

AI SLAM I ENTO DE C I M EN TAC I ONES
M ED I ANTE BARRERAS DE PI LOTES

T E S I S

que para optar por el grado de doctor
en ingeniería (estructuras) presenta:

JAVIER AVILES LOPEZ

Supervisor

FRANCISCO J. SANCHEZ-SESMA

División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Marzo 1985



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

0852

AISLAMIENTO DE CIMENTACIONES
MEDIANTE BARRERAS DE PILOTES

T E S I S

que presenta

JAVIER AVILES LOPEZ

para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)

JEFE DE LA DEPT

Dr. Rolando Springall G

ASESOR

Dr. Francisco J Sánchez-Sesma

JURADO

Dr. Luis Esteva M

Dr. Francisco J Sánchez-Sesma

Dr. Ismael Herrera R

Dr. Octavio A Rascón Ch

Dr. Porfirio Ballesteros B

Dr. Emilio Rosenblueth D

Dr. Gonzalo Alduncin G

ABSTRACT

A method is presented to solve the problem of foundation isolation from vibrations generated in the neighborhood using piles as barriers. The problem is formulated in two and three dimensions as one of multiple diffraction of elastic waves. The solution is determined imposing continuity and equilibrium conditions at the soil-pile interphases with the aid of Graf's addition theorem.

For the two-dimensional model the exact solution is obtained. The diffracted field by each pile is constructed as expansions of cylindrical wave functions which form a complete set of solutions of the reduced wave equation. For the three-dimensional model an approximate solution, in the sense of least-squares, is obtained. In this approximate solution the diffracted field by each pile is constructed only with Rayleigh

waves:

A parametric analysis is done to study the influence of the diameter of the piles, separation between them and their length on the effectivity of the barrier. A transmissibility index is defined to measure the effectivity of this isolation system. Finally, a discussion of the possible extensions of this analysis is presented.

RESUMEN

Se presenta un método para resolver el problema de aislamiento de cimentaciones, de vibraciones generadas en su cercanía, mediante barreras de pilotes. El problema se formula bidimensional y tridimensionalmente como uno de difracción múltiple de ondas elásticas y se resuelve al satisfacer las condiciones de continuidad y equilibrio en las interfases suelo-pilote con la ayuda del teorema de adición de Graf.

Para el modelo bidimensional se obtiene la solución exacta, construyendo el campo difractado por cada pilote mediante expansiones de funciones de ondas cilíndricas que forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda. Para el modelo tridimensional se obtiene una solución aproximada, en el sentido de mínimos cuadrados, pues se supone que

el campo difractado por cada pilote está dado solamente por ondas de Rayleigh.

Se realiza un análisis paramétrico para estudiar la influencia del diámetro de los pilotes, la separación entre ellos y su longitud en la efectividad de la barrera. Se define un índice de trasmisibilidad como medida de la efectividad de este sistema de aislamiento. Finalmente, se discuten las posibles extensiones de este trabajo.

1. INTRODUCCION

Hay estructuras en las que, por diversas razones, deben reducirse los niveles de vibración generados por fuentes excitadoras cercanas como maquinaria o tráfico; en ocasiones equipo sensible y delicado puede dañarse al ser sometido a vibraciones. El problema ha sido estudiado por diversos investigadores (1, 5, 6, 11, 16, 20, 27, 37, 38) y es conocido en la literatura (6, 24, 25) como aislamiento de cimentaciones. Algunos problemas de vibraciones se pueden resolver mediante aislamiento mecánico usando dispositivos aisladores. Para aquellos casos en los que el aislamiento mecánico es inadecuado, la solución puede ser el aislamiento de cimentaciones usando barreras aisladoras.

En varias ocasiones se han usado trincheras u obstrucciones

ABSTRACT

RESUMEN

1.	INTRODUCCION	1
2.	MODELO BIDIMENSIONAL	9
2.1	<i>Formulación del problema</i>	9
2.2	<i>Solución</i>	13
3.	MODELO TRIDIMENSIONAL	19
3.1	<i>Formulación del problema</i>	20
3.2	<i>Solución</i>	25
4.	RESULTADOS	40
5.	CONCLUSIONES	48
6.	RECONOCIMIENTOS	51
7.	REFERENCIAS	52
8.	NOTACION	57

TABLAS

FIGURAS

sólidas como barreras para ondas. Sin embargo, no siempre se ha obtenido el éxito deseado; a veces su efecto ha sido contrario a lo esperado o poco significativo. Estas dificultades ya han sido expuestas por Barkan (6) y al parecer se han debido al poco conocimiento de la teoría de propagación de ondas elásticas en presencia de una barrera. Los estudios teóricos que existen sobre el problema son insuficientes para resolverlo completamente; es evidente entonces la necesidad de realizar un análisis teórico del mismo con el fin de generar criterios racionales para diseño.

Tradicionalmente la solución al problema ha sido excavar trincheras; sin embargo, su uso está limitado por la inestabilidad de sus paredes en suelos blandos así como por la gran profundidad requerida para el caso de incidencia de ondas de Rayleigh con longitud de onda grande. Una alternativa al empleo de trincheras es usar pilotes, los cuales están menos limitados por la profundidad de desplante. Esta alternativa ha sido estudiada experimentalmente por Woods, Barnett y Sagesser (38) y Liao y Sangrey (16) y analíticamente por Avilés y Sánchez-Sesma (5).

El concepto de aislamiento de cimentaciones mediante barreras para ondas se basa en el fenómeno de difracción, el cual tiene lugar si una obstrucción se interpone en la trayectoria de la propagación de las ondas. Cuando esto sucede la obstruc-

ción actúa como una fuente secundaria de energía que genera ondas propagándose hacia afuera. La energía de una fuente excitadora que causa vibraciones en la cimentación de una estructura se trasmite a través del suelo mediante ondas. Esta energía puede ser fraccionada si se incrustan obstrucciones que generen un fenómeno de difracción múltiple. Las interferencias destructivas y constructivas de las ondas producirán reducciones y amplificaciones del movimiento, respectivamente. Es entonces fundamental, al estudiar aislamiento de cimentaciones con barreras de pilotes, conocer el fenómeno asociado con la propagación de ondas elásticas en presencia de obstrucciones. Existe literatura (3, 9, 15, 34) sobre la teoría de propagación de ondas elásticas en un semiespacio; sin embargo, al parecer no existe teoría alguna que describa dicha propagación en un semiespacio con un conjunto de obstrucciones.

El objetivo de este trabajo es estudiar analíticamente el problema de aislamiento de cimentaciones, usando como sistema de aislamiento barreras para ondas formadas por una línea de pilotes elásticos (ver fig 1). El trabajo comprende dos soluciones ideales:

- 1) La exacta para un modelo teórico bidimensional formado por pilotes de longitud infinita y sección transversal circular, incrustados en un espacio elástico lineal, isótropo y homogéneo. La excitación está dada por ondas SV con frente de

onda plano o cilíndrico.

2) Una aproximada para un modelo teórico tridimensional formado por pilotes de longitud finita y sección transversal circular, incrustados en un semiespacio con las mismas características mecánicas que el espacio anterior. La excitación está dada por ondas planas de Rayleigh.

La atenuación que presentan las ondas en suelos reales se debe tanto al amortiguamiento geométrico, atenuación por irradiación, como al amortiguamiento material; sin embargo, como el amortiguamiento geométrico es el que más contribuye a dicha atenuación (25), se puede despreciar el amortiguamiento material y modelar el suelo como un medio elástico.

El problema se formula como uno de difracción múltiple y se resuelve con un método de frontera (14, 26). El método de solución que se propone consiste en la generación del campo total mediante la superposición de los campos incidente y difractados por los pilotes, usando el teorema de adición de Graf (2, 33) para representar dicho campo con respecto a cualquier referencia, tal como lo hacen Luco y Contesse (17), Wong y Trifunac (35) y Esquivel y Sánchez-Sesma (8) en problemas de interacción dinámica estructura-suelo-estructura y Avilés y Sánchez-Sesma (5) en el problema de aislamiento de ci-

mentaciones con barreras de pilotes rígidos. Con el empleo de dicho teorema el campo total se puede representar con respecto al sistema de referencia de cualquier pilote, siendo posible satisfacer las condiciones de frontera en cada uno de los pilotes.

Para el modelo bidimensional se obtiene la solución exacta, construyendo los campos difractados y refractados por los pilotes mediante expansiones de funciones de ondas cilíndricas que son soluciones base de la ecuación reducida de onda bidimensional y forman un conjunto completo. Las soluciones base se han obtenido, Mow y Pao (22), empleando el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas debido a la geometría de los pilotes y su completez ha sido demostrada por Herrera (13) y Herrera y Sabina (12). Como las soluciones base contienen funciones trigonométricas, al imponer las condiciones de frontera se recurre a las propiedades de ortogonalidad de dichas funciones para generar sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que al resolverlos definen la solución. Numéricamente los sistemas infinitos no pueden ser resueltos; una aproximación de los campos difractados y refractados se obtiene truncando las expansiones que los definen, lo cual da origen a sistemas de ecuaciones algebraicas finitos. En el modelo se considera solamente la incidencia de ondas SV, ya que lo que se pretende es establecer la metodología de análisis para ondas de cuerpo; para el caso de on-

das P y SH el tratamiento será el mismo. Además, se considerarán dos tipos de frente de onda, ondas planas y cilíndricas, con el objeto de estudiar el efecto de la curvatura del frente de onda.

Para el modelo tridimensional es muy difícil obtener la solución exacta, debido a la presencia de la superficie libre y las complicadas condiciones de frontera que se deben satisfacer en las interfases suelo-pilote. En este trabajo se obtiene una solución aproximada que consiste en suponer que la energía difractada por cada pilote está dada solamente por ondas de Rayleigh; esto es consistente con la forma de proceder de McGarr y Alsop (19) en un problema bidimensional de incidencia normal de ondas de Rayleigh a discontinuidades verticales. En realidad las ondas difractadas por cada pilote son una combinación de ondas de cuerpo P y S y ondas superficiales de Rayleigh. Sin embargo, la excelente concordancia entre los resultados analíticos y experimentales de McGarr y Alsop, muestra que el suponer campos difractados compuestos exclusivamente por ondas de Rayleigh es una hipótesis razonable. Por otra parte, para el caso de un disco circular oscilando verticalmente en la superficie libre de un semiespacio elástico lineal, isótropo y homogéneo, Miller y Pursey (21) encontraron que la energía de esa fuente superficial se distribuye en 67% de ondas de Rayleigh, 26% de on-

das de cortante y 7% de ondas de compresión. El hecho de que la mayor parte de la energía de una fuente superficial es transmitida por ondas de Rayleigh, aunado a que dichas ondas presentan una atenuación por irradiación menor que la de las ondas de cuerpo, permite suponer, por un lado, que en el problema de aislamiento de cimentaciones las ondas de Rayleigh sean las más significativas, y por otro, que las ondas difractadas por cada pilote sean solamente las de Rayleigh debido a que cada pilote se comporta como una fuente secundaria de energía. Si se supone que los campos difractados por los pilotes están dados solamente por ondas de Rayleigh, las condiciones de continuidad y equilibrio en las interfases suelo-pilote no se pueden satisfacer idénticamente, siendo necesario usar un método variacional, como el de Trefftz-Mikhlin (28), para satisfacer aproximadamente dichas condiciones. El método de Trefftz-Mikhlin es un método de mínimos cuadrados en el que las funciones de la aproximación son soluciones de la ecuación que gobierna el problema y los coeficientes de la aproximación se determinan al minimizar el error cuadrático en las condiciones de frontera. Por otra parte, el tratamiento exacto de la propagación de ondas en un cilindro circular elástico es muy complicado; es por eso que en los pilotes se aplica una teoría aproximada al modelarlos como vigas de Euler-Bernoulli con deformaciones axiales (23, 32).

En lo que sigue se presentan la formulación y solución del

problema modelado en dos y tres dimensiones. Se muestran los resultados que se obtuvieron de un análisis paramétrico en el que se puso énfasis en los principales parámetros geométricos de diseño, tales como el diámetro de los pilotes, la separación entre ellos y su longitud, pues en problemas reales los parámetros mecánicos generalmente se encuentran acotados. Se analiza la efectividad del sistema de aislamiento estudiado y se proponen criterios para diseño. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo donde se discuten sus posibles extensiones.

2. MODELO BIDIMENSIONAL

Se presentan a continuación la formulación y solución del problema para el caso del modelo bidimensional. El problema se formula como uno de difracción múltiple y se resuelve con un método de frontera. El campo total se construye mediante el principio de superposición, los campos difractados y refractados se generan como combinaciones lineales de soluciones base y los coeficientes indeterminados de dichas combinaciones se determinan al satisfacer idénticamente las condiciones de frontera en las interfases suelo-pilote.

2.1. Formulación del problema

En un espacio elástico lineal, isótropo y homogéneo el desplazamiento w en la dirección z (ver fig 2), que genera la propagación de ondas armónicas SV, satisface la ecuación reducida

de onda o ecuación de Helmholtz (3):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_s^2 w = 0 \quad (1)$$

donde x, y = direcciones de referencia, $k_s = \omega/\beta_s$ = número de onda de cortante, ω = frecuencia de excitación, $\beta_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s}$ = velocidad de propagación de ondas de cortante, μ_s = módulo de cortante del suelo y ρ_s = densidad del suelo.

Empleando el principio de superposición el campo total se puede expresar como

$$w = w^i + \sum_{j=1}^P w_j^r \quad (2)$$

donde w^i = campo incidente (solución de campo libre), w_j^r = campo difractado por el j -ésimo pilote y P = número de pilotes.

Cuando la excitación consiste en una onda plana SV de amplitud w_0 que incide normalmente a la barrera (ver fig 3), la solución de campo libre en el sistema de coordenadas (x_1, y_1) está dada por

$$w^i(x_1, y_1) = w_0 \exp(-ik_s y_1) e^{i\omega t} \quad (3)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ = unidad imaginaria y t = tiempo.

Si la excitación es una onda cilíndrica SV de intensidad w_0 , generada por una fuente localizada en 0 a una distancia R de la barrera (ver fig 3), la solución de campo libre en el sistema de coordenadas (r_0, θ_0) está dada por

$$w^i(r_0, \theta_0) = w_0 H_0^{(2)}(k_s r_0) e^{i\omega t} \quad (4)$$

donde $H_0^{(2)}(.)$ = función de Hankel de segunda especie y orden 0. En lo sucesivo el factor tiempo $e^{i\omega t}$ se sobrentiende a lo largo del trabajo.

Aplicando el método de separación de variables a la ec 1, se encuentra que el campo difractado por el j-ésimo pilote se puede expresar en el sistema de coordenadas (r_j, θ_j) como (22)

$$w_j^r(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \sin n\theta_j \quad (5)$$

donde A_n^j y B_n^j = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera y $H_n^{(2)}(.)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n. Las funciones $H_n^{(2)}(k_s r_j) \cos n\theta_j$ y $H_n^{(2)}(k_s r_j) \sin n\theta_j$ forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones no acotadas (12, 13) y satisfacen la condición de Sommerfeld (30) de irradiación al infinito.

Por tratarse de pilotes elásticos se refracta parte de la on-

da incidente generándose una onda estacionaria dentro de cada pilote. El campo refractado en el j -ésimo pilote se puede expresar como (22)

$$w_j(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j J_n(k_p r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^j J_n(k_p r_j) \sin n\theta_j \quad (6)$$

donde C_n^j y D_n^j = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera, $J_n(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y orden n y el subíndice p indica pilote. Las funciones $J_n(k_p r_j) \cos n\theta_j$ y $J_n(k_p r_j) \sin n\theta_j$ forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación reducida de onda en regiones acotadas (12, 13).

Los coeficientes A_n^j , B_n^j , C_n^j y D_n^j que definen la solución se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera. Suponiendo adhesión perfecta, las condiciones de frontera que deben ser satisfechas en las interfases suelo-pilote son de continuidad de desplazamientos y esfuerzos, esto es:

$$w(r_\ell, \theta_\ell) \Big|_{r_\ell=a} = w_\ell(r_\ell, \theta_\ell) \Big|_{r_\ell=a}, \quad 0 < \theta_\ell < 2\pi \text{ y } \ell=1, 2, \dots, P \quad (7)$$

$$\left[\mu_s \frac{\partial w(r_\ell, \theta_\ell)}{\partial r_\ell} \right] \Big|_{r_\ell=a} = \left[\mu_p \frac{\partial w_\ell(r_\ell, \theta_\ell)}{\partial r_\ell} \right] \Big|_{r_\ell=a}, \quad 0 < \theta_\ell < 2\pi \text{ y } \ell=1, 2, \dots, P \quad (8)$$

donde a = radio de los pilotes.

