



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – SISTEMAS ELECTRÓNICOS

DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL DE ORIENTACIÓN PARA SATÉLITES
PEQUEÑOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
HUMBERTO HERNÁNDEZ ARIAS

TUTOR PRINCIPAL
DR. JORGE PRADO MOLINA
INSTITUTO DE GEOGRAFÍA, UNAM

MÉXICO, D. F. noviembre de 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

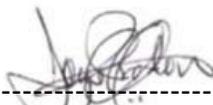
JURADO ASIGNADO:

Presidente: M.I. Haro Ruíz Luis Arturo
Secretario: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando
Vocal: Dr. Prado Molina Jorge
1 er. Suplente: M.I. Alvarez Castillo Jesús
2 d o. Suplente: Dr. Rodríguez Cuevas Jorge

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE GEOGRAFÍA

TUTOR DE TESIS:

DR. JORGE PRADO MOLINA



FIRMA

AGRADECIMIENTOS

*A la **Universidad Nacional Autónoma de México**, por darme una vez más, la oportunidad de seguir con mi formación profesional.
Al Programa De Maestría Y Doctorado En Ingeniería.
A la Facultad de Ingeniería y a todos mis profesores.*

*A la Coordinación de Estudios de Posgrado (**CEP**) por la beca otorgada.*

Al Laboratorio de Análisis Geoespacial del Instituto de Geografía de la UNAM por darme todas las facilidades para la realización de este proyecto.

A los miembros del jurado, por haber revisado este trabajo y hecho valiosas observaciones para mejorarlo.

*A mi tutor el **Dr. Jorge Prado Molina** por sus consejos, enseñanzas y sobre todo, por confiar en mi para la realización de este proyecto.*

A mi maestro y amigo M. I. Lauro Santiago Cruz.

A mis padres Alma Rosa y Germán.

A mis hermanos Eduardo, Luis, Silvia y Tania.

A mis sobrinos: Diego, Itzcóatl, Mariana, Nube y Shasmalí.

A la familia de Ixchel.

A mis amigos: Anabel, Carolina, Christian Obregón, David, Gerardo, Ingrid, Mario Alberto, Polette, Samuel Cruz, Samuel Sosa, Selene Romero, Timo, Víctor y Xareni, por todas las experiencias compartidas.

A la familia de Xare, que nos ha abierto las puertas de su casa y su corazón.

DEDICATORIA

Para:

Ixchel y Sabina, "La flor que llegó"

Humberto Hernández Arias

CONTENIDO

- CONTENIDO iii**
- ÍNDICE DE FIGURAS v**
- ÍNDICE DE TABLAS vii**
- 1. INTRODUCCIÓN 1**
 - 1.1. Subsistema de control de Orientación y estabilización de un satélite 1
 - 1.1.1. Funcionamiento del sistema de Control de orientación y estabilización 3
 - 1.1.2. Estabilización de la orientación 4
 - 1.1.3. Sensores de orientación 5
 - 1.2. Algoritmos de control de orientación 7
 - 1.3. Justificación 8
 - 1.4. Objetivo 8
- 2. Parámetros de la Orientación del Satélite 9**
 - 2.1. Órbitas de Kepler 9
 - Elementos Keplerianos: 11
 - 2.2. Sistemas de referencia para la orientación del satélite 12
 - 2.2.1. Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra (SRIT) 12
 - 2.2.2. Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra (SRFT) 12
 - 2.2.3. Sistema de referencia orbital con centro en la Tierra (SROT) 13
 - 2.2.4. Sistema de referencia orbital (SRO) 13
 - 2.2.5. Sistema de referencia fijo al satélite (SRFS) 14
 - 2.3. Representación de la orientación 14
 - 2.3.1. Representación de la orientación con ángulos de Euler 14
 - 2.3.2. Representación en Cuaterniones 15
 - 2.3.3. Matriz de rotación 16
 - 2.4. Transformaciones entre sistemas de referencia 17
 - 2.4.1. Transformación del Sistema de referencia orbital con centro en la Tierra al Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra y al Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra. 17
 - 2.4.2. Transformación del Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra al Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra 17
 - 2.4.3. Transformación del Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra al Sistema de referencia orbital 18
 - 2.4.4. Transformación del Sistema de referencia orbital al Sistema de referencia fijo al satélite 18
 - 2.5. Matriz de inercia 19
- 3. Modelo matemático del satélite 21**
 - 3.1. Dinámica del satélite 21
 - 3.2. Cinemática del satélite 23
 - 3.3. Modelos matemáticos de los pares perturbadores en el medio ambiente espacial 25
 - El medio ambiente espacial 25
 - Características de la atmosfera terrestre 26
 - Modelos de la Alta atmósfera 27

3.3.1. Perturbaciones ocasionadas por el arrastre atmosférico	28
3.3.2. Perturbaciones causadas por la radiación solar	34
3.3.3. Par debido al gradiente Gravitacional	36
3.3.4. Par magnético	37
El campo magnético terrestre	37
Par perturbador magnético	39
3.4. Pares de control en el satélite	40
3.4.1. Ruedas Inerciales	40
3.4.2. Bobinas magnéticas	41
3.5. Modelos lineales para el control de orientación	42
Ecuación lineal de la cinemática del satélite	43
Ecuación lineal de la matriz de rotación	43
Modelo lineal de la velocidad y de la aceleración angular	44
Modelo lineal del gradiente gravitacional	44
Modelo lineal del par magnético	44
Modelo lineal del par proporcionado por las ruedas inerciales	45
4. Diseño y simulación del control de orientación	47
4.1. Modelo en variables de estado de la dinámica y cinemática del satélite	47
4.2. Técnicas de control lineal	49
4.2.1. <i>Linear Quadratic Regulator</i> (LQR)	49
Regulación Óptima	50
Realimentación de Estados LQR	52
LQR y MATLAB	53
4.3. Diseño del controlador	53
4.3.1. Esquema de control	54
4.3.2. Algoritmos de control de orientación	55
4.4. Modelo de simulación por programación	56
4.5. Desarrollo de las simulaciones	57
4.5.1. Satélite con ruedas inerciales como actuadores	58
Prueba: Plataforma SIMUSAT [8],[32]	58
Prueba: Satélite pequeño cubo 10 Kg	60
Prueba: Satélite pequeño cubo 100 Kg	63
Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 100 Kg	65
4.5.2 Satélite con bobinas magnéticas como actuadores	68
Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 70 Kg	68
Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 100 Kg	71
5. Resultados y conclusiones	75
5.1. Resultados	75
5.2. Conclusiones	77
APÉNDICE A: Bloques De Simulación en SIMULINK Y MATLAB	79
APÉNDICE B: SIMUSAT, Simulador para pruebas de algoritmos control de orientación de satélites	89
REFERENCIAS	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1. Operación del subsistema de control de orientación y estabilización.....	3
Fig. 1.2. Perturbación de la orientación provocada por el arrastre atmosférico.....	4
Fig. 1.3. Tipos de estabilización de la orientación en satélites [33].....	5
Fig. 2.1. Geometría de la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol.....	9
Fig. 2.2. Órbita elíptica dónde se barren áreas iguales en tiempos iguales.....	10
Fig. 2.3. Relación entre el radio de las órbitas con sus periodos orbitales.....	11
Fig. 2.4. Elementos Keplerianos [37].	11
Fig. 2.5. Marco referencia inercial con centro en la Tierra (SRIT).....	12
Fig. 2.6. Marco referencia SRFT en contraste con el SRIT.....	13
Fig. 2.7. Marco de referencia orbital, localizado en el centro de masa del satélite (SRO)....	13
Fig. 2.8. Sistemas de referencia orbital (SRO) y fijo al satélite (SRFS).....	14
Fig. 2.9. Ángulos de Euler [17].....	15
Fig. 3.1. Movimiento de traslación.	23
Fig. 3.2. Temperatura media de la atmosfera como función de la altitud [22].....	26
Fig. 3.3. Densidad media de la atmósfera como función de la altitud [35].....	27
Fig. 3.4. Satélite en flujo libre molecular, trayectoria libre media [13].	29
Fig. 3.5. Tipos de reflexión en la superficie de un satélite. a) especular, b) difusa [13].	30
Fig. 3.6. Moléculas incidentes en un elemento de superficie [13].....	31
Fig. 3.7. El arrastre aerodinámico para el satélite en órbita.....	33
Fig. 3.8. Ubicación del centro de masa, el centro de presión y el vector m_e	34
Fig. 3.9. Presión debida a la radiación solar.....	35
Fig. 3.10. Campo magnético terrestre.....	37
Fig. 3.11. Intensidad de flujo magnético en función de la altura y de la latitud.	38
Fig. 4.1. Configuración de la realimentación en la Regulación Lineal Cuadrática (LQR).	50
Fig. 4.2. LQR con realimentación de estados.	52
Fig. 4.3. Esquema de control para la orientación del satélite.....	54
Fig. 4.4. Diagrama de flujo para el algoritmo de control de orientación que utiliza ruedas inerciales como actuadores.....	55
Fig. 4.5. Diagrama de flujo para el algoritmo de control de orientación que utiliza bobinas magnéticas como actuadores.	56
Fig. 4.6. Bloques de simulación programados en Simulink.....	57
Fig. 4.7. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.....	58
Fig. 4.8. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.	59
Fig. 4.9. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.	59
Fig. 4.10. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales para el control de la orientación.	60
Fig. 4.11. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.....	61
Fig. 4.12. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.....	61
Fig. 4.13. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.....	62

Fig. 4.14. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales para el control de la orientación.	62
Fig. 4.15. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.....	63
Fig. 4.16. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.....	64
Fig. 4.17. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.....	64
Fig. 4.18. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales.	65
Fig. 4.19. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.....	66
Fig. 4.20. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.....	66
Fig. 4.21. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.....	67
Fig. 4.22. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales.	67
Fig. 4.23. Gráfica de la evolución del ángulo ϕ	69
Fig. 4.24. Gráfica de la evolución del ángulo θ	69
Fig. 4.25. Gráfica de la evolución del ángulo ψ	70
Fig. 4.26. Gráficas de la potencia requerida por las bobinas magnéticas.....	70
Fig. 4.27. Cambio en la orientación en el ángulo ϕ	72
Fig. 4.28. Cambio en la orientación en el ángulo θ	72
Fig. 4.29. Cambio en la orientación en el ángulo ψ	72
Fig. 4.30. Gráficas de la potencia requerida por las bobinas magnéticas.....	73
Fig. A.1. Diagrama de Bloques general para la simulación de los algoritmos de control de orientación de satélites pequeños.....	79
Fig. A.2. Detalle del bloque Valores de referencia.	80
Fig. A.3. Detalle del bloque de control.	80
Fig. A.4. Detalle del bloque Dinámica del satélite.....	81
Fig. A.5. Detalle del bloque que calcula el par por arrastre atmosférico.....	83
Fig. A.6. Detalle del bloque para el cálculo del par producto de la presión de la radiación solar.....	83
Fig. A.7. Detalle del Bloque de Actuadores.....	85

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Clasificación de los satélites por su masa.....	1
Tabla 3.1 Composición química de la atmósfera hasta la turbopausa.....	27
Tabla 4.1. Parámetros utilizados en las simulaciones.....	57
Tabla 4.2. Parámetros utilizados en las simulaciones.....	68
Tabla 5.1. Tiempo de orientación y estabilización del apuntamiento.....	75
Tabla 5.2. Consumo de energía por parte del actuadores.....	76

1. INTRODUCCIÓN

Por definición, un satélite es un cuerpo natural que órbita alrededor de otro en el espacio exterior, por ejemplo, la luna es un satélite de la Tierra y, a su vez, la tierra es un satélite del Sol. Hoy en día, las naves espaciales son llamadas satélites artificiales, porque son lanzadas hacia el espacio y se mantienen en órbita alrededor de la Tierra por la fuerza gravitacional de ésta, de manera similar a como lo hacen los satélites naturales [36]. En este trabajo nos referiremos particularmente a los satélites artificiales, que son aquellos sistemas especializados de recepción/transmisión inalámbrica de señales, cuya función principal es llevar a cabo una misión en órbita, que puede ser científica o en algunos casos, la de retransmitir ondas de radiofrecuencia de un punto a otro del planeta [2].

En la tabla 1.1, se muestra una clasificación de los satélites de acuerdo a su masa [9].

Tabla 1.1. Clasificación de los satélites por su masa.

Tipo de Satélite	Masa [kg]
Grande	> 1000
Mediano	500 – 1000
Mini	100 – 500
Micro	10 – 100
Nano	1 – 10
Pico	< 1

Aunque los microsátélites son físicamente pequeños, cuentan con sistemas complejos y tienen, en algunos casos prácticamente todas las características de un satélite de mayor tamaño pero a pequeña escala.

Además de las comunicaciones, la percepción remota y algunas aplicaciones en el campo de la ciencia espacial, estos satélites miniatura se han enfocado en la educación y el entrenamiento de los científicos e ingenieros jóvenes, al proveer un medio directo para aplicar sus conocimientos y generar experiencia en varios rubros de lo que sería una misión satelital real; desde el diseño, la construcción, las pruebas, el lanzamiento y operación en órbita.

1.1. Subsistema de control de Orientación y estabilización de un satélite

El Subsistema de Control de Orientación y Estabilización (**SCOE**) es quizás el más complejo de los subsistemas del satélite y uno de los que influyen de manera significativa en la forma geométrica de un vehículo espacial.

INTRODUCCIÓN

El propósito del SCOE es lograr que la estructura del sistema satelital apunte hacia el objetivo especificado en la misión. Lo anterior se debe a que la mayoría de los satélites en órbita tienen una carga útil que requiere un apuntamiento determinado, por ejemplo:

- Un satélite de comunicaciones requiere que sus antenas apunten a la estación terrena para recibir y transmitir los enlaces que utilizan a dicho aparato,
- En los sistemas de observación terrestre, se requiere apuntar las cámaras fotográficas a objetivos de interés en Tierra, y
- Un observatorio espacial necesita responder a comandos enviados desde Tierra para apuntar un telescopio a objetos particulares del espacio exterior.

Así, el sistema de control de orientación direcciona el apuntamiento o rotación de la nave, es decir, la forma en que el vehículo rota sobre sus ejes coordenados.

Al hablar de orientación, nos referimos a la posición de la nave desde el punto de vista de las rotaciones ocurridas en sus ejes, por lo que un cambio en la orientación implica una rotación en uno o más ejes. Son los pares los que causan que el satélite gire sobre su centro de masa.

El trabajo principal del SCOE es mantener estable el estado rotacional de la nave, mediante el uso de actuadores a bordo, que producen un par estabilizador para rotar el satélite y regresarlo a la posición deseada. Los sistemas de control de par más utilizados incluyen los llamados impulsores o *thrusters*, ruedas inerciales y bobinas de par magnético, que son capaces de producir la rotación deseada.

A continuación se presenta una descripción muy breve de algunos aspectos a considerar en el diseño del Control de orientación:

- Lograr que la carga útil de la misión apunte en la dirección especificada y con la precisión requerida. Por ejemplo, un satélite tipo *Comsat* requiere apuntar su antena hacia la estación terrena con una precisión de 0.1 grados [33].
- Cumplir con los requerimientos de apuntamiento de otros subsistemas, en un proceso conocido como *Housekeeping* [33]. Por ejemplo:
 - Dirigir un panel solar hacia el sol para generar energía eléctrica
 - Apuntar una antena hacia la estación terrena en la superficie de la misma para la descarga de los datos de la carga útil.
 - Posicionar los radiadores térmicos hacia la parte más fría del espacio, con lo que se permite disipar el calor. Esta función está directamente relacionada con el subsistema de control térmico.
 - Colocar los propulsores en la dirección correcta antes de encenderlos, para lograr el cambio deseado en la órbita.
- En conjunto, administrar el estado de la rotación de la nave, lo que significa aplicar pares de fuerza alrededor del centro del satélite, cuando sea necesario, o cuando los niveles de energía así lo permitan.

1.1.1. Funcionamiento del sistema de Control de orientación y estabilización

En la Figura 1.1 se muestra la operación típica del sistema de control de orientación, donde se presentan los componentes principales que conforman a este subsistema. En dicha figura se pueden observar los pares que afectan al satélite y que provocan que rote. Hay dos tipos de pares. Primero, están aquellos que son aplicados para controlar la rotación de la nave. Luego, se tienen los pares perturbadores, que son provocados de manera natural por la interacción del satélite con su entorno, como por ejemplo, la perturbación provocada por el arrastre atmosférico.

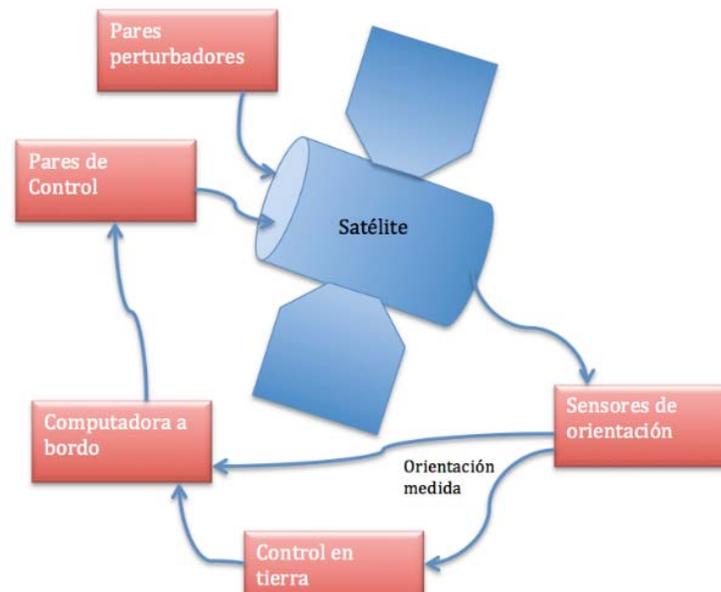


Fig. 1.1. Operación del subsistema de control de orientación y estabilización.

En la Figura 1.2. se ilustra la perturbación provocada por el arrastre atmosférico, aunque en órbita baja (350 a 1,200 km) no hay atmósfera, existen partículas principalmente de oxígeno monoatómico, que causan un cambio en la orientación de la nave, además que a la larga provocan que el satélite reingrese a la Tierra.

Los pares de fuerzas actúan sobre la nave y causan un cambio en la orientación, originando una rotación, la cual es detectada y medida por los sensores de orientación, como giróscopos y sensores ópticos que buscan objetos de referencia, como el Sol, la Tierra o las estrellas [33].

Las mediciones de los sensores de la rotación de la nave se envían a la computadora de a bordo, considerada como uno de los elementos más importantes del subsistema de control de orientación y estabilización. Estas mediciones son procesadas por el software de control (los algoritmos de control), que son en esencia funciones matemáticas para calcular la orientación de la nave y los pares necesarios para corregirla. La orientación calculada es comparada con la requerida para lograr el apuntamiento exigido por la misión, y si difiere, el algoritmo de control calcula el par estabilizador para corregir dicha orientación. Un

INTRODUCCIÓN

aspecto relevante en el sistema de control de orientación es que opera en un ciclo cerrado, que en general se repite automáticamente varias veces por segundo, con lo que la orientación de la nave es continuamente monitoreada y estabilizada, operando en un lazo de retroalimentación.

En lo que se refiere al control en tierra, éste interviene en los casos en que los cuales se quiera apuntar una carga útil, por ejemplo un telescopio a un objeto en particular, para lo cual el personal en tierra envía el comando hacia el satélite para lograr dicho objetivo.

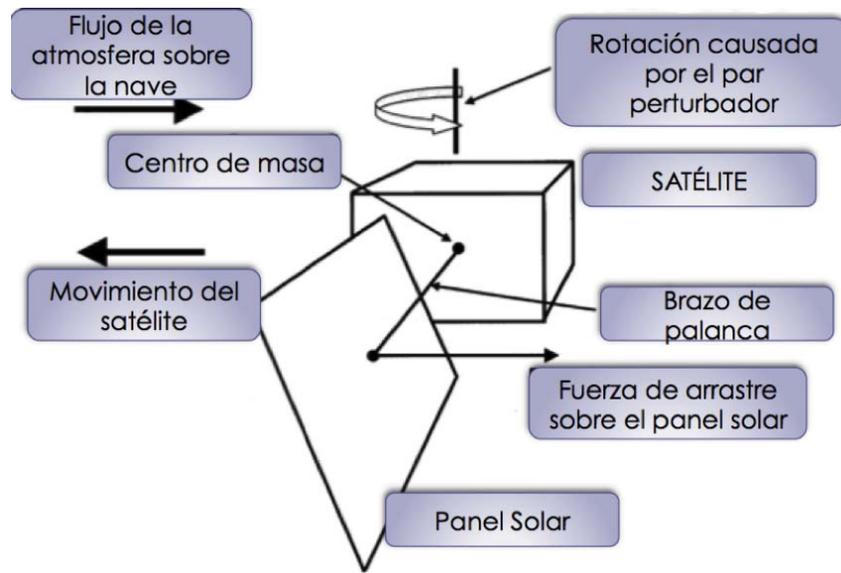


Fig. 1.2. Perturbación de la orientación provocada por el arrastre atmosférico.

1.1.2. Estabilización de la orientación

Una razón por la cual el sistema de control de orientación es considerado un elemento muy importante del satélite, es que el tipo de estabilización de la orientación utilizado en cada caso particular influye de manera determinante en la forma de la nave.

Existen cuatro tipos generales de estabilización, mostrados en la Figura 1.3. Los tipos 1, 2 y 3 involucran el giro de la nave o de alguna parte de ella. La función de giro hace que la orientación del satélite sea inherentemente estable [33]; si la nave es afectada por un par perturbador, el cambio en la orientación resultante es pequeño. Esta es una característica muy útil, que implica que el control de orientación y estabilización no debe realizar un gran esfuerzo para controlar la orientación del satélite, no obstante, ya se está empleando energía para mantener la estabilidad giroscópica.

Los satélites con estabilización del tipo 1 son llamados estabilizados por giro, en donde la nave es de forma cilíndrica y rota a determinada velocidad, proporcionando estabilidad por giro.



Fig. 1.3. Tipos de estabilización de la orientación en satélites [33].

La estabilización de tipo 2 es conocida como de doble giro, en la cual se tiene una sección de la plataforma satelital que rota a determinada velocidad, pero adicionalmente, se cuenta con un mecanismo montado en la parte superior que no gira, de tal manera que los sistemas del satélite que deban apuntar en una dirección fija deben estar montados en esta sección.

El tercer tipo de estabilización es el llamado *híbrido*, en el cual la nave cuenta con una rueda, que proporciona estabilidad giroscópica en un eje y adicionalmente cuenta con otros actuadores para corregir la orientación.

El tipo 4 es conocido como *estabilización tri-axial*. En este caso no necesariamente se utilizan ruedas inerciales, por lo cual no se cuenta con la estabilidad inherente y el subsistema de orientación debe realizar un gran trabajo para lograr el apuntamiento requerido. Un ejemplo de lo anterior son los satélites de telecomunicaciones localizados en órbita geosíncrona (órbita cuyo movimiento alrededor del planeta está sincronizado con un punto sobre la superficie) que cambian su orientación con pequeños cohetes localizados en los extremos de los ejes de rotación de la nave.

1.1.3. Sensores de orientación

El subsistema de control de orientación y estabilización debe contar con suficientes sensores, para que la información sea de la precisión y exactitud requeridas, y que sea fácil de procesar.

Se puede clasificar a los sensores de este subsistema en dos categorías [9]:

INTRODUCCIÓN

1. Sensores de referencia; Proporcionan información fija, al medir la dirección de un objeto como el Sol, la Tierra o alguna estrella, pero en determinados periodos dicha información no está disponible. El de Sol no proporciona información cuando el satélite está en eclipse, el de estrellas puede dañarse si se activa mientras el sol está presente, mientras que el de Tierra si funciona de manera continua.
2. Sensores inerciales; realizan mediciones de manera continua, miden los cambios en la velocidad angular de los tres ejes del satélite. Los giróscopos presentan el fenómeno de deriva y deben ser recalibrados por medio de una referencia conocida.

La determinación completa de la orientación requiere de tres tipos de información. Los sensores de referencia, que están basados en la detección de la dirección de uno, dos o tres vectores. Son necesarios tres, idealmente ortogonales, para tener la información completa de la orientación de la nave, a partir de mediciones realizadas simultáneamente. Y los sensores de velocidad angular, también en tres ejes para resolver las ecuaciones de movimiento.

Dentro de los sensores de referencia podemos encontrar a los siguientes:

- Sensor de Sol: determinan la posición de la nave con respecto al sol. Usualmente son de dos ejes: rotación y cabeceo.
- Sensor de Tierra: Este sensor toma como referencia la capa de CO₂ de la Tierra, detectando el horizonte de la misma. También proporciona dos ejes independientes: rotación y cabeceo.
- Sensor de estrellas: Estos consisten en pequeños telescopios ópticos que observan estrellas y comparan las imágenes obtenidas con un catálogo de referencia, guardado en la computadora de abordo. Con estos dispositivos se puede determinar la orientación en dos o tres ejes, adicionalmente pueden proporcionar velocidades angulares.
- Magnetómetro: determina la dirección y la intensidad de tres vectores de campo magnético durante su viaje a través de la órbita. Los valores de campo son comparados con un modelo geomagnético almacenado en la computadora de abordo. Debido a que dicho modelo no es muy preciso y además se presentan algunas anomalías de campo, el uso de este sensor para la determinación de la orientación está limitado a ± 3 grados.

En lo que se refiere a los sensores inerciales se incluyen los siguientes:

- Giróscopos: Con estos dispositivos se puede medir la rotación del satélite en sus tres ejes.

- Acelerómetros: permiten medir la dirección y magnitud de la aceleración de la nave. Se pueden colocar en los ejes en los que se desea obtener dicho parámetro.

1.2. Algoritmos de control de orientación

Dentro de muchas universidades alrededor del mundo existen programas de investigación para el desarrollo de satélites pequeños. Uno de estos casos es el CKUTEX (*Cheng-Kung University Technology Experimental Satellite*), en el cual el subsistema de Control de Orientación se encarga de proporcionar las funciones de reorientación y estabilización, además de suministrar información sobre la posición de la órbita de la nave durante la operación de la misma [15]. En este desarrollo la ley de control aplicada utiliza al campo magnético terrestre como referencia, y es medido con un magnetómetro, cuenta con bobinas magnéticas como actuadores para aplicar los pares de control necesarios. La carga útil de este satélite es un receptor GPS, cuenta, además, con un sensor de sol y un giróscopo como sensores auxiliares. En el desarrollo del CKUTEX se realizaron simulaciones de los algoritmos de control, de los modelos de sensores y actuadores, con el software MATLAB. El modelo del ambiente espacial incluye al campo magnético terrestre, el de la atmósfera alta y el de la posición del sol.

En el artículo de Kelly K. [19], de la Universidad de San José se describe el análisis de la histéresis que presenta un sistema de control de orientación pasivo estabilizado por giro (*spin stabilization*), debido a las propiedades ferromagnéticas de la estructura de la nave y a las corrientes parásitas que se presentan en los distintos circuitos con los que cuenta. Para controlar la orientación de este satélite se usan imanes permanentes y la geometría misma de las antenas que lleva la nave. Dicho giro es resultado de un par provocado por la presión solar sobre las antenas del aparato. El toque generado se incrementa gradualmente con el tiempo, para evitar que éste exceda los requerimientos de orientación del satélite se utilizan bobinas magnéticas que servirán para disipar el exceso de energía en los momentos que se requiera [19].

Otro sistema de control de orientación que se tiene como referencia es el reportado por Jerpseth E. [14], como parte de su tesis de Maestría. Dicho trabajo fue desarrollado en el departamento de ingeniería cibernética de la *Norwegian University Of Science and Technology*, para el microsatélite nCube, basado en el concepto CubeSat [14]. El sistema de orientación de este sistema está basado en la información que proporciona un magnetómetro que mide el campo magnético de la Tierra y el uso de bobinas magnéticas como actuadores. Los resultados teóricos de este trabajo son respaldados con simulaciones por programación del sistema de control de orientación [14].

Dentro de los trabajos relacionados con el control de orientación satelital, donde se incluye el modelo del arrastre atmosférico en las ecuaciones dinámicas se encuentra por ejemplo, el trabajo sobre estabilización aerodinámica publicado por Jones D. et. al. [30]. En dicho artículo se presenta el diseño e implementación de un sistema de control de orientación y estabilización para un satélite tipo CubeSat. Para la inclusión del modelo del par atmosférico, se realizó una simulación directa tipo Monte Carlo, que permite obtener una estimación de los efectos de la interacción de la atmósfera con la geometría de la nave.

INTRODUCCIÓN

Adicionalmente, se presenta el modelo de la presión solar y el par correspondiente producido por este fenómeno [30].

Un trabajo que muestra los resultados del diseño de un sistema de control de orientación y estabilización pasivo de un CubeSat, es el presentado por Auret J. [1] donde se describe un sistema que utiliza al arrastre aerodinámico para mantener la orientación de dicho satélite. Este trabajo fue desarrollado en la Universidad de *Stellenbosch* [1].

Dentro de la UNAM se han desarrollado distintos proyectos de picosatélites. Tal es el caso del SATEDU dentro del Instituto de Ingeniería, el cual consiste en el desarrollo de todos los subsistemas que integran a un picosatélite, incluido el de control de orientación. En lo que se refiere a este último subsistema, se incluyen algunos esfuerzos de desarrollo de algoritmos con diferentes leyes de control [3].

En el Instituto de Geografía, se ha llevado a cabo el modelado dinámico del satélite, el estudio de algunas técnicas de control, la simulación numérica y una estrategia para la simulación física en las plataformas SIMUSAT, estos esfuerzos forman parte del trabajo de licenciatura de Reyes R. [32]. Otro trabajo relacionado con estos temas, aplica un algoritmo que hace uso de ruedas inerciales como actuadores e incluye al par gravitacional como par perturbador [8].

1.3. Justificación

Para la mayoría de las aplicaciones y experimentos realizados en misiones espaciales, es indispensable el sistema de control de orientación y estabilización para que se lleve a cabo de manera adecuada la misión, dado que se requiere que el satélite apunte continuamente hacia la tierra de manera estable. Adicionalmente, el control de orientación es utilizado por otros subsistemas, como el térmico, de comunicaciones, o el de potencia, en éste último para recargar las baterías a través de la reorientación de los paneles solares.

1.4. Objetivo

El objetivo principal de este proyecto, es diseñar un algoritmo de control de orientación para un satélite pequeño.

Como objetivos secundarios se tienen los siguientes:

- 1.- Establecer un esquema de control de orientación
- 2.- Efectuar la validación del algoritmo en Tierra, a través de la simulación por software.

Dentro de este capítulo se ha presentado una breve introducción para el entendimiento general de este trabajo. Se presentó una revisión bibliográfica referente a los algoritmos de control de orientación y, finalmente, se presentaron la justificación y los objetivos de esta tesis.

2. Parámetros de la Orientación del Satélite

Para describir el comportamiento de un satélite se requiere de un modelo matemático que nos permita realizar un análisis formal, que servirá para determinar la orientación del mismo. Para lograr lo anterior, se presentan a continuación algunos conceptos básicos para el desarrollo de los modelos.

2.1. Órbitas de Kepler

Las leyes de Kepler, que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol, pueden ser aplicadas para estudiar la trayectoria de los satélites artificiales que orbitan nuestro planeta. De este modo, la dinámica satelital se rige por las tres leyes que este astrónomo desarrolló a partir de observaciones de los movimientos del Sol y los planetas.

Primera Ley de Kepler - Ley de Elipses

Todo planeta se mueve en un plano alrededor del Sol en una trayectoria elíptica, con el Sol fijo en uno de sus focos. Una elipse consta de dos focos, F1 y F2, donde su tamaño depende de la longitud de su semieje mayor. Su forma depende de su *excentricidad*, que es la relación entre su diámetro máximo (*Eje mayor*) y su diámetro mínimo (*Eje menor*). Una elipse con excentricidad igual a cero es una circunferencia. La Figura 2.1 muestra las principales características de una elipse, aplicadas a una órbita planetaria alrededor del Sol.

