



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Distribución de la riqueza: un estudio
econofísico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
IBZÁN CAMPIRÁN CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Campirán
Chávez
Ibzáñ
55 21 99 68 39
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
305757320

2. Datos del tutor

Dr
Marcelo
del Castillo
Mussot

3. Datos del sinodal 1

Dr
Jorge Antonio
Montemayor
Aldrete

4. Datos del sinodal 2

Dr
Alfredo Elmer
de la Lama
García

5. Datos del sinodal 3

M en C
Mirna
Villavicencio
Torres

6. Datos del sinodal 4

Dr
Darío
Núñez
Zúñiga

7. Datos de la tesis

Distribución de la riqueza: un estudio econofísico
97 p
2013

Dedicatorias

A HaShem por estar conmigo todo el tiempo.

*A mis padres, Isaí Campirán y Rosalba Chávez por su amor, comprensión, apoyo,
paciencia en todo este tiempo.*

*A mis hermanos Isaí Campirán e Izreel Campirán por su apoyo y continua
motivación.*

*A mis abuelitas Filiberta Sosa y Ana Rebeca Salazar, a mi tía Zoíla Campirán por
su amor y esperanza en mí.*

*A mi tío Ariel Campirán, a mi tía Patricia Escudero, a mis primas Ingridel y Yarael
quienes me apoyaron, animaron, escucharon y aportaron ideas a este trabajo.*

*A mi querida amiga Adriana Fragoso que estuvo conmigo durante este proceso,
escuchándome, animando y motivando a concluir este trabajo.*

Agradecimientos

A HaShem que me dio el amor, la vida, la salud, el sustento, la fuerza, el ánimo, la familia y los amigos.

A mis padres, Isai Campirán y Rosalba Chávez que me trajeron al mundo y dieron todo de su parte durante mi formación académica.

Al Dr. Marcelo del Castillo que desde la mitad de la carrera me invitó a formar parte de su equipo de investigación. Por su paciencia e instrucción en la realización de este trabajo.

A Erick Hernández por su apoyo incondicional en la orientación y asesoramiento en el uso y aprendizaje de Mathematica.

A Ariel Campirán por su ayuda, orientación y oportunas observaciones al comenzar a escribir la tesis.

A Zoila Campirán por su apoyo incondicional en toda mi formación académica.

A Adriana Fragoso por su amistad, cariño y paciencia.

Así también, agradezco al resto de mi familia y amigos que formaron parte de esta etapa de mi vida.

Se agrade a DGAPA a través del proyecto de investigación PAPIIT número IN102911.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	7
Capítulo I: Econofísica	9
I.1 Motivación	11
Capítulo II: Marco teórico y antecedentes	12
II.1 Correlación estadística	12
II. 2 Deducción de la ley de distribución de la energía de Maxwell-Boltzmann	15
II. 2.1 Entropía y Segunda ley de la termodinámica	21
II.3 Distribución de probabilidad de Pareto	26
II.4 Modelos de Yakovenko: Datos de ingreso en EUA 1983-2001 y Distribución de energía per cápita por países 1990-2005.....	27
Capítulo III: Base de datos en torno a las Compañías Transnacionales	34
III.1 En revistas dedicadas a la descripción de variables importantes de las Compañías Transnacionales.....	34
III.1.1 Forbes 2000, año 2011.....	34
III.1.2 Expansión 500, año 2012.....	35
Capítulo IV: Análisis de datos económicos	37
IV.1 Correlaciones estadísticas	37
IV.1.1 Forbes, dos perspectivas	37
IV.1.1.1 Países ricos (hemisferio Norte) y países no ricos (hemisferio Sur).....	40
IV.1.1.2 Cuatro grandes regiones	42
IV.2 Funciones de distribución de la riqueza.....	44
IV.2.1 Cuatro distribuciones de riqueza global por empleado (per cápita) por Compañía Transnacional (Forbes)	44
IV.2.1.1 Por rango	45
IV.2.1.1.1 Distribuciones por países ricos y países no ricos	45
IV.2.1.1.2 Distribuciones Globales	50
IV.2.1.2 Por Función de Supervivencia	57
IV.2.1.2.1 Distribuciones por países ricos y países no ricos	57
IV.2.1.2.2 Distribuciones Globales	61
IV.2.2 Distribución de riqueza mexicana por empleado	

(per cápita) por compañías “mexicanas” (Expansión)	75
IV.2.2.1 Por rango	75
IV.2.2.2 Por Función de Supervivencia.....	77
Capítulo V: Análisis de datos en econofísica	81
V.1 Parámetros y ajustes	81
V.2 ¿Comportamiento tipo Pareto o Boltzmann-Gibbs?	84
Capítulo VI: Conclusiones.....	86
Bibliografía referida.....	89
APÉNDICE A	92
APÉNDICE B	94

Introducción

Los avances de la física del siglo XX, han permitido que ésta incursione en el estudio de otras áreas del conocimiento como: las ciencias biológicas y de la salud; las ciencias sociales y económicas; las humanidades y las artes. Ello ha estimulado el surgimiento de especialidades como la biofísica, la física médica, la econofísica, la sociofísica, la filosofía de la física y de la ciencia. El punto de convergencia entre todas son las leyes y/o principios físicos que están siendo utilizados para los desarrollos de las mismas, ya sean de mecánica, termodinámica, física estadística, electromagnetismo, mecánica cuántica, relatividad, etc..

Algunas investigaciones muestran que aplicar métodos de la física estadística a la economía proporciona nuevas ideas en cuestiones como las finanzas [Mantegna, Palágyi y Stanley, 1999], la teoría de riesgo financiero [Bouchaud y Potters, 2003], entre otras. Una de las similitudes que tiene la física estadística con la economía es que ambas estudian grandes conjuntos, en la física se tienen colecciones de átomos mientras que en la economía agentes económicos¹. Otras investigaciones muestran que es posible establecer una analogía entre la termodinámica y la física estadística con la economía, puesto que se estudian las distribuciones de probabilidad de dinero, ingresos y consumo de energía per cápita para ensambles o conjuntos de agentes económicos [Banerjee y Yakovenko, 2010]. En esta analogía se utiliza que así como la energía se conserva en la física, el dinero también se conserva.

Esta analogía ofrece una confianza epistemológica al momento de aplicar la física a un problema económico debido a la estructura lógico-matemática y matemático-estadística de ésta. Ahora bien, bajo esa consideración, en este trabajo se trata el problema de la distribución de la riqueza de las grandes empresas: las 2000 Compañías Transnacionales globales, según *Forbes* del año 2011, y de las 500 Compañías Transnacionales más importantes de México, según *Expansión 500* del año 2012, desde el punto de vista de la teoría desarrollada por Maxwell, Boltzmann y Gibbs para un sistema de partículas y de la segunda ley de la termodinámica, *i.e.* desde la analogía propuesta por Banerjee y Yakovenko [2010:3-5]. A la vez, se trata el problema de la desigualdad económica en la

¹ Entendiendo como agente económico a entidades que realizan una actividad económica como personas, familias, empresas, etc.

distribución de la riqueza correspondiente y de la integración económica de las Compañías Transnacionales globales, según *Forbes*, con la economía mundial.

Esta investigación se enfoca en la aplicación de la termodinámica y la física estadística al estudio de la economía, o sea, lo que se conoce hoy en día como *econofísica*.

En esta tesis me propongo estudiar un sistema de agentes económicos en particular y mostrar que los resultados hallados por Drăgulescu, Baneerje y Yakovenko son válidos en esta investigación. Además, mostraré que existe una relación económica proporcional mayor entre la riqueza de los países ricos con las Compañías Transnacionales en dichos países, y una relación económica proporcional menor entre la riqueza de los países pobres con las Compañías Transnacionales en los respectivos países.

En el capítulo I se presenta el modelo de econofísica que se utilizará en este trabajo. En el capítulo II se presenta la deducción de la distribución de probabilidad de energía de Maxwell-Boltzmann, su relación con la segunda ley de la termodinámica formulada por Boltzmann; dos modelos de Yakovenko para el caso de la distribución de ingreso en EUA 1983-2001 y la distribución de energía per cápita 1990-2005. En el capítulo III se presentan las fuentes de investigación con las que se generaron las bases de datos. En el capítulo IV se presentan: análisis estadísticos; distribuciones de la riqueza de: países ricos, países no ricos y global por empleado (*Forbes*); y una distribución de la riqueza mexicana por empleado por compañías “mexicanas”. En el capítulo V se realiza el análisis econofísico de los resultados obtenidos a partir de la base de datos. Y finalmente en el capítulo VI presento las conclusiones de la investigación.

Las Tesis que defenderé a lo largo de este trabajo son:

1. Que es válido utilizar el modelo exponencial de Boltzmann-Gibbs para el estudio econofísico de la distribución de la riqueza de las 2000 Compañías Transnacionales globales, según *Forbes*, y de las 500 Compañías Transnacionales más importantes de México, según *Expansión 500*.
2. Que existe una relación económica proporcional entre las Compañías Transnacionales y la riqueza de los países.

Capítulo I

Econofísica

La *econofísica* entendida como un área de aplicación de la física surgió hace dos décadas aproximadamente, debido al interés de cómo los físicos podían contribuir a la ciencia de la economía. Eugene Stanley, físico norteamericano, fue el primero que utilizó el término *econofísica* en una conferencia sobre física estadística en Calcutta, 1996, para describir el problema de mercados, acciones, etc., aunado a la gran cantidad de artículos escritos por físicos sobre dicho tema². Tiempo después se llevaron a cabo reuniones entre especialistas para tratar los temas de econofísica [Econophys-Kolkata I, 2005; Econophys-Kolkata II, 2006; Econophys-Kolkata III, 2007; Econophys-Kolkata IV, 2009; Econophys-Kolkata V, 2010; Econophys-Kolkata VI, 2011].

Hoy en día la investigación en *econofísica*, se enfoca en problemas económicos relacionados con procesos estocásticos y dinámica no lineal. Algunas de las investigaciones que han sobresalido en este campo se deben a los trabajos desarrollados por Yakovenko y Drăgulescu donde se establece la analogía entre la distribución de la riqueza con la teoría cinética de los gases ideales [Banerjee y Yakovenko, 2010].

Yakovenko y Drăgulescu fueron quienes formularon la *Mecánica estadística del dinero*, la cual explica que en un sistema económico cerrado el dinero se conserva. Por analogía con la energía, la distribución de probabilidad del dinero debe seguir la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs caracterizada por una temperatura efectiva igual al monto promedio de dinero por agente económico. También se estudia el caso en el que el dinero no se conserva, de aquí se obtiene una distribución que sigue la ley de potencias, también llamada distribución de Pareto [Cf. Drăgulescu y Yakovenko, 2000].

La distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs en el cual está basada la analogía de Yakovenko y Drăgulescu consiste en un sistema de partículas que se mueven independientemente unas de otras, y que se aproximan al comportamiento de un gas ideal. Maxwell y Boltzmann formularon una distribución sobre los diferentes estados de las partículas que se espera prevalezcan cuando el sistema alcanza su equilibrio macroscópico. Para ello supusieron que el número de partículas es fijo y la energía total se conserva, *i.e.* $N = \sum_{i=1} N_i$ y $E = \sum_{i=1} N_i \varepsilon_i$, donde N es el número de partículas, N_i

² La publicación de este ciclo de conferencias se encuentra en *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Calcuta, 1996.

el número de partículas en el estado i , E la energía total del sistema y ε_i la energía de cada partícula en el estado i . Boltzmann descubrió que el logaritmo de dicha función de probabilidad es directamente proporcional a la entropía, que también es una formulación de la segunda ley de la termodinámica, *i.e.* $S = k \ln \Omega$, donde S es la entropía, k la constante de Boltzmann y Ω la probabilidad de encontrar al sistema en una condición específica de N_i partículas en distintos estados i [Holman, 1975; Tolman, 1979; Wannier, 1987; García-Colín, 1995].

Hoy en día las investigaciones econofísicas han dado herramientas con rigor matemático a la economía, permitiendo que las investigaciones en economía adquieran mayor claridad y una belleza estética en sus resultados. Tal es el caso de investigaciones en distribución de la riqueza, las fluctuaciones de los mercados, las caídas en la bolsa de valores, entre otras [Aoyama, Fujiwara, *et. a.*, 2010].

Así también, existen grandes Compañías Transnacionales distribuidas alrededor del mundo, las cuales tienen parámetros para medir qué tan grandes son como: *ganancias, ventas, activos, valor de mercado, ingresos, número de empleados*, entre otras. Algunos economistas se han encargado en estudiar la distribución de la riqueza en sectores determinados en función de alguna de los parámetros antes mencionadas. En dichas investigaciones las Compañías Transnacionales son vistas como *agentes económicos* que tienen un intercambio de dinero, por ejemplo una compañía A vende su producto a una compañía B, ésta a una C y luego ésta a una D³, después de sus respectivas ventas cada una tiene cierta cantidad de dinero, o bien su métrica al final tiene un valor dado. Ordenando a dichas Compañías Transnacionales por la cantidad de dinero que tienen en intervalos de una determinada cantidad de dinero se obtiene una distribución. Pareto fue un economista que observó que la distribución de la riqueza para los agentes económicos más ricos es lineal [Aoyama, Fujiwara, 2010].

³ Nótese que la interacción entre las compañías no está definida. Para los propósitos de este trabajo no nos importa quién interacciona con quién, sino sólo su resultado final, o sea, los valores de los parámetros mencionadas.

I.1 Motivación

Históricamente, el quehacer científico en la física ha revelado tener mayor credibilidad sobre sus afirmaciones debido a su rigurosidad sobre la descripción de fenómenos físicos. Desde hace unas décadas se observaron resultados favorables de la incursión de la física en otras disciplinas de estudio, una de las más importantes ha sido la economía, dando lugar a la econofísica. Dentro del quehacer de la economía está la construcción de proposiciones verdaderas y válidas que expliquen y/o describan los fenómenos que les interesan, por ejemplo: distribución de la riqueza, fluctuaciones de mercados financieros, funcionamiento del comercio mundial, entre otros.

De aquí, si la física y la economía comparten el objetivo de describir fenómenos con cierto rigor que proporcione credibilidad y comprensión de los mismos, es que considero interesante poder seguir esta línea de investigación en econofísica. Ahora bien, estudiar la distribución de la riqueza de grandes agentes económicos desde el punto de vista de la física, es decir, al realizar un estudio econofísico, me propongo aportar esa credibilidad y comprensión que menciono por lo menos en las tesis de las que trata este trabajo.

Aunque aún no existe, hasta donde sé, un departamento interdisciplinario que estudie específicamente temáticas de econofísica, el hecho es que los estudios econofísicos son motivo de importantes reuniones internacionales como simposios, congresos, talleres y demás [Econophys-Kolkata I, 2005; Econophys-Kolkata II, 2006; Econophys-Kolkata III, 2007; Econophys-Kolkata IV, 2009; Econophys-Kolkata V, 2010; Econophys-Kolkata VI, 2011]. Dicho hecho, es un factor motivante a realizar esta investigación por la relevancia que pudieran llegar a tener los resultados que se exponen, primeramente observar el comportamiento de las Compañías Transnacionales, hacer predicciones con base a resultados estadísticos, realizar análisis histórico-económicos sobre el impacto de las Compañías Transnacionales en las economías nacionales, entre otras.

Capítulo II

Marco teórico y antecedentes

II.1 Correlación estadística

La estadística es una de las ramas de las matemáticas que ha sido aplicada con éxito en la investigación y tratamiento de distintos problemas correspondientes dentro de las diversas áreas del conocimiento como lo son: las físico-matemáticas; médico-biológicas; ciencias sociales y económicas; y artes y humanidades. Las ciencias físicas se han favorecido mucho de ello, ya que los avances de la estadística han sido muy útiles en el estudio de fenómenos que involucran el análisis de una gran cantidad de datos, principalmente en la mecánica estadística.

Ahora bien, con base en lo anterior se decidió trabajar con estadística inferencial para generar modelos que permitan establecer la relación entre variables económicas, y en dado caso hacer predicciones, para ello, específicamente se trabajará con análisis de regresión lineal simple y con los parámetros que éste proporciona. En este caso, se estudiará la ecuación lineal que resulta de un análisis de regresión entre dos variables, *i.e.* $y = a + bx$, donde el valor de la estimación lineal o pendiente de la recta es b , la intersección con el eje u ordenada al origen es a . Así también se estudiará el valor del coeficiente de determinación R^2 y el coeficiente de correlación R de la misma ecuación lineal.

Los parámetros del análisis de regresión que se presentan en el capítulo IV se hicieron en *Microsoft Office Excel*, el cual sigue el procedimiento de aproximación lineal por mínimos cuadrados⁴. La información estadística que proporciona cada uno de los parámetros del análisis de regresión es:

1. Estimación lineal o pendiente de la recta, b . Es una medida del cambio en la variable dependiente y por unidad de cambio en la variable independiente x . Matemáticamente el valor de b en la aproximación lineal en la aproximación por mínimos cuadrados está dada por:

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (1)$$

⁴ La deducción matemática de R^2 está detallada en el apéndice B. Nótese que R^2 es el valor de R al cuadrado.

donde \bar{x} e \bar{y} son los promedios del conjunto de n puntos (x_i, y_i) .

2. Intersección con el eje u ordenada al origen, a . Es el punto donde la recta se intersecta con el eje Y , es decir el valor que toma la variable y cuando la variable x es cero. Matemáticamente, el valor de a en la aproximación por mínimos cuadrados, está dado por:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (2)$$

donde \bar{x} e \bar{y} son los promedios del conjunto de n puntos (x_i, y_i) .

3. Coeficiente de determinación, R^2 . Representa el porcentaje de los datos que pueden ser explicados por la regresión lineal, o bien, es una medida de qué tan bueno es el ajuste de la línea de regresión con los datos. Si la línea de regresión pasa por todos los puntos, entonces la ecuación de la regresión es capaz de explicar la totalidad de la variación de la variable dependiente. El coeficiente de determinación R^2 puede tomar valores de 0 a 1, *i.e.* $0 \leq R^2 \leq 1$. Por ejemplo: Si $R^2 = 0.8702$, esto significa que el 87 % de la variación en y puede ser explicada por la relación lineal entre x e y descrita por la ecuación de la regresión lineal, $y = ax + b$.

Matemáticamente, el valor de R^2 en la aproximación de un conjunto de n puntos en la aproximación por mínimos cuadrados, está dado por:

$$R^2 = \frac{(\sum xy - n\bar{x}\bar{y})^2}{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)} \quad (3)$$

donde \bar{x} e \bar{y} son los promedios del conjunto de n puntos (x_i, y_i) .

4. Coeficiente de correlación o coeficiente de correlación del momento del producto de Pearson, denotado por R . Éste mide la dirección de una relación lineal que existe entre dos variables. El valor de R puede tomar valores de -1 a 1, *i.e.* $-1 \leq R \leq 1$. Si R es positiva significa que x e y tienen una relación lineal, es decir, si x crece, también y crece; pero si R es negativa significa que si x decrece, también y decrece. Si el valor de R es muy cercano a 1, entonces se dice que existe una fuerte correlación positiva. Si el valor de R es muy cercano a -1, entonces se dice que existe una fuerte correlación negativa. Si el valor de R es cero o muy cercano a cero, entonces se dice que no existe correlación entre x e y . Cuando $R = \pm 1$ significa que

todos los puntos están sobre la línea recta y es un ajuste perfecto, si $R = 1$ la dirección de la recta es positiva y si $R = -1$ la dirección de la recta es negativa.

Matemáticamente, el valor de R para un conjunto de n puntos en la aproximación por mínimos cuadrados, está dado por:

$$R = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}} \quad (4)$$

donde \bar{x} e \bar{y} son los promedios del conjunto de n puntos (x_i, y_i) .

En esta investigación se trabajará con análisis de regresión lineal simple para hacer predicciones económicas con base a la relación que existe entre las variables económicas de las Compañías Transnacionales según *Forbes* y *Expansión 500* correspondientes al año 2011. Se utilizará el valor de R^2 para enfatizar el porcentaje de los datos que pueden ser explicados por la ecuación de regresión lineal y ejemplificar predicciones en función de las variables involucradas en la regresión. Y el valor de R para la enfatizar la correlación entre las variables x e y .

Aquí las correlaciones y los parámetros que se obtienen, además de mostrar la relación económica entre las Compañías Transnacionales y la riqueza de los países, son importantes y útiles para investigaciones futuras en disciplinas de investigación como economía, geopolítica y sociología⁵. Por ejemplo el parámetro b puede ayudar a futuro para observar la respuesta de las Compañías Transnacionales ante crisis económicas o períodos de crecimiento o ante cambios en la rapidez de crecimiento en la economía.

⁵ Estas investigaciones no son consideradas en este trabajo.

II. 2 Deducción de la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann

El modelo de Maxwell-Boltzmann trabaja con partículas distinguibles que están distribuidas entre varios niveles de energía cuánticos [Holman, 1975]. Antes de comenzar con la deducción hay que tener presente las siguientes definiciones de termodinámica estadística:

1. El *microestado* del sistema. Esto es, se trabajará con un sistema de partículas distinguibles entre sí, por lo cual interesa conocer la dinámica de las partículas en conjunto, *i.e.* no la dinámica individual de cada partícula, que con respecto a un sistema de referencia, está descrita en el espacio fase de seis dimensiones compuesto por tres coordenadas de posición (x, y, z) y tres coordenadas de momento $(p_x, p_y, p_z) \equiv m(v_x, v_y, v_z)$. Entonces, lo que se hará es considerar la dinámica instantánea de las partículas en conjunto en un determinado momento, de manera que, si se subdivide el espacio fase en pequeñas celdas donde a cada una se le asigna una energía ϵ_i arbitrariamente, como consecuencia las partículas quedarán confinadas en alguna celda en particular. Lo relevante aquí es que en el microestado del sistema se conoce cuántas y cuáles partículas están en la celda ϵ_i , debido a que las partículas son distinguibles entre sí [García-Colín, 1995; Holman, 1975].
2. El *macroestado* del sistema. Está relacionado con las propiedades termodinámicas macroscópicas E, V y N . Si sólo se conocen estas propiedades resulta que hay una serie de microestados consistentes con dichas propiedades en un momento determinado. Es decir, en un instante dado existen: N_1 partículas en la celda ϵ_1 , N_2 partículas en la celda ϵ_2 , ..., N_k partículas en la celda ϵ_j , ..., etc. El número total de microestados que corresponden a dicha distribución $(N_1, N_2, \dots, N_j, \dots)$ se le llama *macroestado*. En otras palabras, la especificación detallada del microestado resulta innecesaria para calcular las propiedades termodinámicas macroscópicas, sólo se necesita conocer el número de partículas de cada celda del espacio fase, sin necesidad de especificar cuál partícula está en cada celda, es decir, sólo son relevantes aquellas distribuciones que obedecen la condición que N y E son fijas, donde $N = \sum_{i=1} N_i$ y $E = \sum_{i=1} N_i \epsilon_i$.

Aquí el objetivo es determinar el macroestado más accesible y luego calcular su energía. El macroestado más probable es aquel que tiene el mayor número de microestados accesibles, *i.e.* aquel que pueda ocurrir del mayor número de formas [García-Colín, 1995; Holman, 1975].

3. Degeneración. Se denota por g_i cuando el nivel de energía es degenerado, esto es, cuando se toma en cuenta la naturaleza cuántica de las partículas que consiste en la existencia de muchos estados posibles estacionarios asociados con un solo valor de la energía, o sea, la energía a nivel microscópico está cuantizada. El sistema no degenerado es aquel para el cual $g_i = 1$, *i.e.* cada nivel de energía puede alcanzarse de una sola manera. En este caso el número total de microestados asociados a una distribución cambia, ya que cada una de las partículas n_i asociadas a una energía ϵ_i puede estar en alguno de los g_i estados diferentes [García-Colín, 1995; Holman, 1975].

Siguiendo el objetivo mencionado, para determinar el macroestado más accesible y calcular su energía, la idea inicial a desarrollar físicamente en la deducción es: Supóngase que se tienen N bolas de billar distinguibles y se desea calcular el número de formas en las que se pueden distribuir las N bolas en un conjunto de cajas grandes, por ejemplo, se introducen N_1 bolas en la primer caja, después se introducen N_2 bolas en la segunda caja, así sucesivamente hasta haber introducido las N bolas de billar⁶. Luego, dentro de la i -ésima caja hay g_i pequeñas cajas distinguibles donde las N_i bolas se distribuyen. Cabe mencionar que el número de cajas pequeñas dentro de cada caja no necesariamente es el mismo y el número de cajas pequeñas puede ser mayor o menor que el número de bolas [Holman, 1975].

Ahora bien, la física estadística desarrollada por Maxwell-Boltzmann para un sistema de partículas pequeñas moviéndose independientemente una de otra que se aproxima al comportamiento de un gas ideal. La distribución de Maxwell-Boltzmann es una distribución sobre diferentes estados de las partículas que se espera que prevalezcan cuando el sistema alcanza su equilibrio macroscópico [Tolman, 1979].

⁶ Nótese que no hay restricción en el número de bolas que se pueden introducir en cada caja.

Considérese un sistema cerrado y en equilibrio⁷ que está compuesto de un gran número de partículas distinguibles N que están distribuidas entre varios niveles de energía cuánticos designados por el subíndice j , de manera que en el j -ésimo nivel de energía hay N_j partículas que tienen energía ε_j . Los valores de las energías ε_j están cuantizadas y existen varias formas de las cuales una partícula puede alcanzar dicha energía ε_j . Primero se seleccionan N_1 partículas de las N partículas y se colocan en el estado de energía 1, después se seleccionan N_2 partículas de las N partículas y se colocan en el estado de energía 2, luego se seleccionan N_3 partículas de las N partículas y se colocan en el estado de energía 3, así se hace sucesivamente hasta que las N partículas quedan acomodadas en los distintos estados. De manera que el número de formas de distribuir las partículas en el estado de energía 1 es $N_1!$, el número de formas de distribuir las partículas en el estado de energía 2 es $N_2!$, el número de formas de distribuir las partículas en el estado de energía 3 es $N_3!$, y así sucesivamente. Por tanto, para determinar el número de formas de distribuir las partículas en cada estado de energía se divide por el número de distribuciones de cada estado de energía, matemáticamente esto es

$$C = \left(\frac{N!}{N_1! (N - N_1)} \right) \left(\frac{(N - N_1)!}{N_2! (N - N_1 - N_2)} \right) \left(\frac{(N - N_1 - N_2)!}{N_3! (N - N_1 - N_2 - N_3)} \right) \dots \quad (5)$$

$$C = \left(\frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots (N - N_1 - N_2 - N_3 \dots)!} \right) \quad (6)$$

De aquí se obtiene la expresión del número de formas de seleccionar N_j partículas de un total de N partículas y colocarlas en el estado de energía j , ésta está dada por el coeficiente multinomial

$$C_{\{N_j\}} = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots} \quad (7)$$

o bien,

$$C_{\{N_j\}} = \frac{N!}{\prod_j N_j!} \quad (8)$$

⁷ Sus propiedades macroscópicas no varían con el tiempo.

donde $N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots$. En otras palabras, $C_{\{N_j\}}$ es el macroestado del sistema o el número total de microestados correspondientes a la distribución de las N_j partículas en distintos estados j .

Luego, lo que sigue es considerar el número de formas posibles en que las N_j partículas pueden estar distribuidas los g_j estados cuánticos de energía. Entonces, si cada partícula puede ubicarse de g_j formas distintas, para todas las partículas del j -ésimo estado de energía se tiene el número de posibilidades de distribuirlas es

$$g_j \cdot g_j \cdot g_j \cdot \dots = g_j^{N_j} \quad (9)$$

Entonces la ecuación (8) para $C_{\{N_j\}}$ del macroestado queda

$$C_{\{N_j\}} = \frac{N!}{\prod_j N_j!} \prod_j g_j^{n_j} \quad (10)$$

Nótese que a partir de aquí se considerará la ecuación (8) como el macroestado, se continuará con la deducción sin tomar en cuenta los g_j estados cuánticos de energía de los j estados de energía. Cabe mencionar que como consecuencia al final se obtendrá el modelo clásico de Maxwell-Boltzmann.

Ahora bien, como se explicó anteriormente en el punto 2 para el macroestado, sólo resultan relevantes aquellas distribuciones que obedecen la condición que N y E son fijas, $N = \sum_{i=1} N_i$ y $E = \sum_{i=1} N_i \varepsilon_i$, por tanto sea $\Omega(E, V, N)$ el número total de macroestados consistentes con la información que especifica al sistema macroscópico, entonces,

$$\Omega(E, V, N) = \sum_{\{N_i\}} C_{\{N_i\}} = \sum_{\{N_i\}} \frac{N!}{\prod_j N_j!} \quad (11)$$

Nótese que la suma es sobre todas aquellas distribuciones que son consistentes con la condición que $N = \sum_{i=1} N_i$ y $E = \sum_{i=1} N_i \varepsilon_i$.

Ahora, como el sistema está en equilibrio y se tiene una serie de macroestados en un instante determinado, donde cada uno es una medida de la frecuencia con que aparecen distintas distribuciones, entonces existe una distribución que ocurre con una frecuencia mayor a las otras distribuciones que finalmente es la que está contribuyendo al valor de Ω . Por ello, matemáticamente lo que sigue es encontrar el valor de N_i en el cual la función Ω se maximiza.

Entonces, sea $W(n) = N! / \prod_j N_j!$ el término general de Ω , del cual se calculará el valor de N_i que lo hace un máximo. Para pequeñas variaciones δN_i de los números N_i se tiene que

$$\delta W(n) = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial N_i} \right)_{i \neq j} \delta N_i = 0 \quad [12]$$

donde

$$\sum_{i=1} \delta N_i = \delta N = 0 \quad [13]$$

$$\sum_{i=1} \delta N_i \varepsilon_i = \delta E = 0 \quad [14]$$

Son las siguientes condiciones que muestran que no todas los números N_i son independientes. Ahora, lo que se quiere es tratar a dichos números N_i independientemente, entonces de la ecuación (12) se obtiene

$$\delta W(n) = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) \delta N_i \quad [15]$$

donde α y β son los multiplicadores de Lagrange que permiten tratar las cantidades N_i como independientes. Luego, como $\delta W(n) = 0$ se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad [16]$$

Para resolver la ecuación (16) se considera el $\ln(W)$, de manera que

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad [17]$$

donde

$$\ln(W) = \ln \left(\frac{N!}{\prod_j N_j!} \right) \quad [18]$$

$$= \ln(N!) - \ln \left(\prod_j N_j! \right) \quad [19]$$

$$= \ln(N!) - \sum_i \ln(N_i!) \quad [20]$$

Para obtener $\ln(N!)$, se utiliza la aproximación de Stirling, donde

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N \quad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la (20) para $N!$ y $N_j!$ se obtiene

$$\ln(W) \approx N \ln(N) - N - \sum_i N_i \ln(N_i) - N_j \quad (22)$$

Derivando $\ln(W)$ de (22) con respecto a N_i resulta

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial N_i} = -\ln(N_i) - 1 \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en (17), donde si la constante (-1) se absorbe en α , se tiene que

$$-\ln(N_i^*) + \alpha + \beta \varepsilon_i = 0 \quad (24)$$

$$\ln(N_i^*) = \alpha + \beta \varepsilon_i \quad (25)$$

$$N_i^* = e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \quad (26)$$

Donde N_i^* es el número donde la distribución $\{N_i^*\}$ hace a la función $W(n)$ un máximo y obedece las condiciones $N = \sum_{i=1} N_i^*$ y $E = \sum_{i=1} N_i^* \varepsilon_i$. Ahora, si $A = e^\alpha$ entonces

$$N_i^* = A e^{\beta \varepsilon_i} \quad (27)$$

Esta ecuación indica el número de partículas N_i más probable en el estado i . En otras palabras, este resultado llamado *ley de distribución de Maxwell-Boltzmann* da la distribución más probable de partículas entre sus propios estados individuales para un sistema en estado estacionario macroscópico [Cf. García-Colín, 1995; Tolman, 1979; Wannier, 1987].

II.2.1 Entropía y Segunda ley de la termodinámica

A continuación con base a los resultados obtenidos en la deducción de la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann se deduce la expresión de la entropía estadística, se muestra el valor de los multiplicadores de Lagrange α y β que se obtuvieron y el puente entre la naturaleza microscópica y macroscópica del sistema termodinámico como una consecuencia de la entropía y segunda ley de la termodinámica mostrada por la función de partición.

La física estadística permite discutir a la entropía en términos de probabilidades de una manera simple y directa, esto es, la entropía estadística tiene la propiedad de ser aditiva

$$S = S_1 + S_2 \quad (28)$$

donde sus microestados son multiplicativos

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \quad (29)$$

Luego, si para un sistema aislado y cerrado que se encuentre en estado de equilibrio termodinámico $S = f(\Omega)$ ⁸, se obtiene que con base a las expresiones de (28) y (29):

$$f(\Omega_1\Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2) \quad (30)$$

A partir de estas propiedades (28), (29) y (30), se llegará a la expresión de la entropía. Entonces, derivando (30) respecto a Ω_1 se tiene

$$\Omega_1 \frac{df}{d\Omega} = \frac{df}{d\Omega_1} \quad (31)$$

Luego, multiplicando por Ω_1 ambos lados se obtiene

$$\frac{df}{d \ln(\Omega)} = \frac{df}{d \ln(\Omega_1)} \quad (32)$$

Finalmente, derivando respecto a Ω_2

$$\frac{d}{d\Omega_2} \left(\frac{df}{d \ln(\Omega)} \right) = 0 \quad (33)$$

⁸ Nótese que Ω y S están relacionadas cuando el sistema está en equilibrio y aislado, porque si $\Omega(E, V, N)$ y $S(U, V, N)$, la energía mecánica del sistema E coincide con la energía interna del sistema U .

donde

$$\frac{df}{d \ln(\Omega)} = cte \quad (34)$$

Integrando

$$f = k \ln(\Omega) + \Omega_0 \quad (35)$$

Con k y Ω_0 constantes de integración. Ahora, la propiedad (30) implica que $\Omega_0 = 0$, entonces se obtiene

$$S = k \ln(\Omega) \quad (36)$$

Por ello se considera a la entropía como proporcional al logaritmo del número de microestados accesibles, fue Ludwig Boltzmann quien expresó este concepto matemáticamente en 1872 [Cf. Clausius, 1850]. Esta es la ecuación para la segunda ley de la termodinámica propuesta por Boltzmann, donde k es la constante de Boltzmann.

