset{\circ}{K}$ es no vacío

iii. Para distintos K_1, $k_2 \in T_h$, se tiene que $\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \phi$

iv. Para cada $K\in T_h$, la frontera ∂K es Lipschitz continua

v. Cualquier cara de un elemento finito K_1 es o una cara de otro elemento finito K_2, en este caso los elementos finitos K_1 y K_2 se dicen ser adyacentes, o una porción de la frontera $\partial\Omega$ del conjunto Ω.

Una vez que una triangulación T_h es establecida sobre el conjunto $\bar{\Omega}$, uno define un *espacio de elemento finito* X_h a través de un proceso específico. Por el momento simplemente diremos que X_h es un espacio de dimensión finita de funciones definidas sobre el conjunto $\bar{\Omega}$.

Dado un espacio de elemento finito X_h, definimos los espacios

$$P_K = \{v_{h|K} ; v_h \in X_h\}$$

generado por los restricciones $v_{h|K}$ de las funciones $v_h \in T_h$ sobre elementos finitos $K\in T_h$.

Ahora, para el caso m=2, damos un teorema que será de gran utilidad.

Teorema 4.1.2 Suponga que las incluciones $P_K \subset H^2(K)$ para todo $K\in T_h$ y $X_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ se cumplen. Entonces las siguientes inclusiones se satisfacen:

i. $X_h \subset H^2(\Omega)$

ii. $X_{oh} = \{v_h \in X_h ; v_{n=0}$ sobre $\partial\Omega\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

iii. $X_{ooh} = \{v_h \in X_{oh} ; v_h = v_{h,n} = 0$ sobre $\partial\Omega\} \subset H_0^2(\Omega)$ $\square$

B). El segundo aspecto básico del método del elemento finito es que los espacios P_K, $K\in\tau_h$, contienen polinomios ó al menos, contienen funciones las cuales son "cercanas" a polinomios. En esta etapa, no seremos específicos pero sí diremos que

i. es la base para la convergencia de todos los resultados que se verán, y

ii. Ofrece un cálculo simple de los coeficientes del sistema lineal resul_ tante.

Ahora brevemente examinemos como el problema discreto (4.1.2) es resuel_ to en la práctica. Sea $(\omega_k)_{k=1}^{M}$ una base en el espacio V_h. Entonces la solución $u_h = \Sigma_{k=1}^{M} u_k\omega_k$ del problema (4.1.2) es tal que los coeficientes u_k son soluciones del sistema lineal

$$\sum_{k=1}^{M} a(\omega_k,\omega_\ell)\ u_k = f(\omega_\ell),\ 1\leq\ell\leq M \qquad (4.1.4)$$

cuya matríz es siempre invertible, ya que la forma bilineal se supone ser V-elíptica, es a forsiori V_h-elíptica. La Matríz $(a(\omega_k,\omega_\ell))$ y el vector $(f(\omega_\ell))$ son llamados la *matríz de rigidez* y el *vector de carga*, respectivamente.

C). Consideraremos como tercer aspecto básico del método del elemento finito, el que exista al menos una base "canónica" en el espacio V_h cuyas correspondientes funciones base tengan soporte pequeño.

4.2. Propiedades Generales de Elementos Finitos

Hasta ahora no hemos definido lo que es un elemento finito. El objetivo de esta parte es dar una definición formal de elemento finito y algunas propie_ dades de ellos. Además veremos algunas definiciones básicas, así como el opera_ dor P-interpolación.

°Un elemento finito en R^n es una terna (K,P,Σ) donde:

i. K es un subconjunto cerrado de R^n con un interior no vacio y una frontera Lipschitz continua,

ii. P es un espacio de funciones reales definidas sobre el conjunto K,

iii. Σ es un conjunto finito de formas lineales linealmente independientes ϕ_i, $1\leq i\leq N$, definidas sobre el espacio P. Por definición, es supuesto que el conjunto Σ es P-unisolvente en el siguiente sentido: dado cualquier escalares α_i, $1\leq i\leq N$, existe una única función $p\varepsilon P$ la cual safisface

$$\phi_i(p) = \alpha_i, \ 1\leq i\leq N \tag{4.2.1}$$

Consecuentemente, existen funciones $p_i \varepsilon P$, $1\leq i\leq N$, las cuales satisfacen

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij} \ , \ 1\leq i\leq N. \tag{4.2.2}$$

Puesto que tenemos que

$$\forall p\varepsilon P, \ p=\sum_{i=1}^{N} \phi_i(p)p_i, \tag{4.2.3}$$

esto emplica que el espacio P es de dimensión finita y que dim P=N.

Las formas lineales ϕ_i, $1\leq i\leq N$, son llamadas los *grados de libertad del elemento finito*, y las funciones p_i, $1\leq i\leq N$, son llamadas las *funciones base del elemento finito*.

Observación 4.2.1. Generalmente al conjunto K se le llama un elemento finito, sin embargo, por elemento finito entenderemos una terna (K,P,Σ). $\square$

Observación 4.2.2. La P-unisolvencia del conjunto Σ es equivalente a el hecho de que las N formas lineales ϕ_i forman una base en el espacio dual de P. Como una consecuencia, uno puede ver las bases $(\phi_i)_{i=1}^N$ y $(p_i)_{i=1}^N$ como bases duales, en el sentido algebraíco. $\square$

Para el caso particular donde K es un poliedro en R^n, i.e., para el caso en que los elementos finitos son rectos (cuyas fronteras son compuestas por caras rectas), los grados de libertad son de alguna de las siguientes formas:

$$\left.\begin{array}{l} p \to p(a_i^0), \\ p \to Dp(a_i^1)E_{ik}^1, \\ p \to D^2p(a_i^2)(E_{ik}^2,E_{i\ell}^2) \end{array}\right\} \tag{4.2.4}$$

donde los puntos a_i^r, $r=0,1,2$, pertenecen al elemento finito, y los vectores (diferentes de cero) $E_{ik}^1, E_{ik}^2, E_{i\ell}^2$ son construidos a partir de la geometría del elemento finito (por ejemplo, $D_p(a_i)(a_j-a_i)$, $\partial\nu p(a_{ij})$, etc.,..) o vectores fijos de R^n (por ejemplo, $\partial_i p(a_j)$, $\partial_{ij} p(a_k)$). Los puntos a_i^r , $r = 0,1,2$, son llamados los *nodos* del elemento finito.

Solamente se consideran derivadas direccionales de orden 1 ó 2, ya que de mayor orden son casi no utilizados para problemas de cuarto orden.

Cuando todos los grados de libertad de un elemento finito son de la forma $p \to p(a_i)$, diremos que éste es un elemento finito Lagrangiano, mientras que si al menos una derivada direccional ocurre como grado de libertad, diremos que es un elemento finito *Hermitiano*.

Existen esencialmente dos métodos para comprobar que un conjunto dado Σ de grados de libertad es P-unisolvente:

a) Comprobar que la dim P=card (Σ)
b) presentar las funciones base, o
   demostrar que si todos los grados de libertad son igual a cero, entonces existe una y solo una correspondiente funcion en P, la cual es idéntica a cero.

Dado un elemento finito (K,P,Σ), y dada una función v: $K \to R$, suficientemente suave para que los grados de libertad $\phi_i(v)$, $1 \leq i \leq N$, sean bién definidos, denotemos por

$$\pi v = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(v) p_i \qquad (4.2.5)$$

al *P-interpolante* de la función v, el cual es bién definida ya que el conjunto Σ es P-unisolvente. En efecto, el P-interpolante, también denotado por $\pi_K v$, es caracterizado por las condiciones

$$\pi v \varepsilon P, \text{ y } \phi_i(\pi v) = \phi_i(v), \ 1 \leq i \leq N \qquad (4.2.6)$$

Siempre que los grados de libertad sean de la forma (4.2.4), s denotará el orden máximo de derivadas que ocurren en la definición del conjunto Σ. Entonces, para todos los elementos finitos que veremos, la inclusión $P \subset C^s(K)$ se cumple. Consecuentemente, consideraremos que el dominio dom π del operador P-interpolación π es el espacio

$$\text{dom } \pi = C^s(K) \tag{4.2.7}$$

Siendo este el caso, se sigue que la restricción de π sobre $P \subset \text{dom } \pi$ es la identidad; i.e.,

$$\forall p \varepsilon P, \ \pi_p = p, \tag{4.2.8}$$

Elementos Finitos Iguales y Afinmente Equivalentes

° Dos elementos finitos (K,P,Σ) y (L,Q,E) son *iguales* si tenemos

$$K = L, \ P = Q \text{ y } \pi_K = \pi_L \tag{4.2.9}$$

° Dos elementos finitos $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ y (K,P,Σ), con grados de libertad de la forma (4.2.4), se dicen ser *afinmente equivalentes* si existe una transformación afín invertible

$$F: \hat{x} \varepsilon R^n \rightarrow F(\hat{x}) = B\hat{x} + b \varepsilon R^n \tag{4.2.10}$$

tal que las siguientes relaciones se cumplan:

$$K = F(\hat{K}), \tag{4.2.11}$$

$$P = \{p: K \rightarrow R; \ p = \hat{p}.F^{-1}, \ \hat{p} \varepsilon \hat{P}\}, \tag{4.2.12}$$

$$a_i^r = F(\hat{a}_i^r), \ r=0,1,2, \tag{4.2.13}$$

$$E_{ik}^1 = B\hat{E}_{ik}^1, \ E_{ik}^2 = B\hat{E}_{ik}^2, \ E_{i\ell}^2 = B\hat{E}_{i\ell}^2 \tag{4.2.14}$$

siempre que los nodos a_i^r (resp. $\hat{a}_i^r$), y vectores E_{ik}^1, E_{ik}^2, $E_{i\ell}^2$ (resp. $\hat{E}_{ik}^1$, $\hat{E}_{ik}^2$, $\hat{E}_{i\ell}^2$), existan en la definición del conjunto Σ (resp. $\hat{\Sigma}$).

Observación 4.2.3. Cualesquiera dos iguales elementos finitos Lagrangianos son afinmente equivalentes. $\square$

Ahora consideremos elementos finitos donde algunos grados de libertad son derivadas normales en algunos nodos. Entonces dos iguales de estos elementos finitos no son en general afinmente equivalentes. La propiedad para que un vector sea normal a un hiperplano no es en general preservada a traves de una transformación afín.

Constantemente usaremos las relaciones

$$\hat{x}\varepsilon\hat{K} \to x = F(\hat{x})\varepsilon K, \qquad (4.2.15)$$

$$\hat{p}\varepsilon\hat{P} \to p = \hat{p}.F^{-1}\varepsilon P \qquad (4.2.16)$$

entre los puntos $\hat{x}\varepsilon\hat{K}$ y $x\varepsilon K$, y las funciones $\hat{p}\varepsilon\hat{P}$ y $p\varepsilon P$ correspondientes a dos elementos finitos afínmente equivalentes. Como una consecuencia de las relaciones (4.2.15) y (4.2.16), observamos que

$$\hat{p}(\hat{x}) = p(x), \ \forall \hat{x}\varepsilon\hat{K}, \ \hat{p}\varepsilon\hat{P}. \qquad (4.2.17)$$

Ahora damos una relación crucial entre el operador $\hat{P}$-interpolación $\hat{\pi}$ y el operador P-interpolación π, y también entre las funciones base de elementos finitos equivalentes.

<u>Teorema 4.2.4</u>. Sean $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ y (K,P,Σ) dos elementos finitos afínmente equivalentes con grados de libertad de la forma (4.2.4). Entonces, si $\hat{p}_i$, $1 \leq i \leq N$, son las funciones base del elemento finito $\hat{K}$, las funciones p_i, $1 \leq i \leq N$, son las funciones base del elemento finito K. Los operadores de interpolación π y $\hat{\pi}$ son tales que

$$(\pi v)^{\wedge} = \hat{\pi}\hat{v} \qquad (4.2.18)$$

para cualquiera $\hat{v}\varepsilon$ dom$\hat{\pi}$ y $v\varepsilon$ domπ asociadas por

$$\hat{v}\varepsilon \ \mathrm{dom}\hat{\pi} \to v = \hat{v}.F^{-1}\varepsilon \ \mathrm{dom}\pi \qquad (4.2.19)$$

<u>Demostración</u> (cf. Ciarlet [1978]). □

° Una familia de elementos finitos es llamada una *familia afín* si todos sus elementos finitos son afínmente equivalente a un elemento finito, el cual es llamado el elemento finito de referencia de la familia (el elemento finito de referencia $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ no necesariamente pertenece a la familia).

entonces las funciones base ω_j, $1\leq j\leq M$, del espacio de elemento finito son definidas por las relaciones

$$\omega_j \epsilon X_h \text{ y } \phi_{j,h}(\omega_j) = \delta_{ij} \ , \ 1\leq i\leq M. \qquad (4.2.22)$$

Dado un espacio de elemento finito X_h con un conjunto de grados de libertad de la forma (4.2.21), a cada función $v:\bar{\Omega}\rightarrow R$, suficientemente suave para que los grados de libertad $\phi_{j,h}(v)$, $1\leq j\leq M$, sean bién definidos, asociamos la función

$$\pi_h v = \sum_{j=1}^{M} \phi_{j,h}(v)\omega_j \ . \qquad (4.2.23)$$

La función $\pi_h v$, llamada el X_h-*interpolación* de la función v, es caracterizada por las condiciones

$$\pi_h v \epsilon X_h \text{ y } \phi_{j,h}(\pi_h v) = \phi_{j,h}(v), \ 1\leq j\leq M \qquad (4.2.24)$$

Denotando por s el máximo orden de derivadas direccionales que ocurren en los elementos finitos (K,P_K, Σ_K), $K\epsilon T_h$, usualmente consideraremos, en vista de la definición (4.2.7), que el dominio dom π_h del *operador X_h-interpolación* π_h es el espacio

$$\text{dom } \pi_h = C^s(\bar{\Omega}). \qquad (4.2.25)$$

Nuestro siguiente paso es dar una relación de importancia entre el operador interpolación *global* π_h y el operador interpolación *local* π_K.

Teorema 4.2.5. Sea v cualquier función en el espacio dom $\pi_h = C^s(\bar{\Omega})$. Entonces las restricciones $v|_K$ pertenecen a los espacios dom π_K, y tenemos que

$$\forall K\epsilon T_h, \ (\pi_h v)\big|_K = \pi_K v\big|_K \qquad (4.2.26)$$

Demostración. (c.f. Ciarlet [1978]). $\square$

El concepto de una familia afín de elementos finitos es de gran importancia por las razones siguientes:

i) En la práctica, la mayor parte del trabajo complejo en el cálculo de los coeficientes del sistema lineal (4.1.4) es hecho en un elemento finito de referencia, no en un elemento finito genérico.

ii) Para tales familias afines, una *teoría de interpolación* puede ser desarrollada, viniendo a ser ésta la base de la mayor parte de los teoremas de convergencia.

iii) Aún cuando una familia de elementos finitos no es una familia afín, se le asocia una manera obvia con una familia afín cuyo papel "intermedio" es esencial.

Operador X_h -interpolación

Definamos a Σ_h como el conjunto de *grados de libertad de un espacio de elemento finito* X_h. Entonces, cuando los grados de libertad de todos los elementos finitos son de alguna de las formas (4.2.4), los grados de libertad del espacio de elemento finito son de alguna de las siguientes formas:

$$\left.\begin{aligned} &v \to v(b_j^0) \\ &v \to Dv(b_j^1)\, n_{jk}^1, \\ &v \to D^2v(b_j^2)(n_{ik}^2 n_{j\ell}^2) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.20)$$

donde los puntos b_j^r, r=0,1,2, llamados *nodos del espacio del elemento finito*, constituyen un conjunto el cual será generalmente denotado por N_h.

Si escribimos el conjunto Σ_h como

$$\Sigma_h = \{\phi_{j,h},\ \ 1 \leq j \leq M\} \qquad (4.2.21)$$

4.3. Elementos Finitos de Clase C^0 y C^1

Para el caso donde todos los elementos finitos (K, P_K, Σ_K), $K\epsilon\tau_h$, usados en la definición de un espacio de elemento finito, son del mismo tipo, diremos que cualquiera de ellos es un elemento finito genérico del espacio.

Ahora demos dos definiciones de mucha importancia.

° Un elemento finito genérico (K, P_K, Σ_K) es de *clase* C^0 si:

i) la inclusión $P_K \subset C^0(K)$ se cumple, y

ii) si K_1 y K_2 son dos elementos finitos adyacentes, las restricciones $v_h|_{k_1}$ y $v_h|_{k_2}$ coinciden a lo largo de la cara común a K_1 y K_2 para cualquier función v_h del correspondiente espacio de elemento finito. Como consecuencia, es legítimo en este caso considerar que la inclusión $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ se cumple.

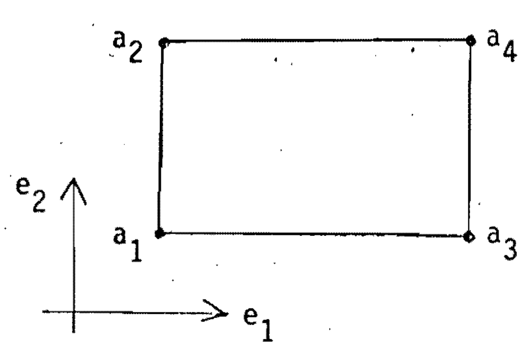
° Un elemento finito genérico (K, P_K, Σ_K) es de *clase* C^1 si:

i) la inclusión $P_K \subset C^1(K)$ se cumple y

ii) si K_1 y K_2 son dos elementos finitos adyacentes, para cualquier función v_h en el correspondiente espacio del elemento finito, las restricciones $v_h|_{k_1}$ y $v_h|_{k_2}$ coinciden a lo largo de la cara K' común a K_1 y K_2 y las derivadas normales exteriores $\partial_n v_h|_{k_1}$ y $\partial_n v_h|_{k_2}$ tienen como suma cero a lo largo de K'. En consecuencia, es legítimo en este caso considerar que la inclusión $V_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ se cumple.

A continuación damos dos ejemplos de elementos finitos de clase C^0 y C^1, los cuales serán utilizados en las secciones 5.2 y 5.1, respectivamente.

i) Rectángulo de Adini.



$$P_K = P_3 \oplus V\{x_1x_2^3,\ x_1^3x_2\}$$

$$\dim P_K = 12$$

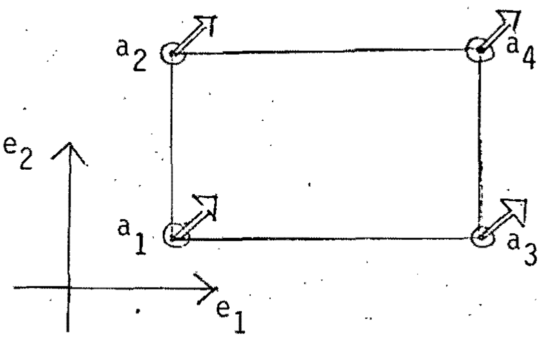
$$\Sigma_K = \{p(a_i),\ \partial_1 p(a_i),\ \partial_2 p(a_i),\ 1\leq i\leq 4\}$$

donde la primera derivada de cada a_i se indica con un pequeño círculo.

ii) Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit.

$P_K = Q_3$

$\dim P_K = 16$



$$\Sigma_K = \{p(a_i),\ D_p(a_i)(a_{i-1}-a_i),\ D_p(a_i)(a_{i+1}-a_i),$$

$$D_p^2(a_i)(a_{i-1}-a_i,\ a_{i+1}-a_i),\ 1\leq i\leq 4\}$$

ó, equivalentemente

$$\Sigma_K' = \{p(a_i),\ \partial_1 p(a_i),\ \partial_2 p(a_i),\ \partial_{12} p(a_i),\ 1\leq i\leq 4\}\ .$$

En la *elección* de un elemento finito para resolver un problema dado, las siguientes consideraciones son usualmente tomadas en cuenta:

i) El elemento finito debe ser apropiado a la geometría del problema. Consideraciones geométricas también justifican la elección de elementos finitos curvos en vez de elementos finitos rectos en el caso de dominios curvos.

ii) El elemento finito naturalmente debe ser apropiado para el problema a ser resuelto. Para métodos conformes de elementos finitos, veremos que se requiere el uso de elementos finitos de clase C° o C^1. Además, veremos que en el análisis de convergencias se requiere (entre otras cosas), para problemas de cuarto orden, las inclusiones $P_2(K) \subset P_K$; $K \in \tau_h$.

iii) Una vez que los criterios anteriores han sido satisfechos, falta obtener un sistema lineal cuyos coeficientes son fáciles de calcular y cuya resolución sea lo más simple posible. Recordaremos dos reglas las cuales tienden a reducir ciertos dificultades computacionales:
La primera es que, si es posible, los conjuntos de grados de libertad asociados con un nodo dado en la triangulación sean todos parecidos, para evitar diferentes instrucciones dependiendo sobre el nodo.
La segunda es que cada nodo del espacio sea común al mayor número de elementos finitos.

4.4. Consideraciones Generales sobre convergencia

Familia Convergente de Problemas Discretos

Considere la ecuación variacional

$$a(u,v) = f(v), \ \forall v \in V \qquad (4.4.1)$$

cuya solución u se desea aproximar, se supone que las hipotesis del lema Lax Milgram son satisfechas. Sea $\{V_h\}_{h>0}$ una familia de espacios de elementos finitos *conforme* en el sentido de estar constituida por subespacios de V, y sea

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \ \forall v_h \in V_h \qquad (4.4.2)$$

la familia de problemas discretos asociado cuyas soluciones forman la sucesión $\{u_h\}_{h>0}$. Entonces diremos que esta familia forma una familia convergente de problemas discretos, si, $\{u_h\}_{h>0}$ es convergente a la solución u en la norma de V, i.e.,

$$\lim_{h \to 0} ||u-u_h|| = 0 \qquad (4.4.3)$$

Lema de Cea

Nuestro propósito es dar condiciones suficientes para convergencia y, como un primer resultado en esta dirección, tenemos la siguiente estimación del error.

Teorema 4.4.1 (Lema de Cea). Existe una constante C independiente de $\{V_h\}_{h>0}$ tal que

$$||u-u_h|| \leq C \inf_{v_h \varepsilon V_h} ||u-v_h|| \tag{4.4.4}$$

Consecuentemente, una condición suficiente de convergencia es que

$$\lim_{h\to 0} \inf_{v_h \varepsilon V_h} ||u-v_h|| = 0. \tag{4.4.5}$$

Demostración. Sea ω_h un elemento arbitrario en V_h. Se sigue de (4.4.1) y (4.4.2) que

$$a(u-u_h,\omega_h) = 0.$$

Por tanto, de la continuidad y V-elipticidad de a, obtenemos $\forall v_h \varepsilon V_h$

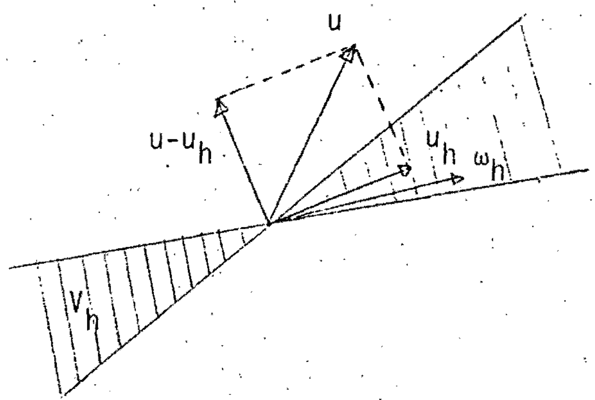
$$\alpha\, ||u-u_h||^2 \leq a(u-u_h,\ u-u_h) = a(u-u_h,\ u-v_h)$$

$$\leq M||u-u_h||\ ||v-v_h||,$$

de donde (4.4.4) se concluye con $C = M/\alpha$. $\square$

Observación 4.4.2. Cuando la forma bilineal a(.,.) es simétrica, hay una interpretación geométrica de la solución discreta. Puesto que $a(u-u_h,\omega_h) = 0$, $\forall \omega_h \varepsilon V_h$, se sigue que u_h es la proyección sobre V_h de la solución exacta u, con respecto al producto interno a(.,.). Entonces, tenemos en este caso

$$a(u-u_h,\ u-u_h) = \inf_{v_h \varepsilon V_h} a(u-v_h,u-v_h).$$



Usando la V-elipticidad y la continuidad de la forma bilineal, deducimos

$$||u-u_h|| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{u_h \varepsilon V_h} ||u-v_h||$$

Por tanto hemos obtenido una constante "menor" que en la demostración del teorema 4.4.1, ya que la constante M es necesariamente más grande que la constante α. □

Orden de Convergencia

La simple, pero crucial, desigualdad (4.4.4) demuestra que el problema de estimación del error $||u-u_h||$ es reducido a un problema de la teoría de aproximación: Evaluar la distancia $d(u,V_h) = \inf\{||u-v_h|| : v_h \varepsilon V_h\}$ entre una función $u\varepsilon V$ y un subespacio $V_h \subset V$. Esto explica el porque demostraremos resultados del siguiente tipo. Suponiendo regularidad apropiada de la función u, mostraremos que la distancia $d(u,V_h)$ es acotada por una constante (la cual usualmente implica normas de derivadas de alto orden de la función u) h^β, para algún exponente $\beta>0$, y en consecuencia concluiremos que

$$||u-u_h|| \leq C(u)h^\beta. \tag{4.4.6}$$

Sí este es el caso, diremos que el orden de convergencia es β, o equivalentemente, que tenemos una convergencia $O(h^{\beta})$, y simplemente escribiremos

$$||u-u_h|| = O(h^{\beta}). \qquad (4.4.7)$$

4.5. Teoría de Interpolación en Espacios de Sobolev.

Del Lema de Cea, teorema 4.4.1, la mejor estimación del error resultaría mostrando el elemento $\theta_h u \varepsilon V_h$ tal que $\{\inf ||u-v_h||_{2,\Omega} : v_h \varepsilon V_h\} = ||u-\theta_h u||$, i.e., la proyección de la solución u sobre el espacio V_h.

Sin embargo, ésta no es una empresa fácil y resulta más conveniente utilizar el X_h-interpolante $\pi_h u$ de la solución u, en cuyo caso se obtiene la estimación del error $||u-u_h||_{2,\Omega} \leq ||u-\pi_h u||_{2,\Omega}$. Tomando en cuenta que estamos usando la norma $||.||_{2,\Omega}$ y que $(\pi_h u)|_K = \pi_K u$ para toda $K \varepsilon \tau_h$ (teorema 4.2.5), podemos escribir

$$||u-\pi_h u||_{2,\Omega} = \Big(\sum_{K \varepsilon \tau_h} ||u-\pi_K u||^2_{2,K}\Big)^{1/2}$$

Por tanto, el problema de obtener una estimación para el error $||u-u_h||_{2,\Omega}$ es reducido al problema de evaluar cantidades tales como $||u-\pi_K u||_{2,K}$ y la solución de dichos problemas de interpolación *local*. Este es el objetivo de la teoría de interpolación en espacios de Sobolev. Un resultado crucial es que, para un elemento finito (K, P_K, Σ_K) el cual puede ser embebido en una familia afín y cuyo operador P_K-interpolación deja invariante los polinomios $\leq k$ (equivalentemente, las inclusiones $P_k(K) \subset P_K$ se cumplen), existe una constante C independiente de K tal que

$$\forall v \varepsilon H^{k+1}(K), \ |v-\pi_K v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}, \quad 0 \leq m \leq k+1$$

donde

h_K = diámetro de K

ρ_K = supremo de los diámetros de las esferas inscritas en K.

Este resultado es demostrado de manera más general en el teorema 4.5.5.

En la práctica, a menudo se considera una familia regular de elementos finitos, en el sentido que los diámetros h_K tienden a cero, y que existe una constante σ independiente de K tal que $h_K \leq \sigma\rho_K$. En este caso la estimación del error de interpolación viene a ser (teorema 4.5.6),

$$|v-\pi_K v|_{m,K} \doteq O(h_K^{k+1-m}), \quad 0 \leq m \leq k+1$$

Entonces, primeramente daremos las definiciones de los espacios $L^p(\Omega)$ y los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, en los cuales se trabajará.

Espacios $L^p(\Omega)$

Los conjuntos $L^p(\Omega)$ definidos por

$$\left.\begin{aligned} L^p(\Omega) &\equiv \{v\in m(\Omega): \int_\Omega |v|^p dx<\infty\}, \quad 1\leq p<\infty \\ L^\infty(\Omega) &\equiv \{v\in m(\Omega): \sup_{x\in\Omega} \text{ ess } |v(x)|<\infty\} \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.1)$$

provisto de las funciones

$$\left.\begin{aligned} ||v||_p &\equiv \{\int_\Omega |v|^p dx\}^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty, \quad v\in L^p(\Omega) \\ ||v||_\infty &\equiv \sup_{x\in\Omega} \text{ ess } |v(x)| = \inf\{K:|v(x)|\leq K \text{ p.c.t. } x\in\Omega\}, \quad v\in L^p(\Omega) \end{aligned}\right\} (4.5.2)$$

constituyen espacios vectoriales normados. La estructura algebráica es la usual en el sentido de que los elementos de $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencia

$$v\in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow v=[v] = \{u\in L^p(\Omega): u(x)= v(x) \text{ p.c.t. } x\in\Omega\},$$

Aquí, $m(\Omega)$ denota al conjunto de funciones medibles en Ω.

