Universidad Nacional Autónoma de México

Licenciatura en Matemáticas
Facultad de Ciencias

Estructura algebraica y construcción geométrica: una interpretación del papel estructural de los axiomas en la geometría antigua

TESIS

que para obtener el grado académico de:

Matemática

P R E S E N T A:

Marinie Ruiz Cabañas Ahedo

TUTOR:

Dr. Carlos Álvarez Jiménez

2013

1.Datos del alumno
Ruiz Cabañas
Ahedo
Marinie
5538093417
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304567890

2. Datos del tutor
Dr.
Carlos
Álvarez
Jiménez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Rodolfo
San Agustín
Chi

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Montserrat
García
Campos

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Julio César
Guevara
Bravo

7.Datos del trabajo escrito.
Estructura algebraica y construcción geométrica: una interpretación del papel estructural de los axiomas en la geometría antigua
110 p
2013

A Carlos Álvarez Jiménez

Agradecimientos

Desde que mis primeros amigos se empezaron a titular y hablaban de los agradecimientos de su tesis, pensé que sería altamente probable que ésta fuera la parte más larga de la mía...y es que tengo tanta gente a quien agradecer...

A Carlos, el mejor maestro y tutor, por haber sido mi guía en esta carrera desde la primera clase que tomé con él, porque me abrió los ojos a una parte maravillosa de las matemáticas y del conocimiento que sin él nunca hubiera visto, por los cafés navideños y extemporáneos para discutir mi tesis o algún trabajo cuando ya habían cerrado la facultad, por enseñarme la importancia de hacer bien las cosas y por último, algo que jamás olvidaré, porque gracias a él descubrí mi camino.

A mis sinodales: Dr. Rodolfo San Agustín Chi, Dra. Montserrat Campos, M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez y Mat. Julio César Guevara Bravo por su apoyo y tiempo. Sus observaciones y aportaciones mejoraron notoriamente mi trabajo.

A Andrés (I told you, we've always knew jaja), porque me ha dado la mano desde el primer día que nos conocimos hasta hoy. (Incluso desde lejos por skype) BFF. Wu.

A Omar, porque estuvo conmigo en los momentos más difíciles (En la portada), por las tardes en la biblioteca Vasconcelos, en Starbucks y en mi casa discutiendo sobre Euclides.

A mi papá por sus excelentes ideas cuando le leí mi tesis por primera vez en el Péndulo.

A mi mamá por sentarse a corregir conmigo cuando mas la necesité. Y por su paciencia y sonrisa.

A TODOS mis amigos de la carrera, sin ustedes no hubiera podido: Adolfo, Alejandro, Armando, Gerry, Iker, Jacinta, José, Luis David, Mayra, Nelson, Simental y Tupac.

A Naim, por estar conmigo cuando más necesité de un compañero y por casi venirse a vivir a mi casa para estudiar jaja.

A Albert por sentarse conmigo hasta la madrugada preguntándome.

A Jan y a Patrik por aquellos días hasta las 12 p.m. en las bibliotecas de Alemania.

A la DGCI, a ERASMUS, a Hector Mendez y a Pedro Miramontes por la gran oportunidad que me dieron.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta sección es presentar de manera general el trabajo desarrollado en esta tesis dedicada a estudiar, con un enfoque específico, la obra *Los Elementos*, escrita por Euclides de Alexandría en el año 300 a.c.

Como es de imaginarse, el texto de Euclides ha sido traducido a numerosos idiomas y, más aún, ha sido comentado por diferentes matemáticos, científicos, filósofos y estudiosos de todas las épocas, a lo largo de más de 2000 años. Razón por la cual existe una gran cantidad de versiones del texto. La versión sobre la cual se basa esta tesis es la obra de Thomas L. Heath (1861-1940), la cual es la traducción exacta de la obra publicada por J.L. Heiberg en griego antiguo entre 1883 y 1888. La versión de Heiberg está basada en varios manuscritos entre los cuales se encuentra el manuscrito P o Vat. Gr. 190. Este manuscrito es la primera obra encontrada en 1808 en París por F. Peyrard (1760-1822), la cual fue parte del conjunto de manuscritos robados por Napoleón de Italia, enviados a Francia y posteriormente regresado a la Santa Sede por Luis XVIII en 1814. La importancia de este manuscrito es que esta versión de *Los Elementos* fue la primera distinta a aquella comentada por Theon y las basadas en ésta, lo cual había sido así por 1300 años. [1, p. 2]

Una observación común que se suele hacer es que se trata de un compendio de la matemática desarrollada hasta aquel momento; pero en realidad esto no es del todo cierto. *Los Elementos* es una obra que consta de 13 libros que desarrollan diferentes áreas de las matemáticas, entre ellas se encuentran la geometría plana, geometría del círculo, teoría de números o aritmética, teoría de proporciones y geometría de sólidos. Pero esto no quiere decir que se incluya todo el desarrollo de las matemáticas. Un contraejemplo a esta idea es el estudio de las cónicas. En tiempos de Euclides, estos objetos geométricos ya eran conocidos y sin embargo no forman parte de esta gran obra. [1] Otro comentarios que suele hacerse acerca del texto euclidiano, es que la totalidad de los trece libros resulta de la axiomatización planteada por Euclides mediante sus cinco postulados. Esto tampoco es correcto en sentido estricto, ya que solo algunos de los libros pueden ser desarrollados a partir de los axiomas planteados por Euclides. De hecho los libros aritméticos VII, VIII y IX, el libro V y el libro X se desarrollan sin postulado alguno.

[1] Algunos de los primeros trabajos sobre cónicas se deben a Menecmo (380 a.c.), quién utilizó la parábola para resolver el problema de la construcción de dos medias proporcionales. Además se cree que Euclides escribió cuatro libros de cónicas, ahora perdidos, los cuales fueron completados por Apolonio (3 a.c.).

En estos términos cabe preguntarse acerca de cual es la unidad de *Los Elementos* de Euclides. Es decir, qué es en realidad lo que unifica a los trece libros de Euclides, si no lo son los postulados ni tampoco es una "enciclopedia" que englobe el conocimiento desarrollado hasta esa época. Cada libro o conjunto de libros, como se ha dicho antes, dedica su estudio a distintas áreas de las matemáticas, sin embargo, más que los postulados, lo que unifica la obra son las nociones comunes que Euclides presenta en su primer libro y que son utilizadas por el autor a lo largo de la misma en las pruebas de sus proposiciones, como se explicará posteriormente.

Primero se mostrará que las proposiciones de *Los Elementos*, para ser demostradas, requieren de las nociones comunes. Demostrando con esto que son estas, las nociones comunes, las que unifican al texto. Es claro que las nociones comunes se utilizan en todas las pruebas, pero esto en realidad tiene que ver con el significado y contexto de la obra, no solo en el hecho de que sean elementos para demostrar. Como se verá más adelante, las nociones comunes tratan o regulan a los objetos geométricos como magnitudes y precisamente se mostrará en esta tesis, que los distintos objetos geométricos a los que se refieren todas las proposiciones requieren de dichas nociones comunes, las cuales les conceden a los objetos el estatuto de magnitudes. Con esto se propone un enfoque de *Los Elementos* en el cual las magnitudes son el eje principal y en donde la obra es una especie de tratado de las magnitudes. El objetivo principal de esta tesis es ofrecer esa lectura de *Los Elementos*, que permita entender los objetos geométricos euclidianos precisamente como magnitudes. Este análisis es específicamente dentro de *Los Elementos* de Euclides, es decir, se quiere entender de qué manera se conciben estos objetos en la obra. El objeto de interés en esta tesis son los elementos geométricos establecidos en las definiciones de los libros I y XI, así como las proposiciones con las cuales interpretaremos las operaciones necesarias para poder brindarle una estructura a dichos elementos geométricos. Posteriormente estudiaremos el carácter formal y estructural que se puede extraer de dichos objetos. Se conocerá el tipo de conjuntos que forman, es decir analizar si existen operaciones entre estos y bajo dichas operaciones qué propiedades algebraicas pueden tener.

Los objetos geométricos que se estudiarán son: las líneas rectas, los ángulos rectilíneos planos, las figuras rectilíneas así como los ángulos sólidos y las figuras sólidas. Este trabajo se centrará en las rectas y los ángulos planos, los otros objetos serán presentados de manera general. Cabe preguntarse por qué es que se han seleccionado únicamente los objetos geométricos definidos en los libros I y XI. Los objetos geométricos de estos libros son aquellos objetos fundamentales y principales de la obra en general como se explica enseguida. La teoría desarrollada en los siguientes libros es acerca de las relaciones que existen entre estos objetos, líneas, ángulos, triángulos y triedros, junto con proposiciones sobre aspectos específicos de estos. Por ejemplo, el libro II desarrolla ejemplos de demostraciones de igualdad entre áreas de rectángulos y cuadrados mediante la aplicación de éstas, sin embargo las definiciones de cuadrado y rectángulo se encuentran en el primer libro de la obra. Los libros III y IV estudian la geometría del círculo, también definido en el libro I. Estos dos libros presentan las definiciones de condiciones que cumplen otros objetos geométricos con respecto al círculo, como lo es la recta tangente a una circunferencia. El libro V, presenta la teoría de proporciones de magnitudes en abstracto. El libro VI en cambio estudia la teoría de proporciones en el caso particular de la geometría plana. Los libros VII, VIII y IX son libros aritméticos que se salen del carácter de los libros anteriores, estos libros se desarrollan independientemente de los postulados euclidianos cuyo carácter es únicamente geométrico. El libro X trata las magnitudes inconmensurables y finalmente los últimos tres libros son dedicados a la geometría de sólidos. En estos términos concluimos que los objetos geométricos que se han seleccionado para ser estudiados en esta tesis, son aquellos fundamentales y en el sentido estructural, más básicos.

Ya se ha dicho que el objetivo de este trabajo es analizar las condiciones de constitución de los objetos geométricos como magnitudes. En estos términos es natural preguntarse cuáles son las diferencias que existen entre este estudio y el que Euclides desarrolla en el libro V, el cual como se dijo, se dedica al estudio de magnitudes en abstracto. Es importante mencionar que es bien sabido que dicho libro no pertenece originalmente a la obra de Euclides, sino que éste fue añadido a la misma. La teoría de proporciones se debe en realidad al matemático griego Eudoxio. Lo anterior plantea la discusión siguiente. La teoría de las proporciones ocupa en la colección de *Los Elementos* la quinta posición y se encuentra después de la teoría de los segmentos y los ángulos. Se puede decir que: en un sentido aristotélico, Euclides necesita definir primero los entes a los cuales aplica la noción de magnitud, es decir no puede definir la cualidad sin el objeto al que ésta alude. Euclides presenta primero los objetos y después trata la magnitud únicamente. En este sentido, la diferencia entre este trabajo y la teoría desarrrollada en el libro V es que en esta tesis los objetos geométricos son analizados como magnitudes, es decir, es necesario el objeto y sus propiedades para poder evaluarlo como magnitud. En cambio el libro V hace un análisis en abstracto, es decir, sin importar el objeto geométrico del que se hable.

Es importante aclarar que el desarrollo de este trabajo tiene un enfoque distinto al de la obra de David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. Cuando se habla de estructura en conjuntos de objetos geométricos se tiende a pensar inmediatamente en el trabajo del matemático alemán. Sin embargo la obra de Hilbert considera aspectos distintos. Como es sabido, la matemática griega y la matemática moderna se distinguen entre otras cosas, por el remplazo de la geometría por el análisis y el álgebra. En este sentido esta tesis considera fundamentalmente, en cuanto al estudio de estructuras, los aspectos geométricos que las permiten y las construyen. La geometría en la matemática moderna tiene un aspecto marginal que contrasta con el papel central que tomaba para los griegos. Es decir, cualquier estudio de magnitudes que pudiera considerarse en la geometría griega está unida fundamentalmente con las construcciones geométricas en sí. A diferencia del estudio de las estructuras de la matemática moderna que pueden prescindir de construcciones geométricas, es decir para toda verdad geométrica existe una representación algebraica mas sencilla que la pueda remplazar. Como expresa Ian Mueller, *Grundlagen der Geometrie* no es exactamente un tratado algebraico sino que es una obra que trata la geometría euclidiana de manera moderna pero sin recurrir al álgebra en un sentido esencial y tampoco con el enfoque de los griegos en el cual la geometría es el centro del estudio en sí. Sin embargo, a lo largo de esta tesis haremos algunas observaciones y comentarios acerca del trabajo de Hilbert que nos podrán ser de utilidad para entender el trabajo de Euclides.

Con la finalidad de acotar su campo de estudio y definir exactamente lo que se tiene como objetivo, se ha dicho que esta tesis tiene un enfoque distinto al de la obra de David Hilbert y al libro V de Euclides. Finalmente se puede sintetizar lo que se hará de la siguiente manera: esta tesis no tratará las magnitudes en abstracto como lo hace el libro V y tampoco será un estudio como el de David Hilbert puramente estructural, que prescinda de las construcciones geométricas. Lo que se hará es estudiar las estructuras de los objetos geométricos a partir de su papel en la geometría euclidiana y sus construcciones.

Una vez que hemos introducido al lector en la materia sobre la cual se trabajará en esta tesis, se puede comenzar el siguiente capítulo donde se presentarán antecedentes generales de la obra de Euclides. Además se conocerán los fundamentos básicos de *Los Elementos* con la finalidad de presentar al lector una primera visión de cómo es que está constituida y desarrollada la obra de Euclides.

Capítulo 2

Estructura de *Los Elementos*

2.1. Bases y fundamentos de *Los Elementos*

El objetivo de este capítulo es presentar al lector las bases y fundamentos de *Los Elementos*. Se presentarán los conceptos básicos a partir de los cuales el autor desarrolla su obra. Éstos, como se verá, son las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las proposiciones de la geometría euclidiana. Así mismo, dichos elementos serán estudiados con un enfoque que permita introducirlos en el contexto de la definición y determinación de estructuras.

Además, una vez que se hayan presentado los elementos anteriores, se dará un ejemplo de una proposición euclidiana completa (Proposición I.5) con la intención de mostrar cómo es que las definiciones, los postulados y las nociones comunes actúan en el desarrollo de una proposición. Este ejemplo mostrará también la motivación para estudiar y desarrollar el objetivo de esta tesis, ya que en él se puede ver cómo es que los objetos geométricos funcionan como magnitudes, lo cual será justificado en esta tesis.

2.1.1. Antecedentes

La teoría que se desarrolla en los libros I, II, III, IV y VI es la geometría plana. Los primeros cuatro tratan la congruencia entre objetos y el libro VI la semejanza. Los libros XI, XII y XIII se ocupan de la geometría sólida. Los libros de interés serán el I y el XII, aunque se hará referencia a algunas proposiciones de otros libros.

Algunas de las proposiciones del libro I se utilizarán a lo largo de *Los Elementos*. Sin embargo, es importante mencionar que Euclides hace algo más que sólo establecer proposiciones geométricas de objetos geométricos.[1] El autor opera con ellos, es decir, establece proposiciones

[1] Como se explicó en la introducción de esta tesis, la geometría de los griegos era un tema central del estudio matemático, por lo cual ésta tiene sus propios objetivos, que definitivamente no son simplemente presentar teoremas y problemas al azar sin ningún objetivo en particular. Es interesante mencionar lo que Al-Nayrizi, en su comentario a *Los Elementos* dice, dado que refuerza esto que aquí se plantea. Nayrizi argumenta que la geometría tiene como objetivo el estudio de magnitudes, figuras y posición y las relaciones de estos entre sí. Además que las construcciones de problemas tienen como razón de ser enseñarnos teoría, es decir, teoremas.

específicas que los relacionan entre sí o con otros objetos geométricos. Como lo es, en el primer caso, sustraer un segmento de otro donde ambas magnitudes son homogéneas. O en el segundo caso, establecer la relación de magnitud que existe entre los lados de un triángulo y sus ángulos; esta comparación relaciona dos tipos de magnitudes diferentes.

El libro I es fundamental en el desarrollo de la obra, dado que presenta e introduce parte esencial de los recursos utilizados por el autor a lo largo de su trabajo. Estos recursos serán las definiciones, los postulados y las nociones comunes. A partir de estos tres elementos, Euclides desarrollará en este libro 48 proposiciones, las cuales se relacionan entre sí mediante una estructura lógica deductiva excepcional [2]. En las secciones siguientes explicaré de manera general el sentido global, dentro de la obra euclidiana, de los elementos ahora mencionados, es decir, de las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las proposiciones.

Definiciones

Las definiciones euclidianas son enunciados que guardan cierta relación con la teoría de definición de Aristóteles, la cual plantea que en el estudio de una ciencia completa es necesario conocer y extraer sus componentes primarios. [6, p. 143]

Para Aristóteles, la definición del objeto definido es independiente de la existencia del mismo. Para afirmar ésto, establece que la definición es la respuesta a la pregunta acerca de *qué es* y no una afirmación de *eso es*. Sin embargo, afirma que la existencia de muchos objetos debe ser probada, siempre y cuando no sean los objetos esenciales de la ciencia estudiada. En el caso de la geometría euclidiana, la existencia de las líneas rectas y las circunferencias no se prueba, sino que se postula. En cambio, para otros objetos geométricos de dicha geometría, es necesario demostrar su existencia mediante su construcción. En estos términos, se puede decir que hay objetos geométricos para los cuales se debe demostrar su existencia y otros para los que se debe de postular.

La construcción es esencial en la geometría de los griegos, dado que la existencia de los objetos depende siempre de otros objetos y su construcción, hasta el caso "mínimo" que es lo que fue postulado [10, p. 15]. Esto deriva en dos tipos de definiciones, las definiciones reales y las nominales.

La diferencia entre estos dos tipos de definiciones es simplemente que las definiciones reales son las nominales más el argumento que implica la existencia del objeto definido. La definición nominal establece cómo referirse al objeto. La afirmación de existencia presenta dos casos: el

También comenta que las construcciones no son una "labor manual" sino que lo que realmente es importante es conocer cómo se llevan a cabo. Con estos comentarios se puede ver que el conocimiento en geometría era, además de valorado, concebido como una ciencia con un objetivo que se alejaba de ser una lista de problemas y teoremas interesantes. [1, p. 100,101]

[2]Ian Mueller, en su obra *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's "Elements"* desarrolla justamente este tema, determina de una manera rigurosa el árbol deductivo de dichas proposiciones, es decir establece claramente ya sea que proposición, definición, noción común o postulado es necesario para obtener cualquier proposición.

primero que considera los objetos esenciales y el segundo que considera los otros objetos. En el primer caso, la afirmación de existencia es un postulado que garantiza la existencia del objeto. En geometría, dichos postulados garantizan la posibilidad de construcción del objeto. Y para el segundo caso, la afirmación de existencia es una prueba o construcción del objeto basada en los postulados de los objetos esenciales.

En estos términos, se puede decir que las definiciones que Euclides establece en sus libros son nominales, dado que no contienen ningún argumento que pruebe o postule su existencia. Sin embargo, para el caso de las líneas rectas y circunferencias, Euclides propone los postulados que garantizan su existencia. Para los otros objetos, como el triángulo equilátero y el cuadrado, Euclides proporciona una definición nominal y posteriormente una construcción con la finalidad de garantizar su existencia.

Cabe mencionar que Euclides suele ser algo inconsistente, ya que hay objetos geométricos para los cuales demuestra su existencia mediante una construcción y otros para los que no lo hace. Como lo es el caso del paralelogramo, el cual define y no construye. Esto puede ser debido al objetivo particular de Euclides con respecto al uso de la figura en cuestión, el triángulo equilátero y el cuadrado son objetos fundamentales. El triángulo equilátero es necesario para construir la proposición que permitirá concatenar líneas rectas, construcción fundamental en el desarrollo de la estructura de la línea recta. El cuadrado será la figura que culminará la estructura de las figuras rectilíneas en general como lo veremos posteriormente. Ambas figuras necesitan ser construidas para llevar a cabo las proposiciones en cuestión. En el otro caso, Euclides no necesita construir un paralelogramo, no necesita su construcción en ninguna proposición, sin embargo lo utiliza en muchas proposiciones acerca del área contenida entre ellos. Únicamente necesita las propiedades que lo definen en la definición que establece Euclides al principio de la obra.

Además, las definiciones nominales euclidianas se pueden clasificar en dos tipos: las rigurosas y las no rigurosas. Las rigurosas determinan completamente los elementos geométricos a los que éstas se refieren y; por lo tanto, pueden ser utilizadas como herramientas de demostración. Y las no rigurosas establecen únicamente cómo referirse al objeto, por lo cual necesitan ser modificadas para poder hacer uso explícito de ellas y para que éstas delimiten realmente un concepto. De hecho, a lo largo de su obra, Euclides no usa las definiciones no rigurosas en ninguna proposición.

Algunos ejemplos de definiciones nominales no rigurosas son las siguientes: punto, línea y superficie, las cuales enuncio a continuación:

Definición (*I.1*)**.** *Un* ***punto*** *es lo que no tiene parte.*

Definición (*I.2*)**.** *Una* ***línea*** *es una longitud sin anchura.*

Definición (*I.5*)**.** *Una* ***superficie*** *es aquello que sólo tiene longitud y anchura.*

Algunas de estas definiciones serán modificadas y acotadas para poder establecer claramente dichos objetos geométricos.

Ejemplos de definiciones rigurosas son los siguientes:

Definición (*I.10*)**.** *Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es* ***recto****, y la recta que está sobre la otra se llama* ***perpendicular*** *a la otra recta.*

Definición (*I.15*)**.** *Un* ***círculo*** *es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.*

Estas definiciones sí determinan claramente qué es lo que debe de cumplir un elemento para ser él mismo. Se consideran rigurosas ya que involucran una comparación cuantitativa como condición fundamental. La primera de estas definiciones depende de la definición de línea recta, la cual será trabajada en la sección respectiva. Además estas definiciones son las únicas dos que Euclides utiliza en el primer libro para demostrar alguna proposición.

Postulados

Los **postulados** de Euclides son enunciados específicos de la geometría. Es decir, se refieren a elementos y hechos geométricos particulares y no son aplicables a elementos o hechos no geométricos.

A continuación se enuncian los cinco postulados euclidianos para ofrecer una idea clara del desarrollo estructural del trabajo que realiza Euclides a partir de éstos.

Es importante mencionar que los primeros tres postulados son cláusulas constructivas, es decir, son aquellos que permiten y garantizan construcciones; dichos postulados se añaden a la definición nominal de recta y circunferencia respectivamente, para convertir estas definiciones nominales en definiciones reales según Aristóteles. El autor de *Los Elementos* comienza la exposición de estos cinco postulados con la frase "*Sea lo siguiente postulado.*"

I Trazar cualquier línea recta entre cualesquiera dos puntos.

II Producir una línea recta finita continuamente en una línea recta.

III Describir una circunferencia con un punto y una longitud.

IV Que todos los ángulos rectos son iguales.

V Que si al caer una línea recta sobre dos líneas rectas y los ángulos interiores en un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encontrarían en el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

A partir de la existencia de dos puntos, El primer postulado garantiza la posibilidad de trazar una línea recta entre éstos. En otras palabras, la existencia de los puntos garantiza la existencia de las rectas. Este postulado es la afirmación que añadida a la definición nominal de línea recta convierte a dicha definición en una definición real.

El segundo postulado establece el hecho de que la línea recta siempre pueda extenderse sin dejar de ser lo que es.

El postulado tres introduce en la geometría euclidiana el concepto de distancia mediante el radio de la circunferencia en cuestión. De esta manera, este postulado presenta un sistema de medida, es decir, una manera de determinar la igualdad en magnitud de dos segmentos.[3] Dichos segmentos adquieren la cualidad de ser magnitudes a partir del primer postulado, el cual establece la distancia entre los puntos que determinan la recta. Esta magnitud se compara con la circunferencia,

El cuarto postulado, el cual a primera vista parece sumamente sencillo, en realidad garantiza e introduce en la geometría plana la existencia de una magnitud constante, el ángulo recto. Es importante mencionar que el sustento y relevancia de este postulado se deben a la manera con la cual Euclides define el ángulo recto. Su definición no determina si dicho ángulo tiene alguna magnitud específica, sino que únicamente determina la propiedad esencial que cumple éste con respecto a las rectas que lo conforman. De igual manera, la definición de ángulo recto se complementa con la definición de ángulo que se establecerá en el capítulo dedicado al estudio de este objeto geométrico.

El quinto postulado es el más conocido y controversial ya que sin la existencia de éste se le da entrada a muchas otras geometrías. Con respecto a este postulado, es importante mencionar que los resultados de concatenaciones entre algunos objetos geométricos, como veremos posteriormente, entre líneas y ángulos son independientes a éste. Por lo cual se puede concluir que las operaciones entre estos elementos son válidas en toda geometría que cumpla con los cuatro primeros postulados, en cambio la operación entre áreas de figuras planas, la cual sí depende del quinto postulado, no es válida mas que en geometrías que cumplan dicho postulado.

Ahora, a nivel global dentro del texto euclidiano, los postulados sirven como herramientas en las construcciones de problemas. Éstos permiten legitimar toda propiedad que se obtenga de las demostraciones euclidianas. Es decir, éstos y las nociones comunes son parte de la herramienta necesaria para justificar y legitimar la existencia de cualquier estructura que se presente en esta tesis.[4] Más adelante se verá de qué manera y en qué proposiciones es que estos elementos actúan para poder desarrollar las estructuras en cuestión.

[3]En el desarrollo de la Proposición *I.2* que se encuentra en la sección dedicada al estudio de la línea recta y su estructura, se ejemplifica cómo es que Euclides utiliza la circunferencia para definir un criterio de igualdad entre segmentos.

[4]Vale la pena mencionar que los postulados proveen herramientas de construcción, que garantizan únicamente la existencia de círculos y rectas, es por eso que la geometría euclidiana es conocida comúnmente como la “geometría de regla y compás”. Con respecto a las ecuaciones y sus grados derivados de este tipo de construcciones existen obras dedicadas a la explicación de dichos aspectos. Un ejemplo interesante es el trabajo desarrollado por Francois Viete en su obra *The analytic art.*

Nociones Comunes

Las **nociones comunes** son enunciados que plantean afirmaciones que son válidas en la geometría plana, la geometría sólida y en la aritmética, de ahí el término "común". Las nociones comunes establecen lo que es una magnitud y en que sentido los objetos geométricos son magnitudes. Éstas comparan entre sí únicamente magnitudes homogéneas.

Un ejemplo de la aplicación de las nociones comunes es la comparación de figuras planas, en particular la siguiente afirmación: Si un triángulo t_1 es igual a un triángulo t_2 y dicho triángulo t_2 es igual a un triángulo t_3 entonces los triángulos t_1 y t_3 son iguales.

Así como los postulados sirven para legitimar las construcciones en las proposiciones euclidianas, las nociones comunes tienen también un uso particular dentro de la obra euclidiana, ya que sirven como elementos para concluir las demostraciones de los teoremas y problemas. El hecho de que las nociones comunes tengan ese rol permitirá validar la legitimidad de las propiedades que se puedan extrapolar a partir de las proposiciones euclidianas. En un sentido más fuerte, se puede decir que los postulados se utilizan en favor de las nociones comunes. Es decir, los postulados permiten las construcciones sobre las cuales, mediante las nociones comunes, se puede concluir que algunas propiedades de magnitudes geométricas han sido demostradas. Los postulados justifican una construcción que permite llevar las configuraciones geométricas a las condiciones contempladas por las nociones comunes para que éstas funcionen y actúen sobre las magnitudes. Más adelante, en el ejemplo, observaremos cómo es que se utilizan tanto los postulados como las nociones comunes en los procesos de construcción y demostración de las proposiciones.

A continuación enunciaré las nueve nociones comunes que se encuentran en algunas ediciones del texto de Euclides. En la edición sobre la que se basa este trabajo se presentan únicamente las primeras cinco. Una de las ediciones que propone más de cinco es Euclid. *Euclidis Elementa*. J. L. Heiberg. Leipzig. Teubner. 1883-1888.

N.C.1 Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

N.C.2 Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.[5]

N.C.3 Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales. [6]

N.C.4 Las cosas que coinciden entre sí son iguales una a otra.

N.C.5 El todo es mayor que la parte.

N.C.6 Si a desiguales se le suman iguales lo que queda no son iguales.

N.C.7 Si a desiguales se restan iguales lo que queda no son iguales.

[5] En realidad esta noción común no utiliza el término *sumar* o *añadir*. Para la noción común 2 la palabra en griego utilizada es $\pi\rho o\sigma\tau i\theta\eta\iota$, la cual se traduce como poner o sobreponer.

[6] Análogamente a la noción común dos, esta noción común no emplea literalmente las palabra *restar* o *sustraer* sino que la palabra griega utilizada es $\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\epsilon}\omega$ la cual se traduciría como quitar.

N.C.8 Si a iguales se le suman desiguales lo que queda son desiguales.

N.C.9 Dos rectas no encierran un región.

Heiberg en su obra comenta que las últimas cuatro nociones comunes son interpoladas. Como es el caso de la *N.C.9*, debido a que no es ni siquiera una aseveración que hable acerca de una magnitud como lo son todas las otras nociones comunes.

Las nociones comunes hablan de *cosas* y no de objetos geométricos o números. Tampoco utilizan el término magnitud ya que una *cosa* puede considerarse como magnitud en cuanto satisface las nociones comunes. El término *cosas* es introducido en las traducciones vernáculas (inglés, francés, español) ya que en el griego original, según Heiberg, Euclides usa el artículo indefinido $\hat{\iota}o$, $\hat{\iota}\alpha$, así *N.C.* 1 diría: "Los que son iguales a los mismos lo son entre sí".

En el siguiente capítulo se profundizará el tema de las nociones comunes y las propiedades algebraicas que se puedan extrapolar de ellas.

Proposiciones

Las **proposiciones** de *Los Elementos* son enunciados que se pueden clasificar en dos categorías, los problemas de construcción y los teoremas [7]. Los problemas de construcción consisten de dos partes: la solución del problema, es decir la construcción propuesta y la demostración de que dicha construcción cumple con lo requerido en el enunciado de la proposición. Los teoremas son proposiciones que plantean hechos geométricos particulares, ya sean características que deben de cumplir los objetos geométricos intrínsecamente o relaciones que satisfacen entre ellos. En el primer libro de *Los Elementos* las proposiciones 1-3, 9-12, 22, 23, 31, 42, 44-46 son problemas y el resto de ellas son teoremas.

Los problemas y teoremas se puede dividir formalmente en las siguientes partes:[8]

I Enunciado ($\pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$): El enunciado establece en la proposición aquello que se cumple o aquello que se debe construir bajo ciertas condiciones dadas.

[7]Esta distinción entre problemas y teoremas se ha hecho en la mayoría de los comentarios a la obra euclidiana, como lo es el comentario de Proclo [11, p. 182] o el comentario de Al-Nayrizi [1, p. 100]. Si embargo es muy interesante el contexto y el enfoque que se le da a dicha distinción. Proclo sostiene que los problemas es todo aquello que se pueda obtener a partir de la generación, división, suma y resta de figuras y los teoremas son aquellos que se enfocan en la exhibición de atributos esenciales de estos. En el caso de Al-Nayrizi, este considera que el objetivo de la transmisión de un teorema es el conocimiento de la teoría y en el caso de la transmisión de una construcción (problema) lo que se estudia es la práctica. El propósito de la teoría es conocer algo y el propósito de la práctica es aprender a hacer algo. Además Al-Nayrizi afirma que existe una tercera distinción entre estas figuras, que es conocida como la localización, que consiste en hallar la posición de un objeto geométrico. Un ejemplo de este tipo de figura es la proposición III.1, que dice lo siguiente:

Proposición. *(III.1) Determinar el centro de una circunferencia dada.*

[8]Esta división fue originalmente propuesta por Proclo en su comentario a *Los Elementos* de Euclides. [11], 129

II Instanciación o Ejemplificación ($\check{\epsilon}\kappa\Theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$): Esta parte de la proposición establece un caso para el cual se asegura lo que la proposición afirma.

III Definición o especificación ($\delta\iota o\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$): La definición establece de manera específica, a partir de lo que fue dado en la instanciación, lo que se debe probar o construir.

IV Construcción ($\kappa\alpha\tau\alpha\sigma\kappa\epsilon\upsilon\acute{\eta}$): En la construcción se desarrolla aquello que falta a los datos para poder encontrar lo buscado. Como mencioné anteriormente, las construcciones se pueden llevar a cabo mediante los tres primeros postulados.

V Prueba ($\grave{\alpha}\pi\acute{o}\delta\epsilon\iota\xi\iota\varsigma$): Con la prueba se llega a lo que se pidió en la especificación. Es en esta tarea en donde las nociones comunes desempeñan su papel más importante, ya que permiten demostrar la validez de los argumentos inferidos de las construcciones.

VI Conclusión ($\sigma\upsilon\mu\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\sigma\mu\alpha$): La conclusión confirma que lo buscado ha sido construido o demostrado.

