UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ARCOS ORDENADOS LARGOS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. en C. MAURICIO ESTEBAN CHACÓN TIRADO

DIRECTOR DE LA TESIS:
Dr. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMATICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dra. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
Dr. SERGEY ANTONYAN
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE DE 2013

Índice general

Agradecimientos

Hay muchísimas personas e instituciones que contribuyeron a la realización de esta tesis, sabiéndolo o no.

Primero agradezco al CONACyT, por haberme apoyado con una beca de doctorado; a la Universidad Nacional Autónoma de México, por todas las facilidades y apoyos obtenidos; al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por permitirme usar sus instalaciones.

También agradezco de manera especial a mi asesor, el Dr. Alejandro Illanes, por innumerables razones: sus consejos, su paciencia, su apoyo.

El seminario de hiperespacios del Insituto de Matemáticas fue un gran lugar para discutir ideas relacionadas con mi tesis. Agradezco a los asistentes a ese seminario por sus preguntas, dudas y críticas, que ayudaron a mejorar esta tesis.

Agradezco también a los sinodales, que ayudaron a mejorar y aclarar la redacción final de esta tesis: Gerardo, Jorge, Raúl y Michael.

No podía dejar fuera a la persona que vino a cambiarme, que me ha mostrado muchas cosas de la vida, que me hace feliz. Muchas gracias Ivon, por atreverte a entrar en mi vida y mostrarme las cosas lindas de la vida.

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. A partir de un continuo X se pueden definir otros continuos, como por ejemplo $C(X)$, que es el conjunto de subcontinuos de X; 2^X, que es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos cerrados de X; $F_n(X)$, que es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X con a lo más n elementos, para n un número natural; $C_n(X)$, que consiste de los subconjuntos cerrados de X con a lo más n componentes, etc, los anteriores ejemplos están dotados con la topología inducida por la métrica de Hausdorff (2.1 de [16]). En este tipo de construcciones, uno se puede preguntar qué tipos de propiedades de X se heredan a los nuevos espacios creados, o viceversa.

Si tomamos dos elementos $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, es conocido que existe un arco ordenado α en $C(X)$ que los une (14.6 de [IN]), es decir, α es un subcontinuo de $C(X)$ homeomorfo a un arco, cuyos extremos son A y B, tal que para cualesquiera dos elementos $J, K \in \alpha$ se tiene que $J \subset K$ o $K \subset J$. Un *arco ordenado largo* en $C(X)$ es un arco ordenado en $C(X)$ que une a un elemento de la forma $\{x\}$ ($x \in X$) con X.

Sea $AO(X)$ el conjunto que contiene a todos los arcos ordenados de $C(X)$, junto con los elementos de la forma $\{J\}$, con $J \in C(X)$, este conjunto fue estudiado por Curtis y Lynch ([6]), cuando X es un continuo localmente conexo, y caracterizaron aquellos continuos X para los que $AO(X)$ es un cubo de Hilbert, es decir, un producto numerable de intervalos $[0, 1]$.

De la investigación de Curtis y Lynch se observa que X y $AO(X)$ no comparten muchas propiedades, por esta razón, en esta tesis introducimos y estudiamos el conjunto $AOL(X)$ de todos los arcos ordenados largos en $C(X)$, investigamos qué propiedades se heredan de X a $AOL(X)$ y viceversa. También estudiamos cierto tipo de funciones entre los espacios de la forma $AOL(X)$, y observamos que $AOL(X)$ es más parecido a X que $AO(X)$.

Dados un continuo X y un elemento $x \in X$, se construye el hiperespacio

$AOL(x, X)$ de todos los arcos ordenados largos que unen a $\{x\}$ con X. Uno de los resultados principales de esta tesis es que los conjuntos de la forma $AOL(x, X)$ o son degenerados (es decir, poseen un solo elemento), o son homeomorfos al cubo de Hilbert.

Capítulo 1

Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Diremos que un continuo es *degenerado* cuando posee un solo punto, y es *no degenerado* cuando tiene más de un punto. En este trabajo, todos los continuos considerados serán no degenerados, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Dado un continuo X, usualmente denotaremos su métrica por d y llamaremos $C(X)$ al espacio de todos los subcontinuos de X, es decir, todos los subconjuntos de X compactos, conexos y no vacíos. A $C(X)$ lo llamaremos el *hiperespacio de subcontinuos de* X.

Usaremos en la tesis el siguiente lema.

LEMA 1.1. *Sean X un espacio compacto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $x \in X$. Entonces $\lim x_n = x$ si y sólo si toda subsucesión convergente de de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Dados un subconjunto no vacío $A \subset X$ y un punto $p \in X$, definimos

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Podemos definir una métrica H en $C(X)$, llamada *métrica de Hausdorff* (ver Definición (0.1) de [20]) de la siguiente manera. Para dos elementos $A, B \in C(X)$, sea

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_{\varepsilon}(B) \text{ y } B \subset N_{\varepsilon}(A)\},$$

donde

$$N_{\varepsilon}(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\},$$

al conjunto $N_\varepsilon(A)$ se le llama la *nube alrededor de A de radio ε.*

En el teorema 1.13 de [20] se demuestra que el hiperespacio $C(X)$, dotado de la métrica de Hausdorff H, resulta ser un continuo. Cuando hablemos de topología o convergencia en $C(X)$, supondremos que es con la métrica H.

La métrica H induce una métrica a $C(C(X))$, que denotaremos por H_0 para distinguirla de H.

Definimos $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\} \subset C(X)$, a este espacio lo llamamos el *hiperespacio de singulares de X*. Es fácil ver que la función de X en $F_1(X)$ que envía a x en $\{x\}$ es una isometría. Como consecuencia de esto, tenemos que X y $F_1(X)$ son isomorfos.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea X un continuo. Si A, B son subcontinuos de X y $a \in a$, entonces $d(a, B) \leq H(A, B)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(A)$. Entonces $a \in N_\varepsilon(A)$, con lo cual $d(a, B) < \varepsilon$. Se sigue entonces que $d(a, B)$ es cota inferior de tales números ε. Por tanto $d(a, B) \leq H(A, B)$. ■

Dados un continuo X, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$B_\varepsilon(x) = \{p \in X : d(p, x) < \varepsilon\},$$

este conjunto se llama la *bola de radio ε centrada en x.*

LEMA 1.3. *Sean X un continuo, $A, B \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

a) $N_\varepsilon(A) = \bigcup\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$,

b) $N_\varepsilon(A)$ *es abierto en X, y*

c) $H(A, B) < \varepsilon$ *si y sólo si* $A \subset N_\varepsilon(B)$ *y* $B \subset N_\varepsilon(A)$.

Demostración. a) Sea $x \in N_\varepsilon(A)$. Entonces $d(x, A) < \varepsilon$, de modo que existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Luego $x \in B_\varepsilon(a)$. Por otra parte, si empezamos con $x \in B_\varepsilon(a)$ para algún $a \in A$, entonces $d(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon$. Así que $x \in N_\varepsilon(A)$.

b) Es inmediato de a).

c) Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$, $A \subset N_\delta(B) \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\delta(A) \subset N_\varepsilon(A)$.

Ahora supongamos que $A \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(A)$. Dado $a \in A$, se tiene que $a \in N_\varepsilon(B)$, así que $d(a, B) < \varepsilon$. De manera que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Elegimos $\delta_a > 0$ tal que $d(a, b) < \delta_a < \varepsilon$. Entonces $a \in N_{\delta_a}(B)$. Con esto hemos probado que $A \subset \bigcup\{N_{\delta_a}(B) : a \in A\}$. Como A es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset N_{\delta_{a_1}}(B) \cup \cdots \cup N_{\delta_{a_n}}(B)$. Podemos suponer que $\delta_{a_1} \leq \cdots \leq \delta_{a_n} < \varepsilon$. Así que $A \subset N_{\delta_{a_n}}(B)$. Similarmente, existe $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que $B \subset N_\eta(A)$. Sea $\lambda = \text{máx}\{\delta_{a_n}, \eta\}$. Entonces $0 < \lambda < \varepsilon$, $A \subset N_\lambda(B)$ y $B \subset N_\lambda(A)$. Por definición $H(A, B) \leq \lambda < \varepsilon$. Esto termina la prueba del lema.

■

Veamos una relación de la convergencia en $C(X)$ con la convergencia en X.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subcontinuos de X que converge a un elemento $A \in C(X)$, con la métrica de Hausdorff. Entonces $A = \{x \in X :$ existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en X tal que $\text{lím}\, a_n = x$ y $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $B = \{x \in X :$ existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en X tal que $\text{lím}\, a_n = x$ y $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $x \in A$. Como $\text{lím}\, A_n = A$, tenemos que $\text{lím}\, H(A_n, A) = 0$. Por la Proposición 1.2, $d(x, A_n) \leq H(A, A_n)$. De manera que $\text{lím}\, d(x, A_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es compacto, podemos tomar $a_n \in A_n$ tal que $d(x, A_n) = d(x, a_n)$. Entonces $\text{lím}\, d(x, a_n) = 0$ y $\text{lím}\, a_n = x$. Esto prueba que $x \in B$. Por tanto $A \subset B$.

Sean $x \in B$ y $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X tales que $\text{lím}\, a_n = x$ y $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$ y $H(A, A_n) < \varepsilon$. Por el Lema 1.3, $a_n \in A_n \subset N_\varepsilon(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a_n, a) < \varepsilon$. Luego $d(x, a) \leq d(x, a_n) + d(a_n, a) < 2\varepsilon$, con lo cual $d(x, A) < 2\varepsilon$. Como esto ocurre para todo $\varepsilon > 0$ y A es cerrado, concluimos que $x \in A$. Hemos demostrado que $B \subset A$ y esto termina la prueba de la proposición. ■

Veamos otra noción equivalente a la convergencia en $C(X)$.

DEFINICIÓN 1.5. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $C(X)$. Definimos

$$\begin{aligned}\text{lím inf}\, A_n = \{x \in X :\ & \text{si } U \text{ es un abierto de } X \text{ tal que } x \in U, \text{ entonces} \\ & U \cap A_n \neq \emptyset \text{ salvo para una cantidad finita de números } n\}, \text{ y}\end{aligned}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{ si } U \text{ es un abierto de } X \text{ tal que } x \in U, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una cantidad infinita de números } n\}.$$

Los conjuntos definidos arriba se llaman *límite inferior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y *límite superior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente.

PROPOSICIÓN 1.6 (Teorema 0.7 de [20])**.** *Sea X un continuo. Entonces una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ converge a un elemento $A \in C(X)$ si y sólo si* $\liminf A_n = A = \limsup A_n$.

TEOREMA 1.7. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en $C(X)$ convergentes a elementos A y B de $C(X)$, respectivamente. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset B_n$, entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $x \in A$. Por la Proposición 1.4, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim a_n = x$ y $a_n \in A_n \subset B_n$ para todo n. La misma sucesión nos dice que $x \in B$. ■

DEFINICIÓN 1.8. Dada una función continua entre continuos $f : X \to Y$, la *función inducida por* f es la función $C(f) : C(X) \to C(Y)$ definida, para cada $A \in C(X)$, por $C(f)(A) = f(A)$, la imagen de A bajo f.

La función inducida de una función continua también es continua, como veremos a continuación.

TEOREMA 1.9 (Ejercicio 0.67 de [20])**.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces la función inducida $C(f)$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua entre métricos compactos, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ satisfacen que $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Sean $A, B \in C(X)$ tales que $H(A, B) < \delta$, esto es, $A \subset N_\delta(B)$ y $B \subset N_\delta(A)$. Entonces $f(A) \subset f(N_\delta(B)) \subset N_\varepsilon(f(B))$. Análogamente se tiene que $f(B) \subset N_\varepsilon(f(A))$. Por tanto $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. ■

PROPOSICIÓN 1.10. *Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo entre continuos. Entonces $C(h) : C(X) \to C(Y)$ es homeomorfismo.*

Demostración. Por el teorema anterior, $C(h)$ es continua.

Sea A_1, A_2 elementos distintos de $C(X)$. Intercambiando A_1 con A_2 si es necesario, existe $a \in A_1 \setminus A_2$. Por tanto $h(a) \in h(A_1) \setminus h(A_2)$, es decir, $C(h)(A_1)$ es distinto de $C(h)(A_2)$.

Sea $B \in C(Y)$. Al ser h homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X, y $h(h^{-1}(B)) = B$. Hemos demostrado, pues, que $C(h)$ es una función continua biyectiva entre métricos compactos, por tanto homeomorfismo. ■

Para cualquier continuo X, existen funciones continuas $\mu : C(X) \to [0,1]$ que satisfacen las siguientes dos propiedades:

a) Para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$, y

b) Si $A, B \in C(X)$ satisfacen que $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

A tales funciones se les llama *funciones de Whitney en $C(X)$*. Es posible encontrar varias construcciones de funciones de Whitney en la Sección 0.50 de [20]. Cuando X es no degenerado, podemos además pedir que $\mu(X) = 1$. En esta tesis las funciones de Whitney satisfarán esta propiedad, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

TEOREMA 1.11. *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $A, B \in C(X)$, si $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que el teorema no es cierto. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $A_n, B_n \in C(X)$ tales que $A_n \subset B_n$, $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$. Tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que existen $A, B \in C(X)$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Por la continuidad de la métrica, $H(A,B) \geq \varepsilon$. Por el Teorema 1.7, $A \subset B$. Ya que $0 \leq \mu(B_n) - \mu(A_n) \leq \frac{1}{n}$, obtenemos que $\mu(A) = \mu(B)$. Por la definición de función de Whitney, $A = B$, esto es una contradicción porque $H(A,B) \geq \varepsilon > 0$. Esto completa la prueba del teorema. ■

Cuando tenemos una función de Whitney μ dada, diremos que dos subcontinuos $A, B \in C(X)$ tienen la misma medida si $\mu(A) = \mu(B)$.

Capítulo 2

Arcos ordenados largos

En este capítulo introducimos los *arcos ordenados largos*, y veremos sus propiedades básicas.

DEFINICIÓN 2.1. Sea X un continuo. Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(X)$ se llama *ordenado* si para todo par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$, sucede que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Cualquier subcontinuo ordenado y no degenerado de $C(X)$ es un arco, es decir, homeomorfo a $[0, 1]$, como veremos a continuación.

TEOREMA 2.2. *Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo no degenerado y ordenado de $C(X)$. Entonces $\mathcal{A}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Además, los extremos E y F de $\mathcal{A}$ satisfacen que, si $E \subset F$, entonces $E \subset D \subset F$ para todo $D \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney en $C(X)$. Tomemos $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(A) = \mu(B)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A \subset B$. Por la definición de función de Whitney, no se puede cumplir que $A \subsetneq B$. De modo que $A = B$, y por tanto, $\mu|_{\mathcal{A}}$ es una función inyectiva.

Como $\mu|_{\mathcal{A}}$ es una función inyectiva entre continuos, entonces es homeomorfismo sobre su imagen, la cual es un subcontinuo no degenerado de $[0, 1]$. Como los únicos subcontinuos de $[0, 1]$ son intervalos cerrados, se tiene que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a $[0, 1]$.

Supongamos que $\mu(\mathcal{A}) = [a, b]$. Sean E y F los extremos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mu(\{E, F\}) = \{a, b\}$. Si $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$, de manera que $a = \mu(E)$ y $b = \mu(F)$. Dado $D \in \mathcal{A}$ tal que $D \notin \{E, F\}$, como $\mu(E) = a <$

$\mu(D) < b$ y todo par de elementos de $\mathcal{A}$ son comparables con respecto a la inclusión, tenemos que $E \subset D \subset F$. ■

Debido al teorema anterior, a los subcontinuos ordenados de $C(X)$ se les otorga un nombre más apropiado.

DEFINICIÓN 2.3. Sea X un continuo. Un *arco ordenado* $\mathcal{A}$ en $C(X)$ es un subcontinuo ordenado (posiblemente degenerado) de $C(X)$, si los extremos de $\mathcal{A}$ son E y F, con $E \subset F$, diremos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de E a F. Un arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C(X)$ se llama *arco ordenado largo* si tiene como elementos a X y a $\{x\}$, para algún $x \in X$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean X un continuo, $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$ y $x \in X$ tales que $\mathcal{A}$ contiene a $\{x\}$ y a X. Entonces*

a) $\mathcal{A}$ no contiene a ningún otro elemento singular,

b) dada una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$, se tiene que $\mu(\mathcal{A}) = [0,1]$ y μ es un homeomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $[0,1]$,

c) los extremos de $\mathcal{A}$ son $\{x\}$ y X, y

d) $\mathcal{A}$ es maximal (no está contenido propiamente en otro arco ordenado).

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney.

a) Tomemos $A \in C(X)$ un singular distinto de $\{x\}$. Se tiene que $\{x\} \not\subset A$ y $A \not\subset \{x\}$, por tanto $A \notin \mathcal{A}$.

b) En la demostración del Teorema 2.2 vimos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo en su imagen. Como $\mu(\{x\}) = 0$ y $\mu(X) = 1$, $\mu(\mathcal{A}) = [0,1]$, y

c) los extremos de $\mathcal{A}$ son $\mu^{-1}(0) = \{x\}$ y $\mu^{-1}(1) = X$.

d) Sea $\mathcal{B}$ un arco ordenado tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Entonces $\mu|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to [0,1]$ es inyectiva. Como $\mu(\mathcal{A}) = [0,1]$, tenemos que $\mathcal{A}$ no puede estar propiamente contenido en $\mathcal{B}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es maximal.

■

OBSERVACIÓN 2.5. Por el Lema 1.11 de [22] y el Teorema 1.8 del mismo libro, se tiene que para cualquier par de elementos $A, B \in C(X)$, tales que $A \subsetneq B$ o $B \subsetneq A$, existe un arco ordenado en $C(X)$ cuyos extremos son A y B. Además, un arco ordenado es un subcontinuo de $C(X)$ y por tanto un elemento de $C(C(X))$.

DEFINICIÓN 2.6. Para un continuo X, A, B subcontinuos de X, tales que $A \subset B$ y un elemento $x \in X$, sean

$$\begin{aligned} AOL(X) &= \{\mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es un arco ordenado largo en } C(X)\}, \\ AOL(x, X) &= \{\mathcal{L} \in AOL(X) : \{x\} \in \mathcal{L}\}, \\ AO(A, B) &= \{\mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es un arco ordenado de } A \text{ a } B\}, \text{y} \\ AO(X) &= \{\mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es un arco ordenado en } C(X)\}, \end{aligned}$$

considerados con la topología que heredan como subespacios de $C(C(X))$.

OBSERVACIÓN 2.7. Por la observacion 2.5, los conjuntos $AOL(X)$, $AOL(x, X)$, $AO(A, B)$ y $AO(X)$ son no vacíos. Por la proposición 2.4, para cualquier arco ordenado largo $\mathcal{L}$ en $C(X)$, existe un único elemento $x \in X$ tal que $\{x\} \in \mathcal{L}$, al que llamaremos el *punto inicial de* $\mathcal{A}$.

Los conjuntos $AOL(X)$ heredan la métrica H_0 de $C(C(X))$. En los siguientes teoremas, demostraremos que dichos conjuntos son continuos.

TEOREMA 2.8. *Sean X un continuo, $x \in X$, $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$. Entonces los hiperespacios $AO(X)$, $AO(A, B)$ $AOL(X)$ y $AOL(x, X)$ son subespacios cerrados de $C(C(X))$.*

Demostración. Primero mostraremos que $AO(X)$ es cerrado en $C(C(X))$. Sea $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $AO(X) \subset C(C(X))$ que converge a un elemento $\mathcal{A} \in C(C(X))$. Probaremos que $\mathcal{A}$ es un elemento de $AO(X)$. Sean $A, B \in \mathcal{A}$, por la proposición 1.4, existen sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$ y $A_n, B_n \in \mathcal{L}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De modo que, para una infinidad de números n se cumple que $A_n \subset B_n$, o para infinidad de números n se cumple que $B_n \subset A_n$. Tomando una subsucesión e intercambiando A con B si es necesario, podemos suponer que $A_n \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $A = \lim A_n$ y $B = \lim B_n$, por el Teorema 1.7, tenemos que $A \subset B$.

Así pues, $\mathcal{A}$ es un subcontinuo ordenado de $C(X)$. Esto prueba que $AO(X)$ es cerrado en $C(C(X))$, y por tanto $AO(X)$ es compacto.

Ahora veamos que $AOL(X)$ es cerrado en $AO(X)$. Sea $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $AOL(X) \subset AO(X)$ que converge a un elemento $\mathcal{A} \in AO(X)$. Ya sabemos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, nos falta ver que es largo. Como $X \in \mathcal{L}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.4 obtenemos que $X \in \mathcal{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in X$ tal que $\{x_n\} \in \mathcal{L}_n$, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\lim x_n = x$ para algún $x \in X$, entonces $\lim\{x_n\} = \{x\}$. Nuevamente la Proposición 1.4 implica que $\{x\} \in \mathcal{A}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es un subcontinuo ordenado de $C(X)$ que contiene como elementos a X y al singular $\{x\}$, la Proposición 2.4 implica entonces que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado largo. Esto prueba que $AOL(X)$ es cerrado en $AO(X)$. Por tanto $AOL(X)$ es compacto.

Ahora veamos que $AOL(x, X)$ es cerrado en $AOL(X)$. Sea $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $AOL(x, X) \subset AOL(X)$ que converge a un elemento $\mathcal{A} \in AOL(X)$. Ya sabemos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado largo. Como $\{x\} \in \mathcal{L}n$ para todo n, la Proposición 1.4 implica que $\{x\} \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 2.4, el punto inicial de $\mathcal{A}$ es {x}. Con lo cual $\mathcal{A} \in AOL(x, X)$. Estro prueba que $AOL(x, X)$ es cerrado en $AOL(X)$, por tanto compacto.

Finalmente veamos que $AO(A, B)$ es cerrado en $AO(X)$. Sea $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $AO(A, B) \subset AO(X)$ que converge a un elemento $\mathcal{A} \in AO(X)$. Ya sabemos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado. Como $A, B \in \mathcal{L}_n$ para todo n, la Proposición 1.4 nos dice que $A, B \in \mathcal{A}$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $D \in \mathcal{L}_n$, como A y B son los extremos de $\mathcal{L}_n$, tenemos que $A \subset D \subset B$. De manera que $\mu(A) \leq \mu(D) \leq \mu(B)$. Entonces $\mathcal{L}_n \subset \mu^{-1}([\mu(A), \mu(B)])$. Por la Proposición 1.4, cada elemento de $\mathcal{A}$ es límite de elementos de $\bigcup\{\mathcal{L}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\mu^{-1}([\mu(A), \mu(B)])$ es cerrado, obtenemos que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([\mu(A), \mu(B)])$. De manera que $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [\mu(A), \mu(B)]$ es un homeomorfismo. Con lo cual A y B son los extremos de $\mathcal{A}$. Esto prueba que $\mathcal{A} \in AO(X)$. Con esto concluimos que $AO(X)$ es cerrado en $AO(X)$ y por tanto compacto. ■

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Supongamos que existe un homeomorfismo $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(p) = q$. Entonces $AOL(p, X)$ es homeomorfo a $AOL(q, X)$.*

Demostración. Aplicando la Proposición 1.10, dos veces, obtenemos que la función $C(C(\varphi)) : C(C(X)) \to C(C(X))$ es un homeomorfismo.

Podemos definir una función $AOL(\varphi) : AOL(X) \to AOL(X)$ por

$$AOL(\phi) = C(C(\phi))|_{AOL(p,X)},$$

la restricción de $C(C(\varphi))$ a $AOL(p, X)$.

Dado $\mathcal{A} \in AOL(p, X)$, se tiene que $\{p\} \in \mathcal{A}$, así que $\{q\} = \varphi(\{p\}) \in C(C(\varphi))(\mathcal{A}) = AOL(\varphi)(\mathcal{A})$.

Por otra parte, $X \in \mathcal{A}$, entonces $X = \varphi(X) \in AOL(\varphi)(\mathcal{A})$.

Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Esto implica que $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ o $\varphi(B) \subset \varphi(A)$. De manera que $AOL(\varphi)(\mathcal{A})$ es un arco ordenado largo, con punto inicial $\{q\}$.

Procediendo similarmente con $AOL(\varphi^{-1})$, obtenemos que $AOL(\varphi^{-1}) : AOL(q, X) \to AOL(p, X)$ está bien definida, es continua, y es la inversa de $AOL(\varphi)$. Por tanto $AOL(p, X)$ y $AOL(q, X)$ son homeomorfos. ∎

OBSERVACIÓN 2.10. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$. Entonces para cualquier $t \in \mu(\mathcal{A})$ existe un único elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = t$. Denotaremos a este elemento por $\mathcal{A}(t, \mu)$, o simplemente $\mathcal{A}(t)$, si se sobreentiende quién es μ. Considerando a $\mathcal{A}$ como una función de esta manera, se tiene que $t \to \mathcal{A}(t)$ es la inversa de la función $\mu|_{\mathcal{A}}$, y por tanto un homeomorfismo, además, si $s < t$, entonces $\mathcal{A}(s) \subsetneq \mathcal{A}(t)$. Notemos que si $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo en $C(X)$, entonces $\mathcal{L}(0)$ es el punto inicial de $\mathcal{L}$, y $\mathcal{L}(1) = X$.

Estamos interesados en probar que $AOL(x, X)$ siempre es arco conexo. Esto es consecuencia del siguiente resultado.

TEOREMA 2.11. *Sean X un continuo, A, B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$. Entonces el compacto $AO(A, B)$ es conexo por trayectorias, y por tanto continuo.*

Demostración. Tenemos que $AO(A, B)$ es no vacío, por la Observación 2.7. Sean $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney, $t_A = \mu(A)$, y $t_B = \mu(B)$.

Consideremos $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AO(A, B)$. Para cada $t \in [0, 1]$, sea $\beta(t) = t(t_B) + (1 - t)t_A$. Entonces definimos $\alpha : [0, 1] \to AO(A, B)$ por

$$\alpha(t) = \{\mathcal{L}(r) : t_A \leq r \leq \beta(t)\} \cup \{\mathcal{L}(\beta(t)) \cup M : M \in \mathcal{M}\}.$$

Como la función $r \to \mathcal{L}(r)$ es continua, el conjunto $\{\mathcal{L}(r) : t_A \leq r \leq \beta(t)\}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$, y por tanto es un arco ordenado que une a $A = \mathcal{L}(t_A)$ con $\mathcal{L}(\beta(t))$. Por otra parte, para cada $t \in [0, 1]$, como la función de $\mathcal{M}$ a $C(X)$ que asigna a $M \in \mathcal{M}$ el continuo $\mathcal{L}(\beta(t)) \cup M$ es continua, tenemos que el conjunto $\{\mathcal{L}(\beta(t)) \cup M : M \in \mathcal{M}\}$ es un arco ordenado que une a $\mathcal{L}(\beta(t)) \cup A = \mathcal{L}(\beta(t))$ con $\mathcal{L}(\beta(t)) \cup B = B$. Por tanto $\alpha(t)$ es un arco ordenado que une a A con B.

Notemos que $\beta(0) = t_A$, así que $\alpha(0) = \{\mathcal{L}(r) : t_A \leq r \leq t_A\} \cup \{\mathcal{L}(t_A) \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \{A\} \cup \{A \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \mathcal{M}$. Como $\beta(1) = t_B$, tenemos que $\alpha(1) = \{\mathcal{L}(r) : t_A \leq r \leq t_B\} \cup \{\mathcal{L}(t_B) \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \mathcal{L} \cup \{B \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \mathcal{L} \cup \{B\} = \mathcal{L}$.

Finalmente veamos que α es una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como la función de $[t_A, t_B]$ que a t le asigna $\mathcal{L}(t)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $s, t \in [0,1]$ y $|s - t| < \delta$, entonces $H(\mathcal{L}(s), \mathcal{L}(t)) < \varepsilon$.

Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $|s-t| < \delta$. Entonces $|\beta(s) - \beta(t)| = |(s-t)t_B + (t-s)t_A| = |(s-t)(t_B - t_A)| \leq |s-t| < \delta$, pues $|t_B - t_A| \leq 1$. Veremos que $H_0(\alpha(s), \alpha(t)) < \varepsilon$. Sea $E \in \alpha(s)$, analizamos dos casos.

(a) Si $E = \mathcal{L}(r)$ para algún $t_A \leq r \leq t_B$. Como $|\beta(s) - \beta(t)| < \delta$, existe $r_1 \in [t_A, \beta(t)]$ tal que $|r - r_1| < \delta$ (en el caso que $r \leq \beta(t)$, tomamos $r_1 = r$, y en el caso que $\beta(t) < r (\leq \beta(s))$, tomamos $r = \beta(s)$). Entonces $\mathcal{L}(r_1) \in \alpha(t)$ y $H(\mathcal{L}(r), \mathcal{L}(r_1)) < \varepsilon$. Esto muestra que $E \in N_\varepsilon(\alpha(t))$.

(b) Si $E = \mathcal{L}(\beta(s)) \cup M$ para algún $M \in \mathcal{M}$.Entonces $H(\mathcal{L}(\beta(s)), \mathcal{L}(\beta(t))) < \varepsilon$, así que $H(\mathcal{L}(\beta(s)) \cup M, \mathcal{L}(\beta(t)) \cup M) < \varepsilon$. Como $\mathcal{L}(\beta(t)) \cup M \in \alpha(t)$, entonces $E \in N_\varepsilon(\alpha(t))$. Hemos demostrado que $\alpha(s) \in N_\varepsilon(\alpha(t))$. Similarmente se tiene que $\alpha(t) \in N_\varepsilon(\alpha(s))$. De modo que $H_0(\alpha(s), \alpha(t)) < \varepsilon$. Por tanto α es continua.

■

COROLARIO 2.12. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces $AOL(x, X)$ es un continuo conexo por trayectorias.*

Demostración. Observemos que $AOL(x, X) = AO(\{x\}, X)$. Entonces el Teorema anterior nos dice que $AOL(x, X)$ es continuo. ■

Antes de seguir, necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 2.13. Una función entre continuos $f : X \to Y$ se llama *monótona* si para todo $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo de X.

LEMA 2.14. *La función $P : AOL(X) \to X$ que a cada arco ordenado largo le asigna su punto inicial es continua, suprayectiva y monótona. De hecho, para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$, $d(P(\mathcal{L}), P(\mathcal{M})) \leq H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.*

Demostración. Observemos que $P(\mathcal{L}) \in L$ para todo arco ordenado largo $\mathcal{L}$ y todo $L \in \mathcal{L}$. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \varepsilon$. Llamemos $x = P(\mathcal{L})$ y $y = \mathcal{M}$. Como $\{x\} \in \mathcal{L}$, por la Proposicion 1.2 se tiene que $H(\{x\}, \mathcal{M}) < \varepsilon$. Entonces existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $H(\{x\}, A) < \varepsilon$. Por el Lema 1.3, $A \subset N_\varepsilon(\{x\}) = B_\varepsilon(x)$. Com $y \in A$, se tiene que $y \in B_\varepsilon(x)$. Por tanto $d(x, y) < \varepsilon$. Como esto ocurre para cualquier $\varepsilon \geq H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, entonces $d(P(\mathcal{L}), P(\mathcal{M})) \leq H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M})$. En particular, P es continua.

Dado $x \in X$, se tiene que $P^{-1}(x) = AOL(x, X)$. En particular, es no vacío por la Observación 2.7. Por tanto P es suprayectiva.

Por el Corolario 2.12, $P^{-1}(x)$ es un continuo para todo $x \in X$. Es decir, P es monótona. ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema principal de este capítulo.

TEOREMA 2.15. *Sea X un continuo. Entonces $AOL(X)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 2.8, $AOL(X)$ es un subespacio compacto de $C(C(X))$. Sólo hace falta demostrar que es conexo. Sea $P : AOL(X) \to X$ la función del Lema 2.14.

Como $AOL(X)$ y X son compactos, entonces P es una función cerrada. Supongamos que $AOL(X)$ es disconexo, es decir, existen cerrados ajenos no vacíos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ que cubren a $AOL(X)$. Entonces $P(\mathfrak{A})$ y $P(\mathfrak{B})$ son dos cerrados en X que lo cubren y son no vacíos. Como X es conexo, existe $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Por tanto $P^{-1}(x)$ intersecta a $\mathfrak{A}$ y a $\mathfrak{B}$. Esto es una contradicción, pues $\mathfrak{A} \cap P^{-1}(x)$ y $\mathfrak{B} \cap P^{-1}(x)$ son dos cerrados ajenos de $P^{-1}(x)$ que lo cubren, y $P^{-1}(x)$ sería disconexo. ■

Terminaremos este capítulo dando una métrica equivalente a la métrica H_0 en $AOL(X)$. Dados un continuo X y una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$, definimos una función $D : AOL(X) \times AOL(X) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: Para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$, sea

$$D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \text{máx}\{H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t)) : t \in [0, 1]\}. \qquad (*)$$

Como siempre, H es la métrica de Hausdorff en $C(X)$. Debido a que $\mathcal{L}(t)$ y $\mathcal{M}(t)$ dependen continuamente de t, el uso de la abreviatura máx en la definición de D, está bien justificada. La función D resulta ser una métrica equivalente a la métrica de Hausdorff en $AOL(X)$, como veremos a continuación.

TEOREMA 2.16. *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $D : AOL(X) \times AOL(X) \to \mathbb{R}$ definida como en (*). Entonces D es una métrica equivalente a la métrica de Hausdorff H_0 en $AOL(X)$. Además, para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$, se tiene que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leq D(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.*

Demostración. Primero veamos que D es una métrica. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N} \in AOL(X)$. Claramente $D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \geq 0, D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = D(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ y $D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0$ si y sólo si $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Para mostrar que D es métrica, sólo hace falta probar la desigualdad del triángulo para D. Por definición,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}, \mathcal{N}) &= \text{máx}\{H(\mathcal{L}(t), \mathcal{N}(t)) : t \in [0,1]\} \\ &\leq \text{máx}\{H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t)) + H(\mathcal{M}(t), \mathcal{N}(t)) : t \in [0,1]\} \\ &\leq \text{máx}\{H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t)) : t \in [0,1]\} + \text{máx}\{H(\mathcal{M}(t), \mathcal{N}(t)) : t \in [0,1]\} \\ &= D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) + D(\mathcal{M}, \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Así pues, D satisface la desigualdad del triángulo, y con lo anterior, D es una métrica para $AOL(X)$.

Veamos que D es equivalente a la métrica de Hausdorff en $AOL(X)$. Primero probaremos que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$. Tomemos $\delta > 0$, para cada $A \in \mathcal{L}$ existe $t \in [0,1]$ tal que $t = \mu(A)$ y $A = \mathcal{L}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} H(A, \mathcal{M}(t)) &= H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t)) \\ &\leq D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) + \delta. \end{aligned}$$

De manera que $\mathcal{L} \subset N_{D(\mathcal{L}, \mathcal{M} + \delta)}$. Análogamente se prueba que $\mathcal{M} \subset N_{D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) + \delta}$. Por el Lema 1.3, $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leq D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) + \delta$, como esto ocurre para todo $\delta > 0$, concluimos que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leq D(\mathcal{L}, \mathcal{M})$. De aquí obtenemos que la función identidad de $(AOL(X), D)$ en $(AOL(X), H_0)$ es continua.

Supongamos que la función identidad de $(AOL(X), H_0)$ en $(AOL(X), D)$ no es continua. Entonces existe una sucesión $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $AOL(X)$ que converge a un $\mathcal{L} \in AOL(X)$ con la métrica H_0, pero no con la métrica D. De manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que hay una infinidad de números n con la propiedad de que $\mathcal{L}_n$ no está en la vecindad de radio ε con centro en $\mathcal{L}$, en el espacio $(AOL(X), D)$. Es decir, hay una infinidad de números n tales que $D(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}) \geq \varepsilon$. Si tales números los enumeramos con índices $n_1 < n_2 < \ldots$, tenemos que $D(\mathcal{L}_{n_k}, \mathcal{L}) \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, elegimos $t_k \in [0,1]$ tal que $H(\mathcal{L}_{n_k}(t_k), \mathcal{L}(t_k)) = D(\mathcal{L}_{n_k}, \mathcal{L}) \geq \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{\mathcal{L}_{t_k}(t_k)\}$ converge a un elemento $A \in C(x)$. Por la Proposición 1.4, $A \in \mathcal{L}$. Sea $s = \mu(A)$, de manera que $A = \mathcal{L}(s)$. Entonces $\lim \mathcal{L}_{n_k}(t_k) = \mathcal{L}(s)$. Como $t_k = \mu(\mathcal{L}_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $s = \mu(\mathcal{L}(s))$, entonces $\lim t_k = s$. Por tanto $\lim \mathcal{L}(t_k) = \mathcal{L}(s) = \lim \mathcal{L}_{n_k}(t_k)$. Esto implica que $\lim H(\mathcal{L}_{n_k}(t_k), \mathcal{L}_{t_k}) = 0$, lo cual es un absurdo, porque $H(\mathcal{L}_{n_k}(t_k), \mathcal{L}(t_k)) \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esta contradicción prueba que la identidad de $(AOL(X), H_0)$ en $(AOL(X), D)$ también es continua y completa la prueba del teorema. ■

Capítulo 3

$AOL(x, X)$ es un retracto absoluto

En el capítulo anterior vimos que los hiperespacios $AOL(X)$ y $AOL(x, X)$ son continuos, cuando X es un continuo y $x \in X$. Pero podemos probar mucho más de los hiperespacios de la forma $AOL(x, X)$, a saber, que $AOL(x, X)$ es un retracto absoluto.