2.2 Solución

Para obtener la solución del problema es necesario imponer las condiciones de frontera en cada uno de los pilotes, para lo cual conviene expresar el campo total, ec 2, con respecto a un sistema de coordenadas cualquiera (r_ℓ, θ_ℓ) con la ayuda del teorema de adición de Gráf. Haciendo esto para el caso de incidencia de una onda plana y desarrollando esta en serie de funciones de ondas cilíndricas, es posible llegar a

$$\begin{aligned}
 w(r_\ell, \theta_\ell) = & w_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(k_s r_\ell) \cos m\theta_\ell + \right. \\
 & \left. 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \sin m\psi J_m(k_s r_\ell) \sin m\theta_\ell \right] + \\
 & (1-\delta_{\ell 1}) \sum_{j=1}^{\ell-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{j\ell}) J_m(k_s r_\ell) \cos m\theta_\ell + \right. \\
 & \left. \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(k_s d_{j\ell}) J_m(k_s r_\ell) \sin m\theta_\ell \right] + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\ell} H_m^{(2)}(k_s r_\ell) \cos m\theta_\ell + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{\ell} H_m^{(2)}(k_s r_\ell) \sin m\theta_\ell + (1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{j\ell}) \times \right. \\
 & \left. J_m(k_s r_\ell) \cos m\theta_\ell + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) J_m(k_s r_\ell) \sin m\theta_\ell \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

donde $K_m^n(\cdot) = H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot)$

$$L_m^n(\cdot) = -H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot)$$

ϵ_m = factor de Neumann ($\epsilon_0=1$ y $\epsilon_m=2$, $m \geq 1$), $d_{j\ell}$ = distancia centro a centro entre el j -ésimo pilote y el ℓ -ésimo pilote, $\delta_{\ell j}$ = delta de Kronecker ($=1$ si $\ell = j$; $=0$ si $\ell \neq j$) y $\Psi = \pi/2$.

Sustituyendo las ecs 6 y 9 en las 7 y 8 y empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, es posible obtener cuatro sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas, los que se dan a continuación:

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j + \frac{2 H_m^{(2)}(k_s a)}{\epsilon_m J_m(k_s a)} A_m^\ell - \frac{2 J_m(k_p a)}{\epsilon_m J_m(k_s a)} C_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\Psi, \quad \ell=1, 2, \dots, P$$

$y \quad m = 0, 1, \dots, \infty$ (10)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-i)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j + \frac{2 H_m^{(2)}(k_s a)}{\epsilon_m J_m'(k_s a)} A_m^\ell - \frac{\mu_p k_p}{\mu_s k_s} \frac{2 J_m'(k_p a)}{\epsilon_m J_m'(k_s a)} C_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\Psi, \quad \ell=1, 2, \dots, P$$

$y \quad m = 0, 1, \dots, \infty$ (11)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a)} B_m^\ell - \frac{J_m(k_p a)}{J_m(k_s a)} D_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\Psi, \quad \ell=1, 2, \dots, P$$

$y \quad m = 1, 2, \dots, \infty$ (12)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} B_m^\ell - \frac{\mu_p k_p}{\mu_s k_s} \frac{J_m'(k_p a)}{J_m'(k_s a)} D_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

y $m = 1, 2, \dots, \infty$ (13)

donde la prima indica derivada con respecto al argumento.

Como no interesa la solución en los pilotes, sino en el suelo, se pueden eliminar los coeficientes C_m^ℓ y D_m^ℓ . Para esto se despejan C_m^ℓ de las ecs 10 y 11 y D_m^ℓ de las ecs 12 y 13, se hacen las igualaciones correspondientes y el resultado es dos sistemas de ecuaciones, que tienen la siguiente forma:

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j + \frac{2}{\epsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m'(k_s a)} \right] A_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

y $m = 0, 1, \dots, \infty$ (14)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m'(k_s a)} \right] B_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

y $m = 1, 2, \dots, \infty$ (15)

$$\text{donde } F_m = \sqrt{\frac{\mu_p \rho_p}{\mu_s \rho_s}} \frac{J'_m(k_p a)}{J_m(k_p a)}$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones 14 y 15 el problema estaría resuelto; sin embargo, numéricamente dichos sistemas no pueden ser resueltos, siendo necesario reducirlos a unos de dimensión finita truncando adecuadamente todos los desarrollos infinitos tal que la solución converja.

Cuando $\mu_p = \infty$ se tiene el caso límite de pilotes rígidos y las expresiones 14 y 15 se reducen a

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j +$$

$$\left[\frac{2H_m^{(2)}(k_s a) - 4\delta_{m0} (\rho_s/\rho_p) H_1^{(2)}(k_s a)/k_s a}{\epsilon_m J_m(k_s a) - 2\delta_{m0} (\rho_s/\rho_p) J_1(k_s a)/k_s a} \right] A_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

$$\text{y } m = 0, 1, \dots, \infty \quad (16)$$

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m(k_s a)} B_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

$$\text{y } m = 1, 2, \dots, \infty \quad (17)$$

Estas expresiones ya fueron obtenidas anteriormente por Avilés y Sánchez-Sesma (5) al estudiar el problema de barreras de pilotes rígidos para ondas SH, SV y P.

Cuando $\mu_p = 0$ se tiene el caso límite de cavidades y las expresiones 14 y 15 se reducen a

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j + \frac{2}{\epsilon_m} \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} A_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

y $m = 0, 1, \dots, \infty$ (18)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \frac{H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} B_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\psi, \ell=1, 2, \dots, P$$

y $m = 1, 2, \dots, \infty$ (19)

Repitiendo el mismo proceso de solución para el caso de incidencia de una onda cilíndrica, es posible llegar a

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j + \frac{2}{\epsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m'(k_s a)} \right] A_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{j\ell}) A_n^j = -2w_0 (-i)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0\ell}) \cos m\theta_{0\ell}$$

$\ell=1, 2, \dots, P$ y $m = 0, 1, \dots, \infty$ (20)

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j + \left[\frac{H_m^{(2)}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] B_m^\ell +$$

$$(1-\delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{j\ell}) B_n^j = -2w_0 (-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0\ell}) \sin m\theta_{0\ell}$$

$$\ell = 1, 2, \dots, P \text{ y } m = 1, 2, \dots, \infty \quad (21)$$

donde $d_{0\ell}$ = distancia entre la fuente y el ℓ -ésimo pilote y
 $\theta_{0\ell}$ = ángulo entre la fuente y el ℓ -ésimo pilote (ver fig 3).

Análizando los sistemas de ecuaciones resultantes, se puede observar que el tipo de frente de onda modifica sólo los términos independientes y el tipo de difractor, pilote elástico o rígido y cavidad, modifica sólo los coeficientes diagonales.

3. MODELO TRIDIMENSIONAL

Se presentan en seguida la formulación y solución del problema para el caso del modelo tridimensional. El método de análisis que se emplea es el que se usó para el modelo bidimensional. Sin embargo, aquí no se puede obtener la solución exacta, ya que en la solución se establece una hipótesis que consiste en suponer que el campo difractado por cada pilote está dado solamente por ondas de Rayleigh. Esto implica que las condiciones de continuidad y equilibrio en las interfases suelo-pilote no se puedan satisfacer idénticamente, siendo necesario recurrir a un método variacional, mínimos cuadrados (28), para satisfacer aproximadamente las condiciones de frontera en dichas interfases.

3.1. Formulación del problema

En un medio elástico lineal, isótropo y homogéneo, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento armónico están dadas por las ecuaciones de Navier (10,18):

$$\mu_s \nabla^2 \{\delta\} + (\lambda_s + \mu_s) \nabla \nabla \cdot \{\delta\} + \rho_s \omega^2 \{\delta\} = \{0\} \quad (22)$$

donde $\{\delta\}$ = vector de desplazamientos con componentes radial u_r , tangencial v_θ y vertical w_z ; λ_s = constante de Lamé del suelo, ∇^2 = operador laplaciano, ∇ = operador gradiente y $\nabla \cdot$ = operador divergencia.

Según el teorema de Helmholtz (4), la solución se puede construir de la siguiente forma:

$$\{\delta\} = \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi) + \nabla \times (0, 0, \chi) \quad (23)$$

donde ϕ , ψ y χ = potenciales de desplazamientos de ondas P, SV y SH, respectivamente; $\nabla \times$ = operador rotacional. Sustituyendo esta expresión en la ec 22, se obtiene que esta última se satisface si

$$\nabla^2 \phi + q_s^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi + k_s^2 \psi = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \chi + k_s^2 \chi = 0 \quad (24)$$

donde $q_s = \omega/\alpha_s$ = número de onda de compresión y

$\alpha_s = \sqrt{(\lambda_s + 2\mu_s)/\rho_s}$ = velocidad de propagación de ondas de compresión.

Si se supone que el campo difractado por cada pilote está dado solamente por ondas superficiales de Rayleigh, los únicos potenciales que existen son ϕ y ψ acoplados. Entonces, empleando el principio de superposición el campo total se puede encontrar a partir de

$$\phi = \phi^i + \sum_{j=1}^P \phi_j^r \quad (25)$$

$$\psi = \psi^i + \sum_{j=1}^P \psi_j^r \quad (26)$$

donde ϕ^i y ψ^i = potenciales incidentes y ϕ_j^r y ψ_j^r = potenciales difractados por el j -ésimo pilote.

Si la excitación es una onda plana de Rayleigh que incide normalmente a la barrera (ver fig 3), la solución de campo libre en el sistema de coordenadas (x_1, y_1) está definida por los potenciales

$$\phi^i = Ae^{\gamma z} \exp(-ip_s y_1) e^{i\omega t} \quad (27)$$

$$\psi^i = Be^{\gamma z} \exp(-ip_s y_1) e^{i\omega t} \quad (28)$$

donde $p_s = \omega/C_s$ = número de onda de Rayleigh, C_s = velocidad

de propagación de ondas de Rayleigh, $\gamma = \sqrt{p_s^2 - q_s^2}$ y $v = \sqrt{p_s^2 - k_s^2}$. Las constantes A y B y la velocidad C_s , que se determinan al imponer las condiciones de esfuerzos nulos en la superficie libre, están dadas por

$$(2 - C_s^2/\beta_s^2)^2 - 4 \sqrt{1 - C_s^2/\alpha_s^2} \sqrt{1 - C_s^2/\beta_s^2} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{A}{B} = - \frac{p_s}{2} \frac{2 - C_s^2/\beta_s^2}{\sqrt{1 - C_s^2/\alpha_s^2}} \quad (30)$$

Aplicando el método de separación de variables a las ecs 24, se encuentra que los potenciales difractados por el j-ésimo pilote se pueden expresar en el sistema de coordenadas (r_j, θ_j) como (4, 31)

$$\phi_j^r(r_j, \theta_j) = Ae^{\gamma z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(p_s r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(p_s r_j) \sin n\theta_j \right] \quad (31)$$

$$\psi_j^r(r_j, \theta_j) = Be^{\nu z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(p_s r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(p_s r_j) \sin n\theta_j \right] \quad (32)$$

donde A_n^j y B_n^j = coeficientes complejos indeterminados que se determinan al satisfacer las condiciones de frontera en el sentido de mínimos cuadrados.

Si los pilotes se modelan como vigas de Euler-Bernoulli con deformaciones axiales, el movimiento armónico del j-ésimo pilote se puede representar por

$$U_j(z, t) = U_j(z) e^{i\omega t} \quad (33)$$

$$V_j(z, t) = V_j(z) e^{i\omega t} \quad (34)$$

$$W_j(z, t) = W_j(z) e^{i\omega t} \quad (35)$$

donde $U_j(z)$, $V_j(z)$ y $W_j(z)$ = amplitudes complejas de los movimientos en las direcciones x , y , z , respectivamente.

Las condiciones de frontera que se deben satisfacer en las interfases suelo-pilote son de continuidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas. Las condiciones de continuidad son (ver fig 4)

$$u_r(a, \theta_\ell, z) = U_\ell(z) \cos \theta_\ell + V_\ell(z) \sin \theta_\ell \quad (36)$$

$$v_\theta(a, \theta_\ell, z) = -U_\ell(z) \sin \theta_\ell + V_\ell(z) \cos \theta_\ell \quad (37)$$

$$w_z(a, \theta_\ell, z) = W_\ell(z) \quad (38)$$

Y las de equilibrio son (23, 32)

$$E_p I_p \frac{\partial^4 U_\ell(z, t)}{\partial z^4} + m_p \frac{\partial^2 U_\ell(z, t)}{\partial t^2} = p_x^\ell(z) e^{i\omega t} \quad (39)$$

$$E_p I_p \frac{\partial^4 V_\ell(z, t)}{\partial z^4} + m_p \frac{\partial^2 V_\ell(z, t)}{\partial t^2} = p_y^\ell(z) e^{i\omega t} \quad (40)$$

$$E_p A_p \frac{\partial^2 W_\ell(z, t)}{\partial z^2} - m_p \frac{\partial^2 W_\ell(z, t)}{\partial t^2} = -p_z^\ell(z) e^{i\omega t} \quad (41)$$

donde $E_p I_p$ = rigidez a la flexión de los pilotes, $E_p A_p$ = rigidez axial de los pilotes y m_p = masa por unidad de longitud de los pilotes; $p_x^\ell(z)$, $p_y^\ell(z)$ y $p_z^\ell(z)$ = fuerzas resultantes que actúan sobre el ℓ -ésimo pilote en las direcciones x , y , z , respectivamente.

Las fuerzas $p_x^\ell(z)$, $p_y^\ell(z)$ y $p_z^\ell(z)$ están dadas por (ver fig 5)

$$p_x^\ell(z) = a \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z) \cos \theta_\ell - \sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z) \sin \theta_\ell] d\theta_\ell \quad (42)$$

$$p_y^\ell(z) = a \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z) \sin \theta_\ell + \sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z) \cos \theta_\ell] d\theta_\ell \quad (43)$$

$$p_z^\ell(z) = a \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}(a, \theta_\ell, z) d\theta_\ell \quad (44)$$

donde las componentes cilíndricas del esfuerzo en la superficie θ - z del ℓ -ésimo pilote, $\sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z)$, $\sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z)$ y $\sigma_{rz}(a, \theta_\ell, z)$, se obtienen con (3)

$$\sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z) = \left[\lambda_s \left(\frac{\partial u_r(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial r_\ell} + \frac{u_r(r_\ell, \theta_\ell, z)}{r_\ell} + \frac{1}{r_\ell} \frac{\partial v_\theta(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial \theta_\ell} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial w_z(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial z} \right) + 2\mu_s \frac{\partial u_r(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial r_\ell} \Bigg] \Bigg|_{r_\ell = a} \quad (45)$$

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z) = \left[\mu_s \left(\frac{\partial v_\theta(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial r_\ell} - \frac{v_\theta(r_\ell, \theta_\ell, z)}{r_\ell} + \frac{1}{r_\ell} \frac{\partial u_r(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial \theta_\ell} \right) \right] \Bigg|_{r_\ell = a} \quad (46)$$

$$\sigma_{rz}(a, \theta_\ell, z) = \left[\mu_s \left(\frac{\partial u_r(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial z} + \frac{\partial w_z(r_\ell, \theta_\ell, z)}{\partial r_\ell} \right) \right] \Big|_{r_\ell = a} \quad (47)$$

Obsérvese que en las condiciones de continuidad se considera nula la rotación de los pilotes; esto se debe al hecho de suponer que en el suelo se propagan solamente ondas de Rayleigh, las cuales carecen de rotacional en la dirección z . Además, nótese que el desplazamiento en z producido por $U'_\ell(z)$ y $V'_\ell(z)$ se desprecia por ser pequeño.