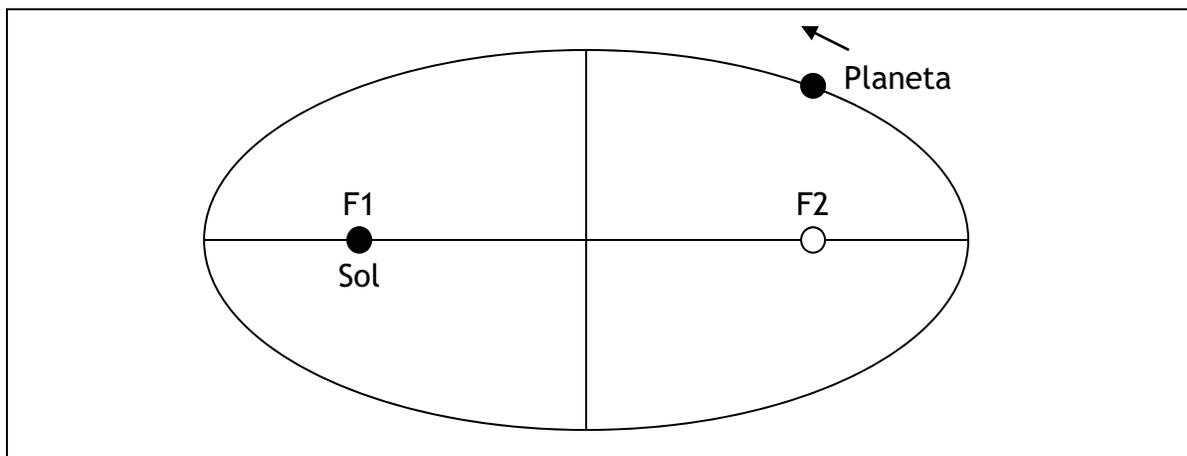
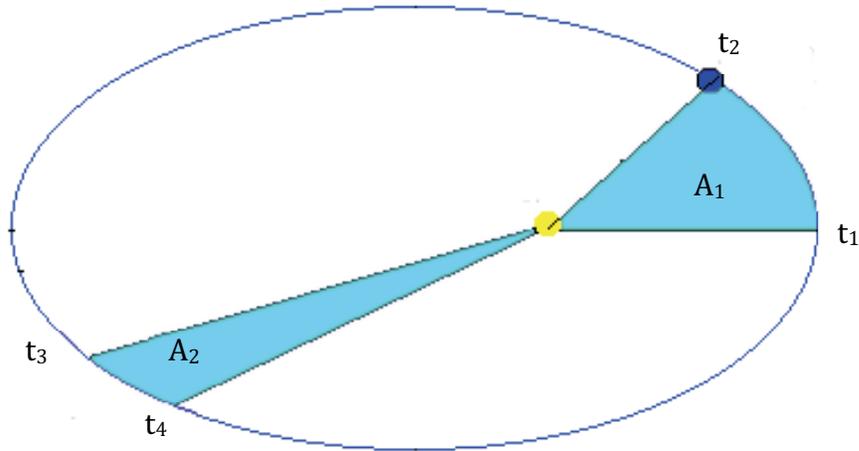


Fig. 2.1. Geometría de la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol.

Segunda Ley de Kepler – Ley de Áreas Iguales

Si se traza una línea entre el planeta en movimiento y el Sol en distintos momentos, pero en dos períodos iguales, la línea entre el Sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, como se muestra en la Figura 2.2. Esto ayuda a entender el aumento de velocidad del planeta a medida que se acerca al Sol, y su disminución, a medida que se aleja del mismo.



$$t_4 - t_3 = t_2 - t_1, \text{ entonces } A_2 = A_1$$

Fig. 2.2. Órbita elíptica dónde se barren áreas iguales en tiempos iguales

Tercera Ley de Kepler – Ley de Armónicas

La relación entre el cuadrado del periodo orbital del planeta con respecto al cubo del semieje mayor a de la órbita alrededor del Sol es la misma para todos los planetas. Como muestra la ecuación (2.1), las órbitas de diferentes radios a tendrán un periodo T proporcional entre ellas, lo que se puede observar en la Figura 2.3. La ecuación (2.2) indica que, para órbitas elípticas, una misma velocidad angular v depende de la nueva distancia del semieje mayor a , del nuevo radio r , y por tanto, determina el nuevo periodo orbital T .

$$T^2 = \frac{4\pi a^3}{\mu}, \quad T^2 \approx a^3 \quad \text{ec. 2.1}$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{ec. 2.2}$$

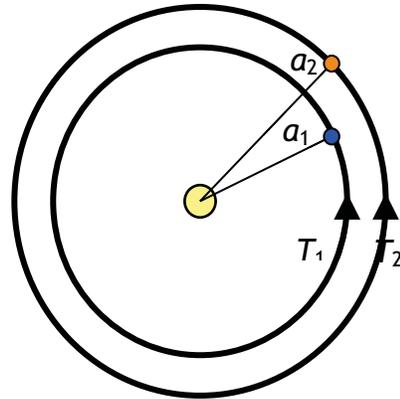


Fig. 2.3. Relación entre el radio de las órbitas con sus periodos orbitales

Elementos Keplerianos:

Considerando un marco de referencia inercial (fijo con respecto a las estrellas), una órbita puede ser definida por lo que se conoce como los Elementos Keplerianos, que son mostrados en la Figura 2.4.

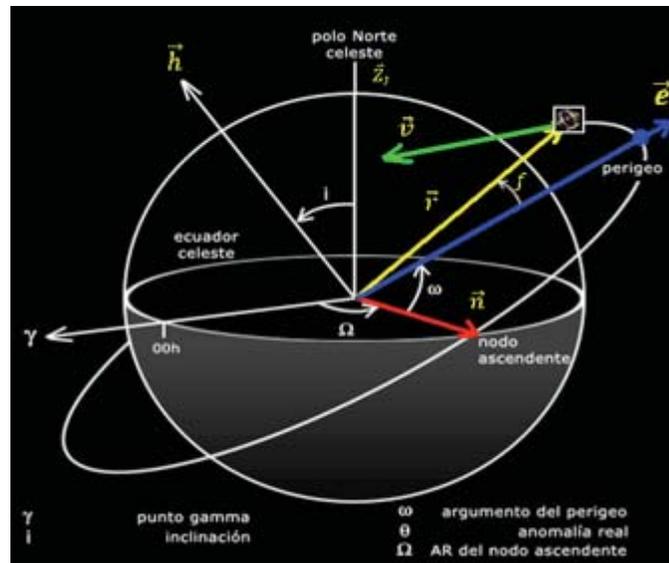


Fig. 2.4. Elementos Keplerianos [37].

Los elementos que describen las órbitas de Kepler (ver fig. 2.4) son los siguientes:

- Inclinación de la órbita
- Ascensión recta del nodo ascendente
- Argumento del Perigeo
- Excentricidad
- Movimiento medio
- Anormalidad media

2.2. Sistemas de referencia para la orientación del satélite

La orientación de un satélite en órbita, es entendida como la posición que tiene dicho aparato con respecto a un sistema o marco de referencia dado. Existen varios sistemas de referencia utilizados en la representación de la orientación. En esta sección se presentan cinco sistemas, tres con origen en el centro geométrico de la tierra y dos con origen en el centro de masa de la nave.

2.2.1. Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra (SRIT)

Este es un marco de referencia para la navegación terrestre; se define fijo en el espacio, lo cual implica que se trata de un marco no acelerado, en el cual las leyes de Newton son aplicables. Este sistema se denota por **I**. El eje- X_i apunta hacia el punto donde el plano de la órbita terrestre hacia el Sol cruza el Ecuador de sur a norte, el eje- Z_i apunta hacia el polo norte y el eje- Y_i completa el sistema coordenado cartesiano siendo ortogonal a los otros dos ejes. Los diferentes movimientos del satélite pueden ser presentados en este marco de referencia (fig. 2.5).

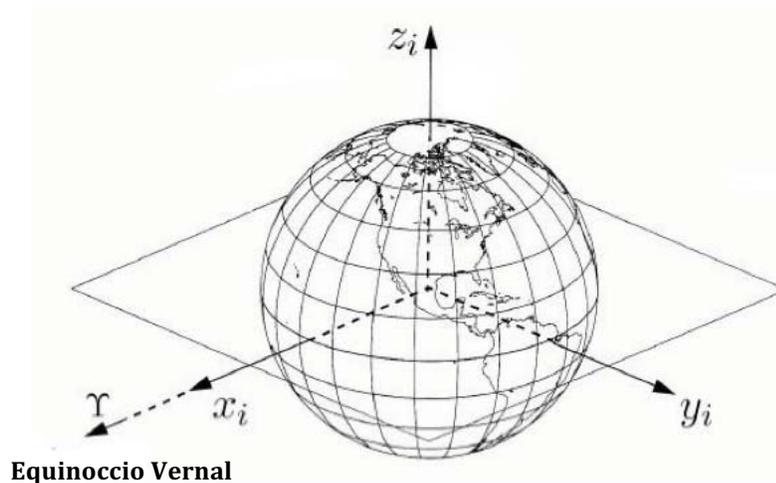


Fig. 2.5. Marco referencia inercial con centro en la Tierra (SRIT).

2.2.2. Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra (SRFT)

El origen de este sistema de referencia está localizado en el centro de la Tierra. Los ejes X y Y rotan alrededor del eje Z con respecto al Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra. Dicho movimiento es $\omega_e = 7.2921 \times 10^{-5} [rad/s]$, que es la velocidad de rotación de la Tierra. A este sistema lo denotamos como **E**. El eje Z_e apunta al polo norte, el eje X_e hacia la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador. Como en el caso anterior, para determinar la dirección del eje Y_e es ortogonal a X_e y Z_e (Figura 2.6).

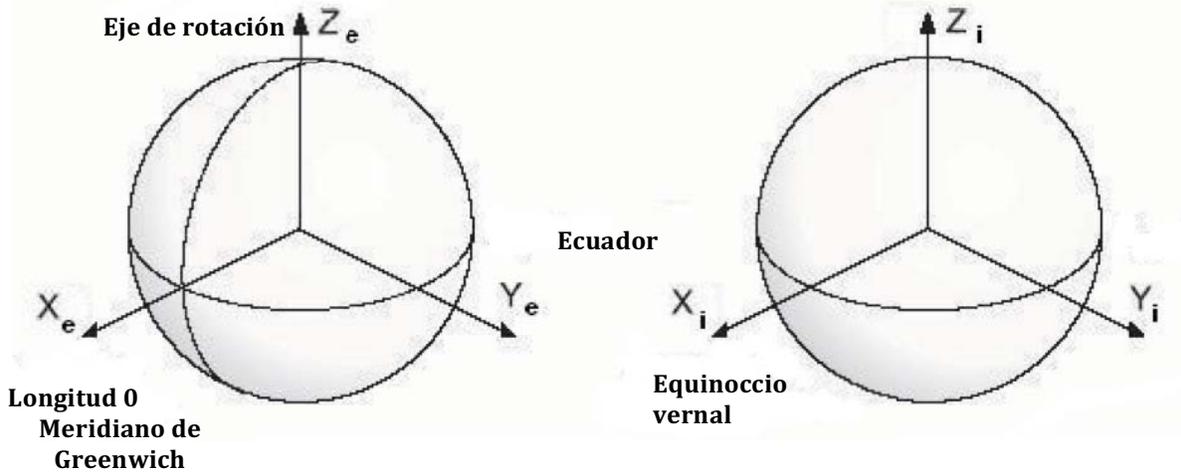


Fig. 2.6. Marco referencia SRFT en contraste con el SRIT.

2.2.3. Sistema de referencia orbital con centro en la Tierra (SROT)

Los elementos Keplerianos se establecen en este marco de referencia para describir la órbita del satélite. Este marco se denota como **OE**. El eje X_{OE} apunta al perigeo, Y_{OE} apunta hacia el eje semimenor y, el eje Z_{OE} es perpendicular al plano de la órbita. La velocidad angular del satélite al recorrer su órbita en este marco referencial es denotada como ω_{OE} y es relativa al sistema inercial SRIT.

2.2.4. Sistema de referencia orbital (SRO)

Este marco de referencia, denotado por **O**, establece su origen en el centro de masa del satélite, con el eje Z_0 que apunta hacia el centro de la Tierra, el eje X_0 es tangencial a la órbita y va en la dirección en la que viaja el satélite y, el eje Y_0 completa el sistema con la regla de la mano derecha (Figura 2.7).

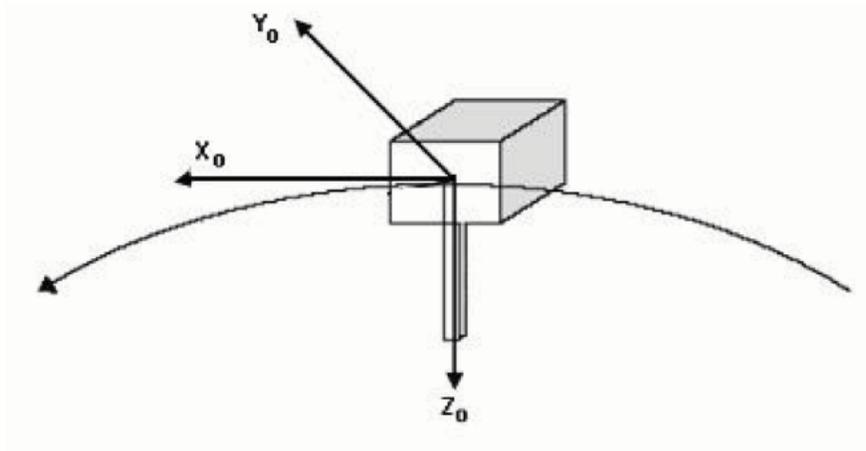


Fig. 2.7. Marco de referencia orbital, localizado en el centro de masa del satélite (SRO).

2.2.5. Sistema de referencia fijo al satélite (SRFS)

Para este sistema de coordenadas, denotado por **B**, se establece el origen en el centro de masa del satélite, por lo que es una referencia móvil fija al cuerpo de la nave. Los ejes coordenados Z_B , X_B y Y_B , se hacen coincidir con los ejes de inercia del aparato espacial (Figura 2.8). La orientación de la nave se determina con relación a la referencia orbital SO, mientras que la velocidad angular se expresa en el sistema fijo al satélite SRFS. El objetivo del sistema de control de orientación es que el Sistema de Referencia Fijo al Satélite y el Sistema de referencia orbital coincidan. La rotación que presentan los ejes de este sistema con respecto al SRO se conocen como ángulos de cabeceo (*Roll*), alabeo (*Pitch*) y guiñada (*Yaw*), que se representan por θ , ϕ y ψ , respectivamente. De igual manera a los ejes de este sistema se les conoce como X_B de cabeceo, Y_B de alabeo y Z_B de guiñada [16].

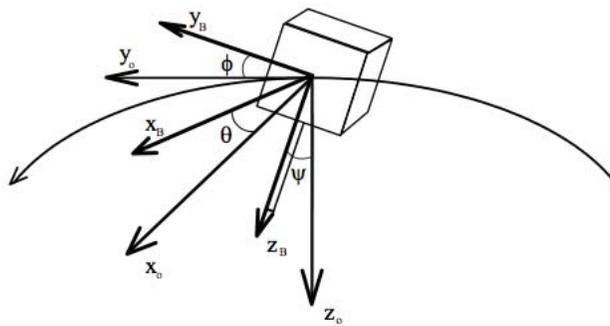


Fig. 2.8. Sistemas de referencia orbital (SRO) y fijo al satélite (SRFS).

2.3. Representación de la orientación

La orientación del satélite es referida entre los distintos Sistema de coordenadas con el fin de obtener el dato del ángulo de rotación, es decir, la orientación, a partir de la velocidad angular en la referencia fija al satélite, por lo anterior, se requiere un método de conversión entre sistemas de referencia para representar correctamente el vector velocidad. La transformación del ángulo de Euler es uno de los métodos que se utilizan frecuentemente en estos casos, porque es simple y confiable aunque da lugar a que ocurran singularidades en la transformación de coordenadas. Para evitar dichas singularidades es usado el método que representa la orientación en *Cuaterniones*, que además, incrementa la velocidad de los cálculos, un aspecto crítico para el éxito del sistema control de orientación [16].

2.3.1. Representación de la orientación con ángulos de Euler

Euler propuso que cualquier rotación de un marco de referencia con respecto a otro, puede ser visualizada como una secuencia de tres rotaciones simples alrededor de los vectores base. A continuación se enuncia el teorema de Euler:

Teorema de Euler: *El movimiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo, es la rotación alrededor de un eje fijo de dicho cuerpo [17].*

La transformación de ángulos de Euler (ver Figura 2.9) se presenta usando los ángulos de cabeceo θ , de alabeo ϕ y de guiñada ψ , descritos anteriormente. Estos parámetros ayudan en la determinación de la orientación del satélite relativa al Sistema de referencia orbital. El ángulo de cabeceo es el ángulo de rotación θ alrededor del eje X_0 , el ángulo de alabeo ϕ es el correspondiente a la rotación alrededor del eje Y_0 , y ψ es el ángulo de rotación alrededor del eje Z_0 . Como se comentaba anteriormente, el problema principal en el uso de ángulos de Euler es la existencia de singularidades. Para evitar lo anterior, se recurre al uso de los llamados Cuaterniones [16].

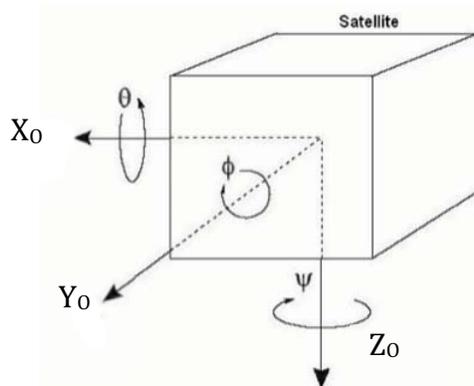


Fig. 2.9. Ángulos de Euler [17].

2.3.2. Representación en Cuaterniones

Los Cuaterniones son otra forma de representar la orientación del satélite. Este ente matemático fue descrito por primera vez por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton en 1843 [17].

Los Cuaterniones o *parámetros simétricos de Euler* son usados para resolver el problema de las singularidades en la representación de la orientación. La definición del cuaternión unitario surge de la conclusión hecha por Euler y Hamilton de que la rotación de los sistemas coordenados puede realizarse únicamente con un vector unitario, $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ como eje de rotación y un ángulo de rotación θ .

Entonces, cada cuaternión \mathbf{q} , es un número complejo de cuatro dimensiones, con una parte real η , y tres partes imaginarias, ε , perpendiculares entre sí, y que se definen de la siguiente manera [8] [16][17]:

$$\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{ec. 2.3}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T = \lambda \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad \lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T \quad \text{ec. 2.4}$$

$$\mathbf{q} = [\eta \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T \quad ec. 2.5$$

donde θ es la rotación alrededor del vector unitario λ , como se comentó anteriormente. Los Cuaterniones unitarios satisfacen la condición $\mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$, esto significa que:

$$\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1 \quad ec. 2.6$$

2.3.3. Matriz de rotación

La matriz de rotación puede funcionar, ya sea como una transformación de un vector representado en un sistema de coordenadas a otro sistema, como una rotación de un vector en un mismo sistema de referencia, y finalmente, como una descripción de la orientación mutua entre dos marcos de referencia.

La matriz de rotación \mathbf{R} del sistema de coordenadas \mathbf{a} al sistema \mathbf{b} se denota por R_a^b . La rotación de un vector se escribe de la siguiente manera:

$$x^{hacia} = R_{desde}^{hacia} x^{desde} \quad ec. 2.7$$

Una forma de representar a la matriz de rotación es por medio de los ángulos de Euler (*Matriz de rotación para ángulos de Euler*), relacionando cada ángulo de rotación con el eje correspondiente, como se indica en la ecuación 2.7 donde R_{desde}^{hacia} esta dada por R_θ^λ , y que es una rotación de θ alrededor del eje λ , como se indica en la ecuación 2.8:

$$R_\theta^\lambda = I + S(\lambda) \sin(\theta) + (1 - \cos(\theta)) S^2(\lambda) \quad ec. 2.8$$

Donde S es el operador anti-simétrico que está definido en la ecuación 2.9:

$$S(\lambda) = -S(\lambda)^T = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \quad ec. 2.9$$

la matriz de rotación también cumple con la siguiente condición:

$$R_a^b = (R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T \quad ec. 2.10$$

$$R_a^b \cdot (R_a^b)^T = \mathbf{I}$$

de esta manera las rotaciones simples mediante ángulos de Euler, están definidas por las siguientes ecuaciones:

$$R_X(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad ec. 2.11$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad ec. 2.12$$

$$R_Z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ec. 2.13$$

La matriz de rotación en Cuaterniones es la representación que se utilizará en este trabajo y está definida por la ecuación 2.14 ([8][32]), que se desarrollará más adelante:

$$R_\varepsilon^\eta = I_{3 \times 3} + 2\eta S(\varepsilon) + 2S^2(\varepsilon) \quad ec. 2.14$$

2.4. Transformaciones entre sistemas de referencia

A continuación se presentan algunas transformaciones o rotaciones entre sistemas de referencia utilizados para determinar la orientación del satélite.

2.4.1. Transformación del Sistema de referencia orbital con centro en la Tierra al Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra y al Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra

La transformación de rotación entre dichos marcos de referencia se realiza mediante el uso del estimador de órbita. Las rotaciones se muestran en las ecuaciones 2.15 y 2.16 [16]:

$$R_{OE}^I = R_Z(-\Omega)R_x(-i)R_Z(-\omega) \quad ec. 2.15$$

$$R_{OE}^E = R_Z(-\Omega + \theta)R_x(-i)R_Z(\omega) \quad ec. 2.16$$

en donde Ω es la ascensión recta del nodo de elevación, i es la inclinación de la órbita y ω es la elevación del meridiano cero (ver Figura 2.4).

2.4.2. Transformación del Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra al Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra

Esta es una rotación alrededor de los ejes coincidentes Z_I y Z_E , igual al ángulo $\alpha = \omega_e t$, donde ω_e es la velocidad de rotación de la Tierra, y t es el tiempo que transcurre hasta que los sistemas Sistema de referencia fijo con centro en la Tierra y el Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra están alineados. La rotación se describe con la ecuación 2.17 [16]:

$$R_E^I = R_{ZI}^\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ec. 2.17$$

2.4.3. Transformación del Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra al Sistema de referencia orbital

El marco referencial orbital se rota alrededor del eje y_1 con un ángulo $\beta = \beta_0 + \omega_0 t$, donde ω_0 es la velocidad de rotación del satélite, β_0 es la latitud y t es el tiempo desde que se pasó por la latitud 0° . La rotación en este caso está definida por la ecuación 2.18:

$$R^{Y_I}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.18}$$

De acuerdo a la relación que existe entre estos dos sistemas de coordenadas, se puede obtener una rotación alrededor del eje X_1 mediante la ecuación 2.19 [16]:

$$R^{X_I}_\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.19}$$

combinando la ecuación anterior con la 2.21, que se presenta más adelante, tenemos que la rotación total que nos permite transformar un vector en el Sistema de referencia inercial con centro en la Tierra al Sistema de referencia orbital queda definida por la ec. 2.20[16]:

$$R_I^O = R^{X_I}_\pi R^{Y_I}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.20}$$

en donde β es la latitud del satélite.

2.4.4. Transformación del Sistema de referencia orbital al Sistema de referencia fijo al satélite

La orientación del satélite puede ser determinada al calcular la matriz de rotación entre los sistemas Sistema de referencia orbital y el Sistema de referencia fijo al satélite, es decir, la matriz R_O^B . Una forma de obtener dicha matriz es a través de las ecuaciones 2.21 y 2.22, que corresponden a la matriz de rotación en Cuaterniones[16]:

$$R_O^B = I + 2\eta S(\varepsilon) + 2 S^2(\varepsilon) \quad \text{ec. 2.21}$$

$$R_O^B = (R_B^O)^T = \begin{bmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{bmatrix} \quad \text{ec. 2.22}$$

otra forma de representar la matriz de rotación se muestra en la ecuación 2.23[16]:

$$R_O^B = [c_1^B \quad c_2^B \quad c_3^B] \quad \text{ec. 2.23}$$

donde $c_i^B = [c_{ix}^B \ c_{iy}^B \ c_{iz}^B]^T$ son los vectores columna (cosenos directores), que representan las proyecciones de \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 y \mathbf{z}_0 en el Sistema de referencia fijo al satélite. Por ejemplo, $c_3^B = [0 \ 0 \ \pm 1]^T$ significa que los eje \mathbf{z}_0 y \mathbf{z}_B se encuentran alineados.

2.5. Matriz de inercia

Se define a la matriz de inercia $I_O \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ como una matriz simétrica cuyos elementos se forman a partir de los momentos de inercia de tres ejes perpendiculares y tres productos de inercia, alrededor del origen, de acuerdo a la ecuación 2.24 [16]:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad ec. 2.24$$

donde los elementos I_x , I_y e I_z se obtienen a partir de las siguientes expresiones [16]:

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho_m dV; \quad I_{xy} = I_{yx} = \int_V xy \rho_m dV \quad ec. 2.25$$

$$I_y = \int_V (x^2 + z^2) \rho_m dV; \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V xz \rho_m dV \quad ec. 2.26$$

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho_m dV; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V yz \rho_m dV \quad ec. 2.27$$

Dado el caso común a la mayoría de los satélites artificiales en el cual los ejes de inercia y los ejes del sistema de referencia fijo al satélite se hacen coincidir, la matriz de inercia se reduce a la ec. 2.28:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad ec. 2.28$$

En este capítulo se han presentado los parámetros requeridos para la representación de la orientación, y que son necesarios para elaborar el modelo matemático del satélite, mismo que se desarrollará en el siguiente capítulo.

3. Modelo matemático del satélite

El modelo matemático del satélite esta formado por las ecuaciones que describen su movimiento. Dichas ecuaciones se pueden estudiar a partir de la cinemática y la dinámica, en donde la primera estudiará el movimiento del satélite, al relacionar su velocidad angular con la orientación, sin atender las causas que producen dicho movimiento, mientras que con la dinámica analizaremos el comportamiento del satélite atendiendo las causas que lo producen, al relacionar fuerzas y pares con velocidades y aceleraciones.

3.1. Dinámica del satélite

El satélite es modelado como un cuerpo rígido y el modelo matemático de la dinámica es obtenido mediante la formulación de Newton–Euler [13][17]. En dicha formulación se establece que el momento angular cambia de forma directa con el par aplicado.

Para obtener el modelo mencionado, se realiza el siguiente proceso. Dado un momento p y el vector de posición r , el momento angular h esta dado por la ecuación 3.1:

$$h = r \times p \quad ec. 3.1$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton podemos obtener la derivada del momento angular, considerando además que $v \times v = 0$ y que $p = mv$. Esto se muestra en la ecuación 3.2:

$$\frac{\delta}{\delta t} h = \frac{\delta}{\delta t} r \times p + r \times \frac{\delta}{\delta t} p = v \times mv + r \times ma = r \times F = \tau \quad ec. 3.2$$

en la ecuación anterior, v es el vector de velocidad, m es la masa, F es la fuerza y τ es el vector que reúne a todos los pares presentes en el satélite. El momento angular puede ser definido de manera alternativa por medio del momento de inercia I , y la velocidad angular del satélite ω , con la ecuación 3.3:

$$h = I\omega \quad ec. 3.3$$

La ecuación anterior establece el momento angular para el Sistema de Referencia Inercial con centro en la Tierra, aunque se puede expresar en los diferentes marcos de referencia, mediante el uso de la matriz de rotación. Las ecuaciones 3.4 a 3.8 son obtenidas con este método:

$$h^B = I^B \omega_{BI}^B \quad ec. 3.4$$

Modelo Matemático del satélite

$$R_B^I h^B = R_B^I I^B \omega_{BI}^B \quad ec. 3.5$$

$$h^I = R_B^I I^B \omega_{BI}^B \quad ec. 3.6$$

$$h^I = R_B^I I^B R_I^B \omega_{BI}^I \quad ec. 3.7$$

$$I^I = R_B^I I^B R_I^B \quad ec. 3.8$$

Si se deriva la ecuación 3.6 y se le aplica la derivada con respecto al tiempo de la matriz de rotación, se obtiene la ecuación 3.9:

$$\dot{h}^I = \dot{R}_B^I I^B \omega_{BI}^B + R_B^I I^B \dot{\omega}_{BI}^B = S(\omega_{BI}^B) R_B^I I^B \omega_{BI}^B + R_B^I I^B \dot{\omega}_{BI}^B \quad ec. 3.9$$

En el sistema de referencia fijo al satélite, se puede expresar lo anterior pre-multiplicando ambos lados de la ecuación por R_I^B , como se muestra en la ec. 3.10:

$$R_I^B \dot{h}^I = R_I^B S(\omega_{BI}^B) R_B^I I^B \omega_{BI}^B + R_I^B R_B^I I^B \dot{\omega}_{BI}^B = R_I^B S(\omega_{BI}^B) R_B^I I^B \omega_{BI}^B + I^B \dot{\omega}_{BI}^B \quad ec. 3.10$$

Al combinar las ecuaciones 3.10 y 3.2 se obtiene lo siguiente:

$$\dot{h}^B = S(R_I^B \omega_{BI}^B) I^B \omega_{BI}^B + I^B \dot{\omega}_{BI}^B = \tau^B \quad ec. 3.11$$

De esta manera, a partir de la ecuación 3.11 se obtienen el modelo matemático general de la dinámica del satélite, expresado en la ecuación 3.12:

$$I^B \dot{\omega}_{BI}^B + \omega_{BI}^B \times (I^B \omega_{BI}^B) = \tau^B = \sum_k \tau_k^B \quad ec. 3.12$$

en las ecuaciones anteriores se tiene que:

I^B : es el momento de inercia,

ω_{BI}^B : es la velocidad angular del sistema de referencia fijo al cuerpo con respecto al marco de referencia inercial,

τ_k^B : es el vector de pares que actúan sobre el satélite en las coordenadas del Sistema de Referencia Fijo al Satélite.

El par τ_k^B es el resultado de la suma de los pares internos del satélite, los pares de control y de los pares perturbadores del medio ambiente espacial. Dado que se considerará al satélite como un cuerpo rígido, los pares internos no son tomados en cuenta para efectos de la simulación de los algoritmos de control de orientación. Los pares externos τ_e pueden ser separados en dos grupos, uno que aglutina a los pares perturbadores y otro para los de control. Los pares perturbadores son causados por efectos del ambiente espacial como son: el gradiente gravitacional, la radiación solar, el arrastre aerodinámico, etc. Los pares de

control son aquellos que se aplican deliberadamente por dispositivos de control o actuadores, tales como ruedas inerciales, bobinas magnéticas, etc. De manera general, la suma de los pares de: gradiente gravitacional τ_r^B , el par por radiación solar que actúa sobre el cuerpo del satélite τ_{solar}^B , el arrastre aerodinámico τ_{aero}^B , el par provocado por las bobinas magnéticas τ_m^B y del par generado por las ruedas inerciales τ_r^B , es considerada como el par total para las ecuaciones anteriores:

$$\tau^B = \tau_m^B + \tau_r^B + \tau_g^B + \tau_{aero}^B + \tau_{solar}^B \quad ec. 3.13$$

En las simulaciones de los algoritmos de control de orientación que se presentan en este trabajo se toman en cuenta los pares externos mencionados en la ec. 3.13, descritos más adelante.

La ecuación 3.12 puede ser expresada de otra forma, si se le aplica el operador anti simétrico $S(\cdot)$, tal como se presenta en la ecuación 3.14:

$$I^B \dot{\omega}_{BI}^B + S(\omega_{BI}^B) I^B \omega_{BI}^B = \tau^B \quad ec. 3.14.$$

La velocidad angular del satélite ω_{BI}^B relativa al marco de referencia inercial se expresa en el sistema fijo al satélite como la suma de dos velocidades angulares:

$$\omega_{BI}^B = \omega_{BO}^B + \omega_{OI}^B = \omega_{BO}^B + R_O^B \omega_{OI}^O \quad ec. 3.15$$

donde $\omega_{OI}^O = [0 \quad -\omega_O \quad 0]^T$ es el dato de la velocidad angular del marco orbital relativo al sistema de referencia inercial con centro en la Tierra, expresado en el marco orbital. Con lo anterior se obtiene la ecuación siguiente:

$$\omega_{BI}^B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \omega_{BO}^B - \omega_O c_2, \quad \text{con } c_2 = \begin{bmatrix} 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \eta) \\ 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) \\ 2(\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \eta) \end{bmatrix} \quad ec. 3.16$$

3.2. Cinemática del satélite

La orientación del satélite puede ser descrita a través de la cinemática, que es obtenida al integrar la ecuación que nos representa la velocidad angular.

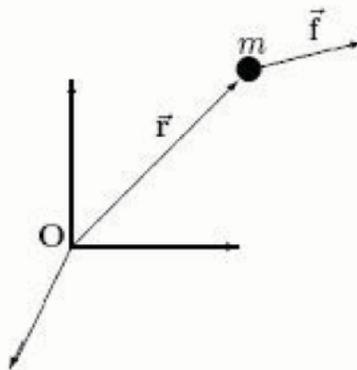


Fig. 3.1. Movimiento de traslación.

Modelo Matemático del satélite

El movimiento de traslación de una partícula de masa m , como se muestra en la Figura 3.1, se puede obtener como resultado de la segunda ley de Newton, como se explica enseguida:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F \quad \text{ec. 3.17}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} \quad \text{ec. 3.18}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}} = F \quad \text{ec. 3.19}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad \text{ec. 3.20}$$

en las ecuaciones 3.17 a 3.20, \mathbf{r} es el vector de posición de la partícula, relativo al origen inercial O , \mathbf{p} es el momento de la partícula y F es la fuerza que actúa sobre la misma. Al vector $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m$ se le conoce como la ecuación diferencial para el movimiento de traslación y describe como cambia la posición de la partícula para una velocidad específica.

En cuanto al movimiento rotacional, se presentan las ecuaciones diferenciales correspondientes, que implican el uso de Cuaterniones y que se describen de manera más detallada en la referencia [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\omega}_{BO}^B \quad \text{ec. 3.21}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})]\boldsymbol{\omega}_{BO}^B \quad \text{ec. 3.22}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede formar el Cuaternion de la ecuación 3.23, con el cual se describe la cinemática del satélite:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}^T \\ \boldsymbol{\eta}\mathbf{I}_{3\times 3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{BO}^B \quad \text{ec. 3.23}$$

Cabe comentar que la matriz que se obtiene con el operador anti-simétrico $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$, está dada por la ecuación 3.24:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ec. 3.24}$$

3.3. Modelos matemáticos de los pares perturbadores en el medio ambiente espacial

El medio ambiente espacial

Los satélites en órbita se encuentran sujetos a distintas fuerzas con las cuales interactúan y que producen perturbaciones en la orientación y en la órbita de la nave. Las perturbaciones son las desviaciones que presenta la orientación de un satélite con respecto a su referencia establecida y pueden ser clasificadas de acuerdo a causas específicas, por ejemplo, las debidas a la distribución desigual de la masa de la Tierra, al arrastre atmosférico, o a la fuerza de atracción de la luna u otros cuerpos.