Este capítulo trata sobre la demostración de que $AOL(x, X)$ es un retracto absoluto, usando una técnica famosa de Dugundji.

Para un número natural n, sea $\Delta_n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \in [0, 1] \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

DEFINICIÓN 3.1. Sea X un espacio métrico. Una *estructura convexa en* X es una función E, con dominio $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X^n \times \Delta_n)$ y contradominio X, y que tiene las siguientes propiedades: Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$,

a) $E((x, \ldots, x), (t_1, \ldots, t_n)) = x$;

b) $E((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)) = E((x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}))$ para toda permutación $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$;

c) $E((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)) = E((x_1, \ldots, x_{n-1}), (t_1, \ldots, t_{n-1}))$, y

d) la función $G_{(x_1,\ldots,x_n)} : \Delta_n \to X$ definida para todo $(s_1, \ldots, s_n) \in \Delta_n$ por

$$G_{(x_1,\ldots,x_n)}(s_1 \ldots, s_n) = E((x_1, \ldots, x_n), (s_1, \ldots, s_n))$$

es continua.

La técnica de Dugundji se ha usado varias veces para probar que un espacio es un retracto absoluto, pero sin haberse abstraído el detalle principal en las demostraciones, que es la siguiente definición que damos.

DEFINICIÓN 3.2. Una estructura convexa E en un espacio métrico X se llama *controlada* si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $d(x, x_i) < \delta$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $d(x, E((x_1, \ldots, x_n), T)) < \varepsilon$.

EJEMPLO 3.3. Sean m un natural y $X = \mathbb{R}^m$. Entonces la función $E : \bigcup_{n=1}^{\infty}(X^n \times \Delta_n) \to X$ definida por

$$E((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i,$$

la combinación convexa usual de puntos de $\mathbb{R}^m$, es una estructura convexa controlada.

DEFINICIÓN 3.4. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. El espacio Y se llama *retracto de* X si existe una función $f : X \to Y$ tal que $f(y) = y$ para todo $y \in Y$.

OBSERVACIÓN 3.5. Si Y es un retracto de Y, entonces Y es un subespacio cerrado de X. En efecto, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y que converge a un punto x de X, entonces $x = \lim x_n$, y por tanto $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_n = x$, es decir, x es un elemento de la imagen de X, y por consiguiente, es un elemento de Y.

Hay cierto tipos de retractos que son especiales.

DEFINICIÓN 3.6. Un espacio métrico X es un *retracto absoluto* si siempre que se encaja a X como un subespacio cerrado de un espacio métrico Y, se tiene que X es un retracto de Y.

DEFINICIÓN 3.7. Un espacio métrico X es un *extensor absoluto* si para todo subespacio cerrado A de un espacio métrico Z y toda función continua $f : A \to X$, existe una función continua $F : Z \to X$ que extiende a f.

El siguiente teorema, que es el Teorema 9.1 de [16], nos relaciona retractos absolutos y extensores absolutos.

TEOREMA 3.8. *Un espacio métrico compacto es un retracto absoluto si y sólo si es un extensor absoluto.*

A continuación relacionaremos los retractos absolutos con las estructuras convexas.

TEOREMA 3.9. *Sea X un retracto absoluto compacto. Entonces X tiene una estructura convexa controlada.*

Demostración. Sea $Q = [0,1]^\omega$ el cubo de Hilbert y $F : \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n \times \Delta_n \to Q$ definida por

$$F((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i,$$

la combinación convexa usual de $(x_1, \ldots, x_n)$. Es fácil ver que F es una estructura convexa controlada en Q. Como X es compacto, por el Teorema 1 de [17, p. 241], podemos ver a X como subespacio de Q. Al ser X retracto absoluto, existe retracción $r : Q \to X$. Entonces la función $E : \bigcup_{n=1}^{\infty}(X^n \times \Delta_n) \to X$ definida por

$$E((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)) = r(f((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)))$$

es una estructura convexa controlada en X. ■

El converso del Teorema anterior también es cierto, su demostración no es tan simple. Para probarlo usaremos una técnica famosa inventada por Dugundji.

TEOREMA 3.10. *Sean X un espacio métrico compacto y E una estructura convexa controlada en X. Entonces X es un extensor absoluto, y por tanto es también un retracto absoluto.*

Demostración. Sean A un subespacio cerrado de un espacio métrico X y $f : A \to X$ una función continua. Nuestro propósito es extender f a todo Z.

Dado $p \in Z \backslash A$, definimos $B_p = \{z \in Z : d(p,z) < \frac{1}{2} d(p,A)\}$. Notemos que B_p es abierto en Z. Como $Z \backslash A$ es métrico, es paracompacto(por el Teorema 5.1.3 de [7]), y por tanto existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) para todo $\alpha \in \mathcal{J}$, U_α es no vacío, abierto en $Z \backslash A$, y entonces abierto en Z;

(b) para todo $p \in Z \backslash A$ existen $\alpha \in \mathcal{J}$ y $q \in Z \backslash A$ tal que $p \in U_\alpha \subset B_q$; y

(c) para todo $p \in Z \backslash A$ existe un abierto U de Z tal que el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito.

Por el Teorema 5.1.9 de [7], existe una familia $\Phi = \{\phi_\alpha : Z \backslash A \to [0,1] : \alpha \in \mathcal{J}\}$ que satisface:

(I) para todo $\alpha \in \mathcal{J}$, ϕ_α es una función continua y $\phi_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_\alpha$; y

(II) para todo $x \in Z \backslash A$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{J}$ tales que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$, $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ y $\phi_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{J} \backslash \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{J}$, elegimos $p_\alpha \in U_\alpha$. Como $d(p_\alpha, A) < 2d(p_\alpha, A)$, elegimos $a_\alpha \in A$ tal que $d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A)$.

Dado $x \in Z \backslash A$, sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los elementos de $\mathcal{J}$ que satisfacen (II). Definamos

$$F(x) = E((f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(x), \ldots, \phi_{\alpha_n}(x))).$$

La función F está bien definida, pues como $a_{\alpha_i} \in A$ para todo i, entonces

$$(f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n})) \in X^n.$$

Por (II), $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(x) = 1$ y entonces $(\phi_{\alpha_1}(x), \ldots, \phi_{\alpha_n}(x)) \in \Delta_n$. Además, por la Propiedad b) de la Definición 3.1, no importa el orden que en que numeramos a los elementos α_i.

Para $x \in A$, definamos $F(x) = f(x)$. De esta manera F está definida en todo Z, y claramente F extiende a f. Veamos que F es una función continua.

Sea $p \in Z \backslash A$. Como A es cerrado, existe U una vecindad de $p \in Z$ tal que $U \cap A = \emptyset$, y podemos pedir además que el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito, al que numeraremos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dado $q \in U$, por las Propiedades (c) de la Definición 3.1 y (II), el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\}$ es finito y está contenido en $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Definamos $G : U \to X$ por

$$G(q) = E((f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(q), \ldots, \phi_{\alpha_n}(q)));$$

La función G es continua, pues $(f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n}))$ es constante y $\phi_{\alpha_i}(q)$ es continua para todo i y todo $q \in U$.

Ahora veamos que G y F son iguales en U. Sea $q \in U$. Sin pérdida de generalidad, por la propiedad b) de la Definición 3.1, podemos suponer que $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, de manera que la Propiedad c) de la Definición 3.1 implica que

$$\begin{aligned} G(q) &= E((f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(q), \ldots, \phi_{\alpha_m}(q), 0, \ldots, 0)) \\ &= E((f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_m})), (\phi_{\alpha_1}(q), \ldots, \phi_{\alpha_m}(q))) \\ &= F(q). \end{aligned}$$

Por tanto F es continua en $Z \backslash A$.

Como $F(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, F es continua en el interior de A. Sólo falta ver que F es continua en la frontera de A, que llamaremos $Fr_Z(A)$.

Sean $a \in Fr_Z(A) \subset A$ y $\varepsilon > 0$. Como E es controlada, existe $\delta > 0$ tal que para caulesquiera n, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, si $d(x_i, f(a)) < \delta$, entonces

$$d(E((x_1, \ldots, x_n), T), f(a)) < \varepsilon.$$

Por la continuidad de f en a, existe $\eta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, a) < 9\eta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \delta$. Sea $p \in Z \backslash A$ tal que

$$d(p, a) < \eta.$$

Recordemos que para todo $\alpha \in \mathcal{J}$ elegimos $p_\alpha \in U_\alpha$ y $a_\alpha \in A$ tales que

$$d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A).$$

Tomemos $\alpha \in \mathcal{J}$ tal que $\phi_\alpha(p) > 0$. Sea $q \in Z \backslash A$ de modo que $p \in U_\alpha \subset B_q = \{x \in Z : d(q, x) < \frac{1}{2} d(q, A)\}$. Entonces

$$d(p, q) < \frac{1}{2} d(q, A).$$

Como

$$d(q, A) \leq d(q, a) \leq d(q, p) + d(p, a),$$

tenemos que

$$d(p, q) < \frac{1}{2} d(q, A) \leq \frac{1}{2} d(q, p) + \frac{1}{2} d(p, a).$$

Así

$$d(p, q) < d(p, a) < \eta.$$

De donde
$$d(q, A) < 2\eta.$$

Sean $y, z \in B_q$. Entonces

$$d(y, z) \leq d(y, q) + d(q, z) < \frac{1}{2}d(q, A) + \frac{1}{2}d(q, A) < \eta + \eta = 2\eta.$$

Observemos que

$$d(y, A) \leq d(y, q) + d(q, A) = \frac{1}{2}d(q, A) + d(q, A) \leq \eta + 2\eta = 3\eta.$$

Ahora,
$$d(a, a_\alpha) \leq d(a, p) + d(p, p_\alpha) + d(p_\alpha, a_\alpha).$$

Recordemos que pedimos que $d(a, p) < \eta$. Como $p, p_\alpha \in B_q$, $d(p, p_\alpha) < 2\eta$. Ya que $p_\alpha \in B_q, d(p_\alpha, A) < 3\eta$, así que, por la elección de a_α, tenemos que $d(p_\alpha, a_\alpha) < 6\eta$. Entonces

$$d(a, a_\alpha) < \eta + 2\eta + 6\eta = 9\eta.$$

Por tanto
$$d(f(a), f(a_\alpha)) < \delta.$$

Sea $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(p) > 0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$; por lo que probamos antes, $d(a, a_{\alpha_i}) < 9\eta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, y entonces $d(f(a), f(a_{\alpha_i})) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como

$$F(p) = E((f(a_{\alpha_1}), \ldots, f(a_{\alpha_n})), (\phi_{a_{\alpha_1}}(p), \ldots, \phi_{a_{\alpha_n}}(p)))$$

y $d(f(a), f(a_{\alpha_i})) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por la elección de δ,

$$d(F(p), f(a)) < \varepsilon.$$

Por tanto F es continua en $Fr_Z(A)$ y en todo Z. ■

TEOREMA 3.11. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces $AOL(x, X)$ tiene una estructura convexa controlada.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney en $C(X)$. Definimos $m : [0,\infty)\times[0,1]\to[0,1]$ por $m(r,t)=\text{mín}\{1,rt\}$. Claramente m es una función continua.

Definiremos

$$\mathcal{E} : \bigcup_{n=1}^{\infty}((AOL(x,X))^n\times\Delta_n)\to AOL(x,X)$$

de la siguiente manera: Dados $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n\in AOL(x,X)$, $T=(t_1,\ldots,t_n)\in\Delta_n$, sea

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T) = \{\mathcal{L}_1(m(r,t_1))\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(m(r,t_n)) : r \in [0,\infty)\}.$$

Probemos que $\mathcal{E}$ está bien definida. Sean $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n\in AOL(x,X)$, $T=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\Delta_n$; veamos que $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)\in AOL(x,X)$. Como $m(r,t_i)\in[0,1]$ para todo $(i,r)\in\{1,\ldots,n\}\times[0,\infty)$, el elemento $\mathcal{L}_i(m(r,t_i))$ está bien definido para cada $(i,r)\in\{1,\ldots,n\}\times[0,\infty)$.

Cuando $r=0$, $\mathcal{L}_1(m(r,t_1))\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(m(r,t_n))=\mathcal{L}_1(0)\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(0)=\{x\}\cup\cdots\cup\{x\}=\{x\}$. Si $r=\frac{1}{\text{máx}\{t_1,\ldots,t_n\}}$, existe j tal que $r=\frac{1}{t_j}$, de donde $\mathcal{L}_j(m(r,t_j))=\mathcal{L}_j(1)=X$ y entonces $\mathcal{L}_1(m(r,t_1))\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(m(r,t_n))=X$.

Como para todo $(i,r)\in\{1,\ldots,n\}\times[0,\infty)$ se tiene que $x\in\mathcal{L}_i(m(r,t_i))$, resulta que $x\in\mathcal{L}_1(m(r,t_1))\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(m(r,t_n))\in C(X)$.

Sea $G:[0,\infty)\to C(X)$ la función definida para cada $r\in[0,\infty)$ por

$$G(r)=\mathcal{L}_1(m(r,t_1))\cup\cdots\cup\mathcal{L}_n(m(r,t_n)).$$

La función G es continua pues es una unión de funciones continuas. Si $r\geq\frac{1}{\text{máx}\{t_1,\ldots,t_n\}}$, entonces existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $rt_i\geq1$, con lo cual $m(r,t_i)=1$, de donde $\mathcal{L}(m(r,t_i))=X$, por tanto $G(r)=X$. Entonces

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)=G([0,\infty))=G([0,\frac{1}{\text{máx}\{t_1,\ldots,t_n\}}]).$$

De aquí que $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)$ es un subcontinuo de $C(X)$.

Dados $r,s\in[0,\infty)$ e $i\in\{1,\ldots,n\}$ tales que $r\leq s$, se tiene que $m(r,t_i)\leq m(s,t_i)$. Entonces $\mathcal{L}_i(m(r,t_1))\subset\mathcal{L}_i(m(s,t_i))$. Por tanto $G(r)\subset G(s)$. Como $\{x\},X\in\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)$, entonces $\mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)$ es un arco ordenado largo.

Ahora veamos que $\mathcal{E}$ satisface las 4 propiedades de la Definición 3.1. Para esto tomemos $n\in\mathbb{N}$, $(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n)\in(AOL(x,X))^n$ y $T=(t_1,\ldots,t_n)\in\Delta_n$.

a) Sean $\mathcal{L} \in AOL(x,X)$ y $\mathcal{M} = \mathcal{E}(\mathcal{L},\ldots,\mathcal{L},T)$. Tomemos $A \in \mathcal{M}$. Entonces $A = \mathcal{L}(m(r,t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}(m(r,t_n))$ para algún $r \in [0,\infty)$. Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $m(r,t_j) = \max\{m(r,t_1),\ldots,m(r,t_n)\}$. Entonces $A = \mathcal{L}(m(r,t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}(m(r,t_n)) \subset \mathcal{L}(m(r,t_j))$ y, por tanto, $A = \mathcal{L}(m(r,t_j)) \in \mathcal{L}$. Esto muestra que $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Como ambos son arcos ordenados largos, por la Proposición 2.4, $\mathcal{M} = \mathcal{L}$.

b) Sean $\phi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ una permutación, $\mathcal{M} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,T)$ y $\mathcal{N} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_{\phi(1)},\ldots,\mathcal{L}_{\phi(n)},(t_{\phi(1)},\ldots,t_{\phi(n)}))$. Tomemos $N \in \mathcal{N}$. Entonces

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{\phi(i)}(m(r,t_{\phi(i)})), \text{ para algún } r \in [0,\infty).$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{\phi(i)}(m(r,t_{\phi(i)})) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i(m(r,t_i))$, pues sólo permutamos el orden de los uniendos, tenemos que $N \in \mathcal{M}$. Así pues, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Por la Proposición 2.4, $\mathcal{N} = \mathcal{M}$.

c) Supongamos que $t_1 = 0$. Sean

$$\mathcal{M} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,(0,t_2,\ldots,t_n))$$

y

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_2,\ldots,\mathcal{L}_n,(t_2,\ldots,t_n)).$$

Tomemos $M \in \mathcal{M}$. Entonces $M = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i(m(r,t_i))$ para algún $r \in [0,\infty)$. Como $m(r,t_1) = 0$, entonces $\mathcal{L}_j(m(r,t_1)) = \{x\}$. Se sigue que $M = \{x\} \cup \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{L}_i(m(r,t_i)) = \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{L}_i(m(r,t_i))$, entonces $M \in \mathcal{M}$. Esto prueba que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Por la Proposición 2.4, $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

d) Para esta propiedad, recordemos que $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n$ son fijos. Sea $G : \Delta_n \to AOL(x,X)$ definida por

$$G(s_1,\ldots,s_n) = \mathcal{E}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n,(s_1,\ldots,s_n)).$$

Para ver que G es continua, sean $(s_1\ldots,s_n) \in \Delta_n$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de cada $\mathcal{L}_i$, existe $\delta > 0$ tal que si $|a-b| < \delta$, entonces $H(\mathcal{L}_i(a),\mathcal{L}_i(b)) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Sea $s = \max\{s_1,\ldots,s_n\}$. Como $s_1+\cdots+s_n = 1$, tenemos que $s > 0$. Como la función $m_{[0,\frac{2}{s}]\times[0,1]} : [0,\frac{2}{s}] \times [0,1] \to [0,1]$ es uniformemente continua, existe $\eta > 0$ tal que $\eta < \frac{s}{2}$, y si $r, u \in [0, \frac{2}{s}]$, $t, v \in [0,1]$ satisfacen $|r-u| < \eta$ y $|t-v| < \eta$, entonces $|m(r,t) - m(u,v)| < \delta$.

Sean $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$ tal que $|s_i - t_i| < \eta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, y $A \in G(s_1, \ldots, s_n)$. Entonces existe $r \in [0, \infty)$ tal que

$$A = \mathcal{L}_1(m(r, s_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, s_n)).$$

Veamos que $A \in N_\varepsilon(G(t_1, \ldots, t_n))$. Si $r > \frac{1}{s}$, entonces $rs > 1$. Por la definición de s, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $rs = rs_i > 1$, de manera que $m(r, s_i) = 1$ y $X = \mathcal{L}_i(m(r, s_i)) \subset A \subset X$. Entonces $A = X$. Ya que $X \in G(t_1, \ldots, t_n)$, podemos suponer que $r \leq \frac{1}{s} \leq \frac{2}{s}$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $|s_i - t_i| < \eta$, entonces $|m(r, s_i) - m(r, t_i)| < \delta$. De manera que $H(\mathcal{L}_i(m(r, s_i)), \mathcal{L}_i(m(r, t_i))) < \varepsilon$. Sea

$$B = \mathcal{L}_1(m(r, t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n)) \in G(t_1, \ldots, t_n).$$

Entonces $H(A, B) < \varepsilon$. Con esto hemos probado que $G(s_1, \ldots, s_n) \subset N_\varepsilon(G(t_1, \ldots, t_n))$.

Ahora tomamos $A \in G(t_1, \ldots, t_n)$. Entonces existe $r \in [0, \infty)$ tal que

$$A = \mathcal{L}_1(m(r, t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n)).$$

Veamos que $A \in N_\varepsilon(G(s_1, \ldots, s_n))$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $s = s_i$. Ya que $|t_i - s_i| < \eta < \frac{s}{2}$, tenemos que $s_i - t_i < \frac{s}{2}$, con lo cual $\frac{s}{2} < t_i$, de donde $\frac{1}{t_i} < \frac{2}{s}$.

Si $r \geq \frac{2}{s}$, entonces $\frac{1}{t_i} < r$. Así que $1 < rt_i$, y entonces $X = \mathcal{L}_i(m(r, t_i)) \subset A \subset X$. De manera que $A = X$. Ya que $X \in G(s_1, \ldots, s_n)$, podemos suponer que $r < \frac{2}{s}$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $|s_i - t_i| < \eta$, $|m(r, s_i) - m(r, t_i)| < \delta$, de manera que $H(\mathcal{L}_i(m(r, s_i)), \mathcal{L}_i(m(r, t_i))) < \varepsilon$. Sea

$$B = \mathcal{L}_1(m(r, s_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n)).$$

Entonces $H(A, B) < \varepsilon$. Esto completa la prueba de que $G(t_1, \ldots, t_n) \in N_\varepsilon(G(s_1, \ldots, s_n))$.

Por el Lema 1.3, tenemos que $H_0(G(t_1, \ldots, t_n), G(s_1, \ldots, s_n)) < \varepsilon$.

Esto termina la prueba de que G es continua. Por tanto $\mathcal{E}$ es una estructura convexa.

Ahora veamos que $\mathcal{E}$ es una estructura convexa controlada. Para esto, tomemos $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$ y $\varepsilon > 0$. Sean $\delta = \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n \in AOL(x, X)$ tales que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{L}_i) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\mathcal{L} \subset N_\delta(\mathcal{L}_i)$ y $\mathcal{L}_i \subset N_\delta(\mathcal{L})$. Tomemos $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$ y sea $\mathcal{M} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, T)$.

Queremos probar que $H_0(\mathcal{M}, \mathcal{L}) < \varepsilon$, así que tenemos que verificar que $\mathcal{M} \subset N_\varepsilon(\mathcal{L})$ y $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(\mathcal{M})$.

Sea $M = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i(m(r, t_i)) \in \mathcal{M}$, donde $r \in [0, \infty)$. Como $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{L}_i) < \varepsilon$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $L_i \in \mathcal{L}$ tal que $H(\mathcal{L}_i(m(r, t_i)), L_i)$. Luego, $\mathcal{L}_i(m(r, t_i)) \subset N_\varepsilon(L_i)$ y Ł$_i \subset N_\varepsilon(\mathcal{L}_i(m(r, t_i)))$. Como $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $L_i \subset L_j$ para todo i, en particular, $L_j = \bigcup_{i=1}^n L_i$. Entonces

$$\begin{aligned} H(M, L_j) &= H(\mathcal{L}_1(m(r, t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n)), L_j) \\ &= H(\mathcal{L}_1(m(r, t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n)), L_1 \cup \ldots L_n) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto termina la pruba de que $\mathcal{M} \subset N_\varepsilon(\mathcal{L})$.

Ahora tomemos $L \in \mathcal{L}$. Como $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{L}_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos elegir $s_i \in [0, 1]$ tal que $H(L, \mathcal{L}_i(s_i))$. Entonces $L \subset N_\varepsilon(\mathcal{L}_i(s_i))$ y $\mathcal{L}_i(s_i) \subset N_\varepsilon(L)$. Sea

$$r = \inf\{s \in [0, \infty) : \text{ existe } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } m(s, t_i) \geq s_i\}.$$

El conjunto $B = \{s \in [0, \infty) : \text{ existe } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } m(s, t_i) \geq s_i\}$ es no vacío, pues si $s \geq \frac{1}{\max\{t_1, \ldots, t_n\}}$, y $j \in \{1, \ldots, n\}$ es tal que $t_j = \max\{t_1, \ldots, t_n\}$, entonces $m(s, t_j) = 1 \geq s_j$, con lo cual $s \in B$, esto además prueba que $0 \leq r \leq \frac{1}{\max\{t_1 \ldots, t_n\}}$.

También tenemos que $m(r, t_i) \leq s_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, pues si $m(r, t_k) > s_k \geq 0$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$, como m es continua, existe $r' < r$ tal que $m(r', t_j) > s_j$, y por tanto $r' \in B$, una contradicción, pues $r = \inf B$. Además, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $m(r, t_k) = s_k$, pues si $m(r, t_k) < s_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces para todo s suficientemente cercano a r, se tiene que $m(s, t_k) < s_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, y entonces r no puede ser igual a $\inf B$.

Ya que

$$\begin{aligned} L &\subset N_\varepsilon(\mathcal{L}_k(s_k)) = N_\varepsilon(\mathcal{L}_k(m(r, t_k))) \\ &\subset N_\varepsilon(\mathcal{L}_1(m(r, t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r, t_n))), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(m(r,t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r,t_n)) &\subset \mathcal{L}_1(s_1) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(s_n) \\ &\subset N_\varepsilon(L),\end{aligned}$$

obtenemos que

$$H(L, \mathcal{L}_1(m(r,t_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_n(m(r,t_n))) < \varepsilon.$$

Esto completa la prueba de que $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(\mathcal{M})$.
Por tanto $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \varepsilon$, y $\mathcal{E}$ es una estructura convexa controlada.

■

Ahora, como corolario, obtenemos el resultado principal de este capítulo.

COROLARIO 3.12. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces$AOL(x, X)$ es un retracto absoluto.*

Capítulo 4

$AOL(x, X)$ es degenerado o un cubo de Hilbert

En la capítulo anterior vimos que $AOL(x, X)$ es siempre un retracto absoluto. En este capítulo veremos que $AOL(x, X)$ es un cubo de Hilbert cuando no es degenerado y veremos cuándo se da este último caso.

Primero caracterizamos cuándo se tiene que $AOL(x, X)$ es degenerado, es decir, un continuo con sólo un elemento.

TEOREMA 4.1. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces $AOL(x, X)$ es degenerado si y sólo si para todo par de continuos $A, B \in C(X)$ con $x \in A$ y $x \in B$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney.

Supongamos que para todo par de continuos $A, B \in C(X)$ tales que $x \in A \cap B$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(x, X)$. Nuestro propósito es demostrar que $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Tomemos $A \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{M}(t)$ tales que $\mu(B) = \mu(A)$. Como $x \in A \cap B$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$, pero como $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$. Por tanto $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, análogamente $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$, de donde $\mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Ahora supongamos que $AOL(x, X)$ es degenerado (tiene sólo un elemento). Tomemos $A, B \in C(X)$ tales que $x \in A \cap B$ y $A, B \notin \{\{x\}, X\}$ (pues en esos casos triviales es fácil probar que $A \subset B$ o $B \subset A$). Sabemos que existen un arco ordenado $\mathcal{A}_1$ de $\{x\}$ a A y un arco ordenado $\mathcal{A}_2$ de A a X. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un arco ordenado que contiene a $\{x\}$ y a X. Por tanto $\mathcal{A} \in AOL(x, X)$. Observemos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ sólo se intersectan en A. Análogamente existe un arco ordenado largo $\mathcal{B} \in AOL(x, X)$ que contiene a

B, y como $AOL(x,X)$ consiste sólo de un elemento, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Como $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $B \in \mathcal{A}_1$ o $B \in \mathcal{A}_2$, lo cual implica que $A \subset B$ o $B \subset A$, respectivamente. ■

Necesitaremos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 4.2. Un subcontinuo Y de un continuo X se llama *terminal en* X si para cualesquiera $K, L \in C(X)$ tales que $K \cap Y \neq \emptyset \neq L \cap Y$, se tiene que $K \subset (Y \cup L)$ o $L \subset (Y \cup K)$.

Si X es un continuo y $x \in X$, entonces es muy fácil ver que los subcontinuos $\{x\}$ y X son terminales en X.

DEFINICIÓN 4.3. Un continuo X se dice que es:

a) *descomponible*, si X es la unión de dos subcontinuos propios de X, es decir, si existen $Y, Z \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $X = Y \cup Z$;

b) *indescomponible*, si X no es descomponible; y

c) *hereditariamente indescomponible*, si todo subcontinuo de X es indescomponible.

El teorema siguiente (Teorema 1.57 de [22]) nos relaciona los continuos terminales con los arcos ordenados.

TEOREMA 4.4. *Un subcontinuo Y de X es terminal si y sólo si existe sólo un arco ordenado que une a Y con X.*

El teorema 1.58 de [22] caracteriza a los continuos hereditariamente indescomponibles:

TEOREMA 4.5. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si todo subcontinuo de X es terminal en X.*

Con los dos teoremas anteriores, podemos demostrar el siguiente resultado, que caracteriza a los continuos hereditariamente indescomponibles en términos de la estructura de los espacios $AOL(x,X)$.

TEOREMA 4.6. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si para todo $x \in X$, el continuo $AOL(x,X)$ es degenerado.*

Demostración. Primero supongamos que X es hereditariamente indescomponible. Sea $x \in X$, entonces el conjunto $\{x\}$ es terminal en X, y por tanto existe sólo un arco ordenado de $\{x\}$ a X, es decir, $AOL(x, X)$ es degenerado.

Ahora supongamos que $AOL(x, X)$ es degenerado para todo $x \in X$. Para ver que X es hereditariamente indescomponible, consideremos, por el contrario, que existe un subcontinuo D de X que es descomponible. Entonces existen subcontinuos propios A y B de D tales que $D = A \cup B$. Por la conexidad de D, $A \cap B \neq \emptyset$. Elegimos $p \in A \cap B$. Por el Teorema 4.4, $\{p\}$ es terminal en X. Entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Esto implica que $B = D$ o $A = D$, lo cual es una contradicción. Por tanto X es hereditariamente indescomponible. ∎

TEOREMA 4.7. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces $AOL(X)$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Por el Teorema 4.6, $AOL(x, X)$ es un conjunto singular para cada $x \in X$. Sea $P : AOL(x, X) \to X$ la función que a cada arco ordenado largo le asocia su punto inicial. Por el Lema 2.14, P es continua. Entonces P es una biyección continua entre compactos. Por tanto P es un homeomorfismo. ∎

El continuo hereditariamente indescomponible más sencillo que existe es el seudoarco, que además es homogéneo y encadenable. Más propiedades del seudoarco se pueden encontrar en [18].

COROLARIO 4.8. *Sean X el seudoarco y $p \in X$. Entonces $AOL(X)$ es homeomorfo a $X \times AOL(p, X)$.*

Sabemos que $AOL(x, X)$ es un retracto absoluto, ya hemos visto que puede ser un continuo de un elemento. Ahora veremos que cuando no es degenerado, resulta ser homeomorfo a un cubo de Hilbert. Para esto usaremos la caracterización demostrada originalmente por H. Toruńczyk en [24], pero usaremos la versión dada en el Teorema 9.3 de [16]. Necesitamos unas definiciones preliminares.

DEFINICIÓN 4.9. Sea X un compacto con métrica d. Un subconjunto cerrado Y de X se llama *Z conjunto*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f : X \to X \backslash Y$ tal que $d(x, f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

EJEMPLO 4.10. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces la frontera $\partial([-1, 1]^n)$ es un Z conjunto de $[-1, 1]^n$. Pues dado $\varepsilon > 0$, la función $f : X \to X$ dada por $f(x) = (1 - \frac{\varepsilon}{2})x$, satisface las hipótesis para que ∂I^n sea Z conjunto.

EJEMPLO 4.11. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $Q = [0,1]^\omega$ el cubo de Hilbert. Entonces el conjunto
$$I_n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) : x_i \in [0,1]\}$$
es un Z conjunto de Q. Para ver esto, sea $\varepsilon > 0$ y $m > n$ tal que $\frac{1}{2^{m+1}} < \varepsilon$. Definimos $f : Q \to Q$ por $f(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_m, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$. Entonces f es continua y $f(Q) \cap I_n = \emptyset$.

DEFINICIÓN 4.12. Una función continua entre compactos $f : X \to Y$ se llama *Z función* si la imagen $f(X)$ es un Z conjunto en Y.

EJEMPLO 4.13. Sean Q el cubo de Hilbert y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función $f_n : Q \to Q$ definida por $f(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ es una Z función. Notemos que la función identidad en el cubo de Hilbert es el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. El converso de esta afirmación es el teorema de Toruńczyk, para retractos absolutos, como veremos a continuación.

El siguiente teorema es el Teorema 9.3 de [16], probado originalmente por Toruńczyk.

TEOREMA 4.14. *Sea X un espacio métrico compacto que es retracto absoluto. Si la función identidad en X es límite uniforme de Z funciones, entonces X es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Ahora nos enfocaremos a demostrar el teorema principal de este capítulo.

TEOREMA 4.15. *Sean X un continuo y $x \in X$. Si $AOL(x, X)$ es no degenerado, entonces es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Definimos
$$\begin{aligned} S = \{t \in [0,1] :\ &\text{para todo } s \in [0,t] \text{ existe un único} \\ &A \in C(X) \text{ tal que } x \in A \text{ y } \mu(A) = s\}. \end{aligned}$$
El conjunto S es no vacío, pues el único $A \in C(X)$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) = 0$ es el conjunto $\{x\}$. Así que $0 \in S$. Sea $t_0 = \sup S$.

Afirmamos que $t_0 \in S$. Supongamos, por el contrario, que para algún $s \in [0, t_0]$ existen dos elementos diferentes $A, B \in C(X)$ tales que $x \in A \cap B$ y $\mu(A) = s = \mu(B)$. Como $0 \in S$, $0 < s$. Si $s < t_0$, por definición de supremo, existe $t_1 \in S$ tal que $s < t_1 \leq t_0$, pero esto es una contradicción, pues los subcontinuos A y B mostrarían que $t_1 \notin S$. Esto muestra que para todo

$s_0 < t_0$ existe un único $A \in C(X)$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) = s_0$. Por tanto $[0, t_0) \in S$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ arcos ordenados de $\{x\}$ a A y B, respectivamente. Como $A = \mathcal{A}(t_0) = \lim_{s_0 \to t_0^-} \mathcal{A}(s_0)$, $B = \mathcal{B}(t_0) = \lim_{s_0 \to t_0^-} \mathcal{B}(s_0)$ y $\mathcal{A}(s_0) = \mathcal{B}(s_0)$ para todo $s_0 < t_0$, entonces $A = B$, esto es una contradicción. Por tanto $t_0 \in S$.

En particular, existe un único $A_0 \in C(X)$ tal que $x \in A_0$ y $\mu(A_0) = t_0$. Sea $\mathcal{D}$ un arco ordenado de $\{x\}$ a A_0 en $C(X)$.

Observación 1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$ para todo $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$.

Sean $A \in \mathcal{D}$ y $t = \mu(A)$. Como $\mathcal{D}$ une a $\{x\}$ con A_0, $t = \mu(A) \leq \mu(A_0) = t_0$. Sea $B \in \mathcal{L}$ tal que $\mu(B) = t$. Como $t_0 \in S$, $A = B$. Por tanto $A \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$.

Observación 2. $t_0 < 1$.

Si ocurre que $t_0 = 1$, $A_0 = x$, de manera que $\mathcal{D}$ es un arco ordenado largo. Dado $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$, por la Observación 1, $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$. Por la Proposición 2.4, $\mathcal{D} = \mathcal{L}$. De aquí que $AOL(x, X) = \{\mathcal{D}\}$, lo cual contradice la hipótesis del teorema. Esto prueba que $t_0 < 1$.

Observación 3. Para cualquier $A \in C(X)$, si $\mu(A) \geq t_0$ y $x \in A$, entonces $A_0 \subset A$.

Sea $A \in C(X)$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) \geq t_0$. Supongamos que $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo que contiene a A. Por la Observación 1, $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$, con lo cual $A_0, A \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Como $\mu(A_0) = t_0 \leq \mu(A)$, concluimos que $A_0 \subset A$.