3.2 Solución

Para obtener la solución del problema es necesario imponer las condiciones de continuidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas en cada una de las interfases suelo-pilote. Para esto conviene representar el campo $\{\delta\}$ referido a un sistema de coordenadas cualquiera (r_ℓ, θ_ℓ, z) , lo cual se consigue si los potenciales ϕ y ψ se expresan en (r_ℓ, θ_ℓ, z) con la ayuda del teorema de adición de Graf, los potenciales incidentes ϕ^i y ψ^i se desarrollan en serie de funciones de ondas cilíndricas y se realizan las operaciones que definen el campo $\{\delta\}$. Haciendo todo esto es posible obtener:

$$u_r(r_\ell, \theta_\ell, z) = p_s F(z) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J'_m(p_s r_\ell)] + (1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s r_\ell) A_m^\ell + \right.$$

$$\begin{aligned}
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s r_\ell) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j \cos m\theta_\ell + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m \text{sen } m\psi J'_m(p_s r_\ell) + (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m J'_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + \\
& H_m^{(2)}(p_s r_\ell) B_m^\ell + (1-\delta_{\ell P}) J'_m(p_s r_\ell) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j] \text{sen } m\theta_\ell \} \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_\theta(r_\ell, \theta_\ell, z) &= \frac{F(z)}{r_\ell} \left\{ - \sum_{m=0}^{\infty} m [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s r_\ell) + \right. \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s r_\ell) A_m^\ell + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \text{sen } m\theta_\ell + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} m [2(-i)^m \text{sen } m\psi J_m(p_s r_\ell) + (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + \\
& H_m^{(2)}(p_s r_\ell) B_m^\ell + (1-\delta_{\ell P}) J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j] \cos m\theta_\ell \} \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_z(r_\ell, \theta_\ell, z) &= G(z) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s r_\ell) + \right. \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s r_\ell) A_m^\ell + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \cos m\theta_\ell + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m \text{sen } m\psi J_m(p_s r_\ell) + (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m J_m(p_s r_\ell) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j +
\end{aligned}$$

$$H_m^{(2)}(p_s r_\ell) B_m^\ell + (1 - \delta_{\ell P}) J_m(p_s r_\ell) \left[\sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j \right] \sin m\theta_\ell \} \quad (50)$$

donde $F(z) = Ae^{\gamma z} + \nu Be^{\nu z}$
 $G(z) = \gamma Ae^{\gamma z} + p_s^2 Be^{\nu z}$

El procedimiento que se sigue para satisfacer las condiciones de frontera consiste en despejar $U_\ell(z)$, $V_\ell(z)$ y $W_\ell(z)$ de las ecuaciones de equilibrio, sustituir en las de continuidad y resolver estas en el sentido de mínimos cuadrados. Siguiendo este procedimiento, primero es necesario calcular $p_x^\ell(z)$, $p_y^\ell(z)$ y $p_z^\ell(z)$ y por consiguiente $\sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z)$, $\sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z)$ y $\sigma_{rz}(a, \theta_\ell, z)$. De acuerdo con las ecs 45, 46 y 47:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \theta_\ell, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \{ \epsilon_m (-i)^m \cos m\psi [\lambda_s P(z) J_m(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) J_m''(p_s a)] + \\ & (1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} [\lambda_s P(z) J_m(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) J_m''(p_s a)] \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + \\ & [\lambda_s P(z) H_m^{(2)}(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) H_m^{(2)''}(p_s a)] A_m^\ell + \\ & (1 - \delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} [\lambda_s P(z) J_m(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) J_m''(p_s a)] \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j \} \times \\ & \cos m\theta_\ell + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2(-i)^m \sin m\psi [\lambda_s P(z) J_m(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) J_m''(p_s a)] + \\ & (1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m [\lambda_s P(z) J_m(p_s a) + 2\mu_s p_s^2 F(z) J_m''(p_s a)] \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\lambda_S P(z) H_m^{(2)}(p_S a) + 2\mu_S p_S^2 F(z) H_m^{(2)''}(p_S a)] B_m^\ell + \\
& (1-\delta_{\ell P}) [\lambda_S P(z) J_m(p_S a) + 2\mu_S p_S^2 F(z) J_m''(p_S a)] \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_S d_{j\ell}) B_n^j \} \times \\
& \text{sen } m\theta_\ell \tag{51}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta_\ell, z) = 2\mu_S \frac{F(z)}{a} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} m [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi \left(\frac{J_m(p_S a)}{a} - p_S J_m'(p_S a) \right) + \right.$$

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} \left(\frac{J_m(p_S a)}{a} - p_S J_m'(p_S a) \right) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_S d_{j\ell}) A_n^j +$$

$$\left. \left(\frac{H_m^{(2)}(p_S a)}{a} - p_S H_m^{(2)'}(p_S a) \right) A_m^\ell + (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} \left(\frac{J_m(p_S a)}{a} - p_S J_m'(p_S a) \right) \times \right.$$

$$\left. \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_S d_{j\ell}) A_n^j \right] \text{sen } m\theta_\ell +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m [2(-i)^m \text{sen } m\psi (p_S J_m'(p_S a) - \frac{J_m(p_S a)}{a}) +$$

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m (p_S J_m'(p_S a) - \frac{J_m(p_S a)}{a}) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_S d_{j\ell}) B_n^j +$$

$$(p_S H_m^{(2)'}(p_S a) - \frac{H_m^{(2)}(p_S a)}{a}) B_m^\ell + (1-\delta_{\ell P}) (p_S J_m'(p_S a) - \frac{J_m(p_S a)}{a}) \times$$

$$\left. \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_S d_{j\ell}) B_n^j \right] \cos m\theta_\ell \tag{52}$$

$$\sigma_{rz}(a, \theta_\ell, z) = \mu_S p_S Q(z) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m'(p_S a) + \right.$$

$$(1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m'(p_S a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_S d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)'}(p_S a) A_m^\ell +$$

$$\begin{aligned}
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \cos m\theta_{\ell} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} [2(-i)^m \text{sen } m\psi J'_m(p_s a) + (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m J'_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + \\
& H_m^{(2)}(p_s a) B_m^{\ell} + (1-\delta_{\ell P}) J'_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j] \text{sen } m\theta_{\ell} \quad (53)
\end{aligned}$$

donde $P(z) = (\gamma^2 - p_s^2) A e^{\gamma z}$
 $Q(z) = 2\gamma A e^{\gamma z} + (\nu^2 + p_s^2) B e^{\nu z}$

Sustituyendo estas expresiones en las ecs 42, 43 y 44, se obtiene:

$$\begin{aligned}
p_x^{\ell}(z) &= \pi a [\lambda_s P(z) - 2\mu_s p_s^2 F(z)] \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m1} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s a) + \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^{\ell} + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_y^{\ell}(z) &= \pi a [\lambda_s P(z) - 2\mu_s p_s^2 F(z)] \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{m1} [2(-i)^m \text{sen } m\psi J_m(p_s a) + \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-i)^m J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) B_m^{\ell} + \\
& (1-\delta_{\ell P}) J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j] \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z^\ell(z) = & 2\pi a u_s p_s Q(z) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m0} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J'_m(p_s a) + \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^\ell + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (56)
\end{aligned}$$

Conocidas las fuerzas $p_x^\ell(z)$, $p_y^\ell(z)$ y $p_z^\ell(z)$, es posible obtener los desplazamientos $U_\ell(z)$, $V_\ell(z)$ y $W_\ell(z)$, en términos de los coeficientes A_n^j y B_n^j , resolviendo las ecs 39, 40 y 41, respectivamente.

Solución de la ec 39: Sustituyendo la ec 33 en la 39 se obtiene:

$$E_P I_P \frac{d^4 U_\ell(z)}{dz^4} - m_P \omega^2 U_\ell(z) = p_x^\ell(z) \quad (57)$$

La solución general de esta ecuación se puede generar como

$$U_\ell(z) = U_\ell^p(z) + U_\ell^h(z) \quad (58)$$

donde $U_\ell^p(z)$ = solución particular y $U_\ell^h(z)$ = solución homogénea.

La solución particular se obtiene empleando el método de coeficientes indeterminados (29):

$$\begin{aligned}
U_{\ell}^P(z) = & (C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{\nu z}) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m1} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s a) + \\
& (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^{\ell} + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\text{donde } C_1 = \frac{\pi a [\lambda_s (\gamma^2 - p_s^2) - 2\mu_s p_s^2] A}{\gamma^4 E_p I_p - m_p \omega^2} \text{ y } C_2 = - \frac{2\pi a \mu_s \nu p_s^2 B}{\nu^4 E_p I_p - m_p \omega^2}$$

La solución homogénea está dada por (29)

$$\begin{aligned}
U_{\ell}^h(z) = & (C_3 \cos qz + C_4 \sin qz + C_5 \cosh qz + C_6 \sinh qz) \times \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m1} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s a) + (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \times \\
& \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^{\ell} + \\
& (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (60)
\end{aligned}$$

donde $q^4 = m_p \omega^2 / E_p I_p$; C_3 , C_4 , C_5 y C_6 son constantes que se obtienen a partir de las condiciones de frontera en los extremos del ℓ -ésimo pilote y resultan ser independientes de ℓ .

Las condiciones de frontera en la cabeza del ℓ -ésimo pilote son

$$\left. \frac{d^2 U_\ell(z)}{dz^2} \right|_{z=0} = 0 \quad (61)$$

$$\left. \frac{d^3 U_\ell(z)}{dz^3} \right|_{z=0} = 0 \quad (62)$$

En la punta del ℓ -ésimo pilote las condiciones de frontera se aproximan, suponiendo que las reacciones del suelo que actúan en esta son las que se generan en un disco rígido circular que se balancea y desliza en la superficie libre de un semi-espacio (25). Según esto, las condiciones de frontera en la punta del ℓ -ésimo pilote son

$$\left. -E_p I_p \frac{d^2 U_\ell(z)}{dz^2} \right|_{z = -H} = -K_f \left. \frac{dU_\ell(z)}{dz} \right|_{z = -H} \quad (63)$$

$$\left. -E_p I_p \frac{d^3 U_\ell(z)}{dz^3} \right|_{z = -H} = K_c U_\ell(z) \Big|_{z = -H} \quad (64)$$

donde $K_f = 8\mu_s a^3 / 3(1-\nu_s) + i\omega 0.8a^4 \sqrt{\mu_s \rho_s} / (1-\nu_s)$ = rigidez dinámica a la flexión del resorte equivalente, $K_c = 32(1-\nu_s)\mu_s a / (7-8\nu_s) + i\omega 18.4(1-\nu_s)a^2 \sqrt{\mu_s \rho_s} / (7-8\nu_s)$ = rigidez dinámica al

cortante del resorte equivalente y $\nu_s =$ módulo de Poisson del suelo; $H =$ longitud de los pilotes flotantes. Las partes reales de K_f y K_c corresponden a las rigideces estáticas, y las imaginarias son las necesarias para representar adecuadamente las rigideces dinámicas (25).

Resolviendo numéricamente las ecs 61, 62, 63 y 64 se determinan las constantes C_3 , C_4 , C_5 y C_6 ; conocidas estas el desplazamiento del ℓ -ésimo pilote en la dirección x , ec 58, se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 U_{\ell}(z) = R(z) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m1} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s a) + \\
 (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^{\ell} + \\
 (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (65)
 \end{aligned}$$

donde $R(z) = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{\nu z} + C_3 \cos qz + C_4 \sin qz + C_5 \cosh qz + C_6 \sinh qz$.

Solución de la ec 40: Comparando la ec 40 con la 39, se concluye que el desplazamiento del ℓ -ésimo pilote en la dirección y está dado por

$$V_{\ell}(z) = R(z) \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{m1} [2(-i)^m \sin m\psi J_m(p_s a) +$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) B_m^\ell + \\
 & (1-\delta_{\ell P}) J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j] \quad (66)
 \end{aligned}$$

Solución de la ec 41: Resolviendo esta ecuación diferencial, se encuentra que el desplazamiento del ℓ -ésimo pilote en la dirección z es

$$\begin{aligned}
 W_\ell(z) = S(z) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m0} [\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J'_m(p_s a) + \\
 (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) A_m^\ell + \\
 (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J'_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j] \quad (67)
 \end{aligned}$$

donde $S(z) = D_1 e^{\gamma z} + D_2 e^{\nu z} + D_3 \cos pz + D_4 \sin pz$ y $p^2 = m_p \omega^2 / E_p A_p$. D_1 y D_2 son constantes de la solución particular que se obtienen con el método de coeficientes indeterminados; $D_1 = -\frac{4\pi a \mu_s \gamma p_s A}{\gamma^2 E_p A_p + m_p \omega^2}$ y $D_2 = -\frac{2\pi a \mu_s (\nu^2 + p_s^2) p_s B}{\nu^2 E_p A_p + m_p \omega^2}$. D_3 y D_4

son constantes de la solución homogénea que se obtienen a partir de las condiciones de frontera en los extremos del ℓ -ésimo pilote y resultan ser independientes de ℓ ; dichas condiciones de frontera son

$$\left. \frac{dW_\ell(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (68)$$

$$E_p A_p \left. \frac{dW_\ell(z)}{dz} \right|_{z=-H} = K_a W_\ell(z) \Big|_{z=-H} \quad (69)$$

donde $K_a = 4\mu_s a / (1-\nu_s) + i\omega 3.4a^2 \sqrt{\mu_s \rho_s} / (1-\nu_s) =$ rigidez dinámica axial del resorte equivalente. La parte real de K_a corresponde a la rigidez estática para un disco rígido circular que se incrusta en la superficie libre de un semiespacio, y la imaginaria es la necesaria para representar adecuadamente la rigidez dinámica (25).

Una vez resueltas las ecuaciones de equilibrio quedan por resolver las de continuidad. Sustituyendo las ecs 48, 49, 50 y 65, 66, 67 en las 36, 37 y 38, es posible obtener seis sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas, que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & [p_s F(z) J'_m(p_s a) - R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a)] (1-\delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} x \\ & \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + [p_s F(z) H_m^{(2)}(p_s a) - R(z) \delta_{m1} H_m^{(2)}(p_s a)] A_m^\ell + \\ & [p_s F(z) J'_m(p_s a) - R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a)] (1-\delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} x \\ & \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j = - [p_s F(z) J'_m(p_s a) - R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a)] x \\ & \epsilon_m (-1)^m \cos m\psi, \quad -\infty < z < 0, \quad \ell=1, 2, \dots, P \quad \text{y} \quad m=0, 1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (70)$$

$$\left[\frac{F(z)}{a} m - R(z) \delta_{m1} \right] \left[(1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + \right. \\ \left. H_m^{(2)}(p_s a) A_m^\ell + (1 - \delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j \right] = -$$

$$\left[\frac{F(z)}{a} m - R(z) \delta_{m1} \right] \epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(p_s a), \quad -\infty < z < 0,$$

$$\ell = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty \quad (71)$$

$$\left[G(z) J_m(p_s a) - S(z) \delta_{m0} J_m'(p_s a) \right] (1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m \frac{\epsilon_m^{\ell-1}}{2} \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j + \\ \left[G(z) H_m^{(2)}(p_s a) - S(z) \delta_{m0} H_m^{(2)'}(p_s a) \right] A_m^\ell + \left[G(z) J_m(p_s a) - S(z) \delta_{m0} J_m'(p_s a) \right] \times \\ (1 - \delta_{\ell P}) \frac{\epsilon_m}{2} \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(p_s d_{j\ell}) A_n^j = - \left[G(z) J_m(p_s a) - S(z) \delta_{m0} J_m'(p_s a) \right] \times$$

$$\epsilon_m (-i)^m \cos m\psi, \quad -\infty < z < 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty \quad (72)$$

$$\left[p_s F(z) J_m'(p_s a) - R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a) \right] (1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j +$$

$$\left[p_s F(z) H_m^{(2)'}(p_s a) - R(z) \delta_{m1} H_m^{(2)}(p_s a) \right] B_m^\ell + \left[p_s F(z) J_m'(p_s a) -$$

$$R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a) \right] (1 - \delta_{\ell P}) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j = -$$

$$\left[p_s F(z) J_m'(p_s a) - R(z) \delta_{m1} J_m(p_s a) \right] 2(-i)^m \sin m\psi, \quad -\infty < z < 0,$$

$$\ell = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (73)$$

$$\left[\frac{F(z)}{a} m - R(z) \delta_{m1} \right] \left[(1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + \right. \\ \left. H_m^{(2)}(p_s a) B_m^\ell + (1 - \delta_{\ell P}) J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j \right] = - \\ \left[\frac{F(z)}{a} m - R(z) \delta_{m1} \right] 2(-i)^m \text{sen } m\psi J_m(p_s a), \quad -\infty \leq z < 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, P \text{ y}$$

$$m = 1, 2, \dots, \infty \quad (74)$$

$$G(z) \left[(1 - \delta_{\ell 1}) (-1)^m J_m(p_s a) \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j + H_m^{(2)}(p_s a) B_m^\ell + \right. \\ \left. (1 - \delta_{\ell P}) J_m(p_s a) \sum_{j=\ell+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(p_s d_{j\ell}) B_n^j \right] = -G(z) 2(-i)^m \text{sen } m\psi J_m(p_s a), \\ -\infty \leq z < 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, P \text{ y } m = 1, 2, \dots, \infty \quad (75)$$

Los sistemas de ecuaciones 70, 71 y 72 así como los 73, 74 y 75 no se pueden satisfacer idénticamente; es por ello que se resuelven en el sentido de mínimos cuadrados. Para hacer esto conviene expresar dichos sistemas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [p_s F(z) [M_r^a]_f + R(z) [M_r^a]_r] \\ [F(z)/a [M_0^a]_f + R(z) [M_0^a]_r] \\ [G(z) [M_z^a]_g + S(z) [M_z^a]_s] \end{bmatrix} \{A\} = \begin{bmatrix} \{p_s F(z) \{V_r^a\}_f + R(z) \{V_r^a\}_r\} \\ \{F(z)/a \{V_0^a\}_f + R(z) \{V_0^a\}_r\} \\ \{G(z) \{V_z^a\}_g + S(z) \{V_z^a\}_s\} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} [p_s F(z) [M_r^b]_f + R(z) [M_r^b]_r] \\ [F(z)/a [M_\theta^b]_f + R(z) [M_\theta^b]_r] \\ [G(z) [M_z^b]_g + S(z) [M_z^b]_s] \end{bmatrix} \{B\} = \begin{bmatrix} \{p_s F(z) \{V_r^b\}_f + R(z) \{V_r^b\}_r\} \\ \{F(z)/a \{V_\theta^b\}_f + R(z) \{V_\theta^b\}_r\} \\ \{G(z) \{V_z^b\}_g + S(z) \{V_z^b\}_s\} \end{bmatrix} \quad (77)$$

donde $\{A\}$ y $\{B\}$ = vectores con los coeficientes A_n^j y B_n^j , respectivamente. Los superíndices a y b indican asociamiento con los vectores $\{A\}$ y $\{B\}$, respectivamente; los subíndices internos r, θ y z con las condiciones de continuidad en las direcciones r, θ y z, respectivamente y los subíndices externos f, r, g y s con las funciones F(z), R(z), G(z) y S(z), respectivamente.