En la sección anterior II.2 se concluyó con la ecuación (27), donde el número total de microestados accesibles al sistema estaba dado por la función $\Omega(E, V, N)$. Al sustituir (27) en la expresión de $\Omega(E, V, N)$ de (11), se obtiene

$$\Omega(E, V, N) = W(n)_{m\acute{a}x} = \frac{N!}{\prod_i N_i^*!} \quad (37)$$

Pero como $\Omega(E, V, N)$ y $S(U, V, N)$ son equivalentes, entonces que se puede expresar a la entropía como $S(E, V, N)$. Ahora, para determinar los valores de α y β , se sustituye (37) en (36):

$$S(E, V, N) = k \ln(W(n)_{m\acute{a}x}) = k \ln \frac{N!}{\prod_i N_i^*!} \quad (38)$$

$$= k [\ln(N!) - \ln \left(\prod_i N_i^*! \right)] \quad (39)$$

Utilizando la aproximación de Stirling, ($\ln(N!) \approx N \ln(N) - N$), se obtiene

$$= k [(N \ln(N) - N) - \sum_i N_i^* \ln(N_i^*) - N_i^*] \quad (40)$$

Como $N = \sum_{i=1} N_i^*$, entonces

$$= k[N \ln(N) - \sum_i N_i^* \ln(N_i^*)] \quad (41)$$

Sustituyendo (25) en (41) se obtiene

$$= k[N \ln(N) - \sum_i N_i^* (\alpha + \beta \varepsilon_i)] \quad (42)$$

$$= k[N \ln(N) - \sum_i \alpha N_i^* + \beta N_i^* \varepsilon_i] \quad (43)$$

donde α se obtiene a partir de

$$\sum_i N_i^* = \sum_i e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} = N \quad (44)$$

por tanto

$$e^\alpha = N \left(\sum_i e^{\beta \varepsilon_i} \right)^{-1} \quad (45)$$

$$\alpha = \ln N - \ln \sum_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (46)$$

Sustituyendo el valor de α de (46) en (43), se obtiene

$$S(E, V, N) = k[N \ln(N) - \sum_i N_i^* (\ln N - \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j}) + \beta N_i^* \varepsilon_i] \quad (47)$$

$$= k[N \ln(N) - \sum_i [N_i^* \ln N - N_i^* \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} + \beta N_i^* \varepsilon_i]] \quad (48)$$

Pero $N = \sum_{i=1} N_i^*$ y $E = \sum_{i=1} N_i^* \varepsilon_i$, entonces

$$S(E, V, N) = Nk \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} - k\beta E \quad (49)$$

Considerando nuevamente la relación de la energía mecánica del sistema E con la energía interna del sistema U , entonces sea $S(U, V, N)$ de manera que (50) queda

$$S(U, V, N) = Nk \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} - k\beta U \quad (50)$$

Derivando (50) respecto a U , se obtiene

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial}{\partial U} (Nk \ln \sum_j e^{\beta \varepsilon_j} - k\beta U)\right)_{V,N} \quad (51)$$

$$= Nk \frac{\sum_j \varepsilon_j e^{\beta \varepsilon_j}}{\sum_j e^{\beta \varepsilon_j}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_{V,N} - k\beta - kU \left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_{V,N} \quad (52)$$

pero sustituyendo N_i^* de (26) en la condición $E = \sum_{i=1} N_i^* \varepsilon_i$, se obtiene

$$E = \sum_{j=1} \varepsilon_j e^{\alpha} e^{\beta \varepsilon_j} \quad (53)$$

y sustituyendo el valor de α de (46):

$$E = \sum_{j=1} \varepsilon_j e^{\ln N - \ln \sum_i e^{\beta \varepsilon_i}} e^{\beta \varepsilon_j} \quad (54)$$

$$E = N \frac{\sum_{j=1} \varepsilon_j e^{\beta \varepsilon_j}}{\sum_{j=1} e^{\beta \varepsilon_j}} \quad (55)$$

como (55) es el promedio de ε_j , entonces $\langle E \rangle = E = U^9$, luego en (52) el primer y tercer término son cero, por tanto

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = -k\beta = \frac{1}{T} \quad (56)$$

$$\beta = -\frac{1}{kT} \quad (57)$$

donde T es la temperatura del sistema.

Sustituyendo (57) en (50) se obtiene

$$S = Nk \ln \sum_j e^{-\varepsilon_j/kT} - kU \left(-\frac{1}{kT}\right) \quad (58)$$

$$TS = NkT \ln \sum_j e^{-\varepsilon_j/kT} + U \quad (59)$$

Reordenando

⁹ El hecho que $\langle E \rangle = E = U$ indica que la energía en el sistema no cambia, la energía es la misma, es constante y por tanto se conserva.

$$TS - U = NkT \ln \sum_j e^{-\epsilon_j/kT} \quad (60)$$

Donde (60) representa la energía de Helmholtz F , definida como

$$F = TS - U \quad (61)$$

Por tanto

$$F = NkT \ln \sum_j e^{-\epsilon_j/kT} \quad (62)$$

Ahora bien, el puente entre la naturaleza microscópica y macroscópica del sistema termodinámico está dado por la expresión

$$Z(T, V) = \sum_{i=1} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad (63)$$

Conocida como función de partición. [Cf. García-Colín, 1995; Holman, 1975]

II.3 Distribución de probabilidad de Pareto

Wilfrido Pareto (1843- 1923), economista italiano, en su libro *Cours d'économie politique* reporta sus investigaciones empíricas sobre el ingreso personal y la riqueza individual de las personas, en el cual propone que sus respectivas distribuciones obedecen a una ley de potencias [Pareto, 1897]. Pareto demostró que existe una relación entre N , (el número de contribuyentes con ingresos personales mayores o iguales a x), y el valor de ingreso x está dado por una línea recta con pendiente negativa, es decir

$$\ln N = \ln A - \alpha \ln x \quad (64)$$

o equivalentemente

$$N = \frac{A}{x^\alpha} \quad (65)$$

donde $A > 0, \alpha > 0, x > x_0$, siendo x_0 el ingreso mínimo [Pareto, 1895], α la elasticidad de la reducción en el número de ingresos, esto es cuando se pasa a una clase y A una constante [Cf. Kleiber y Kotz, 2003: 255-256]. Hoy en día esta ley de potencias, mejor conocida como *ley de potencias de Pareto* o *ley de Pareto* o *distribución Pareto*, aparece en investigaciones de física, de biología, de ciencias de la tierra, de economía y de finanzas, de ciencias de la computación, de demografía y de ciencias sociales [Newman, M. E. J., 2006], asimismo, es una de los componentes centrales de los estudios econofísicos de compañías y otros agentes económicos reales [Cf. Aoyama, Fujiwara, *et. al.*, 2012].

II.4 Modelos de Yakovenko: Datos de ingreso en EUA 1983-2001 y Distribución de energía per cápita por países.

El modelo de Yakovenko está basado en la mecánica estadística y termodinámica del dinero [Drăgulescu y Yakovenko, 2000].

Considerando el problema general de partición de un recurso limitado M entre un gran número de agentes N , Yakovenko propone como solución una derivación análoga a la de la distribución de Boltzmann-Gibbs que es la distribución del dinero en un sistema económico cerrado. Él considera que en cualquier momento de tiempo, cada agente económico i tiene cierta cantidad de dinero m_i , después ocurren transacciones económicas entre los agentes, de forma que se transfiere Δm dinero del agente i al agente j . El balance de dinero queda como

$$\begin{aligned} m_i \rightarrow m'_i &= m_i - \Delta m \\ m_j \rightarrow m'_j &= m_j + \Delta m \end{aligned} \quad (56)$$

Por tanto, el dinero total de los dos agentes después de la transacción resulta ser el mismo, es decir

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j \quad (68)$$

La ecuación (68) prueba que la ley de conservación del dinero se cumple. Aquí Yakovenko establece dos reglas para el modelo que propone como analogía:

- i. La transferencia de dinero es análoga a la transferencia de energía en las colisiones de partículas en un gas.
- ii. La conservación del dinero es análoga a la conservación de la energía en dichas colisiones.

Así también, presenta algunas complicaciones del modelo como: no se está considerando que el dinero total $M = \sum_i m_i$ puede cambiar debido a los movimientos hechos por el gobierno central y/o el banco central; y las deudas que son consideradas como dinero negativo. Por tanto en el modelo no se consideran algunas de las causas que pudiesen estar sucediendo en la economía real y tampoco las posibles deudas.

Ahora bien, Yakovenko obtiene la distribución de probabilidad del dinero en equilibrio a partir del principio de maximización de la entropía, donde $N = \sum_k N_k$ es el número total de agentes económicos y $M = \sum_k m_k N_k$ el dinero total del dinero por agente económico, luego, como la energía ε es el dinero m , entonces la distribución de probabilidad del dinero $P(m)$, es una función exponencial de m

$$P(m_k) = \frac{N_k}{N} = e^{\alpha - \beta m_k} = e^{-(m_k - \mu)/T} \quad (69)$$

Donde N_k es el conjunto de números de ocupación de los contenedores de dinero m_k . Los parámetros $T = 1/\beta$ y $\mu = \alpha/T$ son análogos a la temperatura y al potencial químico del dinero. Estos valores están determinados por las constricciones:

- 1) El potencial químico es una función decreciente de T ¹⁰

$$1 = \frac{\sum_k N_k}{N} = \sum_k P(m_k) = \int_0^{\infty} \frac{dm}{m_*} e^{-(m-\mu)/T} \Rightarrow \mu = -T \ln\left(\frac{T}{m_*}\right), \quad (70)$$

- 2) La temperatura del dinero $T = \langle m \rangle$ es el dinero promedio del sistema económico.

$$\langle m \rangle = \frac{M}{N} = \frac{\sum_k m_k N_k}{N} = \sum_k m_k P(m_k) = \int_0^{\infty} \frac{dm}{m_*} m e^{-(m-\mu)/T} = T \quad (71)$$

A continuación dos modelos reportados por Yakovenko:

1. Distribución de ingreso en EUA 1983-2001

El análisis de Silva y Yakovenko de la distribución de ingreso en EUA realizado en base a los datos de *Internal Revenue Service* (IRS), distingue dos clases sociales: la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs caracteriza a la clase baja (97-99 % de la población); y la ley de potencias o distribución de Pareto que caracteriza a la clase alta (1-3 % de la población). Esto es, la mayoría de la población pertenece a la clase más baja y tiene un distribución de ingreso exponencial estable en el tiempo; mientras que la clase más alta representa el resto de la población, la cual tiene una distribución de ingreso de Pareto donde sus parámetros indican cambios en el tiempo con subidas y bajadas del valor de mercado [Cf. Silva y Yakovenko, 2005].

El método del análisis seguido por Silva y Yakovenko consistió en tomar los datos preprocesados del IRS (ya distribuidos en intervalos), de forma obtuvieron la función de distribución acumulativa $C(r)$ para ciertos valores de r . Lo primero que hicieron fue graficar $C(r)$ vs r (escala semilogarítmica) para cada año. En esta gráfica observaron

¹⁰ Yakovenko menciona que la discusión sobre el potencial químico de la ecuación (69) está en los artículos de Mimkes (2000), y Mimkes con Willis (2005). No se presenta explícitamente en el artículo de Banerjee y Yakovenko (2010) ni en el artículo de Drăgulescu y Yakovenko (2000).

que las líneas rectas para el 97-98 % de la población confirman la ley exponencial. Después a partir de las pendientes de cada recta se calcularon las temperaturas de ingreso T para cada año. En la figura 1 graficaron $C(r)$ y $P(r)$ vs r/T de los ingresos normalizados a la temperatura. En la figura 2 presentan los mismos datos en escala logarítmica para un rango más amplio de ingreso. En ésta observaron que la función de distribución cambia de seguir la ley exponencial a una ley de potencias de Pareto en la parte final de la curva. A partir de los resultados, Silva y Yakovenko concluyeron que la distribución de ingreso en EUA tiene dos clases: la clase baja (la mayor parte de la población) que es caracterizada por la distribución de Boltzmann-Gibbs; y la clase alta (la menor parte de la población) que es caracterizada por una ley de potencias de Pareto [Cf. Silva y Yakovenko, 2005].

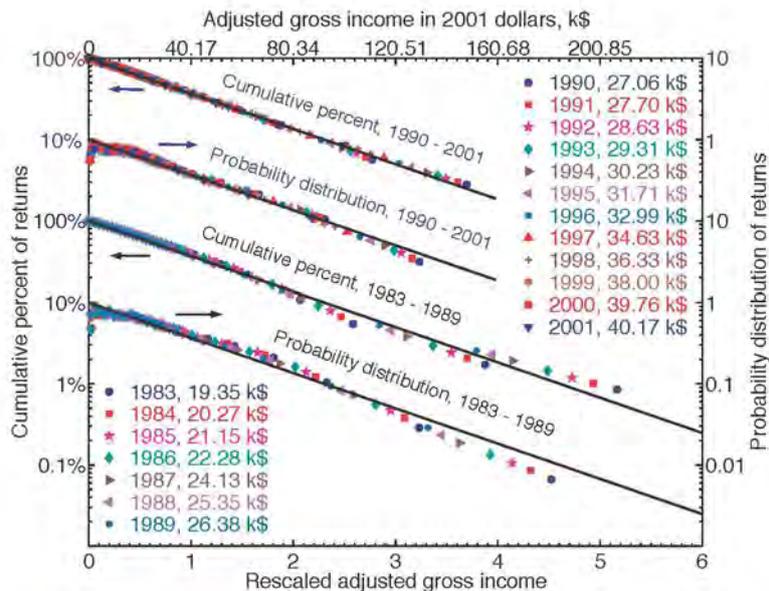


Figura 1. Distribución en EUA 1983-2001. Probabilidad acumulativa $C(r)$ y densidad de probabilidad $P(r)$ graficadas en escala semilogarítmica vs r/T , el ingreso personal anual r normalizado por el promedio de ingreso T en la parte exponencial de la distribución. Los puntos son los datos del IRS de los años 1983-2001, y las columnas de números muestran los valores de T para los años correspondientes. Nótese que no cambia la forma en la distribución, sólo cambia la temperatura.

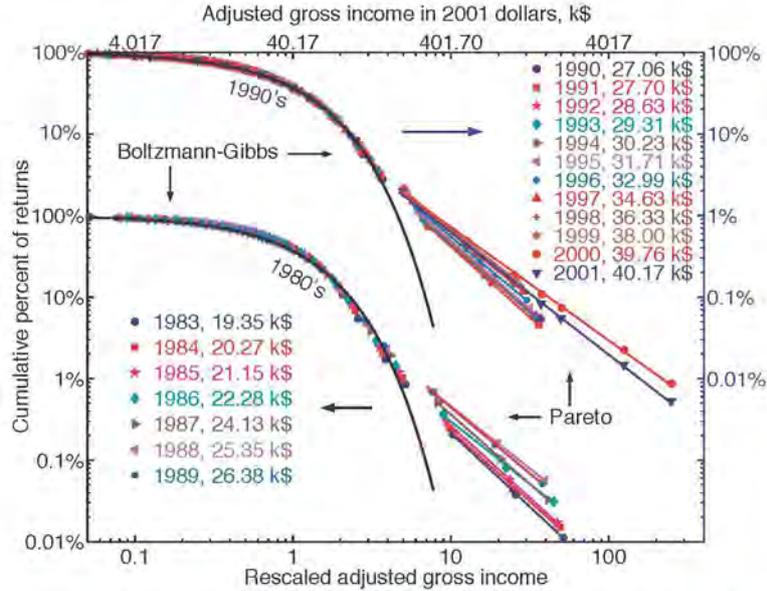


Figura 2. Distribución en EUA 1983-2001. Gráficas en escala logarítmica de la probabilidad acumulativa $C(r)$ vs r/T para un rango más amplio de ingreso r . Nótese que la exponencial no cambia, pero la ley de potencias cambia significativamente.

2. Distribución de la energía per cápita por países

La idea de Baneerje y Yakovenko fue considerar un sistema de agentes económicos donde cada agente i consume energía ε_i por unidad de tiempo¹¹. El modelo que aquí propusieron para la distribución de la energía per cápita por países está basado en la termodinámica del dinero, por lo cual el dinero m puede ser reemplazado por la energía ε , Baneerje y Yakovenko concluyeron que la distribución de probabilidad de ε debe seguir una función exponencial análoga a la ecuación de la distribución de probabilidad de dinero en equilibrio $P(m_k)$, esto es

$$P(\varepsilon) \propto e^{-\varepsilon/T}, \text{ donde } T = \langle \varepsilon \rangle \quad (62)$$

la temperatura T es el consumo medio de energía per cápita. Ahora bien, para comparar esta analogía teórica de (72) con los datos empíricos, se define la Función de Densidad Cumulativa como:

$$C(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} P(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (73)$$

¹¹ Aquí la energía representa la potencia que es medida en kilowatts (kW).

donde $C(\varepsilon)$ es el número de agentes con consumo de energía por debajo de ε dividido por el número total de agentes en el sistema. Entonces, si $P(\varepsilon)$ es una función exponencial, $C(\varepsilon)$ también es exponencial.

Baneerje y Yakovenko utilizaron los datos del sitio web del *World Resources Institute* (WRI) que corresponden al “Consumo total de energía por país” y a la “Población total, ambos sexos por país”, a partir de ellos calcularon el cociente del consumo anual de energía en un país dado por la población del país, con la finalidad de obtener el consumo de energía promedio per cápita. Mostraron que el consumo de energía per cápita no está descrito por una ley de potencias, sino por una función exponencial [Baneerje y Yakovenko, 2010].

La figura 3 muestra la variación y desigualdad del consumo de energía per cápita en el mundo. Para ello, dividieron el consumo de energía anual en un país dado por la población de dicho país, de manera que obtuvieron el promedio de consumo de energía per cápita ε . Los años considerados en su investigación fueron: 1990, 2000 y 2005. A partir de los datos compilados procedieron a construir la distribución de probabilidad acumulativa para ε , primero ordenando los países en orden ascendente en función del consumo de energía per cápita ε_n , tal que $n = 1$ corresponde al país con menor consumo y $n = L$ al país con mayor consumo, donde L es el número total de países. Denotando la población de un país n como N_n , la probabilidad acumulativa para una ε_n dada es

$$C_e(\varepsilon_n) = \frac{\sum_{k=n}^L N_k}{\sum_{k=1}^L N_k} \quad (74)$$

Donde $C_e(\varepsilon_n)$ es la función empírica construida. Este modelo empírico lo compararon con la función exponencial teórica $C(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon/T)$.

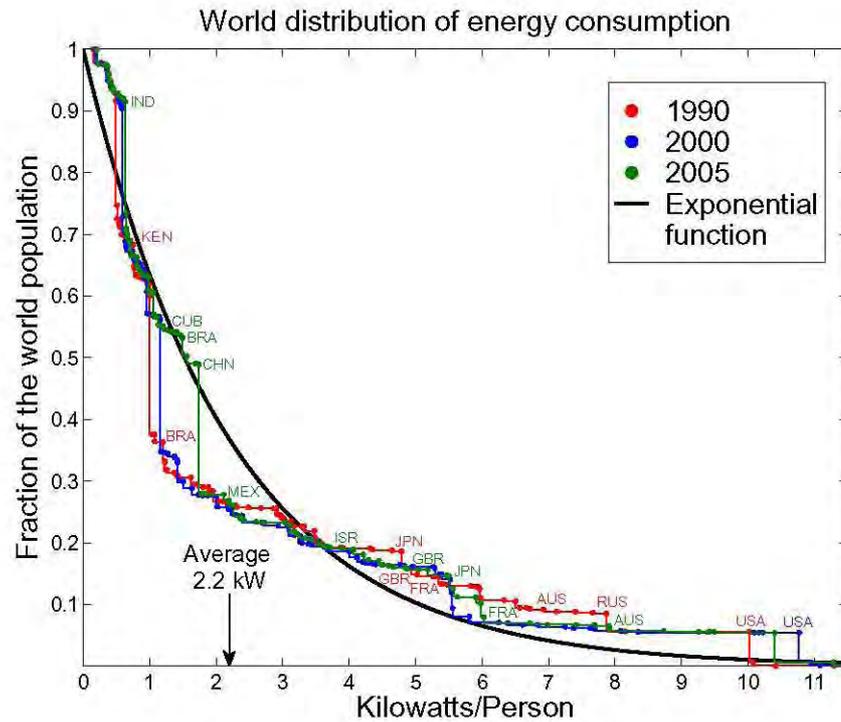


Figura 3. Funciones de densidad acumulada de consumo de energía per cápita alrededor del mundo durante 1990, 2000 y 2005. La curva sólida es la función exponencial.

La figura 4 muestra la gráfica de los mismos datos en escala semilogarítmica, en ella se observa que los datos oscilan alrededor de la función exponencial teórica, expresada con el ajuste de una línea recta por la escala utilizada.

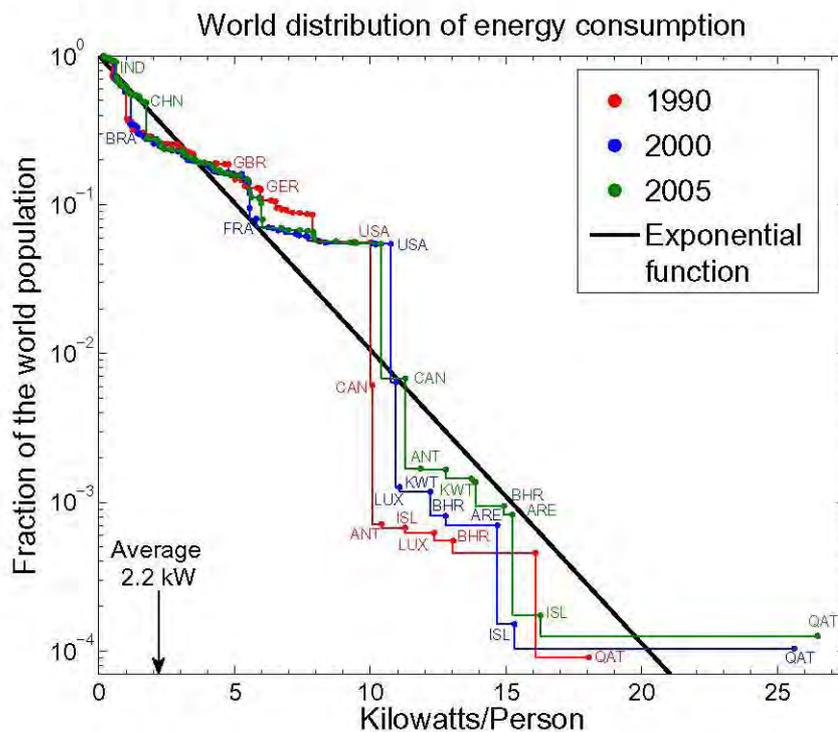


Figura 4. Ídem en escala semilogarítmica.

Finalmente, la siguiente figura muestra la gráfica de los mismos datos en una escala logarítmica que nuevamente muestra que la distribución de energía per cápita sigue la ley exponencial.

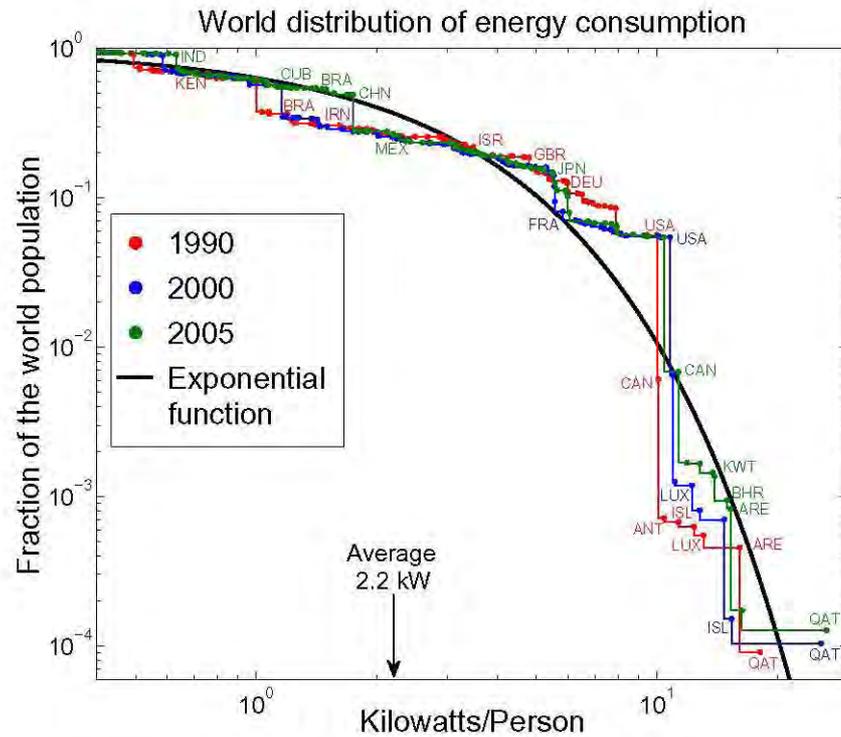


Figura 5. Ídem en escala logarítmica.

La conclusión de dichos resultados y observaciones es que el consumo de energía per cápita no está descrito por una ley de potencias o de Pareto, sino por un modelo exponencial [Baneerje y Yakovenko, 2010].

Capítulo III

Bases de datos en torno a las Compañías Transnacionales

III.1 En revistas dedicadas a la descripción de variables importantes de las Compañías Transnacionales

La revista *Forbes* y la revista *Expansión 500* comparten un mismo objetivo, “*Dar información sobre líderes en los negocios*”, por ello sus publicaciones se centran en: el *ranking* de las empresas o compañías más importantes; las personas más exitosas en los negocios o más ricas de un sector dado; entre otras. Existen parámetros que ambas revistas consideran importantes y que convergen para considerar el tamaño y riqueza de una compañía, tales como las *ganancias*, *las ventas*, *los activos*, *el valor de mercado* y *el número de empleados*.

Las definiciones de cada parámetro utilizado por ambas revistas son:

Ganancias: es la utilidad neta que queda después de deducir el costo total del ingreso total de la compañía.

Ventas: ingreso por servicios o bienes de la compañía.

Activos: todo aquello que una compañía posee y le deben.

Valor de mercado: es el precio estimado de la compañía.

Empleado: Aquella persona que trabaja bajo un contrato establecido.

A continuación se presenta un breve bosquejo de la descripción que realiza la revista *Forbes* y la revista *Expansión 500* de las 2000 Compañías Transnacionales más grandes del mundo y las 500 empresas más importantes de México respectivamente.

III.1.1 Forbes, año 2011

La revista *Forbes*, fue fundada en 1917 por B. C. Forbes, columnista de finanzas para el periódico Hearst, y su socio Walter Drey, gerente general de la revista Wall Street. Hoy en día es una de las revistas más reconocidas por sus publicaciones en el área de negocios, finanzas, sus listas de la gente más rica del mundo, entre otras.

En el 2011 y 2012, *Forbes* publicó, a través de su sitio web¹², cuáles son las 2000 Compañías Transnacionales más grandes del mundo correspondientes a los años 2010 y 2011 respectivamente, de acuerdo a las puntuaciones más altas basadas en parámetros como las *ventas*, *ganancias*, *activos* y *valor de mercado*, según la información obtenida

¹² www.forbes.com

de las fuentes: *Interactive Data, LionShares, Thomson Reuters Fundamentals y Worldscope via FactSet Research Systems; Bloomberg; y Forbes*. La metodología para obtener la lista de las 2000 Compañías Transnacionales, a grandes rasgos, consistió en crear cuatro listas por separado, de 2000 Compañías Transnacionales, de las *ventas, ganancias, activos y valor de mercado*. En la lista del año 2011 se consideraron 3300 compañías, de las cuales se completó la lista de las 2000 Compañías Transnacionales, ya que cada compañía recibe una puntuación distinta en cada una de las cuatro listas, luego si una no está por encima del mínimo indicador de corte determinado, entonces deja de ser considerada para la lista de las 2000. Finalmente, se suman las puntuaciones de los cuatro indicadores (igualmente ponderados) y se compila una puntuación compuesta para cada Compañía Transnacional en función de su clasificación de ventas, ganancias, activos y valor de mercado. La máxima puntuación compuesta obtiene el rango más alto, de esta manera se ordenan las 2000 Compañías Transnacionales [cf. De Carlo, 2012¹³].

En el año 2011 fueron 66 países los que aparecen en la lista de Forbes G2000, a diferencia del 2010 que sólo participaron 62 países, lo cual indica un dinamismo en los negocios a nivel global [cf. De Carlo, 2012¹⁴].

En la presente investigación se consideró e hizo una base de datos de las *ventas, ganancias, activos, valor de mercado y número de empleados* de las 2000 Compañías Transnacionales que proporciona el sitio web de Forbes.

III.1.2 Expansión 500, año 2012

CNN Expansión, desde el 2006, año con año ha publicado en su revista *Expansión 500* el *ranking* de “Las 500 empresas más importantes de México” con el objetivo de entregar una visión general de las compañías mexicanas en los diversos sectores económicos. La metodología que emplearon fue enviar 2000 cuestionarios a las Compañías más importantes de México diseñados para capturar los principales antecedentes financieros y otro tipo de información corporativa. La información que

¹³ De Carlo, Scott, (2012), *Methodology: How We Crunch the Numbers*, <http://www.forbes.com/sites/scottdecarlo/2012/04/18/methodology-how-we-crunch-the-numbers/> [28-09-2012]

¹⁴ De Carlo, Scott, (2012), *The World's Biggest Companies*, <http://www.forbes.com/sites/scottdecarlo/2012/04/18/the-worlds-biggest-companies/> [28-09-2012]

proporciona de cada empresa son: *el país de origen, el sector económico*¹⁵, *ventas netas, utilidad de operación, utilidad neta, activos, pasivos, capital* en millones de pesos y *número de empleados*¹⁶. La cual está basada en los datos que proporciona; *BoomerG*; las mismas empresas, las cifras de la *Bolsa Mexicana de Valores*, la *Comisión Nacional Bancaria y de Valores*, *US Securities Exchange Commission* y la *Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro*.

Aquí se consideró e hizo una base de datos de las *ventas netas, utilidades netas* y *número de empleados* de las 500 Compañías Transnacionales más importantes de México.

¹⁵ Construcción; Seguros y fianzas; Agroindustria; Hotelería y turismo; Servicios financieros; Cuidado personal; Entretenimiento; entre otros.

¹⁶ Cf. <http://www.enexpansion.com/especiales/2012/06/13/metodologia-las-500-de-expansion-2012> [28-09-2012]

Capítulo IV

Análisis de datos económicos

Con el fin de mostrar la relación proporcional entre la economía de las Compañías Transnacionales y la riqueza de los países se realizaron análisis de regresión y se calcularon correlaciones estadísticas entre los parámetros de las Compañías Transnacionales y el GDP nominal de cada país¹⁷.

Después se muestran las distribuciones de riqueza de países ricos, países no ricos y del mundo global por Rango y por Función de Supervivencia para las 2000 Compañías Transnacionales según *Forbes*. Así también se muestran las distribuciones de riqueza “mexicana” por Rango y por Función de Supervivencia para las Compañías más importantes de México según *Expansión 500*.

IV.1 Correlaciones estadísticas

IV.1.1 Forbes, dos perspectivas

Se investigó en el sitio web del Fondo Monetario Internacional el Producto Interno Bruto Nominal del año 2011, (*Gross Domestic Product, GDP*), de cada uno de los 62 países de la lista de *Forbes* del año 2011. A partir de los dos mil datos para cada parámetro, (*ganancias, ventas, activos, valor de mercado y número de empleados*), se calculó la suma de cada una de ellas por país, resultando un total de ganancias, un total de ventas, un total de activos, un total de valor de mercado y un total de empleados por cada país. De esta manera, para hacer el análisis de regresión y calcular los coeficientes de correlación se consideraron: el número de Compañías Transnacionales por país, la suma de las ganancias por país, la suma de las ventas por país, la suma de los activos por país, la suma de los valores de mercado por país, y la suma de empleados por país.

A continuación en la tabla 1 se presentan las correlaciones que se hicieron mostrando los valores del coeficiente de correlación entre las variables R , el coeficiente de determinación del modelo de regresión lineal R^2 , la intersección con el eje a y el valor de la estimación lineal o pendiente de la recta b .

¹⁷ Entiéndase GDP nominal como el Producto Interno Bruto, *PIB*, en valores nominales, esto es, la suma total de los todos los bienes y servicios finales producidos durante un año. Esta cifra se convierte de la respectiva moneda a dólares estadounidenses según las tasas o tipos de cambio oficiales.