Dados dos elementos diferentes $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in AOL(x, X)$, existe $t < 1$ tal que $\mathcal{A}(t) \neq \mathcal{B}(t)$ (recordemos que $\mathcal{A}(t)$ es el único elemento de $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = t$). Como $t_0 \in S$, $t_0 < t < 1$. Puesto que t_0 es el supremo de S y $t_0 < 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existen elementos diferentes $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in C(X)$ tales que $\mu(A_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon)$, $x \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$, $t_0 < \mu(A_\varepsilon) < t_0 + \varepsilon$. Por la Observación 3, se tiene que $A_0 \subset A_\varepsilon$ y $A_0 \subset B_\varepsilon$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, aplicamos el Teorema 1.11 al número positivo $\frac{1}{n}$, lo que nos da por resultado un número $\varepsilon_n > 0$. Para este número ε_n, obtenemos que $H(A_0, A_{\varepsilon_n}) < \frac{1}{n}$ y $H(A_0, B_{\varepsilon_n}) < \frac{1}{n}$. Podemos elegir ε_n, de la siguiente manera: primero elegimos ε_1, después elegimos $\varepsilon_2 < \mu(A_{\varepsilon_1}) - t_0$, luego tomamos $\varepsilon_3 < \mu(A_{\varepsilon_2}) - t_0$,. Así continuamos para tener que $\varepsilon_{n+1} < \mu(A_{\varepsilon_n}) - t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mu(A_{\varepsilon_1}) > \mu(A_{\varepsilon_2}) > \dots$.

Sean $\mathcal{A}_n$ un arco ordenado que une a A_0 con A_{ε_n} y $\mathcal{B}_n$ un arco ordenado que une a A_0 con B_{ε_n}. Entonces para todo elemento $G \in \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$ se tiene que $A_0 \subset G$ y $G \subset A_{\varepsilon_n}$ o $G \subset B_{\varepsilon_n}$. Por tanto $H(A_0, G) < \frac{1}{n}$.

Sea $F_n : AOL(x, X) \to AOL(x, X)$ definida por

$$F_n(\mathcal{L}) = \mathcal{D} \cup \mathcal{A}_n \cup \{A_{\varepsilon_n} \cup L : L \in \mathcal{L}\}.$$

Similarmente, definimos $G_n : AOL(x, X) \to AOL(x, X)$ por

$$G_n(\mathcal{L}) = \mathcal{D} \cup \mathcal{B}_n \cup \{B_{\varepsilon_n} \cup L : L \in \mathcal{L}\}.$$

La función F_n está bien definida, pues $\mathcal{D}$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a A_0, $\mathcal{A}_n$ es un arco ordenado de A_0 a A_{ε_n} y el último uniendo es un arco ordenado de A_{ε_n} a X. Análogamente G_n está bien definida.

Observemos que $F_n(AOL(x, X))$ es ajeno de $G_n(AOL(x, X))$, pues los elementos de $F_n(AOL(x, X))$ son arcos ordenados largos que contienen a A_{ε_n}, y los elementos de $G_n(AOL(x, X))$ son arcos ordenados largos que contienen a B_{ε_n}. Como A, B son distintos con la misma medida, no puede existir un arco ordenado largo que contenga a ambos.

Si $\delta > 0$ y $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(x, X)$ son tales que $H(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta$, veremos que $H_0(F_n(\mathcal{L}), F_n(\mathcal{M})) < \delta$.

Sea $L \in F_n(\mathcal{L})$. Si $L \in \mathcal{D} \cup \mathcal{A}_n$, entonces $L \in F_n(\mathcal{M})$. Si $L \notin \mathcal{D} \cup \mathcal{A}_n$, existe $L_0 \in \mathcal{L}$ tal que $L = L_0 \cup A_{\varepsilon_n}$, y existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(L_0, M) < \delta$. Entonces $H(A_{\varepsilon_n} \cup L, A_{\varepsilon_n} \cup M) < \delta$. Por tanto $F_n(\mathcal{L}) \subset N_\delta(\mathcal{M})$. Análogamente se prueba que $F_n(\mathcal{M}) \subset N_\delta(\mathcal{L})$. Por tanto $H_0(F_n(\mathcal{L}), F_n(\mathcal{M})) < \delta$. Hemos probado, pues, que F_n es continua. De manera análoga se demuestra que G_n es continua.

Ahora veamos que $H_0(\mathcal{L}, F_n(\mathcal{L})) < \frac{1}{n}$ para todo $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$.

Tomemos $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$. Por la Observación 1, $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$. Sea $L \in \mathcal{L}$. Si $L \in \mathcal{D}$, entonces $L \in F_n(\mathcal{L})$. Si $L \notin \mathcal{D}$, entonces $A_0 \subset L$. Con lo cual $H(A_0 \cup L, A_{\varepsilon_n} \cup L) < \frac{1}{n}$. Como $A_0 \cup L = L$ y $A_{\varepsilon_n} \cup L \in F_n(\mathcal{L})$, entonces $\mathcal{L} \subset N_{\frac{1}{n}}(F_n(\mathcal{L}))$.

Ahora sea $M \in F_n(\mathcal{L})$. Si $M \in \mathcal{D}$, entonces $M \in \mathcal{L}$. Si $M \in \mathcal{A}_n$, entonces $H(M, A_0) < \frac{1}{n}$, recordemos que A_0 es un elemento de $\mathcal{L}$. Finalmente, si $M = A_{\varepsilon_n} \cup L$ para algún $L \in \mathcal{L}$, entonces $M \cup L = M$ y $H(M \cup L, A_0 \cup L) < \frac{1}{n}$ y $A_0 \cup L \in \mathcal{L}$. En cualquiera de los tres casos, se tiene que M dista menos de $\frac{1}{n}$ de un elemento de $\mathcal{L}$, y por tanto $F_n(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Hemos demostrado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $H(\mathcal{L}, F_n(\mathcal{L})) < \frac{1}{n}$ para todo $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$.

Por tanto, la función identidad en $AOL(x,X)$, Id es límite uniforme de la sucesión de funciones $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Análogamente se prueba que Id es límite uniforme de la sucesión de funciones $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ahora veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(AOL(x,X))$ es un Z conjunto de $AOL(x,X)$.

Para un número fijo $n \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión de funciones $\{E_m\}_{m=n+1}^{\infty}$ de la siguiente manera: Dado $m > n$ tomamos $E_m = F_m$ si $A_{\varepsilon_m} \notin \mathcal{A}_n$, y $E_m = G_m$ si $A_{\varepsilon_m} \in \mathcal{A}_n$. Observemos que como A_{ε_n} y B_{ε_n} son de la misma medida y diferentes, no pueden estar ambos en $\mathcal{A}_n$.

Con esta forma de elegir la sucesión $\{E_m\}_{m=n+1}^{\infty}$, aseguramos que la imagen de F_n es ajeno a la imagen de E_m para todo $m > n$. Para ver esto, supongamos, por el contrario, que existe un elemento $\mathcal{L} \in F_n(AOL(x,X)) \cap E_m(AOL(x,X))$. Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{A}_n \cup \{A_{\varepsilon_n} \cup L : L \in \mathcal{L}_1\}$ y $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{C}_m \cup \{C_{\varepsilon_m} \cup L : L \in \mathcal{L}_2\}$, para algunos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in AOL(x,X)$, donde $\mathcal{C}_m = \mathcal{A}_m$ y $C_{\varepsilon_m} = A_{\varepsilon_m}$, si $E_m = F_m$, o $\mathcal{C}_m = \mathcal{B}_m$ y $C_{\varepsilon_m} = B_{\varepsilon_m}$, si $E_m = G_m$.

En el caso que $E_m = F_m$, por definición $A_{\varepsilon_m} \notin \mathcal{A}_n$, y por construcción $A_{\varepsilon_m} \in \mathcal{A}_m \subset \mathcal{L}$. Ya que A_{ε_m} es el único elemento de $\mathcal{L}$ de medida $\mu(A_{\varepsilon_m})$, $\mu(A_0) < \mu(A_{\varepsilon_m}) < \mu(A_{\varepsilon_n})$, y los elementos de $\mathcal{L}$ cuya medida está entre entre $\mu(A_0)$ y $\mu(A_{\varepsilon_n})$ pertenecen a $\mathcal{A}_n$, obtenemos que $A_{\varepsilon_m} \in \mathcal{A}_n$, lo cual es un absurdo y muestra que esto no es posible.

Si $E_m = G_m$, entonces $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cup \mathcal{B}_m \cup \{B_{\varepsilon_m} : L \in \mathcal{L}_2\}$. Por defición, $B_{\varepsilon_m} \notin \mathcal{A}_n$, y por construcción $B_{\varepsilon_m} \in \mathcal{B}_m \subset \mathcal{L}$. Ya que B_{ε_m} es el único elemento de $\mathcal{L}$ con medida $\mu(B_{\varepsilon_m})$, $\mu(A_0) < \mu(B_{\varepsilon_m}) < \mu(A_{\varepsilon_n}) = \mu(B_{\varepsilon_n})$, y los elementos de $\mathcal{L}$ cuya medida está entre entre $\mu(A_0)$ y $\mu(A_{\varepsilon_n})$ pertenecen a $\mathcal{A}_n$, obtenemos que $B_{\varepsilon_m} \in \mathcal{A}_n$, lo cual es absurdo. Esto muestra que este caso tampoco es posible.

Con esto concluimos que la imagen de F_n es ajena a la imagen de E_m, para todo $m > n$.

Como la sucesión $\{E_m\}_{m=n+1}^{\infty}$ se puede descomponer en a lo más dos subsucesiones de funciones que convergen a la identidad (separandola en las funciones en las que E_m coincide con F_m y en las que coincide con G_m), concluimos que $\{E_m\}_{m=n+1}^{\infty}$ converge a la identidad. Por tanto F_n es una Z función para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como la identidad en $AOL(x,X)$ es límite uniforme de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, cada una de la funciones F_n es una Z función y $AOL(x,X)$ es un retracto absoluto, entonces por el Teorema 4.14, $AOL(x,X)$ es homeomorfo a un cubo de Hilbert. ∎

Capítulo 5

$AOL(X)$ cuando X es un retracto absoluto

En este capítulo mostraremos que cuando X es un retracto absoluto, $AOL(X)$ siempre resulta homeomorfo al cubo de Hilbert, y más aún, este hecho caracteriza a los retractos absolutos.

TEOREMA 5.1. *Sea X un continuo. Si X es un retracto absoluto, entonces $AOL(X)$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Sea X un continuo que además es un retracto absoluto. Por ser X un retracto del cubo de Hilbert, es localmente conexo. Por el Ejercicio 11.8 de [16], $C(X)$ es también un retracto absoluto, o equivalentemente, un extensor absoluto (ver Teorema 3.8).

Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Teorema 1 de [17, p. 241], sea $e : C(X) \to Q$ un encaje.

Definimos $g : C(X) \to Q \times [0,1]$ por

$$g(A) = (e(A), \mu(A)).$$

La inyectividad de e implica la inyectividad de g. Por tanto es un encaje.

Como X es un retracto absoluto y es homeomorfo a $g(F_1(X)) \subset Q \times \{0\}$, tenemos que $g(F_1(X))$ es un retracto absoluto. Por tanto existe una retracción

$$r : Q \times \{0\} \to g(F_1(X)).$$

Sea $r_1 : (Q \times \{0\}) \cup j(C(X)) \to C(X)$ por

$$r_1(a) = \begin{cases} g^{-1}(r(a)) & \text{si } a \in Q \times \{0\}; \\ g^{-1}(a) & \text{si } a \in g(C(X)). \end{cases}$$

Dado $a \in (Q \times \{0\}) \cap g(C(X))$, $a = g(A) = (e(A), \mu(A))$ para algún $A \in C(X)$. Como $(e(A), \mu(A)) \in Q \times \{0\}$, $\mu(A) = 0$. Así que $A \in F_1(X)$. Entonces $a = g(a) \in F_1(X)$, de manera que $r(a) = a$.

Como $C(X)$ es un extensor absoluto, existe una extensión continua $R : Q \times [0,1] \to C(X)$ de r_1.

Notemos que para todo $A \in C(X)$, $R(g(A)) = r_1(g(A)) = g^{-1}(g(A)) = A$. Por tanto, $g^{-1}(r(a)) = g^{-1}(a)$. Esto prueba que r_1 está bien definida y es continua.

Recordemos que

$$\Delta_n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i \in [0,1], t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Sea d la métrica de $Q \times [0,1]$ dada por $d((p,t),(q,s)) = \max\{d_1(p,q), |s - t|\}$, donde d_1 es la métrica usual de Q dada por

$$d_1(p,q) = \sum \frac{p^{(i)} - q^{(i)}}{2^i},$$

donde $p^{(i)}, q^{(i)}$ son las coordenadas i-ésima de p y q, respectivamente.

Sea E la estructura convexa usual de $Q \times [0,1]$, la cual está definida de la siguiente manera: Si $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in Q \times [0,1]$ y $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, entonces $E((x_1, x_2, \ldots, x_n), (t_1, t_2, \ldots, t_n)) = t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$, donde la multiplicación por un escalar t_i y la suma se hacen coordenada a coordenada. Es claro que la estructura convexa E, así definida, es controlada.

Veremos que E tiene la propiedad adicional de que si $\varepsilon > 0$, $x \in Q \times [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B_\epsilon(x)$ y $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, entonces

$$d(E((x_1, \ldots, x_n), (t_1, \ldots, t_n)), x) < \varepsilon.$$

Para probar esto, escribimos $x = (p,s), x_1 = (p_1, s_1), \ldots, x_n = (p_n, s_n)$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
&d(E((x_1,\dots,x_n),(t_1,\dots,t_n)),x) = \\
&\qquad d(t_1x_1+\cdots+t_nx_n,x) = \\
&\qquad \text{máx}\{d_1(t_1p_1+\cdots+t_np_n,p),|t_1s_1+\cdots+t_ns_n-s|\} = \\
&\qquad \text{máx}\,\{d_1(t_1p_1+\cdots+t_np_n,t_1p+\cdots+t_np), \\
&\qquad |t_1s_1+\cdots+t_ns_n-(t_1s+\cdots+t_ns)|\} \leq \\
&\qquad \text{máx}\left\{\sum \frac{(t_1p_1+\cdots+t_np_n)^{(i)}-(t_1p+\cdots+t_np)^{(i)}}{2^i},\right. \\
&\qquad |t_1(s_1-s)|+\cdots+|t_n(s_n-s)|\} = \\
&\qquad \text{máx}\left\{\sum \frac{(t_1(p_1-p)+\cdots+t_n(p_n-p))^{(i)}}{2^i},\right. \\
&\qquad |t_1(s_1-s)|+\cdots+|t_n(s_n-s)|\} \leq \\
&\qquad \text{máx}\left\{t_1\sum \frac{|(p_1-p)^{(i)}|}{2^i}+\cdots+t_n\sum\frac{|(p_n-p)^{(i)}|}{2^i},\right. \\
&\qquad |t_1(s_1-s)|+\cdots+|t_n(s_n-s)|\} < \\
&\qquad\qquad (t_1+\cdots+t_n)\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Definiremos una estructura convexa controlada en $AOL(X)$. Por el Teorema 3.10, esto será suficiente para que $AOL(X)$ sea un retracto absoluto.

Fijemos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$. Recordemos que para todo $\mathcal{L} \in AOL(X)$ y todo $t \in [0,1]$, $\mathcal{L}(t)$ es el único elemento $L \in \mathcal{L}$ tal que $\mu(L) = t$.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : AOL(X)^n \times \Delta_n \times [0,1] \to C(X)$ definida por

$$
\begin{aligned}
&g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),t) = \\
&\qquad R(E((g(\mathcal{L}_1(t)),\dots,g(\mathcal{L}_n(t))),(t_1,\dots,t_n))).
\end{aligned}
$$

Veamos que la función g_n es una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $p,q \in Q\times[0,1]$ y $d(p,q) < \delta$, entonces $H(R(p),R(q)) < \varepsilon$. Ya que E es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $(p_1,\dots,p_n),(q_1,\dots,q_n) \in (Q \times [0,1])^n$ y $(t_1\dots,t_n),(s_1,\dots,s_n) \in \Delta_n$ son tales que, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $d(p_i,q_i) < \delta_1$ y $|t_i - s_i| < \delta_1$, entonces

$$H(E((p_1,\dots,p_n),(t_1,\dots,t_n)),E((q_1,\dots,q_n),(s_1,\dots,s_n))) < \delta.$$

Como g es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ y $H(A, B) < \delta_2$, entonces $d(g(A), g(B)) < \delta_1$. Por el Teorema 2.16, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ y $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta_3$, entonces para todo $t \in [0, 1]$, $H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t)) < \frac{\delta_2}{2}$. Por el Teorema 1.11, existe $\delta_4 > 0$ tal que $\delta_4 < \text{mín}\{\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta_4$, entonces $H(A, B) < \frac{\delta_2}{2}$.

Tomemos $((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t)$ y $((\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n), (s_1, \ldots, s_n), s)$ en $(AOL(X))^n \times \Delta_n \times [0, 1]$ tales que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $H_0(\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i) < \delta_4$, $|t_i - s_i| < \delta_4$ y $|s - t| < \delta_4$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\mathcal{L}_i(s) \subset \mathcal{L}_i(t)$ o $\mathcal{L}_i(t) \subset \mathcal{L}_i(s)$, y $|\mu(\mathcal{L}_i(t)) - \mu(\mathcal{L}_i(s))| = |t - s| < \delta_4$, tenemos que $H(\mathcal{L}_i(t), \mathcal{L}_i(s)) < \frac{\delta_2}{2}$. Como $H_0(\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i) < \delta_3$, $H(\mathcal{L}_i(s), \mathcal{M}_i(s)) < \frac{\delta_2}{2}$. Así que $H(\mathcal{L}_i(t), \mathcal{M}_i(s)) < \delta_2$. De aquí se sigue que $H(g(\mathcal{L}_i(t)), g(\mathcal{M}_i(s))) < \delta_1$. De manera que

$$E((g(\mathcal{L}_1(t)), \ldots, g(\mathcal{L}_n(t))), (t_1, \ldots, t_n)) \text{ dista de}$$
$$E((g(\mathcal{M}_1(s)), \ldots, g(\mathcal{M}_n(s))), (s_1, \ldots, s_n))$$

menos que δ, con la métrica H.

Por tanto,

$$H(g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t), g_n((\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n), (s_1, \ldots, s_n), s)) < \varepsilon.$$

Esto completa la prueba de la continuidad de g_n.

Antes de definir la estructura convexa en $AOL(X)$, necesitamos verificar algunas propiedades más de g_n. En varias de ellas usaremos que E es una estructura convexa. Sean $\mathcal{L} \in AOL(X)$, $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n) \in (AOL(X))^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$ y $t \in [0, 1]$. Entonces se cumple que

(I) si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{M} \in AOL(X)$, $(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n) \in (AOL(X))^n$, $(s_1, \ldots, s_n) \in \Delta_n$, $s \in [0, 1]$ y $H_0(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$H(g_n((\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n), (s_1, \ldots, s_n), s), \mathcal{M}(s)) < \varepsilon,$$

(II) $g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), 0) \in F_1(X)$,

(III) $g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), 1) = X$,

(IV) $g_n((\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}), (t_1, \ldots, t_n), t) = \mathcal{L}(t)$,

(V) si $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una permutación, entonces

$$g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t) = g_n((\mathcal{L}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}), t),$$

y

(VI) si $t_1 = 0$, entonces

$$g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t) = g_{n-1}((\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_2, \ldots, t_n), t).$$

Ahora veamos las pruebas de las propiedades arriba mencionadas

(I) Tomemos $\varepsilon > 0$. Sea δ_1 tal que si $x, y \in Q \times [0,1]$ y $d(x,y) < \delta_1$, entonces $H(R(x), R(y)) < \varepsilon$. Por la continuidad de g, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cualesquiera $A, B \in C(X)$, si $H(A,B) < \delta_2$, entonces $d(g(A), g(B)) < \delta_1$. Por el Teorema 2.16, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in AOL(X)$ y $H_0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < \delta_3$, entonces para todo $s \in [0,1]$, $H(\mathcal{M}(s), \mathcal{N}(s)) < \delta_2$.

Ahora supongamos que $H_0(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) < \delta_3$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $s \in [0,1]$,

$$H(\mathcal{M}(s), \mathcal{M}_i(s)) < \delta_2.$$

Entonces $d(g(\mathcal{M}(s)), g(\mathcal{M}_i(s))) < \delta_1$. Por la propiedad adicional que probamos para la estructura E,

$$d(E((g(\mathcal{M}_1(s)), \ldots, g(\mathcal{M}_n(s))), (s_1 \ldots, s_n)), g(\mathcal{M}(s))) < \delta_1.$$

Por tanto,

$$H(R(E((g(\mathcal{M}_1(s)), \ldots, g(\mathcal{M}_n(s))), (s_1 \ldots, s_n))), R(g(\mathcal{M}(s)))) < \varepsilon.$$

De manera que

$$\begin{gathered} H(g_n((\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n), (s_1, \ldots, s_n), s), \mathcal{M}(s)) = \\ H(R(E((g(\mathcal{M}_1(s)), \ldots, g(\mathcal{M}_n(s))), (s_1 \ldots, s_n))), R(g(\mathcal{M}(s)))) < \varepsilon. \end{gathered}$$

(II) Notemos que

$$g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), 0) = R(E((g(\mathcal{L}_1(0)), \ldots, g(\mathcal{L}_n(0))), (t_1, \ldots, t_n))).$$

Dado $i \in \{1,\dots,n\}$, $g(\mathcal{L}_i(0)) \in g(F_1(X)) \subset Q \times \{0\}$. Por la manera en que se define E, obtenemos que $E((g(\mathcal{L}_1(0)),\dots,g(\mathcal{L}_n(0))),(t_1,\dots,t_n)) \in Q \times \{0\}$. Sea $p = E((g(\mathcal{L}_1(0)),\dots,g(\mathcal{L}_n(0))),(t_1,\dots,t_n)) \in Q \times \{0\}$. Entonces $g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),0) = R(p) = r_1(p) = g^{-1}(r(p))$. Ya que $r(p) \in F_1(X)$, existe $x \in X$ tal que $r(p) = g(\{x\})$. Entonces $g^{-1}(r(p)) = \{x\}$. Por tanto, $g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),0) = \{x\} \in F_1(X)$

(III) Notemos que

$$\begin{gathered} g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),1) = \\ R(E((g(\mathcal{L}_1(1)),\dots,g(\mathcal{L}_n(1))),(t_1,\dots,t_n))) = \\ R(E((g(X),\dots,g(X)),(t_1,\dots,t_n))) = R(g(X)) = g^{-1}(g(X)) = X. \end{gathered}$$

(IV) Observemos que

$$\begin{gathered} g_n((\mathcal{L},\dots,\mathcal{L}),(t_1,\dots,t_n),t) = \\ R(E((g(\mathcal{L}(t)),\dots,g(\mathcal{L}(t))),(t_1,\dots,t_n))) = \\ R(g(\mathcal{L}(t))) = g^{-1}(g(\mathcal{L}(t))) = \mathcal{L}(t). \end{gathered}$$

(V) Si $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ es una permutación, entonces

$$\begin{gathered} g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),t) = \\ R(E((g(\mathcal{L}_1(t)),\dots,g(\mathcal{L}_n(t))),(t_1,\dots,t_n))) = \\ R(E((g(\mathcal{L}_{\sigma(1)}(t)),\dots,g(\mathcal{L}_{\sigma(n)}(t))),(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)}))) = \\ g_n((\mathcal{L}_{\sigma(1)},\dots,\mathcal{L}_{\sigma(n)}),(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)}),t). \end{gathered}$$

(VI) Si $t_1 = 0$, entonces

$$\begin{gathered} g_n((\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n),(t_1,\dots,t_n),t) = \\ R(E((g(\mathcal{L}_1(t)),\dots,g(\mathcal{L}_n(t))),(0,t_2,\dots,t_n))) = \\ R(E((g(\mathcal{L}_2(t)),\dots,g(\mathcal{L}_n(t))),(t_2,\dots,t_n))) = \\ g_{n-1}((\mathcal{L}_2,\dots,\mathcal{L}_n),(t_2,\dots,t_n),t). \end{gathered}$$

Con esto terminamos las pruebas de las propiedades arriba mencionadas.

Ahora definimos una estructura convexa controlada $\mathcal{E}$ en $AOL(X)$.

Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n \in AOL(X)$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$, sea

$$\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \\ \left\{ \bigcup \{g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), s) : s \in [0,t]\} : 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Como la función g_n es continua, y la función de $[0,1]$ en $C([0,1])$ que a t le asocia $[0,t]$ es continua, por la Proposición 6.1, la función de $(AOL(X))^n \times \Delta_n \times [0,1]$ en $C(X)$, que a $((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t)$ le asocia $g_n(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1 \ldots, t_n))\} \times [0,t])$ es continua. Y si la componemos con la función unión (ver Ejercicio 11.5 de [16]), también obtenemos una función continua. De manera que la función $\varphi : (AOL(X))^n \times \Delta_n \times [0,1] \to C(X)$ dada por

$$\varphi((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), t) = \bigcup g_n(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n))\} \times [0,t])$$

es continua.

Notemos que

$$\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \varphi(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n))\} \times [0,1]).$$

Así que $\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n))$ es un subcontinuo de $C(X)$, y por tanto un elemento de $C(C(X))$. Además, podemos aplicarle la Proposición 6.1, y obtener que la función con dominio $(AOL(X))^n \times \Delta_n \times C([0,1])$ y contradominio $C(C(X))$, que a cada elemento $((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), A)$ le asocia $\varphi(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n))\} \times A)$ es continua. Notemos que, visto así, $\mathcal{E}$ es una restricción de esta última función (cuando A sólo toma el valor $[0,1]$), y por tanto $\mathcal{E}$ es una función continua.

Sea $Z = ((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n)) \in (AOL(X))^n \times \Delta_n$. Si $\leq s \leq t \leq 1$, $\varphi(Z, s) \subset \varphi(Z, t)$. De manera que $\mathcal{E}(Z) = \varphi(\{Z\} \times [0,1])$ es un subcontinuo ordenado de $C(X)$, es decir, un arco ordenado en $C(X)$.

Como $\varphi(Z, 0) = \bigcup g_n(\{Z\} \times \{0\}) = \bigcup \{g_n(Z, 0)\} = g_n(Z, 0) \in F_1(X)$ (por (II)), tenemos que $\mathcal{E}(Z)$ contiene un conjunto singular.

Como $\varphi(Z, 1) = \bigcup g_n(\{Z\} \times [0,1]) \supset g_n(Z, 1) = X$ (por (III)), tenemos que $\mathcal{E}(Z)$ contiene a X.

Por tanto $\mathcal{E}(Z)$ es un arco ordenado largo en $C(X)$. Esto muestra que $\mathcal{E}$ está bien definida.

Veamos que $\mathcal{E}$ es una estructura convexa controlada. Verifiquemos que $\mathcal{E}$ satisface las 4 propiedades de la Definición 3.1. La cuarta propiedad se refiere a que algunas restricciones de la función $\mathcal{E}$ son continuas, ya no hace falta comprobar esto, porque ya vimos que la misma $\mathcal{E}$ es continua.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n \in AOL(X)$ y $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_n$.

1. Por (IV)

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}((\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}), (t_1, \ldots, t_n)) = \\
\varphi(\{((\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}), (t_1, \ldots, t_n))\} \times [0,1]) = \\
\Big\{ \bigcup \{ g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\Big\{ \bigcup \{ \mathcal{L}(s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\{\mathcal{L}(t) : t \in [0,1]\} = \mathcal{L}.
\end{gathered}$$

2. Sea $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ una permutación. Por (V),

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n)) = \\
\varphi(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n))\} \times [0,1]) = \\
\Big\{ \bigcup \{ g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n), s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\Big\{ \bigcup \{ g_n((\mathcal{L}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}), s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\varphi(\{((\mathcal{L}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}))\} \times [0,1]) = \\
\mathcal{E}((\mathcal{L}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})).
\end{gathered}$$

3. Por (VI),

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (0, t_2, \ldots, t_n)) = \\
\varphi(\{((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (0, t_2, \ldots, t_n))\} \times [0,1]) = \\
\Big\{ \bigcup \{ g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (0, t_2, \ldots, t_n), s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\Big\{ \bigcup \{ g_{n-1}((\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_2, \ldots, t_n), s) : s \in [0,t]\} : t \in [0,1] \Big\} = \\
\varphi(\{((\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_2, \ldots, t_n))\} \times [0,1]) = \\
\mathcal{E}((\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_2, \ldots, t_n)).
\end{gathered}$$

Esto muestra que $\mathcal{E}$ es una estructura convexa.

Ahora veremos que $\mathcal{E}$ es controlada. Sean $\mathcal{L} \in AOL(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por (I), existe $\delta > 0$ tal que si $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{L}_i) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Teorema 2.15 y el Lema 1.48 de [20],

$$H\left(\bigcup\{g_n((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1 \ldots, t_n), s) : s \in [0, t]\}, \mathcal{L}(s)\right) < \varepsilon.$$

Esto implica que

$$H(\mathcal{E}((\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n), (t_1, \ldots, t_n)), \mathcal{L}) < \varepsilon.$$

Que es lo que queríamos demostrar. Por tanto $AOL(X)$ es un retracto absoluto. ■

Nuestro objetivo es demostrar que cuando X es un retracto absoluto, $AOL(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Por el Teorema 4.14, nos falta probar que la función identidad en $AOL(X)$ es límite uniforme de Z funciones. Para probar esto, hay un cierto tipo de puntos de X que presentan dificultades adicionales. Para situarlos y tratarlos adecuadamente, necesitamos algunas definiciones y resultados previos.

DEFINICIÓN 5.2. Un punto x de un continuo X se llama *punto extremo de* X si existen un abierto U de X, que contiene a x, y un homeomorfismo de U sobre $[0, 1)$, que envía x al 0.

DEFINICIÓN 5.3. Un *triodo simple* es un continuo T homeomorfo al subespacio $([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ de $\mathbb{R}^2$. Al punto que le corresponde el $(0, 0)$ (bajo el homeomorfismo) se llama el *vértice de* T.

El siguiente teorema es bien conocido (ver Ejercicio 31.11 de [16]).

TEOREMA 5.4. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es un arco o una curva cerrada simple si y sólo si X no contiene triodos simples.*

PROPOSICIÓN 5.5. *Sean X un continuo y $p \in X$ un punto extremo de X. Supongamos que U es un subconjunto abierto de X, como en la Definición 5.2. Entonces ningún punto de U es un vértice de un triodo simple contenido en X.*

Demostración. Sea $f : [0, 1) \to X$ un homeomorfismo tal que $f(0) = p$. Supongamos que existe $u \in U$ tal que u es el vértice de T. Como U es abierto, podemos suponer que $T \subset U$. Entonces $f^{-1}(T)$ es un triodo simple en $[0, 1)$. Claramente $[0, 1)$ no contiene triodos simples, por lo que tenemos una contradicción, que termina la prueba de la proposición. ■

TEOREMA 5.6. *Cualquier continuo X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos extremos. Si tal conjunto es infinito y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son los puntos extremos de X, entonces se pueden elegir los correspondientes conjuntos $U_1, U_2, \ldots$ de tal manera que sean abiertos conexos, ajenos dos a dos, homeomorfos a $[0,1)$, $x_n \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y* lím *diámetro*$(U_n) = 0$.

Demostración. Si X es un arco, entonces X tiene claramente las propiedades indicadas. Supongamos entonces que X no es un arco.

Sean x, y puntos extremos distintos de X. Tomemos U, V abiertos de X homeomorfos a $[0,1)$ tales que $x \in U, y \in V$, y para los cuales existen homeomorfismos $f : [0,1) \to U$ y $g : [0,1) \to V$ tales que $f(0) = x$ y $g(0) = y$.

Veamos que U y V son ajenos. Supongamos, por el contrario, que existe un punto $a \in U \cap V$. Entonces existen $s, t \in [0,1)$ tales que $a = f(t)$ y $a = g(s)$. Sea $Y = f([0,t]) \cup g([0,s])$ es un subcontinuo de X tal que $Y \subset (U \cup V)$. Por la Proposición 5.5, Y no contiene al vértice de un triodo simple contenido en X, y entonces Y no contiene triodos simples. Como $f([0,t])$ y $g([0,s])$ son imágenes de continuos localmente conexos, entonces cada uno de ellos es localmente conexo. Esto implica que Y es localmente conexo. Por el Teorema 5.4, Y es un arco o una curva cerrada simple. Como $[0,t)$ es abierto en $[0,1)$, $f([0,t))$ es abierto en U, y por tanto también es abierto en X y en Y. Como una curva cerrada simple no tiene abiertos homeomorfos a $[0,t)$, concluímos que Y es un arco. Como X no es arco, entonces $Y \neq X$. De manera que existe un punto $z \in X \backslash Y$. Notemos que $f([0,1)) \cup g([0,1))$ es un conjunto abierto, no vacío y arco conexo de X que contiene a Y, entonces $Y \neq f([0,1)) \cup g([0,1))$, pues el único subconjunto abierto de X que es compacto es X mismo. Sea $z \in f([0,1)) \cup g([0,1)) \backslash Y$, entonces existe un arco α en X que une a z con x. Como α es un arco que une un punto de fuera de Y con uno de Y, podemos tomar el primero punto z_0 de α, yendo de z a x, que pertenece a Y. Si $z_0 = x$, entonces $\{x\}$ es igual a la intersección de dos arcos. Esto es imposible, pues x tiene una vecindad en X homeomorfa a $[0,1)$. Por tanto $z_0 \neq x$. Similarmente $z_0 \neq y$. Así que $z_0 \in Y \backslash \{x, y\}$. Claramente z_0 es el vértice de un triodo simple, lo cual contradice el hecho que Y no tiene vértices de triodos simples de X. Con esta contradicción completamos la prueba que $U \cap V = \emptyset$.

Si X tuviera una cantidad no numerable de puntos extremos, por el párrafo anterior, dándole su vecindad U a cada unos de ellos, tendríamos una cantidad no numerable de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos en X. Esto es absurdo porque X es separable. Por tanto, X tiene una cantidad a lo más numerable de puntos extremos.

Si X tiene un a cantidad infinita numerable de puntos extremos, los numeramos y los escribimos en el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea V_n un abierto de X tal que $x_n \in V_n$ y existe un homeomorfismo $f : [0,1) \to V_n$ con $f(0) = x_n$. Sea $t_n \in (0,1)$ tal que diámetro$(f([0,t_n))) < \frac{1}{n}$. Entonces la familia $\{f([0,t_n)) : n \in \}$ satisface las propiedades requeridas. ■

TEOREMA 5.7. *Sean X un continuo con métrica d y $\varepsilon > 0$. Entonces existen un subespacio Y de X, que no contiene puntos extremos de X, y una retracción $r : X \to Y$ tal que $d(x, r(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si X es un arco, es claro que tal retracción se puede encontrar. Supongamos entonces que X no es un arco.

Supondremos que el conjunto de puntos extremos de X es infinito, y entonces numerable. El caso en que el conjunto de puntos extremos de X es finito es más fácil y su demostración es similar. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de puntos extremos de X. Por el Teorema 5.6, existe una familia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos ajenos dos a dos y homeomorfos a $[0,1)$ tal que $x_n \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y lím diámetro$(U_n) = 0$. Haciendo más pequeños a los primeros conjuntos U_n, podemos suponer que diámetro$(U_n) < \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0,1) \to U_n$ un homeomorfismo tal que $f(0) = x_n$.

Definimos

$$Y = (X \setminus (\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\})) \cup (\bigcup \{f_n([\frac{1}{2}, 1)) : n \in \mathbb{N}\}),$$

y $r : X \to Y$ por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y, \\ f_n(\frac{1}{2}) & \text{si } x \in \bigcup \{f_n([0, \frac{1}{2})) : n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Como los conjuntos U_n son ajenos dos a dos, la función r está bien definida y es la identidad en Y. Claramente la imagen de r no contiene ningún punto extremo de X. Como diámetro$(U_n) < \varepsilon$, entonces $d(x, r(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Ahora veremos que r es continua. Sea $W = \bigcup \{f_n([0, \frac{1}{2})) : n \in \mathbb{N}\}$. Como los conjuntos U_n son ajenos dos a dos, W es el complemento de Y. Notemos que W es un conjunto abierto de X, al ser unión de conjuntos abiertos. Por definición, la función r es la identidad en Y, que es cerrado. Por tanto r es continua en el interior de Y. Como los conjuntos $f_n([0, \frac{1}{2}))$ son abiertos ajenos dos a dos y en cada uno de ellos la función r es constante, entonces r es continua en W.

Entonces sólo hace falta mostrar que r es continua en la frontera de Y.