Los efectos más importantes que pueden modificar la orientación del satélite pueden dividirse en dos clases:

1. Fuerzas gravitacionales
2. Fuerzas no Gravitacionales

Los efectos de estas fuerzas pueden dominar el movimiento de la nave espacial, con la capacidad de llevarla a reingresar a la atmósfera. El efecto del gradiente gravitacional debido a la distribución no esférica de la masa de la Tierra provee la mayor perturbación con respecto a la posición orbital, para la mayoría de los satélites de altitud intermedia, es decir, aquellos en los cuales la atmosfera juega un rol importante y donde los efectos gravitacionales de la Luna y el Sol se vuelven significativos. Los efectos del arrastre atmosférico dominan las fuerzas perturbadoras a altitudes debajo de los 400 km, y producen pares significativos a largo plazo, hasta una altitud de 1000 km. La importancia de las perturbaciones dependerá de la construcción de la nave, los detalles de la órbita e incluso del nivel de la actividad solar [35].

El mayor efecto resultante de la distribución no homogénea de la masa de la Tierra, debido a su forma aplanada o achatada, es que cambia el potencial gravitacional en 0.1% en la vecindad de la misma. La relación entre el potencial gravitacional de la Luna y el de la Tierra es de 0,02% cerca de la superficie de la Tierra. Conforme la altitud del satélite se incrementa, el efecto de la forma de la Tierra disminuye y el efecto de la Luna aumenta, la magnitud de los efectos del potencial gravitacional de ambos es el mismo a una altitud de 8000 km. Las perturbaciones gravitacionales de la Luna y del Sol son por lo general despreciables a altitudes cercanas a los 700 km.

Cuando se consideran los pares perturbadores, los elementos de órbita varían con el tiempo. Para predecir la órbita se debe determinar dicha variación haciendo uso de técnicas generales o especiales, para el cálculo de las fuerzas perturbadoras.

Las técnicas especiales utilizan métodos numéricos directos, al integrar las ecuaciones de movimiento. El más comúnmente utilizado es el método de Corwell [22], en el cual la aceleración es integrada directamente para obtener la velocidad y ésta a su vez es integrada para obtener la posición. Las técnicas generales resuelven analíticamente algunos de los aspectos del movimiento de los satélites sujetos a pares perturbadores.

Características de la atmósfera terrestre

En la Figura 3.2 se muestra la distribución media de temperaturas de las distintas capas de la atmósfera, para cada uno de los diferentes perfiles. La elevada temperatura entre la tropopausa y la mesopausa es debida a la absorción de luz ultravioleta por parte del ozono, y el incremento en la temperatura sobre los 100 km es causado por la gran absorción de luz ultravioleta por el nitrógeno y el oxígeno. La conductividad térmica forma una región isotérmica llamada exósfera, en la cual se tiene la temperatura exosférica T_{∞} .

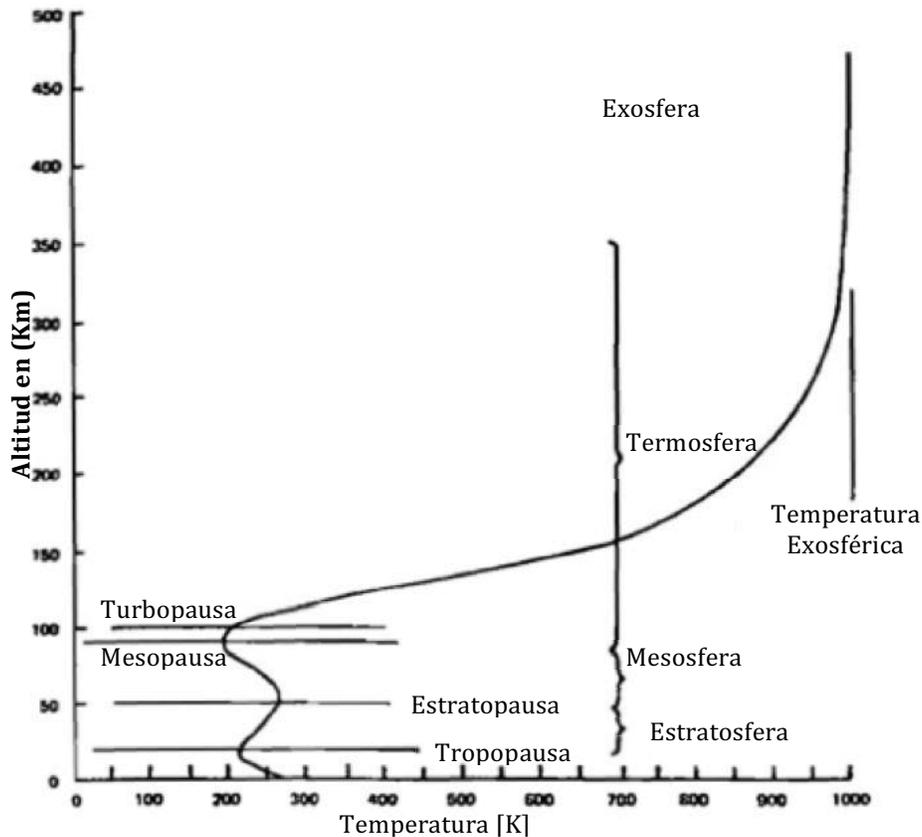


Fig. 3.2. Temperatura media de la atmósfera como función de la altitud [22].

La densidad total de la atmósfera terrestre es un dato de gran importancia para la dinámica de las naves espaciales. En la Figura 3.3 se muestra el perfil de la densidad media de la atmósfera entre los 25 y los 1000 km de altitud.

En la tabla 3.1 se muestra la composición de la misma debajo de la turbopausa.

Tabla 3.1 Composición química de la atmósfera hasta la turbopausa.

Componente	Fracción por volumen
Nitrógeno molecular	0.78084
Oxígeno molecular	0.209476
Argón	0.00934
Dióxido de carbono	0.000314
Helio	0.00000524
Kriptón	0.00000114

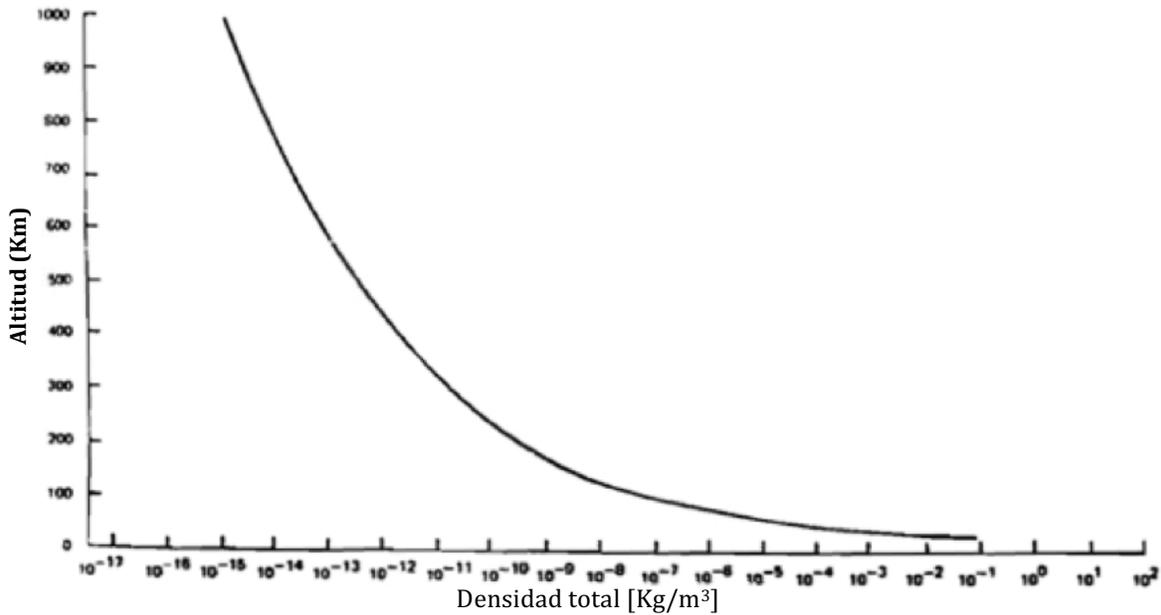


Fig. 3.3. Densidad media de la atmósfera como función de la altitud [35].

Las fuerzas a las que se enfrenta un vehículo espacial depende del tipo de flujo que encuentra a su paso, que puede ser caracterizado por el número de Knudsen [22]. Este parámetro describe el recorrido promedio libre de las moléculas con respecto a la escala de longitud característica del satélite. En general, la transferencia de calor molecular se produce con un número de Knudsen mayor a 10.

Modelos de la Alta atmósfera

Los modelos de la atmósfera se basan en información teórica y empírica. Los modelos más completos son una combinación de ambos tipos. Para los fines del control de orientación se puede tomar como referencia el modelo CIRA-86 (*COSPAR International Reference Atmosphere*) [38], desarrollado por el Comité de Investigación Espacial (COSPAR; *Committee on Space Research*). Dicha información incluye modelos empíricos de la temperatura y de la densidad atmosférica, desde cero hasta los 2000 km. Para altitudes de 0 a 120 km, este modelo consiste en tablas de promedios mensuales de los valores de temperatura y viento, para un rango de latitud entre 80 N y 80 S. Los datos proporcionados corresponden a dos conjuntos de archivos, uno con información

Modelo Matemático del satélite

de la presión por coordenadas, que incluye las alturas geopotenciales y el otro, con la altura por coordenadas, donde se anexan valores de presión. Estas tablas fueron generadas por Fleming et. Al. (1988), con información de varias compilaciones de datos, que incluyen mediciones desde Tierra y desde satélites. Con base en este modelo se pueden reproducir, de manera muy precisa, una gran parte de los rasgos característicos de la atmósfera, como el viento ecuatorial y la estructura general de la tropopausa, estratopausa y mesopausa; de acuerdo a lo cual se mantiene un balance hidrostático y de viento térmico para todos los niveles de altitud.

Otro modelo de la atmósfera que se toma como referencia es el que elabora el equipo del CCMC (*Community Coordinated Modeling Center*) del Centro de vuelo espacial Goddard (*Goddard Space Flight Center*)[39]. El modelo elaborado por esta comunidad de científicos es el llamado MSIS -1986 (*Mass-Spectrometer-Incoherent-Scatter model*), y cuenta con información de la temperatura y densidad de la atmósfera superior (sobre los 100 km). A partir de la información proporcionada de altitud, latitud y longitud geodésicas, tiempo solar aparente, tiempo universal (UTC), fecha y flujo solar del día anterior, el MSIS- 86 entrega los parámetros numéricos calculados de: densidad de He, O, N₂, O₂, Ar, H y N, densidad de masa total, temperatura neutral y temperatura exosférica.

Cabe señalar que para la termosfera (por encima de los 100 km) los datos de estos dos modelos son idénticos. El modelo para altitudes debajo de los 110 km corresponde al trabajo de Groves G. V. (1970), y el modelo sobre los 90 km, que es la zona de interés particular para los vehículos espaciales, fue desarrollado por Jacchia L. G. (1997), a esta parte del modelo se le llama **J71**.

En el modelo J71, a los 90 km de altitud, la atmósfera tiene temperatura y densidad constantes. Entre los 90 y 105 km se tienen perfiles analíticos para calcular las características de la atmósfera. La densidad es determinada mediante la integración de las ecuaciones de difusión estática, desde el límite inferior a 90 km hasta los 2500 km. Las variaciones en la atmósfera son introducidas principalmente por la temperatura exosférica. Este modelo fue construido para minimizar las diferencias entre las predicciones de densidad del modelo y las densidades determinadas a partir del análisis de los efectos del arrastre atmosférico sobre los satélites en órbita.

Las primeras versiones del modelo de Jacchia fueron usadas como base para algunos modelos analíticos, como el de Roberts C. E. (1971), y el de Weidner, D. K. (1969). El último de estos modelos es el conocido como el modelo monográfico de la NASA (*NASA monograph model*) [35].

3.3.1. Perturbaciones ocasionadas por el arrastre atmosférico

A continuación se detallan las consideraciones generales para la elaboración del modelo que permitirá incluir los efectos del arrastre atmosférico en la orientación del satélite.

La principal fuerza no gravitacional que actúa sobre los satélites en órbitas bajas (200 a 2000 km de altitud) es el arrastre atmosférico[13]. Dicha fuerza actúa en la dirección opuesta al vector velocidad del satélite, con lo que resta energía a la órbita. Esta reducción de energía provoca que la órbita disminuya, con lo que el arrastre se incrementa. Eventualmente, la altitud de la órbita es tan baja que el satélite reingresa a la atmósfera[13], aunque en nuestro caso, esta situación no ha sido considerada, solamente el cambio de orientación que produce en el satélite .

En las altitudes para las cuales la órbita no sufre un efecto inmediato debido al arrastre aerodinámico, la trayectoria media con flujo libre molecular, denotada por λ , es grande, comparada con las dimensiones típicas de los satélites. Como se muestra en la Figura 3.4. La trayectoria media con flujo libre molecular es la distancia promedio que recorre una molécula antes de chocar con otra molécula. Incluso para las órbitas más bajas posibles la trayectoria media libre es aproximadamente de un kilómetro. Las moléculas que se acercan a la superficie de la nave son por tanto, ignoradas en contraste con aquellas que se encuentran cerca de dicha superficie. Lo anterior lleva a un caso en el cual las moléculas que llegan a la superficie de la nave y aquellas que se alejan de la misma son tratadas por separado, a lo que se llama *modelo de flujo libre molecular*, que se basa en la teoría cinética de los gases [13].

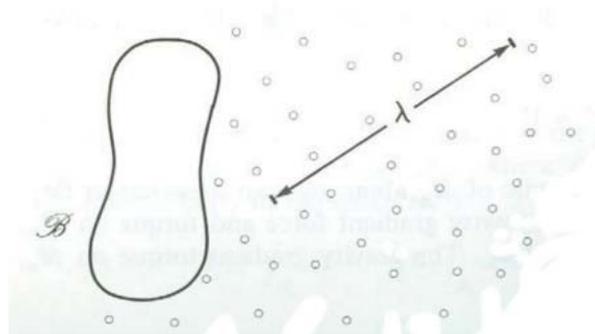


Fig. 3.4 Satélite en flujo libre molecular, trayectoria libre media [13].

Para los cálculos del par aerodinámico el interés principal está en conocer la transferencia de momento de las moléculas atmosféricas hacia la superficie del vehículo. La transferencia de momento ocurre cuando algunas moléculas llegan a la superficie o cuando la dejan. La suposición del flujo libre molecular permite realizar los cálculos para los dos casos posibles, sumando sus efectos. Otra consideración que nos permite la teoría del flujo libre molecular, es tratar superficies con forma geométrica complicada como si fueran distintas superficies simples.

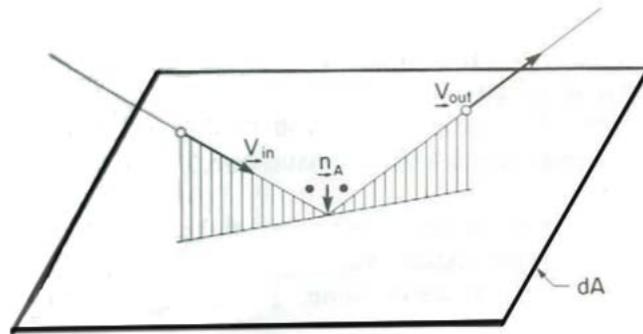
Considerando un flujo libre molecular, se establecen dos formas para la transferencia de momento molecular hacia la superficie del satélite:

- a. Reflexión especular
- b. Reflexión difusa

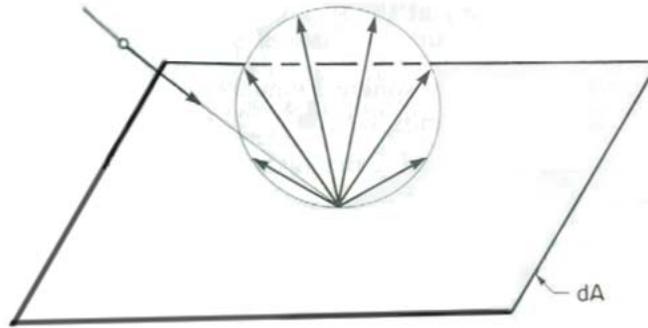
En la reflexión especular cada molécula de la atmósfera rebota en la superficie de la nave sin existir intercambio de energía. La reflexión especular ocurre con pocas

Modelo Matemático del satélite

moléculas incidentes, lo que sucede con mayor frecuencia es el acomodamiento parcial de dichas moléculas en la superficie. El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, y los vectores de velocidad de entrada, de salida y la superficie normal se encuentran en el mismo plano, ver fig. 3.5.a. Con lo anterior, la transferencia de momento es normal a la superficie.



a) reflexión especular



b) reflexión difusa

Fig. 3.5. Tipos de reflexión en la superficie de un satélite. a) especular, b) difusa [13].

En el modelo de reflexión difusa, las moléculas incidentes se acomodan totalmente en la superficie, pierden toda memoria de la dirección y energía que poseían; se mezclan con otras moléculas que se encuentran en la misma superficie y eventualmente la dejan con una energía cinética, que se caracteriza por la temperatura de la superficie y la dirección determinada por una distribución coseno.

Para simplificar los cálculos del par aerodinámico se plantean las siguientes cuatro suposiciones:

- i. El momento de las moléculas que llegan a la superficie es cedido totalmente a la superficie.
- ii. El movimiento térmico medio de la atmósfera es mucho más pequeño que la velocidad del satélite a través de la misma.

- iii. La transferencia de momento de las moléculas que dejan la superficie es despreciable.
- iv. Para vehículos que giran, el movimiento relativo entre los elementos de la superficie es mucho menor que la velocidad del centro de masa.

Se establece a la velocidad de la atmósfera local $V_{\rightarrow R}$ relativa al elemento de superficie dA . La suposición ii permite considerar que las partículas que chocan con el elemento de superficie, es un haz de moléculas colimado, con densidad ρ_a y velocidad $V_{\rightarrow R}$.

Como se muestra en la Figura 3.6 se tiene que $\hat{V}_{\rightarrow R} = V_{\rightarrow R}/V_R$, y con el vector unitario normal a la superficie en dA como $\mathbf{n}_{\rightarrow A}$. Además se tiene que $d\mathbf{A} \triangleq \mathbf{n}_{\rightarrow A} dA$.

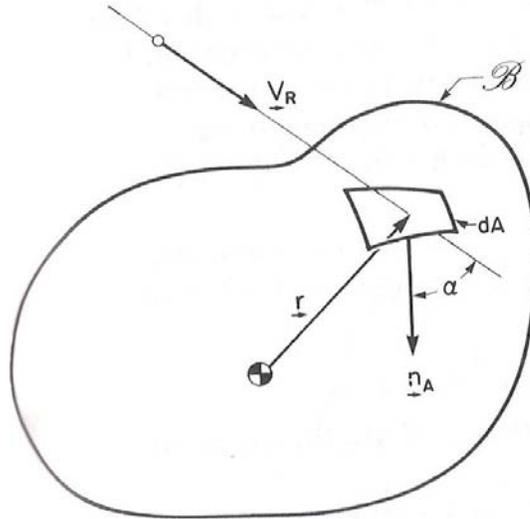


Fig. 3.6. Moléculas incidentes en un elemento de superficie [13].

El área proyectada normal a $\hat{V}_{\rightarrow R}$ es $dA \cos(\alpha)$, donde (ecuación 3.25):

$$\cos(\alpha) \triangleq \hat{V}_{\rightarrow R} \cdot \mathbf{n}_{\rightarrow A} \quad ec. 3.25$$

donde α es el ángulo de ataque. El momento producto del flujo de molecular a través del área $dA \cos(\alpha)$, esta dado por la fuerza que se imparte a dA cuando el momento es cedido, representada por la ecuación 3.26:

$$d\mathbf{f}_{\rightarrow} = \rho_a V_R^2 \cos(\alpha) \hat{V}_{\rightarrow R} dA \quad ec. 3.26$$

Cabe señalar que la ecuación 3.26 sólo es aplicable para $\cos(\alpha) \geq 0$; para $\cos(\alpha) < 0$ dA no es afectada por el flujo. En las partes de la superficie donde $\cos(\alpha) < 0$, la presión aerodinámica es cero.

Conociendo la fuerza aplicada en dA , se integra sobre la superficie del satélite para obtener la fuerza total y el par, como se muestra en las ecuaciones 3.27 y 3.28:

$$\mathbf{f}_{\rightarrow} = \oint \mathbf{H}(\cos(\alpha)) \rho_a V_R^2 \cos(\alpha) dA \hat{V}_{\rightarrow R} \quad ec. 3.27$$

$$\underline{\mathbf{g}}_c = \iint \mathbf{H}(\cos(\alpha)) \rho_a V_R^2 \cos(\alpha) \underline{\mathbf{r}} dA \times \underline{\widehat{\mathbf{V}}}_R \quad ec. 3.28$$

donde $\mathbf{H}(x)$ es la función *Heaviside* ($H=1$ para $x \geq 0$, y $H=0$ en cualquier otro caso) y \mathbf{r} es el vector que une a dA con el centro de masa O . De manera general, se considera a la densidad atmosférica ρ_a independiente de la posición; y a $V_{\rightarrow R}$ constante, a menos que el cuerpo se encuentre rotando con respecto a la atmósfera. Si consideramos el caso particular de un cuerpo β que no gira, se tiene que:

$$\underline{\mathbf{f}} = (\rho_a V_R^2 A_p) \underline{\widehat{\mathbf{V}}}_R \quad ec. 3.29$$

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_a = \underline{\mathbf{c}}_p \times \underline{\mathbf{f}} \quad ec. 3.30$$

donde:

$$A_p \triangleq \iint \mathbf{H}(\cos(\alpha)) \cos(\alpha) dA \quad ec. 3.31$$

$$A_p \underline{\mathbf{c}}_p \triangleq \iint \mathbf{H}(\cos(\alpha)) \cos(\alpha) \underline{\mathbf{r}} dA \quad ec. 3.32$$

Las integrales de superficie de las ecuaciones 3.31 y 3.32 dependen únicamente de la geometría de la misma y de la dirección del flujo; A_p es el área total proyectada que es afectada por el flujo y $\underline{\mathbf{c}}_p$ es el centro de presión. Tomando como referencia los coeficientes aerodinámicos convencionales, la ecuación 3.29 implica que $C_L=0$ y $C_D=2$. De la ecuación 3.30 se deduce que el par puede llevarse a cero al diseñar la superficie y distribuir la masa de tal manera que $\underline{\mathbf{c}}_p = 0$, algo que en la práctica es difícil de lograr.

Las ecuaciones anteriores están expresadas en coordenadas fijas al cuerpo del satélite (*SRFS*), con lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_{aero} = \rho_a V_R^2 A_p \underline{\mathbf{c}}_p \times \underline{\widehat{\mathbf{V}}}_R \quad ec. 3.33$$

donde $\underline{\widehat{\mathbf{V}}}_R = [c_1^a \quad c_2^a \quad c_3^a]$, en el cual c_i^a son los cosenos directores de $\underline{\widehat{\mathbf{V}}}_R$ con respecto al sistema de referencia fijo al satélite (es decir, la matriz de rotación).

Conforme lo establecido en [31], y en concordancia con los modelos vistos hasta el momento, el par aerodinámico para una orientación dada está en función del área efectiva de la superficie del satélite que se enfrenta al vector velocidad, por lo que,

tomar en cuenta esta perturbación requiere considerar la geometría de la nave, para calcular el par que experimenta el satélite a partir de sus características geométricas y la altitud de la órbita..

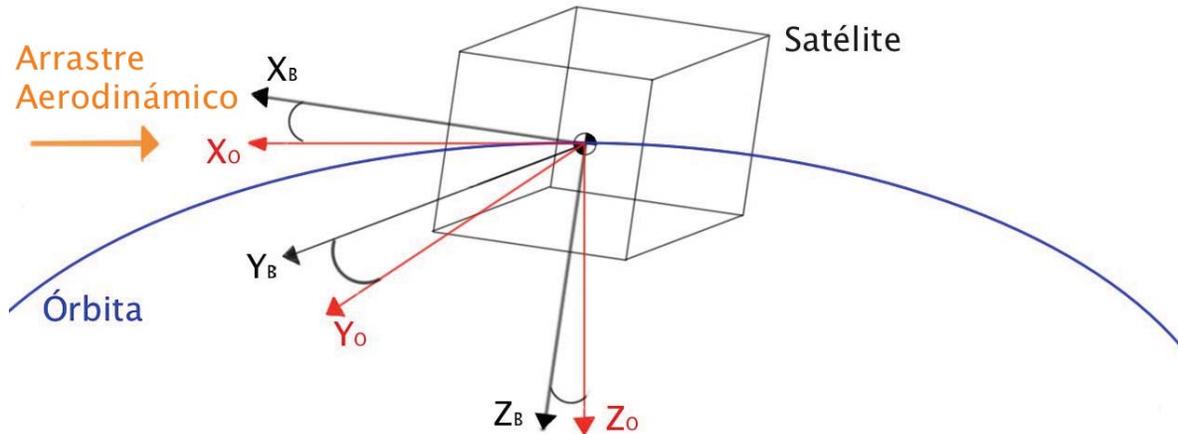


Fig. 3.7. El arrastre aerodinámico para el satélite en órbita.

El modelo matemático se desarrolla estableciendo que la fuerza aerodinámica causada por el arrastre atmosférico, tendrá su principal componente en el eje X_0 , como se muestra en la Figura 3.7, con lo que el vector de fuerza aerodinámica contará con proyecciones en los ejes Z_B y Y_B , al realizar el cambio de coordenadas. Se considera entonces, que la fuerza debida al arrastre aerodinámico se aplica en la dirección del vector velocidad del satélite, como se comentaba anteriormente. En el marco de referencia fijo al satélite, dicha fuerza se descompone en sus proyecciones sobre los ejes X_B , Y_B , y Z_B , al cambiar de sistema de referencia.

El modelo matemático del par producto del arrastre aerodinámico se describe por medio de la ecuación 3.34:

$$\tau_{aero} = m_e \times F_{aero}^O \tag{ec. 3.34}$$

Donde m_e es el vector que une el centro de presión con el centro de masa del satélite, como se muestra en la Figura 3.8:

De la ecuación anterior tenemos que:

$$F_{aero}^O = \begin{bmatrix} F_{aero_x}^O \\ F_{aero_y}^O \\ F_{aero_z}^O \end{bmatrix} = -R_0^B \begin{bmatrix} F_{aero}^B \cos(\varphi) \\ F_{aero}^B \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{ec. 3.35}$$

en donde:

$$F_{aero}^B = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \tag{ec. 3.36}$$

Modelo Matemático del satélite

R_0^B es la matriz de rotación del sistema fijo al satélite al sistema de referencia orbital. F_{aero}^B se considera constante para la simplificación de los cálculos.

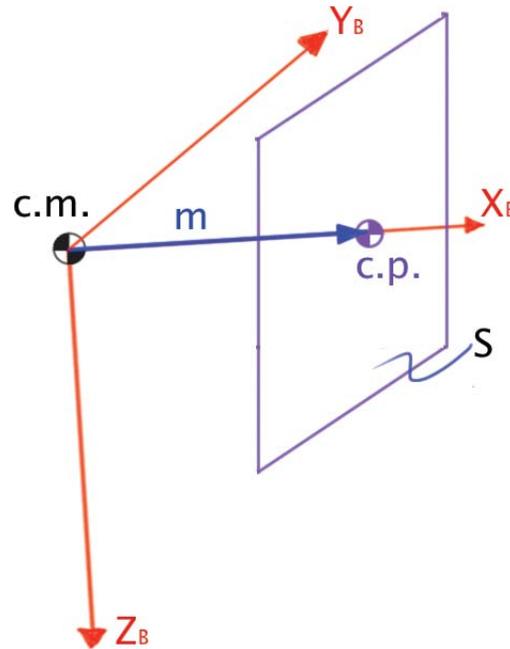


Fig. 3.8. Ubicación del centro de masa, el centro de presión y el vector m_e .

El vector \vec{m}_e depende de la orientación del satélite e implicará un cambio en la magnitud de las componentes del par aerodinámico, por lo que es calculado durante cada paso de la simulación.

3.3.2. Perturbaciones causadas por la radiación solar

La radiación solar son partículas emitidas por el Sol como resultado de su actividad normal. La radiación solar es una perturbación fluctuante y tiene un mayor efecto a grandes altitudes. La radiación solar causa variaciones periódicas en todos los elementos orbitales. Tiene un efecto mayor en objetos ligeros con una gran superficie expuesta. El área de la superficie del satélite expuesta al Sol, es determinante en el resultado de la aceleración causada por esta perturbación.

La intensidad de la radiación solar, varía con respecto al tiempo, esto dificulta la determinación de su energía y frecuencia. La mayoría de los análisis usan la constante de la radiación solar SF [25]:

$$SF = 1353 \text{ [W/m}^2\text{]} \quad \text{ec. 3.37}$$

La radiación incidente en la superficie del satélite produce una fuerza que resulta en un par, cuando dicha fuerza no es aplicada en el centro de masa de la nave (ver fig. 3.9).

La superficie del satélite está sujeta a la presión de la radiación solar, esto es, una fuerza por unidad de área igual al vector resultante de la diferencia entre el momento incidente y el reflejado, producido por el flujo. La radiación solar varía inversamente con el cuadrado de la distancia al sol. Los factores más significativos que determinan el par producto de la radiación solar sobre el satélite son:

- Intensidad y distribución espectral de la radiación incidente
- Geometría de la superficie y sus propiedades ópticas
- Orientación del vector de sol con respecto a la nave

La magnitud de la aceleración, a_R , en m/s^2 provocada por la presión de la radiación solar se describe con la ecuación 3.38 [22]:

$$a_R = \frac{(1 - K)p_S A}{m} [m/s^2] \quad \text{ec. 3.38}$$

donde A es el área transversal de la nave expuesta al sol, en m^2 , m es la masa del satélite en kg, y K es el factor de reflexión (*reflectividad*). $K=0$ para la absorción total; $K = 1$ para la reflexión especular, con incidencia en la normal; y $K = 0.4$ para reflexión difusa y $p_S = \frac{SF}{c} \approx 4.51 \times 10^{-6} [N/m^2]$ es la fuerza de la presión solar por unidad de área [25].

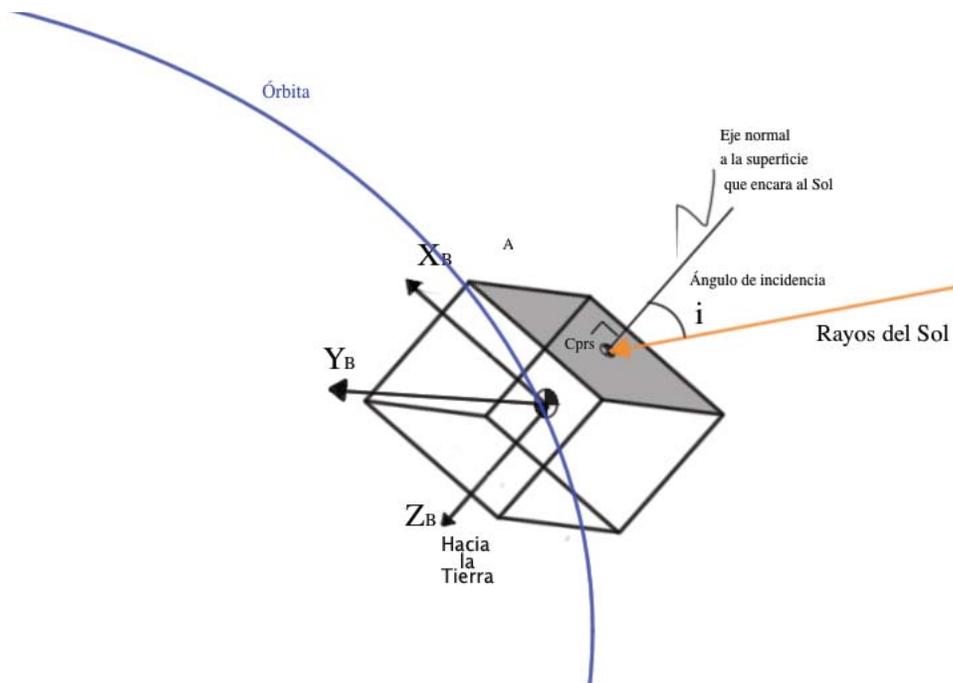


Fig. 3.9. Presión debida a la radiación solar.

El par debido a la presión solar puede ser calculado por medio de la ecuación 3.39 [22],[25],[30]:

$$\tau_{solar} = \frac{F_s}{c} A_s (1 + k) (c_{ps} - c_g) \cos(i) \quad ec. 3.39$$

donde F_s es la constante solar, c es la velocidad de la luz, A_s es el área de la superficie radiada, C_{ps} es el centro de presión solar, C_g es el centro de masa, k es el coeficiente de reflectancia (.05 en nuestro caso), e i es el ángulo de incidencia de los rayos solares.

