UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

APUNTES Y EJERCICIOS RESUELTOS
DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

T E S I N A
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIA

P R E S E N T A :
CINTYA GRAJALES DE LA CRUZ

Asesor: MTRO. JORGE LUIS SUÁREZ MADARIAGA

NOVIEMBRE 2013

AGRADECIMIENTOS

La presente tesina es un proyecto que se concretó gracias al apoyo de un excelente asesor el Fis. Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga y del profesor excepcional Francisco Javier Solana Ortiz, a los cuales le agradezco su esfuerzo, sus opiniones, correcciones y su magnífica paciencia.

A mis sinodales: Jorge Luis Suárez, Víctor Manuel Ulloa, Andrés Arellano y Laura Patricia López por enriquecer esta tesina y hacer que sea un buen trabajo de titulación.

A los profesores Mtro. Víctor Manuel Ulloa Arellano, Act. Julio Enrique Arteaga Navarro, Act. Mahil Herrera Maldonado, Act. Hugo Pimentel Cota por orientarme, ser mis guías y darme ánimo.

A mi madre por haber confiado en mi persona, por la paciencia, por su dedicación, su entereza como madre, por acompañarme en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

A mi abuelo porque es para mí una figura paterna excepcional y a mi abuela por ser mi segunda madre.

A mi familia que me acompañó en esta aventura que significó la licenciatura y que de forma incondicional, entendieron mis ausencias y mis malos momentos.

A mis queridos compañeros, que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos casi cuatro años de convivir dentro y fuera del salón de clase Fernando Ramírez, Claudia Osorio, Iván Domínguez, Beatriz Moreno, David González, Amaury Guerrero y Evelin Pérez.

A mi compañero de vida Lic. José Gustavo Fuentes Cabrera que nunca me ha dejado caer y desde el principio hasta el día hoy sigue dándome ánimo para superarme.

A mis profesores Carlos Ramírez del Castillo, Juan Cirio Ramírez, Fernando García Mejía, Paulina Pérez Ramírez que me encaminaron a tomar una decisión profesional y que fueron para mí unos grandiosos tutores.

A los que no mencioné pero que de manera directa o indirecta contribuyeron a que este sueño se volviera una hermosa realidad. Gracias a todos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este medio didáctico[1] proyecta ser un apoyo más al estudiante, de tal manera que lo guíe y que le brinde ejemplos acerca del planteamiento de problemas de Investigación de Operaciones II. En dichos problemas se busca que las soluciones obtenidas sean significativamente más eficientes (en tiempo, recursos, beneficios, costos, etc.) en comparación a aquellas decisiones tomadas en forma intuitiva o sin el apoyo de una herramienta para la toma de decisiones.

Por lo cual dicho material, conduce al estudiante desde el planteamiento de problema, que en la mayoría de veces suele ser la parte más complicada por el nivel de abstracción y la capacidad de modelar situaciones mediante una expresión matemática, hasta la resolución del mismo en algunos casos pues previo a este material se tienen asume que el alumno posee conocimientos de Investigación de Operaciones I.

La tesina se desarrolla en cuatro capítulos, el capítulo 1 denominado *"Programación de Metas"* permite conocer la formulación de modelos que requieran la optimización de más de un objetivo así como el estudio de los criterios adicionales que se emplean durante este proceso en el método SIMPLEX convencional.

En el capítulo 2 "*Programación Entera*" se muestra la diferencia entre la programación lineal y la programación entera. Asimismo como lo dice su nombre se plantean problemas de tal manera que las soluciones sean de valor numérico entero.

Para el capítulo 3 "*Programación dinámica*" se muestra el planteamiento de problemas que son útiles para la toma de decisiones secuenciales intercaladas, es decir, se determina la combinación óptima de decisiones, en la cual el

[1] ***Medio didáctico*** es cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje (TECNOLOGIA EDUCATIVA - WEB PERE MARQUÉS)

problema se descompone en variables en etapas y cada etapa es un subproblema de una variable.