Resolviendo el sistema de ecuaciones matriciales 76, en el sentido de mínimos cuadrados (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} & [p_s^2 \int_{-H}^0 F^2(z) dz [M_r^{a*}]_f^T [M_r^a]_f + 1/p_s^2 a^2 [M_\theta^{a*}]_f^T [M_\theta^a]_f] + \\ & \int_{-H}^0 G^2(z) dz [M_z^{a*}]_g^T [M_z^a]_g + \int_{-H}^0 R^2(z) dz [M_r^{a*}]_r^T [M_r^a]_r + \\ & [M_\theta^{a*}]_r^T [M_\theta^a]_r + \int_{-H}^0 S^2(z) dz [M_z^{a*}]_s^T [M_z^a]_s + \\ & p_s \int_{-H}^0 F(z) R(z) dz [M_r^{a*}]_f^T [M_r^a]_r + [M_r^{a*}]_r^T [M_r^a]_f + \\ & 1/p_s a [M_\theta^{a*}]_f^T [M_\theta^a]_r + 1/p_s a [M_\theta^{a*}]_r^T [M_\theta^a]_f + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-H}^0 G(z) S(z) dz \left[[M_z^{a*}]_g^T [M_z^a]_s + [M_z^{a*}]_s^T [M_z^a]_g \right] \{A\} = \\
& \left\{ p_s^2 \int_{-H}^0 F^2(z) dz [M_r^{a*}]_f^T \{V_r^a\} + 1/p_s^2 a^2 [M_\theta^{a*}]_f^T \{V_\theta^a\} \right\} + \\
& \int_{-H}^0 G^2(z) dz [M_z^{a*}]_g^T \{V_z^a\} + \int_{-H}^0 R^2(z) dz [M_r^{a*}]_r^T \{V_r^a\} + \\
& [M_\theta^{a*}]_r^T \{V_\theta^a\} + \int_{-H}^0 S^2(z) dz [M_z^{a*}]_s^T \{V_z^a\} + \\
& p_s \int_{-H}^0 F(z) R(z) dz \left\{ [M_r^{a*}]_f^T \{V_r^a\} + [M_r^{a*}]_r^T \{V_r^a\} + 1/p_s a [M_\theta^{a*}]_f^T \{V_\theta^a\} + \right. \\
& \left. 1/p_s a [M_\theta^{a*}]_r^T \{V_\theta^a\} \right\} + \int_{-H}^0 G(z) S(z) dz \left\{ [M_z^{a*}]_g^T \{V_z^a\} + \right. \\
& \left. [M_z^{a*}]_s^T \{V_z^a\} \right\} \quad (78)
\end{aligned}$$

donde * indica matriz conjugada y T traspuesta. Las integrales que aparecen en esta ecuación matricial son muy sencillas pero sus desarrollos son demasiados largos para ser presentados aquí. El sistema infinito de ecuaciones algebraicas, ec 78, se puede resolver si se truncan adecuadamente todos los desarrollos infinitos tal que la solución converja.

Resolviendo el sistema de ecuaciones matriciales 77, en el sentido de mínimos cuadrados, se obtiene una ecuación matricial semejante a la 78, en la que aparecen el superíndice b en lugar del a y el vector {B} en lugar del {A}.

4. RESULTADOS

Se presentan resultados para los modelos bidimensional y tridimensional. Los campos incidentes SV y de Rayleigh dependen de las frecuencias normalizadas

$$\eta_k = \frac{a\omega}{\pi\beta_s} = \frac{2a}{\lambda_k} \text{ y } \eta_p = \frac{a\omega}{\pi C_s} = \frac{2a}{\lambda_p} \quad (79)$$

respectivamente. λ_k y λ_p = longitudes de las ondas incidentes SV y de Rayleigh, respectivamente. Por definición, la frecuencia normalizada es la relación entre el diámetro de los pilotes y la longitud de la onda incidente.

Para todos los resultados que se presentan, los cálculos se realizaron usando un máximo de 10 términos de los desarrollos que definen los campos incidente, difractados y refractados,

siendo suficientes para obtener soluciones estables en el rango de frecuencias considerado; esto se muestra numéricamente con los resultados que se presentan en la tabla 1, los cuales corresponden a los desplazamientos normalizados de los pilotes de una barrera rígida. Las barreras analizadas están formadas de 8 o 9 pilotes con relaciones mecánicas $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $\mu_p/\mu_s = 1000$ para el modelo bidimensional y $E_p/E_s = 1000$ para el tridimensional.

En las figs 6 y 7 se presentan, para el modelo bidimensional e incidencia de ondas planas SV, magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de las rectas $x/a = 0, 9$, respectivamente, para una separación entre pilotes $S/a = 1$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. En estos resultados se puede apreciar el doble efecto de una barrera de pilotes como sistema de aislamiento: generación de amplificaciones antes de la barrera, lado de la incidencia, y abatimientos después de esta. La zona de abatimientos se muestra con detalle en la fig 8 mediante perfiles a lo largo de las rectas $x/a = 0, 3, 6, 9$. Se puede apreciar que a distancias cercanas de la barrera la variación del campo abatido es grande mientras que a distancias lejanas dicha variación es muy suave. Además, obsérvese que a grandes distancias de la barrera el campo abatido experimenta una recuperación uniforme a lo ancho de toda la barrera, tendiendo al campo incidente.

En las figs 9 y 10 se presentan magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de las rectas $y/a = 150, 200$, respectivamente, para diferentes separaciones entre pilotes y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.5$. En estos resultados se pueden observar dos hechos importantes: por un lado, el mayor abatimiento se presenta en el centro de la barrera comportándose esta como una sola obstrucción y no como un conjunto de obstáculos independientes, y por otro, el abatimiento generalmente crece cuando la separación entre pilotes se reduce.

Los resultados que aparecen en la fig 11 muestran la influencia de la rigidez de los pilotes en la efectividad de la barrera. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/a = 14$, para una separación entre pilotes $S/a = 1.5$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Para casos reales la variación de la relación de rigideces no influye considerablemente en la efectividad de la barrera.

En la fig 12 se presenta el campo normalizado de desplazamientos w mediante curvas de nivel, para una separación entre pilotes $S/a = 1$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Estos resultados muestran con detalle la variación del campo abatido, permitiendo localizar la zona de máximo aislamiento. Anali-

zando resultados como estos se encontró que dicha zona se localiza en el tercio medio de la barrera y a una distancia de la misma tal que $150 < y/a < 250$.

Los resultados que se han presentado muestran claramente cual es el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento. Ahora, para medir su efectividad se define un índice de trasmisibilidad, función de la separación entre pilotes S/λ_k , como

$$IT(S/\lambda_k) = \frac{|w^t|}{|w^i|} \quad (80)$$

donde w^t = campo transmitido. Para hacer que IT sea independiente de la posición, w^t se define como el valor mínimo del campo w en la zona de abatimientos. De acuerdo con su definición, el índice de trasmisibilidad variará entre 0 y 1; cuando la barrera permita que el campo incidente pase totalmente, $|w^t| = |w^i|$ y entonces $IT = 1$ y cuando impida totalmente el paso del campo incidente, $|w^t| = 0$ y por lo tanto $IT = 0$.

En la fig 13 se presentan índices de trasmisibilidad para diferentes frecuencias normalizadas. Aquí se puede observar la influencia del diámetro de los pilotes y la separación entre ellos en la efectividad de la barrera definida como $E=1-IT$: cuando el diámetro de los pilotes aumenta o la separación en-

tre ellos se reduce, la efectividad de la barrera se incrementa.

Las curvas de índices de trasmisibilidad pueden ser de gran ayuda para el diseño racional de barreras de pilotes, ya que conocida la longitud de la onda incidente y definida la efectividad deseada, se propone el diámetro de los pilotes o la separación entre ellos; se entra a las curvas de índices de trasmisibilidad y queda definida la variable de diseño.

Por ejemplo, supóngase que se tienen un martinete con $\omega/2\pi = 40$ Hz, una arcilla con $\rho_s = 0.18 \text{ T-s}^2/\text{m}^4$ y $\mu_s = 1200 \text{ T/m}^2$, pilotes de concreto con $\rho_p = 0.24 \text{ T-s}^2/\text{m}^4$ y $\mu_p = 1200\,000 \text{ T/m}^2$ y se desea una efectividad de la barrera $E = 0.5$. Entonces, de acuerdo con los datos: $\rho_p/\rho_s = 1.33$, $\mu_p/\mu_s = 1000$, $\beta_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s} = 82 \text{ m/s}$, $\lambda_k = \frac{2\pi}{\omega} \beta_s = 2 \text{ m}$ y, proponiendo que $a = 0.3 \text{ m}$, $\eta_k = 2a/\lambda_k = 0.3$. Con estos valores se entra a las curvas de índices de trasmisibilidad y se encuentra $S/\lambda_k = 0.25$, con lo que $S = 0.5 \text{ m}$.

El uso de barreras de pilotes como sistema de aislamiento está limitado; el rango de aplicabilidad depende de la definición de barrera efectiva. Supóngase que una barrera es efectiva cuando $E > 0.5$. Entonces, según los resultados que se muestran en la fig 13, $2a/\lambda_k > 0.25$; analizando esta expresión se ve que el rango de aplicabilidad es $\lambda_k < 8a$. Así,

el uso de barreras aisladoras formadas por una línea de pilotes será adecuado solo para el caso de longitudes de onda pequeñas, las cuales se tienen cuando la fuente excitadora es de alta frecuencia y el suelo es blando.

El efecto de la curvatura del frente de onda incidente se muestra en los resultados que aparecen en la fig 14. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/\lambda_k = 2.6$, para diferentes posiciones de la fuente de ondas cilíndricas SV, una separación entre pilotes $S/\lambda_k = 0.25$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. En estos resultados se ve un hecho que era de esperarse: si la distancia R a la que se encuentra localizada la fuente es muy grande el campo abatido tiende al correspondiente a ondas planas, ya que a grandes distancias de la fuente el frente de onda cilíndrico se comporta como plano.

En las figs 15 y 16 se presentan, para el modelo tridimensional con módulo de Poisson $\nu_s = 0.3$, magnitudes normalizadas de los componentes de desplazamientos u , v y w a lo largo de las rectas $x/\lambda_p = 2.8$ y $y/\lambda_p = -3.5$, respectivamente, para una separación entre pilotes $S/\lambda_p = 0.3$, longitud de los pilotes $H/\lambda_p = 2$ y frecuencia normalizada $\eta_p = 0.4$. En estos resultados se puede apreciar el comportamiento del campo de desplazamientos en la zona de amplificaciones. Obsérvense,

en la fig 16, la aparición del componente de desplazamientos u debido a la interacción entre los pilotes y la convergencia del campo de desplazamientos al campo incidente fuera de la barrera. Para el mismo caso, el comportamiento del campo de desplazamientos en la zona de abatimientos, se puede apreciar con los componentes de desplazamientos u , v y w que se presentan en las figs 17 y 18 a lo largo de las rectas $x/\lambda_p = 2.8$ y $y/\lambda_p = 35$, respectivamente. El comportamiento semejante que presentan los componentes de desplazamientos v y w se debe a que solo se propagan ondas de Rayleigh.

La influencia de la longitud de los pilotes, la separación entre ellos y su diámetro en la efectividad de la barrera, se muestra de manera independiente en los resultados que se presentan en las figs 19, 20 y 21, respectivamente. Estos resultados corresponden a magnitudes normalizadas de los componentes de desplazamientos v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = 35$; el componente de desplazamientos u no se presenta por ser poco significativo.

En la fig 19 se presentan resultados para diferentes longitudes de los pilotes, separación entre ellos $S/\lambda_p = 0.3$ y frecuencia normalizada $\eta_p = 0.4$. En estos resultados se puede observar la influencia de un parámetro que en el modelo bidimensional no se puede considerar -la longitud de los pilotes-: cuando esta aumenta el abatimiento sufre un

incremento que es poco significativo si $H/\lambda_p > 4$.

En la fig 20 aparecen resultados que corresponden a diferentes separaciones entre pilotes, longitud de ellos $H/\lambda_p = 2$ y frecuencia normalizada $\eta_p = 0.4$. Aquí los resultados muestran la influencia de la separación entre pilotes, resultando ser parecida a la mostrada en el modelo bidimensional.

En la fig 21 se presentan resultados para diferentes frecuencias normalizadas, separación entre pilotes $S/\lambda_p = 0.3$ y longitud de ellos $H/\lambda_p = 2$. Se puede observar que la influencia del diámetro de los pilotes es similar a la observada en el modelo bidimensional.

Comparando los resultados obtenidos con los modelos bidimensional y tridimensional, se encuentran características de difracción semejantes; esto se debe probablemente a que el movimiento generado por ondas SV es análogo al componente vertical del movimiento generado por ondas de Rayleigh. Para $H/\lambda_p = 2$ se encontró una semejanza considerable en los resultados; entonces, considerando esta longitud de los pilotes, en problemas reales se puede usar la solución bidimensional para estimar razonablemente el diámetro de los pilotes y la separación entre ellos.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método para resolver el problema de aislamiento de cimentaciones, de vibraciones generadas en su cercanía, mediante barreras de pilotes. El problema se modeló en dos y tres dimensiones y se formuló como uno de difracción múltiple de ondas elásticas; para el modelo bidimensional se obtuvo la solución exacta y para el tridimensional una aproximada.

El sistema de aislamiento analizado está formado por una línea de pilotes con sección transversal circular. Los principales parámetros estudiados fueron: (1) Radio de los pilotes, a ; (2) Separación entre pilotes, S ; y (3) Longitud de los pilotes, H . Las conclusiones que se obtuvieron son:

1. El radio de los pilotes debe ser $a > \lambda_p / 8$, para tener una efectividad de la barrera $E > 0.5$.
2. La separación entre pilotes S se determina con curvas de índices de trasmisibilidad.
3. La longitud de los pilotes debe ser $H > 2\lambda_p$.
4. El ancho de la barrera debe ser, como mínimo, tres veces el de la estructura por aislar.
5. La distancia de la barrera a la estructura por aislar debe ser tal que $150a < y < 250a$.

Los demás parámetros no se han analizado con finura; sin embargo, se espera que su influencia en el comportamiento de barreras reales sea poco significativa.

El problema no se ha resuelto completamente; los resultados están sujetos a salvedades debido a que se resolvió un problema ideal. Convendría hacer experimentos en modelos o prototipos a escala a fin de calibrar las soluciones obtenidas. Valdría la pena considerar la presencia de estructuras cercanas o estratos en el suelo, los cuales pueden alterar las características de difracción de los modelos teóricos analizados. Finalmente, para $\lambda_p > 8a$ las barreras aisladoras formadas por una línea de pilotes no son efectivas; es posible que se aumente su efectividad usando líneas de pilotes alternados, ya que el espesor del sistema de aislamien

to resultante se incrementa considerablemente.

6. RECONOCIMIENTOS

Se agradece a Francisco J Sánchez-Sesma, amigo y maestro, la supervisión de esta tesis así como a L Esteva, I Herrera y E Rosenblueth sus observaciones y sugerencias.

7. REFERENCIAS

- ✓ 1. Aboudi, J., "Elastic Waves in Half-Space with Thin Barrier", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 99, No. EM1, Proc. Paper 9536, 1973, pp. 69-83.
2. Abramowitz, M. y Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1970.
3. Achenbach, J.D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.
4. Aki, K. y Richards, P.G., *Quantitative Seismology. Theory and Methods (Volume I)*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
- ✓ 5. Avilés, J. y Sánchez-Sesma, F.J., "Piles as Barriers for Elastic Waves", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 109, No. 9, Proc. Paper 18227, 1983, pp. 1133-1146.

6. Barkan, D.D., *Dynamics of Bases and Foundations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1962.
7. Claerbout, J.F., *Fundamentals of Geophysical Data Processing*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1976.
8. Esquivel, J.A. y Sánchez-Sesma, F.J., "Effects of Canyon Topography on Dynamic Soil-Bridge Interaction for Incident Plane SH Waves", *Proceedings of the VII World Conference on Earthquake Engineering*, Estambul, Turquía, Vol. 2, 1980, pp. 153-160.
9. Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. y Press, F., *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1957.
10. Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1965.
11. Haupt, W.A., "Surface-Waves in Non-Homogeneous Half-Space", *Proceedings of DMSR 77*, Karlsruhe, Alemania, Vol. 1, 1977, pp. 335-367.
12. Herrera, I. y Sabina, F.J., "Connectivity as an Alternative to Boundary Integral Equations. Construction of Bases", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 75, No. 5, 1978, pp. 2059-2063.
13. Herrera, I., "Boundary Methods: A Criterion for Completeness", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 77, No. 8, 1980, pp. 4395-4398.
14. Herrera, I., *Boundary Methods: An Algebraic Theory*, Pitman Publishing Co., Londres, 1984.

15. Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1963.
- ✓ 16. Liào, S. y Sangrey, D.A., "Use of Piles as Isolation Barriers", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 104, No. GT9, Proc. Paper 13999, 1978, pp. 1139-1152.
17. Luco, E. y Contesse, L., "Dynamic Structure-Soil-Structure Interaction", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 63, No. 4, 1973, pp. 1289-1303.
18. Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1969.
- ✓ 19. McGarr, A. y Alsop, L.E., "Transmission and Reflection of Rayleigh Waves at Vertical Boundaries", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 72, No. 8, 1967, pp. 2169-2180.
20. McNeill, R.L., Margason, B.E. y Babcock, F.M., "The Role of Soil Dynamics in the Design of Stable Test Pads", *Guidance and Control Conference*, Minneapolis, Minneapolis, 1965, pp. 366-375.
21. Miller, G.F. y Pursey, H., "On the Partition of Energy between Elastic Waves in a Semi-Infinite Solid", *Proceedings, Royal Society, Londres, Series A*, Vol. 233, 1955, pp. 55-69.
- ✓ 22. Mow, C.C. y Pao, Y.H., *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, The Rand Corporation, R-482-PR, Santa Monica, California, 1971.

23. Newmark, N.M. y Rosenblueth, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1971.
24. Prakash, S., *Soil Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1981.
25. Richart, F.E., Jr., Hall, J.R., Jr. y Woods, R.D., *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1970.
26. Sánchez-Sesma, F.J., Herrera, I. y Avilés, J., "A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction: Application to Scattering of SH Waves by Surface Irregularities", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 72, No. 2, 1982, pp. 473-490.
- ✓ 27. Segol, G., Lee, P.C.Y. y Abel, J.F., "Amplitude Reduction of Surface Waves by Trenches", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 104, No. EM3, Proc. Paper 13848, 1978, pp. 621-641.
28. Sokolnikoff, I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1956.
29. Sokolnikoff, I.S. y Redheffer, R.M., *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1958.
30. Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Inc., Nueva York, 1949.
31. Takeuchi, H. y Saito, M., "Seismic Surface Waves", en *Methods in Computational Physics*, Vol. 11, B.A. Bolt, Editor, Academic Press, Inc., Nueva York, 1972.

32. Timoshenko, S., Young, D.H. y Weaver, W., Jr., *Vibrations Problems in Engineering*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1974.
33. Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Londres, 1966.
- ✓ 34. White, J.E., *Seismic Waves: Radiation, Transmission and Attenuation*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1965.
35. Wong, H.L. y Trifunac, M.D., "Two-Dimensional, Antiplane, Building-Soil-Building Interaction for Two or more Buildings and for Incident Plane SH Waves", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 65, No. 6, 1975, pp. 1863-1885.
- ✓ 36. Woods, R.D. y Richart, F.E., Jr., "Screening of Elastic Surface Waves by Trenches", *Proceedings of the International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, Albuquerque, N.M., 1967, pp. 275-284.
37. Woods, R.D., "Screening of Surface Waves in Soils", *Journal of the Soils Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 94, No. SM4, Proc. Paper 6031, 1968, pp. 951-979.
38. Woods, R.D., Barnett, N.E. y Sagesser, R., "Holography-A New Tool for Soil Dynamics", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 100, No. GT11, Proc. Paper 10949, 1974, pp. 1231-1247.

8. NOTACION

En este trabajo se emplea la siguiente notación:

A = constante

A_p = área de los pilotes

A_n^j = coeficiente complejo

$\{A\}$ = vector de incógnitas complejas

a = radio de los pilotes

B = constante

B_n^j = coeficiente complejo

$\{B\}$ = vector de incógnitas complejas

C_s = velocidad de propagación de ondas de Rayleigh
en el suelo

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ = constantes

C_n^j = coeficiente complejo

- D_1, D_2, D_3, D_4 = constantes
 D_n^j = coeficiente complejo
 $d_{j\ell}$ = distancia centro a centro entre el j -ésimo pilote y el ℓ -ésimo pilote
 $d_{0\ell}$ = distancia entre la fuente y el ℓ -ésimo pilote
 E = efectividad de la barrera
 E_p = módulo de Young de los pilotes
 E_s = módulo de Young del suelo
 $F_m = \sqrt{\frac{\mu_p \rho_p}{\mu_s \rho_s} \frac{J'_m(k_p a)}{J_m(k_p a)}}$
 $F(z) = Ae^{\gamma z} + vBe^{vz}$
 $G(z) = \gamma Ae^{\gamma z} + p_s^2 Be^{vz}$
 H = longitud de los pilotes
 $H_n^{(2)}(.)$ = función de Hankel de segunda especie y orden n
 IT = índice de trasmisibilidad
 I_p = momento de inercia de los pilotes
 $J_n(.)$ = función de Bessel de primera especie y orden n
 K_a = rigidez dinámica axial del resorte equivalente
 K_c = rigidez dinámica al cortante del resorte equivalente
 K_f = rigidez dinámica a la flexión del resorte equivalente
 $K_m^n(.) = H_{n+m}^{(2)}(.) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(.)$
 k_p = número de onda de cortante en los pilotes
 k_s = número de onda de cortante en el suelo
 $L_m^n(.) = -H_{n+m}^{(2)}(.) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(.)$

$[M_r^a]_f, [M_r^a]_r, [M_\theta^a]_f, [M_\theta^a]_r, [M_z^a]_g, [M_z^a]_s$ = matrices de coefi-
cientes complejos

$[M_r^b]_f, [M_r^b]_r, [M_\theta^b]_f, [M_\theta^b]_r, [M_z^b]_g, [M_z^b]_s$ = matrices de coefi-
cientes complejos

m_p = masa por unidad de longitud de los pilotes

P = número de pilotes

$P(z)$ = $(\gamma^2 - p_s^2) A e^{\gamma z}$

p = constante

p_s = número de onda de Rayleigh en el suelo

p_x^l, p_y^l, p_z^l = cargas resultantes que actúan sobre el l -ésimo
pilote en las direcciones x, y, z , respectiva-
mente

$Q(z)$ = $2\gamma A e^{\gamma z} + (v^2 + p_s^2) B e^{vz}$

q = constante

q_s = número de onda de compresión en el suelo

R = distancia entre la fuente y la barrera

$R(z)$ = $C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{vz} + C_3 \cos qz + C_4 \sin qz + C_5 \cosh qz + C_6 \sinh qz$

r, θ, z = coordenadas cilíndricas

S = separación entre pilotes

$S(z)$ = $D_1 e^{\gamma z} + D_2 e^{vz} + D_3 \cos pz + D_4 \sin pz$

t = tiempo

U_ℓ^h = solución homogénea

U_ℓ^p = solución particular



DEPA

U_j, V_j, W_j = movimientos del j-ésimo pilote en las direcciones x, y, z , respectivamente

u, v, w = componentes de desplazamientos del suelo en las direcciones x, y, z , respectivamente

u_r, v_θ, w_z = componentes de desplazamientos del suelo en las direcciones r, θ, z , respectivamente

$\{V_r^a\}_f, \{V_r^a\}_r, \{V_\theta^a\}_f, \{V_\theta^a\}_r, \{V_z^a\}_g, \{V_z^a\}_s$ = vectores de términos independientes complejos

$\{V_r^b\}_f, \{V_r^b\}_r, \{V_\theta^b\}_f, \{V_\theta^b\}_r, \{V_z^b\}_g, \{V_z^b\}_s$ = vectores de términos independientes complejos

w^i = campo incidente

w^t = campo transmitido

w_0 = amplitud o intensidad del campo incidente

w_j = campo refractado en el j-ésimo pilote

w_j^r = campo difractado por el j-ésimo pilote

x, y, z = coordenadas cartesianas

α_s = velocidad de propagación de ondas de compresión en el suelo

β_s = velocidad de propagación de ondas de cortante en el suelo

$\gamma = \sqrt{p_s^2 - q_s^2}$

δ_{lj} = delta de Kronecker

$\{\delta\}$ = vector de desplazamientos

ϵ_m = factor de Neumann

η_k = frecuencia normalizada de ondas SV

- η_p = frecuencia normalizada de ondas de Rayleigh
 $\theta_{0\ell}$ = ángulo entre la fuente y el ℓ -ésimo pilote
 λ_k = longitud de las ondas incidentes SV
 λ_p = longitud de las ondas incidentes de Rayleigh
 λ_s = constante de Lamé del suelo
 μ_p = constante de Lamé de los pilotes
 μ_s = constante de Lamé del suelo
 ν = $\sqrt{p_s^2 - k_s^2}$
 ν_s = módulo de Poisson del suelo
 ρ_p = densidad de los pilotes
 ρ_s = densidad del suelo
 $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}$ = componentes de esfuerzos del suelo en las direcciones r, θ, z , respectivamente.
 ϕ = potencial de desplazamientos de ondas P
 ϕ^i = potencial incidente de ondas P
 ϕ_j^r = potencial de ondas P difractado por el j -ésimo pilote
 χ = potencial de desplazamientos de ondas SH
 ψ = potencial de desplazamientos de ondas SV
 ψ^i = potencial incidente de ondas SV
 ψ_j^r = potencial de ondas SV difractado por el j -ésimo pilote
 ω = frecuencia de excitación
 ∇ = operador gradiente
 $\nabla \cdot$ = operador divergencia

$\nabla \times$ = operador rotacional

∇^2 = operador laplaciano

TABLAS

PILOTE	M=4	M=6	M=8	M=10
1	0.52835062	0.52836213	0.52836226	0.52836226
2	0.58576828	0.58578321	0.58578337	0.58578337
3	0.56593315	0.56593009	0.56593015	0.56593015
4	0.58576828	0.58578321	0.58578337	0.58578337
5	0.52835062	0.52836213	0.52836226	0.52836226

TABLA 1. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos de los pilotes de una barrera rígida con $\rho_p/\rho_s = 1.35$ y $S/a = 1$. Incidencia de ondas SV con $\eta_k = 0.5$

FIGURAS

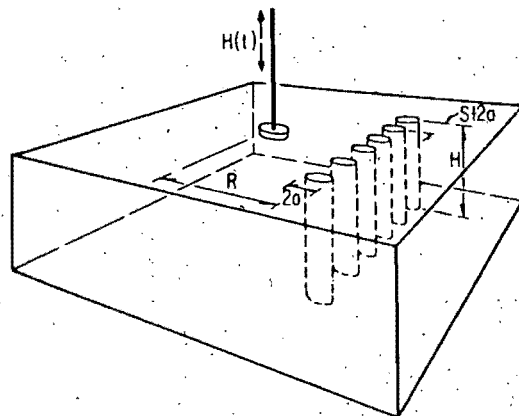


Fig 1. Barrera de pilotes como sistema de aislamiento de cimentaciones

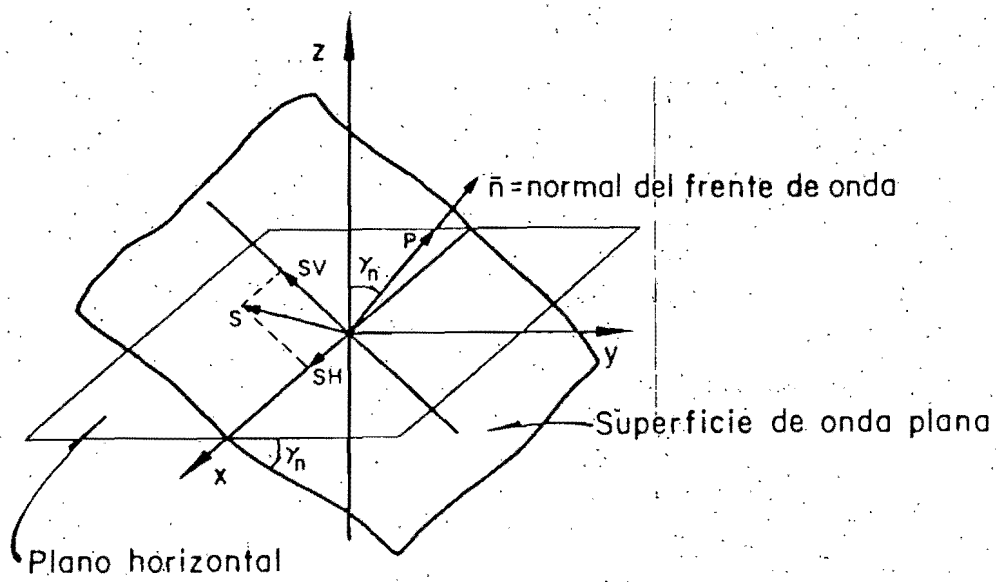


Fig 2. Tipos de ondas planas y sistema de coordenadas de referencia

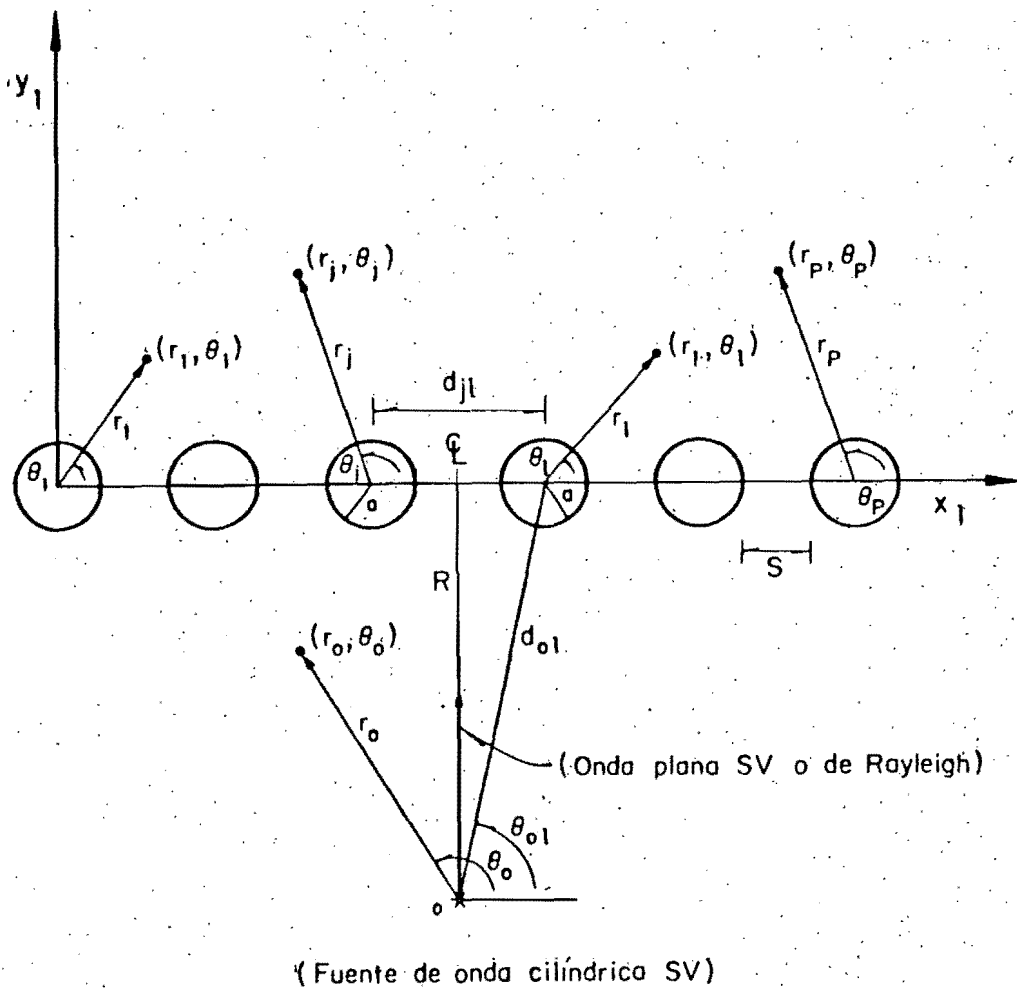
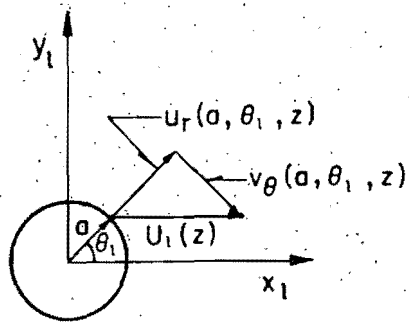