Sea $p \in \mathrm{Fr}(Y)$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in f_n([0, 1))$. Como $f_n((\frac{1}{2}, 1))$ y $f_n([0, \frac{1}{2}))$ son abiertos de X contenidos en Y y W, respectivamente, entonces $p = f(\frac{1}{2})$. Notemos que la restricción de r al abierto $f_n([0, 1))$ es continua, pues está definida como la identidad en $f_n([\frac{1}{2}, 1))$, y como la constante $f_n(\frac{1}{2})$ en $f_n([0, \frac{1}{2}))$. Entonces $f_n([0, 1))$ es una vecindad de p en la cual la función r es continua. Por tanto r es continua en p.

Analicemos el caso en que p no pertece a ningún conjunto de la forma $f_n([0, 1))$. Sean $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, diámetro$(U_n) < \frac{\delta}{2}$. Tomemos $A = f_1([0, \frac{1}{2}]) \cup \cdots \cup f_N([0, \frac{1}{2}])$. Entonces A es un subconjunto compacto de X y $p \notin A$. Sea d la métrica de X. Tomemos $\eta > 0$ tal que $\eta < \frac{\delta}{2}$ y $B_\eta(p) \cap A = \emptyset$. Sea $q \in B_\eta(p)$. Aseguramos que $d(r(p), r(q)) < \delta$. Por definición, $r(p) = p$. Notemos que $q \notin A$. Si $q \in Y$, entonces $r(q) = q$, con lo cual $d(r(p), r(q)) = d(p, q) < \eta$. Supongamos entonces que $q \in f_n([0, \frac{1}{2}))$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $q \notin A$, entonces $n > N$. De manera que $d(q, r(q)) <$ diámetro$(U_n) < \frac{\delta}{2}$. Entonces $d(r(p), r(q)) = d(p, r(q)) \leq d(p, q) + d(q, r(q)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$.

En cualquier caso, $d(r(p), r(q)) < \delta$. Por tanto r es continua en p.

Esto completa la prueba de que r es continua.

En particular, como Y es un continuo, su imagen bajo r también es un continuo. Por tanto Y es un continuo. ■

Ahora estamos listos para probar el teorema principal de este capítulo.

TEOREMA 5.8. *Sea X un continuo que es retracto absoluto. Entonces la identidad en $AOL(X)$ es límite uniforme de Z funciones.*

Demostración. Como X es retracto absoluto, X se puede encajar en el cubo de Hilbert Q y es retracto de Q. De manera que X es imagen continua de Q. Como Q es localmente conexo, entonces X es localmente conexo. Por el famoso teorema de Bing y Moise (ver el Teorema 10.3 de [16]), podemos dotar a X de una métrica d que además de inducir la topología original de X, también es convexa. Esto quiere decir que, para cualquier par de puntos $a, b \in X$, existe un arco α que los une tal que α es isométrico al intervalo

$[0, d(a, b)]$. Es fácil ver que, bajo esta métrica, todas las bolas, abiertas y cerradas, son arco conexas.

Multiplicando por un escalar a la métrica d, si fuera necesario, podemos suponer que diámetro$(X) = 1$.

Dados $r \geq 0$ y $x \in X$, definimos la bola cerrada con centro en x y radio r como:

$$D(x, r) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

Por lo comentado anteriomente, $D(x, r)$ es un subcontinuo de X. De hecho, la función $D : X \times [0, \infty) \to C(X)$ es continua (ver el Ejercicio 0.65.1 de [21]).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : AOL(X) \to AOL(X)$ por

$$f_n(\mathcal{L}) = \{D(x, r) : r \in [0, \frac{1}{n}]\} \cup \{D(x, \frac{1}{n}) \cup L : L \in \mathcal{L}\},$$

donde x es el punto inicial de $\mathcal{L}$.

Como D es continua, la familia $\{D(x, r) : r \in [0, \frac{1}{n}]\}$ es un subcontinuo de $C(X)$ que está ordenado por la inclusión. Por tanto es un arco ordenado que contiene a $\{x\}$, y su otro extremo es $D(x, \frac{1}{n})$. La familia $\{D(x, \frac{1}{n}) \cup L : L \in \mathcal{L}\}$ es un subcontinuo de X que también está ordenado por la inclusión, por lo que también es un arco ordenado. Notemos que este último arco tiene como extremos a $D(x, \frac{1}{n})$ y a X. De manera que $f_n(\mathcal{L})$ es un arco ordenado, con el mismo punto inicial que $\mathcal{L}$.

Veamos que la función f_n es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como D es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y si $x, y \in X$ y $s, t \in [0, 1]$ son tales que $d(x, y) < \delta$ y $|s - t| < \delta$, entonces $H(D(x, s), D(y, t)) < \varepsilon$. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ tales que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta$ y tomemos $x, y \in X$ los puntos iniciales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$, respectivamente. Por el Lema 2.14, $d(x, y) < \delta$. Entonces, para todo $r \geq 0$, $H(D(x, r), D(y, r) < \varepsilon$. Sea $A \in F_n(\mathcal{L})$. Si $A = D(x, r)$ para algún $r \leq \frac{1}{n}$, entonces $H(A, D(y, r)) < \varepsilon$ y $D(y, r) \in f_n(\mathcal{M})$. Si $A = D(x, \frac{1}{n}) \cup L$ para algún $L \in \mathcal{L}$, entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(L, M) < \varepsilon$, por tanto $H(A, D(y, \frac{1}{n}) \cup M) < \varepsilon$ y $D(y, \frac{1}{n}) \cup M \in f_n(\mathcal{M})$. Con esto probamos que $f_n(\mathcal{L}) \subset N_\varepsilon(f_n(\mathcal{M}))$. Análogamente se prueba que $f_n(\mathcal{M}) \subset N_\varepsilon(f_n(\mathcal{L}))$. Por tanto $H_0(f_n(\mathcal{L}), f_n(\mathcal{M})) < \varepsilon$. Esto prueba que f_n es continua.

Ahora veamos que f_n está $\frac{2}{n}$-cercana a la identidad. Sean $\mathcal{L} \in AOL(X)$ y $x \in X$ su punto inicial. Tomemos $A \in f_n(\mathcal{L})$. Si $A = D(x, r)$ para algún $r \leq \frac{1}{n}$, entonces $H(A, \{x\}) \leq \frac{1}{n}$. Si $A = D(x, \frac{1}{n}) \cup L$ para algún $L \in \mathcal{L}$, entonces $H(A, L) \leq \frac{1}{n}$. Esto prueba que $f_n(\mathcal{L}) \subset N_{2\varepsilon}(\mathcal{L})$. Si tomamos $L \in \mathcal{L}$, entonces $H(L, D(x, \frac{1}{n}) \cup L) \leq \frac{1}{n}$. Esto prueba que $\mathcal{L} \subset N_{2\varepsilon}(f_n(\mathcal{L}))$. Por tanto $H(\mathcal{L}, f_n(\mathcal{L})) \leq \frac{2}{n}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, veremos que la imagen de f_m es un Z conjunto en $AOL(X)$.

Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 5.7, existen un subcontinuo no denenerado $Y \subset X$ tal que X no tiene puntos extremos de X, y una ε-retracción $R : X \to Y$. Dado $x \in X$, $d(x, R(x)) < \varepsilon$, así que $x \in B_\varepsilon(x) \subset N_\varepsilon(Y)$. De manera que $X \subset N_\varepsilon(Y)$. Claramente $Y \subset N_\varepsilon(X)$. Así que $H(X, Y) < \varepsilon$.

Como X es localmente conexo, por el Teorema 8.14 de [20], existe una función continua y suprayectiva $s : [0,1] \to X$. Como X es retracto absoluto, el Teorema 3.9, X tiene una estructura convexa controlada $E : \bigcup\{X^n \times \Delta_n : n \in \mathbb{N}\} \to X$.

Sea $G : X \times [0,1] \to X$ dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} E(R(x), s(0), 1-2t, 2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ s(2t-1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Si $t = \frac{1}{2}$, entonces $E(R(x), s(0), 1-2t, 2t) = s(0) = s(2t-1)$, por tanto G está bien definida y es continua.

Sea $\mathcal{G} : X \to C(C(X))$ definida por

$$\mathcal{G}(x) = \{G(\{x\} \times [0,t]) : t \in [0,1]\}.$$

Como la función de $[0,1]$ en $C([0,1])$ dada por $t \to [0,t]$ es continua, por la Proposición 6.1, la función de $X \times [0,1]$ en $C(X)$ dada por $(x,t) \to G(\{x\} \times [0,t])$ es continua, y $\mathcal{G}(x)$ es la imagen de $[0,1]$ bajo esta función. Por tanto $\mathcal{G}(x)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Claramente $\mathcal{G}(x)$ es una familia ordenada por la inclusión, de modo que también es un arco ordenado en $C(X)$. Notemos que $G(\{x\} \times [0,0]) = \{R(x)\}$ y

$$G(\{x\} \times [0,1]) \supset \{G(x,u) : u \in [\frac{1}{2}, 1]\} =$$
$$\{s(2u-1) : u \in [\frac{1}{2}, 1]\} = \{s(u) : u \in [0,1]\} = X.$$

Por tanto $\mathcal{G}(x)$ es un arco ordenado largo en $C(X)$, con punto inicial $R(x)$.

Dado $\varepsilon > 0$, como G es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $x, u \in X$ y $s, t \in [0,1]$ satisfacen que $d(x,u) < \delta$ y $|s-t| < \delta$, entonces $d(G(x,t), G(u,s)) < \varepsilon$.

Tomemos $x, u \in X$ tales que $d(x,u) < \delta$. Entonces para cada $s \in [0,1]$, $d(G(x,s), G(u,s)) < \varepsilon$. De modo que para todo $t \in [0,1]$, $G(\{x\} \times [0,t]) \subset N_\varepsilon(G(\{u\} \times [0,t]))$ y $G(\{u\} \times [0,t]) \subset N_\varepsilon(G(\{x\} \times [0,t]))$. De manera que $H(G(\{x\} \times [0,t]), G(\{u\} \times [0,t])) < \varepsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Con esto, $\mathcal{G}(x) \subset N_\varepsilon(\mathcal{G}(u))$ y $\mathcal{G}(u) \subset N_\varepsilon(\mathcal{G}(x))$. Así que $H_0(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(u)) < \varepsilon$. Por tanto $\mathcal{G}$ es continua.

Notemos que para cada $x \in X$, cada elemento de $\mathcal{G}(x)$ es la imagen continua de un arco (sus elementos son imágenes bajo G) de arcos de la forma $\{x\} \times [0,t]$, y si $t = 0$, obtenemos un conjunto singular, que también es imagen continua de un arco). Para cada $t \in [0,1]$, sea $\mathcal{G}(x)(t)$ el único elemento de $\mathcal{G}(x)$ de medida t bajo μ.

Por el Teorema 1.11, podemos elegir $t_0 \in [0,1]$ tal que $t_0 \leq \mu(Y)$ y que cumpla que si $x \in A \in C(X)$ y $\mu(A) \leq t_0$, entonces $H(\{x\}, A) \leq \varepsilon$.

Escogemos un arco ordenado $\mathcal{Y}$ en $C(X)$, que une a Y con X.

Sea $F_\varepsilon : AOL(X) \to AOL(X)$ definida por

$$F_\varepsilon(\mathcal{L}) = \{\mathcal{G}(x)(t) : t \in [0,t_0]\} \cup \\ \{\mathcal{G}(x)(t_0) \cup R(L) : L \in \mathcal{L}\} \cup \{\mathcal{G}(x)(t_0) \cup B : B \in \mathcal{Y}\}.$$

Analicemos la definición de $F_\varepsilon(\mathcal{L})$. El primer uniendo en la definición de $F_\varepsilon(\mathcal{L})$ es un arco ordenado contenido en $\mathcal{G}(x)$, que une el singular $\{R(x)\}$ con el elemento $\mathcal{G}(x)(t_0)$ (el cual es el elemento de $\mathcal{G}(x)$ de medida t_0). Por la elección de t_0, todos los elementos de este uniendo distan de $\{R(x)\}$ en menos que ε, y como $d(R(x), x) < \varepsilon$, los elementos del primer uniendo distan de $\{x\}$ en menos que 2ε. El segundo uniendo es un arco ordenado que une el elemento $\mathcal{G}(x)(t_0)$ con $\mathcal{G}(x)(t_0) \cup R(X) = \mathcal{G}(x)(t_0) \cup Y$. Como R es una ε-retracción, un elemento típico de este uniendo $\mathcal{G}(x)(t_0)) \cup R(L)$ está contenido en $N_\varepsilon(\{x\} \cup L) = L$. Para $L \in \mathcal{L}$, $L \subset N_\varepsilon(R(L)) \subset N_\varepsilon(\mathcal{G}(x)(t_0) \cup L)$, con lo cual $H(\mathcal{G}(x)(t_0) \cup R(L), L) < \varepsilon$ para todo $L \in \mathcal{L}$. En particular $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(F_\varepsilon(\mathcal{L}))$. El tercer uniendo es un arco ordenado que empieza en $\mathcal{G}(x)(t_0) \cup Y$ y termina en X. Como todos sus elementos están contenidos en Y, tenemos que cada uno de ellos dista de X en menos que ε. Hemos obtenido, pues, que cada elemento de $F_\varepsilon(\mathcal{L})$ dista de uno de $\mathcal{L}$ en menos de 2ε, es decir, $F_\varepsilon(\mathcal{L}) \subset N_{2\varepsilon}(\mathcal{L})$, y como $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(F_\varepsilon(\mathcal{L}))$, concluimos que

$$H_0(\mathcal{L}, F_\varepsilon(\mathcal{L})).$$

En el caso que x es un punto extremo de X, se tiene que $F_\varepsilon(\mathcal{L})$ es un arco ordenado con punto inicial $R(x)$, que es distinto de x.

Veamos que F_ε es una función continua. Sea $\eta > 0$. Como $\mathcal{G}$ es una función continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \eta$ y si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta_1$, entonces $H_0(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(y)) < \eta$. Por el Teorema 2.15, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ y $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta_2$, entonces $H(\mathcal{L}(t), \mathcal{M}(t))$ para todo $t \in [0,1]$. Ya que la función inducida $C(R) : C(X) \to C(Y)$ es continua, existe $\delta_3 > 0$ tal que $\delta_3 < \delta_2$ y si $A, B \in C(X)$ satisfacen que $H(A,B) < \delta_3$, entonces $H(R(A), R(B)) < \eta$.

Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ tales que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta_3$, y $x, y \in X$ los puntos iniciales de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$, respectivamente. Como $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \delta_2$, entonces $H(\{x\}, \{y\}) = H(\mathcal{L}(0), \mathcal{M}(0)) < \delta_1$. De manera que $H_0(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(y)) < \eta$.

Veamos que $F_\varepsilon(\mathcal{L}) \subset N_\eta(F_\varepsilon(\mathcal{M}))$. Tomemos $A \in F_\varepsilon(\mathcal{L})$. Tenemos tres posibilidades:

(a) $A \in \mathcal{G}(x)$ y $\mu(A) \leq t_0$. Sea $t = \mu(A)$. Entonces $A = \mathcal{G}(x)(t)$. De modo que $H(A, \mathcal{G}(y)(t)) = H(\mathcal{G}(x)(t), \mathcal{G}(y)(t)) \leq H_0(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(y)) < \eta$. Como $t \leq t_0$, $G(y)(t) \in F_\varepsilon(\mathcal{M})$. Así que $A \in N_\eta(F_\varepsilon(\mathcal{M}))$.

(b) $A = \mathcal{G}(x)(t_0) \cup R(L)$ para algún $L \in \mathcal{L}$. Sea $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(L, M) < \delta_3$. entonces $H(R(L), R(M)) < \eta$. Ya vimos que $H(\mathcal{G}(x)(t_0), \mathcal{G}(y)(t_0)) < \eta$. De aquí que $H(A, R(M) \cup \mathcal{G}(y)(t_0)) = H(R(L) \cup \mathcal{G}(x)(t_0), R(M) \cup \mathcal{G}(y)(t_0)) < \eta$. Como $R(M) \cup \mathcal{G}(y)(t_0) \in F_\varepsilon(M)$, concluimos que $A \in N_\varepsilon(F_\varepsilon(\mathcal{M}))$.

(c) $A = \mathcal{G}(x)(t_0) \cup B$ para algún $B \in \mathcal{Y}$. Ya vimos que $H(\mathcal{G}(x)(t_0), \mathcal{G}(y)(t_0)) < \eta$. Esto implica que $H(A, \mathcal{G}(y)(t_0) \cup B) = H(\mathcal{G}(x)(t_0) \cup B, \mathcal{G}(y)(t_0) \cup B) < \eta$. Como $\mathcal{G}(y)(t_0) \cup B \in F_\varepsilon(\mathcal{M})$, tenemos que $A \in N_\eta(F_\varepsilon(\mathcal{M}))$.

Hemos demostrado que $F_\varepsilon(L) \subset N_\eta(F_\varepsilon(\mathcal{M}))$. De manera similar se demuestra que $F_\varepsilon(M) \subset N_\eta(F_\varepsilon(\mathcal{L}))$. Se sigue que $H_0(F_\varepsilon(\mathcal{L}), F_\varepsilon(\mathcal{M})) < \eta$. Por tanto F_ε es continua.

Ahora veamos que la imagen de F_ε es ajena de la imagen de f_n. Supongamos que existe $\mathcal{A} \in \mathrm{Im}(F_\varepsilon) \cap \mathrm{Im}(f_n)$. Entonces $A = F_\varepsilon(\mathcal{L}_1) = f_n(\mathcal{L}_2)$, para algunos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in AOL(X)$. Sea $x \in X$ el punto inicial de $\mathcal{L}_1$, entonces el punto inicial de $\mathcal{A}$ es $R(x)$. De manera que $R(x)$ es el punto inicial de $f_n(\mathcal{L}_2)$ y por tanto también es el punto inicial de $\mathcal{L}_2$. Con esto tenemos que el punto inicial de $\mathcal{A}$ no es un punto extremo de X.

Fijemos un elemento $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $A_0 \neq \{R(x)\}$, $\mu(A) \leq t_0$ y $\mathrm{diám}(A_0) < \frac{1}{n}$. Entonces A_0 no puede contener a $D(R(x), \frac{1}{n})$. Como $A_0 \in F_\varepsilon(\mathcal{L}_1)$, tenemos que A_0 es de la forma $G(\{R(x)\} \times [0, s_0])$, para algún $s_0 \in [0,1]$, y como

$A_0 \in f_n(\mathcal{L}_2)$, $A_0 = D(R(x), r_0)$, para algún $r_0 \in (0\frac{1}{n})$. Dado $r \in [0, r_0]$, el conjunto $E = D(R(x), r)$ es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $E \subset A_0$. De manera que $E = G(\{R(x)\} \times [0, s])$ para algún $s \in [0, s_0]$. Por la conexidad de X, podemos fijar un punto $z \in X$ tal que $d(R(x), z) = r_0$. Como la métrica d es convexa, existe una isometría $\gamma : [0, r_0] \to X$ tal que $\gamma(0) = R(x)$ y $\gamma(r_0) = z$.

Aseguramos que $\mathrm{Im}(\gamma) = A_0 = D(R(x), r_0)$. Como γ es isometría, Im $\gamma \subset A_0$. Supongamos que A_0 no está contenido en Im γ. Entonces existe $y \in D(R(x), r_0) \backslash \mathrm{Im}\ \gamma$. Sea $r = d(R(x), y) \in [0, r_0]$. Como $y \notin \mathrm{Im}\ \gamma$, $0 < r$. Tomemos $E = D(R(x), r)$ y $s \in [0, s_0]$ tal que $E = G(\{R(x)\} \times [0, s]) = \{G(R(x), u) : u \in [0, s]\}$. Como $d(R(\gamma(0)), R(x)) = 0$ y $d(R(\gamma(r_0)), R(x)) = d(z_0, R(x)) = r_0 \geq r$, existe $p \in \mathrm{Im}\ \gamma$ tal que $d(p, R(x)) = r$. Sea $u_0 = \text{mín}\{u \in [0, s] : d(G(R(x), u), R(x)) = r\}$. Notemos que u_0 está bien definido pues $p \in E = G(\{R(x)\} \times [0, s])$. Como $r > 0$ y $G(R(x), 0) = R(R(x)) = R(x)$, tenemos que $u_0 > 0$. Por definición de u_0, $d(G(R(x), u), R(x)) < r$ para todo $u \in [0, u_0)$. Por tanto $G(R(x), u_0)$ es el único punto en el conjunto $C = G(\{R(x)\} \times [0, u_0])$ tal que su distancia a $R(x)$ es igual a r. Ya que $y \notin \mathrm{Im}\ \gamma$, $y \neq p$; y como $d(y, R(x)) = d(p, R(x)) = r$, concluimos que alguno de los puntos y o p no pertenece a C. Como $C = G(\{R(x)\} \times [0, u_0]) \subset G(\{R(x)\} \times [0, s]) = E = D(R(x), r) \subset D(R(x), r_0) = A_0$, tenemos que $C \subset A_0$. Por la definición de $F_\varepsilon(\mathcal{L}_1)$, C es un elemento de $\mathcal{A}$, así que, por la definición de $f_n(\mathcal{L}_2)$, $C = D(R(x), v)$ para algún $v \in [0, r_0]$. Ya que $G(R(x), u_0) \in C$ y $d(G(R(x), u_0), R(x)) = r$, tenemos que $r \leq v$. Por otra parte, como $C = G(\{R(x)\} \times [0, u_0]) \subset G(\{R(x)\} \times [0, s]) = E = D(R(x), r)$, concluimos que $v \leq r$. De modo que $v = r$. Es decir, $C = E$. Esto es absurdo pues $y, p \in E$. Con esta contradicción hemos probado que Im $\gamma = A_0$.

Como Im $\gamma = A_0 = D(R(x), r_0)$ y el único punto de Im γ que dista r de $R(x)$ es z, tenemos que $B_r(R(x)) = \gamma([0, r))$. Por tanto $B_r(R(x))$ es un subconjunto abierto de X que es homeomorfo a $[0, r)$. Esto muestra que $R(x)$ es un punto extremo, lo cual es absurdo pues $R(x) \in Y$ y Y no contiene puntos extremos de X. Esto termina la prueba de que $\mathrm{Im}(F_\varepsilon) \cap \mathrm{Im}(f_n) = \emptyset$.

Hemos probado que $\mathrm{Im}(f_n)$ es un Z-conjunto de $AOL(X)$. Por tanto la identidad en $AOL(X)$ es límite uniforme de las Z-funciones f_n. ■

COROLARIO 5.9. *Sea X un continuo que también es un retracto absoluto. Entonces $AOL(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Capítulo 6

$AOL(X)$ cuando X es un grupo topológico

Ahora que sabemos cómo es $AOL(x, X)$, investigaremos cómo es $AOL(X)$. Empezaremos con algunos casos sencillos. Primero veremos el caso en que X es la circunferencia y , más generalmente, cuando X es un grupo topológico. Antes necesitaremos una construcción muy parecida al de la función inducida.

PROPOSICIÓN 6.1. *Sean X, Y continuos y $f : X \times Y \to Z$ una función continua. Entonces la función $\mathcal{C}(f) : C(X) \times Y \to C(Z)$ definida por*

$$\mathcal{C}(f)(A, y) = f(A \times \{y\})$$

está bien definida y es una función continua.

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{C}$ está bien definida. Dados $A \in C(X)$ y $y \in Y$, el conjunto $A \times \{y\}$ es un subcontinuo de $X \times Y$. Por tanto $f(A \times \{y\})$ es un subcontinuo de $X \times Y$.

Para ver la continuidad de $\mathcal{C}$, tomemos $\varepsilon > 0$. Como f es continua, también es uniformemente continua, así que existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, u) < \delta$ y $d_Y(y, v) < \delta$, entonces $d_Z(f(x, y), f(u, v)) < \varepsilon$. Tomemos $A, B \in C(X)$ y $y, v \in Y$ tales que $H(A, B) < \delta$ y $d_Y(y, v) < \delta$.

Dado $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$. Entonces $d_Z(f(a, y), f(b, v)) < \delta$. De aquí que $f(a, y) \in N_\varepsilon(\mathcal{C}(f)(B, v))$. Por tanto $\mathcal{C}(f)(A \times y) \subset N_\varepsilon(\mathcal{C}(f)(B, v))$. De manera similar se demuestra que $\mathcal{C}(f)(B \times v) \subset N_\varepsilon(\mathcal{C}(f)(A, y))$. Concluimos que $H(\mathcal{C}(f)(A \times y), \mathcal{C}(f)(B \times v)) < \varepsilon$. Esto completa la prueba de que $\mathcal{C}(f)$ es continua. ■

DEFINICIÓN 6.2. Un espacio topológico X que tiene una operación binaria $\cdot : X \times X \to X$ se llama *grupo topológico* si la operación hace a X un grupo, la función $\cdot : X \times X \to X$ es continua, y la función (de X en X) que a cada elemento de X le asigna su inverso, también es continua.

Sea X un grupo topológico. Observemos que la operación división $\delta : X \times X \to X$ dada por $\delta(a, b) = a \cdot b^{-1}$ también es continua, pues es la composición de dos funciones continuas. También observemos que si $x \in X$, entonces la función traslación $\cdot x : X \to X$ definida por $\cdot x(y) = y \cdot x$ es una biyección continua, cuya función inversa es $\cdot x^{-1}$, y por tanto $\cdot x$ es un homeomorfismo.

TEOREMA 6.3. *Sea X un grupo topológico con multiplicación $\cdot$, y división δ. Supongamos que existe $p \in X$ tal que $AOL(p, X)$ no es degenerado. Entonces $AOL(X)$ es homeomorfo a $X \times Q$, donde Q es el cubo de Hilbert.*

Demostración. Como $AOL(p, X)$ no es degenerado, por el Teorema 4.15, es homeomorfo al cubo de Hilbert Q. Sea e el elemento neutro de X. Como las traslaciones en X son homeomorfismos, la función $h : C \to X$ dada por $h(x) = x \cdot p^{-1}$ es un homeomorfismo. Por la Proposición 2.9, como $h(p) = e$, tenemos que $AOL(e, X)$ tampoco es degenerado.

Dados $A \in C(X)$ y $x \in X$, sea

$$A \cdot x = \{a \cdot x : a \in A\}$$

y

$$A/x = \{a/x : a \in A\}.$$

Definimos $M : C(X) \times X \to C(X)$ por

$$M(A, x) = A \cdot x$$

y $D : C(X) \times X \to C(X)$ por

$$D(A, x) = A/x.$$

Ya que $M(A, x) = A{\cdot}x = \cdot(A, x)$, tenemos que $M(A, x)$ es un subcontinuo de X. Por tanto la función M está bien definida. Por la Proposición 6.1, la función M es continua. Similarmente, D está bien definida y es continua.

Definimos $F : AOL(e, X) \times X \to AOL(X)$ por

$$F(\mathcal{L}, x) = \{L \cdot x : L \in \mathcal{L}\} = M(\mathcal{L} \times \{x\}).$$

Sean $\mathcal{L} \in AOL(p, X)$ y $x \in X$. Observemos que $F(\mathcal{L}, x) = M(\mathcal{L} \times \{x\})$ es un subcontinuo de $C(X)$. Además, $\{e\} \cdot x = \{e \cdot x\} = \{x\}$ y $X \cdot x = X$. Si $A \subset B$, entonces $A \cdot x \subset B \cdot x$. Por tanto $\{L \cdot x : L \in \mathcal{L}\}$ es un arco ordenado largo que inicia en $\{x\}$. De aquí que F es una función bien definida.

La Proposición 6.1 implica que la función $\mathcal{C}(M) : C(C(X)) \times X \to C(C(X))$ es continua. Notemos que para cada $\mathcal{A} \in C(C(X))$ y $x \in X$, $\mathcal{C}(M)(\mathcal{A}, x) = \{M(A, x) : A \in \mathcal{A}\} = \{A \cdot x : A \in \mathcal{A}\}$. De manera que $F = \mathcal{C}(M)|_{AOL(e,X)\times X}$. Por tanto F es continua.

Veamos que F es inyectiva. Sean $(\mathcal{L}_1, x_1), (\mathcal{L}_2, x_2) \in AOL(p, X) \times X$ distintos. Si $x_1 \neq x_2$, entonces $F(\mathcal{L}_1, x_1)$ y $(\mathcal{L}_2, x_2)$ son arcos ordenados largos que empiezan en puntos distintos (x_1 y x_2), y por tanto son distintos.

Ahora supongamos que $x_1 = x_2$. Entonces $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Podemos suponer que existe $L \in \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$. De manera que $L \cdot x_1 \in F(\mathcal{L}_1, x_1)$. Si $L \cdot x_1 \in F(\mathcal{L}_2, x_2)$, entonces $L \cdot x_1 = L_2 \cdot s_2 = L_2 \cdot s_1$ para algún $L_2 \in \mathcal{L}_2$. Como $\cdot x_1 : X \times X$ es un homeomorfismo, entonces $L = L_2$, lo cual es absurdo, pues $L \notin \mathcal{L}_2$. Por tanto $F(\mathcal{L}_1, x_1) \neq F(\mathcal{L}_2, x_2)$ y F es inyectiva.

Ahora veamos que F es suprayectiva. Sean $\mathcal{K} \in AOL(X)$, y $x \in X$ el punto inicial de $\mathcal{K}$. El conjunto $\mathcal{L} = \{L/x : L \in \mathcal{K}\}$ es un continuo, pues es la imagen bajo D del continuo $\{(L, x) : L \in \mathcal{K}\} = \mathcal{K} \times \{x\}$. Si $A \subset B$, entonces $A/x \subset B/x$, por tanto $\{L/x : L \in \mathcal{K}\}$ es ordenado. Observemos que $\{x\}/x = \{e\}$ y $X/x = X$. Por tanto $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo que inicia en e. Por último, notemos que $F(\mathcal{L}, x) = \{L \cdot x : L \in \mathcal{L}\} = \{(K/x) \cdot x : K \in \mathcal{K}\}$. Por tanto F es suprayectiva.

Como F es una función biyectiva y continua entre continuos, es un homeomorfismo. ∎

COROLARIO 6.4. *El espacio de arcos ordenados de la circunferencia unitaria $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $S^1 \times Q$, donde Q es el cubo de Hilbert.*

Un continuo bastante estudiado que también es un grupo topológico es el solenoide diádico, que se define como el conjunto

$$S = \{(s_1, s_2, \dots) : \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } s_n \in S^1 \text{ y } s_n = s_{n+1}^2\},$$

donde S^1 es la circunferencia unitaria en el plano complejo $\mathbb{C}$. Tal espacio resulta ser un grupo topológico, con la operación binaria $\cdot : S \times S \to S$ definida por $\cdot((s_1, s_2, \dots), (t_1, t_2, \dots)) = (s_1 t_1, s_2 t_2, \dots)$, donde la multiplicación de cada s_i y t_i es la multiplicación compleja.

COROLARIO 6.5. *El espacio de arcos ordenados del solenoide diádico S es homeomorfo a $S \times Q$, donde Q es el cubo de Hilbert.*

DEFINICIÓN 6.6. Un continuo X se llama *homogéneo* si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo de X en sí mismo, que manda a x en y.

Si X es un grupo topológico, entonces es homogéneo. En este caso, el hiperespacio $AOL(X)$ es homeomorfo a $X \times AOL(p, X)$, donde p es cualquier elemento de X. Eso también sucede en el caso que X es el seudoarco, por el Corolario 4.8.

PREGUNTA 6.7. Sean X un continuo homogéneo y $p \in X$. ¿Será cierto que $AOL(X)$ es homeomorfo a $X \times AOL(p, X)$?. La respuesta a esta pregunta es positiva en el caso que X es una circunferencia, el solenoide diádico, y el seudoarco. No sabemos la respuesta a esta pregunta ni siquiera para las variedades compactas, conexas y sin frontera. Observemos que por la Proposición 2.9, cuando X es homogéneo, se tiene que $AOL(p, X)$ es homeomorfo a $AOL(q, X)$ para cualesquiera $p, q \in X$.

Capítulo 7

Relación entre propiedades topológicas de X y propiedades topológicas de $AOL(X)$

En este capítulo responderemos preguntas de la forma siguiente. Sea T una propiedad topológica, ¿será cierto que si X tiene la propiedad T, entonces $AOL(X)$ tiene la propiedad T?, ¿si $AOL(X)$ tiene la propiedad T, entonces X tiene la propiedad T?

7.1. Conexidad por trayectorias

Para un continuo X, X siempre es imagen continua de $AOL(X)$, mediante la función $P : AOL(X) \to X$, que elige el punto base de un arco ordenado largo (ver Lema 2.14). De ahí podemos obtener el siguiente teorema.

TEOREMA 7.1. *Sea T una propiedad topológica que se preserva bajo las funciones continuas y suprayectivas. Entonces X tiene la propiedad T siempre que $AOL(X)$ la tiene.*

COROLARIO 7.2. *Si $AOL(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias.*

COROLARIO 7.3. *Si $AOL(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Ahora veremos que los conversos de los dos corolarios anteriores se satisfacen.

TEOREMA 7.4. *Sea X un continuo conexo por trayectorias. Entonces $AOL(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1 \in AOL(X)$, con puntos iniciales $x_0, x_1 \in X$, respectivamente.

Si $x_0 = x_1$, entonces $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1 \in AOL(x_0, X) \subset AOL(X)$. Por el Corolario 2.12, $AOL(x_0, X)$ es arco conexo. Entonces $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ se pueden conectar por una trayectoria en $AOL(X)$.

Si $x_0 \neq x_1$, sea $a : [0,1] \to X$ una trayectoria tal que $a(0) = x_0$ y $a(1) = x_1$. Definamos la función $\sigma : [0,1] \to AOL(X)$ por

$$\sigma(t) = \{a([s,t]) : s \in [0,t]\} \cup \{a([0,t]) \cup L : L \in \mathcal{L}_0\}.$$

Entonces, para cada $t \in [0,1]$, $\sigma(t)$ es un arco ordenado largo con punto inicial $a(t)$, que luego crece a $a([0,t])$ por los conjuntos de la forma $a([s,t])$, después que llega a $a([0,t])$, y crece a X mediante la unión de elementos de $\mathcal{L}_0$. Notemos que $\sigma(0) = \{a(0)\} \cup \{a(0) \cup L : L \in \mathcal{L}_0\} = \{x_0\} \cup \{\{x_0\} \cup L : L \in \mathcal{L}_0\} = \mathcal{L}_0$, y $\sigma(1)$ tiene punto inicial $\sigma(1) = x_1$.

Veamos que σ es una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como a es continua, la función inducida $C(a) : C(0,1) \to C(X)$ es continua. De manera que existe $\delta > 0$ tal que si $H([u,v],[w,z]) < \delta$, entonces $H(a([u,v]), a([w,z])) < \varepsilon$. Sean $r, t \in [0,1]$ tales que $|r - t| < \delta$. Para cada $s \in [0,t]$, existe $s_1 \in [0,r]$ tal que $|s - s_1| < \delta$. Así que $H(a([s,t]), a([s_1,r])) < \varepsilon$. Esto muestra que

$$\{a([s,t]) : s \in [0,t]\} \subset N_\varepsilon(\{a([s_1,r]) : s_1 \in [0,r]\}).$$

Similarmente se prueba que

$$\{a([s_1,r]) : s_1 \in [0,r]\} \subset N_\varepsilon(\{a([s,t]) : s \in [0,t]\}).$$

De modo que

$$H_0(\{a([s_1,r]) : s_1 \in [0,r]\}, \{a([s,t]) : s \in [0,t]\}) < \varepsilon.$$

Como $H(a([0,t]), a([0,r])) < \varepsilon$, para cada $L \in \mathcal{L}_0$, $H(a([0,t]) \cup L, a([0,r]) \cup L) < \varepsilon$. Así que

$$H_0(\{a([0,t]) \cup L : L \in \mathcal{L}_0\}, \{a([0,r]) \cup L : L \in :_0\}) < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que $H_0(\sigma(t), \sigma(r)) < \varepsilon$. Por tanto σ es continua.

Entonces σ es una trayectoria que une a $\mathcal{L}_0$ con un elemento en $AOL(x_1, X)$. Como $AOL(x_1, X)$ es conexo por trayectorias y $\mathcal{L}_1 \in AOL(x_1, X)$, podemos extender σ a una trayectoria que une $\mathcal{L}_0$ con $\mathcal{L}_1$. ■

7.2. Grupo fundamental

Como un continuo X es arco conexo si y sólo si $AOL(X)$ es arco conexo, tiene sentido preguntar la relación entre sus grupos fundamentales.

Primero necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 7.5. Un continuo X se llama *contráctil* si la función identidad en X es homotópica a una función constante.