Para finalizar está el capítulo 4 "*Modelo de Inventarios",* en este capítulo se muestran aquellos planteamientos que conllevan a lograr una buena administración en los inventarios y una relación eficiente de ellos con la Administración Financiera.

Para enriquecer la presente tesina se consideraron "Las Tecnologías de la Información y la Comunicación" (TIC), las cuales están presenten en casi todas las manifestaciones - económicas, científicas, sociales, culturales, etc. – de la sociedad actual. Por lo tanto la Universidad como institución comprometida con la construcción y difusión del conocimiento, y de la preparación para el desempeño profesional y el ejercicio de la ciudadanía no puede ni debe quedar al margen de esta utilización generalizada de las nuevas tecnologías.

El fin de este medio didáctico es que el alumno aprenda a abstraer los problemas y les dé una solución adecuada, y se entiende que el aprendizaje parte siempre de la recepción de algún tipo de información; cuando analizamos cómo seleccionamos la información podemos distinguir entre alumnos visuales, auditivos y kinestésicos.

Aprendizaje visual: Los alumnos tienen la costumbre de visualizar, lo cual les ayuda a establecer relaciones entre distintas ideas y conceptos, por lo cual desarrollan una mayor capacidad de abstracción. Para este tipo de alumnos se incluyen figuras representativas de cada tipo de programación.

Aprendizaje visual / auditivo: Los alumnos piensan y recuerdan de manera secuencial y ordenada, por lo cual prefieren contenidos orales y los asimilan mejor cuando pueden explicárselos a otra persona. Almacenan la información transfiriéndola de lo auditivo a un medio visual. Para este tipo de alumnos además del material, es aquí donde entra la valiosa aportación del profesor mediante el método expositivo.

Aprendizaje Kinestésico: Los alumnos aprenden perfectamente al interactuar físicamente con el material educativo. Para este tipo de alumnos se pensó al tener un material disponible en la plataforma de Optimización, pues van a poder interactuar en la tesina de acuerdo a su avance.

OBJETIVO GENERAL

La tesina "APUNTES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II" pretende apoyar la asignatura de Investigación de Operaciones II, mediante la resolución de ejercicios para brindar una herramienta, con la cual, se analicen los métodos y técnicas para el estudio de sistemas complejos cuyas relaciones funcionales y determinísticas que no son representables mediante expresiones lineales o su espacio de soluciones factibles no es un conjunto convexo. [2]

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para el estudiante existen pocos materiales que sean de apoyo para resolver sus necesidades de aprendizaje, las cuales radican principalmente en aterrizar los conceptos abstractos para después aplicarlos a la resolución de problemas, de tal manera que dichos materiales lo guíen y le brinden sobre todo, ejemplos resueltos acerca de problemas de Investigación de Operaciones II paso a paso y con una metodología sencilla.

[2] ***Conjunto convexo:*** dados dos puntos x_1 y x_2 que pertenecen a una región C entonces la combinación lineal $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

JUSTIFICACIÓN

La motivación para realizar esta tesina es poder dejar a la Universidad recursos para que siga formando estudiantes de excelencia, de tal manera que sirva para incrementar el número de alumnos responsables de la construcción de su propio conocimiento, así como para favorecer a los alumnos que buscan un apoyo para la abstracción de problemas matemáticos.

Ahora con el uso de la tecnología, servirá para optimizar las clases ya que posteriormente se puede subir como recurso en línea en la plataforma de Optimización localizada en la siguiente liga:

http://132.248.180.203/ido/login/index.php (Plataforma de Optimización)

ALCANCE

La tesina "APUNTES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II" cubre la mayor parte de los tópicos del temario del plan 2006 de la licenciatura en Actuaría de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán; queda a consideración del alumno el profundizar en los temas, sin embargo, el alumno ya va con una idea más clara y con conocimientos más asentados para poder tomar cualquier otro recurso y emplearlo sin tantas dificultades, pues ya adquirió la capacidad para visualizar un problema y resolverlo.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Es un estudio exploratorio para convertirse en un trabajo descriptivo (Sampieri, 2010), teniendo como premisa, que facilitará el aprendizaje de la materia de Investigación de Operaciones II.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

- ¿El material didáctico facilitará el aprendizaje de la materia de Investigación de Operaciones II?