Se puede observar que con esta clasificación, Euclides plantea de dos maneras lo que se probará o construirá en el enunciado y en la ejemplificación, en la conclusión el autor confirma lo construido o probado. Mediante esta división se puede ver cómo es que los postulados y nociones comunes contribuyen en la justificación de lo que se pueda inferir a través de las proposiciones. Con esto se puede decir que toda operación, propiedad o característica asociada a los objetos geométricos tiene una base formal, fundamentada precisamente en las nociones comunes y en los postulados euclidianos.

En los ejemplos de proposiciones que presentaremos más adelante, el lector podrá observar distintos casos de problemas y teoremas. Algunos de ellos mostrarán un problema o tarea a resolver, es decir, se tiene que encontrar una construcción que cumpla con los requisitos solicitados. Los teoremas, en cambio, plantean un hecho geométrico demostrable. La demostración que se proporciona esta acompañada de ciertas construcciones que permiten mostrar lo requerido. Con esto se establece la diferencia que existe entre un teorema y un problema en la obra euclidiana.

Como se mencionó anteriormente los postulados son los necesarios para llevar a cabo la construcción y las nociones comunes para poder concluir la prueba de la proposición. Este papel que desempeñan, tanto las nociones comunes como los postulados, es general en el resto de las proposiciones euclidianas. Es decir, requiere de ambos elementos, postulados y nociones comunes, para garantizar la validez de las proposiciones.

Así, se puede concluir que hasta ahora se han distinguido las nociones comunes y los postulados de *Los Elementos* en dos ámbitos distintos. El primero de ellos es el papel que desempeñan con respecto al sistema formal de la obra de Euclides. Y el segundo aspecto es el papel que juegan estos elementos de manera específica en el interior de la obra, es decir, dónde y para qué se utilizan. En el primer caso se propuso una lectura en la cual los elementos que construyen la base del aparato formal de la obra son las nociones comunes, ya que son ellas las que se presentan en todas las proposiciones euclidianas y que regulan a las magnitudes, tema central de la obra.

Mientras que el segundo aspecto determina que los postulados se usan para las construcciones y las nociones comunes para las pruebas. Ésto, en cuanto al aspecto formal, tiene todo el sentido ya que lo que se pide mostrar al final de cuentas son hechos que tiene que ver con las magnitudes. De esta manera, los postulados juegan un papel de herramienta para las nociones comunes.

Por último, con la finalidad de ilustrar los conceptos anteriores, se presentará la Proposición I.5 como ejemplo. Éste permitirá apreciar los componentes de las proposiciones euclidianas.

Ejemplo: Proposición *I.5*

La Proposición *I.5* asegura que los ángulos de las bases de un triángulo isósceles son iguales. Si aceptamos que ya ha sido enunciado este teorema, la instanciación consiste en dar un triángulo isósceles, lo que para Euclides significa que se asume que un triángulo isósceles $T[ABC]$ ha sido dado.

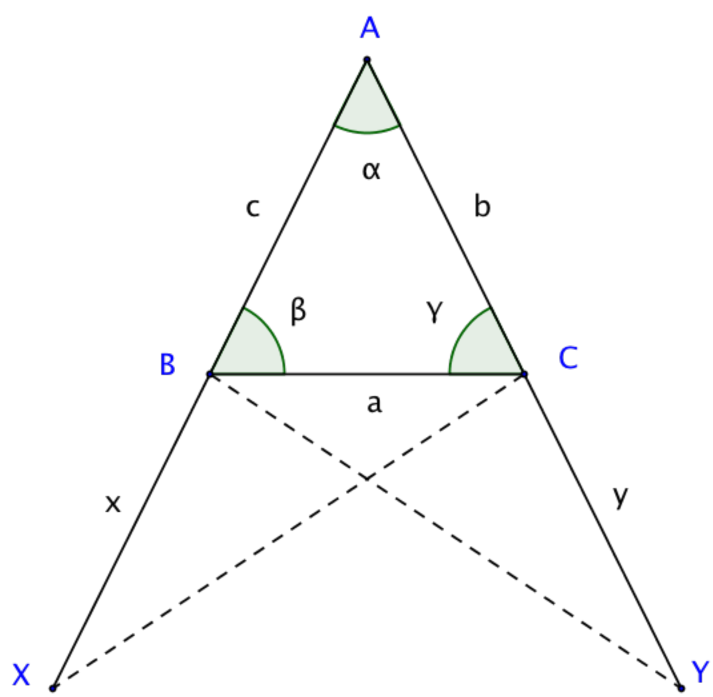

Figura 2.1: Proposición *I.5*

De acuerdo con ello, la especificación asegura que si $AB = AC$, condición dada por la instanciación, entonces $\angle(ABC) = \angle(ACB)$, i.e si $b = c$ entonces $\beta = \gamma$.
En la construcción Euclides prolonga -con base en el segundo postulado- el lado $c = AB$ hasta un punto X. Si $x = BX$, entonces $AX = c + x$. Dado este segmento x y con base en la Proposición I.2, precisamente construida, Euclides prolonga el lado $b = AC$ hasta un punto Y, tal que

$y = CY$ es igual a $x = BX$ (en magnitud).

De este modo Euclides comienza con la demostración, la cual consiste en los siguientes pasos:

1 $AX = AY$, lo que se concluye de la *N.C.2* ya que $AX = c + x$, $AY = b + y$, es decir a, c y b que son iguales, se han sumado x, y que son iguales, por lo que $c + x = b + y$.

2 El triángulo $T[ABY]$ es congruente al triángulo $T[ACX]$ por el primer teorema de congruencia -proposición previamente demostrada por Euclides; el primero es el triángulo $T[c, \alpha, b + y]$ y el segundo el triángulo $T[b, \alpha, c + x]$- por lo que $BY = CX$ y $\angle(BXC) = \angle(CYB)$. Por la misma Proposición I.4 se concluye la congruencia de los triángulos $T[BXC]$ y $T[CYB]$, de donde ahora $\angle(CBX) = \angle(BCY)$.

   Si de la congruencia de los triángulos $T[ABY]$ y $T[ACX]$ se concluye también que $\angle(ABY) = \angle(ACX)$, a cada uno de estos se les puede quitar respectivamente los ángulos $\angle(CBY)$ y $\angle(BCX)$ con lo que, la *N.C.3* permite concluir la igualdad deseada.

$$\beta = \angle(ABY) - \angle(CBY)$$

$$\gamma = \angle(ACX) - \angle(BCX)$$

$$\beta = \gamma$$

Con este ejemplo no sólo se ha hecho ver cada una de las componentes de una proposición, sino el papel que los postulados y los problemas desempeñan en un caso (la construcción) y el de las nociones comunes en otro caso (la demostración). Sin embargo, se ha utilizado una notación aritmética de manera injustificada. El objetivo principal de esta tesis es precisamente el de justificar esta presentación aritmética de los objetos geométricos.

A continuación, se analizarán los aspectos algebraicos de los conceptos presentados en este capítulo. Con este análisis se podrá proceder al estudio de las estructuras de objetos geométricos específicamente.

2.2. Estructuras algebraicas en *Los Elementos*

2.2.1. Alcance y objetivo

El objetivo de este capítulo será presentar al lector el panorama general que se seguirá para identificar las estructuras de los objetos geométricos en cuestión. Como se dijo anteriormente, las nociones comunes plantean las “reglas” que las magnitudes asociadas a dichos objetos geométricos cumplen. Entonces se identificará a partir de estas, aquellos o aquellas que representen o puedan ser interpretadas como propiedades usuales de estructuras algebraicas.

El interés en este análisis es poder desarrollar recursos que serán utilizados para poder llevar a cabo el objetivo principal de esta tesis, que recordemos, es determinar de manera clara el tipo de estructura que generan los objetos geométricos que se estudiarán.

2.2.2. Panorama general para desarrollar cada estructura

En el capítulo anterior se presentaron las nueve nociones comunes de Euclides. Las nociones comunes dos y tres anunciaron la existencia de las operaciones de suma y resta. Estas dos operaciones se presentaron de manera abstracta, es decir, para las magnitudes en general. Para que estas dos nociones comunes actúen sobre alguna magnitud específica, como lo pueden ser la línea recta o el ángulo es necesario determinar qué es una suma o una resta entre estos objetos. Estas operaciones serán determinadas a partir de las construcciones basadas en los postulados. Éstas permiten obtener, en cada caso, el modo en como se operará la magnitud correspondiente (línea, ángulo, figura), identificada con el objeto geométrico que la represente. Y estas construcciones permiten mostrar que las magnitudes satisfacen las condiciones anunciadas por la noción común. Esto se puede ver de la siguiente manera:

1 Las nociones comunes anuncian que existe una operación, lo que supone que se obtendrá una igualdad.

2 Los postulados permiten llevar a cabo una construcción que se identifica con la operación. El primer ejemplo de una construcción tal será la Proposición *I.3* para la línea recta.

3 Las nociones comunes permiten asegurar que las operaciones así definidas/obtenidas satisfacen ciertas condiciones. Por ejemplo: $a = b, x = y \Rightarrow a \pm x = b \pm y$

4 Las otras propiedades que nos interesan se deberán de demostrar a partir de postulados y nociones comunes (asociatividad, conmutatividad etc.).

En estos términos, vale la pena plantear la pregunta de qué tan lejos permiten llegar las nociones comunes, en cuanto a la estructura algebraica que subyace a estos distintos dominios de magnitudes en lo que éstas puedan actuar.

Esta pregunta se responderá de dos maneras: primero, se señalará un marco general con respecto del cual se pueda comparar la riqueza de cada una de las estructuras algebraicas que subyacen a cada dominio de magnitudes geométricas y segundo, consistirá en estudiar en cada caso cómo es que Euclides constituirá geométricamente las operaciones referidas.

Se verá ahora qué propiedades algebraicas se pueden extraer de la obra euclidiana y cómo es que esto relaciona las magnitudes asociadas a los objetos geométricos.

2.2.3. Propiedades algebraicas a partir de las nociones comunes

- **Igualdad**

La cuarta noción común introduce el criterio de **igualdad**. Según esta noción común, dos elementos son iguales entre sí, si estos coinciden. Esto plantea una relación de equivalencia la cual nos dice que dos elementos son iguales bajo ciertas condiciones, lo cual no implica que estos sean los mismos. Para Euclides en su obra, el concepto de coincidir[9] es el acto de que si dos objetos son superpuestos y estos se cubren completamente entonces se dice que coinciden y por lo tanto son iguales.

En términos de la igualdad por coincidencia, se pueden distinguir los siguientes objetos: las líneas y los ángulos, los triángulos y figuras planas, y los ángulos sólidos. Las líneas rectas y los ángulos se pueden superponer y en este sentido estos elementos no presentan problema alguno bajo la óptica de Euclides. Esta superposición no la plantea a través de algún postulado o noción común, sino que la asume directamente en la prueba de la Proposición *I.4*, donde demuestra el primer teorema de congruencia para triángulos. En la prueba Euclides dice que dado que dos lados son iguales entonces los puede superponer uno con otro. Él hace coincidir dos de los lados de los triángulos para demostrar que el otro lado coincidirá también. Esto quiere decir que ángulos iguales o segmentos iguales lo son cuando son ángulos o segmentos correspondientes de triángulos iguales.

Para el caso de los triángulos, éstos también se comparan mediante la superposición de las dos figuras a partir de la coincidencia de sus componentes, los lados y los ángulos. Ésto lo garantiza mediante los tres teoremas de congruencia. En el primero de ellos es donde el autor asume la posibilidad de superponer un objeto en otro[10]. Para las figuras planas en general, la igualdad se basa en el criterio de coincidencia y, como el lector verá posteriormente, los métodos de prueba indican que en esencia la igualdad se rige por los criterios de congruencia de los triángulos.

Los ángulos sólidos no se pueden comparar mediante la superposición, dado que nos enfrentamos a los casos de sólidos simétricos que se verá más adelante. Por lo tanto, para ellos aplicará un concepto distinto de igualdad derivado de las definiciones de sólidos iguales y semejantes.

- **Transitividad**

  Euclides usa la primera noción común en las pruebas de sus proposiciones como un criterio de igualdad. Es decir, el autor puede garantizar la igualdad entre dos magnitudes geométricas homogéneas a partir de la prueba de la igualdad de ambas magnitudes con una tercera. Ésto se conoce comúnmente como **propiedad de transitividad**. Esta noción común se puede reescribir de la siguiente manera:

[9]En la edición en griego de Heiberg el término no es coincidir, sino "*poner encima*". Y en la traducción francesa de dicha edición la palabra es *ajustarse*. Básicamente las tres posibles traducciones dan la idea de hacer que una figura este sobre la otra y que éstas se ajusten entre sí.

[10]La prueba de este teorema (*I.4*) utiliza *N.C.9*. En la versión de Heath se hace uso de ésta a pesar de que la noción común no fue establecida.

$$\text{Si, } a = b, b = c \text{ entonces } a = c \ (N.C.1)$$ [11]

Un ejemplo del uso de *N.C.1* se encuentra en la Proposición *I.1* en el siguiente capítulo. En esta proposición se requiere construir un triángulo equilátero. Se demuestra que la construcción que Euclides propone como solución es correcta de la siguiente manera: primero se prueba que los dos lados son iguales a la base y posteriormente, mediante *N.C.1*, se concluye que los tres lados son iguales.

- **Ley de cancelación**

  Esta propiedad se puede extrapolar de la obra euclidiana para una estructura siempre y cuando en dicha estructura se pueda interpretar un inverso aditivo para cada elemento del conjunto y un neutro aditivo. A continuación se verá cómo es que se puede presentar esta propiedad.

  De manera análoga a *N.C.1*, las nociones *N.C.2* y *N.C.3* se usan como herramienta para mostrar la igualdad de dos objetos geométricos. En este caso la igualdad se prueba a partir de la operación de añadir o restar elementos iguales a elementos iguales. La segunda noción común es necesaria para poder demostrar la **ley de cancelación**. Como se puede ver en seguida, ambas nociones comunes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\text{Si } a = b \text{ y } c = d \text{ entonces } a + b = c + d \ (N.C.2)$$

$$\text{Si } a = b \text{ y } c = d \text{ entonces } a - b = c - d \ (N.C.3)$$

  Ahora, utilizando *N.C.2* se tiene lo siguiente:

  Si $a+b = c+b$ y $(-b) = (-b)$[12] entonces por *N.C.2* $a+b+(-b) = c+b+(-b)$ y así $a = c$.

  En ambos casos se puede recurrir a la cancelación y así demostrar la igualdad entre dos elementos. Así, se analizará la posibilidad de introducir elementos inversos aditivos y ver de qué manera se podría hacer funcionar la ley de cancelación para los objetos geométricos seleccionados.

- **Relación de orden**

  La cuarta noción común sugiere la posibilidad de la desigualdad de magnitudes cuando los elementos en cuestión no coinciden. Esta idea se introduce mediante la *N.C.5*, la cual determina de manera implícita que un elemento es "desigual" y en particular **menor a** otro

[11] Esta reescritura requiere de la propiedad de reflexividad, ya que lo que diría en realidad la propiedad de trasitividad sería "Si $a = b, c = b$ entonces $a = c$", lo cual es equivalente, dado que la igualdad es una relación de equivalencia por tanto es reflexiva.

[12] Es importante resaltar que en este caso la idea de (-b) es general para magnitudes. En esta tesis se analizará el caso específico de las magnitudes que se estudiarán, es decir cómo es que se puede considerar un elemento inverso aditivo para cada caso.

si éste es *parte* del anterior. Esta noción común se refiere a elementos homogéneos de manera implícita, Euclides no específica en ninguna parte de su obra esto. En la Proposición *I.16*[13] se usa por primera vez esta noción común. Esta proposición es conocida comúnmente como el teorema del ángulo externo, en la cual Euclides utiliza la noción común para demostrar que dados dos ángulos iguales y que uno es parte de otro entonces el otro también es parte del primero. En este trabajo esta noción común se usará para determinar si un conjunto es linealmente ordenado o no, por lo cual por ahora no se profundizará más.

- **Conmutatividad**

  Ninguna de las nociones comunes establece la propiedad de conmutatividad, la cual es una propiedad deseable en las estructuras que se estudiarán, tanto para el lector moderno como para los objetivos de esta tesis. Moderno, ya que se sabe que la conductividad se contempló hasta mucho después de los tiempos de Euclides, y para los objetivos de esta tesis porque dicha propiedad permitirá conocer más los objetos presentados. Se puede pensar que en *Los Elementos* esta propiedad no se establece dado que con *N.C.2* el autor garantiza que bajo la operación de añadir iguales a iguales [14], los elementos obtenidos son iguales (dado que provienen de dos elementos iguales). De alguna manera con esta noción Euclides resta importancia al hecho de que una operación se pueda llevar a cabo o por la izquierda o por la derecha y los resultados puedan ser diferentes, al contrario, para él estos deben ser iguales. Más adelante se tratará el tema de la conmutatividad en las operaciones específicas de las estructuras que se desarrollarán.

2.2.4. Propiedades algebraicas

Una vez que se ha presentado qué es lo que se puede encontrar en cuanto a propiedades algebraicas en *Los Elementos*, y antes de comenzar con el estudio de la primera estructura, se presentará esta sección, la cual está dedicada únicamente a recordar y tener a la mano las propiedades algebraicas que se estudian usualmente. Ésto con el fin de tener un marco de referencia con el cual se puedan comparar las estructuras que se estudien posteriormente.

Se presentarán, de manera general, las propiedades algebraicas de un anillo [13, p. 32]:

Se le llama *sistema de doble composición* a un conjunto de elementos en el cual para cualesquiera dos elementos la suma a+b y el producto $a \cdot b$ están determinados de manera única. A un sistema de doble composición se le llamará **anillo** si las siguientes *reglas de operación* se satisfacen para todos los elementos.

Leyes de la suma

- *(Ley conmutativa)* $a + b = b + a$;
- *(Ley asociativa)* $a + (b + c) = (a + b) + c$;

[13]La demostración de este teorema se encuentra en el capítulo del Ángulo

[14]Más adelante se explicará que esta noción común se entiende como una operación general, la cual se va determinando particularmente para cada uno de los elementos geométricos que él presenta en su texto

- La ecuación $a + x = b$ tiene solución para todo a y b; [15]

Leyes de la multiplicación

- *(Ley asociativa)* $a \cdot bc = ab \cdot c$;

Leyes distributivas

- $a \cdot (b + c) = ab + ac$;
- $(b + c) \cdot a = ba + ca$;

Además el anillo es conmutativo si se cumple la ley de conmutatividad para la multiplicación.

- $a \cdot b = b \cdot a$

Recordemos que si la estructura cumple las propiedades de asociatividad y existencia del neutro entonces ésta se conoce como **monoide**. Si se cumplen las tres primeras propiedades de la suma entonces los elementos forman un **grupo abeliano** con la suma. Además un anillo que cumple las siguientes propiedades se conoce como **campo**:

- Contiene por lo menos un elemento distinto de cero
- Las ecuaciones siguientes siempre tienen solución:

$$\begin{cases} ax = b, \\ ya = b \end{cases}$$

Existen otros aspectos y propiedades que se consideran en el estudio de estructuras algebraicas como la ***ley de cancelación*** para la suma, la cual se deduce de algunas de las anteriores y que se podrá encontrar en el texto euclidiano. Además, se sabe que se pueden definir funciones de las estructuras en sí mismas que definan relaciones sobre él y que estas relaciones pueden ser ***transitivas, simétricas y reflexivas***. Este tipo de propiedades también son de interés para el análisis de las operaciones que se podrán definir a partir de las construcciones geométricas.

Una vez que se han recordado las propiedades algebraicas de interés, se revisará cómo es que se pueden ver las operaciones en el texto de Euclides y cómo es que a partir de las nociones comunes se pueden obtener algunas propiedades de éstas.

Hasta ahora, lo que se ha hecho fue presentar las propiedades que se pueden obtener a partir del las nociones comunes en el texto euclidiano. El análisis se ha hecho de manera general, sin conocer cómo es que cada una de estas propiedades se "materializa" bajo cada estructura de los objetos geométricos a estudiar. Es decir, cómo es que con las magnitudes que se identificarán, cada propiedad podrá darse y de qué manera. En el siguiente capítulo se comenzará con el estudio

[15] Cuando a y b son iguales, esta propiedad garantiza la existencia del neutro aditivo.

de la estructura de las líneas rectas que, como se mostrará, será la estructura euclidiana más completa en términos de las propiedades que en ella se satisfacen. Se analizará cómo es que las líneas rectas se pueden operar entre sí, a manera de suma. Se verá de que manera es posible que esta operación cumpla con ciertas propiedades relacionadas con la adición a partir de lo que Euclides propone. Es importante aclarar que en términos euclidianos la construcción geométrica que permitirá llevar a cabo esta suma es aquella que permite concatenar o sustraer segmentos. Sin embargo, existen otras propiedades susceptibles de ser analizadas que se apegan a la geometría de Euclides y que evidentemente no se encuentran en el texto. El siguiente capítulo se ocupará de este estudio.

Capítulo 3

Geometría plana

3.1. La línea recta

Después de haber presentado los fundamentos de la geometría de Euclides es pertinente presentar el primer conjunto a estudiar. En este capítulo veremos cómo es que Euclides aplica las nociones comunes a un objeto geométrico particular. Este procedimiento requiere siempre del auxilio de los primeros tres postulados, lo que da como resultado la constitución de dicho objeto geométrico en una magnitud. El primer paso en esta dirección lo da Euclides con la línea recta. Las construcciones geométricas sobre los objetos geométricos entre sí materializan aquellas operaciones de "poner" y "quitar" de las cuales Euclides habla en sus nociones comunes. Además se verá cómo se comporta dicha operación geométrica y bajo qué condiciones cumple con las propiedades de interés en una estructura. Además se evaluará la posibilidad de una operación más entre los segmentos. Se verá si es posible pensar en una operación de multiplicación entre estos objetos geométricos.

3.1.1. Proceso de definición de segmento

Visión y enfoque de Euclides de la línea recta

Como se ha dicho, la estructura que se estudiará en este capítulo es la de las líneas rectas, pero no a las líneas entendidas bajo la definición explícita que se establece, sino a la línea recta que presenta y utiliza a lo largo de sus proposiciones, la cual ciertamente se deriva de su definición, pero en realidad equivale al concepto de segmento que nosotros conocemos. La definición de Euclides establece lo siguiente:

Definición (I.4). *Una* **línea recta** *es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*

Como se explicó en la sección "*Definiciones*" del capítulo "*Antecedentes*", y de acuerdo con las definiciones aristotélicas, se puede afirmar que en el caso de la línea recta, esta definición constituye la definición nominal y los primeros dos postulados, las partículas que aseguran la existencia de la línea recta. Entonces, se puede concluir que en *Los Elementos* la línea recta equivale a un segmento y este segmento se determina a partir de la existencia de dos puntos.

Euclides define cualquier extremo de algo como su límite[1], por tanto los extremos de un segmento, es decir los puntos que lo determinan, se denominarán sus puntos límite. Además, proporciona la siguiente definición, la cual junto con el primer postulado permitirán establecer una definición adecuada de segmento.

Definición (I.3)**.** *Los **extremos** de una línea son puntos.*

Ahora, de acuerdo con lo anterior, se establecerá en un enunciado lo que sería la definición aristotélica real de línea recta, basada en aquella de línea recta euclidiana como definición nominal y los dos primeros postulados como partícula de existencia.

Definición (I.4')**.** *Un* **segmento** *es aquel que yace por igual respecto de los puntos que están en él, el cual se puede trazar, está determinado por sus dos puntos extremos y se puede prolongar continuamente.*

A lo largo de esta tesis se considerará al conjunto de segmentos de acuerdo a la definición anterior. Este conjunto lo denotaremos como $\mathcal{L}_s$. Los elementos de dicho conjunto se identificarán con una notación basada en sus puntos extremos o únicamente con una letra minúscula, lo que nos da los siguientes dos casos AB o a para el segmento con extremos A y B. Además, a partir de ahora cuando se hable de una línea recta se estará haciendo referencia a los segmentos que se acaban de definir.

3.1.2. Interpretación de la operación en el conjunto de segmentos

Una vez que se ha establecido la definición de línea recta, se presentará el ciclo de proposiciones que permitirán operar con los segmentos. La operación de este conjunto se identificará con la siguiente notación: $+_{\mathcal{L}_s}$, y se extraerá de las primeras tres proposiciones del primer libro del texto euclidiano, las cuales establecen las construcciones necesarias para poderla llevar a cabo. Esta operación se podrá interpretar como la suma de líneas rectas, siempre y cuando las líneas sean concatenadas, es decir colocadas una con otra de manera que se obtenga otra línea recta. Con objeto de facilitar la notación, se denotará $\mathbb{L}$ a ese par ordenado, es decir el conjunto de líneas rectas con la operación binaria de suma, $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_s, +_{\mathcal{L}_s})$.

En *Los Elementos* se puede considerar la adición como la "combinación" de dos o mas "cosas" homólogas y sujeta a la condición de que dos cosas iguales a dos cosas dadas dan resultados iguales. La noción común dos justifica esta expresión, la cual se puede enunciar también de la siguiente manera:

[1]**Definición** (I.13) Un límite es aquello que es extremo de algo.
Hay que notar que para Euclides (Y Aristóteles) el límite es una condición de la línea recta y mediante el segundo postulado se asegura que este límite puede ser llevado "más allá", pero nunca dejar de existir.

$x = y$ y $w = z \rightarrow x + w = y + z$ [10]

Como se ha dicho antes, las primeras tres proposiciones del primer libro de *Los Elementos* son aquellas que permiten presentar la construcción de concatenación de segmentos. En la primera proposición, Euclides muestra cómo construir un triángulo equilátero, el cuál utilizará para llevar a cabo la segunda proposición que plantea el problema de cómo construir un segmento igual a un segmento dado y la tercera cómo sustraer un segmento de otro. Estas dos proposiciones materializan, para el caso de las líneas rectas, los conceptos de añadir y sustraer que las nociones comunes dos y tres plantean para magnitudes en general. Más adelante se verá cómo ambos casos se pueden obtener de dichas proposiciones.

A continuación expondré detalladamente las proposiciones en cuestión, tal y como se encuentran en el primer libro de *Los Elementos*.

Proposición. *(I.1) Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.*

Instanciación. *Sea AB la línea finita dada.*

Construcción.

- *Sea traza la circunferencia BCD con centro en A y radio AB (Post. 3)* [2]
- *Se traza la circunferencia ACE con centro en B y radio BA (Post. 3)*
- *Se trazan las rectas CA y CB (Post. 1)*

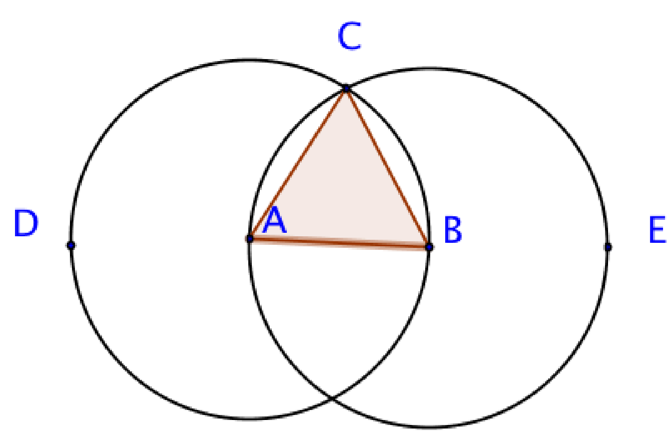

Figura 3.1: Proposición *I.1*

[2]El punto C no ha sido presentado por Euclides previamente, sin embargo se usa para llevar a cabo la construcción. Por esta razón, esta proposición es un ejemplo en el cual el diagrama adjunto a ésta es necesario para poder conocer el origen de ciertos elementos en la construcción, cómo lo es el punto C en este caso. En este capítulo se detallará de manera mas profunda el uso del diagrama euclidiano en la obra.

Demostración.

- El punto A es el centro del círculo CDB, entonces AC es igual a AB. *(Def. 15)* [3]
- El punto B es el centro de la circunferencia ACE, entonces BC es igual a BA. *(Def. 15)*
- Además BA es igual a AB
- Tanto CA como CB son iguales a AB, entonces CA también es igual a CB. Por tanto las tres rectas, CA, AB, BC son iguales entres sí.*(N.C. I)*

□

Esta primera proposición proporciona la construcción de un triángulo equilátero, la cual es necesaria en la siguiente proposición euclidiana.

Proposición. *(I.2) Construir en un punto dado un segmento igual a un segmento dado.*

Instanciación. *Sea A un punto y BC el segmento dado,*

Especificación o definición. *Se requiere construir a partir de A un segmento igual al segmento dado BC.*

Construcción.

1 Desde el punto A al punto B se traza la línea recta AB. [Post. 1]

2 Construir sobre ella el triángulo equilátero DAB [Prop. I.1][4]

3 Se prolongan las rectas AD y BD por los extremos A y B respectivamente. Se toma un punto en cada una de ellas, llamados E y F respectivamente con cualquier distancia desde A y B. [Post. 2]

4 Con centro en B y distancia BC construir la circunferencia dada. Llamamos G a la intersección con BF y H cualquier punto en ella. Así la circunferencia puede ser llamada CGH. [Post. 3]

[3] La definición 15 del texto euclidiando fue presentada en la sección de definiciones de esta tesis

[4] Se observa que la condición de que el triángulo que se construyó sea equilátero no se usa en su totalidad. Esto quiere decir que no es necesaria la condición de que tres lados sean iguales, sino únicamente dos. En el comentario a la obra euclidiana de Al-Nayziri, se encuentra un comentario de Herón donde plantea esta cuestión. Herón se pregunta por qué es que Euclides no construye un triángulo isósceles si en realidad este es el objeto geométrico que necesita en sus construcciones (Cabe mencionar que no aclara en cuales proposiciones sucede pero ciertamente el problema de la Proposición *I.2* es el caso). Como respuesta, Herón sostiene que efectivamente esto no se atribuye a la falta de conocimiento o posibilidad de Euclides de construir un triángulo isósceles, sino afirma que la construcción de un triangulo equilátero es más sencilla y más apropiada para el lector principiante [1, p. 106]

En una lectura cuidadosa se puede observar que no es posible construir un triángulo isósceles dado que Euclides, todavía no sabe copiar un segmento en otro, y el triángulo equilátero no requiere otra magnitud mas que la de la base.

5 Con centro en D y distancia DG construir la circunferencia dada. Llamamos L a la intersección con AE y K cualquier punto en ella. Así, la circunferencia puede ser llamada CKL.[Post. 3]

6 El segmento AL es igual a BC.

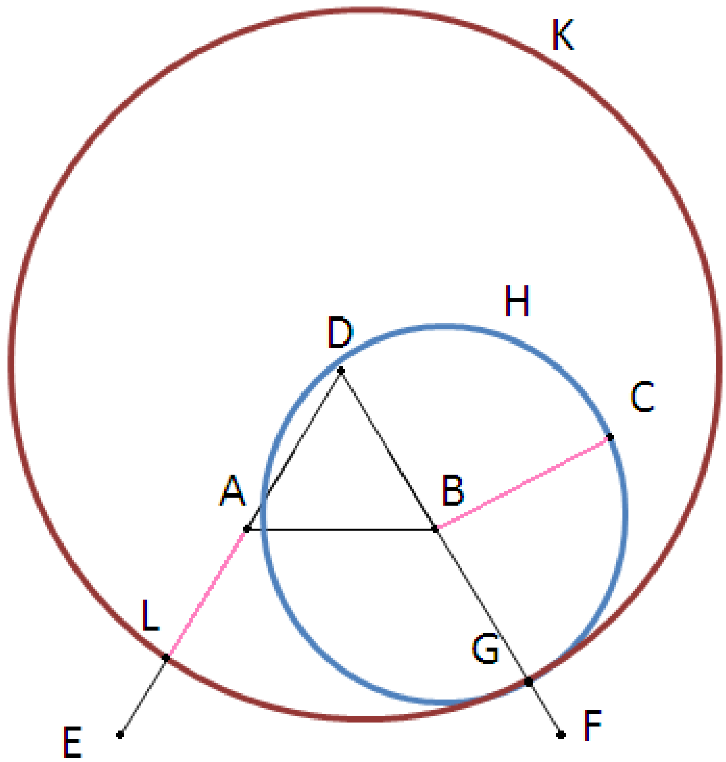

Figura 3.2: Proposición *I.2*

Demostración.

- Como B es el centro del círculo CGH, BC es igual a BG. *[Def. 15]*
- Igualmente como D es el centro de GKL, DL es igual a DG. *[Def. 15]*
- Como DA es igual a DB, entonces AL es igual a BG. *[N.C. 3]*
- Además como BC es igual a BG entonces AL es igual a BC. *[N.C. 1]*

□

Esta proposición es necesaria para la Proposición *I.3*, la cual pide una construcción geométrica que permita quitar un segmento determinado a otro mayor a éste[5]. Sin embargo, dicha construcción se puede interpretar como una operación de sustracción de líneas. La construcción permite

[5]Esto tiene que ver con la propiedad de orden, la cuál se revisará en la siguiente sección. Esta propiedad se basará en *N.C.5*

dos posibilidades no obstante veremos que, un caso sugiere la sustracción, y el otro el cual se planteará también, la suma.

