



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

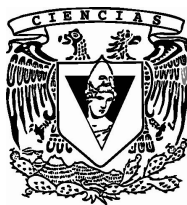
FORMAS NORMALES DE GÉRMENES DE
FOLIACIONES HOLOMORFAS NO
DICRÍTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
OZIEL GÓMEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme tantas bendiciones.

Este trabajo esta dedicado a mi madre Silvia por darme el amor y el cariño que solo una madre puede dar, por ser mi principal ejemplo, por apoyarme y motivarme para salir adelante, y por siempre confiar en mí, te amo mamá, a mi padre Manuel por sus sabias palabras y por motivarme a ser mejor, te quiero papá y a mis hermanos Alí y Azael por ser mis mejores amigos, por su apoyo y por todos esos momentos felices que hemos pasado juntos los quiero.

Agradezco a mi directora de tesis, Laura Ortiz Bobadilla, por aceptar dirigir esta tesis, por todo el tiempo que me dedico, la disposición para resolver mis dudas ante los problemas que en el camino fueron surgiendo , por ser una excelente persona, profesora e investigadora a la cual admiro y respeto profundamente.

Quiero agradecer al profesor Javier Páez por haberme dado albergue en su cubículo por alrededor de 2 años, por su disponibilidad y amabilidad, por ser un gran ser humano y porque con su ejemplo nos motiva a ser mejores matemáticos.

Agradezco a Ricardo, Nef e Irving por los buenos ratos a lo largo de más de 5 años, porque son mis hermanos aunque de otra madre, a todas esas personas que encontré en el camino, que me han brindado su amistad y con los cuales he pasado excelentes momentos por citar algunos Miriam, Andres, Mayela, Vicky, Hector, Alan, Carlos, German, Oscar, Bere, Raul, Fermin.

A mis sinodales Oscar Palmas, Jessie y Jessica por haber aceptado ser mis sinodales y por sus valiosas correcciones, muchas gracias.

Agradezco a la UNAM por haberme brindado la oportunidad de adentrarme en el maravilloso mundo de las matemáticas.

Por último y no menos importante agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM con clave de proyecto IN 103010 bajo el nombre Geometría de foliaciones y ecuaciones holomorfas y IN 102413 Geometría de ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones holomorfas. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

1. Campos Vectoriales Holomorfos en \mathbb{C}^n	9
1.1. Equivalencia Formal	11
1.2. Dominio de Poincaré y dominio de Siegel	21
1.3. Equivalencia Analítica	22
1.4. Foliaciones	28
1.4.1. Foliaciones en variedades holomorfas	30
2. Preliminares al teorema de Savelev	33
2.1. Teoría de sistemas lineales	34
2.1.1. Transformaciones de Gauge	35
2.2. Haces Vectoriales	36
2.2.1. Algunos ejemplos	39
2.2.2. Operaciones sobre haces	40
2.2.3. Clasificación de haces lineales sobre \mathbb{P}^1	41
2.3. Secciones y conexiones	46
2.3.1. Grado de un haz holomorfo	47
2.3.2. Derivada covariante	48
2.3.3. Conexiones y Sistemas lineales	51
2.4. Conexiones sobre haces lineales	55
3. Teorema de Savelev	59
4. Aplicación del Teorema de Savelev	71
4.1. Índice de Camacho-Sad	82
4.2. Aplicación del Teorema de Savelev	89
A. Variedades diferenciables y superficies de Riemann	96

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales analíticas fue iniciado por Henri Poincaré a principios del siglo XX. En los trabajos de Poincaré, Dulac y Siegel se demuestra que, en los casos genéricos, la clasificación de una ecuación diferencial analítica depende de la posición en el plano complejo de los valores propios de la matriz que define a la parte lineal de la ecuación en el punto singular.

Los casos no genéricos comenzaron a ser estudiados posteriormente y su complejidad hizo necesaria la introducción de conceptos y resultados ligados a la variable compleja, los haces vectoriales, la teoría de singularidades y los invariantes topológicos, formales y analíticos fueron paulatinamente formando parte del lenguaje usual de la teoría de clasificación de campos vectoriales analíticos en vecindades de los puntos singulares.

Es en este contexto en el que se sitúa la tesis. En ella se analizan, en primera instancia, las obstrucciones formales para que una ecuación diferencial, definida por un campo vectorial analítico sea formalmente equivalente a su parte lineal. El caso en el que el campo vectorial no tiene parte lineal requiere de un análisis más cuidadoso. Por esta razón en la tesis nos concentramos en desarrollar la herramienta necesaria para analizar este tipo de campos vectoriales y en particular demostramos el Teorema de Savelev. Este teorema marcó un nuevo enfoque, puramente geométrico, para demostrar la analiticidad de algunas formas normales de campos vectoriales con singularidades no genéricas. Este enfoque fue introducido en un inicio por Frank Loray [5] en 2004 para analizar la analiticidad de la forma normal de los campos vectoriales con singularidad de tipo silla-nodo.

La tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el primer capítulo de este trabajo se introduce la teoría de campos vectoriales holomorfos en $(\mathbb{C}^n, 0)$ y en particular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Introducimos el concepto de forma normal de un campo vectorial y observamos bajo qué condiciones ésta coincide con la forma normal analítica. La forma en la que se

demuestran dichos resultados es encontrar, en una primera instancia, cambios definidos por series formales (series de las cuales no sabemos nada respecto a su convergencia) que permitan llevar formalmente al campo de vectores (que define a la ecuación diferencial analítica) en un campo lineal. Observamos que las obstrucciones que aparecen para realizar dichos cambios se les denomina condiciones de resonancia. En los casos en los que no hay resonancias se dice que la ecuación diferencial es formalmente equivalente a su parte lineal. La serie formal que la representa es justamente la matriz de la parte lineal del campo de vectores en el punto singular. Una vez hecho lo anterior se observa bajo qué condiciones este cambio formal de coordenadas puede o no ser un cambio de coordenadas analítico (en una vecindad del punto singular). Cuando esto se logra, la forma normal formal y la forma normal analítica coinciden.

Desafortunadamente, la forma normal formal y la forma normal analítica no siempre coinciden. Un ejemplo de lo anterior se puede encontrar en campos resonantes de tipo silla y silla nodo. En estos casos se tiene que la forma normal formal está dada por una serie de potencias formal (relativamente sencilla) mientras que la forma normal analítica está dada por un conjunto de funciones (hay moduli funcional).

Sorprendentemente, en el siguiente caso de degeneración, cuando la expresión de la ecuación en una vecindad de un punto singular no tiene parte lineal, se observa que si la degeneración es de orden dos y la ecuación es no dicrítica, entonces la forma normal formal y la forma normal analítica coinciden. Este fenómeno fue observado también en el caso en el que la parte lineal del campo de vectores en una vecindad del punto singular es nilpotente. En este caso la forma normal formal (llamada forma normal de Takens) coincide con la forma normal analítica. La demostración de este hecho fue resultado de muchos años de trabajo y fue dada por Zoladek. Éste demostró la convergencia de la serie formal. Sin embargo, existe otra prueba meramente geométrica de este hecho: Frank Loray prueba mediante un procedimiento geométrico constructivo, y haciendo uso del Teorema de Savelev, que las formas normal formal y analítica coinciden. Una construcción análoga se pudo hacer para el caso de degeneración de orden dos.

En el capítulo 2 desarrollamos la teoría preliminar para probar el Teorema de Savelev, introducimos el concepto de haz vectorial y damos una clasificación de los haces lineales sobre la esfera de Riemann. Basados en las propiedades de la derivada covariante desarrollamos el concepto de cone-

xión sobre haces vectoriales y al final de este capítulo damos un invariante de los haces lineales a través de las conexiones sobre superficies de Riemann compactas. Este invariante resulta ser equivalente al índice de Camacho-Sad desarrollado en el capítulo 4.

En el capítulo 3 damos una demostración del ya tan mencionado Teorema de Savelev que asegura bajo la hipótesis de que el grado del haz normal de una esfera de Riemann encajada en una variedad de dimensión 2 es cero, la existencia de un biholomorfismo entre una vecindad del haz fibrado y el producto directo $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}$. Notamos la similitud entre la demostración de este teorema y el Teorema de Poincaré analítico demostrado en el capítulo 1.

Finalmente en el capítulo 4 se da una aplicación del Teorema de Savelev a campos vectoriales en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Damos una idea de la demostración en el caso en el que la ecuación en una vecindad de un punto singular no tenga parte lineal, sea no dicrítica y la degeneración es de orden dos, entonces la forma normal formal y la forma normal analítica coinciden.

Capítulo 1

Campos Vectoriales Holomorfos en \mathbb{C}^n

En este capítulo damos una introducción a la teoría de campos vectoriales holomorfos en $(\mathbb{C}^n, 0)$ definimos equivalencia formal y equivalencia analítica, investigamos bajo qué condiciones dado un campo vectorial holomorfo es formalmente equivalente a su parte lineal en una vecindad de un punto singular. Introducimos el concepto de resonancias que son restricciones que encontramos para que dicha equivalencia sea posible, observamos que éstas juegan un papel fundamental pues dan condiciones necesarias para que un campo vectorial holomorfo sea analíticamente equivalente a su parte lineal en una vecindad del punto singular. Más adelante sólo consideraremos campos vectoriales definidos en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

DEFINICIÓN 1.1. *Un campo vectorial holomorfo definido en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es una n -ada de funciones holomorfas definidas en U*

$$V = (V_1, \dots, V_n) : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad (1.1)$$

con $V_i : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa $\forall i = 1, \dots, n$.

DEFINICIÓN 1.2. *Sea U un abierto en \mathbb{C}^n y V un campo vectorial holomorfo definido en U . Se define la ecuación diferencial holomorfa autónoma¹ asociada al campo V como:*

$$\frac{dz_i}{dt} = V_i(z_1, \dots, z_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

donde t denota una variable en \mathbb{C} .

En notación vectorial, $\dot{z} = V(z)$ con $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Se dice que φ es una solución a la ecuación diferencial (1.2) si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \tilde{U} \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}^n$ es una función holomorfa definida en el abierto \tilde{U} de \mathbb{C} tal que para toda $t \in \tilde{U}$, $\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = V_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, es decir, $\varphi : \tilde{U} \longrightarrow U$ es una solución de la ecuación si para todo $t_0 \in \tilde{U}$, se tiene que la derivada de φ con respecto a t en el punto t_0 coincide con el vector asociado al punto $\varphi(t_0)$ por el campo V ,

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = V(\varphi(t_0)). \quad (1.3)$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales analíticas (ver en [3]) garantiza para cada punto p de U , la existencia de una única solución φ de (1.2), la cual satisface $\varphi(t_0) = p$ con $t_0 \in \tilde{U}$ (por simplicidad asumiremos en la mayoría de los casos $t_0 = 0$). Denotamos esta solución por $\varphi(t, p)$ para indicar que pasa por el punto p al tiempo $t = t_0$.

De la manera en que ha sido definido un campo vectorial éste asocia a cada elemento $p \in U$ un vector en \mathbb{C}^n , de manera que podemos dar una representación geométrica de este hecho asociando a cada punto p de U el correspondiente vector $V(p)$ basado en p . Podemos también asociar a cada punto $p \in U$ la recta compleja cuya dirección coincide con la dada por el vector $V(p)$. A esta asignación se le conoce como campo de direcciones en U .

¹Decimos que la ecuación diferencial es autónoma si el campo V no depende del tiempo

DEFINICIÓN 1.3. *Sea V un campo vectorial holomorfo. Decimos que p es un punto singular de campo V si $V(p) = 0$.*

Si p es un punto singular de V entonces la ecuación diferencial (1.2) asociada tiene como solución a $\varphi(t, p) = p \forall t \in \mathbb{C}$.

1.1. Equivalencia Formal

Hablar del comportamiento global de las ecuaciones diferenciales suele ser un problema demasiado complicado, sin embargo el comportamiento local en general es un problema más accesible y es por esto que recurrimos primero a él. Por otra parte, es bien conocido que el comportamiento alrededor de los puntos singulares puede ser muy complicado, por esta razón es necesario encontrar campos vectoriales, equivalentes en algún sentido, que sean más sencillos de analizar alrededor de los puntos singulares y que preserven algunas propiedades fundamentales del campo original.

Recordemos que toda transformación analítica en un punto tiene una expresión en serie de potencias convergente en una vecindad de éste. Esta expresión es un elemento del anillo de series formales (y de hecho convergentes) en el punto y es, en cierto sentido, la “huella” de la transformación en el punto. El estudio de los campos vectoriales desde el punto de vista de la serie que los define ha sido usado reiteradamente desde la época de Poincaré (ver Teo. 1.6) hasta nuestros días. Damos a continuación algunas de las definiciones y resultados más conocidos.

DEFINICIÓN 1.4. *Una serie formal en el origen en \mathbb{C}^n es una serie*

$$H(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}^n, \quad a_{\alpha} \in \mathbb{C}$$

de la cual no tenemos información con respecto a su convergencia, es decir, puede o no converger.

DEFINICIÓN 1.5. *Dados dos campos vectoriales V y W en $(\mathbb{C}^n, 0)$, decimos que son formalmente equivalentes si existe una serie formal invertible*

$$H(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}^n, \quad a_{\alpha} \in \mathbb{C}$$

tal que satisface la igualdad

$$D_z H \cdot V(z) = W(H(z)). \quad (1.4)$$

En esta equivalencia la igualdad se entiende coeficiente a coeficiente.

DEFINICIÓN 1.6. Sean $V : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $W : \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ campos vectoriales holomorfos, donde U y \tilde{U} son abiertos de \mathbb{C}^n , decimos que V y W son analíticamente equivalentes si existe una transformación $H : U \rightarrow \tilde{U}$ analítica, con inversa analítica, es decir, un biholomorfismo tal que

$$D_z H \cdot V(z) = W(H(z)). \quad (1.5)$$

DEFINICIÓN 1.7. Sean $V : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $W : \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dos campos vectoriales holomorfos. Decimos que V y W son orbitalmente analíticamente equivalentes si existe un biholomorfismo $H : U \rightarrow \tilde{U}$ tal que $DH \cdot V(H^{-1}(z)) = g(z) \cdot W(z)$ donde g es una función analítica en U que no se anula.

De la equivalencia formal se puede decir muy poco geoméricamente pues, como mencionamos, la serie no necesariamente es convergente. Por el contrario de la equivalencia analítica obtenemos la siguiente interpretación geométrica:

Dados dos campos vectoriales holomorfos en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, $\dot{z} = V(z)$ y $\dot{z} = W(z)$, la condición de que éstos sean analíticamente equivalentes significa que hay un biholomorfismo H del espacio fase de $\dot{z} = V(z)$ en el espacio fase de $\dot{z} = W(z)$, que lleva soluciones de la primera ecuación en soluciones de la segunda ecuación.

Observemos que de este hecho geométrico obtenemos la definición 1.6: Sea $\varphi_v(t, z)$ solución de $\dot{z} = V(z)$, es decir, $\frac{d\varphi_v(t, z)}{dt} = V(\varphi_v(t, z))$ la cual satisface $\varphi_v(0, z) = z$, entonces de la igualdad

$$H(\varphi_v(t, z)) = \varphi_w(t, H(z)), \quad (1.6)$$

donde $\varphi_w(t, H(z))$ es la solución de $\dot{z} = W(z)$ que al tiempo $t = 0$ satisface $\varphi_w(0, H(z)) = H(z)$.

Derivando la ecuación (1.6) con respecto a t y evaluando en $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} H(\varphi_v(t, z)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_w(t, H(z)) \right|_{t=0}$$

Dado que $\varphi_v(t, z)$ y $\varphi_w(t, H(z))$ son soluciones de $\dot{z} = V(z)$ y de $\dot{z} = W(z)$, respectivamente, obtenemos

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{\varphi_v(t, z)} \cdot V(\varphi_v(t, z))|_{t=0} = W(\varphi_w(t, H(z)))|_{t=0};$$

evaluando en $t = 0$ se tiene

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} \cdot V(\varphi_v(0, z)) = W(\varphi_w(0, H(z)))$$

y finalmente

$$D_z H \cdot V(z) = W(H(z)),$$

que es justamente la expresión dada en (1.5). Observamos que algunas veces es más utilizada la siguiente expresión equivalente

$$D_{H^{-1}(z)} H \cdot V(H^{-1}(z)) = W(z).$$

Notemos que dos campos que son analíticamente equivalentes son formalmente equivalentes, así antes de buscar condiciones para la equivalencia analítica de dos campos nos concentraremos en encontrar condiciones para la equivalencia formal.

Comenzaremos con campos en una variable por ser éstos más sencillos de analizar.

Decimos que una función es de tipo $O(z^k)$, en notación $f \in O(z^k)$, si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k} = c$ donde c es una constante. Diremos también que f es de $o(z^k)$, en notación $f \in o(z^k)$, si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k} = 0$. Así es claro que si $f \in o(z^k)$, entonces $f \in O(z^k)$. Además si $f \in O(z^k)$ entonces $f \in O(z^j)$ con $j \leq k$ y $f \in o(z^j)$ con $j < k$.

Tomando en consideración que la función puede estar definida en varias variables y $k = (k_1, \dots, k_n)$ con $|k| = k_1 + \dots + k_n$ y $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ entonces las afirmaciones relativas al orden de una función son válidas en el caso de varias variables, es decir, decimos que $F(z) \in O(z^m)$, con $z \in \mathbb{C}^n$, si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{|z|^k} = c$ y $F(z) \in o(z^m)$ si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{|z|^k} = 0$.

Proposición 1.1. Si $H(z) = z + h_k z^k$, entonces $H^{-1}(z) = z - h_k z^k + O(z^{2k-1})$

Demostración. Necesitamos encontrar $G(z) = z + a_m z^m + O(z^p)$ tal que se satisfaga la condición $H(G(z)) = G(H(z)) = z$, observemos que para que

esto suceda es necesario que $H(z)$ siempre tenga parte lineal. Calculando la composición

$$\begin{aligned} G(H(z)) &= z + h_k z^k + a_m (z + h_k z^k)^m + O(z^p) \\ &= z + h_k z^k + a_m z^m + m a_m z^{m-1} h_k z^k + O(z^{m-2+2k}) + O(z^p) \\ &= z + h_k z^k + a_m z^m + m a_m h_k z^{k+m-1} + O(z^{m-2+2k}) + O(z^p), \end{aligned}$$

podemos observar que como deseamos que $z = G(H(z)) = H(G(z))$, entonces $h_k = -a_m$ y $m = k$. Dado que $k > 1$ entonces $m - 1 + k < m - 2 + 2k$, así ningún término de $O(z^{m+2k-2})$ puede eliminar a $m a_m h_k z^{k+m-1}$; dado que $m = k$ entonces $p = 2k - 1$. Por lo tanto $G(z) = z - h_k z^k + O(z^{2k-1})$. \square

Este resultado es válido también para varias variables y la demostración sigue esencialmente los mismos pasos.

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{z} = v(z)$ con $v(z) = a_1 z + O(z^2)$, con $z \in \mathbb{C}$, nuestro objetivo es encontrar condiciones bajo las cuales es posible llevar el campo original formalmente a su parte lineal. La idea es ir eliminando uno a uno los términos de grado mayor que 1 mediante polinomios de la forma $H_k(z) = z + h_k z^k$.

Comencemos con $k = 2$ y sea $H_2(z) = z + h_2 z^2$ entonces se debe de cumplir la igualdad (1.4), es decir,

$$\left[\frac{\partial H_2}{\partial z} \right]_{H_2^{-1}(z)} \cdot v(H_2^{-1}(z)) = a_1 z + b_3 z^3 + O(z^4).$$

Desarrollando obtenemos

$$(1 + 2h_2 z)_{H_2^{-1}(z)} \cdot (a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3))|_{H_2^{-1}(z)} = a_1 z + b_3 z^3 + O(z^4)$$

y sustituyendo $H_2^{-1}(z)$ llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned} 1 &+ 2h_2(z - h_2 z^2 + O(z^3)) \cdot [a_1(z - h_2 z^2 + O(z^3)) \\ &+ a_2(z - h_2 z^2 + O(z^3))^2 + O(z^3)] = a_1 z + b_3 z^3 + O(z^4). \end{aligned}$$

Nos interesan los coeficientes de los términos de grado 2, desarrollando los productos presentes en la igualdad anterior tenemos

$$a_1 z - a_1 h_2 z^2 + a_2 z^2 + 2a_1 h_2 z^2 + O(z^3) = a_1 z + O(z^3).$$

Nuestro objetivo es eliminar el término $a_2 z^2$ para esto es necesario que

$$a_2 - a_1 h_2 + 2a_1 h_2 = 0 \quad \text{lo cual implica que} \quad h_2 = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Dado que $a_1 \neq 0$ siempre es posible eliminar el término de grado 2. De manera más general si $v_k(z) = a_1 z + a_k z^k + O(z^{k+1})$ proponemos $H_k(z) = z + h_k z^k$ con $k \geq 2$. H_k tiene inversa dada por $H_k^{-1}(z) = z - h_k z^k + O(z^{2k-1})$, por lo que se debe cumplir la condición²

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot v(H_k^{-1}(z)) = a_1 z + O(z^{k+1}).$$

Desarrollando esta última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &+ kh_k(z - h_k z^k + O(z^{2k-1}))^{k-1} \cdot (a_1(z - h_k z^k + O(z^{2k-1}))) \\ &+ a_k(z - h_k z^k + O(z^{2k-1})) + O(z^{k+1}) = a_1 z + O(z^{k+1}). \end{aligned}$$

Recordemos que nos interesan los coeficientes del término de grado k

$$a_1 z + a_k z^k - a_1 h_k z^k + kh_k a_1 z^k + O(z^{k+1}) = a_1 z + O(z^{k+1}),$$

por lo que para poder eliminar mediante el cambio de coordenadas H_k el término $a_k z^k$ del campo $v_k(z)$ es necesario que

$$a_k - a_1 h_k + k a_1 h_k = 0 \quad \text{lo cual implica que} \quad h_k = -\frac{a_k}{a_1(k-1)}.$$

Así, dado que $k > 1$, siempre es posible eliminar el término de grado k .

Teorema 1.1. *Toda ecuación $\dot{z} = v(z)$, con $v(z) = a_1 z + O(z^2)$ es formalmente equivalente a $\dot{z} = w(z)$ con $w(z) = a_1 z$.*

La demostración consiste en quitar cada uno de los términos de orden mayor que 1 con polinomios de la forma $H_k(z) = z + h_k z^k$ (definiendo $h_k = \frac{-a_k}{a_1(1-k)}$ como lo hicimos previamente) y considerar la composición $H = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k \circ H_{k-1} \circ \dots \circ H_2$. Hay que observar que la composición de un número finito de H_k 's es analítica pero al considerar el límite no podemos asegurar que siga siendo analítica, lo que sí es un hecho es que H es una serie formal.

²Observemos que por ser H_k una expresión en una variable en realidad $\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right] = H_k'(z)$. Conservamos la notación $\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]$ para dejar ya establecida una notación para el caso general

Teorema 1.2. *La ecuación $\dot{z} = v(z)$, con $v(z) = z^k + a_m z^m + O(z^{m+1})$ es formalmente equivalente a $\dot{z} = w(z)$, donde $w(z) = z^k + bz^{2k-1}$*

Demostración. Consideremos $H_r(z) = z + h_r z^r$, el objetivo es eliminar el término $a_m z^m$, entonces se debe cumplir la condición

$$\left[\frac{\partial H_r}{\partial z} \right]_{H_r^{-1}(z)} \cdot v(H_r^{-1}(z)) = z^k + O(z^{m+1})$$

desarrollando

$$(1 + r h_r (z - h_r z^r + O(z^{2r-1}))^{r-1}) \cdot (z - h_r z^r + O(z^{2r-1}))^k + a_m (z - h_r z^r + O(z^{2r-1}))^m + O(z^{m+1}) = z^k + O(z^{m+1});$$

agrupando ahora los términos del mismo grado se tiene

$$z^k - k h_r z^{r+k-1} + r h_r z^{r+k-1} + a_m z^m - h_r a_m z^{r+m-1} + O(z^{m+1}) = z^k + O(z^{m+1}).$$

Por lo tanto para poder eliminar $a_m z^m$ es necesario que se cumpla $r+k-1 = m$ lo cual implica que $r = m - k + 1$. Entonces los coeficientes de z^m deben satisfacer $a_m - k h_{m-k+1} + (m - k + 1) h_{m-k+1} = 0$, lo cual implica que $h_{m-k+1}(m - 2k + 1) = -a_m$ o $h_{m-k+1} = -\frac{a_m}{m-2k+1}$. Por lo tanto siempre es posible definir h_r salvo en el caso en el que $m = 2k - 1$. Así la ecuación original es formalmente equivalente a la ecuación $\dot{z} = z^k + bz^{2k-1}$. \square

Ahora consideraremos un campo vectorial holomorfo definido en $(\mathbb{C}^2, 0)$. De nueva cuenta buscamos bajo qué condiciones es formalmente equivalente a su parte lineal alrededor de un punto singular.

Como dijimos antes, una serie formal $H(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$ puede estar definida en varias variables. Cuando ese sea el caso tendremos en consideración que $k = (k_1, \dots, k_m)$ con $|k| = k_1 + \dots + k_m$ y $z^k = z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$.

Sea $\dot{z} = V(z)$ el campo en $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1k} z^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

donde $z^k = z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2}$ con $|k| = k_1 + k_2 \geq 2$.

De igual manera que hicimos en el caso de una ecuación diferencial definida en una variable en \mathbb{C} tratamos de encontrar bajo qué condiciones podemos hallar H tal que $\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{H^{-1}(z)} \cdot V(H^{-1}(z)) = W(z)$ donde

$$W(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

La idea es la misma y consiste en ir quitando uno a uno los términos de orden mayor que 1. Para eso proponemos $H_k(z) = (z_1, z_2) + (h_{1k}z^k, 0)$. No es difícil observar que $H_k^{-1}(z) = (z_1, z_2) + (-h_{1k}z^k + O(z^{2k+1}), 0)$. Al igual que antes queremos obtener una igualdad del tipo

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot V(H_k^{-1}(z)) = W(z) + \begin{bmatrix} O(z^{k+1}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Primero observemos que

$$\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} 1 + k_1 h_{1k} \frac{z^k}{z_1} & k_2 h_{1k} \frac{z^k}{z_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y que

$$\begin{aligned} V(H_k^{-1}(z)) &= \begin{bmatrix} \lambda_1(z_1 - h_{1k}z^k + O(z^{2k+1})) \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (a_{1k}(z_1 - h_{1k}z^k + O(z^{2k+1}))^{k_1} z_2^{k_2}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 - \lambda_1 h_{1k} z^k + a_{1k} z_1^{k_1} z_2^{k_2} + O(z^{2k+1}) \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces realizando la multiplicación $\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{H^{-1}(z)} \cdot V(H^{-1}(z))$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 - \lambda_1 h_{1k} z^k + \lambda_1 k_1 h_{1k} z^k + a_{1k} z^k + \lambda_2 k_2 h_{1k} z^k + O(z^{2k-1}) \\ \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}.$$

Como queremos que esto último sea igual a

$$W(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(z^{k+1}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

es necesario que se satisfaga la condición

$$-\lambda_1 h_{1k} + k_1 h_{1k} \lambda_1 + a_{1k} + \lambda_2 k_2 h_{1k} = 0;$$

lo cual implica que

$$h_{1k}(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_1) = -a_{1k} \quad \text{ó} \quad h_{1k} = \frac{a_{1k}}{\lambda_1 - (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)} = \frac{a_{1k}}{\lambda_1 - \langle \lambda, k \rangle}$$

donde $\lambda = \langle \lambda, k \rangle = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$. Así es posible eliminar el monomio $a_{1k} z^k$ siempre y cuando $\lambda_1 - \langle \lambda, k \rangle \neq 0$, esta última condición motiva una definición importante.

DEFINICIÓN 1.8. Decimos que una colección $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \forall i = 1, \dots, n$ es resonante si existen $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ con $|m| = m_1 + \dots + m_n \geq 2$ tales que se satisface $\lambda_j = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n$ para algun $j \in \{1, \dots, n\}$. En este caso decimos que $a_{jm} z^m$ con $z^m = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}$ es un monomio resonante.

Teorema 1.3 (Poincaré). Sea $\dot{z} = V(z)$ con $V(z) = \Lambda z + O(z^2)$ con $z \in \mathbb{C}^n$

y donde $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$. Si la colección de valores propios de Λ es no resonante entonces $\dot{z} = V(z)$ es formalmente equivalente a su parte lineal,

es decir, es formalmente equivalente a $\dot{z} = W(z)$ con

$$W(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Demostración. La demostración consiste en ir eliminando uno a uno los monomios de grado mayor que 1 del campo.

Expresamos a $V(z)$ como

$$V(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{jk} z^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(z^2) \\ \vdots \\ O(z^k) \\ \vdots \\ O(z^2) \end{bmatrix}.$$

Nuestro objetivo es eliminar el monomio $a_{jk} z^k$ de grado $|k|$ con $k = (k_1, \dots, k_n)$ situado en la j -ésima coordenada.

Notemos que en la j -ésima coordenada pueden existir algunos otros monomios de grado $|k|$ pero con $k \neq (k_1, \dots, k_n)$ y en las demás coordenadas tenemos términos de $O(z^2)$.

Proponemos $H_k(z) = z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_{jk} z^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

No es difícil mostrar que la inversa viene dada por

$$H_k^{-1}(z) = z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -h_{jk}z^k + O(z^{2k-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_1 h_{jk} \frac{z^k}{z_1} & 1 + k_j h_{jk} \frac{z^k}{z_j} & k_n h_{jk} \frac{z^k}{z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{H_k^{-1}(z)} \\ &= Id + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_1 h_{jk} \frac{z^k}{z_1} & k_j h_{jk} \frac{z^k}{z_j} & k_n h_{jk} \frac{z^k}{z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ O(z^{2k-2}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y además

$$V(H_k^{-1}(z)) = \Lambda z + \begin{bmatrix} O(z^2) \\ \vdots \\ -\lambda_j h_{jk} z^k + a_{jk} z^k + O(z^{2k-1}) \\ \vdots \\ O(z^2) \end{bmatrix}.$$

Multiplicando $\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)} \cdot V(H_k^{-1}(z))$ obtenemos

$$\Lambda z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (a_{jk} - \lambda_j h_{jk}) z^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(z^2) \\ \vdots \\ (k_1 \lambda_1 h_{jk} + \cdots + k_n \lambda_n h_{jk}) z^k + O(z^{2k-1}) \\ \vdots \\ O(z^2) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Es necesario hacer algunas observaciones:

- 1). Notemos que al componer el campo $V(z)$ con $H^{-1}(z)$ no se modifican los términos de grado menor o igual $|k|$ en las demás coordenadas, sin embargo es posible que aparezcan términos de orden mayor a $|k|$ en dichas coordenadas.
- 2). Cuando multiplicamos $\left[\frac{\partial H_k}{\partial z} \right]_{H_k^{-1}(z)}$ con el campo $V(H_k^{-1}(z))$ sólo afectamos la coordenada k -ésima y en las demás entradas no aparecen términos de grado $|k|$, por lo tanto éste es un buen método para eliminar los monomios uno a uno de cada entrada.