Algunas propiedades de los espacios $L^p(\Omega)$ son:

i) $L^p(\Omega)$ es de Banach (completo) si $1\leq p\leq \infty$

ii) $L^2(\Omega)$ es de Hilbert respecto al producto interno $(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$

iii) $L^p(\Omega)$ es separable para $1 \le p < \infty$, $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Sea $1 \le p \le \infty$, su dual $p' = p/(p-1)$, ($p' \equiv \infty$ si $p=1$, $p' \equiv 1$ si $p = \infty$) y sea m un entero no negativo. El conjunto de (clases de equivalencia de) funciones

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \le m\} \tag{4.5.3}$$

provisto de la función

$$\left.\begin{aligned} ||v||_{m,p,\Omega} &\equiv \Big\{\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p\,dx\Big\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \\ ||v||_{m,\infty,\Omega} &\equiv \max_{0 \le |\alpha| \le m} \Big\{\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha v(x)|\Big\}, \quad p = \infty, \end{aligned}\right\} \tag{4.5.4}$$

es un espacio normado.

También se usarán los semi-normas

$$\left.\begin{aligned} |v|_{m,p,\Omega} &\equiv \Big\{\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p dx\Big\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty \\ |v|_{m,\infty,\Omega} &\equiv \max_{|\alpha|=m} \Big\{\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \big| D^\alpha v(x)\big|\Big\}, \quad p = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{4.5.5}$$

El espacio de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ es la cerradura del espacio $D(\Omega)$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$.

Algunas propiedades de los espacios de Sobolev de orden entero son:

i) $W^{m,p}(\Omega)$ es de Banach (completo)

ii) $W^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}(\Omega) \subsetneq W^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \quad \forall\ m>k\geq o$

iii) $W^{m,p}(\Omega)$ es separable para $1\leq p<\infty$

iv) $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1<p<\infty$

v) $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}$ es de Hilbert con respecto al producto interno

$$(u,v)_m \equiv \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u,\ D^\alpha v)_m$$

vi) $W_o^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ para $1\leq p<\infty$

vii) $W_o^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado propio de $W^{m,p}(\Omega)$ y, por tanto

$W_o^{m,p}(\Omega)$ es de Banach

$W_o^{m,p}(\Omega)$ es separable para $1\leq p<\infty$

$W_o^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1<p<\infty$

$H_o^m(\Omega) \equiv W_o^{m,2}(\Omega)$ es de Hilbert respecto al producto interno

$$(u,v)_m \equiv \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u,\ D^\alpha v)_m$$

Sea $P_k(\Omega)$ el espacio de polinomios en Ω de orden $\leq k$.

El *espacio cociente* $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$, es un espacio de Banach cuando es equipado con la *norma cociente*

$$\bar{v}\in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega) \to ||\bar{v}||_{k+1,p,\Omega} = \inf_{\tilde{p}\in P_k(\Omega)} ||v+\tilde{p}||_{k+1,p,\Omega} \tag{4.5.6}$$

donde

$$\bar{v} = \{\omega\in W^{k+1,p}(\Omega):\ (\omega-v)\in P_k(\Omega)\} \tag{4.5.7}$$

denota la clase de equivalencia del elemento $v\in W^{k+1,p}(\Omega)$.

Entonces, por construcción, la transformación

$$\bar{v}\varepsilon W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega) \to |\bar{v}|_{k+1,p,\Omega} = |v|_{k+1,p,\Omega} \quad , \forall v\varepsilon\bar{v} \ , \qquad (4.5.8)$$

es una seminorma sobre el espacio cociente $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$, la cual satisface la desigualdad

$$\forall\bar{v}\varepsilon\ W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega),\ |\bar{v}|_{k+1,p,\Omega} \leq ||v||_{k+1,p,\Omega} \qquad (4.5.9)$$

(observe que, para cualquier polinomio $p\varepsilon P_k(\Omega)$,

$$||v+p||_{k+1,p,\Omega} = (|v|^p_{k+1,p,\Omega} + ||v+p||^p_{k,p,\Omega})^{1/p} \geq |v|_{k+1,p,\Omega}$$

con la modificación estandard para $p=\infty$). La relación inversa de (4.5.9) esta dada por el teorema siguiente, de lo cual se concluye que la seminorna (4.5.8) es de hecho una norma en el espacio cociente equivalente a la norma cociente (4.5.6)

<u>Teorema 4.5.1</u> Existe una constante $C\ (\Omega)$ tal que

$$\forall v\varepsilon W^{k+1,p}(\Omega),\ \inf_{\tilde{p}\varepsilon P_k(\Omega)} ||v+\tilde{p}||_{k+1,p,\Omega} \leq C\ (\Omega)\ |v|_{k+1,p,\Omega} \qquad (4.5.10)$$

y, consecuentemente, tenemos

$$\forall\bar{v}\varepsilon W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega),\ ||\bar{v}||_{k+1,p,\Omega} \leq C\ (\Omega)|\bar{v}|_{k+1,p,\Omega} \qquad (4.5.11)$$

<u>Demostración</u> (c.f. Ciarlet [1978]). □

Estimacion del Error para Operadores que Preservan Polinomios

Nuestro próximo objetivo es estimar el error de interpolación $|v-\pi_k v|_{m,q,k}$ y $||v-\pi_k v||_{m,q,k}$ donde π_k es el operador P_k-interpolación asociado con algún elemento finito. Sin embargo, se presenta una teoría de aproximación válida para operadores que preservan polinomios más generales, i.e., no necesariamente de tipo interpolación.

° Diremos que dos subconjuntos abiertos Ω y $\hat{\Omega}$ de R^n son *afinmente equiva-*

lentes si existe una transformación afín invertible

$$F: \hat{x} \in R^n \to F(\hat{x}) = B\hat{x} + b \in R^n, \tag{4.5.12}$$

tal que

$$\Omega = F(\hat{\Omega}). \tag{4.5.13}$$

Como en el caso de elementos finitos afínmente equivalentes, usaremos las correspondencias

$$\hat{x} \in \hat{\Omega} \to x = F(\hat{x}) \in \Omega \tag{4.5.14}$$

$$(\hat{v}: \hat{\Omega} \to R) \to (v = \hat{v}.F^{-1}: \Omega \to R) \tag{4.5.15}$$

entre los puntos $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ y $x \in \Omega$, y entre las funciones definidas sobre el conjunto $\hat{\Omega}$ y el conjunto Ω. Observe que de (4.5.14) y (4.5.15) tenemos

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x). \tag{4.5.16}$$

Ahora necesitamos conocer como se comportan las seminormas de Sobolev definidas en (4.5.5) de un conjunto abierto a uno afínmente equivalente. Esto se trata en el próximo teorema.

Teorema 4.5.2 Sean Ω y $\hat{\Omega}$ dos subconjuntos abiertos afínmente equivalentes de R^n. Si una función v pertenece al espacio $W^{m,p}(\Omega)$ para algún entero $m \geq 0$ y algún número $p \in [1,\infty]$, la función $\hat{v} = v.F$ pertenece al espacio $W^{m,p}(\hat{\Omega})$, y además existe una constante $C = C(m,n)$ tal que

$$\forall v \in W^{m,p}(\Omega), \; |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} \leq C\|B\|^m \, |\det(B)|^{-1/p} \, |v|_{m,p,\Omega} \tag{4.5.17}$$

donde B es la matriz de la transformación F en (4.5.12) Análogamente, tenemos que

$$\forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Omega}), \; |v|_{m,p,\Omega} \leq C\|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/p} |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} \tag{4.5.18}$$

Demostración. (c.f. Ciarlet [1978]) $\square$

Para aplicar el teorema 4.5.2, es conveniente evaluar las normas $||B||$ y $||B^{-1}||$ en términos de simples cantidades geométricas. Este es el objeto del próximo teorema, donde usaremos la notación:

$$h = \text{diam}\ (\Omega), \quad \hat{h} = \text{diam}\ (\hat{\Omega}) \tag{4.5.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \sup\ \{\text{diam}\ (S) : S \text{ es una bola contenida en } \Omega\} \\ \hat{\rho} = \sup\ \{\text{diam}\ (\hat{S}) : \hat{S} \text{ es una bola contenida en } \hat{\Omega}\} \end{array}\right\} \tag{4.5.20}$$

Teorema 4.5.3. Sean $\hat{\Omega}$ y $\Omega = F(\hat{\Omega})$ dos subconjuntos abiertos afinmente equivalente de R^n.
Entonces las cotas superiores

$$||B|| \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad y \quad ||B^{-1}|| \leq \frac{\hat{h}}{\rho} \tag{4.5.21}$$

se cumplen.

Demostración. Podemos escribir

$$||B|| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{||\xi|| = \hat{\rho}} ||B\xi||$$

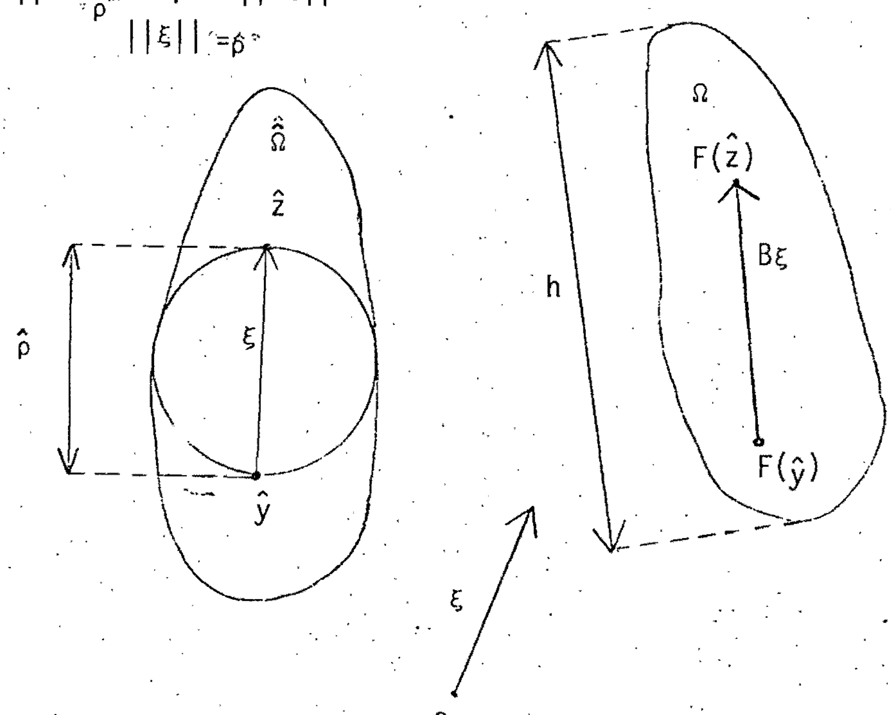


Fig. 4.5.1

Dado un vector ξ satisfaciendo $||\xi||=\hat{\rho}$, existen dos puntos $\hat{y},\hat{z},\varepsilon\bar{\hat{\Omega}}$ tales que $\hat{y}-\hat{z}=\xi$, por definición de $\hat{\rho}$ (fig. 4.5.1). Ya que $B\xi= F(\hat{y})-F(\hat{z})$ con $F(\hat{y})\varepsilon\bar{\Omega}$, $F(\hat{z})\varepsilon\bar{\Omega}$, deducimos que $||B\xi||\leq h$ y por tanto lo primera desigualdad de (4.5.21) es demostrada. La otra desigualdad es probada en forma similar. $\square$

Ahora estamos en posición de probar una propiedad importante de operadores que preservan polinomios.

Teorema 4.5.4. Para algunos enteros $k\geq 0$ y $m\geq 0$ y algunos números $p,q\varepsilon[1,\infty]$, sean $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ y $W^{m,q}(\hat{\Omega})$ espacios de Sobolev satisfaciendo la inclusión.

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega}) \qquad (4.5.22)$$

y sea $\hat{\pi}\varepsilon\ L(W^{k+1,p}(\hat{\Omega});\ W^{m,q}(\hat{\Omega}))$ una transformación tal que

$$\forall\hat{p}\varepsilon P_k(\hat{\Omega}),\ \hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}\ . \qquad (4.5.23)$$

Para cualquier conjunto abierto Ω afinmente equivalente al conjunto $\hat{\Omega}$, sea $\pi\Omega$ la transformación definida por

$$(\pi\Omega\ v)^{\wedge}=\hat{\pi}\hat{v} \qquad (4.5.24)$$

para todas las funciones $\hat{v}\varepsilon W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ y $v\varepsilon W^{k+1,p}(\Omega)$ en la correspondencia (4.5.15). Entonces existe una constante $C(\hat{\pi},\hat{\Omega})$ tal que,

$$\forall v\varepsilon W^{k+1,p}(\Omega),\ |v-\pi\Omega\ v|_{m,q,\Omega} \leq$$

$$C\ (\hat{\pi},\hat{\Omega})(\mathrm{vol.}(\Omega))^{(1/q)-(1/p)}\ \frac{h^{k+1}}{\rho\ m}\ |v|_{k+1,p,\Omega} \qquad (4.5.25)$$

con h y ρ definidas como en (4.5.19 y (4.5.20), respectivamente.

Desmostración. Usando (4.5.23) obtenemos la identidad

$$\forall\hat{v}\varepsilon W^{k+1,p}(\hat{\Omega}),\ \forall\hat{p}\varepsilon P_k(\hat{\Omega}),\ \hat{v}-\hat{\pi}\hat{v} = (I-\hat{\pi})(\hat{v}+\hat{p})= \hat{v}-\hat{\pi}\hat{v}$$

donde I, la transformación identidad de $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ en $W^{m,q}(\hat{\Omega})$, es continua. De esta identidad deducimos que

$$\left.\begin{aligned} |\hat{v}-\hat{\pi}\hat{v}|_{m,q,\hat{\Omega}} &\leq ||I-\hat{\pi}||_{L(W^{k+1,p}(\hat{\Omega});\, W^{m,q}(\hat{\Omega}))} \inf_{\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega})} ||\hat{v}+\hat{p}||_{k+1,p,\hat{\Omega}} \\ &\leq C(\hat{\pi},\hat{\Omega})|\hat{v}|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \end{aligned}\right\} \quad (4.5.26)$$

debido al teorema 4.5.1.

De (4.5.24) tenemos que

$$\hat{v}-\hat{\pi}\hat{v} = (v-\pi_\Omega v)^\wedge$$

y por tanto aplicando el teorema 4.5.2 obtenemos

$$|v-\pi_\Omega v|_{m,q,\Omega} \leq C||B^{-1}||^m |\det(B)|^{1/q} |\hat{v}-\hat{\pi}\hat{v}|_{m,q,\hat{\Omega}} \qquad (4.5.27)$$

Por el mismo teorema,

$$|\hat{v}|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \leq C||B||^{k+1} |\det(B)|^{-1/p} |v|_{k+1,p,\Omega} \qquad (4.5.28)$$

y entonces, para obtener la desigualdad (4.5.25) es suficiente combinar las desigualdades (4.5.26), (4.5.27) y (4.5.28) y las cotas superiores $||B||\leq h/_{\hat{\rho}}$ y $||B^{-1}||\leq \hat{h}/_{\rho}$ (teorema 4.5.3). Finalmente, observamos que

$$|\det(B)| = \frac{\text{vol }(\Omega)}{\text{vol.}(\hat{\Omega})}. \qquad \square$$

Nuestro siguiente paso es estimar el error de interpolación para familias afines de elementos finitos, para la cual damos el teorema siguiente.

<u>Teorema 4.5.5</u>. Sea $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ un elemento finito, para el cual s denota el orden mayor de derivadas parciales que ocurren en la definición de $\hat{\Sigma}$.

Si las siguientes inclusiones se cumplen, para algunos enteros $m\geq 0$ y $k\geq 0$ y para algunos números $p,q\in[1,\infty]$,

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow C^s(\hat{K}), \qquad (4.5.29)$$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{K}), \tag{4.5.30}$$

$$P_k(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{K}) \tag{4.5.31}$$

existe una constante $C(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ tal que, para todos elementos finitos afinmente equivalentes (K,P,Σ), y toda función $v \in W^{k+1,p}(K)$,

$$|v-\pi_k v|_{m,q,K} \leq C(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})(\mathrm{vol}(\hat{K}))^{(1/q)-(1/p)} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,p,K} \tag{4.5.32}$$

Aquí $\pi_k v$ denota el P_k-interpolante de la función v, y

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{vol}(K) = dx\text{-medida de } K, \\ &h_K = \mathrm{diam}\ (K) \\ &\rho_K = \sup\{\mathrm{diam}(S) : S \text{ es una bola contenida en } K\} \end{aligned}\right\} \tag{4.5.33}$$

Demostración. (c.f Ciarlet [1978]). □

Antes de entrar al siguiente teorema, daremos una definición de naturaleza puramente geométrica.

° Una familia de elementos finitos (K,P_K, Σ_K) es *regular* si las siguientes dos condiciones son satisfechas:

i) Existe una constante σ tal que

$$\forall\ K,\ \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \tag{4.5.34}$$

ii) Los diámetros de h_K tienden a cero.

Para tales familias, la estimación del error de interpolación del teorema 4.5.5 puede ser inmediatamente reducida a estimaciones simples de las normas $||v-\pi_K v||_{m,q,K}$.

Teorema 4.5.6. Sea dada una familia afín regular de elementos finitos (K,P_K, Σ_K), cuyo elemento finito de referencia $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ satisface las suposiciones (4.5.29), (4.5.30) y (4.5.31). Entonces existe una constante

$C(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ tal que, para todos los elementos finitos K en la familia, y toda función $v\varepsilon W^{k+1,p}(K)$,

$$||v-\pi_K v||_{m,q,k} \leq C(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})(\mathrm{vol}(K))^{(1/q)-(1/p)}h^{k+1-m}|v|_{k+1,p,K} \quad (4.5.35)$$

Demostración. Puesto que $h<1$

$$||v-\pi_K v||_{m,q,K} = \{\sum_{r=0}^{m} |v-\pi_K v|^q_{r,q,K}\}^{1/q}$$

$$\leq C\{\sum_{r=0}^{m} h^{q(k+1-r)}\}^{1/q} |v|_{k+1,q,K} \leq C\, m\, h^{k+1-m}|v|_{k+1,q,K}$$

Por tanto el resultado se sigue del teorema 4.5.5. □

CAP. 5 METODOS DEL ELEMENTO FINITO PARA EL PROBLEMA DE PLACAS

En esta parte estudiaremos la convergencia y exactitud de las soluciones aproximadas del problema de flexión de placas obtenidas con métodos de elementos finitos conformes y no conformes.

Primeramente consideraremos métodos conformes y por simplicidad supondremos que el dominio $\overline{\Omega}$ es poligonal. La elaboración de tales métodos requiere el uso de elementos finitos rectos de clase C^1. Entonces, por facilidad, analizaremos el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, ya que este puede ser embebido en un familia afín en cuyo caso la teoría de interpolación en espacios de Sobolev, es aplicable. Otros elementos finitos de clase C^1 que pueden ser utilizados para resolver el problema de placas son los triángulos de Argyris, Bell, Hsieh-Clough-Tocher, Singular de Zienkiewics, los cuales no pueden ser embebidos en familias afines siendo necesario el desarrollo de toerías de interpolación especiales. También veremos que las hipótesis mínimas "$u \varepsilon H^2(\Omega)$" y "$P_2(K) \subset P_K$, $K \varepsilon \tau_h$" aseguran convergencia, i.e., $\lim\limits_{h \to o} ||u-u_h||_{2,\Omega} = 0$.

Después trataremos elementos finitos donde la inclusión $V_h \subset V$ es violada. Esta situación corresponde a los así llamados métodos no conformes. En este caso analizaremos en particular el elemento finito llamado rectángulo de Adini. Para estos casos la inclusión $P_2(K) \subset P_K$, $K\varepsilon\tau_h$, es una de tantas condiciones para obtener convergencia. Además la forma bilineal a viene a ser aproximada por

$$a_h(.,.) = \sum_{K\varepsilon\tau_h} \int_K \{....\} \, dK.$$

5.1. Métodos Conformes Para el Problema de Placas

Aquí consideraremos un método de elemento finito conforme, el cual es comunmente usado para aproximar la solución del problema de placas. En particular consideraremos el problema de la placa empotrada, en cuyo caso

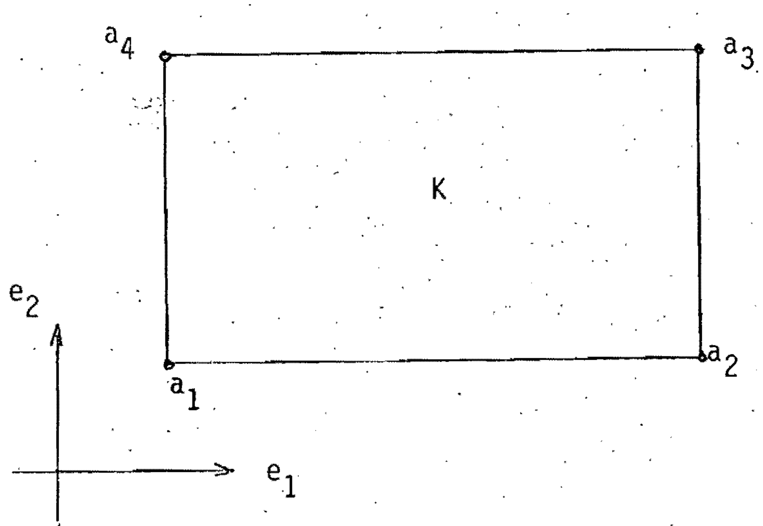
$$\left.\begin{aligned} V &= H_0^2\,(\Omega),\ \Omega\varepsilon R^2 \\ a(u,v) &= D\int_\Omega \{\Delta u\Delta v + (1-\nu)(2u_{,12}\,v_{,12} - u_{,11}v_{,22} - u_{,22}v_{,11}\}\,d\Omega \\ f(v) &= \int_\Omega q.v d\Omega \end{aligned}\right\} \quad (5.1.1)$$

y las hipótesis del lema de Lax Milgram son satisfechas.

Suponemos que el conjunto Ω es poligonal, pudiendo ser cubierto por triangulaciones compuesta por elementos finitos rectos. Para desarrollar un método conforme, nuestro problema es construir subespacios de dimensión finita del espacio $H^2(\Omega)$. Ya que las funciones establecidas en espacios de elementos finitos son "localmente regulares" ($P_K \subset H^2(K)$ para toda $K\varepsilon\tau_n$), es necesario la inclusión $X_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ (teorema 4.1.2) con lo cual los elementos finitos vienen a ser de clase C^1, por ejemplo, los triangulos de Argyris, Bell y el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit.

Un ejemplo de un Elemento Finito Conforme: El Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit.

Aquí estudiaremos un elemento finito de clase C^1, llamado *rectángulo de Bogner-Fox-Schmit*, cuyas principales características se dan en la figura siguiente



$P_K = Q_3$

$\dim P_K = 16$

$\Sigma_k = \{p(a_i),\ \partial_1 p(a_i),\ \partial_2 p(a_i),\ \partial_{12} p(a_i),\ 1 \leq i \leq 4\}$

$\Sigma'_K = \{p(a_i), Dp(a_i)(a_{i-1}-a_i), Dp(a_i)(a_{i+1}-a_i),$

$D^2 p(a_i)(a_{i-1}-a_i, a_{i+1}-a_i),\ 1 \leq i \leq 4\}$.

Este elemento solamente puede ser usado, si el conjunto $\overline{\Omega}=\cup_{K\varepsilon\tau_h} K$ posee todos sus lados paralelos a los ejes coordenados.

Teorema 5.1.1. Sea X_h un espacio de elemento finito asociado con rectángulo de Bogner-Fox-Schmit. Entonces la inclusión

$$X_h \subset C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \tag{5.1.2}$$

se cumple.

Demostración. Siguiendo la definición de elemento finito clase C^1 tenemos que $X_h \subset C^1(\overline{\Omega})$ y, entonces, aplicando el resultado del teorema 4.1.4 se tiene que $X_h \subset H^2(\Omega)$. □

Como este elemento finito pertenece a una familia afín regular, toda la teoría de interpolación "afín" en espacios de Sobolev desarrollada anteriormente puede ser aplicada.

De aquí, para toda $p\varepsilon]1,\infty]$ tal que $W^{4,p}(K) \hookrightarrow C^2(K) = \mathrm{dom}\pi_K$, y todos los pares (m,q) con $m\geq 0$ y $q\varepsilon[1,\infty]$ compatible con la inclusión

$$W^{4,p}(K) \hookrightarrow W^{m,q}(K), \tag{5.1.3}$$

existe (teorema 4.5.6) una constante C independiente de K tal que

$$\forall v\varepsilon W^{4,p}(K), ||v-\pi_k v||_{m,q,K} \leq C(\mathrm{vol}(K))^{1/q-1/p} h_K^{4-m} |v|_{4,p,K} \tag{5.1.4}$$

Estimación del Error $||u-u_h||_{2,\Omega}$

Nuestro siguiente propósito será estimar el error de aproximación del problema de la placa empotrada (5.1.1). Consideraremos familias de espacios de elemento finito X_h, con el mismo elemento genérico (K,P_K,Σ_K), para lo cual necesitamos las siguientes suposiciones:

(H1).- La familia (K,P_K,Σ_K), $K\epsilon\tau_h$, para toda h, es una familia afín de elementos finitos.

(H2).- El elemento finito genérico es de clase C^1.

Si suponemos que la inclusión $P_K \subset H^2(K)$ se cumple, la inclusión $X_h \subset H^2(\Omega)$ es entonces una consecuencia de la hipótesis (H2). Siendo este el caso, tenemos

$$V_h = Xoo_h = \{v_h \epsilon X_h: v_h=\partial_n v_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \qquad (5.1.5)$$

Se puede observar que el operador X_h-interpolación asociado con cualquier elemento finito de clase C^1 satisface la condición

$$v\epsilon \mathrm{dom}\pi_h \text{ y } v=\partial_n v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \Longrightarrow \pi_h v\epsilon\ Voo_h \qquad (5.1.6)$$

la cual, por consiguiente, será una hipótesis implícita en lo que resta de esta parte. Entonces derivemos una estimación del error en la norma de $H^2(\Omega)$.

Teorema 5.1.2. Además de (H1) y (H2), suponga que existe un entero $k\geq 2$ tal que las siguientes inclusiones son satisfechas:

$$P_k(K) \subset P_K \subset H^2(K), \qquad (5.1.7)$$

$$H^{k+1}(K) \subsetneq C^s(K), \qquad (5.1.8)$$

donde s es el orden máximo de derivadas parciales que ocurren en la definición del conjunto Σ_K.

Entonces, si la solución $u \in H_0^2(\Omega)$ del problema de la placa empotrada pertenece al espacio $H^{k+1}(\Omega)$, existe una constante C independiente de h tal que

$$||u-u_h||_{2,\Omega} \leq C\, h^{k-1} |u|_{k+1,\Omega}\ , \qquad (5.1.9)$$

donde $u_h \in V_h$ es la solución discreta.

Demostración. Del lema de Cea (teorema 4.4.1) tenemos que

$$||u-u_h||_{2,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_{2,\Omega}$$

$$\leq C\, ||u-\pi_h u||_{2,\Omega} = C\, \Big(\sum_{K \in \tau_h} ||u-\pi_K u||^2_{2,K} \Big)^{1/2} \qquad (\text{de}(5.1.4))$$

$$\leq C\, h^{k-1} \Big(\sum_{K \in \tau_h} |u|^2_{k+1,K} \Big)^{1/2} = C\, h^{k-1} |u|_{k+1,\Omega} \qquad (\text{de}(5.1.6))$$

Observación 5.1.3. Del teorema anterior, las hipótesis mínimas que aseguran una convergencia de orden $O(h)$ en la norma $||\cdot||_{2,\Omega}$ son las inclusiones $P_2(K) \subset P_K$, por un lado, y por otro el hecho de que la solución u del problema de placas este en el espacio $H^3(\Omega)$. Esta regularidad de la solución es garantizada en el caso en que q pertenece al espacio $L^2(\Omega)$, y $\bar{\Omega}$ es un poligono convexo, hipótesis frecuentemente satisfecha para placas.

El siguiente paso será obtener condiciones suficientes mínimas que aseguren convergencia en la norma $||\cdot||_{2,\Omega}$, i.e., $\lim_{h \to 0} ||u-u_h||_{2,\Omega} = 0$.

Teorema 5.1.4. Además de (H1) y (H2), suponga que las inclusiones

$$P_2(K) \subset P_K \subset H^2(K) \qquad (5.1.10)$$

se satisfacen, y que el orden máximo s de las derivadas parciales encontradas en el conjunto Σ_K satisface $s \leq 2$.