Proposición. *(I.3) Dadas dos líneas rectas no iguales, cortar del segmento mayor el segmento menor.*

Instanciación. *Sean AB, y C_1C_2 los segmentos dados no iguales y sea AB el mayor.*

Especificación o definición. *Entonces se requiere quitar de AB un segmento igual a C_1C_2 el menor.*

Construcción.

- *En el punto A colocar una recta AD igual C_1C_2. [Prop. I.2]*
- *Con centro en A y distancia AD sea la circunferencia descrita DEF. [Post. 3]*

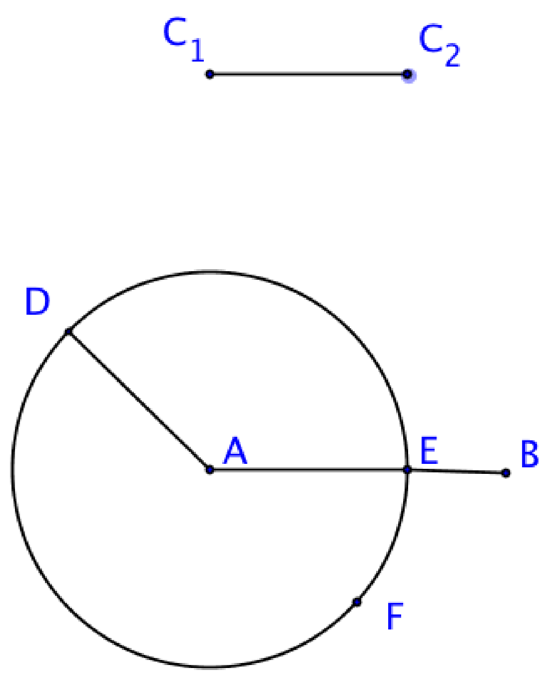

Figura 3.3:

Demostración.

- Ahora, dado que el punto A es centro de la circunferencia DEF, entonces AE es igual a AD. *[Def. 15]*
- Pero también C_1C_2 es igual a AD

- Ahora, dado que tanto la recta AE como C_1C_2 son iguales a AD, entonces AE es igual a C_1C_2. *[N.C. 1]*

- Por tanto, dadas las rectas AB, C_1C_2, de AB la mayor ha sido cortada AE, que es igual a C_1C_2, que es finalmente lo que se había requerido.

$\square$

Se puede observar que la circunferencia construida corta al segmento en un solo punto, pero si mediante el segundo postulado, se prolongara lo suficiente[6] desde el punto A, entonces la circunferencia cortaría en un segundo punto. Este punto se denotará E'[7], al segmento dado y el segmento que se obtiene en este caso, $E'B$ que es la concatenación de AB con el segmento C_1C_2 será interpretado como la suma de estos segmentos. A continuación se expone el diagrama de Euclides original, más el punto nuevo E'; en dicha figura se representan ambos casos con la finalidad de facilitar su visualización. El segmento EB representa el resultado de sustraer AD a AB y el segmento $E'B$ representa la concatenación de los segmentos AD y AB.

[6]La condición de *suficiente*, en el caso la prolongación de un segmento tiene que ver con la interpretación del segundo postulado. Sabemos que este postulado plantea la posibilidad de prolongar un segmento lo que se requiera, sin embargo cuando éste se utiliza en alguna proposición euclidiana no se especifica en realidad cuánto es lo que se tiene que prolongar. En el artículo *Sobre el significado del Postulado 2 de los Elementos* de Abel Lassalle y Marco Panza [8] se plantean dos casos posibles en el uso de este postulado en las proposiciones que lo requieran. Una de las maneras de interpretarlo es considerar algo dado (un segmento o un círculo) que, en el mismo Postulado 2, no es supuesto como dado, con lo cual los autores generan la siguiente regla como interpretación del segundo postulado:

- Si un segmento es dado y puede ser continuado hasta cortar otro segmento o círculo dado, entonces el primer segmento puede ser producido hasta ese segmento o ese círculo.

Y la otra manera sería entender que el Postulado 2 autoriza prolongar un segmento dado en una recta, o, al menos en una semirrecta (entendiendo que las dos sean infinitas): la primera estaría determinada de manera única por el segmento dado; la segunda estaría determinada por el segmento dado y la elección del extremo a partir del cual se prolonga.

[7]Se considera la misma nomenclatura que la que se usa en la Proposición *I.3* solo que usando el signo “ $'$ ”

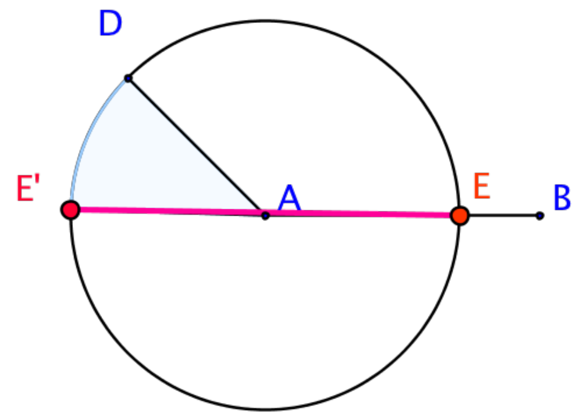

Figura 3.4: Casos para obtener el segmento *concatenación* y el segmento *sustracción*

La suma de segmentos requirió de la existencia de otro punto E', que determinará el segmento concatenado, es éste otro caso en el que el papel del diagrama euclidiano fue de absoluta relevancia. Kenneth Manders en su artículo *The Euclidean Diagram*[9] ha desarrollado una interpretación acerca del diagrama euclidiano que plantea que se pueden concluir, con todo rigor, hechos geométricos a partir del diagrama. Manders sostiene la importancia de éstos a partir de diversos factores. Uno de ellos es la relación necesaria que existe entre el diagrama y la proposición, es decir, existe información de la prueba en el diagrama que no está dada en la proposición.[8] Un ejemplo es el caso de la Proposición *I.10*. El texto no indica que el punto D es la intersección de la línea que bisecta al ángulo y el lado opuesto del triángulo [6, p. 267,-268]. Sin embargo esa intersección se puede corroborar en el diagrama, para Euclides mostrar un diagrama donde se puede ver dicha intersección es una manera de probar su existencia y la posibilidad de ser encontrada. En un sentido parecido a lo que se comentó en la sección de "*Definiciones*" acerca de la definición nominal de algún objeto geométrico y la proposición en donde se llevaba a cabo la construcción del objeto definido, dicha proposición es una especie de prueba de existencia del objeto. De manera análoga, el hecho de que Euclides incluya en sus diagramas objetos para los cuales no probó en la demostración su existencia juega un papel parecido al de las proposiciones de construcción que mencionábamos, es decir, en el diagrama se prueba dicha posibilidad o existencia del punto, línea o objeto en cuestión. Entonces, la figura anterior es un producto de la observación del diagrama, es decir es una modificación del mismo diagrama que Euclides propone.

Es necesario hacer algunas observaciones importantes acerca de la construcción que se acaba

[8]En *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics* (1999), Reviel Netz plantea en su primer capítulo la idea de la dependencia que existe entre la prueba y el diagrama también.

de presentar y sus características como operación. Se sumaron el segmento AB y el segmento C_1C_2. De esta manera el segmento que se desea obtener es la concatenación o adición de los segmentos AB y el segmento C_1C_2. Primero *I.3* requiere copiar uno de los segmentos en el extremo de otro, es decir la proposición *I.2*. Para la construcción que se acaba de hacer, se tomó el segmento AB fijo y el segmento C_1C_2 es el que se copia. Éste es uno de los cuatro casos posibles en dicha construcción. Es decir, esta operación entre segmentos se puede llevar a cabo de 4 maneras diferentes. Los casos existentes se generan dejando un segmento fijo y añadiendo el otro por un extremo o por el otro, o en el otro caso dejando el otro segmento fijo y añadiendo el otro igualmente por la derecha o por la izquierda. Más adelante se verá ésto con mayor detenimiento.

Para hacer ver que esta operación geométrica se puede considerar una operación de suma en el conjunto $\mathcal{L}_s$ sería necesario demostrar que está bien definida. Demostrar que la operación $+_{\mathcal{L}_s}$ está bien definida requiere probar que si se tienen *a*, *a'*, *b* y *b'* segmentos tales que $a = a', b = b'$ entonces si $a +_{\mathcal{L}_s} b = c$ y $a' +_{\mathcal{L}_s} b' = c'$ entonces $c = c'$. En el texto euclidiano esta buena definición de la operación se probaría sencillamente recurriendo a la noción común 2, la cuál nos aseguraría que si sumamos iguales a iguales los resultados obtenidos (los todos) son iguales. Por tanto esta construcción puede ahora ser definida como la suma de los segmentos en $\mathcal{L}_s$ de la siguiente manera:

Definición. *Sean dos segmentos s_1, s_2 en el conjunto $\mathcal{L}_s$, tal que s_1 tiene como extremos a los puntos C_1 y C_2 y s_2 a los puntos A y B. Se define como la* ***suma*** *de éstos al segmento E'B construido mediante la Proposición I.2 y la Proposición I.3 como se mostró en la figura anterior 3.3. Donde E' es el punto de intersección entre la prolongación del segmento AB y la circunferencia con centro en A y radio C_1C_2*

Finalmente, se puede decir que en el texto euclidiano esta operación ha sido establecida muy pronto, es decir a partir de pocos elementos es posible plantear una proposición que permita interpretar una operación para esta estructura. Los elementos que se han empleado en esta proposición son lo siguientes: postulados I, II y III, nociones comunes 1, 2 y 3, y la definición de circunferencia. Cada uno de estos elementos se refiere únicamente a líneas rectas o circunferencias. Esto quiere decir que para esta estructura, la suma de segmentos se da independiente a cualquier otro elemento de la geometría del libro I, ya sean ángulos, triángulos o figuras planas. En particular la suma de segmentos es independiente de los teoremas de congruencia para triángulos[9] como se puede apreciar. Esto es importante dado que en la estructuras que se verán después estas condiciones no se dan siempre.

Una vez que se ha propuesto una construcción que puede funcionar como una operación entre las líneas rectas, es pertinente preguntarse qué propiedades algebraicas cumple esta operación. La siguiente sección esta dedicada a desarrollar el estudio de las líneas rectas con su operación como estructura.

[9]Los teoremas de congruencia para triángulos se encuentran establecidos en las proposiciones I.4, I.8, I.26

3.1.3. La línea recta como estructura y sus propiedades

En las secciones anteriores se estableció la definición de un segmento en la obra de Euclides y se presentó una operación que se puede definir entre estos elementos. Ahora, cabe preguntarse qué cosa, además de la operación recién presentada, es lo que hace que a estos segmentos se les pueda considerar como una estructura. Ésto tiene que ver con la igualdad de estos segmentos y más adelante se destinará un apartado a esta relación. Sin embargo, se introducirá el concepto ya que tiene que ver justamente con cómo es que se conforma dicha estructura.

El hecho de que dos líneas rectas sean iguales no implica que éstas sean la misma. Esta relación de igualdad es una relación de equivalencia para los segmentos y de esta manera éstos son identificados. Y es justamente al conjunto de clases de equivalencia al que se le ha asociado una operación y sobre el cual se analizarán la propiedades formales de una estructura algebraica.

La estructura $\mathcal{L}_s$ junto con la operación suma es una estructura reconocible en la obra de Euclides y cumple con ciertas propiedades de conjuntos con operación. Éstas fueron presentadas en la sección anterior para poder analizar si podrán ser identificadas para el conjunto $\mathcal{L}_s$ en la obra de Euclides.

¿Es $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_s, +_{\mathcal{L}_s})$ un conjunto linealmente ordenado?

Con respecto a esta propiedad Euclides plantea la *N.C.5*. Con esta noción común Euclides tiene un parámetro para determinar cuándo un segmento es menor que otro y cuándo es mayor, donde el menor es aquel que *es parte* de otro. En base a la *N.C.5* se puede definir bajo la óptica euclidiana la relación *menor que* de la siguiente manera:

Definición. *Sean $a, b \in \mathcal{L}_s$, se dice que a es **menor que** b si a es parte de b o si hay una parte a' en b tal que $a = a'$. La relación menor que se denotará de la siguiente manera: $<_{\mathcal{L}_s}$*

La primera proposición de *Los Elementos* en la que esta relación se utiliza es la siguiente:

Proposición. *(I.6) Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces los lados opuestos a los ángulos iguales también son iguales uno al otro.*

Instanciación. *Sea ABC el triángulo tal que su ángulo ABC es igual al ángulo ACB.*

Especificación o definición. *El lado AB es igual al lado AC*

Construcción.

1 AB no es igual a AC, entonces uno de los dos es mayor.

2 Sea AB el mayor. Y sea DB igual al menor AC cortado del mayor AB [Prop. I.3]

3 Se traza la recta DC [Post. I].

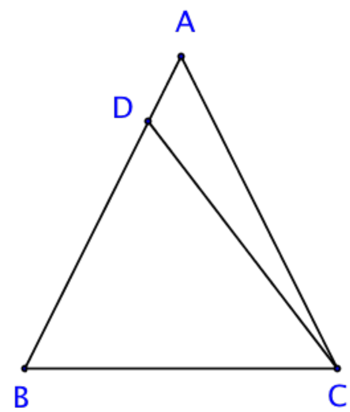

Figura 3.5:

Demostración.

- Así, como DB es igual a AC y BC es común, los dos lados DB y BC son iguales a los lados AC y CB respectivamente. El ángulo DBC es igual a ACB.
- Entonces la base DC es igual a la base AB, y el triángulo DCB sera igual al triángulo ACB [*Prop. I.4*] el menor al mayor.
- Por la *N.C.5* [y por la observación en el diagrama] eso es absurdo.
- Por lo tanto AB no es desigual a AC.
- Por lo tanto es igual.

□

Conclusión. *Por lo tanto si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces los lados son iguales respectivamente.*

Veamos a continuación que la relación $<_{\mathcal{L}_s}$ define un orden lineal en $\mathcal{L}_s$. [10]
Sean $s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{L}_s$

[10] Recordemos la definición de linealmente ordenado:

Definición. *Un conjunto S es* ***linealmente ordenado*** *si cumple las siguientes condiciones:*

Sean $s_1, s_2, s_3 \in S$

1 Si $s_1 \neq s_2 \Rightarrow s_1 < s_2$ ó $s_2 < s_1$

2 Si $s_1 < s_2 \Rightarrow s_1 \neq s_2$

3 Si $s_1 < s_2$ y $s_2 < s_3 \Rightarrow s_1 < s_3$

1 Sea $s_1 \neq_{\mathcal{L}_s} s_2$[11]

P.D. $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$ *o* $s_2 <_{\mathcal{L}_s} s_1$

Demostración.

- Como $s_1 \neq_{\mathcal{L}_s} s_2$, entonces s_1 no coincide con s_2 [*N.C. 4*].
- Si no coincide esto quiere decir que o una parte de s_1 no coincide con s_2 o una parte de s_2 no coincide con s_1.
- Sin pérdida de generalidad supongamos que una parte de s_2 no coincide con s_1
- Entonces toda parte de s_1 coincide con s_2. Por lo tanto $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$ [*N.C.5*].

□

2 Sea $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$

P.D. $s_1 \neq_{\mathcal{L}_s} s_2$

Demostración.

- Como $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$, entonces s_1 es parte de s_2[*Def.* $<_{\mathcal{L}_s}$]
- Como s_1 es parte de s_2, entonces s_1 y s_2 no pueden coincidir dado que por lo menos un punto límite de s_2 no está en s_1
- Por lo tanto $s_1 \neq_{\mathcal{L}_s} s_2$

□

3 Sea $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$ y $s_2 <_{\mathcal{L}_s} s_3$

P.D. $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_3$

Demostración.

- Supongamos que no es cierto que $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_3$, esto implica que o $s_1 = s_3$ o $s_1 >_{\mathcal{L}_s} s_3$. Veamos ambos casos:
  - I Si $s_1 >_{\mathcal{L}_s} s_3$, entonces s_3 es parte de s_1, pero s_1 es parte de s_2, por lo tanto s_3 es parte de s_2.
    Dado que $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_2$, entonces s_1 es parte de s_2 y $s_2 <_{\mathcal{L}_s} s_3$ entonces s_3 es parte de s_2, lo cual es absurdo. No se puede que un segmento sea parte de un segmento y el otro también. Por lo tanto $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_3$.
  - II Si $s_1 = s_3$, entonces $s_3 <_{\mathcal{L}_s} s_2$, lo cual es absurdo. Por hipótesis $s_2 <_{\mathcal{L}_s} s_3$. Por lo tanto $s_1 <_{\mathcal{L}_s} s_3$

□

[11]La relación $\neq_{\mathcal{L}_s}$ se definió a partir de N.C.4. Dos segmentos son desiguales si no coinciden, es decir, si uno es parte del otro.

Inverso y neutro aditivo

La propiedad que debería de cumplir un elemento para ser inverso aditivo de otro elemento en $\mathcal{L}_s$ sería la siguiente:

$\forall\ s \in \mathcal{L}_s$, $\exists s'$ tal que $s' +_{\mathcal{L}_s} s = s_0$

s_0 es un elemento neutro aditivo que se definirá en seguida. Por otro lado, la operación $+_{\mathcal{L}_s}$ define una operación de concatenar. Por lo cual, debería de haber para cada segmento del conjunto un elemento que concatenado con éste diera como resultado el segmento neutro s_0. Esto en realidad no es posible en el sentido estricto de concatenar mediante una construcción geométrica dos elementos. Sin embargo, como se vió anteriormente, Euclides introduce la Proposición *I.3* que fue presentada de manera detallada en la sección dedicada a la operación de suma entre segmentos. Es justamente mediante esta construcción que se podrá definir tanto el inverso de un segmento, como el neutro aditivo.

Esta proposición sugiere tres casos distintos. Dados dos segmentos AB y C_1C_2 tales que $C_1C_2 <_{\mathcal{L}_s} AB$, Euclides muestra cómo encontrar un punto C en el segmento AB tal que CB sea igual al segmento menor, lo cual se ha dicho que es equivalente a una operación de sustracción. Euclides condiciona que un segmento sea mayor a otro. Éste sería el primer caso, además de éste, existen otros dos casos, uno en el que los segmentos son iguales y otro en el que se quita el mayor del menor. En el caso en el que estos fueran iguales, el punto E (véase la figura siguiente), intersección de la circunferencia con el segmento mayor AB hubiera coincidido con B extremo del segmento y se tendría el caso del segmento neutro s_0, el cuál sería un elemento ideal y no un segmento. Este segmento nulo de acuerdo con la definición de segmento de Hilbert tendría que ser formado por dos puntos que yacieran en el mismo lugar y que definieran un espacio nulo entre ellos.[12]

Esto se podría si se pensara que dos puntos en el espacio que yacen en el mismo lugar pudieran ser diferentes. Obtendríamos un s_0 en cada caso de rectas que operáramos, de esta manera se generaría el conjunto que formaría la clase de equivalencia del neutro aditivo de $<_{\mathcal{L}_s}$.

En este caso el diagrama vuelve a cobrar absoluta relevancia y es mediante éste que se puede ver cómo se comportan ambos casos. Cuando se quiere quitar un segmento mayor a uno menor se obtiene un nuevo punto que determina un segmento dirigido en sentido contrario. A continuación, se anexa el diagrama de la Proposición *I.3* con ciertas anotaciones y modificaciones para mostrar cómo se puede tener un segmento con dirección contraria cuando se resta el mayor al menor. En la figura, lo que se está haciendo es sustraer el segmento C_1C_2, que es mayor, al segmento AB. Éste se copió en el extremo B y se obtuvieron dos posibilidades, el segmento BE y el segmento

[12] La definición de segmento que Hilbert proporciona es la siguiente [7, p. 4]:

Definición. *Se entenderá por el sistema de dos puntos A y B en una línea recta como segmento y se denotará como AB o BA. A los puntos que yacen entre A y B se les llamará puntos del segmento AB o puntos que yacen en el segmento AB. Todos los otros puntos son puntos que yacen afuera del segmento AB.*

$E'A$ el cuál tiene sentido contrario a todos los demás.

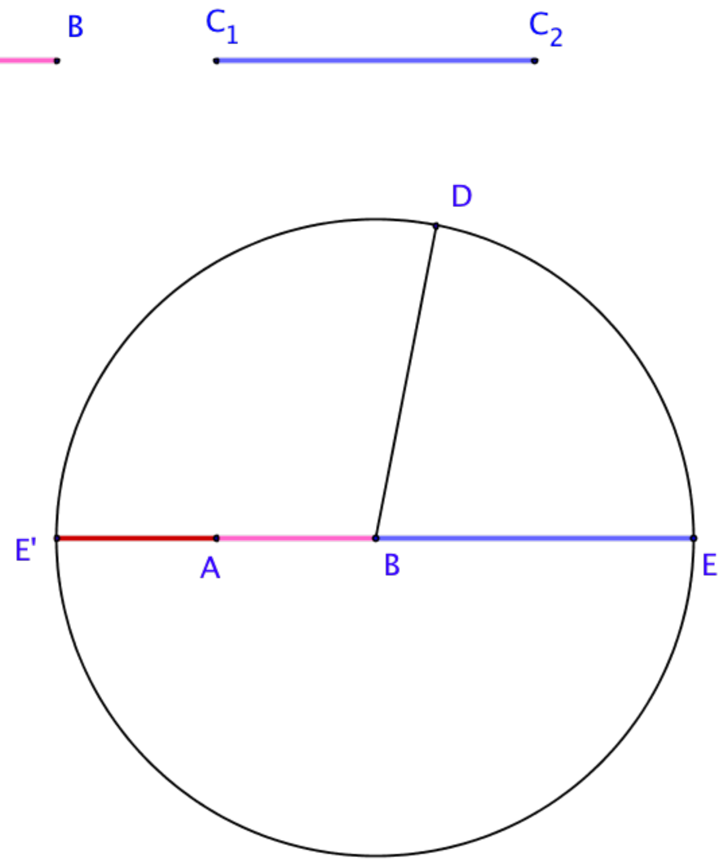

Figura 3.6: Segmentos dirigidos

Sin embargo, Euclides no considera ese caso porque no conoce un elemento neutro y porque para él la importancia de esta proposición recae únicamente en el hecho de poder, efectivamente, quitar *partes* para obtener un segmento menor. La idea tal cual de una estructura que tenga elementos inversos no es concebida ni buscada por el autor. Por lo tanto, no es que en el texto exista tal cual un segmento inverso aditivo, sino que existe un procedimiento que proporciona la posibilidad de sustraer partes de segmentos a otros, dándole así una posible interpretación de segmentos dirigidos.

Propiedad de cerradura

La propiedad de cerradura establece que si a cualesquiera dos elementos del conjunto se les aplica la operación en cuestión, entonces el elemento resultante también forma parte del conjunto. Interpretando esta propiedad geométricamente, la concatenación de dos segmentos cualesquiera deberá de ser un segmento. Esto quiere decir que si se toman dos segmentos de manera arbitraria y se concatenan, lo que se obtiene es otro segmento.

Demostrar ésto es sencillo basándose únicamente en la definición de segmento de la primera sección de este capítulo y en la definición de suma, que se basa en las proposiciones *I.2* y *I.3*

Demostración. ($Cerradura$) Sea AD la concatenación del segmento AB con el segmento BC. Sin pérdida de generalidad, el segmento que se copiará a uno de los puntos del segmento AB será BC. [13] Sin pérdida de generalidad se ha copiado en punto B y la circunferencia en B de radio D' se intersecta en D. Entonces por hipótesis AB es un segmento y AB fue prolongado y D yace en esa recta. Por lo tanto, A y D son puntos en un recta que delimitan una parte de la recta. Por lo tanto AD es un segmento. □

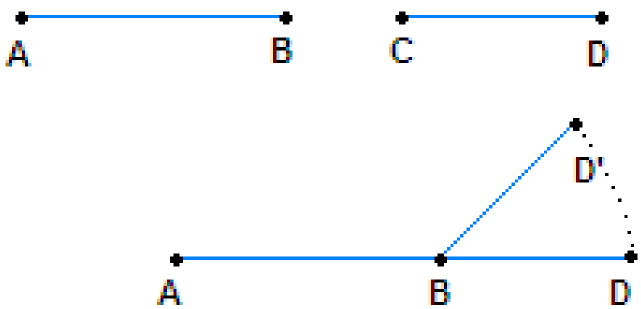

Figura 3.7: Cerradura

La suma de cualquier segmento con el segmento s_0 no se puede definir geométricamente como se hizo para los otros segmentos. El motivo de esto es que no se puede copiar un segmento a ese punto (s_0) y después prolongar una recta desde s_0 ya que, por haber únicamente uno punto, no existe recta alguna. En el otro caso, es decir el de copiar s_0 a uno de los puntos del segmento al que quiere ser sumado no tiene ningún sentido ya que no se puede crear una circunferencia, nuevamente, con un punto únicamente y sin una recta.

Lo anterior es similar al caso de la suma de vectores cuando se interpreta geométricamente. La suma de vectores con el vector cero no se interpreta geométricamente como la suma de dos vectores cualesquiera, es decir, como la diagonal del paralelogramo que forman, sino que geométricamente el vector resultante es el mismo vector. De la misma manera se establece que la suma de cualquier segmento con el segmento s_0 es el mismo segmento. Es decir, se axiomatiza la existencia de un elemento neutro en el conjunto $\mathcal{L}_s$, sin embargo éste no existe en *Los Elementos*.

[13] El hecho de copiar el segmento a uno de los puntos arbitrariamente tiene que ver con la propiedad de conmutatividad que será la que se analizará en el siguiente punto

Propiedad conmutativa

La conmutatividad de la suma de segmentos es una propiedad que involucra varios aspectos muy importantes. El primero, como se dijo anteriormente, es que está completamente relacionada con la propia definición de la operación de suma. Es decir, en la construcción de la proposición de suma de segmentos, la conmutatividad da lugar a cuatro casos distintos que se verán en seguida. Esto implica que la definición de la operación depende igualmente de la validez de la conmutatividad. Si la conmutatividad no fuera válida, esto implicaría que las sumas por la derecha y por la izquierda fueran distintas. Estos cuatro casos en la construcción, generan un segmento que representa la suma entre a y b, donde a es el segmento cuyos extremos son A y B y b es el segmento cuyos extremos son C y D[14]. A continuación se muestran estos casos y de qué manera la definición de la operación depende de la validez de la propiedad de conmutatividad.

Sean a y b los segmentos con los cuales se requiere obtener la suma $a+b$. La Proposición *I.2* sugiere la existencia los siguientes casos:

1 El segmento a fijo y el segmento b se copia a la izquierda del segmento a.

2 El segmento a fijo y el segmento b se copia a la derecha del segmento a.

3 El segmento b fijo y el segmento a se copia a la izquierda del segmento b. (El caso construido anteriormente)

4 El segmento b fijo y el segmento a se copia a la derecha del segmento b.

A continuación se desarrolla cada caso.

1 Para copiar el segmento b a la izquierda del segmento a es necesario que la construcción comience uniendo, sin perdida de generalidad, cualquiera de los dos puntos extremos del segmento CD con A dado que es el punto que se encuentra del lado izquierdo y por construcción el segmento se copiará en este punto.

[14]Además A y C son los puntos extremos del lado izquierdo y B y D son los puntos del lado derecho

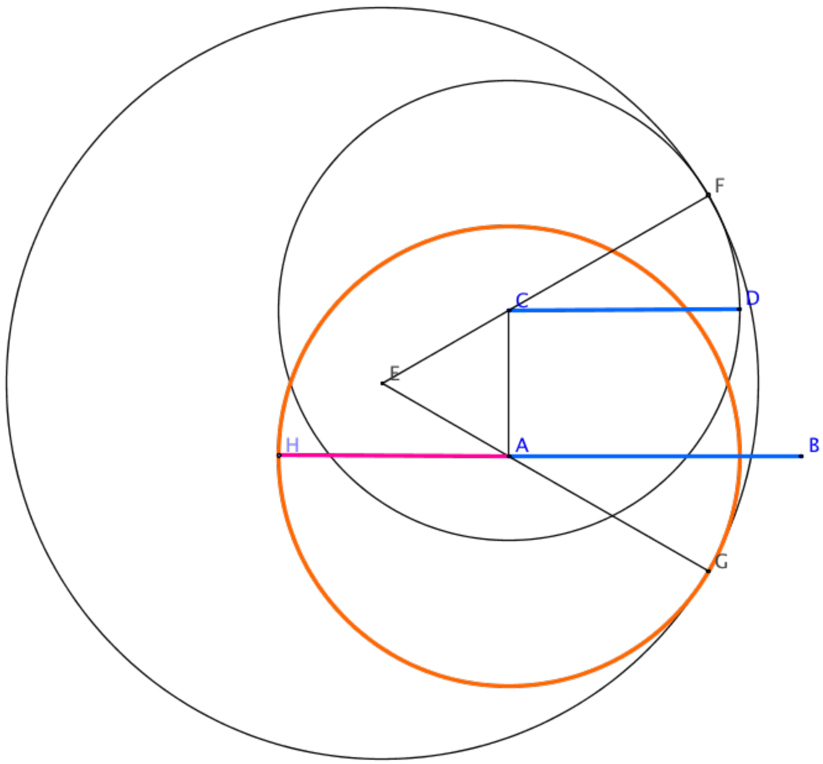

Figura 3.8: Suma con resultado $b + a$ con a fijo

2 Para copiar el segmento b a la derecha del segmento a es necesario que la construcción comience uniendo sin perdida de generalidad, cualquiera de los dos puntos extremos del segmento CD con B dado que es el punto que se encuentra del lado derecho y por construcción el segmento se copiará en este punto.

3 Para copiar el segmento a a la izquierda del segmento b es necesario que la construcción comience uniendo sin perdida de generalidad, cualquiera de los dos puntos extremos del segmento AB con C dado que es el punto que se encuentra del lado izquierdo y por construcción el segmento se copiará en este punto. Este es el caso de la Proposición *I.2* que se presentó en la sección 3.2, en donde el lector puede revisar la figura respectiva.

4 Para copiar el segmento a a la derecha del segmento b es necesario que la construcción comience uniendo sin perdida de generalidad, cualquiera de los dos puntos extremos del segmento AB con D dado que es el punto que se encuentra del lado derecho por construcción el segmento se copiará en este punto.

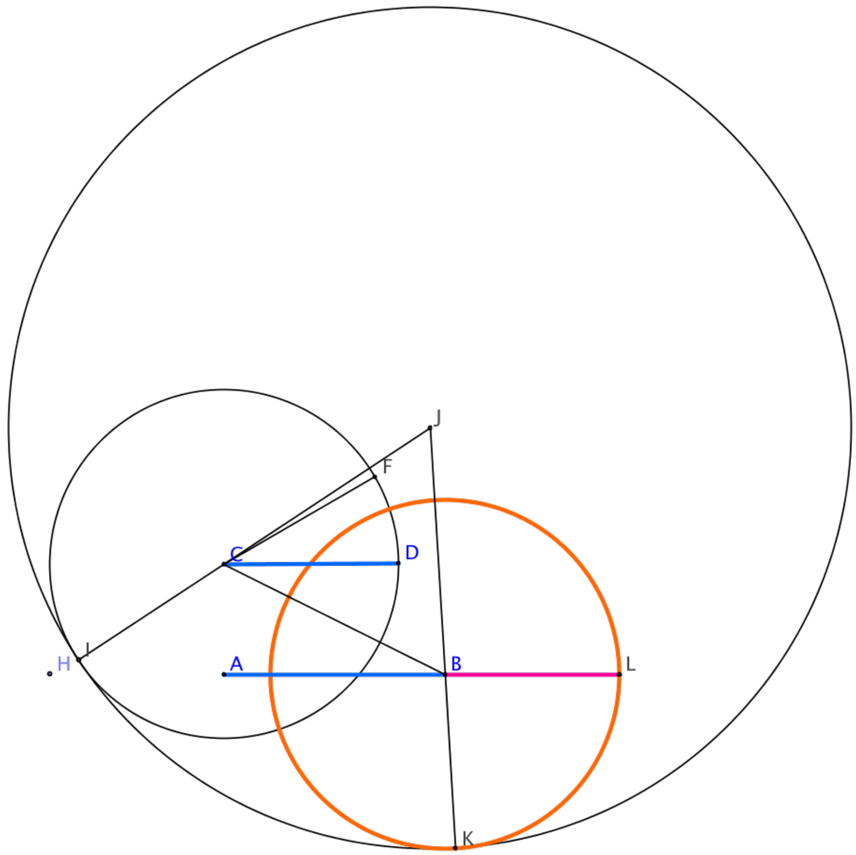

Figura 3.9: Suma con resultado $a + b$ con a fijo

Es importante observar que aunque estas cuatro construcciones son distintas, en realidad se puede garantizar que los cuatro segmentos obtenidos son iguales.