Notemos que si tenemos un continuo contráctil, entonces su grupo fundamental es trivial, es decir, sólo consiste del lazo trivial constante.

TEOREMA 7.6. *Sea X es un continuo arco conexo. Entonces $\pi_1(X)$ es isomorfo a $\pi_1(AOL(X))$.*

Demostración. Sean $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$ el punto que tomamos como base para definir el grupo fundamental de $AOL(X)$. Sea x_0 el punto inicial de $\mathcal{L}$. Tomamos a x_0 como base del grupo fundamental de X.

Sea $P : AOL(X) \to X$ la función que a cada arco ordenago largo le asocia su punto inicial. Entonces P es una función continua (Lema 2.14).

Como se sabe, toda función continua entre dos espacios induce un homomorfismo natural entre sus grupos fundamentales. Recordemos que esto se hace de la siguiente manera. Dado un lazo $\mathcal{F} : [0,1] \to AOL(X)$, basado en $\mathcal{L}$ ($\mathcal{F}(0) = \mathcal{L} = \mathcal{F}(1)$). Se define el lazo, basado en x_0, dado por $P \circ \mathcal{F} : [0,1] \to X$. Se sabe que si dos lazos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes en $AOL(X)$, entonces $P \circ \mathcal{F}$ y $P \circ \mathcal{G}$ son equivalentes en X, por lo que se tiene una función entre los grupos fundamentales. Denotaremos por $\widehat{P} : \pi_1(AOL(X)) \to \pi_1(X)$ a este homomorfismo. Para ver que $\widehat{P}$ es un isomorfismo, tenemos que ver que es una biyección.

a) La función $\widehat{P}$ es inyectiva.

Sea $\mathcal{F} : [0,1] \to AOL(X)$ tal que $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) = \mathcal{L}$ y $\widehat{P}(\mathcal{F})$ es equivalente (homotópica) a la función constante x_0. Entonces existe una función continua $G : [0,1] \times [0,1]$ tal que $G(t,0) = P \circ \mathcal{F}(t)$, $G(t,1) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$ y $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ para todo $s \in [0,1]$.

Sea $\mathcal{G} : [0,1] \times [0,1] \to AOL(X)$ definida por

$$\mathcal{G}(s,t) = \{G(\{s\} \times [t-r, t]) : r \in [0,t]\} \cup \{G(\{s\} \times [0,t]) \cup L : L \in \mathcal{F}(s)\}.$$

Notemos que el primer uniendo en la definición de $\mathcal{G}(s,t)$ es un arco ordenado que une a $\{G(s,t)\}$ con $G(\{s\}\times[0,t])$. Como $G(s,0)=P(\mathcal{F}(s))$, que es el punto inicial del arco ordenado largo $\mathcal{F}(t)$, y $G(s,0)\in G(\{s\}\times[0,t])\cap L$, para todo $L\in\mathcal{F}(s)$, tiene sentido unir a $G(\{s\}\times[0,t])$ y L para formar el segundo uniendo de la definición de $\mathcal{G}(s,t)$. Este uniendo es un arco ordenado que empieza en $G(\{s\}\times[0,t])$ y termina en X. Entonces $\mathcal{G}(s,t)$ es un arco ordenado largo para todo $(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$.

Para todo $t\in[0,1]$, $\mathcal{G}(0,t)=\{G(\{0\}\times[t-r,t]):r\in[0,t]\}\cup\{G(\{0\}\times[0,t])\cup L : L\in\mathcal{F}(0)\}=\{\{x_0\}\}\cup\{\{x_0\}\cup L : L\in\mathcal{F}(0)\}=\mathcal{L}$. Similarmente, $\mathcal{G}(1,t)=\mathcal{L}$.

Para todo $s\in[0,1]$, tenemos que $\mathcal{G}(s,0)=\mathcal{F}(s)$ y $\mathcal{G}(s,1)$ empieza en $G(s,1)=x_0$. De manera que $G(s,1)\in AOL(x_0,X)$.

Como $AOL(x_0,X)$ es un conjunto degenerado o un cubo de Hilbert (Teorema 4.15), entonces $AOL(x_0,X)$ es contráctil, por lo que su grupo fundamental es trivial. De manera que el lazo $\mathcal{K}:[0,1]\to AOL(x_0,X)\subset AOL(X)$ definido por $\mathcal{K}(s)=\mathcal{G}(s,1)$ es homotópico a la función constante $\mathcal{L}$ (en $AOL(x_0,X)$). Con lo cual el lazo $\mathcal{F}$ es trivial (en $AOL(X)$).

Por tanto $\widehat{P}$ es inyectiva.

b) La función $\widehat{P}$ es suprayectiva.

Sea $\alpha:[0,1]\to X$ un lazo basado en x_0. Entonces $\alpha(0)=x_0=\alpha(1)$. Necesitamos encontrar un lazo $\mathcal{F}_1$ en $AOL(X)$ basado en $\mathcal{L}$ tal que $P\circ\mathcal{F}_1=\alpha$. Notemos que α es homotópico al lazo $\beta:[0,1]\to X$ definido por

$$\beta(t)=\begin{cases}\alpha(t) & \text{si } t\in[0\tfrac{1}{2}];\\ x_0 & \text{si } t\in[\tfrac{1}{2},1].\end{cases}$$

Como α y β son representantes de la misma clase en el grupo fundamental $\pi_1(X)$, entonces es suficiente que encontremos un lazo $\mathcal{F}$ en $AOL(X)$, basado en $\mathcal{L}$, tal que $P\circ\mathcal{F}=\beta$.

Definimos $\mathcal{F}:[0,\frac{1}{2}]\to AOL(X)$ por

$$\mathcal{F}(t)=\{: r\in[0,2t]\}\cup\{: L\in\mathcal{L}\}.$$

El primer uniendo en la definición de $\mathcal{F}(t)$ es un arco ordenado que une a $\{\alpha(2t)\}$ con $\alpha([0,2t])$, y el segundo uniendo es un arco ordenado que une a $\alpha([0,2t])$ con X, entonces $\mathcal{F}(t)$ es un arco ordenado largo para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Notemos que, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $P(\mathcal{F}(t)) = \alpha(2t) = \beta(t)$. También notemos que $\mathcal{F}(0) = \mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\frac{1}{2})$. Observemos que el punto inicial de $\mathcal{M}$ es el punto $\alpha(2\frac{1}{2}) = \beta(\frac{1}{2}) = \beta(1) = x_0$. Como $AOL(x_0, X)$ es arco conexo (Corolario 2.12), existe una trayectoria $F : [\frac{1}{2}, 1] \to AOL(x_0, X)$ tal que $\mathcal{F}(\frac{1}{2}) = \mathcal{M}$ y $\mathcal{F}(1) = \mathcal{L}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un lazo en $AOL(X)$ basado en $\mathcal{L}$. Además, $P \circ \mathcal{F} = \beta$. Esto prueba que $\widehat{P}$ es suprayectiva.

Con esto termina la prueba de que $\widehat{P}$ es un isomorfismo de grupos. ■

7.3. Contractibilidad

TEOREMA 7.7. *Sea X un continuo contráctil. Entonces $AOL(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como X es contráctil, exiten $y \in X$ y una función continua $R : X \times [0,1] \to X$ tales que, para todo $x \in X$, se tiene $R(x,0) = x$ y $R(x,1) = y$. Sea $P : AOL(X) \to X$ la función que a cada arco ordenado largo le asigna su punto inicial. Definimos $\mathcal{R} : AOL(X) \times [0,1] \to X$ por

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}, t) = \{R(\{P(\mathcal{L})\} \times [r,t]) : r \in [0,t]\} \cup \{R(\{P(\mathcal{L})\} \times [0,t]) \cup L : L \in \mathcal{L}\}.$$

El primer uniendo de la definición de $\mathcal{R}(\mathcal{L}, t)$ es un arco ordenado que une a $\{\mathcal{R}(P(\mathcal{L}), t)\}$ con $\mathcal{R}(P(\mathcal{L}) \times [0,t])$. Dado $L \in \mathcal{L}$, como $P(\mathcal{L}) = R(P(\mathcal{L}), 0) \in R(\{P(\mathcal{L})\} \times [0,t])$ y $P(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$, tiene sentido unir a $R(\{P(\mathcal{L})\} \times [0,t])$ con L, para obtener un elemento de $C(X)$.

El segundo uniendo de la definición de $\mathcal{R}(\mathcal{L}, t)$ es un arco ordenado que une a $\mathcal{R}(P(\mathcal{L}) \times [0,t])$ con X. De manera que $\{\mathcal{R}(P(\mathcal{L}), t)\}$ es un arco ordenado largo para cada $(\mathcal{L}, t) \in AOL(X) \times [0,1]$.

Dado $\mathcal{L} \in AOL(X)$, $\mathcal{R}(\mathcal{L}, 0) = \{R(\{(P(\mathcal{L}), 0)\})\} \cup \{R(\{(P(\mathcal{L}), 0)\}) \cup L : L \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}$. Además, se tiene que $\mathcal{R}(\mathcal{L}, 1)$ tiene como punto inicial a $R(P(\mathcal{L}), 1) = y$. Así que $\mathcal{R}(\mathcal{L}, 1) \in AOL(y, X)$. Ya que $AOL(y, X)$ es degenerado u homeomorfo a un cubo de Hilbert (Teorema 4.15), tenemos que $AOL(y, X)$ es contráctil. Entonces hay una homotopía en $AOL(y, X)$ que transforma la función $\mathcal{R}(\cdot, 1)$ en una constante. Entonces la identidad de $AOL(X)$ es homotópica a una función constante. Por tanto, $AOL(X)$ es contráctil. ■

7.4. Conexidad local

En esta sección nos será útil saber que las bolas en la métrica H_0 en un espacio de la forma $AOL(x, X)$ son arco conexas.

TEOREMA 7.8. *Sean X un continuo, $x \in X$. Entonces las bolas en $AOL(x, X)$ son arco conexas.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$. Tomemos $\mathcal{M} \in AOL(x, X)$ tal que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \varepsilon$. Definimos la función $f : \mathcal{M} \to AOL(X)$ por

$$f(M) = \{Z \in \mathcal{M} : Z \subset M\} \cup \{M \cup L : L \in \mathcal{L}\}.$$

El primer uniendo en la definición de $f(M)$ es el arco ordenado contenido en $\mathcal{M}$ que une a $\{x\}$ con M. El segundo uniendo es un arco ordenado que une a M con X. De manera que $f(M)$ es un arco ordenado largo en $AOL(x, X)$

Observemos que $f(\{x\}) = \mathcal{L}$ y $f(X) = \mathcal{M}$.

Queremos probar que $f(M) \in B_\varepsilon(\mathcal{L})$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Sean $M \in \mathcal{M}$ y $B \in f(M)$, revisamos dos casos:

a) Si $B \subset M$, entonces $B \in \mathcal{M}$. Así que existe $K \in \mathcal{L}$ tal que $H(B, K) < \varepsilon$;

b) si B es de la forma $M \cup L$ para algún $L \in \mathcal{L}$. Como $M \in \mathcal{M}$, existe $P \in \mathcal{L}$ tal que $H(M, P) < \varepsilon$, por tanto, $H(B, P \cup L) = H(M \cup L, P \cup L) < \varepsilon$. Notemos que $P \cup L \in \mathcal{L}$. Hemos demostrado que $f(M) \subset N_\varepsilon(\mathcal{L})$.

Ahora probaremos que $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(f(M))$. Dado $L \in \mathcal{L}$, existe $R \in \mathcal{M}$ tal que $H(L, R) < \varepsilon$. Si $R \subset M$, entonces $R \in f(M)$, así que $L \in N_\varepsilon(f(M))$. Si $M \subset R$, entonces se cumple que $M \cup L \subset R \cup L \subset N_\varepsilon(L)$ y $L \subset N_\varepsilon(M \cup L)$, por tanto $H(L, M \cup L) < \varepsilon$. De manera que $L \in N_\varepsilon(f(M))$. Hemos probado que $\mathcal{L} \subset N_\varepsilon(f(M))$. De manera que $f(M) \in B_\varepsilon(\mathcal{L})$. Como $\mathcal{M}$ es un arco, f es una trayectoria en $AOL(x, X)$ que une a $\mathcal{L}$ con $\mathcal{M}$, dentro de $B_\varepsilon(\mathcal{L})$. Esto termina la prueba de que $B_\varepsilon(\mathcal{L})$ es arco conexa. ■

Antes de demostrar que ser localmente conexo se hereda de X a $AOL(X)$, recordaremos la definicón de conexidad en pequeño, la cual, como es usual, nos facilitará el tratamiento de los continuos localmente conexos.

DEFINICIÓN 7.9. Un continuo X se llama *conexo en pequeño en* $x \in X$ (abreviado X *es cik en* x) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo A de X de diámetro menor a ε tal que x es un elemento del interior de A en X. Si X es cik en x para todo $x \in X$, diremos que X es *conexo en pequeño (cik).*

Claramente, todos los continuos localmente conexos, son conexos en pequeño. Es bien sabido que la implicación contraria también es cierta (Teorema 3-11 de [9]).

TEOREMA 7.10. *Sea X un continuo. Entonces X es cik si y sólo si X es localmente conexo.*

Ahora veremos que si un continuo X es cik en $x \in X$, entonces $AOL(X)$ es cik en todo punto de $AOL(x, X)$.

TEOREMA 7.11. *Sean X un continuo cik en un punto $x \in X$ y $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$. Entonces $AOL(X)$ es cik en $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es cik en x, existe $A \in C(X)$ tal que $x \in A \subset B_{\frac{\varepsilon}{5}}(x)$ y x pertenece al interior de A. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{5}$ y $B_\delta(x) \subset A$. Tomemos $\mathcal{K} \in AOL(X)$ tal que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{K}) < \delta$. Por el Lema 2.14, el punto inicial y de $\mathcal{K}$ dista de x en menos que δ, así que $y \in A$. Por lo tanto, todo elemento de $\mathcal{K}$ intersecta a A.

Para cada $\mathcal{M} \in AOL(A)$, notemos que $\mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}$ es un arco ordenado largo, pues $\mathcal{M}$ es un arco ordenado que une a un sigular de A con A, y $\{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}$ es un arco ordenado que une a A con X. Notemos que la función que asocia a cada $\mathcal{M} \in AOL(A)$ el arco ordenado $\mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}$ es continua.

Definimos

$$\mathcal{U}_{\mathcal{K}} = \{\mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\} : \mathcal{M} \in AOL(A)\}.$$

Ya que $AOL(A)$ es un continuo y $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}$ es una imagen continua de $AOL(A)$, tenemos que $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}$ es un continuo.

Sea $\mathcal{M} \in AOL(A)$. Como $A \subset B_{\frac{\varepsilon}{5}}(x)$, para cada $M \in \mathcal{M}$, $M \subset B_{\frac{\varepsilon}{5}}(x) \subset B_{\frac{2\varepsilon}{5}}(y)$. De manera que $H(M, \{y\}) < \frac{2\varepsilon}{5}$. Así que $\mathcal{M} \subset N_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\mathcal{K})$. Además, para cada $K \in \mathcal{K}$, $A \cup K \subset N_{\frac{\varepsilon}{5}}(\{y\} \cup K) = N_{\frac{\varepsilon}{5}}(K)$. Esto implica que $A \cup K \in N_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\mathcal{K})$ y $K \in N_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\{A \cup K : K \in \mathcal{K}\})$. Con esto hemos demostrado que para todo $\mathcal{M} \in AOL(A)$, $\mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\} \subset N_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{K} \subset N_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\})$. Por tanto, $H_0(\mathcal{K}, \mathcal{M} \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}) < \frac{2\varepsilon}{5}$. Esto prueba que $\mathcal{U}_{\mathcal{K}} \subset B_{\frac{2\varepsilon}{5}(\mathcal{K})} \subset B_{\frac{3\varepsilon}{5}}(\mathcal{L})$.

Elegimos dos arcos ordenados $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ que unan $\{x\}$ con A y $\{y\}$ con A, respectivamente. Sea $\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}$ y $\mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2 \cup \{A \cup K : K \in \mathcal{K}\}$. Entonces $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \cap AOL(x, X)$ y $\mathcal{N}_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \cap AOL(y, X)$. Se sigue que $H_0(\mathcal{N}_2, \mathcal{K}) < \frac{2\varepsilon}{5}$ y $H_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{L}) < \frac{3\varepsilon}{5}$. Por el Teorema 7.8, podemos elegir dos arcos $\mathcal{S}_\mathcal{K}$ y $\mathcal{T}_\mathcal{K}$ en $AOL(X)$ tales que $S_\mathcal{K}$ une a $\mathcal{K}$ con $\mathcal{N}_2$ en $AOL(k, X) \cap B_{\frac{2\varepsilon}{5}}(\mathcal{K})$ y $T_\mathcal{K}$ une a $\mathcal{L}$ con $\mathcal{N}_1$ en $AOL(x, X) \cap B_{\frac{3\varepsilon}{5}}(\mathcal{L})$. Definimos el continuo $\mathcal{V}_\mathcal{K} = \mathcal{U}_\mathcal{K} \cup \mathcal{S}_\mathcal{K} \cup \mathcal{T}_\mathcal{K}$, que está contenido en $B_{\frac{3\varepsilon}{5}}(\mathcal{L})$. Además, $\mathcal{L}, \mathcal{K} \in \mathcal{V}_\mathcal{K}$.

Como $B_\delta(\mathcal{L}) \subset \overline{\bigcup_{\mathcal{K} \in B_\delta(\mathcal{L})} \mathcal{V}_\mathcal{K}} \subset B_\varepsilon(\mathcal{L})$, y $\overline{\bigcup_{\mathcal{K} \in B_\delta(\mathcal{L})} \mathcal{V}_\mathcal{K}}$ es un subcontinuo de $AOL(X)$, el teorema queda demostrado. ■

Como corolario, tenemos el converso del Teorema 7.4.

COROLARIO 7.12. *Sea X un continuo. Entonces $AOL(X)$ es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo.*

Sin embargo, que $AOL(X)$ se localmente conexo en $\mathcal{L}$, no significa que X es cik en el punto base de $\mathcal{L}$.

EJEMPLO 7.13. Existen un continuo $X \subset \mathbb{R}^2$, un punto $x \in X$ tal que X no es cik en x y un elemento $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$ tal que $AOL(X)$ es localmente conexo en $\mathcal{L}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean A_n y B_n los segmentos de recta del plano que unen a los puntos $(-1, 0)$ con $(0, \frac{1}{n})$, y a $(1, 0)$ con $(0, -\frac{1}{n})$, respectivamente. Tomemos A el segmento de recta que une a $(-1, 0)$ con $(0, 1)$, y $x = (0, 0)$. Entonces $X = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ es un continuo que no es cik en x.

Sean $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $a = (-\frac{1}{2}, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0)$.

Tomemos $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$ el arco ordenado largo que inicia en x, luego crece simétricamente hacia el arco pq, y luego llena a X, de cualquier manera (entonces, los segmentos de recta que unen a $(-s, 0)$ con $(s, 0)$ son elementos de $\mathcal{L}$, para cada $s \in [0, 1]$). En particular, el segmento ab es un elemento de $\mathcal{L}$.

Sean $\varepsilon < \frac{1}{2}$ y $\mathcal{M} \in AOL(X)$ tales que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{M}) < \varepsilon$. Entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(M, ab) < \varepsilon < \frac{1}{2}$. De manera que $M \subset N_\varepsilon(ab)$. Como $p, q \notin N_\varepsilon(ab)$, M está contenido en una de las componentes de $X \setminus \{p, q\}$. Además M tiene un punto que dista de a en menos que ε y tiene otros que dista de B menos que ε. Todo esto implica que $M \subset pq$. Sea y el punto inicial de $\mathcal{M}$, entonces $y \in M \subset pq$, y $d(x, y) < \varepsilon$ (ver Lema 2.14).

Sean $\alpha : [0, 1] \to X$ una función continua tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Para cada $t \in [0, 1]$, tomemos $\mathcal{A}(t)$ el arco ordenado que empieza en $\{\alpha(t)\}$; contiene a los elementos de la forma $\alpha([t, s])$, para $t \leq s \leq 1$; y también contiene a los elementos de la forma $\alpha([t, 1]) \cup N$, donde $N \in \mathcal{M}$. De esta manera, $\mathcal{A}(t)$ es un elemento de $AOL(X)$ que dista a lo más ε de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}(1) =$

$\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}(0)$ es un elemento de $AOL(x, X)$. Por el Teorema 7.8, podemos unir a $\mathcal{A}(0)$ con $\mathcal{L}$ por un arco cuyos elementos no disten de $\mathcal{L}$ más de ε. Es decir, cualquier elemento $\mathcal{M}$ que diste menos de ε de $\mathcal{L}$, puede unirse a $\mathcal{L}$ por un arco en $AOL(X)$ cuyos elementos distan de $\mathcal{L}$ menos de ε. Por tanto $AOL(X)$ es localmente conexo en $\mathcal{L}$.

Por el ejemplo anterior, uno podría pensar que $AOL(X)$ siempre es localmente conexo en alguno de sus elementos, este no es el caso, como veremos a continuación.

EJEMPLO 7.14. Sea S el solenoide diádico. Es bien sabido que S no es localmente conexo en ninguno de sus elementos. Por el Corolario 6.5, el espacio $AOL(S)$ es homeomorfo a $S \times Q$, donde Q es el cubo de Hilbert. Con lo cual $AOL(S)$ no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.

7.5. Aposindesis

DEFINICIÓN 7.15. Un continuo X se llama *aposindético* si para cualesquiera $p, q \in X$ tales que $p \neq q$, existe un subcontinuo M de X tal que p es un elemento del interior de M y $q \notin M$.

Todo continuo localmente conexo es aposindético, pero existen continuos aposindéticos que no son localmente conexos.

Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el continuo que es la unión de todos los segmentos de recta que unen a $(0, 0)$ con $(1, \frac{1}{n})$, donde $n \in \mathbb{N}$, al cual se le añade el segmento de recta que une $(-1, 0)$ con $(1, 0)$. Entonces X no es aposindético (esto se puede ver con el par de puntos $p = (1, 0)$ y $q = (-1, 0)$). Conjeturamos que $AOL(X)$ es aposindético. Sin embargo, al momento no hemos podido escribir todos los detalles para la prueba de esto.

No todo continuo de la forma $AOL(X)$ es aposindético. Por ejemplo, si X es hereditariamente indescomponible, entonces $AOL(X)$ es homeomorfo a X, por tanto no aposindético. Sin embargo, si X es aposindético, entonces $AOL(X)$ es aposindético. Para probar esto necesitamos el siguiente lema.

LEMA 7.16. *Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $C(X)$. Entonces $\mathfrak{M} = \{\mathcal{M} \in AOL(X) : \mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}$ es un subcontinuo de $AOL(X)$.*

Demostración. Para cada $A \in C(X)$, sean $\mathfrak{R}_A = \{\mathcal{L} \in AOL(X) : A \in \mathcal{L}\}$ y

$$\varphi : AOL(A) \times AO(A, X) \to \mathfrak{R}_A,$$

dada por $\varphi(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Claramente, φ está bien definida y es suprayectiva. Es fácil probar que $H_0(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) < \varepsilon$ y $H_0(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2) < \varepsilon$ implican que $H_0(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{N}_1, \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{N}_2) < \varepsilon$. De manera que φ es continua. Por los Teoremas 2.11 y 2.15, $AOL(A) \times AO(A, X)$ es un continuo. Por tanto $\mathfrak{R}_A$ es un continuo.

Notemos que $\mathfrak{M} = \bigcup\{\mathfrak{R}_A : A \in \mathcal{A}\}$.

Veamos que $\mathfrak{M}$ es cerrado en $AOL(X)$. Sea $\{\mathcal{L}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos que converge a un elemento $\mathcal{L} \in AOL(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \in \mathcal{L}_n$. Como A es compacto, podemos suponer que $\lim A_n = A$, para algún $A \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 1.4, $A \in \mathcal{L}$. De manera que $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$. Esto prueba que $\mathfrak{M}$ es compacto.

Supongamos ahora que $\mathfrak{M}$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{T}$ de $AOL(X)$, tales que $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$.

Dado $A \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{R}_A$ es un subconjunto conexo tal que $\mathfrak{R}_A \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$. De manera que $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{S}$ o $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{T}$. Sean

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A} : \mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{S}\} \text{ y } \mathcal{T} = \{A \in \mathcal{A} : \mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{T}\}.$$

Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. Ya que $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{T}$ son ajenos y $\mathfrak{R}_A$ es no vacío para cada $A \in \mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son ajenos.

Veamos que $\mathcal{S}$ es cerrado. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{S}$ que converge a un elemento $A \in C(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathfrak{R}_{A_n} \subset \mathfrak{S}$, y elegimos un elemento $\mathcal{L}_n \in \mathfrak{R}_{A_n}$. Entonces $A_n \in \mathcal{L}_n$. Como $AOL(X)$ es compacto, podemos suponer que $\lim \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$ para algún $\mathcal{L} \in AOL(X)$. Por la Proposición 1.4, $A \in \mathcal{L}$. De manera que $\mathcal{L} \in \mathfrak{R}_A$. Como $\mathcal{L}_{A_n} \in \mathfrak{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{S}$ es cerrado en $AOL(X)$, $\mathcal{L} \in \mathfrak{S}$. Esto muestra que $\mathfrak{R}_A \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$. Por tanto $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{S}$ y $A \in \mathcal{S}$. Hemos demostrado que $\mathcal{S}$ es cerrado. De manera similar se prueba que $\mathcal{T}$ es cerrado.

Ahora veamos que $\mathcal{S}$ no es vacío. Como $\mathfrak{S}$ no es vacío, podemos elegir $\mathcal{L} \in \mathfrak{S}$. Ya que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M} = \bigcup\{\mathfrak{R}_A : A \in \mathcal{A}\}$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L} \in \mathfrak{R}_A$. Entonces $\mathfrak{R}_A \cap \mathfrak{S} \neq \emptyset$. Por lo que $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{S}$. Por tanto $A \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es no vacío. Análogamente se prueba que $\mathcal{T}$ es no vacío.

Hemos mostrado una separación de $\mathcal{A}$, que por hipótesis es conexo. Esto es una contradicción, y prueba que $\mathfrak{M}$ es conexo y, por tanto, un subcontinuo de $AOL(X)$. ■

TEOREMA 7.17. *Sea X un continuo aposindético. Entonces $AOL(X)$ es aposindético.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, $\mathcal{L} \in AOL(x, X)$ y $\mathcal{M} \in AOL(y, X)$ tales que $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$. Si $x \neq y$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que x es un elemento del interior de B y $y \notin B$. Sean $\mathfrak{B} = F_1(B)$ y

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{A \in \mathfrak{B}} \{\mathcal{K} \in AOL(X) : A \in \mathcal{K}\}.$$

Por el Lema 7.16, $\mathfrak{M}$ es un subcontinuo de $AOL(X)$. Por el Lema 2.14, la función $P : AOL(X) \to F_1(X)$ que a cada $\mathcal{L} \in AOL(X)$ le asocia su punto inicial es continua. Notemos que $\mathcal{L} \in P^{-1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{M}$. Además, $\mathfrak{M}$ es una subcontinuo de $AOL(X)$ tal que $\mathcal{L}$ está en su interior y $\mathcal{M} \notin \mathfrak{M}$.

Supongamos entonces que $x = y$. Tomamos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$. Sea $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{M}$, y elegimos $M \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(M) = \mu(L_0)$. Si $M = L_0$, entonces $L_0 \in \mathcal{M}$, lo cual es absurdo. Por tanto $M \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{L}$.

Entonces $L_0 \not\subset M$ y $M \not\subset L_0$. Elegimos puntos $p \in L_0\backslash M$ y $q \in M\backslash L_0$. Notemos que $L_0 \neq X$ y que los elementos de $\mathcal{L}$, cercanos a L_0, no tienen a q y no pertenecen a $\mathcal{M}$. De manera que podemos elegir $L \in \mathcal{L}$ tal que $L_0 \subsetneq L$, $L \notin \mathcal{M}$ y $q \notin L$. Ya que X es aposindético, existe subcontinuo K de X tal que p es un elemento del interior de K y $q \notin K$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset K$. Tomemos $\delta < \varepsilon$ tal que $B_{2\delta}(q) \cap L = \emptyset$ y si $H(J, L) < \delta$, entonces $\mu(J) > \mu(M)$. Dado $J \in B_\delta(L)$, existe $x \in J$ tal que $x \in B_\delta(p)$, de manera que $x \in J \cap B_\delta(p) \subset J \cap K$. Así que $J \cap K \neq \emptyset$ para cada $J \in B_\delta(L)$. Sea

$$K_0 = K \cup (\bigcup\{J : J \in B_\delta(L)\})^-.$$

Definimos $\mathcal{V} = \bigcup\{AO(J, K_0) : J \in B_\varepsilon(L)\}$.

Dado $J \in B_\delta(L)$, como K_0 es un continuo que contiene a J, existe un arco ordenado $\mathcal{J}$ que une a J con K_0. Entonces $\mathcal{J} \subset \mathcal{V}$, $J \in \mathcal{V}$ y existe un conexo $(\mathcal{J})$ dentro de $\mathcal{V}$ que conecta a J con K_0. Por tanto $B_\delta(L) \subset V$ y $\mathcal{V}$ es una vecindad conexa de L en $C(X)$.

Dado $A \in \mathcal{V}$, existen $J \in B_\varepsilon(L)$ y un arco ordenado $\mathcal{J}$ que une J con K_0 tal que $A \in \mathcal{J}$. Entonces $J \subset A \subset K_0$, de manera que $\mu(M) < \mu(J) \leq \mu(A)$. Esto muestra que $\mathcal{V} \subset \mu^{-1}((\mu(M), 1]) \cap C(K_0)$. Entonces ningún elemento de $\mathcal{V}$ tiene a q ($q \notin K_0$).

Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{V})^-$. Entonces $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $C(X)$ que tiene a L en su interior, $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}((\mu(M), 1]) \cap C(K_0)$ y ningún elemento de $\mathcal{A}$ tienen a q.

Sea $\mathfrak{M} = \{\mathcal{N} \in AOL(X) : \mathcal{A} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset\}$. Por el Lema 7.16, $\mathfrak{M}$ es un subcontinuo de $AOL(X)$. Notemos que $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$, pues $L \in \mathcal{A} \cap \mathcal{L}$. Si $\mathcal{N} \in AOL(X)$ y $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{N}) < \delta$, entonces existe $A \in \mathcal{N}$ tal que $H(A, L) < \delta$. De modo que $A \in \mathcal{V} \subset \mathcal{A}$, así pues $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$. Esto muestra que $\mathcal{L}$ es un elemento del interior de $\mathfrak{M}$ en $AOL(X)$.

Si ocurriera que $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$, entonces existe $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. Así que $\mu(M) \leq \mu(A)$, y como A y M son comparables, tenemos que $M \cap A \neq \emptyset$. Pero sabemos que $A \in \mathcal{A}$ implica que $q \notin A$ y, por construcción, $q \in M$. Esta contradicción prueba que $\mathcal{M} \notin \mathfrak{M}$ y completa la prueba de que $AOL(X)$ es aposindético.

■

7.6. Suavidad por arcos

DEFINICIÓN 7.18. Un continuo X es *suave por arcos en un punto* $p \in X$ si existe una función continua $\alpha : X \to C(X)$ tal que:

a) para todo $x \in X \backslash \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco en X que une a p con x;

b) $\alpha(p) = \{p\}$; y

c) si $y \in \alpha(x)$ para algún $x \in X$, entonces $\alpha(y) \subset \alpha(x)$.

Se dice que la función α es una *estructura de suavidad por arcos de X en p*. El continuo X es *suave por arcos* si X es suave por arcos en p para algún $p \in X$.

En el Lema 7.19 y el Teorema 7.20 nos vamos a permitir llamar arcos también a los conjuntos singulares.

LEMA 7.19. *Sean X un continuo, $p \in X$, α una estructura de suavidad por arcos en p, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a un punto $q \in X$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos en X tal que $Y_n \subset \alpha(q_n)$ y q_n es un punto extremo de Y_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea r_n el otro extremo de Y_n (en el caso que Y_n es singular, $r_n = q_n$). Supongamos que $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $r \in X$. Entonces $r \in \alpha(q)$, $\lim Y_n$ es el subarco de $\alpha(q)$ que une r con q y si $\mathcal{A}_n$ es el único arco ordenado de $\{r_n\}$ a Y_n, entonces sólo hay un arco ordenado $\mathcal{A}$ de $\{r\}$ a Y y además, $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{A}$.*

Demostración. Vamos a aplicar el Lema 1.1. Tomemos una subsucesión $\{Y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, convergente a un elemento $y \in C(X)$. Por el Lema 1.1, sólo tenemos que probar que Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q, para obtener que $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a tal subarco.

Por el Teorema 1.7, como $q_{n_k}, r_{n_k} \in Y_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $q, r \in Y \subset \alpha(q)$. De manera que Y es un arco que tiene a q como uno de sus puntos extremos. Sea r_0 el otro punto extremo de Y. Por la Proposición 1.4, existe una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_k \in Y_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a r_0. Como $\alpha(a_k)$ es un subarco de $\alpha(q_{n_k})$ que une a p con a_k y $a_k \in Y_{n_k}$, tenemos que $r_{n_k} \in \alpha(a_k) \cap Y_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ya que $\lim r_{n_k} = r$, tenemos que $r \in \lim \alpha(a_k) = \alpha(r_0)$ y $r_0 \in Y \subset \alpha(q)$. Hemos visto que $r \in \alpha(r_0)$ y que $r \in Y$, de modo que $r = r_0$. Esto prueba que Y es un subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q.

Por tanto $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q.

Sea $\mathcal{A}_n$ el único arco ordenado de $\{r_n\}$ a Y_n. Para ver $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al único arco ordenado $\mathcal{A}$ que une a $\{r\}$ con Y, nuevamente usaremos el Lema 1.1. Sea $\{\mathcal{A}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un arco ordenado $\mathcal{B}$ (ver Teorema 2.8). Probaremos que $\mathcal{B}$ es el único arco ordenado de r a Y. Por la continuidad de la función que asigna puntos iniciales, tenemos que el punto inicial de $\mathcal{B}$ es r. Como $Y_{n_k} \in \mathcal{A}_{n_k}$ y $limY_{n_k} = Y$, tenemos que $Y \in \mathcal{B}$. Dado un elemento $B \in \mathcal{B}$, por la Proposición 1.4, existe una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_k = B$ y $B_k \in \mathcal{A}_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De manera que $r_{n_k} \in B_k \subset Y_k$, lo que implica que $r \in B \subset Y$. Así, B pertenece al único arco ordenado que une a $\{r\}$ con Y. Esto prueba que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Ya que $\mathcal{B}$ contienen a los extremos de $\mathcal{A}$, obtenemos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. El Lema 1.1 implica entonces que $\lim \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. ■

TEOREMA 7.20. *Sea X un continuo suave por arcos. Entonces $AOL(X)$ es un continuo suave por arcos.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $\alpha : X \to C(X)$ una estructura de suavidad por arcos de X en p.

Si S es un arco y a es un punto extremo de S, denotaremos por $\mathcal{E}_{S,a}$ al único arco ordenado en $C(X)$ que une a $\{a\}$ con S.

Definamos $\Lambda : AOL(X) \to C(AOL(X))$ de la siguiente manera: Dado $\mathcal{M} \in AOL(q, X)$, sea

$$\Lambda(\mathcal{M}) = \{\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\} : r \in \alpha(q) \\ \text{y } Y \text{ es el subarco de } \alpha(q) \text{ que une a } r \text{ con } q\}.$$

Analicemos cómo son los elementos de $\Lambda(\mathcal{M})$.

Si $\mathcal{M} \in AOL(p, X)$, entonces $q = p$, $C(\alpha(q)) = \{\{p\}\}$, de manera que $\Lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{E}(p, \{p\}) \cup \{\{p\} \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \{\mathcal{M}\}$. Entonces $\mathcal{E}(r, Y)$ es el único arco ordenado en $C(X)$ que une a $\{r\}$ con Y, el conjunto $\{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}$ es el arco ordenado que inicia en Y y termina en X, de manera que $\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}$ es un arco ordenado largo con punto inicial r. En el caso que tomamos $r = q$, $Y = \{q\}$, de modo que $\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \{\{q\} \cup \{\{q\} \cup M : M \in \mathcal{M}\}\} = \mathcal{M}$.