Tabla 1

PARÁMETROS Y CORRELACIONES ESTADÍSTICAS GLOBALES

Correlaciones	R	R ²	y = a + bx	
			a	b
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GANANCIAS	0.9354	0.8750	4.4874	0.7031
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VALOR DE MERCADO	0.9663	0.9338	6.0108	0.0435
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VENTAS	0.9829	0.9662	4.6287	0.0528
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS ACTIVOS	0.9486	0.8999	1.1012	0.0139
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GDP (NOMINAL)	0.9619	0.9252	-0.7236	0.0345
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9743	0.9492	3.1156	0.0000
GANANCIAS VS VALOR DE MERCADO	0.9828	0.9659	3.9814	0.0589
GANANCIAS VS VENTAS	0.9484	0.8995	4.0284	0.0678
GANANCIAS VS ACTIVOS	0.9148	0.8369	-0.4771	0.0179
GANANCIAS VS GDP (NOMINAL)	0.9356	0.8754	-3.1847	0.0446
GANANCIAS VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9148	0.9033	1.6733	0.0000
VALOR DE MERCADO VS VENTAS	0.9693	0.9395	-1.8427	1.1565
VALOR DE MERCADO VS ACTIVOS	0.9380	0.8798	-80.9254	0.3056
VALOR DE MERCADO VS GDP (NOMINAL)	0.9616	0.9247	-129.0281	0.7658
VALOR DE MERCADO VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9762	0.9530	-45.2717	0.0005
VENTAS VS ACTIVOS	0.9725	0.9457	-71.3044	0.2655
VENTAS VS GDP (NOMINAL)	0.9652	0.9317	-92.8142	0.6442
VENTAS VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9855	0.9713	-25.5062	0.0004
ACTIVOS VS GDP (NOMINAL)	0.9515	0.9054	14.8527	2.3260
ACTIVOS VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9705	0.9419	259.9459	0.0015
GDP (NOMINAL) VS NÚMERO DE EMPLEADOS	0.9780	0.9564	140.4000	0.0006

Nótese que las correlaciones más cercanas a uno fueron: el número de compañías, las ganancias, las ventas, los activos, el valor de mercado y el número de empleados de las Compañías Transnacionales, cada una de ellas, comparadas con GDP (Nominal). Lo cual significa que si el GDP es un indicador de la producción y servicios finales de una nación durante un período de tiempo de un año y se tiene un coeficiente de correlación cercano a uno con cada parámetro, entonces para cada una de ellos dividido entre el GDP de cada país tiene una aproximación muy cercana, (casi constante).

Analizando las ventas vs ganancias, se observa que la ecuación es $y = 4.0284 + 0.0678x$ con $R = 0.9484$ y $R^2 = 0.8995$. De manera general, se dice que:

1. Existe una fuerte correlación entre las ventas y las ganancias.
2. El 89 % de la variabilidad de los datos puede ser explicada por la ecuación.

3. Las ventas de las Compañías Transnacionales por país crecen a razón de 0.0678 en función de las ganancias del país respectivo.
4. El valor del parámetro a igual a 4.0284 indica que cuando no hay ganancias sí hay ventas, de manera que este modelo de regresión indica que hay pérdidas por parte de las Compañías Transnacionales del país en cuestión. Cabe mencionar que la ecuación del análisis de regresión presentada no está tomando en cuenta todas las variables que influyen en las ventas de las Compañías Transnacionales, por lo que el valor de a sólo da indicios de posibles pérdidas, no las asegura al 100 %.

Cuestiones como la que se acaba de mencionar se pueden encontrar con los parámetros de $a > 0$, si analizamos los parámetros de $a < 0$ como lo es ventas vs activos, donde la ecuación del análisis de regresión es $y = -71.8044 + 0.2655x$ con $R = 0.9725$ y $R^2 = 0.9457$, se observa:

1. Existe una fuerte correlación entre las ventas y los activos.
2. El 94 % de la variabilidad de los datos puede ser explicada por la ecuación.
3. Las ventas de los países crecen a razón de 0.2655 en función de los activos de las Compañías Transnacionales del respectivo país.
4. El valor del parámetro a igual a -71.8044 indica que si las ventas de las Compañías Transnacionales es cero, entonces éstas tienen un valor alto de sus activos, lo cual es coherente con la definición de los parámetros, puesto que los activos son todo aquello que la compañía posee y le deben, no sólo las ventas.

La relación económica proporcional entre las Compañías Transnacionales y la riqueza de los países queda determinada por los altos coeficientes de correlación R mostrados en la tabla 1, todos son mayores a 0.9 y se aproximan a la unidad.

Análisis generales como estos se pueden hacer con cada ecuación y valores de coeficientes de correlación y de determinación para observar el comportamiento de las Compañías Transnacionales globales.

IV.1.1.1 Países ricos (hemisferio Norte) y países no ricos (hemisferio Sur)

Se dividieron los 62 países entre ricos y no ricos considerando como países ricos los países que geográficamente se localizan en el hemisferio Norte, y como países no ricos los que se localizan en el hemisferio Sur, [Samir Amin, 1994, 1997; Del Castillo *et. a.*, 2013]. Donde el número de Compañías Transnacionales en el hemisferio Norte fue de 1390 y en el hemisferio Sur fue de 610.

Las correlaciones obtenidas fueron:

Tabla 2

Valor de las correlaciones R para países ricos y países no ricos		
Correlaciones	Ricos	No ricos
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GANANCIAS	0.9329	0.9259
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VALOR DE MERCADO	0.9646	0.9484
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VENTAS	0.9856	0.9640
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS ACTIVOS	0.9527	0.9202
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GDP (NOMINAL)	0.9794	0.8692
GANANCIAS VS VALOR DE MERCADO	0.9916	0.8857
GANANCIAS VS VENTAS	0.9534	0.9669
GANANCIAS VS ACTIVOS	0.9246	0.8519
GANANCIAS VS GDP (NOMINAL)	0.9525	0.8017
VALOR DE MERCADO VS VENTAS	0.9715	0.9459
VALOR DE MERCADO VS ACTIVOS	0.9389	0.9681
VALOR DE MERCADO VS GDP (NOMINAL)	0.9713	0.9453
VENTAS VS ACTIVOS	0.9768	0.9387
VENTAS VS GDP (NOMINAL)	0.9916	0.9028
ACTIVOS VS GDP (NOMINAL)	0.9637	0.9555

Como se puede observar, en la tabla 2, en general el valor de las correlaciones por rubro fue más alto para los países ricos que para los países no ricos. Nótese que aproximadamente el 70 % del número de Compañías Transnacionales en el mundo se concentra en el hemisferio Norte y el 30 % se concentra en el hemisferio Sur. Las correlaciones obtenidas, muestran que la riqueza de las Compañías Transnacionales está concentrada, (en su mayoría), en el hemisferio Norte y su minoría en el hemisferio Sur.

Para futuras investigaciones se podría analizar cómo ha cambiado el porcentaje de la distribución de las Compañías Transnacionales en el hemisferio Norte y en el hemisferio Sur y así observar el aumento o disminución de Compañías Transnacionales

en los países que son considerados como no ricos y en consecuencia el crecimiento o decrecimiento económico en dichos países que integran el hemisferio Sur. Análogamente se podría hacer para el hemisferio Norte.

Nótese que la definición de países ricos y países no ricos es deficiente, para una mejor clasificación, (que no se hace en este trabajo), de qué países pueden ser considerados ricos y cuáles pobres se debe considerar el GDP per cápita y/o grado de industrialización. Lo que se presenta aquí es una aproximación general.

IV.1.1.2 Cuatro grandes regiones

Se dividió al mundo en cuatro grandes regiones: EUA, América, Europa-Medio Oriente-África y Asia-Pacífico. Donde el número de Compañías Transnacionales fueron 536, 157, 540 y 767 para cada región respectivamente.

A continuación se muestran las correlaciones obtenidas¹⁸:

Tabla 3

AMÉRICA	
Correlaciones	<i>R</i>
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GANANCIAS	0.9834
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VALOR DE MERCADO	0.9637
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VENTAS	0.9780
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS ACTIVOS	0.9367
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GDP (NOMINAL)	0.8238
GANANCIAS VS VALOR DE MERCADO	0.9914
GANANCIAS VS VENTAS	0.9987
GANANCIAS VS ACTIVOS	0.9780
GANANCIAS VS GDP (NOMINAL)	0.7622
VALOR DE MERCADO VS VENTAS	0.9961
VALOR DE MERCADO VS ACTIVOS	0.9944
VALOR DE MERCADO VS GDP (NOMINAL)	0.6938
VENTAS VS ACTIVOS	0.9867
VENTAS VS GDP (NOMINAL)	0.7336
ACTIVOS VS GDP (NOMINAL)	0.6211

Tabla 4

EUROPA-MEDIO ORIENTE-ÁFRICA	
Correlaciones	<i>R</i>
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GANANCIAS	0.9583
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VALOR DE MERCADO	0.9801
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VENTAS	0.9466
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS ACTIVOS	0.9720
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GDP (NOMINAL)	0.8487
GANANCIAS VS VALOR DE MERCADO	0.9818
GANANCIAS VS VENTAS	0.9149
GANANCIAS VS ACTIVOS	0.9283
GANANCIAS VS GDP (NOMINAL)	0.7885
VALOR DE MERCADO VS VENTAS	0.9531
VALOR DE MERCADO VS ACTIVOS	0.9645
VALOR DE MERCADO VS GDP (NOMINAL)	0.8197
VENTAS VS ACTIVOS	0.9644
VENTAS VS GDP (NOMINAL)	0.9246

¹⁸ Las correlaciones de EUA no se muestran, puesto que resultarían ser todas iguales a 1.

ACTIVOS VS GDP (NOMINAL)	0.8820
--------------------------	--------

Tabla 5

ASIA-PACÍFICO

Correlaciones	R
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GANANCIAS	0.6670
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VALOR DE MERCADO	0.8917
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS VENTAS	0.9908
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS ACTIVOS	0.9700
NÚMERO DE COMPAÑÍAS VS GDP (NOMINAL)	0.8848
GANANCIAS VS VALOR DE MERCADO	0.8310
GANANCIAS VS VENTAS	0.6458
GANANCIAS VS ACTIVOS	0.6882
GANANCIAS VS GDP (NOMINAL)	0.7517
VALOR DE MERCADO VS VENTAS	0.8654
VALOR DE MERCADO VS ACTIVOS	0.9388
VALOR DE MERCADO VS GDP (NOMINAL)	0.9641
VENTAS VS ACTIVOS	0.9684
VENTAS VS GDP (NOMINAL)	0.8751
ACTIVOS VS GDP (NOMINAL)	0.9510

En las tablas 3, 4 y 5 se observa que las correlaciones de: ganancias vs valor de mercado, ganancias vs ventas, ganancias vs activos para el caso de Asia-Pacífico son muy bajas en comparación con América y Europa-Medio Oriente-África, debido a que en general, las políticas nacionales Asia-Pacífico son diferentes en cuanto a su inversión, así como Lester Thurow afirma en su libro *La guerra del siglo XXI*:

“Los norteamericanos invierten menos por trabajador y concentran más sus inversiones en la educación de gerentes. [Thurow, 1992: 163].

“El esquema contable norteamericano considera a la investigación y desarrollo como gasto en tanto que en Europa y Japón se le considera una inversión.” [Thurow, 1992: 165].

Estos resultados reportados se pueden ampliar a una investigación económica sobre el impacto y la eficiencia de las Compañías Transnacionales de ciertos países sobre su economía nacional y economía mundial comparada con las Compañías Transnacionales de otros países.

IV.2 Funciones de distribución de la riqueza

IV.2.1 Cuatro distribuciones de riqueza global por empleado (per cápita) por Compañía Transnacional (Forbes)

Con el programa *Mathematica*® se realizaron las siguientes distribuciones por Rango y Función de Supervivencia (SF)¹⁹: Ganancias/Número de empleados; Ventas/ Número de empleados; Activos/ Número de empleados; y Valor de mercado/ Número de empleados. Cada una de ellas para países ricos, países no ricos y todos los países (global).

1. Distribuciones por Rango:

Para un total de 2000 datos que proporcionó Forbes no todos los parámetros estuvieron completos, por lo cual se consideraron sólo 1979 datos de los 2000 para cada Compañía Transnacional²⁰. Para ello, se ordenó cada cociente de la lista descendientemente, tal que la compañía con mayor dinero por empleado es la primera, y la compañía con menos dinero por empleado es la última. Se presentan las distribuciones por Rango de los países ricos, los países no ricos y todos los países. La división de los países ricos y los países no ricos es la misma que se utilizó en la sección IV.1.1.1. La distribución global (todos los países) se presenta desde tres perspectivas: escala lineal, escala semilogarítmica y escala logarítmica, con el objetivo de observar qué sección de la gráfica sigue una ley exponencial (Boltzmann-Gibbs) y cuál una ley de potencias (Pareto). Después, se presenta la misma distribución pero particionada en dos, es decir, se presenta una gráfica de la zona de la distribución que sigue una ley exponencial y otra gráfica de la zona de la distribución que sigue una ley de potencias. Se hizo así con el objetivo de observar el comportamiento o tendencia de los datos ordenados descendientemente. Recientes investigaciones muestran la importancia de las distribuciones por Rango en la física [Naumis y Cocho, 2008].

2. Distribuciones por Función de Supervivencia:

Para los mismos datos, se dio la instrucción a *Mathematica* de proporcionar la distribución de Función de Supervivencia para cada cociente. El método que utilizó *Mathematica* para generar la distribución de Función de Supervivencia está descrito en

¹⁹ Ver apéndice A para la función de supervivencia

²⁰ En las distribuciones globales no aparecen graficados la totalidad de los datos, ya que de los 1974 considerados se despreciaron los datos con valores menores a uno.

el apéndice A. Así como en el caso de la distribución por Rango, la distribución global se presenta desde tres perspectivas: escala lineal, escala semilogarítmica y escala logarítmica para observar en qué rango la distribución sigue la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs y en qué rango la distribución sigue una ley de potencias de Pareto. También se presenta la partición de las distribuciones en dos secciones: la que sigue la ley exponencial y la que sigue la ley de potencias.

IV.2.2.1 Por rango

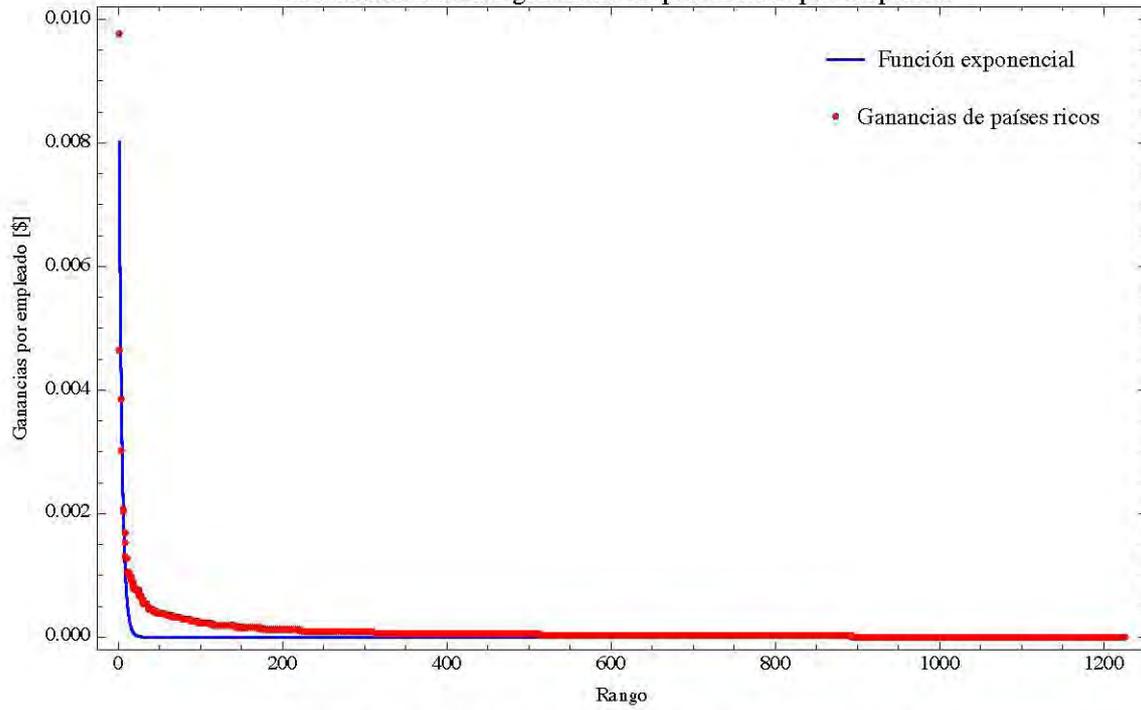
IV.2.1.1.1 Distribuciones por países ricos y países no ricos

La ecuación del ajuste exponencial de cada distribución de ganancias, ventas, activos y valor de mercado para países ricos y para países no ricos se presenta en la sección V.II del presente trabajo. En cada distribución la línea sólida representa la función exponencial teórica y los puntos representan los datos empíricos. Las unidades del eje vertical son billones de dólares, en el eje horizontal están representadas las Compañías Transnacionales ordenadas descendientemente de acuerdo a las ganancias por empleado que tienen. A la Compañía Transnacional con mayores ganancias por empleado se le asignó el número 1 en el rango, a la Compañía Transnacional con menores ganancias por empleado que la número 1 se le asignó el número 2 en el rango, así sucesivamente hasta que estuvo representada la totalidad de las Compañías Transnacionales de países ricos y de países no ricos. Nótese que en el eje horizontal de las distribuciones por países ricos y países no ricos se considera el número de Compañías Transnacionales respectivas al conjunto de países dado. Es decir, en los países ricos se consideraron cerca de 1390 Compañías Transnacionales y en los países no ricos se consideraron cerca de 610 Compañías Transnacionales²¹.

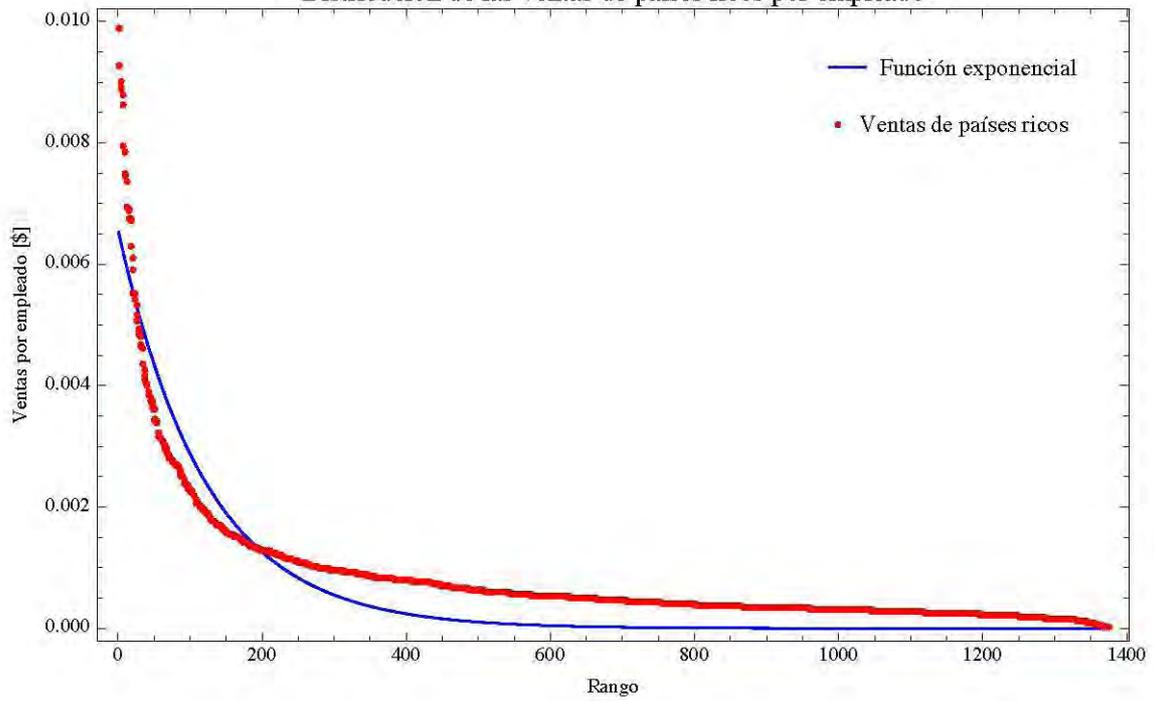
En la figura 6 se muestran las cuatro distribuciones para países ricos y en la figura 7 se muestran las cuatro distribuciones para países no ricos.

²¹ Se proporciona una cifra aproximada del número de Compañías Transnacionales en los países ricos y en los países no ricos debido a que sólo se consideraron 1979 datos de la lista de las 2000 Compañías Transnacionales.

Distribución de las ganancias de países ricos por empleado



Distribución de las ventas de países ricos por empleado



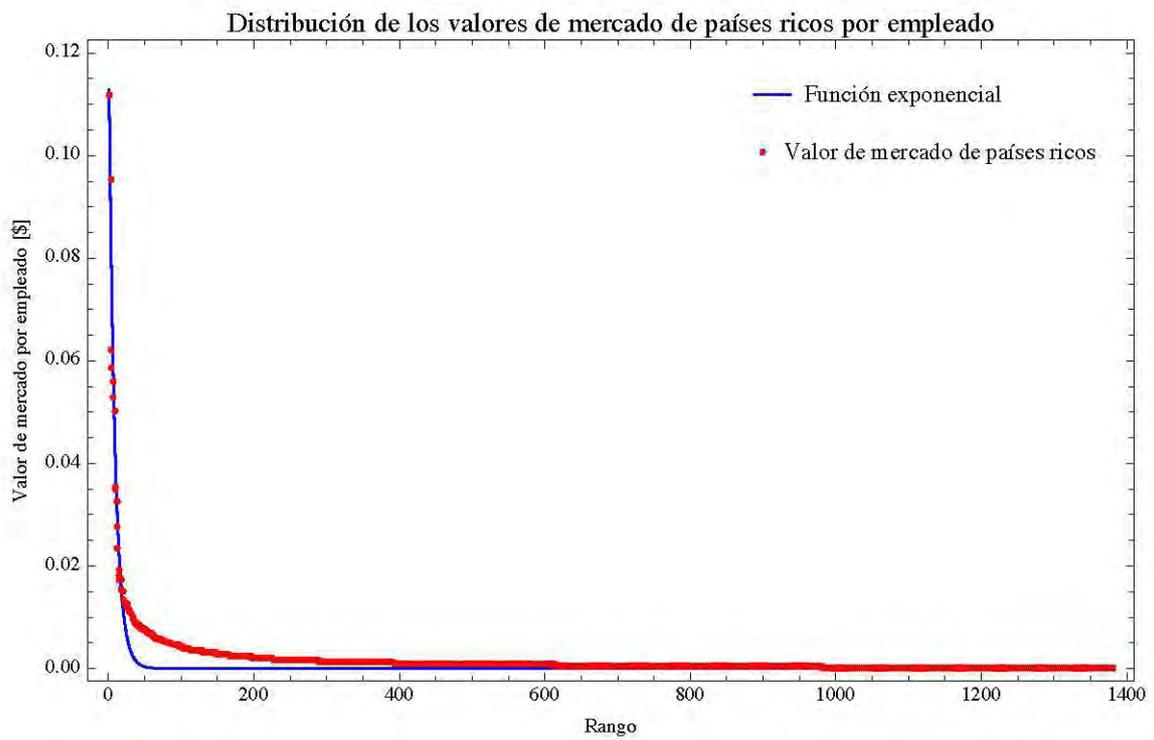
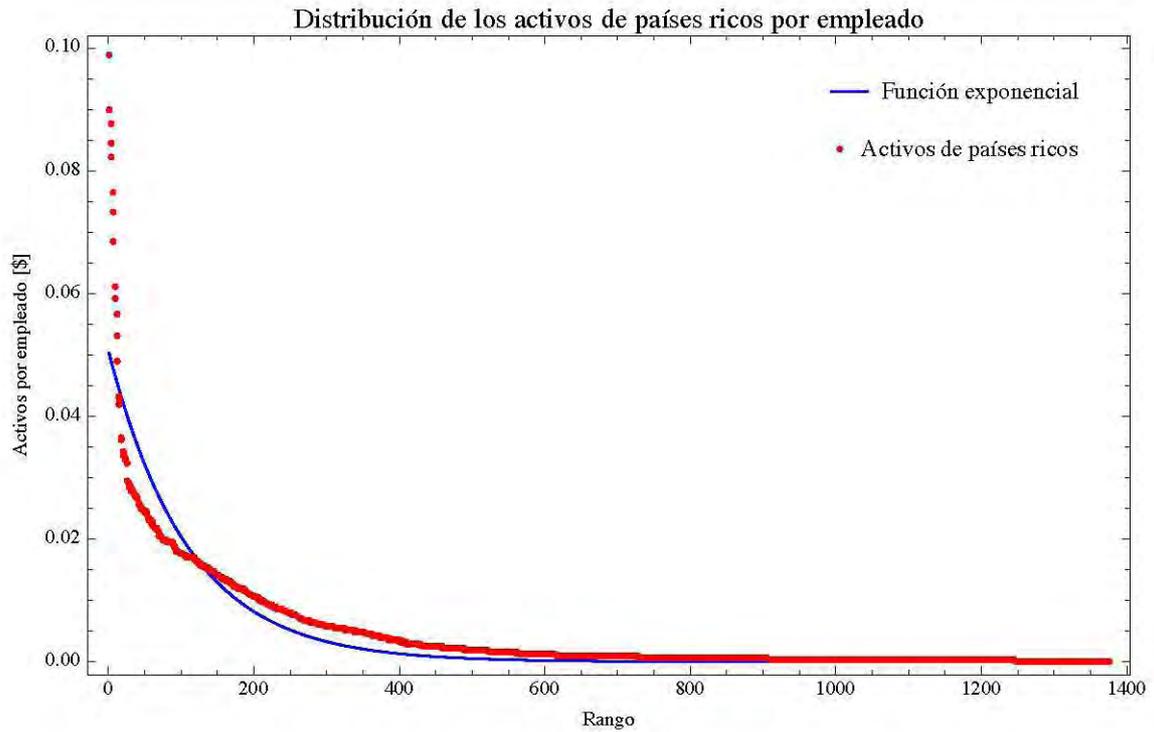
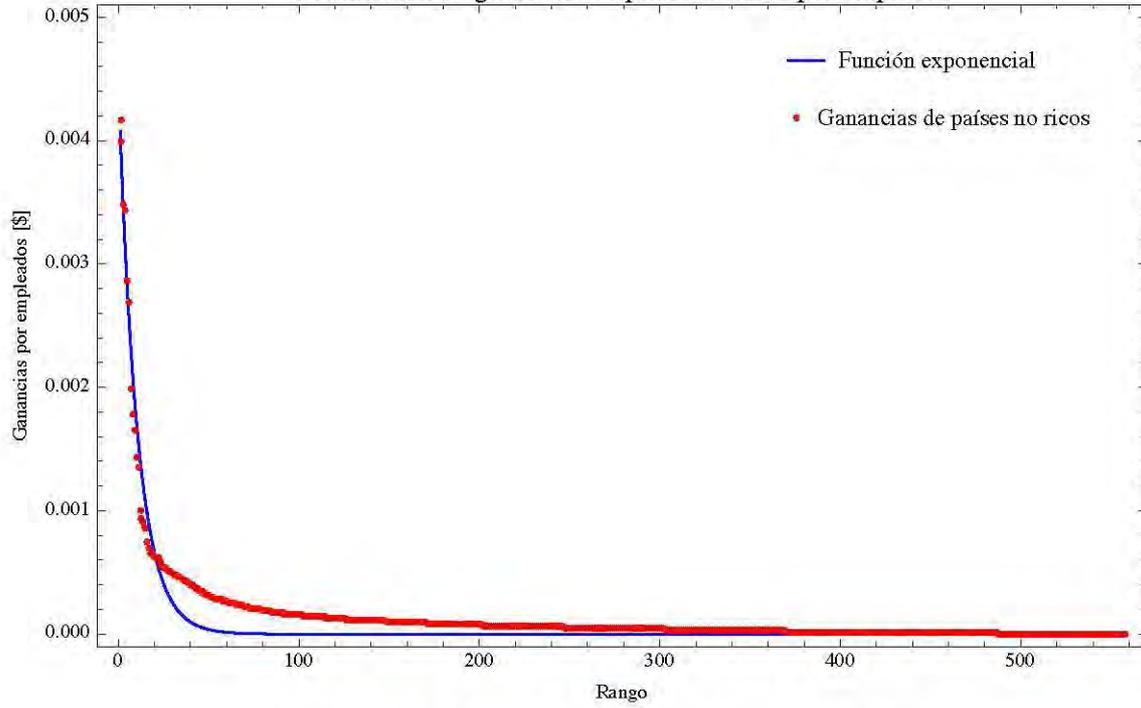
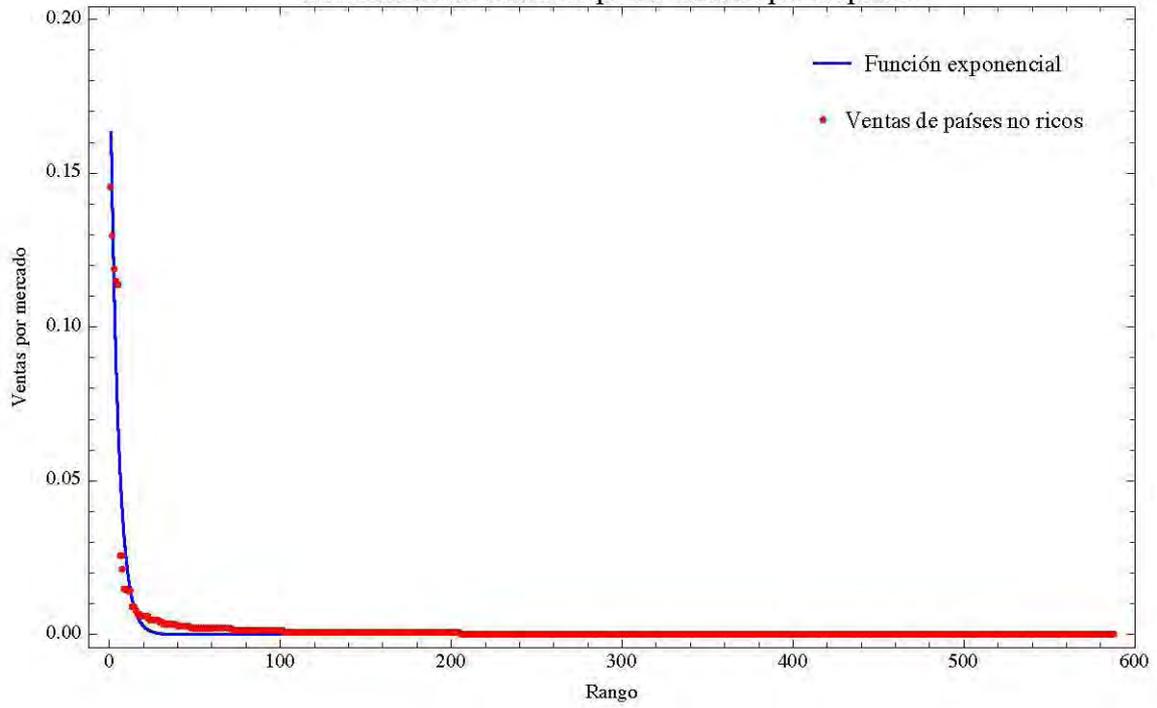


Figura 6. Distribución de ganancias de países ricos por empleado, Distribución de ventas de países ricos por empleado, Distribución de activos de países ricos por empleado y Distribución del valor de mercado de países ricos por empleado.