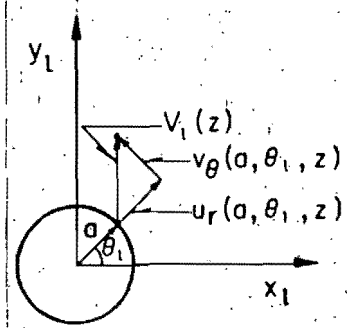
Fig 3. Incidencia de ondas planas y cilíndricas. Sistemas de referencia



$$u_r(a, \theta_1, z) = U_1(z) \cos \theta_1$$

$$v_\theta(a, \theta_1, z) = -U_1(z) \sin \theta_1$$

$$w_z(a, \theta_1, z) \doteq 0$$



$$u_r(a, \theta_1, z) = V_1(z) \sin \theta_1$$

$$v_\theta(a, \theta_1, z) = V_1(z) \cos \theta_1$$

$$w_z(a, \theta_1, z) \doteq 0$$

Fig 4. Condiciones de continuidad de desplazamientos en la interfase suelo-pilote 1

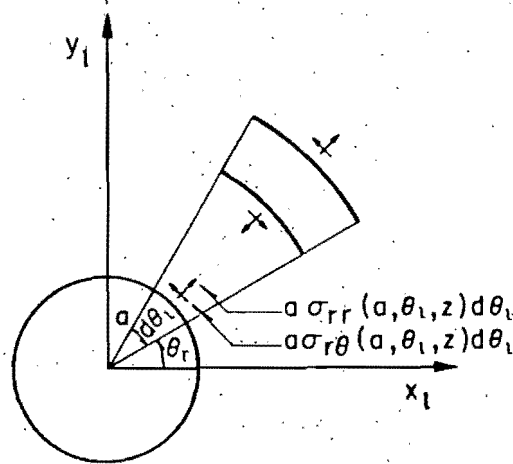


Fig 5. Fuerzas diferenciales que actúan sobre el 1-ésimo pilote

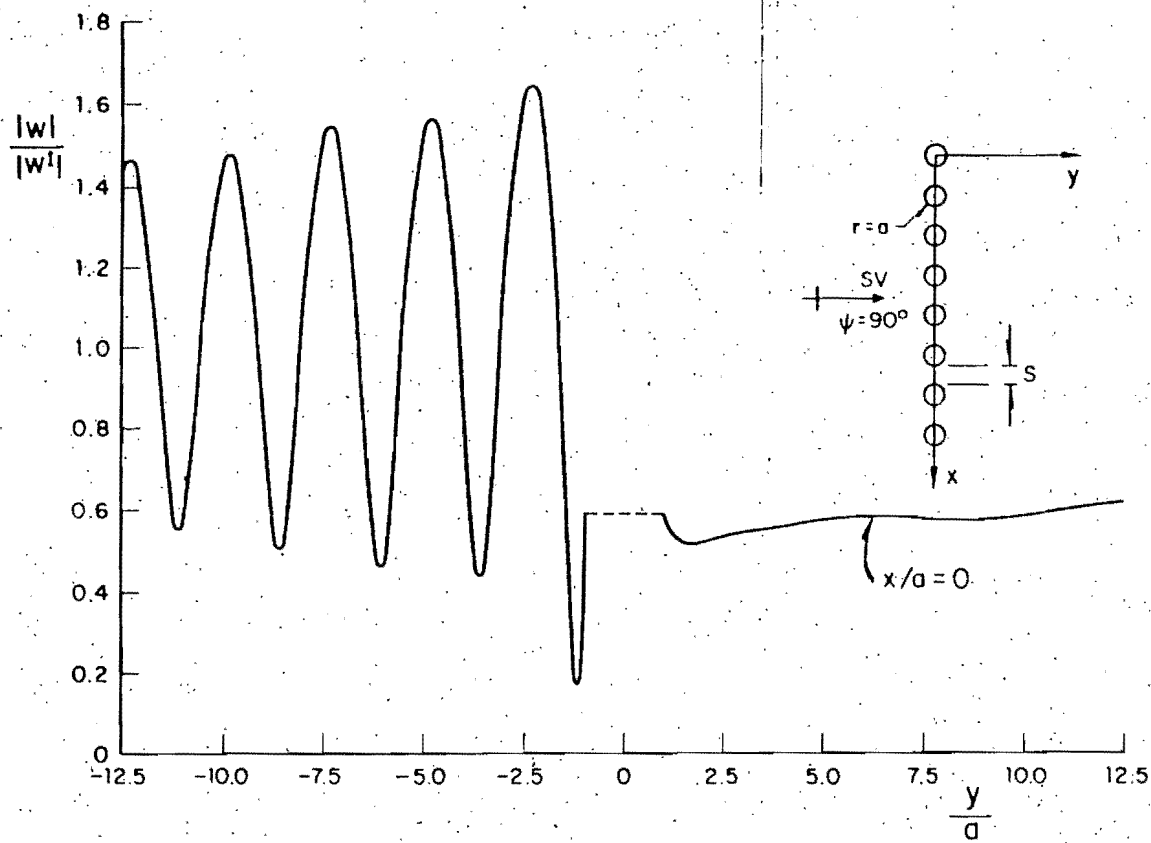


Fig 6. Magnitud normalizada del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/a=0$ para una separación entre pilotes $S/a=1$ y frecuencia normalizada $\eta_k=0.4$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p/\rho_s=1.35$ y $\mu_p/\mu_s=1000$

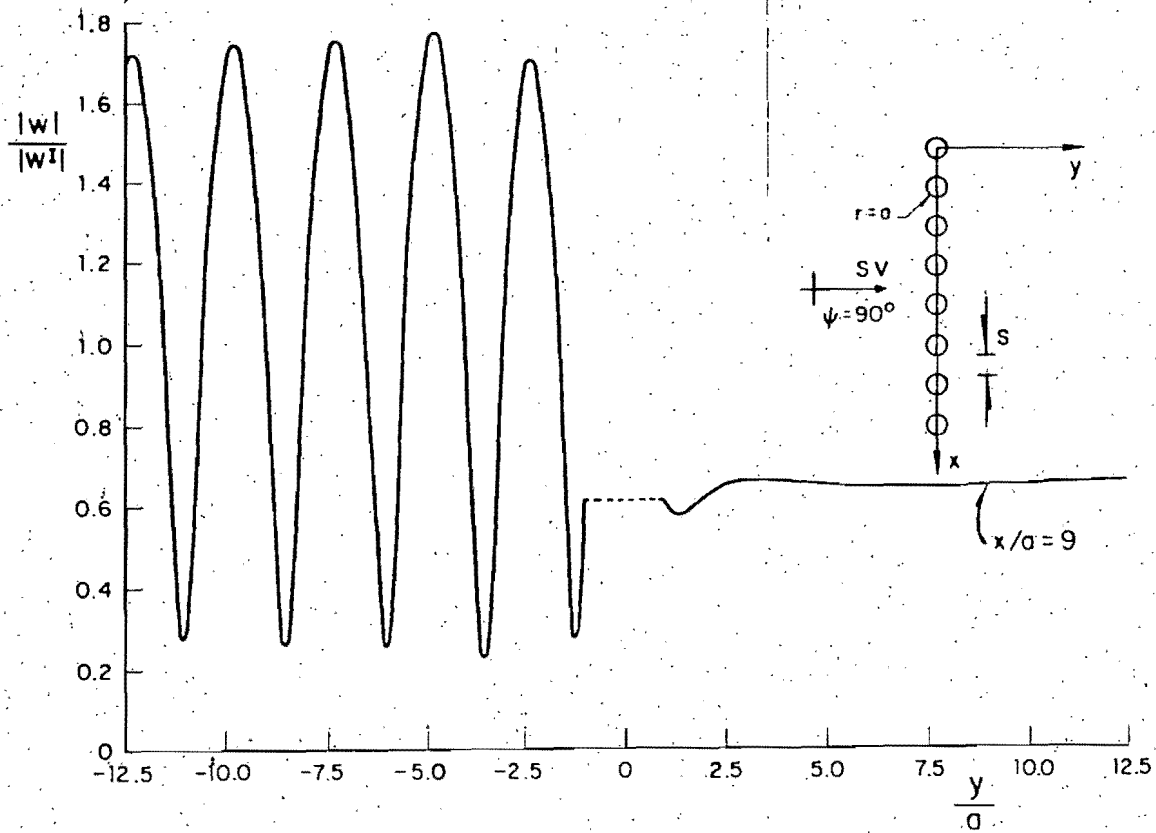


Fig. 7. Magnitud normalizada del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/a=9$ para una separación entre pilotes $S/a=1$ y frecuencia normalizada $\eta_k=0.4$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p/\rho_s=1.35$ y $\mu_p/\mu_s=1000$

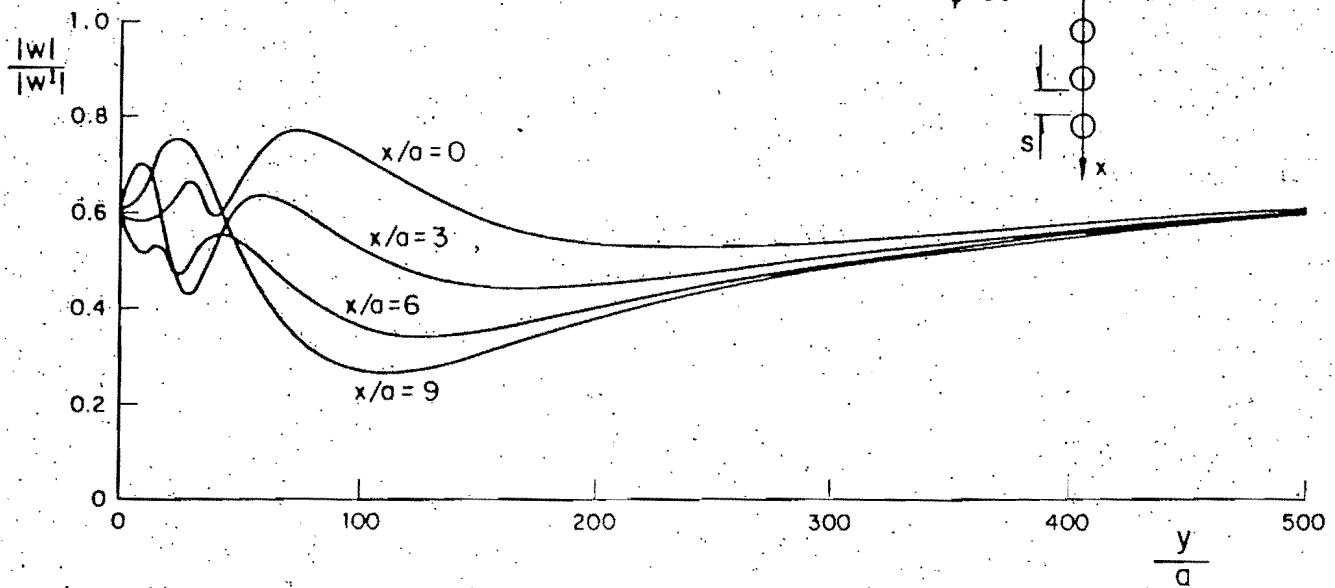


Fig 8. Magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de las rectas $x/a = 0, 3, 6, 9$ para una separación entre pilotes $S/a = 1$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p / \rho_s = 1.35$ y $\mu_p / \mu_s = 1000$

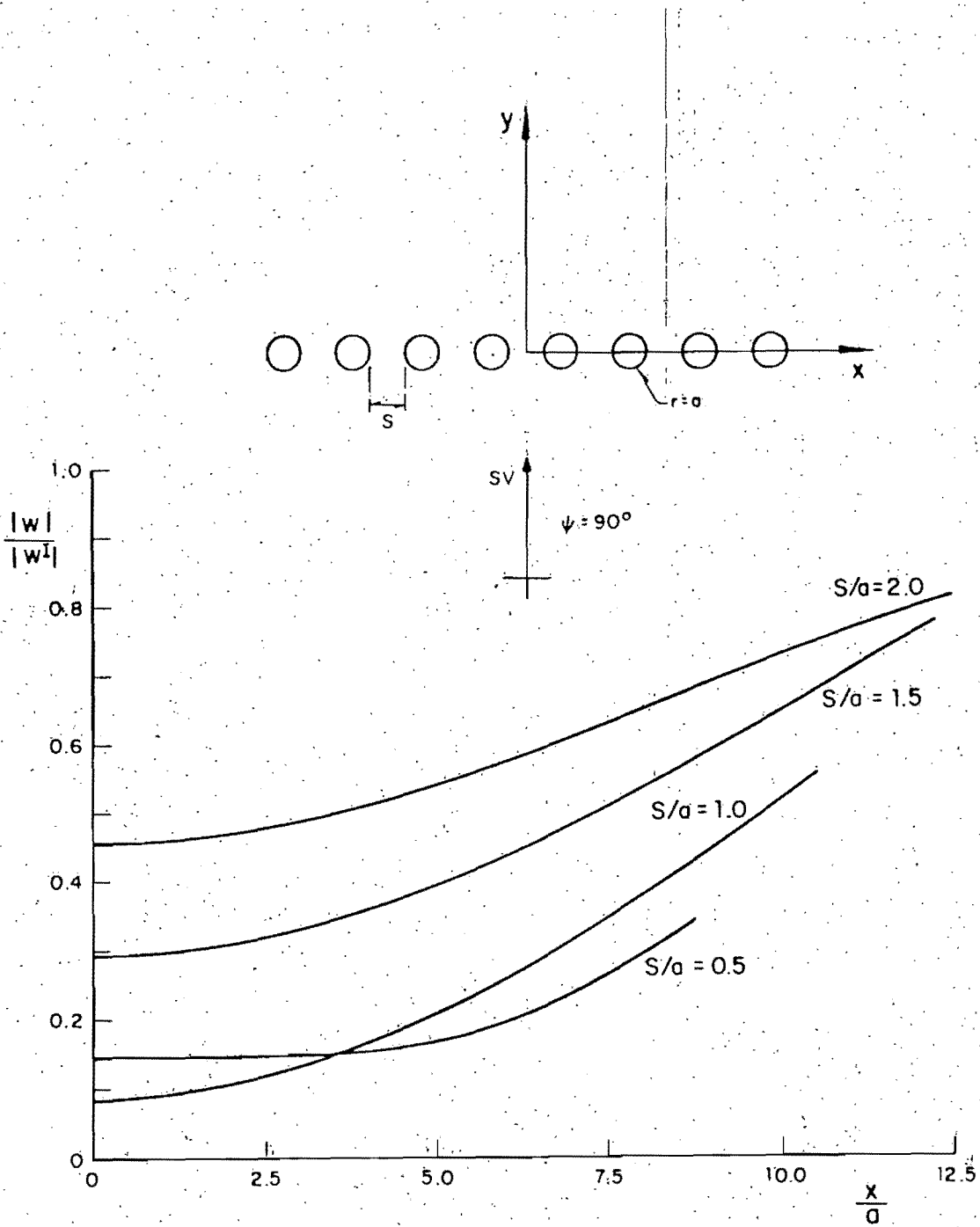


Fig 9. Magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $y/a = 150$ para diferentes separaciones entre pilotes y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.5$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$ y $\mu_p/\mu_s = 1000$