Queremos eliminar el monomio z^k de la ecuación (1.8). Para que eso sea posible es necesario que los coeficientes satisfagan la condición

$$a_{jk} - \lambda_j h_{jk} + k_1 \lambda_1 h_{jk} + \cdots + k_n \lambda_n h_{jk} = 0 \quad \text{lo cual implica} \quad h_{jk} = \frac{a_{jk}}{\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle}.$$

Dado que los valores propios son no resonantes $\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle \neq 0$ y entonces es posible quitar los monomios de grado $|k|$ para cualquier k .

Así la H que nos ayuda a realizar la equivalencia del campo con su parte lineal es $H = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k \circ H_{k-1} \circ \cdots \circ H_2$ donde las H_k 's son las que nos ayudan a ir eliminando los monomios de grado k uno a uno. Observemos que la composición de un número finito de H_k 's es analítica pues es la composición de un número finito de funciones polinomiales, pero al considerar el límite H no necesariamente tiene que serlo, lo que si es un hecho es que es una serie formal. Por lo tanto $\dot{z} = V(z)$ es formalmente equivalente a $\dot{z} = \Lambda z$. \square

Teorema 1.4 (Poincaré-Dulac). *Todo campo $\dot{z} = V(z)$ con $V(z) = \Lambda z + O(z^2)$, $z \in \mathbb{C}^n$ donde*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

es formalmente equivalente a un campo $W(z) = \Lambda z + \tilde{W}(z)$ donde $\tilde{W}(z)$ son los monomios resonantes.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema anterior, y consiste en eliminar los monomios de grado $|k|$ en la j -ésima

fila que no satisfagan la condición de resonancia $\lambda_j = \langle \lambda, k \rangle$. Por la observación hecha en el párrafo previo al Teorema 1.4 sólo se preservaran los monomios que son resonantes y la parte lineal del campo.

1.2. Dominio de Poincaré y dominio de Siegel

Ya que las resonancias juegan un papel muy importante para decidir cuando dos campos son formalmente equivalentes, analizaremos que condiciones sobre los valores propios implican la presencia de resonancias.

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los valores propios de la matriz asociada a la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^2 . Sin perder generalidad supongamos que $\lambda_1 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ y $k_1 + k_2 \geq 2$ entonces obtenemos que

$$\lambda_1 - \lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{1 - k_1}.$$

Por lo tanto para que exista resonancia es necesario que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}$. Analicemos algunos casos:

- 1). Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ entonces $k_1 = 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 k_2$ y sólo hay una resonancia que ocurre cuando $k_1 = 0$ y $k_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.
- 2). Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ para $k_1 \in \mathbb{Z}_+$, despejando obtenemos $k_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - k_1) > 0$ de donde obtenemos que los monomios resonantes son $\left\{ z^k : k = (k_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - k_1)) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \right\}$ y que son una cantidad infinita.
- 3). Si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o $\mathbb{C} - \mathbb{Q}$ no puede haber resonancias pues una condición necesaria es que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$.
- 4). Suponiendo que $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$ pero no ambos, tenemos lo siguiente: Sin perder generalidad sea $\lambda_1 = 0$, entonces la igualdad $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = \lambda_1$ se logra con $k_2 = 0$ y $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ lo cual implica que hay una infinidad de resonancias.

De manera más general cuando $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es la colección de valores propios asociados a la matriz de la parte lineal de un campo en \mathbb{C}^n , consi-

deramos la envolvente convexa:

$$\text{conv} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i, c_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n c_i = 1 \right\}$$

La importancia de este concepto radica en la presencia o no del cero en la envolvente convexa, pues ésta determina si el número de resonancias es finito o infinito. Lo anterior da origen a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.9. Decimos que una colección $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ está en el dominio de Poincaré si $0 \notin \text{conv} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$.

DEFINICIÓN 1.10. Decimos que una colección $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ está en el dominio de Siegel si $0 \in \text{conv} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$.

Proposición 1.2. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está en el dominio de Poincaré, es decir, $0 \notin \text{conv} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ entonces el número de resonancias es finito.

La demostración de esta proposición puede ser consultada en [3]

Una consecuencia inmediata de la proposición (1.2) es que la forma normal formal de una ecuación diferencial analítica en \mathbb{C}^n , $\dot{z} = V(z)$ tal que $V(z) = Az + \dots$ y la colección $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está en el dominio de Poincaré y es no resonante, es polinomial. La forma normal formal en el caso en que la parte lineal del campo es nula es sensiblemente más complicado. Este problema habremos de mencionarlo en el capítulo 4 pero sólo para campos vectoriales en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

1.3. Equivalencia Analítica

Después de enfocarnos en la equivalencia formal veamos cuándo un campo vectorial es analíticamente equivalente a su parte lineal.

Sea $z \in \mathbb{C}^n$ y consideremos $\mathbb{C}[[z]]$ el anillo de las series de potencias formales $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} a_k z^k$.

DEFINICIÓN 1.11. Sea $\mathbb{C}[[z]]$ el anillo de las series de potencias formales $z \in \mathbb{C}^n$. Definimos el operador $\mu : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ como:

$$\mu : \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} a_k z^k \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} |a_k| z^k$$

A este operador lo llamamos el operador mayorante.

DEFINICIÓN 1.12. Sea $f \in \mathbb{C}[[z]]$, definimos la norma ρ -mayorante $\|\cdot\|_\rho$ como el funcional en $\mathbb{C}[[z]]$ dado por

$$\|f\|_\rho = \sup_{|z|<\rho} |\mu(f(z))| = |\mu(f(\rho))|$$

En el espacio $(C[[z]])^n$ donde $F \in (C[[z]])^n$ si $F(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$ y donde cada $f_i(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, definimos la norma inducida por la norma ρ -mayorante

$$\|F\|_\rho = \|f_1\|_\rho + \dots + \|f_n\|_\rho$$

Denotamos por $\mathcal{B}_\rho = \{f \in \mathbb{C}[[z]] : \|f\|_\rho < \infty\}$. \mathcal{B}_ρ es llamado el espacio ρ -mayorante. Una observación importante es que todo elemento de \mathcal{B}_ρ converge uniformemente y por lo tanto es analítico.

Si f y $g \in \mathbb{C}[[z]]$ y a_n, b_n son los respectivos coeficientes, decimos que $f \ll g$ si $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1. Sea $z \in \mathbb{C}^n$, entonces se cumple lo siguiente:

- 1). Si $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$, $\|f \cdot g\|_\rho \ll \|f\|_\rho \|g\|_\rho$
- 2). Si $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$ tales que $f \ll g$ y h es una serie con coeficientes no negativos entonces $h \circ f \ll h \circ g$.
- 3). Si $f, g \in \mathbb{C}^n[[z]]$ con término constante no nulo, entonces $\|f \circ g\|_\rho \ll \|f\|_\sigma$ donde $\sigma = \|g\|_\rho$

Demostración. Sea $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, entonces ya que el operador mayorante convierte todos los coeficientes negativos en positivos, se elimina la posibilidad de cancelar términos al multiplicar dos series mayoradas así

$$\mu\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \leq \mu\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) \cdot \mu\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)$$

El mismo argumento utilizado en uno funciona para demostrar 2.

Para 3 basta considerar el caso $n=1$:

Usando el mismo argumento que en 1 y 2 tenemos que $\mu(f \circ g) \ll \mu(f) \circ \mu(g)$, calculando $\|f \circ g\|_\rho = \mu(f \circ g(\rho))$, entonces $\|f \circ g\|_\rho = \mu(f \circ g(\rho)) \ll \mu(f) \circ \mu(g) = \mu(f(\sigma)) = \|f\|_\sigma$ donde $\sigma = \|g\|_\rho$. \square

DEFINICIÓN 1.13. Sea X espacio métrico y $\phi : X \rightarrow X$, decimos que ϕ es una contracción si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y) \forall x, y \in X$.

DEFINICIÓN 1.14. Un punto $x^* \in X$ se llama punto fijo de la función $\phi : X \rightarrow X$ si $\phi(x^*) = x^*$.

Teorema 1.5. Sea X un espacio métrico completo, no vacío y sea $\phi : X \rightarrow X$ una contracción, entonces ϕ tiene un único punto fijo.

Demostración. Sea x_0 un punto cualquiera de X y denotamos por $x_k = \phi^k(x_0)$. Vamos a demostrar que x_k es una sucesión de Cauchy en X . Calculemos $d(x_k, x_{k-1}) = d(\phi^{k-1}(x_1), \phi^{k-1}(x_0)) \leq \alpha^{k-1}d(x_1, x_0)$.

Así para $j > k$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(x_j, x_k) &\leq d(x_j, x_{j-1}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq (\alpha^{j-1} + \cdots + \alpha^k)d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^k(\alpha^{j-k+1} + \cdots + 1)(1 - \alpha)}{1 - \alpha}d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^k(1 - \alpha^{j-k})}{1 - \alpha}d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha}d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $\alpha < 1$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^k}{1 - \alpha}d(x_1, x_0) < \epsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Así $d(x_j, x_k) < \epsilon \quad \forall j, k \geq k_0$, es decir, la sucesión x_k es de Cauchy en X y como X es completo existe un $x^* \in X$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ en X . Como ϕ es continua $\phi(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x^*$. Por lo tanto x^* es un punto fijo de ϕ .

Si x_1^* y x_2^* son puntos fijos de ϕ

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(\phi(x_1^*), \phi(x_2^*)) \leq \alpha d(x_1^*, x_2^*)$$

dado que $\alpha < 1$ entonces $d(x_1^*, x_2^*) = 0$ por lo tanto $x_1^* = x_2^*$. □

Lema 1.2. \mathcal{B}_ρ con la norma ρ -mayorante es un espacio métrico completo.

La demostración de este lema puede ser consultada en [3].

DEFINICIÓN 1.15. Sea $S : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ decimos que S es una contracción fuerte si:

- 1). $\|S(0)\|_\rho = O(\rho^2)$
- 2). S es Lipschitz en una bola de $\tilde{\mathcal{B}} = \{h : \|h\|_\rho < \rho\} \subset \mathcal{B}_\rho$ con constante de Lipschitz de orden $O(\rho)$, es decir,

$$\|S(f)\|_\rho = c\rho\|f\|_\rho$$

con c una constante.

Los lemas y proposiciones previos nos sirven para demostrar uno de los resultados más interesantes de la clasificación de campos vectoriales analíticos con parte lineal en el punto singular no degenerada. Este resultado se debe a Henri Poincaré.

Teorema 1.6 (Teorema de Poincaré Analítico). *Sea $\dot{z} = V(z)$, $z \in (\mathbb{C}^n, 0)$, $V(0) = 0$, la ecuación definida por el campo vectorial analítico $V(z) = Az + O(z^2)$ tal que los valores propios de A son no resonantes y están en el dominio de Poincaré. Entonces $\dot{z} = V(z)$ es localmente analíticamente equivalente a $\dot{z} = Az$, es decir, existe un biholomorfismo $H : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ que lleva la ecuación $\dot{z} = V(z)$ analíticamente en $\dot{z} = Az$*

Demostración. Haremos una transformación del problema en un problema de punto fijo $\dot{z} = V(z)$ con $V(z) = Az + \tilde{V}(z)$ con $\tilde{V}(z) = O(z^2)$ y $\dot{z} = W(z)$ con $W(z) = Az$.

El objetivo es encontrar un biholomorfismo H donde $H(z) = z + h(z)$ tal que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right] \cdot W(z) = V(H(z)),$$

entonces

$$\left(Id + \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \right) \cdot Az = A(z + h(z)) + \tilde{V}(z + h(z))$$

$$Az + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot Az = Az + Ah(z) + \tilde{V}(z + h(z))$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} \cdot Az = Ah(z) + \tilde{V}(z + h(z)).$$

Finalmente

$$\frac{\partial h}{\partial z} \cdot Az - Ah(z) = \tilde{V}(z + h(z)).$$

Definimos el operador $\mathcal{L}_A[h] = \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \cdot Az - Ah(z)$, así el problema que obtenemos es el siguiente $\mathcal{L}_A[h] = \tilde{V}(z + h(z))$. Si existe \mathcal{L}_A^{-1} entonces $h = \mathcal{L}_A^{-1} \circ \tilde{V}(z + h(z))$.

Lema 1.3. Sea $\tilde{V}(z) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ holomorfo $\tilde{V}(z) \in O(z^2)$ entonces el operador $T_{\tilde{V}} : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ definido como $T_{\tilde{V}}(h) = \tilde{V}(Id + h)$ es una contracción fuerte.

Demostración. Como $\tilde{V}(z) \in O(z^2)$,

$$\|T_{\tilde{V}}(0)\|_\rho = \|\tilde{V}(Id + 0)\|_\rho = \|\tilde{V}\|_\rho \quad \text{entonces} \quad \|T_{\tilde{V}}(0)\|_\rho = O(\rho^2).$$

Sean $h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_\rho$ y sea $\varphi(\tau) = z + \tau h_2(z) + (1 - \tau)h_1(z)$ con $\tau \in [0, 1]$

$$T_{\tilde{V}}(h_2) - T_{\tilde{V}}(h_1) = \tilde{V}(Id + h_2) - \tilde{V}(Id + h_1) \quad (1.9)$$

$$= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] d\varphi \quad (1.10)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \varphi(\tau) \varphi'(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \varphi(z) (h_2(z) - h_1(z)) d\tau. \quad (1.12)$$

Denotamos por $\sigma = \|\varphi(\tau)\|_\rho$.

Así,

$$\begin{aligned} \|T_{\tilde{V}}(h_1) - T_{\tilde{V}}(h_2)\|_\rho &= \left\| \int_0^1 \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \varphi(z) (h_2(z) - h_1(z)) d\tau \right\|_\rho \\ &\leq \int_0^1 \left\| \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \varphi(\tau) \right\|_\rho \cdot \|h_2(z) - h_1\|_\rho d\tau \\ &\leq \left\| \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \right\|_\sigma \cdot \|h_2(z) - h_1\|_\rho d\tau. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\|\varphi(\tau)\|_\rho \leq \|z\|_\rho + 2 \|\max\{h_1, h_2\}\|_\rho$$

y

$$\|z\|_\rho = \|(z_1, \dots, z_n)\|_\rho = \|z_1\|_\rho + \dots + \|z_n\|_\rho = n\rho.$$

Además $\|h_i\|_\rho < \rho$, pues $h_i \in \mathcal{B}_\rho$ para $i = 1, 2$. De esta manera $\|\max\{h_1, h_2\}\|_\rho \leq \rho$ por lo tanto

$$\|\varphi(\tau)\|_\rho \leq (n + 2)\rho.$$

Por otro lado, como $\tilde{V} \in O(z^2)$, entonces $\left\| \left[\frac{d\tilde{V}}{dz} \right] \right\|_\rho \in O(\rho)$ por lo que existe una constante k tal que

$$\left\| \frac{d\tilde{V}}{dz} \right\|_\sigma \leq c\rho \quad \text{con} \quad c = k(n+2).$$

De todo lo anterior concluimos que

$$\|T_{\tilde{V}}(h_2) - T_{\tilde{V}}(h_1)\|_\rho < c\rho \|h_2 - h_1\|_\rho.$$

Por lo tanto $T_{\tilde{V}}$ es una contracción fuerte. □

Como la colección de valores propios $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está en el dominio de Poincaré y es no resonante entonces siempre existe la distancia mínima al origen, es decir, $|\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle| > \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, esto implica que $\frac{1}{|\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle|} < \frac{1}{\epsilon}$.

Observemos que \mathcal{L}_A^{-1} está definida como

$$\mathcal{L}_A^{-1} : \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} a_{kn} z^n \frac{\partial}{\partial z_k} \longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} \frac{a_{kn}}{\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle} z^n \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Sea $h \in \mathcal{B}_\rho$, con $h = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} \frac{a_{kn}}{\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle} z^n \frac{\partial}{\partial z_k}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1}h\|_\rho &= \sup_{|z| < \rho} |\mu(h(z))| = \sup_{|z| < \rho} \left| \mu \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+^n \cup \{0\}} \frac{a_{kn}}{\lambda_j - \langle \lambda, k \rangle} z^n \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \sum |a_{kn}| \rho^n \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{\epsilon} \|h\|_\rho. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_A^{-1}h \in \mathcal{B}_\rho$ para cualquier $h \in \mathcal{B}_\rho$. Notemos que \mathcal{L}_A^{-1} es un operador lineal.

Lema 1.4. $\mathcal{L}_A^{-1} \circ \tilde{V}(Id + \cdot)$ es una contracción fuerte de $\tilde{\mathcal{B}}_\rho$.

Demostración. Calculemos

$$\|\mathcal{L}_A^{-1} \circ T_{\tilde{V}}(Id + 0)\| = \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ \tilde{V}(Id)\|_\rho = \frac{1}{\epsilon} \|\tilde{V}(z)\|_\rho \in O(\rho^2)$$

Ahora sean $h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_\rho$, calculemos $\|\mathcal{L}_A^{-1} \circ T_{\tilde{V}}(Id + h_2) - \mathcal{L}_A^{-1} \circ T_{\tilde{V}}(Id + h_1)\|_\rho$, dado que \mathcal{L}_A^{-1} es un operador lineal obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ [T_{\tilde{V}}(Id + h_2) - T_{\tilde{V}}(Id + h_1)]\|_\rho &\leq \frac{1}{\epsilon} \|T_{\tilde{V}}(Id + h_2) - T_{\tilde{V}}(Id + h_1)\|_\rho \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} c\rho \|h_2 - h_1\|_\rho \\ &= O(\rho) \|h_2 - h_1\|_\rho \end{aligned}$$

□

Por lo tanto $\mathcal{L}_A^{-1} \circ T_{\tilde{V}}$ es una contracción fuerte en \mathcal{B}_ρ y como \mathcal{B}_ρ es un espacio métrico completo entonces por el Teorema 1.5, $\mathcal{L}_A^{-1} \circ T_{\tilde{V}}$ tiene un único punto fijo $h \in \mathcal{B}_\rho$. Entonces existe $H(z) = z + h(z)$ biholomorfismo, con el cual $\dot{z} = Az + \tilde{V}(z)$ es analíticamente equivalente a $\dot{z} = Az$. □

1.4. Foliaciones

Una de la herramientas que nos permite conocer la naturaleza de una ecuación diferencial es precisamente su retrato de fases. Introduciremos elementos que nos permitan analizar las propiedades geométricas de éste.

DEFINICIÓN 1.16. *Una foliación holomorfa no singular por curvas \mathcal{F} de un abierto U de \mathbb{C}^n es una descomposición de U en subconjuntos conexos disjuntos $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ donde A es un conjunto de índices, cada \mathcal{L}_α es denominada hoja de la foliación y se satisface que por cada punto $p \in U$ existe una vecindad U_p y un biholomorfismo $\varphi : U_p \rightarrow W_p \subseteq \mathbb{C}^n$, tal que para toda hoja \mathcal{L}_α , las componentes conexas de $U_p \cap \mathcal{L}_\alpha$ quedan descritas por las ecuaciones*

$$w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1} \quad \text{en } W_p$$

A las parejas (U_p, φ) se les denomina cartas coordenadas distinguidas de la foliación.

Sea V un campo vectorial definido en un abierto U de \mathbb{C}^n . Denotemos por $U' = \{p \in U : V(p) \neq 0\}$ al subconjunto abierto de U en donde V no se anula. Entonces por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales analíticas, para cada punto p de U' pasa una única curva solución. Observemos que las soluciones para cada punto en U' constituyen una familia infinita de curvas analíticas cuya intersección es vacía, esto sugiere de manera natural que las soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.2) constituyen una foliación no singular por curvas.

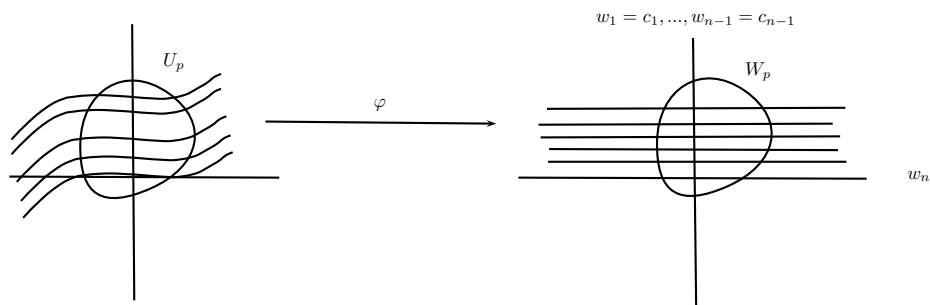


Figura 1.1: Foliación

Lema 1.5. *Sea V un campo vectorial holomorfo nunca nulo, definido en un abierto U de \mathbb{C}^n , entonces las soluciones de la ecuación diferencial (1.2) asociada a V constituye una foliación no singular por curvas $\mathcal{F}(V)$ de U . Además, si W es otro campo vectorial nunca nulo, entonces las foliaciones $\mathcal{F}(V)$ y $\mathcal{F}(W)$ coinciden si y sólo si existe una función holomorfa f nunca nula definida en U tal que $V = f \cdot W$*

La demostración de este lema puede ser consultada en [8]
A continuación extendemos la noción de foliación.

DEFINICIÓN 1.17. *Sea U un abierto conexo de \mathbb{C}^n . Una foliación por curvas con singularidades \mathcal{F} de U es una foliación no singular de $U - A$ donde A es un subconjunto analítico de codimensión mayor que 1.*

La siguiente proposición nos permite dar una representación analítica de las foliaciones por curvas con singularidades, veremos que toda foliación por curvas con singularidades da origen localmente a un campo vectorial, es decir, toda foliación con singularidades puede verse localmente como el retrato fase de una ecuación diferencial.

Proposición 1.3. *Sea U un abierto de \mathbb{C}^n , A un subconjunto analítico de U de codimensión mayor que 1 y \mathcal{F} una foliación no singular por curvas en $U - A$. Entonces para todo punto $p \in U$, existe un campo vectorial holomorfo V definido en una vecindad U_p de p tal que V es no nulo en $U_p - (A \cap U_p)$ y es tangente a las hojas de \mathcal{F} . El campo es único salvo multiplicación por una función holomorfa nunca nula en una vecindad de p .*

La demostración puede ser consultada en [8]

1.4.1. Foliaciones en variedades holomorfas

Nuestro siguiente objetivo es extender las nociones mencionadas a variedades complejas

DEFINICIÓN 1.18. *Sea M una variedad compleja. Una foliación no singular por curvas \mathcal{F} de M es una descomposición de M en subconjuntos conexos disjuntos $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, denominadas hojas de la foliación, tal que todo punto p de M tiene una vecindad U_p y un biholomorfismo $\varphi : U_p \rightarrow W_p \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisfacen que para toda hoja $\{\mathcal{L}_\alpha\}$, las componentes conexas de $\varphi(U_p \cap \{\mathcal{L}_\alpha\})$ quedan descritas por ecuaciones de la forma*

$$w_1 = k_1, \dots, w_{n-1} = k_{n-1} \quad \text{en } W_p$$

Las parejas (U_p, φ) son denominadas cartas coordenadas distinguidas de la foliación y a la hoja que contiene al punto p la denotamos por \mathcal{L}_p .

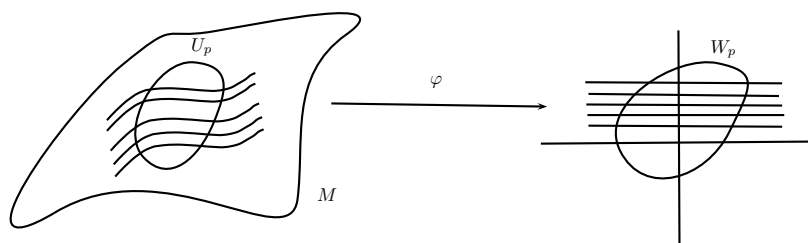


Figura 1.2: Foliación sobre M

DEFINICIÓN 1.19. *Sea M una variedad compleja conexa. Una foliación por curvas con singularidades \mathcal{F} de M es una foliación no singular por curvas de $M - N$ donde N es una subvariedad holomorfa analítica de M de codimensión mayor que 1.*

Hay ciertas hojas especiales en una foliación que tienen una propiedad importante, admiten extenderse analíticamente en puntos singulares, a estas hojas se les llama separatrices y sobre ellas enfocaremos nuestra atención al hablar de foliaciones.

DEFINICIÓN 1.20. *Sea V un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con 0 una singularidad aislada en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Una separatriz compleja de V en 0*

es una hoja $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ de la foliación tal que $\mathcal{L} \cup \{0\}$ es una curva analítica γ , es decir, γ está definida por los ceros de una función f analítica, $\gamma = \{f = 0\} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$.

Capítulo 2

Preliminares al teorema de Savelev

En este capítulo introducimos teoría preliminar al teorema de Savelev, definimos el concepto de haz vectorial y generalizamos el concepto de función vectorial, definimos lo que es una conexión meromorfa haciendo uso de las propiedades de la derivada covariante y observamos que bajo ciertas condiciones algunas conexiones corresponden a sistemas lineales definidos en una variedad. Así mismo, clasificaremos los haces lineales sobre la esfera de Riemann. Al final del capítulo damos un invariante topológico, que es el residuo de la conexión, y vemos que éste corresponde con el grado del haz vectorial. Este teorema es el resultado principal del capítulo y para poderlo enunciar y demostrar requerimos desarrollar nociones y resultados de haces vectoriales y conexiones.

2.1. Teoría de sistemas lineales

Sea M una superficie de Riemann, es decir, una variedad 1 compleja dimensional conexa, la cual jugará el papel del eje de tiempo complejo. Para lo que habremos de ver en este capítulo M corresponderá o bien a \mathbb{C} , \mathbb{P} o subdominios de éstos. Sea n un número natural y $\omega_{ij} \in \Lambda^1(M)$ $i, j = 1, \dots, n$ una colección de n^2 1-formas diferenciales holomorfas sobre M , consideremos la matriz dada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, \Lambda^1(M)). \quad (2.1)$$

Sea \mathbb{C}^n el espacio n -dimensional complejo equipado con las coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ y consideramos el producto cartesiano $M \times \mathbb{C}^n$. La distribución 1-dimensional sobre $M \times \mathbb{C}^n$ generada por los ceros de las n 1-formas holomorfas $\theta_i = dz_i - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} z_j \in \Lambda^1(M \times \mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, n$, define una foliación. Las hojas de esta foliación consideradas como gráficas de funciones vectoriales holomorfas definidas sobre M , $x(\cdot) : M \rightarrow \mathbb{C}^n$, son soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de Pfaff

$$dz_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} z_j, \quad (2.2)$$

que también denotaremos como

$$dz = \Omega z \quad \text{con} \quad \Omega = [\omega_{ij}] \quad (2.3)$$

Si $V \subseteq M$ es una carta sobre M , con función coordenada $t : V \rightarrow \mathbb{C}$ y rango $U = t(V)$, entonces las 1-formas ω_{ij} y la respectiva matriz Ω pueden ser representadas mediante el pullback como

$$\omega_{ij} = a_{ij}(t)dt, \quad \text{o bien} \quad \Omega = A(t)dt, \quad (2.4)$$

donde $a_{ij}(t)$ son funciones holomorfas sobre U , es decir, $a_{ij}(t) \in \mathcal{O}(U)$ y $A(t) \in \text{Mat}(n, \mathcal{O}(U))$. En la carta t el sistema de ecuaciones de Pfaff queda definido como un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad t \in V \subseteq \mathbb{C}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n. \quad (2.5)$$

Es un hecho sencillo de verificar que las soluciones de (2.5) forman un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 2.1. Una n -tupla de soluciones es llamada un sistema fundamental de soluciones de (2.2), o (2.5) sobre una base simplemente conexa M , si ésta es una base en el espacio lineal de todas las soluciones. Una matriz fundamental de soluciones de la ecuación (2.5) es una matriz de funciones holomorfas $X : M \mapsto \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ la cual es no degenerada, es decir, $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in M$.

La matriz fundamental de soluciones X es única salvo constantes, es decir, si \tilde{X} es otra matriz fundamental entonces $\tilde{X}(t) = X(t)C$, $C \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$. Una solución de un sistema no homogéneo puede ser encontrada a partir de un sistema homogéneo usando el método de variación de constantes. Si $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema lineal $dX = \Omega X$, entonces una solución particular del sistema no homogéneo $dY = \Omega Y + \Theta$, donde Θ es una matriz de 1-formas conocidas sobre M , está dada por la fórmula

$$Y(t) = X(t)C(t), \quad dC = X^{-1}\Theta$$

donde las soluciones de la segunda ecuación puede ser encontrada integrando, $C = \int X^{-1}\Theta$, pues cualquier 1-forma holomorfa sobre una superficie de Riemann M simplemente conexa es exacta (ver apéndice). Cualquier otra solución del sistema no homogéneo puede ser obtenida como la suma de la solución particular $Y(t)$ y una solución general del sistema homogéneo.

2.1.1. Transformaciones de Gauge

Consideremos dos cilindros $S = M \times \mathbb{C}^n$ y $\tilde{S} = \tilde{M} \times \mathbb{C}^n$ donde M y \tilde{M} son superficies de Riemann. Cada cilindro equipado con la proyección $\pi : S \rightarrow M$ y $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{M}$.

DEFINICIÓN 2.2. Una transformación de Gauge o mapeo de Gauge entre dos cilindros S y \tilde{S} es una transformación $H : S \rightarrow \tilde{S}$, que satisface

- 1). Es lineal sobre cada "fibra"

$$H|_{\tau_a} : \tau_a \rightarrow \tau_{h(a)} \quad \text{es lineal,}$$

$$\tau_a = \pi^{-1}(a) = a \times \mathbb{C}^n, \quad \tau_{h(a)} = \tilde{\pi}^{-1}(h(a)) = h(a) \times \mathbb{C}^n$$

- 2). Respeto las proyecciones, es decir, existe un mapeo $h : M \rightarrow \tilde{M}$ tal que se satisface la igualdad

$$\tilde{\pi} \circ H = h \circ \pi \tag{2.6}$$

En coordenadas un mapeo de Gauge puede verse como

$$(t, z) \mapsto (h(t), H(t)z), \quad H \in GL(n, \mathcal{O}(M)) \quad (2.7)$$

donde $H(\cdot)$ es una matriz de funciones holomorfas.

En nuestro caso trabajaremos con mapeos fibrados sobre el mapeo identidad $h = id$. Las transformaciones de Gauge actúan de manera natural sobre sistemas lineales definidos en los respectivos cilindros.

Si $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema $dX = \Omega X$ y $H : (t, z) \mapsto (t, H(t)z)$ es un mapeo de Gauge, entonces $\tilde{X}(t) = H(t)X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones para otro sistema lineal $d\tilde{X} = \tilde{\Omega}\tilde{X}$. De hecho es posible encontrar explícitamente a $\tilde{\Omega}$ derivando la igualdad $\tilde{X}(t) = H(t)X(t)$:

$$d\tilde{X} = d(HX) = dHX + HdX = dHX + H\Omega X = dHH^{-1}\tilde{X} + H\Omega H^{-1}\tilde{X} \quad (2.8)$$

lo cual implica que

$$d\tilde{X} = (dHH^{-1} + H\Omega H^{-1})\tilde{X}. \quad (2.9)$$

finalmente $\tilde{\Omega} = dHH^{-1} + H\Omega H^{-1}$. Esta fórmula es de suma importancia pues aparecerá cuando estudiemos el concepto de conexión.