Entonces tenemos

$$\lim_{h\to o} ||u-u_h||_{2,\Omega} = 0 \tag{5.1.11}$$

<u>Demostración.</u> Definamos el espacio

$$V = W^{3,\infty}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Entonces, como las inclusiones (5.1.10) y

$$W^{3,\infty}(\hat{K}) \subsetneq C^s(\hat{K}), \quad s=0,1,2$$

$$W^{3,\infty}(\hat{K}) \subsetneq H^2(\hat{K})$$

se cumplen, aplicando el Teorema 4.5.6 con $k=2$, $p = \infty$, $m = 2$ y $q = 2$, tenemos que existe una constante C tal que

$$\forall v \varepsilon V, ||v-\pi_K v||_{2,K} \leq Ch_K |v|_{3,\infty,K}$$

de donde deducimos

$$||v-\pi_h v||_{2,\Omega} = \left(\sum_{K\varepsilon\tau_h} ||v-\pi_k v||_{2,K}^2\right)^{1/2} \leq Ch|v|_{3,\infty,\Omega} \tag{5.1.12}$$

y por tanto

$$\lim_{h\to o} ||v-\pi_h v||_{2,\Omega} = 0 \tag{5.1.13}$$

Ahora, usando la desigualdad del triángulo, tenemos que para todo h y toda $v \,\varepsilon V$,

$$||u-\pi_h v||_{2,\Omega} \leq ||u-v||_{2,\Omega} + ||v-\pi_h v||_{2,\Omega} \,. \tag{5.1.14}$$

Dada una solución $u\varepsilon V$ y cualquier número $\varepsilon>0$, primero determinamos una función $v_\varepsilon \varepsilon V$ la cuál satisface la desigualdad $||u-v_\varepsilon||_{2,\Omega} \leq {}^{\varepsilon}/2$. Esto es posible porque el espacio V es *denso* en el espacio $H_0^2(\Omega)$. Entonces por (5.1.13) existe una $h_0(\varepsilon)$ tal que $||v_\varepsilon-\pi_h v_\varepsilon||_{2,\Omega} \leq {}^{\varepsilon}/2$ para toda $h \leq h_0(\varepsilon)$. En vista de la desigualdad (5.1.14), se demuestra que

$$\lim_{h\to o} \inf_{v_h \varepsilon V_h} ||u-v_h|| = 0$$

y utilizando el resultado del Lema de Cea (Teorema 4.4.1), se concluye (5.1.11) $\square$

Resumiendo: Tenemos que para el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, podemos aplicar la teoria de interpolación "afín" en espacios de Sobolev y, entonces, de la inclusión $P_3(K) \subset Q_3(K) = \hat{P}_K$, concluimos que para una familia regular de triangulaciones con este elemento

$$||u-u_h||_{2,\Omega} \leq Ch^2|u|_{4,\Omega} \quad , \text{ si } u \epsilon H^4(\Omega),$$

de acuerdo al teorema 5.1.2. Por tanto, utilizando este tipo de elemento finito en la aproximación del problema de flexion de placas se obtiene una *velocidad de convergencia de dos* (2).

5.2. Métodos No Conformes para el Problema de Placas.

Primeramente daremos la definición general de un método no conforme para resolver el problema de la placa empotrada (5.1.1). Suponiendo que el conjunto $\overline{\Omega}$ es poligonal, construimos un espacio de elemento finito X_h cuyo elemento finito genérico no es de clase C^1. Entonces el espacio X_h no será un subespacio del espacio $H^2(\Omega)$, como una consecuencia del siguiente teorema: (que es el inverso del teorema 4.1.2).

Teorema 5.2.1. Suponga que las inclusiones $P_K \subset C^1(K)$ para toda $K \epsilon \tau_h$ y $X_h \subset H^2(\Omega)$ se cumplan. Entonces la inclusión.

$$X_h \subset C^1(\overline{\Omega})$$

se cumple. $\square$

De aquí en adelante supondremos que

$$\forall K \epsilon \tau_h, \; P_K \subset H^2(K), \tag{5.2.1}$$

así que, en particular,

$$X_h \subset L^2(\Omega). \tag{5.2.2}$$

Después de definir un subespacio apropiado Xoo_h de X_h, así como tomar en cuenta las condiciones de frontera $v = v,_n = 0$ a lo largo de $\partial\Omega$, definimos la forma bilineal aproximada a_h por

$$\left.\begin{aligned} a_h(u_h,v_h) &= D\sum_{K\epsilon\tau_h}\int_K \{ \Delta u_h \Delta v_h + (1-\nu)(2u_{h,12}v_{h,12} - u_{h,11}\, v_{h,22} \\ &\qquad - u_{h,22}v_{h,11})\}\, dK \\ &= D\sum_{K\epsilon\tau_h}\int_K \{\nu\,\Delta u_h \Delta v_h + (1-\nu)(u_{h,11}v_{h,11} + \\ &\qquad + u_{h,22}v_{h,22} + 2u_{h,12}v_{h,12})\}\, dK \end{aligned}\right\} \quad (5.2.3)$$

Observe que esta definición es justificada por la inclusión (5.2.1). Entonces el *problema discreto* consiste en encontrar una función $u_h \epsilon V_h = Xoo_h$ tal que

$$a_h(u_h,v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \epsilon V_h \qquad (5.2.4)$$

(la forma lineal f no necesita ser aproximada en vista de la inclusión (5.2.2)). En analogía con la norma $|.|_{2,\Omega}$ del espacio $V=H_0^2(\Omega)$, introducimos la seminorma

$$v_h \to ||v_h||_h = \left(\sum_{K\epsilon\tau_h} |v_h|_{2,K}^2\right)^{1/2} \qquad (5.2.5)$$

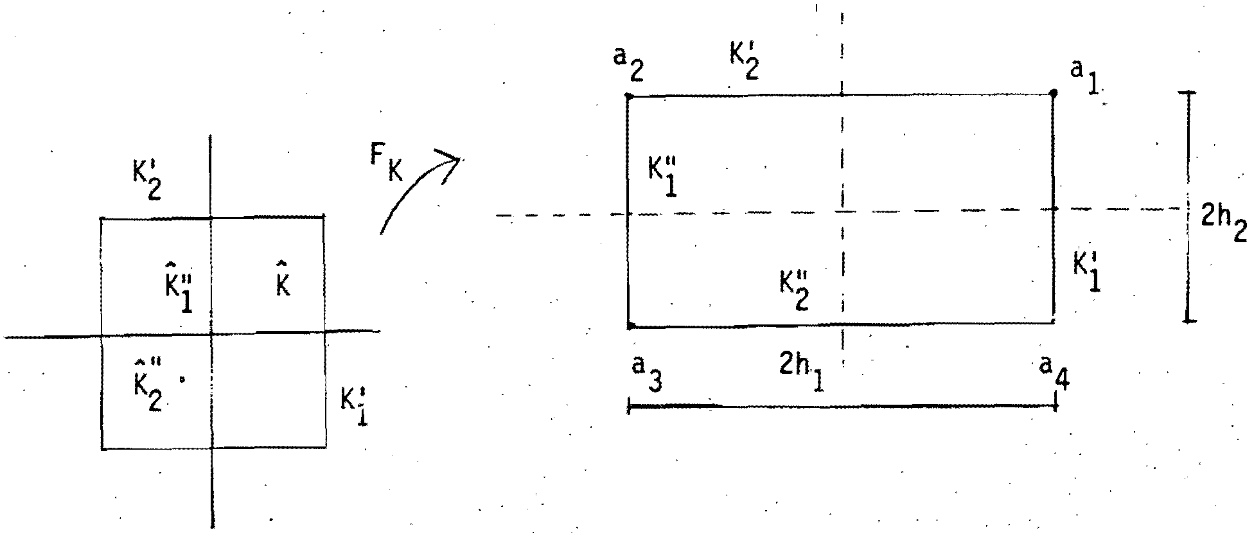
sobre el espacio V_h, y extendemos los mapeos $a_h(.,.)$ y $||.||_h$ a el espacio V_h+V. Entonces existe una constante $\tilde{M}$ independiente del espacio V_h tal que

$$\forall u,\ v\epsilon(V_h+V),\ |a_h(u,v)| \le \tilde{M}||u||_h||v||_h. \qquad (5.2.6)$$

Un ejemplo de un elemento finito no conforme: El rectángulo de Adini.

En esta parte, esencialmente nos concentramos en un ejemplo de un elemento finito no conforme, en el sentido de que da lugar a un método no conforme para el problema de placas. Este elemento, conocido como *rectángulo* *de Adini*, está definido por:

El conjunto K es un rectángulo cuyos vértices a_i, $1\leq i\leq 4$, son como se muestra en la siguiente figura:



El espacio P_K es compuesto de todos los polinomios de la forma

$$P:x=(x_1,x_2)\to p(x) = \sum_{0\leq \alpha_1+\alpha_2\leq 3} \gamma_{\alpha_1\alpha_2} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} + \gamma_{13}X_1X_2^3 + \gamma_{31}X_1^3X_2,$$

i.e., tenemos que

$$P_K = P_3(K) \oplus V\{X_1X_2^3,\ X_1^3X_2\}. \tag{5.2.7}$$

Entonces la inclusión

$$P_3(K) \subset P_K \tag{5.2.8}$$

se cumple y

$$\dim P_K = 12. \tag{5.2.9}$$

Además tenemos que el conjunto de grados de libertad, dado por

$$\Sigma_K = \{p(a_i),\ \partial_1 p(a_i),\ \partial_2 p(a_i),\ 1\leq i\leq 4\}, \tag{5.2.10}$$

es un conjunto P_K-unisolvente.

Suponemos que el conjunto $\bar{\Omega}$ es rectangular, así que puede ser cubierto por "triangulaciones" hechas por rectángulos. Por tanto a una triangulación τ_h, asociamos un espacio de elemento finito X_h cuyas funciones v_h son definidas como sigue:

i) Para cada rectángulo $K\varepsilon\tau_h$, las restricciones $v_h|_K$ pertenecen al espacio P_K dado por (5.2.7)

ii) Cada función $v_h\varepsilon V_h$ es definida por sus valores y los valores de sus primeras derivadas en todos los vértices de la triangulación.

A lo largo de cada lado K' de un rectángulo de Adini K, las restricciones $p|_{K'}$, $p\varepsilon P_K$, son polinomios de grado ≤ 3 en una variable. Ya que tales polinomios son unívocamente determinados por sus valores y los valores de su primera derivada en los puntos extremos de K', el rectángulo de Adini es un elemento finito de clase C°. Por tanto la inclusión $V_h \subset C°(\bar{\Omega})$ se cumple y además $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Sea $V_h=Voo_h$, donde Voo_h denota el espacio de todas las funciones $v_h\varepsilon V_h$ tal que $v_h(b) = \partial_1 v_h(b) = \partial_2 v_h(b) = 0$ en todos los nodos frontera b. Entonces las funciones $v_h\varepsilon V_h$ se anulan a lo largo de la frontera $\partial\Omega$, pero, en general, sus derivadas normales $\partial_n v_h$ no se anulan a lo largo de la frontera $\partial\Omega$, aunque se anulan en los nodos frontera. Resumiendo, hemos construido un espacio de elemento finito V_h cuyas funciones v_h satisfacen

$$\left.\begin{array}{l} v_h\varepsilon H_0^1(\Omega) \cap C°(\bar{\Omega}), \quad v_h|_K \ \varepsilon H^2(\Omega) \quad \forall K\varepsilon\tau_h \\ \\ \partial_n v_h(b) = 0 \text{ en los nodos frontera} \end{array}\right\} \qquad (5.2.13)$$

Observe que el operador V_h-interpolación asociado, π_h, es tal que

$$v \ \varepsilon \ H_0^2(\Omega) \cap \text{dom } \pi_h \Rightarrow \pi_h v \ \varepsilon \ V oo_h = V_h \qquad (5.2.14)$$

Antes de analizar el error, examinaremos si el mapeo $||.||_h$ de (5.2.5) es verdaderamente una norma.

Teorema 5.2.2. El mapeo

$$v_h \to ||v_h||_h = \Big(\sum_{K\varepsilon\tau_h} |v_h|^2_{2,K}\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{K\varepsilon\tau_h} \int_K \Big[(v_{h,11})^2 + 2(v_{h,12})^2 + (v_{h,22})^2\Big] dK\Big)^{1/2} \quad (5.2.15)$$

es una norma sobre el espacio V_h.

Demostración. Sea v_h una función en el espacio V_h tal que $||v_h||_h = 0$. Entonces las funciones $\partial_j(v_h|_K)$, $j=1,2$, son constantes sobre cada rectángulo $K\varepsilon\tau_h$. Puesto que son continuas en los vértices, las funciones $\partial_j v_h$, $j=1,2$, son por lo tanto constantes sobre el conjunto $\bar{\Omega}$, y ya que se anulan en los nodos frontera, son identicamente cero. Entonces la función $v_h \varepsilon V_h$ es idéntica a cero, como una consecuencia de la inclusión $V_h \subset H^1_0(\Omega) \cap C^\circ(\Omega)$. □

De (5.2.3) y (5.2.15), se observa que la forma bilineal aproximada $a_h(.,.)$ es uniformemente V_h-elíptica:

$$a_h(v_h,v_h) \geq (1-\nu)||v_h||^2_h \qquad \forall v_h \varepsilon V_h \qquad (5.2.16)$$

donde $(1-\nu) > 0$. Por tanto, el problema discreto (5.2.4) posee *solución única* $u_h \varepsilon V_h$, cuando V_h es construido en términos del elemento rectangular de Adini.

Consistencia del Error Estimado. Estimación del Error $\Big(\sum_{K\varepsilon\tau_h} |u-u_h|^2_{2,K}\Big)^{1/2}$

En seguida damos una estimación abstracta del error para métodos no conformes, la cual está dada por el segundo Lema de Strang.

Teorema 5.2.3. (Segundo Lema de Strang). Considere una familia de problemas discretos para los cuales la forma bilineal aproximada asociada es uniformemente V_h-elíptica.

Entonces existe una constante C, independiente del subespacio V_h, tal que

$$||u-u_h||_h \leq C \{\inf_{v_h \varepsilon V_h} ||u-v_h||_h + \sup_{w_h \varepsilon V_h} \frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{||w_h||_h}\}. \quad (5.2.17)$$

<u>Demostración</u>. Sea v_h un elemento arbitrario en el espacio V_h. Entonces en vista de la uniforme V_h-elipticidad y continudad de la forma bilineal a_h (vease (5.2.16),(5.2.6)) y la definición (5.2.4) del problema discreto, podemos escribir

$$\tilde{\alpha}||u-v_h||_h^2 \leq a_h(u_h-v_h,\ u_h-v_h)$$

$$= a_h(u_h,u_h-v_h)-a_h(v_h,u_h-v_h)$$

$$= a_h(u-v_h,u_h-v_h)+\{f(u_h-v_h)-a_h(u,u_h-v_h)\}$$

de donde se tiene

$$\tilde{\alpha}||u-v_h|| \leq \tilde{M}||u-v_h||_h + \frac{|f(u_h-v_h)-a_h(u,u_h-v_h)|}{||u_h-v_h||_h} \quad ,u_h-v_h \varepsilon V_h$$

$$\leq \tilde{M}||u-v_h||_h + \sup_{w_h \varepsilon V_h} \frac{|f(w_h)-a_h(u-w_h)|}{||w_h||_h}$$

De aquí la desigualdad (5.2.17) se sigue al aplicar la desigualdad del triángulo

$$||u-u_h||_h \leq ||u-v_h||_h + ||u_h-v_h||_h \qquad \square$$

Posteriormente, supondremos que la solución $u \varepsilon H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ (la cual se cumple si $q \varepsilon L^2(\Omega)$ y $\overline{\Omega}$ es un polígono convexo). Ahora, tomando en cuenta que cualquier familia de rectángulos de Adini es afín, en el siguiente teorema estimamos el error de interpolación $|v-\pi_K v|_{m,K}$. Las notaciones h_K y ρ_K representan los parámetros geométricos usuales (cf. (4.5.33)).

Teorema 5.2.4. Existe una constante C tal que, para cualquier familia regular de triangulaciones,

$$\forall v \varepsilon H^{\ell}(\Omega),\ |v-\pi_K v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{\ell}}{\rho_k^{m}} |v|_{\ell,K},\ 0 \leq m \leq \ell,\ \ell = 2,3$$

Demostración. (cf. Ciarlet [1978]). $\square$

Entonces, puesto que $\ell = 3$ y $m = 2$,

$$\inf_{v_h \varepsilon V_h} ||u-v_h||_h \leq \Big(\sum_{K\varepsilon\tau_h} |u-\pi_K u|^2_{2,K}\Big)^{1/2} \leq C\, h |u|_{3,\Omega} \tag{5.2.18}$$

Ahora nos falta estimar el segundo término del lado derecho de la desigualdad dado por (5.2.17), i.e., la consistencia del error estimado. De la diferencia

$$\left.\begin{aligned} D_h(u,\omega_h) &= a_h(u,\omega_h) - f(\omega_h) \\ &= D \sum_{K\varepsilon\tau_h} \int_K \{\Delta u \Delta\omega_h + (1-\nu)(2u_{,12}\omega_{h,12} - u_{,11}\omega_{h,22} - u_{,22}\omega_{h,11}\} dK \\ &\quad - \int_\Omega q.\omega_h\, d\Omega \end{aligned}\right\} \tag{5.2.19}$$

para toda $u \varepsilon H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $\omega_h \varepsilon V_h$, primeramente demostramos que el término $f(\omega_h) = \int_\Omega q.\omega_h\, d\Omega$ puede ser reescrito en la forma

$$f(\omega_h) = - D \int_\Omega \nabla(\Delta u) . \nabla\omega_h\ d\Omega. \quad \forall \omega_h \varepsilon V_h. \tag{5.2.20}$$

Sea $\omega_h \varepsilon V_h$ dada, y sea (ω_h^k) una sucesión de funciones ω_h^k $\varepsilon D(\Omega)$ tal que

$\lim\limits_{k\to\infty} ||\omega_h^k - \omega_h||_{1,\Omega} = 0$ (recordemos que $\omega_h \varepsilon V_h \subset H_0^1(\Omega)$).

Haciendo uso de las formulas de Green (3.5.14) obtenemos, para todo entero k,

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \omega_h^k \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h^k \, d\Omega$$

$$\int_\Omega \{2u,_{12}\omega_{h,12}^k - u,_{11}\omega_{h,22}^k - u,_{22}\omega_{h,11}^k\} \, d\Omega = 0$$

ya que $\omega_{h,n}^k = \omega_{h,t}^k = 0$ a lo largo de $\partial\Omega$. Entonces de (5.2.19),

$$\int_\Omega q.\omega_h^k \, d\Omega = -D\int_\Omega \nabla(\Delta u).\ \nabla\omega_h^k \, d\Omega.$$

Por tanto

$$\int_\Omega q.\omega_h \, d\Omega = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega q.\omega_h^k \, d\Omega = -D\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h^k \, d\Omega$$

$$= -D\int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h \, d\Omega$$

y así queda demostrada la igualdad (5.2.20). Por otro lado, utilizando las mismas fórmulas de Green, obtenemos que

$\forall\ K\varepsilon\tau_h,\ \forall\omega_h\varepsilon V_h,$

$$D\int_K \{\Delta u\Delta\omega_h + (1-\nu)(2u,_{12}\omega_{h,12} - u,_{11}\omega_{h,22} - u,_{22}\omega_{h,11})\} \, dK =$$

$$D\,\{-\int_K \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h \, dK + \int_{\partial K}\Delta u\omega_{h,nK} \, ds + (1-\nu)\int_{\partial K}\{u,_{ttK}\omega_{h,nK} + u,_{ntK}\omega_{h,tK}\}ds\}$$

Cuando las expresiones anteriores son sumadas, éstas forman la forma bilineal aproximada (5.2.3). De la identidad

$$\sum_{K\varepsilon\tau_h} \{ - \int_K \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h \, dK\} = - \int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h \, d\Omega = f(\omega_h),$$

y usando la inclusión $V_h \subset H^1(\Omega)$, así como la igualdad (5.2.20), encontramos que

$$\sum_{K\varepsilon\tau_h} \int_{\partial K} u,_{nt\,K} \, (\omega_{h|K}),_{tK} \, ds = 0$$

Para probar esta relación, consideremos separadamente los casos donde $K' \subset \bar{\Omega}$ es un lado común a dos rectángulos adyacentes K_1 y K_2, y donde $K' \subset \partial K$ es una porsión de la frontera $\partial\Omega$. En el primero la integral se cancela porque $u\varepsilon\ H^3(\Omega)$ y $\omega_h\ \varepsilon C^\circ(\bar{\Omega})$, y en el segundo caso porque $\omega_h = 0$ a lo largo de $\partial\Omega$.

Resumiendo, encontramos que

$$\begin{cases} \forall\omega_h\varepsilon V_h, \; D_h(u,\omega_h) = a_h(u,\omega_h) - f(\omega_h) \\ \\ = D \sum_{K\varepsilon\tau_h} \{-\int_K \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h dK + \int_{\partial K} \Delta u \omega_h,_{nK} \; ds \\ + (1-\nu)\int_{\partial K} \{ - u,_{ttK}\omega_{h,K} + u,_{ntK}\omega_{h,tK}\} \, ds + \int_K \nabla(\Delta u).\nabla\omega_h \, dK \} \qquad (5.2.21) \\ = D\sum_{K\varepsilon\tau_h}\int_{\partial K}\{ (\Delta u-(1-\nu)(u,_{ttK})),_{nK} (\omega_h|_K)\} \, ds \end{cases}$$

i.e., hemos obtenido una descomposición de la expresión $D_h(u,\omega_h)$ como una suma

$$D_h(u,\omega_h) = \sum_{K\varepsilon\tau_h} D_K(u|_K, \omega_h|_K)$$

donde cada mapeo $D_K(.,.)$ aparece como una forma bilineal sobre el espacio $H^3(K) \times P_K$.

Entonces resta por obtener una estimación apropiada de la diferencia $D_h(u,\omega_h)$, la cual se trata en el teorema siguiente.

Teorema 5.2.5. Suponga que la solución u del problema de la placa está en el espacio $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Entonces, para cualquier familia regular de triangulaciones, existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u-u_h\|_h \le \left(\sum_{K\in\tau_h} |u-u_h|^2_{2,K} \right)^{1/2} \le Ch|u|_{3,\Omega} \qquad (5.2.22)$$

Demostración. Ciarlet [1978] estimó el segundo término en la estimación del error abstracto (5.2.17) por

$$|a_h(u,\omega_h)-f(\omega_h)| \le \sum_{K\in\tau_h} |D_K(u,\omega_h)| \le Ch|u|_{3,\Omega}\|\omega_h\|_h$$

y tomando en cuenta el resultado de (5.2.18), se tiene la validez de (5.2.22) $\square$

Así, concluimos que al utilizar el elemento finito rectángulo de Adini en la aproximación del problema de flexión de placas, obtenemos una *velocidad de convergencia de uno (1).*

CAPITULO 6
RESOLUCION NUMERICA

Lo que se pretende en este capítulo es comparar los resultados que se obtienen con las series dadas por Young [1939], y los que se obtienen utilizando el rectángulo de Adini para el caso de una placa empotrada con una carga concentrada en el centro; para éste último se elaboró un programa de computadora el cual se anexa al final de este capítulo. Además, los obtenidos con el mismo rectángulo de Adini y con el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, para una placa empotrada con carga uniformemente distribuida.

La solución aproximada de la placa presentada por Young [1939], está dada como una superposición de tres series de funciones hiperbólicas, la primera de la cual corresponde al desplazamiento de una placa simplemente apoyada con una carga concentrada al centro, y las otras dos corresponden a momentos correctivos aplicados en los bordes de tal forma de tratar de anular los giros en ellos, por tanto el desplazamiento está dado por

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \tag{6.1}$$

donde

$$\omega_1 = \frac{Pa^2}{2\Pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\Pi x_1}{a} \left[\left\{ \tan h\, \alpha_m - \frac{\alpha}{\cos h^2 \alpha_m} \right\} \cos h \frac{m\Pi x_2}{a} \right.$$

$$- \operatorname{sen} h \frac{m\Pi x_2}{a} - \tan h\, \alpha_m \frac{m\Pi x_2}{a} \operatorname{sen} h \frac{m\Pi x_2}{a}$$

$$\left. + \frac{m\Pi x_2}{a} \cos h \frac{m\Pi x_2}{a} \right] \tag{6.2}$$

$$\omega_2 = -\frac{a^2}{2\Pi^2 D}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty} A_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \cos h\, \alpha_m} \cos\frac{m\Pi x_1}{a}\left[\frac{m\Pi x_2}{a} \operatorname{sen} h\, \frac{m\Pi x_2}{a} - \alpha_m \tan h\, \alpha_m \cos h\, \frac{m\Pi x_2}{a}\right] \quad (6.3)$$

$$\omega_3 = -\frac{b^2}{2\Pi^2 D}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty} B_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \cos^2 \beta_m} \cos\frac{m\Pi x_2}{b}\left[\frac{m\Pi x_1}{b} \operatorname{sen} h\, \frac{m\Pi x_1}{b} - \beta_m \tan h\, \beta_m \cos h\, \frac{m\Pi x_1}{b}\right] \quad (6.4)$$

aquí,

$$\alpha_m = \frac{m\Pi b}{2a} \quad ; \quad \beta_m = \frac{m\Pi a}{2b}$$

P es la carga concentrada, a y b son las longitudes de la placa en las dirección x_1 y en la dirección x_2, respectivamente, como se muestra en la figura 6.1.

Los momentos correctivos aplicados en $x_2=\pm b/2$, $x_1=\pm a/2$ están dados por

$$\left(M_{x_2}\right)_{x_2=\pm b/2} = \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \cos\frac{m\Pi x_1}{a} \quad (6.5)$$

$$\left(M_{x_1}\right)_{x_1=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} B_m \cos\frac{m\Pi x_2}{b}\,. \quad (6.6)$$

Los coeficientes A_m, B_m se determinan de la condición de que las pendientes en las fronteras son cero, planteándose los sistemas de ecuaciones siguientes

$$A_k \frac{1}{k}\left[\tan h\, \alpha_k + \frac{\alpha_k}{\cos h^2\, \alpha_k}\right] + \frac{8ak}{\Pi b}\sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{B_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{k^2}{m^2}\right)^2}$$

$$= - P \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\Pi k^2} \frac{\alpha_k \tan h \alpha_k}{\cos h \alpha_k} \tag{6.7}$$

$$B_k \frac{1}{k} \left[\tan h \beta_k + \frac{\beta_k}{\cos h^2 \beta_k} \right] + \frac{8bk}{\Pi a} \sum_{m=1,3,5..} \frac{A_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{k^2} \right)^2}$$

$$= - P \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\Pi k^2} \frac{\beta_k \tan h \beta_k}{\cos h \beta_k} \tag{6.8}$$

Al evaluar estas series se obtiene un sistema de ecuaciones algebráicas y la solución de éste da los coeficientes A_m, B_m que corrigen la solución dada por ω_1, es de esperarse que la exactitud de esta superposición depende del número de coeficientes encontrados, en Young [1939] se dan siete coeficientes que al ser utilizados para evaluar las series ω_2, ω_3 y al utilizar la ecuación (6.1), se obtenían campos de desplazamientos y giros que no correspondían a las condiciones de frontera de empotramiento, por lo que fué necesario encontrar más coeficientes para corregir esta solución; los resultados y el programa de computadoras aparecen con todo detalle en Reyes [1978].

El conjunto de grados de libertad Σ_K del rectángulo de Adini está dado por (5.2.10), y desarrollando el espacio de polinomios P_K (5.2.7) se puede expresar como:

$$\left. \begin{aligned} P_K = {} & \gamma_{00} + \gamma_{10}x_1 + \gamma_{01}x_2 + \gamma_{20}x_1^2 + \gamma_{11}x_1x_2 + \gamma_{02}x_2^2 + \\ & \gamma_{30}x_1^3 + \gamma_{21}x_1^2x_2 + \gamma_{12}x_1x_2^2 + \gamma_{03}x_2^3 + \gamma_{31}x_1^3x_2 + \gamma_{13}x_1x_2^3 \end{aligned} \right\} \tag{6.9}$$

Como el conjunto Σ_K dado por (5.2.10) es un conjunto P_K-unisolvente en el sentido que se dió en la sección 4.2, podemos deducir de las funciones definidas por (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) y escribir para el caso del cuadrilátero $\hat{K} = [-1, +1]$ lo siguiente:

$$\forall \hat{p} \in P_{\hat{K}}, \ \hat{p} = \sum_{i=1}^{4} \hat{p}(\hat{a}_i)\, \hat{P}_i + \sum_{\substack{|j-i|=1 \\ (\text{mod. } 4)}} D\hat{p}(\hat{a}_i)(\hat{a}_j - \hat{a}_i)\hat{P}_{ij} \tag{6.10}$$

con

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}_1(x) &= \frac{(1+x_1) + (1+x)_2}{4}\left[1 + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right], \\ \hat{P}_{12}(x) &= \frac{(1+x_1)\ (1+x_2)^2\ (1-x_2)}{8}, \\ \hat{P}_{14}(x) &= \frac{(1+x_2)\ (1+x_1)^2\ (1-x_1)}{8}, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

como funciones base del elemento finito.

Para elaborar el programa de computadora, el siguiente paso sería resolver el sistema lineal dado por (4.1.4) que es:

$$\sum_{k=1}^{M} a(\omega_k, \omega_l)\, u_k = f(\omega_l), \qquad 1 \leq l \leq M$$

La matriz de rigidez viene desarrollada de manera formal tanto en Adini y Clough [1961] como en Zienkiewicz [1977], en este último también viene desarrollado el vector de cargas equivalente para el caso de carga uniformemente distribuida, así que el programa funciona para ambos casos de carga, concen trada y uniformemente distribuida.

En la comparación de resultados obtenidos entre la serie de Young y el rectángulo de Adini, se consideraron las siguientes características geométricas, de material y de carga para la placa estudiada.