Distribución de ganancias de países no ricos por empleado



Distribución de ventas de países no ricos por empleado



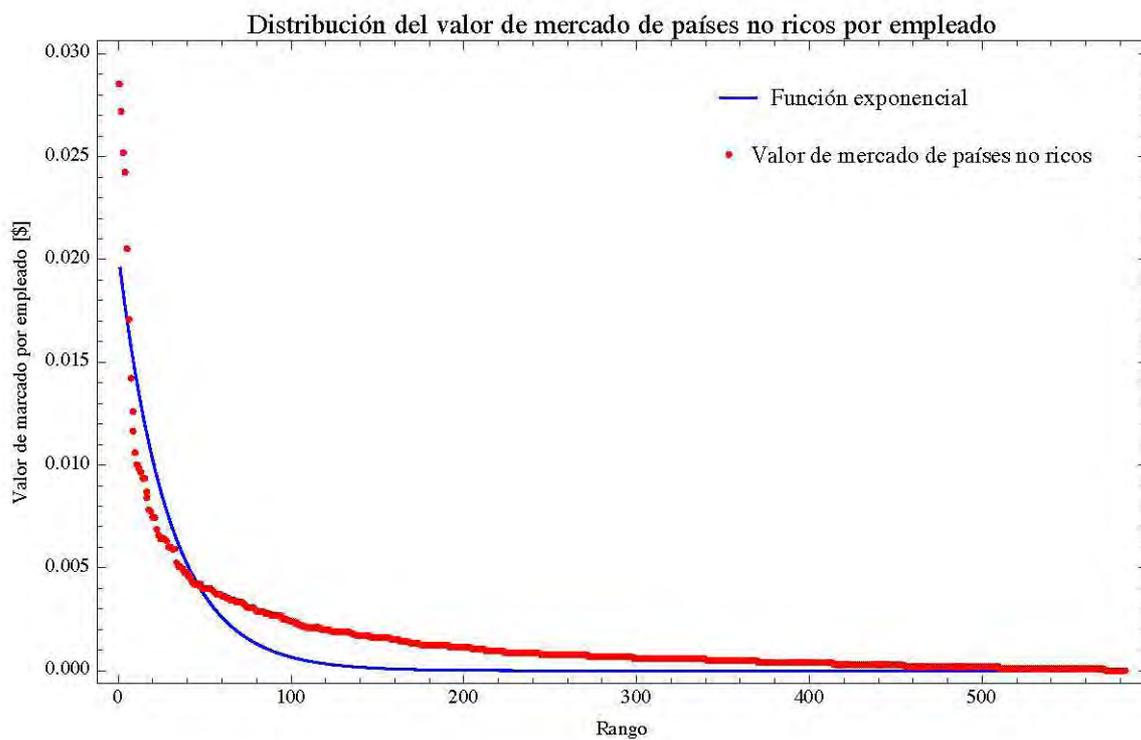
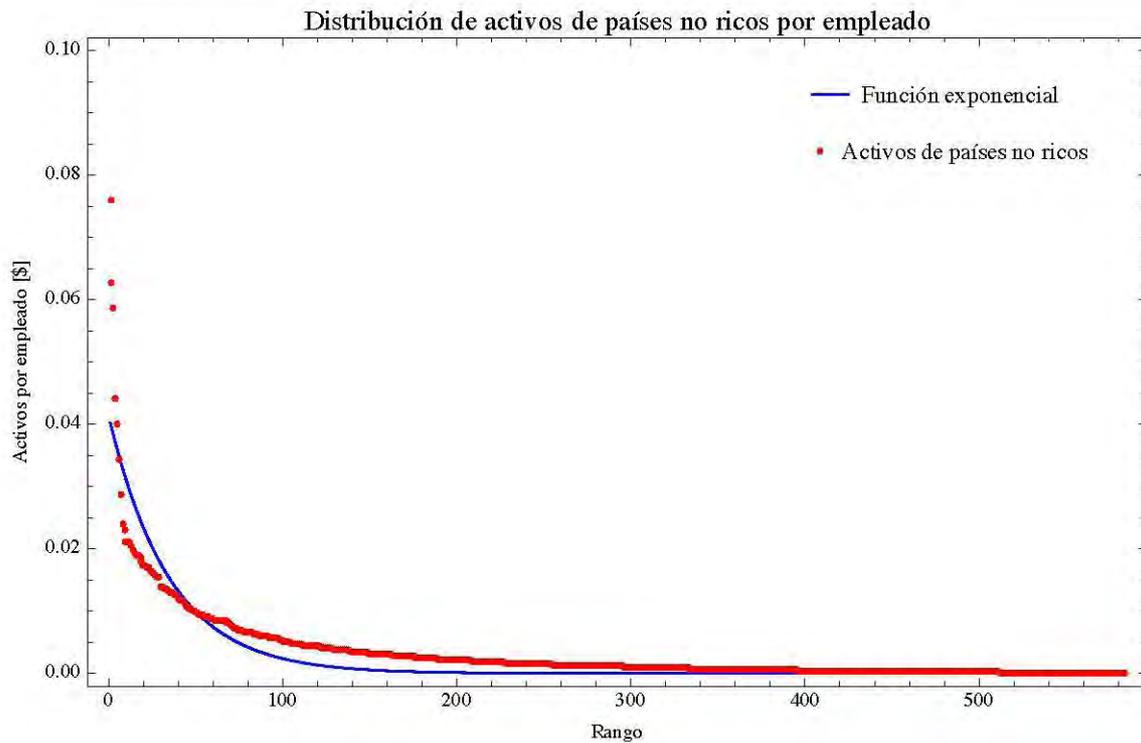
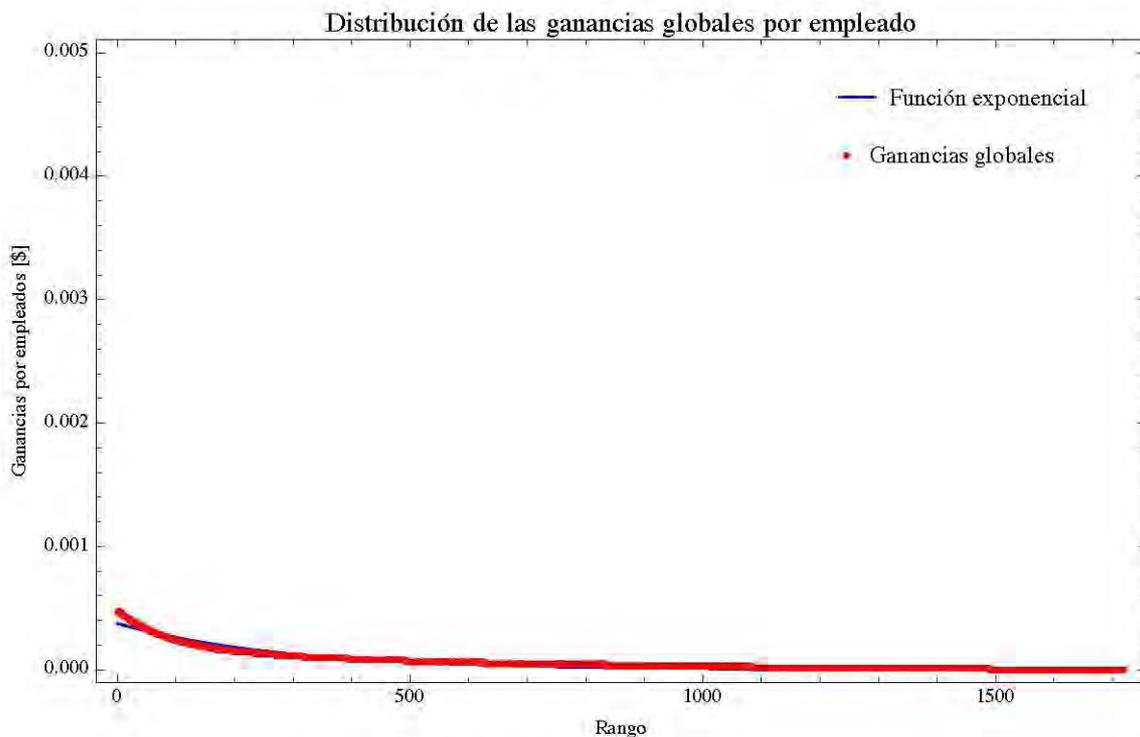


Figura 7. Distribución de ganancias de países no ricos por empleado, Distribución de ventas de países no ricos por empleado, Distribución de activos de países no ricos por empleado y Distribución del valor de mercado de países no ricos por empleado.

IV.2.1.1.2 Distribuciones globales

A continuación se muestran: la distribución de las ganancias globales por empleado, la distribución de las ventas globales por empleado, la distribución de los activos globales por empleado, y la distribución de los valores de mercado globales por empleado, todas en tres escalas distintas: lineal, semilogarítmica y logarítmica. En las figuras 8, 9, 10 y 11 se observa que las distribuciones globales por empleado en escala semilogarítmica los datos presentan una tendencia casi lineal con pendiente negativa en todo su rango y al final una caída también lineal con una pendiente negativa mayor. Se ajustó a cada distribución una función exponencial que modela los datos empíricos, las respectivas ecuaciones se presentan en la sección V.2.



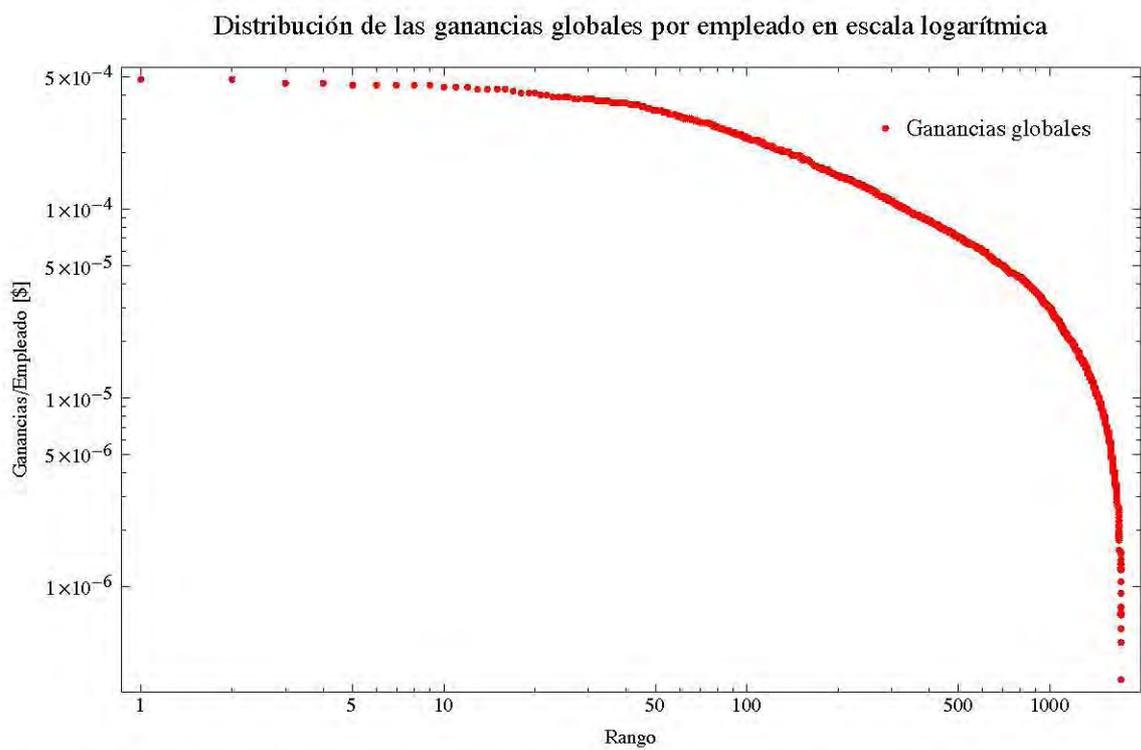
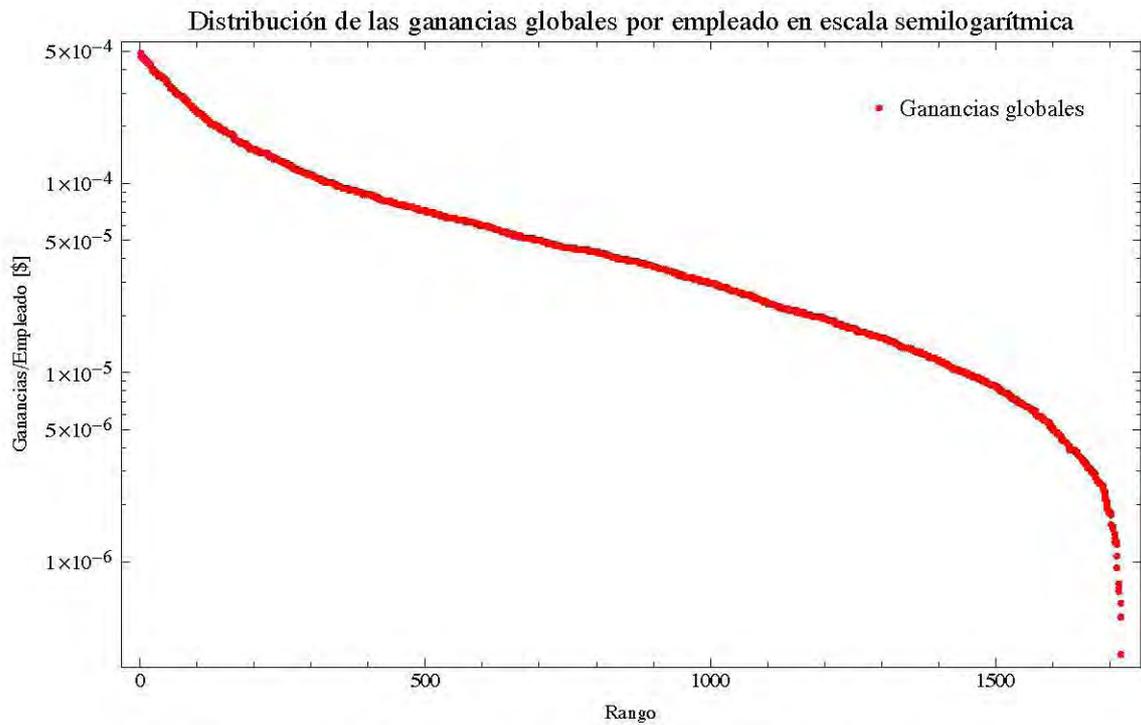
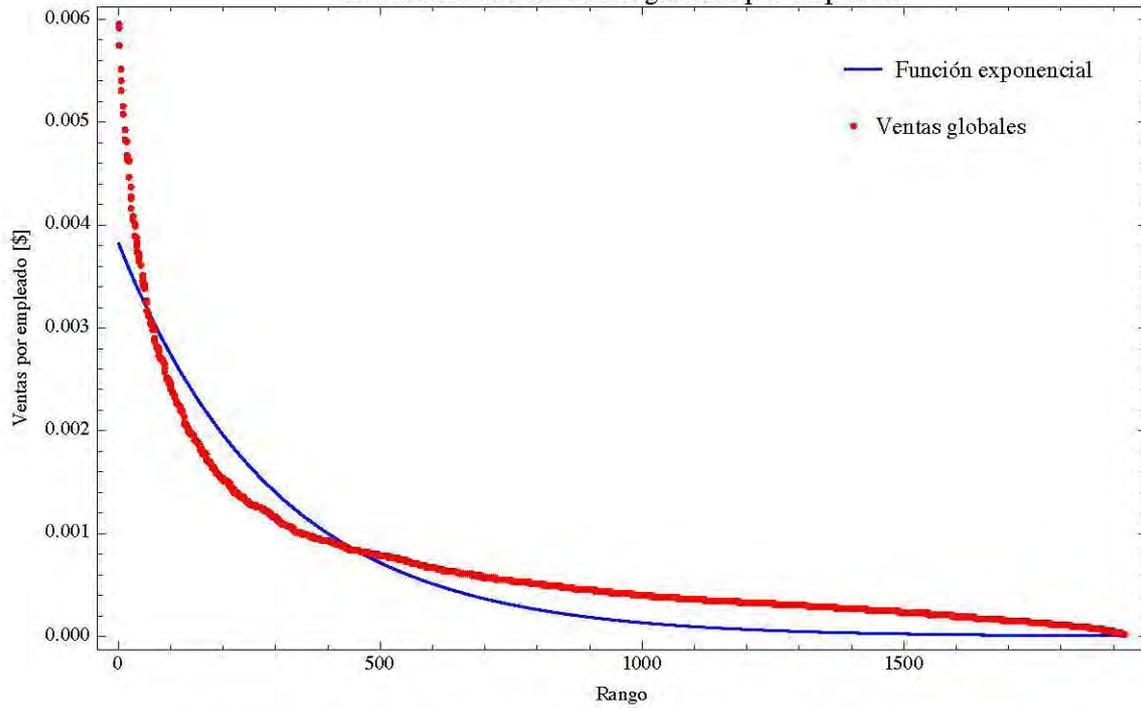
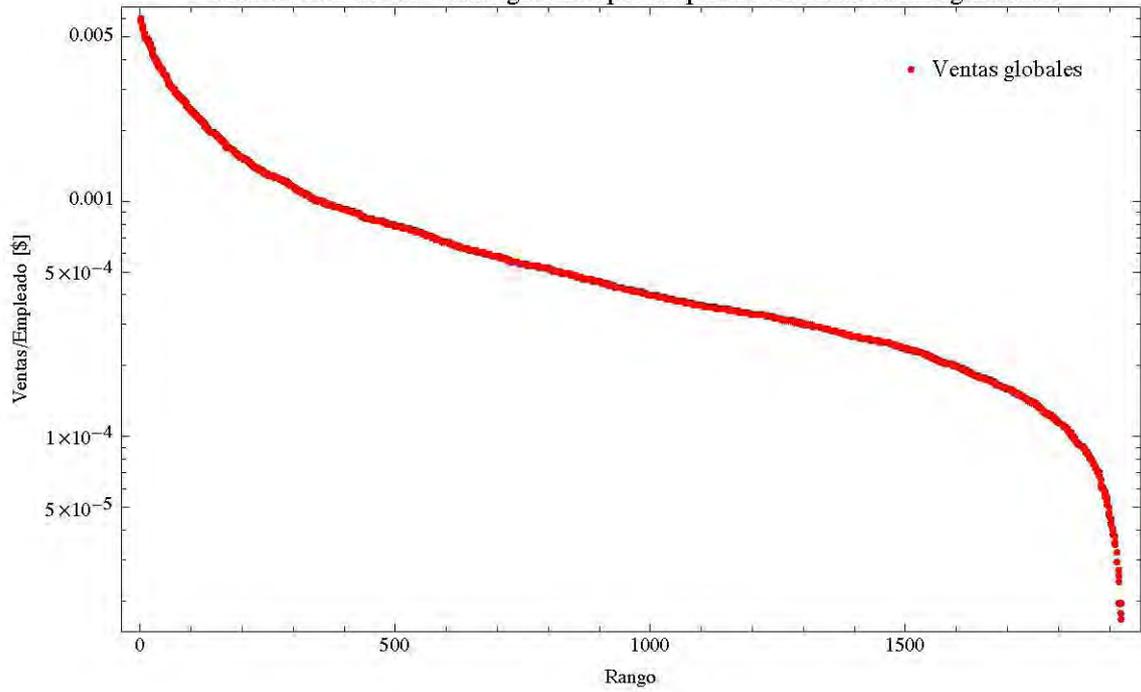


Figura 8. Distribución de las ganancias globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Distribución de las ventas globales por empleado



Distribución de las ventas globales por empleado en escala semilogarítmica



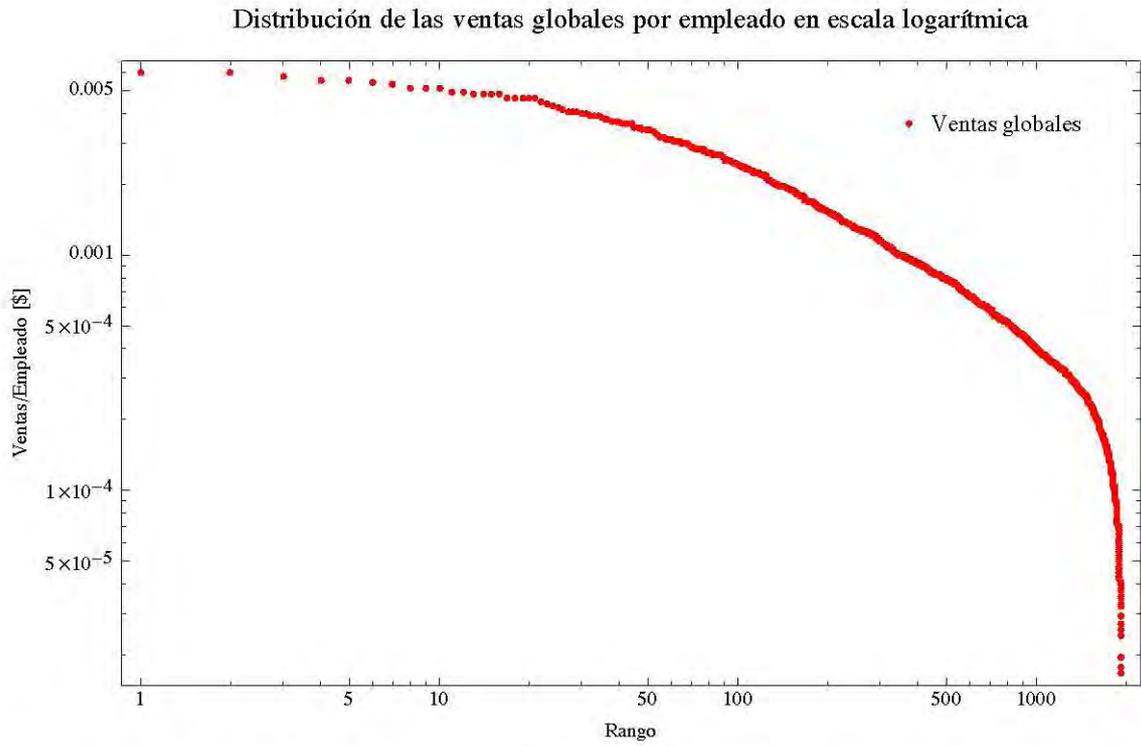
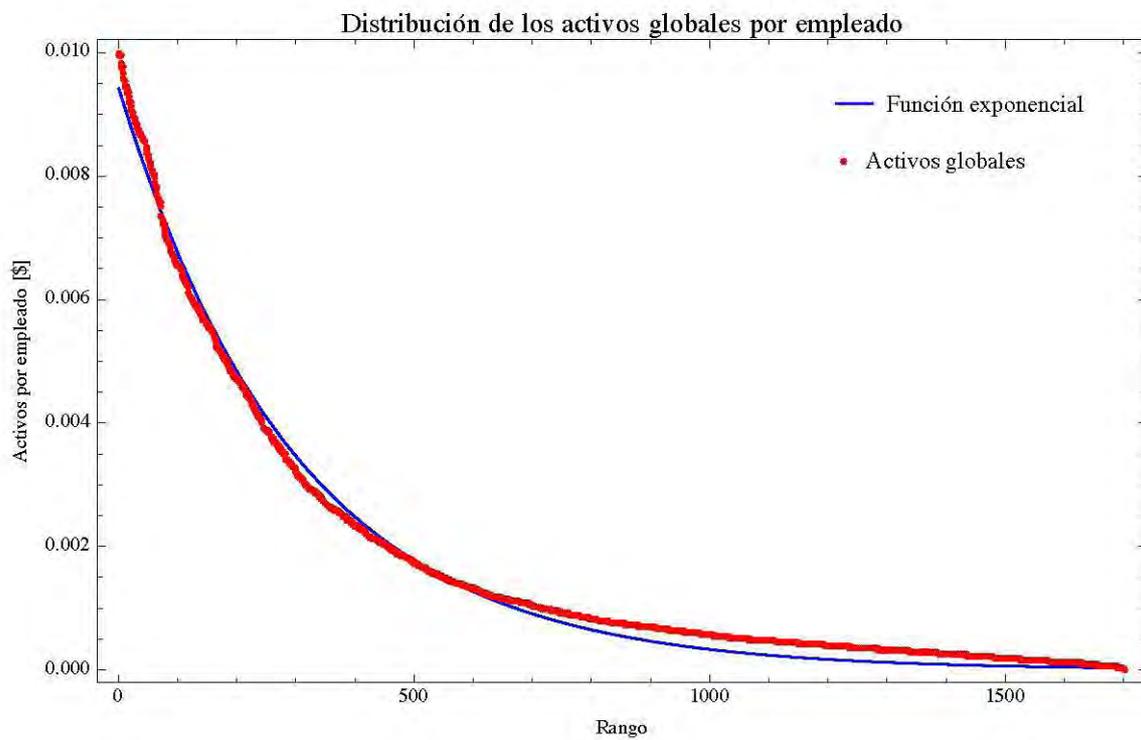


Figura 9. Distribución de las ventas globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.



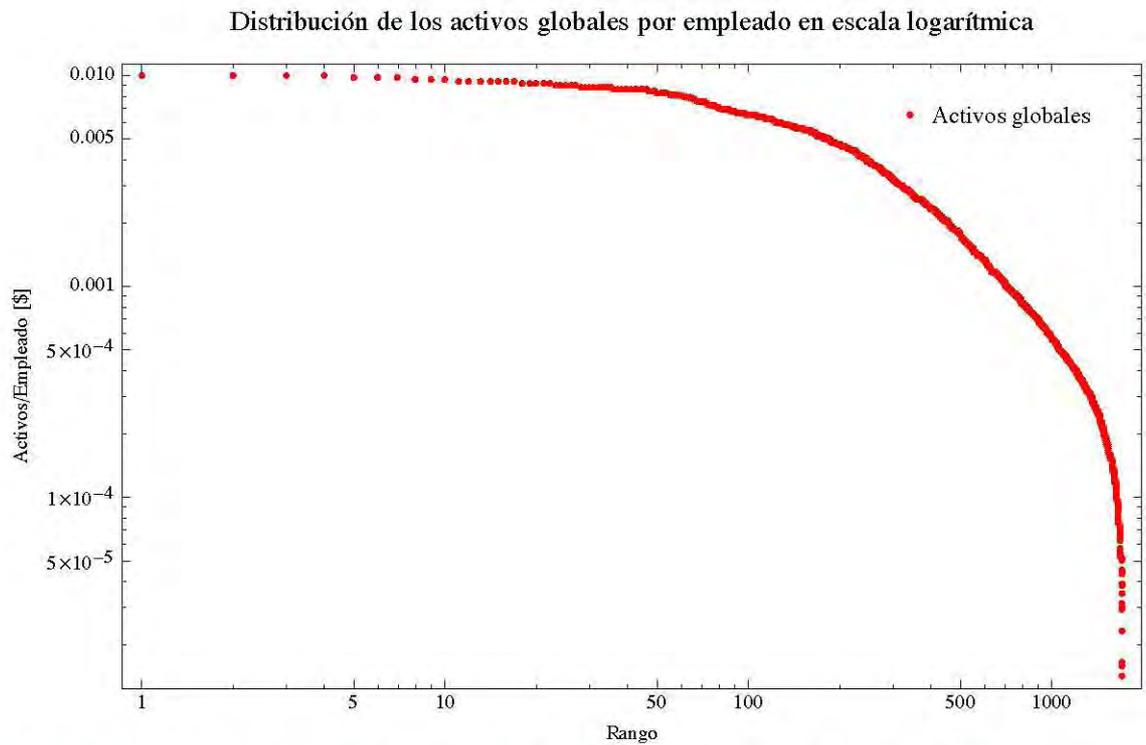
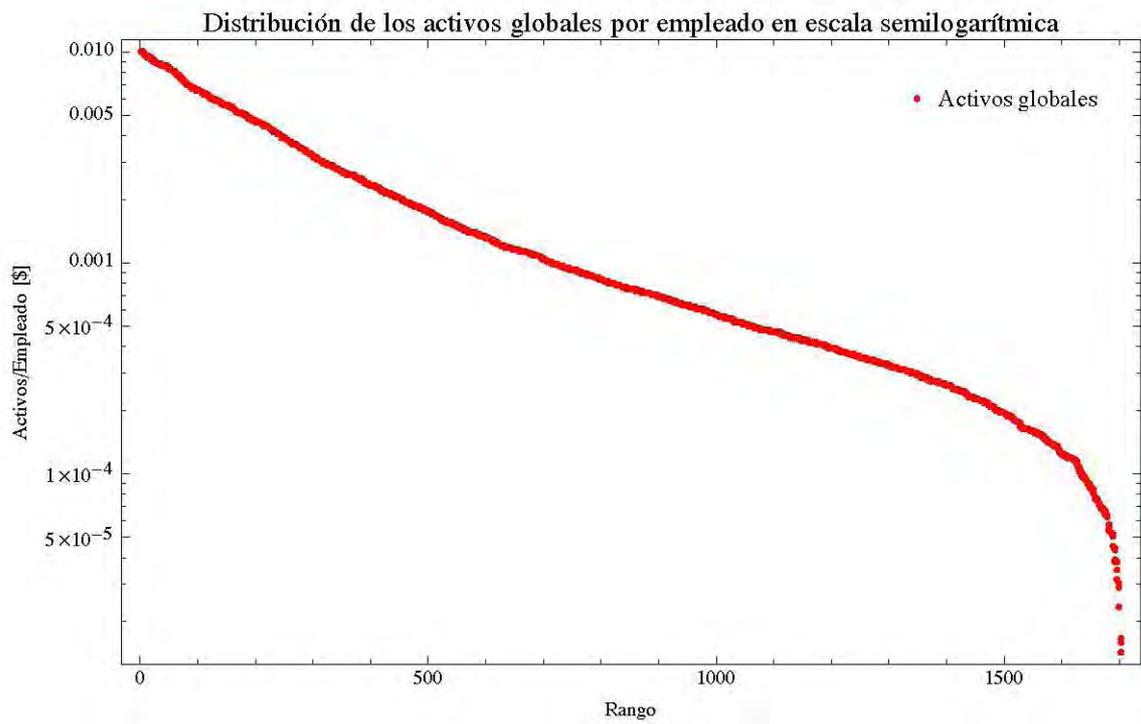
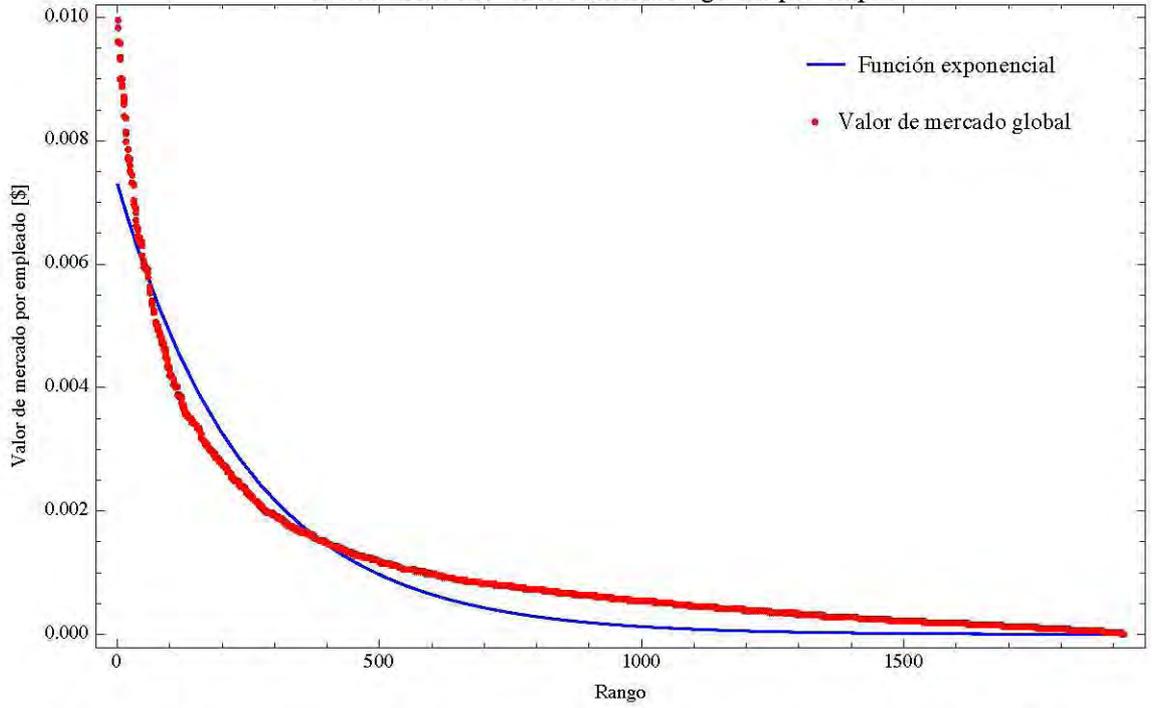
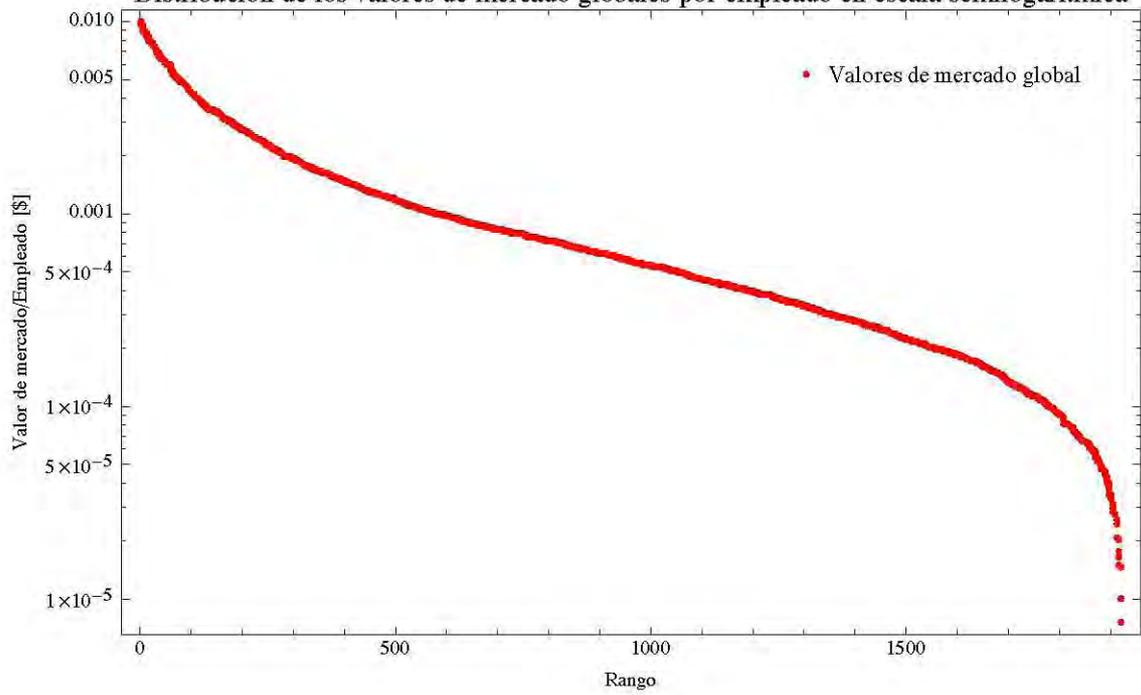


Figura 10. Distribución de los activos globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Distribución del valor de mercado global por empleado



Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala semilogarítmica



Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala logarítmica

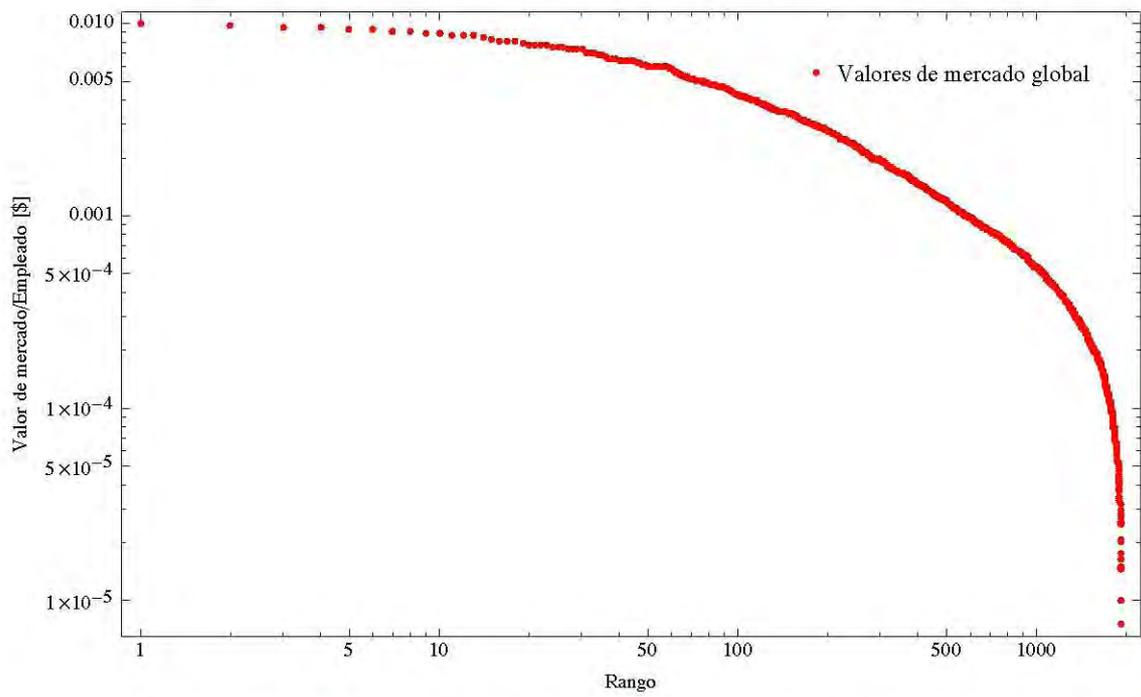
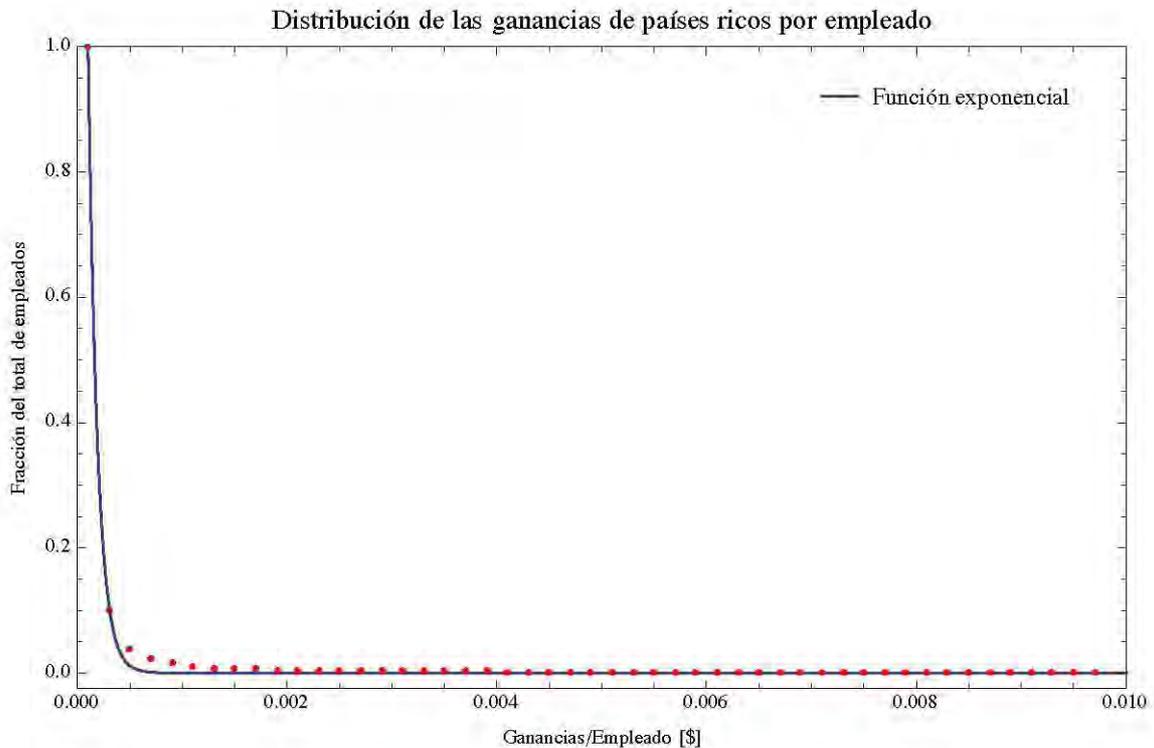


Figura 11. Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

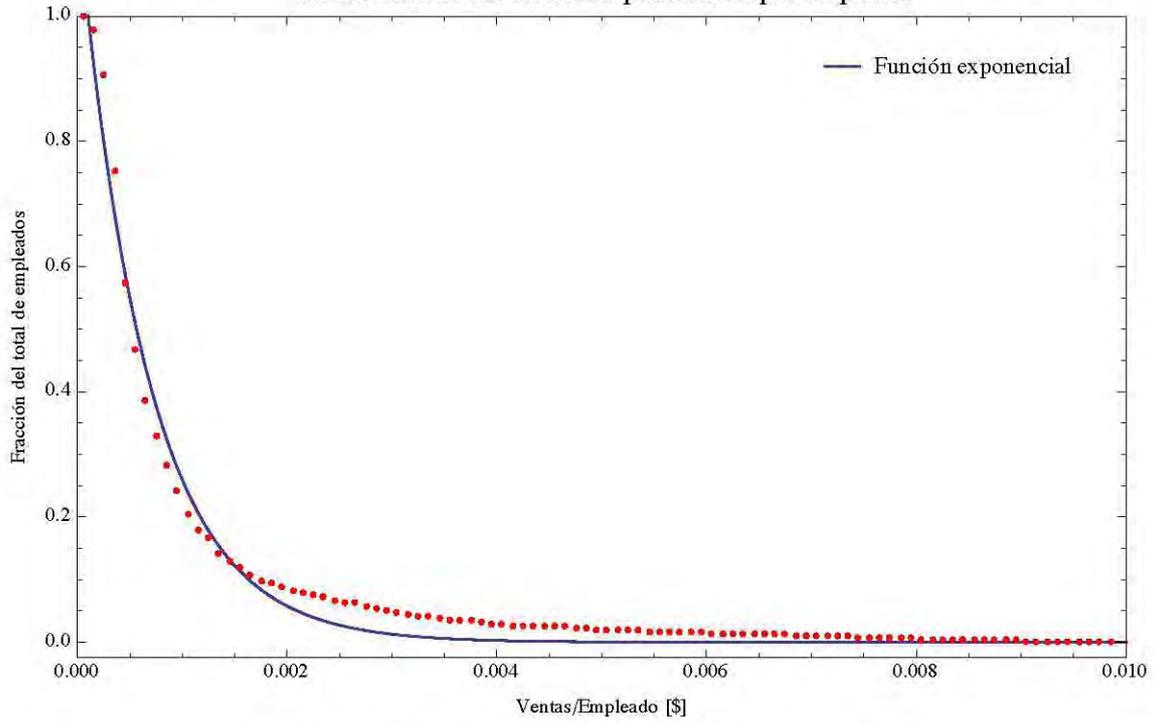
IV.2.1.2 Por Función de Supervivencia

IV.2.1.2.1 Distribuciones por países ricos y países no ricos

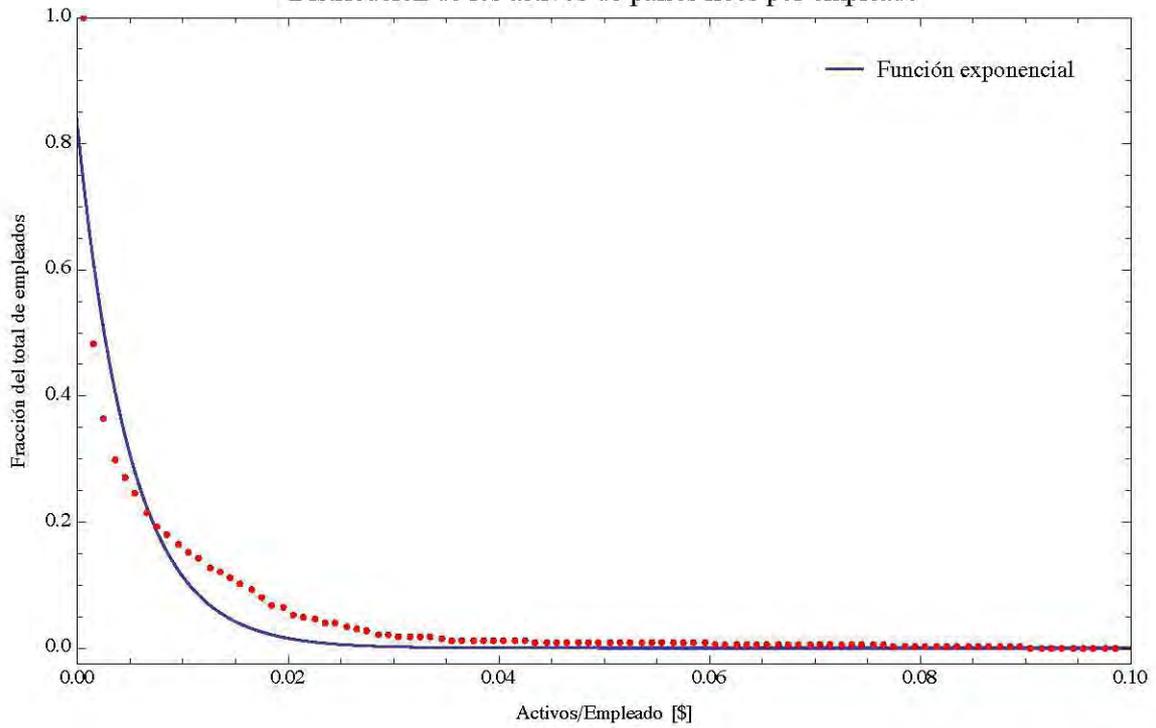
Las distribuciones por función de supervivencia que se presentan a continuación están normalizadas a la unidad. El eje vertical representa la fracción total de empleados y el eje horizontal las ganancias por empleado, ventas por empleado, activos por empleado y valor de mercado por empleado respectivamente, donde sus unidades están en billones de dólares. La línea sólida representa la función exponencial ajustada a los puntos de la distribución por función de supervivencia. Para los países ricos y para los países no ricos se observa que la distribución sigue una ley exponencial. Las respectivas ecuaciones se presentan en la sección V.2.



Distribución de las ventas de países ricos por empleado



Distribución de los activos de países ricos por empleado



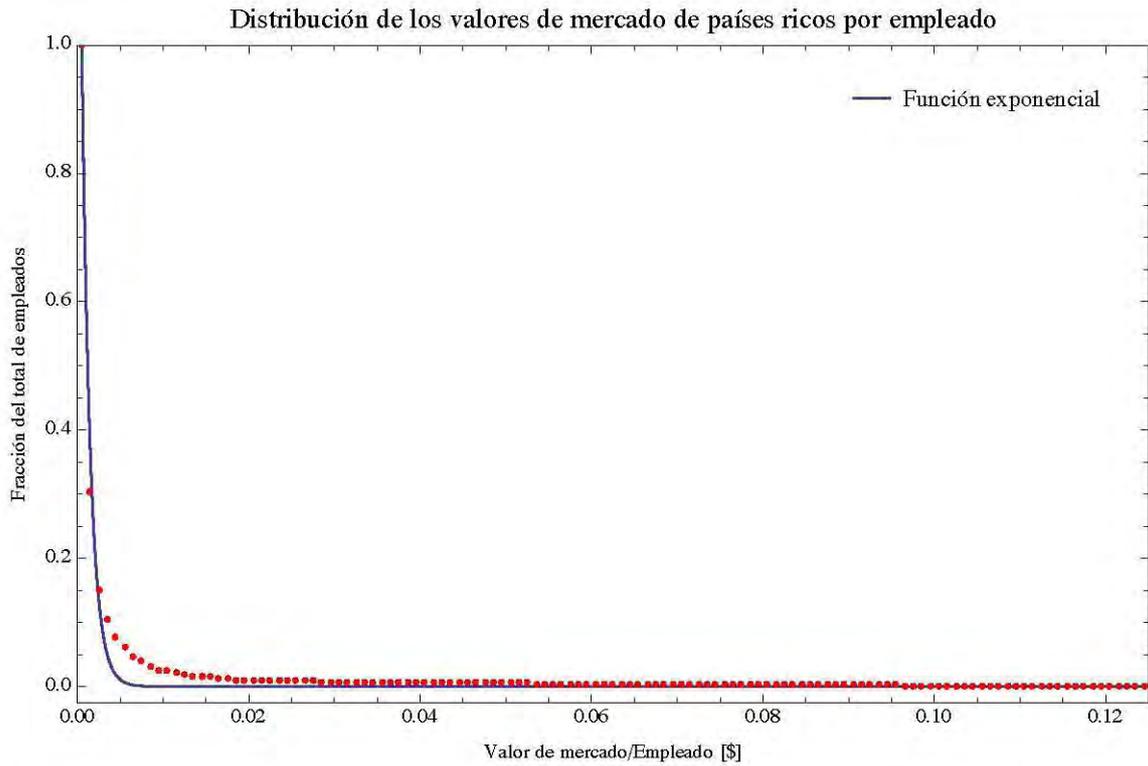
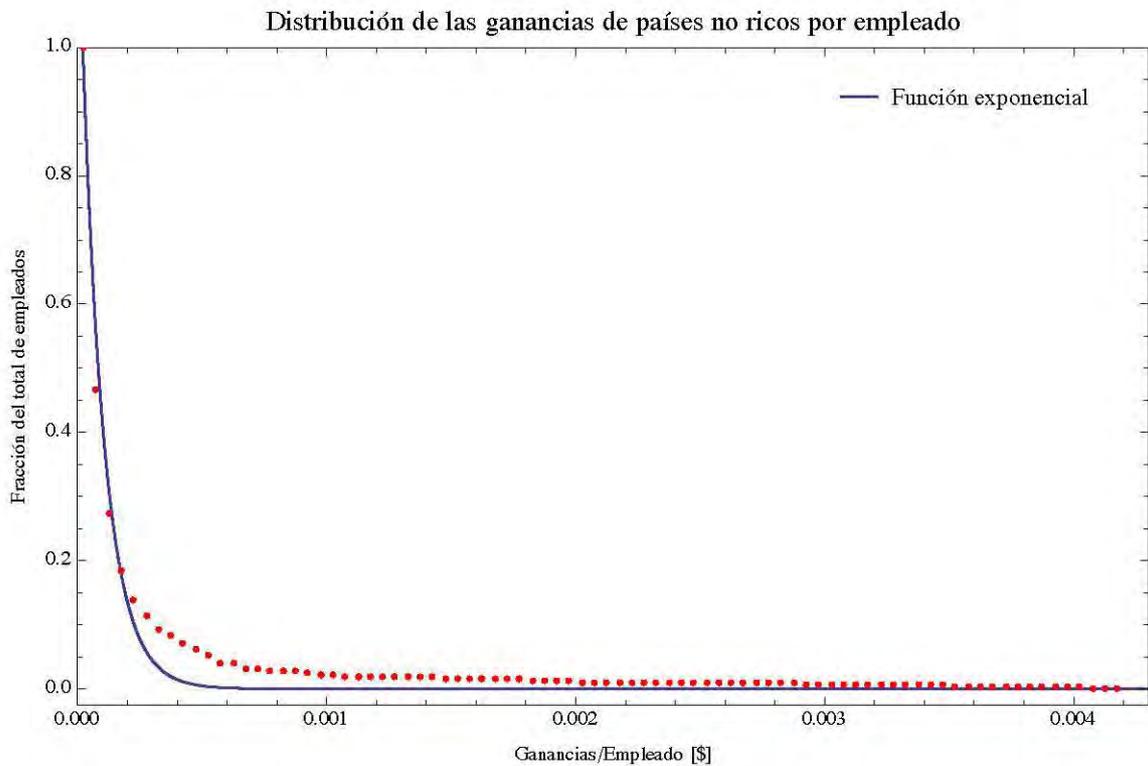
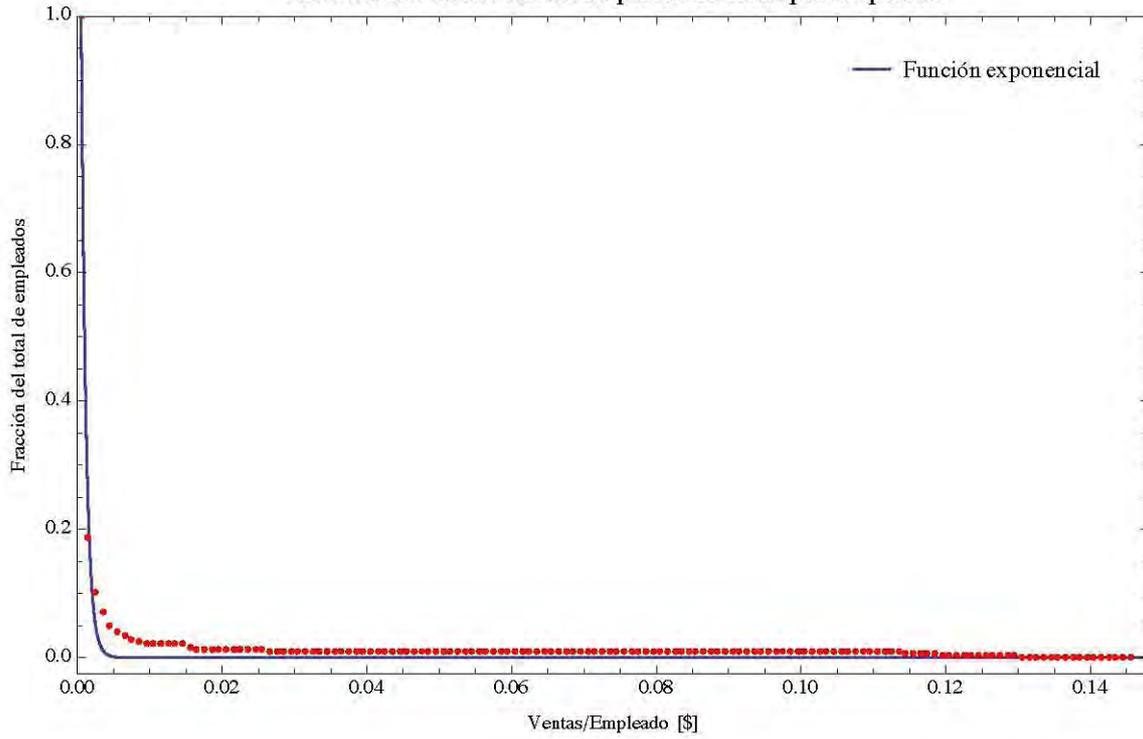


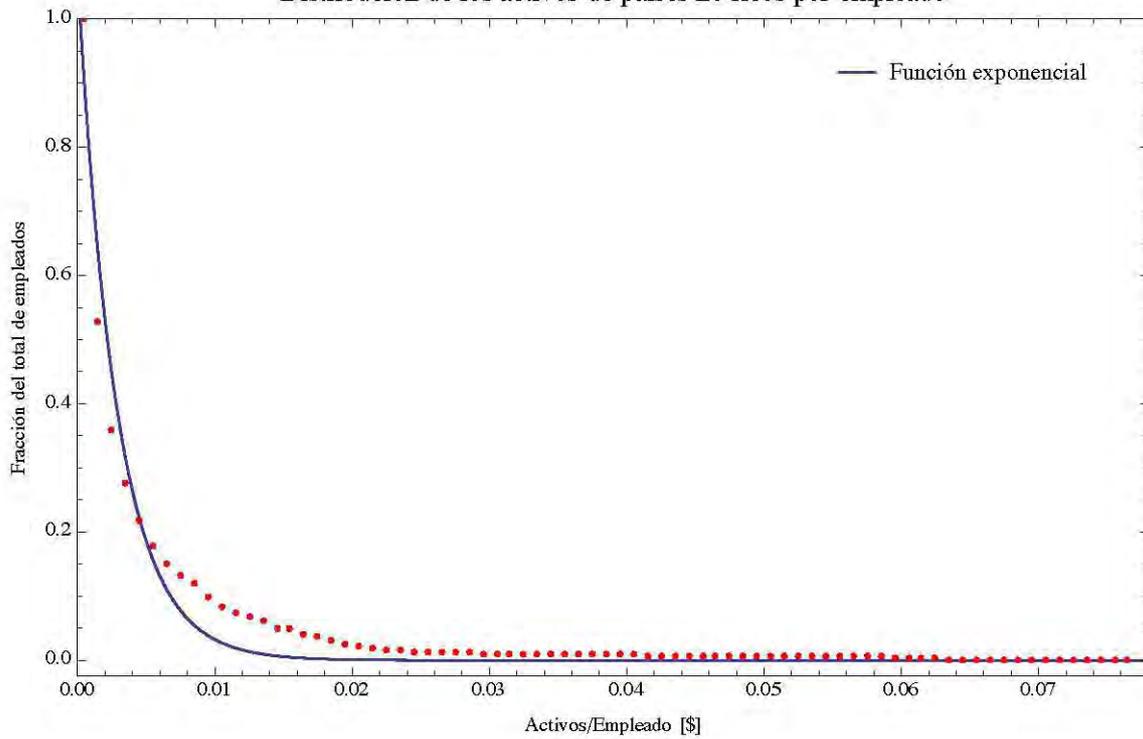
Figura 12. Distribución de ganancias de países ricos por empleado, Distribución de ventas de países ricos por empleado, Distribución de activos de países ricos por empleado y Distribución del valor de mercado de países ricos por empleado.



Distribución de las ventas de países no ricos por empleado



Distribución de los activos de países no ricos por empleado



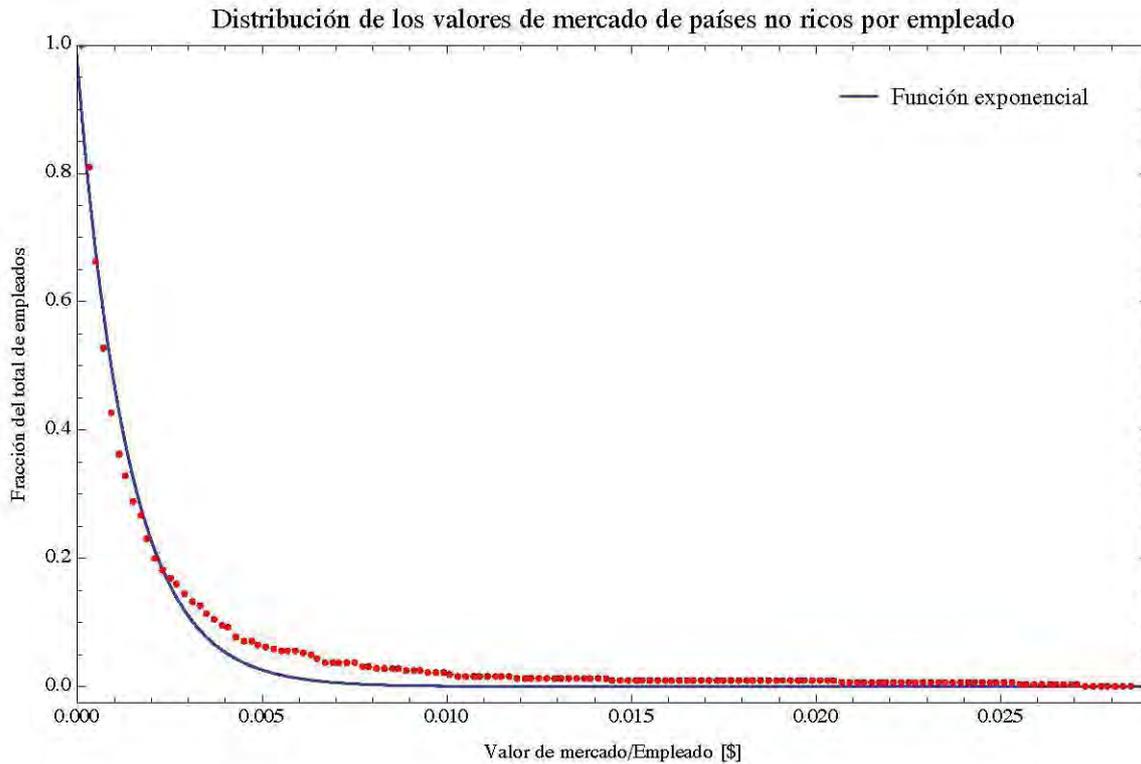


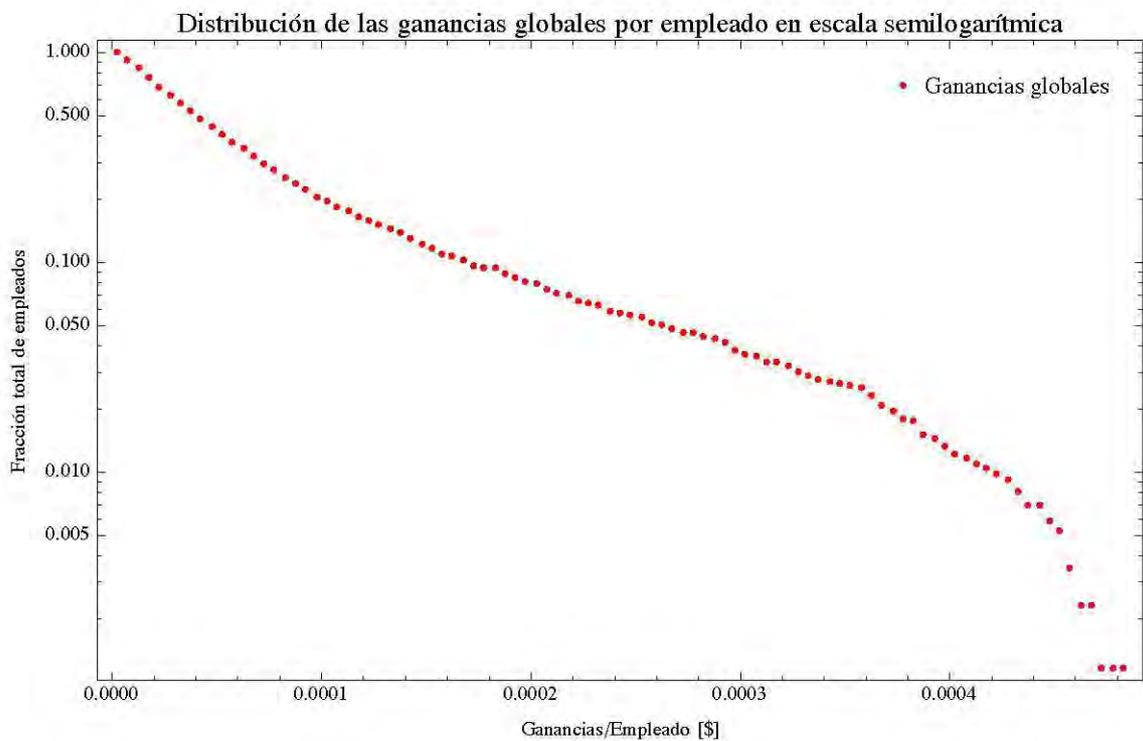
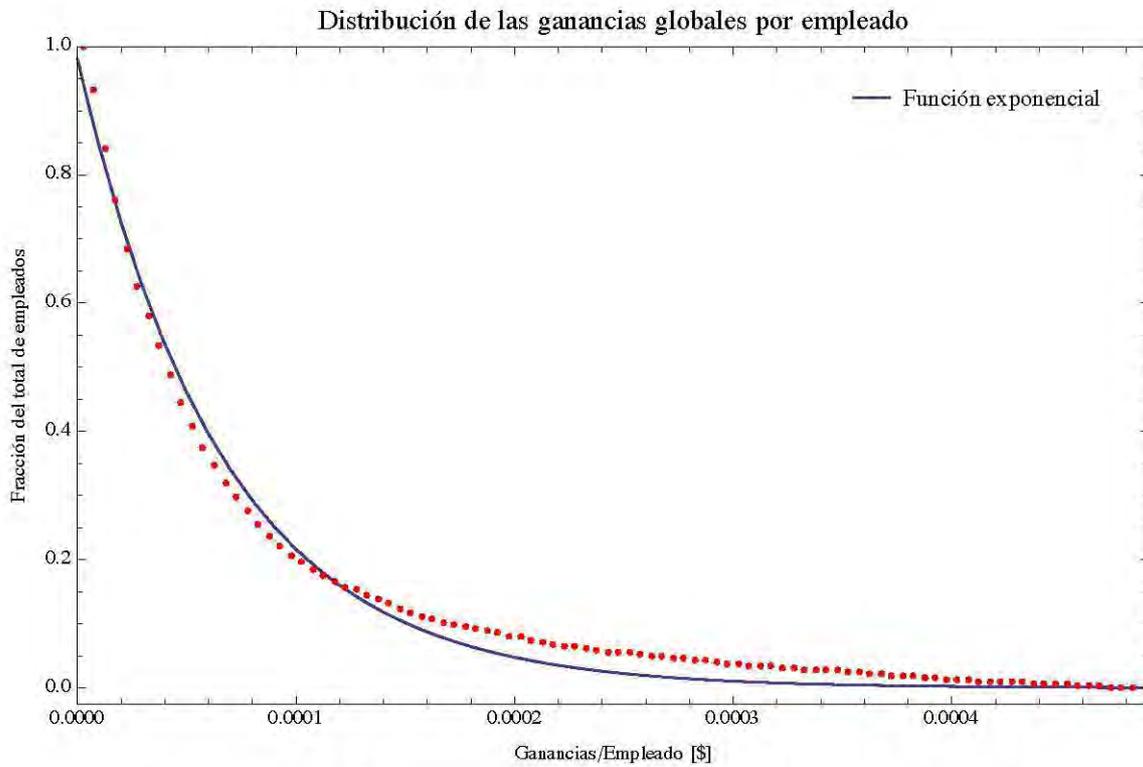
Figura 13. Distribución de ganancias de países no ricos por empleado, Distribución de ventas de países no ricos por empleado, Distribución de activos de países no ricos por empleado y Distribución del valor de mercado de países no ricos por empleado.

IV.2.1.2.2 Distribuciones globales

A continuación se muestran: la distribución de las ganancias globales por empleado, la distribución de las ventas globales por empleado, la distribución de los activos globales por empleado, y la distribución de los valores de mercado globales por empleado, todas en tres escalas distintas: lineal, semilogarítmica y logarítmica.

A cada distribución en escala lineal se ajustó una función exponencial que modela los datos empíricos. En las figuras 14, 17, 20 y 23 se observa que los datos en las distribuciones globales por empleado en escala semilogarítmica y logarítmica presentan una tendencia lineal con pendiente negativa en la sección izquierda de la distribución y en la sección derecha una caída también lineal con una pendiente negativa mayor. A partir de esta observación se hizo un corte de los datos donde se observa el cambio de tendencia en los datos. Después, en las figuras: 15 y 16; 18 y 19; 21 y 22; y 24 y 25, se presentan las distribuciones con sus respectivos cortes.

La distribución de las ganancias globales por empleado en las tres escalas mencionadas se presenta en la figura 14, en la distribución con escala semilogarítmica se observa el cambio de tendencia aproximadamente en 0.00036 billones de dólares por empleado.



Distribución de las ganancias globales por empleado en escala logarítmica

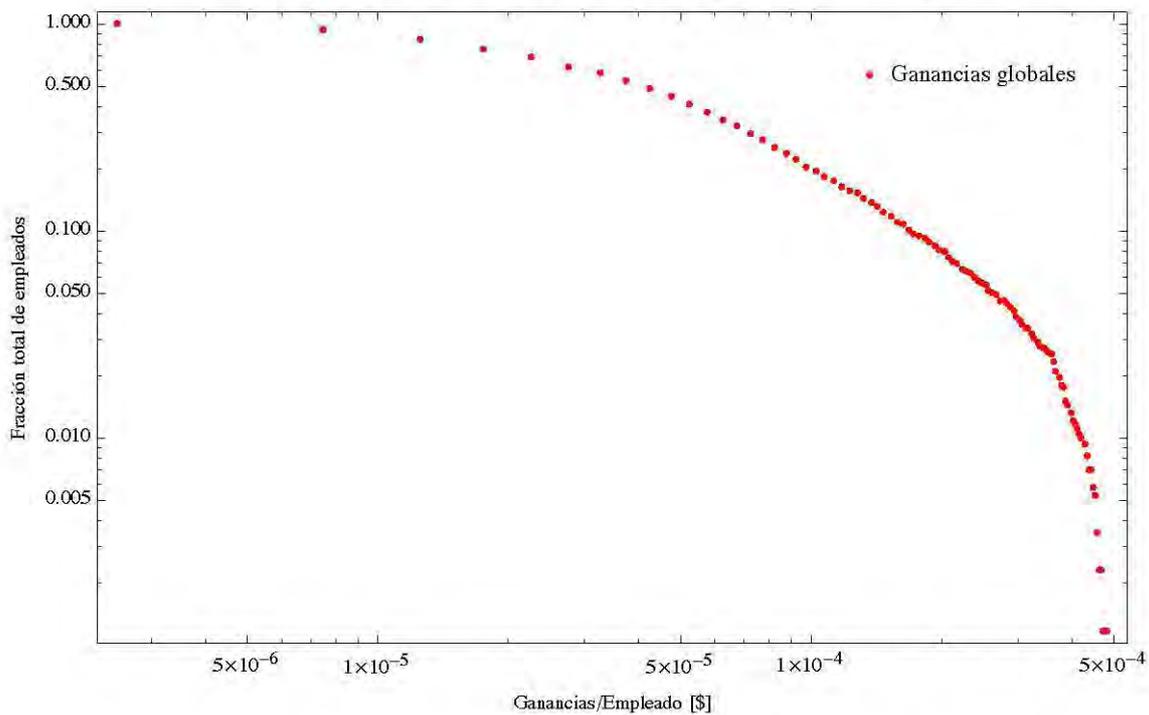


Figura 14. Distribución de las ganancias globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Nótese que las ganancias que representa cada empleado a la Compañía Transnacional de la distribución están ordenados de forma ascendente, *i.e.* las Compañías Transnacionales que perciben “pocas” ganancias por empleado son las que están en la sección izquierda de la distribución y las que perciben mayores ganancias por empleado son las que están en la sección derecha de la distribución. De aquí, si la distribución (sin el corte) presenta un cambio de tendencia en sus datos en un punto dado, entonces dicho punto sirve como referencia para dividir la distribución en dos partes.