DEFINICIÓN 2.3. *Dados dos sistemas lineales $dX = \Omega X$, $d\tilde{X} = \tilde{\Omega}\tilde{X}$ del mismo orden definidos sobre la misma superficie de Riemann M , decimos que son Gauge holomorfaamente equivalentes, si existe un mapeo de Gauge H holomorfo que transforma el sistema $dX = \Omega X$ en el sistema $d\tilde{X} = \tilde{\Omega}\tilde{X}$.*

2.2. Haces Vectoriales

En esta sección desarrollaremos una idea intuitiva, bastante importante en otras áreas de la matemática, que en nuestro caso permitirá encontrar invariantes topológicos de campos vectoriales. Intuitivamente a cada punto de una variedad M diferenciable u holomorfa podemos asociarle un espacio vectorial n -dimensional, “pegándolos” de manera tal que localmente los podemos ver como el producto de M con \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , pero que globalmente tiene una estructura de variedad diferenciable u holomorfa (según sea el caso), dichos espacios son conocidos como haces vectoriales diferenciables ó analíticos.

De ahora en adelante consideraremos sólo variedades holomorfas pero los mismos argumentos son válidos para variedades diferenciables.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un mapeo continuo entre dos espacios topológicos. Un mapeo Φ es llamado una trivialización local (carta trivializante o simplemente trivialización) de π sobre un subconjunto abierto $U \subseteq M$, si $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo que conjuga a la proyección π con la proyección del producto cartesiano $U \times \mathbb{C}^n$ en U , $\psi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$, es decir $\psi \circ \Phi = \pi$.

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\psi} & U \\
 & \swarrow \Phi & \nearrow \pi \\
 & \pi^{-1}(U) &
 \end{array}$$

Las trivializaciones juegan el rol de cartas coordenadas especiales.

DEFINICIÓN 2.5. El espacio topológico E junto con un mapeo continuo (proyección) $\pi : E \rightarrow M$ es llamado el haz vectorial topológico complejo de rango n sobre un espacio topológico M si:

1). Para cualquier punto $a \in M$ de la base hay una pareja (U_α, Φ_α) tal que U_α vecindad abierta $a \in U_\alpha$ y Φ_α es una trivialización de π sobre U_α .

2). La familia de trivializaciones $\{\Phi_\alpha\}$ respetan la estructura lineal de las fibras $\pi^{-1}(a)$:

Si Φ_α y Φ_β son dos trivializaciones de π sobre dos dominios abiertos con intersección no vacía $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, entonces el mapeo de transición entre ellos es una transformación de Gauge fibrada sobre el mapeo identidad, es decir,

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n, \quad (2.10)$$

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(a, x) = (a, H_{\alpha\beta}(a)x), H_{\alpha\beta} \in GL(n, \mathbb{C}^n), a \in U_{\alpha\beta}. \quad (2.11)$$

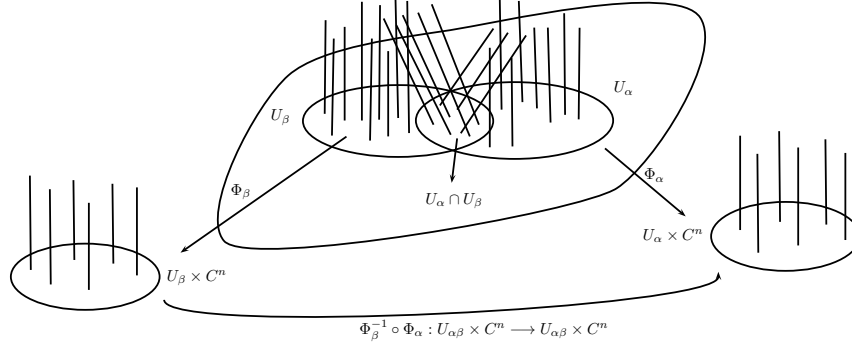


Figura 2.1: Funciones de transición

La tripleta $\pi : E \rightarrow M$ es llamada haz vectorial holomorfo, si ambas E y M son variedades holomorfas, π es una proyección holomorfa la cual admite trivializaciones biholomorfas para cada punto de M . En este caso los mapeos de transición son transformaciones Gauge biholomorfas. Preimágenes de puntos $\tau_a = \pi^{-1}(a)$ son llamadas fibras del haz vectorial. El espacio E es llamado el espacio total y el espacio M es llamado el espacio base del haz vectorial.

Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M . Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial holomorfo, entonces para cada par de trivializaciones definidas sobre dominios U_α y U_β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ la matriz de funciones

$$H_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \quad (2.12)$$

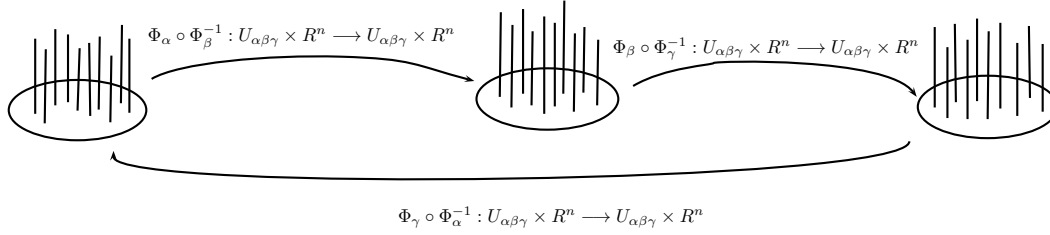
es holomorfa junto con su inversa $H_{\beta\alpha}^{-1}$. Dado que la construcción es simétrica con respecto a las dos trivializaciones, esta inversa es la matriz de transición $H_{\alpha\beta}$, es decir, se satisfacen las siguientes identidades

$$H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\alpha} \equiv Id \quad \text{sobre } U_{\alpha\beta}. \quad (2.13)$$

Mas aún, si U_α, U_β y U_γ son tres dominios con intersección $U_{\alpha\beta\gamma}$ no vacía dos a dos y la intersección de los tres es no vacía, entonces

$$H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\gamma} \cdot H_{\gamma\alpha} \equiv Id \quad \text{sobre } U_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.14)$$

En efecto, esta composición corresponde a la transición entre las trivializaciones Φ_α, Φ_β y Φ_γ regresando a Φ_α .


 Figura 2.2: Funciones de transición sobre $U_{\alpha\beta\gamma}$

DEFINICIÓN 2.6. (Cociclos). Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M . Un cociclo holomorfo es una colección de matrices de funciones $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ definida sobre $U_{\alpha\beta}$ (cuando ésta es no vacía) que satisface (2.13) sobre las intersecciones dobles y (2.14) sobre las intersecciones triples. Decimos que el cociclo está subordinado a la cubierta abierta \mathfrak{U} .

DEFINICIÓN 2.7. Una cocadena de matrices holomorfa \mathcal{G} subordinada a la cubierta \mathfrak{U} , es una colección de matrices de funciones holomorfas $G_\alpha \in \text{Mat}(n, U_\alpha)$ definidas y holomorfas en los dominios de la cubierta.

De manera análoga se pueden definir cocadenas meromorfas y otro tipo de cadenas con sus respectivas modificaciones.

DEFINICIÓN 2.8. Dos cociclos $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ y $\mathcal{H}' = \{H'_{\alpha\beta}\}$ inscritos en la misma cubierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ son equivalentes, si hay una cocadena de matrices $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ tales que se satisface la relación

$$H'_{\alpha\beta} G_\beta = G_\alpha H_{\alpha\beta} \quad \text{sobre } U_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

2.2.1. Algunos ejemplos

La geometría provee una gran variedad de haces.

Ejemplo 2.1. Sea M una variedad holomorfa y consideremos el conjunto de todos los espacios tangentes en cada punto de M , $T_p M$:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, \quad v \in T_p M\} \quad (2.16)$$

Los elementos de TM son de la forma (p, v) donde p es un punto de M y v un vector tangente en p a M . Definimos la proyección $\pi : TM \longrightarrow M$,

asociando a $(p, v) \in T_p M$ $\pi(p, v) = p$. Notemos que $\pi^{-1}(p) = T_p M$. TM tiene una estructura natural de haz con π la proyección sobre M y es llamado el haz tangente.

Ejemplo 2.2. El haz cotangente definido como $(TM)^* = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$.

Ejemplo 2.3. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial sobre M . Un haz vectorial $\pi : F \rightarrow M$ es llamado un subhaz, si F es una subvariedad de E tal que para cada punto $p \in M$, la fibra F_p es un subespacio vectorial de la fibra E_p de E .

Ejemplo 2.4. Sea N una subvariedad de M . Entonces TN es un subhaz de TM .

Ejemplo 2.5. Sea F un subhaz de un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$. Para cada punto $p \in M$, consideramos el subespacio cociente E_p/F_p y definimos $E/F = \bigcup_{p \in M} E_p/F_p$ entonces $\pi : E/F \rightarrow M$ es un haz vectorial llamado el haz cociente de E por F .

Ejemplo 2.6. Sea TN el subhaz de TM definido en el ejemplo 4. El correspondiente haz cociente es llamado el haz normal de N en M y la fibra en cada punto $p \in M$ esta dado por $T_p M/T_p N$.

Ejemplo 2.7. El haz vectorial trivial $\pi : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$, $\pi(a, x) = a$, de un cualquier rango existe sobre cualquier base M y es asociado con el cociclo trivial $\{H_{\alpha\beta} = Id\}$ inscrito en una cubierta arbitraria de M .

2.2.2. Operaciones sobre haces

DEFINICIÓN 2.9. Un mapeo holomorfo entre dos haces vectoriales $\pi : E \rightarrow T$ y $\pi' : E' \rightarrow T'$ es un mapeo holomorfo $F : E \rightarrow E'$ entre los espacios totales, el cual mapea fibras de π linealmente a fibras de π' .

Formalmente esto significa que existe un mapeo $f : T \rightarrow T'$ entre las bases tal que $\pi' \circ F = f \circ \pi$. Decimos que F es fibrado sobre f .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ T & \xrightarrow{f} & T' \end{array}$$

DEFINICIÓN 2.10. Un cociclo holomorfo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ se dice que es soluble, si hay una cocadena de matriz holomorfa $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ tal que

$$H_{\alpha\beta} = G_\alpha G_\beta^{-1} \quad (2.17)$$

Observemos que de la definición anterior cociclos solubles corresponden a haces holomorfamente equivalentes al cociclo trivial, lo cual nos provee el siguiente lema:

Lema 2.1. *Un cociclo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ es soluble si y sólo si es equivalente al cociclo trivial.*

Demostración. Supongamos que el cociclo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ es soluble entonces existe una matriz cocadena holomorfa $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ tal que $H_{\alpha\beta} = G_\alpha G_\beta^{-1}$ esto implica que $H_{\alpha\beta} G_\beta = G_\alpha Id$ y por tanto el cociclo es equivalente al cociclo trivial.

Ahora supongamos que el cociclo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ es equivalente al cociclo trivial entonces existe una matriz cocadena holomorfa $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ tal que $H_{\alpha\beta} G_\beta = G_\alpha Id$ y por tanto $H_{\alpha\beta} = G_\alpha G_\beta^{-1}$ de lo cual se sigue que el cociclo es soluble. \square

Las nociones de haces vectoriales holomorfos, cociclos, cocadenas cobran mucho sentido en el caso de rango $n = 1$. Este caso es muy importante, dado que las matrices de 1×1 conmutan y entonces es mucho mas fácil estudiar cociclos y por consiguiente equivalencia entre haces.

Para distinguir este caso, haces de rango 1 son llamados haces lineales.

2.2.3. Clasificación de haces lineales sobre \mathbb{P}

Procederemos a dar una clasificación completa de los haces lineales sobre \mathbb{P} .

Consideremos la cubierta estándar de la esfera de Riemann \mathbb{P} por un atlas de dos cartas, $U_0 = \{|z| < r_0\} \subseteq \mathbb{C}$ el disco con la carta z heredada de \mathbb{C} y $U_1 = \{|z| > r_1\} \cup \{\infty\}$ con la carta $w = \frac{1}{z}$; bajo esta carta U_1 también es un disco topológico. La intersección de esas dos cartas es el anillo circular $K = \{r_1 < |z| < r_0\}$.

Nota: La elección exacta de los parametros $r_1 < r_0$ no es importante.

DEFINICIÓN 2.11. Sea $\{U_0, U_1\}$ una cubierta estándar de \mathbb{P} . Se dice que un cociclo asociado a la cubierta estándar es de Birkhoff-Grothendieck si

consiste de un par de funciones matriciales $H_{01}(z) = H_{10}^{-1}(z)$ holomorfas e invertibles en el anillo K .

En el caso de rango 1 un cociclo de Birkhoff- Grothendieck es una función que no se anula, holomorfa en el anillo K , $h(z) = h_{01}(z) = h_{10}^{-1}(z)$.

Denotamos por ξ_d el haz lineal correspondiente al cociclo estándar de Birkhoff-Grothendieck

$$\mathcal{L}_d = \{h_{01}, h_{10}\}, \quad h_{01}(z) = z^d = h_{10}^{-1}(z), \quad d \in \mathbb{Z}, \quad (2.18)$$

en el anillo K .

DEFINICIÓN 2.12. *El grado de un haz lineal ξ_d es el número entero d del cociclo estándar asociado.*

Nuestro objetivo es dar una caracterización de los haces lineales sobre la esfera de Riemann, para ello requerimos de un lema.

Lema 2.2. *Sean $U_0, U_1 \subseteq \mathbb{P}$ dos dominios tales que U_0, U_1 tienen frontera suave por pedazos y su intersección $V = U_0 \cap U_1$ también tiene frontera suave por pedazos. Entonces cualquier función $v \in A(V)$, es decir holomorfa en V y continua sobre la cerradura $\bar{V} = V \cup \partial V$, puede ser representada como la diferencia, $v = u_0 - u_1$, con $u_0 \in A(U_0)$ y $u_1 \in A(U_1)$.*

Demostración. Dado que la ∂V es suave por pedazos, la función v puede ser representada por la formula integral de Cauchy sobre la frontera de V . Es posible expresar a la frontera de V , como la unión disjunta de dos conjuntos, $\partial V = V_0 \cup V_1$, con $V_0 \subseteq \partial U_0$ y $V_1 \subseteq \partial U_1$. Así obtenemos

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{v(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_0} \frac{v(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{V_1} \frac{v(t)}{t-z} dt \quad (2.19)$$

donde

$$u_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_i} \frac{v(t)}{t-z} dt \quad i = 0, 1 \quad (2.20)$$

es holomorfa en $U_i \subset \mathbb{P} \setminus V_i$, y ambas son continuas sobre ∂U_i . □

Proposición 2.1. *Cualquier cociclo escalar de Birkhoff-Grothendieck $\mathcal{L} = \{h_{01}(z), h_{10}(z)\}$ sobre \mathbb{P} es equivalente a uno de los cociclos estándar (2.18) de algún grado d . Además cociclos estándar de diferentes grados no son equivalentes.*

Demostración. Consideremos $\{U_0, U_1\}$ la cubierta estándar de \mathbb{P} y sea $K = U_0 \cap U_1$ el anillo que resulta de la intersección de los dos abiertos. Dado que $h(z) = h_{01}(z) = h_{10}^{-1}$ y $h(z)$ es holomorfa sobre K entonces podemos expresar a $h(z)$ en su serie de Laurent, es decir,

$$h(z) = c_d z^d + c_{d+1} z^{d+1} + c_{d+2} z^{d+2} + \dots, \quad d \in \mathbb{Z}, \quad c_d \neq 0. \quad (2.21)$$

De esta última ecuación se observa que existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $z^{-d}h(z)$ es holomorfa y no se anula sobre K . De lo anterior podemos definir $g(z) = \ln(z^{-d}h(z))$, que está bien definida, es holomorfa sobre K y continua sobre la frontera de K . Por el Lema 2.2.3 podemos expresar a la función $g(z)$ como la diferencia de dos funciones $u_0(z), u_1(z)$ holomorfas sobre U_0 y U_1 respectivamente y que satisfacen la identidad sobre K

$$\ln(z^{-d}h(z)) = g(z) = u_0(z) - u_1(z). \quad (2.22)$$

La anterior igualdad es equivalente a

$$z^{-d}h(z) = e^{u_0(z)-u_1(z)} = e^{u_0(z)}e^{-u_1(z)}, \quad (2.23)$$

donde $g_i(z) = e^{u_i(z)}$ son holomorfas y no se anulan sobre U_i . Reescribiendo la última ecuación obtenemos

$$h(z)g_1(z) = g_0(z)z^d. \quad (2.24)$$

De la definición 5 obtenemos que el cociclo \mathcal{L} y el cociclo estándar \mathcal{L}_d son equivalentes. \square

La proposición anterior nos da una clasificación de cociclos escalares inscritos en la cubierta estándar de la esfera de Riemann \mathbb{P} . De hecho, este caso particular es suficiente para describir todos los cociclos escalares y por tanto todos los haces lineales holomorfos sobre \mathbb{P} como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Cualquier haz lineal sobre la esfera de Riemann \mathbb{P} es holomorfamente equivalente al haz lineal estándar ξ_d de grado d para algún $d \in \mathbb{Z}$.*

Antes de proceder con la demostración de este teorema, enunciaremos dos lemas que requerimos para la demostración.

Lema 2.3. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial lineal, es decir de rango 1 y sean U y V dos cartas de alguna cubierta de M , tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cup V$ son conexos y simplemente conexos, entonces el haz es holomorfamente equivalente al haz trivial sobre $U \cup V$.*

Demostración. Sea h el cociclo asociado al haz sobre $U \cap V$, h está bien definida y no se anula sobre $U \cap V$ y como $U \cap V$ es una región simplemente conexa lnh es una función holomorfa y bien definida sobre la intersección. Entonces aplicando el Lema 2.2.3 obtenemos dos funciones u y v definidas sobre U y V respectivamente y mediante las cuales

$$lnh = u - v. \quad (2.25)$$

Esto implica que

$$h = e^{u-v} = e^u e^{-v}, \quad (2.26)$$

por lo tanto obtenemos que

$$he^v = e^u id. \quad (2.27)$$

Como e^u y e^v son holomorfas, están bien definidas sobre la intersección y no se anulan, obtenemos que el cociclo original es equivalente al cociclo trivial sobre $U \cup V$ esto implica que por tanto el haz original π es equivalente al haz trivial como se deseaba probar. \square

Lema 2.4. *Cualquier haz lineal $\pi : E \rightarrow \mathbb{D}$ sobre el disco \mathbb{D} es holomorfa-mente equivalente al haz trivial.*

Demostración. Dado $U_0 = \{|z| < r_0\} \subseteq \mathbb{C}$, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\bar{U}_\varepsilon = \{|z| \leq r_0 + \varepsilon\} \subseteq \mathbb{C}$. Tomemos una triangulación¹ finita de \bar{U}_ε y consideremos el cociclo \mathfrak{L} asociado a la cubierta \mathfrak{U} tal que los dominios U_α sean ε' -vecindades de la triangulación. Dado que la cubierta es finita, es posible ordenar las ε' -vecindades de tal manera que los conjuntos

$$U_{k+1} \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k) \quad \text{y} \quad U_1 \cup \dots \cup U_k \quad (2.28)$$

sean todos conexos y simplemente conexos.

La demostración es por inducción sobre los elementos de la cubierta. Para el caso $n = 2$, sean U_1 y U_2 abiertos de la cubierta. Por el ordenamiento de la cubierta $U_1 \cap U_2$ y $U_1 \cup U_2$ son conexos y simplemente conexos. Entonces por el Lema 2.3 es posible trivializar el cociclo \mathfrak{L} sobre $U_1 \cup U_2$. Supongamos que el resultado es válido para k , es decir el cociclo \mathfrak{L} es soluble sobre $U' = U_1 \cup \dots \cup U_k$ y por tanto podemos remplazar el cociclo \mathfrak{L} por el cociclo \mathfrak{L}' donde las funciones de transición h_{ij} entre los dominios U_1, \dots, U_k

¹Teorema[Cairns, J.H.C.Whitehead] Cualquier variedad C^∞ admite una triangulación, más aún cualquier triangulación de la frontera de una variedad C^∞ puede ser extendida a una triangulación de toda la variedad. Ver [6]

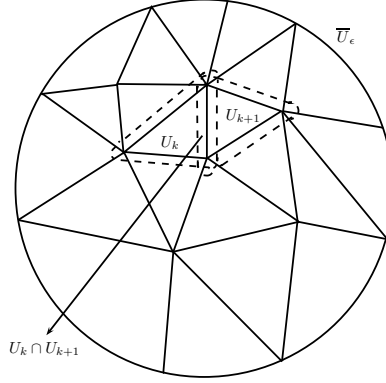


Figura 2.3: Cubierta del disco

son la identidad. Falta por demostrar que el cociclo puede ser trivializado sobre $U' \cup U_{k+1}$. En efecto, sea h una función holomorfa e invertible sobre $V = U' \cap U_{k+1}$. Como por construcción V es simplemente conexa entonces el $\ln h$ es una función bien definida y holomorfa sobre V . Entonces, por el Lema 2.2.3, existen g_1 y g_2 funciones holomorfas sobre V tal que

$$\ln h = g_1 - g_2, \quad (2.29)$$

lo que es equivalente a que

$$h = \frac{e^{g_1}}{e^{g_2}} = \frac{g}{g'} \quad (2.30)$$

y por tanto

$$hg = g'id. \quad (2.31)$$

de lo anterior se obtiene que el cociclo original \mathfrak{L} es soluble sobre $U' \cup U_{k+1} = U_1 \cup \dots \cup U_{k+1}$. Así obtenemos que el cociclo \mathfrak{L} es equivalente al cociclo trivial y por consiguiente el haz lineal π es equivalente al haz trivial. \square

Proposición 2.2. *Todo cociclo $\mathcal{H} = \{h_{ij}\}$ de rango 1 inscrito sobre una cubierta abierta de \mathbb{P} es holomorfamente equivalente a un cociclo de Birkhoff-Grothendieck.*

Demostración. Sea $\mathcal{H} = \{h_{ij}\}$ el cociclo asociado a $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, entonces es posible ordenar dicha cubierta de tal manera que $0 \in U_0$ con $U_0 = (U_1 \cup \dots \cup U_k) \cong \mathbb{D}$ y $\infty \in U_\infty$ con $U_\infty = U_{k+1} \cup \dots$ bajo la carta $w = \frac{1}{z}$ sea un disco

topológico. Así obtenemos una cubierta de Birkhoff-Grothendieck a partir de la cubierta original. Por el Lema 2.4 el cociclo original \mathcal{H} es holomorfaamente equivalente a el cociclo trivial sobre U_0 y, bajo la carta $w = \frac{1}{z}$, el cociclo \mathcal{H} es holomorfaamente equivalente al trivial sobre U_∞ , obteniendo como resultado un cociclo de Birkhoff-Grothendieck. \square

Con los lemas anteriores y las proposiciones 2.1 y 2.2 estamos en condiciones para demostrar el **Teorema 2.1**

Demostración. Sea \mathfrak{L} el cociclo asociado al haz original inscrito en una cubierta abierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de \mathbb{P} , entonces por la proposición 2.2 el cociclo es equivalente a un cociclo de Birkhoff-Grothendieck y por la proposición 2.1 cualquier cociclo de Birkhoff-Grothendieck es equivalente a un cociclo estándar \mathfrak{L}_d para algún d ; esto implica que el haz original es equivalente a un haz estándar de grado d para algún $d \in \mathbb{Z}$. \square

2.3. Secciones y conexiones

Dado que el espacio total de un haz vectorial no es en general un producto cartesiano, necesitamos una adecuada generalización de la noción de funciones vectoriales.

DEFINICIÓN 2.13. *Una sección de un haz vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ es un mapeo $s : M \rightarrow E$, tal que $\pi \circ s = id$, es decir, $\forall p \in M, s(p) \in \pi^{-1}(p)$.*

Las secciones del haz tangente son conocidas como campos vectoriales diferenciables u holomorfos (según sea el caso). En notación $\mathfrak{X}(M) = \{s : M \rightarrow TM\}$.

Las secciones del haz cotangente son llamadas 1-formas diferenciales u holomorfos (según sea el caso) y las denotamos como $\Lambda(M) = \{s : M \rightarrow (TM)^*\}$.

Las trivializaciones sobre una cubierta $\{U_\alpha\}$ de M nos permiten asociar a cada sección s un vector cocadena holomorfo $\{x_\alpha\}$, como la colección de funciones vectoriales

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n, \quad x_\alpha = \Phi_\alpha \circ s|_{U_\alpha}. \quad (2.32)$$

Dados $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, y las trivializaciones asociadas Φ_α y Φ_β , obtenemos una relación entre los vectores cocadena,

$$x_\beta = \Phi_\beta \circ s|_{U_\beta \cap U_\alpha}. \quad (2.33)$$

Por otro lado $s|_{U_\beta \cap U_\alpha} = \Phi_\alpha^{-1} \circ x_\alpha$, lo cual implica

$$x_\beta = \Phi_\beta \circ s|_{U_\beta \cap U_\alpha} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ x_\alpha = H_{\beta\alpha} x_\alpha. \quad (2.34)$$

De manera equivalente, dado el cociclo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ y un haz vectorial definido por este cociclo, cualquier vector cocadena holomorfo $\{x_\alpha\}$ que satisfaga (2.34) sobre las intersecciones dos a dos, define una sección del haz.

DEFINICIÓN 2.14. *Una sección meromorfa de un haz vectorial holomorfo definida por un cociclo holomorfo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$, es un vector cocadena meromorfo $\{x_\alpha\}$ el cual satisface la relación (2.34) sobre $U_{\alpha\beta}$.*

Notemos que las secciones meromorfas de un haz vectorial tienen una estructura de espacio vectorial infinito dimensional sobre \mathbb{C} , es decir, dadas s y s' secciones meromorfas del haz y $a \in \mathbb{C}$, se satisface

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p), \quad (as)(p) = a \cdot s(p) \quad \forall p \in M; \quad (2.35)$$

mas aún, si $f \in \mathcal{M}(M)$

$$f \cdot s(p) = f(p) \cdot s(p), \quad \forall p \in M. \quad (2.36)$$

Es decir, el conjunto de secciones del haz forman un módulo sobre las funciones meromorfas en M . Denotamos el conjunto de todas las secciones meromorfas de un haz $\pi : E \rightarrow M$ por $\Gamma(\pi)$. Los correspondientes vectores cocadena meromorfas satisfacen las siguientes reglas,

$$s = s' + s'' \iff x_\alpha = x'_\alpha + x''_\alpha, \quad s' = \varphi \cdot s \iff x'_\alpha = \varphi \cdot x_\alpha \quad (2.37)$$

2.3.1. Grado de un haz holomorfo

El orden en cero de una función escalar meromorfa $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}, 0)$ es el orden (positivo o negativo) del término principal de su serie de Laurent en una vecindad del cero, es decir, $\text{ord}_0 \varphi = \nu$ si y sólo si $\varphi(t) = c_\nu t^\nu + c_{\nu+1} t^{\nu+1} + \dots$, con $c_\nu \neq 0$.

DEFINICIÓN 2.15. *Dada función vectorial meromorfa*

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathcal{M}(M) \otimes \mathbb{C}^n,$$

definimos el orden en el origen de $\varphi(t)$ como el mínimo orden de sus componentes, es decir,

$$\text{ord}_0 \varphi(t) = \min_{1 \leq i \leq n} \text{ord}_0 \varphi_i(t) \quad (2.38)$$

DEFINICIÓN 2.16. Sea π un haz vectorial holomorfo sobre una superficie de Riemann M y sea $a \in M$. Definimos el $\text{ord}_a s$ de una sección meromorfa $s \in \Gamma(\pi)$ como el orden de su respectiva función vectorial x_α en cualquier trivialización tal que $a \in U_\alpha$.

En la siguiente proposición se enuncia un hecho muy importante, pues resulta ser el primer invariante topológico.

Proposición 2.3. *Todas las secciones no triviales de un haz lineal sobre una superficie de Riemann compacta M tienen el mismo orden total, es decir, para cualquier sección meromorfa s se satisface*

$$\text{degs} = \sum_{a \in T} \text{ord}_a s, \quad s \in \Gamma(\pi) \quad (2.39)$$

es el mismo y depende sólo del haz π .

Demostración. Sean $s, s' \in \Gamma(\pi)$, dado que el haz es lineal, es decir las fibras son 1 dimensionales, las secciones son proporcionales, es decir existe una función $\varphi \in \mathcal{M}(M)$ tal que $s' = \varphi \cdot s$. De las propiedades del orden se satisface que el $\text{ord}_a s' = \text{ord}_a s + \text{ord}_a \varphi$, entonces

$$\text{degs}' = \sum_{a \in M} \text{ord}_a s' = \sum_{a \in M} \text{ord}_a s + \sum_{a \in M} \text{ord}_a \varphi = \text{degs} + \sum_{a \in M} \text{ord}_a \varphi. \quad (2.40)$$

Por el teorema del residuo aplicado a φ , obtenemos que $\sum_{a \in M} \text{ord}_a \varphi = 0$, lo cual implica que $\text{degs}' = \text{degs}$. \square

DEFINICIÓN 2.17. El grado común de todas las secciones meromorfas es llamado el grado del haz lineal π y es denotado por $\text{deg}\pi$.

DEFINICIÓN 2.18. Marco de Secciones.

Decimos que $s_i : U \rightarrow M$, $i = 1, \dots, n$ es un marco de secciones sobre U , si para cualquier punto $p \in U$ el conjunto $s_1(p), \dots, s_n(p)$ forman una base de E_p .

2.3.2. Derivada covariante

Procederemos a introducir el concepto de derivada covariante que es una generalización del concepto de derivada de campos vectoriales sobre variedades diferenciables. Este concepto nos ayudará a motivar la definición de una conexión sobre un haz vectorial.

Recordemos que si $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada de f en la dirección de X está definida como $L_X f = X \cdot \nabla f = \langle X, \nabla f \rangle$.

Consideremos M una variedad diferenciable, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $p \in M$. Sea $X \in T_p M$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial definido sobre una vecindad U de $p \in M$, definimos la derivada covariante $D_X Y$ como sigue:

Dado que $Y \in \mathfrak{X}(M)$ podemos pensar a Y como una función vectorial $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ donde cada $Y_i \in C^\infty(M)$. Entonces definimos el vector $D_X Y$ con las componentes $D_X Y = (L_X Y_1, \dots, L_X Y_n)$, sin embargo $D_X Y$ no necesariamente está contenido en $T_p M$. Notemos que

$$T_p \mathbb{R}^n = T_p M + N_p M, \tag{2.41}$$

por lo tanto podemos descomponer a $D_X Y$ en su componente sobre el espacio tangente y la componente en el espacio normal

$$D_X Y = D_X Y|_{T_p M} + D_X Y|_{N_p M} = D_X Y|_{T_p M} + \langle D_X Y, n_p \rangle n_p \tag{2.42}$$

donde n_p es el vector normal a M en p . Así la componente en el espacio tangente es la derivada covariante

$$D_X Y|_{T_p M} = D_X Y - D_X Y|_{N_p M} = D_X Y - \langle D_X Y, n_p \rangle n_p \tag{2.43}$$

Denotamos a dicha derivada como $\nabla_X Y$.