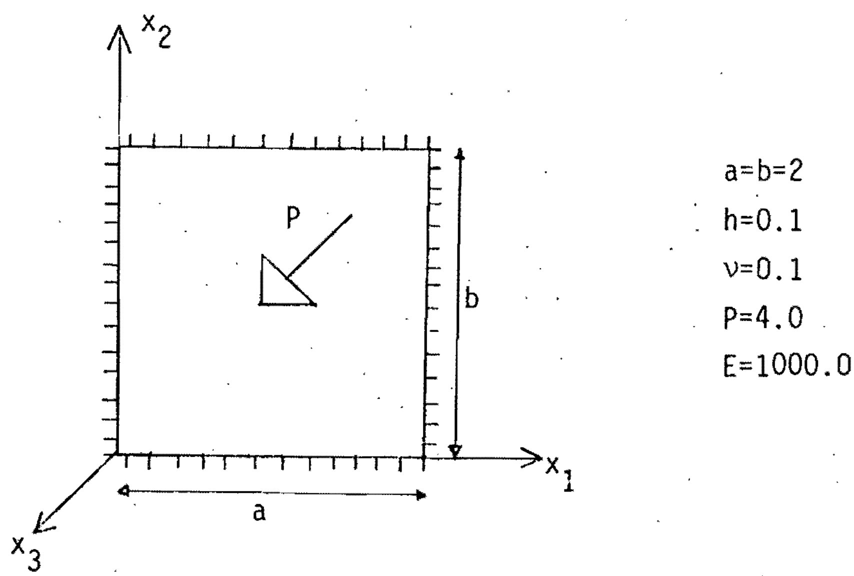


Fig. 6.1 Características de la placa

Las razones por las que se dan las unidades adimencionales es porque el programa de Reyes [1978] fué verificado con tales datos, además que a menudo se lleva a cabo de tal manera. Los resultados que se obtuvieron fueron el desplazamiento vertical, el giro con respecto a x_1 y x_2, momentos flexionantes por unidad de longitud alrededor de x_1 y x_2 y el momento torsionante, pero sólo se presentan (en forma gráfica) la variación de los desplazamientos y ambos giros. En tales gráficas, donde se indica línea continua, significa que coinciden las soluciones de ambos métodos y cuando es línea discontinua es la solución dada por Young [1939], cabe mencionar que debido a la simetría de la placa solamente se analizó una cuarta parte de ella, considerándose las siguientes condiciones de frontera.

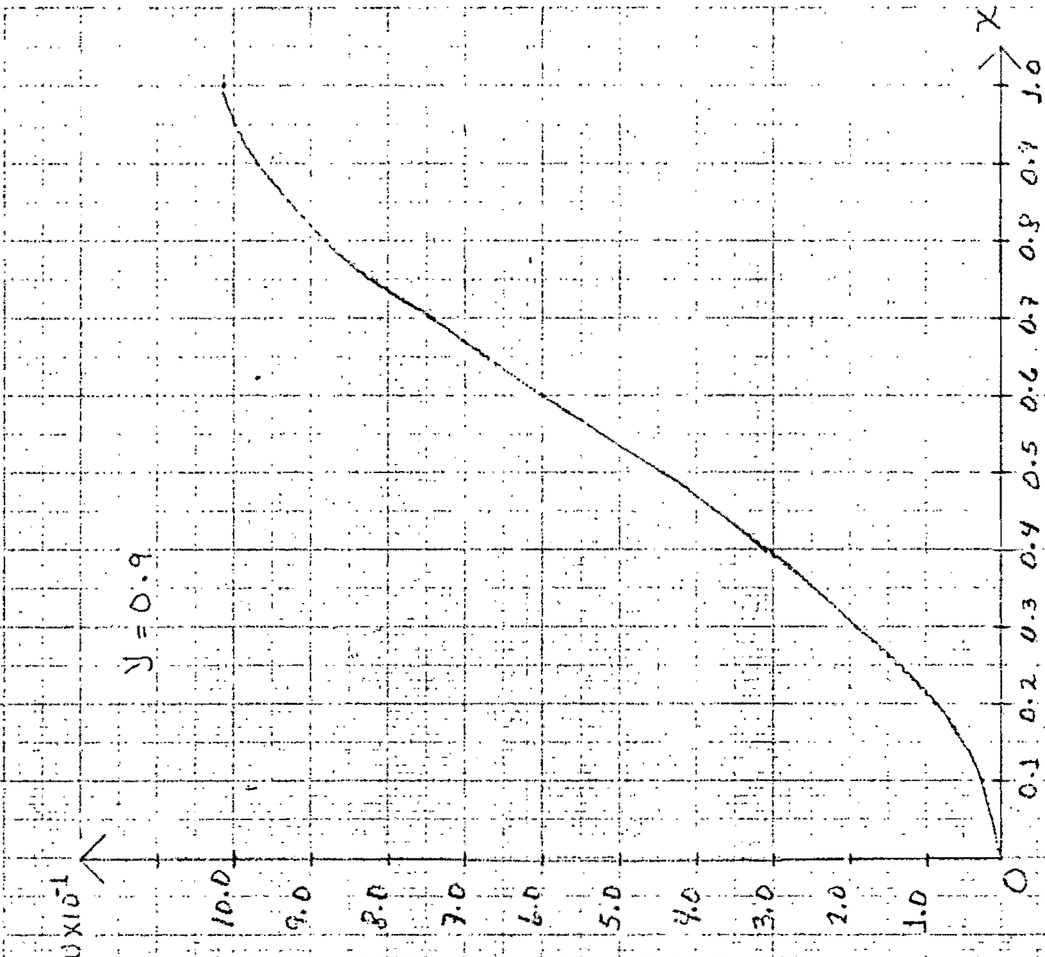
$$\omega_{,i}\Big|_{x_1=0} = \omega_{,1}\Big|_{x_1=a/2} = \omega_{,2}\Big|_{x_2=b/2} = 0$$

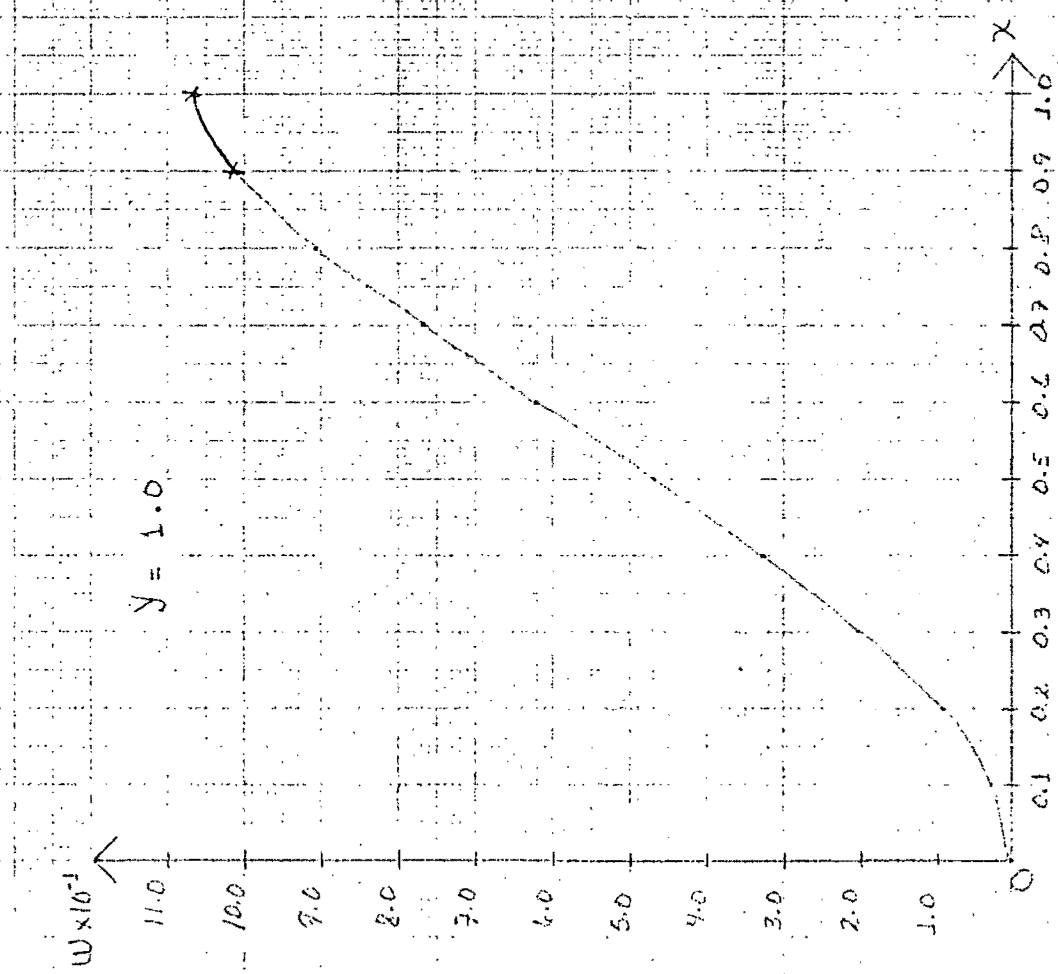
Con los datos antes mencionados se obtienen valores de desplazamientos y giros bastantes grandes, pero como se está trabajando dentro del rango elástico, tales valores serían pequeños para un problema real (como se trata más adelante) al aumentar el valor de E (módulo de Young).

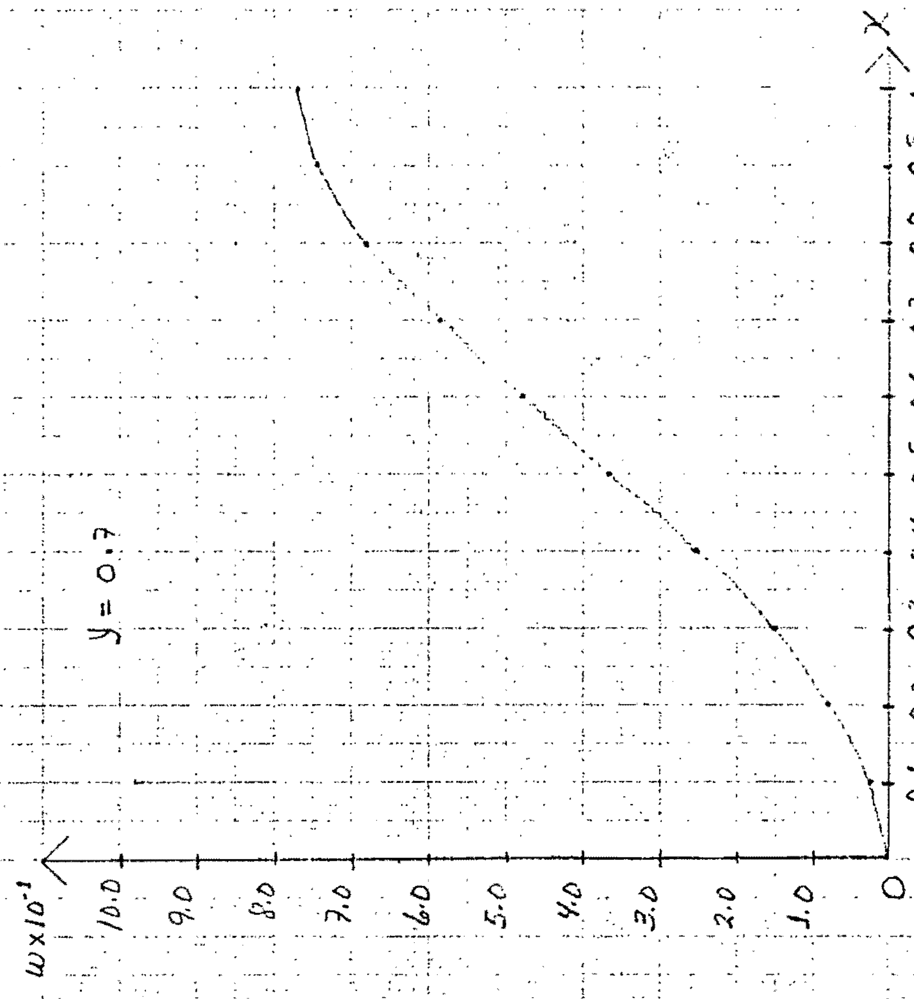
Para confirmar que los resultados son correctos, Timoshenko [1959] propone que la solución exacta para el desplazamiento en el centro de la placa esta dado por

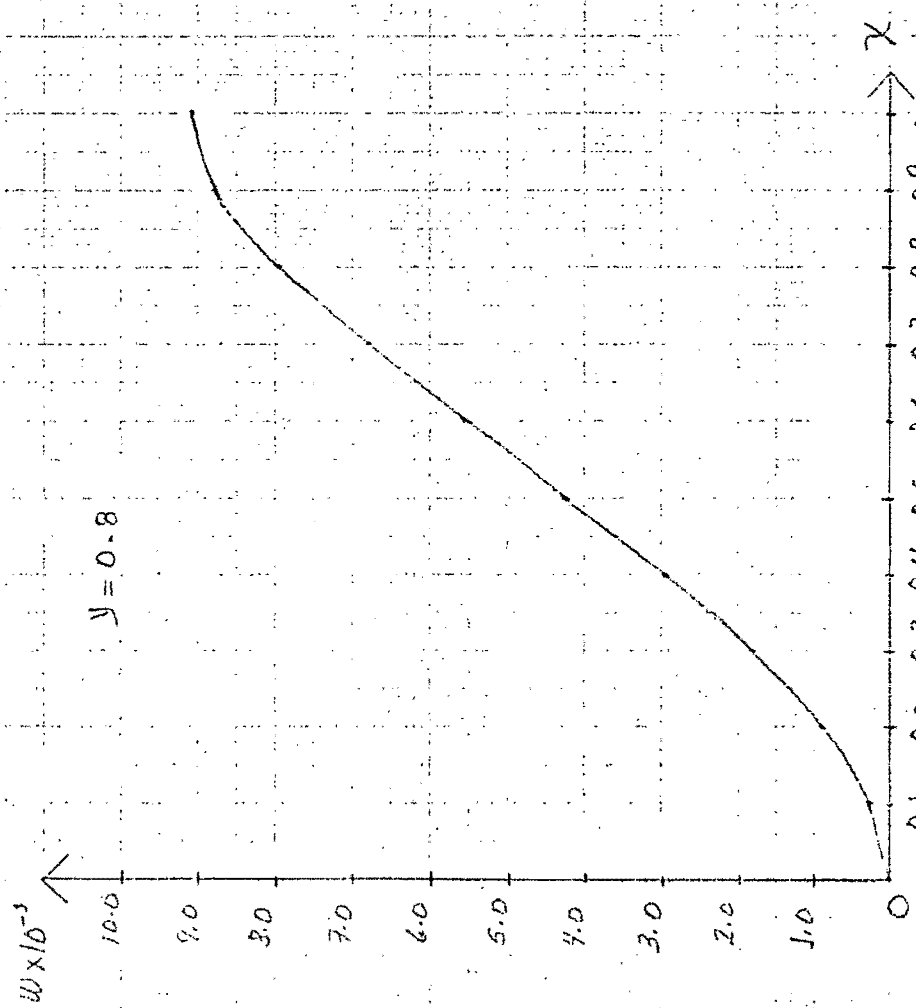
$$\omega = \frac{\beta P a^2}{D} \quad , \quad \beta = 0.0056 \tag{6.12}$$

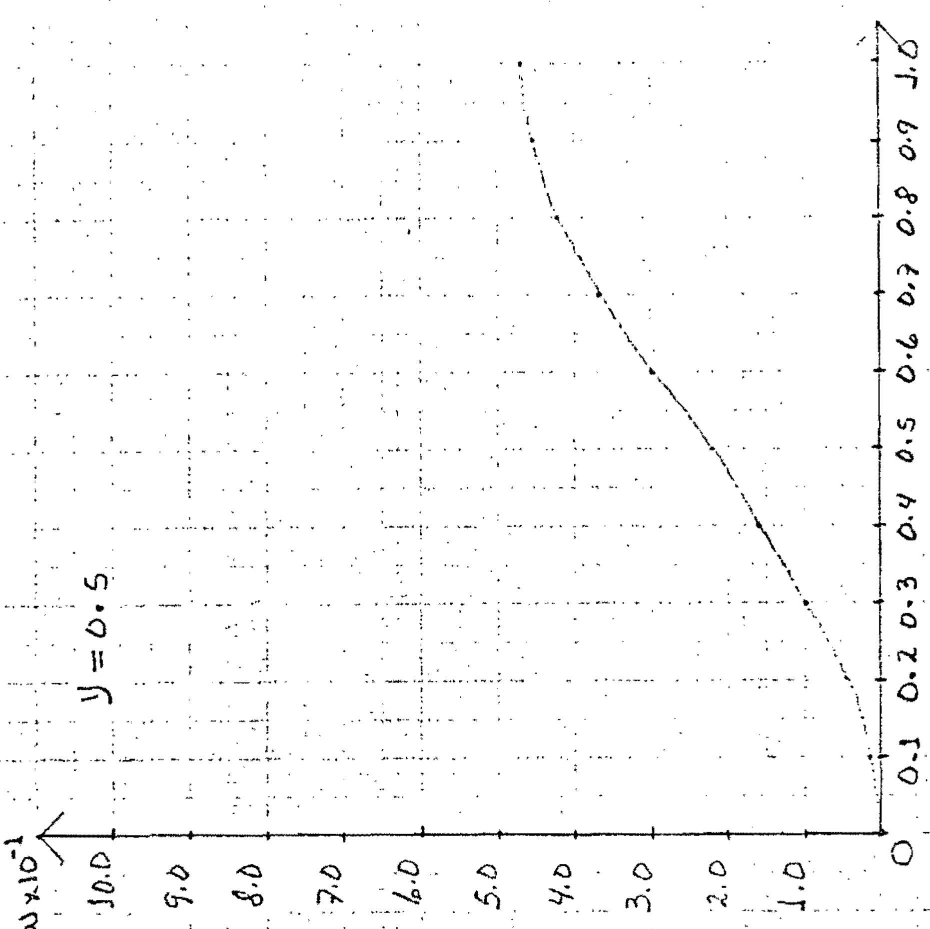
sustituyendo valores en (6.12) se obtiene ω=1.0644, que es casi idéntica a la solución aproximada ω=1.0732.


y = 0.9
ω x 10⁻¹
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x

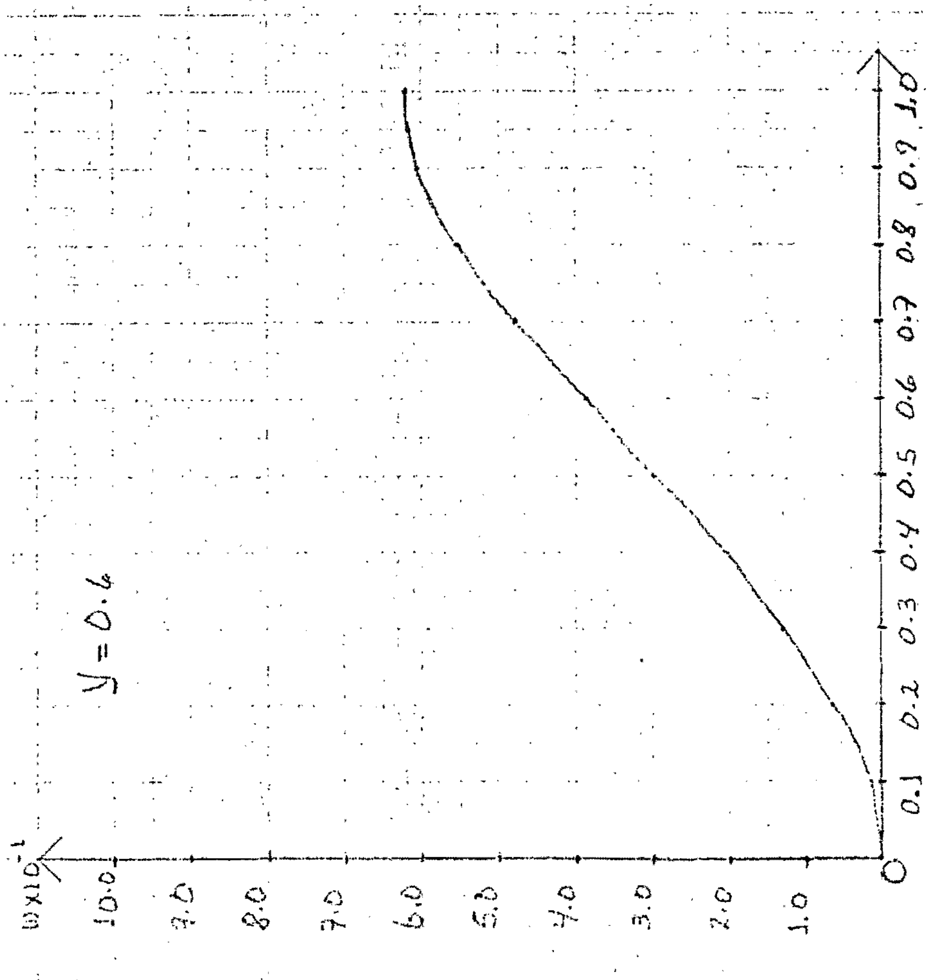

y = 1.0
ω x 10⁻¹
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x


y = 0.7
x
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
O
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

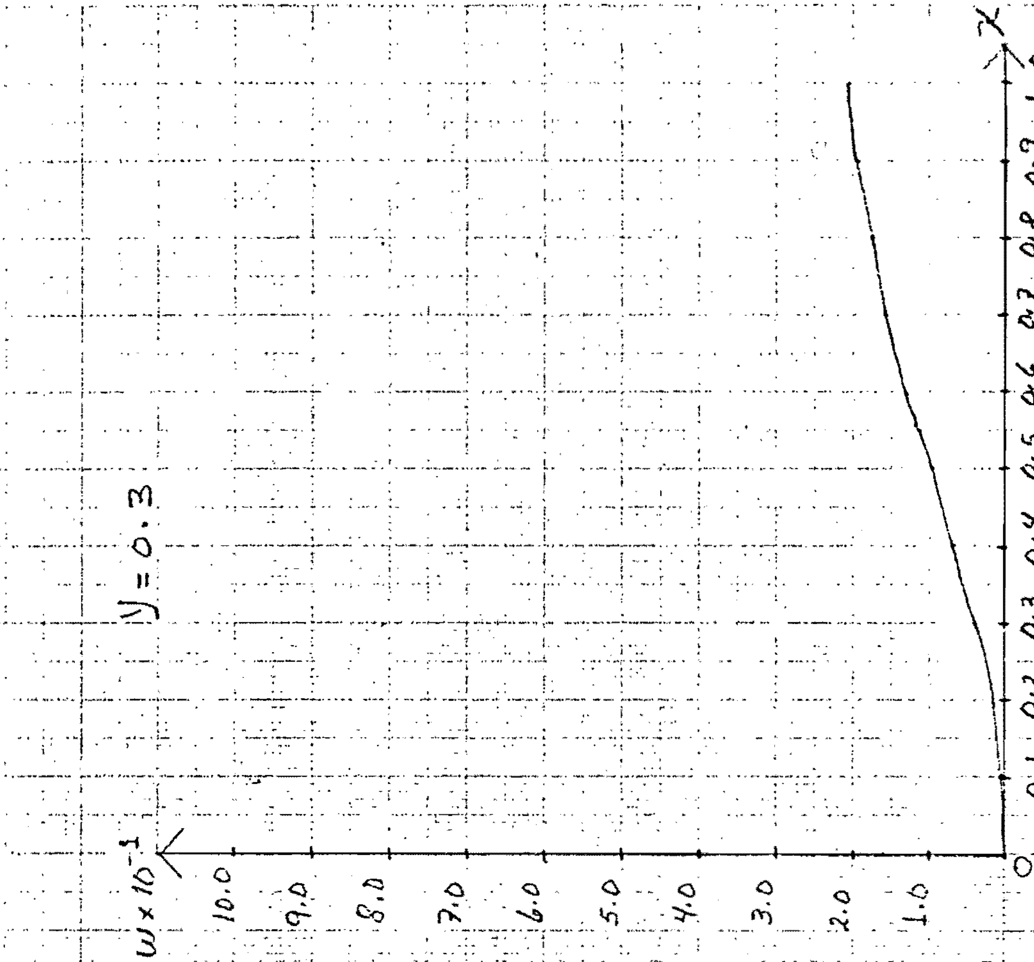

y = 0.8
x
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
O
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0



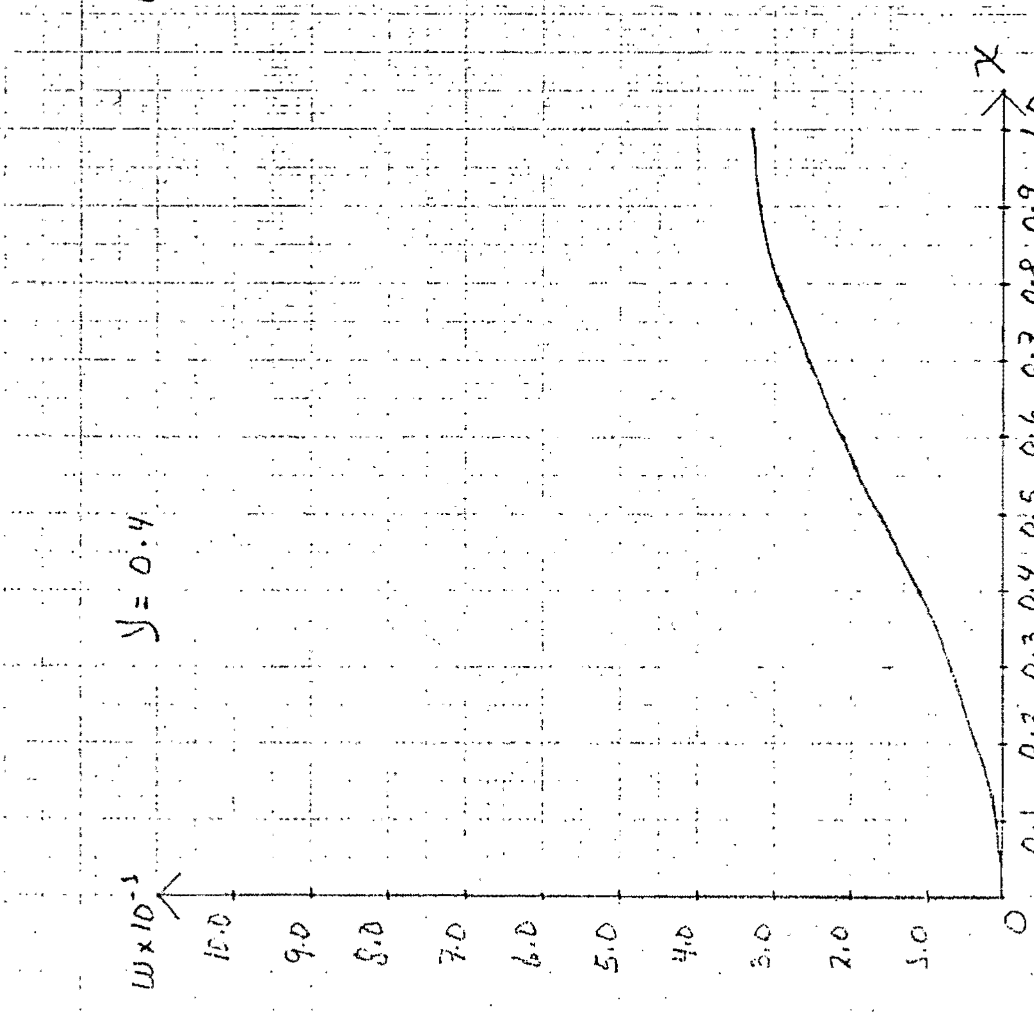
y = 0.5
ω x10⁻¹
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0



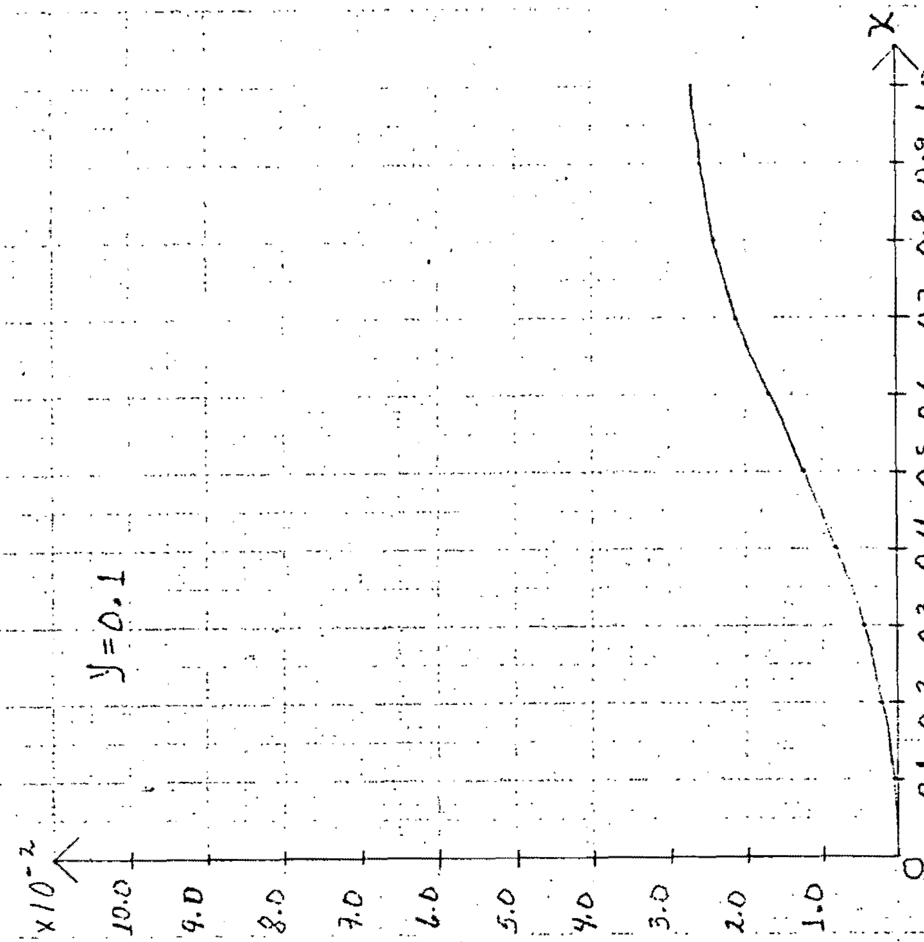
y = 0.6
ω x10⁻¹
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