3.3.3. Par debido al gradiente Gravitacional

Cualquier objeto no simétrico en órbita, es afectado por un par debido a la variación de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre el objeto. Uno de los modelos matemáticos del par gravitacional utilizados en la determinación de la orientación de satélites, es el que considera una distribución homogénea de masa [13][16]. Dicho modelo se presenta en la ecuación 3.40:

$$\tau_{Grav} = \frac{3\mu}{R_0} u_e \times (I u_e) \quad ec. 3.40$$

en la ecuación anterior, el coeficiente gravitacional de la tierra es: $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, R_0 es la distancia desde el satélite hasta el centro de la Tierra en metros, I es la matriz de inercia, y u_e es el vector unitario hacia nadir.

Si, para la ecuación 3.40 se define y aplica el parámetro $\omega_0^2 = \mu/R_0^3$, que es la componente de la velocidad angular, tendremos la ecuación 3.41 [13][16]:

$$\tau_{Grav} = 3\omega_0^2 c_3^b \times (I c_3^b) \quad ec. 3.41$$

en donde c_3^B corresponde a la tercera columna de la matriz de rotación R_0^B , la cual transforma el eje z_B en el eje z_0 , y queda definida con la ecuación 3.42:

$$c_3^B = \begin{bmatrix} 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 - \eta \mathcal{E}_2) \\ 2(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 + \eta \mathcal{E}_1) \\ 1 - 2(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2) \end{bmatrix} \quad ec. 3.42$$

de tal manera que el par gravitacional se determina con la ecuación 3.43:

$$\tau_{Grav}^b = 3\omega_0^2 c_3^B \begin{bmatrix} 2(I_z - I_y)(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 + \eta \mathcal{E}_1)(1 - 2(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2)) \\ 2(I_x - I_z)(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 - \eta \mathcal{E}_2)(1 - 2(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2)) \\ 2(I_y - I_x)(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 - \eta \mathcal{E}_2)(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 + \eta \mathcal{E}_1) \end{bmatrix} \quad ec. 3.43$$

3.3.4. Par magnético

El campo magnético terrestre

A principios del siglo XIX Karl Gauss inventó un instrumento capaz de medir el valor absoluto del campo magnético. A partir de este evento se han llevado a cabo múltiples observaciones de la intensidad del campo magnético alrededor del mundo.

El campo magnético representa una barrera que protege a la tierra del viento solar y de los rayos dañinos provenientes del espacio exterior.

El polo norte magnético se encuentra cerca del polo sur geográfico, y el polo sur magnético está localizado cerca del polo norte geográfico, como se muestra en la Figura 3.10. Lo anterior es aprovechado en los satélites en órbita para interactuar con el campo magnético terrestre y producir un par externo para cambiar su orientación.

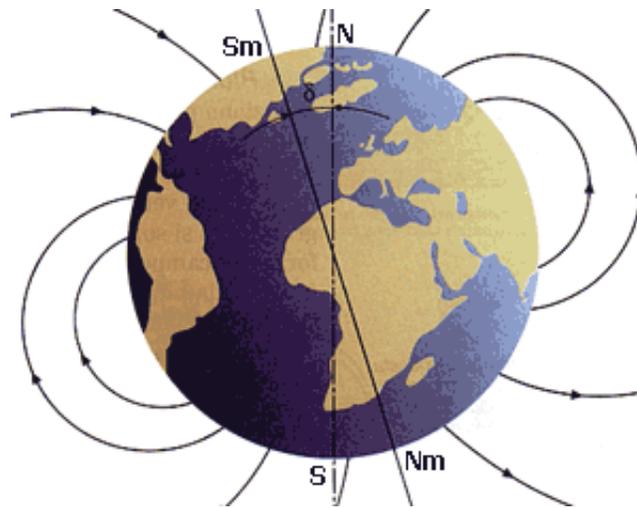


Fig. 3.10. Campo magnético terrestre.

En todo punto de la superficie terrestre, el campo magnético se define por su potencia y dirección. Las líneas del campo magnético cambian dependiendo de la ubicación, en la órbita.

El campo magnético terrestre es predominantemente un dipolo, cuya parte Sur se encuentra localizada en el hemisferio Norte a 78.6° latitud Norte y 289.55° longitud Este y que se va recorriendo hacia el Oeste a razón de 0.014 grados por año. Su intensidad decrece 0.05% al año. Tiene una intensidad aproximada de $60\,000$ nT en los polos y de $30\,000$ nT en el ecuador y disminuye con la altitud con un factor de $1/r^3$ (ver Figura 3.11) [32].

Modelo Matemático del satélite

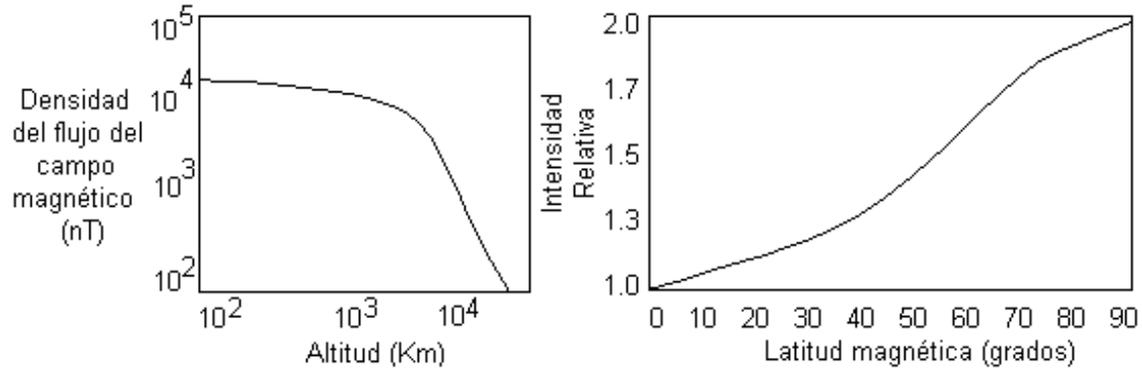


Fig. 3.11. Intensidad de flujo magnético en función de la altura y de la latitud.

Existen varios modelos para representar al campo magnético, los principales son:

- Dipolo
- Cuadripolo o dipolo excéntrico, y
- Dínamo

Los modelos de campo magnético pueden servir para obtener la ubicación del satélite en órbita, esto es, al comparar las mediciones de las tres componentes principales obtenidas con el magnetómetro de la nave, con el dato obtenido del modelo.

El campo geomagnético B puede ser representado como un gradiente de la función potencial escalar V [32]:

$$B = -\nabla V \quad \text{ec. 3.44}$$

donde V se representa por una serie de armónicos esféricos descritos por medio de la ecuación 3.45:

$$V(r, \theta, \phi) = R \sum_{n=1}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)) P_n^m(\theta) \quad \text{ec. 3.45}$$

donde:

R es el radio ecuatorial de la tierra: 6371.2 Km

r es la distancia medida desde el centro de la tierra

θ es la coelevación = 90° - latitud geocéntrica para $n=1$, dipolo

ϕ es la longitud Este (con referencia en Greenwich)

g_n^m, h_n^m son los coeficientes gaussianos.

Los coeficientes P_n^m están normalizados :

$$\int_0^\pi [P_n^m(\theta)]^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{2(2 - \delta_m^0)}{2n + 1} \quad \text{ec. 3.46}$$

Los coeficientes gaussianos son determinados empíricamente por mediciones en el campo y pueden ser obtenidos en las tablas publicadas periódicamente por diversas fuentes, como el *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF), entre otras. Las derivadas de primer orden de los coeficientes constituyen los términos seculares. Con estos coeficientes y los polinomios asociados de Legendre P_n^m , es posible determinar los valores de las componentes vectoriales de campo magnético en cualquier punto de la tierra o en cualquier punto de alguna órbita[32].

A grandes altitudes el campo magnético se parece más a un dipolo, sin embargo, a distancias mayores a 4 radios terrestres y en especial a mayores distancias que las geosíncronas, las perturbaciones del campo magnético son tales que se invalida el modelo de esféricos armónicos[32].

Para utilizar la ecuación de armónicos esféricos en el cálculo del campo en cualquier punto, se deben conocer los coeficientes gaussianos. Una alternativa para determinar dichos coeficientes es de manera empírica, al realizar un ajuste de mínimos cuadrados con los datos del campo magnético; esto es, con el uso de los coeficientes como parámetros ajustados. Los datos consistentes de ambas magnitudes y direcciones son obtenidos a partir de diferentes observatorios magnéticos. Datos más uniformes, son obtenidos a partir de mediciones de magnitud de campo realizadas por satélites. También debe tenerse en cuenta que la falta de datos durante un periodo de tiempo bastante largo, degrada la precisión de este o cualquier otro modelo del campo. La elección del grado se basa en la precisión del modelo y de la potencia de las perturbaciones del campo principal. De este modo, a ciertas altitudes, es posible reducir el grado de expansión del modelo del campo, permitiendo omitir multipolos con lo cual se logra una reducción de tiempo de cómputo [32].

El IGRF determina los coeficientes gaussianos para la Ecuación 3.45, por ello el modelo de campo magnético obtenido utilizando estos coeficientes se conoce como el modelo IGRF. Este modelo es actualizado cada 5 años. En las simulaciones por software realizadas en este trabajo de tesis, se hace uso del modelo IGRF 2010 integrado en el bloque Aerospace de Simulink.

La ecuación que permite conocer el valor de campo magnético en órbita es [32]:

$$B^o = \frac{M}{R^3} \begin{bmatrix} \cos \mu_m \\ 0 \\ 2 \sin \mu_m \end{bmatrix} \quad \text{ec 3.47}$$

Donde:

M es el momento magnético dipolar

μ_m es la latitud magnética

R es la distancia del centro de la tierra a la órbita.

Par perturbador magnético

El par perturbador magnético es producto de la interacción del campo magnético terrestre y el campo magnético residual del satélite, éste último es debido a las

Modelo Matemático del satélite

corrientes eléctricas que circulan a través de los distintos circuitos que conforman la electrónica de la nave.

Si M es la suma de todos los momentos magnéticos en el satélite, se tiene que el par que actúa en el satélite está definido por la ec. 3.48 [16][32]:

$$\tau_{Mag} = M \times B \quad [N \cdot m] \quad ec. 3.48$$

en donde B es el vector del campo geomagnético en $[Wb/m^2]$, con magnitud proporcional a $1/r^3$, donde r es el vector del centro de la Tierra hacia el satélite. M es causado por la corriente eléctrica que circula por los circuitos del satélite, imanes permanentes o las bobinas magnéticas, y está dado en $[A \cdot m^2]$

Las bobinas magnéticas son utilizadas para cambiar la orientación del satélite hacia la posición correcta usando las propiedades del campo Geomagnético [16] [17] [32].

3.4. Pares de control en el satélite

El sistema de control de orientación de la nave hace uso de pares controladores que anularán los efectos de los pares perturbadores. Los pares de control son generados por los actuadores a bordo del satélite. En este trabajo, se consideran los pares que generan las bobinas magnéticas y ruedas inerciales, debido a que son los actuadores más comúnmente utilizados dentro de los satélites pequeños.

3.4.1. Ruedas Inerciales

Estos dispositivos están conformados por un disco que se acopla a un motor, y que se instalan en los ejes coordenados del satélite. En nuestro caso se han considerado discos de aluminio y motores de corriente directa [8].

Al girar la rueda se produce un par en el satélite en la dirección contraria al sentido de giro. Dado que el sistema de la rueda inercial permanece fijo a la estructura de la nave, el par generado se transfiere a dicha estructura, con lo que el satélite adquiere una rotación sobre el propio eje dónde está colocada la rueda.

El par τ_{wh} generado por este elemento actuador se describe por medio de la ecuación 3.49:

$$\tau_{wh} = I_{wh} \dot{\omega}_{wh} \quad ec. 3.49$$

en esta última ecuación:

τ_{wh} : par provocado por la rueda inercial,

I_{wh} : Inercia de la rueda; este parámetro depende de la geometría de la rueda, y por último;

$\dot{\omega}_{wh}$: es la aceleración angular que presenta la rueda.

En la referencia [8] se describe de manera detallada un proceso para determinar el momento de inercia disponible en las ruedas inerciales, para aplicarlo en el sistema de control de orientación.

El modelo en función del tiempo de este actuador se presenta en la ecuación 3.50 [8], para el cual se considera que se tiene una rueda inercial en cada eje:

$$\tau_{wh}^B = \left(\frac{dL_{wh}}{dt} \right) + \omega_{wh} \times L_{wh} - \tau_f \quad \text{ec. 3.50}$$

en la ecuación anterior se incluyen los siguientes términos:

$$\omega_{wh} = \begin{bmatrix} \omega_{wh,x} \\ \omega_{wh,y} \\ \omega_{wh,z} \end{bmatrix}: \text{velocidad angular de las ruedas,}$$

$$L_{wh} = \begin{bmatrix} L_{wh,x} \\ L_{wh,y} \\ L_{wh,z} \end{bmatrix}: \text{momento angular de las ruedas, y}$$

τ_f : par causado por la fricción, que se opone al movimiento de las ruedas y que idealmente es cero.

Con lo anterior, el modelo general del par de control proporcionado por las ruedas inerciales está dado en forma matricial por la ecuación 3.51:

$$\begin{bmatrix} \tau_{wh,x} \\ \tau_{wh,y} \\ \tau_{wh,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}_{wh,x} + L_{wh,z}\omega_{wh,y} - L_{wh,y}\omega_{wh,z} \\ \dot{L}_{wh,y} + L_{wh,x}\omega_{wh,z} - L_{wh,z}\omega_{wh,x} \\ \dot{L}_{wh,z} + L_{wh,y}\omega_{wh,x} - L_{wh,x}\omega_{wh,y} \end{bmatrix} \quad \text{ec. 3.51}$$

3.4.2. Bobinas magnéticas

Otro par de control que se tomará en cuenta, es el producido por las bobinas magnéticas.

Para los fines del control de orientación, se requiere que el par generado sea normal al plano de la sección transversal a la bobina. El sentido del momento magnético se determina de acuerdo a la regla de la mano derecha, con base en el sentido en que se hace circular la corriente por la bobina [4].

El dipolo o momento magnético que producen las bobinas esta descrito por la ecuación 3.52 [32]:

$$m^b = m_x^b + m_y^b + m_z^b = \begin{bmatrix} N_x i_x A_x \\ N_y i_y A_y \\ N_z i_z A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad \text{ec. 3.52}$$

en la ecuación anterior se tiene que:

Modelo Matemático del satélite

N_k : es el número de vueltas,

i_x : es la corriente que circula, y

A_x : es el área transversal de la bobina.

La interacción que ocurre entre el momento magnético producido por las bobinas y el vector del campo geomagnético B , genera un par que se describe por medio la ecuación 3.53 [32]:

$$\tau_m^b = m^b \times B; \quad B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad ec. 3.53$$

A partir del operador anti-simétrico se puede obtener otra ecuación para representar el par magnético, como se muestra en la ec. 3.54:

$$\tau_m^b = S(m^b)B = \begin{bmatrix} B_z m_y - B_y m_z \\ B_x m_z - B_z m_x \\ B_y m_x - B_x m_y \end{bmatrix} \quad ec. 3.54$$

3.5. Modelos lineales para el control de orientación

En un subsistema tan determinante como lo es el sistema de control de orientación y estabilización de un satélite, el desempeño óptimo del mismo es fundamental. El control óptimo maximiza o minimiza el valor de una variable del sistema escogida como índice del desempeño del sistema de control, considerando sus propias restricciones. En nuestro caso, se busca que el sistema de control de orientación consuma la menor cantidad de energía a través de los actuadores, durante su operación. Es por esto que en el diseño de los algoritmos de control de este trabajo se propone una técnica de control óptimo, y la energía consumida por los actuadores, como índice de desempeño del esquema de control, que requiere el uso de modelos lineales para el estudio del satélite en su representación en el espacio de estados. El modelo lineal de la dinámica y la cinemática del satélite permitirán analizar y diseñar un controlador con expresiones más simples a las utilizadas en los sistemas no lineales para un cierto margen de operación.

Para obtener un modelo lineal de la dinámica y la cinemática del satélite se requiere un punto de operación, es decir, un punto donde se considera que trabajará el sistema, alrededor del cual se construirá la forma lineal de dicho modelo, lo cual requiere de un punto de equilibrio, que matemáticamente significa un máximo o un mínimo.

Para la estabilización en tres ejes se busca hacer coincidir el Sistema de Referencia Fijo al satélite (SRFS) con el Sistema de Referencia en Órbita (SRO), con el objetivo de que el vector de apuntamiento (vector nadir del satélite) se dirija hacia el centro de la tierra. El punto de equilibrio se establece cuando los ángulos de Euler son cero, es decir: $\phi = 0$, $\theta = 0$ y $\psi = 0$, del mismo modo, cuando las velocidades angulares son

cero. Por lo anterior, la forma lineal de las ecuaciones se obtiene tomando en consideración que $\eta = 1$ y $\varepsilon = 0$, como se escribe en la ecuación 3.55:

$$q = \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ec. 3.55$$

Al realizar la conversión de ángulos de Euler a Cuaterniones, obtenemos que:

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ec. 3.56$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ec. 3.57$$

Ecuación lineal de la cinemática del satélite

La ecuación 3.59 describe la cinemática del satélite, expresada en Cuaterniones:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\varepsilon^T \\ \eta I_{3 \times 3} + S(\varepsilon) \end{bmatrix} \omega_{B0}^B \quad ec. 3.59$$

La forma lineal de la ecuación anterior se obtiene alrededor de los puntos $\eta = 1$ y $\varepsilon = 0$, como se muestra en la ecuación 3.60:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{B0}^B \end{bmatrix} \quad ec. 3.60$$

de la ecuación anterior obtenemos la relación $\omega_{B0}^B = 2\dot{\varepsilon}$.

Ecuación lineal de la matriz de rotación

En las ecuaciones 3.61 y 3.62 se presenta la matriz de rotación:

$$R_0^B = I + 2\eta S(\varepsilon) + 2 S^2(\varepsilon) \quad ec. 3.61$$

$$R_0^B = (R_B^0)^T = \begin{bmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{bmatrix} \quad ec. 3.62$$

el modelo lineal de la matriz de rotación está dado por la ecuación 3.63 [8] [17] [32]:

Modelo Matemático del satélite

$$R_O^B = 2 \begin{bmatrix} 1/2 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 1/2 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad ec. 3.63$$

Modelo lineal de la velocidad y de la aceleración angular

Al aplicar la ecuación de la matriz de rotación en su forma lineal (ec. 3.63) y la relación $\omega_{BO}^B = \dot{2}\varepsilon$, obtenida anteriormente, a la ecuación de la velocidad angular (ec. 3.16), se puede obtener un modelo lineal de ω_{BI}^B , de la siguiente manera:

$$\omega_{BI}^B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{\varepsilon}_1 - 2\omega_o \varepsilon_3 \\ 2\dot{\varepsilon}_2 - \omega_o \\ 2\dot{\varepsilon}_3 + 2\omega_o \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad ec. 3.64$$

Para obtener la aceleración angular se aplica la derivada con respecto al tiempo de ω_{BI}^B . Dicha aceleración queda definida por la ecuación 3.65:

$$\dot{\omega}_{BI}^B = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ddot{\varepsilon}_1 - 2\omega_o \dot{\varepsilon}_3 \\ 2\ddot{\varepsilon}_2 \\ 2\ddot{\varepsilon}_3 + 2\omega_o \dot{\varepsilon}_1 \end{bmatrix} \quad ec. 3.65$$

Modelo lineal del gradiente gravitacional

La ecuación del par proporcionado por el gradiente gravitacional, es llevada a su forma lineal, de la misma manera, alrededor de los puntos $\eta = 1$ y $\varepsilon = 0$, con lo que dicho modelo lineal queda como se muestra en la ec. 3.66[17] [32]:

$$\tau_g = 3\omega_o^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\varepsilon_1 \\ (I_z - I_x)\varepsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ec. 3.66$$

Modelo lineal del par magnético

En el caso de este par de control, el modelo general está dado por la ecuación 3.67:

$$\tau_{mag}^B = S(m^B)B^B = S(m^B)R_B^O B^O = S(m^B)[I - 2\eta S(\varepsilon) + 2S^2(\varepsilon)]B^O \quad ec. 3.67$$

el modelo lineal del par magnético queda dado por le ec. 3.68 [32]:

$$\tau_{mag}^B = \begin{bmatrix} B_z^0 m_y - B_y^0 m_z \\ B_x^0 m_z - B_z^0 m_x \\ B_y^0 m_x - B_x^0 m_y \end{bmatrix} \quad ec. 3.68$$

Modelo lineal del par proporcionado por las ruedas inerciales

En el caso de las ruedas inerciales, la forma lineal del modelo matemático de este par de control se obtiene a partir de la ecuación 3.69:

$$\tau_{wh} = \left(\frac{dL_{wh}}{dt} \right) + \omega_{wh} \times L_{wh} \quad ec. 3.69$$

de la ecuación anterior, se obtiene la forma lineal alrededor de los puntos ya mencionados, quedando como se muestra en la ecuación 3.69 [17] [32]:

$$\tau_{wh} = \left(\frac{dL_{wh}}{dt} \right) = I \dot{\omega}_{wh} \quad ec. 3.69$$

Hasta este punto se han presentado los modelos matemáticos que permitirán conocer el comportamiento del satélite y su orientación. También, se desarrollaron los modelos para las perturbaciones debidas al ambiente espacial, en el que se encuentra inmerso el satélite.

En el siguiente capítulo se mostrará el proceso de diseño y desarrollo de los algoritmos de control de orientación.

4. Diseño y simulación del control de orientación

En este capítulo se presenta el diseño y la simulación de los algoritmos de control de orientación. Se contará con dos diseños, uno en el que se tiene a las bobinas magnéticas como actuadores y a los pares: aerodinámico, solar y por gradiente gravitacional, como pares perturbadores. El otro algoritmo considera las mismas perturbaciones, pero utiliza ruedas inerciales como actuadores.

4.1. Modelo en variables de estado de la dinámica y cinemática del satélite

Se inicia con el modelo de la dinámica, representado en su forma lineal por medio de la ecuación 4.1:

$$I\dot{\omega}_{IB}^B = -\omega_{IB}^B \times I\omega_{IB}^B + \tau^B + S(m^B)B^B \quad ec. 4.1$$

De la ecuación anterior se pueden obtener las componentes de los cuaterniones, mostrados a continuación:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = (1 - k_x)\omega_0\dot{\varepsilon}_3 - 4k_x\omega_0^2\varepsilon_1 + \frac{1}{2I_x}(B_z^0\tau_y - B_y^0\tau_z) \quad ec. 4.2.$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = -3k_y\omega_0^2\varepsilon_2 + \frac{1}{2I_y}(B_x^0\tau_z - B_z^0\tau_x) \quad ec. 4.3$$

$$\ddot{\varepsilon}_3 = -(1 - k_z)\omega_0\dot{\varepsilon}_1 - k_z\omega_0^2\varepsilon_3 + \frac{1}{2I_x}(B_y^0\tau_x - B_x^0\tau_y) \quad ec. 4.4$$

donde,

$$k_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}; \quad k_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}; \quad k_z = \frac{I_y - I_x}{I_z} \quad ec. 4.5$$

La ecuación para el satélite, de acuerdo a un modelo general de variables de estado, se describe por medio de la ecuación 4.6 :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ec. 4.6$$

En este caso elegimos como variables de estado a $x = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$ y a su derivada $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \ddot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \\ \ddot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$

Así mismo, se considera como entrada del sistema al vector de par de control:

$$u = \begin{bmatrix} \tau_{act_x} \\ \tau_{act_y} \\ \tau_{act_z} \end{bmatrix}.$$

Además, las matrices A y B son las siguientes [16][32]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4k_x\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_x)\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3k_y\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1-k_z)\omega_0 & 0 & 0 & -k_z\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, el modelo en variables de estado del satélite queda definido por medio de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \ddot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \\ \ddot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4k_x\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_x)\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3k_y\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1-k_z)\omega_0 & 0 & 0 & -k_z\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2I_z} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{act_x} \\ \tau_{act_y} \\ \tau_{act_z} \end{bmatrix} \quad ec. 4.7.$$

La salida de nuestro sistema se define como:

$$y = Cx$$

y, debido a que sólo es de interés la orientación del satélite se escoge a la constante

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2. Técnicas de control lineal

En lo que se refiere al sistema de control de orientación de satélites se encuentran dos tipos de técnicas, diferenciadas de acuerdo a su propósito, estas son:

- Estabilización
- Re-orientación

Las técnicas de control dedicadas a la estabilización tienen como propósito el mantener la orientación existente de manera estable. En lo que se refiere a la re-orientación, las técnicas que tienen esta tarea se enfocan en modificar la orientación del satélite, partiendo del apuntamiento actual y llevándolo a una posición final.

Las técnicas de control lineal parten del modelo del sistema en su forma lineal. En el desarrollo de los algoritmos de control de orientación de este trabajo se eligió un controlador del tipo LQR, el cual, como se detalla enseguida, es confiable, robusto y permite minimizar el consumo de energía del sistema.

4.2.1. Linear Quadratic Regulator (LQR)

Los controladores LQR son ampliamente utilizados en el diseño del sistema de control de orientación de satélites, en especial cuando se emplean bobinas magnéticas como actuadores [8],[12],[14],[16] y [25].

En la Figura 4.1 se muestra la configuración de realimentación para un controlador del tipo LQR, cabe hacer notar la realimentación negativa y la ausencia de una señal de referencia.

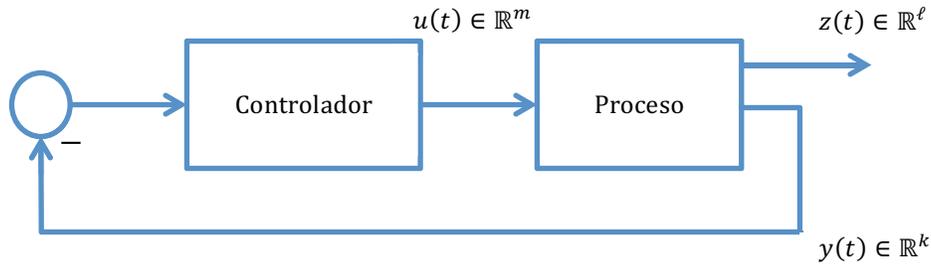


Fig. 4.1. Configuración de la realimentación en la Regulación Lineal Cuadrática (LQR).

En esta configuración, el modelo de espacio de estados del proceso se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad z = Gx + Hu \quad \text{ec. 4.8}$$

y tiene dos tipos distintos de salidas:

1.- La *salida medida* $y(t) \in \mathbb{R}^k$ que corresponde a la señal o señales que pueden ser medidas y por tanto, están disponibles para el control. Si la matriz de transferencia del controlador es $C(s)$, tenemos:

$$Y(s) = -C(s)U(s), \quad \text{ec. 4.9}$$

donde $U(s)$ y $Y(s)$ denotan las transformadas de Laplace de la entrada del proceso $u(t)$ y de la salida medida $y(t)$, respectivamente.

2.- La *salida controlada* $z(t) \in \mathbb{R}^\ell$ corresponde a la señal que se debe hacer lo más pequeña posible en la menor cantidad de tiempo.

Algunas veces $z(t) = y(t)$, lo que significa que el objetivo de control es llevar toda la salida medida a cero. Sin embargo, cuando la salida $y(t)$ es un vector, se requiere simplemente hacer una de las salidas medidas $y_1(t)$ pequeña. En este caso, se debe escoger $z(t) = y_1(t)$.

En algunas situaciones se necesita escoger:

$$z(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \end{bmatrix},$$

lo que significa que se requiere hacer tanto a la salida medida $y_1(t)$ y a su derivada $\dot{y}_1(t)$ muy pequeñas. Se pueden realizar otras opciones. La selección de z debe verse como un parámetro de diseño.

Regulación Óptima

El problema del control óptimo LQR, consiste en calcular la matriz de transferencia del controlador $C(s)$ con la cual se obtenga el valor más pequeño para la siguiente expresión:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 + \rho \|u(t)\|^2 dt, \quad \text{ec. 4.10}$$

donde ρ es una constante positiva, el término:

$$\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt$$

corresponde a la energía de la salida controlada y el término:

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt,$$

corresponde a la energía de la señal de control. Cuando se usa un controlador LQR se busca que se minimicen ambas energías. El papel de la constante ρ es establecer una compensación entre estos objetivos en conflicto:

- 1.- Cuando se escoge una constante ρ muy grande, el camino más efectivo para decrecer J_{LQR} es usar una señal de control pequeña, a expensas de una señal controlada grande.
- 2.- Cuando se escoge ρ muy pequeña, la manera más efectiva de decrecer J_{LQR} es al obtener una salida controlada muy pequeña, incluso si esto implica tener una señal controlada grande.

El problema de control óptimo LQR también es definido de una manera más general y consiste en encontrar a la matriz de transferencia $C(s)$ que minimice la siguiente ecuación:

$$J_{LQR} := \int_0^{\infty} z(t)' Q z(t) + \rho u'(t) R u(t) dt, \quad 4.11$$

donde Q es una matriz de $\ell \times \ell$ simétrica definida positiva, R es una matriz de $m \times m$ simétrica positiva, y ρ es una constante positiva.

Una primera selección para las matrices Q y R en 4.11 esta dada por la regla de Bryson; se selecciona Q y R diagonal con:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } z_i^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, \ell\} \quad \text{ec. 4.12}$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceptable de } u_j^2} \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{ec. 4.13}$$

que corresponde al siguiente criterio:

$$J_{LQR} := \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\ell} Q_{ii} z_i(t)^2 + \rho \sum_{j=1}^m R_{jj} u_j(t)^2 \right) dt \quad \text{ec. 4.14}$$

La regla de Bryson escala las variables que aparecen en J_{LQR} de tal manera que el valor máximo aceptable para cada término es uno. Esto es muy importante, en especial cuando las unidades utilizadas para las diferentes componentes de \mathbf{u} y de \mathbf{z} hacen que los valores de estas variables sean numéricamente muy diferentes unos de otros.

Aunque la regla de Bryson algunas veces da buenos resultados, en ocasiones es sólo el punto de partida de un proceso de diseño iterativo, dirigido a obtener las propiedades deseables para el sistema de lazo cerrado [12].

Realimentación de Estados LQR

En el problema de realimentación de estados con LQR (ver fig. 4.2.), se asume que todo el estado \mathbf{x} puede ser medido y por tanto, está disponible para realizar el control.

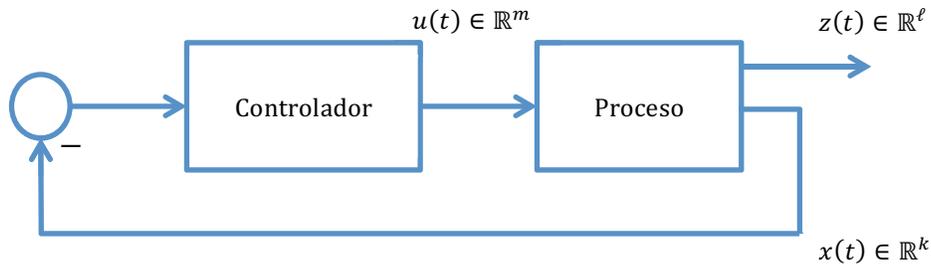


Fig. 4.2. LQR con realimentación de estados.

El controlador óptimo por realimentación de estados LQR para cumplir con los criterios señalados en la Ec. 4.11, es una matriz de ganancias de la forma:

$$u = -Kx \quad \text{ec. 4.15}$$

donde K es la matriz de $m \times m$ dada por:

$$K = (H'QH + \rho R)^{-1} (B'P + H'QG) \quad \text{ec. 4.16}$$

y P es la solución única, siendo una matriz definida positiva, que cumple con la siguiente ecuación:

$$A'P + PA + G'QC - (PB + G'QH)(H'QH + \rho R)^{-1}(B'P + H'QG) = 0 \quad \text{ec. 4.17}$$

la ecuación 4.17 es conocida como la *Ecuación Algebraica de Riccati (ARE: Algebraic Riccati Equation)*.

LQR y MATLAB

El comando $[K,S,E] = lqr(A,B,QQ,RR,NN)$ calcula el controlador óptimo por realimentación de estados LQR para un proceso:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con el criterio:

$$J := \int_0^{\infty} x(t)'QQx(t) + u'(t)RRu(t) + 2x'(t)NNu(t)dt \quad \text{ec. 4.18}$$

Para el criterio de la ecuación 4.10 se debe seleccionar:

$$QQ = G'G, \quad RR = H'H + \rho I, \quad NN = G'H$$

y para el criterio de la ec. 4.11 se escoge:

$$QQ = G'QG, \quad RR = H'QH + \rho R, \quad NN = G'QH$$

El comando ***lqr*** de Matlab regresa como resultado, la matriz óptima de realimentación de estados K , la solución P correspondiente a la Ecuación Algebraica de Riccati, y los polos E del sistema de lazo cerrado.

4.3. Diseño del controlador

En el diseño del controlador se plantea la ecuación de costo, con base en el criterio establecido anteriormente en la ec. 4.10:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\bar{x}'Q\bar{x} + u'Qu] dt \quad 4.19$$

donde:

$\bar{x} = x - x_d$; es el error entre estados deseados y estados actuales

$Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{ns}]$, con ns igual al número de estados

$R = \text{diag}[r_1, r_2, \dots, r_{na}]$, con na igual a la cantidad de actuadores

Diseño y simulación del control de orientación

Se emplean los siguientes pasos como método para el diseño del controlador:

- 1) Se propone $Q = Q' \geq 0$ y $R = R' > 0$
- 2) Se resuelve la ecuación matricial 4.20 para $P = P' > 0$

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P = -Q \quad ec. 4.20$$

- 3) Calcular la ecuación 4.21:

$$K = R^{-1}B'P \quad ec. 4.21$$

El método descrito en los pasos anteriores puede ser calculado por medio del comando `lqr`, de MATLAB, inclusive para sistemas de entradas y salidas múltiples, como se muestra enseguida:

$$K_{opt} = lqr(A, B, Q, R)$$

La constante K es sometida a un proceso de iteraciones sucesivas hasta obtener un resultado acorde con los requerimientos del apuntamiento del satélite [32].