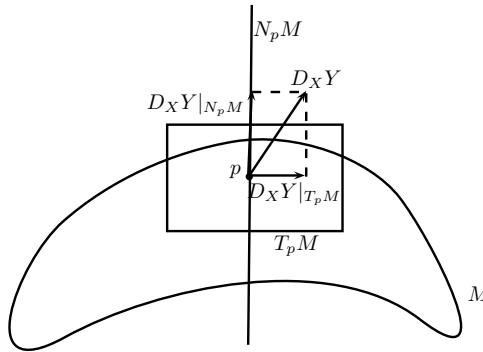


Figura 2.4: Derivada covariante

DEFINICIÓN 2.19. Sean X, Y dos campos vectoriales sobre M , definimos el operador ∇ ó derivada covariante como sigue

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (2.44)$$

donde a cada (X, Y) le asocia $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 2.4. Sea M una variedad diferenciable, $f \in C^\infty$ y sean X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 campos vectoriales sobre M , entonces ∇ satisface las siguientes propiedades

- 1). $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
- 2). $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- 3). $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- 4). $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (L_X f)Y$

Demostración. 1) Sean X_1, X_2, Y campos vectoriales y $x = (x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas sobre M , entonces

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2} Y &= (L_{X_1+X_2} Y_1, \dots, L_{X_1+X_2} Y_n) \\ &= ((L_{X_1} + L_{X_2}) Y_1, \dots, (L_{X_1} + L_{X_2}) Y_n) = D_{X_1} Y + D_{X_2} Y \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1+X_2} Y &= D_{X_1+X_2} Y - \langle D_{X_1+X_2} Y, n_p \rangle n_p \\ &= D_{X_1} Y + D_{X_2} Y - \langle D_{X_1} Y + D_{X_2} Y, n_p \rangle n_p \\ &= D_{X_1} Y + D_{X_2} Y - \langle D_{X_1} Y, n_p \rangle n_p - \langle D_{X_2} Y, n_p \rangle n_p \\ &= D_{X_1} Y - \langle D_{X_1} Y, n_p \rangle n_p + D_{X_2} Y - \langle D_{X_2} Y, n_p \rangle n_p \\ &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y. \end{aligned}$$

Las demostraciones para los incisos 2) y 3) son análogas y se desprenden de las propiedades de la derivada de Lie y el producto interior.

4) Sea $f \in C^\infty(M)$, calculemos primero

$$\begin{aligned}
 D_X f Y_j &= L_X f Y_j = \langle X, \nabla f Y \rangle = \langle X, \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f Y_j}{\partial x_i} \right) \rangle \\
 &= \langle X, \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} Y_j + \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} f \right) \rangle \\
 &= \langle X, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} Y_j \rangle + \langle X, \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} f \rangle \\
 &= Y_j \langle X, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle + f \langle X, \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \rangle \\
 &= Y_j L_X f + f L_X Y_j.
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned}
 D_X f Y &= (L_X f Y_1, \dots, L_X f Y_n) \\
 &= (Y_1 L_X f + f L_X Y_1, \dots, Y_n L_X f + f L_X Y_n) \\
 &= L_X f (Y_1, \dots, Y_n) + f (L_X Y_1, \dots, L_X Y_n) \\
 &= (L_X f) Y + f L_X Y.
 \end{aligned}$$

Calculando la derivada covariante se tiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla_X f Y &= D_X f Y - \langle D_X f Y, n_p \rangle n_p \\
 &= (L_X f) Y + f L_X Y - \langle (L_X f) Y + f L_X Y, n_p \rangle n_p \\
 &= (L_X f) Y + f L_X Y - \langle (L_X f) Y, n_p \rangle n_p - \langle f L_X Y, n_p \rangle n_p \\
 &= f (L_X Y - \langle L_X Y, n_p \rangle n_p) + L_X f (Y - \langle Y, n_p \rangle n_p) \\
 &= f \nabla_X Y + (L_X f) Y
 \end{aligned}$$

pues como $Y \in TM$ entonces $\langle Y, n_p \rangle = 0$. □

2.3.3. Conexiones y Sistemas lineales

Motivados por las propiedades de la derivada covariante damos la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.20. Una conexión en un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ donde M es una variedad diferenciable, es un mapeo bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi)$$

que satisface las siguientes condiciones:

- 1). $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$
- 2). $\nabla_X fs = f\nabla_X s + (L_X f)s$

donde $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(\pi)$. $\nabla_X s$ es llamada la derivada covariante de s relativa a X .

Daremos otra definición equivalente de conexión. Para ello observemos que si $z : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una función vectorial holomorfa de una variable, entonces su diferencial dz es una 1-forma vector valuada sobre M . Dado que las fibras sobre diferentes puntos de la base M son diferentes, como en el caso de un haz vectorial holomorfo, la noción de derivación de una sección debe ser modificada apropiadamente. El resultado es la noción de una conexión, o más específico conexión meromorfa sobre un haz vectorial holomorfo.

DEFINICIÓN 2.21. Una conexión meromorfa sobre un haz vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ es un operador \mathbb{C} -lineal

$$\nabla : \Gamma(\pi) \rightarrow \Lambda^1(M) \otimes \Gamma(\pi)$$

que satisface las siguientes propiedades

$$\nabla(\lambda s + \tilde{\lambda} \tilde{s}) = \lambda \nabla s + \tilde{\lambda} \nabla \tilde{s}, \quad \forall s, \tilde{s} \in \Gamma(\pi), \quad \lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C} \quad (2.45)$$

$$\nabla(f \cdot s) = f \cdot \nabla s + df \otimes s, \quad \forall s \in \Gamma(\pi), \quad f \in \mathcal{M}(M) \quad (2.46)$$

Ejemplo 2.8. Si π es un haz trivial con $E = M \times \mathbb{C}^n$, entonces la derivada exterior

$$\nabla x = dx, \quad \forall x : M \rightarrow M \times \mathbb{C}^n \quad (2.47)$$

satisface las propiedades (2.45) y (2.46).

De hecho, para haces triviales podemos describir fácilmente todos los operadores lineales que satisfacen las propiedades (2.45) y (2.46). En efecto, si ∇ y $\tilde{\nabla}$ son dos operadores tales que satisfacen (2.45) y (2.46), entonces su diferencia es un operador lineal en cada fibra:

$$(\nabla - \tilde{\nabla})(f \cdot s) = \nabla(f \cdot s) - \tilde{\nabla}(f \cdot s) = f \nabla s + df \otimes s - f \tilde{\nabla} s - df \otimes s = f \cdot [(\nabla - \tilde{\nabla})s]. \quad (2.48)$$

De la ecuación anterior obtenemos que cualquier conexión sobre un haz trivial puede ser representada mediante una adecuada matriz de 1-formas meromorfas $\Omega \in \text{Mat}(n, \Lambda^1(M) \otimes \mathcal{M}(M))$ como la diferencia $\nabla = d - \Omega$, es decir,

$$\nabla x = dx - \Omega x, \quad \forall x : M \rightarrow M \times \mathbb{C}^n \quad (2.49)$$

La matriz de 1-formas Ω es llamada la matriz de 1-forma de conexión de ∇ . Para haces arbitrarios (haces no triviales) tal caracterización es válida sólo localmente, en cartas trivializantes. Aunque el concepto de conexión aparenta ser bastante difícil de entender a continuación daremos ciertas propiedades que eliminan un poco de la obscuridad del concepto.

Si $F : E \rightarrow \tilde{E}$ es un mapeo holomorfo e invertible entre dos haces $\pi, \tilde{\pi}$, sobre la misma base, es posible llevar una conexión sobre E a una conexión sobre \tilde{E} y viceversa.

DEFINICIÓN 2.22. *Dadas dos conexiones $\nabla, \tilde{\nabla}$ sobre $\pi, \tilde{\pi}$ respectivamente se dice que están F -relacionadas, si*

$$F(\nabla s) = \tilde{\nabla} F s \quad \forall s \in \Gamma(\pi) \quad (2.50)$$

Donde $F s$ denota la sección $\tilde{s} \in \Gamma(\tilde{\pi})$ obtenida de aplicar F a la sección s .

Asumimos que $\pi : E \rightarrow M$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ son haces triviales del mismo rango y F es mapeo de gauge definido por la función matricial $F(a) \in GL(n, \mathbb{C})$. Dada una función vectorial $a \mapsto x(a)$, $F(a)$ transforma $x(a)$ en $\tilde{x}(a) = F(a)x(a)$. Así dos conexiones $\nabla = d - \Omega$ y $\tilde{\nabla} = d - \tilde{\Omega}$, definidas por 2 matrices de 1-formas Ω y $\tilde{\Omega}$, están F -relacionadas si y sólo si $F(dx - \Omega x) = d(Fx) - \tilde{\Omega} Fx$, para cualquier función vector valuada holomorfa $x(\cdot)$. La última igualdad es equivalente a

$$F(dx - \Omega x) = d(Fx) - \tilde{\Omega} Fx = dF \cdot x + Fdx - \tilde{\Omega} Fx \quad (2.51)$$

Por otro lado como F es lineal en cada fibra tenemos que $F(dx - \Omega x) = Fdx - F\Omega x$. Entonces sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (2.51) obtenemos

$$Fdx - F\Omega x = dF \cdot x + Fdx - \tilde{\Omega} Fx,$$

lo cual implica que

$$\tilde{\Omega} Fx = dF \cdot x + F\Omega x. \quad (2.52)$$

Esta última ecuación es válida para toda función vector valuada holomorfa $x(\cdot)$ así,

$$\tilde{\Omega} = dF \cdot F^{-1} + F\Omega F^{-1}. \quad (2.53)$$

Cabe destacar que esta última ecuación coincide de manera natural con la ecuación (2.9).

Esta observación permite representar cualquier conexión sobre un haz holomorfo vectorial por una colección de matrices de 1-formas asociadas a

diferentes trivializaciones locales del haz vectorial.

Si Φ_α es un trivialización local de un haz vectorial holomorfo con una conexión meromorfa ∇ , entonces hay una única conexión meromorfa ∇_α sobre el haz trivial $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, la cual es Φ_α -relacionada a ∇ . Consideremos dos cartas U_α y U_β tal que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, sobre dichas cartas las trivializaciones inducen dos diferentes matrices de 1-formas de conexión $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$. De (2.53) esas dos matrices de 1-formas están relacionadas por la identidad

$$dH_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha H_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta} \Omega_\beta. \quad (2.54)$$

De manera análoga, dada una colección de trivializaciones de un haz vectorial asociada al cociclo $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$ y una colección arbitraria de matrices de 1-forma meromorfas que satisfacen la identidad de transición (2.54) sobre dos cartas tal que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, es posible definir una matriz de conexión como el operador que al vector cocadena $\{x_\alpha\}$ asociado a una sección arbitraria $s \in \Gamma(\pi)$, le asigna la cocadena de 1-formas vector valuadas $\theta_\alpha = dx_\alpha - \Omega_\alpha x_\alpha$. Si x_α satisface (2.34) entonces $\theta_\alpha = H_{\alpha\beta} \theta_\beta$, en efecto

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= dx_\alpha - \Omega_\alpha x_\alpha \\ &= d(H_{\alpha\beta} x_\beta) - \Omega_\alpha (H_{\alpha\beta} x_\beta) \\ &= dH_{\alpha\beta} x_\beta + H_{\alpha\beta} dx_\beta - \Omega_\alpha (H_{\alpha\beta} x_\beta) \\ &= H_{\alpha\beta} dx_\beta + (dH_{\alpha\beta} - \Omega_\alpha H_{\alpha\beta}) x_\beta \\ &= H_{\alpha\beta} dx_\beta - H_{\alpha\beta} \Omega_\beta x_\beta \\ &= H_{\alpha\beta} (dx_\beta - \Omega_\beta x_\beta) \\ &= H_{\alpha\beta} \theta_\beta. \end{aligned}$$

La igualdad obtenida nos dice que la cocadena $\{\theta_\alpha\}$ define una sección de $\Lambda^1(M) \otimes \Gamma(\pi)$.

DEFINICIÓN 2.23. *Una sección horizontal para una conexión ∇ sobre un haz vectorial holomorfo π , es una sección que satisface la ecuación $\nabla s = 0$.*

Si ∇ es una conexión sobre el haz trivial $U \times \mathbb{C}^n$ con una forma de conexión Ω , entonces secciones horizontales $t \mapsto x(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones lineales $dx - \Omega x = 0$. Del análisis anterior observamos que las conexiones corresponden a sistemas lineales globalmente definidos, es decir, en un haz trivial una conexión no es más que una ecuación diferencial (2.2).

2.4. Conexiones sobre haces lineales

Conexiones sobre haces lineales son determinadas por su 1-forma meromorfa escalar en cada trivialización, es decir, cada conexión ∇ es determinada por su cocadena de 1-formas escalares $\{\omega_\alpha\}$. Dado que las matrices de 1×1 conmutan, sobre la intersección de dominios U_α y U_β de dos trivializaciones diferentes, dos formas $\omega_\alpha, \omega_\beta$ difieren por un término holomorfo, es decir, de la relación (2.54) obtenemos

$$dh_{\alpha\beta} = \omega_\alpha h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (2.55)$$

donde $h_{\alpha\beta}$ es el cociclo de transición entre las cartas U_α y U_β . Como las matrices conmutan

$$dh_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} \omega_\alpha - h_{\alpha\beta} \omega_\beta = h_{\alpha\beta} (\omega_\alpha - \omega_\beta), \quad (2.56)$$

de la cual obtenemos

$$dh_{\alpha\beta}/h_{\alpha\beta} = \omega_\alpha - \omega_\beta. \quad (2.57)$$

Dado que trabajamos en dominios cuya intersección es simplemente conexa entonces $\ln(h_{\alpha\beta})$ es una función holomorfa y por tanto $d\ln(h_{\alpha\beta}) = dh_{\alpha\beta}/h_{\alpha\beta}$. Esto implica que la ecuación (2.57) se transforma en

$$\omega_\alpha = d\ln(h_{\alpha\beta}) + \omega_\beta. \quad (2.58)$$

Procedemos a dar una definición

DEFINICIÓN 2.24. *El conjunto singular de una conexión meromorfa sobre un haz lineal $\pi : E \rightarrow M$ es definido como la colección de puntos en los cuales la 1-forma de conexión ω_α en alguna trivialización y por tanto en cualquier trivialización tiene un polo. Una conexión es holomorfa si ésta no tiene polos.*

La relación (2.58) nos permite definir el residuo de una conexión.

DEFINICIÓN 2.25. *Dado $a \in U_\alpha$, definimos el residuo de ∇ en a , $\text{res}_a \nabla$ como el residuo de la forma de conexión ω_α , $\text{res}_a \omega_\alpha$ sobre U_α .*

Veamos que la definición es consistente, sean U_α y U_β tal que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, entonces de (2.58) tenemos que

$$\omega_\alpha = d\ln(h_{\alpha\beta}) + \omega_\beta$$

y por lo tanto el residuo de la conexión es

$$\text{res}_a \nabla = \text{res}_a \omega_\alpha = \text{res}_a (d\ln(h_{\alpha\beta}) + \omega_\beta) = \text{res}_a d\ln(h_{\alpha\beta}) + \text{res}_a \omega_\beta. \quad (2.59)$$

Dado que $d\ln(h_{\alpha\beta})$ es holomorfa entonces $\text{res}_a d\ln(h_{\alpha\beta}) = 0$ por lo tanto

$$\text{res}_a \nabla = \text{res}_a \omega_\alpha = \text{res}_a \omega_\beta, \quad a \in U_{\alpha\beta}. \quad (2.60)$$

Lema 2.5. *Dada una sección meromorfa de un haz lineal, existe una única conexión para la cual esta sección es horizontal.*

Demostración. Basta resolver la ecuación funcional dada por $\nabla_X s = 0$ para todo $X \in C^\infty(M)$. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M y supongamos que en cada U_α la sección está dada por $s \cong \{x_\alpha\}$. Consideremos en cada carta la sección canónica $s_0 = 1$ (esto es posible pues el haz es lineal y trivial en cada abierto, además el marco de secciones consta de un solo elemento). Entonces tenemos que $s|_{U_\alpha} = x_\alpha \cdot s_0$. Dado que la cocadena la podemos ver como una función escalar obtenemos

$$0 = \nabla_X s = x_\alpha \nabla_X s_0 + (L_X x_\alpha) s_0.$$

Esto último implica que

$$x_\alpha \nabla_X s_0 = (L_X x_\alpha) s_0;$$

así obtenemos

$$\nabla_X s_0 = \frac{L_X x_\alpha s_0}{x_\alpha} = X \cdot d(\ln x_\alpha).$$

Por lo tanto la 1-forma asociada a la conexión ∇ sobre U_α está dada por $\omega_\alpha = d(\ln x_\alpha)$. \square

Con esta herramienta estamos preparados para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *La suma de los residuos de cualquier conexión meromorfa sobre un haz lineal π sobre una superficie Riemann compacta M es el mismo para todas las conexiones e igual al grado del haz*

$$\sum_{a \in M} \text{res}_a \nabla = \text{deg} \pi. \quad (2.61)$$

Demostración. Primero observemos que la diferencia entre dos conexiones ∇ y $\tilde{\nabla}$ está bien definida. Sean $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\tilde{\omega}_\alpha\}$ las 1-formas de conexión asociadas de ∇ y $\tilde{\nabla}$. Entonces sobre $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, por (2.58), sabemos que

$$\omega_\alpha = d\ln(h_{\alpha\beta}) + \omega_\beta \quad (2.62)$$

y

$$\tilde{\omega}_\alpha = d\ln(h_{\alpha\beta}) + \tilde{\omega}_\beta; \quad (2.63)$$

por lo tanto, considerando $\nabla - \tilde{\nabla}$ obtenemos

$$\eta_\alpha = \omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta = \eta_\beta \quad (2.64)$$

es decir, sobre la intersección de dos dominios la 1-forma meromorfa $\eta = \eta_\alpha$ está bien definida y por lo tanto es una 1-forma meromorfa globalmente bien definida sobre M . Dado que el total de residuos de una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta es 0 (ver en apéndice), obtenemos que

$$0 = \sum_{a \in M} \text{res}_a \eta = \sum_{a \in M} \text{res}_a (\nabla - \tilde{\nabla}) = \sum_{a \in M} \text{res}_a \nabla - \sum_{a \in M} \text{res}_a \tilde{\nabla}, \quad (2.65)$$

lo cual implica que

$$\sum_{a \in M} \text{res}_a \nabla = \sum_{a \in M} \text{res}_a \tilde{\nabla}. \quad (2.66)$$

Así la suma de los residuos en efecto no depende de la conexión.

Para mostrar que el residuo de la conexión ∇ es igual al grado, consideremos una sección meromorfa arbitraria $s \in \Gamma(\pi)$ definida por una cocadena holomorfa $s \sim \{x_\alpha\}$. Sea ∇ la única conexión para la cual esta sección es horizontal (sabemos que esta conexión existe por el Lema 2.5) y sea $a \in U_\alpha$ tal que $x_\alpha(a) = 0$. Esta conexión está definida por la cocadena de derivadas logarítmicas $\{\omega_\alpha\}$,

$$\nabla \cong \{\omega_\alpha\}, \quad \text{donde} \quad \omega_\alpha = dx_\alpha \cdot x_\alpha^{-1}. \quad (2.67)$$

Recordemos que si $k = \text{res}_a dx_\alpha \cdot x_\alpha^{-1}$ esto implica que x_α tiene un cero de orden k en a , decir existe una función $f_\alpha(z)$ definida en una vecindad $\tilde{U} \subseteq U_\alpha$ de a tal que $x_\alpha(z) = (z - a)^k f_\alpha(z)$, donde f_α es holomorfa y no se anula en \tilde{U} , por lo que

$$\text{res}_a dx_\alpha \cdot x_\alpha^{-1} = \text{ord}_a x_\alpha. \quad (2.68)$$

Por lo tanto el residuo de la conexión ∇ es el orden de la sección s en el punto a , así

$$\text{res}_a \nabla = \text{res}_a \omega_\alpha = \text{ord}_a x_\alpha = \text{ord}_a s. \quad (2.69)$$

Sumando sobre todos los puntos en la variedad obtenemos

$$\sum_{a \in M} \text{res}_a \nabla = \sum_{a \in M} \text{res}_a \omega_\alpha = \sum_{a \in M} \text{ord}_a x_\alpha = \sum_{a \in M} \text{ord}_a s \quad (2.70)$$

pero $\sum_{a \in M} \text{ord}_a s = \text{deg} \pi$, por lo que $\sum_{a \in M} \text{res}_a \nabla = \text{deg} \pi$.

□

Con esta teoría estamos en posición para demostrar el teorema de Savelev, bajo la hipótesis de que el grado del haz normal es cero, este teorema afirma la existencia de un biholomorfismo local entre un haz fibrado de rango 1 y el producto cartesiano de $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}$. Como hemos mencionado antes dicho teorema juega un papel importante en este trabajo, como se verá en el capítulo 4.

Capítulo 3

Teorema de Savelev

En este capítulo damos una demostración al Teorema de Savelev, un teorema que juega un papel fundamental en este trabajo. Antes de pasar a la demostración introducimos el concepto de haz fibrado. Veremos que un haz fibrado de rango 1 sobre la esfera de Riemann, es bajo ciertas condiciones posible linealizarlo y con ello ser identificado con el haz normal. Finalmente daremos una prueba al teorema de Savelev; como habrá de verse, la demostración de este teorema tiene en algunos aspectos muchas similitudes con la prueba del teorema de Poincaré analítico.

DEFINICIÓN 3.1. Sean B , E y M variedades holomorfas y π un mapeo holomorfo $\pi : E \rightarrow M$. Decimos que $\pi : E \rightarrow M$ es un haz fibrado si se satisface la siguiente condición:

- 1). Por cada punto $p \in M$ hay una vecindad abierta U y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times B$ tal que para cualquier $u \in \pi^{-1}(U)$ tenemos

$$\pi(u) = \pi_1 \circ \varphi(u), \quad (3.1)$$

donde $\pi_1 : U \times B \rightarrow U$ denota la proyección sobre la primera componente.

Al igual que en los haces vectoriales E es llamado el espacio total, M es llamado el espacio base, B es la fibra, π denota la proyección y $E_p = \pi^{-1}(p)$ es la fibra sobre p . Sea π un haz fibrado definido en una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M y una trivialización

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times B. \quad (3.2)$$

Entonces, considerando dos dominios U_α, U_β tal que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, el mapeo

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times B \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times B \quad (3.3)$$

define un difeomorfismo del haz trivial $U_\alpha \cap U_\beta \times B$ sobre sí mismo.

Sean $p \in M$ y $b \in B$ entonces escribiendo en coordenadas el mapeo $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, obtenemos $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, b) = (p, q)$ donde $q = g_{\alpha\beta}(p)(b)$ esto implica que existe un mapeo

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(B) \quad (3.4)$$

tal que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, b) = (p, g_{\alpha\beta}(p)(b)) \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta, b \in B. \quad (3.5)$$

De nueva cuenta las funciones $g_{\alpha\beta}$ son llamadas funciones de transición y satisfacen la condición de cociclo, es decir,

$$g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \quad (3.6)$$

Proposición 3.1. Sea M una 2-variedad complejo dimensional, \mathbb{P} la esfera de Riemann, y consideremos $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}$ un haz holomorfo 1-dimensional (proyección holomorfa de rango constante 1), sobre la esfera de Riemann encajada $\mathbb{P} \hookrightarrow M$. Entonces $\ker d\pi \cong N$, donde N es el haz normal.

Demostración. Para cada $t \in M$, demostraremos que $\ker d_t \pi = T_t(\pi^{-1}(t))$. Sea $\pi|_t : \pi^{-1}(t) \rightarrow \mathbb{P}$. Entonces $d\pi|_t : T_t(\pi^{-1}(t)) \rightarrow T_t\mathbb{P}$ y de aquí obtenemos que $\ker d\pi_t \subseteq T_t(\pi^{-1}(t))$.

Ahora demostraremos que $T_t(\pi^{-1}(t)) \subseteq \ker d\pi_t$. Dado que $\pi^{-1}(t)$ es una subvariedad encajada de M , podemos identificar el espacio tangente a la fibra $T_t(\pi^{-1}(t))$ con el subespacio $d\dot{i}_t : T_t(\pi^{-1}(t)) \subseteq T_tM$, donde $\dot{i}_t : \pi^{-1}(t) \hookrightarrow M$. De lo anterior obtenemos que $\pi_t \circ \dot{i}_t$ es constante con valor constante igual a t sobre $\pi^{-1}(t) \cap \mathbb{P}$, con lo cual

$$0 = d(\pi_t \circ \dot{i}_t) = d\pi_t(\dot{i}_t) \circ d\dot{i}_t. \quad (3.7)$$

Esto implica que $\text{Im } d\dot{i}_t \subseteq \ker d\pi_t$, por lo tanto $T_t(\pi^{-1}(t)) \subseteq \ker \pi_t$. Así $T_t(\pi^{-1}(t)) = \ker d\pi_t$.

De la condición de rango sobre π , el $\ker d\pi_t$ es transversal a $T_t\mathbb{P}$, $\forall t \in \mathbb{P}$ entonces

$$T_tM = T_t\mathbb{P} \oplus T_t(\pi^{-1}(t)). \quad (3.8)$$

Además sabemos que

$$T_tM = T_t\mathbb{P} \oplus N_t \quad \text{donde} \quad N_t = T_tM/T_t\mathbb{P}. \quad (3.9)$$

De esta manera es posible dar un isomorfismo $H : \ker d\pi \rightarrow N$, así $\ker d\pi \cong N$, donde $N = TM/T\mathbb{P}$. \square

DEFINICIÓN 3.2. Una variedad compleja X de dimensión compleja n es una variedad de Stein si:

- 1). Para todo $p, q \in X$, $p \neq q$ existe una función holomorfa f en X tal que $f(p) \neq f(q)$.
- 2). Para toda sucesión discreta de puntos $\{p_j\} \subseteq X$ existe una función holomorfa g en X tal que $\{p_j\}$ son polos de g .

Proposición 3.2. Toda superficie de Riemann no compacta M es variedad de Stein.

La demostración puede ser consultada en el apéndice.

Enunciemos ahora el Teorema de Siu (ver [11]). Dicho teorema nos provee un corolario de suma importancia dentro de la demostración del teorema de Savelev.

Teorema 3.1 (Siu,1976). Sea X un espacio complejo, S una subvariedad de X . Si S es de Stein, entonces existe una vecindad V en X de S tal que V es de Stein.

Enunciamos ahora el corolario al Teorema de Siu:

Corolario 3.1. *Supongamos que S es una variedad de Stein, M una variedad compleja y $i : S \rightarrow M$ una inmersión holomorfa. Sea N el haz normal de i , es decir, $N_p = T_p M / T_p S$. Entonces existe una vecindad de Stein abierta V de S en N y una inmersión holomorfa $\tilde{i} : V \rightarrow M$ que extiende a i .*

Como veremos en la demostración del Teorema de Savelev (ver Teorema 3.2) requerimos de dar una cubierta de la esfera de Riemann por dos cartas cuya intersección es un anillo K . Nuestro interés recae en que en dicho anillo queremos expresar una función f como una diferencia de funciones holomorfas acotadas. El siguiente lema nos asegura la existencia de dichas funciones.

Lema 3.1. *Sea $K = \{z \in \mathbb{P} : 1/2 < |z| < 3/2\}$ el anillo y P_{\pm} los operadores integrales de Cauchy*

$$(P_+ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3/2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad y \quad (P_- f)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (3.10)$$

representando una función $f \in \mathcal{A}(K)$ como la diferencia de dos funciones $h_{\pm} = P_{\pm} f$, holomorfas y acotadas en los discos $D_0 = \{z \in \mathbb{P} : |z| < 3/2\}$, $D_1 = \{z \in \mathbb{P} : |z| > 1/2\}$. Denotamos por

$$\|f\| = \max_{\xi \in K} |f(\xi)| \quad (3.11)$$

la norma del supremo. Entonces

$$|P_+ f(z)| \leq 3\|f\| \quad si \quad |z| < 1 \quad y \quad |P_- f(z)| \leq \|f\| \quad si \quad |z| < 1 \quad (3.12)$$

Así

$$|P_+ f(z) - P_- f(z)| \leq 4\|f\| \quad (3.13)$$

Demostración. Sea $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ calculemos ahora

$$\begin{aligned}
 |(P_+f)(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3/2} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{3}{2}e^{it})\frac{3}{2}ie^{it}dt}{\frac{3}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &= \left| \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{3}{2}e^{it})e^{it}dt}{\frac{3}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &\leq \frac{3\|f\|}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{dt}{\frac{3}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &\leq \frac{3\|f\|}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2dt \\
 &= \frac{3\|f\|}{4\pi} 4\pi \\
 &= 3\|f\|.
 \end{aligned}$$

Observemos que esta última desigualdad se verifica dado que $\left| \frac{3}{2}e^{it} - z \right| \geq \left| \frac{3}{2}e^{it} \right| - |z| = \frac{3}{2} - |z|$ y como $|z| < 1$ entonces $-|z| > -1$. De aquí $\left| \frac{3}{2}e^{it} - z \right| \geq \frac{1}{2}$, así $\left| \frac{1}{\frac{3}{2}e^{it} - z} \right| \leq 2$.

Consideremos ahora $\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ de igual manera calculemos

$$\begin{aligned}
 |(P_-f)(z)| &= \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/2} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{1}{2}e^{it})\frac{1}{2}ie^{it}dt}{\frac{1}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{1}{2}e^{it})}{\frac{1}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &\leq \frac{\|f\|}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{dt}{\frac{1}{2}e^{it} - z} \right| \\
 &\leq \frac{\|f\|}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2dt \\
 &= \frac{\|f\|}{4\pi} 4\pi \\
 &= \|f\|
 \end{aligned}$$

De manera análoga $|\frac{1}{2}e^{it} - z| \geq ||\frac{1}{2}e^{it}| - |z|| = |\frac{1}{2} - |z||$ y como $|z| < 1$, entonces $|\frac{1}{2}e^{it} - z| \geq \frac{1}{2}$, por lo tanto $\frac{1}{|\frac{1}{2}e^{it} - z|} \leq 2$.

Por último $|P_+f(z) - P_-f(z)| \leq |P_+f(z)| + |P_-f(z)| \leq 3\|f\| + \|f\| = 4\|f\|$. \square

Con todo lo visto anteriormente contamos ya con los elementos necesarios para demostrar el Teorema de Savelev. Cabe mencionar que este es un resultado del mismo tipo que el Teorema de Grauert ver [Gra62]. Este caracteriza el haz normal de la esfera cuando su grado es negativo. El Teorema de Savelev lo hace cuando dicho grado es cero.