VARIABLES

- Calificaciones de los alumnos de la materia de Investigación de Operaciones II antes de usar el material y después de usarlo
- Frecuencia de descarga del material
- Nivel de satisfacción por parte de los alumnos al usar el material realizando una encuesta al final del curso

MARCO TEÓRICO

La Investigación de Operaciones es una rama de las matemáticas que proporciona una herramienta dominante e indispensable, cuyo elemento principal es el modelado matemático y la construcción de dicho modelo; y nos brinda la base para la toma de decisiones.

Una de las áreas principales de la Investigación de Operaciones es la Optimización o Programación Matemática. La Optimización se relaciona con problemas de minimizar o maximizar una función (función objetivo) de una o varias variables, cuyos valores usualmente están restringidos por ecuaciones y/o desigualdades.

Un modelo es una representación idealizada de una situación real o un objeto concreto. (Investigación de Operaciones Aplicación de la Investigación Operativa en la gestión de empresas) Las programaciones: "*Programación de metas, entera, dinámica y el Modelo de inventarios*" desarrolladas en los cuatros capítulos de la tesina emplean modelos para darle un entendimiento matemático y así lograr su solución. A continuación se describen cada una de las programaciones:

La Programación de metas (PM) permite plantear problemas en los que se requiere optimizar más de un objetivo.

La Programación Entera (PE) es programación lineal con la restricción adicional de que los valores de las variables de decisión deben de ser enteros. (Bellini) Este tipo de programación se emplea cuando la solución que deseamos obtener debe ser única y exclusivamente números enteros.

La Programación Dinámica (PD) por su parte, es un enfoque general para la solución de problemas en los que es necesario tomar decisiones en etapas sucesivas. Las decisiones tomadas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro (denominadas estados), y a las decisiones que se plantearán en el futuro.

Conviene resaltar que a diferencia de la programación lineal, el modelado de problemas de programación dinámica no sigue una forma estándar. Así que, para cada problema, será necesario especificar cada uno de los componentes que caracterizan un problema de programación dinámica.

El procedimiento general de resolución de estas situaciones se divide en el análisis recursivo de cada una de las etapas del problema en orden inverso, es decir, comenzando por la última etapa y pasando en cada iteración a la etapa antecesora. El análisis de la primera etapa finaliza con la obtención del óptimo del problema. (Enciclopedia y Biblioteca Virtual de las Ciencias Sociales, Económicas y Jurídicas)

El Modelo de Inventarios (MI) permite tener un control y relaciones eficientes entre los materiales disponibles y la Administración financiera de una empresa, lo anterior afectando considerablemente la flexibilidad de la operación de la empresa.

Una vez teniendo claro el panorama de los temas que abarca la tesina, a continuación se muestra el desarrollo de cada capítulo, donde se mostrará los planteamientos necesarios para resolver problemas de la manera más óptima, de acuerdo a las características que posean las variables.

1 PROGRAMACIÓN DE METAS

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará sistemas objetivos y metas múltiples, formulando modelos que requieran la optimización de más de un objetivo y estudiará los criterios adicionales que se emplean durante este proceso en el método SIMPLEX convencional.

1.1 ANTECEDENTES Y DEFINICIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DE METAS

La **Programación de metas** es una variación de la Programación Lineal. Es una técnica matemática con objetivos múltiples que es viable para generar soluciones de problemas.