4.3.1. Esquema de control

El esquema que se utiliza en el diseño del control de orientación en este trabajo es el que se muestra en la Figura 4.3, que tiene la configuración de un controlador LQR.

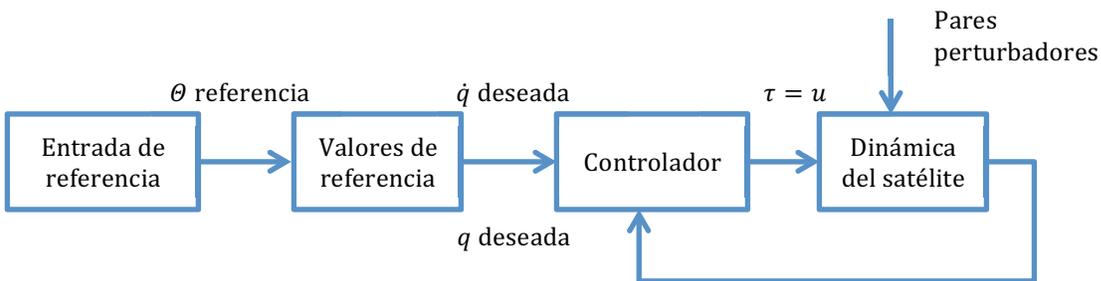


Fig. 4.3. Esquema de control para la orientación del satélite.

En el esquema anterior, el bloque de Entradas de referencia se refiere al valor de los ángulos deseados para la orientación del satélite. En el bloque de Valores de referencia se transforman los ángulos de Euler a su representación en cuaterniones, cuya derivada especifica los estados deseados. En nuestro caso, se busca que el satélite apunte hacia la tierra. En el bloque Controlador se realiza el cálculo del par que se requiere aplicar por parte de los actuadores. En el bloque de Dinámica, se tiene el modelo del satélite que nos permite simular el comportamiento del mismo, bajo los pares perturbadores y de control.

4.3.2. Algoritmos de control de orientación

Se proponen los siguientes algoritmos para el control de la orientación del satélite. El primero tiene como actuadores a las ruedas inerciales, y un controlador LQR, con la ley de control $u=-Kx$, como se comentó anteriormente. También, se incorporan los efectos del arrastre aerodinámico, el par gravitacional y la presión producto de la radiación solar como elementos perturbadores de la orientación. En la Figura 4.4 se muestra el diagrama de flujo para este primer algoritmo.

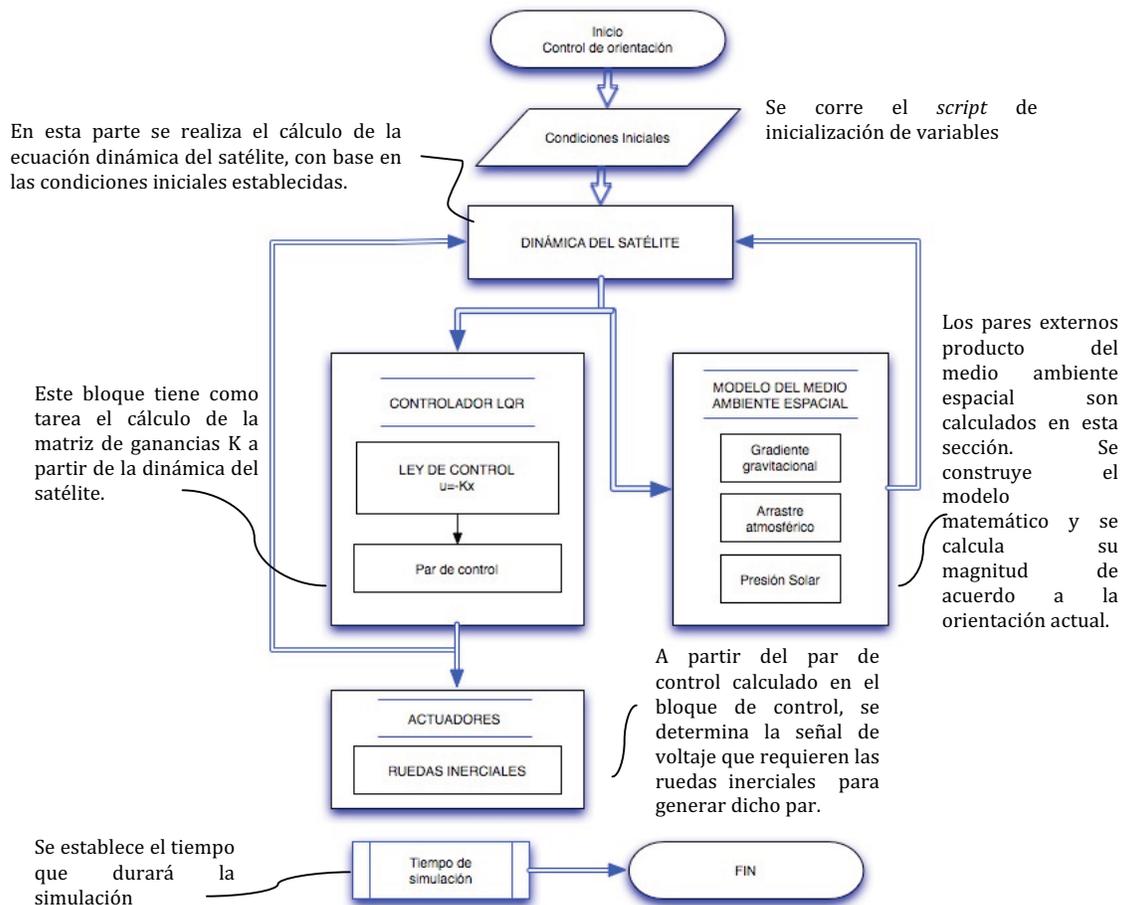


Fig. 4.4. Diagrama de flujo para el algoritmo de control de orientación que utiliza ruedas inerciales como actuadores.

En diagrama de flujo mostrado en la Figura 4.5 corresponde al algoritmo de control de orientación que utiliza bobinas magnéticas como actuadores. Una vez más, la ley de control se establece como $u=-Kx$, y se suman los efectos del arrastre atmosférico, de la radiación solar y el par gravitatorio como perturbaciones. En este caso se calculan tres vectores de campo geomagnético, cuyos valores dependen de la orientación del satélite. Las bobinas al interactuar con el campo magnético terrestre, corregirán la orientación del satélite.

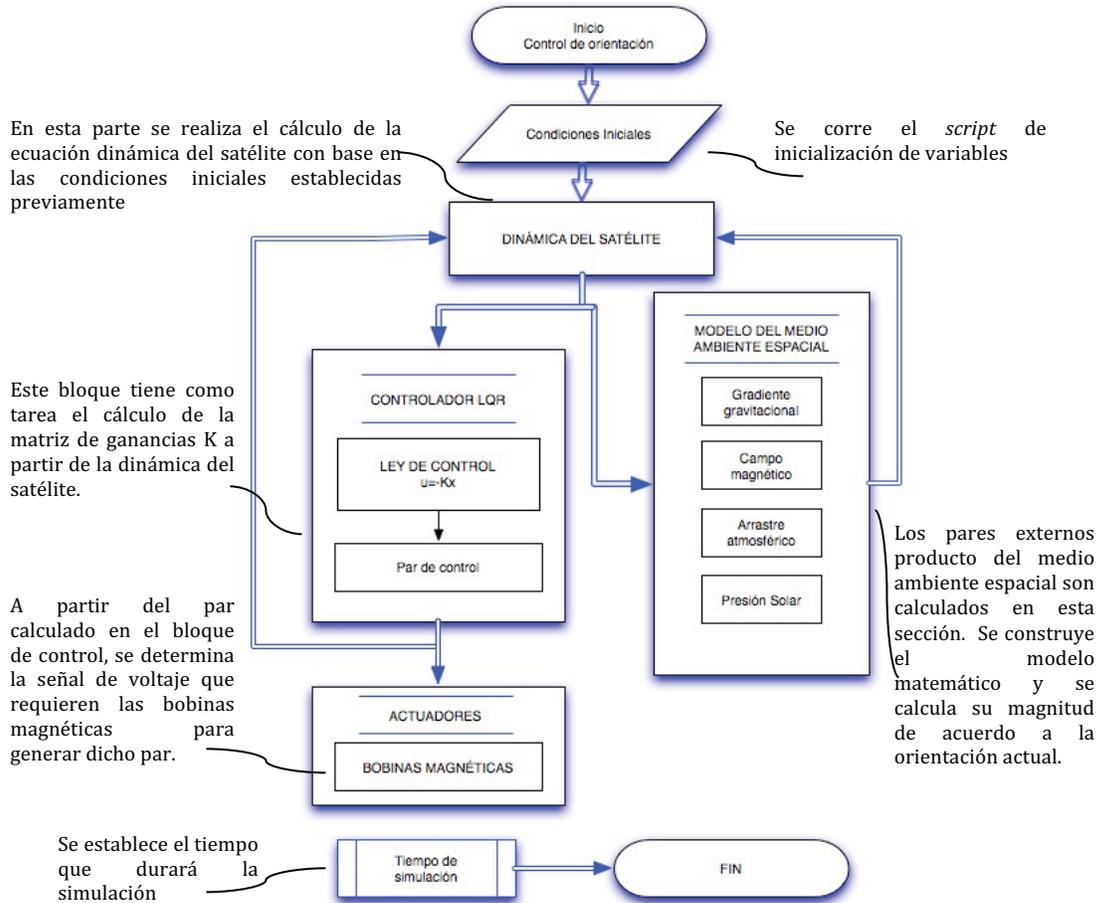


Fig. 4.5. Diagrama de flujo para el algoritmo de control de orientación que utiliza bobinas magnéticas como actuadores.

4.4. Modelo de simulación por programación

En esta sección se explican los modelos desarrollados de simulación por programación. Se hace uso de la plataforma Simulink dentro del entorno Matlab. El desarrollo de la simulación se realiza considerando que el satélite se encuentra en órbita con una orientación inicial, la cual será corregida por el algoritmo programado, hasta obtener la orientación deseada en estado estable.

En la tabla 4.1 se enlistan los parámetros considerados en las simulaciones del modelo por programación del satélite.

Tabla 4.1. Parámetros utilizados en las simulaciones.

Parámetro	Valor
Velocidad angular inicial	$\omega_{ob}^b = [0 \ 0 \ 0]'$
Ángulos de Euler deseados	$[0 \ 0 \ 0]$
Tipo de Órbita	Circular polar
Altitud de la órbita	570 km
Inclinación	97°
Periodo orbital	98.48 min
Desviación del centro de masa	3 cm
Precisión del apuntamiento deseado	$\pm 0.1^\circ$

En la Figura 4.6 se muestra el modelo de simulación programado en Simulink, los detalles de cada bloque se explican en el Apéndice A.

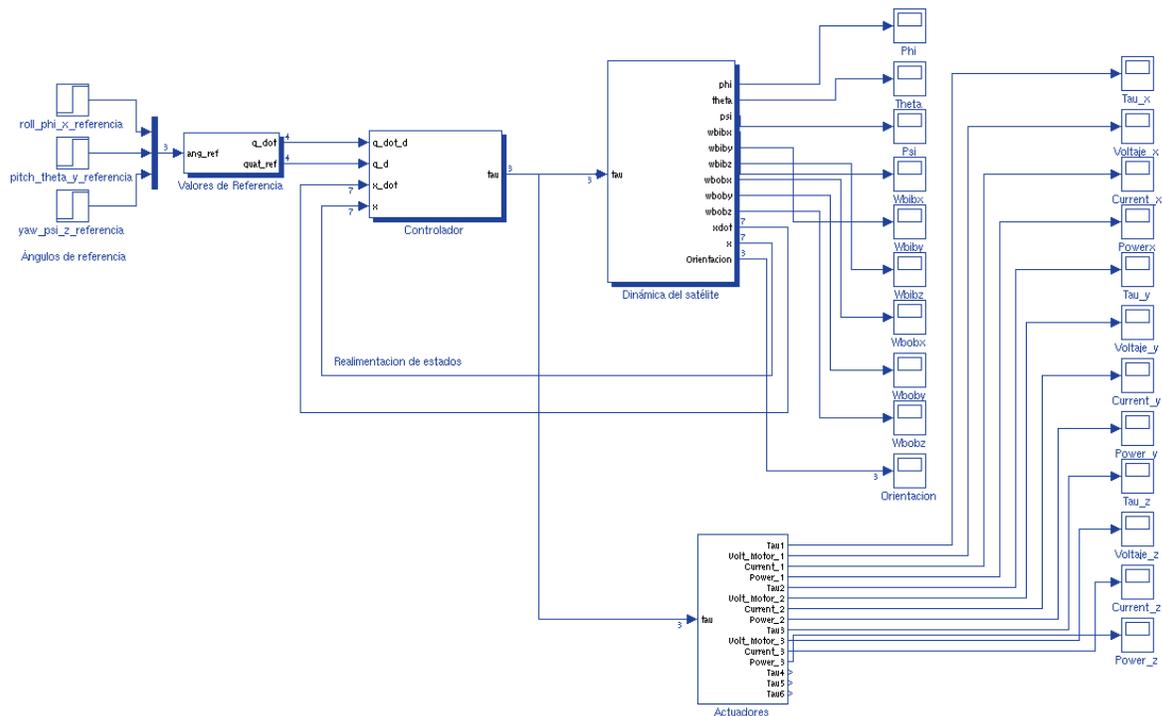


Fig. 4.6. Bloques de simulación programados en Simulink.

4.5. Desarrollo de las simulaciones

Con el fin de probar el desempeño de los algoritmos de control de orientación, se realizaron distintas pruebas en las cuales se experimentó con algunos parámetros del satélite, tales como la masa y la geometría. Cabe recordar que se tienen dos algoritmos principales, diferenciados por el tipo de actuadores utilizados, esto es, en uno de ellos se utilizan las ruedas inerciales y en el otro las bobinas magnéticas, bajo el mismo esquema de control.

4.5.1. Satélite con ruedas inerciales como actuadores

Prueba: Plataforma SIMUSAT [8],[32]

Para simular un satélite en órbita con las características inerciales de la plataforma SIMUSAT (ver Apéndice B) se debe considerar como geometría la de un cilindro con base de 58.9 cm de diámetro y 29 cm de altura y masa de 10 kg. Con esta configuración del satélite la matriz de inercia es:

$$I = \begin{bmatrix} 0.27 & 0 & 0 \\ 0 & 0.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0.40 \end{bmatrix} kg\ m^2$$

En las siguientes figuras se muestra el comportamiento que tiene el satélite con las condiciones mencionadas. En las Figuras 4.7 a 4.9 se puede observar el cambio en la orientación al aplicar el algoritmo.

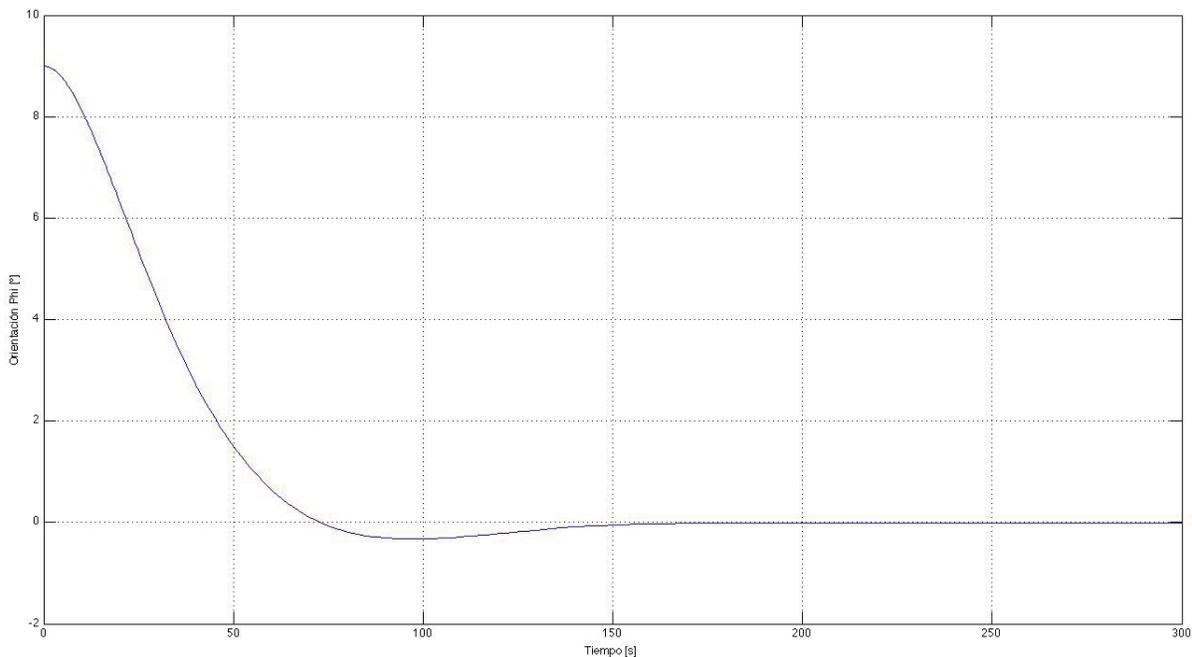


Fig. 4.7. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.

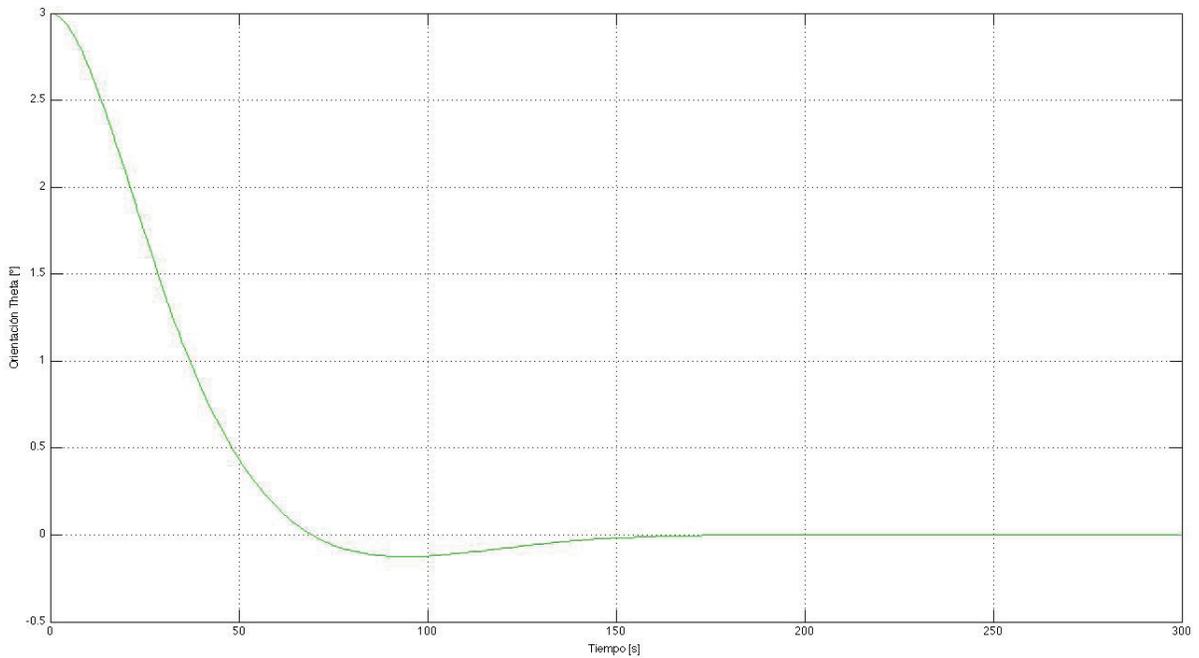


Fig. 4.8. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.

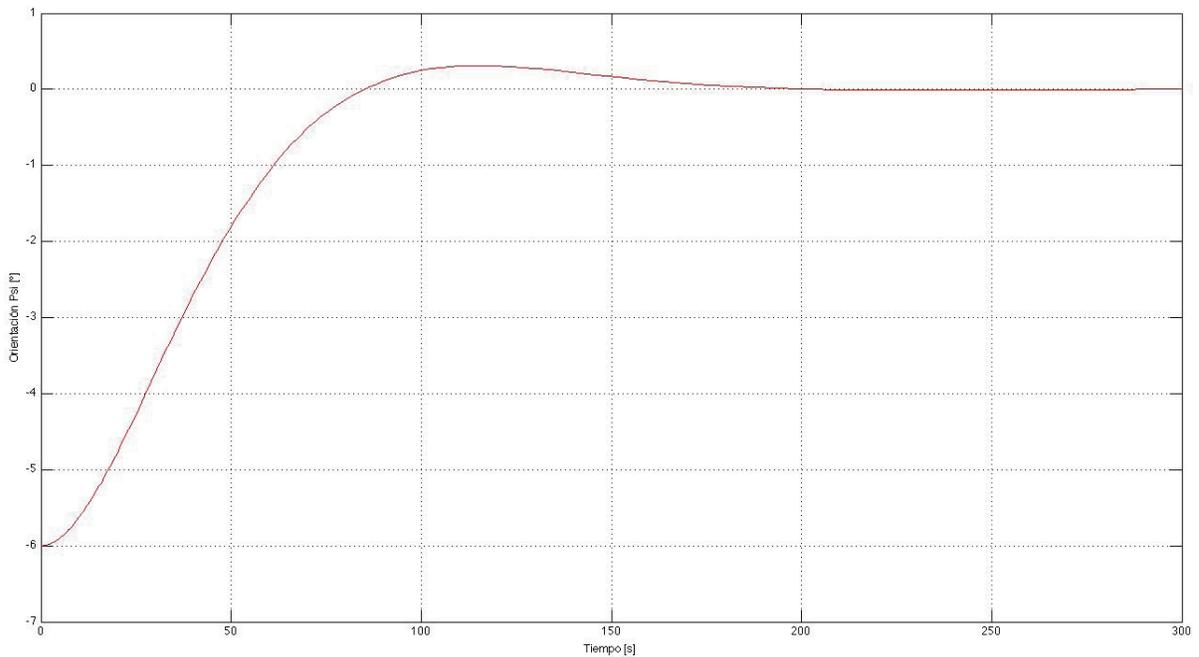


Fig. 4.9. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.

Un parámetro que se toma en cuenta para la evaluación del desempeño del algoritmo de control de orientación es la potencia requerida por los actuadores, en este caso las

ruedas inerciales. En la Figura 4.10 se presenta la gráfica de la potencia requerida por las ruedas inerciales para lograr la estabilización de la orientación en las condiciones mencionadas.

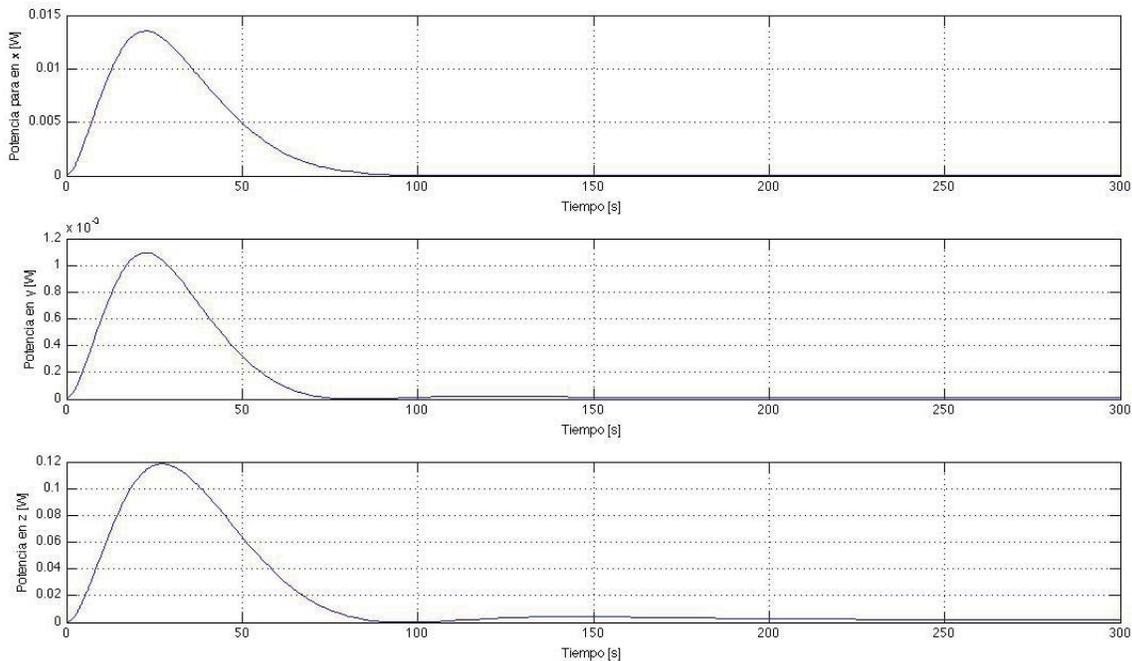


Fig. 4.10. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales para el control de la orientación.

En las gráficas anteriores se puede observar el cambio en la orientación en los tres ejes del sistema, que presenta un tiempo de levantamiento aproximado de 60 segundos, y un sobrepaso menor a un 0.3° , que no es significativo considerando que se requiere una precisión del apuntamiento de 0.1° , la cual se logra en estado estable. En cuanto a la potencia se observa un pico de consumo de 120 [mW] en el eje z durante la maniobra de control, con duración de 100 [s], que tiende a cero en estado estable. Este dato debe tomarse en cuenta al momento de diseñar el subsistema de potencia.

Prueba: Satélite pequeño cubo 10 Kg

Otro caso que se plantea es el de un satélite en órbita con ruedas inerciales como actuadores, la geometría es la de un cubo de 40 cm por lado, con una desviación del centro de masa de 3 cm con respecto al centro de gravedad y una masa de 10 kg. Para esta configuración del satélite la matriz de inercia es:

$$I = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix} \text{kg m}^2$$

Al programar las características mencionadas, el satélite muestra el comportamiento que se observa en las gráficas de las Figuras 4.11 a 4.13 en lo que se refiere al control de la orientación en términos de los ángulos de Euler.

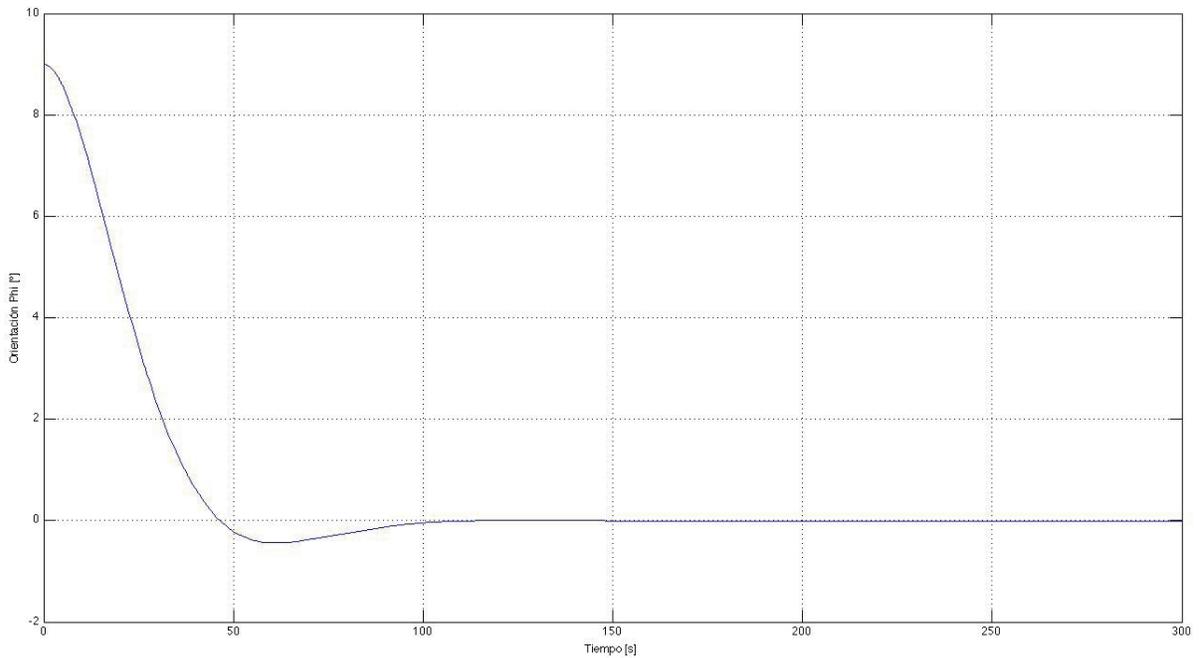


Fig. 4.11. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.

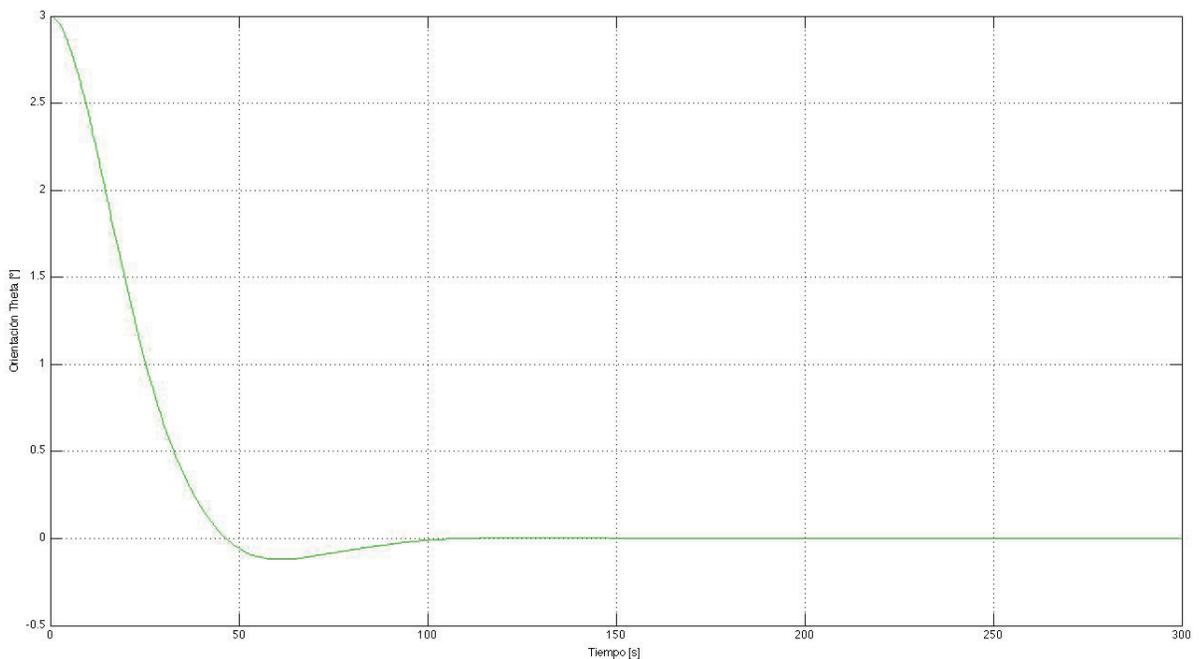


Fig. 4.12. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.

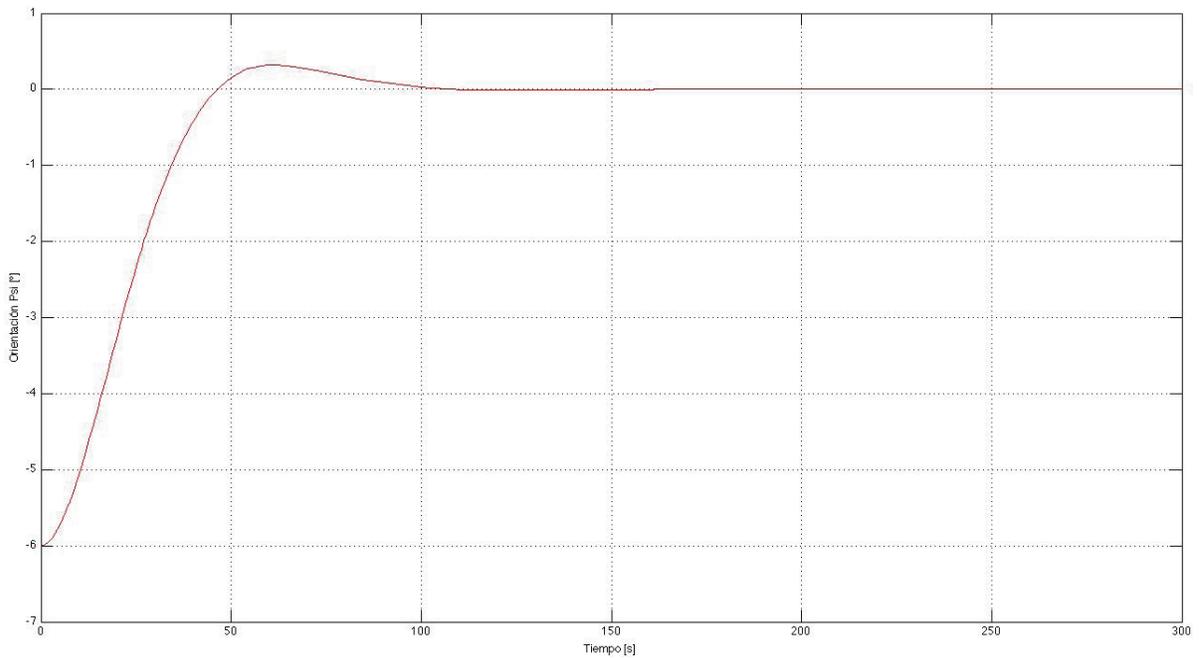


Fig. 4.13. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.