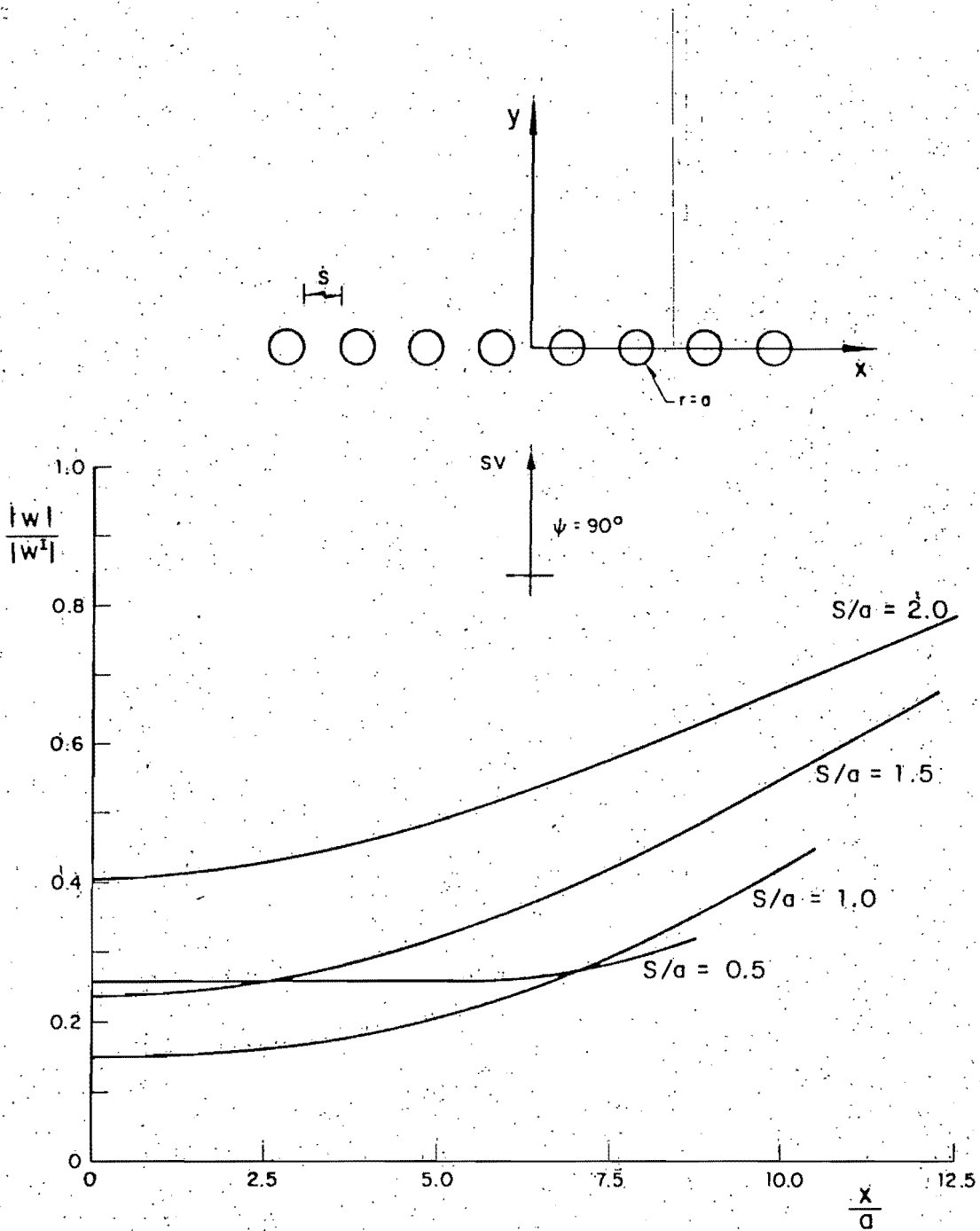


Fig 10. Magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $y/a = 200$ para diferentes separaciones entre pilotes y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.5$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$ y $\mu_p/\mu_s = 1000$

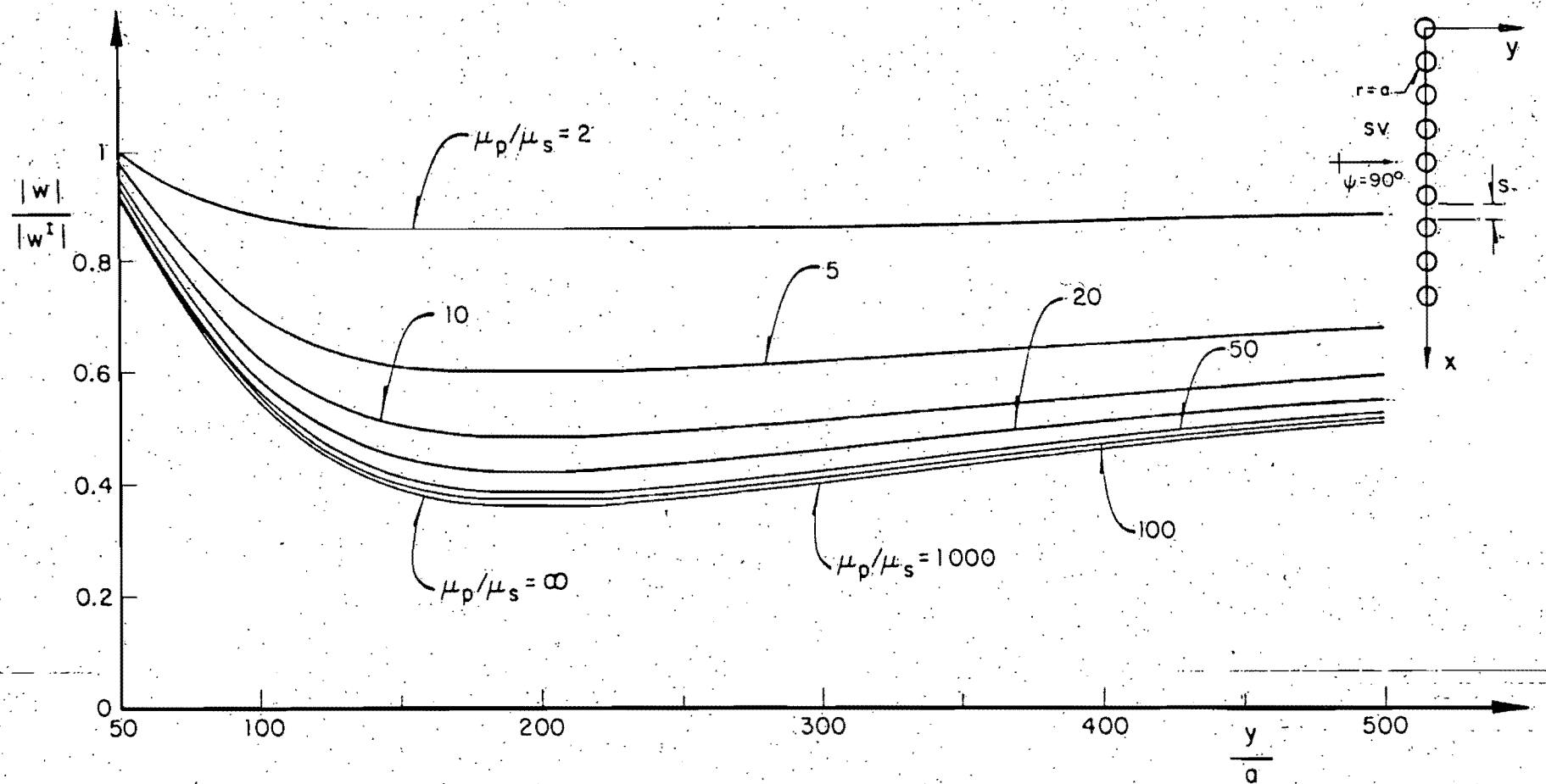


Fig 11. Magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/a = 14$ para una separación entre pilotes $S/a = 1.5$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$ y diferentes relaciones de rigideces.

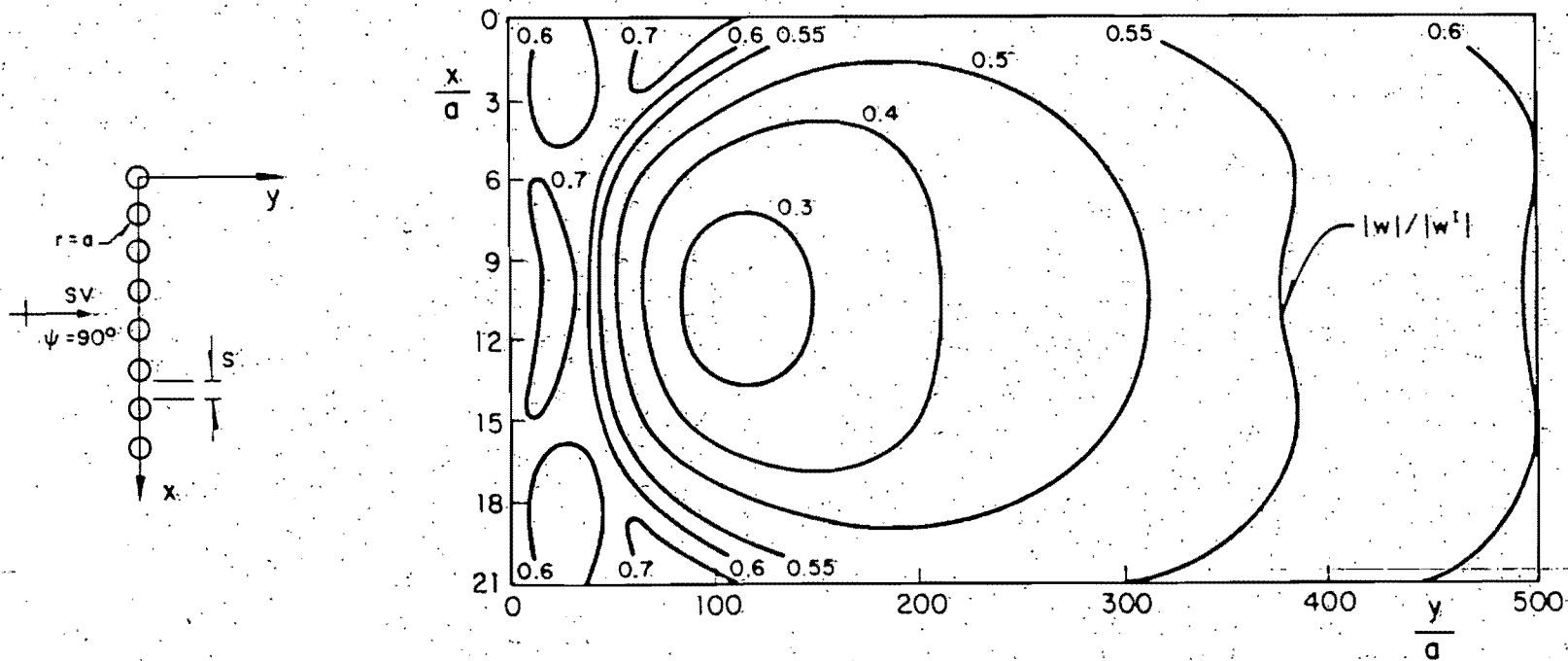


Fig 12. Contornos del campo normalizado de desplazamientos w para una separación entre pilotes $S/a = 1$ y frecuencia normalizada $\eta_k = 0.4$. Barrera aisladora formada de 8 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$ y $\mu_p/\mu_s = 1000$

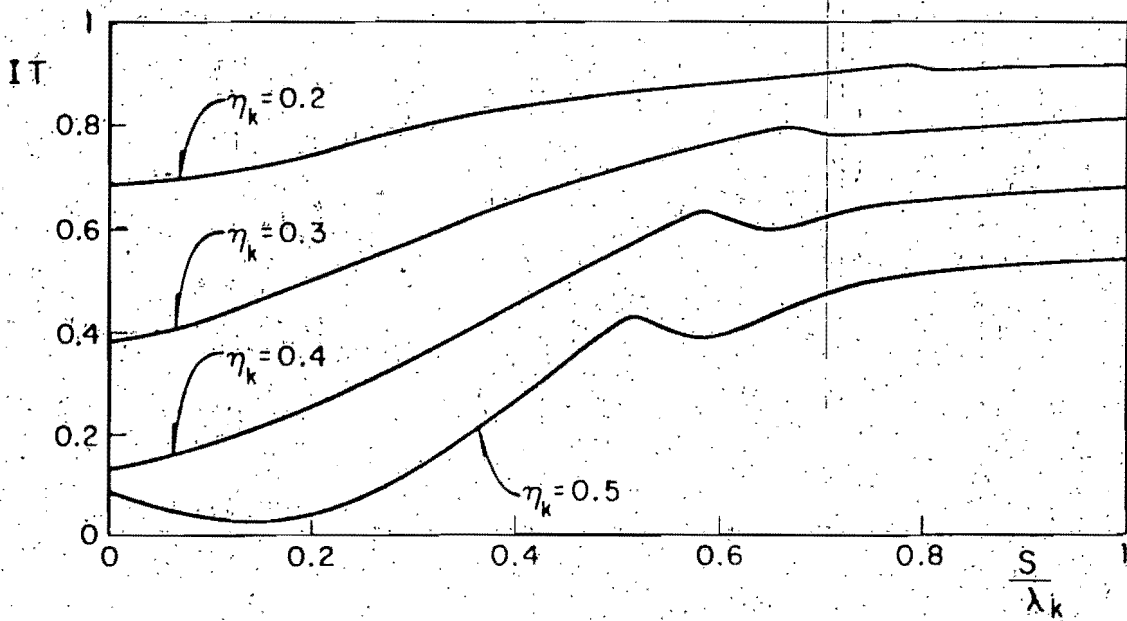


Fig. 13. Indices de transmisibilidad para diferentes frecuencias normalizadas. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $P_p/P_s=1.35$ y $\mu_p/\mu_s=1000$

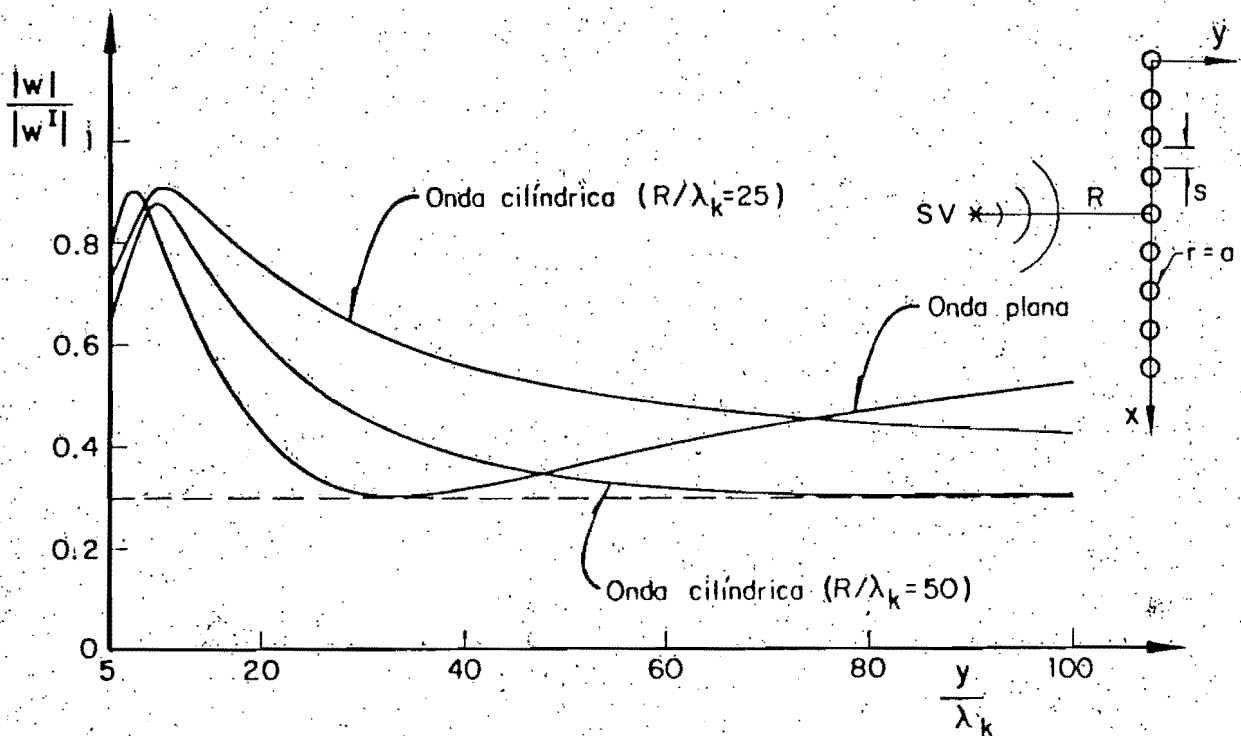


Fig. 14. Magnitudes normalizadas del desplazamiento w a lo largo de la recta $x/\lambda_k=2.6$ para diferentes posiciones de la fuente de onda cilíndrica SV. Separación entre pilotes $S/\lambda_k=0.25$ y frecuencia normalizada $\eta_k=0.4$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $P_p/P_s=1.35$ y $\mu_p/\mu_s=1000$

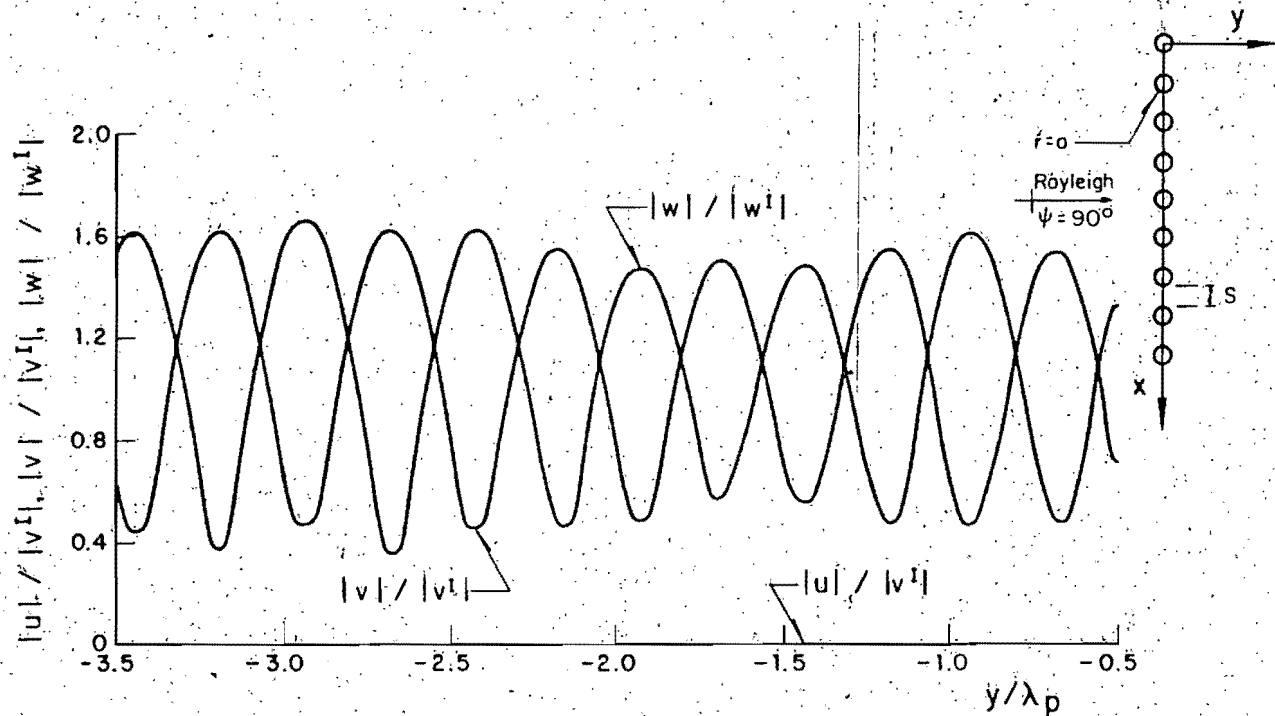


Fig 15. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos u , v y w a lo largo de la recta $x/\lambda_p = 2.8$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$, $S/\lambda_p = 0.3$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