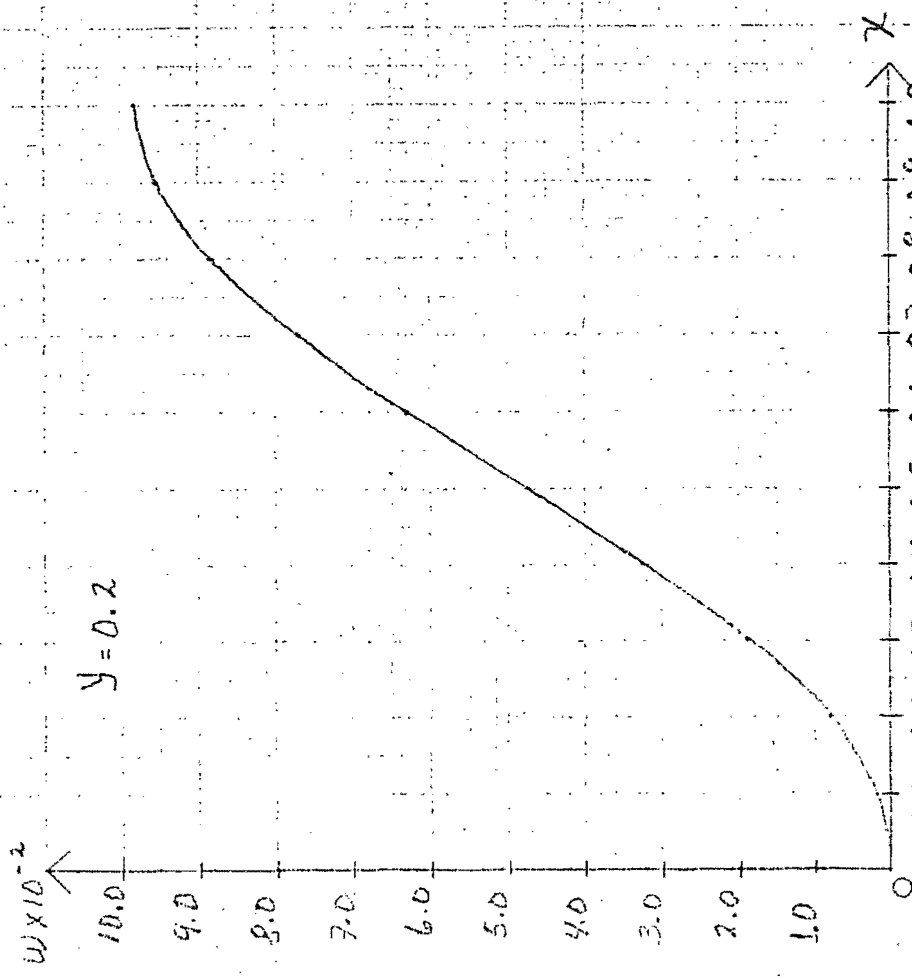


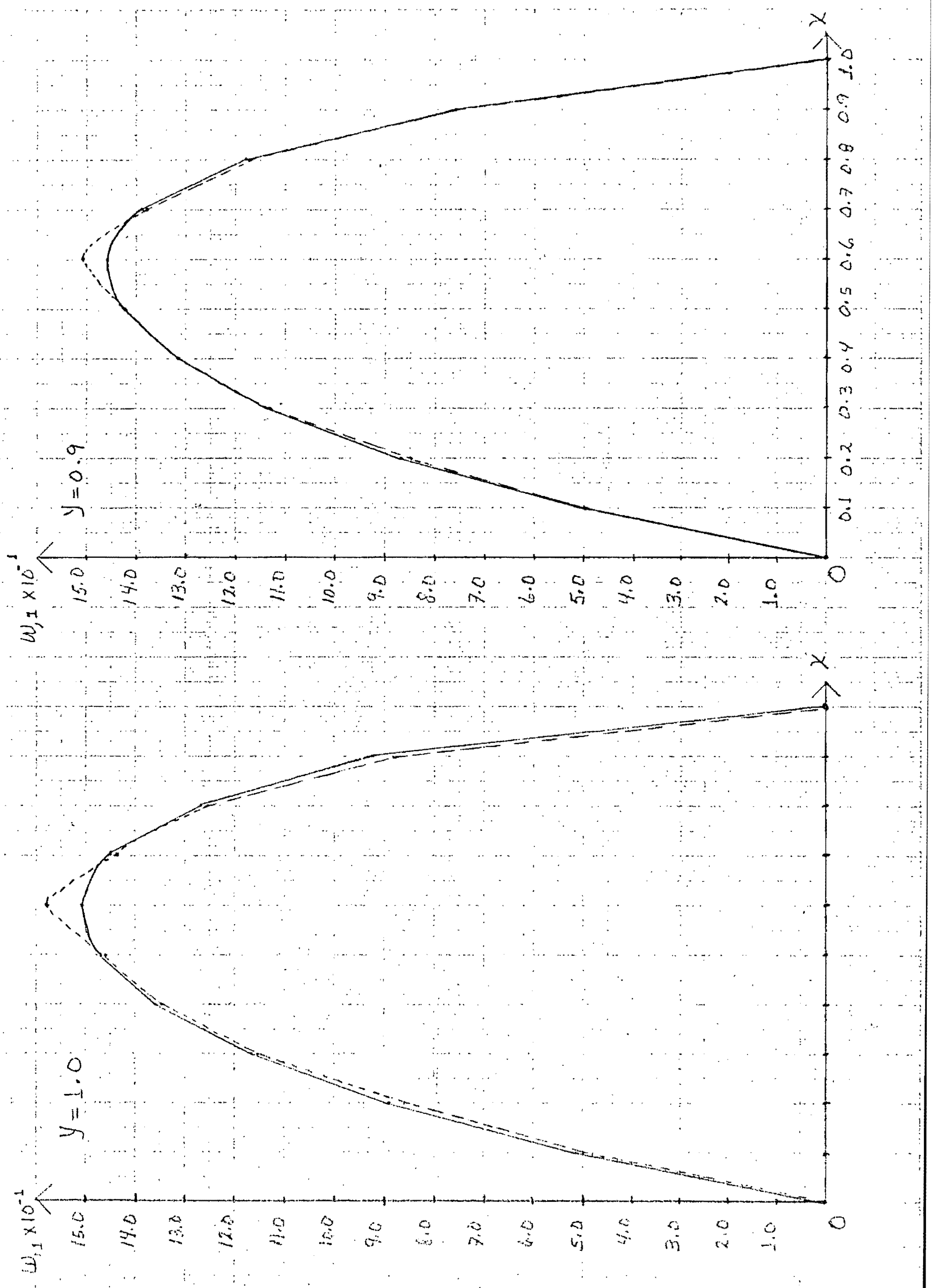
ν = 0.3
ω × 10⁻¹
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
χ



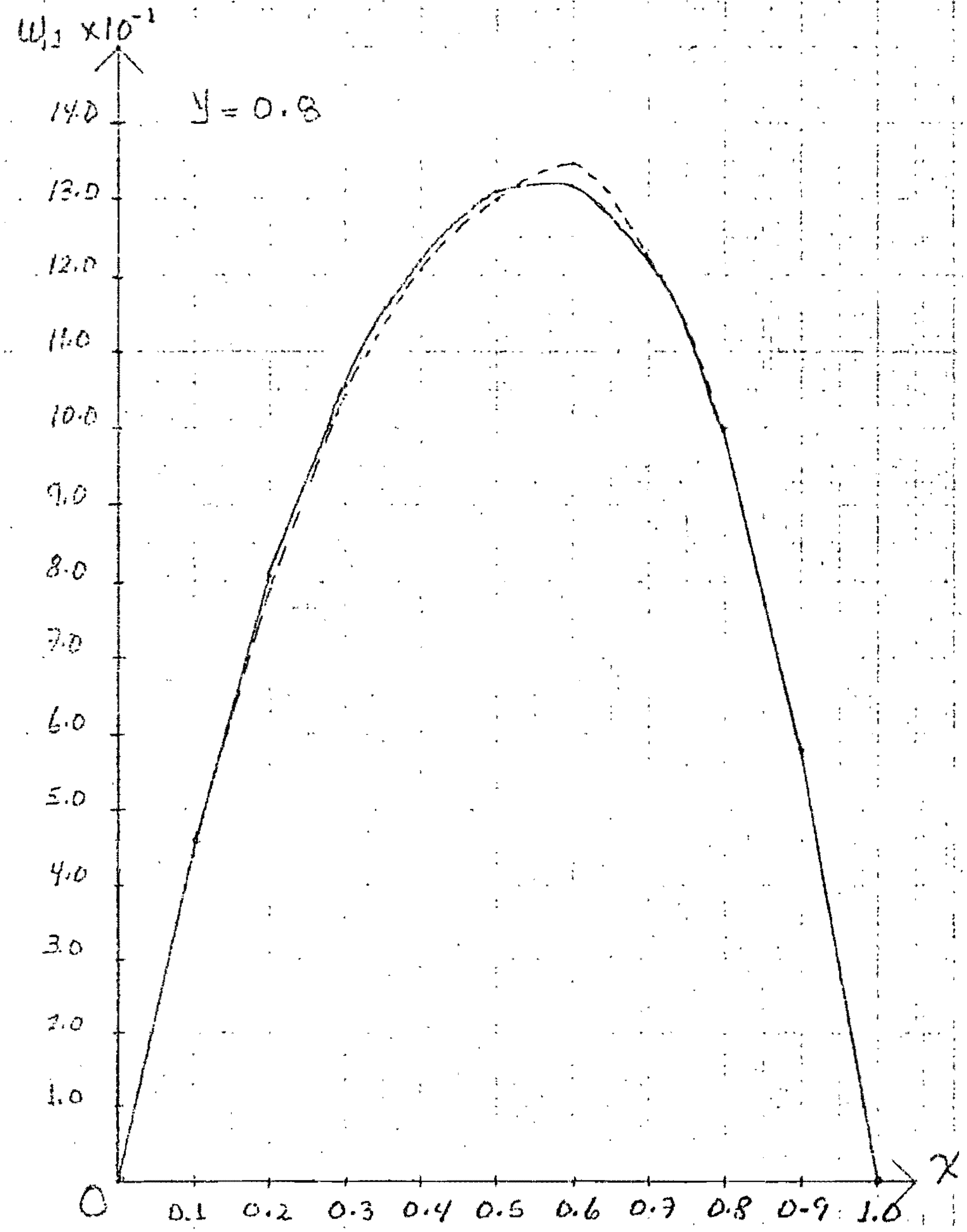
ν = 0.4
ω × 10⁻¹
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
χ


y = 0.1
W x 10^-2
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x

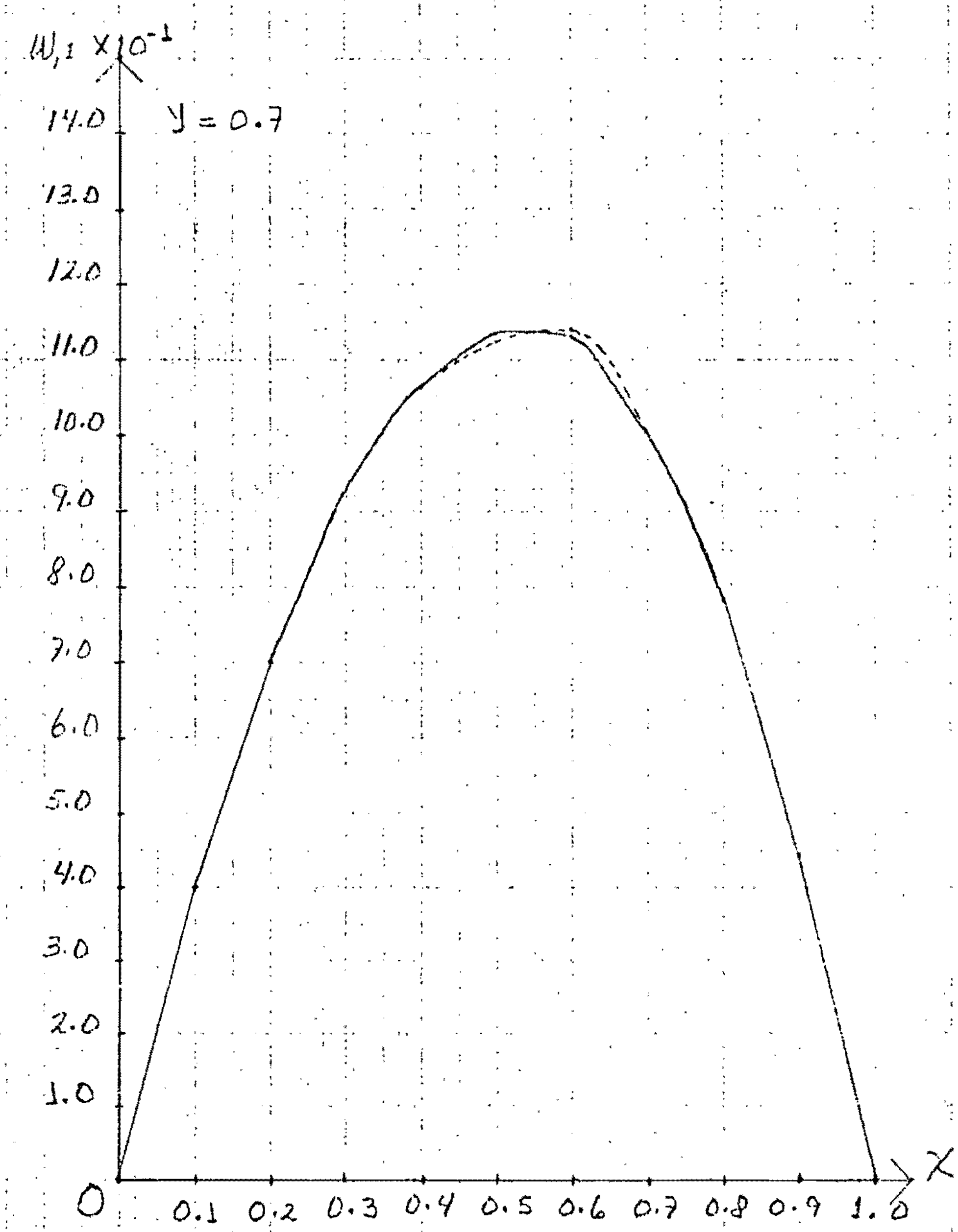

y = 0.2
W x 10^-2
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x



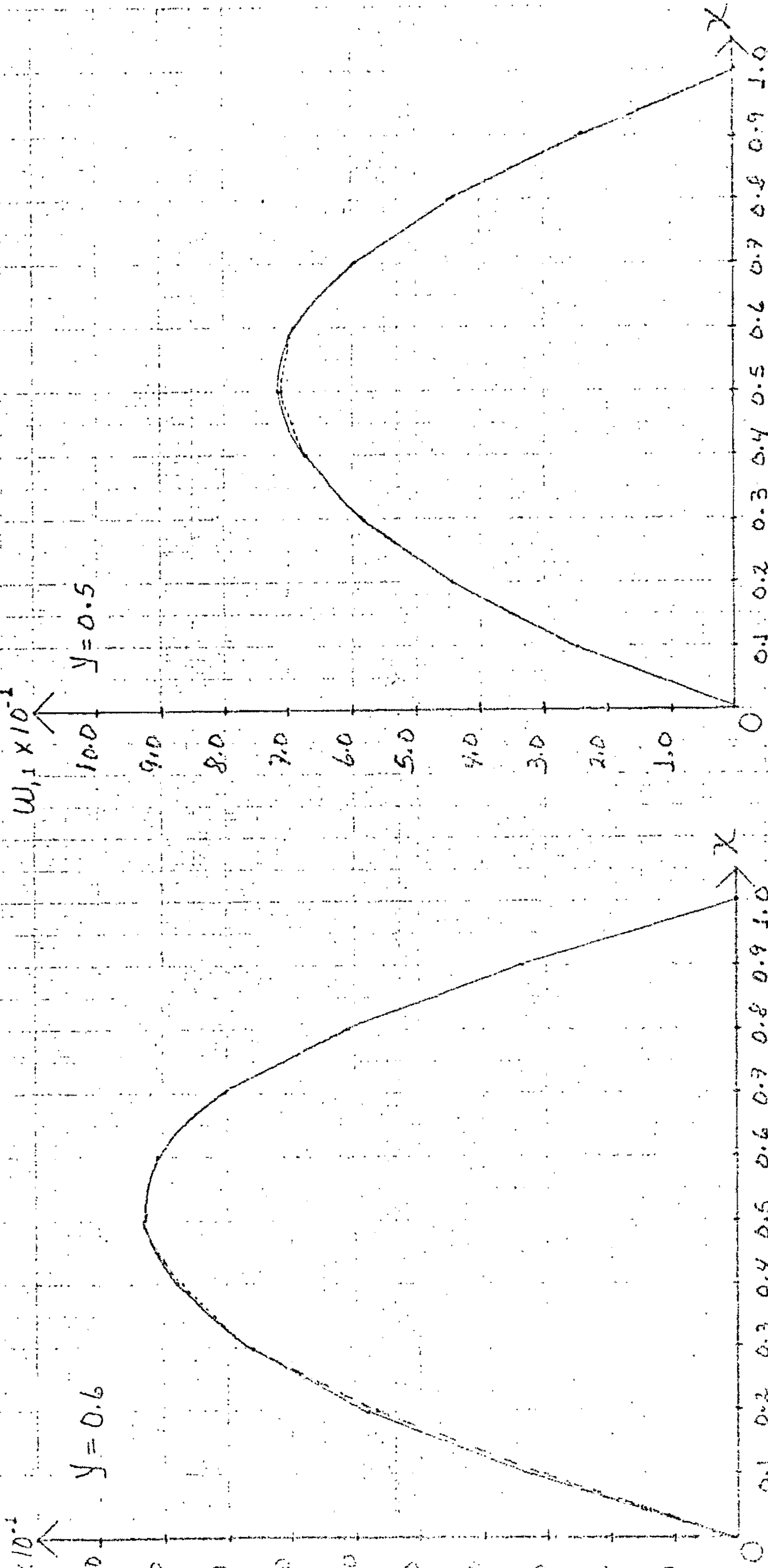
W,1 x10^-1
y = 0.9
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x
W,1 x10^-1
y = 1.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
x

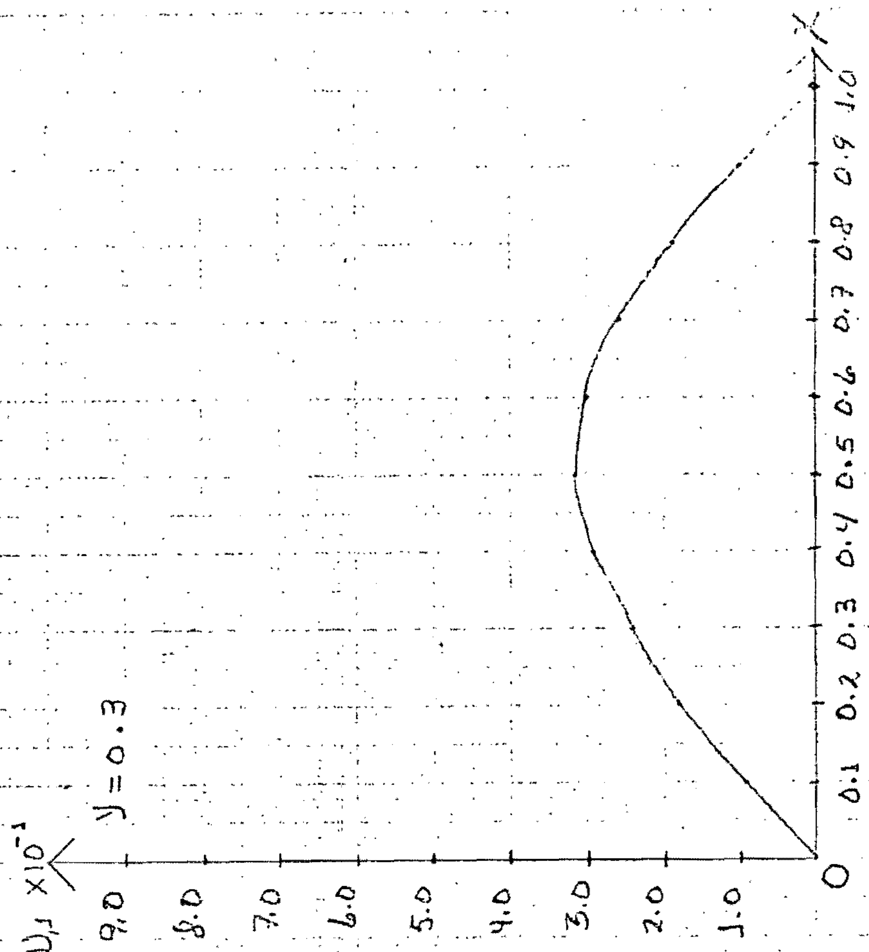


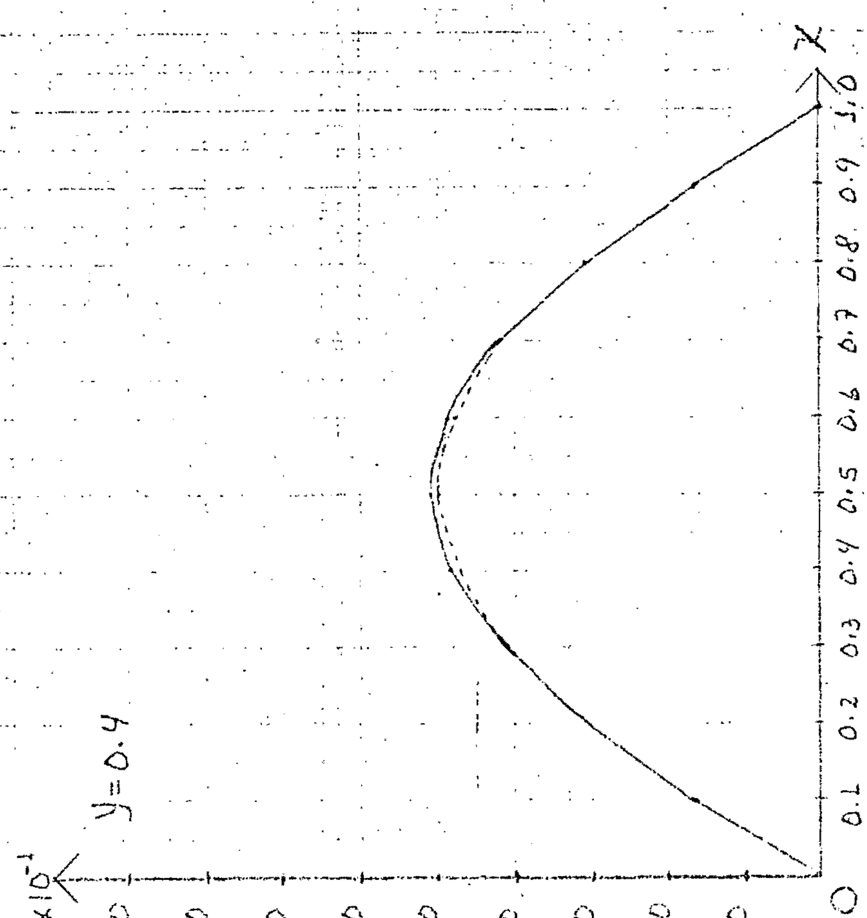
$W_1 \times 10^{-1}$
y = 0.8
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x

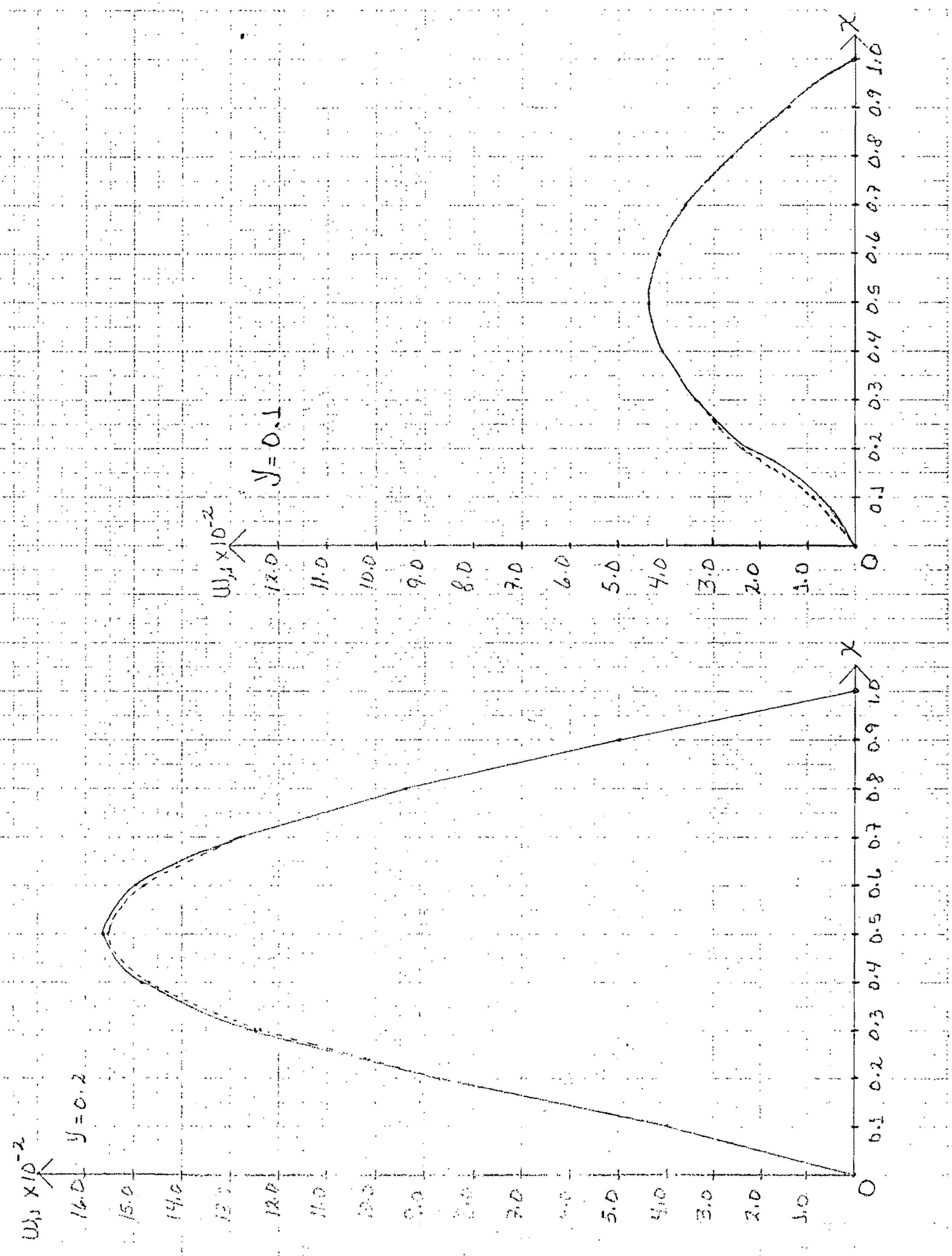


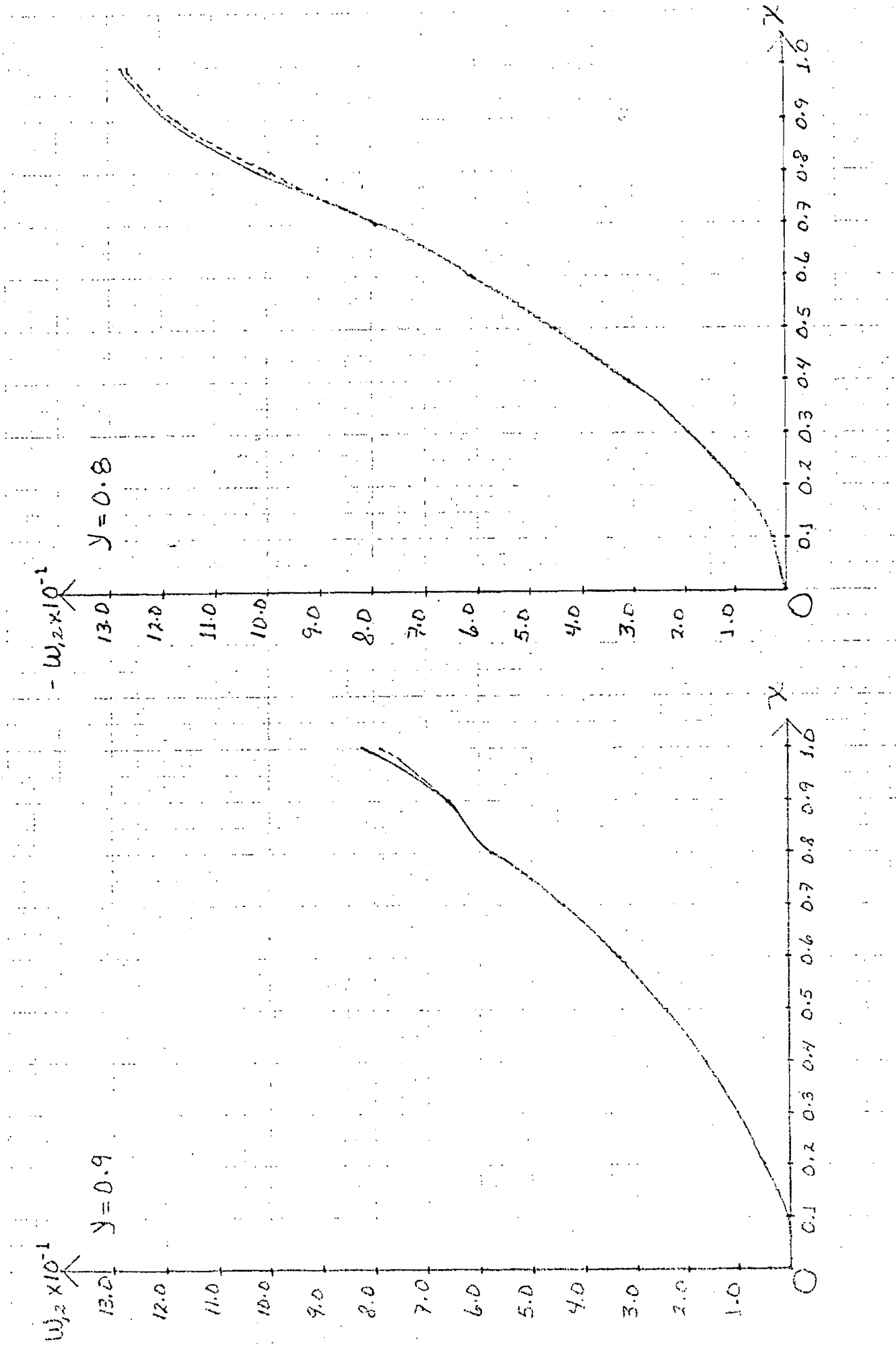
$W_1 \times 10^{-1}$
y = 0.7
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
x