Así mismo, en la fig. 4.14 se despliega la curva de consumo de potencia.

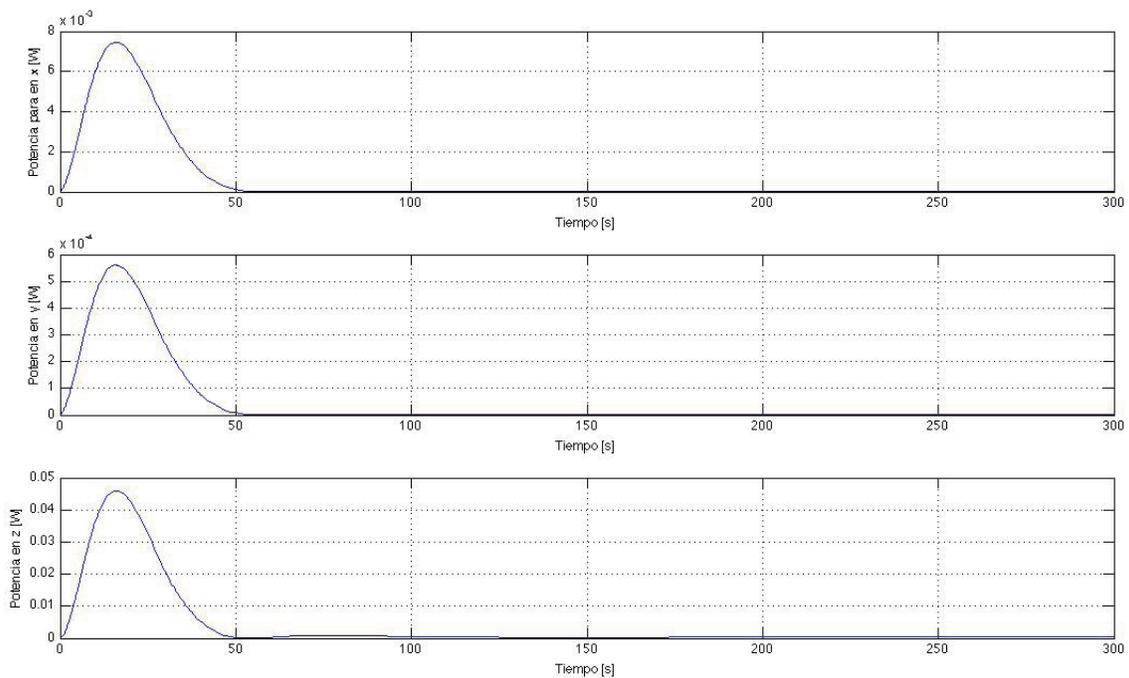


Fig. 4.14. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales para el control de la orientación.

En las gráficas obtenidas para esta simulación se puede observar, un tiempo de levantamiento aproximado de 45[s], y un sobrepaso menor a un 0.4°. En cuanto a la potencia, se observa un pico de consumo de 40 [mW] en el eje z durante la maniobra de control, con duración de 50 [s], que tiende a cero en estado estable que se alcanza en 200 [s].

Prueba: Satélite pequeño cubo 100 Kg

En el siguiente caso para las simulaciones se plantea un satélite en órbita con ruedas inerciales como actuadores, la geometría sería la de un cubo de 50 cm por lado, con una desviación del centro de masa de 3 cm con respecto al centro de gravedad y una masa de 100 kg.

Para esta configuración del satélite la matriz de inercia es:

$$I = \begin{bmatrix} 4.16 & 0 & 0 \\ 0 & 4.16 & 0 \\ 0 & 0 & 4.16 \end{bmatrix} kg\ m^2$$

En las Figuras 4.15 a 4.17 se puede observar la evolución de la orientación de cada eje al ejecutarse el programa de control. Para este caso se consideró que los ángulos iniciales eran de 9° para alabeo, 3° para cabeceo y -6° para guiñada.

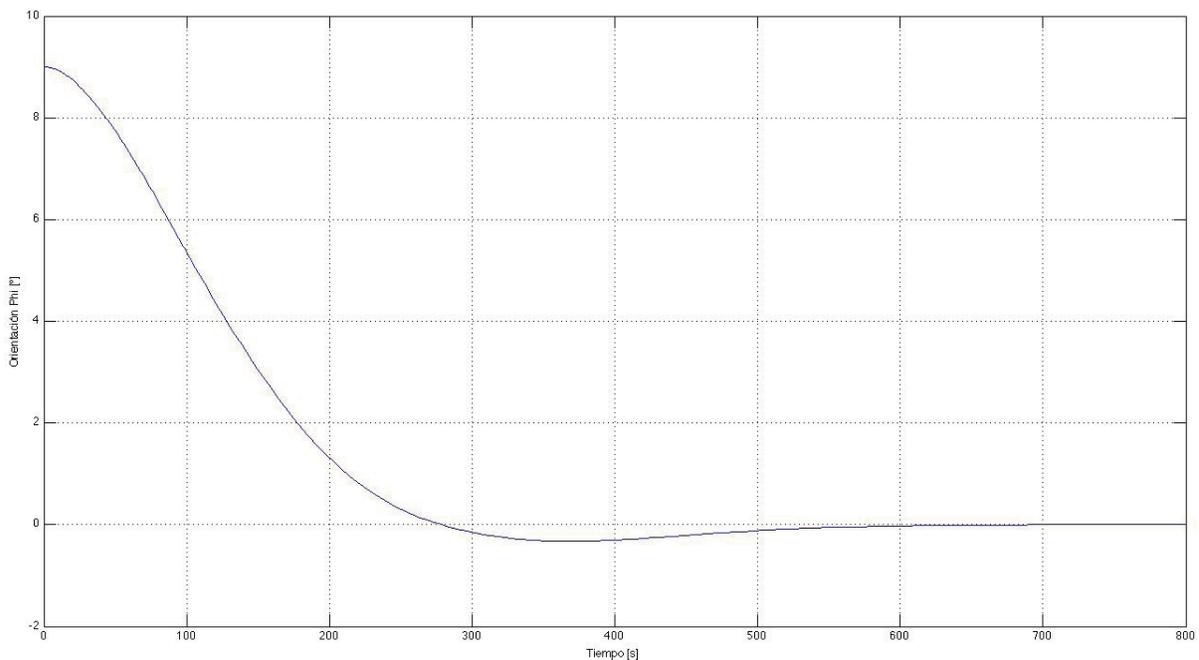


Fig. 4.15. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.

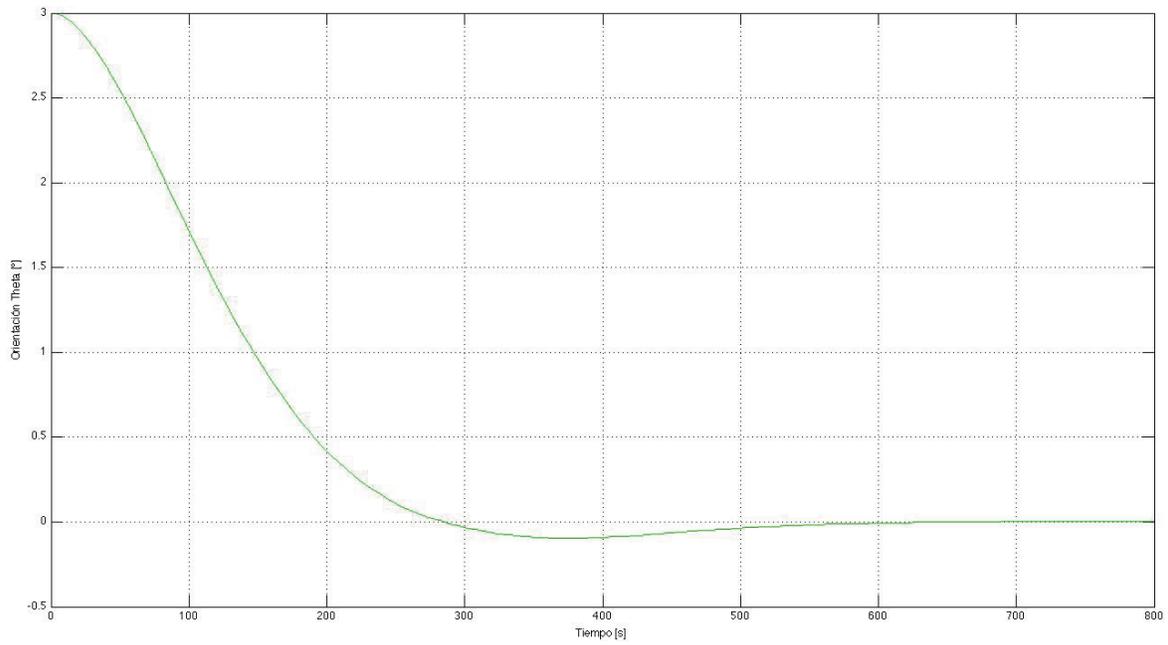


Fig. 4.16. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.

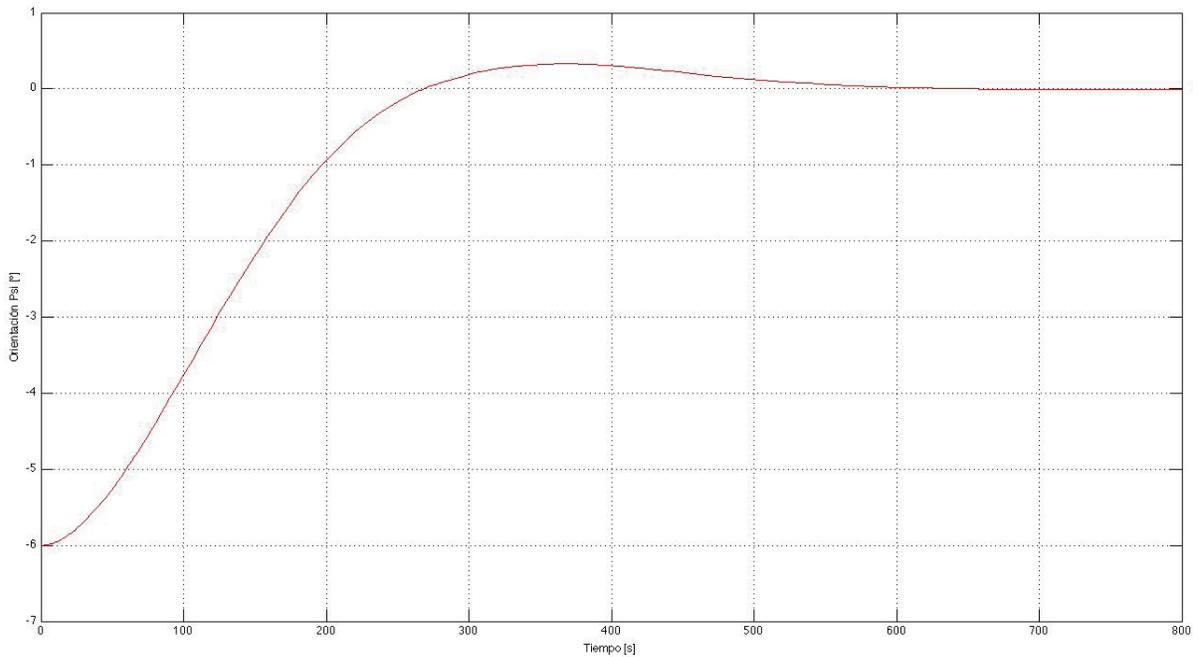


Fig. 4.17. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.

Finalmente para esta simulación, se presenta la gráfica correspondiente a la potencia consumida por las ruedas inerciales en las maniobras de control de orientación (ver Fig. 4.18).

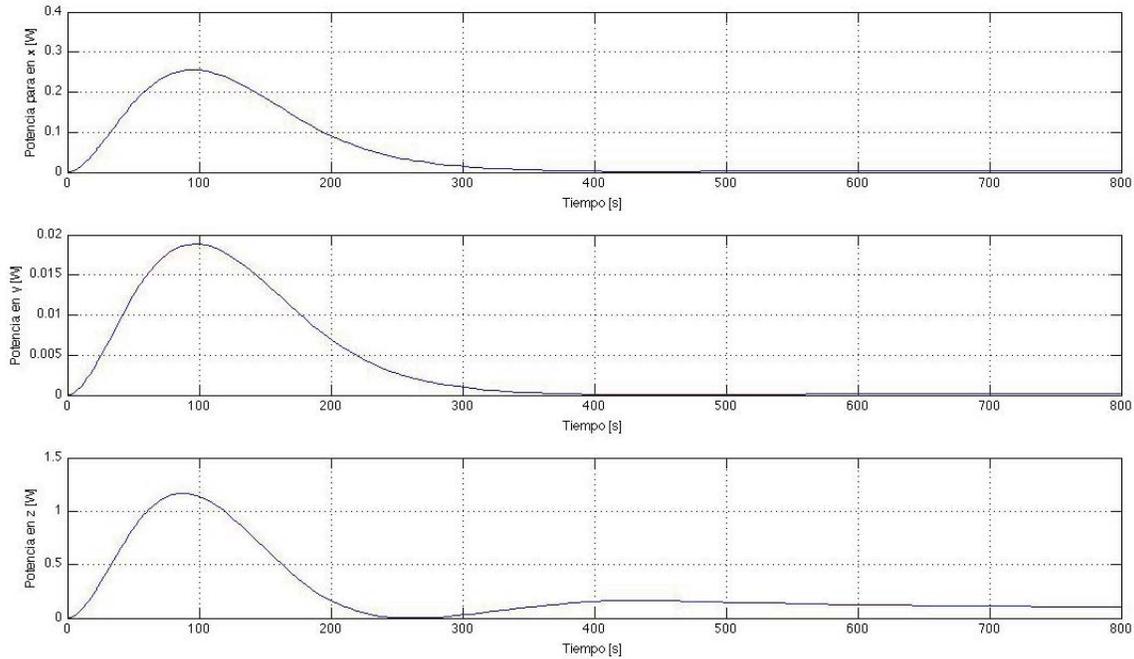


Fig. 4.18. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales.

En este experimento las gráficas muestran que, al tratarse de un satélite más grande, el tiempo de levantamiento es aproximadamente de 300[s], con un sobrepaso de 0.3°. La estabilización se logra cerca de los 700[s]. Como es de esperarse en este caso, el consumo de potencia se incrementa, en el caso del actuador en el eje Z, se alcanza un pico de 1.3 [W]. Se puede observar que la rueda inercial de este eje, continúa en funcionamiento una vez se ha alcanzado la estabilización, esto es debido a los pares perturbadores, principalmente al arrastre aerodinámico y a la presión de la radiación solar, que se encuentran presentes durante el recorrido del satélite por la órbita.

Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 100 Kg

La configuración en este caso corresponderá a un satélite con forma de un prisma rectangular con dimensiones 40x30x70 cm, y 100 Kg de masa. Las maniobras de orientación programadas llevarán al satélite desde los ángulos iniciales 7, -3 y 5 hasta cero. La matriz de inercia correspondiente a este caso será:

$$I = \begin{bmatrix} 4.833 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4167 & 0 \\ 0 & 0 & 2.08 \end{bmatrix} kg m^2$$

En las Figuras 4.19 a 4.21 se muestra la evolución de los ángulos phi, theta y psi al aplicar el control de orientación.

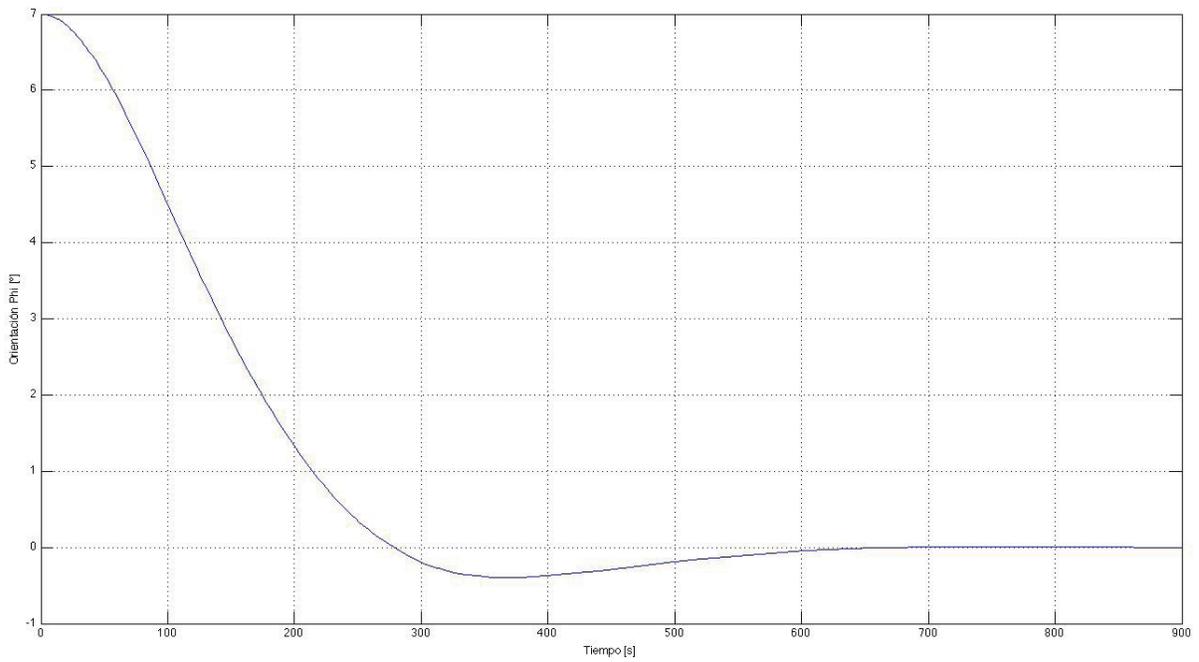


Fig. 4.19. Comportamiento del satélite en el ángulo ϕ o de alabeo.

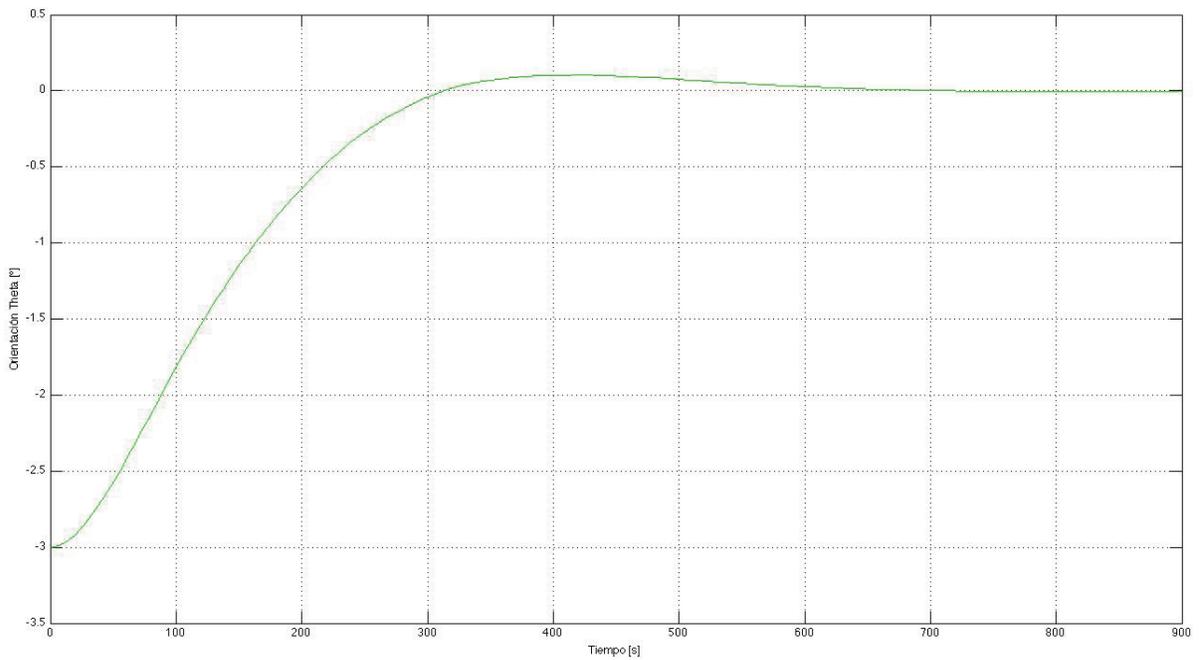


Fig. 4.20. Comportamiento del satélite en el ángulo θ o de cabeceo.

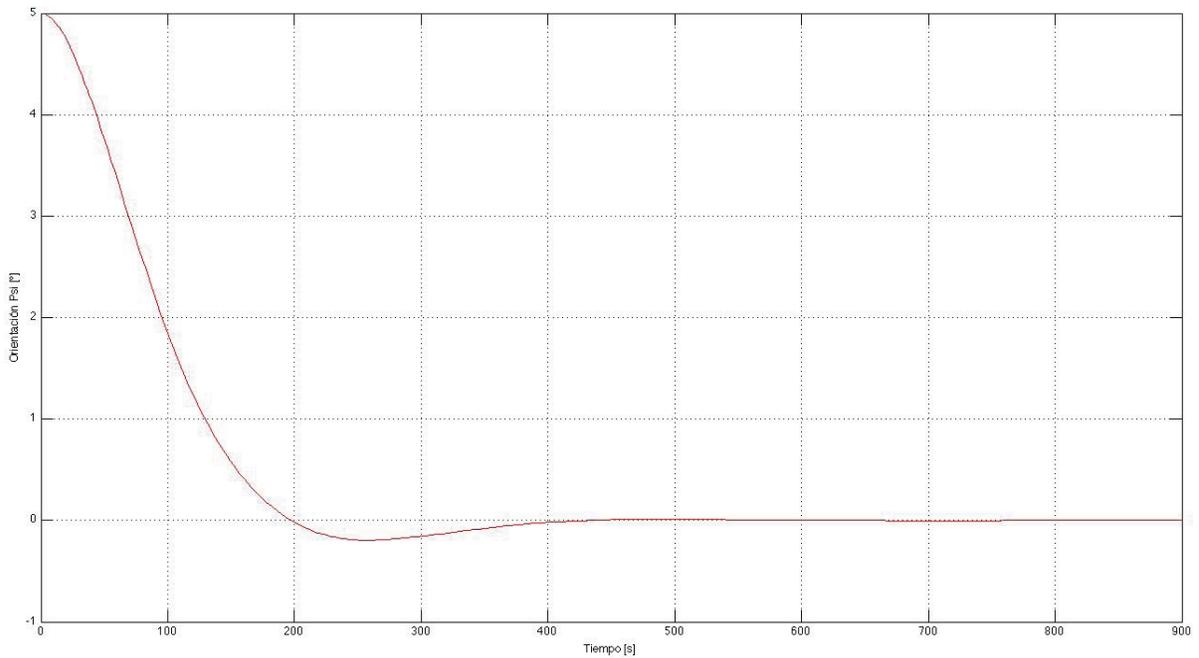


Fig. 4.21. Comportamiento del satélite en el ángulo ψ o de guiñada.

En la Figura 4.22 se presenta la gráfica correspondiente a la potencia consumida por las bobinas magnéticas durante las maniobras de control de orientación.

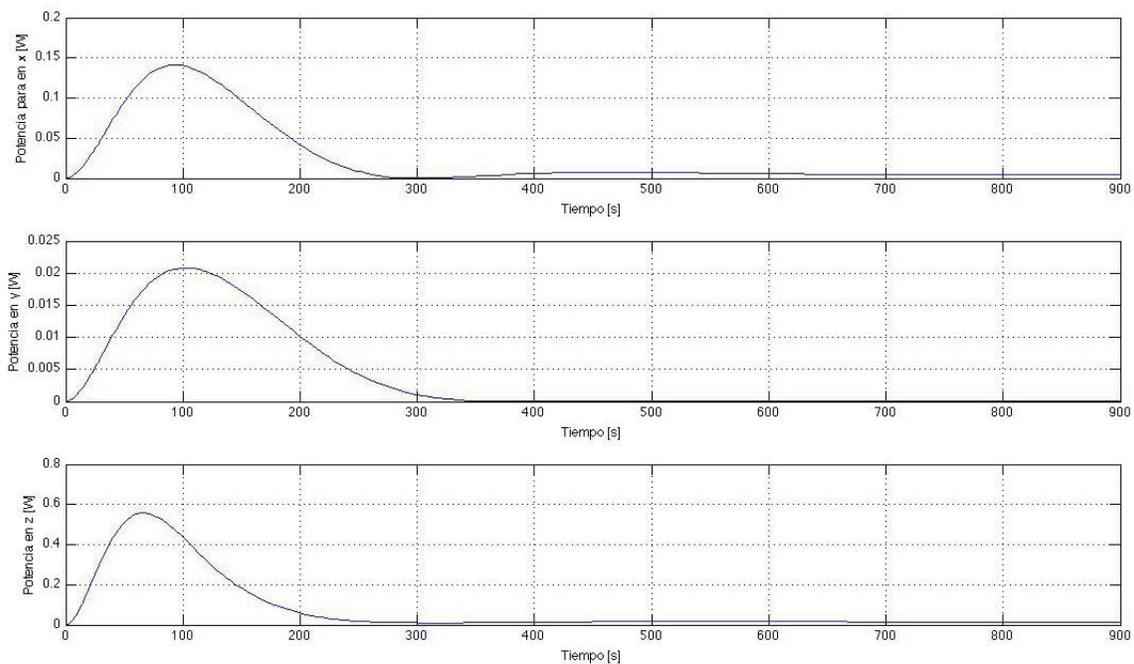


Fig. 4.22. Gráficas de la potencia requerida por las ruedas inerciales.

En este caso el tiempo de levantamiento es aproximadamente de 300[s], con un sobrepaso máximo de 0.4° . La estabilización se logra cerca de los 750[s], para ϕ y

Diseño y simulación del control de orientación

θ y 500[s] para el ángulo ψ . Al igual que el caso anterior, el consumo de potencia se incrementa, en el caso del actuador en el eje Z, se alcanza un pico de 0.5 [W].

4.5.2 Satélite con bobinas magnéticas como actuadores

Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 70 Kg

Se plantea en este caso una configuración del satélite con forma de un prisma rectangular con dimensiones 40x30x70, y con 70 kg de masa.

Los actuadores serán las bobinas magnéticas. Se consideran los efectos del gradiente gravitacional, el arrastre atmosférico y de la presión solar sobre el satélite.

En la tabla 4.2 se enlistan las condiciones para estas simulaciones

Tabla 4.2. Parámetros utilizados en las simulaciones.

Parámetro	Valor
Velocidad angular inicial	$\omega_{ob}^b = [0 \ 0 \ 0]'$
Ángulos de Euler deseados	[0 0 0]
Tipo de Órbita	Circular polar
Altitud de la órbita	570 km
Inclinación	97°
Periodo orbital	98.48 min
Desviación del centro de masa	3 cm
Precisión del apuntamiento deseado	$\pm 0.1^\circ$

Para esta configuración la matriz de inercia del satélite es:

$$I = \begin{bmatrix} 3.390 & 0 & 0 \\ 0 & 3.813 & 0 \\ 0 & 0 & 1.472 \end{bmatrix} kg \ m^2$$

Al programar las características del satélite en Simulink®, se obtiene el comportamiento que se observa en las gráficas de las Figuras 4.23 a 4.25.

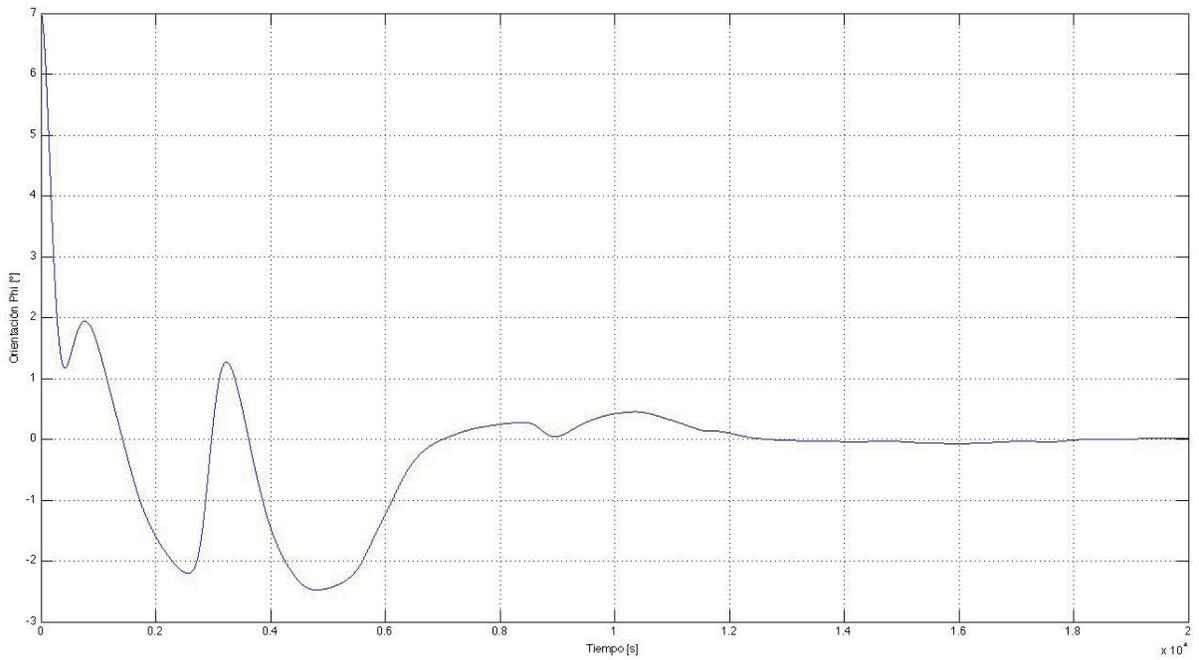


Fig. 4.23. Gráfica de la evolución del ángulo ϕ .

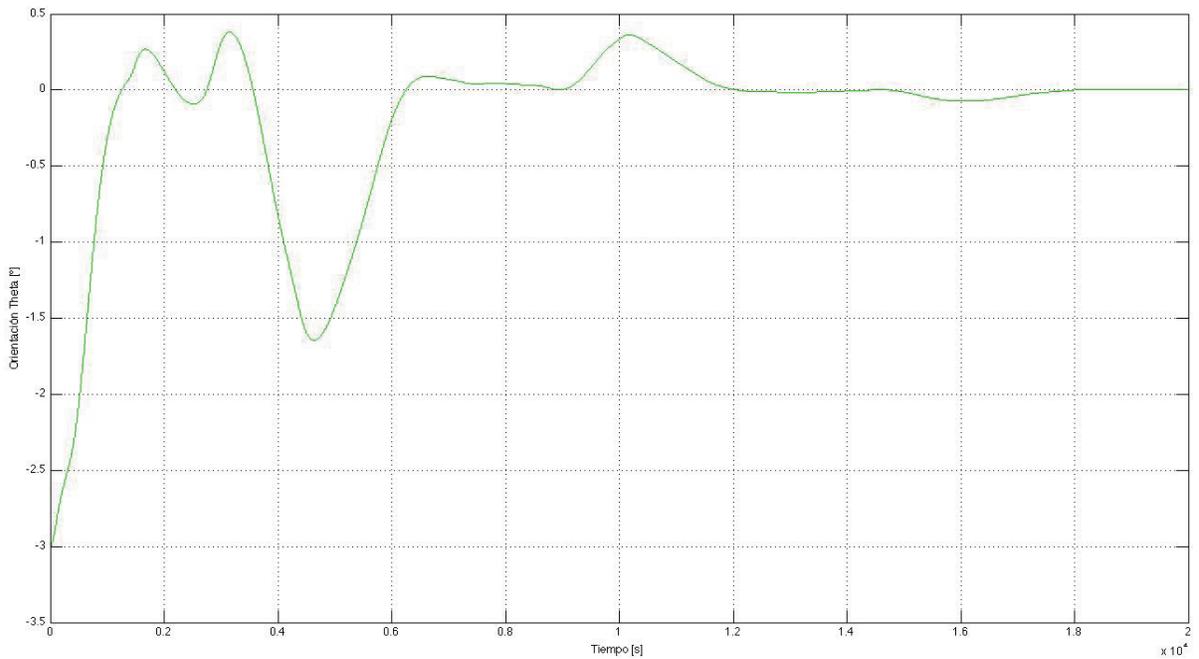


Fig. 4.24. Gráfica de la evolución del ángulo θ .