Los primeros en identificarla fueron:

- *CHARNES Y W.W. COOPER, MANAGEMENT MODELS AND INDUSTRIAL APPLICATIONS OF LINEAR PROGRAMMING. New York. WILEY 1960*
- *IJIRI, MANAGEMENT GOAL AND ACCOUNTING FOR CONTROL. Chicago. RAND – NCNALLY 1965 (reafirmó, refinó y amplió la técnica a mediados de los 60)*
- *JAMES P. IGNIZIO, GOAL PROGRAMMING AND EXTENSIONS (Lexington, MASS DC HEATH)*
- *SANG LEE, GOAL PROGRAMMING FOR DECISION ANALYSIS (Philadelphia: Averbach), 1972*

IGNIZIO Y LEE desarrollaron descripciones detalladas y numerosas aplicaciones en la década de los 70

A la programación de metas también se le conoce como programación por objetivos o programación de metas múltiples.

DIFERENCIAS	
PROGRAMACIÓN LINEAL (PL)	**PROGRAMACIÓN DE METAS (PM)**
Una sola función objetivo.	Uno o varios objetivos.
Maximizar o minimizar la función objetivo.	Minimizar la función objetivo Un solo objetivo, varios objetivos con prioridad Varios objetivos sin prioridad Varios objetivos con prioridad y ponderación
Encontramos el óptimo en la función objetivo.	Podemos encontrar el óptimo o la mejor solución.
Proporciona menos información *Ejemplo:* *Sea* $x_1 = 5, x_2 = 4$ *con un* $z\max = \$50$ *no nos dice que hacer si nos sobran artículos.*	Proporciona más información.
Se tiene en la función objetivo una misma unidad de medición.	Se tienen varias unidades de medición.

1.2 FORMULACIÓN DE MODELOS

En la PM se manejan:

- **Variables de decisión:** $x_1, \dots, x_n$
- **Variables de desviación:** d_i^- y d_i^+

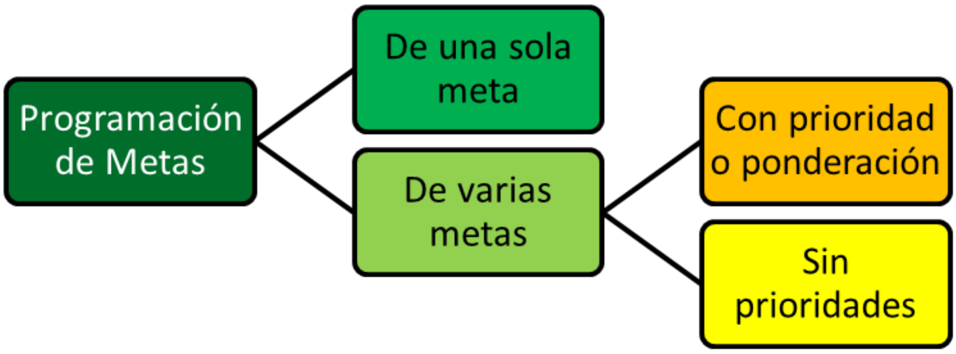
  d_i^-: Cantidad en la que no se cumplió la meta

  d_i^+: Cantidad en la que se cumplió de más la meta

  i : Meta i

- <u>Restricciones estructurales</u> **(restricciones originales del problema)**

- **Restricciones de meta (aquí se incluyen las variables de desviación)**



Suponiendo que existen:

m : Metas

p : Restricciones estructurales

n : Variables de decisión

k : Variables de prioridad

w : Ponderaciones

El modelo puede expresarse como:

$$PM \begin{cases} \min(z) = \sum_{k=1}^{m} p_k \left(w_{i,k}^{+} d_i + w_{i,k}^{-} d_i \right) \\ s.a \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^{-} - d_i^{+} = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (\leq, =, \geq) \quad b_i \quad i = m+1, \ldots, m+p \\ \qquad x_i, d_i^{-}, d_i^{+} \geq 0 \end{cases}$$