$W_{1,1} \times 10^{-1}$
$y = 0.5$
$y = 0.6$
x
O
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

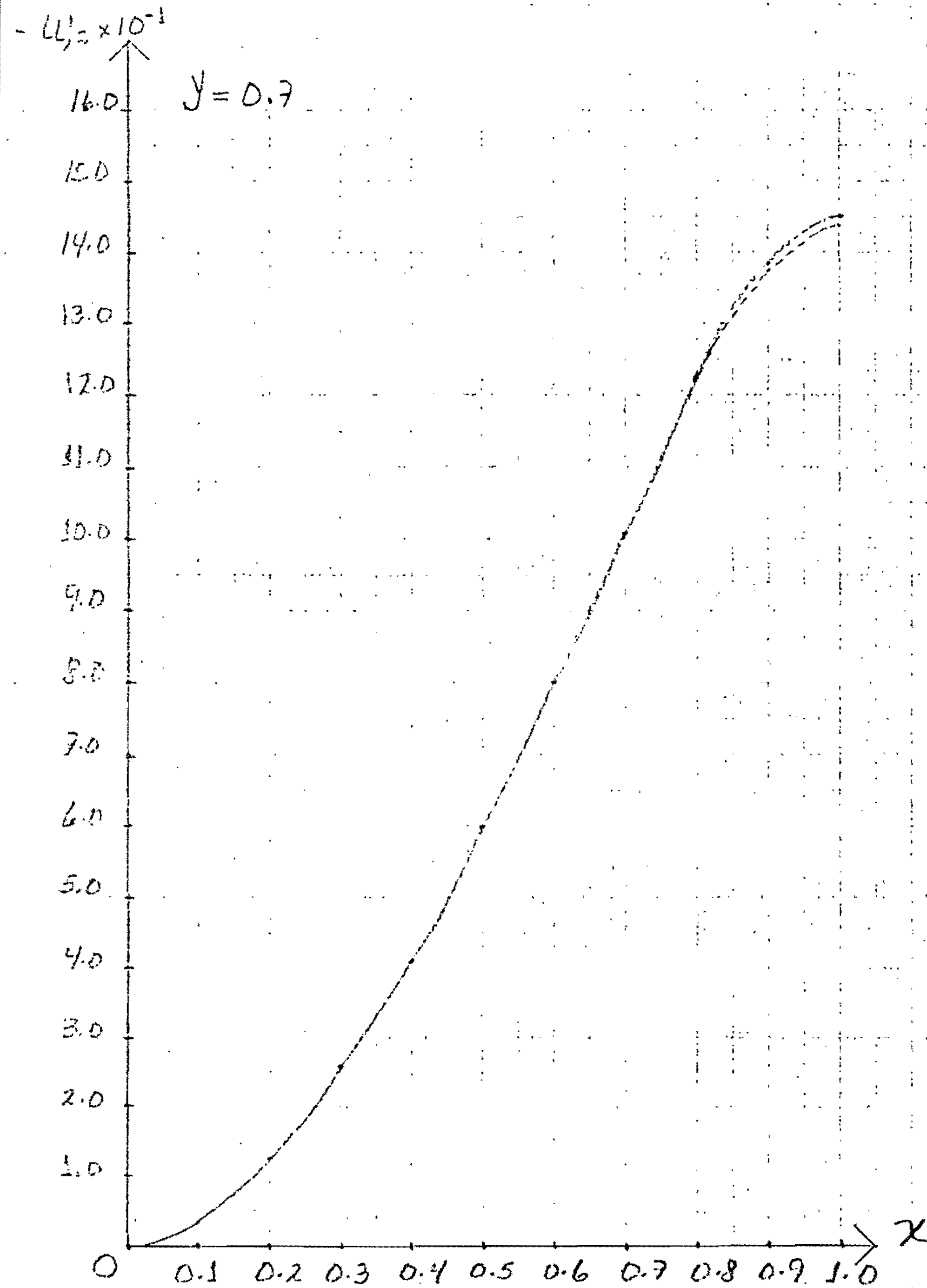

W1 x10-1
y = 0.3
X
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

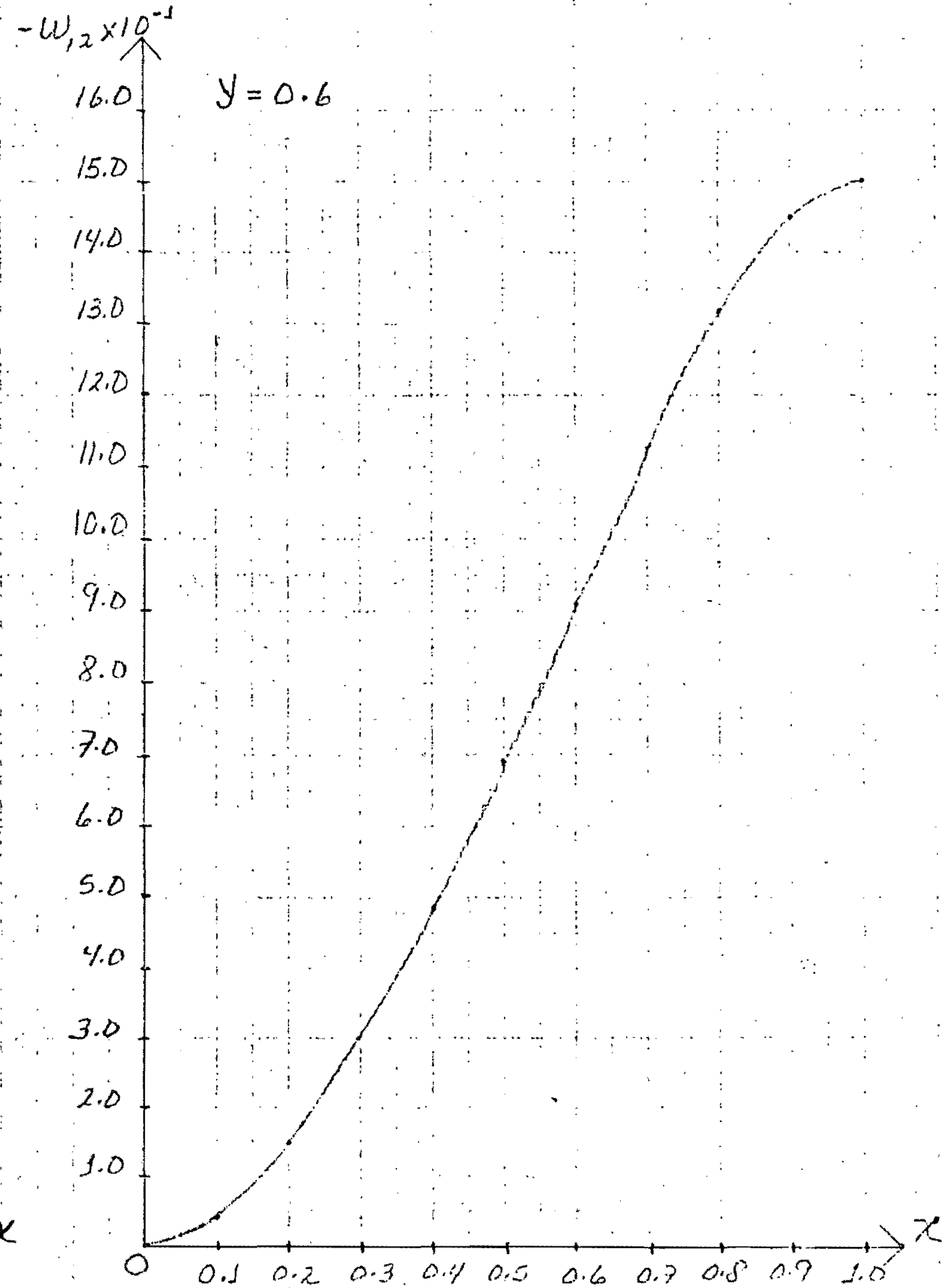

W1 x10-1
y = 0.4
X
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

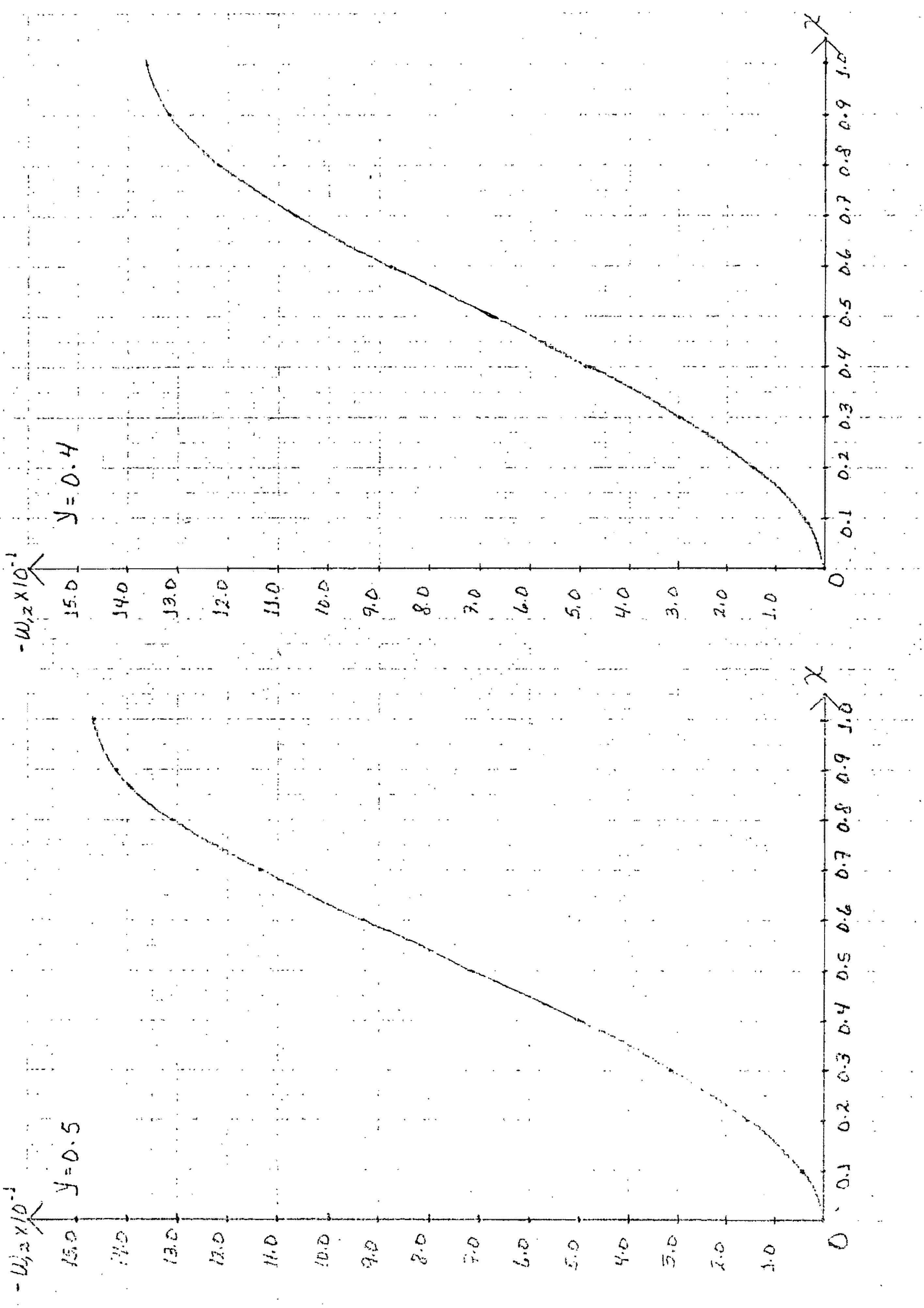

W1,1 x10^-2
y = 0.1
x
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0
O
W1,1 x10^-2
y = 0.2
x
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 7.0 12.0 14.0 15.0 16.0
O

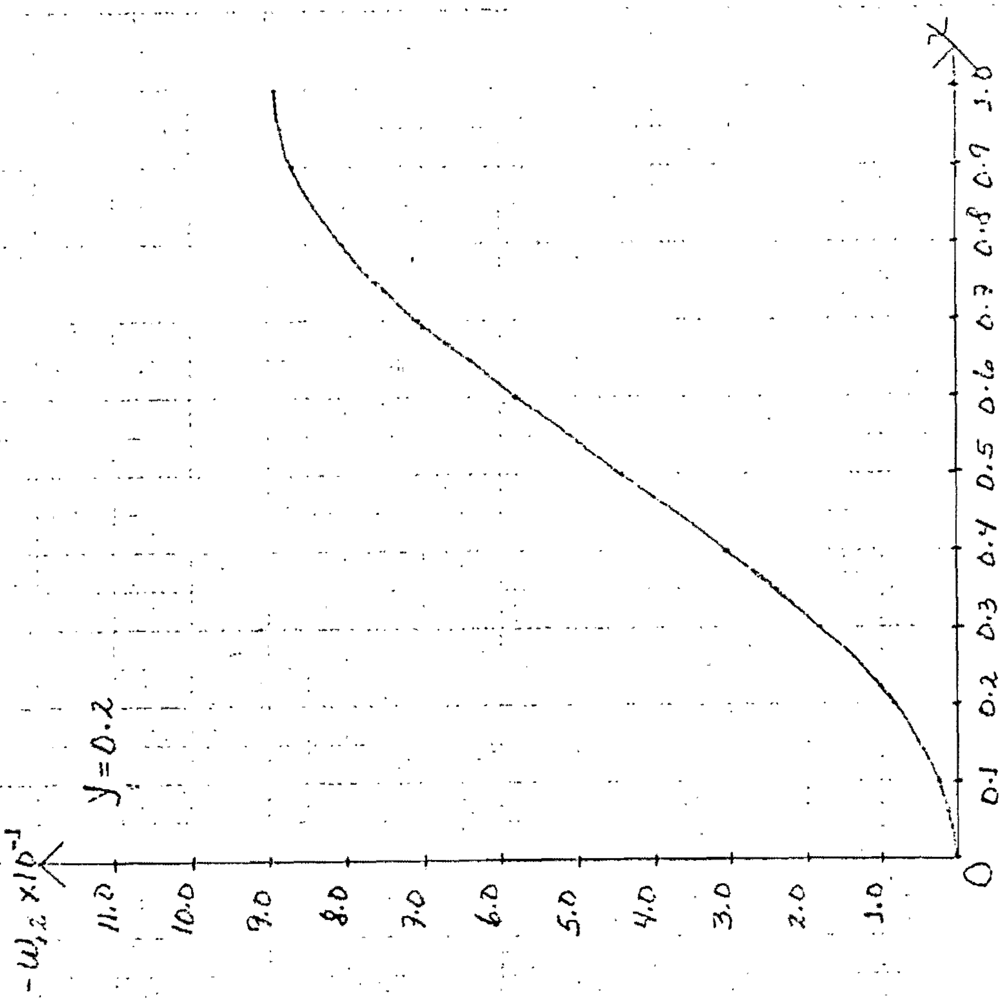


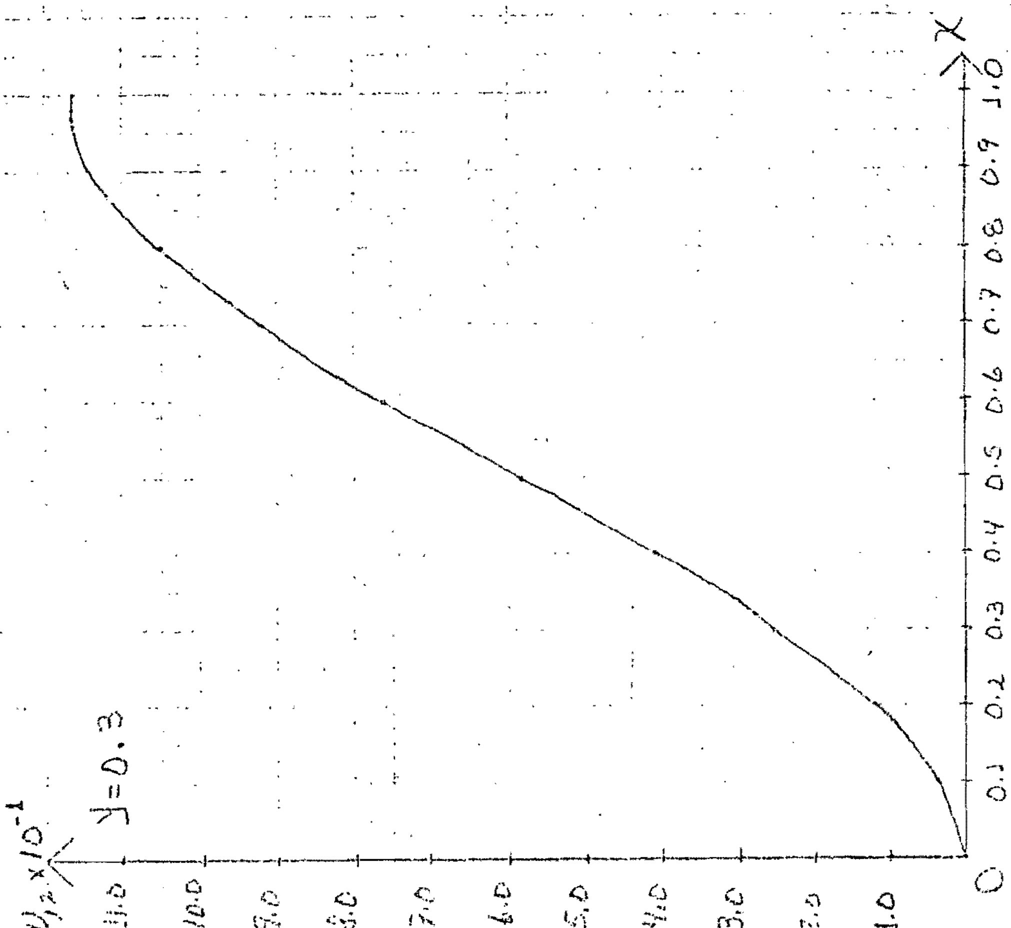
$-W_{,2} \times 10^{-1}$
$y = 0.8$
$y = 0.9$
x
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0 13.0

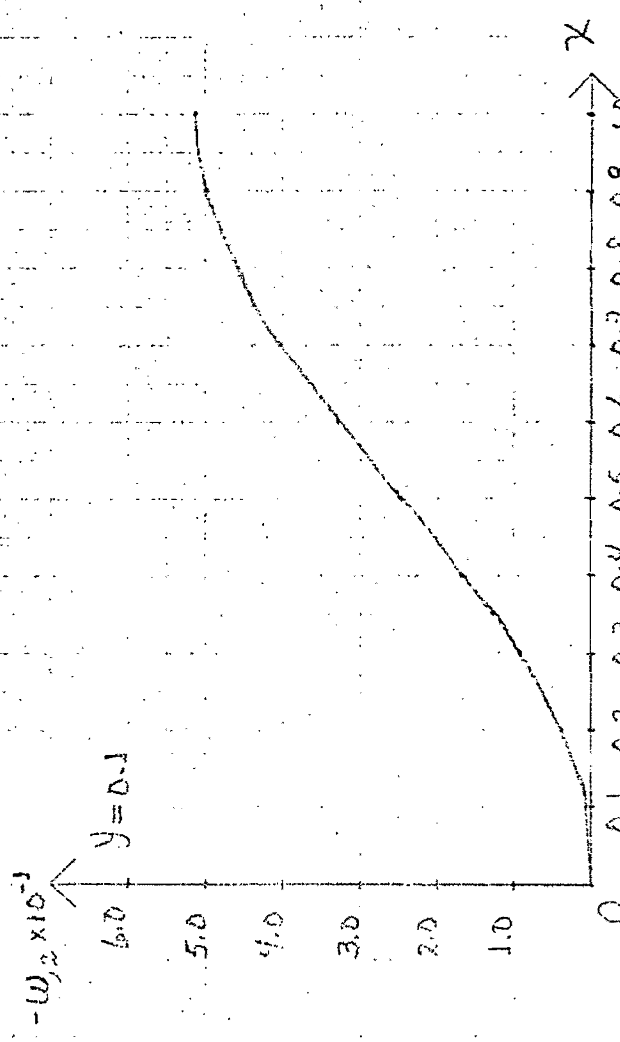

$-W_{,2} \times 10^{-1}$
$y = 0.7$
16.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x


$-W_{,2} \times 10^{-1}$
$y = 0.6$
16.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x


$-W_{,x} \times 10^{-1}$
$y = 0.4$
15.0 14.0 13.0 12.0 11.0 10.0 9.0 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0 0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x
$-W_{,x} \times 10^{-1}$
$y = 0.5$
15.0 14.0 13.0 12.0 11.0 10.0 9.0 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0 0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
x


$-w_{,2} \times 10^{-1}$
$y = 0.2$
x
O
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0


$-w_{,2} \times 10^{-1}$
$y = 0.3$
x
O
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0

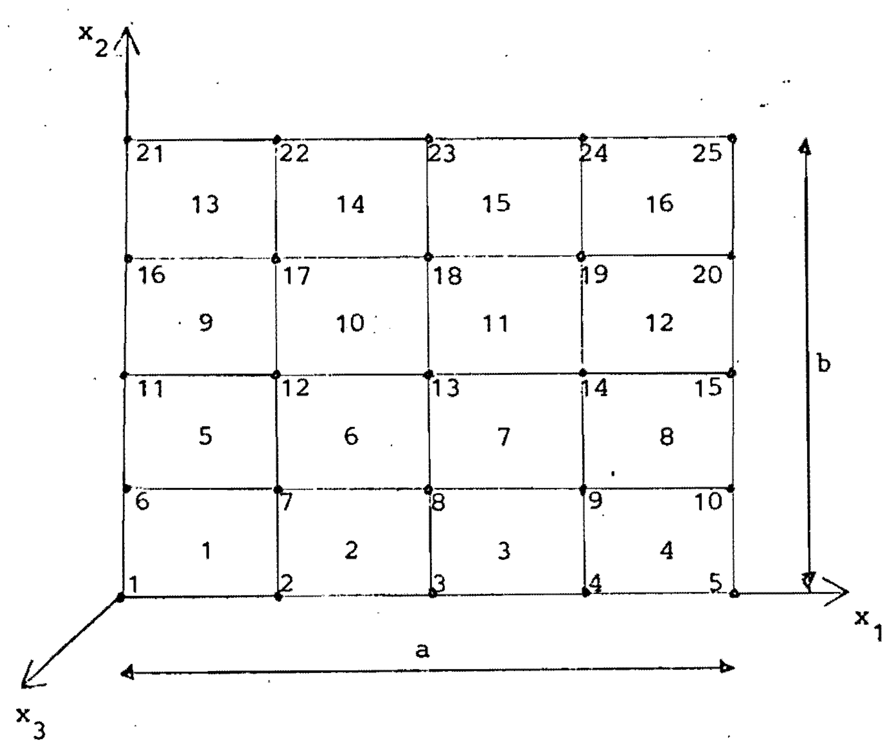


x
y = 0.1
-ω,22 x10^-1
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0

El siguiente paso es verificar los resultados que se obtienen con el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit. El programa de este elemento finito forma parte del paquete de programas "Polo Finite" elaborado por Urzua [1978] et. al. En su formulación desprecien deformaciones debido a cortante, la matriz de rigidez es generada usando integración numérica, el conjunto de grados de libertad Σ_K está dado en la sección 5.1 y el espacio de polinomios P_K en forma desarrollada es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} P_K = {} & \gamma_{00} + \gamma_{10}x_1 + \gamma_{01}x_2 + \gamma_{20}x_1^2 + \gamma_{11}x_1x_2 + \gamma_{02}x_2^2 + \\ & \gamma_{30}x_1^3 + \gamma_{21}x_1^2x_2 + \gamma_{12}x_1x_2^2 + \gamma_{03}x_2^3 + \gamma_{31}x_1^3x_2 + \\ & \gamma_{22}x_1^2x_2^2 + \gamma_{13}x_1x_2^3 + \gamma_{32}x_1^3x_2^2 + \gamma_{23}x_1^2x_2^3 + \\ & \gamma_{33}x_1^3x_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Para este caso, las características geométricas, de material, de carga y discretización de la placa son las siguientes:



a=b=5 m.

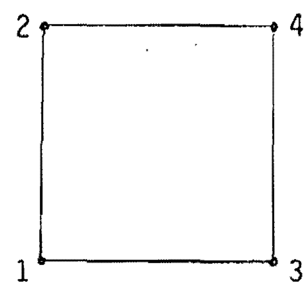
h = 0.08 m

$\nu = 0.3$

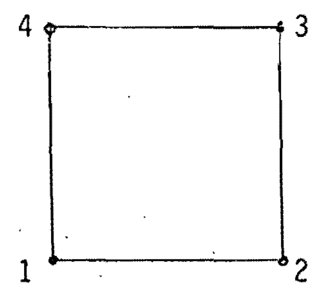
$E = 1.5\times10^9$ Kg/m^2

W_T = 2,500 Kg/m

Los resultados a los que se llegan para desplazamiento vertical, giro con respecto a x_1 y x_2 y momentos flexionantes por unidad de longitud alrededor de x_1 y x_2, se presentan en forma tabular, tomando en cuenta el siguiente orden en la numeración de los nudos.



RECTANGULO
DE ADINI



RECTANGULO DE BOGNER-
FOX-SCHMIT

Por tanto el número 2, 3 y 4 del rectángulo de Adini corresponde al número 4, 2 y 3 del rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, respectivamente.