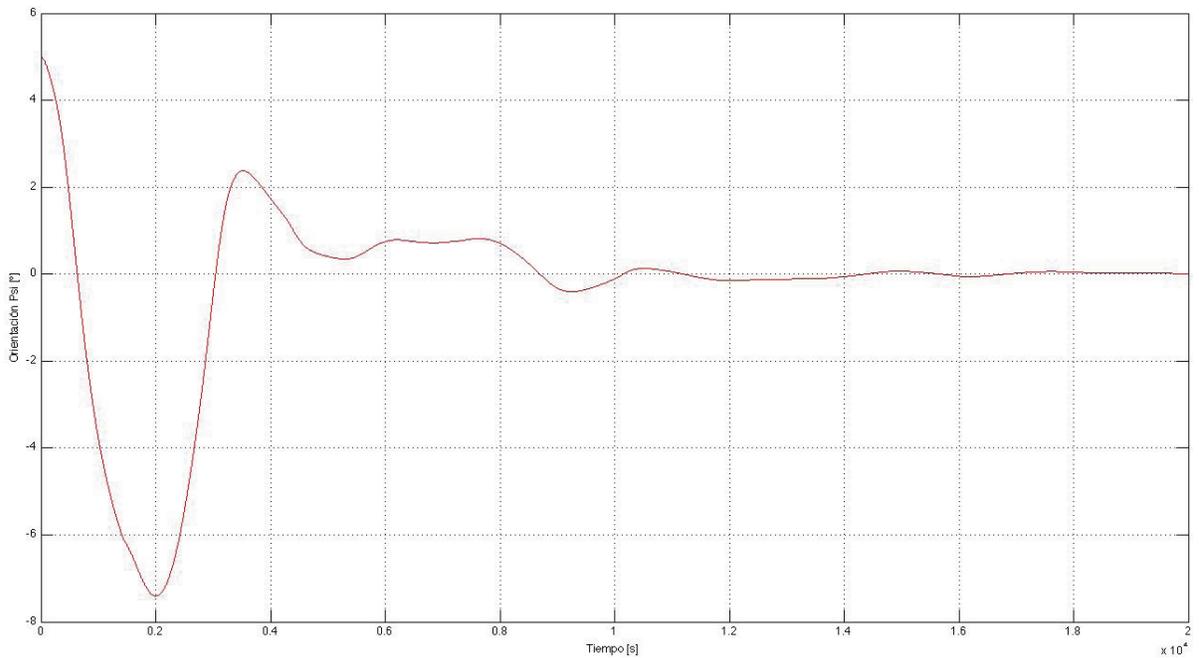


Fig. 4.25. Gráfica de la evolución del ángulo ψ .

En la Figura 4.26 se presenta la gráfica correspondiente a la potencia consumida por las bobinas magnéticas durante las maniobras de control de orientación.

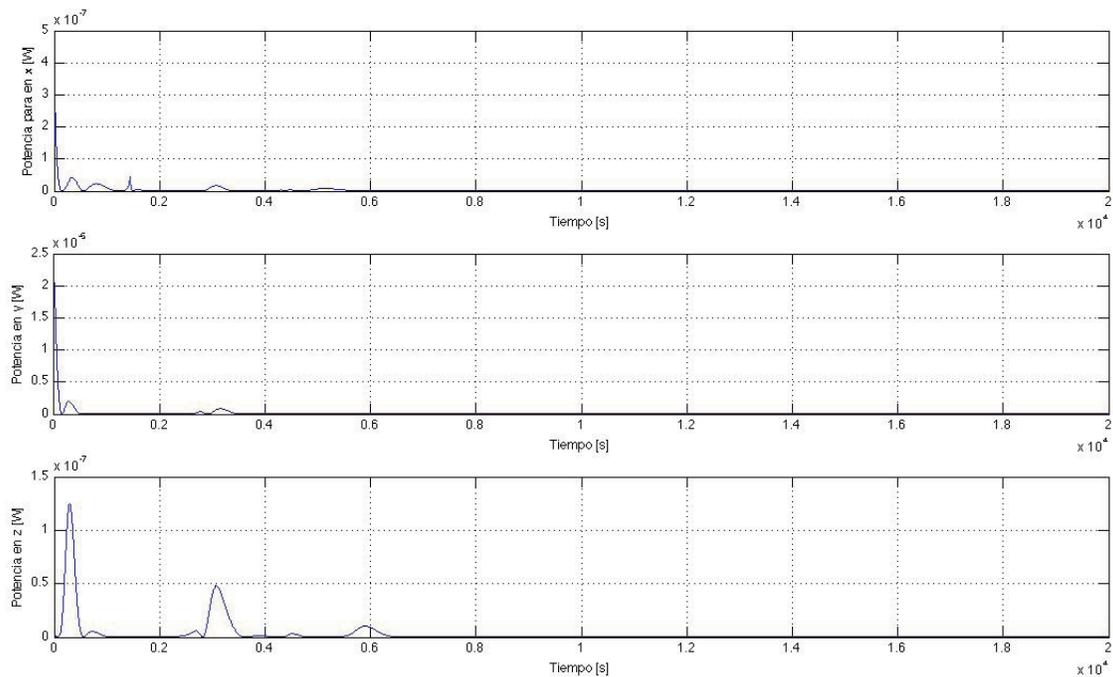


Fig. 4.26. Gráficas de la potencia requerida por las bobinas magnéticas.

Diseño y simulación del control de orientación

En este experimento, con las bobinas de par magnético, las gráficas muestran un comportamiento completamente distinto que cuando se utilizan ruedas inerciales. Se observa una respuesta oscilatoria, que puede deberse a que las bobinas interactúan con el campo magnético terrestre, de acuerdo al modelo proporcionado por Simulink. Para esta simulación, la estabilización se logra después de 18000 [s], un tiempo tres veces mayor al requerido con el uso de las ruedas inerciales. De la gráfica de consumo de potencia se observan varios picos, que se ven reflejados en la evolución de la orientación del satélite, con un valor máximo de 2.7 [mW], que representa una ventaja en comparación con el uso de las ruedas inerciales.

Prueba: Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 cm, 100 Kg

La configuración en este caso corresponderá a un satélite con forma de un prisma rectangular con dimensiones 40x30x70 cm, y 100 Kg de masa, siendo el mismo experimento realizado anteriormente con las ruedas inerciales como actuadores, con lo que se podrá realizar una comparación directa entre los dos algoritmos.

Las maniobras de orientación programadas llevarán al satélite desde los ángulos iniciales -6, 3 y 9 hasta cero.

La matriz de inercia correspondiente a este caso será:

$$I = \begin{bmatrix} 4.833 & 0 & 0 \\ 0 & 5.416 & 0 \\ 0 & 0 & 2.083 \end{bmatrix} kg\ m^2$$

En las Figuras 4.27 a 4.29 se muestra el cambio en la orientación de los ángulos phi, theta y psi al aplicar el control de orientación.

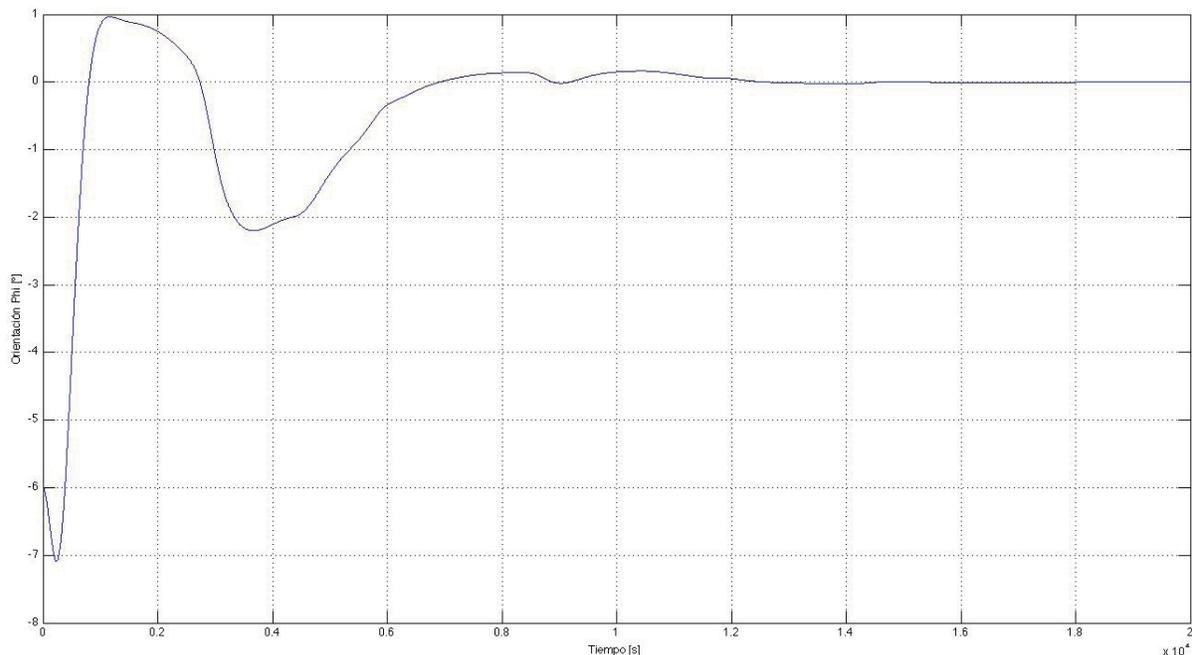


Fig. 4.27. Cambio en la orientación en el ángulo ϕ .

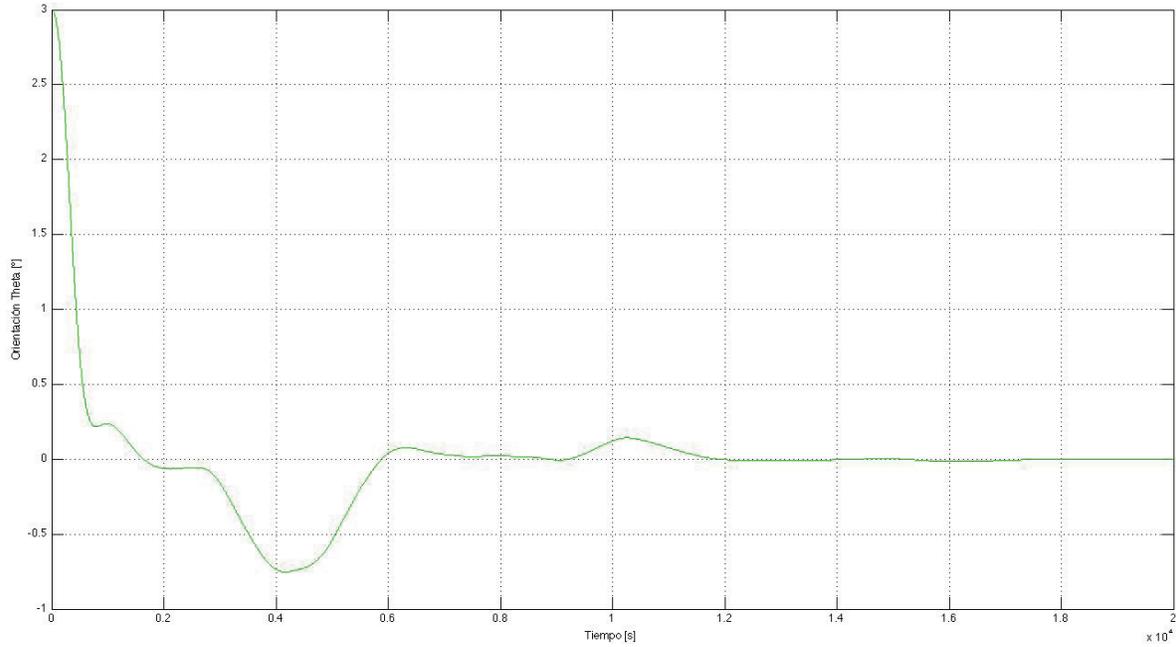


Fig. 4.28. Cambio en la orientación en el ángulo θ .

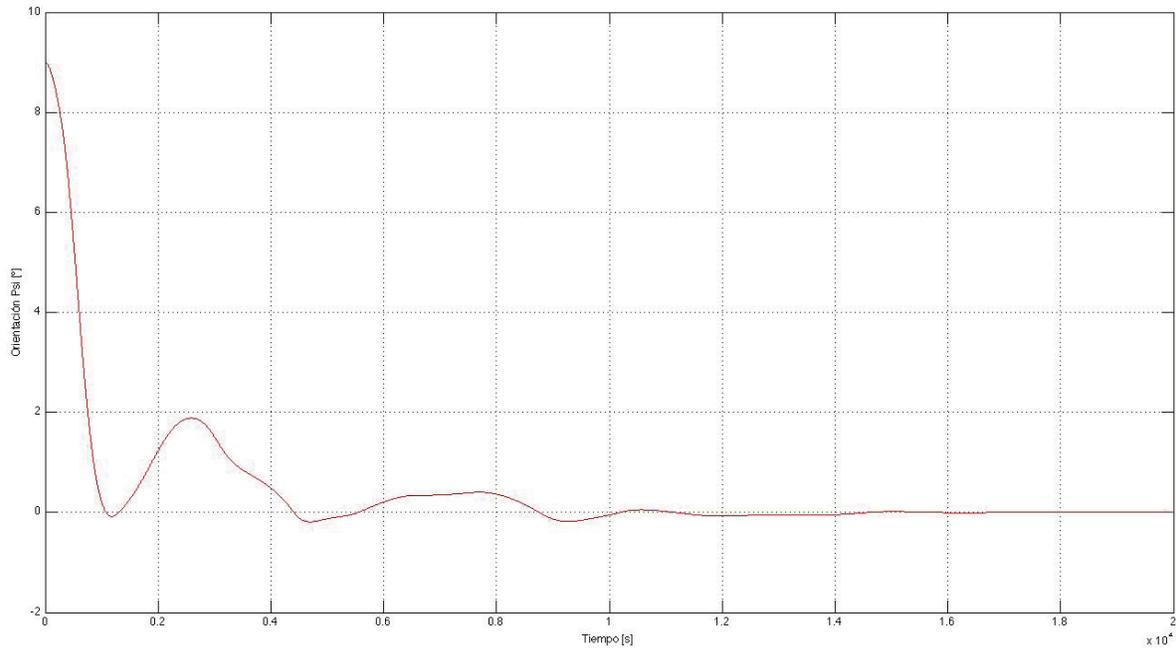


Fig. 4.29. Cambio en la orientación en el ángulo ψ .

Por último se presenta la gráfica del consumo de potencia en las bobinas magnéticas para llevar al satélite al apuntamiento designado (fig. 4.30).

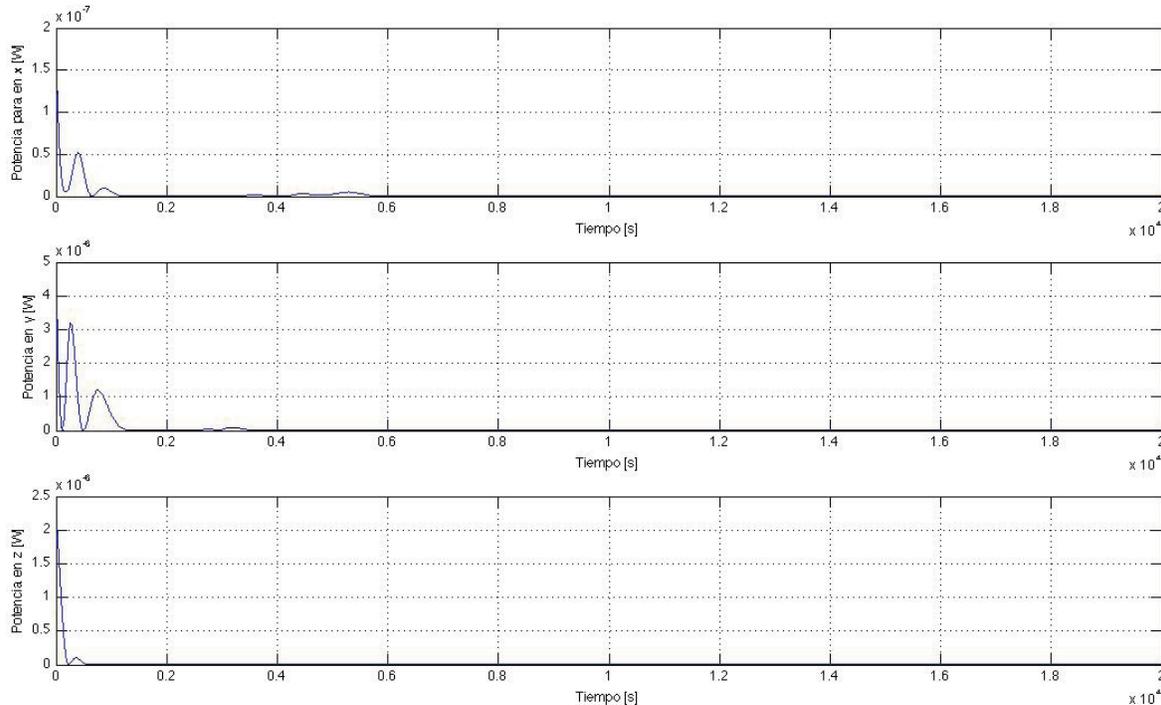


Fig. 4.30. Gráficas de la potencia requerida por las bobinas magnéticas.

En este último experimento con las bobinas de par magnético, del mismo modo que en el caso anterior, las gráficas muestran un comportamiento oscilatorio durante la maniobra de control, que logra alcanzar el estado estable después de 1800 [s]. En cuanto al consumo de potencia se tiene un valor máximo de 2.7 [mW].

Hasta aquí se han presentado los datos que arrojan las simulaciones del control de orientación en distintas configuraciones. Se han obtenido las gráficas correspondientes al cambio en el apuntamiento a través del tiempo, durante las maniobras del control de orientación y estabilización en tres ejes. Finalmente, se obtiene el dato de la potencia que consumiría cada uno de los actuadores en cada caso para lograr el apuntamiento deseado.

En el próximo capítulo se presentará el análisis de los resultados y las conclusiones del trabajo realizado.

5. Resultados y conclusiones

En esta sección se analizan los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas realizadas en el capítulo anterior y se dan las conclusiones a las que se ha llegado en este trabajo.

5.1. Resultados

A partir de las gráficas obtenidas y en las simulaciones, se puede observar el comportamiento de la orientación que tendría un satélite en órbita, en dos configuraciones distintas, uno con ruedas inerciales como actuadores bajo un esquema de control LQR, y otro bajo el mismo esquema de control pero con bobinas de par magnético como actuadores. En la tabla 5.1 se presentan los tiempos que tarda el sistema de control de orientación para llevar al satélite a la posición deseada, para cada caso.

Tabla 5.1. Tiempo de orientación y estabilización del apuntamiento.

Prueba	Tiempo apuntamiento ϕ [s]	Tiempo apuntamiento θ [s]	Tiempo apuntamiento ψ [s]
SIMUSAT Ruedas inerciales	250	230	200
Micro Satélite Cubo 40x40x40 cm 10 Kg Ruedas inerciales	140	120	110
Satélite pequeño cubo 50x50x50 100 Kg Ruedas inerciales	800	600	700
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 100 Kg Ruedas inerciales	950	900	700
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 70Kg Bobinas magnéticas	1700	1900	1800
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 100 Kg Bobinas magnéticas	1200	1400	1400

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Otro de los datos que se presentan para evaluar la viabilidad de los algoritmos desarrollados, es el consumo de energía por parte de los actuadores durante las maniobras de reorientación y estabilización del apuntamiento, dado que el sistema de potencia del aparato puede estar limitado. En la tabla 5.2 se presenta el consumo de energía para cada caso estudiado.

Tabla 5.2. Consumo de energía por parte del actuadores.

Prueba	Apuntamiento ϕ [mW]	Apuntamiento θ [mW]	Apuntamiento ψ [mW]
SIMUSAT Ruedas inerciales	80	8	1.6
Micro Satélite Cubo 40x40x40 10 Kg Ruedas inerciales	60	100	800
Satélite pequeño cubo 50x50x50 100 Kg Ruedas inerciales	10,000	120	14,000
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 10 Kg Ruedas inerciales	100	15	300
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 10 Kg Bobinas magnéticas	2.7	2.7	2.7
Satélite pequeño prisma rectangular 40x30x70 70 Kg Bobinas magnéticas	1.6	1.6	1.6

En los experimentos realizados considerando a las ruedas inerciales como actuadores, las gráficas de las simulaciones realizadas muestran un comportamiento subamortiguado, con un sobrepaso máximo de 0.3° . Dicho sobrepaso se puede considerar mínimo en comparación con la precisión deseada para el apuntamiento, fijada en 0.1° , tomando en cuenta que en estado estable se logra dicha precisión. En estos experimentos, el tiempo que se requieren para lograr el apuntamiento estable en los distintos casos es hasta 5 veces menor al requerido con las bobinas de par magnético, pero con un consumo de potencia hasta 10 veces mayor, en un lapso menor de tiempo. Adicionalmente, se observa que en al menos un eje se mantiene en funcionamiento un actuador, esto es debido a que se han considerado fuerzas producidas por el arrastre atmosférico, gradiente gravitacional y por radiación solar que están siempre presentes en el trayecto del satélite y que, aunque sus efectos son

mínimos si no se contrarrestan pueden acumularse y provocar un cambio en la orientación o en la posición orbital del aparato.

En el caso de los experimentos realizados con las bobinas de par magnético como actuadores, el comportamiento observado en las gráficas se muestra oscilatorio, esto debido a que el par de control proporcionado por este conjunto de actuadores es pequeño en comparación con el que proveen las ruedas inerciales. Otro factor que explica la evolución de la orientación es la interacción de las bobinas con el campo geomagnético, cuya magnitud varía de acuerdo a la posición orbital del satélite y a la orientación del mismo.

Por otra parte, el tiempo en que se realiza el control y se llega al estado estable es considerablemente mayor al requerido por las ruedas inerciales, pero con un consumo de potencia mucho menor.

5.2. Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido el desarrollar y simular algoritmos de control de orientación para su implementación en satélites artificiales, que dónde se consideraron los pares perturbadores más importantes del medio ambiente espacial, como son: el gradiente gravitacional, el arrastre atmosférico y la presión que ejerce el viento solar. Para lograr este objetivo, se llevó a cabo una revisión general de los modelos matemáticos indispensables para el control de orientación de satélites, a partir de la cual se seleccionó uno de ellos, mismo que fue implementado por programación en Simulink®, permitiendo así la simulación de dicho modelo por computadora.

Como resultado de este desarrollo, se cuenta con dos algoritmos para el control de orientación de un satélite artificial; el primero considera a las ruedas inerciales para generar los pares de control y el segundo a las bobinas magnéticas como actuadores primarios.

Los modelos de simulación implementados permiten evaluar los requerimientos de un satélite en órbita, en condiciones más realistas, al considerar los pares externos que perturbarían la orientación, tales como el arrastre aerodinámico provocado por la interacción de las partículas que se encuentran más allá de la atmósfera, con la superficie de la nave, el gradiente gravitacional producto de la distribución no homogénea la masa de la Tierra, causando un efecto de interacción de fuerzas gravitacionales sobre el satélite y el par provocado por la presión de la radiación solar, cuya magnitud está directamente relacionada con las dimensiones y características de la superficie de la nave. Para lograr esto, se desarrollaron los modelos matemáticos de estos pares. Al observar las gráficas de las distintas simulaciones, se puede concluir que aunque los pares perturbadores tienen magnitudes relativamente pequeñas, tienen un gran efecto sobre el consumo de potencia al encender los actuadores, incluso en estado estable.

A partir de las gráficas y de las tablas con los datos obtenidos de las simulaciones, observamos que un satélite con un sistema de control de orientación con ruedas inerciales como actuadores responde más rápido y es capaz de corregir el apuntamiento para una desviación mayor. Por otra parte, al comparar la prueba realizada para la misma configuración del satélite para los dos algoritmos, se observa

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

que, el tiempo en el que las bobinas magnéticas corrigen la orientación es más del doble del que se requiere con las ruedas inerciales, pero el consumo de energía es menos de una décima parte de lo que se requiere para la misma maniobra. El uso de ruedas inerciales presenta una desventaja importante que es el consumo de una cantidad mayor de energía en poco tiempo, además de representar más masa y espacio dentro del satélite. Con este análisis se puede concluir que los algoritmos desarrollados pueden ser utilizados para llevar la orientación de un satélite a su estado estable, cuando la velocidad angular inicial es cero.

Por último, podemos comentar que se cumplió con el objetivo planteado al inicio de este trabajo de tesis, al desarrollar dos algoritmos para lograr el control de orientación de un satélite en órbita, bajo un esquema de control óptimo.

Como recomendación para trabajo futuro se tendrían que integrar ambos algoritmos para efectuar otras maniobras, dependiendo de la disponibilidad de energía. Además está la necesidad de desaturar las ruedas inerciales, esto implica frenarlas imprimiendo un par al satélite, por lo que es necesario corregir esta perturbación con una fuerza externa proporcionada por las bobinas magnéticas.

APÉNDICE A: Bloques De Simulación en SIMULINK Y MATLAB

A continuación se detallan los bloques de SIMULINK y el código de MATLAB desarrollados en la simulación de los modelos del satélite.

En la Figura A.1 se muestra el diagrama general para la simulación de los algoritmos de control de orientación:

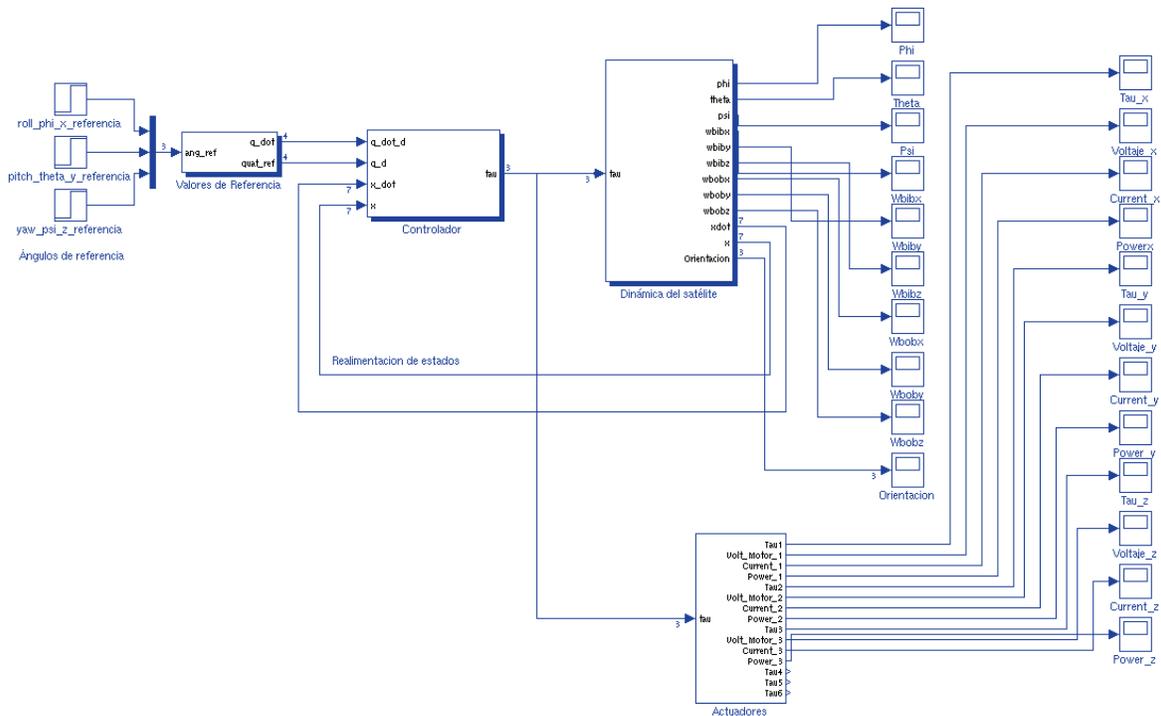


Fig. A.1. Diagrama de Bloques general para la simulación de los algoritmos de control de orientación de satélites pequeños.

En la figura anterior, se tiene la configuración del control de orientación de acuerdo al esquema de control mostrado en la Figura 4.3. En este caso, los ángulos de referencia mostrados corresponden al valor deseado de la orientación del satélite, establecidos todos en cero. En el bloque de valores de referencia, detallado en la Figura A.2 se realiza una transformación de los valores de los ángulos de Euler a su representación en cuaterniones, dado que los cálculos internos se realizarán con este ente matemático. La entrada del bloque son los tres ángulos, alabeo, cabeceo y guiñada, que primero se expresan en radianes, este último valor entra a la función *angle2quaternions* definida en MATLAB y, finalmente, se normaliza. Adicionalmente,

APÉNDICE A

se obtiene la derivada de éste cuaternión, que se requiere en la implementación del espacio de estados.

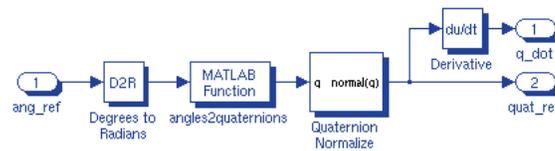


Fig. A.2. Detalle del bloque Valores de referencia.

El código de la función `angles2quaternions` se muestra a continuación:

```
function q = angle2quat(z, y, x)
%ANGLE2QUAT Convert Euler angles to a quaternion.
% Q = ANGLE2QUAT(Z, Y, X) converts Euler angles Z, Y, X, into an
% equivalent quaternion Q.

thetas = [z(:) y(:) x(:)];

c = cos(thetas/2);
s = sin(thetas/2);

q = [c(:,1).*c(:,2).*c(:,3) + s(:,1).*s(:,2).*s(:,3), ...
      c(:,1).*c(:,2).*s(:,3) - s(:,1).*s(:,2).*c(:,3), ...
      c(:,1).*s(:,2).*c(:,3) + s(:,1).*c(:,2).*s(:,3), ...
      s(:,1).*c(:,2).*c(:,3) - c(:,1).*s(:,2).*s(:,3)];
```

El siguiente bloque es el de Control que se muestra en la Figura A.3:

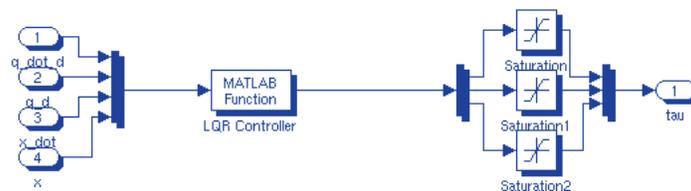


Fig. A.3. Detalle del bloque de control.

Para este bloque, se tienen como entradas el cuaternión de estado actual \mathbf{x} y la derivada del mismo \mathbf{x}_{dot} , cuyos valores son realimentados desde el bloque de la dinámica del satélite, éstos en conjunto con los valores deseados de los estados \mathbf{q}_d y \mathbf{q}_{d_dot} entran a un bloque en el que llama al script del controlador LQR. El código del controlador LQR se presenta a continuación:

```
%*****
function tau = LQR_control(in)
global Kopt
%ENTRADA DEL SISTEMA
```

```

q_dot_d = in(1:4);
q_d = in(5:8);
x_dot = in(9:15);
x = in(16:22);
%VARIABLES DEL SISTEMA
eta_dot_d = q_dot_d(1);
epsilon_dot_d = q_dot_d(2:4);

eta_d = q_d(1);
epsilon_d = q_d(2:4);

eta_dot = x_dot(1);
epsilon_dot = x_dot(2:4);
w_B_IB_dot = x_dot(5:7);

eta = x(1);
epsilon = x(2:4);
w_B_IB = x(5:7);

% VECTOR DE ESTADOS DESEADOS
x_d = [epsilon_d(1); epsilon_dot_d(1); epsilon_d(2);epsilon_dot_d(2);
epsilon_d(3); epsilon_dot_d(3)];
% VECTOR DE ESTADOS REAL
x = [epsilon(1); epsilon_dot(1); epsilon(2);epsilon_dot(2); epsilon(3);
epsilon_dot(3)];
% PAR NECESARIO
tau = - Kopt*(x - x_d);
%*****

```

De este bloque de control se obtiene el valor del par necesario para corregir la orientación actual del satélite, que es la entrada al bloque Dinámica, mostrado en la Figura A.4.

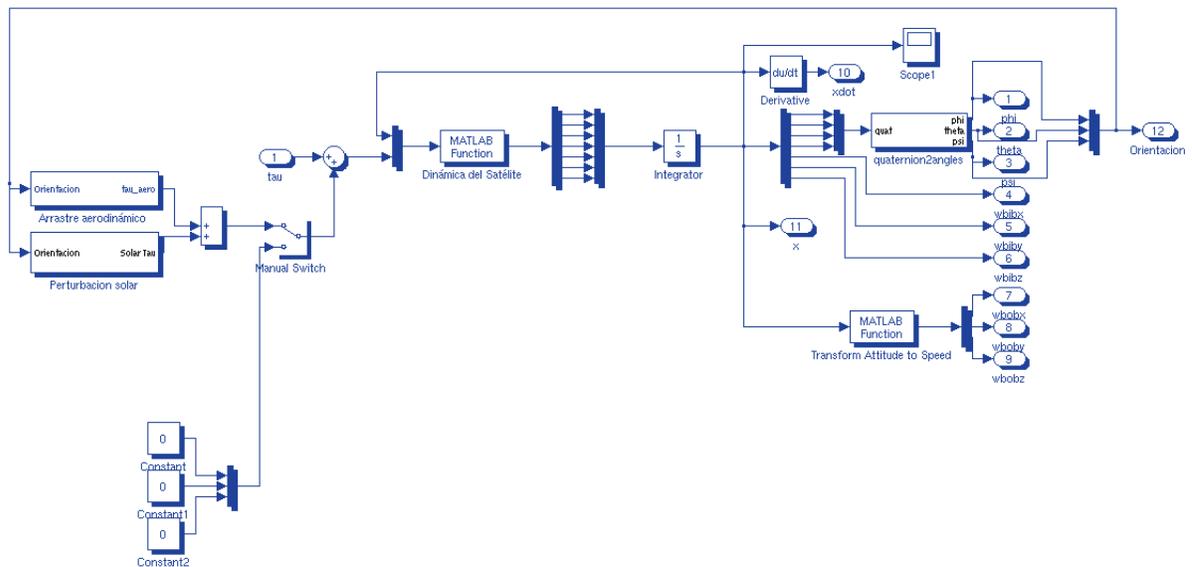


Fig. A.4. Detalle del bloque Dinámica del satélite.