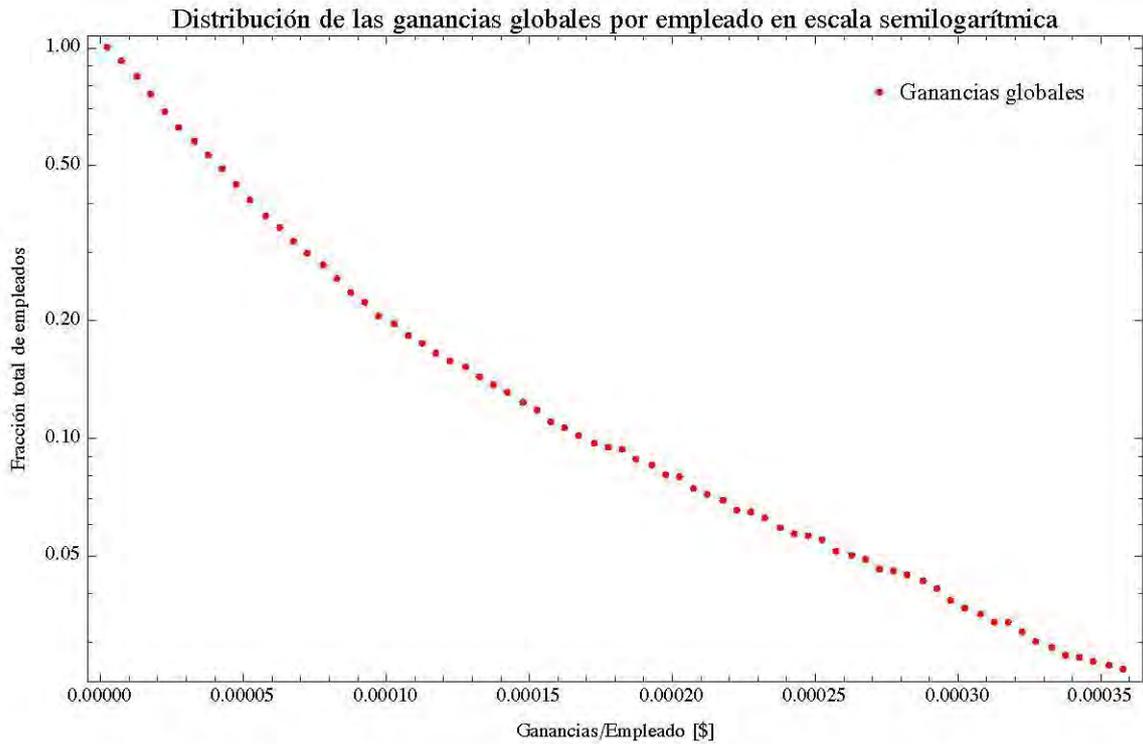


Figura 15. Corte de la distribución de las ganancias globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

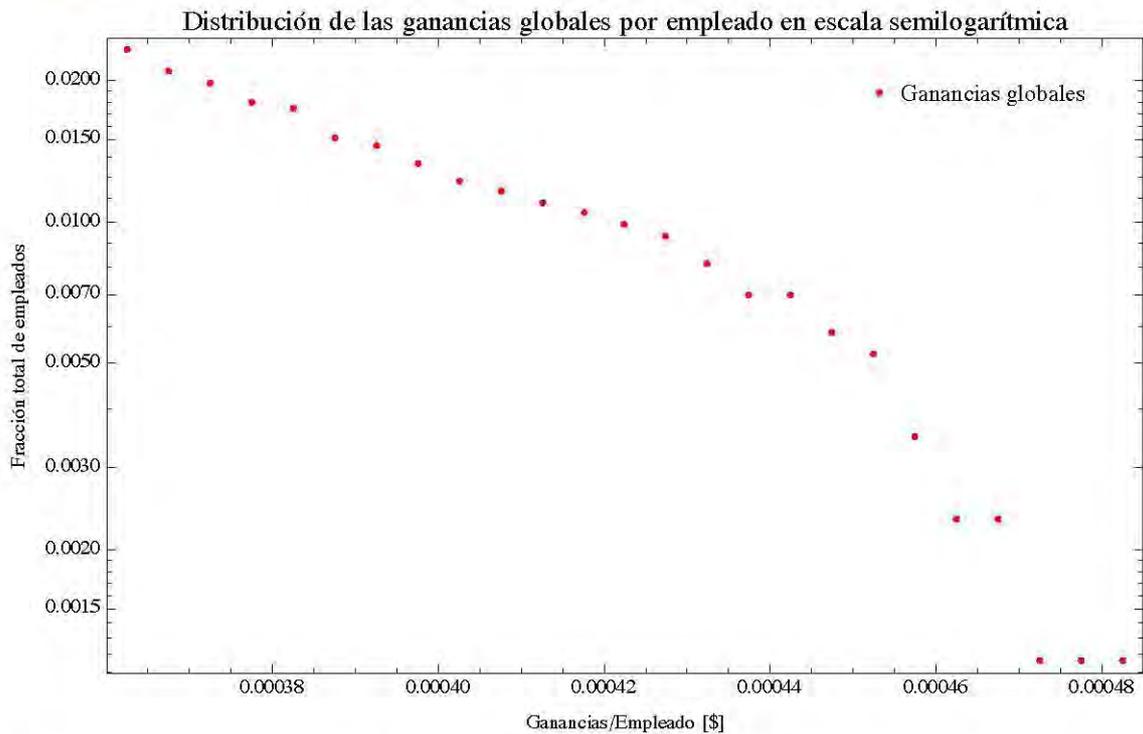


Figura 16. Corte de la distribución de las ganancias por empleado en escala semilogarítmica. Sección derecha.

Ahora bien, haciendo el corte en el punto donde las ganancias por empleado aproximadamente son 0.00036 billones de dólares, se obtienen las distribuciones de las ganancias por empleado mostradas en las gráficas 15 y 16. Luego, es evidente que las Compañías Transnacionales con ganancias hasta 0.00036 billones de dólares (punto de

corte) representan el mayor porcentaje de la fracción de empleados con ganancias menores o iguales que 0.00036 billones de dólares, y el resto de la fracción total de empleados con ganancias mayores que 0.00036 billones de dólares.

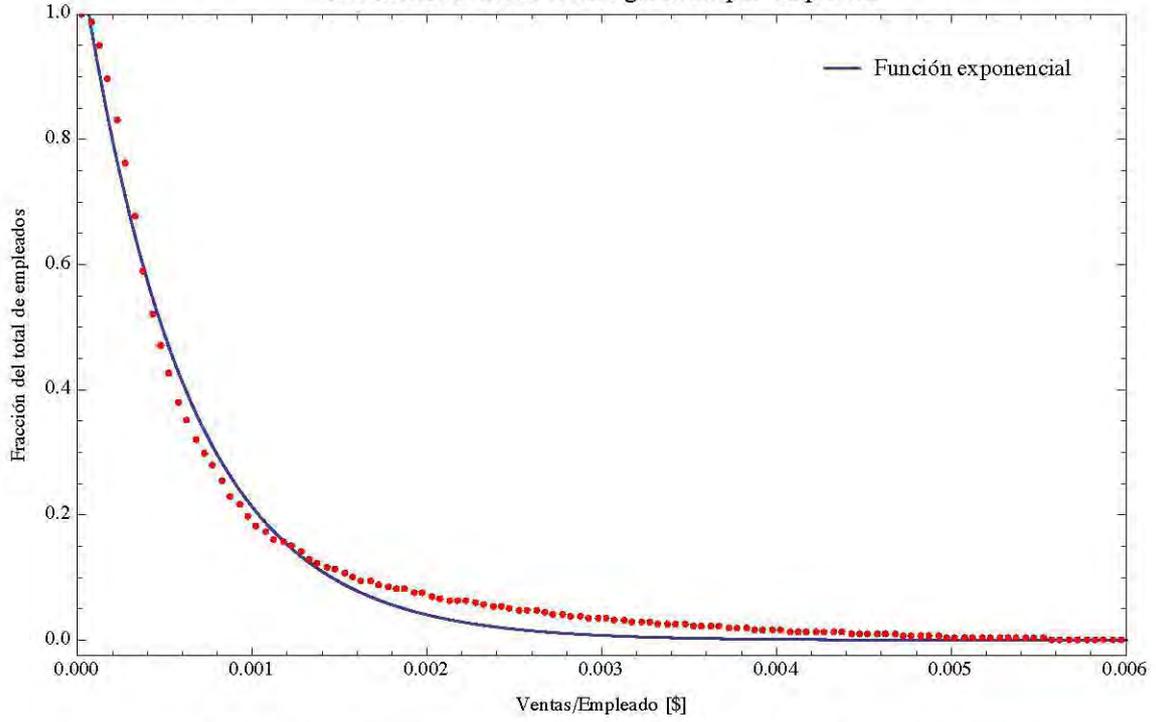
Un análisis análogo al de la distribución de las ganancias globales por empleado se hace con la distribución de las ventas globales por empleado, con la distribución de los activos globales por empleado y con la distribución de los valores de mercado globales por empleado. En todas ellas, a partir de la partición de las gráficas se observa que:

- i. El mayor porcentaje de la fracción total de empleados está representando la menor cantidad de ventas globales, los menores valores de activos globales y los menores valores de mercado globales que representa cada empleado a la Compañía Transnacional.
- ii. El menor porcentaje de la fracción total de empleados está representando la mayor cantidad de ventas globales, los menores valores de activos globales y los menores valores de mercado globales que representa cada empleado a la Compañía Transnacional.

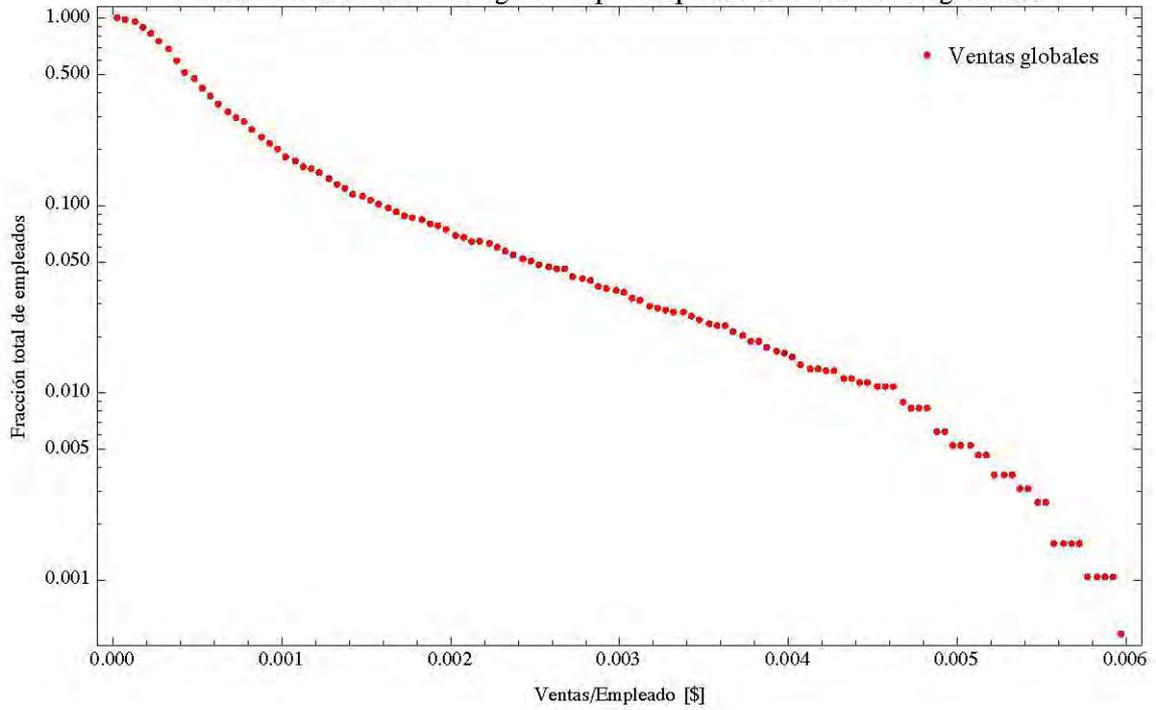
Por tanto, se concluye que un porcentaje muy bajo de la fracción total de empleados está representando la mayor cantidad de riqueza de las Compañías Transnacionales y el mayor porcentaje de la fracción total de empleados está representando la menor cantidad de riqueza de las Compañías Transnacionales. Este hecho es parecido al que llegó Yakovenko cuando dijo que el 97-99 % de la población caracteriza a la clase baja y el 1-3 % de la población caracteriza a la clase alta.

En la sección V se analizan las ecuaciones que resultan del ajuste a cada partición de la distribución de las ganancias, las ventas, los activos y los valores de mercado globales por empleado.

Distribución de las ventas globales por empleado



Distribución de las ventas globales por empleado en escala semilogarítmica



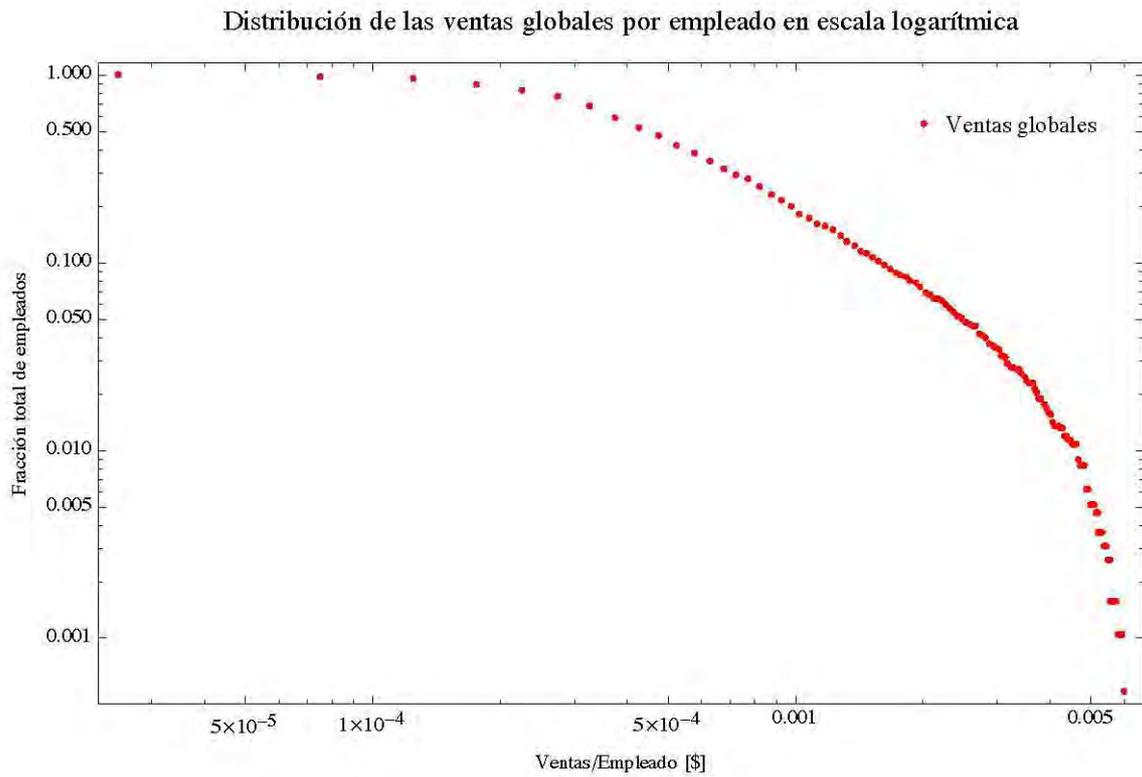


Figura 17. Distribución de las ventas globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Haciendo el corte aproximadamente en 0.0045 billones de dólares que representa cada empleado en las ventas de la Compañía Transnacional se obtienen las gráficas de la figura 18 y 19.

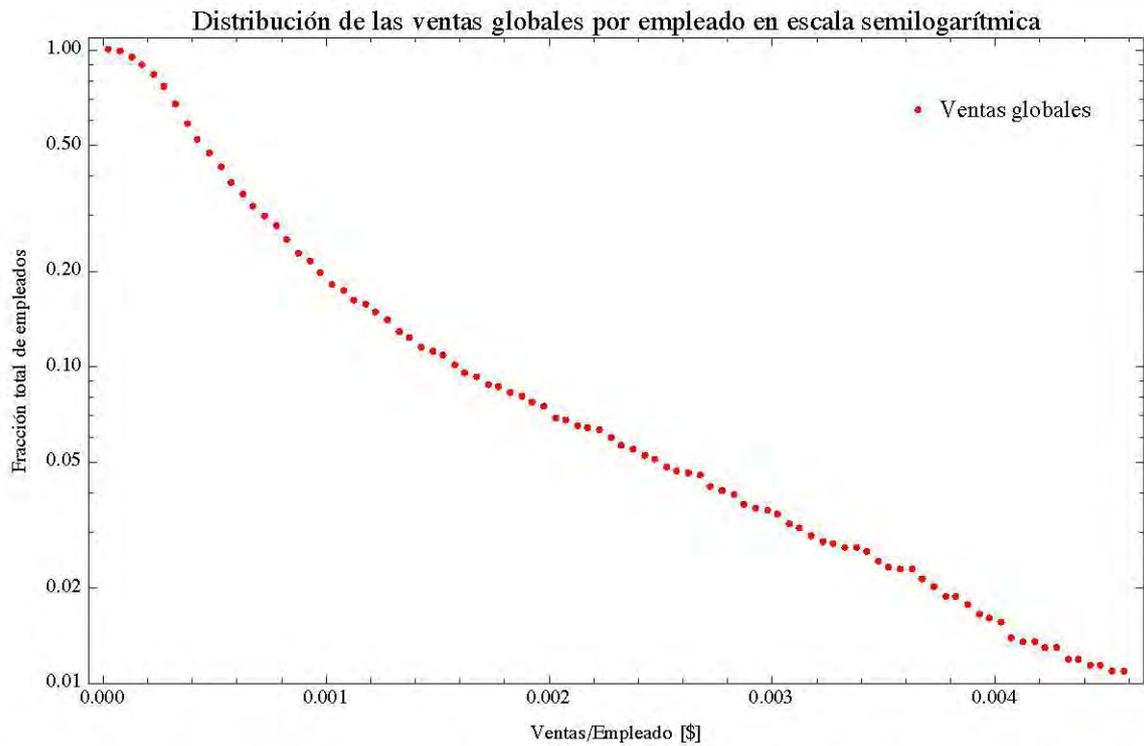


Figura 18. Corte de la distribución de las ventas globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

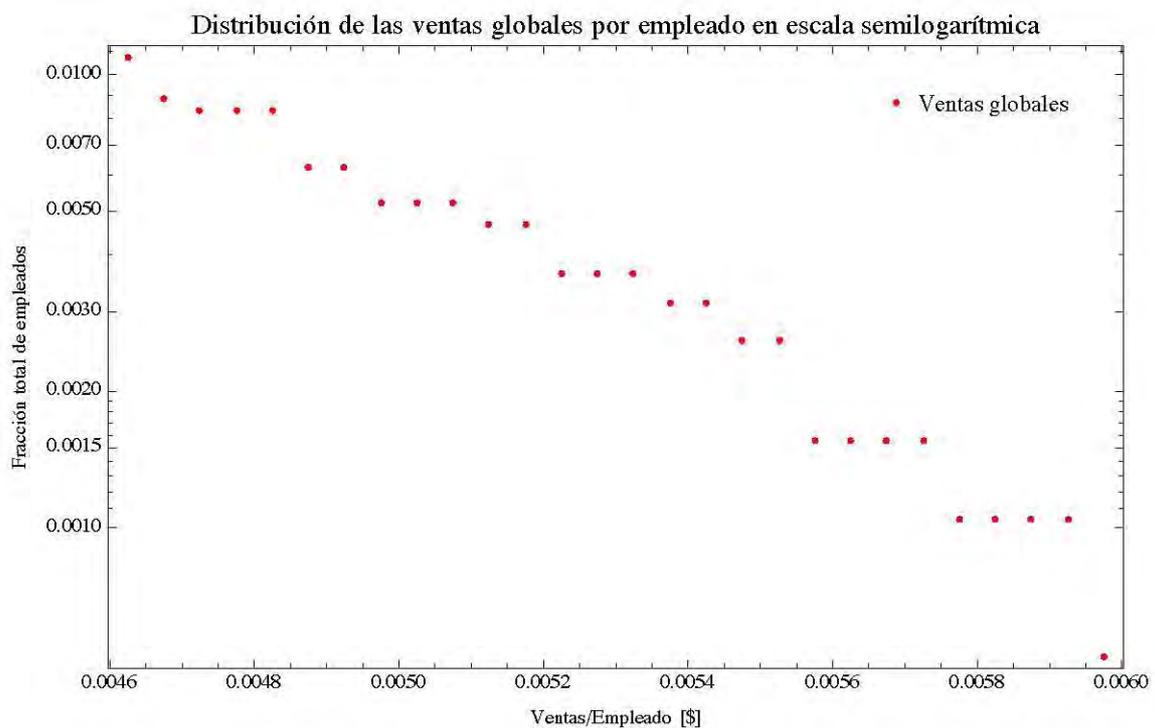
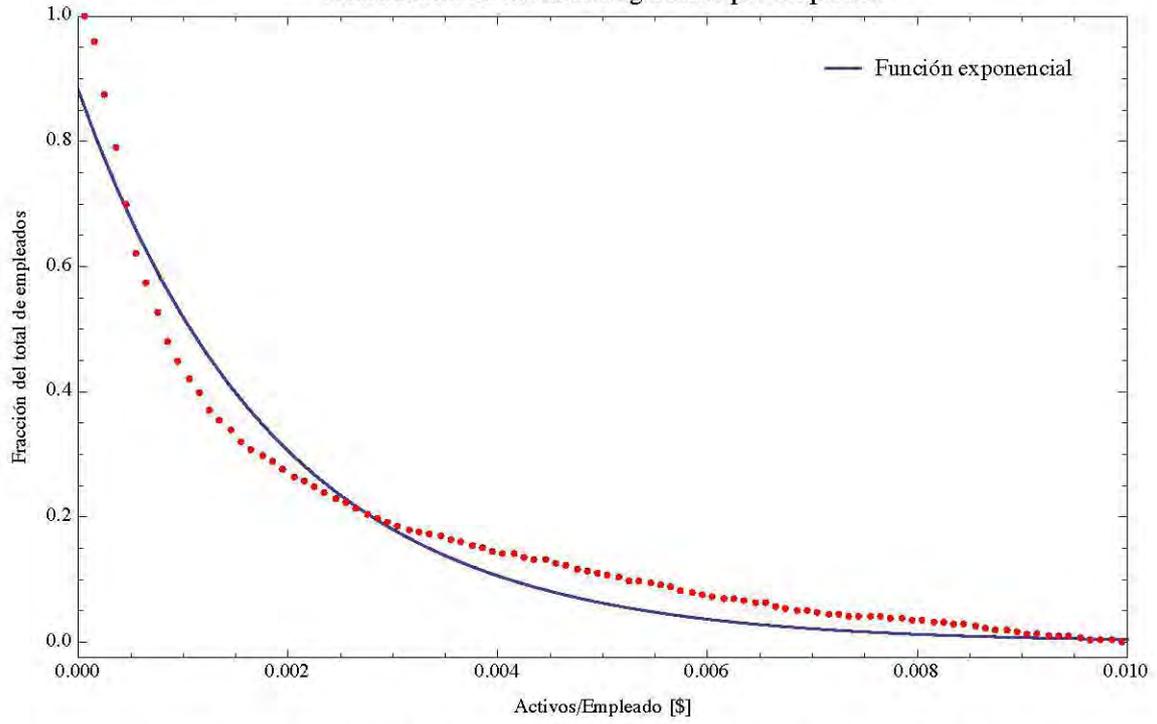
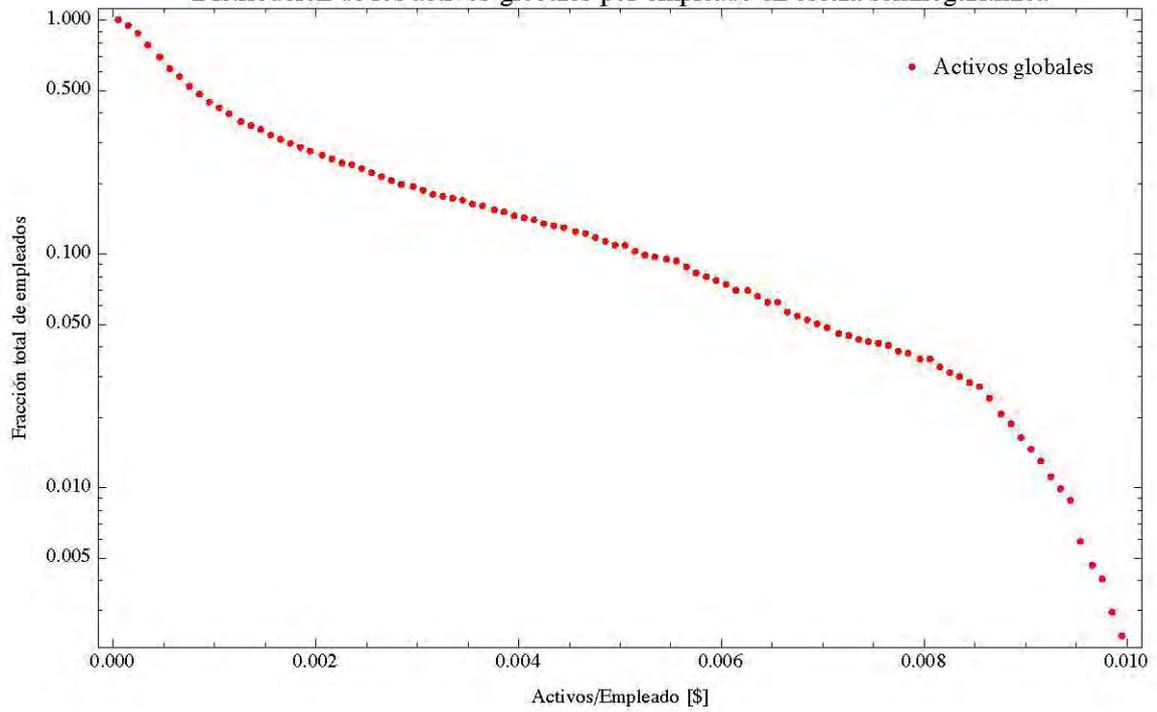


Figura 19. Corte de la distribución de las ventas globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección derecha.

Distribución de los activos globales por empleado



Distribución de los activos globales por empleado en escala semilogarítmica



Distribución de los activos globales por empleado en escala logarítmica

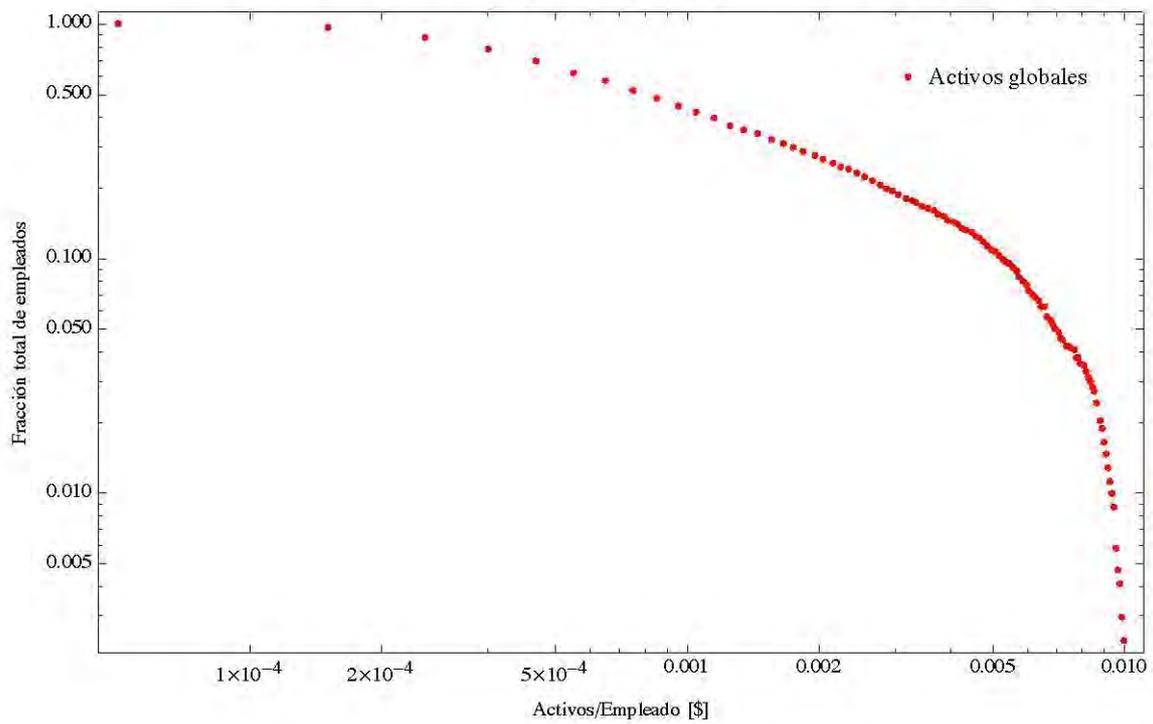


Figura 20. Distribución de los activos globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Haciendo el corte aproximadamente en 0.0085 billones de dólares que representa cada empleado en los activos de la Compañía Transnacional se obtienen las gráficas de la figura 21 y 22.