Por tanto $\Lambda(\mathcal{M})$ es una familia de arcos ordenados largos parametrizada por los puntos $r \in \alpha(q)$, y cuando r toma los valores extremos de $\alpha(q)$, obtenemos, por una parte, un arco ordenado largo con punto inicial p, y por la otra, obtenemos al mismo $\mathcal{M}$.

Veamos que si $p \neq q$, entonces $\Lambda(\mathcal{M})$ es un arco en $AOL(X)$. Para esto, tomemos la función $\varphi : \alpha(q) \to AOL(X)$ dada por

$$\varphi(r) = \mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\},$$

donde Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q. Mostremos que la función φ es continua. Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\alpha(q)$ que converge a un elemento $r \in \alpha(q)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Y_n el subarco de $\alpha(q)$ que une r_n con q, y sea Y el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q. Podemos aplicar entonces el Lema 1.1 a la sucesión constante $\{q\}$, y obtener que $\lim Y_n = Y$ y $\lim \mathcal{E}(r_n, Y_n) = \mathcal{E}(r, Y)$ (en $C(C(X))$). Notemos que $\lim Y_n = Y$ implica $\lim\{Y_n \cup M : M \in \mathcal{M}\} = \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}$. Por tanto $\lim \varphi(r_n) = \varphi(r)$. Esto muestra que φ es una trayectoria en $AOL(X)$. Dados $r, s \in \alpha(q)$ con $r \neq s$, se tiene que $\varphi(r) \neq \varphi(s)$, pues el punto inicial de $\varphi(r)$ es r y el punto inicial de $\varphi(s)$ es s. De manera que φ es inyectiva. Esto termina la prueba de que $\Lambda(\mathcal{M})$ es un arco en $AOL(X)$.

Veamos que Λ es una función continua. Tomemos una sucesión $\{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $AOL(X)$ que converge a un elemento $\mathcal{M} \in AOL(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea q_n es el punto inicial de $\mathcal{M}_n$ y sea q el punto inicial de $\mathcal{M}$. Por el Lema 2.14, $\lim q = q$. De manera que $\lim \alpha(q_n) = \alpha(q)$.

Recordemos que $\Lambda(\mathcal{M}_n) = \{\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}_n\} : r \in \alpha(q)$ y Y es el subarco de $\alpha(q_n)$ que une a r con $q_n\}$. Por el Lema 1.1, podemos suponer que $\lim \Lambda(\mathcal{M}_n) = \mathfrak{M}$, para algún $\mathfrak{M} \in C(C(C(X)))$. Probaremos que $\mathfrak{M} = \Lambda(\mathcal{M}) = \{\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\} : r \in \alpha(q)$ y Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con $q\}$.

Sea $\mathcal{N}$ un elemento de $\Lambda(\mathcal{M})$, entonces $\mathcal{N}$ es de la forma

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\},$$

donde $r \in \alpha(q)$ y Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r y q. Por la Proposición 1.4, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $r_n \in \alpha(q_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$\lim r_n = r$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Y_n el subarco de $\alpha(q_n)$ que une a r_n con q_n. Por el Lema 7.19, $\lim Y_n = Y$ y $\lim \mathcal{E}(r_n, Y_n) = \mathcal{E}(r, Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $H_0(\mathcal{E}(r_n, Y_n), \mathcal{E}(r, Y)) < \varepsilon$, $H_0(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}) < \varepsilon$ y $H(Y_n, Y) < \varepsilon$. Sea $n > N$. Dado un elemento $M_n \in \mathcal{M}_n$, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(M_n, M) < \varepsilon$. Esto implica que $H(Y_n \cup M_n, Y \cup M) < \varepsilon$. Lo que muestra que $\{Y_n \cup \mathcal{M}_n : M_n \in \mathcal{M}_n\} \subset N_\varepsilon(\{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\})$. Similarmente, $\{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\} \subset N_\varepsilon(\{Y_n \cup M_n : M_n \in \mathcal{M}_n\})$. De manera que

$$H_0(\{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}, \{Y_n \cup M_n : M_n \in \mathcal{M}_n\}) < \varepsilon,$$

y como $H_0(\mathcal{E}(r_n, Y_n), \mathcal{E}(r, Y)) < \varepsilon$, obtenemos que

$$H_0(\mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}, \mathcal{E}(r_n, Y_n) \cup \{Y_n \cup M_n : M_n \in \mathcal{M}_n\}) < \varepsilon.$$

Esto muestra que $\lim(\mathcal{E}(r_n, Y_n) \cup \{Y_n \cup M_n : M_n \in \mathcal{M}_n\}) = \mathcal{N}$. Así que hemos demostrado que $\Lambda(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{M}$.

Ahora tomemos un elemento $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$. Por la Proposición 1.4, existe una sucesión $\{\mathcal{N}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $AOL(X)$ tal que $\lim \mathcal{N}_n = \mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_n \in \Lambda(\mathcal{M}_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_n$ es de la forma $\mathcal{N}_n = \mathcal{E}(r_n, Y_n) \cup \{Y_n \cup M : M \in \mathcal{M}_n\}$, donde $r_n \in \alpha(q_n)$ y Y_n es el subarco de $\alpha(q_n)$ que une a r_n con q_n. Tomando una subsucesión de $\{\mathcal{N}_n\}_{n=1}^{\infty}$ si fuera necesario, podemos suponer que $\lim r_n = r$, para algún $r \in \alpha(q)$. Sea $\mathcal{N}_0 = \mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\}$, donde Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q. Procediendo como en el párrafo anterior, se concluye que $\lim \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_0$. Por tanto $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \in \Lambda(\mathcal{M})$. Esto prueba que $\mathfrak{M} \subset \Lambda(\mathcal{M})$. Esto termina la prueba que $\mathcal{M} = \Lambda(\mathcal{M})$. Por tanto Λ es continua en $\mathcal{M}$.

Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in AOL(X)$ tales que $\mathcal{N} \in \Lambda(\mathcal{M})$, q es el punto inicial de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$. Probaremos que $\Lambda(\mathcal{N}) \subset \Lambda(\mathcal{M})$. Por definición, $\mathcal{N}$ es de la forma

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}(r, Y) \cup \{Y \cup M : M \in \mathcal{M}\},$$

donde $r \in \alpha(q)$ y Y es el subarco de $\alpha(q)$ que une a r con q. Sea $\mathcal{P} \in \Lambda(N)$ tal que $\mathcal{P} \neq \mathcal{N}$. Recordemos que r es el punto inicial de $\mathcal{N}$.

Tenemos que $\mathcal{P}$ es de la forma

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}(s, Z) \cup \{Z \cup L : L \in \mathcal{N}\},$$

donde $s \in \alpha(r)$ y Z es el subarco de $\alpha(r)$ que une a s con r. Tenemos que probar que $\mathcal{P} \in \Lambda(\mathcal{M})$. Sea

$$\mathcal{R} = \mathcal{E}(s, W) \cup \{W \cup M : M \in \mathcal{M}\},$$

donde W es el subarco de $\alpha(q)$ que une a s con q. Por definición, $\mathcal{R} \in \Lambda(\mathcal{M})$. De manera que sólo tenemos que probar que $\mathcal{P} = \mathcal{R}$.

Como $r \in \alpha(q)$, tenemos que $\alpha(r) \subset \alpha(q)$. Así que $s \in \alpha(q)$ y Z es un subarco de $\alpha(q)$ que tiene a s como uno de sus extremos. Si le damos un orden natural al arco $\alpha(q)$, donde $p \leq q$, tenemos que $p \leq s \leq r \leq q$. Con esta notación, $Z = [s, r]$ y $W = [s, q]$. De manera que $W = Z \cup Y$.

Por definición, los elementos de $\mathcal{E}(s, Z)$ son los intervalos de la forma $[s, t]$, donde $s \leq t \leq r$, los cuales son algunos elementos del único arco ordenado de $\{s\}$ a $[s, q]$. Entonces $[s, t] \in \mathcal{E}(s, W)$ para todo $t \in [s, r]$. Hemos mostrado que $\mathcal{E}(s, Z) \subset \mathcal{E}(s, W)$.

Dado un elemento $L \in \mathcal{N}$, queremos probar que $Z \cup L \in \mathcal{R}$. Tenemos dos posibilidades para L: $L \in \mathcal{E}(r, Y)$ o $L = Y \cup M$ para algún $M \in \mathcal{M}$.

Si $L \in \mathcal{E}(r, Y)$, entonces $L = [r, t]$ para algún $t \in [r, q]$. De manera que $Z \cup L = [s, r] \cup [r, t] = [s, t] \in \mathcal{E}(s, [s, q]) = \mathcal{E}(s, W) \subset \mathcal{R}$.

En el caso que $L = Y \cup M$ para algún $M \in \mathcal{M}$, $Z \cup L = Z \cup Y \cup M = [s, q] \cup M = W \cup M \in \mathcal{R}$.

Esto termina la prueba de que $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$. Como ambos son elementos de $AOL(X)$, por la Proposición 2.4, concluimos que $\mathcal{P} = \mathcal{R}$.

Con esto terminamos la prueba de que $\Lambda(\mathcal{N}) \subset \Lambda(\mathcal{M})$.

Recordemos que para todo $\mathcal{M} \in AOL(q, X)$ tal que $p \neq q$, $\Lambda(\mathcal{M})$ es un arco tal que $\mathcal{M}$ es un extremo, y el otro extremo es un elemento $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ de $AOL(p, X)$.

En el caso que $AOL(p, X)$ es degenerado, todos los conjuntos $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ son iguales a un $\mathcal{E}_0$. De manera que $\Lambda(\mathcal{M})$ es un arco que une a $\mathcal{M}$ con $\mathcal{E}_0$ y, por lo que hemos probado hasta ahora, Λ es una estructura de suavidad por arcos en el elemento $\mathcal{E}_0$.

Supongamos entonces que $AOL(p, X)$ no es degenerado. Por el Teorema 4.15, $AOL(p, X)$ es un cubo de Hilbert, el cual de manera natural tiene una estructura de suavidad por arcos. Entonces existe una estructura de suavidad por arcos $\Gamma : AOL(p, X) \to C(AOL(p, X))$, donde denotamos por $\mathcal{L}$ al punto de suavidad.

Definimos $\Delta : AOL(X) \to C(AOL(X))$ por $\Delta(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathcal{M}) \cup \Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{M}})$. Claramente Δ es continua. Para todo $\mathcal{M} \in AOL(X)$, $\Delta(\mathcal{M})$ es la unión de dos arcos que sólo comparten un punto extremo. Por tanto $\Delta(\mathcal{M})$ es un arco, que tiene a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{L}$ como extremos.

Veamos que Δ es una estructura de suavidad por arcos de $AOL(X)$ en $\mathcal{L}$. Dado $\mathcal{M} \in AOL(X)$, si $\mathcal{M} \neq \mathcal{L}$, entonces $\Delta(\mathcal{M})$ es un arco que tiene como extremos a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{L}$, además, $\Delta(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. Sea $\mathcal{N} \in \Delta(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{N} \in \Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{M}})$, entonces $\Delta(\mathcal{N}) = \{\mathcal{N}\} \cup \Gamma(\mathcal{N}) \subset \Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{M}}) \subset \Delta(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{N} \in \Lambda(\mathcal{M})$, entonces $\mathcal{E}_{\mathcal{N}} = \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ y $\Lambda(\mathcal{N}) \subset \Lambda(\mathcal{M})$. Por tanto $\Delta(\mathcal{N}) \subset \Delta(\mathcal{M})$. Por tanto Δ es una estructura de suavidad por arcos en $AOL(X)$. ■

Consideremos el siguiente espacio X construido en el plano $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n = (0, \frac{1}{n})$. Si n es par sea A_n el segmento de recta que une a r_n con $(-1, 0)$; y si n es impar, sea A_n el segmento de recta que une r_n con $(1, 0)$. Definimos

$$X = ([-1, 1] \times [-1, 0]) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Veamos que X no es suave por arcos. Supongamos por el contrario, que existe una estructura de suavidad por arcos $\alpha : X \to C(X)$ en un punto $p \in X$. Notemos que si $p \notin A_n$, entonces el arco que une a p con r_n contiene a A_n. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(r_n)$ contiene a A_n para todo $n \geq N$. La sucesión $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge al segmento de recta que une a $(-1, 0)$ con $(0, 0)$, llamemos L_1 a tal segmento. Ya que $A_{2n} \subset \alpha(r_{2n})$ para todo $n \geq N$, $L_1 \subset \lim \alpha(r_{2n}) = \alpha((0, 0))$. Ya que la sucesión $\{A_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge al segmento de recta que une a $(0, 0)$ con $(1, 0)$, llamémosle L_2, entonces L_2 es un subconjunto de $\alpha((0, 0))$. De manera que $L_1 \cup L_2$ es un subconjunto de $\alpha((0, 0))$, pero $\alpha((0, 0))$ debe ser homeomorfo a un arco (tal vez degenerado) tal que $(0, 0)$ es uno de sus puntos extremos, claramente esto es imposible. Por tanto X no es suave por arcos.

Creemos que $AOL(X)$ es suave por arcos. Sin embargo, tampoco para este ejemplo hemos podido escribir todos los detalles técnicos. Este ejemplo fue usado en [8], donde se mostró que X admite una función de Whitney μ tal que todos los niveles de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde $t \in (0, 1]$, son suaves por arcos, pero X no es suave por arcos. Una variante de este ejemplo, un dendroide Y en el que todos los niveles positivos de Whitney (para toda función de Whitney) son suaves por arcos, y Y no es suave por arcos, apareció en [11].

7.7. La propiedad del punto fijo

DEFINICIÓN 7.21. Un espacio topológico X tiene *la propiedad del punto fijo (ppf)* si para toda función continua $f : X \to X$ existe $x \in X$ tal que $x = f(x)$.

La propiedad del punto fijo es una propiedad muy estudiada de los espacios topológicos. El Teorema del Valor intermedio implica que el intervalo unitario $[0,1]$ tiene la ppf.

Dado un continuo X, podemos obtener espacios definidos en base a X, como por ejemplo $C(X)$, o el Cono de X (Cono(X)), que es el espacio $X \times [0,1]$, donde $X \times \{1\}$ se identifica con un punto. La propiedad del punto fijo no se hereda en estos tipos de construcciones, pues existen continuos X tales que X tiene la ppf y $C(X)$ no la tiene(ver [15]), y existen continuos X con la ppf tales que Cono(X) no la tiene (ver [14]). De igual manera, existen continuos X con la ppf tales que el producto $X \times [0,1]$ no la tiene (ver [23]). Basados en estas experiencias, sería de esperarse que exista un continuo X con la ppf tal que $AOL(X)$ no la tenga. Hasta el momento no hemos podido encontrar un ejemplo así. Por tanto, tenemos la siguiente pregunta.

PREGUNTA 7.22. ¿Existe un continuo X con la ppf tal que $AOL(X)$ no la tiene?

Sin embargo, hemos encontrado algunos resultados parciales que mostraremos en esta sección.

TEOREMA 7.23. *Sea X un continuo tal que $AOL(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f : X \to X$ una función continua, $Y = f(X)$ y $AOL(f) : AOL(X) \to C(C(Y))$ la restricción de la función inducida $C(C(f))$ al subespacio $AOL(X)$ de $C(C(X))$. Notemos que para cada $\mathcal{L} \in AOL(X)$, se tiene que $AOL(f)(\mathcal{L})$ es un arco ordenado en $C(X)$, y además une a un singular de X con Y, donde el singular es la imagen del punto inicial de $\mathcal{L}$ bajo $C(C(f))$. Por ser una restricción de $C(C(f))$, se tiene que $AOL(f)$ es continua. Fijamos un arco ordenado $\mathcal{A} \subset C(X)$ que una a Y con X. Definimos $F : AOL(X) \to AOL(X)$ por $F(\mathcal{L}) = AOL(f)(\mathcal{L}) \cup \mathcal{A}$. La función F está bien definida, pues $AOL(f)(\mathcal{L})$ es un arco ordenado que une a un singular de X con Y, y $\mathcal{A}$ es un arco ordenado que une a Y con X. Por tanto $F(\mathcal{L})$ es un arco ordenado en $C(X)$ que une a un singular de X con X, es decir, un arco ordenado largo en $C(X)$. Además, la función F es continua, pues simplemente estamos uniendo una constante a $AOL(f)$. Ya que $AOL(X)$ tiene la ppf, existe un elemento $\mathcal{L} \in AOL(X)$ tal que $F(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. Sea x el punto inicial de $\mathcal{L}$. Como $F(\mathcal{L}) = AOL(f)(\mathcal{L}) \cup \mathcal{A}$, tenemos que $C(f)(\{x\})$ es un elemento singular de $F(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. De manera que $C(f)(\{x\}) = \{x\}$, es decir, $f(x) = x$. ■

TEOREMA 7.24 (Teorema 1.21 de [20])**.** *Sea X un retracto de un espacio Y que tiene la propiedad del punto fijo, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Como corolario del Teorema 5.1, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 7.25. *Sea X un retracto absoluto. Entonces X y $AOL(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema 5.1, $AOL(X)$ es un retracto absoluto. Como los retractos absolutos son retractos del cubo de Hilbert, que a su vez tiene la propiedad del punto fijo (Corolario 3.5.3 de [19]), obtenemos que X y $AOL(X)$ tienen la propiedad del punto fijo. ■

Capítulo 8

Funciones inducidas en $AOL(X)$

Para una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$, podemos considerar la función $AOL(f) : AOL(X) \to AOL(Y)$, donde $AOL(f)$ es la restricción de $C(C(f))$ al subespacio $AOL(X)$ de $C(C(X))$. Es decir, para cada $\mathcal{L} \in AOL(X)$,

$$AOL(f)(\mathcal{L}) = \{C(f)(L) : L \in \mathcal{L}\} = \{f(L) : L \in \mathcal{L}\}.$$

Para un arco ordenado largo $\mathcal{L}$ en $C(X)$, claramente $C(C(f))(\mathcal{L})$ es un subcontinuo ordenado de $C(Y)$. Sea x el punto inicial de $\mathcal{L}$, entonces $AOL(f)(\mathcal{L})$ contiene al singular $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, Como $\mathcal{L}$ contiene al elemento X y f es suprayectiva, tenemos que $Y = f(X) \in AOL(f)(\mathcal{L})$. Esto muestra que si $\mathcal{L}$ es un elemento de $AOL(X)$, entonces $AOL(f)(\mathcal{L})$ es un elemento de $AOL(Y)$. Por tanto $AOL(f)$ está bien definida y, por supuesto, también es continua. En este capítulo estudiamos algunas relaciones entre f y $AOL(f)$.

8.1. Suprayectividad de $AOL(f)$.

DEFINICIÓN 8.1. Una función continua $f : X \to Y$ se llama *débilmente confluente* si la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es suprayectiva.

Ser débilmente confluente quiere decir que para todo subcontinuo B de $C(Y)$ existe un subcontinuo A de X tal que $f(A) = B$.

DEFINICIÓN 8.2. Una función continua y suprayectiva entre continuo $f : X \to Y$ se llama *confluente* si para todo subcontinuo B de Y y toda componente A de $f^{-1}(Z)$, se satisface que $f(A) = Z$.

Es claro que las funciones confluentes son también débilmente confluentes.

EJEMPLO 8.3. No todas las funciones continuas y suprayectivas son débilmente confluentes.

Para mostrar esto, sea X la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ y $f : [0, 2\pi] \to X$ la función exponencial, dada por $f(t) = e^{it}$. sea B el arco en X que tiene como extremos a $(0, 1)$ y $(0, -1)$ y contiene a $(1, 0)$. Entonces no existe un subcontinuo A de $[0, 2\pi]$ tal que $C(f)(A) = B$, pues la imagen inversa de B bajo f es la unión de los intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, y ninguno de esos intervalos cubre a B bajo f.

El siguiente teorema muestra una relación entre una función débilmente confluente f y la suprayectividad de su función inducida $AOL(f)$.

TEOREMA 8.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva tal que $AOL(f)$ es suprayectiva. Entonces f es débilmente confluente*

Demostración. Sean $B \in C(Y)$ y $L \in AOL(Y)$ tal que $B \in \mathcal{L}$. Como $AOL(f)$ es suprayectiva, existe $\mathcal{M} \in AOL(X)$ tal que $AOL(f)(\mathcal{M}) = \mathcal{L}$. Es decir, $\{f(M) : M \in \mathcal{M}\} = \mathcal{L}$. Por tanto existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $f(M) = B$. Esto muestra que f es débilmente confluente. ■

Para el converso del teorema anterior, no lo hemos podido hacer si f sólo es débilmente confluente, pero sí cuando f es confluente.

TEOREMA 8.5. *Sea $f : X \to Y$ una función confluente. Entonces la función inducida $AOL(f) : AOL(X) \to AOL(Y)$ es suprayectiva.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ confluente.

Primero veremos, por inducción, que para cualquier cadena finita de subcontinuos $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n$ de Y, existe una cadena finita de subcontinuos $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n$ de X tal que $f(L_i) = M_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $n = 1$, la definición de confluencia nos garantiza la existencia de un subcontinuo L_1 de X tal que $f(L_1) = M_1$. Supongamos que la afirmación es cierta para un $n \in \mathbb{N}$ y tomemos una cadena finita de subcontinuos $M_1 \subset \cdots \subset M_{n+1}$ de Y. Por hipótesis de inducción, existe una cadena finita de subcontinuos $L_1 \subset \cdots \subset L_n$ de X tal que $f(L_i) = M_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ya que $f(L_n) = M_n \subset M_{n+1}$, $L_n \subset f^{-1}(M_{n+1})$. Sea L_{n+1} la componente de $f^{-1}(M_{n+1})$ que contiene a L_n. Como f es confluente, $f(L_{n+1}) = M_{n+1}$. Esto termina el paso inductivo y la prueba de la demostración.

Sean $\mathcal{M} \in AOL(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Veremos que existe $\mathcal{L} \in AOL(X)$ tal que $H_0(AOL(f)(\mathcal{L}), \mathcal{M}) < \varepsilon$. Como la imagen de $AOL(f)$ es un subconjunto cerrado de $AOL(Y)$, esto es suficiente para probar la suprayectividad de $AOL(f)$.

Sea $\mu : C(Y) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Teorema 1.11, existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $M_i = \mathcal{M}(\frac{i}{n})$, el único elemento de $\mathcal{M}$ de medida $\frac{i}{n}$. Como $\mathcal{M}$ es un arco ordenado, tenemos que $M_1 \subset \cdots \subset M_n$. Por la afirmación probada antes, existe una cadena finita de subcontinuos de X, $L_1 \subset \cdots \subset L_n$ tal que $f(L_i) = M_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Construyendo arcos ordenados entre los conjuntos L_i y L_{i+1}, es posible conseguir un arco ordenado largo $\mathcal{L}$ en $C(X)$ que contiene a todos los conjuntos $L_1, \ldots, L_n$. Entonces $AOL(f)(\mathcal{L}) = \{f(L) : L \in \mathcal{L}\}$ es un arco ordenado largo en $C(Y)$ que contiene alos conjuntos $M_1, \ldots, M_n = Y$.

Tomemos un elemento $B \in AOL(f)(\mathcal{L})$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\frac{j-1}{n} \leq \mu(B) \leq \frac{j}{n}$. Así que $|\mu(B) - \frac{j}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$. Como $\mu(M_j) = \frac{j}{n}$, tenemos que $\mu(M_j) - \mu(B) < \delta$. Ya que M_j y B son comparables (son elementos de $AOL(f)(\mathcal{L})$), tenemos que $H(B, M_j) < \varepsilon$. De modo que $B \in N_\varepsilon(\mathcal{M})$. Hemos probado que $AOL(f)(\mathcal{L}) \subset N_\varepsilon(\mathcal{M})$.

De manera similar, tomemos un elemento $B \in \mathcal{M}$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\frac{j-1}{n} \leq \mu(B) \leq \frac{j}{n}$. Así que $|\mu(B) - \frac{j}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$. Como $\mu(M_j) = \frac{j}{n}$, tenemos que $\mu(M_j) - \mu(B) < \delta$. Ya que M_j y B son comparables (son elementos de $\mathcal{M}$), tenemos que $H(M_j, B) < \varepsilon$. Como $M_j \in AOL(f)(\mathcal{L})$, concluimos que $B \in N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$. Esto prueba que $\mathcal{M} \subset N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$. Junto con lo que probamos en el párrafo anterior, obtenemos que $H_0(\mathcal{M}, AOL(f)(\mathcal{M})) < \varepsilon$.

Hemos mostrado que $\mathcal{M}$ pertecene a la cerradura de $AOL(f)(AOL(X))$. Este conjunto es compacto, al ser imagen continua de un compacto. Por tanto $\mathcal{M} \in AOL(f)(AOL(X))$.

Por tanto $AOL(Y) = AOL(f)(AOL(X))$. ■

PREGUNTA 8.6. ¿Basta que una función entre continuos $f : X \to Y$ sea débilmente confluente para que $AOL(f)$ sea suprayectiva?

8.2. Retracciones

Si Y es un subcontinuo de X y $f : X \to Y$ es una retracción, sería natural que $AOL(f)$ se comportara como una retracción. Para que esto ocurra, primero necesitamos ver a $AOL(Y)$ como subespacio de $AOL(X)$. El siguiente teorema contempla esta situación.

TEOREMA 8.7. *Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y $f : X \to Y$ una retracción. Entonces existe un encaje $h : AOL(Y) \to AOL(X)$ tal que $h \circ AOL(f)$ es una retracción de $AOL(X)$ en $h(AOL(X))$.*

Demostración. Fijemos un arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que una a Y con X. Para cada $\mathcal{L}$ in $AOL(Y)$, definimos $h(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \cup \mathcal{A}$. La función h está bien definida, pues si $\mathcal{L}$ es un arco ordenado en $C(Y)$ (y por tanto en $C(X)$), que une a un singular de Y (que también un singular de X) con Y y $\mathcal{A}$ es un arco ordenado que une a Y con X, entonces $\mathcal{L} \cup \mathcal{A}$ es un arco ordenado en $C(X)$ que une a un singular de X con X. Es decir, $\mathcal{L} \cup \mathcal{A}$ es un elemento de $AOL(X)$. La función h es continua, pues es la composición del encaje identidad de $AOL(Y)$ en $C(C(Y))$, compuesto con la función que a cada elemento de $C(C(X))$ le asigna su unión con $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{M} \in h(AOL(X))$. Entonces existe $\mathcal{L} \in AOL(Y)$ tal que $\mathcal{M} = \mathcal{L} \cup \mathcal{A}$. Queremos probar que $h \circ AOL(f)(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned} h(AOL(f)(\mathcal{M})) &= h(\{f(M) : M \in \mathcal{M}\}) = \{f(M) : M \in \mathcal{M}\} \cup \mathcal{A} \\ &= \{f(M) : M \in \mathcal{L}\} \cup \{f(M) : M \in \mathcal{A}\} \cup \mathcal{A} \\ &= \{M : M \in \mathcal{L}\} \cup \{Y\} \cup \mathcal{A} = \mathcal{L} \cup \mathcal{A} \\ &= \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Por tanto $h \circ AOL(f) : AOL(X) \to h(AOL(Y))$ es una retracción. ■

La siguiente Proposición nos será útil en repetidas ocasiones.

PROPOSICIÓN 8.8. *Sean X un continuo y $\mathcal{O}$ un subconjunto ordenado de $C(X)$ (es decir, cualquier par de elementos de $\mathcal{O}$ son comparables). Entonces el conjunto $\mathbb{O} = \{\mathcal{L} \in AOL(X) : \mathcal{O} \subset \mathcal{L}\}$ es un subcontinuo de $AOL(X)$.*

Demostración. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de $\mathcal{O}$. Para cada n, definimos $\mathbb{O}_n = \{\mathcal{L} \in AOL(X) : \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{L}\}$. Notemos que $\mathbb{O}_1 \supset \mathbb{O}_2 \supset \ldots$. Demostraremos dos afirmaciones

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{O}_n$ es un subcontinuo de $AOL(X)$.

Renumerando y eliminando duplicados si es necesario, podemos suponer que $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subset A_n \subsetneq X$. Para cada $n \in \{1, \ldots, n-1\}$, sea $AO(A_i, A_{i+1})$ el continuo que consiste de todos los arcos ordenados que unen a A_i con A_{i+1} (ver Definición 2.6). Definimos la función unión

$$U : AOL(A_1) \times AO(A_1, A_2) \times \cdots \times AO(A_n, X) \to \mathbb{O}_n.$$

Es decir, $U(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1}) = \mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_{n+1}$. Claramente $\mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_{n+1} \in AOL(X)$ y U es una función continua.

Veamos que U es inyectiva. Sean $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$ y $(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n)$ elementos diferentes de $AOL(A_1) \times AO(A_1, A_2) \times \cdots \times AO(A_{n-1}, A_n) \times AO(A_n, X)$. Entonces existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $\mathcal{L}_i \neq \mathcal{M}_i$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $A \in \mathcal{L}_i \backslash M_i$. Entonces $A \in U(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1}) \backslash U(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n+1})$. Es decir, U es inyectiva.

Ahora veamos que U es suprayectiva. Sea $\mathcal{L} \in \mathbb{O}_n$. Entonces $\{A_1 \ldots, A_n\} \subset \mathcal{L}$. Para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, sea $\mathcal{L}_i$ el subarco de $\mathcal{L}$ que une a A_{i-1} con A_i. Tomemos $\mathcal{L}_1$ el subarco de $\mathcal{L}$ que une a su único elemento en $F_1(X)$ con A_1 y sea $\mathcal{L}_{n+1}$ el subarco de $\mathcal{L}$ que une a A_n con X. Claramente $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1}) \in AOL(A_1) \times AO(A_1, A_2) \times \cdots \times AO(A_{n-1}, A_n) \times AO(A_n, X)$ y $U(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1}) = \mathcal{L}$. Por tanto U es suprayectiva, y entonces U es un homeomorfismo.

Por los Teoremas 2.11 y 2.15, cada conjunto $AOL(A_1), AO(A_1, A_2), \ldots, AO(A_{n-1}, A_n), AO(A_n, X)$ es un continuo. Por tanto $\mathbb{O}_N$ es un continuo.

(b) $\mathbb{O} = \bigcap\{\mathbb{O}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Notemos que $\mathbb{O} \subset \mathbb{O}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{O} \subset \bigcap\{\mathbb{O}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\mathcal{L} \in \bigcap\{\mathbb{O}_n : n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es compacto, entonces $\mathcal{O} \subset \mathcal{L}$. Así que $\mathcal{L} \in \mathbb{O}$. Por tanto $\mathbb{O} = \bigcap\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$.

De a) y b), $\mathbb{O}$ es una intersección anidada de continuos. Por tanto, $\mathbb{O}$ es un continuo. ■

8.3. Monotonía

DEFINICIÓN 8.9. Una función continua entre continuos $f : X \to Y$ se llama *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

Equivalentemente, una función continua $f : X \to Y$ es monótona si $f^{-1}(B)$ es un continuo para cada subcontinuo B de Y (ver Teorema 2.2 del Capítulo VIII de [25]). Notemos que las funciones monótonas son confluentes. Entonces, para una función monótona f, $AOL(f)$ es suprayectiva (Teorema 8.5)

TEOREMA 8.10. *Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva y monótona entre continuos. Entonces $AOL(f)$ es monótona.*

Demostración. Sean $\mathcal{M} \in AOL(Y)$ y $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de $\mathcal{M}$, donde todos los conjuntos M_n son diferentes entre sí. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathbb{A}_n = \{\mathcal{L} \in AOL(X) : \{M_1, \ldots, M_n\} \in AOL(f)(\mathcal{L})\}$. Notemos que $\mathbb{A}_1 \supset \mathbb{A}_2 \supset \ldots$. Probaremos dos afirmaciones

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_n$ es un continuo.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_n = \{(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in AOL(X) \times (C(X))^n : \{L_1, \ldots, L_n\} \subset \mathcal{L} \text{ y}\\ f(L_i) = M_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}.\end{aligned}$$

Primero veamos que $\mathbb{B}_n$ es un conjunto cerrado en $AOL(X) \times (C(X))^n$. Tomemos una sucesión $\{\mathcal{L}_m, L_1^{(m)}, \ldots, L_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{B}_n$ que converga a un elemento $(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in AOL(X) \times (C(X))^n$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $L_i^{(m)} \in \mathcal{L}_i$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $L_i \in \mathcal{L}$ (por el Teorema 1.7 aplicado a $\{L_i^{(m)}\}$ y $\{\mathcal{L}_m\}$). Ya que $\lim L_i^{(m)} = L_i$ y $f(L_i^{(m)}) = M_i$ por la continuidad de $C(f)$, obtenemos que $f(L_i) = C(f)(L_i) = M_i$. Con esto tenemos que $(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{B}_n$. Por tanto $\mathbb{B}_n$ es cerrado en $AOL(X) \times (C(X))^n$.

Ahora veamos que $\mathbb{B}_n$ es conexo. Sea $\phi : B_n \to (C(X))^n$ la función dada por $\phi(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) = (L_1, \ldots, L_n)$. Claramente la función ϕ es continua. Dado $(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{B}_n$, tenemos que $\{L_1, \ldots, L_n\} \subset \mathcal{L}$. Entonces $\{L_1, \ldots, L_n\}$ es un conjunto linealmente ordenado por la inclusión. Dado $(\mathcal{K}, K_1, \ldots, K_n) \in \phi^{-1}(L_1, \ldots, L_n)$, tenemos que $K_i = L_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\{K_1, \ldots, K_n\} \subset \mathcal{K}$. De manera que $\{L_1, \ldots, L_n\} \subset \mathcal{K}$. Ahora tomemos $\mathcal{K} \in AOL(X)$ tal que $\{L_1, \ldots, L_n\} \subset \mathcal{K}$. Como $(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{B}_n$, $f(L_i) = M_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De manera que $(\mathcal{K}, L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{B}_n$ y $\phi(\mathcal{K}, L_1, \ldots, L_n) = (L_1, \ldots, L_n)$. Hemos demostrado que

$$\phi^{-1}(L_1,\ldots,L_n) = \{\mathcal{K}\in AOL(X) : \{L_1,\ldots,L_n\}\subset\mathcal{K}\}\times\{L_1\}\times\cdots\times\{L_n\}.$$

Por la Proposición 8.8, el conjunto $\{\mathcal{K}\in AOL(X) : \{L_1,\ldots,L_n\}\subset\mathcal{K}\}$ es un continuo, por lo que $\phi^{-1}(L_1,\ldots,L_n)$ es un continuo.

Sea $G =$Im ϕ. Notemos que

$$\begin{aligned} G = \{(L_1,\ldots,L_n)\in(C(X))^n : f(L_i) = M_i \text{ para todo } i\in\{1,\ldots,n\}\\ \text{y } \{L_1,\ldots,L_n\} \text{ es linealmente ordenado por la inclusión}\}.\end{aligned}$$

Como f es monótona, para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, $f^{-1}(M_i)$ es un continuo, y como $\{M_1,\ldots,M_n\}\subset\mathcal{M}$, tenemos que los conjuntos $\{M_1,\ldots,M_n\}$ y $\{f^{-1}(M_1),\ldots,f^{-1}(M_n)\}$ son linealmente ordenados por la inclusión. Por tanto, $(f^{-1}(M_1),\ldots,f^{-1}(M_n))\in G$.

Veamos que G es arco conexo. Sea $(L_1,\ldots,L_n)\in G$. Renumerando coordenadas si es necesario, podemos suponer que $M_1\subsetneq M_2\subsetneq\cdots\subsetneq M_n$. Entonces $L_1\subsetneq L_2\subsetneq\cdots\subsetneq L_n$. Dado $i\in\{1,\ldots,n\}$, notemos que $L_i\subset f^{-1}(M_i)$. Sea $\mathcal{A}_i$ un arco ordenado que une a L_i con $f^{-1}(M_i)$.