Se puede garantizar que los casos anteriores son iguales. Por *N.C.2* se tiene que sumar iguales a iguales, da como resultado iguales. Es decir los casos 1 y 2 y, los casos 3 y 4 son iguales respectivamente (esto se demostró, cuando se probó que la suma de segmentos estaba bien definida). Esto se debe a que se está realizando el mismo procedimiento, es decir, el de copiar b en a, en cualquiera de los dos extremos. Como $a = a$ y $b = b$, entonces $a + b = a + b$.

Entonces el caso que se debe de demostrar para probar la conmutatividad es el siguiente. Si $a \neq b$ no es lo mismo copiar a en b, a copiar b en a y como a y b no son iguales y, si además se toman las ecuaciones que plantea Ian Muller para representar *N.C.2*, éstas dicen:

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$, en este caso $a \neq b$ entonces $a + b = b + a$ es justo el caso que se debe probar en la conmutatividad. Es decir, copiar a a b debe de ser lo mismo que copiar b a a.

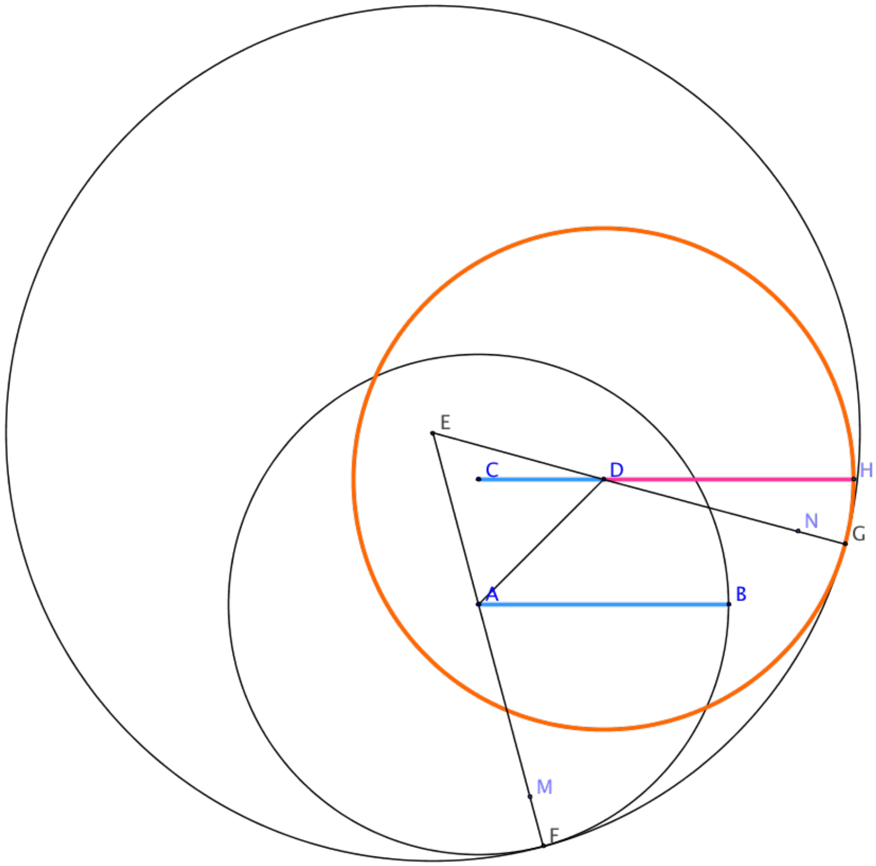

Figura 3.10: Suma con resultado $b + a$ con b fijo

Demostrar ese caso se hace de la siguiente manera: Sea a el segmento AB

1 Se copia b en el extremo B el segmento a. Y denominemos C el otro extremo de b.

2 En a se traza la circunferencia de radio b

3 Se prolonga el segmento b hasta la circunferencia. Sea D la intersección de la prolongación del segmento y la circunferencia. Sea b' el segmento CD.

4 Se copia el segmento a en el extremo D de b'. Denominemos a' a dicho segmento. Sea E su otro extremo.

5 Se traza la circunferencia de radio $a + b$ con centro en C.

6 Esta circunferencia corta el segmento en el punto A (dado que el radio es igual a $a + b$) y llamemos E' al otro punto.

P.D. $E' = E$

1 Sabemos que $a + b = b' + a''$ porque son radios de la misma circunferencia.

2 Pero $a = a'$ por construcción así como $b = b'$

3 Entonces por la noción común 2, $a + b = b' + a'$ entonces $a + b = b' + a''$. De esta manera, dado que estos dos segmentos son iguales, entonces $E = E'$

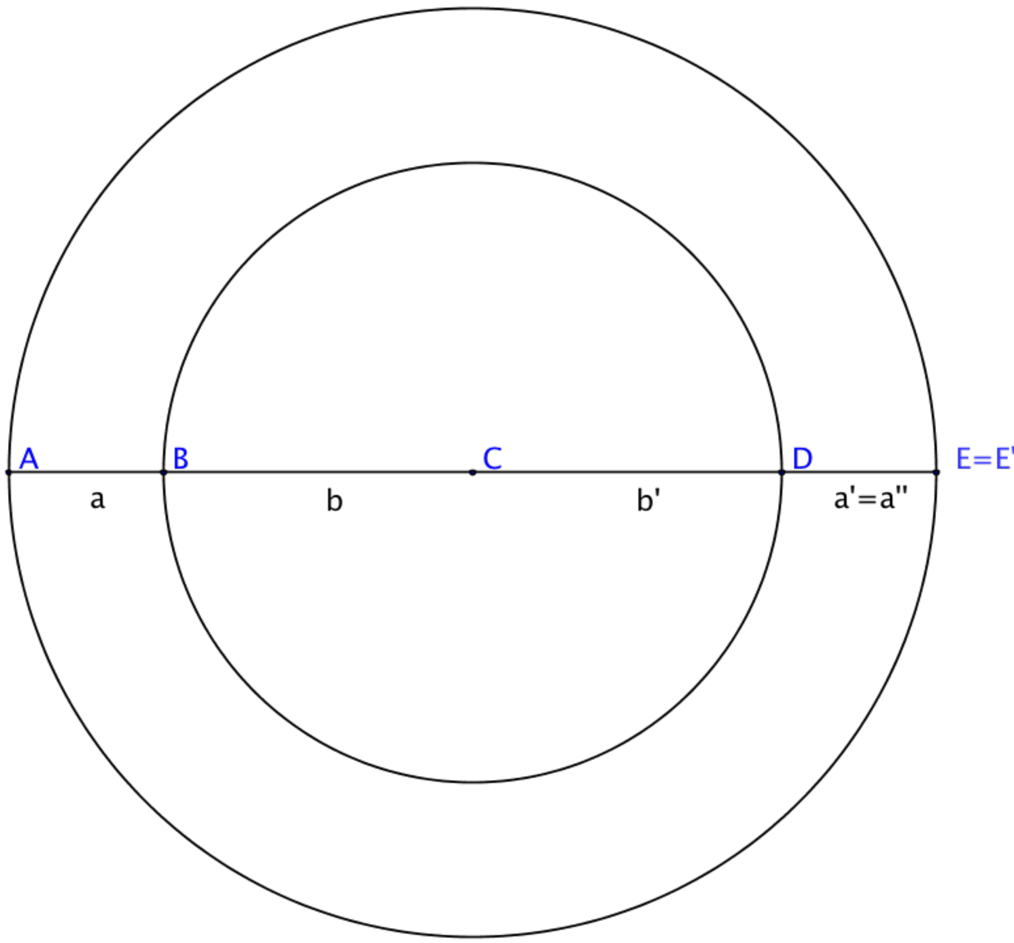

Figura 3.11:

Propiedad asociativa

En *Los Elementos* Euclides no demuestra la propiedad asociativa ni la sugiere en alguna noción común, sin embargo se puede demostrar. En esta sección se analizarán las condiciones bajo las cuales la asociatividad se puede considerar válida en $\mathcal{L}_s$. Demostrar la asociatividad de la suma $+_{\mathcal{L}_s}$ implicaría que si $a, b, c \in \mathcal{L}_s$ entonces:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A continuación se da una demostración de esta propiedad, la cual se obtiene a partir de proposiciones euclidianas, sin embargo esta demostración no fue proporcionada por Euclides. La razón por la cuál la demostración de esta propiedad no es parte de *Los Elementos* es por lo que se ha comentado anteriormente acerca del conocimiento de estructuras con operaciones. Evidentemente una demostración así era conocida, sin embargo el significado, en el contexto que se está planteando no.

P.D. $(a+b)+c = a+(b+c)$

Se denotara a los segmentos sumados de la siguiente manera:

- $m = (a+b)$
- $n = b+c$

De esta manera es necesario demostrar que:

- $m + c = a + n$

Construcción.

1 *Sea el segmento OP', tal que que a=OP', copiado en el extremo O del segmento OP que es igual a m. (Prop. I.2)*

2 *Sea el segmento c sumado a OP, en el extremo P, obteniendo así el segmento PQ*

3 *Y sea el segmento n sumado a O'P', en el extremo P', obteniendo el segmento P'Q', como se puede ver en el diagrama. (Prop. I.2)*

4 *Sean Q y Q' unidos obteniendo el triángulo de lados $m+c$ y $a+n$ con ángulo cualquiera entre estos. (Post.II)*

5 *Se toma OA en el segmento OP tal que OA sea igual al segmento a.*

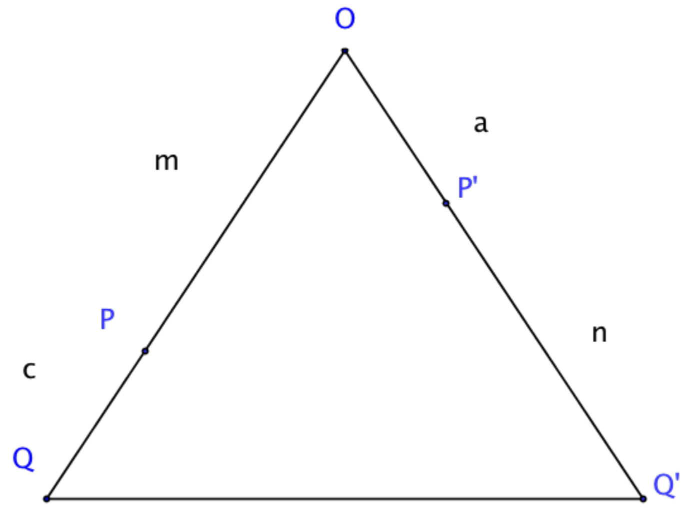

Figura 3.12:

Demostración.

- Como OA es igual a OP', entonces el triángulo OAP' es isósceles y por lo tanto los ángulos OAP' y $OP'A$ son iguales (*Prop. I.5*)[15]

- Se traza una recta paralela a AP' en P (*Prop. I.31*). Sea C el punto de intersección de esta recta paralela con OQ'.

- Entonces los ángulos OPC y OCP son iguales a OAP' y $OP'A$ respectivamente.

- Por lo tanto el ángulo OPC es isósceles y los lados OP y OC son iguales.

- Entonces como $a + b = OP' + P'C$, entonces $P'C = b$ y como $n = b + c$ entonces $CQ' = c$.

- Por lo tanto $(a + b) + c = m + c = a + P'C + c = a + b + c = a + n = a + (b + c)$

$\square$

15

Proposición. *(I.5) En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se prolongan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.*

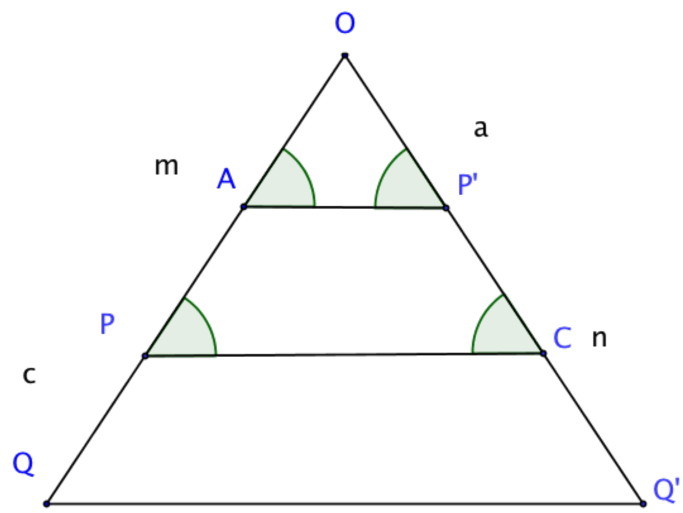

Figura 3.13:

La demostración que se propuso requirió de la proposición *I.5* que involucra propiedades de triángulos y la necesidad del primer teorema de congruencia. Estas serían las condiciones de la propiedad de asociatividad si se hace uso de la demostración que se propuso.

Finalmente se han revisado cada una de las propiedades en cuestión, además de sus limitaciones y condiciones. Ahora se puede comenzar la siguiente sección en donde analizaremos la posibilidad de la operación de multiplicación en el conjunto $\mathcal{L}_s$.

3.1.4. Análisis general sobre la operación de multiplicación en el conjunto $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_s, +_{\mathcal{L}_s})$

Hasta ahora lo que se hizo fue revisar el conjunto de rectas en el contexto euclidiano, junto con la operación suma que se definió sobre éste. A continuación de manera general se presentará la operación de multiplicación.

En *Los Elementos* Euclides no plantea nada parecido a la multiplicación de segmentos como operación cerrada. La única especie de multiplicación que existe entre segmentos es no cerrada. Esta operación entre dos rectas da como resultado una figura plana. Sin embargo, esa multiplicación entre segmentos no es la adecuada para considerarla en el conjunto de segmentos dado que el producto es una figura rectilínea y no un segmento, es decir la operación no es cerrada. Esta multiplicación de segmentos no es explícita en la obra de Euclides, sino que se puede interpretar de las proposiciones cuando Euclides denota un rectángulo y se refiere a este como el rectángulo *contenido* por dos rectas. Esto quiere decir que existe una asociación de estas dos rectas con la figura rectangular. Sin embargo, no existe proposición alguna que muestre como llevar a cabo esta operación, es decir, cómo a partir de dos rectas cualesquiera obtener (construir) un rectángulo.

Ahora, con respecto a la operación cerrada entre segmentos, existe una construcción en la obra de Euclides la cual con ciertas especificaciones podría ser la construcción equivalente al producto de dos segmentos. A continuación se presenta la proposición que propone dicha construcción y su demostración euclidiana, con la finalidad de analizar cómo es que dicha proposición podría fungir como una construcción para encontrar el producto de dos segmentos.

Proposición. *(VI.12) Dadas tres rectas encontrar una cuarta proporcional.*[16]

Instanciación. *Sean A, B y C las tres líneas dadas, entonces se quiere encontrar una cuarta proporcional a A, B y C.*

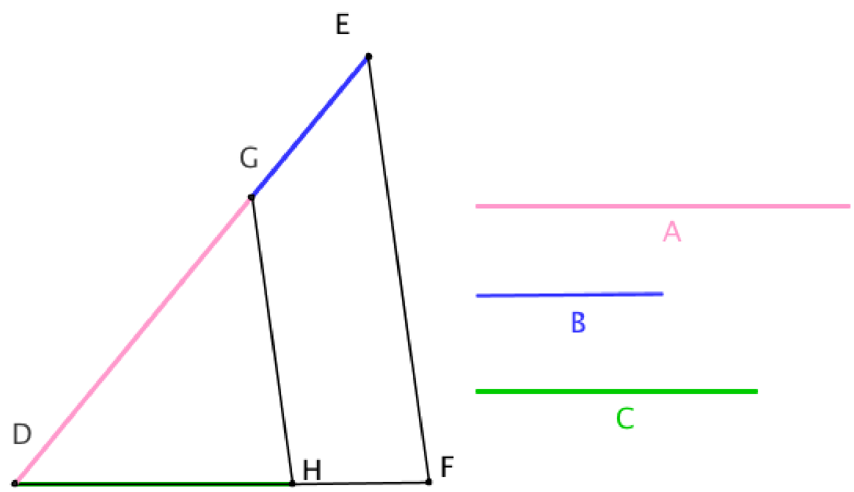

Figura 3.14: Cuarta proporcional

Construcción.

- *Sean DE, DF dos rectas dispuestas de manera que contienen al ángulo EDF*
- *Sea DG construido igual a A, GE igual a B y DH igual a C*
- *Sea el segmento GH trazado y sea EF construido paralelo a GH a través de E [Prop. I.31]*

[16]La proporcionalidad de la que se habla en esta proposición se basa en aquella establecida en las siguientes definiciones euclidianas del libro quinto de *Los Elementos*.

Definición. *(V.3) Una razón es una relación determinada entre dos magnitudes homogéneas respecto a su tamaño.*

Definición. *(V.6). Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

Demostración.

- Dado que GH ha sido construido paralelo a EF que es uno de los lados del triángulo DEF, entonces, dado DG es proporcional a GE entonces DH también es proporcional a HF.[*Prop. VI.2*]
- Pero DG es igual a A, GE a B y DH a C, entonces como A es a B, C es a HF

Conclusión. *Por lo tanto para las tres rectas A, B y C la cuarta proporcional HF fue encontrada.*

□

La proposición anterior muestra un método para encontrar la cuarta proporcional a tres segmentos a partir de teoría de paralelas. En particular, para la resolución de este problema geométrico, Euclides recurre a las siguientes dos proposiciones:

Proposición. *(I.31) Construcción de una recta paralela a una dada por un punto dado.*

Proposición. *(VI.2) Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.*

Ambas proposiciones dependen del quinto postulado, por lo cuál se podría decir que en el caso de que esta construcción permitiera encontrar el producto de dos segmentos, ésta dependería del quinto postulado euclidiano, a diferencia de la operación de suma que se presentó en este capítulo.

Ahora, de la Proposición VI.12 se podría obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{x}$$

donde x sería la cuarta proporcional buscada.

De donde se define la siguiente operación:

$$xA = BC$$

En el caso en el que $A = u$, donde u es un segmento unitario, entonces se podría obtener el producto $x = BC$. Euclides no lo plantea de esta manera, ni trabaja un segmento unitario, por lo que se puede decir explícitamente que no existe la multiplicación entre segmentos en el texto euclidiano.[17][18] Sin embargo, bajo las condiciones explicadas, dicha construcción permitiría una

[17]Descartes introduce esta construcción de multiplicación en el primer libro de *La Geometrie* [5, p. 2]. Esto es muy interesante dado que Descartes dice explícitamente que la idea de introducir un segmento unitario es tratar de asemejar el conjunto de las líneas rectas al de los números, esto con la finalidad de resolver problemas a partir de su descomposición en construcciones que requieran únicamente rectas y sus operaciones entre ellas (suma, resta, multiplicación y división)

[18]Los números del libro VII de *Los Elementos* cumplen con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división por lo que es natural preguntarse porque dicha multiplicación no se puede usar para el caso de los

operación de multiplicación entre segmentos.

Es natural preguntarse por qué es que no se considerará pertinente añadir la operación de multiplicación al conjunto $\mathcal{L}_s$ y conocer cuál es el criterio para añadir propiedades u operaciones a la estructura de los segmentos. En esta sección se han dado a conocer las condiciones que la operación de multiplicación requiere. El quinto postulado, la definiciones de *proporcionalidad* y de *razón* y la existencia de un elemento unitario son las condiciones teóricas necesarias para que esta operación se pueda considerar. Sin embargo, no se considera propio añadir un elemento unitario dado que para Euclides no es posible determinar un segmento constante. No existe ninguna construcción que lo pueda determinar como lo hace para el caso de los ángulos rectos. Como se vera más adelante, el ángulo recto sí puede establecerse como una constante mediante el cuarto postulado y la definición de ángulo recto. Ésto quiere decir que para Euclides es necesario probar rigurosamente la existencia de una magnitud constante, en el caso de que esta exista. Para el caso del segmento unitario eso no es posible. Cómo se pudo observar en secciones anteriores, el neutro aditivo s_0 y el inverso aditivo para cada segmento fueron añadidos sin dificultad dado que fueron extraídos de los diagramas euclidianos.

Se ha visto que, en el caso de contar con un segmento unitario, la construcción para encontrar una cuarta proporcional se puede utilizar para encontrar un producto entre segmentos. Sin embargo, existe una construcción euclidiana que permite encontrar para un segmento $s \in \mathcal{L}_s$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{Q}$, tal que $\lambda < 1$, el segmento λs sin la necesidad de un segmento unitario. Esta construcción junto con la proposición *I.2* nos permite hacerlo para los racionales en general y no únicamente para aquellos menores a uno. Lo que se tendría que hacer, dado $\lambda = \frac{p}{q}$ es encontrar el racional s/q y posteriormente copiarlo p veces. Esto garantiza que $\mathcal{L}_s$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. A continuación se presenta dicha proposición euclidiana:

Proposición (*VI.9*). *Restar de una recta dada la parte que se pida.*

Instanciación. *Sea AB el segmento dado, entonces se requiere cortar de éste una parte determinada. Sea esta parte determinada la tercera parte.*

Construcción.

- *Sea la línea recta AC trazada a través de A conteniendo con AB cualquier ángulo.*
- *Sea D un punto cualquiera en AC y sean DE y EC construidos iguales a AC [Prop. I.3]*
- *Sea BC unido y a través de D sea DF trazado paralelo a éste. [Prop. I.31]*

segmentos. El problema se encuentra en la unidad utilizada para éstos. Esta unidad no puede ser la unidad geométrica, es decir, no se podría utilizar para los segmentos porque no podría servir para todos, si fuera así, esto implicaría que los todos segmentos fuera conmensurables. Un ejemplo es la diagonal de un cuadrado donde uno de los lados fuera la unidad seleccionada. Se sabe que la diagonal entonces sería un segmento inconmensurable con respecto a uno de los lados, para dicha unidad.

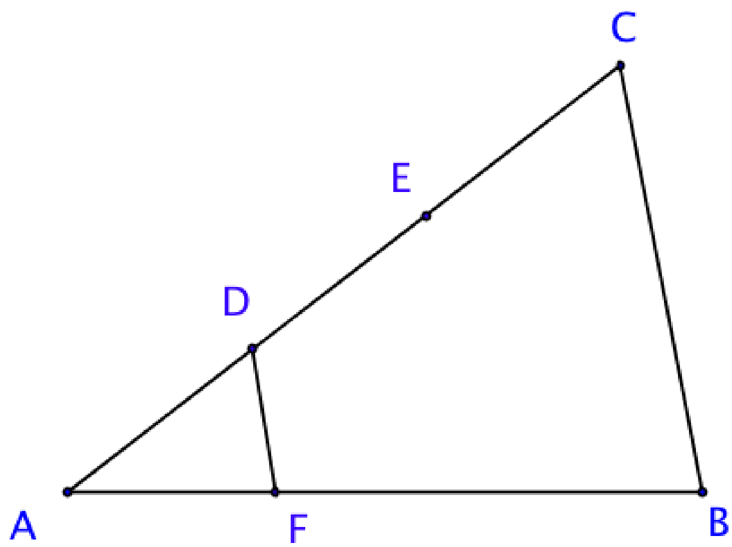

Figura 3.15:

Demostración.

- Dado que FD ha sido trazado paralelo a BC y es uno de los lados del triángulo ABC, entonces proporcionalmente CD es a DA como BF a FA. [*Prop. VI.2*]

- Pero CD es el doble de DA, entonces BF es también el doble de FA; así BA es el triple de AF.

- Por lo tanto, de la línea recta AB fue cortada la tercera parte.

$\square$

Esta proposición plantea el caso particular de la tercera parte aunque en realidad se puede hacer para cualquier número natural. Como acabamos de mencionar esta proposición sirve para racionales menores a uno y si se quisiera tomar los racionales mayores a uno entonces se debería copiar el segmento obtenido mediante la Proposición *I.2* la veces necesarias que lo indique el numerador del racional $\frac{p}{q}$. Como se pudo observar, se requiere del conocimiento de teoría de semejanza para poder dividir el segmento en una parte racional y para poder concluir que $\mathcal{L}_s$ es un espacio vectorial. En la siguiente sección se presentarán las conclusiones pertinentes en relación a la estructura de las líneas rectas.

3.1.5. Conclusiones sobre $\mathbb{L} = (\mathcal{L}_s, +_{\mathcal{L}_s})$

En las secciones anteriores se presentó el conjunto $\mathcal{L}_s$ a partir de la definición de línea recta euclidiana y la operación $+_{\mathcal{L}_s}$ basada en la Proposición *I.3.* De este conjunto se puede concluir lo siguiente. Se revisará de manera breve el conjunto $\mathcal{L}_s$. Solo se pudo asociar al conjunto en cuestión una operación, la de suma, en este sentido el conjunto no puede ser un anillo. La operación suma cumple con las propiedades de cerradura, asociatividad y por definición de la operación, la conmutatividad. El neutro aditivo y el inverso aditivo no se encuentran en *Los Elementos*, sin embargo se vió que pueden ser interpretados mediante algunas proposiciones y sus diagramas. Dado que $\mathcal{L}_s$ cumple con las propiedades de **cerradura**, **asociatividad** y **conmutatividad**, tiene un **elemento neutro** y un **inverso**, entonces es un grupo abeliano. Finalmente como se vió en la sección anterior, $\mathcal{L}_s$ es un espacio vectorial sobre los racionales.

3.2. El ángulo rectilíneo plano

Hasta ahora lo que se ha hecho ha sido un estudio de las líneas rectas euclidianas. Como se explicó en la introducción, otro de los conjuntos que se quiere estudiar es el de los ángulos planos. Esta sección será dedicada al estudio de dicho objeto geométrico. Lo que se hará primero será una investigación de la definición de ángulo, su estatuto en este primer libro de Euclides y el manejo que el autor da a dicho objeto. Después se presentará la construcción que permitirá sumar a los ángulos. Y posteriormente se revisará qué propiedades puede cumplir el conjunto de los ángulos a partir de las nociones comunes y los postulados euclidianos. Veremos además si es posible complementar dicha estructura con algunas otras propiedades que no se encuentren explícitamente en la obra, pero que puedan ser interpretadas o deducidas a partir de éstas.

En este primer libro existe un ciclo de proposiciones que nos permitirá generar y completar la estructura que conforman los ángulos. La proposición con la que comienza dicho ciclo es la Proposición *I.4*, que es el primer criterio de congruencia de triángulos y la proposición con la que culmina es la Proposición *I.23* la cual permitirá al autor hacer una concatenación de ángulos. La concatenación de ángulos será la construcción geométrica que se podrá interpretar como una operación en el conjunto de los ángulos.

Este ciclo de proposiciones plantea teoremas y construcciones que tratan al ángulo y al triángulo de manera independiente, así como proposiciones que se enfocan en la relación que existe entre los ángulos y los lados de un triángulo. Por esta razón, será necesario introducir simultáneamente el trabajo euclidiano sobre los triángulos y los ángulos. El ciclo que comienza con *I.4* y que manifiesta claramente el medio a través del cual se va a desarrollar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo a partir de *I.5* da sentido pleno a lo que, en otra lectura del texto euclidiano, se suele llamar la “geometría del triángulo”. En el estudio de estas proposiciones existe la necesidad del conocimiento de la teoría de triángulos para poder definir la operación de concatenación de ángulos. Esta necesidad se confirma también al observar el orden de aparición de las proposiciones que conforman tal ciclo. El autor debe hacer en primera instancia un análisis profundo del triángulo. Recordemos el comentario que se hizo de la independencia en la operación entre líneas rectas de otros elementos geométricos, en el caso de la concatenación de ángulos dicha independencia no prevalece, será necesaria la teoría del triángulo entendido como configuración geométrica.

Para sintetizar, lo que se hará en esta sección es presentar el ciclo de proposiciones *I.4- I.23* no con el ánimo de repetir o exponer lo que Euclides hizo, sino de hacer las observaciones y comentarios pertinentes que ayuden a comprender cómo es que está conformada la estructura de los ángulos que Euclides plantea. Y con el fin de que el lector pueda notar la gran diferencia que existe con respecto a la estructura de los segmentos, en cuanto a la cantidad de proposiciones necesarias para que las proposiciones que permiten operar con los objetos geométricos sean finalmente presentadas. Como se vió en el caso de los segmentos, Euclides requirió únicamente de dos proposiciones antes de mostrar la operación de adición, en el caso de los ángulos planos se requerirán mucho más proposiciones.

3.2.1. Definiciones de ángulo y triángulo euclidianas

El ángulo

Para comenzar con el análisis del conjunto de ángulos se presenta a continuación la definición de ángulo establecida por Euclides en su libro I.

Definición (I.9). *Un* ***ángulo rectilíneo*** *es la inclinación mutua de dos líneas que se intersectan una a otra en un plano y no yacen en una línea recta.*

La definición de línea recta que Euclides establece contempla líneas rectas finitas (segmentos) las cuales, mediante el segundo postulado, pueden ser prolongadas tanto como se requiera. Por lo que se puede interpretar que la inclinación a la que se refiere la definición es aquella entre segmentos.

A lo largo de la obra euclidiana el ángulo se presenta de dos maneras diferentes. A continuación se explicarán y ejemplificarán ambos casos:

- El ángulo en el triángulo

  En la mayoría de las proposiciones el ángulo se encuentra como parte de la configuración de un triángulo. En este caso, con respecto a la notación, se identifican tres letras mayúsculas como los vértices del triángulo o como los puntos que determinan el ángulo de manera abstracta si se pensara como un elemento independiente del triángulo sin distinción alguna.

  Un ejemplo de este caso se encuentra en la Proposición *I.5*, presentada como ejemplo en el capítulo de *Antecedentes* donde los ángulos en cuestión son ángulos internos del triángulo isósceles al que se refiere el teorema. Como se puede ver en la figura siguiente, la cual presenta Euclides para esta proposición, los ángulos en cuestión ABC y ACB son dos de los ángulos internos del triángulo ABC

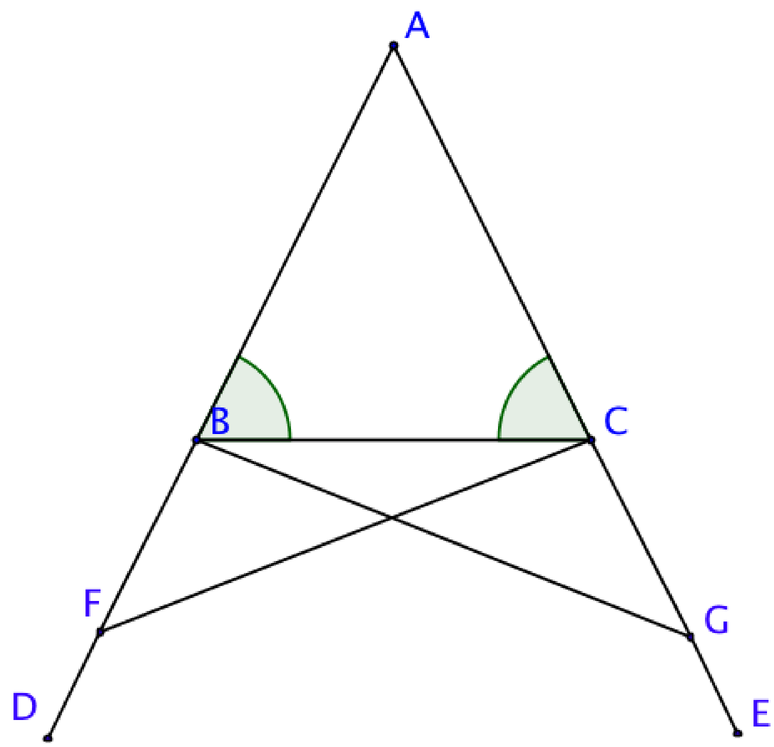

Figura 3.16: Diagrama de la Proposición I.5

- El ángulo independiente del triángulo

La otra manera de cómo se presenta un ángulo en *Los Elementos* es independiente de la existencia de un triángulo. La notación vuelve a ser la misma, tres letras mayúsculas donde la segunda letra es aquella que representa el vértice del ángulo y las otras dos denotan puntos en las rectas que forman el ángulo.
Un ejemplo de este caso es la siguiente proposición:

Proposición. *(I.15) Dos segmentos que se cortan el uno al otro producen ángulos opuestos iguales.*

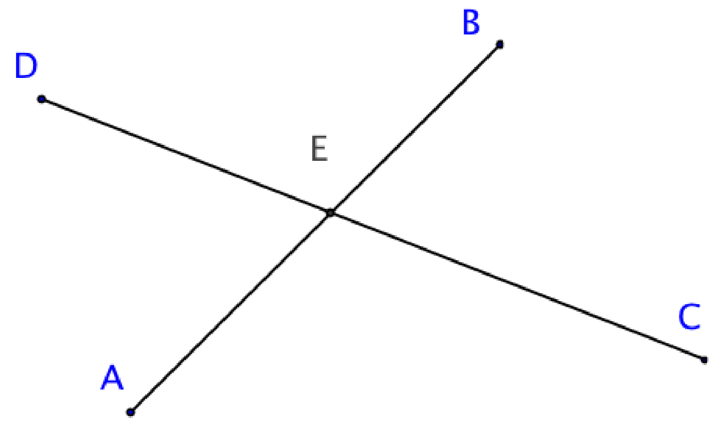

Figura 3.17: Diagrama Proposición I.15

El triángulo

La definición euclidiana para triángulo se encuentra también en las definiciones otorgadas por Euclides al inicio de su primer libro.