No. Nudo	ω	$\omega_{,1}$	$\omega_{,2}$
	RECTANGULO DE ADINI (metros)		
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0.01116	-0.01113	0.01113
8	0.01862	-0.01826	0
9	0.01116	-0.01113	-0.01113
10	0	0	0
11	0	0	0
12	0.01862	0	0.01826
13	0.03118	0	0
14	0.01862	0	-0.01826
15	0	0	0
16	0	0	0
17	0.01116	0.01113	0.01113
18	0.01862	0.01826	0
19	0.01116	0.01113	-0.01113
20	0	0	0
21	0	0	0
22	0	0	0
23	0	0	0
24	0	0	0
25	0	0	0

ω	$\omega_{,1}$	$\omega_{,2}$
RECTANGULO DE BOGNER - FOX - SCHMIT (metros)		
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0.01024	-0.00967	0.00967
0.01685	-0.01629	0
0.01024	-0.00967	-0.00967
0	0	0
0	0	0
0.01685	0	0.01629
0.02803	0	0
0.01685	0	-0.01629
0	0	0
0	0	0
0.01024	0.00967	0.00967
0.01685	0.01629	0
0.01024	0.00967	-0.00967
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Elemento	RECTANGULO DE ADINI								RECTANGULO DE BOGNER-FOX-SCHMIT							
	M_x (kg - m)				M_y (kg - m)				M_x (kg - m)				M_y (kg - m)			
	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3	Nudo 4	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3	Nudo 4	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3	Nudo 4	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3	Nudo 4
1	0	-528.3	660.6	-1761	0	-1761	660.6	-528.3	0	-503.5	768.2	1678.2	0	-1678.2	768.2	-503.5
2	-528.3	-892.6	1039.4	642.2	-1761	-2975.4	1150	655.1	-503.5	-815.1	962.4	567.4	-1678.2	-2717	1093.3	708
3	-892.6	-528.3	642.2	1039.4	-2975.4	-1761	655.1	1150	-815.1	-503.5	567.4	962.4	-2717	-1678.2	708	1093.3
4	-528.3	0	-1761	660.6	-1761	0	-528.3	660.6	-503.5	0	-1678.2	768.2	-1678.2	0	-503.5	-768.2
5	-1761	655.1	1150	-2975.4	-528.3	642.2	1039.4	-892.6	-1678.2	708	1093.3	-2717	-503.5	567.4	962.4	-815.1
6	636.6	978.7	1736.4	947.6	636.6	947.6	1736.4	978.7	507.2	884.9	1568.9	835.1	507.2	835.1	1568.9	884.9
7	978.7	636.6	947.6	1736.4	947.6	636.6	978.7	1736.4	884.9	507.2	835.1	1568.9	835.1	507.2	884.9	1568.9
8	655.1	-1761	-2975.4	-1150	642.2	-528.3	-892.6	1039.4	708	-1678.2	-2717	1093.3	567.4	-503.5	-815.1	962.4
9	-2975.4	1150	655.1	-1761	-892.6	1039.4	642.2	-528.3	-2717	1093.3	708	-1678.2	-815.1	962.4	567.4	-503.5
10	947.6	1736.4	978.7	636.6	978.7	1736.4	947.6	636.6	835.1	1568.9	884.9	507.2	884.9	1568.9	835.1	507.2
11	1736.4	947.6	636.6	978.7	1736.4	978.7	636.6	947.6	1568.9	835.1	507.2	884.9	1568.9	884.9	507.2	835.1
12	1150	-2975.4	-1761	655.1	1039.4	-892.6	-528.3	642.2	1093.3	2717	-1678.2	708	962.4	-815.1	-503.5	567.4
13	-1761	660.6	-528.3	0	-528.3	-660.6	-1761	0	-1678.2	768.2	-503.5	0	503.5	768.2	-1678.2	0
14	642.2	1039.4	-892.6	-528.3	655.1	1150	-2975.4	-1761	567.4	962.4	-815.1	-503.5	708	1093.3	-2717	-1678.2
15	1039.4	642.2	-528.3	-892.6	1150	655.1	-1761	-2975.4	962.4	567.4	-503.5	-815.1	1093.3	708	-1678.2	-2717
16	660.6	-1761	0	-528.3	660.6	-528.3	0	-1761	768.2	-1678.2	0	-503.5	768.2	-503.5	0	-1678.2

Como se puede observar existe simetría en geometría y cargas en la placa, por tanto en los diferentes elementos mecánicos también existe tal simetría.

La solución exacta del desplazamiento en el centro para este tipo de placa y presentada en Timoshenko [1959] está dado por:

$$\omega = \frac{\alpha WL^4}{D} \qquad , \qquad \alpha = 0.00126, \qquad (6.14)$$

sustituyendo valores en (6.14) se obtiene ω=0.02799 m, mismo que se aproxima bastante al obtenido (nudo 13) con Bogner-Fox-Schmit (ω=0.02803 m) y Adini (0.03118 m). Zienkiewicz [1977] indica que usando 16 elementos finitos de rectángulo de Adini, la solución aproximada estaría dada por (6.14) solo que α = 0.001403, con lo cual se tiene en resultado idéntico al antes mencionado.

Con los resultados de desplazamientos anteriores, al tener una mejor aproximación con el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, corrobora el análisis de tales elementos finitos presentados en el Capítulo 5.

En el término (9,10) de la matriz de esfuerzos presentada por Zienkiewicz [1977] existe error, dicho término interviene en la determinación del momento torsionante, debido a ello, tales resultados son errores y por tal motivo no se llevó a cabo la comparación de resultados para tal elemento mecánico.

```
                                  P R O G R A M A / U N O . O N . D I S K
                                  = = = = = = = = = = = = = = = = = = = =
C     MANUEL ALBERTO SALAZAR ARECHIGA                                    C  000:0000:5
C                                                                        C  000:0000:5
C     PROGRAMA PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE UNA PLACA EMPOTRADA          C  000:0000:5
C     UTILIZANDO EL ELEMENTO FINITO NO CONFORME RECTANGULO DE ADINI      C  000:0000:5
C                                                                        C  000:0000:5
C     NPN=NUMERO DE PUNTOS NODALES                                       C  000:0000:5
C     NELEM=NUMERO DE ELEMENTOS                                          C  000:0000:5
C     NMAT=NUMERO DE MATERIALES                                          C  000:0000:5
C     NGEOM=NUMERO DE PROPIEDADES GEOMETRICAS                            C  000:0000:5
C                                                                        C  000:0000:5
FILE  1=A,UNIT=DISK,AREA=100,RECORD=100,LINKWORD                         C  00000001
                                                                               FIB IS 0009 L
FILE  2=B,UNIT=DISK,AREA=100,RECORD=100,LINKWORD                         C  00000002
                                                                               FIB IS 0009 L
FILE  3=C,UNIT=DISK,AREA=100,RECORD=100,LINKWORD                         C  00000003
                                                                               FIB IS 0009 L
                                                                         START OF SEGMENT
      COMMON A(11000)                                                    C  002:0000:0
      READ(5,1000) NPN,NELEM,NMAT,NGEOM                                  C  002:0000:0
                                                                               FIB IS 0006 L
      WRITE(6,2000)                                                      C  002:0000:2
                                                                               FIB IS 0006 L
      WRITE(6,3000)NPN,NELEM,NMAT,NGEOM                                  C  002:0011:2
      NGDL=12                                                            C  002:001C:2
      NESF=12                                                            C  002:001D:1
      MTOT=11001                                                         C  002:001E:0
      N1=1                                                               C  002:001F:0
      N2=N1+3*NPN                                                        C  002:001F:4
      N3=N2+3*NPN                                                        C  002:0021:2
      N4=N3+4*NMAT                                                       C  002:0023:0
      N5=N4+NGEOM                                                        C  002:0024:4
      IF(N5.GT.MTOT) STOP                                                C  002:0025:5
      CALL ENTRA(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),NPN,NMAT,NGEOM,NEC)             C  002:0027:4
      CALL RIGEL(A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),NPN,NMAT,NGEOM,NELEM,MB)        C  002:002F:4
      MB=MB+1                                                            C  002:0038:1
      N3=N2+NEC*MB                                                       C  002:0039:3
      N4=N3+NEC                                                          C  002:003B:3
      N5=N4+NEC                                                          C  002:003C:4
      N6=N5+NGDL*NGDL                                                    C  002:003D:5
      N7=N6+NGDL                                                         C  002:003F:2
      IF(N7.GT.MTOT) STOP                                                C  002:0040:3
      CALL ENSAM(A(N1),A(N2),A(N3),A(N5),A(N6),NPN,NEC,MB,NELEM,NGDL)    C  002:0042:2
      CALL TRIA(NEC,MB,A(N2),A(N4))                                      C  002:004C:1
      CALL BACKS(NEC,MB,A(N2),A(N4),A(N3))                               C  002:0050:3
      N5=N4+NESF*NGDL                                                    C  002:0056:1
      CALL RESUL(A(N1),A(N3),A(N4),A(N5),A(N6),NPN,NEC,NELEM,NGDL,NESF)  C  002:0058:1
 1000 FORMAT(4I5)                                                        C  002:0062:0
 2000 FORMAT(9X,"NPN"5X,"NELEM",5X,"NMAT",5X,"NGEOM",/)                  C  002:0062:0
 3000 FORMAT(I12,2I9,I10)                                                C  002:0062:0
      END                                                                C  002:0062:0
                                                                       SEGMENT 002 IS 006C L
```

```
      SUBROUTINE ENTRA(ID,CORD,PMAT,FGEOM,NPN,NMAT,NGEOM,NEC)                      C  006:0000:0
      DIMENSION ID(NPN,3),CORD(NPN,3),PMAT(NMAT,4),PGEOM(NGFOM)                    C  006:0000:0
      WRITE(6,2000)                                                                C  006:0000:0
      DO 100 I=1,NPN                                                               C  006:0004:2
      READ(5,1000) N,(ID(I,J),J=1,3),(CORD(I,J),J=1,3)                             C  006:0005:0
  100 WRITE(6,1001)N,(ID(I,J),J=1,3),(CORD(I,J),J=1,3)                             C  006:001F:2
      WRITE(6,3000)                                                                C  006:0039:3
      DO 200 I=1,NMAT                                                              C  006:003D:2
      READ(5,4000) N,PMAT(I,1),PMAT(I,2),PMAT(I,3),PMAT(I,4)                       C  006:003E:0
  200 WRITE(6,5000)N,PMAT(I,1),PMAT(I,2),PMAT(I,3),PMAT(I,4)                       C  006:0055:2
      WRITE(6,6000)                                                                C  006:006B:3
      DO 300 I=1,NGEOM                                                             C  006:006F:2
      READ(5,7000) N,PGEOM(I)                                                      C  006:0070:0
  300 WRITE(6,7000)N,PGEOM(I)                                                      C  006:007A:2
      NEC=0                                                                        C  006:0085:3
      DO 500 I=1,NPN                                                               C  006:0086:1
      DO 400 J=1,3                                                                 C  006:0087:0
      IN=ID(I,J)                                                                   C  006:0088:0
      IF(IN.EQ.0) GO TO 302                                                        C  006:008B:2
      ID(I,J)=0                                                                    C  006:008C:1
      GO TO 400                                                                    C  006:008F:3
  302 NEC=NEC+1                                                                    C  006:0090:0
      ID(I,J)=NEC                                                                  C  006:0091:2
  400 CONTINUE                                                                     C  006:0094:5
  500 CONTINUE                                                                     C  006:0097:0
      RETURN                                                                       C  006:0099:1
 1000 FORMAT(4I5,3F10.4)                                                           C  006:0099:4
 1001 FORMAT(5X,I3,I8,I6,I8,9X,F9.4,2F11.4)                                        C  006:0099:4
 2000 FORMAT(//5X,"NODO     GRADOS DE LIBERTAD",4X,                                C  006:0099:4
     *"C O O R D E N A D A S  N O D A L E S",//,12X,                               C  006:0099:4
     *" W(Z) GIRO(X) GIRO(Y)",11X,"X",9X,"Y",10X,"Z",/)                            C  006:0099:4
 3000 FORMAT(//,5X,"MATERIAL",3X,"MOD. DE ELAST.(E)",3X,"C. DE POISSON"            C  006:0099:4
     *,3X,"PESO PROPIO",3X,"CARGA UNIF. DIST.",/)                                  C  006:0099:4
 4000 FORMAT(I5,4F13.2)                                                            C  006:0099:4
 5000 FORMAT(6X,I3,8X,2F13.2,2X,F13.2,2X,F13.2)                                    C  006:0099:4
 6000 FORMAT(//5X,"MATERIAL",3X,"ESPESOR",/)                                       C  006:0099:4
 7000 FORMAT(I9,F12.2)                                                             C  006:0099:4
      END                                                                          C  006:0099:4
                                                                          SEGMENT 006 IS 0080 L
```

```
      DIMENSION ID(NPN,3),CORD(NPN,3),PMAT(NMAT,4),PGEOM(NGEOM)            C   007:0000:0
      DIMENSION A1(12,12),A2(12,12),A3(12,12),A5(12),RIG(12,12),IC(12)    C   007:0000:0
      DIMENSION A6(12),ESF(12,12)                                         C   007:0000:0
C                                                                         C   007:0000:0
C     E=MODULO DE ELASTICIDAD DE LA PLACA                                 C   007:0000:0
C     C=COEFICIENTE DE POISSON                                            C   007:0000:0
C     T=PESO PROPIO DE LA PLACA EN TON/M3                                 C   007:0000:0
C     V=CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE LA PLACA EN TON/M2          C   007:0000:0
C     H=ESPESOR DE LA PLACA                                               C   007:0000:0
C                                                                         C   007:0000:0
      REWIND 1                                                            C   007:0000:0
      REWIND 2                                                            C   007:0001:3
      REWIND 3                                                            C   007:0003:0
      MB=0                                                                C   007:0004:3
      WRITE(6,900)                                                        C   007:0005:1
      DO 500 K=1,NELEM                                                    C   007:0009:2
      READ(5,1000) N,I1,I2,I3,I4,M,L                                      C   007:000A:0
      WRITE(6,1001)N,I1,I2,I3,I4,M,L                                      C   007:001D:2
      X1=CORD(I1,1)                                                       C   007:002D:2
      X2=CORD(I2,1)                                                       C   007:002F:2
      X3=CORD(I3,1)                                                       C   007:0031:2
      X4=CORD(I4,1)                                                       C   007:0033:2
      Y1=CORD(I1,2)                                                       C   007:0035:2
      Y2=CORD(I2,2)                                                       C   007:0037:5
      Y3=CORD(I3,2)                                                       C   007:003A:2
      Y4=CORD(I4,2)                                                       C   007:003C:5
      A=(X3-X1)/2.                                                        C   007:003F:2
      B=(Y2-Y1)/2.                                                        C   007:0041:1
      E=PMAT(M,1)                                                         C   007:0043:0
      C=PMAT(M,2)                                                         C   007:0045:0
      T=PMAT(M,3)                                                         C   007:0047:3
      V=PMAT(M,4)                                                         C   007:004A:3
      H=PGEOM(L)                                                          C   007:004D:3
      D=(E*(H**3))/(12.*(1.-C**2))                                        C   007:004F:3
      S=1./(60.*A*B)                                                      C   007:0053:1
      CALL RIGEL1(A,B,A1)                                                 C   007:0055:2
      CALL RIGEL2(A,B,A2)                                                 C   007:0057:4
      CALL SUMA(A1,A2,A1,12,12)                                           C   007:005A:0
      CALL RIGEL3(C,A2)                                                   C   007:005D:2
      CALL RIGEL4(C,A3)                                                   C   007:005F:1
      CALL SUMA(A2,A3,A2,12,12)                                           C   007:0061:0
      CALL SUMA(A1,A2,A3,12,12)                                           C   007:0064:2
      CALL LLLL(A,B,A5)                                                   C   007:0067:4
      DO 100 I=1,12                                                       C   007:006A:0
      DO 100 J=1,12                                                       C   007:006D:0
  100 A3(I,J)=A5(I)*A3(I,J)*D                                             C   007:006C:0
C     MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO FINITO                           C   007:0074:5
      DO 200 I=1,12                                                       C   007:0074:5
      DO 200 J=1,12                                                       C   007:0076:0
  200 RIG(I,J)=A3(I,J)*A5(J)*S                                            C   007:0077:0
      CALL VECCAR(A,B,T,V,F,A6)                                           C   007:0081:4
      CALL ESFUER(A,B,C,D,ESF)                                            C   007:0085:3
      IC(1)=ID(I1,1)                                                      C   007:0088:5
      IC(2)=ID(I1,2)                                                      C   007:008B:1
      IC(3)=ID(I1,3)                                                      C   007:008E:0
      IC(4)=ID(I2,1)                                                      C   007:0091:3
      IC(5)=ID(I2,2)                                                      C   007:0094:0
      IC(6)=ID(I2,3)                                                      C   007:0097:0
      IC(7)=ID(I3,1)                                                      C   007:009A:3
```

```
      IC(9)=ID(I3,3)
      IC(10)=ID(I4,1)                                             C   007:00A0:0
      IC(11)=ID(I4,2)                                             C   007:00A3:3
      IC(12)=ID(I4,3)                                             C   007:00A6:0
      WRITE(1) RIG,IC                                             C   007:00A9:0
      WRITE(2) A6,IC                                              C   007:00AC:3
      WRITE(3) ESF,IC                                             C   007:00B7:0
      CALL PANDA(IC,12,MB)                                        C   007:00C1:0
  500 CONTINCE                                                    C   007:00CB:0
  900 FORMAT(//5X,"ELEMENTO",2X,"NODO 1",2X,"NODO 2",2X,"NODO 3",2X,   C   007:00CD:1
     *"NODO 4",2X,"MATERIAL",2X,"GEOMETRIA",/)                    C   007:00CF:2
 1000 FORMAT(7I5)                                                 C   007:00CF:2
 1001 FORMAT(6X,I4,5X,I5,3X,I5,3X,I5,3X,I5,5X,I3,6X,I3)            C   007:00CF:2
      RETURN                                                      C   007:00CF:2
      END                                                         C   007:00CF:5
      007:00E4:5  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:00C1
      007:00E6:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:00B7
      007:00E7:3  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 007:00AC
                                                           SEGMENT 007 IS 00E8 L
```

```
      DIMENSION A(NF,NC)                                        C     00A:0000:0
      DO 300 J=1,NC,8                                           C     00A:0000:0
      JH=J+7                                                    C     00A:0000:0
      IF(JH.LE.NC) GO TO 200                                    C     00A:0001:0
      JH=NC                                                     C     00A:0002:3
  200 WRITE(6,2000)(N,N=J,JH)                                   C     00A:0003:3
      DO 300 I=1,NF                                             C     00A:0004:2
  300 WRITE(6,2001)I,(A(I,K),K=J,JH)                            C     00A:0010:2
      RETURN                                                    C     00A:0011:0
 2000 FORMAT(///4X,8I12)                                        C     00A:0024:5
 2001 FORMAT(I4,3X,8E12.5)                                      C     00A:0025:2
      END                                                       C     00A:0025:2
                                                                C     00A:0025:2
                                                           SEGMENT 00A IS 0031 L
```

```
      SUBROUTINE SUMA(A,B,C,N,M)
      DIMENSION A(N,M),B(N,M),C(N,M)
      DO 100 J=1,M
      DO 100 I=1,N
  100 C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
      RETURN
      END
```

```
 C    00B:0000:0
 C    00B:0000:0
 C    00B:0000:0
 C    00B:0001:0
 C    00B:0002:0
 C    00B:000F:2
 C    00B:000F:5
SEGMENT 00B IS 001A L
```

```
      SUBROUTINE BANDA(IC,NGDL,MB)                    C   00C:0000:0
      DIMENSION IC(NGDL)                              C   00C:0000:0
      DO 200 I=1,NGDL                                 C   00C:0000:0
      II=IC(I)                                        C   00C:0001:0
      IF(II.EQ.0) GO TO 200                           C   00C:0003:0
      DO 100 J=1,NGDL                                 C   00C:0003:5
      JJ=IC(J)                                        C   00C:0005:0
      IF(JJ.EQ.0) GO TO 100                           C   00C:0007:0
      MDIF=IABS(II-JJ)                                C   00C:0007:5
      IF(MDIF.GT.MB) MB=MDIF                          C   00C:0009:3
  100 CONTINUE                                        C   00C:000B:2
  200 CONTINUE                                        C   00C:000D:3
      RETURN                                          C   00C:000F:4
      END                                             C   00C:0010:1
                                                  SEGMENT 00C IS 0018 L
```

```
      SUBROUTINE ENSAM(ID,RIGEST,A66,RIG,IC,NPN,NEC,MB,NELEM,NGDL)              C    00D:0000:0
      DIMENSION ID(NPN,3),RIGEST(NEC,MB),A66(NEC),                              C    00D:0000:0
     *RIG(NGDL,NGDL),IC(NGDL)                                                   C    00D:0000:0
      DIMENSION A6(12),PI(3)                                                    C    00D:0000:0
      DO 50 I=1,NEC                                                             C    00D:0000:0
      DO 50 J=1,MB                                                              C    00D:0001:0
   50 RIGEST(I,J)=0.                                                            C    00D:0002:0
      REWIND 1                                                                  C    00D:0003:4
      DO 300 N=1,NELEM                                                          C    00D:000B:1
      READ(1) RIG,IC                                                            C    00D:000C:0
      DO 200 I=1,NGDL                                                           C    00D:0017:0
      II=IC(I)                                                                  C    00D:0018:0
      IF(II.EQ.0) GO TO 200                                                     C    00D:001A:0
      DO 100 J=1,NGDL                                                           C    00D:001A:5
      JJ=IC(J)                                                                  C    00D:001C:0
      IF(JJ.EQ.0) GO TO 100                                                     C    00D:001E:0
      IF(JJ.LT.II) GO TO 100                                                    C    00D:001E:5
      JJ=JJ-II+1                                                                C    00D:0020:1
      RIGEST(II,JJ)=RIGEST(II,JJ)+RIG(I,J)                                      C    00D:0022:0
  100 CONTINUE                                                                  C    00D:0028:1
  200 CONTINUE                                                                  C    00D:002A:2
  300 CONTINUE                                                                  C    00D:002C:3
      READ(5,1000) M                                                            C    00D:002E:4
                                                                                C    00D:0035:2
C     "M" ES UN INDICADOR: M=0(CASO DE CARGAS CONCENTRADAS), M=1(CASO           C    00D:0035:2
C     DE CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA)                                       C    00D:0035:2
                                                                                C    00D:0035:2
      IF(M.EQ.0) GO TO 760                                                      C    00D:0035:2
      WRITE(6,750)                                                              C    00D:0036:3
      DO 360 I=1,NEC                                                            C    00D:003A:2
  360 A66(I)=0.                                                                 C    00D:003B:0
      REWIND (2)                                                                C    00D:003F:1
      DO 700 N=1,NELEM                                                          C    00D:0048:0
      READ(2) A6,IC                                                             C    00D:0049:0
      DO 400 J=1,NGDL                                                           C    00D:0053:0
      NE=IC(J)                                                                  C    00D:0054:0
      IF(NE.EQ.0) GO TO 400                                                     C    00D:0056:0
      A66(NE)=A66(NE)+A6(J)                                                     C    00D:0056:5
  400 CONTINUE                                                                  C    00D:005A:1
  700 CONTINUE                                                                  C    00D:005C:2
  750 FORMAT(//,20X,"VECTOR DE CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA",/)             C    00D:005E:3
      RETURN                                                                    C    00D:005E:3
  760 WRITE(6,810)                                                              C    00D:005F:0
      DO 770 I=1,NEC                                                            C    00D:0063:2
  770 A66(I)=0.                                                                 C    00D:0064:0
  775 READ(5,1500)N,PI                                                          C    00D:0068:1
      IF(N.EQ.0) RETURN                                                         C    00D:0071:2
      WRITE(6,1500)N,PI                                                         C    00D:0072:3
      DO 780 J=1,3                                                              C    00D:0078:2
      NE=ID(N,J)                                                                C    00D:007C:0
      IF(NE.EQ.0) GO TO 780                                                     C    00D:007F:2
      A66(NE)=PI(J)                                                             C    00D:0080:1
  780 CONTINUE                                                                  C    00D:0083:0
      GO TO 775                                                                 C    00D:0085:1
  810 FORMAT(//,8X,"ESTADO DE CARGAS",//5X,"NODO",5X,"F(W)",5X,"MXX",           C    00D:0085:4
     *5X,"MYY",/)                                                               C    00D:0085:4
 1000 FORMAT(I5)                                                                C    00D:0085:4
 1500 FORMAT(I8,F9.2,2F8.2)                                                     C    00D:0085:4
      END                                                                       C    00D:0085:4
```

```
      DIMENSION AA(1),NBMAX(1)
      IF(NEC.EQ.1) RETURN
      MM=NEC*MBAND
      NE=NEC-1
      DO 300 N=1,NE
      NBMAX(N)=0
      DO 100 I=N,MM,NEC
      IF(AA(I).NE.0) NBMAX(N)=I
  100 CONTINUE
      IF(AA(N).EQ.0) GO TO 300
      IL=N+NEC
      IH=NBMAX(N)
      L=N
      DO 200 I=IL,IH,NEC
      L=L+1
      IF(AA(I).EQ.0) GO TO 200
      CC=AA(I)/AA(N)
      J=L-I
      DO 150 K=I,IH,NEC
  150 AA(K+J)=AA(K+J)-CC*AA(K)
      AA(I)=CC
  200 CONTINUE
  300 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C    00F:0000:0
C    00F:0000:0
C    00F:0001:1
C    00F:0002:4
C    00F:0004:0
C    00F:0005:0
C    00F:0007:0
C    00F:0008:0
C    00F:000C:3
C    00F:000E:5
C    00F:0011:1
C    00F:0012:4
C    00F:0014:4
C    00F:0015:3
C    00F:0017:0
C    00F:0018:2
C    00F:001A:4
C    00F:001E:2
C    00F:001F:5
C    00F:0021:0
C    00F:002A:1
C    00F:002C:2
C    00F:002E:4
C    00F:0030:5
C    00F:0031:2
SEGMENT 00F IS 003A L
```

```
      DIMENSION AA(1),BB(1),NBMAX(1)
      IL=NEC
      DO 400 N=1,NEC
      CC=BB(N)
      IF(AA(N).NE.0) BB(N)=BB(N)/AA(N)
      IF(N.EQ.NEC) GO TO 450
      IL=IL+1
      IH=NBMAX(N)
      K=N
      DO 350 I=IL,IH,NEC
      K=K+1
  350 BB(K)=BB(K)-AA(I)*CC
  400 CONTINUE
  450 IL=2*NEC
  500 IL=IL-1
      N=N-1
      IF(N.EQ.0) RETURN
      IH=NBMAX(N)
      K=N
      DO 600 I=IL,IH,NEC
      K=K+1
  600 BB(N)=BB(N)-AA(I)*BB(K)
      GO TO 500
      END
```

```
            C     010:0000:0
            C     010:0000:0
            C     010:0000:5
            C     010:0002:0
            C     010:0004:0
            C     010:000A:1
            C     010:000B:3
            C     010:000C:5
            C     010:000E:5
            C     010:000F:4
            C     010:0011:0
            C     010:0012:2
            C     010:0019:0
            C     010:001B:1
            C     010:001C:4
            C     010:001E:0
            C     010:001F:2
            C     010:0020:1
            C     010:0022:1
            C     010:0023:0
            C     010:0024:0
            C     010:0025:2
            C     010:002D:1
            C     010:002D:4
      SEGMENT 010 IS 0034 L
```

```
      DIMENSION A(N,M),B(M,L),C(N,L)                    C  011:0000:0
      DO 100 I=1,N                                      C  011:0000:0
      DO 100 J=1,L                                      C  011:0001:0
      C(I,J)=0.                                         C  011:0002:0
      DO 100 K=1,M                                      C  011:0005:2
  100 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)                       C  011:0006:0
      RETURN                                            C  011:0016:0
      END                                               C  011:0016:3
                                               SEGMENT 011 IS 0021 L
```

```
      DIMENSION A1(12,12)                                  C    012:0000:0
      F=F**2/A**2                                          C    012:0000:0
      DO 100 I=1,12                                        C    012:0002:0
      DO 100 J=1,12                                        C    012:0003:0
  100 A1(I,J)=0.                                           C    012:0004:0
      A1(1,1)=F*60.                                        C    012:000B:3
      A1(3,1)=F*30.                                        C    012:000D:2
      A1(4,1)=F*30.                                        C    012:000F:4
      A1(6,1)=F*15.                                        C    012:0012:0
      A1(7,1)=F*(-60.)                                     C    012:0014:2
      A1(9,1)=F*30.                                        C    012:0016:5
      A1(10,1)=F*(-30.)                                    C    012:0019:1
      A1(12,1)=F*15.                                       C    012:001B:4
      A1(3,3)=F*20.                                        C    012:001E:0
      A1(4,3)=F*15.                                        C    012:0020:2
      A1(6,3)=F*10.                                        C    012:0022:4
      A1(7,3)=F*(-30.)                                     C    012:0025:0
      A1(9,3)=F*10.                                        C    012:0027:3
      A1(10,3)=F*(-15.)                                    C    012:0029:5
      A1(12,3)=F*5.                                        C    012:002C:2
      A1(4,4)=F*60.                                        C    012:002E:4
      A1(6,4)=F*30.                                        C    012:0031:0
      A1(7,4)=F*(-30.)                                     C    012:0033:2
      A1(9,4)=F*15.                                        C    012:0035:5
      A1(10,4)=F*(-60.)                                    C    012:0038:1
      A1(12,4)=F*30.                                       C    012:003A:4
      A1(6,6)=F*20.                                        C    012:003D:0
      A1(7,6)=F*(-15.)                                     C    012:003F:2
      A1(9,6)=F*5.                                         C    012:0041:5
      A1(10,6)=F*(-30.)                                    C    012:0044:1
      A1(12,6)=F*10.                                       C    012:0046:4
      A1(7,7)=F*60.                                        C    012:0049:0
      A1(9,7)=F*(-30.)                                     C    012:004B:2
      A1(10,7)=F*30.                                       C    012:004D:5
      A1(12,7)=F*(-15.)                                    C    012:0050:1
      A1(9,9)=F*20.                                        C    012:0052:4
      A1(10,9)=F*(-15.)                                    C    012:0055:0
      A1(12,9)=F*10.                                       C    012:0057:3
      A1(10,10)=F*60.                                      C    012:0059:5
      A1(12,10)=F*(-30.)                                   C    012:005C:1
      A1(12,12)=F*20.                                      C    012:005E:4
      DO 150 I=1,12                                        C    012:0061:0
      DO 150 J=1,12                                        C    012:0062:0
  150 A1(I,J)=A1(J,I)                                      C    012:0063:0
      RETURN                                               C    012:006D:0
      END                                                  C    012:006D:3
                                                      SEGMENT 012 IS 0075 L
```

```
      DIMENSION A2(12,12)                      C   013:0000:0
      G=A**2/B**2                              C   013:0000:0
      DO 100 I=1,12                            C   013:0002:0
      DO 100 J=1,12                            C   013:0003:0
  100 A2(I,J)=0.                               C   013:0004:0
      A2(1,1)=G*60.                            C   013:000B:3
      A2(2,1)=G*(-30.)                         C   013:000D:2
      A2(4,1)=G*(-60.)                         C   013:000F:4
      A2(5,1)=G*(-30.)                         C   013:0012:1
      A2(7,1)=G*30.                            C   013:0014:4
      A2(8,1)=G*(-15.)                         C   013:0017:0
      A2(10,1)=G*(-30.)                        C   013:0019:3
      A2(11,1)=G*(-15.)                        C   013:001C:0
      A2(2,2)=G*20.                            C   013:001E:3
      A2(4,2)=G*30.                            C   013:0020:5
      A2(5,2)=G*10.                            C   013:0023:1
      A2(7,2)=G*(-15.)                         C   013:0025:3
      A2(8,2)=G*10.                            C   013:0028:0
      A2(10,2)=G*15.                           C   013:002A:2
      A2(11,2)=G*5.                            C   013:002C:4
      A2(4,4)=G*60.                            C   013:002F:0
      A2(5,4)=G*30.                            C   013:0031:2
      A2(7,4)=G*(-30.)                         C   013:0033:4
      A2(8,4)=G*15.                            C   013:0036:1
      A2(10,4)=G*30.                           C   013:0038:3
      A2(11,4)=G*15.                           C   013:003A:5
      A2(5,5)=G*20.                            C   013:003D:1
      A2(7,5)=G*(-15.)                         C   013:003F:3
      A2(8,5)=G*5.                             C   013:0042:0
      A2(10,5)=G*15.                           C   013:0044:2
      A2(11,5)=G*10.                           C   013:0046:4
      A2(7,7)=G*60.                            C   013:0049:0
      A2(8,7)=G*(-30.)                         C   013:004B:2
      A2(10,7)=G*(-60.)                        C   013:004D:5
      A2(11,7)=G*(-30.)                        C   013:0050:2
      A2(8,8)=G*20.                            C   013:0052:5
      A2(10,8)=G*30.                           C   013:0055:1
      A2(11,8)=G*10.                           C   013:0057:3
      A2(10,10)=G*60.                          C   013:0059:5
      A2(11,10)=G*30.                          C   013:005C:1
      A2(11,11)=G*20.                          C   013:005E:3
      DO 150 I=1,12                            C   013:0060:5
      DO 150 J=1,12                            C   013:0062:0
  150 A2(I,J)=A2(J,I)                          C   013:0063:0
      RETURN                                   C   013:006D:0
      END                                      C   013:006D:3
                                      SEGMENT 013 IS 0075 L
```

```
      DIMENSION A3(12,12)
      DO 100 I=1,12
      DO 100 J=1,12
100   A3(I,J)=0.
      A3(1,1)=C*30.
      A3(2,1)=C*(-15.)
      A3(3,1)=C*15.
      A3(4,1)=C*(-30.)
      A3(6,1)=C*(-15.)
      A3(7,1)=C*(-30.)
      A3(8,1)=C*15.
      A3(10,1)=C*30.
      A3(3,2)=C*(-15.)
      A3(7,2)=C*15.
      A3(4,3)=C*(-15.)
      A3(4,4)=C*30.
      A3(5,4)=C*15.
      A3(6,4)=C*15.
      A3(7,4)=C*30.
      A3(10,4)=C*(-30.)
      A3(11,4)=C*(-15.)
      A3(6,5)=C*15.
      A3(10,5)=C*(-15.)
      A3(7,7)=C*30.
      A3(8,7)=C*(-15.)
      A3(9,7)=C*(-15.)
      A3(10,7)=C*(-30.)
      A3(12,7)=C*15.
      A3(9,8)=C*15.
      A3(10,9)=C*15.
      A3(10,10)=C*30.
      A3(11,10)=C*15.
      A3(12,10)=C*(-15.)
      A3(12,11)=C*(-15.)
      DO 150 I=1,12
      DO 150 J=1,12
150   A3(I,J)=A3(J,I)
      RETURN
      END
```

```
C   014:0000:0
C   014:0000:0
C   014:0001:0
C   014:0002:0
C   014:0009:3
C   014:000B:2
C   014:000D:4
C   014:0010:0
C   014:0012:3
C   014:0015:0
C   014:0017:3
C   014:0019:5
C   014:001C:1
C   014:001E:4
C   014:0021:0
C   014:0023:3
C   014:0025:5
C   014:0028:1
C   014:002A:3
C   014:002C:5
C   014:002F:2
C   014:0031:5
C   014:0034:1
C   014:0036:4
C   014:0039:0
C   014:003B:3
C   014:003E:0
C   014:0040:3
C   014:0042:5
C   014:0045:1
C   014:0047:3
C   014:0049:5
C   014:004C:1
C   014:004E:4
C   014:0051:1
C   014:0052:0
C   014:0053:0
C   014:005D:0
C   014:005D:3
SEGMENT 014 IS 0063 L
```

```
      DIMENSION A4(12,12)                         C   015:0000:0
      R=(1.-C)/2.                                 C   015:0000:0
      DO 100 I=1,12                               C   015:0001:4
      DO 100 J=1,12                               C   015:0003:0
  100 A4(I,J)=0.                                  C   015:0004:0
      A4(1,1)=R*84.                               C   015:000B:3
      A4(2,1)=R*(-6.)                             C   015:000D:2
      A4(3,1)=R*6.                                C   015:000F:4
      A4(4,1)=R*(-84.)                            C   015:0012:0
      A4(5,1)=R*(-6.)                             C   015:0014:3
      A4(6,1)=R*(-6.)                             C   015:0017:0
      A4(7,1)=R*(-84.)                            C   015:0019:3
      A4(8,1)=R*6.                                C   015:001C:0
      A4(9,1)=R*6.                                C   015:001E:2
      A4(10,1)=R*84.                              C   015:0020:4
      A4(11,1)=R*6.                               C   015:0023:0
      A4(12,1)=R*(-6.)                            C   015:0025:2
      A4(2,2)=R*8.                                C   015:0027:5
      A4(4,2)=R*6.                                C   015:002A:1
      A4(5,2)=R*(-2.)                             C   015:002C:3
      A4(7,2)=R*6.                                C   015:002F:0
      A4(8,2)=R*(-8.)                             C   015:0031:2
      A4(10,2)=R*(-6.)                            C   015:0033:5
      A4(11,2)=R*2.                               C   015:0036:2
      A4(3,3)=R*8.                                C   015:0038:4
      A4(4,3)=R*(-6.)                             C   015:003B:0
      A4(6,3)=R*(-8.)                             C   015:003D:3
      A4(7,3)=R*(-6.)                             C   015:0040:0
      A4(9,3)=R*(-2.)                             C   015:0042:3
      A4(10,3)=R*6.                               C   015:0045:0
      A4(12,3)=R*2.                               C   015:0047:2
      A4(4,4)=R*84.                               C   015:0049:4
      A4(5,4)=R*6.                                C   015:004C:0
      A4(6,4)=R*6.                                C   015:004E:2
      A4(7,4)=R*84.                               C   015:0050:4
      A4(8,4)=R*(-6.)                             C   015:0053:0
      A4(9,4)=R*(-6.)                             C   015:0055:3
      A4(10,4)=R*(-84.)                           C   015:0058:0
      A4(11,4)=R*(-6.)                            C   015:005A:3
      A4(12,4)=R*6.                               C   015:005D:0
      A4(5,5)=R*8.                                C   015:005F:2
      A4(7,5)=R*6.                                C   015:0061:4
      A4(8,5)=R*2.                                C   015:0064:0
      A4(10,5)=R*(-6.)                            C   015:0066:2
      A4(11,5)=R*(-8.)                            C   015:0068:5
      A4(6,6)=R*8.                                C   015:006B:2
      A4(7,6)=R*6.                                C   015:006D:4
      A4(9,6)=R*2.                                C   015:0070:0
      A4(10,6)=R*(-6.)                            C   015:0072:2
      A4(12,6)=R*(-2.)                            C   015:0074:5
      A4(7,7)=R*84.                               C   015:0077:2
      A4(8,7)=R*(-6.)                             C   015:0079:4
      A4(9,7)=R*(-6.)                             C   015:007C:1
      A4(10,7)=R*(-84.)                           C   015:007E:4
      A4(11,7)=R*(-6.)                            C   015:0081:1
      A4(12,7)=R*6.                               C   015:0083:4
      A4(8,8)=R*8.                                C   015:0086:0
      A4(10,8)=R*6.                               C   015:0088:2
      A4(11,8)=R*(-2.)                            C   015:008A:4
```

```
      A4(10,9)=R*6.                        C   015:[illegible]
      A4(12,9)=R*(-8.)                     C   015:0091:5
      A4(10,10)=R*84.                      C   015:0094:2
      A4(11,10)=R*6.                       C   015:0096:4
      A4(12,10)=R*(-6.)                    C   015:0099:0
      A4(11,11)=R*8.                       C   015:009B:3
      A4(12,12)=R*8.                       C   015:009D:5
      DO 150 I=1,12                        C   015:00A0:1
      DO 150 J=1,12                        C   015:00A1:0
  150 A4(I,J)=A4(J,I)                      C   015:00A2:0
      RETURN                               C   015:00AC:0
      END                                  C   015:00AC:3
                                     SEGMENT 015 IS 00B2 L
```

```
      DIMENSION A5(12)                                          C   016:0000:0
      A5(1)=1.                                                  C   016:0000:0
      A5(2)=2.*B                                                C   016:0001:1
      A5(3)=2.*A                                                C   016:0003:2
      A5(4)=1.                                                  C   016:0005:4
      A5(5)=A5(2)                                               C   016:0007:2
      A5(6)=A5(3)                                               C   016:0009:5
      A5(7)=1.                                                  C   016:000C:3
      A5(8)=A5(2)                                               C   016:000E:1
      A5(9)=A5(3)                                               C   016:0010:4
      A5(10)=1.                                                 C   016:0013:2
      A5(11)=A5(2)                                              C   016:0015:0
      A5(12)=A5(3)                                              C   016:0017:3
      RETURN                                                    C   016:001A:1
      END                                                       C   016:001A:4
                                                          SEGMENT 016 IS 0021 L(
```

```
                                                                    START OF SEGMENT
      SUBROUTINE VECCAR(A,B,T,V,H,A6)                            C    017:0000:0
      DIMENSION A6(12)                                            C    017:0000:0
C     W=PESO TOTAL DE LA PLACA EN TON/M2                          C    017:0000:0
      W=(T*P)+V                                                   C    017:0000:0
      W1=W*A*B                                                    C    017:0001:5
      A6(1)=W1                                                    C    017:0003:2
      A6(2)=W1*(-B/3.)                                            C    017:0004:4
      A6(3)=W1*(A/3.)                                             C    017:0007:3
      A6(4)=W1                                                    C    017:000A:2
      A6(5)=W1*(B/3.)                                             C    017:000C:1
      A6(6)=W1*(A/3.)                                             C    017:000F:0
      A6(7)=W1                                                    C    017:0011:5
      A6(8)=W1*(-B/3.)                                            C    017:0013:4
      A6(9)=W1*(-A/3.)                                            C    017:0016:4
      A6(10)=W1                                                   C    017:0019:4
      A6(11)=W1*(B/3.)                                            C    017:001B:3
      A6(12)=W1*(-A/3.)                                           C    017:001E:2
      RETURN                                                      C    017:0021:3
      END                                                         C    017:0021:5
                                                                SEGMENT 017 IS 002D LI
```

```
      DIMENSION ESF(12,12)                                    C   018:0000:0
      DO 100 I=1,12                                           C   018:0000:0
      DO 100 J=1,12                                           C   018:0001:0
100   ESF(I,J)=0.                                             C   018:0002:0
      D1=D/(4.*A*B)                                           C   018:0009:3
      ESF(1,1)=D1*(6.*((B/A)+C*(A/B)))                        C   018:000D:5
      ESF(2,1)=D1*(6.*((A/B)+C*(B/A)))                        C   018:0010:1
      ESF(3,1)=D1*(-1.+C)                                     C   018:0014:5
      ESF(4,1)=D1*(-6.*C*(A/B))                               C   018:0017:4
      ESF(5,1)=D1*(-6.*(A/B))                                 C   018:001C:4
      ESF(6,1)=ESF(3,1)                                       C   018:001F:1
      ESF(7,1)=D1*(-6.*(B/A))                                 C   018:0021:5
      ESF(8,1)=D1*(-6.*C*(B/A))                               C   018:0025:2
      ESF(9,1)=ESF(3,1)                                       C   018:0029:2
      ESF(12,1)=ESF(3,1)                                      C   018:002C:0
      ESF(1,2)=D1*(-8.*C*A)                                   C   018:002E:4
      ESF(2,2)=D1*(-8.*A)                                     C   018:0032:1
      ESF(3,2)=D1*2.*B*(1.-C)                                 C   018:0035:1
      ESF(4,2)=D1*4.*C*A                                      C   018:0038:5
      ESF(5,2)=D1*4.*A                                        C   018:003C:1
      ESF(9,2)=ESF(3,2)                                       C   018:003F:0
      ESF(1,3)=D1*8.*B                                        C   018:0041:4
      ESF(2,3)=D1*8.*C*B                                      C   018:0044:3
      ESF(3,3)=D1*(-2.*A*(1.-C))                              C   018:0047:5
      ESF(6,3)=ESF(3,3)                                       C   018:004B:4
      ESF(7,3)=D1*(-4.*B)                                     C   018:004E:2
      ESF(8,3)=D1*(-4.*C*B)                                   C   018:0051:2
      ESF(1,4)=ESF(4,1)                                       C   018:0054:5
      ESF(2,4)=ESF(5,1)                                       C   018:0057:3
      ESF(3,4)=D1*(1.-C)                                      C   018:005A:1
      ESF(4,4)=ESF(1,1)                                       C   018:005C:5
      ESF(6,4)=ESF(3,4)                                       C   018:005F:0
      ESF(9,4)=ESF(3,4)                                       C   018:0061:4
      ESF(5,4)=ESF(2,1)                                       C   018:0064:2
      ESF(10,4)=ESF(7,1)                                      C   018:0066:5
      ESF(11,4)=ESF(8,1)                                      C   018:0069:3
      ESF(12,4)=ESF(3,4)                                      C   018:006C:1
      ESF(1,5)=D1*(-4.*C*A)                                   C   018:006E:5
      ESF(2,5)=D1*(-4.*A)                                     C   018:0072:2
      ESF(4,5)=D1*8.*C*A                                      C   018:0075:2
      ESF(5,5)=D1*8.*A                                        C   018:0078:4
      ESF(6,5)=ESF(3,2)                                       C   018:007B:3
      ESF(12,5)=ESF(3,2)                                      C   018:007E:1
      ESF(3,6)=D1*2.*A*(1.-C)                                 C   018:0080:5
      ESF(4,6)=ESF(1,3)                                       C   018:0084:3
      ESF(5,6)=ESF(2,3)                                       C   018:0087:1
      ESF(6,6)=ESF(3,6)                                       C   018:0089:5
      ESF(10,6)=ESF(7,3)                                      C   018:008C:3
      ESF(11,6)=ESF(8,3)                                      C   018:008F:1
      ESF(1,7)=ESF(7,1)                                       C   018:0091:5
      ESF(2,7)=ESF(8,1)                                       C   018:0094:3
      ESF(3,7)=ESF(3,4)                                       C   018:0097:1
      ESF(6,7)=ESF(3,4)                                       C   018:0099:5
      ESF(7,7)=ESF(1,1)                                       C   018:009C:3
      ESF(8,7)=ESF(2,1)                                       C   018:009E:4
      ESF(9,7)=ESF(3,4)                                       C   018:00A1:1
      ESF(10,7)=ESF(4,1)                                      C   018:00A3:5
      ESF(11,7)=ESF(5,1)                                      C   018:00A6:3
      ESF(12,7)=ESF(3,4)                                      C   018:00A9:1
```

```
      ESF(3,8)=D1*(-2.*B*(1.-C))                                C    018:00AD:5
      ESF(7,8)=D1*(-8.*C*A)                                     C    018:00AF:4
      ESF(8,8)=D1*(-8.*A)                                       C    018:00B3:1
      ESF(9,8)=ESF(3,8)                                         C    018:00B6:1
      ESF(10,8)=ESF(4,2)                                        C    018:00B8:5
      ESF(11,8)=ESF(5,2)                                        C    018:00BB:3
      ESF(1,9)=D1*4.*B                                          C    018:00BE:1
      ESF(2,9)=D1*4.*C*B                                        C    018:00C1:0
      ESF(7,9)=D1*(-8.*B)                                       C    018:00C4:2
      ESF(8,9)=D1*(-8.*C*B)                                     C    018:00C7:2
      ESF(3,10)=ESF(3,1)                                        C    018:00CA:5
      ESF(12,9)=ESF(3,3)                                        C    018:00CD:3
      ESF(4,10)=ESF(7,1)                                        C    018:00D0:1
      ESF(5,10)=ESF(8,1)                                        C    018:00D2:5
      ESF(6,10)=ESF(3,1)                                        C    018:00D5:3
      ESF(7,10)=ESF(4,1)                                        C    018:00D8:1
      ESF(8,10)=ESF(5,1)                                        C    018:00DA:5
      ESF(9,10)=D1*(-2.)                                        C    018:00DD:3
      ESF(10,10)=ESF(1,1)                                       C    018:00E0:0
      ESF(11,10)=ESF(2,1)                                       C    018:00E2:1
      ESF(12,10)=ESF(3,1)                                       C    018:00E4:4
      ESF(6,11)=ESF(3,8)                                        C    018:00E7:2
      ESF(7,11)=ESF(1,5)                                        C    018:00EA:0
      ESF(8,11)=ESF(2,5)                                        C    018:00EC:4
      ESF(10,11)=ESF(4,5)                                       C    018:00EF:2
      ESF(11,11)=ESF(5,5)                                       C    018:00F2:0
      ESF(12,11)=ESF(3,8)                                       C    018:00F4:4
      ESF(4,12)=ESF(1,9)                                        C    018:00F7:2
      ESF(5,12)=ESF(2,9)                                        C    018:00FA:0
      ESF(9,12)=ESF(3,6)                                        C    018:00FC:4
      ESF(10,12)=ESF(7,9)                                       C    018:00FF:2
      ESF(11,12)=ESF(8,9)                                       C    018:0102:0
      ESF(12,12)=ESF(3,6)                                       C    018:0104:4
      RETURN                                                    C    018:0107:2
      END                                                       C    018:0107:5
                                                            SEGMENT 018 IS 0110 L
```

```
      DIMENSION ID(NPN,3),U(NEC),ESF(NESF,NGDL),UIEL(NGDL),IC(NGDL)      C     019:0000:0
      DIMENSION UI(3),EESF(12)                                          C     019:0000:0
      WRITE(6,1900)                                                     C     019:0000:0
      DO 200 I=1,NPN                                                    C     019:0004:2
      DO 100 J=1,3                                                      C     019:0005:0
      IN=ID(I,J)                                                        C     019:0006:0
      IF(IN.EQ.0) UI(J)=0.                                              C     019:0009:2
  100 IF(IN.NE.0) UI(J)=U(IN)                                           C     019:000D:4
  200 WRITE(6,2000) I,UI                                                C     019:0011:5
      WRITE(6,1950)                                                     C     019:001C:3
      REWIND 3                                                          C     019:0020:2
      DO 400 N=1,NELEM                                                  C     019:0021:5
      READ(3) ESF,IC                                                    C     019:0023:0
      DO 300 I=1,NGDL                                                   C     019:002E:0
      IN=IC(I)                                                          C     019:002F:0
      IF(IN.EQ.0) UIEL(I)=0.                                            C     019:0031:0
  300 IF(IN.NE.0) UIEL(I)=U(IN)                                         C     019:0033:5
      CALL MULT(ESF,UIEL,EESF,NESF,NGDL,1)                              C     019:003A:3
  400 WRITE(6,2500) N,(EESF(J),J=1,NESF)                                C     019:003E:4
      RETURN                                                            C     019:004E:3
 1900 FORMAT(//,5X,"NODO",8X,"W(Z)",13X,"GIRO(X)",12X,"GIRO(Y)",/)      C     019:004F:0
 1950 FORMAT(//,1X,"ELEMENTO",7X,"MXX(1)",10X,"MYY(1)",10X,"MXY(1)",10X,  C     019:004F:0
     *"MXX(2)",9X,"MYY(2)",9X,"MXY(2)",9X,"MXX(3)",/,16X,"MYY(3)",      C     019:004F:0
     *10X,"MXY(3)",10X,"MXX(4)",10X,"MYY(4)",9X,"MXY(4)",/)             C     019:004F:0
 2000 FORMAT(I8,3X,3E15.7)                                              C     019:004F:0
 2500 FORMAT(I6,6X,7E15.7,//,12X,5E15.7,/)                              C     019:004F:0
      END                                                               C     019:004F:0
      019:0061:4  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT AT 019:0023
                                                                         SEGMENT 019 IS 0062 L
```