Teorema 3.2. [Savelev] [Sa82] *Sea M una 2-variedad holomorfa. Consideremos la esfera de Riemann \mathbb{P} y $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}$ un haz holomorfo 1-dimensional sobre ella. Suponemos que el haz normal N de la esfera de Riemann \mathbb{P} encajada en M , $\mathbb{P} \hookrightarrow M$, tiene grado cero y por lo tanto es trivial. Entonces el haz π es localmente holomorfamente trivial, es decir, hay un biholomorfismo Ψ entre una vecindad de \mathbb{P} en M y un cilindro $\mathbb{P} \times (\mathbb{C}, 0)$ el cual conjuga π con la proyección cartesiana sobre \mathbb{P} , es decir $\pi = \pi_0 \circ \varphi$, donde $\pi_0 : \mathbb{P} \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{P}$.*

Demostración. Consideremos la cubierta estándar de la esfera de Riemann \mathbb{P} , por dos discos U_+ y U_- tal que la intersección de dichos discos es un anillo $K \subset \mathbb{P}$. Sin perder generalidad trabajaremos en las cartas afines tal que $K = \{z \in \mathbb{P} : 1/2 < |z| < 3/2\}$. Por el corolario 3.1, el haz puede ser trivializado sobre esos discos, es decir, para cada uno de los conjuntos $\tilde{U}_+ = \pi^{-1}(U_+)$, $\tilde{U}_- = \pi^{-1}(U_-)$ existen coordenadas locales $(t_{\pm}, z_{\pm}) \in U_{\pm} \times (\mathbb{C}_{\pm}, 0)$ tal que π es la proyección paralela a la respectiva z_{\pm} -coordenada sobre el eje t .

El mapeo de transición \tilde{F} entre las dos cartas debe respetar el mapeo π definido globalmente, es decir, respeta la proyección en cada fibra o equivalentemente, \tilde{F} es la identidad en la primera coordenada, por tanto debe ser de la forma

$$(t, z_-) \mapsto (t, z_+), \quad \text{donde } z_+ = F(t, z_-). \quad (3.14)$$

Reescribimos a la función $F(t, z_-)$ como $F(t, z_-) = z_- + f(t, z_-)$. Nuestro primer objetivo es demostrar que $f(t, z_-)$ no tiene términos lineales en z_- , es decir $f(t, z_-) \in o(z_-)$. Enfocando el problema a nivel del subespacio tangente a M y teniendo en consideración que de acuerdo a la Proposición 3.1, $\ker d\pi \cong N$, observamos que la derivada de $(t, F(t, z_-))$ evaluada en

$(p, 0)$ lleva el espacio tangente a la fibra $\pi^{-1}(p)$ (el normal a la esfera en cada punto) en el espacio tangente a la fibra $\pi^{-1}(p)$, así

$$D(t, F(t, z_-))|_{(p,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial F(p,0)}{\partial t} & 1 + \frac{\partial f(p,0)}{\partial z_-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

lo cual es equivalente a que

$$D(t, F(t, z_-))|_{(p,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(1 + \frac{\partial f(p,0)}{\partial z_-}\right) \eta \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde η es un vector del espacio normal.

Esto último implica que $\varphi(t) := \frac{\partial F(t,0)}{\partial z_-} = 1 + \frac{\partial f(t,0)}{\partial z_-}$ es el cociclo asociado al haz normal N .

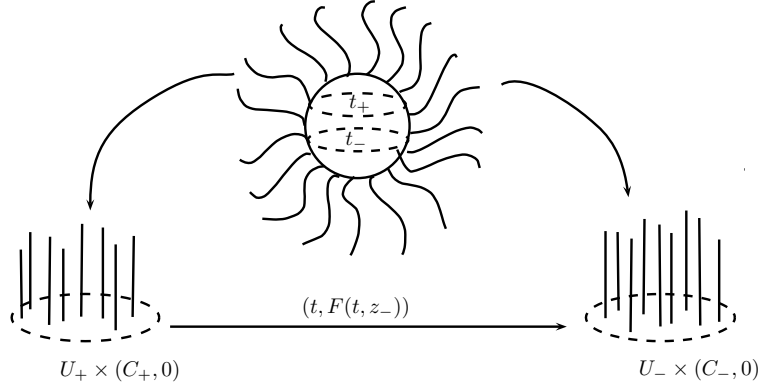


Figura 3.1: Diagrama

Dado que el haz normal es un haz lineal $\varphi(t)$ define un escalar de Birkhoff-Grothendieck con $\varphi : U_+ \cap U_- \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por hipótesis el haz normal tiene grado cero y por tanto es trivial y por el Lema 2.1 sabemos que existen dos funciones holomorfas no nulas φ_+ y φ_- sobre U_{\pm} , tales que $\varphi_-(t)\varphi(t) = \varphi_+(t)$.

$$\begin{array}{ccc}
 U_+ \times (\mathbb{C}_+, 0) & \xrightarrow{(t, \varphi(t)z_+)} & U_- \times (\mathbb{C}_-, 0) \\
 \varphi_+ \downarrow & & \varphi_- \downarrow \\
 (t, \varphi_+(t)z_+) & \xrightarrow{(t, Id)} & (t, \varphi_-(t)z_-)
 \end{array}$$

Entonces bajo el cambio de coordenadas $(t, z_{\pm}) \mapsto (t, \varphi_{\pm}(t)z_{\pm})$ el cociclo asociado al haz normal es la identidad, es decir, $Id = \varphi_-(t)\varphi(t)\varphi_+^{-1}(t)$; esto último implica que $\frac{\partial f(t, 0)}{\partial z_-} = 0$, con lo cual

$$f(t, z_-) = g(t)z_-^2 + O(z_-^3). \quad (3.16)$$

Esto prueba que $f(t, z_-)$ no tiene parte lineal en z_- . Así, el problema de trivialización del haz $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}$ se reduce a encontrar 2 nuevas cartas holomorfas

$$\tilde{H}_{\pm} : M \rightarrow U_{\pm} \times (\mathbb{C}, 0) \quad (3.17)$$

con $\tilde{H}_{\pm}(t, z_{\pm}) = (t, H_{\pm}(t, z_{\pm}))$, las cuales que deben de coincidir sobre $\tilde{U}_+ \cap \tilde{U}_-$; observemos que esto se debe a que encontramos cartas donde el cociclo asociado al haz normal es la identidad.

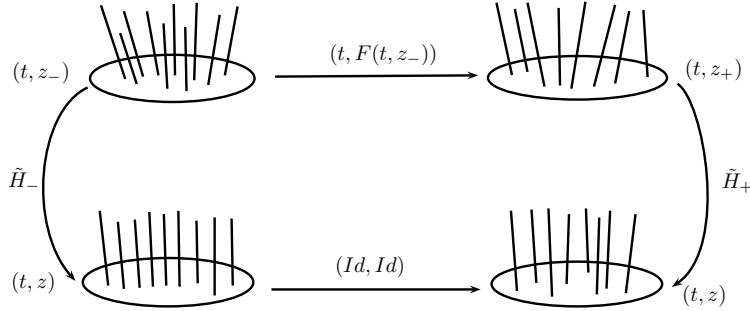


Figura 3.2: Diagrama

Estas cartas deben satisfacer la identidad

$$\tilde{H}_+^{-1}(t, z) = F(t, \tilde{H}_-^{-1}(t, z)) = \tilde{H}_-^{-1}(t, z) + f(t, \tilde{H}_-^{-1}(t, z)) \quad (3.18)$$

Reescribiendo $\tilde{H}_{\pm}^{-1}(t, z) = z + h_{\pm}(t, z)$, obtenemos la ecuación

$$z + h_+(t, z) = z + h_-(t, z) + f(t, z + h_-(t, z)) \quad (3.19)$$

ó equivalentemente

$$h_+(t, z) = h_-(t, z) + f(t, z + h_-(t, z)) \quad (3.20)$$

Esta última condición es una ecuación funcional, la cual puede ser resuelta con respecto al par de funciones $h_{\pm}(t, z)$, holomorfas en $U_{\pm} \times (\mathbb{C}, 0)$ respectivamente. El método para encontrar dichas funciones es análogo al teorema de Poincaré analítico.

Consideremos primero la ecuación (3.20) y escribamos una nueva ecuación que obtenemos por su linealización, es decir, ignorando la traslación por z

$$f(t, h_-(t, z)) = h_+(t, z) - h_-(t, z). \quad (3.21)$$

Esta ecuación es posible resolverla desarrollando a f en su serie de Laurent convergente con respecto a t y tomando a h_+ como la serie de Taylor y h_- como la serie de las potencias negativas de t .

Consideremos los espacios

$$\mathcal{B}_{\rho}^{\pm} = \{f : f \text{ es holomorfa en } U_{\pm} \times \{|z| < \rho\} \text{ y continua sobre la cerradura}\}$$

$$\mathcal{B}_{\rho}^0 = \{f : f \text{ es holomorfa en } K \times \{|z| < \rho\} \text{ y continua sobre la cerradura}\}$$

Definimos el operador $L : \mathcal{B}_{\rho}^0 \longrightarrow \mathcal{B}_{\rho}^+ \times \mathcal{B}_{\rho}^-$ como

$$L : f \mapsto h = (h_-, h_+)$$

Proposición 3.3. *L es un operador acotado*

Demostración. Calculemos la norma de L , entonces

$$\|L\| = \max_{f \in \mathcal{B}_{\rho}^0} |L(f)| = \max_{(t, \rho)} |h_+(t, z)| + \max_{(t, \rho)} |h_-(t, z)|$$

Por el lema 3.1 este operador es acotado. □

Consideremos ahora el operador traslación $S = S_f : \mathcal{B}_{\rho}^+ \times \mathcal{B}_{\rho}^- \longrightarrow \mathcal{B}_{\rho}^0$

$$S = S_f : (h_+, h_-) \mapsto f \circ (id + h_-). \quad (3.22)$$

Proposición 3.4. *S_f es una contracción fuerte.*

Demostración. De acuerdo a la definición de contracción fuerte debemos demostrar que

$$1). \|S_f(0)\|_{\rho} = O(\rho^2)$$

$$2). \|S_f(h) - S_f(h')\|_\rho \leq O(\rho) \|h - h'\|_\rho \text{ si } \|h\|_\rho, \|h'\|_\rho \leq \rho$$

En efecto como $f(t, z) = g(t)z^2 + O(z^3)$ no tiene términos lineales, ni constantes respecto a z , $\forall t$,

$$\|S_f(0)\|_\rho = \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} |f(t, z + 0)| = \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} |f(t, z)| = O(\rho^2)$$

Para la segunda condición calculemos la constante de Lipschitz de S_f

$$\|S_f(h) - S_f(h')\|_\rho = \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} |f(t, id + h) - f(t, id + h')|. \quad (3.23)$$

Si definimos $g(t, z) = S_f h(t, z) - S_f h'(t, z)$

$$\begin{aligned} \|g(t, z)\| &= \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} |g(t, z)| \\ &= \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} \left| \int_0^1 \frac{\partial f(t, z + \tau h(t, z) - (1 - \tau)h'(t, z))}{\partial z} (h(t, z) - h'(t, z)) d\tau \right| \\ &\leq \max_{(t,z) \in U_\pm \times |z| < \rho} \int_0^1 \left| \frac{\partial f(t, z + \tau h(t, z) - (1 - \tau)h'(t, z))}{\partial z} \right| |(h(t, z) - h'(t, z))| d\tau \\ &\leq \left\| \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial z} \right\|_\rho \|h - h'\|_\rho \\ &\leq O(\rho) \|h - h'\|. \end{aligned}$$

Las últimas dos desigualdades se satisfacen pues f es de $O(\rho^2)$ y como $\|h\|_\rho, \|h'\|_\rho \leq \rho$, entonces $\left\| \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \right\|_\rho$ es a lo más $O(\rho)$. \square

Proposición 3.5. $L \circ S_f$ es una contracción fuerte, para $|\rho| \ll \epsilon$

Demostración. Calculemos

$$\|L \circ S_f(0)\|_\rho \leq \|L\| \|S_f(0)\|_\rho \leq CO(\rho^2) \quad (3.24)$$

esta desigualdad se satisface pues L es acotado y S_f es una contracción fuerte.

De igual manera calculemos

$$\|L \circ S_f(h) - L \circ S_f(h')\|_\rho = \|L \circ (S_f(h) - S_f(h'))\|_\rho \quad (3.25)$$

$$\leq \|L\| \|(S_f(h) - S_f(h'))\|_\rho \quad (3.26)$$

$$\leq CO(\rho) \|h - h'\|_\rho. \quad (3.27)$$

Así, $L \circ S_f$ es una contracción fuerte. \square

Entonces resolver la ecuación (3.20) es equivalente a resolver la ecuación para el punto fijo $h = (h_+, h_-)$ del operador $L \circ S_f$.

Del Teorema 1.5, la ecuación $h = L \circ S_f(h)$ tiene una única solución, es decir existe una única función holomorfa $h = (h_+, h_-) \in \mathcal{B}_\rho^+ \times \mathcal{B}_\rho^-$. Así $h = (h_+, h_-)$ permite dar los cambios de coordenadas necesarios para trivializar el haz $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}$ en una vecindad de \mathbb{P} , con lo cual queda demostrado el Teorema de Savelev.

□

Una vez demostrado el teorema de Savelev daremos una aplicación de este teorema a campos vectoriales, la cual desarrollamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Aplicación del Teorema de Savelev

En este capítulo damos una aplicación del Teorema de Savelev a campos vectoriales holomorfos. Como se mencionó al principio de este trabajo analizar campos vectoriales alrededor de los puntos singulares puede ser muy complicado, observemos que la tarea se complica aún más si el campo vectorial en cuestión carece de parte lineal. Describiremos un método interesante para analizar campos vectoriales, este método es conocido como el “blow-up” ó explosión de singularidades.

La idea es considerar un mapeo holomorfo $\pi : M \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de una variedad compleja M de dimensión 2 tal que “aplaste” una curva compleja $E \subset M$ al punto $0 \in \mathbb{C}^2$, que sea inyectiva entre $M \setminus E$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ y que además permita “jalar” objetos locales (funciones, curvas, foliaciones, 1-formas, etc.) de $(\mathbb{C}^2, 0)$ a M y extenderlas sobre E . Aunque nuestro interés se basa sólo en explosiones complejas, comenzaremos por explicar el método del “blow-up” a $0 \in \mathbb{R}^2$, ya que en este caso es posible ver quienes son M y E .

A cada punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le asociamos la recta que pasa por el origen y el punto p ,

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^1 \quad (4.1)$$

$$(x, y) \longmapsto (x : y). \quad (4.2)$$

Consideremos la gráfica de F , $Gr(F) = \{(x, y), (x : y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Observemos que ésta es una superficie de dimensión 2. Para cada punto $(x : y) \in \mathbb{R}P^1$ hay tantos puntos como en \mathbb{R} que están en la recta, es decir, la preimagen de cualquier punto $(x : y) \in \mathbb{R}P^1$ es homeomorfo a \mathbb{R} , $F^{-1}(x : y) \cong \mathbb{R}$. Entonces $Gr(F) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}P^1$.

Es claro que la gráfica no es cerrada pues el $0 \in \mathbb{R}^2$ y su imagen, que son todas las rectas $\{(tx, ty) : t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}P^1$, no pertenecen a la gráfica. Consideremos la cerradura de $Gr(F)$, como ya dijimos $\overline{Gr(F)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}P^1 \cup \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ y denotemos por $M = \overline{Gr(F)}$. Llamaremos a $E = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ el divisor excepcional.

Consideremos $\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre la primera coordenada $\pi((x, y), (x : y)) = (x, y)$ y notemos que $\pi^{-1}(0) = E$ y que π es un difeomorfismo entre $M \setminus E$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Aún falta probar que M es una variedad de dimensión 2, para ello daremos un par de cartas que, además, permitirán visualizar quién es M .

Cada recta que pasa por el origen la asociamos con su pendiente o con la inversa de su pendiente

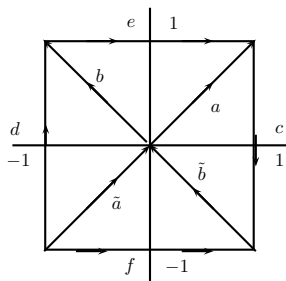
$$(x : y) \mapsto u = \frac{x}{y} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$(x : y) \mapsto v = \frac{y}{x} \quad \text{si } y \neq 0,$$

con los cambios de coordenadas $y = xu$ con $v = u^{-1}$ y $x = yv$ con $u = v^{-1}$. Dado que todas las rectas pasan por el origen entonces a E se le asocian todas las pendientes bajo estas cartas, por ello E se corresponde con la unión

de los ejes u y v . Así M es una variedad diferenciable.

Veamos quién es la tan misteriosa variedad M , para ello consideremos una vecindad del origen y expresemos los siguientes puntos de M en las coordenadas (x, u) y (y, v)



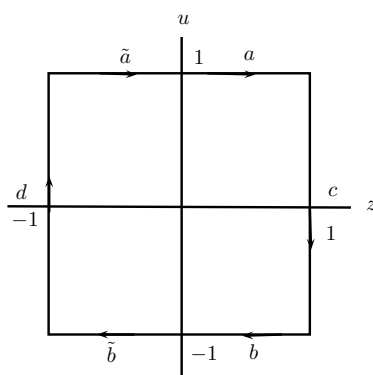
$$((x, y), (x : y)) \mapsto (x, u), \quad u = \frac{y}{x}$$

$$a = ((x, x), (x : x)) \mapsto (x, 1)$$

$$b = ((x, -x), (x : -x)) \mapsto (x, -1)$$

$$c = ((1, y), (1 : y)) \mapsto (1, y)$$

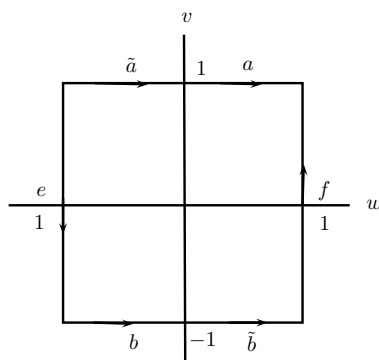
$$d = ((-1, y), (-1 : y)) \mapsto (-1, -y)$$



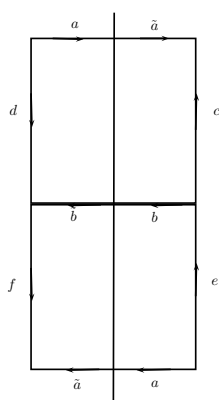
Por otra parte,

$$((x, y), (x : y)) \mapsto (y, v), \quad v = \frac{x}{y}$$

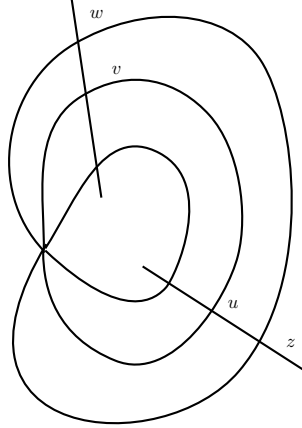
$$\begin{aligned} a &= ((y, y), (y : y)) \mapsto (y, 1) \\ b &= ((y, -y), (y : -y)) \mapsto (y, -1) \\ e &= ((x, 1), (x : 1)) \mapsto (1, x) \\ f &= ((x, -1), (x : -1)) \mapsto (-1, -x). \end{aligned}$$



Haciendo corresponder los segmentos de $b\tilde{b}$ en (x, u) con los de $b\tilde{b}$ en (y, v) obtenemos



Para hacer corresponder los segmentos de $a\tilde{a}$ en ambas coordenadas tenemos que torcer esta banda, obteniendo finalmente una banda de Möbius.



Notemos que la proyección lleva al punto (x_0, u) de M en el punto de \mathbb{R}^2 con primera coordenada x_0 sobre la recta con pendiente (x_0, ux_0) y al punto (y_0, v) en el punto de \mathbb{R}^2 con segunda coordenada y_0 y sobre la recta con pendiente $\frac{1}{v}$, (vy_0, y_0) ; además se satisface que $\pi^{-1}(0) = E$.

Una vez tratado el caso real, el caso complejo es exactamente análogo; en éste caso la variedad resultante $M = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \cup E$ donde el divisor excepcional es $E = \{0\} \times \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{P}$. A la variedad M por la similitud con el caso real la llamaremos la banda de Möbius compleja, además sobre M tenemos asociado un sistema de coordenadas. En efecto sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} ((z, w), (z : w)) &\mapsto u = \frac{w}{z} \quad \text{si } z \neq 0, \\ ((z, w), (z : w)) &\mapsto v = \frac{z}{w} \quad \text{si } w \neq 0, \end{aligned}$$

con los cambios de coordenadas $z = uw$ con $u = v^{-1}$ y $w = vz$ con $v = u^{-1}$. Observemos que bajo estos cambios de coordenadas E se corresponde con la unión de los ejes u y v que se pegan formando una esfera de Riemann \mathbb{P} . Consideremos la transformación $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\pi(z, u) = (z, uz)$ y $\pi(v, w) = (vw, w)$, entonces $E = \pi^{-1}(0)$ y $\pi : M \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ es un difeomorfismo entre $M \setminus E$ y $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. El mapeo $\pi^{-1} = \sigma$ es llamado “blow-up”, explosión de singularidades ó resolución.

Ejemplo 4.1. Consideremos el siguiente campo y veamos que pasa al explotarlo

$$\begin{aligned}\dot{z} &= 5z \\ \dot{w} &= 5w\end{aligned}$$

así,

$$\dot{u} = \frac{\dot{w}z - \dot{z}w}{z^2} \quad \dot{v} = \frac{\dot{z}w - \dot{w}z}{w^2}$$

lo cual implica,

$$\dot{u} = \frac{5wz - 5zw}{z^2} = 0 \quad \dot{v} = \frac{5zw - 5wz}{w^2} = 0$$

Entonces los campos en las coordenadas (z, u) y (w, v) son:

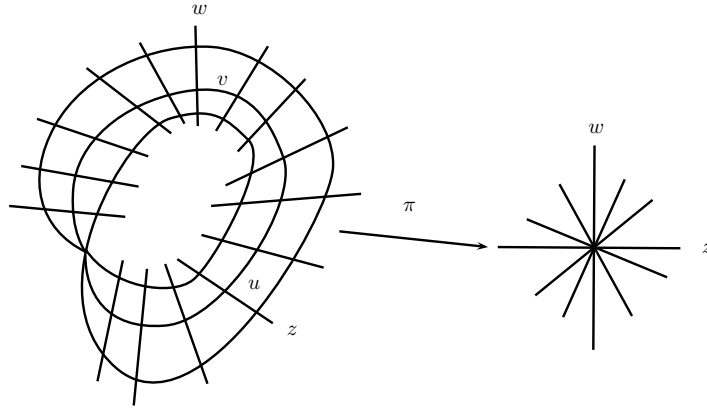
$$\begin{aligned}\dot{z} &= 5z & \dot{w} &= 5w \\ \dot{u} &= 0 & \dot{v} &= 0\end{aligned}$$

Estos campos son orbitalmente analíticamente equivalentes a los siguientes campos, que resultan de dividir los campos por las funciones $f(z) = z$ y $g(w) = w$ que no se anulan:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= 5 & \dot{w} &= 5 \\ \dot{u} &= 0 & \dot{v} &= 0\end{aligned}$$

Notemos que es posible utilizar campos orbitalmente analíticamente equivalentes, pues estamos interesados en la foliaciones, además de que no tiene caso conservar los sentidos de las curvas de fase, pues la banda de Möbius no es orientable.

Como estos campos ya no tienen puntos singulares no los explotamos, proyectando los campos al plano (z, w) en el caso real obtenemos:



Consideremos ahora el siguiente campo y observemos que sucede al explotarlo:

Ejemplo 4.2.

$$V(z, w) = \begin{cases} \dot{z} = z^2 - 2zw \\ \dot{w} = w^2 - zw \end{cases}$$

$$\dot{u} = \frac{\dot{w}z - \dot{z}w}{z^2} \quad \dot{v} = \frac{\dot{z}w - \dot{w}z}{w^2}$$

lo cual implica,

$$\dot{u} = \frac{(w^2 - zw)z - (z^2 - 2zw)w}{z^2} = \frac{u^2z^3 - uz^3 - uz^3 + 2u^2z^3}{z^2} = 3zu^2 - 2uz$$

y

$$\dot{v} = \frac{(z^2 - 2zw)w - (w^2 - zw)z}{w^2} = \frac{v^2w^3 - 2vw^3 - vw^3 + v^2w^3}{w^2} = 2v^2w^3 - 3vw^3$$

además, $\dot{z} = z^2 - 2uz^2$ $\dot{w} = w^2 - vw^2$.

Consideremos el campo $(\dot{z}, \dot{u}) = (z^2 - 2uz^2, 3zu^2 - 2uz)$, dividiendo entre z no queda el campo orbitalmente equivalente

$$\tilde{V}(z, u) = \begin{cases} \dot{z} = z - 2uz \\ \dot{u} = 3u^2 - 2u \end{cases}$$

Recordemos que tratamos de analizar localmente el comportamiento del campo V en una vecindad del origen, pero al explotar el origen éste se transforma en una esfera S^1 en el caso real y en el caso complejo en S^2 (que llamamos el divisor excepcional en la variedad M). Entonces para analizar el comportamiento del campo V alrededor del origen debemos analizar el comportamiento del campo los puntos singulares sobre el divisor excepcional.

Notemos que el divisor excepcional en estas cartas es el eje $u(z = 0)$, además ésta es una hoja invariante del campo \tilde{V} pues $z = 0$ es solución de \dot{z} , de esta manera los puntos singulares están dados por las raíces del polinomio $3u^2 - 2u$, las cuales son $u_1 = 0$ y $u_2 = \frac{2}{3}$. La matriz asociada a la parte lineal del campo \tilde{V} es

$$D\tilde{V} = \begin{bmatrix} 1 - 2u & -2z \\ 0 & 6u - 2 \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos singulares $p_1 = (0, 0)$ y $p_2 = (0, \frac{2}{3})$ obtenemos

$$D\tilde{V}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad D\tilde{V}_{(0, \frac{2}{3})} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es claro que no podemos hacer uso del teorema de Poincaré pues los valores propios de las matrices asociadas a la parte lineal del campo están en el dominio de Siegel. Sin embargo, ya que la parte real de los valores propios es no cero, podemos hacer uso del teorema de Grobman-Hartman (ver [1]) de equivalencia topológica para decir que los puntos singulares p_1 y p_2 se comportan localmente como sillas en la foliación asociada al campo \tilde{V} .

Ahora veamos que sucede en las coordenadas (w, v) . Notemos que el campo que obtenemos es $(\dot{w}, \dot{v}) = (w^2 - vw^2, 2v^2w - 3vw)$, que es orbitalmente equivalente, dividiendo por w al campo

$$\hat{V} = \begin{cases} \dot{w} = w - vw \\ \dot{v} = 2v^2 - 3v \end{cases} .$$

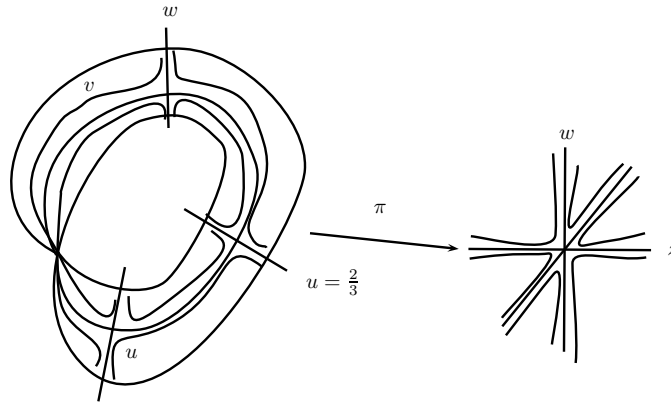
En este caso el divisor excepcional es el eje $v(w = 0)$ y los puntos singulares sobre el divisor excepcional están dados por las raíces del polinomio $2v^2 - 3v$, las cuales son $v_1 = 0$ y $v_2 = \frac{3}{2}$. La matriz asociada a la parte lineal del campo \hat{V} es

$$D\hat{V} = \begin{bmatrix} 1 - v & -w \\ 0 & 4v - 3 \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos singulares $p_1 = (0, 0)$ y $p_2 = (0, \frac{3}{2})$ obtenemos

$$D\widehat{V}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad D\widehat{V}_{(0,\frac{3}{2})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

De nueva cuenta no podemos hacer uso del teorema de Poincaré por que los valores propios de las matrices asociadas a la parte lineal del campo están en el dominio de Siegel. Sin embargo ya que la parte real de los valores propios es no cero podemos hacer uso del teorema de Grobman-Hartman (ver [1]) de equivalencia topológica para decir que los puntos singulares p_1 y p_2 se comportan localmente como sillas en la foliación asociada al campo \widehat{V} . De esta manera obtenemos una foliación sobre la variedad M y a partir de comportamientos de los puntos singulares elementales podemos conocer el comportamiento de esta foliación. Cuando estamos en el caso real al proyectar obtenemos:



En los ejemplos tratados observamos un fenómeno interesante, en el ejemplo 4.2 el divisor excepcional resulto ser una curva invariante de la foliación, sin embargo en el ejemplo 4.1 vimos que esto no ocurría.

Analizaremos más a fondo este fenómeno.

Consideremos el siguiente campo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P(z, w) = P_n(z, w) + P_{n+1}(z, w) + \dots \\ \dot{w} &= Q(z, w) = Q_n(z, w) + Q_{n+1}(z, w) + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde P_k y Q_k son polinomios homogéneos de grado $k \geq n$, con P_k, Q_k no idénticamente cero, $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Consideremos la carta coordenada (z, u) con $w = uz$, $u = \frac{w}{z}$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} = \frac{Q(z, w)z - P(z, w)w}{z^2} = \frac{Q(z, uz)z - uzP(z, uz)}{z^2} \\ &= \frac{(Q_n(z, uz) + Q_{n+1}(z, uz) + \dots)z - (P_n(z, uz) + P_{n+1}(z, uz) + \dots)uz}{z^2} \end{aligned}$$

y $\dot{z} = P(z, w) = P(z, uz) = P_n(z, uz) + P_{n+1}(z, uz) + \dots$

Notemos que si P_k es un polinomio homogéneo de grado k entonces $P_k(z, uz) = z^k P(1, u)$; de esta manera el campo que obtenemos es

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^n(P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)) \\ \dot{u} &= \frac{z^{n+1}(Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2)))}{z^2}. \end{aligned}$$

Caso 1.- Supongamos que $Q_n(1, u) - uP_n(1, u)$ no es idénticamente cero. Como $n \geq 1$ entonces en \dot{u} , al dividir entre z^2 , obtenemos

$$\dot{u} = z^{n-1}(Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2))),$$

luego dividiendo \dot{z} y \dot{u} entre z^{n-1} obtenemos el campo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z(P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)) \\ \dot{u} &= Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Notemos que $z = 0$ es solución y los puntos críticos del campo de direcciones en la explosión sobre el divisor están dados por las raíces del polinomio $Q_n(1, u) - uP_n(1, u)$. En este caso decimos que $(z, w) = (0, 0)$ es una singularidad no dicrítica.