Definición (I.19). *Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por segmentos,* ***triláteras****, aquellas comprendidas por tres, cuadriláteras aquellas comprendidas por cuatro y multiláteras, aquellas comprendidas por más de cuatro segmentos*

Nota. *Esta definición es una definición generalizada. Evidentemente el caso de interés es únicamente el trilátero.*

Igualdad y relación de magnitud entre ángulos

En las siguientes secciones se tratarán proposiciones que consideran la noción de igualdad y desigualdad entre ángulos. En la sección de *Propiedades algebraicas en Los Elementos de Euclides* del capítulo anterior se discutió el tema del *concepto de igualdad* en la obra de Euclides, donde se dijo que no existe en realidad algo que planteara cuándo dos ángulos son iguales, sino que se tiene *N.C.4* con lo que se establecería que dos ángulos son iguales si estos coinciden y apegándose a la definición de ángulo, no existirá entonces un criterio real mediante el cuál se pueda determinar cuándo dos de ellos son iguales mas que la superposición, es decir mediante los criterios de congruencia para triángulos.

Para determinar cuándo es que un ángulo es mayor a otro, análogamente a las líneas rectas, se tiene únicamente *N.C.5* donde se sabe que un ángulo es menor a otro si es parte de éste.

Entonces, lo que se hará al respecto de estas dos nociones será únicamente apegarse al pensamiento y manejo que Euclides da a estos dos conceptos donde se puede decir que la observación de las figuras es fundamental. Es decir, para determinar si un ángulo es menor a otro la herramienta con la que se cuenta es la figura y la comparación mediante la superposición.

3.2.2. Antecedentes necesarios para la definición general de la suma de ángulos

Una vez que se conocen las definiciones euclidianas de triángulo y ángulo, se presentarán todas aquellas proposiciones que se requieren para culminar con la concatenación de ángulos en la Proposición *I.23*. Se revisarán las proposiciones anteriores a ésta por grupos, los cuales requerirán de algunos comentarios.

Antes de comenzar se presenta, mediante la siguiente figura, cómo es que las proposiciones estudiadas están relacionadas deductivamente, es decir cuál de ellas depende directamente de cual (en el sentido de si es o no usada en la prueba).[19]

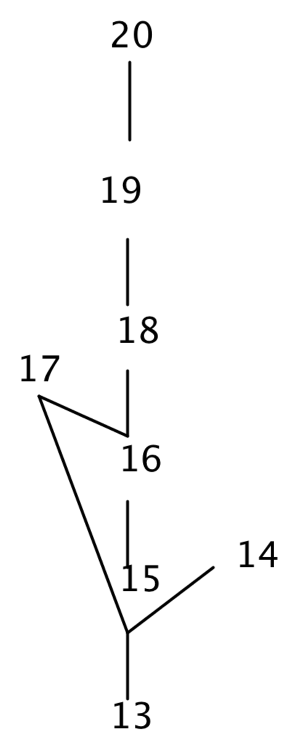

Figura 3.18: Árbol deductivo *I.13-I.20*

[19]Es interesante señalar que bajo la óptica deductiva de las proposiciones de *Los Elementos* existen cadenas que involucran a las proposiciones en el sentido de cuál de ellas es utilizada por Euclides en cual. En la obra de Ian Mueller se presenta la figura 3.18 que relaciona algunas de las proposiciones de nuestro interés de manera deductiva.[10]

El ciclo comienza con la Proposición *I.4* que es uno de los criterios de congruencia para triángulos. Dentro de dicho ciclo se encuentra la Proposición *I.8* que también es otro criterio de congruencia y por último el tercer criterio en la Proposición *I.26* que no es parte del ciclo que se está analizando.[20]

Este grupo de proposiciones euclidianas I.4, I.8 y I.26 es aquel que determinará un triángulo. Estas proposiciones descomponen al triángulo en sus partes, y más adelante se establecerán algunas otras proposiciones, que lo que harán más bien será examinar cómo es que dichas partes se vinculan entre sí, esto es lo que se conoce como un *análisis* [21] que para este caso particular es del triángulo. A continuación se presentan las proposiciones mencionadas:

Criterios de congruencia de triángulos

Proposición (*I.4*)**.** *Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales y tienen los ángulos comprendidos iguales, también tendrán las bases iguales y los triángulos serán iguales, y los ángulos restantes serán iguales, concretamente los opuestos a los lados iguales.*

Proposición (*I.8*)**.** *Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales y también tienen la base igual, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales.*

Proposición (*I.26*)**.** *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivos iguales y uno de los lados, el que une los dos ángulos iguales o el opuesto a uno de los ángulos iguales, entonces los lados que quedan son iguales y el ángulo restante es igual.*

Estos criterios de congruencia de triángulos se conocen de la siguiente manera respectivamente:

- lado-ángulo-lado
- lado-lado-lado
- ángulo-lado-ángulo o ángulo-ángulo-lado.

Lo que quieren decir estas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo es que si se tienen cualesquiera tres de las seis magnitudes de un triángulo, de las cuales por lo menos una sea un lado, entonces éste está determinado. Lo anterior entonces define claramente qué magnitudes son las necesarias para determinar un triángulo de manera única.

Para llevar a cabo la concatenación de ángulos se necesita específicamente el segundo teorema de congruencia. Con respecto a los otros dos teoremas, el primero por ejemplo es necesario

[20] Posteriormente se explicará cuáles son las posibles razones por las cuales el tercer criterio de congruencia se encuentra mucho después y para qué se necesita.

[21] Michael Beaney en su artículo *Analysis* de The Stanford Encyclopedia of Philosophy presenta las diferentes ideas y concepciones del *análisis* a lo largo de la historia. Sin embargo expone que una de las maneras mas amplias de entenderlo es como la *descomposición* o separación en las formas mas fundamentales para que algo pueda ser explicado o reconstruido. A esta reconstrucción se le conoce como síntesis. [4]

para poder demostrar la proposición *I.5* que a su vez es necesaria para llevar a cabo la *I.7* [22], que es finalmente la que permite la demostración del segundo teorema de congruencia (*I.8*). Con respecto al tercer teorema de congruencia *I.26*, como se dijo anteriormente, no es parte de el ciclo de proposiciones que se está presentando, sin embargo, tiene un papel fundamental en las condiciones que se requieren para la operación con las figuras planas que se verá más adelante.

Las proposiciones *I.9* y *I.10* nos enseñan a bisectar tanto los ángulos como los segmentos. La Proposición *I.9*, la cual muestra específicamente cómo bisectar un ángulo, es en realidad la única proposición euclidiana que trata algo acerca del problema de la sección angular.

Euclides presenta las siguientes construcciones debido a su interés específico en la construcción del ángulo recto. Estas construcciones de ángulo recto se encuentran en las proposiciones euclidianas *I.11* y *I.12*, enunciadas de la siguiente manera:

Proposición. *(I.11) Trazar una recta perpendicular a un segmento dado desde un punto del mismo segmento.*

Proposición. *(I.12) Trazar una recta que forme un ángulo recto con una recta por un punto exterior a ella.*

Estas proposiciones determinan no sólo un ángulo recto, sino dos de ellos. Estos casos, a diferencia de otras proposiciones acerca de ángulos, son interesantes dado que el ángulo no está dado, sino que se requiere construirlo y lo que es más interesante es que se trata de dos ángulos en particular determinados por la constante de dos ángulos rectos. Dicha constante, como ángulo, es el único que Euclides tiene la posibilidad de proporcionar mediante una construcción debido a la definición de ángulo recto.[23] Es importante recordar que para el caso de los segmentos esto no es posible, es decir, no existe ninguna construcción geométrica que pueda construir una representación de un segmento único constante.[24]

Una vez que Euclides cuenta tanto con la definición de ángulo recto como con estas dos últimas proposiciones, presenta las siguientes dos proposiciones:

Proposición. *(I.13) Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos ángulos rectos o bien dos ángulos iguales a dos ángulos rectos.*

Proposición. *(I.14) Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado de ella, ambas rectas estarán en línea recta.*

[22]**Proposición**[I.7] No se podrán levantar sobre la misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas

[23]La definición de ángulo recto se encuentra en el capítulo de *Antecedentes* de esta tesis.

[24]El lector recordará que ésta es una de las razones fundamentales por las cuales el segmento unitario no se puede introducir en la estructura de las líneas rectas y que a su vez imposibilita la introducción del producto entre segmentos.

Con estas proposiciones, interpretadas con respecto a la lectura planteada de la obra de Euclides, el autor presenta por primera vez cómo se ve el objeto geométrico que representa el doble del ángulo recto. Este objeto, como lo dice la proposición, es una línea recta y no un ángulo bajo la definición de Euclides. Con respecto a este objeto cabe la pregunta de si debería o no ser un ángulo. Posteriormente en el análisis de las propiedades de esta estructura se abordará esta cuestión.

La Proposición *I.15*, que establece que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, aparentemente la necesita Euclides sólo para demostrar el teorema del ángulo externo (*I.16*), pero para el enfoque de esta tesis será de absoluta importancia para definir específicamente qué magnitudes son las esenciales cuando hablamos de un ángulo en la obra euclidiana.

Con respecto a la Proposición *I.16* existen muchos comentarios interesantes y pertinentes a nuestro trabajo. Desarrollaré a continuación esta proposición:

Proposición. *(I.16) En un triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los dos ángulos internos opuestos.*

Instanciación. *Sea el triángulo ABC y sea un lado de éste BC, hasta D.*

Especificación o definición. *Entonces el ángulo exterior ACD es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos CBA y BAC.*

Construcción.

- *Sea AC bisectado en E [Prop. I.10]*
- *Sea BE unido y prolongado en línea recta hasta F*
- *Sea EF hecho igual a BE [Prop. I.3]*
- *Sea FC unido [Post. 1]*
- *Y sea AC trazado en G [Post. 2]*

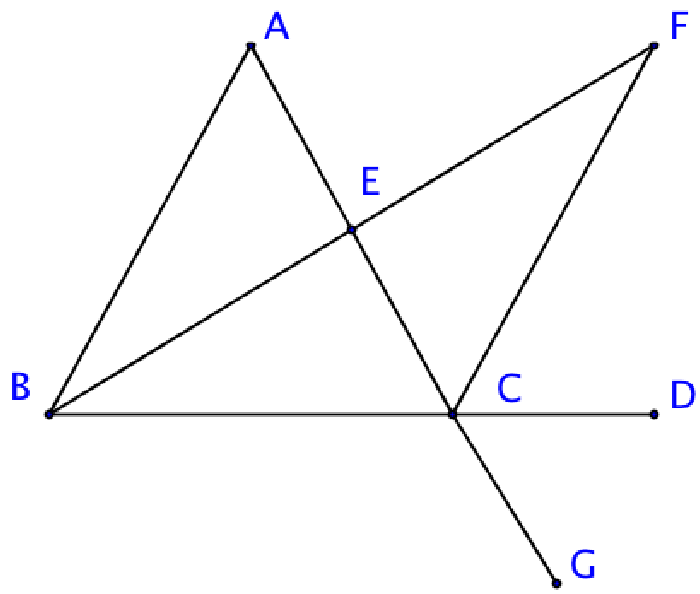

Figura 3.19: Proposición I.16

Demostración.

- Dado que AE es igual a EC y BE a EF, los dos lados AE y EB son iguales a los dos lados CE y EF respectivamente

- Y el ángulo AEB es igual a el ángulo FEC, dado que son ángulos opuestos [Prop. I.15]

- Por lo tanto la base AB es igual a la base FC, y el triángulo ABE es igual al triángulo CEF

- Y los ángulo restantes son iguales a los ángulos restantes respectivos, específicamente aquellos que los lados iguales subtienden. [Prop. I.4]

- Por lo tanto el ángulo BAE es igual al ángulo ECF

- Pero el ángulo ECD es mayor al ángulo ECF [C. N. 5]

- Entonces el ángulo ACD es mayor al ángulo BAE. Análogamente, si BC es bisectada, el ángulo BCG eso es, el ángulo ACD ACD [Prop. I.15], de la misma manera puede ser probado mayor al ángulo ABC

□

La proposición que sigue en el ciclo es la *I.17* que dice lo siguiente:

Proposición. *(I.17) En cualquier triángulo la suma de cualquiera de los dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.*

Esta proposición, nuevamente, considera el doble del ángulo recto. Con esto se puede decir que Euclides tiene presente el hecho de que esta constante tiene una importancia fundamental en el entendimiento del conjunto de los ángulos. Mediante esta proposición el autor define una cota determinada en la suma de los ángulos de un triángulo.[25]

Antes de revisar las siguientes dos proposiciones, *I.18* y *I.19* se recordarán algunos detalles de las proposiciones *I.5* y *I.6* . Estas proposiciones, son inversa una de la otra y plantean una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Establecen específicamente el caso en el que dos lados del triángulo son iguales y prueba que entonces los ángulos que los subtienden también lo son y viceversa. Estas proposiciones sugieren plantear y pensar en un caso generalizado, es decir cómo es que están relacionados los lados y los ángulos de un triángulo en general y qué relación guarda un ángulo con el lado opuesto cuando el ángulo crece o decrece. La respuesta a esta pregunta la resuelve Euclides en las proposiciones *I.18* y *I.19*, las cuales también son inversas. Estas proposiciones afirman que existe una relación entre la magnitud de los lados del triángulo y la magnitud de sus ángulos. Cabe preguntarse por qué es que Euclides no presenta directamente estas dos proposiciones después de la Proposición *I.6* y la respuesta es que se necesita conocer el ángulo recto, que como se vió en el diagrama deductivo, no es que Euclides utilice las proposiciones *I.12* o *I.13* en las pruebas de *I.18* y *I.19* pero necesita del teorema del ángulo externo que a su vez requiere de la proposición que prueba que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, la cual es finalmente la proposición que se prueba con *I.13*.

A continuación enunciaremos las proposiciones *I.18* y *I.19*.

Proposición. *(I.18) En cualquier triángulo el ángulo más grande es el opuesto al lado mayor.*

Proposición. *(I.19) En cualquier triángulo el lado más grande es el opuesto al ángulo mayor.*

En la obra de Euclides las proposiciones construyen un "edificio teórico" en el sentido de que la mayoría de ellas existen para dar lugar a otras que pueden ser teoremas o construcciones importantes. Sin embargo algunas de ellas lo que hacen es contribuir a establecer límites en la

[25] Es importante señalar que hasta ahora se ha hablado de ángulos "sumados" en varias proposiciones, sin que ésta haya sido definida aún. Ésto no es un problema ya que los ángulos de los que ha hablado Euclides en estas proposiciones están ya concatenados, es decir, no tiene que construir uno junto al otro, que es justamente lo que hará en la proposición *I.23*

validez de teoremas o condiciones de cuándo algún problema tiene solución. Estas proposiciones se conocen como *diorismas*[26]. La siguiente proposición *(I.20)*, que es el teorema de la desigualdad del triángulo, es el diorisma que Euclides venía preparando desde la proposición *I.13*. *I.20* es una condición necesaria y no es parte del edificio teórico tal cual, de hecho no la utiliza. Pero como veremos en las proposiciones siguientes Euclides sí necesita construir un triángulo y para poder hacerlo es necesario que primero esclarezca a su lector cuándo es posible dicha construcción, es decir qué condiciones deben de cumplir tres segmentos para que estos puedan ser los lados de un triángulo. Es evidente que la prueba de este diorisma no es tarea sencilla, esto se puede ver en el árbol deductivo de las proposiciones *I.13* a *I.20* presentado anteriormente.

Proposición. *(I.20) (Desigualdad del triángulo) En cualquier triángulo la suma de cualesquiera de los dos lados es mayor que el tercero.*

La siguiente proposición es un teorema que Euclides no vuelve a utilizar sino hasta la proposición 8 del libro 3. Según Mueller [10], el hecho de que esta proposición se encuentre en este lugar específico dentro de la obra puede ser por su dependencia de *I.20*. Sin embargo, en esta lectura de *Los Elementos* esta proposición es muy interesante.

Proposición. *(I.21) Si de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos segmentos que se intersecten dentro del triángulo, entonces la suma de los lados construidos es menor a la suma de los otros dos lados del triángulo, pero los segmentos construidos comprenderán un ángulo mayor que el comprendido por los dos lados del triángulo.*

En seguida se presenta la figura del diagrama que se encuentra en esta proposición euclidiana con el fin de que el lector la pueda visualizar con mayor facilidad. El triángulo del que habla la proposición es el denotado ABC y los segmentos BD y DC son aquellos que se indica construir.

[26]El término diorisma es utilizado para definir dos conceptos diferentes. Por un lado, como se vió en la sección de **Proposiciones** de esta tesis, la palabra griega que designa a lo que se tradujo como la especificación o definición es justamente $\delta\iota o\rho\iota\sigma\mu \acute{o}\varsigma$ (Diorismos) que es una de las partes de la proposición euclidiana. Por el otro lado diorisma es el tipo de proposición que acabamos de describir.

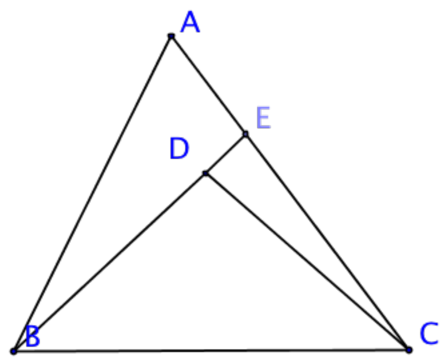

Figura 3.20: Diagrama de la Proposición I.21

La Proposición *I.21* es una variación de la desigualdad del triángulo. Euclides plantea el análisis de dos lados de un triángulo con respecto al tercero. Además establece la relación que existe entre los ángulos de dichos triángulos.

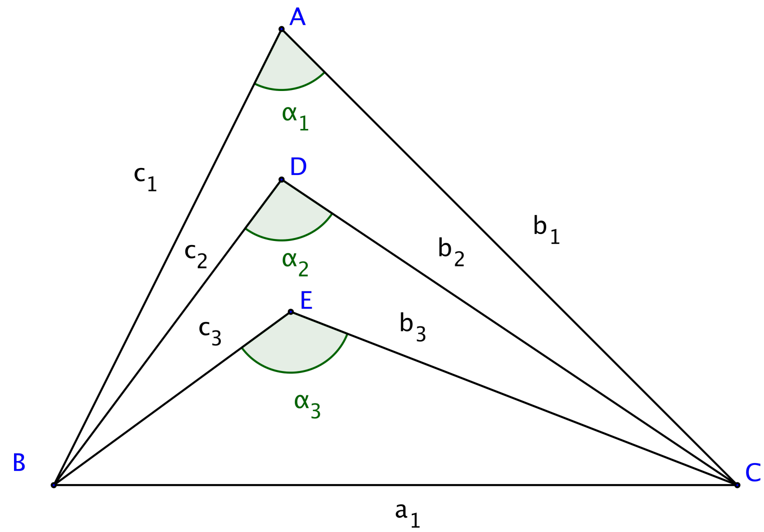

Figura 3.21: Análisis proposición I.21

La proposición en cuestión habla de trazar un triángulo que se encuentre dentro del triángulo dado y que sus segmentos sean trazados desde B y C respectivamente. Como conclusión, Euclides establece que el ángulo del triángulo interno es mayor al del externo y que la suma de los lados del externo es mayor a la del interno. Si se define una sucesión de triángulos con la característica de que el que siga al anterior sea interno entonces se tendrá algo del siguiente estilo con respecto a los ángulos y lados de los triángulos de la sucesión, como se puede ver en la figura anterior.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

$$c_1 + b_1 > c_2 + b_2 > c_3 + b_3 > a_1$$

En esta sucesión los ángulos en el vértice A tienden a una cota. Ésta es, como hemos establecido anteriormente, el doble del ángulo recto. Lo interesante de esto es que Euclides tiene conocimiento de esto y sin embargo no considera que dicho elemento geométrico sea un ángulo, bajo su propia definición. Con respecto a los lados esta proposición permite a Euclides conocer también el límite al que puede llegar la suma de dos de los lados de un triángulo para que éste pueda serlo, como lo establece desde la proposición de la desigualdad del triángulo. En la siguiente proposición el triángulo se puede construir si cumple la condición recién establecida.

Proposición (I.22). *Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos de las rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante.*

La Proposición *I.22* es la esencia de la construcción clave para la solución de *I.23*. Lo primero que Euclides requiere como condición es la desigualdad del triángulo.

Construcción (*I.22*).

1 Se construye la recta DE en un extremo en D e infinita [27] *en dirección de E.*

2 Construir sobre DE desde D la recta DF igual a a , FG a b y GH a c.

3 Con centro en F y radio FD construir el círculo DKL.

4 Análogamente construir con centro en G y radio GH el círculo KLH.

5 Unir los puntos KF y KG.

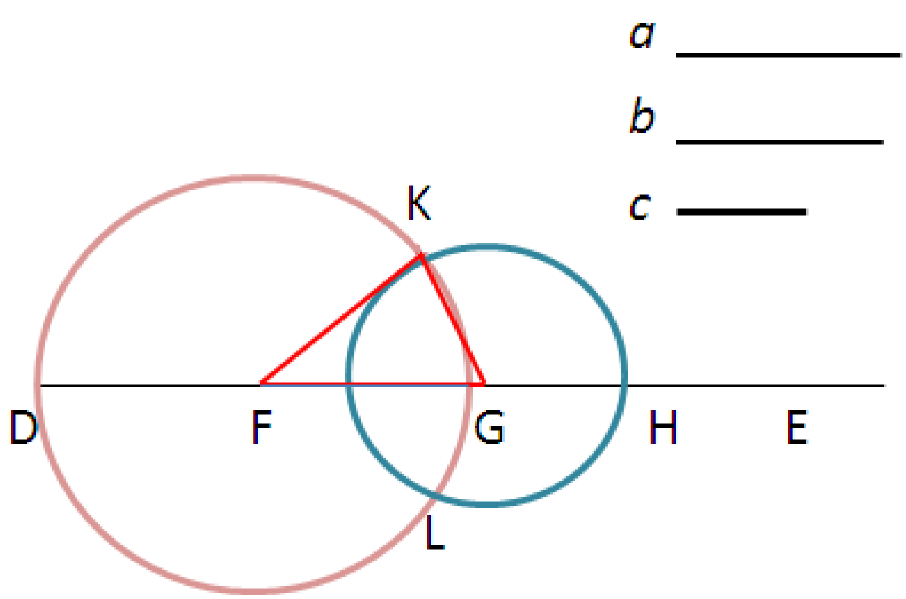

Figura 3.22: Construcción de la proposición I.22

Demostración. Se demostrará que el triángulo KFG es un triángulo tal que sus lados son iguales al triángulo cuyo lados son a, b y c .

[27] Es importante observar que esta proposición establece explícitamente la construcción o presentación de una recta infinita hacia un lado y con un punto extremo en el otro. Esto sugiere el concepto de rayo.

- Dado que F es el centro del círculo DKL, FD es igual a FK.
- Además como FD es igual a a entonces KF también es igual a a.
- Análogamente como el punto G es el centro del círculo LKH, GH es igual a c. También FG es igual a b.
- Por lo tanto KF, FG y GK son iguales a a, b y c respectivamente.

□

Una vez que se ha presentado la Proposición *I.22* se presentará finalmente la proposición mediante la cual Euclides concatena los ángulos.

Proposición (*I.23*). *Construir en un punto de una línea recta dada un ángulo rectilíneo igual a uno dado.*

A continuación se verá cómo es que esta proposición permite ser interpretada como una suma entre magnitudes. Consideramos la *N.C. 2* y su siguiente expresión alterna:

$$x = y \text{ y } w = z \Rightarrow x + w = y + z$$

Esta noción común permite introducir la operación suma como algún tipo de combinación entre dos elementos, en este contexto, la proposición *I.23* introduce una operación cuya combinación consiste en concatenar cualesquiera dos elementos en el conjunto de los ángulos.

Se hará un análisis del desarrollo de la solución de esta proposición y se verá a continuación la construcción etapa por etapa de la Proposición *I.23*.

Sea AB la línea dada, A un punto en ella y DCE el ángulo rectilíneo dado. Se pide construir en el punto A, de la línea dada un ángulo igual al ángulo DCE, como puede observarse en la figura 3.23.

Construcción (*I.23*).

1 *Se toman arbitrariamente los puntos D y E sobre las lineas CD y CE respectivamente.*

2 *Se construye la linea recta DE.*

3 *Construir un triángulo AFG de lados iguales a los lados CD, DE Y CE, tales que AF es igual a CD, CE a AG y DE a FG. Esta construcción es posible debido a la Proposición I.22.*

Demostración.

Dado que los lados DC y CE son iguales a los lados FA y AG respectivamente y las bases DE y FG también, por el criterio de congruencia lado-lado-lado, proposición *I.8*, los ángulos FAG y DCE son iguales.

□

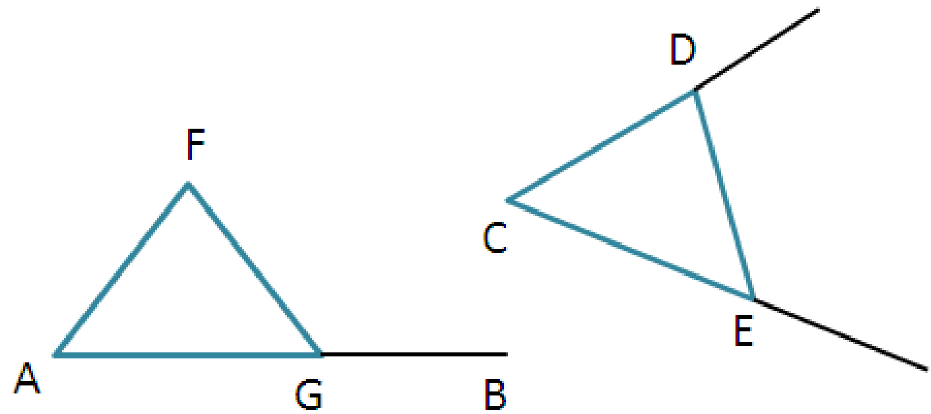

Figura 3.23: Construcción de la Proposición I.23

Una vez presentada y explicada la proposición anterior, se podrá llevar a cabo en la siguiente sección un análisis de la operación que subyace.

3.2.3. El ángulo plano como estructura y sus propiedades

Se ha presentado lo que el autor de *Los Elementos* desarrolla con respecto a la teoría de los ángulos, cómo los define, cómo opera con ellos y cómo es que se relacionan con los segmentos en un triángulo, ahora se verá cómo a partir de esta información y conocimiento que Euclides proporciona, se podrá estudiar la estructura algebraica a partir de las proposiciones euclidianas. Se iniciará con algunas observaciones acerca de la definición que Euclides da de ángulo y se señalará qué aspectos tienen que ser aclarados para poder asociar el ángulo con alguna magnitud y poder trabajar con éstas mediante las nociones comunes.

Lo primero que se vio es cómo es que los ángulos se presentan en la obra. Se pueden observar las distintas facetas que toma un ángulo en el texto además de cumplir con la definición de ángulo que el autor presentó. A pesar de que en los dos casos las rectas que forman al ángulo se intersectan en un punto, extremo, esto puede no ser siempre el caso. En la siguiente figura se puede observar lo anterior:

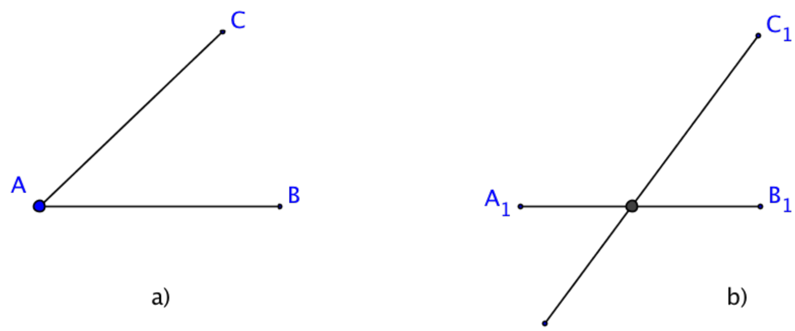

Figura 3.24: Intersección en punto extremo e intersección en punto cualquiera

En esta figura se pueden ver dos casos de segmentos que se intersectan de dos maneras diferentes. En esta definición se identifica un problema importante para poder llevar a cabo el trabajo que se planteó. La definición hace referencia a una inclinación determinada por dos rectas dadas. La cuestión es que para el caso en que las dos rectas se cortan en un punto que no sea extremo estas tienen cuatro inclinaciones, como se puede ver en la figura siguiente. Para efectos de estructurar el conjunto, el concepto que realmente importa es el de la magnitud del ángulo. De estas cuatro inclinaciones se tienen dos magnitudes únicamente, para las cuales existen dos representantes para cada una (Proposición *I.15*). Es importante recordar que, para analizar la estructura en cuestión, la magnitud es lo que importa dado que las nociones comunes plantean hechos que involucran magnitudes de alguna índole.

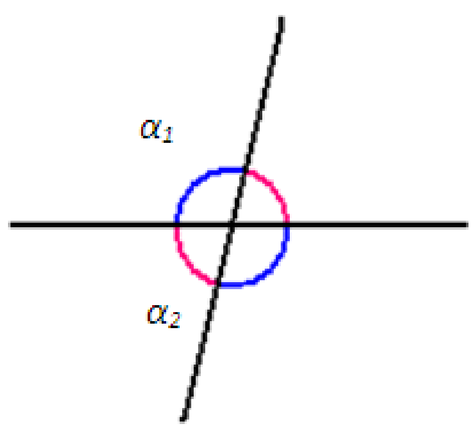

Figura 3.25: Dos líneas rectas que se intersectan definen dos ángulos en magnitud

Otro de los problemas que es importante observar es que más adelante, cuando se requiera operar con los ángulos, la operación de concatenación no sería un operación cerrada, es decir no para cualesquiera dos elementos del conjunto se obtiene otro ángulo como resultado de la concatenación. El caso más simple en el cual sucede ésto es la concatenación de dos ángulos rectos donde se obtendría una recta, la cual no corresponde a la definición euclidiana de ángulo. Aunque en realidad eso sucedería para cualesquiera dos ángulos cuya concatenación sea dos rectos. De hecho, este problema se extiende aún más si se contempla el caso en que la concatenación de estos ángulos diera como resultado un elemento geométrico que en teoría debería de representar un ángulo mayor a dos rectos. En donde este elemento geométrico no es un ángulo bajo la definición Euclidiana. Sin embargo, Euclides contempla y proporciona el elemento geométrico que representa dos ángulos rectos y lo construye en las proposiciones *I.13* y *I.14*. Más adelante se verá entonces cómo es que se puede resolver este problema tratando de mantenerse en un contexto totalmente euclidiano, y de cubrir los dos enfoques controversiales de la cerradura en la operación de concatenación.

Dado que uno de los problemas de la definición radica en el hecho de que hay dos ángulos por dos rectas, es necesario poder clarificarlos o identificarlos de alguna manera. Esto implica que es necesario dotar al espacio con algún punto de referencia. Ejemplos de estos son: sistemas de referencia, sistemas con alguna orientación, un origen etc. Si se da una solución de este tipo sería necesario redefinir el concepto de ángulo, de manera que se ajuste al sistema de referencia dado o más bien que la definición se obtenga a partir de éste. Para el caso del problema de la cerradura, que tiene que ver con la operación del conjunto en cuestión, ésta dependerá también de la nueva definición.

Primero que nada, a partir de los casos que se revisaron, se decidió considerar los dos rayos y no solo los dos segmentos que forman los ángulos. Esto se hará por dos razones, la primera es para que al considerar un ángulo no sea necesario conocer la longitud de los segmentos que lo forman. La segunda razón es que dado que la operación debe de ser cerrada y si se consideran únicamente los ángulos que se forman por dos rectas completas, la magnitud de estos siempre será menor a dos rectos y por consiguiente la suma no sería cerrada para cualesquiera dos elementos que sumen más de dos ángulos rectos. En cambio al tomar rayos se tiene una magnitud de hasta cuatro rectos y así la suma se vuelve cerrada y periódica. Será cerrada y periódica dado el corolario de la Proposición *I.15*:

Corolario. *Si dos segmentos se cortan el uno al otro, producen en la intersección ángulos que suman cuatro ángulos rectos.*

Esta proposición dice explícitamente que la suma total de los ángulos formados por dos rectas es cuatro rectos, es decir, aquí se ve cómo es que Euclides no solo conoce el ángulo recto y dos ángulos rectos sino también cuatro ángulos rectos. Al existir estos múltiplos en el texto, es posible pensar en múltiplos mayores que pudieran definir una posible concatenación cíclica.