Entonces el conjunto $\{(L_1,\ldots,L_{n-1},A) : A\in\mathcal{A}_n\}$ es un arco en G que une a

$$(L_1,\ldots,L_n) \text{ con } (L_1,\ldots,L_{n-1},f^{-1}(M_n));$$

el conjunto $\{(L_1,\ldots,L_{n-2},A,f^{-1}(M_n)) : A\in\mathcal{A}_{n-1}\}$ es un arco en G que une a

$$(L_1,\ldots,L_{n-1},f^{-1}(M_n)) \text{ con } (L_1,\ldots,L_{n-2},f^{-1}(M_{n-1}),f^{-1}(M_n)).$$

Si seguimos con estre proceso, obtenemos que el conjunto

$$\{(A,f^{-1}(M_2),\ldots,f^{-1}(M_n)) : A\in\mathcal{A}_1\}$$

es un arco en G que une a

$$(L_1,f^{-1}(M_2),\ldots,f^{-1}(M_n)) \text{ con } (f^{-1}(M_1),\ldots,f^{-1}(M_n)).$$

De manera que el elemento $(L_1,\ldots,L_n)$ se puede unir en G al elemento $(f^{-1}(M_1),\ldots,f^{-1}(M_n))$ por una trayectoria. Como $(L_1,\ldots,L_n)$ fue un elemento cualquiera, concluimos que G es un continuo. Por tanto ϕ es una función continua cuyo dominio es el espacio compacto $\mathbb{B}_n$, tiene fibras conexas y su imagen (G) es un continuo. Si $\mathbb{B}_n$ no es conexo, entonces se puede escribir como $\mathbb{B}_n = \mathbb{E}_n \cup \mathbb{D}_n$, donde $\mathbb{E}_n$ y $\mathbb{D}_n$ son compactos, ajenos y no vacíos. Se puede ver que $\phi(\mathbb{E}_n)$ y $\phi(\mathbb{D}_n)$ separan a G. Esto es una contradicción, y muestra que $\mathbb{B}_n$ es un continuo.

Sea $\varphi : \mathbb{B}_n \to \mathbb{A}_n$ dada por $\varphi(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) = \mathcal{L}$. Entonces φ es una función continua. Veamos que φ es suprayectiva. Tomemos $\mathcal{L} \in \mathbb{A}_n$. Entonces $\{M_1, \ldots, M_n\} \subset AOL(f)(\mathcal{L})$. Esto quiere decir que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $L_i \in \mathcal{L}$ tal que $f(L_i) = M_i$. Entonces $(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{B}_n$ y $\varphi(\mathcal{L}, L_1, \ldots, L_n) = \mathcal{L}$. Por tanto φ es suprayectiva. Como ya sabemos que $\mathbb{B}_n$ es un continuo, concluimos que $\mathbb{A}_n$ es un continuo. Con esto terminamos la prueba de (a).

(b) $AOL(f)^{-1}(\mathcal{M}) = \bigcap\{\mathbb{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Notemos que $AOL(f)^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{A}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que $AOL(f)^{-1}(\mathcal{M}) \subset \bigcap\{\mathbb{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\mathcal{L} \in \bigcap\{\mathbb{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{M_1, M_2, \ldots\} \subset AOL(f)(\mathcal{L})$. Como $AOL(f)(\mathcal{L})$ es compacto, $\mathcal{M} \subset AOL(f)(\mathcal{L})$. Ya que ambos son arcos ordenados largos, concluimos que $\mathcal{M} = AOL(f)(\mathcal{L})$.

De (a) y (b), tenemos que $AOL(f)^{-1}(\mathcal{M})$ es un continuo, por ser intersección anidada de continuos. Por tanto, $AOL(f)$ es monótona. ■

8.4. Apertura

Una propiedad muy estudiada de funciones es la apertura de funciones.

DEFINICIÓN 8.11. Una función $f : X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto abierto en X, su imagen bajo f es un conjunto abierto de Y.

Un resultado conocido (ver [2]) dice que si f es una función abierta entre continuos, entonces f es confluente. Dada una función f continua y abierta entre continuos, tenemos que su imagen es abierta y cerrada, por lo que f tiene que ser suprayectiva. De acuerdo con el Teorema 8.5, tenemos que $AOL(f)$ es suprayectiva.

Cuando se tiene una función continua y abierta entre continuos, $f : X \to Y$, en general, es difícil que $C(f) : C(X) \to C(Y)$ resulte abierta. Como muestra de esto, recordemos el resultado de [12], que dice que si $C(C(f))$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo. En los artículos [1] y [10] puede encontrarse más información concerniente a la apertura de las funciones inducidas. La primera función abierta que se descubrió que tiene la propiedad de que $C(f)$ no es abierta es la del siguiente ejemplo (Ejemplo 3.2 de [10]). Para esta función, veremos que $AOL(f)$ tampoco es abierta.

EJEMPLO 8.12. Existe una función abierta f, entre continuos, tal que $AOL(f)$ no es abierta.

Sean $Y = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, $X = Y \cup ([-1,0] \times [-1,0])$ y $f : X \to Y$ la función dada por $f(x,y) = (|x|,|y|)$. Claramente f es una función abierta. Veremos que $AOL(f)$ no es una función abierta. Para cada $t \in [-1,1]$, sean

$$A_t = \{(x,x) : x \in [-1,t]\} \text{ y } B_t = ([t,1] \times [t,1]) \cap X.$$

Es decir, A_t es el segmento de recta que une a $(-1,1)$ con (t,t), y B_t es el cuadrado $([t,1] \times [t,1])$ intersectado con X. Notemos que B_t es conexo. Sea

$$\mathcal{L} = \{A_t : t \in [-1,1]\} \cup \{A_1 \cup B_t : t \in [-1,1]\}.$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ con punto inicial $(-1,-1)$.

Sea $\mathcal{M} \in AOL(X)$ tal que $H(\mathcal{L},\mathcal{M}) < \frac{1}{10}$. Entonces existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(A_1, M) < \frac{1}{10}$. Notemos que hay un punto $x \in M$ que dista menos de $\frac{1}{10}$ de $(1,1)$ y hay un punto $y \in M$ que dista menos de $\frac{1}{10}$ de $(-1,-1)$, con lo cual $x \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]$ y $y \in [-1,-\frac{1}{2}] \times [-1,-\frac{1}{2}]$. Entonces $(0,0) \in M$, pues $(0,0)$ separa a $[\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]$ de $[-1,-\frac{1}{2}] \times [-1,-\frac{1}{2}]$ en X. Es decir, $M \setminus \{(0,0)\}$ consta de dos conjuntos separados, uno contiene a $[\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]$ y el otro a $[-1,-\frac{1}{2}] \times [-1,-\frac{1}{2}]$. Además notemos que $(-1,0),(1,0) \notin M$. Así pues, $AOL(f)(\mathcal{M})$ contiene a $C(f)(M)$, que es un subcontinuo propio de Y que contiene a $(0,0)$. Sea $\mathcal{N} = AOL(f)(\mathcal{L}) = \{f(L) : L \in \mathcal{L}\}$.

Para cada $t \in [0,1]$, definimos $D_t = \{(x,x) : x \in [t,1]\}$. Notemos que $\mathcal{N} = \{D_t : t \in [0,1]\} \cup \{D_0 \cup B_t : t \in [0,1]\}$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1$, sea $\mathcal{P}_\varepsilon = \{D_t : t \in [\frac{\varepsilon}{2},1]\} \cup \{D_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup B_t : t \in [0,1]\}$. Observemos que $H(D_{\frac{\varepsilon}{2}}, D_0) < \varepsilon$. Entonces $H(D_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup B_t, D_0 \cup B_t) < \varepsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Como para todo $t \in [0,1]$ existe $s \in [\frac{\varepsilon}{2},1]$ tal que $H(D_t, D_s) < \varepsilon$, podemos concluir que $H(\mathcal{N},\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $(0,0) \notin D_t$ para ningún $t \in [\frac{\varepsilon}{2},1]$ y el único $t \in [0,1]$ tal que $(0,0) \in D_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup B_t$ es $t = 0$, obtenemos que el único elemento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ que tiene a $(0,0)$ es Y.

Si $AOL(f)$ es abierta, $AOL(f)(B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L}))$ es abierto. En particular, es una vecindad de $\mathcal{N} = AOL(f)(\mathcal{L})$. De manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1$ y $B_\varepsilon(\mathcal{N}) \subset AOL(f)(B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L}))$. Como $P_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathcal{N})$, existe $\mathcal{M} \in B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L})$ tal que $AOL(f)(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_\varepsilon$. Ya vimos que para $\mathcal{M}$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $(0,0) \in M$ y $(-1,0),(1,0) \notin M$. Entonces $(0,0) \in f(M) \in AOL(f)(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_\varepsilon$. Pero como el único elemento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ que tiene a $(0,0)$ es Y, tenemos que $f(M) = Y$. Entonces $(1,0) \in f(M)$. Como $f^{-1}(1,0) = \{(1,0),(-1,0)\}$, concluimos que $M \cap \{(-1,0),(1,0)\} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $AOL(f)$ no es abierta.

Una familia natural de funciones abiertas son las proyecciones de los productos. En lo que sigue analizaremos qué pasa con la apertura de las funciones inducidad de las proyecciones.

EJEMPLO 8.13. Existe un continuo X tal que $AOL(f)$ no es una función abierta, donde $f : X \times [0,1] \to X$ es la proyección sobre la primera coordenada.

En $\mathbb{R}^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos lo puntos $a_n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$, $b_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $c_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$, $d_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $e_n = (-1 - \frac{1}{n}, 0)$, $f_n = (0, -\frac{1}{n})$. También consideremos los segmentos de recta: A_n, que une a a_n con b_n; B_n que une a b_n con c_n; C_n que une a c_n con d_n; D_n que une a d_n con e_n; E_n que une a e_n con f_n y F_n que une a f_n con a_{n+1}. Sean T el triodo simple formado por la unión de $[-1,1] \times \{0\}$ con $\{0\} \times [0,1]$, $R = \bigcup\{A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n \cup E_n \cup F_n : n \in \mathbb{N}\}$ y

$$X = T \cup R.$$

Entonces X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ que tiene como residuo a T.

Sea $a : [0,2] \to X \times [0,1]$ definida por las siguientes condiciones: $a(0) = (0,1,0)$; $a(\frac{1}{4}) = (0,0,0)$; $a(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2},0,0)$; $a(\frac{3}{4}) = (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$; $a(1) = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$; $a(2) = (1,0,\frac{1}{2})$ y a es una función lineal en los intervalos $[0,\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4},1]$ y $[1,2]$. Sea $\mathcal{M} = \{a([0,t]) : t \in [0,2]\}$, entonces $\mathcal{M}$ es un arco ordenado en $C(X \times [0,1])$, que une a $\{a(0)\}$ con $a([0,2])$. Sean $\mathcal{N}$ un arco ordenado cualquiera en $C(X \times [0,1])$ que une a $a([0,2])$ con $X \times [0,1]$ y $\mathcal{L} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Entonces $\mathcal{L}$ es un arco ordenado largo en $C(X \times [0,1])$.

Sea $f : X \times [0,1] \to X$ la proyección a la primera coordenada. Notemos que $AOL(f)(\mathcal{L})$ contiene a los conjuntos de la forma $f(a([0,t]))$ para todo $t \in [0,2]$. También contiene al arco ordenado $\mathcal{A} = C(C(f))(\mathcal{N})$ que une a

$f(a([0,2]))$ con X. Notemos que $f(a([0,2]))$ es el trido simple $T_0 = ([-\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$. Como $T_0 \subset T$ y T es un subcontinuo terminal de X, entonces $T \in \mathcal{A}$. Notemos que sólo existe un arco ordenado en $C(X)$ que une a T con X y sólo existe un arco ordenado en $C(X)$ que une a T_0 con T. Entonces $\mathcal{A}$ es precisamente la unión de los dos arcos ordenados mencionados y el arco $\{f(a([0,t]) : t \in [0,2]\}$.

Dado $\mathcal{K} \in AOL(X \times [0,1])$ tal que $H(\mathcal{L}, \mathcal{K}) < \frac{1}{10}$, tenemos que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $H(K, a([0,1])) < \frac{1}{10}$, con lo cual $K \subset N_{\frac{1}{10}}(a([0,1]))$. Notemos que $N_{\frac{1}{10}}(a([0,1]))$ tiene cuatro tipos de componentes: una componente contenida en $T \times [0,1]$; las componentes contenidas en $[-2,2] \times [-1,0] \times [0,1]$; las componentes contenidas en $[-2,2] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, y componentes contenidas en $[-1, \frac{1}{4}] \times [0,2] \times [0,1]$. Las componentes del segundo y tercer tipo se alejan más de $\frac{1}{10}$ de $a(0)$, y las componentes del cuarto tipo de alejan más de $\frac{1}{10}$ de $a(1) \in a([0,1])$. Como K es conexo, K es un subconjunto de una componente del primer tipo. Así pues, $f(K) \subset T$. Como T es terminal y $AOL(f)(\mathcal{K})$ es un arco ordenado largo en X que tiene a $f(K)$, concluimos que $T \in AOL(f)(\mathcal{K})$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$. Definamos $b : [0, \infty) \to X$ determinada por las siguientes condiciones: $b(0) = b(1) = c_n$; $b(\frac{1}{4}) = b(\frac{3}{4}) = d_n$; $b(\frac{1}{2}) = \frac{d_n + e_n}{2}$; $b(\frac{5}{4}) = b_n$; $b(2) = a_n$; $b(3) = b_n$; $b(4) = c_n$; $b(5) = d_n$; $b(6) = e_n$; $b(7) = f_n$; $b(8) = a_{n+1}$; $b(9) = b_{n+1}$; etc. Además b es lineal en cada uno de los intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $[1, \frac{5}{4}]$, $[\frac{5}{4}, 2]$, $[m, m+1]$ para todo número natural $m \geq 2$. Notemos que $b([2,\infty)) = \bigcup\{A_i \cup B_i \cup C_i \cup D_i \cup E_i \cup F_i : i \geq n\}$ y que $b([0,6])$ es el subarco de R que une a a_n con e_n. De manera que $H(b([0,6]), T) < \frac{1}{2n}$. De aquí que, para todo $t \geq 6$, $H(b([0,t]), T) < \frac{1}{2n} < \varepsilon$.

Sean $B = T \cup b([0,\infty))$ y $\mathcal{B} = \{b([0,t]) : t \in [0,\infty)\} \cup \{B\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es un arco ordenado en $C(X)$ que une a $\{b(0)\}$ con B. Como B es un subcontinuo de X que contiene al triodo T y a una cola del rayo del que X es compactación, existe un único arco ordenado largo $\mathcal{S}_\varepsilon$ en $C(X)$ que contienen a $\mathcal{B}$. Ya que $\mathcal{S}_\varepsilon$ empieza en $\{b(0)\}$, tenemos que ningún elemento de $\mathcal{S}_\varepsilon$ está contenido en T. En particular, $T \notin \mathcal{S}_\varepsilon$.

Definimos $g : [0,6] \to T$ la función determinada por las siguientes condiciones: $g(0) = g(1) = g(4) = (0,1)$; $g(\frac{1}{4}) = g(\frac{3}{4}) = g(\frac{5}{4}) = g(3) = g(5) = (0,0)$; $g(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0)$; $g(2) = (1,0)$; $g(6) = (-1,0)$; y lineal en cada uno de los intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $[1, \frac{5}{4}]$, $[\frac{5}{4}, 2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$, $[5,6]$. Notemos que $||b(0) - g(0)|| = ||c_n - (0,1)|| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ y $||b(\frac{1}{4}) - g(\frac{1}{4})|| = ||d_n - (0,0)|| < \frac{2}{n} < \varepsilon$, como las funciones f y g son lineales en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$, tenemos que $||b(t) - g(t)|| < \varepsilon$ para cada $t \in [0, \frac{1}{4}]$. Procediendo similarmente, se obtiene que $||b(t)-g(t)||<\varepsilon$ para cada $t\in[0,6]$. De manera que para todo $t\in[0,6]$, $H(b(0,t),g([0,t]))<\varepsilon$.

Notemos que el orden en el que g recorre sus nodos, cuanto t varía en el intervalo $[0,5\frac{1}{2}]$ es: $(0,1),(0,0),(-\frac{1}{2},0),(0,0),(0,1),(0,0),(1,0),(0,0),(0,1)$, $(0,0)$ y $(-\frac{1}{2},0)$. De manera que el arco ordenado $\{g([0,t]) : t\in[0,5\frac{1}{2}]\}$ empieza en el conjunto singular $\{(0,1)\}$; llena el segmento $(0,1)(0,0)$; continúa llenando el segmento $(0,0)(-\frac{1}{2},0)$; para terminar llenando el segmento $(0,0)(1,0)$; con el resto de los movimientos ya no llena nada nuevo, así que este arco ordenado termina en el triodo T_0. Cuando al arco ordenado $\{g([0,t]) : t\in[0,5\frac{1}{2}]\}$ lo continuamos con el arco ordenado $\{g([0,t]) : t\in[0,6]\}$, se llena el resto de T en el único modo en que se puede completar (llenando el segmento $(-\frac{1}{2},0)(0,0)$). Por lo que $\{g([0,t]) : t\in[5\frac{1}{2},6]\}$ es el subarco de $\mathcal{A}$ que va de T_0 a T. Por otra parte, el orden en que la función a recorre sus nodos, cuando t varía en el intervalo $[0,2]$ es:$(0,1,0),(0,0,0),(\frac{1}{2},0,0),(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ y $(1,0,\frac{1}{2})$. Por lo que el orden en que la función $f\circ a$ recorre sus nodos, cuando t varía en el intervalo $[0,2]$ es: $(0,1),(0,0),(\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0)$ y $(1,0)$. Entonces el arco ordenado $AOL(f)(\mathcal{M})=\{f(a([0,2])) : s\in[0,2]\}$ empieza en el conjunto singular $(0,1)$; llena el segmento $(0,1)(0,0)$; continúa llenando el segmento $(0,0)(-\frac{1}{2},0)$; para terminar llenando el segmento $(0,0)(1,0)$, así que este arco ordenado termina en el triodo T_0. Por tanto el arco ordenado $\{g([0,t]) : t\in[0,5\frac{1}{2}]\}$ coincide con el arco ordenado $AOL(f)(\mathcal{M})$ y el arco ordenado $\{g([0,t]) : t\in[0,6]\}$ está contenido en $AOL(f)(\mathcal{M})\cup\mathcal{A}\subset AOL(f)(\mathcal{L})$.

Veamos que $H_0(\mathcal{S}_\varepsilon,AOL(f)(\mathcal{L}))<\varepsilon$. Dado $S\in\mathcal{S}_\varepsilon$, tenemos dos posibilidades para S:

(a) Si $B\subset S$, como $T\subset B$, tenemos que S pertenece al único arco ordenado que une a T con X. Así que $S\in\mathcal{A}\subset AOL(f)(\mathcal{L})$.

(b) Si $B\not\subset S$, entonces S es de la forma $b([0,t])$ para algún $t\in[0,\infty)$. En el caso que $t\geq 6$, tenemos que $H(b([0,t]),T)<\varepsilon$. Como $T\in AOL(f)(\mathcal{L})$, $S\in N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$. En el caso que $t\leq 6$, $S=b([0,t])\subset B_\varepsilon(g([0,t]))\subset N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$.

En cualquier caso $S\in N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$. Por tanto $\mathcal{S}_\varepsilon\subset N_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$.

Dado $A\in AOL(f)(\mathcal{L})$, tenemos tres posibilidades para A:

(a) Si $A\in AOL(f)(\mathcal{M})$, entonces A es de la forma $g([0,t])$ para algún $t\in[0,5\frac{1}{2}]$. Así que $A=g([0,t])\subset N_\varepsilon(b([0,t]))\subset N_\varepsilon(\mathcal{S}_\varepsilon)$.

(b) Si $A \notin AOL(f)(\mathcal{T})$, pero $A \subset T$, tenemos que A pertenece al subarco de $\mathcal{A}$ que une a T_0 con T. Por tanto existe $t \in [5\frac{1}{2}, 6]$ tal que $A = g([0,t]) \subset N_\varepsilon(b([0,t])) \subset N_\varepsilon(\mathcal{S}_\varepsilon)$.

(c) Si $A \notin AOL(f)(\mathcal{M})$ y $A \not\subset T$, entonces A está en el subarco de $\mathcal{A}$ que une a T con X. En el caso que $A \subset B$, tenemos que $T \subset A \subset B$, así que $H(A,B) \leq H(T,B) < \varepsilon$. De modo que $A \in N_\varepsilon(B) \subset N_\varepsilon(\mathcal{S}_\varepsilon)$. En el caso que $B \subset A$, tenemos que $A \in \mathcal{S}_\varepsilon$.

En cualquier caso, $A \in N_\varepsilon(\mathcal{S}_\varepsilon)$. Por tanto $AOL(f)(\mathcal{L}) \subset N_\varepsilon(\mathcal{S}_\varepsilon)$. Esto termina la prueba de que $H_0(\mathcal{S}_\varepsilon, AOL(f)(\mathcal{L})) < \varepsilon$.

Sea $\mathcal{Q} = AOL(f)(\mathcal{L})$. Si $AOL(f)$ es abierta, $AOL(f)(B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L}))$ es abierto. En particular, es una vecindad de $\mathcal{Q}$. De manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1$ y $B_\varepsilon(\mathcal{Q}) \subset AOL(f)(B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L}))$. Como $S_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathcal{Q})$, existe $\mathcal{K} \in B_{\frac{1}{10}}(\mathcal{L})$ tal que $AOL(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{S}_\varepsilon$. Ya vimos que T tiene que estar en $AOL(f)(\mathcal{K})$. De manera que $T \in \mathcal{S}_\varepsilon$. Como esto no ocurre, concluimos que $AOL(f)$ no es abierta.

En algunos casos hay algunas proyecciones f, de productos, para las cuales $AOL(f)$ resulta abierta.

TEOREMA 8.14. *Sean X un continuo y $f : X \times [0,1] \to [0,1]$ la proyección a la segunda coordenada. Entonces la función $AOL(f)$ es abierta.*

Demostración. Sea d la métrica de X. Consideramos a $[0,1]$ con la métrica usual y tomamos $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ la función de Whitney tal que para cada subintervalo A de $[0,1]$, $\mu(A) =$ longitud de A. En $AOL([0,1])$ consideramos la métrica

$$D(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \text{máx}\{H(\mathcal{L}_t), \mathcal{M}_t : t \in [0,1]\}$$

En el Teorema 2.16 vimos que D genera en $AOL([0,1])$ la misma topología generada por la métrica H_0.

Notemos que si $A, B \in C([0,1])$ satisfacen que $\text{mín}\, A = \text{mín}\, B$ y $\mu(A) = \mu(B)$, entonces se tiene que $A = B$. Por otra parte, si $H(A,B) < \varepsilon$, entonces $d(\text{mín}\, A, \text{mín}\, B) < \varepsilon$.

Sean $\varepsilon > 0$, $\mathcal{L} \in AOL(X \times [0,1])$ y $\mathcal{M} \in AOL([0,1])$ tales que $\varepsilon < 1$ y $D(AOL(f)(\mathcal{L}), \mathcal{M}) < \varepsilon$. Construiremos un arco ordenado largo $\mathcal{B}$ en $C(X \times [0,1])$ tal que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{B}) < \varepsilon$ y $AOL(f)(\mathcal{B}) = \mathcal{M}$.

Primero construiremos una trayectoria $\alpha : [0,1] \to C(X \times [0,1])$. Para construir α, tomemos una función de Whitney $\eta : C(X \times [0,1]) \to [0,1]$. Sea $\mathcal{N} = AOL(f)(\mathcal{L}) \in AOL([0,1])$. Para cada $t \in [0,1]$, sea $c(t) = \text{mín}\,\mathcal{M}(t) - \text{mín}\,\mathcal{N}(t)$. Como $D(\mathcal{M},\mathcal{N}) < \varepsilon$, tenemos que $H(\mathcal{M}(t),\mathcal{N}(t)) < \varepsilon$, de manera que $|c(t)| < \varepsilon$. Notemos que la función $c : [0,1] \to [0,1]$ es continua, pues $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son fijos.

Para cada $s \in [0,1]$, sea

$$\alpha(s) = \{(p, a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \subset X \times [-1,2].$$

Notemos que el número $c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))$ depende continuamente de la variable s. Dado $s \in [0,1]$ fijo, la función de $X \times [0,1]$ en $X \times [-1,2]$ que al punto (p,a) le asocia la pareja $(p, a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))$ es continua. De manera que $\alpha(s)$ es la imagen de $\mathcal{L}(s)$ bajo esa función y, por tanto, $\alpha(s)$ es un subcontinuo de $X \times [-1,2]$. Más adelante veremos que $\alpha(s)$ es un subcontinuo de $X \times [0,1]$.

Dado $s \in [0,1]$, $\mathcal{L}(s) \in \mathcal{L}$, $f(\mathcal{L}(s)) \in \mathcal{N}$ y $\mu(f(\mathcal{L}(s)))$ = longitud $(f(\mathcal{L}(s)))$=máx$(f(\mathcal{L}(s)))$ − mín$(f(\mathcal{L}(s)))$. De acuerdo con la definición

$$c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) = \text{mín}\,\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) - \text{mín}\,\mathcal{N}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))).$$

Ya que $f(\mathcal{L}(s)) \in \mathcal{N}, \mathcal{N}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) = f(\mathcal{L}(s))$. De manera que $c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) = \text{mín}\,\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) - \text{mín}\,f(\mathcal{L}(s))$.

Consideramos la función proyección de $X \times [-1,2]$ sobre su segunda coordenada. Como esta es una función que extiende a f, la seguimos llamando f.

Para cada $s \in [0,1]$, $f(\alpha(s)) = \{a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\text{mín}\,f(\alpha(s)) &= \text{mín}\{a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \\
&= \text{mín}\{a : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \\
&= \text{mín}\{f(p,a) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \\
&= \text{mín}\,f(\mathcal{L}(s)) + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \\
&= \text{mín}\,f(\mathcal{L}(s)) + \text{mín}\,\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) - \text{mín}\,f(\mathcal{L}(s)) \\
&= \text{mín}\,\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\text{longitud } f(\alpha(s)) &= \text{longitud } \{a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \\ &= \text{longitud } \{a : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \\ &= \text{longitud } f(\mathcal{L}(s)) = \mu(f(\mathcal{L}(s))) \\ &= \text{longitud } \mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))),\end{aligned}$$

tenemos que $f(\alpha(s))$ y $\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s))))$ son subintervalos de $[-1,2]$ que tienen la misma longitud y el mismo elemento mínimo. Por tanto

$$\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) = f(\alpha(s)).$$

Como $\{a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} = f(\alpha(s)) = \mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s))))$, tenemos que $\{a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \subset [0,1]$. Esto muestra que $a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \in [0,1]$ y entonces $\alpha(s) \subset X \times [0,1]$. En particular, α está definida como una función de $[0,1]$ en $C(X \times [0,1])$.

Dado $s \in [0,1]$, $|c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))| < \varepsilon$. De manera que

$$|a - (a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))| < \varepsilon.$$

Esto implica que $H(\alpha(s), \mathcal{L}(s)) < \varepsilon$. Por tanto $H_0(\text{Im } \alpha, \mathcal{L}) < \varepsilon$.

Veamos que α es continua. Sea $\lambda > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$, entonces $|c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) - c(\mu(f(\mathcal{L}(t))))| < \frac{\lambda}{2}$ y $H(\mathcal{L}(s), \mathcal{L}(t)) < \frac{\lambda}{2}$.

Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $|s - t| < \delta$. Dado $(p,a) \in \mathcal{L}(s)$, existe $(q,b) \in \mathcal{L}(t)$ tal que $d(p,q) < \frac{\lambda}{2}$ y $|a - b| < \frac{\lambda}{2}$. Así que

$$|a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) - (b + c(\mu(f(\mathcal{L}(t)))))| < \lambda.$$

De manera que la distancia entre $(p, a+c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))$ y $(q, b+c(\mu(f(\mathcal{L}(t)))))$ es menor que λ. Esto muestra que $\alpha(s) \subset N_\lambda(\alpha(t))$. De manera similar $\alpha(t) \subset N_\lambda(\alpha(s))$. Por tanto α es continua.

Como $\mathcal{L}(0)$ es un conjunto singular, $f(\mathcal{L}(0))$ también lo es, $\mu(f(\mathcal{L}(0))) = 0$ y $\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(0))))$ es un conjunto singular. Por otra parte, $f(\alpha(1)) = \mathcal{M}(\mu(f(X \times [0,1]))) = \mathcal{M}(\mu(X)) = \mathcal{M}(1) = [0,1]$. Por tanto $C(f)(\text{Im } \alpha)$ es un subcontinuo de $\mathcal{M}$ que tiene a los extremos de $\mathcal{M}$. Esto muestra que $C(f)(\text{Im } \alpha) = \mathcal{M}$.

Para cada $t \in [0,1]$, sea $\beta(t) = \bigcup\{\alpha(s) : s \in [0,t]\}$. Por el Ejercicio 11.5 de [16], $\beta(t) \in C(X \times [0,1])$ y la función β es continua. Notemos que si $r \leq t$, entonces $\beta(r) \subset \beta(t)$. De manera que Im β es un arco ordenado en $C(X \times [0,1])$. Notemos que $\beta(0) = \{\alpha(0)\} \in F_1(X \times [0,1])$. Podemos extender el arco ordenado Im β a un arco ordenado largo $\mathcal{P}$ en $C(X \times [0,1])$ simplemente tomando un arco ordenado que une a $\beta(1)$ con $X \times [0,1]$ y uniéndoselo a Im β.

De manera que el conjutno $\mathcal{B} = \{f(\beta(t)) : t \in [0,1]\}$ es un arco ordenado en $C([0,1])$. Como $C(f)(\beta(0)) = C(f)(\{\alpha(0)\}) = \{f(\alpha(0))\}$ es un conjunto singular y $C(f)(\beta)(1) \supset C(f)(\alpha(1)) = f(\alpha(1)) = [0,1]$, $\mathcal{B}$ es un arco ordenado largo en $C([0,1])$.

Dado $t \in [0,1]$, $C(f)(\beta(t)) = f(\bigcup\{\alpha(s) : s \in [0,t]\}) = \bigcup\{f(\alpha(s)) : s \in [0,t]\}$. Sea $\mathcal{C} = \{f(\alpha(s)) : s \in [0,t]\}$, entonces $\mathcal{C}$ es un subcontinuo del arco ordenado $\mathcal{M}$, así que $\mathcal{C}$ es un subarco de $\mathcal{M}$. Sea $M = \text{máx}\,\mathcal{C}$ (en el orden de la contención de $\mathcal{M}$). Entonces $M = \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\} = C(f)(\beta(t))$. De manera que $\mathcal{B}$ es un arco ordenado largo contenido en $\mathcal{M}$. Por tanto $\mathcal{B} = \mathcal{M}$. Dado $P \in \mathcal{P}\backslash\text{Im}\ \beta$, $\beta(1) \subset P$. De manera que $[0,1] = f(\beta(1)) \subset f(P)$. Así que $C(f)(P) = [0,1] \in \mathcal{M}$. Esto prueba que $C(f)(\mathcal{P}) = \mathcal{B} = \mathcal{M}$.

Dado $s \in [0,1]$, ya vimos que $H(\alpha(s), \mathcal{L}(s)) < \varepsilon$. Esto implica que, para todo $t \in [0,1]$, $H(\bigcup\{\alpha(s) : S \in [0,t]\}, \bigcup\{\mathcal{L}(s) : s \in [0,t]\}) < \varepsilon$. Es decir, $H(\beta(t), \mathcal{L}(t)) < \varepsilon$. En particular, $H(\beta(1), X \times [0,1]) = H(\beta(1), \mathcal{L}(1)) < \varepsilon$. Dado $P \in \mathcal{P}\backslash\text{Im}\ \beta$, $\beta(1) \subset P \subset X \times [0,1] = \mathcal{L}(1)$. Así que $H(P, \mathcal{L}(1)) < \varepsilon$. De aquí se sigue que $H_0(\mathcal{P}, \mathcal{L}) < \varepsilon$.

Ya podemos completar el argumento de que $AOL(f)$ es abierta. Sean $\mathfrak{U}$ un subconjunto abierto de $AOL(X \times [0,1])$, $\mathcal{L} \in \mathfrak{U}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{U}$. Dado $\mathcal{M} \in B_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L}))$, ya vimos que existe $\mathcal{P} \in B_\varepsilon(\mathcal{L})$ tal que $AOL(f)(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$. De manera que $B_\varepsilon(AOL(f)(\mathcal{L})) \subset AOL(f)(B_\varepsilon(\mathcal{L})) \subset AOL(f)(\mathfrak{U})$. Entonces $AOL(f)(\mathcal{L})$ es un punto interior de $AOL(f)(\mathfrak{U})$. De manera que $AOL(f)(\mathfrak{U})$ es abierto en $AOL([0,1])$. Por tanto $AOL(f)$ es abierta. ■

Usando una demostrácion parecida a la del teorema anterior, probaremos el siguiente teorema.

TEOREMA 8.15. *Sean X un continuo, S^1 la circunferencia unitaria en el plano y $f : X \times S^1 \to S^1$ la proyección a la segunda coordenada. Entonces la función $AOL(f)$ es abierta.*

Demostración. Consideramos S^1 como la circunferencia en el plano complejo $\mathbb{C}$, de radio 1 y centrada en el origen. Dotamos a S^1 con la métrica $d(x,y) = \frac{1}{\pi}$(longitud del menor arco que une a x con y). Sea $\mu : C(S^1) \to [0,1]$ la función longitud de arco dividida por 2π.

En $AOL(S^1)$ consideramos la métrica

$$D(\mathcal{L},\mathcal{M}) = \text{máx}\{H(\mathcal{L}_t,\mathcal{M}_t) : t \in [0,2\pi]\}.$$

Por el Teorema 2.16, la métrica D es equivalente a la métrica H_0 en $AOL(S^1)$.

Dado $A \in C(S^1)\backslash\{S^1\}$, sea $j(A)$ el extremo izquierdo de A, es decir, $j(A)$ es el punto de A tal que para cualquier otro punto $b \in A$, el recorrido de $j(A)$ a b en el sentido de las manecillas del reloj está contenido en A.

Notemos que si $A, B \in C(S^1)\backslash\{S^1\}$ cumplen que $j(A) = j(B)$ y $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$. Además, $j : C(S^1)\backslash\{S^1\} \to S^1$ es una función continua, y si $H(A,B)\varepsilon$ y $N_\varepsilon(A) \neq S^1$, entonces $d(j(A), j(B)) < \varepsilon$.

Afirmamos que si $\mathcal{L} \in AOL(S^1)$, entonces existe $\text{lím}_{t\to 1^-} j(\mathcal{L}(t))$. Para probar esta afirmación, notemos que si $t < 1$, entonces $\mathcal{L}_t$ es un subcontinuo propio de S^1, por tanto $j(\mathcal{L}_t)$ está bien definida. Sea $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión estrictamente creciente de números en $[0,1)$ tal que $\text{lím}\, t_n = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n la cerradura de $S^1\backslash\mathcal{L}(t_n)$. Notemos que A_n es un subcontinuo de S^1 y, como $\mathcal{L}(t_1) \subset \mathcal{L}(t_n) \subset \ldots$, obtenemos que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $\mu(A_n) = 1 - t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\text{lím}\,\mu(A_n) = 0$. Entonces existe $z \in S^1$ tal que $\{z\} = \text{lím}\, A_n$. Como $j(\mathcal{L}(t_n)) \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}\, j(\mathcal{L}(t_n)) = z$. Dada una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ cualquiera en $[0,1)$ tal que $\text{lím}\, s_n = 1$, aseguramos que $\text{lím}\,\mathcal{L}(s_n) = \{z\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{N_0}) < \varepsilon$. Como $\text{lím}\, s_n = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{N_0} < s_n$ para todo $n \geq N_1$. Dado $n \geq N_1$, $\mathcal{L}(t_{N_0}) \subset \mathcal{L}(s_n)$, así que $j(\mathcal{L}(s_n)) \in (S^1\backslash\mathcal{L}(s_n))^- \subset A_{N_0}$. De manera que $d(j(\mathcal{L}(s_n)), z) < \mu(A_{N_0}) \leq \varepsilon$. Como esto ocurre para cada $n \geq N_1$, obtenemos que $\text{lím}\, j(\mathcal{L}(s_n)) = z$. Ya que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión cualquiera, concluimos que $\text{lím}_{t\to 1^-} j(\mathcal{L}(t))$ existe y es igual a z.

Ahora mostraremos que para cualesquiera $\varepsilon < \frac{1}{10}$, $\mathcal{L},\mathcal{M} \in AOL(S^1)$ tales que $D(\mathcal{L},\mathcal{M}) < \varepsilon$, y $t \in [0,1)$, existe $c(t) \in \mathbb{C}$ tal que $d(c(t), 1) \leq 5\varepsilon$ y $\mathcal{L}_t \cdot c(t) = \mathcal{M}_t$, donde $\mathcal{L}_t \cdot c(t) = \{a \cdot c(t) : a \in \mathcal{L}_t\}$.