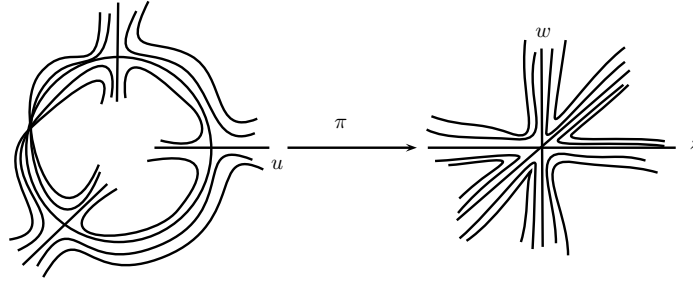


Figura 4.1: Explosión de un campo no dicrítico con 3 separatrices

Caso 2.- Supongamos que $Q_n(1, u) - uP_n(1, u)$ es idénticamente cero. Entonces de la ecuación (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^n(P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)) \\ \dot{u} &= z^n(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2)). \end{aligned}$$

Dividiendo entre z^n obtenemos el campo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2) \\ \dot{u} &= Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2). \end{aligned}$$

Así cuando $z=0$ tenemos el campo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= P_n(1, u) \\ \dot{u} &= Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u). \end{aligned}$$

Por lo que $z = 0$ no es solución. En éste caso decimos que $(z, w) = (0, 0)$ es una singularidad dicrítica. Si además las raíces de $P_n(1, u)$ y $Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u)$ no coinciden, entonces las soluciones de este campo atraviesan transversalmente al divisor en los punto donde $P_n(1, u)$ no se anula y son tangentes al divisor en los puntos donde $P_n(1, u)$ se anula.

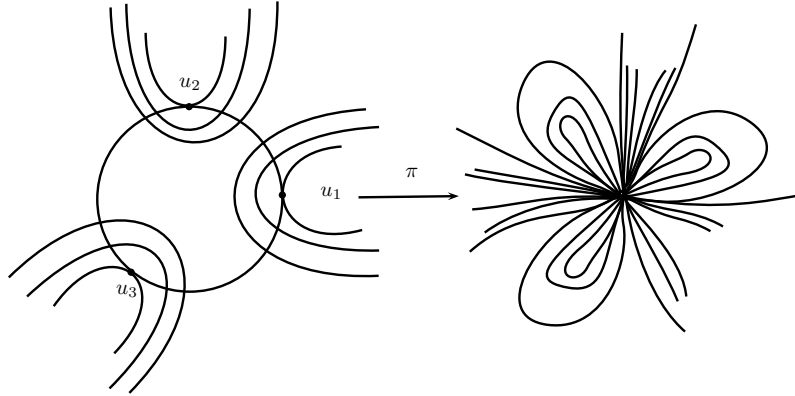


Figura 4.2: Explosión de un campo dicrítico con 3 tangencias

4.1. Índice de Camacho-Sad

Procedemos a dar la definición del índice de Camacho-Sad. Este índice resulta ser equivalente a un invariante topológico ya conocido, que permite decir como está encajada una curva holomorfa compacta y suave en un variedad holomorfa de dimensión compleja 2.

Sea $V = (g(z, w), -f(z, w))$ un campo vectorial en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada en el origen y sea \mathcal{F} la foliación con singularidades inducida por V . Consideremos la 1-forma dada por $\omega = f(z, w)dz + g(z, w)dw$ no es difícil observar que $\{\omega = 0\}$ define la misma foliación \mathcal{F} . Sea S una separatriz suave de la foliación \mathcal{F} . Vamos a demostrar que localmente S puede ser vista en coordenadas apropiadas como un eje coordenado. En efecto por ser S suave admite una parametrización $\gamma(t) = (z(t), w(t))$ con $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para toda t ; en particular $\dot{\gamma}(0) \neq 0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\dot{z}(0) \neq 0$, luego por el teorema de la función inversa existe una vecindad $(\mathbb{C}, 0)$ y una función $t(z)$, que es la función inversa de $z(t)$. Componiendo la curva $\gamma(t)$ con $t(z)$ obtenemos $\gamma(t(z)) = (z, w(t(z)))$, que es una reparametrización de γ . Denotamos como $w(t(z)) = \tilde{\gamma}(z)$.

Así, la separatriz S se escribe localmente como $(z, \tilde{\gamma}(z))$, es decir, como gráfica de una función.

Sea $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definida como $H(z, w) := (z, w - \tilde{\gamma}(z))$, de

esta manera H transforma la curva $(z, \tilde{\gamma}(z))$, es decir, $S \cap (\mathbb{C}^2, 0)$ en el eje z . Observemos que $DH(z, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\gamma}'(z) & 1 \end{bmatrix}$, lo que implica que H es invertible; de hecho H es un difeomorfismo local cuya diferenciabilidad es heredada de $\tilde{\gamma}$, es decir, es tan diferenciable como $\tilde{\gamma}$. Como S es una curva holomorfa, $\tilde{\gamma}$ es holomorfa y por tanto H es un biholomorfismo.

Con esto hemos demostrado que cualquier separatriz suave puede verse localmente como uno de los ejes coordenados.

Con lo anterior en mente, supongamos que la separatriz S es el eje $\{w = 0\}$ entonces se tiene que $f(z, 0) \equiv 0$ pues para cualquier punto $p = (z, 0)$ en S su vector tangente es de la forma $(c, 0)$, con $c \neq 0$, así

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_p(c, 0) = f(z, 0)dz(c, 0) + g(z, 0)dw(c, 0), \quad (c, 0) \in T_p S, \\ &= f(z, 0)c + g(z, 0)0 \\ &= f(z, 0)c. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(z, 0) = 0 \forall (z, 0) \in S$.

Esta última igualdad nos permite escribir a f como

$$f(z, w) = wa(z) + O(w^2).$$

Así mismo, podemos expresar a g como

$$g(z, w) = b(z) + O(w).$$

De esta manera la ecuación de Pfaff $\omega = f(z, w)dz + g(z, w)dw = 0$ tiene asociado el campo

$$V = (g(z, w), -f(z, w)) = (b(z) + O(w), -wa(z) - O(w^2)).$$

Pasaremos a dar la definición del índice de Camacho-Sad, que es una definición de carácter local. Para esto consideraremos una vecindad de la separatriz y sea

$$V = (-g(z, w), f(z, w))$$

el campo asociado a la foliación, entonces V es equivalente a la siguiente ecuación que resulta de tomar a z como variable independiente

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{f(z, w)}{g(z, w)}. \quad (4.5)$$

Esta ecuación no depende del tiempo y define la misma foliación que $\omega = 0$. Para obtener mas información calcularemos en una vecindad de la separatriz, la ecuación de primera variación de (4.5) a lo largo de $S = \{w = 0\}$. Con ello tendremos elementos suficientes para dar la definición del índice de Camacho-Sad. Para obtener la ecuación de primera variación, derivamos a $-\frac{f(z,w)}{g(z,w)}$ con respecto a w y evaluamos en un punto de S , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(-\frac{f(z,w)}{g(z,w)} \right) \Big|_{(z,0)} = \frac{-\frac{\partial f(z,w)}{\partial w} g(z,w) + f(z,w) \frac{\partial g(z,w)}{\partial w}}{(g(z,w))^2} \Big|_{(z,0)} \quad (4.6)$$

$$= \frac{\frac{\partial f(z,0)}{\partial w} g(z,0) + f(z,0) \frac{\partial g(z,0)}{\partial w}}{(g(z,0))^2} \quad (4.7)$$

$$= \frac{\frac{\partial f(z,0)}{\partial w}}{g(z,0)}. \quad (4.8)$$

Haciendo $\frac{\partial f(z,0)}{\partial w} = f_w(z,0)$, obtenemos que la ecuación de primera variación es

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{f_w(z,0)}{g(z,0)} w.$$

Esta última ecuación se expresa en el lenguaje de formas como

$$w f_w(z,0) dz + b(z) dw = 0$$

lo que es igual a $wa(z)dz + b(z)dw = 0$, donde $a(z) = f_w(z,0)$ y describe el comportamiento de la foliación \mathcal{F} cerca de la separatriz S . por simplicidad en la notación escribiremos a ω como $wa(z)dz + b(z)dw$. Denotemos por θ a la siguiente 1-forma meromorfa en S ,

$$\theta = -\frac{a(z)}{b(z)} dz.$$

Llamaremos a θ la forma de conexión de ω . Los polos de θ están dados por los ceros de $b(z)$, que también definen los puntos singulares de ω o de V sobre S .

DEFINICIÓN 4.1. *El índice $i_{p_k}(\mathcal{F}, S)$, de una foliación singular \mathcal{F} con respecto a una curva invariante holomorfa suave, es decir, una separatriz suave S en un punto $p_k = (z_k, 0) \in S$, se define como el residuo de θ en z_k ,*

$$i_{p_k}(\mathcal{F}, S) := \text{Res}_{z_k} \theta.$$

Notemos que si p no es un punto singular de V entonces $i_p(\mathcal{F}, S) = 0$. Dado que localmente una separatriz puede verse como uno de los ejes coordenados, el índice de una foliación \mathcal{F} en \mathbb{C}^2 dada por un campo $(P(z, w), Q(z, w))$ con $Q(z, 0) = 0$, en un punto $p_k = (z_k, 0)$ con respecto a la separatriz $S = \{w = 0\}$ se define como

$$i_{p_k}(\mathcal{F}, S) := \text{Res}_{z_k} \left[\frac{Q_w(z, w)}{P(z, w)} \Big|_{(z, 0)} \right].$$

Proposición 4.1. *Sea V un campo holomorfo en (\mathbb{C}^2, p) con punto singular elemental p y \mathcal{F} la foliación asociada al campo V . Sean λ_1 y λ_2 los valores propios correspondientes a la parte lineal del campo en el punto p . Si S es una separatriz suave que pasa por p y el valor propio λ_1 asociado al vector tangente a S es distinto de cero entonces,*

$$i_p(\mathcal{F}, S) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Demostración. Dado que $S = \{w = 0\}$ es solución, entonces el campo V puede expresarse como $V = (-b(z) + O(w), wa(z) + O(w^2))$. Sea $p_k = (z_k, 0)$ un punto singular elemental de V sobre S con $\lambda_1 \neq 0$.

La derivada del campo V evaluada en p_k se expresa como

$$DV_{(z_k, 0)} = \begin{bmatrix} b_z(z) + O(w)_z & O(w)_w \\ -wa_z(z) + O(w^2)_z & -a(z) + O(w^2)_w \end{bmatrix}_{(z_k, 0)} = \begin{bmatrix} b_z(z_k) & c(z_k) \\ 0 & -a(z_k) \end{bmatrix}$$

Entonces los valores propios de $DV_{(z_k, 0)}$ son $\lambda_1 = b_z(z_k)$ y $\lambda_2 = -a(z_k)$, donde $b_z(z) = \frac{\partial b(z)}{\partial z}$.

Por otro lado

$$\text{Res}_{z_k} \left(\frac{\partial(-wa(z) + O(w^2))}{\partial w} \Big|_{(z, 0)} \right) = \text{Res}_{z_k} \left(-\frac{a(z)}{b(z)} \right).$$

Calculemos $\text{Res}_{z_k} \left(-\frac{a(z)}{b(z)} \right)$,

$$\text{Res}_{z_k} \frac{-a(z)}{b(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{-a(z)}{b(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{-a(z)}{\frac{b(z) - b(z_k)}{z - z_k}} = \frac{-a(z_k)}{b_z(z_k)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

Así $i_p(\mathcal{F}, S) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. □

La proposición anterior nos da un corolario interesante que relaciona el índice de Camacho-Sad de dos separatrices.

Corolario 4.1. *Si por un punto singular elemental p de una foliación \mathcal{F} pasan transversalmente dos separatrices suaves S_1 y S_2 con $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, entonces*

$$i_p(\mathcal{F}, S_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = [(\mathcal{F}, S_1)]^{-1}.$$

DEFINICIÓN 4.2. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre una variedad holomorfa compleja M de dimensión 2. Sea S una curva invariante holomorfa compacta suave. Definimos el índice total a lo largo de S como la suma de los índices en los puntos singulares de la foliación que estén sobre S , es decir,*

$$\sum_{p \in S} i_p(\mathcal{F}, S).$$

Ejemplo 4.3. *Consideremos el siguiente campo*

$$V(z, w) = \begin{cases} \dot{z} = -3z^2 + 6zw \\ \dot{w} = -4w^2 + 3zw \end{cases}$$

y denotamos por \mathcal{F} la foliación inducida por el campo V . Considerando los cambios de coordenadas $u = \frac{w}{z}$ y $v = \frac{z}{w}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\dot{w}z - \dot{z}w}{z^2} = \frac{-4w^2z + 3z^2w + 3z^2w - 6zw^2}{z^2} = 6uz - 10u^2z, \\ \dot{v} &= \frac{\dot{z}w - \dot{w}z}{w^2} = \frac{-3w^2w + 6zw^2 + 4w^2z - 3z^2w}{w^2} = 10vw - 6v^2w. \end{aligned}$$

Así en las coordenadas (z, u) obtenemos el campo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -3z^2 + 6uz^2 & \text{que es orbitalmente equivalente a} & \dot{z} = -3z + 6uz \\ \dot{u} &= 6uz - 10u^2z & & \dot{u} = 6u - 10u^2 \end{aligned}$$

mientras que en las coordenadas (w, v) obtenemos el campo

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -4w^2 + 3vw^2 & \text{que es orbitalmente equivalente a} & \dot{w} = -4w + 3vw \\ \dot{v} &= 10vw - 6v^2w & & \dot{v} = 10v - 6v^2 \end{aligned}$$

Consideremos $V_1 = (-3z + 6uz, 6u - 10u^2)$ y $V_2 = (-4w + 3vw, 10v - 6v^2)$ y sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 las respectivas foliaciones de dichos campos.

Notemos que $(0, u)$ y $(0, v)$ son separatrices de las foliaciones \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 respectivamente, y forman una esfera en M que es el divisor excepcional E . Además estas foliaciones definen una foliación sobre M que es tangente a E , la cual denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$. Los puntos singulares de \mathcal{F}_1 en E son $p_1 = (0, 0)$

y $p_2 = (0, \frac{3}{5})$. De manera análoga los puntos singulares de \mathcal{F}_2 en E son $q_1 = (0, 0)$ y $q_2 = (0, \frac{5}{3})$. Observemos que el punto p_2 en las coordenadas (z, u) está en correspondencia con el punto q_2 bajo las coordenadas (w, v) , así que solo calcularemos los índices de p_1 , p_2 y q_1 .

Para esto calculemos la derivada de W_1 y W_2 en los puntos p_1 , p_2 y q_1 respectivamente. Entonces

$$DW_1|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad DW_1|_{(0, \frac{3}{5})} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad DW_2|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Entonces los puntos p_1 , p_2 y q_1 son puntos singulares elementales y además, son sillas resonantes. De la proposición 4.1 se sigue que $i_{p_1}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, $i_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = \frac{3}{5} \frac{1}{-6} = -\frac{1}{10}$ y $i_{q_1}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$. Finalmente $i(\tilde{\mathcal{F}}, E) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = -1$

El ejemplo nos motiva a preguntarnos que si siempre que hacemos una primera explosión el índice total de la foliación sobre el divisor excepcional E es -1.

Veamos de manera un poco más general qué es lo que sucede, para ello consideremos el campo vectorial

$$\dot{z} = P(z, w) = P_n(z, w) + P_{n+1}(z, w) + \dots \quad (4.9)$$

$$\dot{w} = Q(z, w) = Q_n(z, w) + Q_{n+1}(z, w) + \dots \quad (4.10)$$

con P_k y Q_k polinomios homogéneos de grado k . Denotamos por \mathcal{F} a la foliación inducida por este campo. Para llevar el campo a la banda de Möbius compleja y verlo en las coordenadas (z, u) , consideremos el cambio de coordenadas $u = \frac{z}{w}$. Así obtenemos que el campo original es orbitalmente analíticamente equivalente al campo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z(P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)) \\ \dot{w} &= (Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2))). \end{aligned}$$

Denotemos por $\tilde{\mathcal{F}}$ a la foliación inducida por este campo.

Supongamos que la singularidad es no dicrítica, así el divisor excepcional $E = \{z = 0\}$ es separatriz de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$, asociada a este campo y los puntos singulares están dados por los puntos $(0, u_j)$ donde u_j , $j = 1, \dots, n+1$

son la raíces del polinomio $P_n(1, u) - uQ_n(1, u)$. Entonces

$$\begin{aligned} i_{p_j}(\tilde{\mathcal{F}}, E) &= Res_{u_j} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial z}(z(P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)))}{(Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2)))} \right] \Big|_{z=0} \\ &= Res_{u_j} \left[\frac{P_n(1, u) + zP_{n+1}(1, u) + O(z^2)}{(Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + z(Q_{n+1}(1, u) - uP_{n+1}(1, u) + O(z^2)))} \right] \Big|_{z=0} \\ &= Res_{u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] \end{aligned}$$

y entonces el índice total es

$$\sum_{j=1}^{n+1} i_{p_j}(\tilde{\mathcal{F}}, E) = \sum_{j=1}^{n+1} Res_{u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right].$$

Para conocer esa suma basta calcular (por el teorema del residuo), el residuo en el infinito

$$\begin{aligned} Res_{\infty} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] &= -Res_0 \left[\frac{1}{u^2} \frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{Q_n(1, \frac{1}{u}) - \frac{1}{u}P_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -Res_0 \left[\frac{1}{u^2} \frac{uP_n(1, \frac{1}{u})}{uQ_n(1, \frac{1}{u}) - P_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -Res_0 \left[\frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{u^2Q_n(1, \frac{1}{u}) - uP_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -\lim_{u \rightarrow 0} \left[u \frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{u^2Q_n(1, \frac{1}{u}) - uP_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{uQ_n(1, \frac{1}{u}) - P_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -\frac{P_n(1, u)}{-P_n(1, u)} = 1; \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^n Res_{u=u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] + Res_{u=\infty} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] = 0$$

lo cual implica que

$$\sum_{j=1}^n Res_{u=u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] = -Res_{\infty} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] = -1.$$

Esto tiene como consecuencia que para cualquier foliación sobre la banda de Möbius compleja el índice total sobre el divisor excepcional $\{z = 0\}$ es -1. No es un hecho fácil de demostrar que la suma de los índices de los puntos singulares de una foliación en una variedad holomorfa de dimensión compleja 2 sobre una separatriz compacta y suave no dependa de la foliación, sin embargo este resultado proporciona un invariante topológico del encaje de la curva en la variedad, que es fácil de calcular.

Teorema 4.1. *Supongamos que S es un curva holomorfa compacta suave sobre una variedad holomorfa compleja M de dimensión 2. Entonces para cualquier foliación \mathcal{F} sobre M que sea tangente a S , se satisface que la suma de los índices de todos los puntos singulares sobre S es el mismo y depende sólo de S y M*

$$\sum_{p \in S} i_p(\mathcal{F}, S) = c(S, M)$$

La demostración de este teorema es un caso particular del Teorema 2.2, donde $c(S, M)$ es el grado del haz normal asociado al divisor excepcional, que es un invariante topológico del encaje de S en M .

El siguiente lema es una consecuencia importante del teorema anterior.

Lema 4.1. *Sea M la banda de Möbius compleja y sea E el divisor excepcional entonces*

$$c(E, M) = -1$$

Demostración. Consideremos la foliación dada por $dw = 0$ o el campo vectorial $\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ exploremos el campo en una vecindad del origen para llevarlo a la banda de Möbius compleja tal que la foliación resultante sea tangente al divisor excepcional $E = \{z = 0\}$. Bajo los cambios de coordenadas $u = \frac{w}{z}$ y $v = \frac{z}{w}$ el campo que obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z \\ \dot{u} &= \frac{\dot{w}z - w\dot{z}}{z^2} = \frac{-uz^2}{z^2} = -u \end{aligned} \tag{4.11}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 0 \\ \dot{v} &= \frac{\dot{z}w - z\dot{w}}{w^2} = \frac{vw^2}{w^2} = v \end{aligned} \tag{4.12}$$

El punto singular para el campo (4.11) es punto $p_1 = (0, 0)$ y el punto singular para el campo (4.12) es el punto $p_2 = (0, 0)$ que ya son puntos singulares irreducibles bajo explosión. A la foliación obtenida por los campos

(4.11) y (4.12) la denotamos como $\tilde{\mathcal{F}}$, de lo cual obtenemos que $i_{p_1}(E, \tilde{\mathcal{F}}) = -1$ y $i_{p_2}(E, \tilde{\mathcal{F}}) = 0$. Por lo tanto

$$i_{p_1}(E, \tilde{\mathcal{F}}) + i_{p_2}(E, \tilde{\mathcal{F}}) = -1$$

como se quería probar. \square

4.2. Aplicación del Teorema de Savelev

Sea $V \in \mathcal{V}_n$. En las coordenadas (z, w) , el campo V tiene la forma

$$V = P(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + Q(z, w) \frac{\partial}{\partial w}, \quad P = \sum_{k=n}^{\infty} P_k, Q = \sum_{k=n}^{\infty} Q_k \quad (4.13)$$

donde $P(z, w)$ y $Q(z, w)$ son funciones holomorfas con P_k, Q_k polinomios homogéneos en (z, w) de grado k , $k \geq n$, que corresponden a la expansión de Taylor de P y Q , respectivamente en el origen. Sea $R_{n+1} := zQ_n - wP_n$. Ahora enunciaremos las hipótesis de genericidad para los teoremas importantes en este capítulo.

Decimos que un germen de campo vectorial holomorfo no dicrítico $V \in \mathcal{V}_n$, de la forma (4.13), es genérico no dicrítico si satisface las siguientes hipótesis de genericidad:

- 1). Los polinomios $R_{n+1} = zQ_n - wP_n$ son de grado $n + 1$ y tienen sólo factores simples.
- 2). Todos los exponentes característicos en los puntos singulares de la foliación del “blow-up” no son cero o racionales positivos.
- 3). Al menos un punto singular, denotado por p_∞ , de la foliación del “blow-up” puede ser linealizado en alguna vecindad y su exponente característico λ_∞ , no es -1 .

Bajo las hipótesis de genericidad daremos una idea de la demostración de los siguientes dos teoremas

Teorema 4.2. *(Forma normal semi polinomial analítica) Todo germen genérico no dicrítico en \mathcal{V}_n es orbitalmente analíticamente equivalente a un germen de campo vectorial de la forma*

$$V_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} = z\mathcal{P}(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + w\mathcal{Q}(z, w) \frac{\partial}{\partial w},$$

con singularidad no dicrítica en el origen, donde \mathcal{P}, \mathcal{Q} son polinomios de grado a lo más $n - 1$ en la variable w y con coeficientes analíticos en la variable z .

Teorema 4.3. (Forma normal semi polinomial analítica para $n = 2$) Todo germen genérico no dicrítico de \mathcal{V}_2 , es orbitalmente analíticamente equivalente a un germen de campo vectorial de la forma

$$V_{an} = z(\mathcal{P}_1(z, w) + z^2\beta(z))\frac{\partial}{\partial z} + w(\mathcal{Q}_1(z, w) + z^2\beta(z))\frac{\partial}{\partial w}$$

donde $\mathcal{P}_1(z, w) = wa_0 + b_1z$, $\mathcal{Q}_1(z, w) = wc_0 + d_1z$ son polinomios homogéneos de grado 1 y $\beta(z)$ es una función holomorfa en una vecindad del origen.

Sea V un germen no dicrítico de \mathcal{V}_n . En las coordenadas (z, w) , V tiene la forma (4.13) y el “blow-up” \tilde{V} de V está dado en las cartas estándar, por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{zQ(z, uz) - uzP(z, uz)}{z^2P(z, uz)} \\ \frac{dv}{dw} &= \frac{wQ(wv, w) - vwQ(vw, w)}{w^2Q(vw, w)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La condición de que el campo es no dicrítico, es decir, $R_{n+1} \equiv 0$ implica que el “blow-up” puede extenderse, sobre la región de definición de la carta estándar (z, u) , a un campo vectorial generado por el campo vectorial

$$\tilde{V}_+(z, u) = \tilde{P}_+(z, u)\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{Q}_+(z, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

donde $\tilde{P}_+ = z[P_n(1, u) + O(z)]$, $\tilde{Q}_+(z, u) = R_{n+1}(1, u)$, cuando $z \rightarrow 0$. De manera análoga, sobre la región de definición de la carta estándar (w, v) , \tilde{V} se extiende a un campo generado por el campo vectorial

$$\tilde{V}_-(w, v) = \tilde{P}_-(w, v)\frac{\partial}{\partial w} + \tilde{Q}_-(w, v)\frac{\partial}{\partial v}$$

donde $\tilde{P}_-(w, v) = w[Q_n(v, 1) + O(w)]$, $\tilde{Q}_-(w, v) = R_{n+1}(v, 1) + O(w)$, para $w \rightarrow 0$. Las siguientes propiedades son condiciones genéricas para gérmenes no dicríticos:

- 1). El germen V tiene exactamente $n + 1$ diferentes separatrices, las cuales son suaves en el origen y la intersección entre cualesquiera dos de ellas es transversal.

- 2). La correspondiente foliación del “blow-up” $\mathcal{F}_{\tilde{V}}$ tiene exactamente $n+1$ puntos singulares p_1, \dots, p_{n+1} sobre el divisor $E \sim \mathbb{P}$ y los exponentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ no son cero o números racionales positivos.
- 3). Forma prenormalizada. Sin perder generalidad podemos suponer que el punto singular p_{n+1} es el punto al infinito ($p_{n+1} = p_\infty = 0$ en la carta estándar (w, v)) y denotamos por λ_∞ el índice de Camacho-Sad con respecto al divisor E . Mas aún podemos suponer que el eje ($w = 0$) es la separatriz en el punto p_∞ . Entonces, supongamos en lo que sigue que el campo vectorial V está en su forma prenormalizada:

$$V(z, w) = z\hat{P}(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + w\hat{Q}(z, w)\frac{\partial}{\partial w}, \quad (4.15)$$

donde $\hat{P}(z, w), \hat{Q}(z, w)$ son gérmenes analíticos en el origen de orden $n - 1$, $\hat{P} = \sum_{m=n-1}^{\infty} \hat{P}_m$, $\hat{Q} = \sum_{m=n-1}^{\infty} \hat{Q}_m$ donde \hat{P}_m, \hat{Q}_m son polinomios homogéneos de grado m .

- 4). El subconjunto $E \setminus \{p_1, \dots, p_n, p_\infty\}$ es una hoja de la foliación del “blow-up” $\mathcal{F}_{\tilde{V}}$. Mas aún, el polinomio $r(u) = R_{n+1}(1, u)$ tiene exactamente $n + 1$ raíces simples, que denotamos por $u_1, u_2, \dots, u_n, r'(u_j) \neq 0$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} = \lambda_\infty$ sus correspondientes exponentes característicos; observemos que estos exponentes coinciden en este caso con el índice de Camacho-Sad de la foliación $\mathcal{F}_{\tilde{V}}$ en el punto singular con respecto al divisor E , $\lambda_j = \frac{P_n(1, u_j)}{\frac{\partial R_{n+1}}{\partial u}(1, u_j)} = \frac{p(u_j)}{r'(u_j)}$, $j = 1, \dots, n$ y $\lambda_\infty = -\frac{Q_n(0, 1)}{\frac{\partial R_{n+1}}{\partial v}(0, 1)}$.

Idea de la demostración del Teorema 4.2.

Sea $V \in \mathcal{V}_n$, sin perder generalidad suponemos que el campo está escrito en su forma prenormalizada (4.15). Sea \mathcal{C}_{ϵ_0} ,

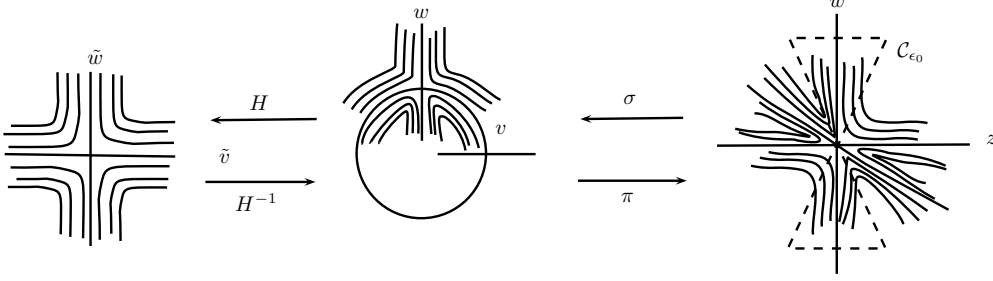
$$\mathcal{C}_{\epsilon_0} := \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : \frac{1}{\epsilon_0}|z| \leq |w| \leq \epsilon_0 \right\}. \quad (4.16)$$

un cono alrededor de la separatriz $\{z = 0\}$ tal que, en las coordenadas del “blow-up” $(v, w) = (\frac{z}{w}, w)$ el cono \mathcal{C}_{ϵ_0} toma la forma

$$D_{\epsilon_0} \times D_{\epsilon_0} := \{(v, w) : |v| \leq \epsilon_0, |w| \leq \epsilon_0\}.$$

$D_{\epsilon_0} \times D_{\epsilon_0}$ es una vecindad de el punto p_∞ (el origen en las coordenadas (v, w)). Por las hipótesis de genericidad el “blow-up” \tilde{V} de V (en las coordenadas (v, w)) es linealizable en una vecindad U de el punto singular p_∞ . Entonces para $\epsilon_0 \ll 1$ hay un biholomorfismo H ,

$$H : D_{\epsilon_0} \times D_{\epsilon_0} \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0), \quad (4.17)$$


 Figura 4.3: Linealizando el campo V dentro de un cono \mathcal{C}_{ϵ_0}

que linealiza \tilde{V} y tal que preserva la coordenada w .

Denotamos por V_λ la linealización de \tilde{V} :

$$V_\lambda = DH \circ \tilde{V} \circ H^{-1}$$

En las cartas $(\tilde{v}, \tilde{w}) : H(v, w)$ el campo vectorial se expresa como:

$$V_\lambda = \lambda \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} + \tilde{w} \frac{\partial}{\partial \tilde{w}} \quad (4.18)$$

donde $\lambda = \frac{1}{\lambda_\infty}$ es el índice de Camacho-Sad, de V_λ en $(0, 0)$ respecto a la separatriz $\{v = 0\}$, y λ_∞ es el índice de Camacho-Sad de V_λ en $(0, 0)$ respecto a la separatriz $\{w = 0\}$. Como el campo vectorial V_λ es lineal, podemos extenderlo a la variedad compleja completa \mathcal{M} donde

$$\mathcal{M} := (\mathbb{C} \times D_\epsilon) \sqcup (\mathbb{C} \times D_\epsilon)$$

identificada mediante los cambios de coordenadas dados por

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) = \left(\xi = \tilde{v}\tilde{w}, \eta = \frac{1}{\tilde{w}} \right), \quad \tilde{w} \neq 0$$

donde $H^{-1}(D_\epsilon \times D_\epsilon) \subset D_{\epsilon_0} \times D_{\epsilon_0}$ para $\epsilon \ll 1$.