Una manera de considerar a los ángulos en el texto para que estos problemas de la cerradura y la definición puedan resolverse es la siguiente. Se dotará a los ángulos de dos orientaciones diferentes mediante el sentido levógiro y el sentido dextrógiro. Así, dados dos rayos r_1 y r_2 tendremos cuatro casos o magnitudes con orientación diferentes, que se ven mas claramente en la siguiente figura:

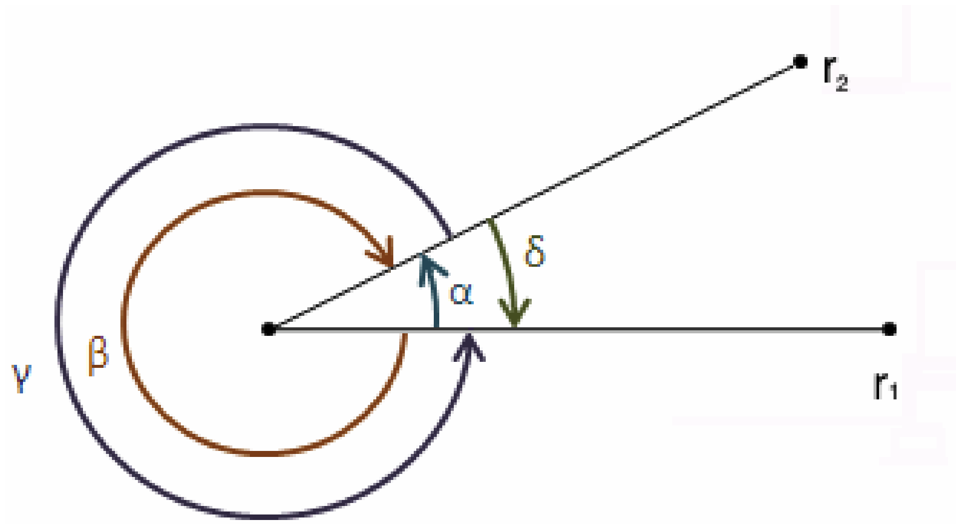

Figura 3.26:

Esto quiere decir que cada uno de los ángulos siguientes: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son distintos. Los elementos que determinan totalmente los ángulos anteriores son: las dos rectas y la orientación. Se empezará así a construir lo necesario para introducir la nueva definición de ángulo interpretable en el texto euclidiano bajo algunas observaciones.

Antes que nada se definirá el siguiente conjunto, que representa el conjunto de rayos. Es cierto que en *Los Elementos* el concepto de rayo no existe tal cuál, sin embargo se puede pensar que dentro de la geometría que plantea Euclides es posible que tenga cabida el concepto de rayo. El segundo postulado, proporciona la posibilidad de prolongar cualquier recta. De hecho, como se mostró antes, la construcción de la Proposición *I.22* se puede construir un segmento y se prolonga hacia uno de los extremos. Esta recta puede prolongarse únicamente desde uno de los extremos. Por esta razón, el concepto de rayo no es algo que no pueda existir en la geometría que Euclides desarrolla. Una definición adecuada de rayo en el contexto de *Los Elementos* podría ser la siguiente:

Definición. *Un **rayo** es aquel que yace por igual respecto de los puntos que están en el y tiene un solo punto extremo bien definido o dado en posición.*

Se denotará como $\mathcal{L}_r$, el conjunto de todos los rayos. Así, se definirá a continuación el siguiente conjunto:

Definición. *Se define el conjunto* $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^* = \{(r_i, r_j)/r_i, r_j \in \mathcal{L}_r$ *y además* r_i, r_j *se intersectan en sus puntos extremos respectivos*$\}$

A continuación, se explicarán los aspectos importantes de este conjunto.

- Las parejas (r_i, r_j) y (r_j, r_i) son distintas entre sí. Más adelante se verá cual es la importancia de esto.

- El conjunto $\mathcal{L}_r$ no tiene restricciones sobre los rayos a considerar, la única condición es que se intersecten en un punto límite, como lo establece la definición. En la siguiente figura se muestran todos los casos posibles que admite la conjunto $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*$

  1 El primer caso es aquel en el cual los rayos se intersectan pero no son colineales.

  2 El siguiente caso es aquel en el cual los rayos se intersectan, son colineales pero solo se intersectan en un punto.

  3 El último caso es aquel en el cual los rayos se intersectan no solo en el punto límite.

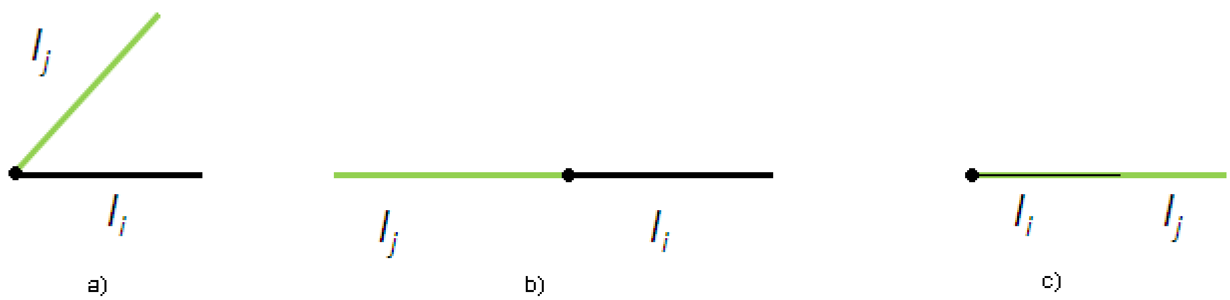

Figura 3.27: Casos contemplados en el conjunto $\mathcal{L}_r$

Anteriormente se dijo que uno de los elementos que determina un ángulo es un par de rectas, esta es la razón por la cual se introdujo el conjunto $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*$. El otro elemento que determina un ángulo es la orientación, se presentará entonces un conjunto que introduce la orientación a los ángulos y que es finalmente el conjunto que se utilizará para poder definir completamente el ángulo y poder trabajar la estructura que nos interesa.

Definición. $\mathcal{A}_r = \{a = [(r_i, r_j), n]/(r_i, r_j) \in \mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*, n \in \{0, 1\}\}$ *es el conjunto que representa a los ángulos.* [28]

A continuación se describirá detalladamente a los elementos de $\mathcal{A}_r$. Sea $a_r \in \mathcal{A}_r$, entonces a_r puede ser de cualquiera de las siguientes dos formas:

- $a_r = ([(r_i, r_j), 0])$.

- $a_r = ([(r_i, r_j), 1])$.

El elemento a_r es un ángulo entre los rayos r_i y r_j definido mediante ambas entradas del par ordenado. Entonces, se tiene lo siguiente:

[28] Es importante notar que esta definición fue desarrollada y construida conforme a la definición Euclidiana. Esta definición considera a las dos rectas que tienen una inclinación entre ellas, además de considerar los casos de los que hemos hablado, es decir, resuelve los problemas de cerradura y de la definición de las distintas inclinaciones que se comentaron anteriormente.

- La primera entrada, la cual es la que considera el par ordenado de rayos, es la que indicará el origen del ángulo, es decir, de dónde o desde qué rayo "nace" el ángulo. Anteriormente se mencionó la importancia de que las parejas (r_i, r_j) y (r_j, r_i) fueran distintas entre sí. Es ahora donde se hará uso de esta condición. Sin pérdida de generalidad se determinará que la primera entrada de este par ordenado será el rayo del cual "nace" el ángulo en cuestión.

- La segunda entrada n, determina qué dirección tiene el ángulo, sentido levógiro si es 0 y dextrógiro si es 1.

Una vez que se ha aclarado que dadas dos rectas existen dos ángulos diferentes en magnitud y no uno, se escribirá con la notación establecida los cuatro casos de ángulos posibles tomando en cuenta tanto la magnitud como el sentido, dadas dos rectas. El lector se puede apoyar de la figura 4.11.

1 $\alpha = [(r_1, r_2), 0]$

2 $\beta = [(r_1, r_2), 1]$

3 $\gamma = [(r_2, r_1), 0]$

4 $\delta = [(r_2, r_1), 1]$

Con esta notación se ha resuelto el problema de la cerradura. Se presenta a continuación la definición de suma con la notación propuesta:

Definición. *Sea a_1, $a_2 \in \mathcal{A}_r$. Definimos $a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), n] + [(r_3, r_4), n] = [(r_1, r_4), n]$ como la **suma** (concatenación) de a_1 y a_2, donde a_2 es el ángulo que se copia sobre a_1 y donde $n = 1$ si el sentido del ángulo es dextrógiro y $n = 0$ si es levógiro.*[29]

A continuación se verán los casos que se pueden tener para dicha operación. Se quieren sumar dos ángulos euclidianos a_1 y a_2. como se vio anteriormente, estos ángulos se pueden representar de la siguiente manera: $a_1 = [(r_1, r_2), n], a_2 = [(r_3, r_4), n']$. Se tienen para empezar los siguiente dos casos, los cuales abren de nuevo la discusión de cómo determinar la igualdad o el orden entre ellos.

- $a_1 = a_2$

- $a_1 < a_2$

[29] Es importante notar que esta definición de suma está construida conforme a la concatenación de ángulos, es decir, a la Proposición I.23.

Igualdad y relación de magnitud y sentido entre ángulos

Ahora que se le ha dado una notación específica a los ángulos y que se han caracterizado cuatro casos distintos, se tiene entonces un concepto de igualdad más amplio. La pareja ordenada $[(r_1, r_2), n]$ tiene dos aspectos a ser evaluados en términos de igualdad, la primera parte determinará la igualdad en magnitud, la cuál sabemos que, de acuerdo al pensamiento de Euclides, se determinará mediante la superposición y dos entradas serán iguales si los ángulos determinados por los pares de rayos son iguales, lo que no quiere decir que las entradas r_i tengan que serlo.[30] La segunda coordenada, al determinar el sentido del ángulo, evidentemente será igual a otra si el ángulo tiene el mismo sentido, es decir si $n = n'$. Finalmente el ángulo será igual si estas dos entradas son iguales.

Para determinar cuándo un ángulo es menor habrá que evaluar también dos aspectos, el sentido y la magnitud. El primero que se debe comparar es el sentido, si el ángulo a_1 tiene sentido levógiro y a_2 dextrógiro, entonces no será necesario evaluar la otra coordenada y a_1 será mayor a a_2. En el caso en el que éstos tengan el mismo sentido, entonces se comparará la magnitud de la siguiente manera. Denotemos primero como $<_{\mathcal{A}_r}$ la relación de orden de los ángulos del conjunto $\mathcal{A}_r$ y como $<_{\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*}$ a la relación de orden en el conjunto $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*$. La relación $<_{\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*}$ Se basa únicamente en superposición como se ha dicho anteriormente. Y la relación $<_{\mathcal{A}_r}$ estará basada para una entrada en la superposición y para la otra en la orientación como veremos a continuación:

- Si $a_1 = [(r_1, r_2), 0]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 0]$, entonces $a_1 <_{\mathcal{A}_r} a_2$ si $(r_1, r_2) <_{\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*} (r_3, r_4)$
- Si $a_1 = [(r_1, r_2), 1]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 1]$, entonces $a_1 >_{\mathcal{A}_r} a_2$ si $(r_1, r_2) >_{\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*} (r_3, r_4)$

Ahora, veamos cómo se operará con los elementos de $\mathcal{A}_r$ y los distintos casos que existen.

- $\underline{a_1 = a_2}$
  - Si,

    $a_1 = [(r_1, r_2), 0]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 0]$

    entonces,

    $a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 0] +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_3, r_4), 0] = [(r_1, r_4), 0]$
  - Si,

    $a_1 = [(r_1, r_2), 1]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 1]$ entonces,

    $a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 1] +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_3, r_4), 1] = [(r_1, r_4), 1]$

[30] Dos pares de rayos distintos pueden tener el mismo ángulo en magnitud.

- $\underline{a_1 < a_2}$
    - Si,

      $$a_1 = [(r_1, r_2), 0] < a_2 = [(r_3, r_4), 0] \text{ donde } (r_1, r_2) < (r_3, r_4)$$

      entonces,

      $$a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 0] + [(r_3, r_4), 0] = [(r_1.r_4), 0]$$
    - Si,

      $$a_1 = [(r_1, r_2), 1] < a_2 = [(r_3, r_4), 1] \text{ donde } (r_1, r_2) > (r_3, r_4)$$

      entonces,

      $$a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 1] +_{\mathcal{A}_r} [(r_3, r_4), 1] = [(r_1.r_4), 1]$$
    - Si $a_1 = [(r_1, r_2), 0] < a_2 = [(r_3, r_4), 1]$ donde, sin importar como sea la magnitud del ángulo, dado que $n = 1yn' = 0$ entonces $a_1 > a_2$

      entonces,

      $$a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 0] +_{\mathcal{A}_r} [(r_3, r_4), 1] = [(r_1, r_4), 0] \text{ si } (r_1, r_2) > (r_3, r_4)$$

      y

      $$a_1 +_{\mathcal{A}_r} a_2 = [(r_1, r_2), 0] +_{\mathcal{A}_r} [(r_3, r_4), 1] = [(r_1, r_4), 1] \text{ si } (r_1, r_2) < (r_3, r_4)$$

Como se puede observar en todos los casos, independientemente del sentido o las magnitudes de los ángulos, el elemento de la primera entrada es (r_1, r_4) y en el caso de la segunda entrada el valor que toma n depende de las convenciones anteriores. En la definición de suma planteada el ángulo que se copia es el segundo en el primero, de manera análoga a las líneas existen otros casos. Aunque para las líneas existían cuatro casos distintos, para los ángulos únicamente dos dado que el ángulo se copia en el rayo de la segunda coordenada, es decir se elimina una posibilidad (en los segmentos se podía pensar en cualquiera de los dos extremos). Más adelante, en la sección de conmutatividad, se analizará este tema.

3.2.4. Estudio de las propiedades del conjunto de ángulos

Hasta ahora se ha desarrollado un conjunto de ángulos a los cuales se les ha asociado una operación de suma, a partir de las proposiciones euclidianas *I.22 y I.23*, la cual se interpreta geométricamente como la concatenación de éstos. Además se ha dotado a este conjunto de ángulos un sentido y se ha determinado de manera específica cuántas magnitudes están asociadas a un par de rayos.

Ahora, de manera análoga a los segmentos, se describirá qué tipo de estructura conforma este conjunto. La estructura $\mathcal{A}_r$ con la operación suma $+_{\mathcal{A}_r}$, es una estructura reconocible, en varios aspectos, en la obra de Euclides. Sin embargo, es necesario aclarar que el hecho de que a dichos ángulos se les haya asociado un sentido no es algo que Euclides haya hecho. En esta tesis se ha decidido hacerlo para que esta estructura pueda ser más rica, y cuente con un inverso aditivo. Ahora se verá qué propiedades se pueden reconocer en esta estructura y cuáles de ellas se encuentran de alguna manera en el texto de Euclides. Análogamente al caso de las rectas, se revisarán las propiedades presentadas anteriormente para los ángulos. Durante el desarrollo de este capítulo se presentaron algunas de estas propiedades por lo cual en esta sección se hará únicamente una revisión

Elemento neutro aditivo

De la misma manera que en el caso de los segmentos, para que el conjunto A_r contara con un neutro aditivo, se necesitaría un elemento tal que aplicándole la operación a cualquier ángulo, este permaneciera igual, es decir bajo la concatenación el ángulo no sufriría ningún cambio. De manera análoga, para complementar este conjunto, se podría pensar en un elemento neutro que bajo la definición extraída del trabajo de Hilbert tendría que ser formado por dos puntos que yacieran en el mismo lugar y que definieran un espacio nulo entre ellos.

Ahora un ángulo plano que desempeñara un papel de neutro aditivo se podría tener si se pensara que los dos rayos de las entradas del elemento $a \in \mathcal{A}_r$ yacen en el mismo lugar y pudieran ser diferentes. Se denotará de manera especial a este ángulo de la siguiente manera: a_0, donde $a_0 = [(r_0, r_0), n_0]$ y n_0 puede ser tanto 1 como 0 sin que esto importe. La suma con este elemento sería definida de la siguiente manera. Dado $a_0, a \in \mathcal{A}_r$ entonces $a_0 + a = [(r_i, r_j), n_1] +_{\mathcal{A}_r} [(r_0, r_0), n_0] = [(r_i, r_j), n_1]$.

Así la estructura aditiva $\mathcal{A}_r \bigcap \{a_0\}$ es una estructura con elemento neutro.

Propiedad de conmutatividad

La propiedad de conmutatividad para los ángulos se puede demostrar de la siguiente manera.

Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$

P.D. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Sea ABC un triángulo isósceles con lados a, b y c respectivamente. Sea α el ángulo en A.

Construcción.

1 Construir el ángulo β en el lado AB y en el lado AC. Estos dos ángulos generan los triángulo ADB y AEC.

2 Se trazan las rectas AC y EB

P.D. Los ángulos DAC y BAE son iguales
P.D. Los triángulos ADC y ABE son congruentes.

Demostración.

- Por construcción ADB y AEC son congruentes.
- Por lo tanto, DB y EC son iguales
- Los ángulos DBC y ECB son iguales dado que DBA=ACE por construcción y los ángulos ABC y ACB son iguales dado que el triángulo ABC es isósceles.
- Entonces los triángulos DBC y EBC son semejantes
- Por lo tanto los triángulos ACD y AEC son congruentes.

□

Inverso aditivo

El conjunto $\mathcal{A}_r$ fue construido de manera tal que los ángulos tienen orientación. Por definición del conjunto para todo ángulo $a = [(r_1, r_2), n]$ existe un ángulo $a' = [r_2, r_1, n']$ tal que n'pertenece al conjunto $\{0, 1\}$ y es distinta a n. De la misma manera, esto se garantiza mediante el diagrama y la notación. El inverso de un ángulo es el mismo ángulo geométricamente con distinta orientación por lo que la notación cambia.

Propiedad de cerradura

Análogamente al inverso aditivo, se puede decir que el conjunto $\mathcal{A}_r$ fue construido justamente para garantizar la cerradura de la suma de ángulos planos. Esta notación como hemos visto garantiza que para toda pareja de ángulos el elemento resultante de su suma sea un ángulo.

Propiedad asociativa

De manera análoga a la conmutatividad, la asociatividad de la suma de ángulos planos se demuestra mediante el uso del diagrama junto con la demostración, en el sentido de Manders, y la *N.C. 2*. La igualdad se basa en la superposición así que, aunque exista la notación específica que se ha presentado, la pruebas de estas propiedades se reducen a los principios básicos del Euclides.

Propiedad de orden

Sin importar la nueva notación, esta propiedad se sigue cumpliendo mediante la *N.C.4* y la superposición, como se dijo en la sección anterior de *Igualdad y relación de magnitud y sentido entre ángulos.* y la relación de orden se ha denotado como $<_{\mathcal{A}_r}$. De manera análoga a la línea recta, $\mathcal{A}_r$ es un conjunto linealmente ordenado.

3.2.5. Análisis sobre una operación mas en $\mathcal{A}_r$

En el capítulo de la línea recta se vio que existe una construcción euclidiana que permite encontrar el segmento λs, para el segmento $s \in \mathcal{L}_s$ dado cualquier $\lambda \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda < 1$. Esta construcción junto con la proposición *I.2* nos permitió hacerlo para los racionales en general y no únicamente para aquellos menores a uno, dado $\lambda = \frac{p}{q}$ se encontraba el racional s/q y posteriormente se copiaba p veces. Finalmente estas construcciones garantizaron que el conjunto $\mathcal{L}_s$ formara un espacio vectorial sobre los racionales. Ahora se verá qué sucede para el caso de los ángulos planos. Es decir, encontrar el ángulo plano λa para el ángulo plano $a \in \mathcal{A}_r$ dado cualquier $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Remitiéndose a las proposiciones euclidianas se sabe que la Proposición *I.9* enseña a dividir el ángulo dado en dos partes iguales. En términos de la multiplicación por un racional éste sería el caso de multiplicar por $\frac{1}{2}$. Generalizando esta proposición entonces se tiene la manera de multiplicar por cualquier racional de la forma $\frac{1}{2^n}$.

Sin embargo, se sabe que Euclides no presenta la trisección del ángulo, de la cual se sabe que su solución no genera una ecuación de segundo grado. En general, en *Los Elementos* el problema de la sección angular no se puede resolver.

Se puede concluir entonces que la estructura $\mathcal{A}_r$ no puede formar un espacio vectorial sobre los racionales en el contexto euclidiano.

3.2.6. Conclusiones sobre el conjunto de los ángulos

En este capítulo fue presentado el conjunto $\mathcal{A}_r$ a partir de la definición euclidiana de ángulo y la operación entre ellos $<_{\mathcal{A}_r}$ basada en la Proposición *I.23*. Se hicieron algunas observaciones de la definición de este objeto geométrico. En particular, se sugirió darle un sentido a los ángulos aclarando que no se encuentra en *Los Elementos* pero que se puede considerar debido a que se puede obtener a partir de la notación. En un sentido análogo al de las rectas, donde el propio diagrama sugiere la posibilidad de un elemento que funcione como inverso aditivo, se considera que para el caso de los ángulos es una cuestión análoga. Es decir, no requiere condiciones teóricas que se salgan del contexto euclidiano. La consideración de sentido y de dos magnitudes geométricas en lugar de una por cada para de rectas introdujo los conjuntos $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*$ y $\mathcal{A}_r$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_r$ se puede concluir lo siguiente. Se le pudo asociar únicamente la operación de suma, en este sentido el conjunto no puede ser un anillo. La operación suma cumple con las propiedades de cerradura, asociatividad y la conmutatividad. El neutro aditivo y el inverso aditivo no se encuentran en *Los Elementos*, sin embargo se vió que pueden ser añadidos con sus respectivas condiciones. Dado que $\mathcal{A}_r$ cumple con las propiedades de **cerradura**, **asociatividad** y **conmutatividad**, tiene un **elemento neutro** y un **inverso** , entonces es un grupo abeliano. Dado que la multiplicación de ángulos por escalares no es posible entonces no se puede pensar en algún espacio vectorial como se hizo para el conjunto $\mathcal{L}_s$. En este sentido el conjunto de las rectas es un conjunto más rico en cuanto a propiedades.

3.3. Figuras rectilíneas planas

En este capítulo se presentará la definición de figura rectilínea plana que Euclides proporciona. Y se explicará cómo es que se conforman como magnitudes. Los casos que se tomarán en cuenta son los paralelogramos, las figuras rectilíneas no regulares y los cuadrados. Se mostrará cómo las figuras rectilíneas planas se pueden triangular, posteriormente construir paralelogramos iguales a estos y finalmente cuadrados iguales a estos paralelogramos para así poder operar con ellos mediante el teorema de Pitágoras. Se verá además el papel tan importante que toma el quinto postulado euclidiano en el desarrollo de este capítulo.

3.3.1. Definición de figura rectilínea

Uno de los objetos geométricos que Euclides estudia en su obra son las figuras rectilíneas planas. El autor proporciona en su primer libro la siguiente definición:

Definición. *(I.19).* ***Figuras rectilíneas*** *son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro y multiláteras las comprendidas por más de cuatro líneas rectas.* [31]

Se verá a continuación cómo es que mediante el trabajo de Euclides se le puede dar un estatuto de magnitud a las figuras rectilíneas planas.

3.3.2. Las figuras rectilíneas planas como magnitudes

La definición de figuras rectilíneas abarca figuras rectilíneas a partir de tres lados. Euclides aborda cada caso de manera diferente. El primer caso, el de las figuras rectilíneas triláteras, **triángulos**, se estudia desde las primeras proposiciones del texto. La manera en la que el autor determina la igualdad entre triángulos es mediante el concepto de congruencia, mismo que se explicó con los criterios de congruencia. Es importante notar que en el texto euclidiano el autor no proporciona ninguna definición o proposición que determinen qué significa el área de un triángulo. Esto quiere decir que no existe la asociación del objeto geométrico con un número real.

[31] Esta definición requiere de las definiciones previas de *figura* y *límite*. La definición de *límite* (definición *I.13*) fue proporcionada en la sección de línea recta de esta tesis y a continuación presento la definición de *figura*:

Definición. *(I.14) Una* ***figura*** *es aquello que está contenido por cualquier límite o límites.*

Para el autor, el triángulo como magnitud está determinado vía los criterios de congruencia, y de esta forma es necesario un criterio comparativo entre dos figuras. La comparación en cuestión se basa en los criterios de congruencia para triángulos.

Para ejemplificar lo anterior se presenta la siguiente proposición. Esta es la primera proposición euclidiana en donde se encuentra la palabra griega $\chi\omega\rho\acute{\iota}\omega\nu$ que se traduce como lugar o distrito y es la palabra que determina el objeto geométrico como una magnitud.

Proposición. *(I.34). Los lados y ángulos opuestos de un área paralelográmica son iguales uno al otro y la diagonal divide el área en dos partes iguales.*

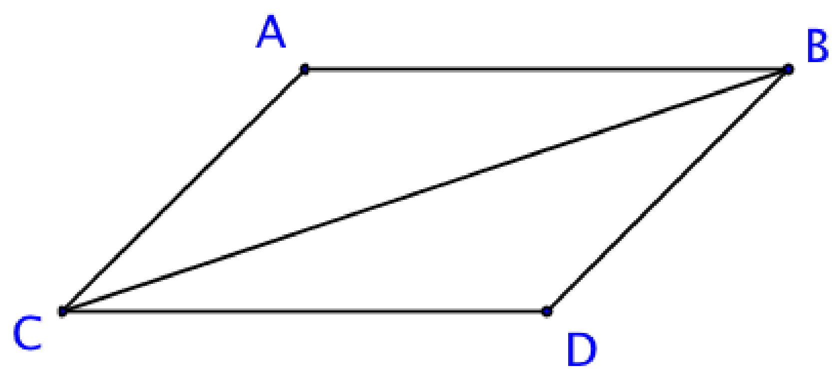

Figura 3.28: Diagrama Proposición *I.34*

En esta proposición la frase dos partes iguales, se refiere a los triángulos generados al trazar la diagonal de un paralelogramo. Para demostrar que dichas áreas son iguales, en el sentido de figuras rectilíneas planas, Euclides aplica los criterios de congruencia *I.4* y *I.26*. Es interesante notar que este último criterio de congruencia no se requiere, sino hasta este momento de la obra.[32] Más adelante en esta sección haré notar la importancia de dicho criterio en cuestiones de áreas de figuras rectilíneas.

La siguiente figura rectilínea plana de la que se ocupa Euclides es el **paralelogramo** para este caso el autor proporciona una proposición en la cual es necesario mostrar que dadas ciertas condiciones de igualdad en las partes de dos paralelogramos, entonces las figuras son iguales.

Proposición. *(I.35) Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales.*

[32] A su vez esta proposición es dependiente del quinto postulado de Euclides.

Instanciación. *Sea ABCD, EBCF los paralelogramos con base BC y contenidos en las mismas paralelas AF y BC.*

Especificación o definición. *ABCD es igual al paralelogramo EBCF*

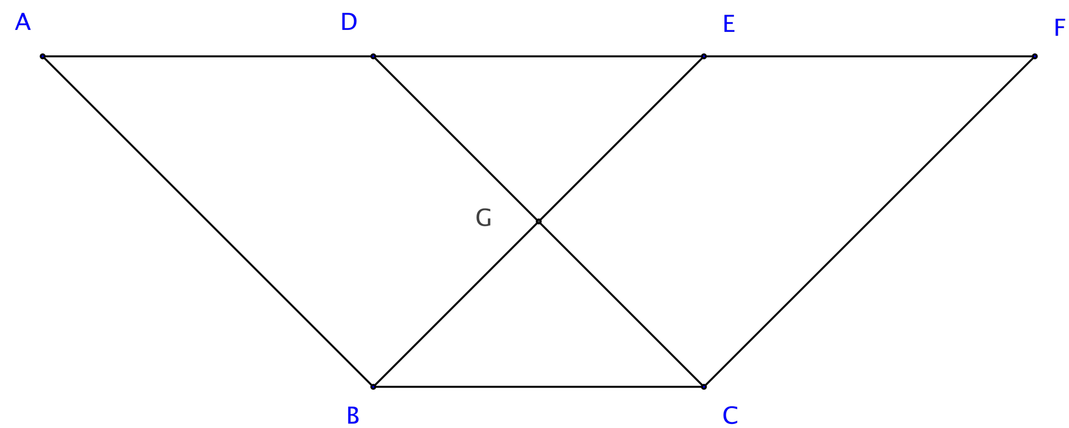

Figura 3.29: Proposición *I.35*

Demostración.

- Como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces AD es igual a BC.
- Por la misma razón, EF es igual a BC.
- Entonces AD es también igual a EF.
- DE es común; entonces el todo AE es igual a DF.
- Pero AB es también igual a DC, entonces los dos lados EA y AB son iguales a los lados FD y DC respectivamente.
- Y el ángulo FDC es igual al ángulo EAB, el exterior al interior, entonces la base EB es igual a la base FC. Y el triángulo EAB será igual al triángulo FDC.
- Sea DGE sustraído de cada uno; entonces el trapecio $ABGD$ que queda es igual al trapecio $EGCF$.
- Sea el triángulo GBC añadido a cada uno. Entonces el todo, el paralelogramo $ABCD$, es igual al paralelogramo $EBCF$

□

Para demostrar esta igualdad, el autor se basa en elementos que conciernen a igualdad por congruencia, como lo es la igualdad de los triángulos congruentes de la Proposición *I.4*. Esta proposición la utiliza para probar la igualdad de EAB y FDC, así como las nociones comunes que determinan criterios de igualdad para elementos cualesquiera.

El autor también contempla los casos de **figuras rectilíneas cuadrilíteras no regulares**. Con la siguiente proposición lo que logra, es transformar toda figura rectilínea en un paralelogramo, para la cual se ha determinado cuándo un área paralelográmica es igual a otra.

Proposición. *(I.45). Construir un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada con un ángulo rectilíneo dado.*

Instanciación. *Sea $ABCD$ la figura rectilínea dada y E el ángulo rectilíneo dado*

Especificación o definición. *Se requiere construir en un ángulo E un paralelogramo igual a la figura rectilínea $ABCD$*

Construcción.

- *Sea el segmento DB trazado, y sea el paralelogramo FH construido igual al triángulo ABD, en el ángulo HKF el cual es igual a E [1. 42].*[33]

- *Sea el paralelogramo GM, igual al triángulo DBC, aplicado a la línea recta GH, en el ángulo GHM el cual es igual a E. [1. 44]*

[33]

Proposición. *(I.42) Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.*

Data. *Sea ABC el triángulo dado, y D el ángulo rectilíneo dado; entonces se requiere construir en el ángulo rectilíneo D un paralelogramo igual al triángulo ABC*

Construcción.

- *Sea BC bisectado en E*
- *Sea AE unido*
- *En la línea recta EC y en el punto E en el, sea el ángulo CEF construido igual al ángulo D*
- *A través de A sea AG trazada paralela a EC*
- *A través de C sea CG trazada paralela a EF*
- *Entonces $FECG$ es un paralelogramo*

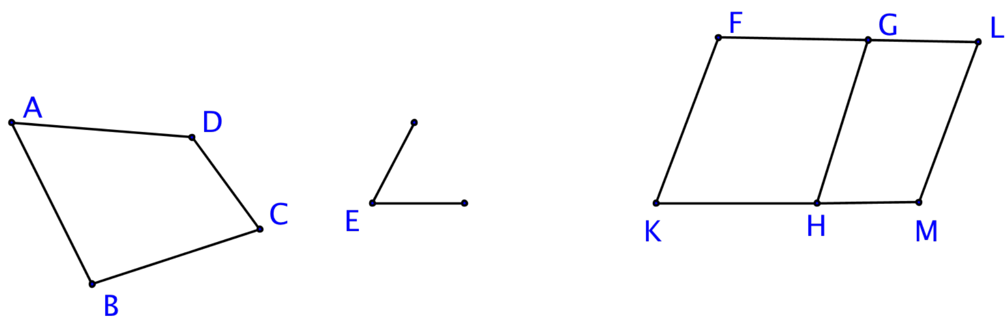

Figura 3.31: Diagrama Proposición *I.45*

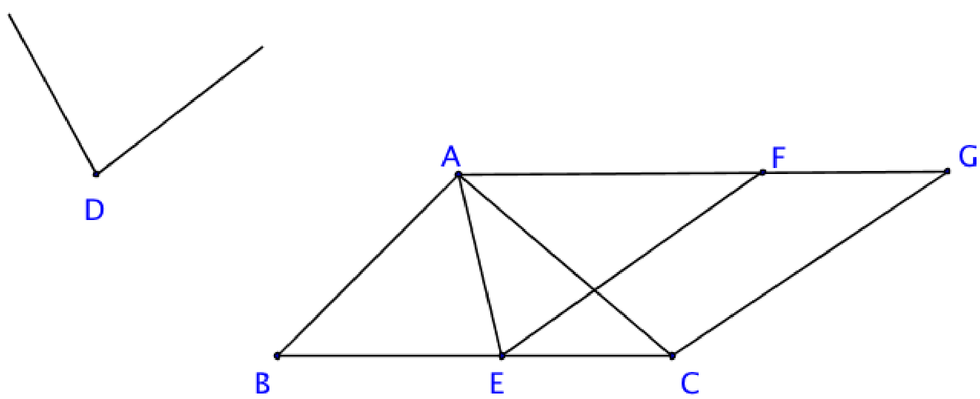

Figura 3.30: Diagrama Proposición *I.42*

Demostración.