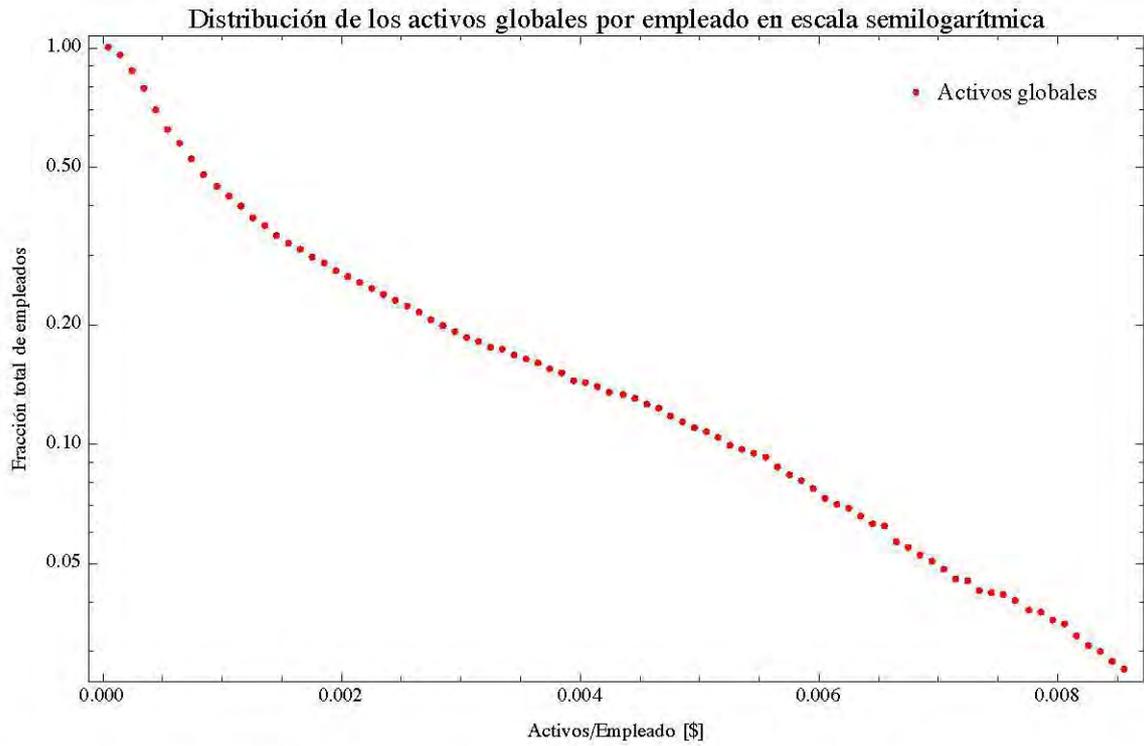


Figura 21. Corte de la distribución de los activos globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

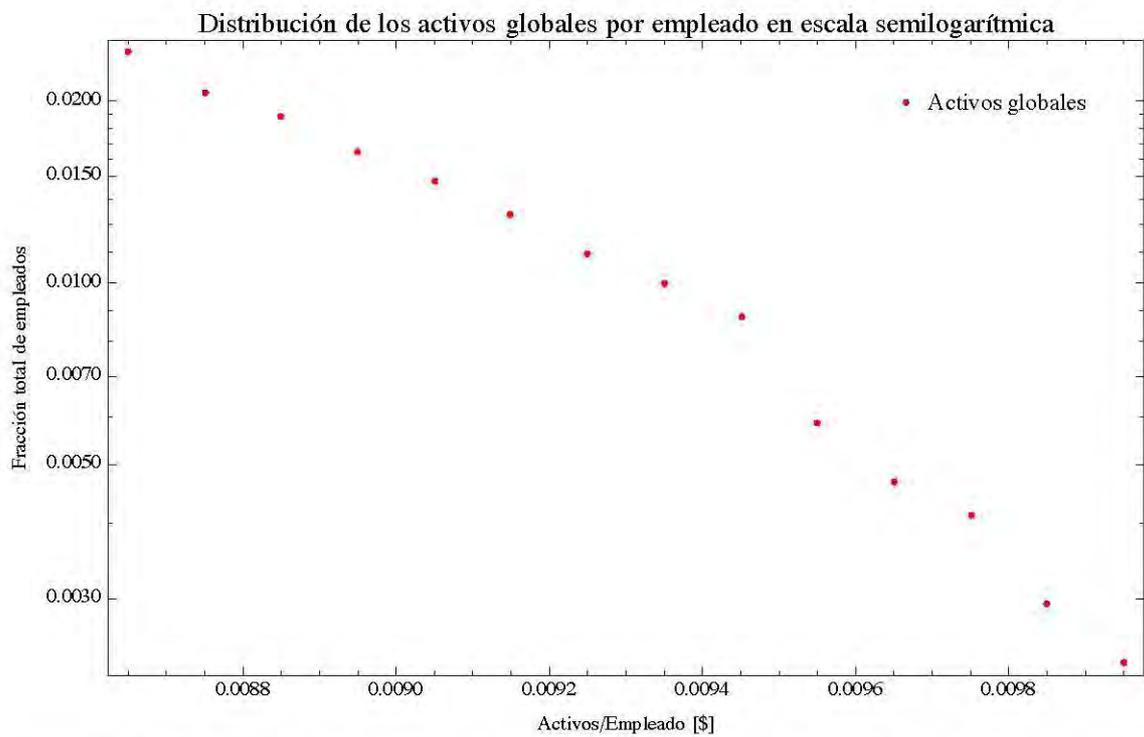
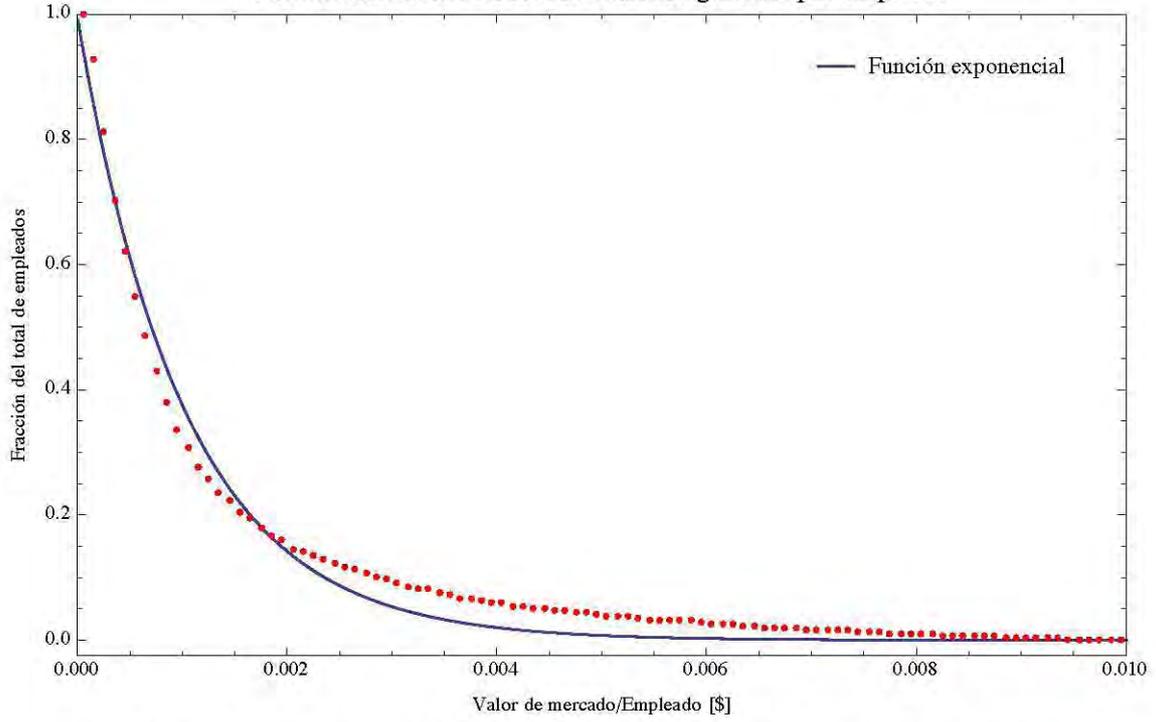
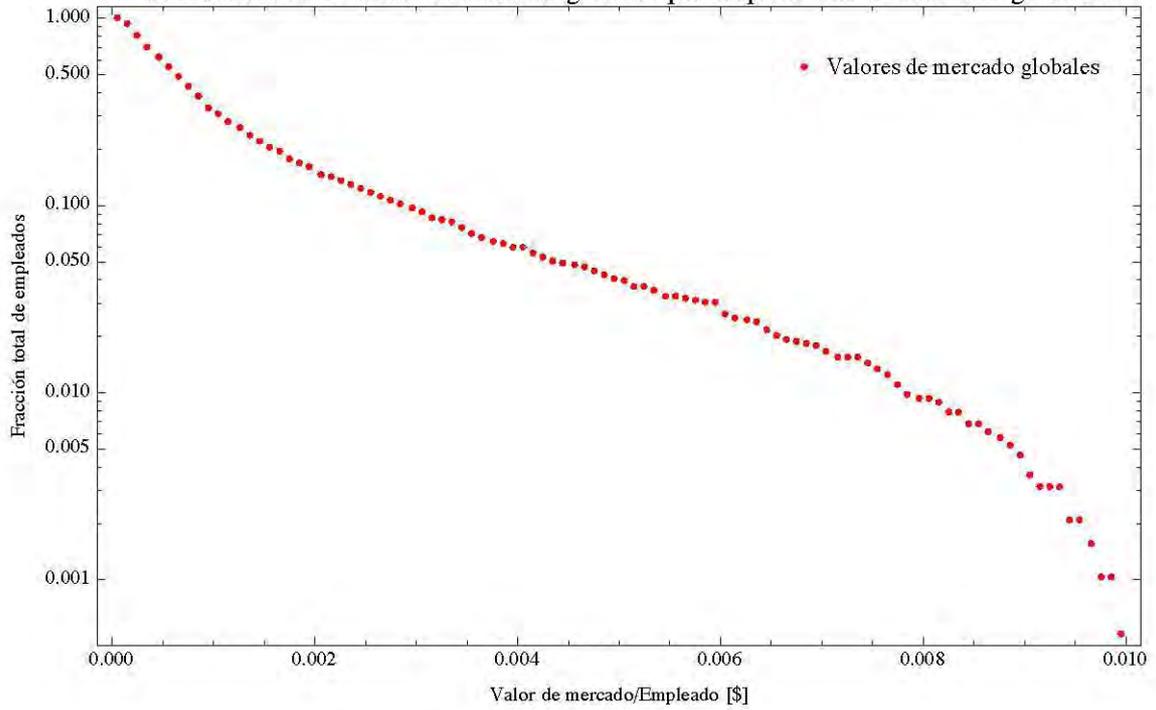


Figura 22. Corte de la distribución de los activos globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección derecha.

Distribución de los valores de mercado globales por empleado



Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala semilogarítmica



Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala logarítmica

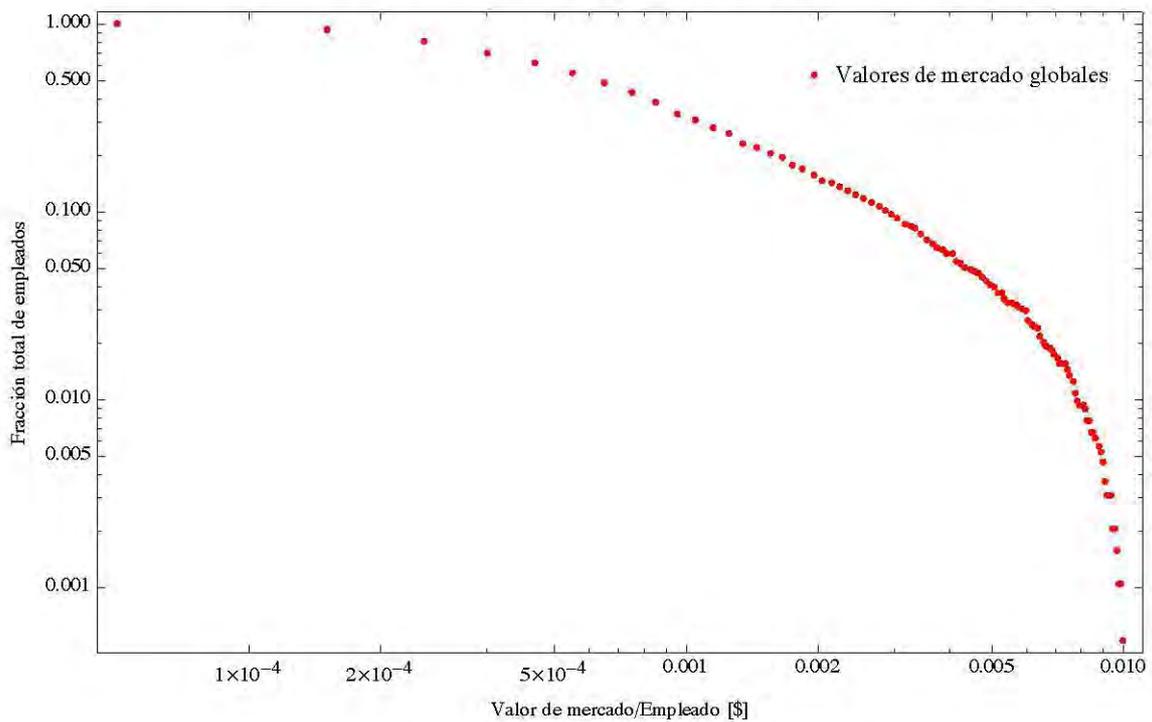


Figura 23. Distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Haciendo el corte aproximadamente en 0.0075 billones de dólares que representa cada empleado en los activos de la Compañía Transnacional se obtienen las gráficas de la figura 24 y 25.

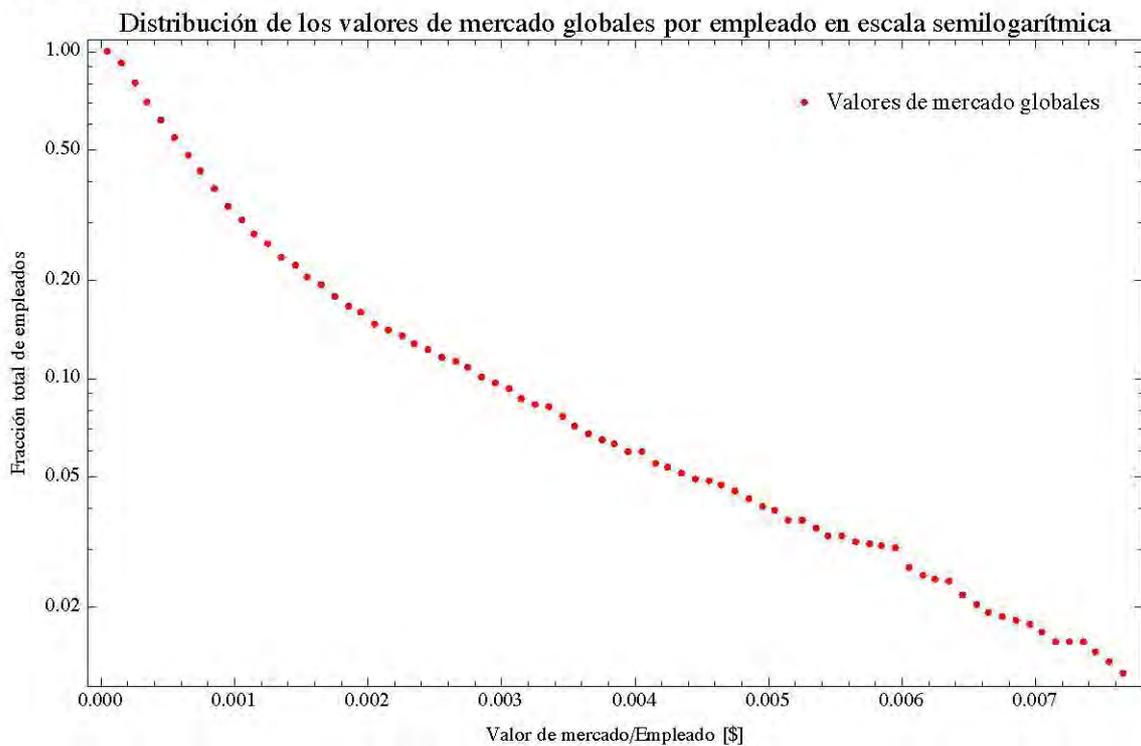


Figura 24. Corte de la distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

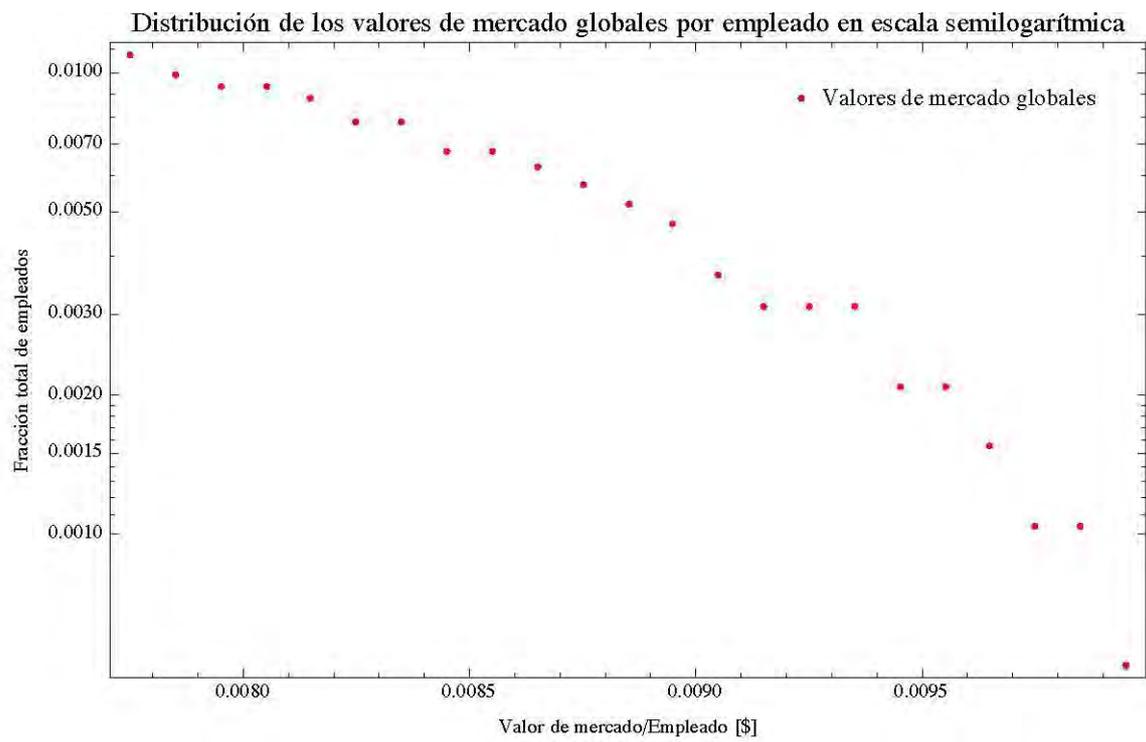


Figura 25. Corte de la distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección derecha.

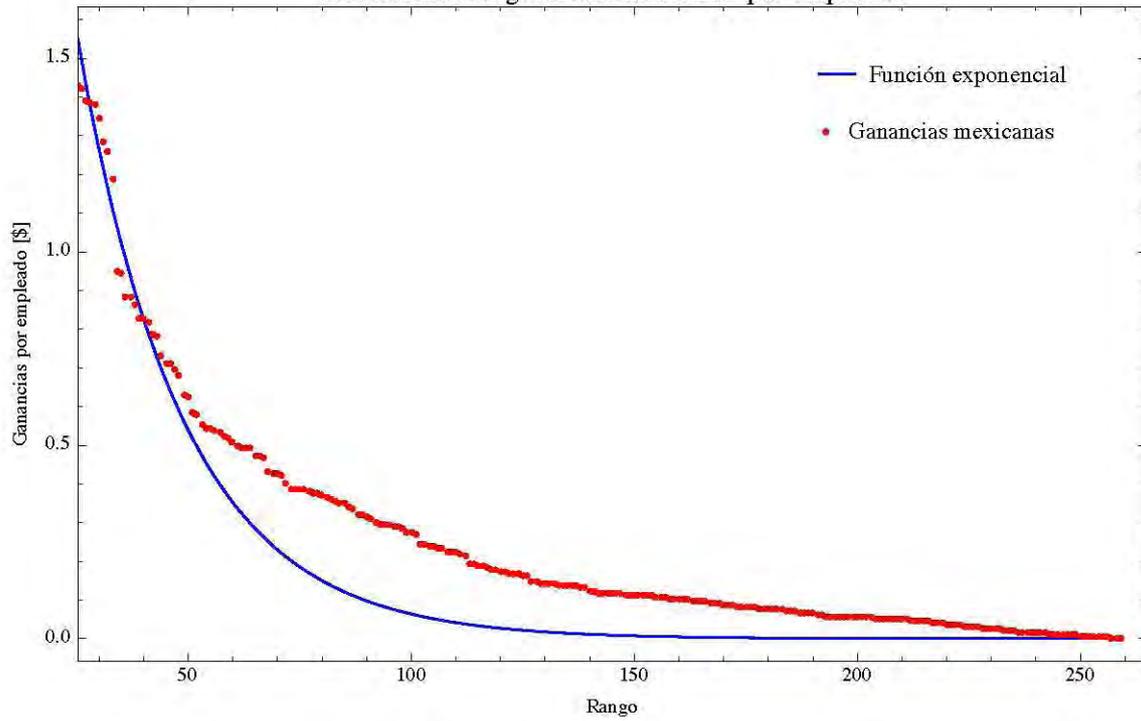
IV.2.2 Distribuciones de riqueza mexicana por empleado (per cápita) por compañías “mexicanas” (Expansión)

IV.2.2.1 Por rango

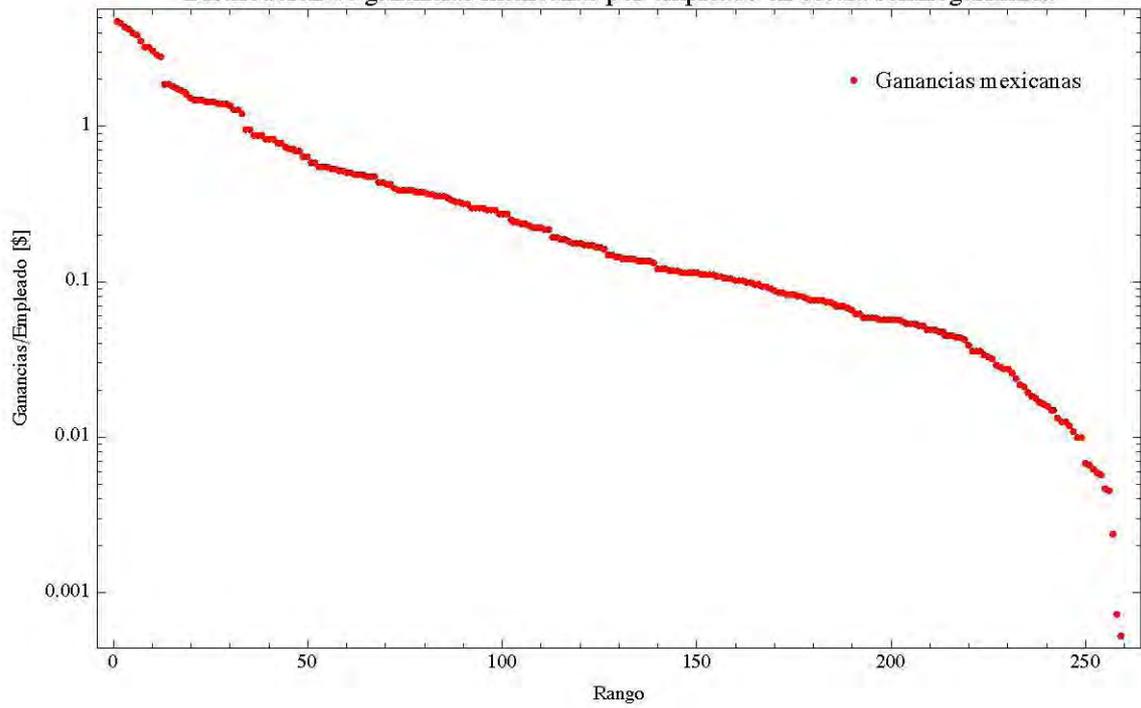
Análogamente se hizo con los datos de *Expansión 500*, es decir, se calculó el cociente de Ganancias / Número de empleados y se ordenó descendientemente, asignando a la compañía con mayores ganancias por empleado el número 1 en el eje del rango, después a la segunda compañía con mayores ganancias por empleado se le asignó el número 2, así sucesivamente con las 259 compañías “mexicanas” que proporcionaron la totalidad de datos a la revista *Expansión 500*. Con el programa *Mathematica* se graficaron las Ganancias por empleado en unidades de billones de dólares vs el rango que ocupa la respectiva Compañía más importante de México.

La figura 26 muestra la distribución de ganancias mexicanas por empleado en tres escalas: lineal, semilogarítmica y logarítmica, respectivamente. En la gráfica con escala lineal los puntos rojos representan los datos de las ganancias mexicanas por empleado calculadas a partir de los datos de *Expansión 500*, y la línea sólida representa la función exponencial que se ajustó a los datos anteriores. En las gráficas con escala semilogarítmica y logarítmica se observa que los datos presentan una tendencia lineal en todo el rango, de esta manera se confirma que los datos pueden ser ajustados por una función exponencial teórica como la que se muestra. La ecuación exponencial que ajusta a los datos empíricos se presenta en la sección V.

Distribución de ganancias mexicanas por empleado



Distribución de ganancias mexicanas por empleado en escala semilogarítmica



Distribución de ganancias mexicanas por empleado en escala logarítmica

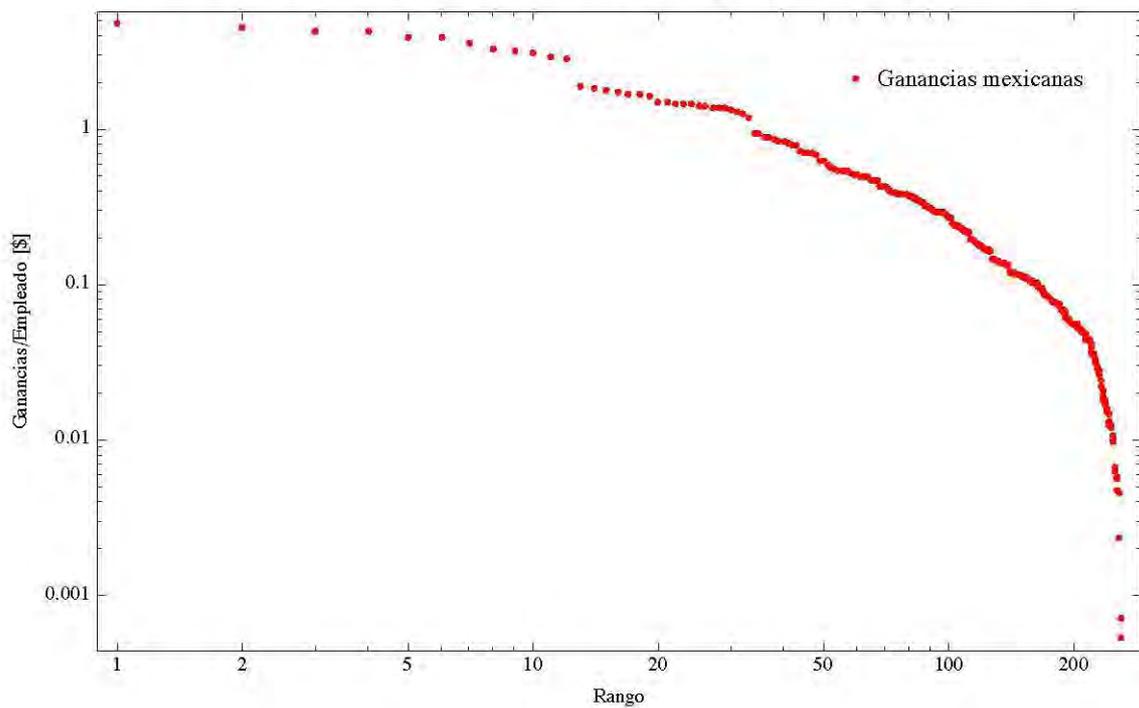


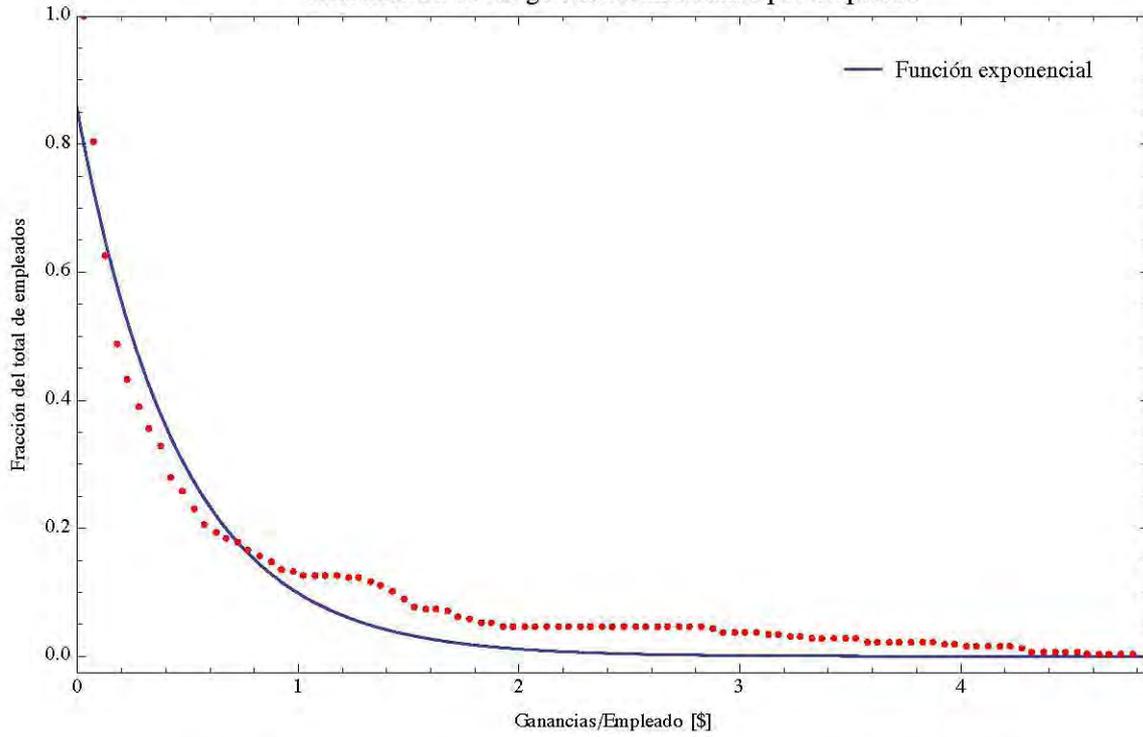
Figura 26. Distribución de las ganancias globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

IV.2.3.2 Por Función de Supervivencia

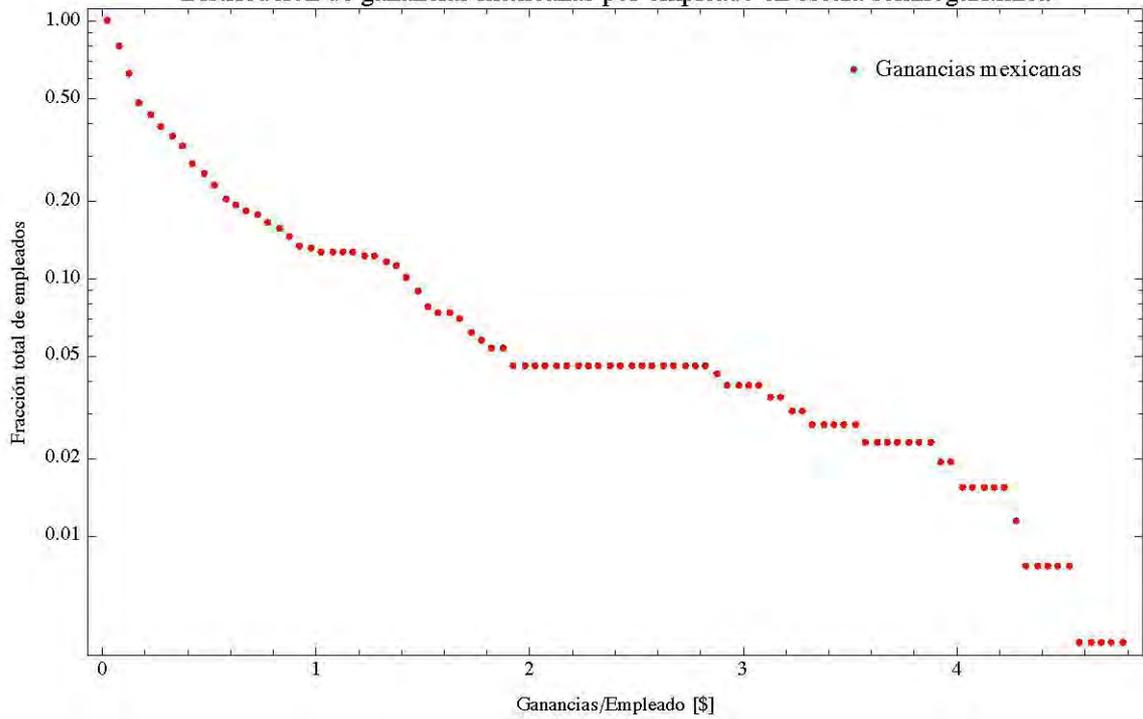
Las distribución por función de supervivencia que se presenta a continuación está normalizada a la unidad. Ésta se muestra en la figura 27 en tres escalas distintas: lineal, semilogarítmica y logarítmica, respectivamente. El eje vertical representa la fracción total de empleados y el eje horizontal las ganancias por empleado, donde sus unidades están en billones de dólares.

En la gráfica con escala lineal de la figura 27, la línea sólida representa la función exponencial ajustada a los datos empíricos dados en la distribución por función de supervivencia. En las gráficas con escala semilogarítmica y logarítmica se observa que los datos empíricos presentan una tendencia lineal con pendiente negativa, este resultado confirma que los datos empíricos siguen una ley exponencial.

Distribución de las ganancias mexicanas por empleado



Distribución de ganancias mexicanas por empleado en escala semilogarítmica



Distribución de ganancias mexicanas por empleado en escala logarítmica

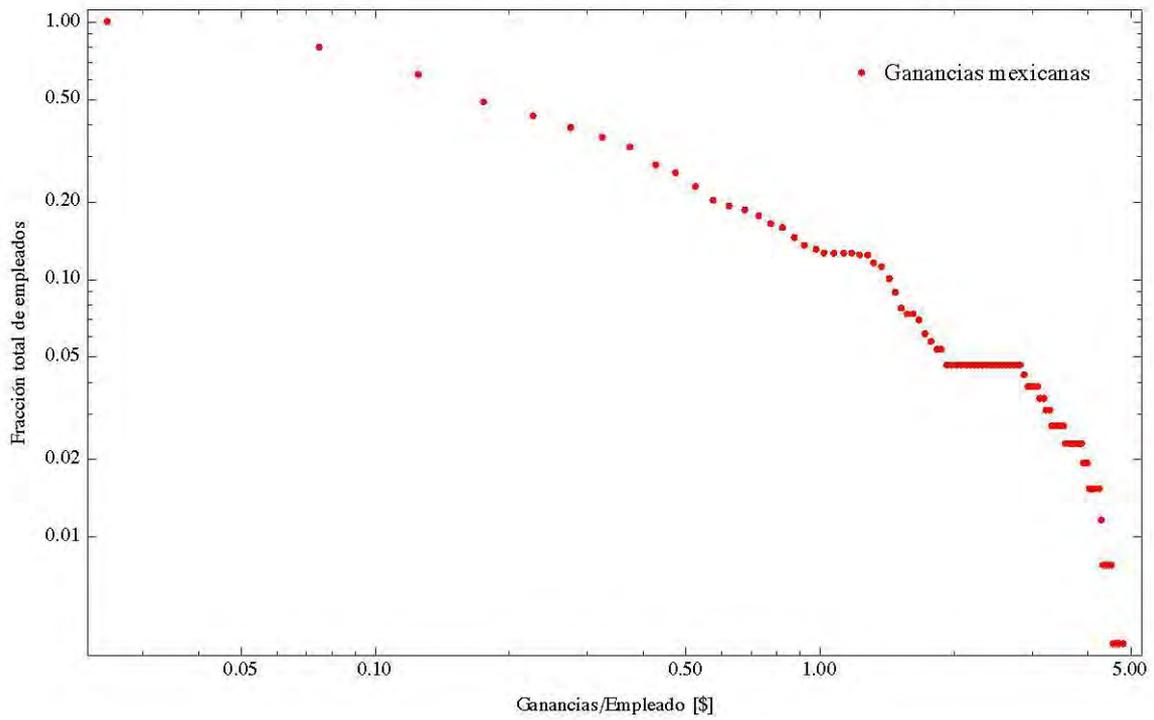


Figura 27. Distribución de las ganancias globales por empleado en escala lineal, en escala semilogarítmica y en escala logarítmica respectivamente.