Sean $\mathcal{M}_+ := \{(\tilde{v}, \tilde{w}) \in D_\epsilon \times \mathbb{C}\}$, $\mathcal{M}_- := \{(\xi, \eta) \in D_\epsilon \times \mathbb{C}\}$. Sobre \mathcal{M}_+ el campo vectorial V_λ está definido mediante (4.18); realicemos algunos cálculos para ver cómo se escribe este campo en \mathcal{M}_-

Dado que $\xi = \tilde{v}\tilde{w}$ entonces

$$\dot{\xi} = \dot{\tilde{v}}\tilde{w} + \tilde{v}\dot{\tilde{w}} = \lambda \tilde{v}\tilde{w} + \tilde{v}\tilde{w} = (\lambda + 1)\xi, \quad (4.19)$$

y

$$\dot{\eta} = -\frac{\dot{\tilde{w}}}{\tilde{w}^2} = -\frac{\tilde{w}}{\tilde{w}^2} = -\frac{1}{\tilde{w}} = -\eta, \quad (4.20)$$

entonces sobre \mathcal{M}_- , V_λ está dado por

$$V_{\lambda+1} := (\lambda + 1)\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (4.21)$$

Entonces hay una foliación sobre \mathcal{M} definida por la extensión del campo V_λ , que no tiene más que 2 puntos singulares: el $(0, 0)$ en las coordenadas (\tilde{v}, \tilde{w}) y el $(0, 0)$ en las coordenadas (ξ, η) . Notemos que el índice de Camacho-Sad en el origen con respecto al eje w es λ y el respectivo índice en el origen en las cartas (ξ, η) con respecto a $\xi = 0$ es $-(\lambda + 1)$. Esto significa que el índice de autointersección de la cerradura $\{w = 0\}$ en \mathcal{M} es -1 .

Así \mathcal{M} es el blow-up de una vecindad de $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (0, 0)$.

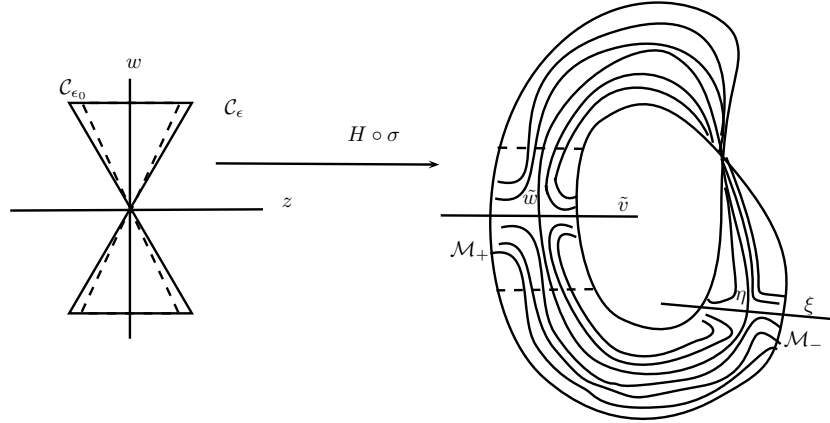


Figura 4.4: Extensión del campo V_λ a \mathcal{M}

Regresando a las coordenadas (z, w) :

Recordemos que el campo vectorial V tiene índice de Camacho-Sad $\lambda + 1$ con respecto al eje w , esto se sigue de la correspondencia de V con V_λ mediante $H \circ \sigma$, pues el campo V_λ tiene índice λ y al bajar el campo aumentamos en 1 el índice. Así V tiene índice $\lambda + 1$.

El siguiente objetivo es construir una extensión del campo V . Consideremos el campo vectorial V_λ y la siguiente construcción:

Definimos en una vecindad del origen en las coordenadas (\tilde{v}, \tilde{w}) , un anillo $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{M}$,

$$\mathcal{A}_\mu := D_\epsilon \times D_\epsilon \setminus D_{\epsilon'} \times D_{\epsilon'}, \quad \epsilon' < \epsilon$$

sea \mathcal{A} el anillo cuyo dominio es la preimagen de \mathcal{A}_μ bajo $H \circ \sigma$

$$\mathcal{A} := (H \circ \sigma)^{-1}(\mathcal{A}_\mu), \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{C}_\epsilon \quad (4.22)$$

Debemos notar que $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_-$. Construiremos una variedad a través de $(H \circ \sigma)^{-1}$, identificando la vecindad \mathcal{U}_+ del origen en las coordenadas (z, w) , $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_\epsilon \subset \mathcal{U}_+$ con el dominio abierto $\mathcal{U}_- = D_\epsilon \times D_{\frac{1}{\epsilon}}$ (en las cartas (ξ, η)). Esto es, definimos Φ como la composición

$$\Phi := \beta \circ H \circ \sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \beta(\mathcal{A}_\mu) \subset \mathcal{U}_-, \quad \beta(\tilde{v}, \tilde{w}) = \left(\xi = \tilde{v}\tilde{w}, \eta = \frac{1}{\tilde{w}} \right).$$

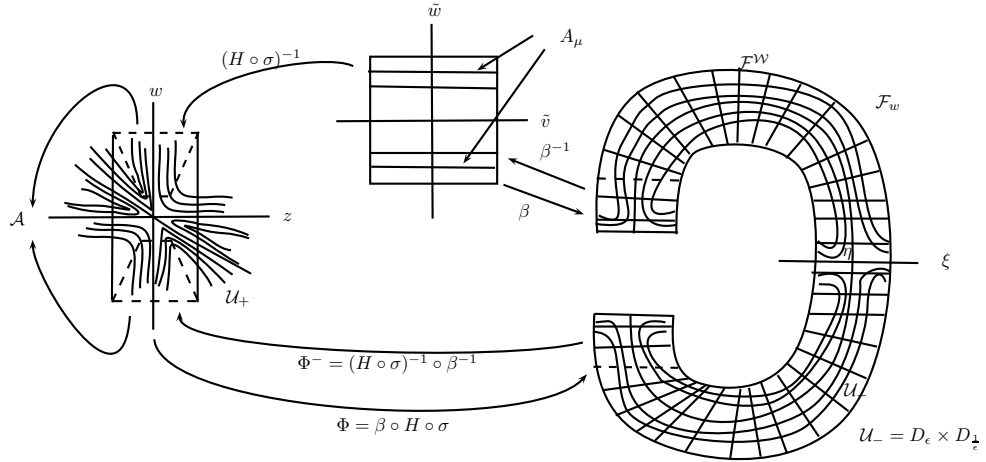


Figura 4.5: Extensión del campo V a la superficie compleja \mathcal{W} y las foliaciones $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ y \mathcal{F}_w

Denotamos por \mathcal{W} la variedad 2-dimensional compleja obtenida de los dominios \mathcal{U}_+ y \mathcal{U}_- y las funciones de transición $\Phi|_{\mathcal{A}}, \Phi^{-1}|_{\Phi(\mathcal{A})}$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_+$, $\Phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{U}_-$. La foliación \mathcal{F}_V y $\mathcal{F}_{V_{\lambda+1}}$ definidas por los campos vectoriales

V y $V_{\lambda+1}$ en \mathcal{U}_+ y \mathcal{U}_- respectivamente, definen una foliación global que denotaremos por $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ sobre \mathcal{W} . Dicha foliación tiene exactamente dos puntos singulares, que denotaremos por 0_+ y 0_- , que son los correspondientes puntos singulares de V y $V_{\lambda+1}$. Observemos que el disco $\{0\} \times D_\epsilon \subset \mathcal{U}_+$ está en correspondencia bajo Φ con el disco $\{0\} \times D_{\frac{1}{\epsilon}} \subset \mathcal{U}_-$ ($\eta = \frac{1}{w}$). Esto define una esfera de Riemann \mathbb{P} .

Junto con la foliación $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ consideramos la foliación \mathcal{F}_w definida por $\{w = cte\}$ ($\eta = cte \in \mathcal{U}_-$). Esta foliación define un haz lineal sobre \mathbb{P} a saber el haz normal de \mathbb{P} en \mathcal{W} . Para obtener información sobre cómo está encajada \mathbb{P} en \mathcal{W} es suficiente calcular el índice de Camacho-Sad para V en $(0, 0)$ con respecto a la separatriz \mathbb{P} , y sabemos que, el índice de Camacho-Sad de $V_{\lambda+1}$ en $(0, 0)$ con respecto a la separatriz $\{\xi = 0\}$ es $-(\lambda + 1)$, mientras que el de V_λ con respecto a $\{z = 0\}$ es $\lambda + 1$. Así por el índice de Camacho-Sad, el índice de auto-intesección de la esfera de Riemann \mathbb{P} es $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = (\lambda + 1) - (\lambda + 1) = 0$ y que coincide con el grado del haz normal de $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathcal{W}$.

Esto último nos permite aplicar el Teorema de Savelev tratado en el capítulo anterior, de la siguiente manera.

Por el Teorema de Savelev (Teorema 3.2), existe un biholomorfismo Ψ de una vecindad U de \mathbb{P} en \mathcal{W} al producto directo $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}$ y tal que $\Psi(\mathbb{P}) = \{0\} \times \mathbb{P}$. Reduciendo si es necesario los dominios U_+ y U_- podemos suponer que Ψ está definido en toda \mathcal{W} , es decir $\Psi : \mathcal{W} \rightarrow (\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}$.

Denotamos por \mathcal{F} la foliación inducida por $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}$ bajo la transformación Ψ , $\mathcal{F} := \Psi(\mathcal{F}^{\mathcal{W}})$. La foliación \mathcal{F} está definida en el producto directo $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}$ teniendo como puntos singulares los puntos $\Psi(0_+)$ y $\Psi(0_-)$. Dadas las cartas naturales en \mathcal{W} , t_+, t_- correspondientes a los dominios $\mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-$ respectivamente, es decir, $t_+ : t_+^{-1}(\mathcal{U}_+) \rightarrow \mathcal{U}_+, t_- : t_-^{-1}(\mathcal{U}_-) \rightarrow \mathcal{U}_-$, entonces en una vecindad de $\Psi(0_+)$ tenemos que la foliación \mathcal{F} es generada por el campo vectorial

$$V_+ := (\Psi \circ t_+^{-1})_* V.$$

Así mismo una vecindad del punto singular $\Psi(0_-)$ la foliación \mathcal{F} es generada por el campo vectorial

$$V_- := (\Psi \circ t_-^{-1})_* V.$$

De esta manera tenemos $V_+ = \widehat{z} \widehat{P}_+ \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} + Q_+ \frac{\partial}{\partial w}$, $V_- = \widehat{z} \widehat{P}_- \frac{\partial}{\partial \widehat{z}} + Q_- \frac{\partial}{\partial w}$ son generadores de la misma foliación \mathcal{F} de $\Psi(\mathcal{W})$, entonces para cada \widehat{z} fija

es posible extender el campo analíticamente sobre \mathbb{P} . Esto implica que el campo original es orbitalmente analíticamente equivalente a un campo que es polinomial en la variable w . Lo que finaliza la demostración del Teorema 4.2.

Bajo hipótesis adicionales sobre la genericidad de los campos es posible demostrar el siguiente teorema

Teorema 4.4 (Analiticidad de la forma normal formal para $n=2$). *Para cualquier germen genérico no dicrítico en \mathcal{V}_2 su forma normal orbital estricta V_f es analítica, donde*

$$V_f = (P_2 + z^3 B) \frac{\partial}{\partial z} + (Q_2 + wz^2 B) \frac{\partial}{\partial w}$$

con P_2 y Q_2 polinomios homogéneos de grado 2 y $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z)z^k$ es una serie de potencias formal.

Demostración. Por el Teorema 4.3 sabemos que V es orbitalmente analíticamente equivalente a un germen de la forma

$$z(\mathcal{P}_1(z, w) + z^2\beta(z)) \frac{\partial}{\partial z} + w(\mathcal{Q}_1(z, w) + z^2\beta(z)) \frac{\partial}{\partial w}$$

donde $\mathcal{P}_1(z, w) = wa_0 + b_1z$, $\mathcal{Q}_1(z, w) = w + d_1z$, y $\beta(z)$ es un función holomorfa en una vecindad del origen. Notemos que siempre es posible definir una transformación lineal

$$L : (z, w) \mapsto (\alpha_0z, \alpha_1z + \alpha_2w)$$

tal que para constantes apropiadas a_0, b_1, d_1 ,

$$V_{an} = z(wa_0 + b_1z + z^2\beta(z)) \frac{\partial}{\partial z} + w(w + d_1z + z^2\beta(z)) \frac{\partial}{\partial w}$$

es linealmente equivalente a

$$W = (P_2 + zB) \frac{\partial}{\partial z} + (Q_2 + wB) \frac{\partial}{\partial w}$$

donde los componentes P_2 y Q_2 son polinomios homogéneos de grado 2, $P_2(0, w) = 0$, el grado de Q_2 respecto w es 2 y $B(z) = z^2b(z)$. La equivalencia entre V y W es estricta (orbital y analítica). Entonces por la unicidad de la equivalencia formal bajo equivalencia estricta orbital, la forma normal de V, V_f , y W deben coincidir. Así $B(z)$ es analítica y entonces V_f también lo es. \square

Apéndice A

Variedades diferenciables y superficies de Riemann

DEFINICIÓN A.1. *Un espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n real si satisface las siguientes propiedades:*

- 1). *M es un espacio Hausdorff, es decir, $\forall p, q \in M$, existen subconjuntos abiertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ y $q \in V$.*
- 2). *Hay una base numerable para la topología de M .*
- 3). *M puede ser cubierta con una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que para cada U_α existe una función $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de \mathbb{R}^n y φ_α es un homeomorfismo sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.*

Si en la definición anterior consideramos \mathbb{C}^n en lugar de \mathbb{R}^n decimos que M es una variedad de dimensión n compleja.

La pareja $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ es llamada carta coordenada o sistema de coordenadas con dominio U_α . Al conjunto de cartas $\Sigma = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ se le conoce como atlas para la variedad.

Si los dominios U_α y U_β tienen intersección no vacía $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es llamada la función de transición (o de pegado) de la carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ en la carta (φ_β, U_β) .

DEFINICIÓN A.2. *Decimos que una variedad topológica admite una estructura diferenciable si existe un atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ para el cual todas las funciones*

de transición son difeomorfismos locales. En este caso decimos que M es una variedad diferenciable y $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ es un atlas diferenciable.

Si en la definición anterior cambiamos difeomorfismos por biholomorfismos locales, en ese caso decimos que M es una variedad holomorfa y $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ un atlas holomorfo.

Dos cartas $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta)$ se dice que son compatibles si el mapeo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo. Equivalentemente se dice que $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta)$ son holomorfamente compatibles si el mapeo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un biholomorfismo.

DEFINICIÓN A.3. *Dos atlas Σ y Σ' diferenciables son equivalentes si toda carta de Σ es compatible con toda carta de Σ' . Análogamente decimos que dos atlas Σ y Σ' holomorfos son analíticamente equivalentes si toda carta de Σ es holomorfamente compatible con toda carta de Σ' .*

Una variedad M con atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ puede ser reconstruida a partir de los abiertos $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n como lo muestra el siguiente lema:

Lema A.1. *Sea M un conjunto, supongamos que $\{U_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos de M , y $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo inyectivo tal que satisface las siguientes propiedades:*

- 1). *Para toda α , $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .*
- 2). *Para todo α y β , $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en \mathbb{R}^n .*
- 3). *Siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo.*
- 4). *Una cantidad de conjuntos numerables U_α cubren a M .*
- 5). *Para todo $p, q \in M$ distintos, existen subconjuntos disjuntos U_α y U_β tal que $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.*

En otras palabras para definir la variedad sólo es necesario dar los abiertos y las funciones de transición.

Un caso particular de variedades que juegan un papel fundamental en este trabajo son las variedades holomorfas de dimensión 1 compleja o dimensión 2 real, dichas variedades son conocidas como superficies de Riemann.

DEFINICIÓN A.4. Una superficie de Riemann es un par (M, Σ) donde M es una variedad 1 dimensional compleja, conexa y Σ una estructura compleja sobre M .

Una de las ventajas de las superficies de Riemann es que al tener localmente la estructura de \mathbb{C} , podemos aplicar resultados de variable compleja en una variable.

En el caso de las superficies de Riemann éstas no son más que abiertos de \mathbb{C} identificados con biholomorfismos; por esta razón podemos aplicar las nociones de variable compleja en el plano (las cuales son invariantes bajo biholomorfismos).

Ejemplos:

- 1). El plano complejo, tiene una estructura definida por el atlas cuya única carta es el mapeo identidad $Id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- 2). Dominios. Supongamos que M es una superficie de Riemann y $N \subset M$ es un dominio, es decir, un subconjunto abierto conexo. Entonces N tiene una estructura la cual la hace superficie de Riemann; dicha estructura está dada considerando como su atlas todas las cartas coordenadas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre M , donde $U_\alpha \subset N$. En particular, todo dominio de $B \subset \mathbb{C}$ es una superficie de Riemann.
- 3). La esfera de Riemann \mathbb{P} . Sea $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, introducimos la siguiente topología en \mathbb{P} . Los conjuntos abiertos son los conjuntos $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que U es un abierto de \mathbb{C} y los conjuntos de la forma $V \cup \{\infty\}$ donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con esta topología \mathbb{P} es un espacio Hausdorff pues los conjuntos $V \cup \{\infty\}$ permiten la condición de Hausdorff para $\{\infty\}$. Con esta topología \mathbb{P} es homeomorfo a la 2-esfera mediante la proyección estereográfica.

Consideremos ahora los abiertos $U_1 = \mathbb{P} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ y $U_2 = \mathbb{P} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Definimos $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ como $\varphi_1(z) = z$ y

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{si } z \in \mathbb{C}^*; \\ 0, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Claramente estos mapeos son homeomorfismos y así \mathbb{P} es una variedad 2-dimensional real. Dado que U_1 y U_2 son conexos y tienen intersección no vacía \mathbb{P} es conexo. La estructura compleja sobre \mathbb{P} es definida por

el atlas consistente de las cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, 2$. Veamos que las 2 cartas son holomorficamente compatibles. $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$, $\varphi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$ y $\varphi_2(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$ entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z$ que es un biholomorfismo en \mathbb{C}^* .

Por lo tanto \mathbb{P} tiene estructura compleja 2 dimensional real, así \mathbb{P} es una superficie de Riemann.

Sea M una variedad de dimensión n real con atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ y sea $p \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$ con $\varphi_\alpha(p) = q \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Consideremos una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ tal que $\gamma(0) = q$. Definamos la curva $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$ como $\tilde{\gamma} := \varphi_\alpha^{-1} \circ \gamma$. Notemos que $\tilde{\gamma}(0) = \varphi_\alpha^{-1}(\gamma(0)) = \varphi_\alpha^{-1}(q) = p$ y $\tilde{\gamma}'(0) = D_q \varphi_\alpha^{-1}(\gamma'(0))$ es un vector tangente a M en el punto p .

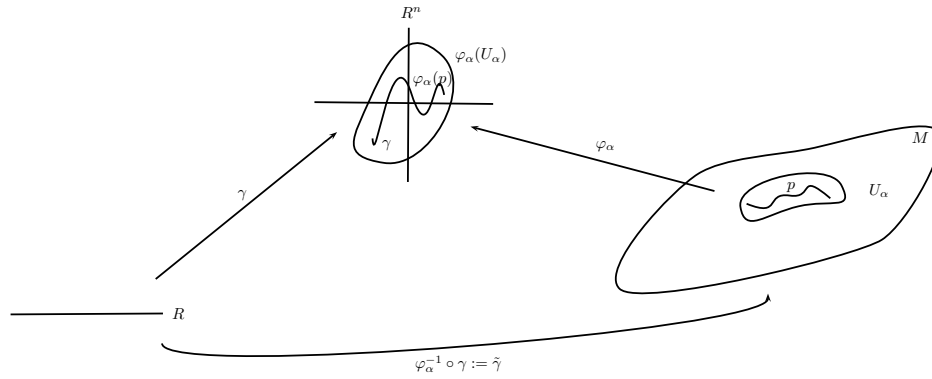


Figura A.1: curva en M

DEFINICIÓN A.5. Decimos que dos curvas diferenciables $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son equivalentes en un punto $q \in \mathbb{R}^n$ si $\beta(0) = \gamma(0) = q$ y $\beta'(0) = \gamma'(0)$.

Es fácil demostrar que ésta es una relación de equivalencia. Bajo algunas modificaciones esta última definición permite definir equivalencias de curvas en una variedad M .

DEFINICIÓN A.6. Decimos que dos curvas diferenciables $\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ son equivalentes en un punto $p \in M$ si sus imágenes bajo una carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ que contiene a p son equivalentes en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

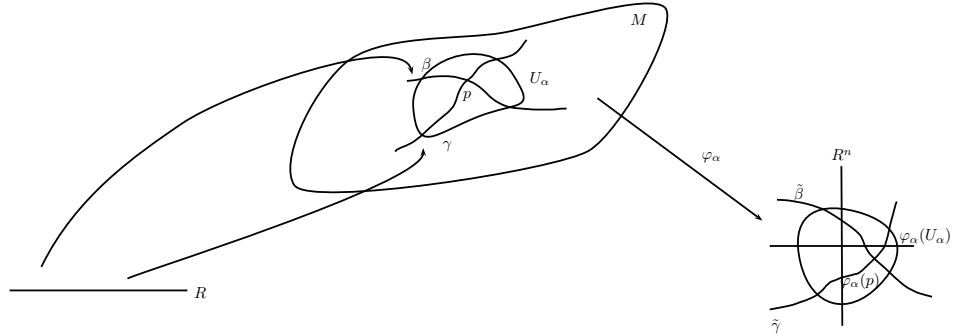
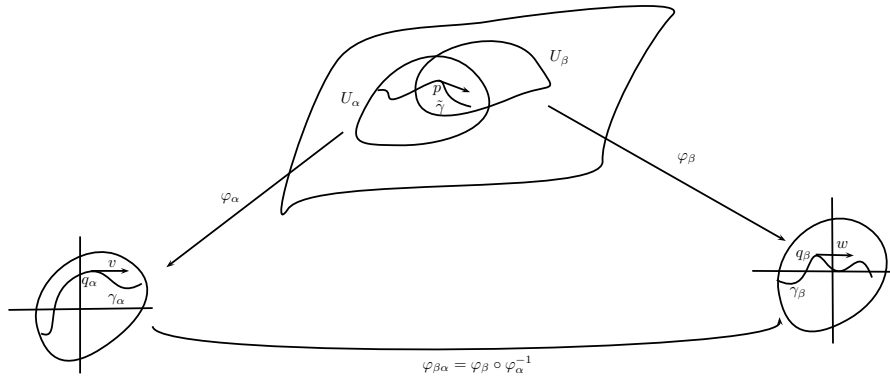


Figura A.2: Equivalencia de curvas en M

El problema de esta última definición es que no es claro que la equivalencia de las curvas no dependa del sistema de coordenadas elegido. Veamos que relación existe entre las curvas bajo dos cartas distintas que la contengan.

Supongamos que $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, denotemos $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Sean $q_\alpha = \varphi_\alpha(p)$ y $q_\beta = \varphi_\beta(p)$, $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha(\tilde{\gamma})$ y $\gamma_\beta = \varphi_\beta(\tilde{\gamma})$. Como $\tilde{\gamma}(0) = p$ entonces $\gamma_\alpha(0) = \varphi_\alpha(\tilde{\gamma}(0)) = \varphi_\alpha(p) = q_\alpha$ y $\gamma_\beta(0) = \varphi_\beta(\tilde{\gamma}(0)) = \varphi_\beta(p) = q_\beta$. Sea $v = \gamma'_\alpha(0)$ y $w = \gamma'_\beta(0)$, recordemos que de acuerdo a la definición A.5 un punto y un vector definen una clase de equivalencia. Así, tenemos las clases de equivalencia $(q_\alpha, v) = [\gamma_\alpha]$ y $(q_\beta, w) = [\gamma_\beta]$. Observemos que $\gamma_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(\gamma_\alpha)$, de donde obtenemos que $\gamma'_\beta(0) = D_{q_\alpha} \varphi_{\beta\alpha}(\gamma(0)) \gamma'_\alpha(0)$. Así $w = D_{q_\alpha} \varphi_{\beta\alpha}(q_\alpha)v$.



Entonces decimos que

$$(q_\alpha, v) \sim (q_\beta, w) \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi_{\beta\alpha}(q_\alpha) = q_\beta \quad \text{y} \quad D_{q_\alpha}\varphi_{\beta\alpha}(q_\alpha)v = w. \quad (\text{A.1})$$

Con esta última relación es posible asegurar que si dos curvas contenidas en dos cartas son equivalentes en una carta también lo son en la otra. Esto permite definir

DEFINICIÓN A.7. *El espacio tangente de M en el punto p , que denotamos por T_pM es el conjunto de clases de equivalencia de curvas diferenciables en M que pasan por el punto p*

$$T_pM = \{[\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M : \tilde{\gamma}(0) = p]\}$$

Notemos que T_pM también puede ser definido como el conjunto de clases de equivalencia de curvas diferenciables en \mathbb{R}^n tal que pasan por $\varphi_\alpha(p)$ para cada carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ que contiene a p y tal que donde se intersecten las cartas se satisfaga la relación (A.1). Bajo esta observación el espacio tangente en cualquier punto a M es isomorfo a \mathbb{R}^n , donde el isomorfismo está dado por $D\varphi_\alpha$. De manera equivalente se define el espacio tangente para una variedad holomorfa con la respectiva modificación de que T_pM es isomorfo a \mathbb{C}^n

DEFINICIÓN A.8. *El haz tangente de una variedad diferenciable M , es unión de todos sus espacios tangentes*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

La misma definición se da para una variedad holomorfa.

DEFINICIÓN A.9. *Decimos M que es una variedad de clase C^k si sus transformaciones de transición son de clase C^k . De manera equivalente se dice que M es una variedad holomorfa si sus transformaciones de transición lo son.*

Notemos que las funciones de pegado en TM están dadas por la relación de equivalencia \sim , es decir, mediante $\varphi_{\beta\alpha}$ y $D\varphi_{\beta\alpha}$. Esto último implica que si M es de clase C^k , entonces $\varphi_{\beta\alpha}$ es de clase C^k y $D\varphi_{\beta\alpha}$ es de clase C^{k-1} , por lo que TM es una variedad de clase C^{k-1} . En el caso de que $\varphi_{\beta\alpha}$ y $D\varphi_{\beta\alpha}$ sean holomorfas TM también es una variedad holomorfa.

DEFINICIÓN A.10. Sea M una variedad de dimensión m real con atlas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ y N una variedad de dimensión n real con atlas (ψ_β, U_β) , ambas de clase C^k . Una transformación $f : M \rightarrow N$ se dice que es diferenciable de clase C^k en $p \in M$ si para toda carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ de M que contenga a p , y (ψ_β, V_β) que contenga a $f(p)$ se tiene que $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ es de clase C^k en el sentido usual de espacios euclidianos. Decimos que una transformación f es diferenciable en M si lo es en todos sus puntos. En notación $f \in C^\infty(M)$.

Si consideramos variedades holomorfas M y N con respectivos atlas holomorfos $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$, (ψ_β, U_β) , decimos que una función $f : M \rightarrow N$ es holomorfa en $p \in M$ si para toda carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ de M que contenga a p , y (ψ_β, V_β) que contenga a $f(p)$ se tiene que $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ es de clase holomorfa en el sentido usual de espacios euclidianos. Decimos que una transformación f es holomorfa en M si lo es en todos sus puntos. En notación decimos que $f \in \mathcal{O}(M)$.

DEFINICIÓN A.11. Decimos que una cubierta $\{U_\alpha\}$ es localmente finita, para todo punto de M , hay una vecindad abierta U tal que $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para un número finito de U_α .

Una cubierta $\{V_\beta\}$ es llamada un refinamiento de $\{U_\alpha\}$ si para cualquier V_β , existe un U_α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$. Recordemos que un espacio topológico es compacto si cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento finito. Una condición un poco más débil es la de paracompacidad, decimos que M es paracompacta si hay una cubierta abierta de M que tiene un refinamiento localmente finito. La siguiente proposición muestra que todas las variedades son paracompactas.

Proposición A.1. Sea M un variedad topológica. Entonces para cualquier cubierta abierta de M hay un refinamiento abierto localmente finito numerable $\{V_i; i = 1, 2, \dots\}$ con la propiedad de que $\forall i, \overline{V_i}$ es compacto. En particular M es paracompacta.

DEFINICIÓN A.12. Sea X un espacio topológico y una función continua real o complejo valuada $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, definimos el soporte de f como:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$$

DEFINICIÓN A.13. Sea M una variedad de clase C^∞ . Una familia de funciones $C^\infty(M)$, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con A un conjunto de índices a lo mas numerable

es llamada una partición de la unidad sobre M si satisface las siguientes tres condiciones:

- 1). $0 \leq f_\alpha(p) \leq 1$, para toda $\alpha \in A$ y $p \in M$.
- 2). $\{\text{sop } f_\alpha\}$ es localmente finito.
- 3). $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M$.

Mas aún si el $\{\text{sop } f_\alpha\}$ es un refinamiento de una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$, la partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se dice que es subordinada a la cubierta abierta $\{U_\alpha\}$

Teorema A.1. Sea M una variedad de clase C^∞ y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M . Entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$.

Observemos que este teorema es válido para variedades holomorfas pues en particular las variedades holomorfas son variedades de clase C^∞ .

Corolario A.1. Supongamos que M es una variedad diferenciable, K un subconjunto compacto de M y U es una vecindad abierta de K . Entonces existe una función diferenciable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tal que $\text{sop } f \subseteq U$ y $f|_K = 1$

Pasamos a definir otro concepto importante dentro de este trabajo, las 1-formas diferenciales.

DEFINICIÓN A.14. Una 1-forma ω en un espacio vectorial V sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} es una función lineal de V en \mathbb{R} o \mathbb{C} , es decir $\omega \in V^*$ (donde V^* denota como es usual el dual de V)

Consideremos $V = \mathbb{R}^n$ un ejemplo de 1-formas son las funciones coordenadas

$$x_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{como} \quad x_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$$

DEFINICIÓN A.15. Sea M una variedad diferenciable. Una 1-forma diferencial en TM es una transformación diferenciable de TM en \mathbb{R} como sigue

$$\omega : TM \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{como} \quad (p, v) \mapsto \omega_p(v)$$

tal que es lineal en cada T_pM es decir $\omega_p \in (T_pM)^*$

Ejemplo A.1. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, con $M = \mathbb{R}^n$ entonces la diferencial de f es una función $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto $p \in M$ es una función lineal de T_pM en \mathbb{R} definida como sigue:
 Sea $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ una curva tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ la diferencial de f en el punto p aplicada a v es

$$\begin{aligned} d_p f(v) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \frac{dx_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \frac{dx_n(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) v_n \\ &= \nabla_p f \cdot v \end{aligned}$$

Por otro lado la diferencial de x_k donde $x_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$ es

$$d_p x_k(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial x_i}(p) v_i,$$

y dado que

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

entonces $d_p x_k(v) = v_k$. De este modo toda 1-forma diferencial en \mathbb{R}^n se puede escribir como

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n f_i(p) d_p x_i \tag{A.2}$$

con $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable donde U es un abierto.