APÉNDICE A

La entrada de este bloque es el par de control requerido para corregir la orientación, al cual se le suman los efectos de arrastre atmosférico y de la presión de la radiación solar. El valor par total ingresa al bloque que contiene el script para el cálculo de la dinámica del satélite, cuyo código se muestra a continuación:

```
%*****
%      Script para el cálculo de la dinámica del SATÉLITE
%*****
function output = linear_dynamics(in)
global I w_O
% Variables del espacio de estados
q = in(1:4);
w_B_IB = in(5:7);
% Entrada del sistema; Par
u = in(8:10);
% Normalización del Cuaternion
q=q/(sqrt(q(1)^2+q(2)^2+q(3)^2+q(4)^2));
eta = q(1);
epsilon = q(2:4);
% Transformación de coordenadas de w_B_IB a w_B_OB
R_O_B = Rquat(q);
R_B_O = R_O_B';
c2 = R_B_O(:,2);
w_B_OB = w_B_IB + w_O*c2;
% Par de control máximo disponible 0.01 [Nm]
u_max = 0.01;
for i = 1:3
    if abs(u(i))>u_max
        u(i) = sign(u(i))*u_max;
    end;
end;
tau_free=u;
% Se genera Ruido uniformemente distribuido
% Par con ruido
p = 0.4; % 40% de ruido añadido al par de control
noise = p*(sign(2*rand(1)-1))*[tau_free(1); tau_free(2); tau_free(3)];
tau_noise = tau_free + R_B_O*(noise);

% Cálculo del par por gradiente gravitacional
g_B = Smtrx(3*w_O^2*R_B_O(:,3))*I*R_B_O(:,3);

%Par
tau=[tau_noise(1)+g_B(1);tau_noise(2)+g_B(2);tau_noise(3)+g_B(3)];

% Ecuaciones de la dinámica del satélite
eta_dot = -(1/2)*epsilon'*w_B_OB;

epsilon_dot = (1/2)*(eta*eye(3) + Smtrx(epsilon))*w_B_OB;

w_B_IB_dot = inv(I)*(tau - Smtrx(w_B_IB)*(I*w_B_IB));

output = [eta_dot; epsilon_dot; w_B_IB_dot];
%*****
```

La salida que genera el código anterior contiene al estado actual del espacio de estados que se realimenta al bloque del controlador LQR, como se menciona anteriormente, donde, de los primeros tres valores se puede obtener la orientación actual del satélite a través del bloque llamado *quaternion2angles*. Este valor de la orientación es realimentado a los bloques que calculan los pares perturbadores del medio ambiente espacial. En las Figuras A.5 y A.6 se muestra el contenido de los bloques de *Arrastre aerodinámico* y de *Perturbación Solar*, respectivamente.

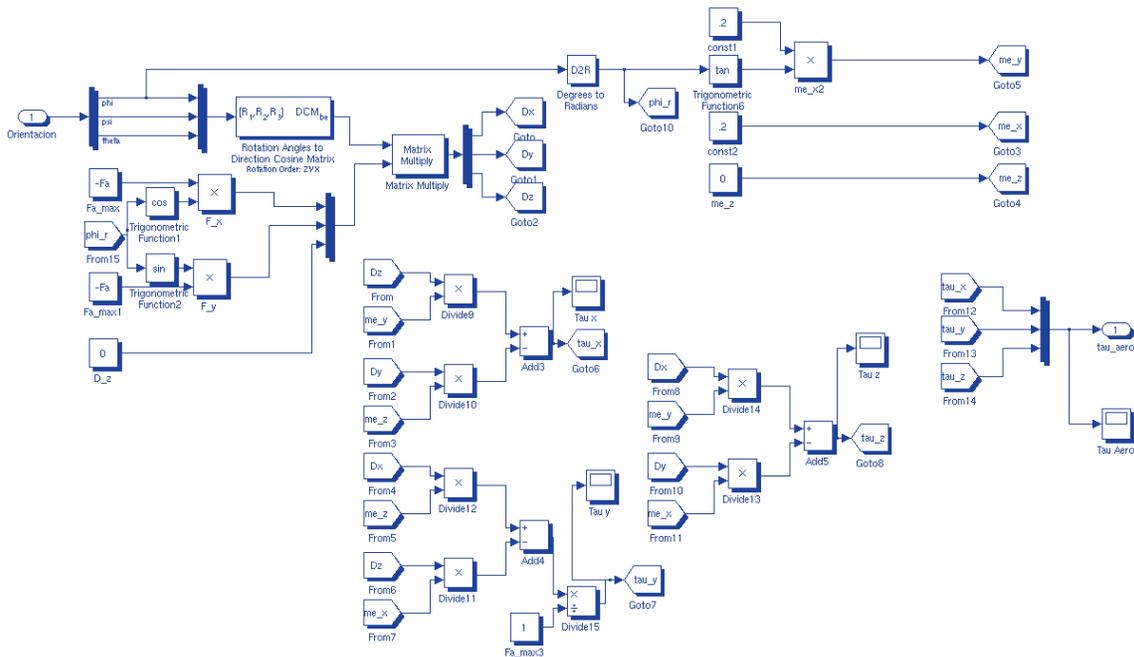


Fig. A.5. Detalle del bloque que calcula el par por arrastre atmosférico.

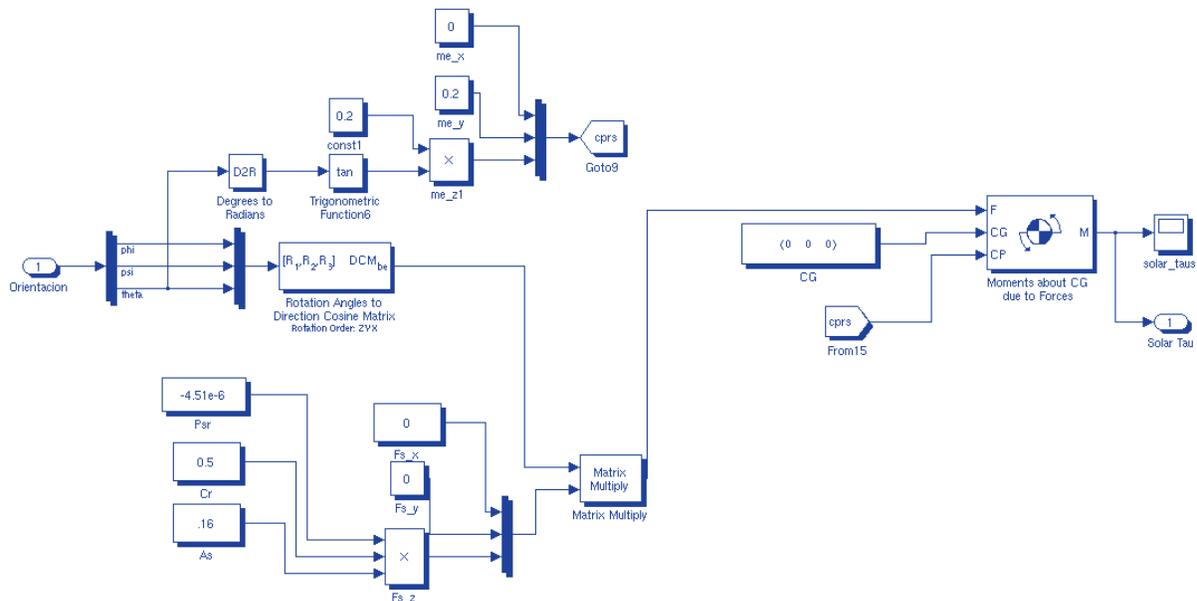


Fig. A.6. Detalle del bloque para el cálculo del par producto de la presión de la radiación solar.

APÉNDICE A

En el bloque de la Figura A.5 se implementó la ecuación deducida del arrastre aerodinámico y que se reproduce en seguida:

$$\tau_{aero} = -m_e \times R_O^B \begin{bmatrix} F_{aero}^B \cos(\varphi) \\ F_{aero}^B \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad ec. A. 1$$

En la simulación se utiliza el siguiente código para calcular la fuerza aerodinámica $F_{aero}^B = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$:

```
%% Cálculo de la densidad atmosférica para una altitud de 570 km
[T rho] = atmosnrlmsise00( 570e3, 0, 0, 2013, 1, 1);
rho=rho(6); % Se obtiene la columna 6 correspondiente a la densidad total
% Área proyectada de la nave, que es perpendicular al vector velocidad
S=0.16; % Para un cubo de 40 cm por lado
%%Coeficiente de arrastre, usualmente se selecciona entre 1 y 2
Cd=1.5; % Para un flujo molecular libre
Fa=0.5*rho*(v_O^2)*S*Cd; %%Fuerza aerodinámica máxima
%*****
```

En el caso de la perturbación de origen solar, se implementa la ecuación A.2:

$$\tau_{solar} = \frac{F_s}{c} A_s (1 + k) (c_{ps} - c_g) \cos(i) \quad ec. A. 2$$

Para calcular los efectos producidos por la radiación del sol sobre el satélite, en el bloque de la Figura A.6 se obtiene el valor del centro de presión de la radiación solar y se considera que la fuerza sólo se aplica en el eje Z. Para el cálculo del par se utiliza el bloque **Moments About CG due to Force**, incluido en el conjunto de funciones del bloque **Aerospace** de *Simulink*.

El siguiente bloque, el de la Figura A.7, es el de actuadores con el que se obtendrá la cantidad de potencia requerida por estos dispositivos, con los cuales se evalúa la factibilidad del algoritmo implementado.

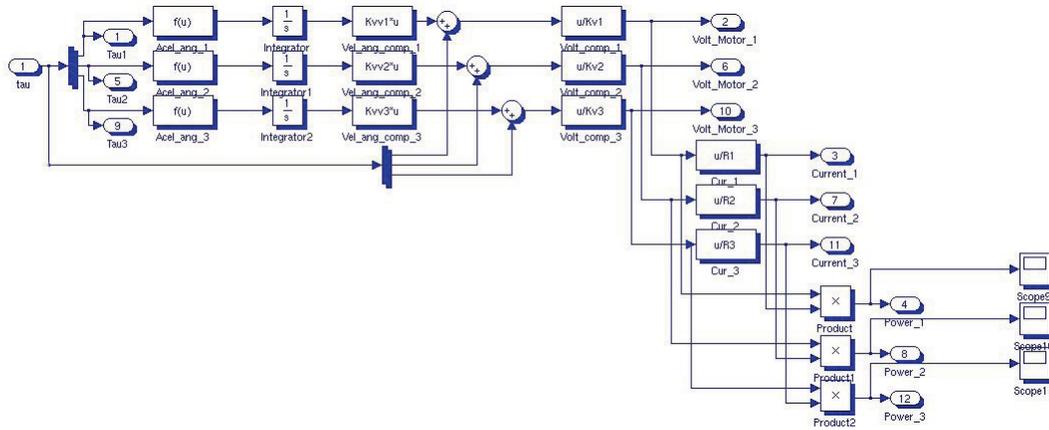


Fig. A.7. Detalle del Bloque de Actuadores.

El proceso a seguir para realizar las simulaciones, consiste en abrir y correr el script que contiene el código de inicialización de las variables que se utilizan durante el algoritmo de control. El código de dicho script es el siguiente:

```

%*****
%ARCHIVO DE INICIALIZACIÓN DE VARIABLES
%*****
clc
clear all;
global I w_O K Kopt Ixx Iyy Izz Ixxinv Iyyinv Izzinv
% Se define la MATRIZ DE INERCIA de acuerdo a la masa y geometría del
satélite
%Plataforma de Simulación CASO 1
Ixx=4.1667;
Iyy=4.1667;
Izz=4.1667;
%%NanosatElite CASO 2
Ixx=0.098;
Iyy=0.103;
Izz=0.021;
%MicrosatElite CASO 3
% Ixx=3.390;
% Iyy=3.813;
% Izz=1.472;

I = [Ixx 0 0;0 Iyy 0;0 0 Izz]; %Matriz de Inercia
Imatinv=inv(I); %Matriz de Inercia Inversa y sus elementos
Ixxinv=Imatinv(1);
Iyyinv=Imatinv(5);
Izzinv=Imatinv(9);

%%DATOS DEL SATÉLITE
m = 10; % [kg] Masa
m = 70; % [kg] Masa
m= 150; % [kg] Masa
CG=[0.03 0.03 0.03]';
%% Definición de Variables
M = 5.9742e24; % Masa de la Tierra [kg]
G_const = 6.6720e-11; % Constante de la Gravedad
    
```

APÉNDICE A

```
E_G_C = G_const*M; % Constante de la Gravedad Terrestre [kg]
re_e = 6.378137e6; % Radio Ecuatorial de la Tierra [m]
rp_e = 6.356752e6; % Radio Ecuatorial de la Tierra [m]
h_s = 686e3; % Altura del Satélite [m]
eccentricity = sqrt(1 -(rp_e/re_e)^2); % Excentricidad de la órbita
r_total = re_e + h_s; % Distancia al Centro de la Tierra [m]
T_e = round(8.6164130e4); % Longitud entera del día Sideral [s]
w_E = 2*pi/(T_e); % Velocidad Angular de la Tierra [rad/s]
w_O = sqrt(E_G_C/(r_total^3)); % Velocidad Angular del Satélite [rad/s]
omega_o=w_O;
T_O = 2*pi/w_O; % Periodo Orbital del Satélite [s]
v_O = h_s*w_O; % Velocidad del Satélite [m/s]

% Cálculo de la fuerza por de Arrastre Aerodinámico
% Calculo de la densidad atmosférica con el modelo NRLMSISE-00

[T rho] = atmosnrlmsise00( 570e3, 0, 0, 2013, 1, 1) ;
rho=rho(6); % Densidad atmosférica total
S=0.16; % área proyectada de la nave, que es perpendicular al vector
velocidad
Cd=1.5; %%Coeficiente de arrastre, para un flujo molecular libre
Fa=0.5*rho*(v_O^2)*S*Cd; %%Fuerza aerodinámica máxima
%Variables para el calculo de la fuerza debida a la Radiación Solar
Krad=0.5;%%Reflectividad de la superficie de la nave (0<K<1)
Is=1400;%%Irradiación solar a una Unidad Astronómica (Distancia entre el
planeta Tierra y el Sol)
cs=2.9979e6;%%Velocidad de la luz
ps=(Is/cs);%%Relación entre la irradiación solar y la velocidad de la luz
A=0.4;% Área proyectada de la nave, normal al vector solar
Frs=(1+Krad)*ps*A;%%Fuerza de la radiación solar

% CONDICIONES INICIALES
% Orientación Inicial en ángulos de Euler
% deg_0 = (pi/180)*[30; 20; -20];
% deg_0 = (pi/180)*[0; 0; 0];
deg_0 = (pi/180)*[20; 10; -60];
%Orientación Inicial en Cuaterniones
q_0 = angle2quat(deg_0(1),deg_0(2),deg_0(3));
%Transformación de w_B_OB a w_B_IB
R_O_B = Rquat(q_0);
R_B_O = R_O_B';
c2 = R_B_O(:,2);
w_B_OB = [0; 0; 0];
w_B_IB = w_B_OB - w_O*c2;
% Vectores de Estado iniciales
w0=[w_B_IB(1); w_B_IB(2); w_B_IB(3)];
x0=[q_0(1); q_0(2); q_0(3); q_0(4); w_B_IB(1); w_B_IB(2); w_B_IB(3)];

% SISTEMA LINEAL
%Definiciones
kx = (Iyy - Izz)/Ixx;
ky = (Ixx - Izz)/Iyy;
kz = (Iyy - Ixx)/Izz;
%Modelo en variables de estado
A = [0 1 0 0 0 0; -4*kx*w_O^2 0 0 0 0 (1 - kx)*w_O; 0 0 0 1 0 0; 0 0 -
3*ky*w_O^2 0 0 0; 0 0 0 0 0 1; 0 -(1 - kz)*w_O 0 0 -kz*w_O^2 0];
```

```

B = [0 0 0;1/(2*Ixx) 0 0;0 0 0;0 1/(2*Iyy) 0;0 0 0;0 0 1/(2*Izz)];
C = [1 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 1 0];
D=0;
% Valores Característicos del Sistema Linealizado
eigenValues = eig(A);
% Controlabilidad
rang = rank(ctrb(A,B));

% CONTROLADOR LQR
% Selección de las Matrices
Q = diag([1 0 1 0 1 0])*0.007;
R = diag([1 1 1])*4500;
% Cálculo de la Ganancia para el Control óptimo
Kopt = lqr(A,B,Q,R);
%%CARACTERÍSTICAS DE LA PLATAFORMA DE SIMULACIÓN
%%Constantes de los Motores [32]

ka1=0.038;kb1=0.039;R1=2.83;Jw1=1.7092e-5;
ka2=0.038;kb2=0.039;R2=2.83;Jw2=1.7092e-5;
ka3=0.038;kb3=0.039;R3=2.83;Jw3=1.7092e-5;

% Constantes de voltaje del motor
Kv1=(kb1/R1);Kv2=(kb2/R2);Kv3=(kb3/R3);
% Constantes de velocidad angular del motor
Kvv1=(ka1*kb1/R1);Kvv2=(ka2*kb2/R2);Kvv3=(ka3*kb3/R3);
%%Inercia de las Ruedas [kg*m^2]
Iw1=1.63278e-4;Iw2=1.63278e-4;Iw3=3.08827e-5;
%%Matriz de Inercia de las ruedas
In_W=[Jw1+Iw1 0 0;0 Jw2+Iw2 0;0 0 Jw3+Iw3];%Inercia del motor más la
In_W_inv=inv(In_W); %inercia de las Ruedas

%*****
% Características de las bobinas magnéticas [16]
%
% N_x, N_y, N_z - Numero de embobinados
% A_x, A_y, A_z - irea transversal de las bobinas [m^2]
% R_x, R_y, R_z - Resistencia de las bobinas [ohm]
% i_max - Máxima corriente permitida [A]
% m_max - Momento magnético máximo [Am^2]
%*****
% Numero de embobinados
N_x = 4000;
N_y = 4000;
N_z = 4000;
% irea transversal de las bubinas [m^2]
A_x = 0.000154;
A_y = 0.000154;
A_z = 0.000154;
% Resistencia de las bobinas [ohm]
R_x = 53.7;
R_y = 53.7;
R_z = 53.7;
% Momento magnético máximo [Am^2]
m_max = 0.474;
% Máxima corriente permitida [A]
i_max=0.335;
% Constante para calcular la corriente demandada por las bobinas

```

APÉNDICE A

```
c=.00162;  
%*****
```

Una vez que se ha corrido el código anterior se pueden realizar las simulaciones requeridas. Desde SIMULINK se abre el archivo que contiene el modelo del control de orientación que se muestra en la Figura A.1. Desde el menú *simulation* se elige el tiempo que se desea simular y se inicia la simulación. Desde los bloques *scope* de SIMULINK se puede observar el transcurso de las pruebas.

APÉNDICE B: SIMUSAT, Simulador para pruebas de algoritmos control de orientación de satélites

Para poder llevar a cabo el desarrollo de pruebas de funcionamiento del subsistema de control de orientación de satélites de forma realista y objetiva, es necesario contar con un equipo que permita simular las condiciones ambientales del espacio exterior, como son: vacío, micro gravedad, falta de fricción, pares perturbadores, etc. Desde el punto de vista dinámico la característica del medio ambiente espacial mas importante es la falta de fricción. Por esta razón se debe contar con un simulador que permita el movimiento angular en los tres ejes y un medio con fricción prácticamente nula.

La estructura básica de este tipo de simuladores consiste en una plataforma móvil que permite el movimiento en los tres ejes a controlar, con fricción nula. Lo anterior se resuelve utilizando un cojinete neumático esférico para soportar a dicha plataforma. En la figura B.1 se muestra el diagrama general de la plataforma del simulador mencionado.

En el Laboratorio de Percepción Remota Alternativa y Tecnología Avanzada del Laboratorio de Análisis Geoespacial dentro del Instituto de Geografía de la UNAM, se han desarrollado diferentes versiones de simuladores satelitales, siendo la última de éstas la 3.0. del llamado SIMUSAT. Dichos proyectos han sido encaminados principalmente al desarrollo de los subsistemas de determinación de orientación y control de estabilización. Los sistemas de simulación que se han diseñado y construido permiten probar físicamente el comportamiento de algoritmos de control en conjunto con algunos sensores y actuadores. Además, hace las veces de plataforma estructural para la integración de componentes en desarrollo como sensores, actuadores y algoritmos de control, que serán incluidos posteriormente en equipos espaciales [26],[23],[6].

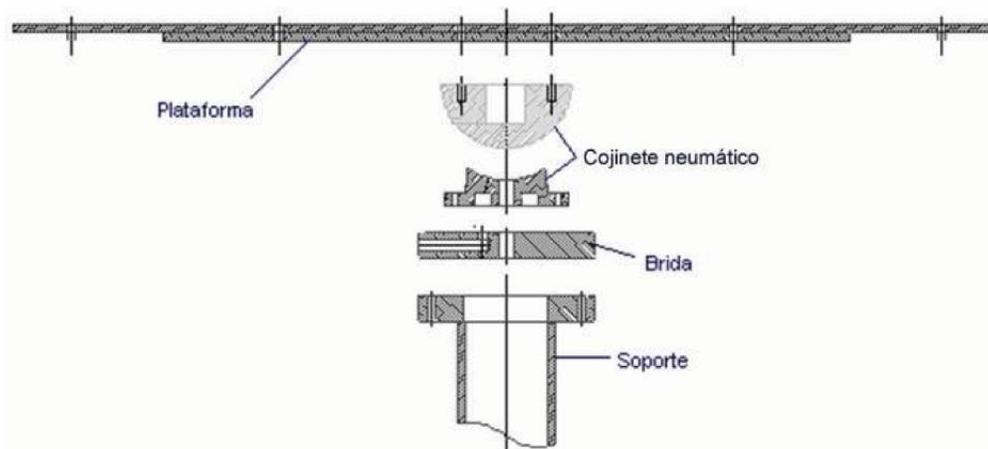


Fig. B.1. Diagrama general de la plataforma de simulación satelital.

APÉNDICE B

El sistema de simulación SIMUSAT 3.0 esta integrado por:

- a) una plataforma circular suspendida sobre un balero de aire esférico que es donde se genera un medio sin fricción,
- b) tres ruedas inerciales que constituyen el grupo de actuadores primarios para el control de orientación de la plataforma,
- c) tres bobinas magnéticas, localizadas en ejes mutuamente perpendiculares, que de-saturan las ruedas inerciales y además proporcionan un sistema de control de respaldo,
- d) dos inclinómetros y un magnetómetro que se utiliza para determinar cualquier desviación del centro de equilibrio de la plataforma, y
- e) dos masas deslizantes para el balanceo automático de la plataforma .

También se cuenta con un sistema de monitoreo inalámbrico que transmite la orientación de los tres ejes durante las pruebas. Estos datos son desplegados y almacenados, permitiendo así la evaluación de sensores, actuadores y algoritmos, como se muestra en la figura B.2.



Fig. B.2. Sistema de simulación completo SIMUSAT_2.1, a la izquierda se encuentra la plataforma y a la derecha la estación terrestre.

La plataforma SIMUSAT 3.0. Esta tiene forma circular y cuenta con 58 cm de diámetro construida con espuma de estireno emparedada por fibras de carbono-epoxi, un

balero de aire esférico multiflujo, con diámetro de 7 cm, maquinado en aluminio con acabado a espejo y con una capacidad de carga nominal de hasta 25 kg [6].

Los componentes que constituyen los subsistemas de control de orientación en la plataforma son:

- Un microprocesador Rabbit LP-3500,
- un modem inalámbrico,
- una brújula electrónica equipada con dos inclinómetros (X, Y),
- tres bobinas magnéticas,
- tres ruedas inerciales,
- seis puentes H, y
- reguladores de voltaje

En la figura B.3. se muestra el diagrama de bloques del sistema de simulación 3.0.

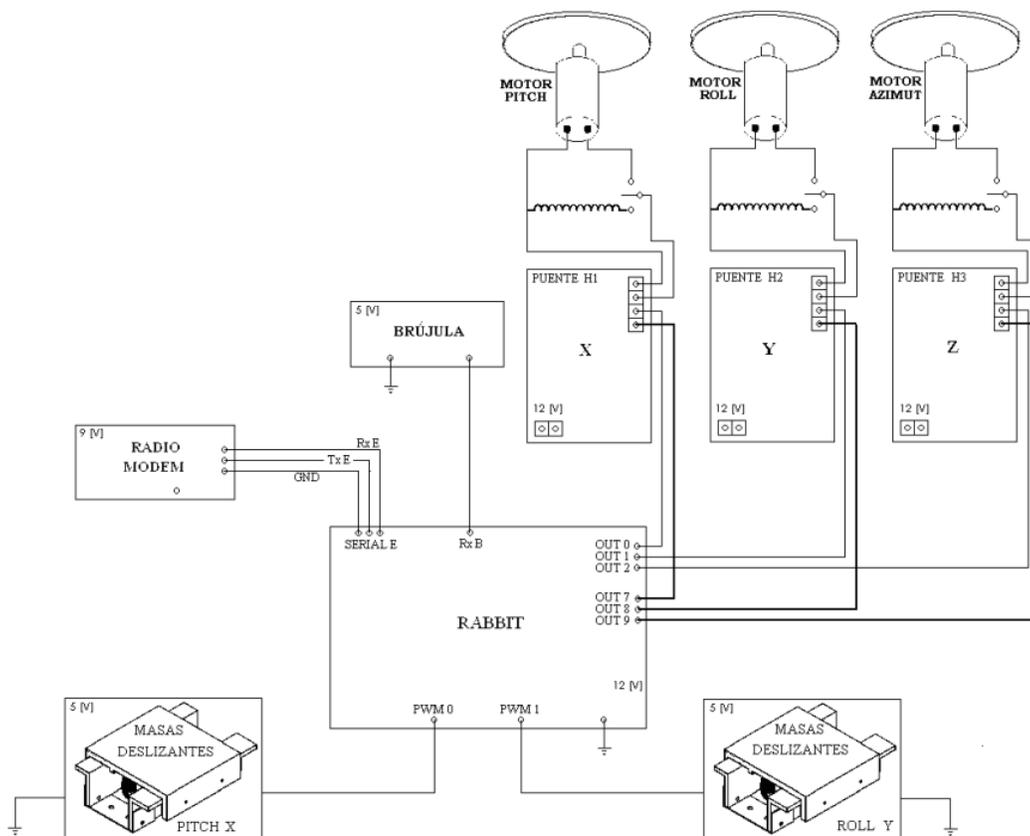


Fig. B.3. Diagrama de bloques del sistema de simulación SIMUSAT 3.0.

REFERENCIAS

BIBLIOGRAFÍA:

- [1] Auret J. (2012). "Design of an Aerodynamic Attitude Control System for a CubeSat" Tesis de Maestría, Stellenbosch University, Matieland, South Africa
- [2] Bekeryte, I. (2006). "Satellite Systems - History, definition, functioning principles and application spheres". GRIN.
- [3] Córdova, J. (2008), "Control de estabilización para un picosatélite universitario", Tesis de Licenciatura, UNAM, México DF.
- [4] Córdova, J., (2011), "Estimación y control de orientación para el nano satélite HUMSAT México", Tesis de Maestría, UNAM, México DF.
- [5] Dynacon (2006) "Dynacon Micro Wheel 200, data sheet" <http://www.dynacon.ca>.
- [6] Escobedo, L. (2012) "Simulador para pruebas de control de orientación para nano satélites", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería UNAM.
- [7] Espinosa A. y Salgado G. (2002) "Implementación de un sistema de control de orientación para un satélite pequeño, utilizando ruedas inerciales". Tesis de Licenciatura. Ingeniería Electrónica. Facultad de Estudios Superiores Aragón, UNAM. pp. 1- 93
- [8] Flores, S.I., (2012), "Simulación y pruebas de control de estabilización para microsátélites", Tesis de Licenciatura, UNAM. México, DF.
- [9] Fortescue, P. E. (2011). "Spacecraft systems engineering", 4^a ed., Ed. F. Peter, Londres, Reino Unido: Wiley
- [10] Fullmer R. (1996) "Dynamic Ground Testing of the Skipper Attitude Control System". AIAA 34th. Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. January 15-18, Reno Nevada, USA. pp1-9
- [11] Hans M. (2004). "Encyclopedia Of Space Science And Technology" (1^a ed., Vol. I). (H. Mark, Ed.) Austin, Texas, EEUU: John Wiley & Sons.
- [12] Hespanha, J. E. (2007), "Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR controller design", UCSB.
- [13] Hughes, P. C., (1999), "Spacecraft Attitude Dynamics", 3^a Ed., Editorial John Wiley & Sons,
- [14] Jerpseth E. (2004) "Attitude control for the Norwegian student satellite nCube" Master Thesis, Norwegian University of Science and Technology, May.
- [15] Jyh-Ching Juang, Et Al. (2011) "Design, Implementation and verification of Microsatellite Attitude Determination and Control subsystem based on Processors-in-the-loop". National Cheng Kung University, Tainan Taiwan.
- [16] Kaplan, C. (2006), "LEO satellites: attitude determination and control components; some linear attitude control techniques", Tesis de maestría, Middle East Technical University, Turquía, páginas 1 – 174.

REFERENCIAS

- [17] Karatas, S., (2006), "Leo Satellites: Dynamic Modelling, Simulations And Some Nonlinear Attitude Control Techniques", Tesis de Maestría, Middle East Technical University, Turquía
- [18] Kiel D. and Chapman C. (2011) "TORC: Modular CMG Technology for small satellites". Project award, Small Business Innovation Research. <http://www.sbir.gov/sbirsearch/detail/5099>
- [19] Kim B., Velenis E., Kriengsiri P. and Tsiotras P., (2003) "Designing a low-cost spacecraft simulator". IEEE Control Systems Magazine. pp 26- 37 August.
- [20] Kim K. (2011). "Analysis of Hysteresis for Attitude Control of a Microsatellite". <http://www.engr.sjsu.edu/spartnik/PDF/analysisofhysteresis.pdf>
- [21] Lappas, V.J., Steyn W.H. & Underwood, C.I., (2002) "Attitude control for small satellites using control moment gyros", Acta Astronautica, Volume 51, Issues 1-9, July-November 2002
- [22] Larson, W. & Wertz, j., (1999), "Space mission analysis and design"
- [23] Mendez, F. G., & Huante, C. D. (2009) "Simulador para pruebas de control de orientación de satélites": Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [24] Mendoza M. A. y Alva R. (2011). "Diseño de Ruedas inerciales para una plataforma satelital". 1er. Cong. Nac. De la SOMECYTA. Puebla, México.
- [25] Overby, E. J., (2004), "Attitude control for the Norwegian student satellite nCube" Tesis de maestría, Norwegian University of Science and Technology, Noruega.
- [26] Prado, J. (2007). "Sistema de simulación para pruebas de algoritmos de orientación y control de satélites pequeños": Tesis de doctorado UNAM, México DF, México.
- [27] Prado J. and Bisiacchi G., (2000) "Dynamic Balancing for a Satellite Attitude Control Simulator". Instrumentation and Development. Journal of the Mexican Society of Instrumentation. SOMI. Vol 4. No 5.. pp 76-81.
- [28] Prado J., Bisiacchi, Ruiz D. (2002) "Construcción y Calibración de un Sensor de Sol para Aplicación Espacial". SOMI XVII Congreso Nacional de Instrumentación. Mérida, Yucatán, México, Octubre 14-18, Memorias en CD. pp1-12. Trabajo ELECTRO36
- [29] Prado J., Miranda V., Corona A. (1997) "Sensor de tierra para detección de orientación de un satélite". SOMI XII Congreso Nacional de Instrumentación. San Luis Potosí, SLP. México. Septiembre 30-Octubre 3. Memorias del Congreso. pp 743-747
- [30] Rawashdeh, S. (2009) "Aerodynamic Attitude Stabilization For A Ram-Facing Cubesat" Advances in the Astronautical Sciences Volume 133, AAS 09-084
- [31] Rawashdeh, S. (2010) "Passive attitude stabilization for small satellites" Tesis de maestría, Universidad de Kentucky.
- [32] Reyes, R. (2012). "Sistema de orientación y estabilización para un satélite pequeño de percepción remota". México, DF, México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [33] Swinerd, G. (2008). "How Spacecraft Fly. Spaceflight without formulae". Hampshire, Reino Unido: Praxis Publishing .
- [34] Tipler P. & Mosca g., (2007), "Física, para la ciencia y la tecnología", 5ª ed. Editorial reverte, España 2007

[35]Wertz, J. (1990), "Spacecraft Attitude Determination And Control" Kluwer Academic Publishers, 1990. Primera edición. Páginas 236 - 306

MESOGRAFIA:

[36] RAE, (17 de Junio de 2012), "Diccionario De La Lengua Española" Vigésima segunda edición. Recuperado el 17 de Junio de 2012, de RAE.ES: http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=satélite.

[37] Astronomía Sur, (23 de Oct de 2012), "Satélites" Recuperado el 23 de octubre de 2012, de: <http://www.astrosurf.com/astronosur/satelites.htm>

[38] Model Web, (5 de enero de 2013), "COSPAR International Reference Atmosphere: 1986; 0 km to 120 km". Recuperado el 5 de enero de 2013, de: <http://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/atmos/cospar1.html>

[39] Model Web, (29 de enero de 2013), "MSIS model 1986", recuperado el 29 de enero de 2013, de: <http://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/atmos/msis.html>