Para cada $t \in [0,1)$, definimos $c(t) = \frac{j(\mathcal{M}_t)}{j(\mathcal{L}_t)}$. Entonces $\mathcal{L}_t \cdot c(t)$ es un subcontinuo propio de S^1 tal que $j(\mathcal{L}_t \cdot c(t)) = j(\mathcal{M}_t)$ y $\mu(\mathcal{L}_t \cdot c(t)) = \mu(\mathcal{M}_t) = t = \mu(\mathcal{M}(t))$. Por tanto $\mathcal{L}_t \cdot c(t) = \mathcal{M}_t$. Si $t \leq 1 - 2\varepsilon$, como $\mu(\mathcal{M}(t)) = t$, tenemos que la longitud del subconjunto conexo (abierto) $N_\varepsilon(\mathcal{L}(t))$ es igual a $t + 2\varepsilon$. Así que $N_\varepsilon(\mathcal{L}(t)) \neq S^1$, con lo cual $d(c(t), 1) = d(\frac{j(\mathcal{M}_t)}{j(\mathcal{L}_t)}, 1) = d(j(\mathcal{M}(t)), j(\mathcal{L}(t))) < \varepsilon \leq 3\varepsilon$. Si $1 - 2\varepsilon < t < 1$, entonces $\mathcal{L}(1-2\varepsilon) \subset \mathcal{L}(t)$. De manera que $S^1\backslash\mathcal{L}(t) \subset S^1\backslash\mathcal{L}(1-2\varepsilon)$. Así que $j(\mathcal{L}(1-2\varepsilon))$ y $j(\mathcal{L}(t))$ pertecenen a la cerradura de $S^1\backslash\mathcal{L}(1-2\varepsilon)$. Como la longitud de esta cerradura es 2ε, tenemos que $d(j(\mathcal{L}(1-2\varepsilon)), j(\mathcal{L}(t))) < 2\varepsilon$. Similarmente, $d(j(\mathcal{M}(t)), j(\mathcal{M}(1-2\varepsilon))) \leq 2\varepsilon$, y, por el primer caso, $d(j(\mathcal{L}(1-2\varepsilon)), j(\mathcal{M}(1-2\varepsilon))) < 3\varepsilon$. Por tanto $d(j(\mathcal{L}(t)), j(\mathcal{M}(t))) < 5\varepsilon$. Por lo que probamos en el párrafo anterior, $\lim_{t\to 1^-} j(\mathcal{L}(t))$ y $\lim_{t\to 1^-} j(\mathcal{M}(t))$ existen. De manera que $\lim_{t\to 1^-} \frac{j(\mathcal{M}(t))}{j(\mathcal{L}(t))}$ existe, y por tanto $\lim_{t\to 1^-} c(t)$ existe. Además, como la división compleja en $S^1 \times S^1$ es continua, tenemos que cuando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son fijos, c es una función continua de t, aún para el valor $t = 1$.

Sean $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$, $\mathcal{L} \in AOL(X \times S^1)$ y $\mathcal{M} \in AOL(S^1)$ tales que

$$D(AOL(f)(\mathcal{L}), \mathcal{M}) < \varepsilon.$$

Construiremos un arco ordenado largo $\mathcal{B}$ en $C(X \times S^1)$ tal que $H_0(\mathcal{L}, \mathcal{B}) < \varepsilon$ y $AOL(f)(\mathcal{B}) = \mathcal{M}$.

Primero construiremos una trayectoria $\alpha : [0,1] \to C(X \times [0,1])$. Tomemos una función de Whitney $\eta : C(X \times [0,1]) \to [0,1]$. Sea $\mathcal{N} = AOL(f)(\mathcal{L}) \in AOL(S^1)$. Por lo que probamos antes, para cada $t \in [0,1)$, existe $c(t) \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{N}(t) \cdot c(t) = \mathcal{M}(t)$ y $d(c(t), 1) < 5\varepsilon$. Además, $\lim_{t\to 1^-} c(t)$ existe.

Para cada $s \in [0,1]$, sea

$$\alpha(s) = \{(p, a \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\}.$$

Notemos que el número $c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))$ depende continuamente de la variable s. Dado $s \in [0,1]$, la función de $X \times S^1$ en $X \times S^1$ que al punto (p,a) le asocia el punto $(p, a + c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))$ es continua. De manera que $\alpha(s)$ es un subcontinuo de $X \times [0,1]$.

Para ver que α es continua, sea $\lambda > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$, entonces $d(c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))), c(\mu(f(\mathcal{L}(s))))) < \frac{\lambda}{2}$ y $H(\mathcal{L}(s), \mathcal{L}(t)) < \frac{\lambda}{2}$. Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $|s-t| < \delta$. Dado $(p,a) \in \mathcal{L}(s)$, existe $(q,b) \in \mathcal{L}(t)$ tal que $d(p,q) < \frac{\lambda}{2}$ y $d(a,b) < \lambda 2$. Entonces $d(a \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))), b \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(t))))) < \lambda$. De manera que la distancia entre $(p, a \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))$ y $(q, b \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(t)))))$ es menor que λ. Esto muestra que $\alpha(s) \subset N_\lambda(\alpha(t))$. De manera similar, $\alpha(t) \subset N_\lambda(\alpha(s))$. Con lo cual $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \lambda$. Por tanto α es continua.

Dados $s \in [0,1]$ y $(p,a) \in \mathcal{L}(s)$, la distancia entre $(p, a \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))))$ y (p,q) es igual a $d(c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))), 1) < 5\varepsilon$. De manera que $H(\alpha(s), \mathcal{L}(s)) < 5\varepsilon$.

Para cada $s \in [0,1]$ se tiene que $f(\mathcal{L}(s)) \in \mathcal{N}$, así que $f(\mathcal{L}(s)) =$

$\mathcal{N}(\mu(f(\mathcal{L}(s))))$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha(s)) &= \{a \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) : (p,a) \in \mathcal{L}(s)\} \\ &= f(\mathcal{L}(s)) \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \\ &= \mathcal{N}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \cdot c(\mu(f(\mathcal{L}(s)))) \\ &= \mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(s)))). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(0)$ es un conjunto singular, $f(\mathcal{L}(0))$ también lo es. Así que $\mu(f(\mathcal{L}(0))) = 0$ y $\mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(0))))$ es el conjunto singular donde inicia $\mathcal{M}$. De manera que $f(\alpha(0) = \mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(0)))))$ es el conjunto singular contenido en $\mathcal{M}$. Por otra parte, $f(\alpha(1)) = \mathcal{M}(\mu(f(\mathcal{L}(1)))) = \mathcal{M}(\mu(f(X \times S^1))) = \mathcal{M}(\mu(S^1)) = \mathcal{M}(1) = S^1$. Así que $f(\alpha(1))$ es el otro extremo de $\mathcal{M}$. De manera que $C(f)(\text{Im } \alpha)$ es un subcontinuo de $\mathcal{M}$ que contiene a los extremos de $\mathcal{M}$. Por tanto $C(f)(\text{Im } \alpha) = \mathcal{M}$.

Para cada $t \in [0,1]$, sea $\beta(t) = \bigcup\{\alpha(s) : s \in [0,t]\}$. Por el Ejercicio 11.5 de [16], $\beta(t) \in C(X \times S^1)$ y la función β es continua. Notemos que si $r \leq t$, entonces $\beta(r) \subset \beta(t)$. De manera que Im β es un arco ordenado en $C(X \times S^1)$. Notemos que $\beta(0) = \{\alpha(0)\} \in F_1(X \times S^1)$. Podemos extender el arco ordenado Im β a un arco ordenado $\mathcal{P}$, simplemente tomando un arco ordenado que una a $\beta(1)$ con $X \times S^1$ y uniéndoselo a Im β.

De manera que el conjunto $\mathcal{B} = \{f(\beta(t)) : t \in [0,1]\}$ es un arco ordenado en $C(S^1)$. Ya que $C(f)(\beta(0)) = C(f)(\{\alpha(0)\}) = \{f(\alpha(0))\}$ es un conjunto singular y $C(f)(\beta(1)) \supset C(f)(\alpha(1)) = f(\alpha(1)) = S^1$, $\mathcal{B}$ es un arco ordenado largo en $C(S^1)$.

Dado $t \in [0,1]$, $C(f)(\beta(t)) = f(\bigcup\{\alpha(s) : s \in [0,t]\}) = \bigcup\{f(\alpha(s)) : s \in [0,t]\}$. Sea $\mathcal{C} = \{f(\alpha(s)) : s \in [0,t]\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es un subcontinuo del arco ordenado $\mathcal{M}$, así que $\mathcal{C}$ es un subarco de $\mathcal{M}$. Sea $M = \text{máx}\,\mathcal{C}$ (en el orden de la contención de $\mathcal{M}$). Entonces $M = \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\} = C(f)(\beta(t))$. De manera que $\mathcal{B}$ es un arco ordenado largo contenido en $\mathcal{M}$. Por tanto $\mathcal{B} = \mathcal{M}$. Dado $N \in \mathcal{P}\backslash\text{Im } \beta$, $\beta(1) \subset N$. De manera que $S^1 = f(\beta(1)) \subset f(N)$. Así que $C(f)(N) = S^1 \in \mathcal{M} = \mathcal{B}$. Esto prueba que $C(f)(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$.

Dado $s \in [0,1]$, ya vimos que $H(\alpha(s), \mathcal{L}(s)) < 5\varepsilon$. Esto implica que, para todo $t \in [0,1]$, $H(\bigcup\{\alpha(s) : s \in [0,t]\}, \bigcup\{\mathcal{L}(s) : s \in [0,t]\}) < 5\varepsilon$. Es decir, $H(\beta(t), \mathcal{L}(t)) < 5\varepsilon$. En particular, $H(\beta(1), X \times S^1) = H(\beta(1), \mathcal{L}(1)) < 5\varepsilon$. Dado $N \in \mathcal{P}\backslash\text{Im } \beta$, $\beta(1) \subset N \subset X \times S^1 \in \mathcal{L}$. Así que $H(N, X \times S^1) < 5\varepsilon$. De aquí se sigue que $H_0(\mathcal{P}, \mathcal{L}) < 5\varepsilon$.

Ya podemos completar el argumento de que $AOL(f)$ es abierta. Sean $\mathfrak{U}$ un subconjunto abierto de $AOL(X \times S^1)$, $\mathcal{L} \in \mathfrak{U}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathcal{L}) \subset$

$\mathfrak{U}$. Dado $\mathcal{M} \in B_{\varepsilon}(AOL(f)(\mathcal{L}))$, ya vimos que existe $\mathcal{P} \in B_{\varepsilon}(\mathcal{L})$ tal que $AOL(f)(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$. De manera que $B_{\varepsilon}(AOL(f)(\mathcal{L})) \subset AOL(f)(B_{\varepsilon}(\mathcal{L})) \subset AOL(f)(\mathfrak{U})$. Entonces $AOL(f)(\mathcal{L})$ es un punto interior de $AOL(f)(\mathfrak{U})$. De manera que $AOL(f)(\mathfrak{U})$ es abierto en $AOL(S^1)$. Por tanto $AOL(f)$ es abierta.
■

En los artículos [3], [4] y [5] se estudia la apertura de la función inducida $C(f)$ de la función proyección $f : X \times Y \to X$. En particular, se prueba que para una f de éstas y cuando $X = S^1$, entonces $C(f)$ no es abierta (Teorema 2 de [3]). Si comparamos este hecho con el Teorema 8.15, notamos que el comportamiento de la apertura de $C(f)$ y la de $AOL(f)$ es diferente. En esta dirección la pregunta siguiente es interesante.

PREGUNTA 8.16. ¿Cuáles otros continuos Y, además de $[0, 1]$ y S^1 tienen la propiedad de que si $f : X \times Y \to Y$ es la proyección sobre la segunda coordenada, entonces la función $AOL(f)$ es abierta?

8.5. Ligereza

DEFINICIÓN 8.17. Una función continua entre compactos $f : X \to Y$ se llama *ligera* si $f(A)$ es un continuo no degenerado siempre que A es no degenerado.

TEOREMA 8.18. *Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces la función $AOL(f)$ es ligera si y sólo si f es ligera y $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es ligera para todo $x \in X$*

Demostración. $\Rightarrow$**).** Si f no es ligera, entonces existen subcontinuo no degenerado A de X y $y \in Y$ tal que $f(A) = \{y\}$. Sea $\mathcal{M}$ un arco ordenado en $C(X)$ que une a A con X. El conjunto $\mathcal{L} = \{f(M) : M \in \mathcal{M}\}$ es un arco ordenado largo en Y. Notemos que $AOL(A)$ es un continuo no trivial, y para cada elemento $\mathcal{N} \in AOL(A)$ se tiene que $\mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ es un arco ordenado largo en $C(X)$, ya que la función $\varphi : AOL(A) \to AOL(X)$ definida por $\varphi(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ es continua e inyectiva, tenemos que $\{\mathcal{N} \cup \mathcal{M} : \mathcal{N} \in AOL(A)\}$ es un subcontinuo no degenerado de $AOL(X)$. Además $AOL(f)(\mathcal{N} \cup \mathcal{M}) = \{f(N) : N \in \mathcal{N}\} \cup \{f(M) : M \in \mathcal{M}\} = \{\{y\}\} \cup \mathcal{L} = \mathcal{L}$. Así, $AOL(f)^{-1}(\mathcal{L})$ contiene al conjunto no degenerado $\{\mathcal{N} \cup \mathcal{M} : \mathcal{N} \in AOL(A)\}$. Por tanto $AOL(f)$ no es ligera. Si $AOL(f)$ es ligera, entonces también lo es $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ para todo $x \in X$.

$\Leftarrow$)**.** Supongamos que f es ligera y que $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es ligera para todo $x \in X$. Sean $P_X : AOL(X) \to X$ la función que a cada elemento de $AOL(X)$ le asocia su punto inicial, y $P_Y : AOL(Y) \to Y$ la función correspondiente para Y. Por el Lema 2.14, P_X y P_Y son funciones continuas. Sean $\mathbb{B}$ un subcontinuo no trivial de $AOL(X)$, $C = P_X(\mathbb{B})$ y $D = P_Y(AOL(f)(\mathbb{B}))$. Dado $\mathcal{L} \in \mathbb{B}$, sea $p = P_X(\mathcal{L})$. Entonces $\{p\} \in \mathcal{L}$ y $\{f(p)\} = f(\{p\}) \in AOL(f)(\mathcal{L})$. De manera que $P_Y(AOL(f)(\mathcal{L})) = \{f(p)\} = f(\{P_X(\mathcal{L})\})$. Esto prueba que $P_Y(AOL(f)(\mathbb{B})) = f(P_X(\mathbb{B}))$. Es decir, $D = f(C)$. Si C es no degenerado, como f es ligera, entonces D es no degenerado. Con lo cual $AOL(f)(\mathbb{B})$ es no degenerado. Si C es degenerado, sea $x \in X$ tal que $C = \{x\}$, entonces $\mathbb{B} \subset AOL(x, X)$, con lo cual $AOL(f)(\mathbb{B}) = AOL(f)|_{AOL(x,X)}(\mathbb{B})$, que es no degenerado, pues $= AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es una función ligera. Por tanto, $AOL(f)$ es una función ligera. ■

EJEMPLO 8.19. En la suficiencia del Teorema 8.18, es necesario pedir la condición de que $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es ligera para todo $x \in X$.

Consideremos S^1 como la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$. Sea $c : S^1 \to S^1$ la función elevar al cuadrado. Entonces c es una función ligera, pues $c^{-1}(z)$ es un conjunto de dos puntos, para cualquier $z \in S^1$. Veamos que $AOL(f)$ no es una función ligera. Sean A la semicircunferencia que consiste de los números en S^1 con parte imaginaria no negativa y $\mathbb{A} = \{\mathcal{L} \in AOL(S^1) : \{1\}, A \in \mathcal{L}\}$. Notemos que $\mathbb{A}$ no es degenerado, pues hay muchas maneras de crecer desde A hasta S^1, por arcos ordenado. Sea $\mathcal{A}_1$ el único arco ordenado en $C(S^1)$ que une a $\{1\}$ con A. Notemos que $AO(A, S^1)$ es homeomorfo a $\mathbb{A}$, bajo el homeomorfismo que a $\mathbb{N}$ le asocia $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{N}$. Sea $\mathcal{A}_{-1}$ el único arco ordenado que une a $\{-1\}$ con $-A$. Definimos $\mathcal{L} = \mathcal{A}_1 \cup \{A \cup L : L \in \mathcal{A}_{-1}\}$. Entonces $\mathcal{L}$ es el arco ordenado largo en $C(S^1)$ que une a $\{1\}$ con S^1 y que rellena siguiendo la dirección contraria de las manecillas del reloj. Para cada $\mathcal{M} \in \mathbb{A}$, se tiene que $AOL(f)(\mathcal{M}) = \mathcal{L}$. Entonces $AOL(f)$ no es ligera, y tampoco es ligera la función $AOL(f)|_{AOL(1,S^1)}$.

TEOREMA 8.20. *Sean X, Y continuos, con X hereditariamente indescomponible. Entonces una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es ligera si y sólo si $AOL(f)$ es ligera.*

Demostración. $\Rightarrow$)**.** Ya que X es hereditariamente indescomponible, entonces $AOL(x, X)$ es un continuo degenerado para todo $x \in X$. Con lo cual $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es una función ligera para todo $x \in X$. Por el Teorema 8.18, $AOL(f)$ es ligera.

$\Leftarrow$). Esta implicación es inmediata del Teorema 8.18. ■

Si tenemos una función $f : [0,1] \to [0,1]$ continua y suprayectiva tal que $AOL(f)$ es ligera, entonces f tiene que ser un homeomorfismo, como veremos a continuación.

TEOREMA 8.21. *Sea $f : X \to Y$ continua y suprayectiva tal que $AOL(f)$ es ligera. Supongamos que $A, B \in C(X)$ satisfacen que $f(A) = f(B)$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces todo arco ordenado largo en $C(X)$ que contiene a A, contiene también a $A \cup B$.*

Demostración. Supongamos que existe $\mathcal{L} \in AOL(X)$ tal que $A \in \mathcal{L}$ y $A \cup B \notin \mathcal{L}$. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ una función continua tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = A \cup B$, y si $s \leq t$, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Para cada $t \in [0,1]$, sea $\beta(t) = \{L : L \in \mathcal{L} \text{ y } L \subset A\} \cup \alpha([0,t]) \cup \{\alpha(t) \cup L : L \in \mathcal{L} \text{ y } A \subset L\}$.

Veamos que para cada $t \in [0,1]$, $\beta(t) \in AOL(X)$. Esto se debe a que $\{L : L \in \mathcal{L} \text{ y } L \subset A\}$ es un arco ordenado que une a un conjunto singular con A; $\alpha([0,t])$ es un arco ordenado que une a A con $\alpha(t)$ y $\{\alpha(t) \cup L : L \in \mathcal{L}$ y $A \subset L\}$ es un arco ordenado que une a $\alpha(t)$ con X.

Aseguramos que β no es constante. Observemos que $\beta(0) = \mathcal{L}$, y como $A \cup B \in \beta(1)$, tenemos que $\beta(0) \neq \beta(1)$. Por tanto β no es constante.

Aseguramos que, para todo $t \in [0,1]$, $AOL(f)(\beta(t)) = AOL(f)(\mathcal{L})$. Por definición $AOL(f)(\beta(t)) = \{f(L) : L \in \mathcal{L} \text{ y } L \subset A\} \cup \{f(\alpha(s)) : 0 \leq s \leq t\} \cup \{f(\alpha(t) \cup L) : L \in \mathcal{L} \text{ y } A \subset L\}$. Para cualquier $s \in [0,1]$, se tiene que $f(A) \subset f(\alpha(s)) \subset f(A \cup B) = f(A)$, de modo que $f(\alpha(s)) = f(A)$; si $L \in \mathcal{L}$ y $A \subset L$, entonces $f(\alpha(t) \cup L) = f(\alpha(t)) \cup f(L) = f(A) \cup f(L) = f(L)$. Por tanto $AOL(f)(\beta(t)) = \{f(L) : L \in \mathcal{L}\} = AOL(f)(\mathcal{L})$.

Hemos probado que $\operatorname{Im} \beta$ es un subcontinuo no degenerado de $AOL(X)$ tal que $AOL(f)(\operatorname{Im} \beta)$ es un conjunto con sólo un elemento. Por tanto $AOL(f)$ no es ligera. ■

EJEMPLO 8.22. En el Teorema 8.21, la existencia de dos subcontinuos A y B con las condiciones mencionadas no es suficiente para que $AOL(f)$ sea ligera.

Sean X un continuo hereditariamente indescomponible, Z un subcontinuo no trivial de X, $Y = X/Z$ (el continuo que se obtiene de X cuando todo Z se identifica en un punto) y $f : X \to Y$ la función cociente. Claramente f no es ligera, y por el Teorema 8.18, $AOL(f)$ tampoco es ligera. Elegimos dos subcontinuos A y B de Z tales que $A \subsetneq B$. Como Y es hereditariamente indescomponible, todo arco ordenado largo que contiene a A, contiene también a $A \cup B = B$.

TEOREMA 8.23. *Sea $f : X \to Y$ continua, suprayectiva, ligera. Si se satisface que para cualesquiera $A, B \in C(X)$ tales que $f(A) = f(B)$ y $A \cap B \neq \emptyset$, todo arco ordenado largo que contiene a A contiene a $A \cup B$, entonces $AOL(f)$ es una función ligera, y para todo $x \in X$, $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es una función inyectiva.*

Demostración. Supongamos que el teorema no es cierto. Analicemos las dos posibilidades.

(A) $AOL(f)$ no es una función ligera. En este caso, existe un subcontinuo no degenerado $\mathbb{B}$ de $AOL(X)$ tal que $AOL(f)(\mathbb{B})$ es un conjunto de un solo elemento. Sea $\mathcal{K} \in AOL(Y)$ tal que $\{K\} = AOL(f)(\mathbb{B})$. Tomemos $y \in Y$ el punto inicial de $\mathcal{K}$. Para $\mathcal{L} \in \mathbb{B}$ y $x \in X$ el punto inicial de $\mathcal{L}$, tenemos que $\mathcal{K} = \{f(L) : L \in \mathcal{L}\}$ y $f(x) = y$. De manera que $\mathbb{B} \subset \bigcup\{AOL(x, X) : x \in f^{-1}(y)\}$. Sea $P : \mathbb{B} \to X$ dada por $P(\mathcal{L})$ =punto inicial de $\mathcal{L}$. Como P es continua, tenemos que $P(\mathbb{B})$ es un subcontinuo de X tal que, para todo $x \in P(\mathbb{B})$, $f(x) = y$. Así que $f(P(\mathbb{B})) = \{y\}$. Como f es ligera, tenemos que $P(\mathbb{B})$ es un conjunto singular. De manera que existe $x \in X$ tal que $P(\mathbb{B}) = \{x\}$. Así pues, $P(\mathbb{B}) = \{x\}$.

    Elegimos $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \mathbb{B}$ distintos.

(B) Existe $x \in X$ tal que $AOL(x, X)|AOL(x, X)$ no es una función inyectiva. Entonces existen $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(x, X)$ diferentes tales que $AOL(f)(\mathcal{L}) = AOL(f)(\mathcal{M})$. Sea $\mathcal{K} = AOL(f)(\mathcal{L})$.

A partir de este momento, no distinguiremos si estamos suponiendo (A) o (B), sólo usaremos las propiedades de $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ y $\mathcal{K}$.

Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}$ un subcontinuo no degenerado. Entonces $\mathcal{N}$ es un arco ordenado.

Mostraremos que $C(f)$ es constante en $\mathcal{N}$. Supongamos, por el contrario, que existen $N_1, M_1 \in \mathcal{N}$ tales que $f(N_1) \neq f(N_2)$. Podemos suponer que $N_1 \subsetneq M_1$. Entonces $f(N_1) \subsetneq f(M_1)$. Sea N el máximo elemento de $\mathcal{N} \cap (C(f)^{-1}(f(N_1)))$ (con el orden dado por la inclusión, tal máximo existe, pues el conjunto referido es cerrado y no vacío). No puede ocurrir que $M_1 \subset N$, pues en este caso, $f(N_1) \subsetneq f(M_1) \subset f(N) = f(N_1)$, lo cual es absurdo. De manera que $N \subset M_1$. Entonces para cada $M \in <$ tal que $N \subsetneq M$, tenemos que:

(a) Si $M \subset \mathcal{N}$, por la maximalidad de N, M no puede estar en $\mathcal{N} \cap (C(f)^{-1}(f(N_1)))$, así que $f(N) \neq f(M)$, y como $f(N) \subset f(M)$, concluimos que $f(N) \subsetneq f(M)$.

(b) Si $M \notin \mathcal{N}$, como $\mathcal{N}$ es un subarco de $\mathcal{M}$ y $M \notin \mathcal{N}$, no puede ocurrir que $N \subset M \subset M_1$. Así que $M_1 \subset M$. Esto implica que $f(N) = f(N_1) \subsetneq f(M_1) \subset f(M)$. De modo que $f(N) \subsetneq f(M)$. Hemos mostrado que $f(N) \subsetneq f(M)$ para todo $M \in \mathcal{M}$ tal que $N \subsetneq M$.

Recordemos que $C(f)(\mathcal{L}) = \mathcal{K} = C(f)(\mathcal{M})$. De manera que existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $f(L) = f(N)$. Como $x \in N \cap L$, podemos aplicar la hipótesis a N, K y $\mathcal{L}$, así $L \cup N \in \mathcal{L}$. Por tanto $N \neq L \cup N$ (pues $N \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}$). Como $f(L \cup N) = f(N) \cup f(L) = f(N)$ y $N \cap (N \cup L) \neq \emptyset$, podemos aplicar la hipótesis ahora a $N, L \cup N$ y $\mathcal{M}$ para concluir que $L \cup N \in \mathcal{M}$. Por lo que probamos en el párrafo anterior, $f(N) \subsetneq f(N \cup L) = f(N)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $C(f)$ es constante en $\mathcal{N}$.

Sea $M \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}$. Como $\{x\} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ es un subconjunto cerrado del arco $\mathcal{M}$, podemos tomar el máximo (con la contención) elemento A del conjunto $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ que está contenido en M. También podemos tomar el mínimo elemento B de $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ que contiene a M. Entonces $A \subset M \subset B$. Como $A, B \in \mathcal{L}$ y $M \notin \mathcal{L}$, obtenemos que $A \subsetneq B$. Sean $\mathcal{A}$ el subarco (ordenado) de $\mathcal{L}$ que une a A con B y $\mathcal{B}$ el subarco ordenado de $\mathcal{M}$ que une a A con B. Por la definición de A y B, se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A, B\}$. Si $\mathcal{N}$ es un subarco de $\mathcal{B}$ que no tiene a sus extremos, tenemos que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}$. Por lo que probamos antes, $C(f)$ es constante en $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{B}$ se puede aproximar por los arcos $\mathcal{N}$, por la continuidad de $C(f)$, tenemos que $C(f)$ es constante en $\mathcal{B}$. Como los papeles de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son simétricos, $C(f)$ también es constante en $\mathcal{A}$. Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$. Entonces $C \notin \mathcal{L}$, pero $f(A) = f(C) = f(B)$, $C \cup A = C$ y $\mathcal{L}$ es un arco ordenado que contiene a A pero no contiene a $C = C \cup A$, lo que contradice la hipótesis.

Esto prueba que, o bien $AOL(f)$ es ligera, o que para todo $x \in X$, $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es una función inyectiva. ■

TEOREMA 8.24. *Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces la función $AOL(f)$ es ligera si y sólo si f es ligera y $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es inyectiva para todo $x \in X$*

Demostración. $\Leftarrow$**).** Es consecuencia del Teorema 8.18, pues si $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es inyectiva, también es ligera.

$\Rightarrow$**).** Supongamos que $AOL(f)$ es ligera. Por los teoremas 8.18 y 8.21, f es ligera y para todo $A, B \in C(X)$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$, si $\mathcal{L} \in AOL(X)$ contiene a A, contiene también a B. Por el Teorema 8.23, $AOL(f)|_{AOL(x,X)}$ es inyectiva para todo $x \in X$. ∎

LEMA 8.25. *Sea* $f : [a,b] \to [0,1]$ *una función continua y no constante tal que* $f(a) = f(b)$. *Entonces existen* $r, s, t \in [a,b]$ *tales que* $a < r < s < t < b$ *y* $f([r,s]) = f([s,t])$.

Demostración. Sean $s \in [a,b]$ un punto donde f alcanza su mínimo y $w \in [a,b]$ donde f alcanza su máximo. Como f no es constante, se tiene que $f(a) \neq f(s)$ o $f(b) \neq f(w)$.

Si $f(a) \neq f(s)$, entonces $f(s) < f(a)$. Sean r el máximo elemento de $[a,s]$ tal que $f(r) = \frac{f(a)+f(s)}{2}$ y t el mínimo elemento de $[s,b]$ tal que $f(t) = \frac{f(a)+f(s)}{2}$. Entonces $a < r < s < t < b$ y $f([r,s]) = [f(r), \frac{f(a)+f(s)}{2}] = f([s,t])$.

Si $f(a) \neq f(w)$, entonces $f(w) < f(a)$. Sean r el máximo elemento de $[a,w]$ tal que $f(r) = \frac{f(a)+f(w)}{2}$ y t el mínimo elemento de $[w,b]$ tal que $f(t) = \frac{f(a)+f(w)}{2}$. Entonces $a < r < w < t < b$ y $f([r,w]) = [f(r), \frac{f(a)+f(w)}{2}] = f([w,t])$. ∎

TEOREMA 8.26. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continua y suprayectiva. Si* $AOL(f)$ *es ligera, entonces* f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 8.24, f es una función ligera. Supongamos que f no es un homeomorfismo. Entonces f no es inyectiva, por tanto existen elementos distinto $a, b \in [0,1]$ tales que $f(a) = f(b)$. Como f es ligera, $f([a,b])$ no es constante. Por el Lema 8.25, existen $r, s, t \in [a,b]$ tales que $0 \leq a < r < s < t < b \leq 1$ y $f([r,s]) = f([s,t])$. Esto nos da una contradicicón, pues los subcontinuos $[p,m]$ y $[m,q]$ no satisfacen la conclusión del Teorema 8.21, ya que hay un arco ordenado largo $\mathcal{L}$ que contiene a $[r,s]$ y a $[0,s]$, y entonces $[r,t]$ no es un elemento de $\mathcal{L}$. Esta contradicción prueba que f es inyectiva, y como es suprayectiva, entonces es un homeomorfismo. ∎

TEOREMA 8.27. *Sean* X *un continuo arco conexo y* $f : X \to [0,1]$ *una función continua y suprayectiva. Si* $AOL(f)$ *es ligera, entonces* f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f no es un homeomorfismo. Entonces f no es inyectiva. Así que existen dos puntos distintos $p, q \in X$ tales que $f(p) = f(q)$. Sea $\alpha : [0,1] \to X$ una función continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Por el Teorema 8.18, f es ligera, de manera que $f(\alpha([0,1]))$ es no degenerado y entonces $f \circ \alpha$ no es constante. Por el Lema 8.25, existen $r, s, t \in [0,1]$ tales que $0 < r < s < t < 1$ y $f(\alpha([r,s])) = f(\alpha([s,t]))$. Sea $\mathcal{L} \in AOL(X)$ tal que $\alpha([r,s]) \in \mathcal{L}$ y $\alpha([0,s]) \in \mathcal{L}$. Entonces $\alpha([r,t]) \notin \mathcal{L}$. Esto es una contradicción pues los subcontinuos $\alpha([r,s])$ y $\alpha([s,t])$ no satisfacen la conclusión del Teorema 8.23. Por tanto f es un homeomorfismo. ■

EJEMPLO 8.28. En el Teorema 8.27, no es posible cambiar $[0,1]$ por la circunferencia S^1.

Sean S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$ y $f : [0,1] \to S^1$ la función exponencial, es decir, $f(t) = e^{2\pi i t}$. Notemos que, para $a, b \in [0,1]$ las condiciones $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$ sólo son posibles $a = 0$ y $b = 1$, o $a = 1$ y $b = 0$. Veamos que $AOL(f)$ es inyectiva, y por tanto ligera. Sean A, B elementos no degenerados de $C(X)$ tales que $f(A) = f(B)$ y $A \neq B$. Entonces existe $a \in A \backslash B$ o $b \in B \backslash A$. Sin pérdida de generalidad, intercambiando A y B si es necesario, podemos suponer que existe $a \in A \backslash B$. Como B es cerrado, existe una vecindad U de a en A tal que U está contenida en $A \backslash B$. Como U tiene más de tres puntos, existe $x \in U$ tal que $x \neq 0, 1$. Como $f(A) = f(B)$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = f(y)$, y como $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, concluimos que $x = y \in B$, lo cual es absurdo. Hemos probado que no existen dos elementos distintos y no degenerados $A, B \in C(X)$ tales que $f(A) = f(B)$. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in AOL(X)$ tales que $AOL(f)(\mathcal{L}) = AOL(f)(\mathcal{M})$. Entonces para cada elemento no degenerado $L \in \mathcal{L}$, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $f(L) = f(M)$, Notemos que M no puede ser degenerado, pues $f(L)$ no es degenerado. Por lo que vimos antes, $L = M$. Esto prueba que $\{L : L \in \mathcal{L}$ y L no es degenerado $\} \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es compacto, $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. Por la Proposición 2.4, $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Por tanto $AOL(f)$ es ligera.

EJEMPLO 8.29. En el Teorema 8.27, no es posible cambiar X por un continuo encadenable.

Sea P el seudoarco. El cual se caracteriza por ser el único continuo hereditariamente indescomponible y encadenable (ver [18]). En particular, P no contiene arcos. Como P es un continuo plano, lo podemos considerar encajado en $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f : P \to [0,1]$ la proyección a la primera coordenada. También podemos suponer que f es suprayectiva. Para cada $t \in [0,1]$, $f^{-1}(t)$ es un subconjunto de P contenido en $\{t\} \times \mathbb{R}$, y como P

no contiene arcos, entonces $f^{-1}(t)$ no contiene ningún subcontinuo propio no degenerado. Entonces f es ligera, y como P es hereditariamente indescomponible, por el Teorema 8.20, $AOL(f)$ también es ligera, pero f no es un homeomorfismo.

Bibliografía

[1] J. Camargo, *On the openness of induced map $C(f)$ for dendroids*, Houston J. Math. 36 (2010), 229–235.

[2] J. J. Charatonik, *Confluent maps and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964), 213–220.

[3] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and A. Illanes, *Openness of induced mappings*, Topology App. 98 (1999), 67–80.

[4] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and A. Illanes, *Openness of induced projections*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 3711–3714.

[5] J. J. Charatonik, A. Illanes and V. Martínez-de-la-Vega, *Induced open projections and C^*-smoothness*, manuscrito.

[6] D. Curtis and M. Lynch, *Spaces of order arcs in hyperspaces of Peano continua*, Houston J. Math. 15 (1989) 517–526.

[7] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] J. T. Goodykoontz, Jr, and S. B. Nadler, Jr, *Whitney levels in hyperspaces of certain Peano continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1982) 671–694.

[9] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1961.

[10] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces*, Bull. Tokyo Gakugei Univ. 41 (1989), 1–6.

[11] A. Illanes, *Arc-smoothness is not a Whitney reversible property*, Aportaciones Matemáticas Comun. 8 (1990), 65–80.

[12] A. Illanes, *The openness of induced mappings in hyperspaces*, Colloq. Math. 74 (1997) 219–224.

[13] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[14] A. Illanes, *A tree-like continuum whose cone admits a fixed point free map*, Houston J. Math. 33 (2007), 499–518.

[15] A. Illanes, *A tree-like continuum whose hyperspace of subcontinua admits a fixed point free map*, Topology Proc. 32 (2008), 55–74.

[16] A. Illanes and S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[17] K. Kuratowski, *Topology: Transl. by J. Jaworowski, Volume 1*, Acad.Pr., 1966.

[18] W. Lewis, *The pseudo-arc*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), 25–77.

[19] J. van Mill, *Infinite Dimensional Topology, Prerequisites and Introducion*, North Holland, Amsterdam, 1989.

[20] S. B. Nadler, *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[21] S. B. Nadler, *Hyperspaces of Sets, A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[22] S. B. Nadler, *The Fixed Point Property for Continua*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (30), Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[23] M. Sobolewski, *A curve with the fixed point property whose cylinder admits a fixed point free map*, Houston J. Math. 31 (2005), 239–253.

[24] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math. 106 (1980), 31–40.

[25] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1942.