DEFINICIÓN A.16. Definimos el haz cotangente como $(TM)^* = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$

Observemos que $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal y por lo tanto es un elemento del cotangente de M . El ejemplo 9 muestra que es posible expresar cualquier 1-forma diferencial en un abierto U de \mathbb{R}^n mediante la ecuación (A.2). Como dicha expresión es sencilla de trabajar sería conveniente que cualquier 1-forma diferencial sobre una variedad M pudiese ser expresada con una ecuación equivalente en un abierto de \mathbb{R}^n mediante las cartas coordenadas. Este objeto es conocido como el pullback de la 1-forma y consiste en lo siguiente:

Sea M variedad diferenciable con atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ y $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$ una 1-forma diferencial. Consideramos $p \in M$ y U_α una carta que contiene p con $\varphi_\alpha(p) = q$ entonces definimos el pullback de ω como

$$\varphi_\alpha^* \omega_q(v) = \omega_{\varphi_\alpha^{-1}(q)}(D\varphi_\alpha^{-1}(v))$$

donde $v \in \mathbb{R}^n$ y $D\varphi_\alpha^{-1}(v) = \tilde{v} \in T_pM$. Así $\varphi_\alpha^*\omega$ es una 1-forma definida en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de \mathbb{R}^n y con esto es posible expresar localmente la 1-forma ω desde un abierto de \mathbb{R}^n como la ecuación (A.2). Todo lo anterior funciona exactamente igual si en lugar de \mathbb{R}^n consideramos \mathbb{C}^n .

Supongamos que U es un abierto de una superficie de Riemann, sea $a \in U$ y ω una 1-forma holomorfa sobre $U \setminus \{a\}$. Sea $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ una carta tal que $U_\alpha \subset U$ y $\varphi_\alpha(a) = 0$. Entonces sobre $U \setminus \{a\}$ podemos escribir la 1-forma como

$$\omega_a = f_a dz$$

donde $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ y $\omega_a = \varphi_\alpha^*\omega$.

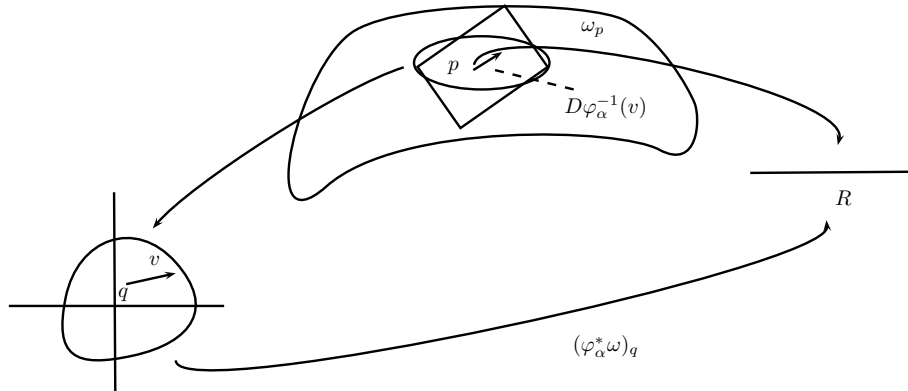


Figura A.3: Pullback de ω

Sea

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

la expansión en serie de Laurent de f alrededor de a con respecto a la coordenada φ_α . Observemos los casos:

- 1). Si $c_n = 0 \forall n < 0$, entonces ω puede ser continuada holomorfa a todo U . En este caso a es llamada singularidad removible de ω .
- 2). Si existe un $k < 0$ tal que $c_k \neq 0$ y $c_n = 0 \forall n < k$, entonces ω tiene un polo de orden k en a .

- 3). Si hay una infinidad de términos $c_n \neq 0$ con $n < 0$ entonces ω tiene una singularidad esencial en a .

El coeficiente c_{-1} es llamado el residuo de ω en a y es denotado por

$$c_{-1} = \text{Res}_a \omega$$

El siguiente lema muestra que esta definición tiene sentido

Lema A.2. *El residuo es independiente de la elección de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.*

Demostración. Primero veamos que el pullback también se aplica para funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

Sea $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$

$$\varphi_\alpha^* g(p) = g(\varphi_\alpha^{-1}(p)).$$

Denotamos por $g_\alpha = \varphi_\alpha^* g$. Así el residuo de g es el residuo de su pullback en el punto correspondiente.

Sea V una vecindad abierta de a , demostraremos dos afirmaciones:

- 1). Si g es holomorfa sobre $V \setminus \{a\}$ entonces el residuo de dg en a es igual a cero y así independiente de la elección de la carta.

Para probar esta afirmación consideremos una vecindad coordinada $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ de a tal que $\varphi_\alpha(a) = 0$. Entonces g_α es holomorfa en una vecindad $\tilde{U} \setminus \{0\}$ podemos suponer que

$$g_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

es la expansión en serie de Laurent g bajo lo coordenada $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$. Entonces

$$dg_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1} dz$$

y así el coeficiente de $z^{-1} dz$ es igual a cero y este no dependió del sistema coordinado.

- 2). Si h es una función holomorfa sobre V la cual tiene un cero de orden 1 en a , entonces $\text{Res}_a(h^{-1} dh) = 1$ y es independiente de la elección de la carta.

Supongamos que $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ es una carta tal que $\varphi_\alpha(a) = 0$. Entonces

bajo esta carta coordenada h se escribe como $h_\alpha = z\tilde{h}$ donde \tilde{h} es holomorfa en 0 y $\tilde{h}(0) \neq 0$. Lo anterior implica que $dh_\alpha = \tilde{h}dz + zd\tilde{h}$ y

$$\frac{dh_\alpha}{h_\alpha} = \frac{h_\alpha dz + z dh_\alpha}{zh_\alpha} = \frac{dz}{z} + \frac{dh_\alpha}{h_\alpha}.$$

Dado que $h_\alpha(0) \neq 0$ la 1-forma $h^{-1}dh$ es holomorfa en 0 y por lo tanto su residuo es 0. Esto implica que

$$Res_0 \frac{dh_\alpha}{h_\alpha} = Res_0 \frac{dz}{z} = 1$$

y así como pudo verse no depende de la elección de la carta coordenada.

Ahora pasemos a la demostración del lema A.2:

Sea $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha(a) = 0$ entonces ω mediante el pullback puede escribirse como $\omega_\alpha = f dz$ donde

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Sea

$$g = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

notemos que g es holomorfa en $\varphi_\alpha(U_\alpha) \setminus \{0\}$. Entonces bajo esta carta $\omega_\alpha = dg + c_{-1}z^{-1}dz$.

Calculando el residuo de ω_α se tiene que

$$Res_0(\omega_\alpha) = Res_0(dg) + Res_0(c_{-1}z^{-1}dz) = c_{-1}$$

pues de (1) y (2) sabemos que $Res_0(dg) = 0$ y $Res_0(z^{-1}dz) = 1$, los cuales son independientes de la elección de la carta. Así c_{-1} no depende de la elección de la carta. \square

DEFINICIÓN A.17. Una 1-forma ω sobre un subconjunto abierto U de una superficie de Riemann se dice que es una 1-forma diferencial meromorfa sobre U si hay un subconjunto abierto $\tilde{U} \subset U$ tal que las siguientes afirmaciones se satisfacen:

- 1). ω es una 1-forma holomorfa sobre \tilde{U} ,

- 2). $U \setminus \tilde{U}$ consiste solo de puntos aislados,
- 3). ω tiene un polo en todo punto $a \in U \setminus \tilde{U}$.

Nuestro objetivo es demostrar el teorema del residuo a superficies de Riemann compactas

DEFINICIÓN A.18. *Supongamos que V es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann M . Una 1-forma ω sobre U es llamada diferenciable si, con respecto a cualquier carta (U, z) , ω puede ser escrita como*

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \quad \text{sobre } U \cap V, \quad \text{donde } f, g \in C^\infty(U \cap V).$$

Además, decimos que ω es holomorfa si respecto a cualquier carta (U, z) , ω puede escribirse como

$$\omega = f dz \quad \text{sobre } U \cap V, \quad \text{donde } f \in \mathcal{O}(U \cap V).$$

DEFINICIÓN A.19. *Supongamos que U es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann M . Una 1-forma diferenciable ω es cerrada si $d\omega = 0$ y es exacta si existe una función $f \in C^\infty(U)$ tal que $\omega = df$*

Proposición A.2. *Supongamos que V es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann. Entonces toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Lambda(V)$ es cerrada.*

Demostración. Supongamos que ω es una 1-forma holomorfa, entonces con respecto a una vecindad coordenada (U_k, z_k) podemos expresar a ω como $\omega_k = f_k dz$ con $f_k \in \mathcal{O}(U_k)$. Entonces

$$d\omega = df_k \wedge dz = \left(\frac{\partial f_k}{\partial z} dz + \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f_k}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

pero $dz \wedge dz = 0$ y $\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}} = 0$ pues f_k es holomorfa. Así $d\omega = 0$. □

Si además ω esta definida sobre una superficie de Riemann, entonces es posible escribir a ω como $\omega = f dz$ donde f es un función holomorfa. Si la superficie es simplemente conexa entonces por el Teorema de Cauchy f tiene primitiva y entonces ω es exacta.

Pasamos a enunciar caso particular del teorema de Stokes

Teorema A.2 (Stokes). *Sea M una variedad de clase C^∞ orientable de dimensión 2 y sea ω una 1-forma sobre M con soporte compacto. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Observemos que este teorema es aplicable a superficies de Riemann pues éstas en particular son variedades de clase C^∞ y orientables pues los cambios de coordenadas son transformaciones conformes. Ahora supongamos que ω es una 1-forma holomorfa con soporte compacto sobre M donde M es una superficie de Riemann. Entonces hay un número finito de cartas $\varphi_k : U_k \rightarrow V_k, k = 1, \dots, n$ tal que

$$\text{sop } \omega \subset \cup_{k=1}^n U_k.$$

Observando esto es posible construir un número finito de funciones diferenciables $f_k \in C^\infty(M)$ con las siguientes propiedades:

- 1). $\text{sop } f_k \subset U_k,$
- 2). $\sum_{k=1}^n f_k(p) = 1$ para toda $p \in \text{sop } \omega.$

Entonces $\omega_k = f_k \omega$ es una forma diferencial con $\text{sop } f_k \omega \Subset U$ y

$$\omega = \sum_{k=1}^n f_k \omega \tag{A.3}$$

Para construir dichas funciones utilizamos el corolario A.1 de la siguiente manera:

Sea U_k un abierto y sea $K = \{p\}$ con $p \in U_k$. Notemos que K es compacto entonces, por el corolario A.1, existe $\tilde{f}_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{sop } \tilde{f}_k \Subset U_k$ y $\tilde{f}_k(p) = 1$ así consideramos para $k = 1, \dots, n$ las \tilde{f}_k .

Por la forma en que hemos definido las funciones \tilde{f}_k , éstas satisfacen (1) pero no necesariamente se cumple $\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k = 1$ para toda $p \in \text{sop } \omega$. Definamos las funciones f_k como $f_k = \frac{\tilde{f}_k}{\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k}$.

Notemos que $\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k(p) \neq 0$ para toda $p \in \text{sop } \omega$, de lo contrario, si existiera $p \in \text{sop } \omega$ tal que $\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k(p) = 0$, dado que $0 \leq \tilde{f}_k(p) \leq 1$, entonces $\tilde{f}_k(p) = 0$ para toda $k = 1, \dots, n$ esto implicaría que $p \in (U_k)^c$ para toda $k = 1, \dots, n$, lo cual es una contradicción pues $p \in \text{sop } \omega \subset \cup_{k=1}^n U_k$. De esta manera las f_k 's están bien definidas, se satisface $\text{sop } f_k = \text{sop } \tilde{f}_k$ y

$$\sum_{k=1}^n f_k = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k}{\sum_{k=1}^n \tilde{f}_k} = 1.$$

Teorema A.3. *Supongamos que M es una superficie de Riemann y ω una 1-forma diferencial sobre M con soporte compacto. Entonces*

$$\int_M d\omega = 0$$

Demostración. Como ω tiene soporte compacto por (A.3) tenemos que

$$\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

donde cada ω_k es una 1-forma diferencial con soporte compacto contenido en U_k donde (U_k, φ_k) es una carta coordenada de M . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $M = \mathbb{C}$. Sea $R > 0$ y tal que $\text{sop } \omega \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ entonces

$$\int_M d\omega = \int_{|z| < R} d\omega$$

Aplicando el teorema de Stokes obtenemos

$$\int_{|z| < R} d\omega = \int_{|z|=R} \omega$$

como $\text{sop } \omega \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ entonces tenemos que

$$\int_{|z| < R} d\omega = \int_{|z|=R} \omega = \int_{|z|=R} 0 = 0$$

como se quería probar. □

Teorema A.4 (Teorema del Residuo). *Sea M una superficie de Riemann compacta y a_1, \dots, a_n distintos puntos en M . Sea $M' = M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces para toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Lambda(M')$ se satisface*

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k} \omega = 0$$

Demostración. Elegimos cartas coordenadas (φ_k, U_k) tal que $U_j \cap U_k = \emptyset$ si $j \neq k$. También suponemos que $\varphi_k(a_k) = 0$ y $\varphi_k(U_k) \subset \mathbb{C}$ es un disco unitario centrado en el origen.

Para toda $k = 1, \dots, n$ elegimos una función f_k con soporte compacto $\text{sop } f_k \subset U_k$ tal que hay una vecindad abierta $\tilde{U}_k \subset U_k$ de a_k con la propiedad de que $f_k|_{U_k} = 1$. Definimos $g = 1 - (f_1 + \cdots + f_n)$. Entonces $g|_{\tilde{U}_k} = 0$ ya que $f_k|_{\tilde{U}_k} = 1$ y $f_j|_{\tilde{U}_k} = 0$ para $k \neq j$. De esta manera es posible extender diferenciablemente a $g\omega$ en el punto a_k asignando el valor 0. Así $g\omega$ es una 1-forma diferenciable en M .

Por el teorema A.3

$$\int_M d(g\omega) = 0 \tag{A.4}$$

Dado que ω es holomorfa sobre M' , $d\omega = 0$. Además sobre $\tilde{U}_k \cap M'$ tenemos que $f_k\omega = \omega$ pues $f_k|_{\tilde{U}_k} = 1$ y así $d(f_k\omega) = 0$. De esta manera también es posible extender diferenciablemente a $d(f_k\omega)$ en el punto a_k asignando el valor 0. Calculando $d(g\omega)$ se tiene que

$$d(g\omega) = d(\omega - \omega(f_1 + \cdots + f_n)) = d\omega - d(\omega(f_1 + \cdots + f_n))$$

; entonces, por (A.4), obtenemos

$$0 = \int_M d(g\omega) = - \int_M \sum_{k=1}^n d(f_k\omega) = - \sum_{k=1}^n \int_M d(f_k\omega). \quad (\text{A.5})$$

Para completar la demostración tenemos que mostrar

$$\int_M d(f_k\omega) = -2\pi i \text{Res}_{a_k}\omega.$$

Dado que el $\text{sop } d(f_k\omega) \subset U_k$, basta integrar sólo sobre U_k (recordemos que pedimos que $\varphi_k(U_k)$ fuera un disco unitario). Podemos suponer también que $\varphi_k(\tilde{U}_k)$ es un disco centrado en el origen de radio $0 < \epsilon < 1$. Así al considerar el pullback tenemos que

$$\varphi_k^* f_k|_{\{|z_k| < \epsilon\}} = 1.$$

Sea $R > 0$ tal que $\text{sop } f_k \subset \{|z_k| < R\}$, entonces

$$\int_M d(f_k\omega) = \int_{U_k} d(f_k\omega) = \int_{\epsilon \leq |z_k| \leq R} \varphi_k^* d(f_k\omega). \quad (\text{A.6})$$

Esta última igualdad se da pues $d(f_k\omega) = 0$ en \tilde{U}_k , así su pullback $\varphi_k^* d(f_k\omega)$ se anula en $\{|z_k| < \epsilon\}$.

Aplicando el Teorema de Stokes

$$\int_{\epsilon \leq |z_k| \leq R} \varphi_k^* d(f_k\omega) = \int_{|z_k|=R} \varphi_k^*(f_k\omega) - \int_{|z_k|=\epsilon} \varphi_k^*(f_k\omega),$$

pero $\int_{|z_k|=R} \varphi_k^*(f_k\omega) = 0$ ya que el $\text{sop } \varphi_k(f_k\omega) \subset \{|z_k| < R\}$ y además

$$\int_{|z_k|=\epsilon} \varphi_k^*(f_k\omega) = \int_{|z_k|=\epsilon} \varphi_k^*\omega.$$

Así

$$\int_M d(f_k\omega) = - \int_{|z_k|=\epsilon} \varphi_k^*\omega.$$

Observamos que la última integral es la expresión del residuo de una función de variable compleja multiplicada por $2\pi i$, es decir,

$$-\int_{|z_k|=\epsilon} \varphi_k^* \omega = -2\pi i \operatorname{Res}_0 \varphi_k^* \omega.$$

Por la definición del residuo, tenemos que $\operatorname{Res}_0 \varphi_k^* \omega = \operatorname{Res}_{a_k} \omega$.

Finalmente sustituyendo en A.5 obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{a_k} \omega = 0$$

□

Nuestro objetivo en esta parte del apéndice es demostrar que toda superficie de Riemann es una variedad de Stein. Recordemos la definición de variedad de Stein

DEFINICIÓN A.20. *Una variedad compleja X de dimensión compleja n es una variedad de Stein si:*

- 1). *Para todo $p, q \in X$, $p \neq q$ existe una función holomorfa en X tal que $f(p) \neq f(q)$.*
- 2). *Para toda sucesión discreta de puntos $\{p_j\} \subseteq X$ existe una función holomorfa g en X tal que $\{p_j\}$ son polos de g .*

DEFINICIÓN A.21 (Divisores). *Sea M una superficie de Riemann. Un divisor sobre M es una función $D : M \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que para cualquier subconjunto compacto $K \subset M$ hay sólo un número finito de puntos $x \in K$ tal que $D(x) \neq 0$.*

Con respecto a la suma el conjunto de divisores es un grupo abeliano el cual denotamos por $\operatorname{Div}(M)$. Además tenemos orden parcial en $\operatorname{Div}(M)$, para $D, D' \in \operatorname{Div}(M)$, $D \leq D'$ si $D(x) \leq D'(x)$ para toda $x \in M$.

Supongamos que M es una superficie de Riemann y U un subconjunto abierto de M . Para una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(M)$ y $a \in U$ definimos el orden de f en a como:

$$\operatorname{ord}_a(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ es holomorfa y no cero en } a, \\ k, & \text{si } f \text{ tiene un cero de orden } k \text{ en } a, \\ -k, & \text{si } f \text{ tiene un polo de orden } k \text{ en } a, \\ \infty, & \text{si } f \text{ es idénticamente cero en una vecindad de } a. \end{cases}$$

Así para cualquier función meromorfa $f \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$ la función $x \mapsto ord_x(f)$ es un divisor sobre M , éste es llamado el divisor de f y es denotado por (f) .

Para una 1-forma meromorfa $\omega \in \Lambda^1(U)$ podemos definir su orden en un punto $a \in U$ como sigue:

Elegimos una carta coordenada (φ, \tilde{U}) de a . Sobre $U \cap \tilde{U}$ podemos escribir a ω como $\omega = f dz$, con f una función meromorfa. Definimos $ord_a \omega = ord_a(f)$. Es posible observar que el orden es independiente de la elección de la carta. Para 1-formas meromorfas $\omega \in \Lambda^1(M) \setminus \{0\}$ la función $x \mapsto ord_x(\omega)$ es de nuevo un divisor sobre M denotado por (ω) .

Para $f, g \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$ y $\omega \in \Lambda^1(M) \setminus \{0\}$ se satisfacen las relaciones

$$(fg) = (f) + (g), \quad (1/f) = -(f), \quad (f\omega) = (f) + (\omega).$$

Un divisor $D \in Div(M)$ es llamado un divisor principal si hay una función $f \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$ tal que $D = (f)$. Dos divisores $D, D' \in Div(M)$ se dice que son equivalentes si su diferencia $D - D'$ es un divisor principal. Una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(M)$ se dice que es una solución de D si $(f) = D$.

Introducimos a continuación la noción de solución débil.

Sea $M_D := \{x \in M : D(x) \geq 0\}$. Por una solución débil entendemos una función $f \in C^\infty(M_D)$ con la siguiente propiedad, para todo punto $a \in M$ hay una vecindad coordenada (φ, U) tal que $\varphi(a) = 0$ y una función $\psi \in C^\infty(U)$ con $\psi(a) \neq 0$, tal que

$$f = \psi z^k \quad \text{sobre } U \cap M_D, \quad \text{donde } k = D(a).$$

Por una 1-cadena sobre una superficie de Riemann M entendemos una combinación lineal finita con coeficientes enteros,

$$c = \sum_{j=1}^n \beta_j c_j, \quad \beta_j \in \mathbb{Z}$$

donde las $c_j : [0, 1] \rightarrow M$ son curvas. El conjunto de todas las 1-cadenas sobre M tiene una estructura natural de grupo abeliano el cual denotamos por $C_1(M)$. Definimos el operador frontera

$$\partial : C_1(M) \rightarrow Div(M)$$

como sigue:

Dada $c : [0, 1] \rightarrow M$ una curva en M , definimos

$$\partial c = \begin{cases} 0, & \text{en } c(0) = c(1), \\ 1, & \text{en } c(1), \\ -1, & \text{en } c(0), \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lema A.3. *Supongamos que M es una superficie de Riemann, $c : [0, 1] \rightarrow M$ es una curva y U una vecindad abierta relativamente compacta de $c([0, 1])$. Entonces hay una solución débil del divisor ∂c con $f|_{M \setminus U} = 1$, tal que para toda 1-forma diferencial cerrada ω se satisface*

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

Supongamos que $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de una superficie de Riemann M . Una familia $\mathfrak{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ de funciones meromorfas $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ es llamada una distribución de Mittag-Leffler si las diferencias $f_i - f_j$ son holomorfas sobre $U_i \cap U_j$. Por una solución de \mathfrak{f} entendemos una función meromorfa definida globalmente $f \in \mathcal{M}(M)$ tal que para cada $i \in I$ la diferencia $f - f_i$ es holomorfa sobre U_i .

Teorema A.5. *Sobre una superficie de Riemann no compacta toda distribución de Mittag-Leffler tiene una solución.*

Teorema A.6. *Toda superficie de Riemann M tiene una topología numerable.*

DEFINICIÓN A.22. *Sea M una superficie de Riemann. Para cualquier subconjunto $Y \subset M$ sea $\mathfrak{h}(Y)$ la unión de Y con todas las componentes conexas de $M \setminus Y$. Un subconjunto abierto $Y \subset M$ es llamado Runge si $Y = \mathfrak{h}(Y)$, es decir, ninguna de las componentes de $M \setminus Y$ es compacta.*

Teorema A.7. *Supongamos que Y es un subconjunto de una superficie de Riemann M . Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

- 1). *Si Y es cerrado entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es cerrado*
- 2). *Si Y es compacto entonces $\mathfrak{h}(Y)$ es compacto*

Corolario A.2. *Supongamos que M es una superficie de Riemann no compacta. Entonces hay una sucesión de $K_j, j \in \mathbb{N}$ de subconjuntos compactos de M con las siguientes propiedades:*

- 1). $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ para todo j ,
- 2). $K_{j-1} \subset \text{int}(K_j)$ para todo $j \geq 1$,
- 3). $\cup_{j=0}^{\infty} K_j = M$

Demostración. Dado que M tiene una topología numerable, hay una sucesión de compactos $K'_0 \subset K'_1 \subset K'_2 \subset \dots$ de M los cuales cubren a M . Vamos a construir por inducción la sucesión K_j .

Sea $\mathfrak{h}(K'_0) = K_0$. Supongamos que K_1, \dots, K_m con las propiedades (i) y (ii) han sido construidos. Entonces hay un conjunto compacto X tal que $K'_m \cup K_m \subset \text{int}(X)$. Definimos $K_{m+1} = \mathfrak{h}(X)$. Entonces la sucesión $K_j, j \in \mathbb{N}$ satisface (i), (ii) y (iii). \square

Lema A.4. *Todo divisor D sobre una superficie no compacta M tiene una solución débil .*

Demostración. Elegimos una sucesión $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de compactos de M con las propiedades:

- 1). $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ para toda $j \geq 1$
- 2). $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$ para toda $j \geq 1$
- 3). $\cup_{j=1}^{\infty} K_j = M$

Vamos a demostrar que dado $a_0 \in M \setminus K_j$ y un divisor A_0 con $A_0(a_0) = 1$ y $A_0(x) = 0$ para toda $x \neq a_0$, entonces hay una solución débil φ de A_0 con $\varphi|_{K_j} = 1$.

En efecto dado que $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ implica que el punto $a_0 \in U$ donde U es una componente conexa de $M \setminus K_j$ la cual no es relativamente compacta. Entonces hay un punto $a_1 \in U \setminus K_{j+1}$ y una curva c_0 en U , $c_0 : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $c_0(0) = a_1$ y $c_0(1) = a_0$. Así por el lema A.3 hay una solución débil del divisor ∂c_0 con $\varphi_0|_{K_j} = 1$.

Repetiendo la construcción obtenemos una sucesión de puntos $a_n \in M \setminus K_{j+n}$, $n \in \mathbb{N}$, curvas c_n en $M \setminus K_{j+n}$ de a_{n+1} a a_n y soluciones débiles φ_n de los divisores ∂c_n con $\varphi_n|_{K_{j+n}} = 1$. Por lo tanto $\partial c_n = A_n - A_{n+1}$, donde A_n es el divisor que toma valor 1 en a_n y cero en otro caso. Así el producto $\varphi_0 \varphi_1 \cdots \varphi_n$ es una solución del divisor $A_0 - A_{n+1}$. El producto infinito

$$\varphi := \prod_{n=0}^{\infty} \varphi_n$$

converge, dado que sobre cualquier subconjunto compacto de M hay sólo un número finito de factores los cuales no son idénticamente 1. Entonces φ es la solución débil deseada de divisor A_0 .

Ahora supongamos que D es un divisor arbitrario sobre M . Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$D_n(x) = \begin{cases} D(x), & \text{si } x \in K_{n+1} \setminus K_n; \\ 0, & \text{si } x \notin K_{n+1} \setminus K_n \end{cases}$$

donde $K_0 = \emptyset$. Entonces

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Dado que D_n es no cero sólo en un número finito de puntos, hay una solución ψ_n de divisor D_n con $\psi_n|_{K_n} = 1$. El producto

$$\psi := \prod_{n=0}^{\infty} \psi_n$$

es una solución de D . □

Teorema A.8. *Sobre una superficie de Riemann no compacta M todo divisor $D \in \text{Div}(M)$ es el divisor de una función meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(M)$, donde $\mathcal{M}^*(M)$ consiste de todas las funciones meromorfas $f \in \mathcal{M}(M)$ las cuales no se anulan sobre cualquier componente conexa de M .*

Teorema A.9. *Supongamos que M es una superficie de Riemann no compacta y $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos sobre M la cual no tiene punto de acumulación. Entonces dado un número complejo arbitrario $c_k \in \mathbb{C}$ hay una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(M)$ con $f(a_k) = c_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el Teorema A.8 hay una función $h \in \mathcal{O}(M)$ la cual tiene un cero de orden 1 en a_k y en cualquier otro punto es no cero. Para $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_i := M \setminus \cup_{k \neq i} \{a_k\}.$$

Entonces $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de M . Definimos $g_i \in \mathcal{M}(U_i)$ por $g_i := \frac{c_i}{h}$.

Para $i \neq j$

$$U_i \cap U_j = M \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Así $\frac{1}{h}$ es holomorfa sobre $U_i \cap U_j$. Entonces $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una distribución Mittag-Leffler sobre M la cual por el Teorema A.5 tiene una solución $g \in \mathcal{M}(M)$. Definimos $f := gh$. Sobre U_i tenemos

$$f = gh = g_i h + (g - g_i)h = c_i + (g - g_i)h.$$

Dado que $g - g_i$ es holomorfa sobre U_i y $h_{a_i} = 0$, se sigue entonces que $f \in \mathcal{O}(M)$ y $f(a_i) = c_i + (g(a_i) - g_i(a_i))h(a_i) = c_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. \square

Corolario A.3. *Toda superficie de Riemann no compacta M es una variedad de Stein.*

Demostración. Sean $x, y \in M, x \neq y$. Consideremos la función $f : M \rightarrow M$, $f(x) = x$ entonces $f \in \mathcal{O}(M)$ con la propiedad de que $f(x) \neq f(y)$.

Sea $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos sobre M la cual no tiene punto de acumulación, por el Teorema A.8 hay una función $h \in \mathcal{O}(M)$ la cual tiene un cero de orden 1 en a_k y en cualquier otro punto es no cero. Para $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_i := M \setminus \cup_{k \neq i} \{a_k\}.$$

Entonces $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de M . Definimos $g_i \in \mathcal{M}(U_i)$ por $g_i := \frac{c_i}{h}$.
Para $i \neq j$

$$U_i \cap U_j = M \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Así $\frac{1}{h}$ es holomorfa sobre $U_i \cap U_j$. Por lo tanto $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una distribución Mittag-Leffler sobre M la cual por el Teorema A.5 tiene una solución $g \in \mathcal{M}(M)$. Así toda superficie de Riemann no compacta es una variedad de Stein. \square

Bibliografía

- [1] ARNOLD V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983. MR 84d:58023.
- [2] FORSTER O. *Lectures on Riemann Surfaces* Springer Verlag, New York, 1991.
- [3] ILYASHEKO, Y.;YAKOVENKO, S. *Lectures on Analytic Differential Equations* Graduate studies in mathematics, vol 86, American Mathematical Society,Providence,RI,2008 ISBN 978-0-8218-3667-5.
- [4] LEE J. *Introduction to Smooth Manifolds* Springer Science+Business Media, LLC, 2006. ISBN 978-0387-95448-6
- [5] LORAY, F. *A preparation theorem for for codimension-one foliations* Ann of Math.(2) 163(2006), no. 2,709-722.
- [6] MORITA S. *Geometry of Differential Forms* American Mathematical Society, 2001.
- [7] ORTIZ, L.; ROSALES, E; VORONIN, S. *Formal and Analytic normal forms of germs of holomorphic nondicritic foliations* por aparecer en Journal of Singularities.
- [8] ORTIZ, L.;GÓMEZ-MONT X. *Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies* Segunda edición, Sociedad Matemática Mexicana, México D.F. 2004. ISBN 968-36-0767-5.
- [9] REYSSAT E. *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann* Birkhäuser Boston, 1989. ISBN 3-7643-3441-X.
- [10] SAVEL'EV V.I. *Zero-type imbedding of a sphere into complex surfaces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1982), no. 4, 28-32, 85. MR671883 (84d:32007).

- [11] SIU. Y.-T. *Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood*, Invent. Math.38 (1976/77), no 1, 89-100. MR0435447.