- Dado que BE es igual a EC, el triángulo ABE es igual al triángulo AEC, dado que estan en bases iguales BE, EC y en las mismas paralelas BC, AG [I.38]
- Por lo tanto el triángulo ABC es el doble del triángulo AEC
- Pero el paralelogramo $FECG$ es también el doble del triángulo AEC, puesto que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas
- Por lo tanto el paralelogramo $FECG$ es igual al triángulo ABC y tiene el ángulo CEF igual al ángulo dado D.

□

Por lo tanto el paralelogramo $FECG$ ha sido construido igual al triángulo dado ABC, en el ángulo CEF que es igual a D.

Demostración.

- Entonces, dado que el ángulo E es igual a los ángulos HKF, GHM, el ángulo HKF es también igual al ángulo GHM [*N.C. 1*]

- Sea el ángulo KHG añadido a cada uno; por lo tanto los ángulos FKH, KHG son iguales a los ángulos KHG, GHM. Pero los ángulos FKH, KHG son iguales a dos ángulos rectos; [*Prop. I. 29*]

- Por lo tanto los ángulos KHG, GHM son también iguales a dos ángulos rectos.

- Así, con una línea recta GH y un punto H en ella, dos líneas rectas KH, HM que no yacen en el mismo lado hacen ángulos adyacentes iguales a dos ángulos rectos; por lo tanto KH esta en línea recta HM [*Prop. I.14*]

- Y dado que la línea recta HG incide sobre las paralelas KM, FG, los ángulos alternos MHG, HGF son iguales entre sí. [*Prop. I.29*]

- Sea el ángulo HGL añadido a cada uno; por lo tanto los ángulos MHG, HGL son iguales a los ángulos HGF, HGL. [*N.C. 2*]

- Pero los ángulos MHG, HGL son iguales a dos ángulos rectos; [*Prop. I.29*]

- Por lo tanto los ángulos HGF, HGL son también iguales a dos ángulos rectos. [*N.C.1*]

- Por lo tanto FG esta en una línea recta con GL [Prop. I.14]

- Y dado que FK es igual y paralela a HG, y HG a ML también, [*Prop. I. 34*] y HG a ML también, KF es igual y paralela a ML. [*N.C. I; Prop. I.30*].

- Y las líneas rectas KM, FL unirlas y sus extremos. Por lo tanto KM, FL son también iguales y paralelas. [*Prop. I.33*]

- Por lo tanto $KFLM$ es un paralelogramo.

- Y dado que el triángulo ABD es igual al paralelogramo FH y DBC a GM, toda la figura rectilínea $ABCD$ es igual al paralelogramo $KFLM$

- Por lo tanto el paralelogramo $KFLM$ ha sido construido igual a la figura rectilínea $ABCD$, en el ángulo FKM el cual es igual al ángulo dado E.

$\square$

La idea fundamental de esta demostración es dividir el área rectilínea dada en triángulos, t_1, t_2, t_3.... y construir una serie de paralelogramos p_1, p_2, p_3... tales que t_i y p_i sean iguales en área para todo p_i y t_i y el ángulo $G_iH_iH_{i+1}$ para todo i. Donde el paralelogramo p_{i+1} debe ser construido con el ángulo dado y además con el segmento $G_{i+1}H_{i+1}$. Resolver esto que es justamente la solución a la Proposición *I.44*[34] se reduce a la proposición *I.42*. A continuación se presenta la figura que describe lo anterior:

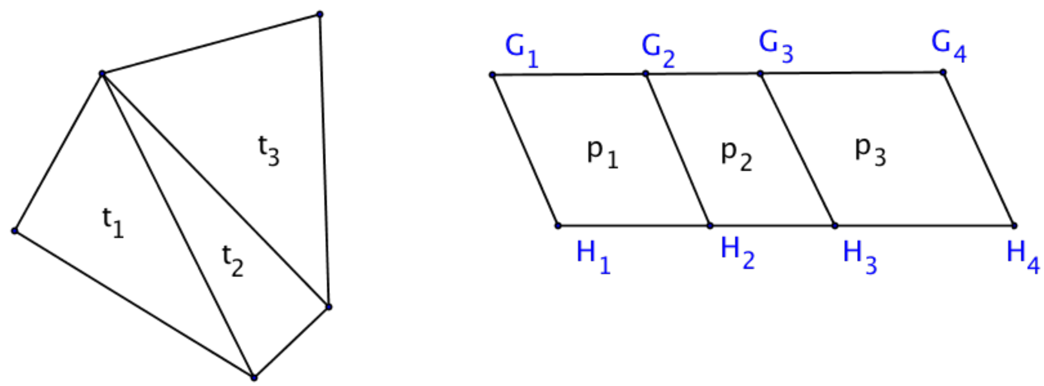

Figura 3.32:

3.3.3. Operación con las figuras rectilíneas planas

Ahora, una vez que se ha presentado la manera en la que Euclides considera determinada una figura rectilínea plana, entonces se mostrará cómo es que el autor manipula y opera con esta magnitud. Pero antes es muy importante aclarar, que este manejo con las figuras planas depende del quinto postulado debido a que el ciclo de proposiciones que permite la demostración de la proposición que finalmente se utilizará para operar con las áreas depende de la Proposición *I.29*. Ésta es la primera proposición en la cual Euclides utiliza el quinto postulado. Además, éste también fue necesario en la prueba de *I.34*. Es importante observar que a lo largo de esta tesis se ha ido aclarando bajo qué condiciones es posible ir generando estas estructuras. En cada caso se ha definido explícitamente que proposiciones euclidianas son necesarias, además de lo que éstas implican.

Una de las maneras en las que Euclides puede operar con las figuras rectilíneas es cuadrándolas mediante la Proposición *II.14* y posteriormente utilizando el teorema de Pitágoras, Proposición *I.47*[35] construyendo un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales a los lados de los

[34]**Proposición**(I.44) Dado un segmento construir con un ángulo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.

[35]

Proposición. *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados en los lados que contienen al ángulo.*

cuadrados obtenidos mediante la *II.14*. A continuación presento la proposición *II.14*. [36]

Proposición. *(II.14) Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.*

Construcción.

- *Sea construido el paralelogramo rectangular BD igual a la figura rectilínea A [I.45]*

  Demostración.

  Si BE es igual a ED, la cual fue unida entonces esta hecho. El cuadrado BD ha sido construido igual a la figura rectilínea A. (Cómo se puede ver en la figura 3.33)

  □

Si no, una de las líneas rectas BE o ED es mayor. Sea BE mayor,

Construcción.

- *Sea BE prolongada hasta F, sea EF construida igual a ED*
- *Sea BF bisectada en G*
- *Con centro en G y distancia una de las rectas GB, GF, sea el semicírculo BHF descrito*
- *Sea DE producida hasta H*
- *Sea GH unido*

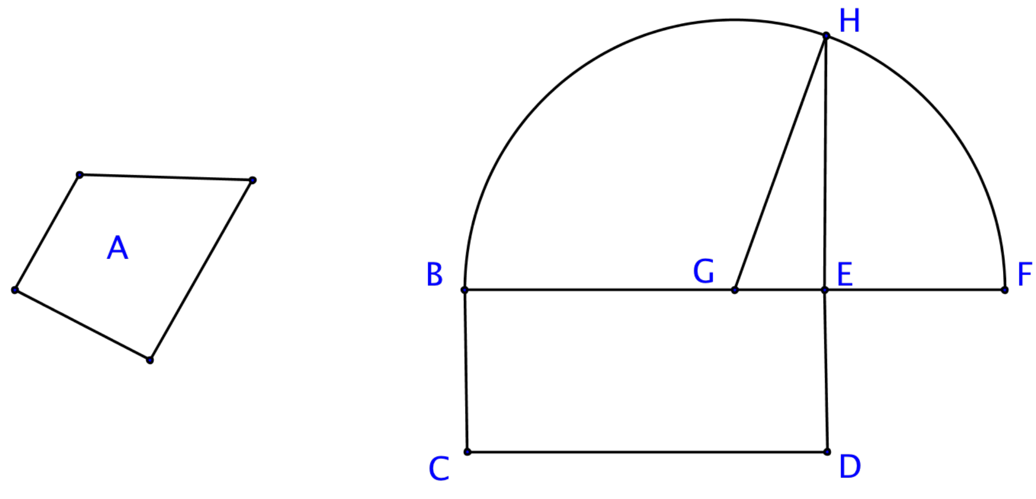

Figura 3.33:

[36]Bajo una óptica puramente deductiva, en el sentido lógico, esta es la proposición con la que Euclides culmina su trabajo de la geometría de las figuras rectilíneas los libros I y II. Sin embargo, es importante mencionar que para el autor era necesario separar los libros I y II, debido a los métodos de pruebas que utiliza en cada libro son distintos (Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's "Elements", pag. 16)

Demostración.

- Entonces, como la recta BF ha sido cortada en dos segmentos iguales en G y en dos segmentos no iguales en E, el rectángulo contenido por BF, EF contenido con el cuadrado en EG es igual al cuadrado en GF (*II.5*)
- Pero GF es igual a GH; entonces el rectángulo BE, EF con el cuadrado en GE es igual el cuadrado en GH.
- Pero los cuadrados en HE, EG son iguales al cuadrado en GH; (*Prop. I.47*)
- Entonces el rectángulo BE, EF con el cuadrado en GE es igual al cuadrado en HE, EG.
- Sea el cuadrado en GE sustraído de cada uno, entonces el rectángulo contenido por BE, EF el cual es el residuo es igual al cuadrado en EH.
- Pero el rectángulo BD, EF es igual a ED, por lo tanto el paralelogramo BD es igual al cuadrado en HE.
- Y BD es igual a la figura rectilínea A. Por lo tanto la figura rectilínea A es también igual al cuadrado el cual puede ser descrito en EH .
- Por lo tanto un cuadrado, el cual puede ser descrito en EH, ha sido construido igual a la figura rectilínea A.

□

Lo que se ha hecho fue presentar un método mediante el cual es posible operar con las figuras rectilíneas como magnitudes, cuadrándolas. Sin embargo, existe otra manera de sumar figuras planas basada en la Proposición *I.45*. Dadas dos figuras rectilíneas planas f_1 y f_2 se puede construir primero un paralelogramo p_1 igual a f_1 y posteriormente un paralelogramo p_2 tal que contenga el mismo ángulo y base que la serie de paralelogramos p_i con los que se construyó p_1.[37] Es decir, es cierto que es posible construir cuadrados para posteriormente sumarlos pero en realidad se puede hacer desde la construcción del paralelogramo.

Finalmente, es muy importante notar el papel fundamental del tercer teorema de congruencia. Tanto para cuadrar las figuras planas rectilíneas como para realizar la construcción de paralelogramos, este teorema de congruencia fue fundamental. Es decir, ésta es una de las restricciones o condiciones de la estructura de figuras planas rectilíneas.

[37] Ver la demostración anterior de *I.45*

Capítulo 4

Geometría sólida

En este capítulo se introducirá la geometría sólida. Se analizarán los casos de los sólidos en general y del ángulo sólido triedro visualizado como la arista de una pirámide.

Con respecto a los sólidos en general, se mostrará cómo es que estos se pueden considerar iguales y semejantes con la finalidad de conocer mejor como es el manejo que les da Euclides. Se explicará además porque no se considerará una operación entre ellos de la misma manera que se hizo con los objetos geométricos anteriores.

Posteriormente se analizará el caso del ángulo sólido como pirámide. Se verá en qué casos podrían ser operados y en qué casos no.

4.1. Introducción y antecedentes

Hasta ahora se han estudiado los objetos de la geometría plana, las líneas y los ángulos planos y las figuras planas rectilíneas. Y se analizó cómo es que Euclides les da un estatuto de magnitudes. En esta sección se estudiará la geometría sólida y se verá que existen características propias de esta geometría que hacen que no se permita decir de manera contundente que sus objetos geométricos son tratados como magnitudes.

Euclides inicia su estudio de la geometría de sólidos en el libro XI y la termina hasta el libro XII. Las definiciones necesarias para poder desarrollar las proposiciones de la geometría sólida se encuentran en dicho libro. Los sólidos que estudia Euclides son el cono, el cilindro, la pirámide, los paralelepípedos y los poliedros en general. Los paralelepípedos y prismas los estudia en el libro XI, hace una generalización de lo que hizo anteriormente en el primer libro de *Los Elementos* con los paralelogramos. Con respecto a las pirámides y el ángulo sólidos, éstos son el objeto de estudio primordial del libro XII. Y por último, los poliedros se presentan hasta el último libro de la colección, donde construye los bien conocidos sólidos platónicos.[1]

[1]Los sólidos platónicos son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras.

Los sólidos platónicos son el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Estos son los únicos

Es pertinente preguntarse por qué es que el estudio de esta tesis excluye el libro XI. Y la razón de ésto es que en dicho libro no hay teoremas ni problemas que nos permitan, a pesar de que en él existe el ángulo sólido, determinar a este elemento como magnitud. En cambio en el libro XII, este ángulo es fundamental y los problemas y teoremas tienen que ver directamente con las propiedades del ángulo sólido como se verá posteriormente.

Sin embargo, es importante hacer algunas observaciones acerca del libro XI. En este libro se presenta el marco axiomático de la geometría sólida. Euclides presenta como teoremas, lo que en realidad son axiomas de la geometría de sólidos y en realidad las demostraciones de estos teoremas no tienen rigor alguno. De hecho, Hilbert en su obra presenta éstos teoremas como axiomas. Un ejemplo es el axioma 6 del primer grupo de axiomas de su obra, conocidos como los axiomas de incidencia, y la Proposición *XI.3* los cuales dicen lo siguiente:

Axioma. *($I.6_H$) Si dos planos α y β tienen un punto en común A entonces tienen por lo menos un segundo punto en común.*

Proposición. *(XI.3) Si dos planos se cortan uno a otro, su intersección común es una línea recta.*

De esta manera se puede ver el papel que tiene el libro XI para la geometría sólida. Es importante notar que a pesar de que este libro no contiene ni nociones comunes ni postulados, lo cual se podría esperar dado que se trata ahora de una geometría nueva y distinta de la geometría plana, presenta una serie de teoremas que en realidad son axiomas y los cuales permiten acotar y determinar cuáles son los fundamentos de la geometría sólida. Esto además, refuerza lo que se dijo anteriormente acerca de las nociones comunes, es decir, que éstas aplican para todos los objetos y en particular ahora para los objetos de la geometría sólida. En cuanto a los postulados, éstos son válidos tanto en la geometría plana como a la geometría sólida.

Es importante aclarar que, a pesar de que las nociones comunes colaboran en el desarrollo del libro XII, en el caso del ángulo sólido, no es tan sencillo que éstas regulen a dicha magnitud. Ésto se verá en la sección correspondiente, sin embargo como adelanto, ésto tiene que ver con que no es una magnitud que Euclides pueda definir de manera única.

4.2. Figuras sólidas

A continuación se presenta la definición de figura sólida que Euclides proporciona.

Definición. *(XI.1) Un **sólido** es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.*

Además de esta definición, Euclides proporciona en su siguiente definición la manera en que se llamará al extremo de un sólido.

---

ya que no es posible construir otro sólido diferente de los anteriores que cumpla todas las propiedades exigidas, es decir, convexidad y regularidad.

Definición. *(XI.2) Y el **extremo de un sólido** es una superficie.*[2]

Análogamente al caso de las líneas rectas y los ángulos, éstas son definiciones euclidianas que no plantean de manera formal qué es un sólido o qué características debe tener un objeto geométrico para poder llamarse sólido. Sin embargo, cada tipo de sólido con el que Euclides trabaja se define de manera individual, por lo cual esta definición de sólido no es la única herramienta que se tiene para poder determinar de manera clara los elementos geométricos de la geometría sólida. De la misma manera a los casos anteriores se verá qué es un sólido en la geometría, de qué manera Euclides trabaja con ellos y hasta qué punto y bajo qué condiciones la figura sólida puede considerarse una magnitud. Se comenzará por establecer a qué figuras se refiere el autor cuando habla de sólidos. Los sólidos planteados por Euclides son las pirámides, los prismas, las esferas, conos, cilindros, octaedros, icosaedros y dodecaedros. Sus respectivas definiciones se establecen al inicio del libro XI. [3]

Para poder analizar si estas figuras se puedan considerar como magnitudes en el texto euclidiano es necesario definir cómo es que dichas figuras están determinadas y esto se hace, análogamente a los casos anteriores, evaluando cuándo es que dos figuras sólidas están determinadas, es decir, ¿Qué quiere decir que dos figuras sólidas sean iguales? En la geometría sólida la superposición ya no es un criterio de igualdad, sino que Euclides introduce un nuevo criterio comparativo mediante dos definiciones. Las figuras sólidas son iguales entre sí, si sus partes son iguales. Se presentan a continuación las siguientes definiciones:

Definición. *(XI.9) **Figuras sólidas semejantes** son las comprendidas por planos semejantes iguales en número*

[2]**Definición**. Una **superficie** es aquello que sólo tiene longitud y anchura.

[3]Se presentan las definiciones de dichos sólidos, porque se considera interesante que el lector las tenga a la mano y de esta manera pueda darse una idea general de cómo es que Euclides presenta a estos sólidos, porque, aunque esta sección trata de las figuras sólidas de manera general, cada figura sólida es un caso particular que fue definido individualmente. Estas definiciones, como el lector podrá corroborar son mucho más explicativas de cómo es el objeto geométrico en cuestión.

Definición. *XI.12 Una **pirámide** es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.*

Definición. *XI.13 Un **prisma** es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás planos son paralelogramos.*

Definición. *XI.18 Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un **cono**. Y si la recta que permanece fija es igual a la que queda del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.*

Definición. *XI.21 Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un **cilindro**.*

Definición. *XI.25 Un **cubo** es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.*

Definición. *(XI.10)* ***Figuras sólidas iguales y semejantes*** *son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño.*

Según estas definiciones, la semejanza de las figuras recae en la semejanza de los planos los cuales tendrían que ser iguales en número y tamaño. La semejanza de figuras planas como hemos visto anteriormente está basada en la teoría de congruencia para triángulos, lo cual remite nuevamente al estudio de las figuras planas como magnitudes. Estas definiciones establecen un criterio de comparación entre las figuras sólidas, el cual ya no está basado en la superposición directa de los objetos geométricos en cuestión. Con estas definiciones se tienen determinadas las figuras sólidas que están comprendidas por planos. Sin embargo, estas definiciones introducirán cierta problemática en la igualdad de las figuras piramidales que se verán posteriormente.

Ahora, de manera análoga a la operación entre figuras planas rectilíneas, la operación de las figuras sólidas llevaría al problema particular de la duplicación del cubo. Es decir, en lugar de cuadrar o transformar las figuras en paralelogramos para posteriormente operar con ellas, lo que se tendría que hacer es transformar en cubos a las figuras sólidas para posteriormente operar con ellas. Este problema no se reduce únicamente a la duplicación de dicha figura, sino al manejo y operación no solo de dicho sólido. En general se requiere operar con cualquier figura sólida y el caso más sencillo es el de "sumar" dos cubos iguales.

En estos términos, por razones análogas al problema de las figuras planas no rectilíneas y a la cuadratura del círculo, el problema de la suma de sólidos, es un problema cuya solución no se puede obtener por medio de "regla y compás" y que genera una ecuación de tercer grado. La solución de dicho problema consiste en construir el lado de un cubo que sea el doble que otro cubo cuyo lado sea conocido. La solución implica el conocer la raíz cúbica de dos, el cual es un número algebraico que no puede obtenerse de números enteros que se obtengan como resultado de alguna suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces cuadradas, que son las únicas operaciones que pueden hacerse con regla y compás. Esto es así porque el polinomio mínimo de la raíz cúbica de dos sobre los racionales tiene tercer grado. De la misma manera al caso anterior, se puede concluir que no es un problema que competa al texto euclidiano por el tipo de ecuación que genera.

Es necesario mencionar que en *Los Elementos* existen proposiciones que permiten construir sólidos iguales a sólidos dados, análogamente a copiar rectas o copiar ángulos planos. Podría ser que dichas construcciones generaran operaciones entre las figuras sólidas en cuestión, sin embargo este tema es ajeno a los objetivos planteados en esta tesis por lo cual no se estudiarán dichos casos. Pero, para el caso de los triedros, ángulos sólidos de tres ángulos, dado que se visualizarán como pirámides, sí se trabajarán de esta forma con proposiciones que permiten construir ángulos sólidos iguales a ángulos sólidos dados.

Después de esta presentación de los sólidos de manera general, estamos listos para abordar el tema que nos interesa que es el del ángulo sólido y particularmente el ángulo sólido triedro que, como se dijo en la introducción, será la magnitud que se estudiará,

4.3. Ángulo sólido

El objetivo de esta sección es presentar al lector el conjunto de los triedros, ángulos sólidos formados por tres rectas. La definición de triedro que se utiliza es extrapolada de la definición euclidiana de ángulo sólido. Una vez presentado el modelo en cuestión, se mostrarán algunas propiedades de dicha estructura. Además de manera general se analizarán propiedades de los ángulos sólidos, es decir no solo aquellos formados por tres ángulos planos.

4.3.1. Proceso de definición del ángulo sólido

Euclides define el ángulo sólido de la siguiente manera:

Definición (XI.11)**.** *Un* ***ángulo sólido*** *es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: Un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.*

Las definiciones anteriores de línea y de ángulo han sido constituidas como magnitudes mediante un solo factor que las determina. Esta nueva definición a diferencia de las anteriores se determina por cuando menos tres magnitudes diferentes, dependiendo el número de caras del ángulo. Ésto se debe a que la definición dice explicítamente que un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí, es decir se tienen al menos tres ángulos planos, uno por cada par de rectas. Esta definición no limita el número de rectas que se intersectan en un punto. En *Los Elementos* se estudia únicamente el caso de los ángulos sólidos triedros, que son aquellos que constan solamente de tres rectas. Sin embargo, los enunciados de las proposiciones se refieren a ángulos sólidos cualesquiera, aunque las pruebas solo consideran el ángulo sólido triedro. Se puede establecer una definición basada absolutamente en la definición anterior.

Definición. *Un* ***triedro*** *es la inclinación de tres líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: Un triedro es el que está comprendido por tres ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.*

4.3.2. Condiciones del ángulo triedro

Euclides considera al triedro como el vértice de una pirámide de base triangular. Esto servirá para determinar sus componentes mediante la visualización de los triedros como pirámides. Antes de hacerlo, se presentarán tres proposiciones pertinentes para conocer el ángulo sólido triedro euclidiano. Estas proposiciones representan condiciones que deben cumplir los elementos de un ángulo sólido triedro. Además, ayudarán posteriormente a definir los elementos que determinan al triedro y la notación adecuada para denotarlos.

Proposición. *(XI.20) Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.*

Instanciación. *Sea el ángulo sólido en A contenido por los tres ángulos planos BAC, CAD, DAB.*

Especificación o definición. *Entonces, cualesquiera dos de los ángulos BAC, CAD, DAB, tomados juntos de alguna manera, son mayores que el restante.*

Caso I

Demostración. Si los ángulos BAC, CAD y DAB son iguales entre sí entonces dos de ellos son mayores al tercero. □

Caso II

Si no son iguales entre sí, entonces se tiene lo siguiente. Sea BAC el mayor.

Construcción.

- *En la recta AB y en el punto A, sea el ángulo BAE construido en el plano que pasa a través de BA y AC, igual al ángulo DAB. (Prop. I.23)*
- *Sea AE construido igual a AD (Prop. I.2)*
- *Sea BEC trazado a través de E.*
- *Cortar las líneas rectas AB y AC en los puntos B y C*
- *Sean DB y DC unidas.*

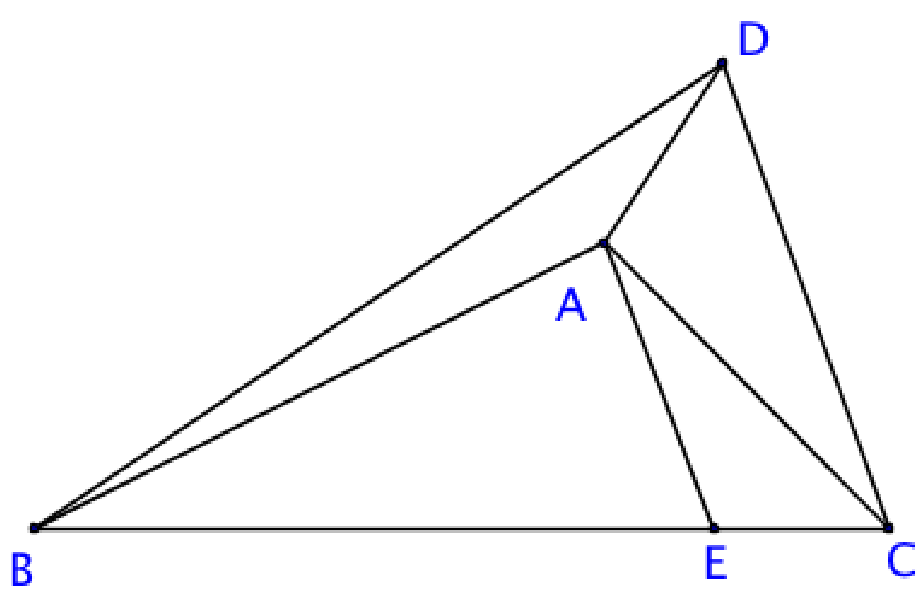

Figura 4.1:

Demostración.

- Ahora, como DA es igual a AE y AB es común, dos lados son iguales a dos lados y el ángulo DAB es igual al ángulo BAE; entonces la base DB es igual a BE. (*Prop. I.4*)
- Y dado que los lados BD, DC son mayores que BC y de éstos fue probado que DB es igual a a la base BE, entonces el restante DC es mayor a EC (*Prop I.20*)
- Ahora, si DA es igual a AE y AC es común y DC es mayor que la base EC entonces el ángulo DAC es mayor al ángulo EAC. (*Prop. I.25*)
- Pero el ángulo DAB fue probado también igual al ángulo BAE, entonces los ángulos DAB, DAC son mayores al ángulo BAC.
- De la misma manera se puede probar que los ángulos restantes, tomados de dos en dos, son mayores que el restante.

□

Esta proposición es análoga a la desigualdad del triángulo pero en la geometría del espacio. Además, plantea una especie de asociación de los ángulos planos del ángulo sólido con arcos de circunferencia asociados a cada lado del triedro. Estos arcos de circunferencia serán presentados más adelante.

A continuación se presenta la siguiente condición euclidiana sobre los ángulos planos del ángulo sólido.

Proposición. *(XI.21) Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.*

Esta proposición, de una manera análoga al caso de los ángulos planos, presenta una cota en la suma que deben dar los ángulo planos juntos. Esta condición es fundamental ya que de no ser así los ángulos planos no formarían un ángulo sólido sino que habría una deformación a un plano.

4.3.3. Construcción del ángulo sólido

Antes de comenzar a definir de qué manera está determinado un triedro, es necesario como el lector ha podido observar en los casos de los objetos geométricos anteriores, establecer los criterios bajo los cuales se puede determinar cuándo dos ángulos sólidos son iguales, es decir que componentes son los fundamentales para determinar a un triedro. A continuación se presentarán dos proposiciones mediante las cuales Euclides muestra cómo construir dos ángulos sólidos a partir de ciertas condiciones. En estas construcciones se podrá observar cómo se determina un ángulo sólido triedro.

Proposición. *(XI.23) Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.*

Instanciación. *Sean los ángulos ABC, DEF, GHK tres ángulos planos dados, y sean dos de estos tomados mayores al restante y más aún, los tres deben de ser menores a cuatro angulos rectos.*[4] *Sean AB, BC, DE, EF, GH, HK cortados iguales unos a otros. Y sean AC, DF, GK unidos.*

Especificación o definición. *Entonces es posible construir un triángulo a partir de las rectas igual a AC, DF, GK. (Prop. XI.22)*

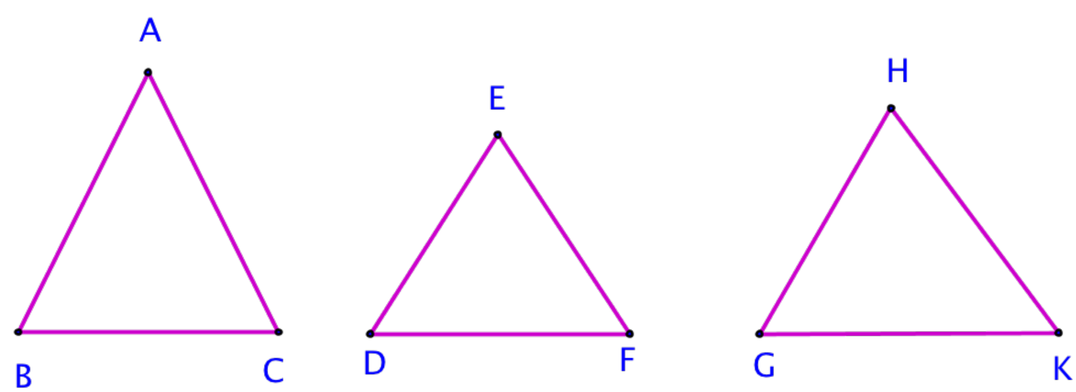

Figura 4.2:

Construcción.

- *Sea LMN construido tal que AC es igual a LM, DF a MN y GK a NL.*
- *Sea descrito el círculo LMN.*
- *Se toma el centro del círculo y se llamado O.*
- *Sean trazadas las rectas LO, MO y NO. [Post. 1]*

[4]El lector puede observar que en esta proposición Euclides hace uso de las dos proposiciones anteriores como condiciones para poder construir un ángulo sólido triedro. Ésto es de la misma manera que en el caso de los triángulos y la desigualdad del triángulo.

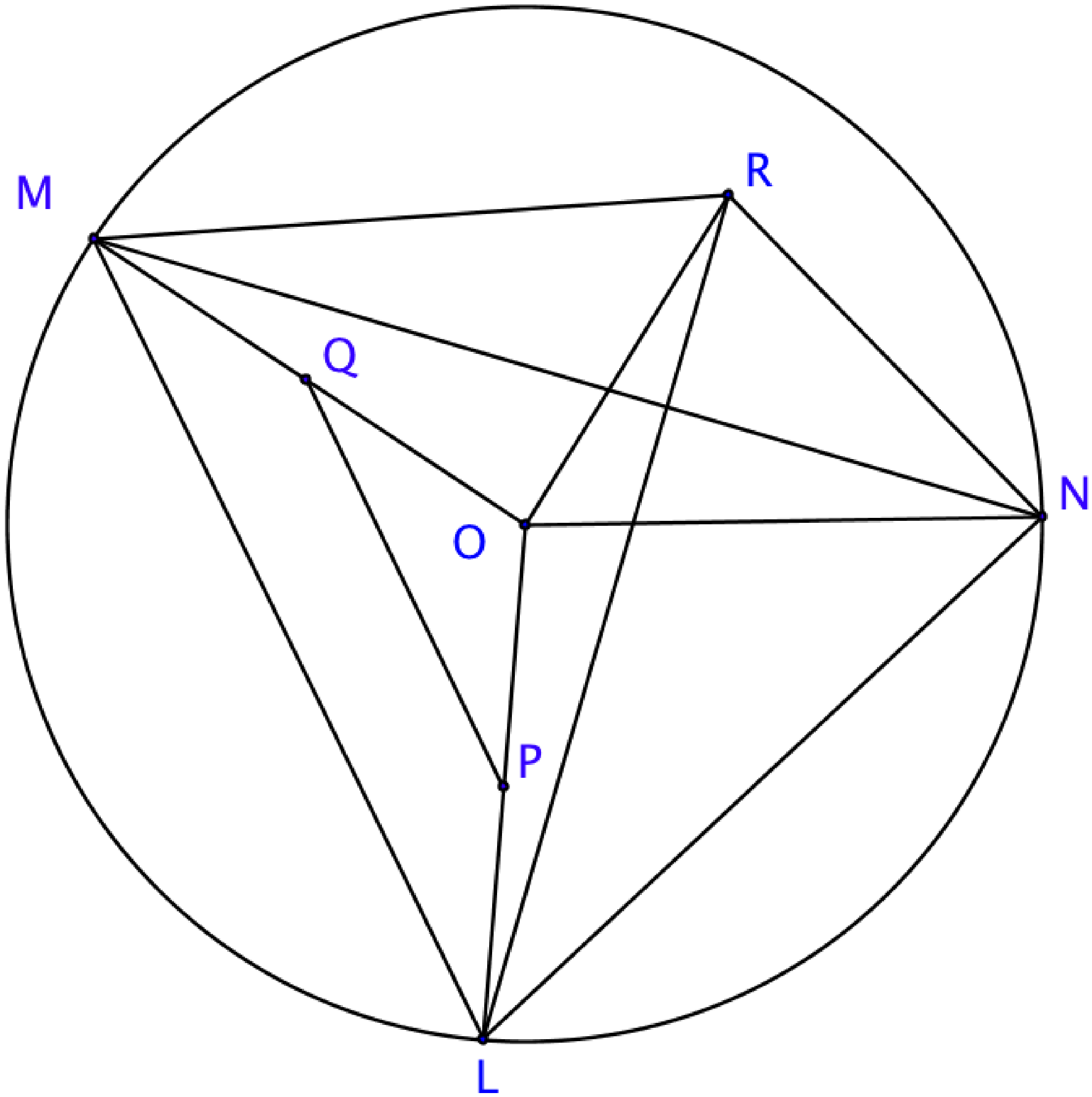

Figura 4.3:

AB es mayor a LO

Caso I: Sean AB y LO iguales.