Distribución de las ganancias mexicanas por empleado en escala semilogarítmica

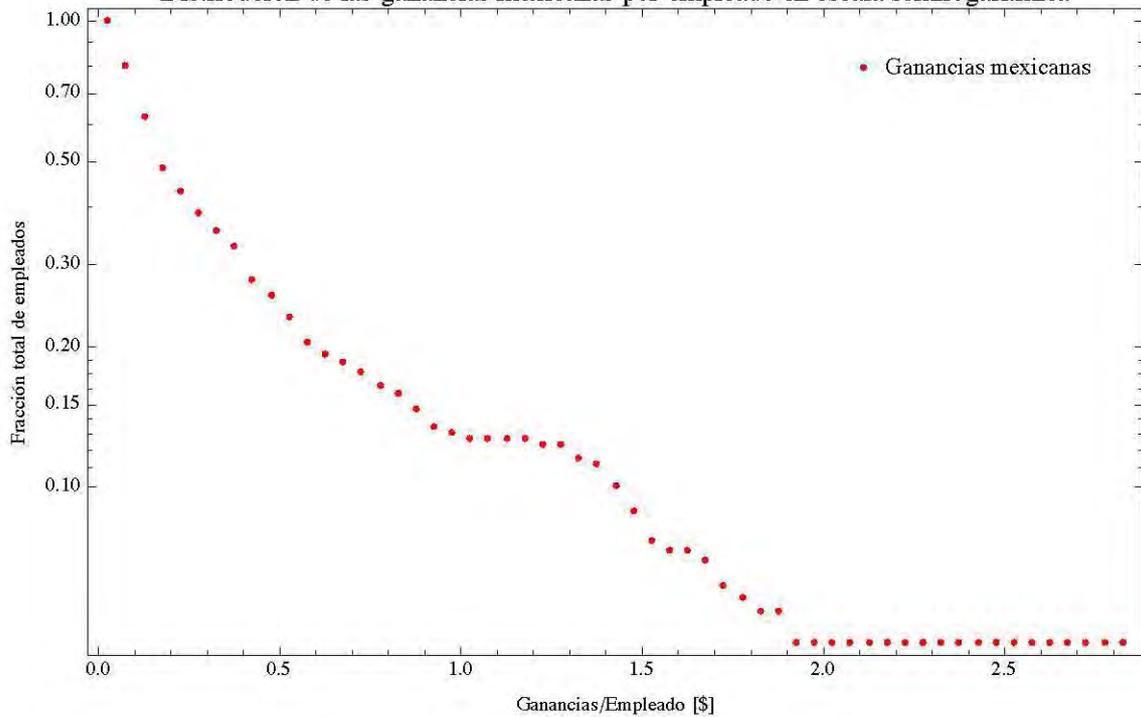


Figura 28. Corte de la distribución de las ganancias mexicanas por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

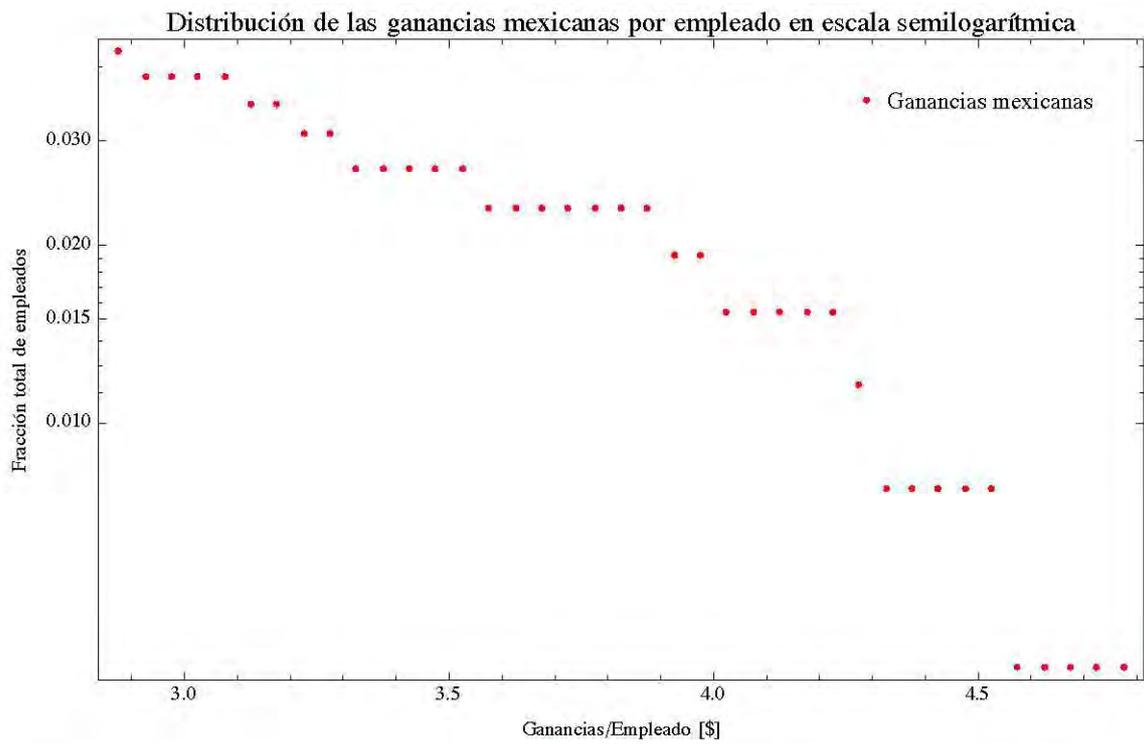


Figura 29. Corte de la distribución de los valores de mercado globales por empleado en escala semilogarítmica. Sección izquierda.

Capítulo V

Análisis de datos en econofísica

En el capítulo anterior se presentaron las distribuciones de riqueza gráficamente obtenidas a partir de los datos recopilados de las revistas *Forbes* y *Expansión 500*, en este capítulo se analizan las ecuaciones que resultaron de los ajustes exponenciales y de los ajustes lineales de la ley de potencias en escala semilogarítmica. Con base a lo anterior, en la sección V.1 presento los parámetros y ajustes que permiten observar qué información económica proporcionan las ecuaciones obtenidas. Después, en la sección V.2 se analiza el comportamiento de las respectivas distribuciones que se obtuvieron a partir de una partición de la distribución general. La partición consistió en dividir los datos en dos secciones, donde el punto de corte fue donde se observó el cambio de tendencia en la gráfica con escala semilogarítmica. Luego se estudian las ecuaciones que ajustan a cada sección de la partición de la distribución y se determina si su comportamiento es tipo Boltzmann-Gibbs (exponencial) o un comportamiento tipo Pareto (ley de potencias).

V.1 Parámetros y ajustes

Se comparó el modelo exponencial con el modelo empírico obtenido. En la tabla 7 se muestran los coeficientes de correlación del modelo obtenido, donde el más cercano a 1 fue: 0.9988 para *Forbes*, Acciones/Número de empleados; y 0.9927 para *Expansión 500*, Ganancias/Número de empleados.

Nótese que el coeficiente de correlación de Ganancias/Número de empleados para *Forbes* y *Expansión 500* son muy cercanos entre sí.

Tabla 7. Sumario de los modelos obtenidos para Forbes y Expansión 500 desde dos perspectivas: por rango y por función de supervivencia.

Revista		Modelo exponencial	Ecuación $y = ce^{-m/T}$		Coeficiente de correlación R
			$c [\times 10^{-2}]$	T	
Por rango					
Forbes	Ricos (Fig. 6)	Ganancias/Empleados	1.04847	3.7121	0.962407
		Ventas/Empleados	0.657903	120.872	0.977066
		Activos/Empleados	5.07777	109.61	0.966812
		Valor de mercado/Empleados	12.7072	8.4355	0.983242
	No ricos (Fig. 7)	Ganancias/Empleados	0.48523	10.4716	0.987236
		Ventas/Empleados	20.2393	4.64966	0.982105
		Activos/Empleados	4.13686	35.0299	0.960377
		Valor de mercado/Empleados	2.02576	29.1992	0.967621
	Global (Fig. 8)	Ganancias/Empleados	0.037608	278.448	0.991663
		Ventas/Empleados	0.382766	298.229	0.979023
		Activos/Empleados	0.944985	298.829	0.998849
		Valor de mercado/Empleados	0.731282	247.4	0.988758
Expansión (Fig. 17)		Ganancias/Empleados	4.54531	23.4591	0.992706
Por Función de Supervivencia		Modelo exponencial	c	$T [\times 10^{-4}]$	R
Forbes	Ricos (Fig. 12)	Ganancias/Empleados	3.04704	0.89723	0.99929
		Ventas/Empleados	1.1621	6.66324	0.992713
		Activos/Empleados	0.825495	50.30383	0.950844
		Valor de mercado/Empleados	1.63288	9.92368	0.991934
	No ricos (Fig. 13)	Ganancias/Empleados	1.26326	0.89533	0.988596
		Ventas/Empleados	2.11223	6.64862	0.994143
		Activos/Empleados	1.06806	28.58939	0.981223
		Valor de mercado/Empleados	0.9664	13.80881	0.990412
	Global (Fig. 14)	Ganancias/Empleados	0.980394	0.66091	0.995651
		Ventas/Empleados	1.11213	6.04456	0.995158
		Activos/Empleados	0.879305	18.90484	0.980744
		Valor de mercado/Empleados	0.992128	10.28152	0.992658
Expansión (Fig. 27)		Ganancias/Empleados	0.850292	4637.681	0.974139

En el capítulo II se presentó la analogía de la ecuación de Boltzmann-Gibbs y la ecuación análoga para cuando se trabaja con dinero, donde m representa el dinero y T el dinero medio, $\langle m \rangle$, ambas en unidades de billones de dólares, *i.e.* mil millones de dólares. Con esto, se obtuvieron los siguientes resultados:

1. En los países ricos, por cada empleado la Compañía Transnacional anualmente gana en promedio 0.000089723 mil millones de dólares, equivalente a 89,723 dólares al año. Si $1 \text{ USD} = 13 \text{ MXN}$, entonces por cada empleado la Compañía Transnacional gana aproximadamente 1,166,399 *MXN*, poco más de un millón de pesos anuales. Para el caso de los países no ricos, dichas cifras son iguales en el orden de magnitud y distintas por unos pocos pesos.
2. En los países ricos, las ventas por empleado son de 0.000666324 mil millones de dólares, equivalente a 666,324 dólares al año u 8,662,212 pesos mexicanos. Dichos 8 millones de pesos en ventas por cada empleado, este resultado indica por un lado la eficiencia de los empleados y a la vez la explotación de los mismos. Para el caso de los países no ricos, las cifras resultan ser muy cercanas.
3. En los países ricos, los activos por empleado son de 0.005030383 mil millones de dólares, equivalente a 5,030,383 dólares al año ó 65,394,979 pesos mexicanos. Esto es, la Compañía Transnacional tiene 65 millones de pesos por cada empleado. Económicamente, este resultado es una aproximación de la inversión que realiza la compañía al emplear a un individuo. Luego, en los países no ricos, los activos por empleado son casi la mitad de los que posee una Compañía Transnacional en un país rico. Este hecho puede estar justificado por la población nacional de los países no ricos, la demanda de los servicios, la inversión del gobierno nacional, la ideología socio-económica nacional en los negocios, entre otras.
4. En los países ricos, el valor de mercado o precio estimado de la Compañía Transnacional por cada empleado es 0.000992368 mil millones de dólares, equivalente a 992,368 dólares ó 12,900,784 pesos mexicanos. En los países no ricos sucede que el valor de mercado es mayor por una diferencia de 400 mil dólares aproximadamente.
5. Globalmente, en general se obtuvieron cifras cercanas a las de los países ricos y no ricos.

6. En el caso particular de México, la situación cambia, las ganancias anuales que representa cada empleado de la compañía son de 0.4637681 millones de pesos anuales o aproximadamente 40,000 pesos mensuales.

Nótese que estas cifras de dinero obtenidas son aproximadas debido a que no se tiene acceso a la información financiera detallada de cada Compañía Transnacional. El ajuste exponencial realizado es útil porque las cifras expuestas indican con números la situación económica que vivieron en el 2012 las Compañías Transnacionales en el mundo. Este análisis se puede extender considerando las cifras de otros años y observar cómo han ido cambiando debido a las consecuencias de las guerras, de las crisis económicas recientes, de los desastres naturales, entre otros.

V.2 ¿Comportamiento tipo Pareto o Boltzmann-Gibbs?

En este trabajo se aplicó el modelo de la termodinámica del dinero propuesto por Yakovenko que está basado en la física estadística de Boltzmann-Gibbs. Dicho modelo, como se vio en la sección II.4, Yakovenko lo aplicó al estudio de la distribución de ingreso y el consumo de energía per cápita obteniendo resultados interesantes. En el primero observó que la distribución de ingreso está dividida en dos clases que son explicadas por la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs y por la ley de potencias de Pareto, respectivamente. Y en el segundo, observó que el consumo de energía per cápita está modelado por la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs.

Ahora bien, en las gráficas de la sección IV correspondientes a la distribución de la riqueza global se observó que las curvas en escala semilogarítmica presentan un cambio de tendencia lineal en su pendiente, por lo que se consideró realizar una partición a partir del punto donde se presenta el cambio de tendencia, después se presentaron las dos secciones de la partición y se observó que ambas secciones con escala semilogarítmica tienen una tendencia lineal. Así que, en esta sección se analiza si una sección de la distribución sigue una ley exponencial de Boltzmann-Gibbs y otra sección sigue una ley de potencias de Pareto²².

A continuación se presentan las ecuaciones de los ajustes correspondientes a cada distribución mostrada gráficamente en la sección IV.

²² Nótese que el logaritmo de la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs y el logaritmo de la ley de potencias de Pareto son la ecuación de una recta.

Tabla 6. Sumario de los modelos obtenidos para Forbes y Expansión 500 por función de supervivencia. Se presentan los ajustes de la partición de las distribuciones, esto es, el ajuste exponencial para una sección de la distribución y el ajuste lineal de la otra sección de la distribución en escala semilogarítmica.

Revista		Modelo exponencial	Ecuación $y = ce^{-m/T}$		Coeficiente de correlación R^2
			c	$T [\times 10^{-4}]$	
Por Función de Supervivencia					
Forbes	Global (Figs. 15, 18, 21, 24)	Ganancias/Empleados	0.6547	27.09	0.98328
		Ventas/Empleados	0.5837	10.73	0.96638
		Activos/Empleados	0.6319	1.03	0.96986
		Valor de mercado/Empleados	0.5168	19.84	0.96855
Expansión (Fig. 27)		Ganancias/Empleados	40.4275	10.27	0.89763
Por Función de Supervivencia		Modelo de Pareto	a	b	R^2
Forbes	Global (Figs. 16, 19, 22, 25)	Ganancias/Empleados	0.0847	-176.57	0.97974
		Ventas/Empleados	0.0395	-6.6718	0.92384
		Activos/Empleados	0.1641	-16.442	0.97908
		Valor de mercado/Empleados	0.047	-4.717	0.98939
Expansión (Fig. 28)		Ganancias/Empleados	0.0975	-0.201	0.97651

Los coeficientes de determinación R^2 en ambos ajustes son mayores a 0.96 excepto el ajuste exponencial de la distribución de las ganancias globales por empleado de *Expansión 500* que es de 0.89 y el ajuste lineal de ventas/empleados que fue de 0.92 para *Forbes*. Este resultado indica que los ajustes son buenos y están describiendo el fenómeno de cómo está distribuida la riqueza de las Compañías Transnacionales globalmente. Adicionalmente, se observa que las distribuciones por Función de Supervivencia presentan una tendencia exponencial que obedece a la teoría de Boltzmann-Gibbs en la zona de menor dinero por empleado y a la ley de potencias de Pareto en la zona de mayor dinero.

Capítulo VI

Conclusiones

Respecto a las tesis del presente trabajo, se concluye que:

1. Es válido el modelo exponencial de Boltzmann-Gibbs para el estudio econofísico de la distribución de la riqueza de las 2000 Compañías Transnacionales globales, según *Forbes*, y de las 500 Compañías Transnacionales más importantes de México, según *Expansión 500*.

Los ajustes de las distribuciones presentadas tienen un coeficiente de correlación R del orden de 0.99, muy cercano a la unidad. La temperatura de cada distribución es coherente con lo que se observa en la distribución de la riqueza entre los empleados de cualquier Compañía Transnacional.

Se analizaron las distribuciones globales y la distribución mexicana particionadas en dos secciones. La partición se hizo en el punto donde se observó un cambio de tendencia en la pendiente de la gráfica en la distribución con escala semilogarítmica. A la sección izquierda se le ajustó el modelo exponencial de Boltzmann-Gibbs para el dinero que es el modelo exponencial de termodinámica del dinero de Yakovenko, y a la sección derecha se le ajustó el modelo de ley de potencias de Pareto. Los ajustes resultaron con un coeficiente de determinación R^2 mayores a 9.6 excepto en el caso del ajuste exponencial de las ganancias/empleados de *Expansión 500* y en el caso del ajuste de Pareto de las ventas/empleados de *Forbes*. A partir de este hecho se observó que las distribuciones por Función de Supervivencia presentan una tendencia exponencial que obedece a la teoría de Boltzmann-Gibbs en la zona de menor dinero por empleado y a la ley de potencias de Pareto en la zona de mayor dinero.

Las ventajas de utilizar el modelo de la termodinámica del dinero de Yakovenko basada en la teoría de la física estadística de Boltzmann-Gibbs en este trabajo son:

- Proporciona una visión de cómo está distribuida la riqueza de las Compañías Transnacionales globalmente, en países ricos, en países no ricos y de México.
- El dinero se conserva en promedio.

- Proporciona el valor de la cantidad de dinero que cada empleado representa para la Compañía Transnacional en cuanto a ganancias, ventas, activos y valor de mercado.

Entre las desventajas:

- Físicamente la transferencia de energía se observa en la interacción de las moléculas de un gas. En la analogía que utilizo la segunda ley de la termodinámica se viola cuando hay transferencias de energía o dinero.
- No se consideran moléculas con poca energía, *i.e.* agentes económicos que no están dentro de la lista de *Forbes* y *Expansión 500*.

Comparando el resultado de Yakovenko en su investigación sobre la distribución de energía per cápita por países, a grandes rasgos se observó que:

- Los coeficientes de correlaciones R obtenidos del ajuste de los datos empíricos con los datos teóricos tienen una correlación mayor que la de Yakovenko. A pesar de que él no presenta el valor de su coeficiente de correlación R , a simple vista se puede apreciar que sus datos no ajustan totalmente a la curva exponencial.

2. Que existe una relación económica proporcional entre las Compañías Transnacionales y la riqueza de los países.

Esta relación económica quedó mostrada por los altos coeficientes de correlación R obtenidos en los análisis de regresión lineal simple hechos entre cada uno de los parámetros económicos de las Compañías Transnacionales y la economía nacional considerada como el GDP nominal. Las correlaciones R más cercanas a uno fueron: el número de compañías, las ganancias, las ventas, los activos, el valor de mercado y el número de empleados de las Compañías Transnacionales, cada una de ellas, comparadas con el GDP nominal.

Se calcularon los coeficientes de correlación R para los países divididos de dos formas distintas: 1) Países ricos y países no ricos; y 2) EUA, América, Europa-Medio Oriente-África y Asia-pacífico. Los resultados que se obtuvieron fueron:

- i. Las correlaciones R obtenidas muestran que la riqueza de las Compañías Transnacionales está concentrada, (en su mayoría), en el hemisferio Norte y su minoría en el hemisferio Sur, siendo el 70 % y el 30 % el porcentaje del número de Compañías distribuidas en cada zona geográfica.

- ii. Las correlaciones de: ganancias vs valor de mercado, ganancias vs ventas, ganancias vs activos para el caso de Asia-Pacífico son muy bajas en comparación con América y Europa-Medio Oriente-África, debido a que en general, las políticas nacionales Asia-Pacífico son diferentes en cuanto a su inversión como lo afirma Lester Thurow en su libro *La guerra del siglo XXI*.

El alcance de este trabajo para investigaciones futuras es analizar cómo ha cambiado el comportamiento de las distribuciones globales, de países ricos, de países no ricos, así como el impacto económico global debido al porcentaje de la distribución de las Compañías Transnacionales en el hemisferio Norte y en el hemisferio Sur. Análogamente para México.

Bibliografía referida

Amin, Samir. (1994). "The Future of Global Polarization", Review (Fernand Braudel Center, USA), 17, pp. 337-347.

_____. (1997). *Capitalism in the Age of Globalization*. London: Zed Books.

Aoyama, Fujiwara, *et. a.*, (2012), *Econophysics and Companies*, Cambridge University Press. Pp. 1-98

Banerjee y Yakovenko, (2010), "Universal Patterns of inequality", *New Journal of Physics* 12: pp. 1-25

Bouchaud y Potters, (2003), *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, Second Edition, Cambridge. Pp. 355

Clausius, R. (1850). *Über die bewegende Kraft der Wärme*, *Annalen der Physik und Chemie* 79: pp. 368-397, 500-524.

De Carlo, Scott, (2012), *Methodology: How We Crunch the Numbers*, <http://www.forbes.com/sites/scottdecarlo/2012/04/18/methodology-how-we-crunch-the-numbers/> [28-09-2012]

De Carlo, Scott, (2012), *The World's Biggest Companies*, <http://www.forbes.com/sites/scottdecarlo/2012/04/18/the-worlds-biggest-companies/> [28-09-2012]

Del Castillo-Mussot, Marcelo, *et. a.*, (2013), "Global Capitalism and "North-South" Unevenness: In Light of Ranking, Statistical Correlations, and Profits of Forbes' World List of Top 2000 Firms," *Perspectives on Global Development and Technology*, Vol 12. P. 219-245.

Drăgulescu y Yakovenko, (2000), "Statistical Mechanics of Money", *The European Physical Journal B* 17.

ECONOPHYS-KOLKATA I: Econophysics of Wealth Distributions, 15-19 March 2005. Proc. Vol.: *Econophysics of Wealth Distributions*, Eds. A. Chatterjee, S. Yarlagadda, B.K. Chakrabarti, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2005.

ECONOPHYS-KOLKATA II: Econophysics of Stock Markets and Minority Games, 14-17 February 2006. Proc. Vol.: *Econophysics of Stock and other Markets*, Eds. A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2006.

ECONOPHYS-KOLKATA III: Econophysics & Sociophysics of Markets and Networks, 12-15 March 2007. Proc. Vol.: Econophysics of Markets and Business Networks, Eds. A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2007.

ECONOPHYS-KOLKATA IV : Econophysics of Games and Social Choices, 9-13 March 2009. Proc. Vol.: Econophysics & Economics of Games, Social Choices and Quantitative Techniques, Eds. B. Basu, B. K. Chakrabarti, S. R. Chakravarty, K. Gangopadhyay, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2010.

ECONOPHYS-KOLKATA V : Econophysics of Order-Driven Markets, 9-13 March 2010. Proc. Vol.: Econophysics of Order-driven Markets, Eds. F. Abergel, B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, M. Mitra, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2011.

ECONOPHYS-KOLKATA VI : Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics, 21-25 October 2011. Proc. Vol.: Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics, Eds. F. Abergel, B.K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Ghosh, New Economic Windows, Springer-Verlag, Milan, 2012.

García-Colín, L., (1995), *Termodinámica Estadística*, Universidad Autónoma Metropolitana, Páginas 5-59, 159-174.

Holman, J. P., (1975), *Termodinámica* (México: McGraw-Hill), Páginas 106-130.

Kleiber C. y Kotz S., (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, Wiley-Interscience, Pages 255-256.

Mantegna, R. N., Palágyi, Z., Stanley, H. E., (1999), “Applications of statistical mechanics to finance”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 274, Issues 1–2, 1, Pages 216–221

Naumis G. Y Cocho G., (2008), “Tail universalities in Rank distributions as an algebraic problema: The beta-like function”, *Physica A*, 387 (2008) 84-96.

Newman, M. E. J., (2006) “Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law”, *Department of Physics and Center for the Studies, University of Michigan, Ann Arbor MI 48109. U.S.A. Pp. 1-28.*

Pareto, V. (1897) *Cours d'Économie Politique* (L'Université de Lausanne).

Silva A. Chistian y Yakovenko, V. M., (2005), "Temporal evolution of the "termal" and "superthermal" income clases in the USA during 1983-2001, *Europhysics Letters*, 69 (2), pp. 304-310.

Tolman, Richard, (1987), *The Principles of Statistical Mechanics*, (New York: Dover)

Wannier G. H., (1987) *Statistical Physics* (New York: Dover)

Yakovenko, (2008), "Econophysics, Statistical Mechanics Approach to", *Encyclopedia of Complexity and System Science*, published by Springer.
<http://refworks.springer.com/complexity/>

APÉNDICE A

Función de densidad acumulativa²³

La función de densidad acumulativa, (*Cumulative Distribution Function*, CDF), denotada por $D(x)$ describe la probabilidad que una variable X tome valores menores o iguales que un número x . La función de distribución $D(x)$ está definida en términos de una función de densidad de probabilidad continua:

$$D(x) = P(X \leq x) \equiv \int_{-\infty}^x P(\xi) d\xi$$

Entonces, $P(x)$ (cuando existe) es la derivada de la función de distribución:

$$P(x) = D'(x)$$

Similarmente, la función de distribución está relacionada con una probabilidad discreta $P(x)$ por:

$$D(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P(x)$$

Función de densidad de probabilidad²⁴

La función de densidad de probabilidad, (*Probability Density Function*, PDF), denotada por $P(x)$, de una distribución continua es definida como la derivada de la función de la distribución acumulativa $D(x)$:

$$\begin{aligned} D'(x) &= [P(x)]_{-\infty}^x \\ &= P(x) - P(-\infty) \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Entonces:

$$D(x) = P(X \leq x) \equiv \int_{-\infty}^x P(\xi) d\xi$$

Una función de probabilidad satisface:

$$P(x \in B) = \int_B P(x) dx$$

²³ Weisstein, Eric W. "Distribution Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/DistributionFunction.html>

²⁴ Weisstein, Eric W. "Probability Density Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ProbabilityDensityFunction.html>

con la condición de normalización:

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$$

Función de supervivencia²⁵

La definición de la función de supervivencia, (*Survival Function*, SF), de Mathematica®, en términos de la función de densidad de probabilidad $P(x)$, (*Probability Density Function*, PDF), para una proporción de datos con valores mayores a x está dada por:

$$S(x) = P_{>}(x) = \int_x^{x_{\max}} p(x')dx'$$

La SF, $S(x)$, está relacionada con la función de densidad acumulativa, (*Cumulative Distribution Function*, CDF), $D(x)$ de la siguiente forma:

$$D(x) + S(x) = P_{\leq}(x) + P_{>}(x) = 1$$

donde $D(x) = P_{\leq}(x) = \int_{-\infty}^x p(x')dx'$

Ya que las funciones de probabilidad están normalizadas.

Con base en esta definición de la SF, $P_{>}(\infty) = 0$, si hay un límite inferior x_0 para x , $P_{>}(x_0) = 1$, ahora bien, como todos los datos x son mayores que x_0 se obtienen una función $P_{>}(x)$ monótonamente decreciente de x . En términos de la PDF, $P_{>}(x) =$ [La suma total de $p(x')dx'$ con $x' > x$].

²⁵ Weisstein, Eric W. "Survival Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SurvivalFunction.html>

APÉNDICE B

Coefficiente de correlación²⁶

Para definir el coeficiente de correlación, primero se considera la suma de los cuadrados SS_{xx} , SS_{xy} y SS_{yy} de un conjunto de n puntos (x_i, y_i) sobre sus respectivos promedios:

$$\begin{aligned}SS_{xx} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum x^2 - 2\bar{x} \sum x + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - n\bar{x}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SS_{yy} &\equiv \sum (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum y^2 - 2\bar{y} \sum y + n\bar{y}^2 \\ &= \sum y^2 - 2n\bar{y}^2 + n\bar{y}^2 \\ &= \sum y^2 - n\bar{y}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SS_{xy} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i - \sum x_i \bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum xy - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum xy - n\bar{x}\bar{y}\end{aligned}$$

En el ajuste por mínimos cuadrados, el coeficiente b en la ecuación de la recta $y = a + bx$, está dado por:

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

y el coeficiente b' en la ecuación $x = a' + b'y$, está dado por:

$$b' = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2} = \frac{SS_{xy}}{SS_{yy}}$$

²⁶ Weisstein, Eric W. "Correlation Coefficient." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CorrelationCoefficient.html>

Entonces, el coeficiente de correlación está definido por:

$$r^2 \equiv bb' = \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}$$

El coeficiente de correlación también es conocido como el coeficiente de correlación del momento del producto Pearson.

El coeficiente de correlación tiene una importante interpretación física. Para ver esto se define:

$$A \equiv [\sum x^2 - n\bar{x}^2]^{-1}$$

y se denota como el valor esperado de y_i como \hat{y}_i . Entonces las sumas de y_i son:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= a + bx_i \\ &= \bar{y} - b\bar{x} + bx_i \\ &= A(\bar{y} \sum x^2 - \bar{x} \sum xy + x_i \sum xy - n\bar{x}\bar{y}x_i) \\ &= A(\sum x^2 + (x_i - \bar{x}) \sum xy - n\bar{x}\bar{y}x_i) \\ \sum \hat{y}_i &= A(n\bar{y} \sum x^2 - n^2\bar{x}^2\bar{y}) \\ \sum \hat{y}_i^2 &= A^2[n\bar{y}^2 (\sum x^2)^2 - n^2\bar{x}^2\bar{y}^2 (\sum x^2) - 2n\bar{x}\bar{y} (\sum xy) (\sum x^2) \\ &\quad + 2n^2\bar{x}^3\bar{y} (\sum xy) + (\sum x^2) (\sum xy)^2 - n\bar{x}^2 (\sum xy)] \\ \sum y_i \hat{y}_i &= A \sum [y_i \bar{y} \sum x^2 + y_i (x_i - \bar{x}) \sum xy - n\bar{x}\bar{y}x_i y_i] \\ &= A[n\bar{y}^2 \sum x^2 + (\sum xy)^2 - n\bar{x}\bar{y} \sum xy - n\bar{x}\bar{y} (\sum xy)] \\ &= A[n\bar{y}^2 \sum x^2 + (\sum xy)^2 - 2n\bar{x}\bar{y} \sum xy] \end{aligned}$$

Entonces la suma de los errores cuadrados es:

$$\begin{aligned} SSE &\equiv \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum (\hat{y}_i^2 - 2\bar{y}\hat{y}_i + \bar{y}^2) \\ &= A^2 (\sum xy - n\bar{x}\bar{y})^2 (\sum x^2 - n\bar{x}^2) \\ &= \frac{(\sum xy - n\bar{x}\bar{y})^2}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= bSS_{xy} \\
&= \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\
&= SS_{yy}r^2 \\
&= b^2SS_{xx}
\end{aligned}$$

y la suma de los residuos cuadrados es:

$$\begin{aligned}
SSR &\equiv \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \\
&= \sum (y_i - \bar{y} + b\bar{x} - bx_i)^2 \\
&= \sum [y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})]^2 \\
&= \sum [(y_i - \bar{y})^2 + b^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 - 2b \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] \\
&= SS_{yy} + b^2SS_{xx} - 2bSS_{xy}
\end{aligned}$$

Pero,

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

$$r^2 = \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
SSR &= SS_{yy} + \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}^2}SS_{xx} - 2\frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}SS_{xy} \\
&= SS_{yy} - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}} \\
&= SS_{yy}\left(1 - \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}}\right) \\
&= SS_{yy}(1 - r^2)
\end{aligned}$$

y

$$SSE + SSR = SS_{yy}r^2 + SS_{yy}(1 - r^2) = SS_{yy}$$

Por tanto, el cuadrado del coeficiente de correlación, r^2 , está dado por:

$$r^2 \equiv \frac{SSR}{SS_{yy}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{SS_{xy}^2}{SS_{xx}SS_{yy}} \\
&= \frac{(\sum xy - n\bar{x}\bar{y})^2}{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}
\end{aligned}$$

En otras palabras, r^2 es la proporción de SS_{yy} que se explica por la regresión.

Si existe una correlación completa, entonces (Clausius, 1850) (Clausius, 1850) (Clausius, 1850):

$$y = -\frac{a'}{b'} + \frac{x}{b'} = a + bx$$

Por tanto, $a = -a'/b'$ y $b = 1/b'$, resultando:

$$r^2 = bb' = 1$$