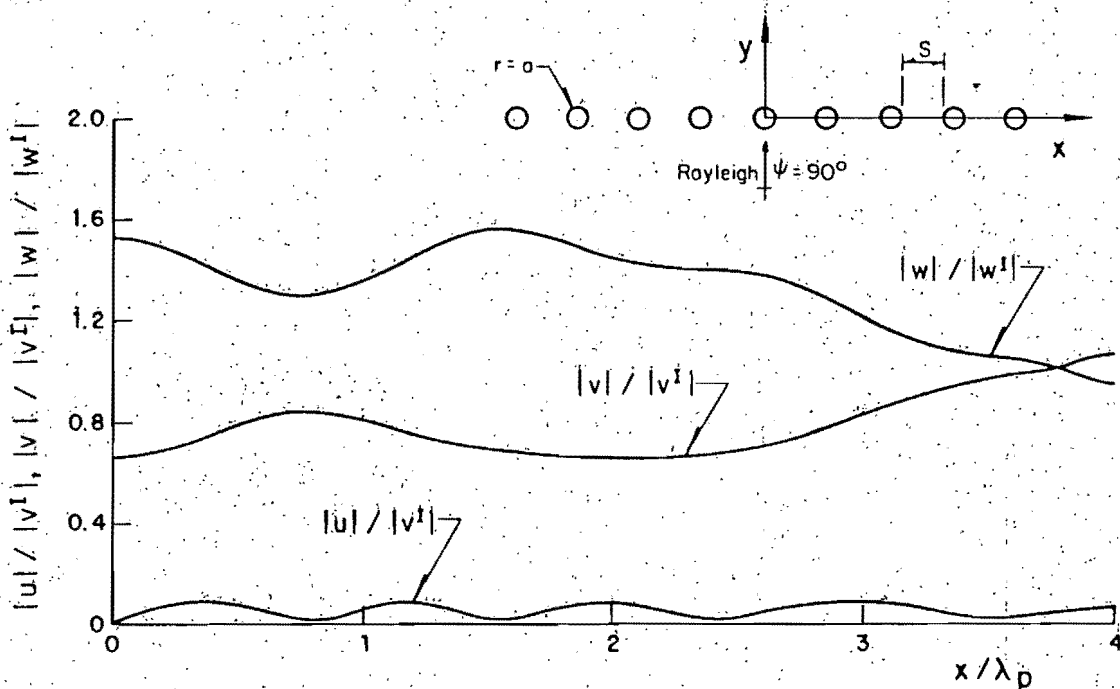


Fig 16. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos u , v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = -3.5$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$, $S/\lambda_p = 0.3$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

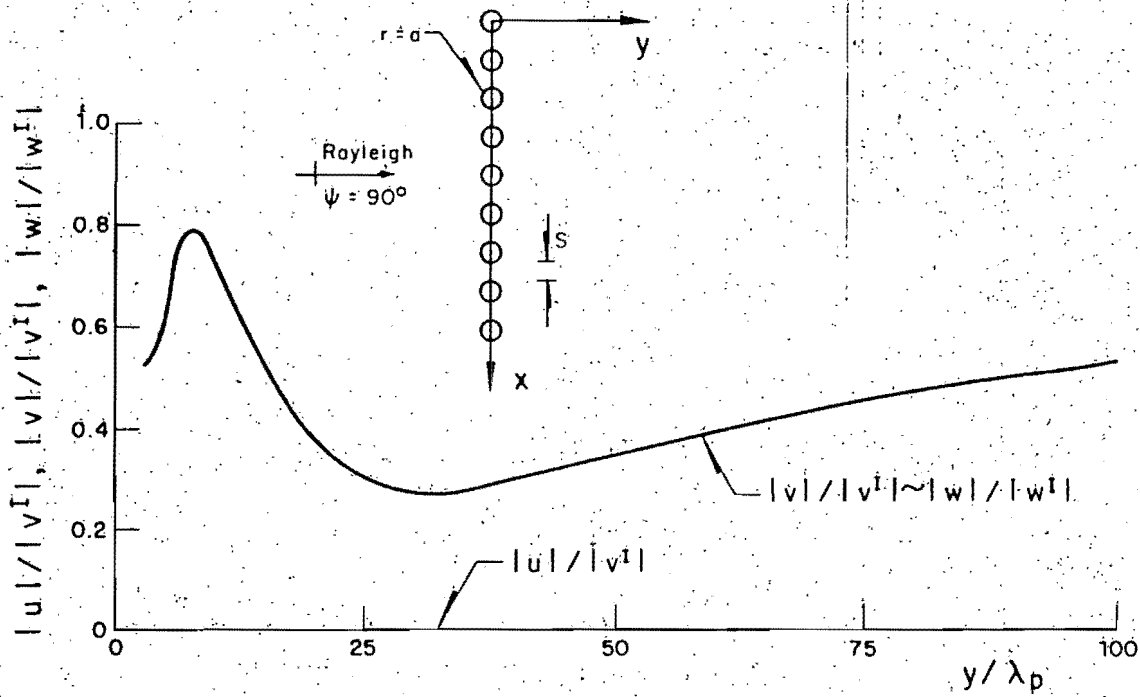


Fig 17. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos u , v y w a lo largo de la recta $x/\lambda_p = 2.8$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$, $S/\lambda_p = 0.3$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

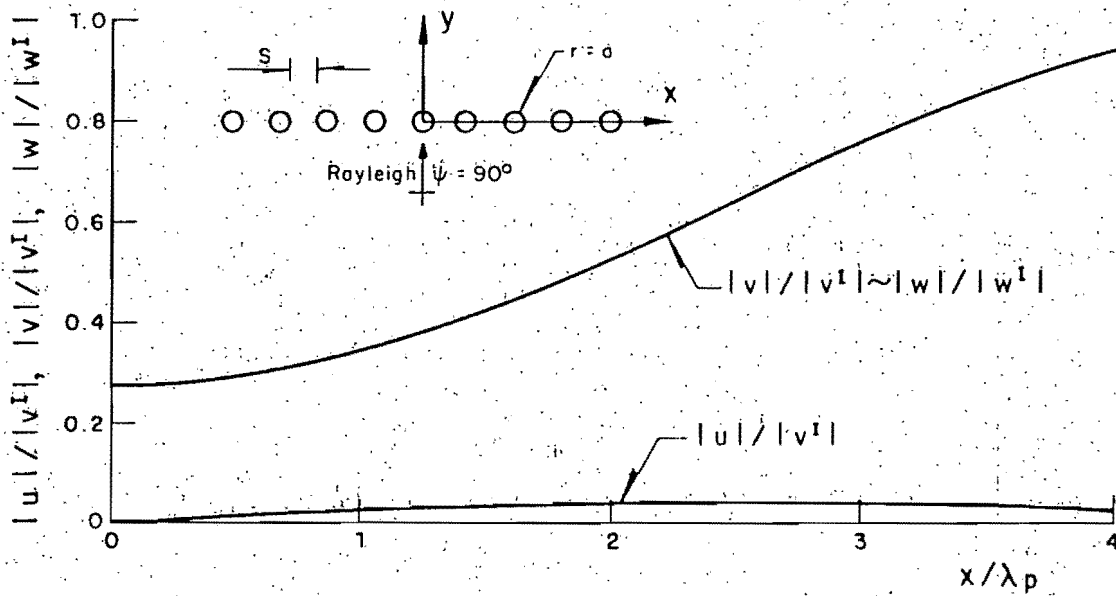


Fig 18. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos u , v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = 35$. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$, $S/\lambda_p = 0.3$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

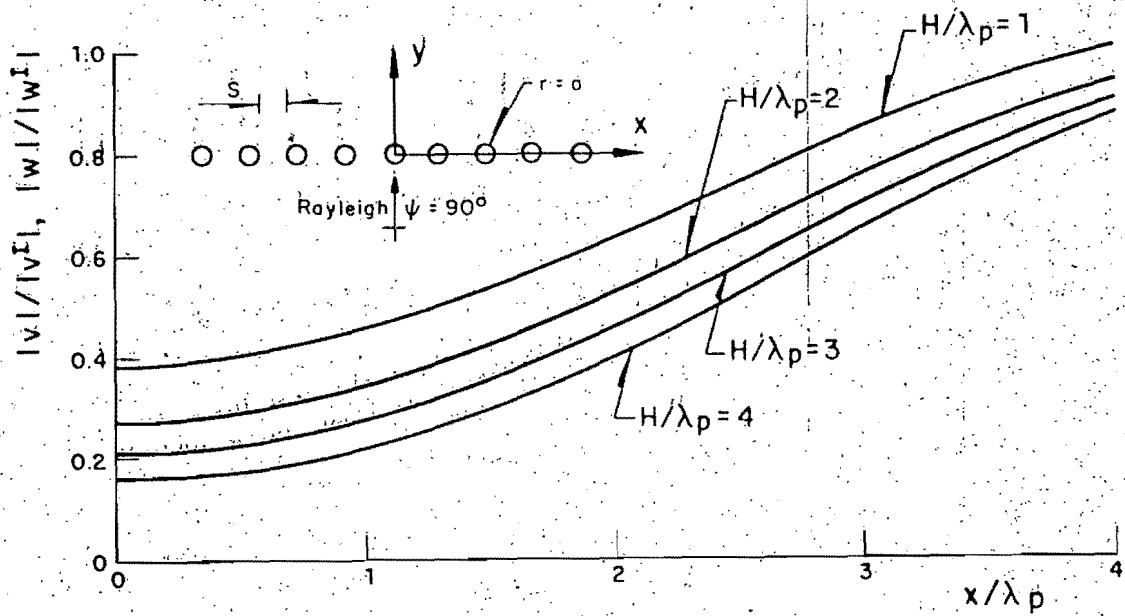


Fig 19. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = 35$ para diferentes longitudes de los pilotes. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$ y $S/\lambda_p = 0.3$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

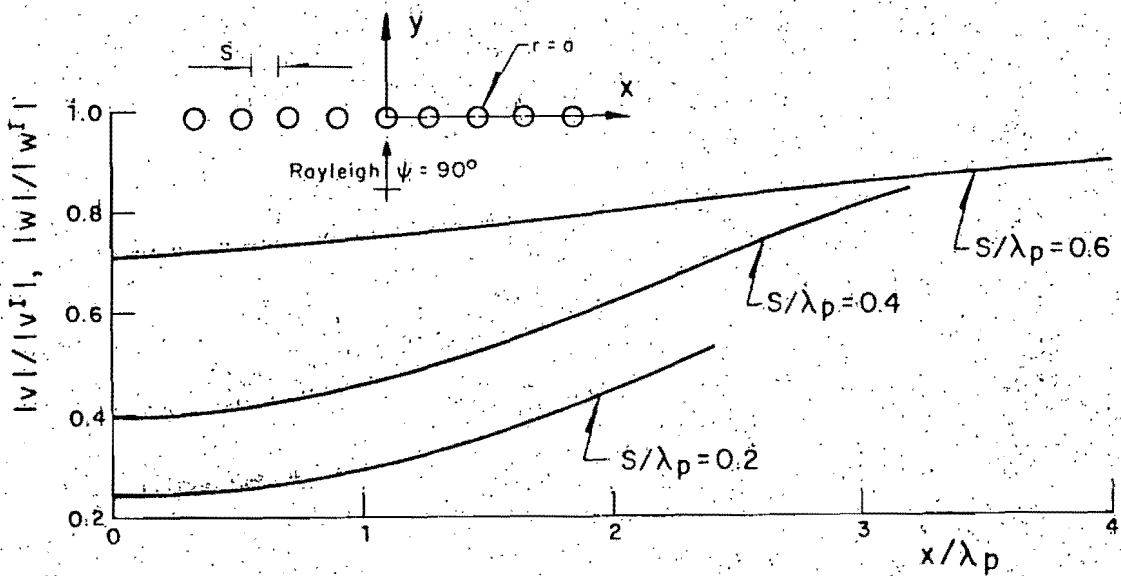


Fig 20. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = 35$ para diferentes separaciones entre pilotes. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$ y $\eta_p = 0.4$

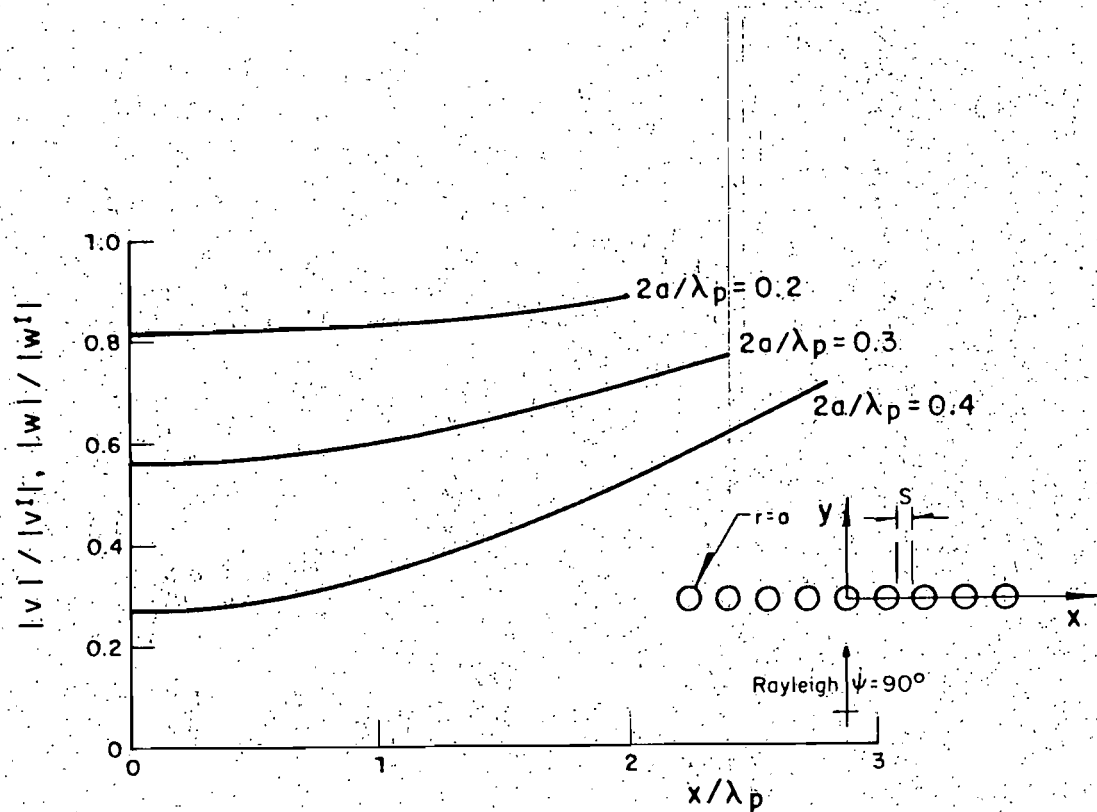


Fig 21. Magnitudes normalizadas de los desplazamientos v y w a lo largo de la recta $y/\lambda_p = 35$ para diferentes frecuencias normalizadas. Barrera aisladora formada de 9 pilotes con $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1000$, $S/\lambda_p = 0.3$ y $H/\lambda_p = 2$; $\nu_s = 0.3$

DEPARTMENT OF AGRICULTURE
OFFICE OF THE SECRETARY

SECRET

OFFICE OF THE SECRETARY
DEPARTMENT OF AGRICULTURE



DEPFI

T. UNAM

1985

AVI

SECRETARIA DE AGRICULTURA
OFFICE OF THE SECRETARY

SECRET