Demostración.

- Dado que AB y LO son iguales, como AB es igual a BC y OL a OM, los dos lados AB y BC son iguales a los lados LO, OM respectivamente.

- Y por hipótesis, la base AC es igual a la base LM; entonces el ángulo ABC es igual al ángulo LOM *[Prop. I.8]*

- Por la misma razón el ángulo DEF es igual al ángulo MON y el ángulo GHK al ángulo NOL.
- Entonces los tres ángulos ABC, DEF, GHK son iguales a los tres ángulos LOM, MON, NOL. Entonces como los tres ángulos LOM, MON, NOL son iguales a cuatro ángulos rectos, los ángulos ABC, DEF, GHK también son iguales a cuatro ángulos rectos.
- Pero como también son menores a cuatro rectos por hipótesis entonces es un absurdo.
- Por lo tanto AB no es igual LO.

□

Tampoco es posible que AB sea menor que LO.

Caso II: AB menor que LO

Demostración.

- Sea OP contruido igual a AB y OQ igual a BC y PQ trazado.
- Entonces como AB es igual a BC, OP es también igual a OQ tal que el restante LP es igual a QM.
- Entonces LM es paralela a PQ y LMO es equiangular con PQO [Prop. VI.4]
- Entonces, como OL es a LM, OP es PQ *[Prop. V.16]*
- Pero LO es mayor a OP, entonces LM es también mayor a PQ.
- LM fue hecho igual a AC, entonces AC es también mayor a PQ.
- Dado que dos lados AB, BC son iguales a los lados PO, OQ y la base AC es mayor a la base PQ entonces el ángulo ABC es mayor al ángulo POQ *[Prop. I.25]*
- De manera similar se puede probar que DEF es también mayor al ángulo MON, y el ángulo GHK mayor al ángulo NOL.
- Entonces los tres ángulos ABC, DEF, GHK son mayores a los ángulos LOM, MON, NOL.
- Pero por hipótesis, los ángulos ABC, DEF, GHK son menos que cuatro ángulos rectos, entonces los ángulos LOM, MON, NOL son menores a cuatro ángulos rectos. Pero también son iguales a cuatro ángulos rectos, lo cual es absurdo.
- Por lo tanto AB no es menor a LO
- Fue probado que tampoco son iguales. Por lo tanto AB es mayor a LO.
- Sea OR construido en ángulo recto en el punto O al plano del círculo LMN [*Prop. XI.12*]

- Y sea el cuadrado en OR igual al área en el cuadrado AB es mayor al cuadrado LO.
- Sean RL, RM y RN unidas.
- Entonces, dado que RO está en ángulo recto a cada línea LO, MO, NO.
- Y dado que LO es igual a OM, mientras que OR es común y en ángulo recto, entonces la base RL es igual a la base RM. [*Prop. I.4*]
- Por la misma razón RN es también igual a cada una de las líneas RL, RM; entonces las tres líneas rectas RL, RM y RN es igual una a otra.
- Ahora, dado que por hipótesis el cuadrado en OR es igual al área mientras que el cuadrado en AB es mayor que el cuadrado en LO.
- Por lo tanto el cuadrado en AB es igual a los cuadrados en LO, OR.
- Pero el cuadrado en LR es igual a los cuadrados en LO, OR dado que el ángulo LOR es recto; *[Prop. I.47]*
- Por lo tanto el cuadrado en AB es igual al cuadrado en RL, entonces AB es igual a RL.
- Pero cada una de las rectas BC, DE, EF, GH, HK es igual a AB, mientras que cada una de las líneas rectas RM, RN es igual a RL, entonces cada una de las líneas rectas AB, BC, DE, EF, GH, HK es igual a cada una de las rectas RL, RM, RN.
- Dado que dos lados LR, RM son iguales a dos lados AB, BC y la base LM es por hipótesis es igual a la base AC, entonces el ángulo LRM es igual al ángulo ABC. [*Prop. I.8*]
- Por la misma razón, el ángulo MRN es también igual al ángulo DEF y al ángulo LRN al ángulo GHK.
- Por lo tanto, a partir de los tres ángulos planos LRM, MRN y LRN, los cuales son iguales a tres ángulos ABC, DEF, GHK, el ángulo sólido en R ha sido construido el cual está contenido por LRM, MRN y LRN.

□

Esta proposición da una construcción para un ángulo solido dado a partir de tres ángulos planos, tales que dos son mayores que el tercero. Es una especie de desigualdad del triángulo que identifica el arco del triangulo con el ángulo plano.

La siguiente proposición enseña a construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado, por lo cual es clave en cuanto a la determinación de las componentes del ángulo sólido:

Proposición. *XI.26 Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.*

Instanciación. *Sea AB la línea recta dada, A el punto en ella y el ángulo en D contenido por los ángulos EDC, EDF, FDC el ángulo sólido dado.*

Especificación o definición. *Entonces se requiere construir en la línea recta AB y en el punto A, un ángulo sólido igual al ángulo sólido en D*

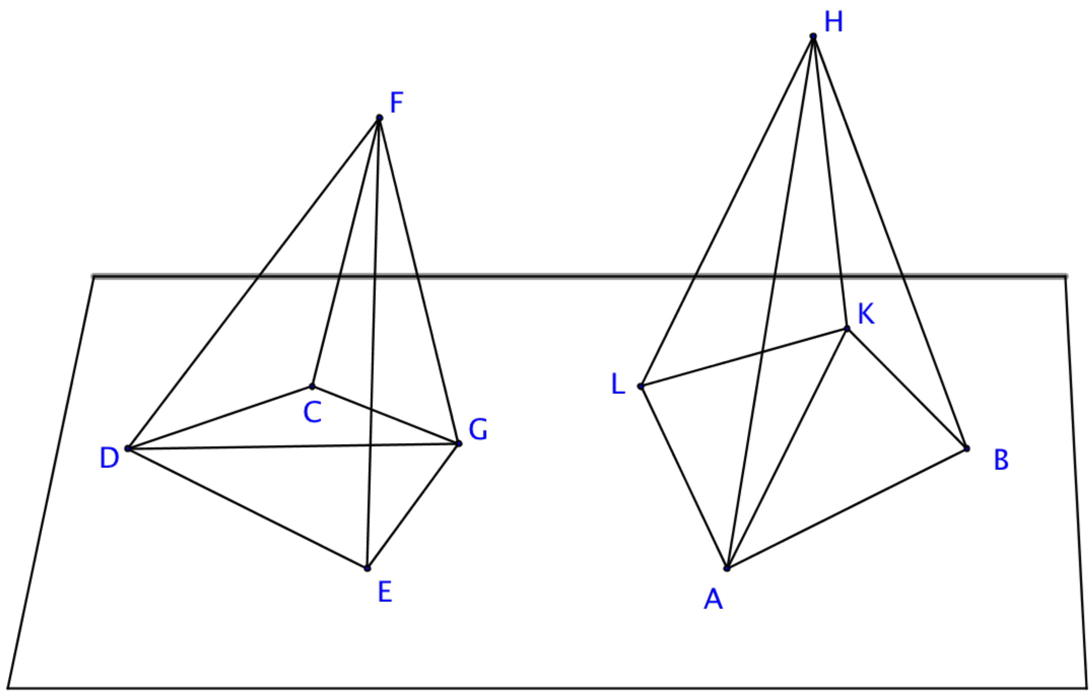

Figura 4.4:

Construcción.

- *Sea F tomado arbitrariamente en DF, sea FG trazada desde F perpendicular al plano a través de ED, DC y que intersecte al plano en G [Prop. XI.II]*
- *Sea DG unido*
- *Sea construido en AB y en el punto A el ángulo BAL igual al ángulo EDC y el ángulo BAK igual al ángulo EDG, [Prop. I.23].*
- *Sea AK construido igual a DG*
- *Sea KH trazado desde el punto K en ángulo recto al plano determinado por las rectas BA, AL [Prop. XI.12]*
- *Sea KH construido igual a GF y sea HA unido.*

Demostración.

- Entonces, por demostrar que el ángulo sólido en A contenido por los ángulos BAL, BAH, HAL es igual al ángulo sólido en D contenido por los ángulos EDC, EDF y FDC.
- Entonces sean AB, DE cortadas iguales y sean HB, KB, FE, GE unidas
- Entonces, dado que FG está en ángulo recto al plano de referencia, entonces también hará ángulo recto con todas las líneas recta que lo intersectan en el plano de referencia. [Def. XI.3]
- Entonces los ángulos FGD y FGE son rectos.
- Por la misma razón cada uno de los ángulos HKA, HKB es también recto.
- Y dado que los lados KA, AB son iguales a los lados GD, DE respectivamente y tienen ángulos en común entonces la base KB es igual a la base GE
- pero KH también es igual a GF y contienen ángulos rectos, entonces HB es también igual a FE.
- De nuevo, dado que los lados AK, KH son iguales a los lados DG, GF y contienen ángulos rectos, entonces la base AB es igual a DE, entonces AB es igual a DE, así los dos lados HA, AB son iguales a los lados DF, DE y la base HB es igual a la base FE; entonces el ángulo BAH es igual al ángulo EDF. *[Prop. I.8]*
- Por la misma razón, el ángulo HAL es también igual al ángulo FDC y el ángulo BAL es también igulal al ángulo EDC.

□

Conclusión. *Entonces, en la línea recta AB, y en el punto A en ella, un ángulo sólido ha sido construido igual a un ángulo sólido dado en D.*

En esta proposición se puede ver claramente el problema que se había mencionado anteriormente acerca de la igualdad entre figuras piramidales. De acuerdo con la definición *XI.10*, los sólidos que coinciden en tamaño de caras y número deben de ser iguales. Ésto no considera la posibilidad de que los sólidos sean simétricos, es decir, sólidos que tienen las mismas caras en número y tamaño pero que sin embargo no coinciden entre sí en el sentido de la congruencia. No se pueden hacer coincidir.[5] Esta proposición muestra de manera indirecta cómo es que se pueden construir dos ángulos sólidos. El ángulo se construye de un lado de la línea AB sin embargo, se pudo haber construido del otro lado y la misma demostración hubiera sido correcta. Estos hechos nos llevan a aceptar la simetría como igualdad en la geometría sólida, es decir, para que dos sólidos sean iguales no será necesario que sean congruentes.

[5]El caso de las parejas simétricas idénticas pero no congruentes es analizado por Kant en varias ocasiones. Como ejemplo el plantea el caso de la mano derecha con la mano izquierda, las cuales son idénticas y sin embargo no coinciden. Posteriormente es analizado por Robert Simson (1756) quien se da cuenta de que la definición XI.10 no debería de ser definición sino un teorema. Más tarde, Cauchy lo demuestra en su proyecto de tesis doctoral.[2]

4.3.4. Determinación y notación del ángulo triedro

Ahora, una vez que se han establecido: la definición de triedro, las proposiciones que presentan las condiciones que debe de cumplir un triedro y el concepto de igualdad, se puede comenzar a revisar las componentes de los triedros para poder determinarlos de manera clara. Siguiendo la definición euclidiana, un triedro está formado por tres rectas no coplanares que se intersectan en un punto. Esta construcción determina las siguientes magnitudes: Los ángulos formados en pares por las rectas se denotarán en la figura como x_1, x_2, x_3, los vértices del triángulo serán denotados *A, B* y *C* y finalmente los ángulos que los subtienden α, β, γ respectivamente.

Por las proposiciones *XI.20* y *XI.21* se sabe que dichos ángulos deben cumplir que la suma de cualesquiera dos de ellos sea siempre mayor al restante y que la suma de los tres sea menor a cuatro ángulos rectos. Esta suma se refiere a la suma planteada en la sección del ángulo, es decir, la suma entre ángulos planos, para la cual se estudiaron sus condiciones y propiedades. A continuación en la figura siguiente se puede ver una representación de la descripción anterior:

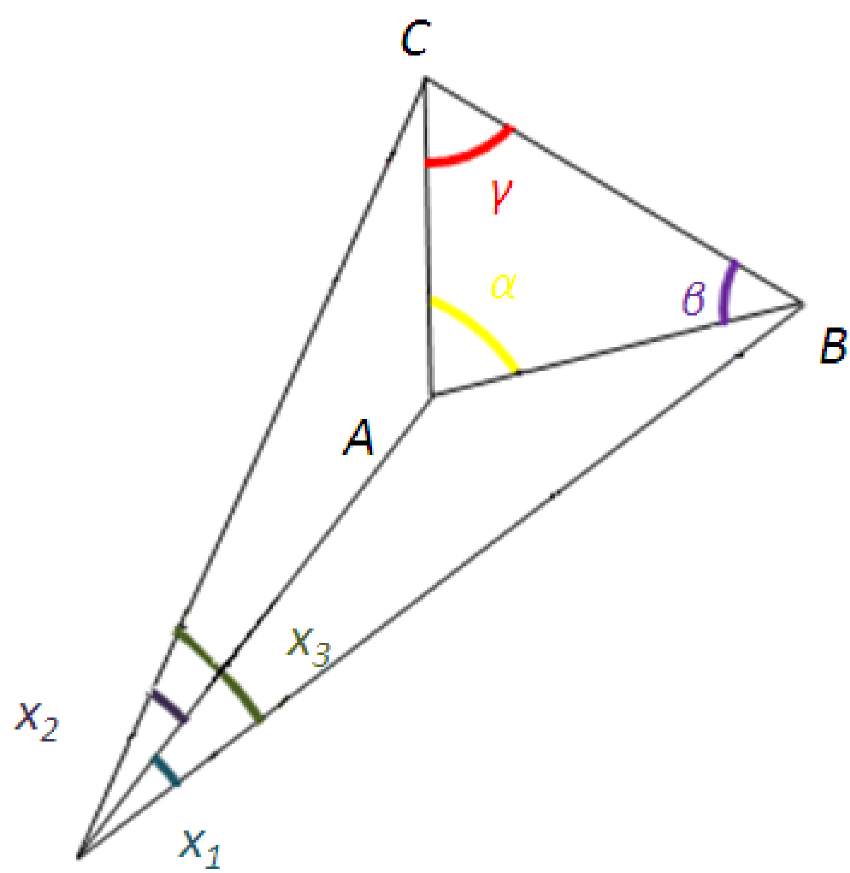

Figura 4.5: Triedro en pirámide

Para poder examinar el conjunto de los triedros de manera general, se establecerá una notación sobre un modelo sencillo. Las magnitudes que determinan el ángulo sólido triedro son los ángulos de las caras, considerando que la simetría según la definición XI.10 es un caso de igualdad, por lo cual la altura de la pirámide es indiferente. Por esta razón es posible representar a los ángulos sólidos triedros con origen en el centro de la esfera unitaria. Se puede observar que el triángulo ABC generado por los puntos en las rectas que forman al ángulo sólido será ahora un triángulo esférico y no plano.

La siguiente figura representa una esfera de radio uno con un triedro que parte del origen.

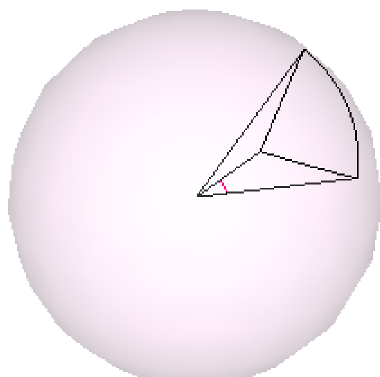

Figura 4.6: Modelo esfera

Una vez que se ha establecido el modelo sobre el cual trabajaremos, introduzco la notación que he considerado adecuada para representar al triedro cuyos ángulos planos entre las rectas que lo forman son x_1, x_2, x_3 como:

$$s_1 = (x_1, x_2, x_3)$$

que a su vez denotaremos como:

$$x_1 = [(r_1, r_2), n]$$

$$x_2 = [(r_2, r_3), n]$$

$$x_3 = [(r_1, r_3), n]$$

Donde r_1, r_2 y r_3 son los rayos que forman al angulo sólido y que parten del origen de la esfera. Análogamente al ejemplo de la pirámide, los puntos de intersección de los rayos con la superficie de la esfera se denotarán A, B y C y los ángulos que las subtienden son α, β y γ respectivamente.

De esta manera se puede decir que un **triedro** es el ángulo sólido formado por los rayos r_1, r_2 y r_3, que tienen como origen el centro esfera . Estos rayos forman por pares los ángulos x_1, x_2, x_3 y cortan a la superficie de la esfera en tres puntos, los cuales determinan el triángulo esférico ABC, cuyos ángulos interiores son α, β y γ respectivamente. A continuación se presenta la figura asociada a la descripción anterior:

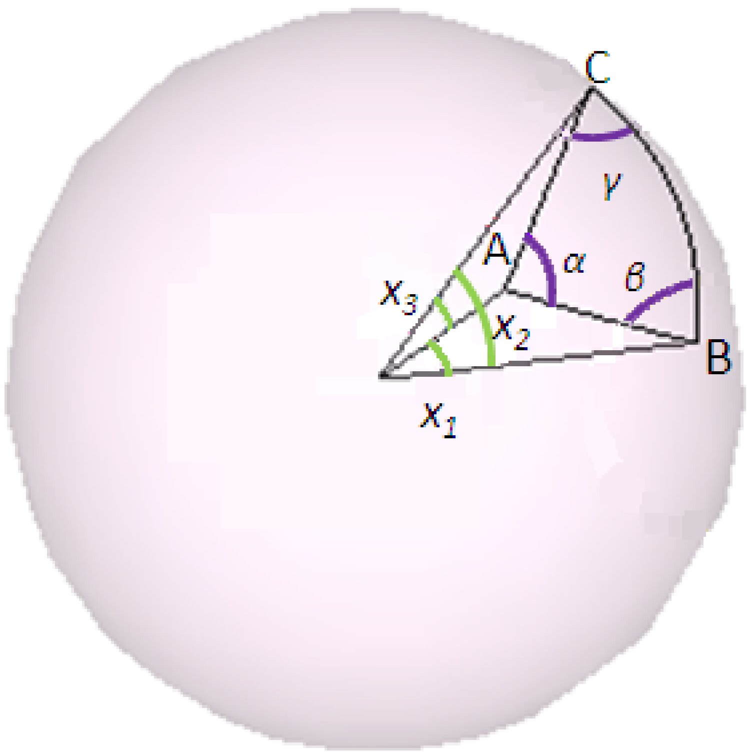

Figura 4.7: Modelo esfera

4.3.5. Extrapolación de la operación binaria del conjunto de triedros

Ahora se analizará cómo es posible definir una operación en el conjunto de triedros, sin perder de vista el hecho de que Euclides no establece ninguna proposición con la cuál sugiera alguna operación entre estas entidades geométricas. Sin embargo, como vimos anteriormente, establece una proposición que permite construir un triedro a partir de un triedro dado. La cuestión es preguntarse por qué es que esa proposición no funciona completamente, como en el caso de los ángulos planos, para definir una operación de adición la cual se identifique con la concatenación de ángulos sólidos. Lo que sucede es que la concatenación entre ángulos triedros no es tan sencilla, ni tan general como para los ángulos planos. En cambio, cualesquiera dos ángulos planos se pueden sumar mediante la construcción apropiada. En el caso de los ángulos sólidos triedros, éstos deben cumplir ciertas condiciones para ser sumados o concatenados y estos cumplan que el resultado de dicha concatenación pertenezca a la estructura de los triedros, es decir, tendrá que cumplir con ser un triedro. Ésto es lo que condiciona dicha concatenación.

Una de las limitaciones inmediatas es cuando dos de los pares de rectas que forman a los triedros no son iguales. Como se puede ver en la siguiente figura, el pegado no se podría realizar si lo que se quiere obtener es un nuevo triedro. En cambio, sí se obtiene cierto ángulo pero no la pirámide asociada a éste.

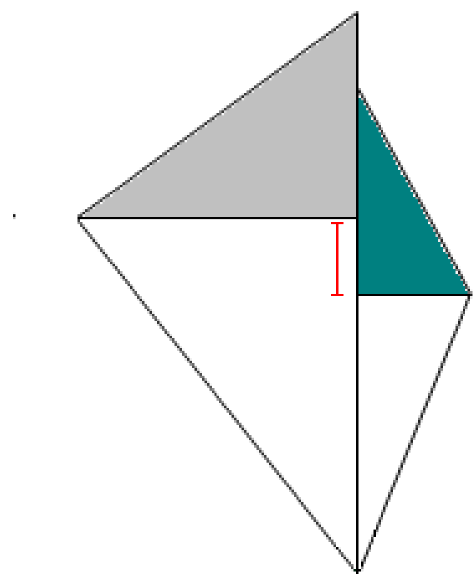

Figura 4.8: Triedro en píramide con alturas diferentes

Este problema se resuelve de manera sencilla mediante la representación de los triedros en una esfera de radio 1. Esto es válido dado que las magnitudes que importan para definir un triedro son los ángulos en las caras y no la longitud de las rectas que lo forman como se dijo antes.

Otra de las restricciones para la suma o concatenación de triedros es que los dos triedros deben de tener en común uno de sus ángulos en los planos que lo conforman, para poder pegar estos dos lados del triedro. Como ejemplo, en la figura siguiente vemos que los triedros T_1 y T_2 tienen en común el ángulo x_3 que corresponde a la cara ABC que ambos comparten. Si éste no es el caso, la concatenación daría lugar a un ángulo tetraedro formado por cuatro ángulos planos.

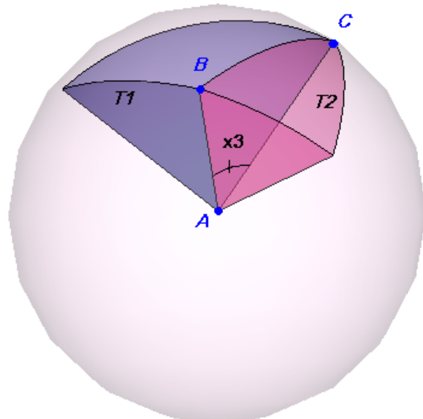

Figura 4.9: Modelo esfera

Finalmente la condición de cerradura genera una última restricción, uno de los pares de ángulos del pegado debe sumar dos ángulos rectos para que se genere un triedro y no un ángulo sólido de 4 lados. Enunciaré a continuación las condiciones recién establecidas con la debida notación. Se denotará primero al conjunto de los triedros como $\mathcal{T}$.

Sean s_1 ,$s_2 \in T$ donde $s_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $s_2 = (y_1, y_2, y_3)$, $x_1 = \lhd(\vec{a}, \vec{b})$, $x_2 = \lhd(\vec{b}, \vec{c})$ y $x_3 = \lhd(\vec{a}, \vec{c})$, los ángulos del triedro formado en la superficie de la esfera por s_1 son α_1, β_1 y γ_1 y por s_2 son α_2, β_2 y γ_2:

- Por lo menos uno de los ángulos planos de las caras debe de ser igual, es decir, s_1 y s_2 son tales que $x_i = y_i$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$
- Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $x_1 = x_2$. Para que s_1 y s_2 puedan ser sumados una de las siguientes dos condiciones se debe de cumplir:

  II Por lo menos un par de los ángulos del pegado debe sumar dos rectos, es decir, por lo menos uno de los dos casos siguientes debe cumplirse:

    1 α_1 + α_2=2R
    1 β_1 + γ_2=2R

  II Por lo menos un par de los ángulos del pegado debe ser igual, es decir, alguna de las siguientes condiciones se cumple:

    - α_1=α_2
    - β_1=γ_2

  Donde R es igual a un ángulo recto.

Ahora, esta operación entre triedros es muy limitada. Como el lector pudo observar, no cualesquiera dos triedros pueden ser operados de manera que lo que se obtenga sea un ángulo sólido triedro. Pero se considerará que no solo ésta es la única razón para que el ángulo sólido no se considere una magnitud, sino que en general las figuras sólidas no tienen ese estatuto en la geometría euclidiana. Euclides no las estudia de esta manera.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se trabajó con los objetos geométricos que Euclides presentó en su primer libro de *Los Elementos*, con la intención de definirlos como estructura, con las propiedades que se podían obtener a partir del conocimiento desarrollado por Euclides en sus proposiciones. En su momento, para cada estructura se presentaron algunas conclusiones particulares de cada uno de los casos. En este capítulo la intención es exponer algunos hechos no particulares sino que tienen que ver con el estudio de todas las estructuras que se revisaron y su relación entre ellas.

En cada caso, para los segmentos, los ángulos, las figuras planas rectilíneas y los ángulos sólidos triedros se encontró una proposición que permitía operar con ellas, a la cual se le llamó operación de suma. Además se distribuyeron por ciclos y conjuntos específicos las proposiciones que dieron legitimidad a las estructuras. Cada uno de estos conjuntos se desarrolló utilizando los tres teoremas de congruencia de alguna manera. Para el caso de las líneas rectas el primer teorema de congruencia fue básico en la prueba de asociatividad de la suma. Para el caso de los ángulos el segundo teorema de congruencia fue indispensable. Para el caso de las figuras rectilíneas planas el tercer teorema de congruencia jugó un papel fundamental y finalmente para los ángulos sólidos triedros se necesitaron los primeros dos. Sin embargo la manera en la que cada uno de estos teoremas se utilizó en la construcción de estas estructuras fue diferente. Como se pudo observar, para el caso de los ángulos el teorema de congruencia se utilizó para poder construir un triángulo a partir de tres rectas dadas en la proposición *I.22* y posteriormente utilizar esta construcción la proposición *I.23*. En el caso de las rectas el primer teorema de congruencia no fue utilizado por Euclides en la operación sino que la prueba que se proporcionó en esta tesis necesita de dicho teorema de congruencia. Y finalmente el tercer teorema de congruencia junto con el quinto postulado permiten la demostración de la proposición *I.29* la cual permite la prueba de la proposición *I.34*.

Otra observación importante es que en cuanto a las propiedades que cumplen, la estructura de las rectas es la más completa dentro de la obra euclidiana, la cual se vio que con la existencia de un neutro aditivo ésta formaría un grupo conmutativo con la adición y finalmente un espacio vectorial sobre los racionales. En el caso de los ángulos la estructura es un poco más modesta, dado que la multiplicación no se pudo obtener. Las figuras rectilíneas planas y los ángulos sólidos triedros contaron con una proposición que les permitía operar con ellos sin embargo, no se tuvieron las condiciones teóricas suficientes para poder considerar propiedades suficientes que permitieran hacerlas alguna estructura algebraica. Y finalmente, el problema fundamental en el caso de los triedros fue la cerradura de la operación.

Glosario

$\mathcal{A}_r$ Es el conjunto que representa a los ángulos formados por dos rayos, el cual establece de manera clara la orientación de los mismos y al cual se le aplica la operación de concatenación de ángulos. 59–65, 93, 96

$\mathcal{L}_r$ Conjunto que representa a los rayos. 93

$\mathcal{L}_s$ Conjunto que representa los segmentos a los cuales operan entre sí mediante la operación de adición $+_{\mathcal{L}_s}$. 16, 22, 28–31, 33, 35, 37, 40–42, 64, 65, 74, 93

$\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_r^*$ Es el conjunto de elementos del producto cruz $\mathcal{L}_r \mathrm{X} \mathcal{L}_r$ tales que sus entradas sean rayos que se intersectan en sus puntos extremos. 58–60, 64

$+_{\mathcal{A}_r}$ Es la operación de suma aplicada al conjunto de ángulos $\mathcal{A}_r$, la cual tiene como representación geométrica la concatenación de ángulos. 60

$+_{\mathcal{L}_s}$ Es la operación de suma aplicada al conjunto de segmentos $\mathcal{L}_s$, la cual tiene como representación geométrica la concatenación de segmentos. 16, 22, 93

$\mathcal{T}$ Este conjunto representa a los ángulos sólidos triedros. 88, 89

Apéndice A

Diagramas suma de ángulos

Caso: $a_1 = [(r_1.r_2), 0]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 1]$ donde $a_1 \leq a_2$

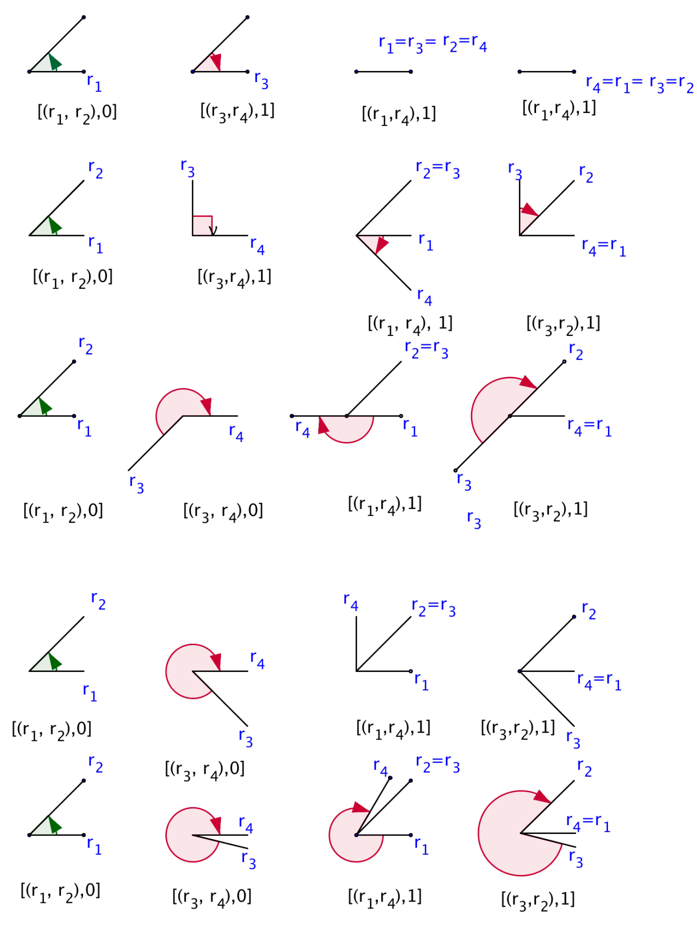

Figura A.1: Caso: $a_1 = [(r_1.r_2), 0]$ y $a_2 = [(r_3, r_4), 1]$ donde $a_1 \leq a_2$

Hemos presentado los diagramas del caso más general de la suma de ángulos que es cuando ambos ángulos son distintos tanto en magnitud como en orientación. Los otros casos funcionan de manera similar. La finalidad de presentar al lector estos diagramas es que mediante ellos pueda corroborar la conmutatividad de la operación $+_{\mathcal{A}_r}$

Bibliografía

[1] Al-Nayrizi, *The commentary of Al-Nayrizi on book I of Euclid's Elements of geometry, With an introduction on the Transmission of Euclid's Elements in the Middle Ages edited by Anthony Lo Bello*. Brill Academy Publishers, Inc., Boston, Leiden,2003.

[2] Álvarez, C., "Crítica", *Acera de las parejas incongruentes y las figuras simétricas*. Vol. 35, no. 104, 2003.

[3] Avigad, J., Dean E., Mumma, J. "The review of symbolic logic" *A formal system for Euclid's Elements*. Volume 2, Number 3, 2009.

[4] Beaney, Michael, *Analysis*. Standford Encyclopedia of Phylosophy. <http://plato.stanford.edu/entries/analysis/>

[5] Descartes, René, *The geometry of René Descartes translated from the french and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham*. New York 10, N.Y., Dover Publications, 1954.

[6] Heath, Thomas L., *The thirteen books of Euclid's Elements, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*. 2nd Edition, New York, Dover Publications, 1956.

[7] Hilbert, David. 1903, *Grundlagen der Geometrie*. 2a. ed., Teubner, Leipzig. [Versión en inglés: Foundations of Geometry, Open Court, Chicago, 1971.]

[8] Lassalle Casanave, A., Panza, M. "Notae Philosophicae Scientiae Formalis" *Sobre el significado del Postulado 2 de los Elementos*. Vol. I, n.2, pag. 103 - 115, 2012.

[9] Manders, Kenneth. *The Euclidean Diagram (1995)*. Chapter 4 in P. Mancosu, ed., The Philosophy of Mathematical Practice. Oxford Univ Pr, 2008, pp. 80–133.

[10] Mueller, Ian. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's "Elements"*, Dover Publications, 2006.

[11] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's Elements translated with introduction and notes by Glenn R. Morrow*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[12] Saito, K., Sidoli, N. *The function of diorism in ancient Greek analysis* Historia Mathematica, 37 (2010) 579–614.

[13] Van der Waerden *Modern Algebra* Vol. 1, translated by Fred Blum New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1949.