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

Es común en la teoría lineal de placas, formular el modelo mecánico o ecuación de equilibrio para el problema bidimensional aproximado, donde sólo se consideran fuerzas de cuerpo normales a su plano medio. Las ecuaciones de campo del modelo tridimensional desarrollado en este trabajo, además de suponer fuerzas de cuerpo, también se consideran fuerzas externas normales a su plano medio aplicados en la cara superior $(\partial B_1 = \partial\Omega_1 \times \{h/2\})$ de la placa. El término $\bar{q}$ de la ecuación de equilibrio (2.3.14), es la carga equivalente que actúa sobre el plano medio por unidad de longitud, donde se puede observar que no intervienen las fuerzas de cuerpo b_1 y b_2, esto no quiere decir que tales fuerzas se desprecien sino que para el caso específico del modelo bidimensional aproximado, se concluye que en promedio son nulas, ver ecuación (2.3.11).

Para el caso particular de definir $q=0$ y $\underline{b}=(0,0,b_3)$, automáticamente se obtuvo la clásica ecuación de equilibrio de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales.

Con respecto a la formulación matemática del problema de flexión de placas, mediante los métodos actuales de matemáticas aplicadas, sólo se demostró la existencia y unicidad para el caso de placa empotrada, debido a que con estas condiciones de frontera, es menos complicado demostrar la K-elipticidad de la forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : \underline{V} \times \underline{V} \to \mathbb{R}$. Esto, también se puede lograr para el caso simplemente apoyado, el detalle sería demostrar que $v \to |\Delta v|_{0,\Omega}$ es nuevamente una norma sobre el espacio K, equivalente a la norma $\|\cdot\|_{2,\Omega}$.

Como una continuación de este trabajo, sería muy interesante tratar de elaborar la formulación matemática para problemas dinámicos de placas de tipo no lineal, tal como lo estudian Duvaut y Lions [1976] y Fichera [1972].

Para aproximar problemas de cuarto orden, que es el caso de placas, la conformidad del método del elemento finito puede perderse por la violación de la inclusión $\underline{V}_h \subset \underline{V}$, debido a las razones siguientes:

a) al usar elementos finitos que no sean de clase C^1, debido a que no son continuos a través de elementos finitos adyacentes; como lo fué el caso particular del rectángulo de Adini, estudiado en el Cap. 5.

b) cuando la aproximación de un problema de valores en la frontera es planteado sobre un dominio $\bar{\Omega}$ con una frontera curva $\partial\Omega$, o sea que el conjunto $\bar{\Omega}$ ya no es poligonal. En este caso, el conjunto $\bar{\Omega}$ es usualmente aproximado por dos tipos de elementos finitos: los de tipo recto (caras planas) en la "interior de $\bar{\Omega}$"; y los isoparamétricos (tienen al menos una cara curva) para aproximar "tan bien como sea posible" la frontera $\partial\Omega$. Incluso si se usan elementos finitos isoparamétricos $K \in \tau_h$ para "triangularizar" $\bar{\Omega}$, la frontera del conjunto $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$ es muy similar, pero no idéntica, a la frontera $\partial\Omega$. Por tanto, como el dominio de definición de las funciones en el resultado del espacio de elemento finito $\underline{V}_h$ es el conjunto $\bar{\Omega}_h$, el espacio $\underline{V}_h$ no está contenido en el espacio $\underline{V}$ y entonces la forma bilineal y lineal son aproximados.

c) en los casos donde se alteren los coeficientes del sistema lineal resultante dado por (4.1.4), al ser aproximados por medio de integración numérica.

Los elementos finitos conformes, rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, triángulos de Argyris, Bell, Hsieh-Clough-Tocher y Singular de Zienkiewicz, pueden ser usados en cualquier otro tipo de problemas de valores en la frontera de cuarto orden. no así el rectángulo de Adini, el cual es adoptado específicamente a problemas de placas rectángulares.

Con excepción del rectángulo de Bogner-Fox-Schmit, los otros elementos finitos conformes, no son embebidos en familias afines, sus propiedades de interpolación son similares a estas y vienen desarrolladas en Ciarlet [1978], en donde se resumen los siguientes resultados al aplicar el teorema 5.1.2, ya que sus conjuntos de grados de libertad, Σ_K, son P_K-unisolventes:

Elemento Finito	dim P_K	$P_k(K) \subset P_K$	$\|u-u_h\|_{2,\Omega}$	Regularidad Supuesta
Triángulo de Argyris	21	$P_5(K)=P_K$	$O(h^4)$	$u \in H^6(\Omega)$
Triángulo de Bell	18	$P_4(K) \subset P_K$	$O(h^3)$	$u \in H^5(\Omega)$
Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit	16	$P_3(K) \subset P_K$	$O(h^2)$	$u \in H^4(\Omega)$
Triángulo de Hsieh-Clough-Tocher	12	$P_3(K) \subset P_K$	$O(h^2)$	$u \in H^4(\Omega)$
Triángulo Singular de Zienkiewicz	12	$P_2(K) \subset P_K$	$O(h)$	$u \in H^3(\Omega)$

Con respecto al rectángulo de Adini, la estimación del error (5.2.22) puede ser mejorada cuando todos los rectángulos $K \in \tau_h$ son iguales, Lascaux y Lesaint [1975] han demostrado que $\|u-u_h\|_h \leq Ch^2|u|_{u,\Omega}$ si la solución u está en el espacio $H^4(\Omega)$, o sea aumenta en uno su velocidad de convergencia, si se aumenta en uno la regularidad de la solución.

Por último, se estima que es del todo confiable poder usar el programa de computadora que se presenta en el Cap. 6, debido a la buena aproximación de los resultados obtenidos para los diferentes parámetros en comparación con otros programas ya elaborados. Obviamente existen otros elementos finitos que dan mejor aproximación y con velocidad de convergencia mayor, tales como los que se muestran en la tabla anterior.

Con lo expuesto, se estima haber cumplido con el principal objetivo de esta Tesis, que ha sido el análisis y aproximación mediante técnicas del elemento finito aplicados a modelos lineales de placas.

REFERENCIAS

1. Adams, R.A. [1975]: Sobolev Spaces, Academic Press, New York

2. Adini, A; Clough, R.W. [1961]: Analysis of plate bending by the finite element method, NSF report G. 7337.

3. Argyris, J.H.; Fried, I.; Scharpf, D.W. [1968]: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society 72, 514-517.

4. Bell, K. [1969]: A refined triangular plate bending element. International J. Numerichal Methods Engrg. 1, 101-122.

5. Bernardou, M.; Ducatel, Y. [1976]: Méthodes conformes d' élements finis pour des porblèmes elliptiques du quatrième orde avec intégration numérique, Rapport de Recherche No. 195 I.R.I.A. Laboria, Rocquencourt.

6. Bogner, F.K.; Fox, R.L.; Schmit, L.A. [1965]: The generation of inter element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formules, in Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Wright Patterson A.F.B., Ohio.

7. Ciarlet, P.G. [1978]: The Finite Element Method for Elliptic Problems, Nort-Holland.

8. Clough, R.W. [1960]: The finite element method in plane stress analysis, J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd. Conf. Electronic Computation, pp 345-378.

9. Duvaut, G.; Lions, J.L. [1976]: Inequalites in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York.

10. Fichera, G. [1972]: Existence theorems in elasticity-Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, in Encyclopedia of Physics (S. Flügge, Chief Editor), Vol. VI a/2: Mechanics of Solids II (C. Truesdel, Editor), pp 347-424, Springer-Verlag, Berlín.

11. Gurtin, M. [1981]: An Introduction to Continuom Mechanics, Academic Press, New York.

12. Lascaux, P.; Lesaint, P. [1975]: Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Ser. Rouge Anal. Numer R-1, 9-53.

13. Melosh, R.J. [1963]: Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, AIAA J.1, 1631-1637.

14. Morley, L.S.F. [1968]: The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, Aero. Quart. 19, 149-169.

15. Reyes, L.A. [1978]: Análisis estático elástico lineal de placas delgadas con el método del elemento finito, Tesis, DEPFI, UNAM.

16. Sander, G. [1969]: Applications de la methode des elements finis a la flexion des plaques. Universite de Liege Faculte des Sciences Appliques, Collection des Publications No. 15.

17. Showalter, R.E. [1977]: Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman.

18. Thimoshenko, S.; Woinowsky-Kreiger, S. [1959]: Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill.

19. Turner, M.J.; Clough, R.W.; Martin, H.C.; Topp, L.J. [1956]: Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci. 23, 805-823.

20. Washizu, K. [1968]: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, Oxford.

21. Young, D. [1939]: Clamped rectangular plates with a central concentred Load, J. of Applied Mech. Trans. A.S.M.E. Vol. 61, p. A-114-116.

22. Zienkiewicz, D.C. [1977]: The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, London.

23. Urzua, J., Rehak, D.R.; Dodds, R.H. [1978]: "Polo Finite", A Structural Mechanics System for Linear and Nonlinear Analysis, University of Kansas and Illinois.