Ecuación 1 Modelo de Programación de Metas

1.3 PROBLEMA DE UNA META Y DE METAS MÚLTIPLES

La oficina de admisiones de la universidad de Ozark está procesando solicitudes de estudiantes de 1º ingreso para el próximo año académico. Las solicitudes son de tres categorías: del estado, de otros estados, e internacionales. Las proporciones de hombres – mujeres para los aspirantes del estado y de otros estados son 1:1 y 3:2 respectivamente. En el caso de los estudiantes internaciones, la proporción correspondiente es de 8:1. El puntaje del American College Test (ACT) (Examen de admisión es un factor importante para aceptar a los nuevos estudiantes. Las estadísticas recopiladas por la universidad indican que el promedio del puntaje de la ACT para estudiantes del estado, de otros estados e internaciones son 27, 26 y 23 respectivamente. El comité de admisión ha establecido las siguientes metas deseables para la nueva generación de alumnos:

a) La próxima generación es de por lo menos 1,200 estudiantes de 1º ingreso
b) La calificación promedio de la ACT para todos los estudiantes de 1º ingreso es de por lo menos 25
c) Los estudiantes internaciones constituyen por lo menos el 10% de la nueva generación
d) La proporción de hombres – mujeres es de por lo menos 1:1
e) Los estudiantes de otros estados son por lo menos el 20% de la nueva generación

EJEMPLO

Realizar el planteamiento con Programación de Metas

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

x_1 :*Número de estudiantes de nuevo ingreso del estado*

x_2 :*Número de estudiantes de nuevo ingreso de otros estados*

x_3 :*Número de estudiantes de nuevo ingreso internacionales*

$$\begin{cases} \min(z) = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^- + P_4 d_4^- + P_5 d_5^- \\ s.a \\ \text{meta a)} \quad x_1 + x_2 + x_3 + d_1^- - d_1^+ = 1200 \text{ estudiantes} \\ \text{meta b)} \quad \dfrac{27x_1 + 26x_2 + 23x_3}{x_1 + x_2 + x_3} + d_2^- - d_2^+ = 25 \text{ calificacion} \\ \text{meta c)} \quad 0.1(x_1 + x_2 + x_3) + d_3^- - d_3^+ = x_3 \text{ poblacion de estudiantes internacionales} \\ \text{meta d)} \quad \dfrac{\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{9}x_3}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{8}{9}x_3} + d_4^- - d_4^+ = 1 \\ \text{meta e)} \quad 0.2(x_1 + x_2 + x_3) + d_5^- - d_5^+ = x_2 \text{ poblacion de estudiantes de otros estados} \end{cases}$$

1.4 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN DE METAS

SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PM

Paso 1: Grafica o traza todas las restricciones estructurales e identifica la región factible. Si no existen restricciones estructurales, la región factible es el área en la que tanto x_1 y x_2 son ≥ 0 (el cuadrante no negativo).

Paso 2: Grafique las líneas que corresponden a las restricciones de meta. Esto se logra igualando a cero las variables de desviación en la restricción de meta y trazando la ecuación resultante.

Paso 3: Identifique la solución de mayor prioridad. Esto se logra determinando el punto o puntos de la región factible que satisfacen la meta de mayor prioridad.

Paso 4: Pase a la meta que tiene la siguiente prioridad más alta y determine la o las “mejores soluciones, de manera que éstas no degraden la solución o soluciones ya alcanzadas para las metas de mayor prioridad.

Paso 5: Repita el paso 4 hasta que se hayan investigado todos los niveles de prioridad.

EJEMPLO

Una compañía fabrica dos clases de cámaras de 35mm. El proceso de producción de las cámaras requiere dos horas de tiempo de producción en el departamento 1 y tres horas en el departamento 2. Fabricar un modelo de lujo requiere 4 horas de tiempo en el departamento 1 y 3 horas en el departamento 2. En la actualidad, existen disponibles 80 horas de mano de obra por semana en cada uno de los departamentos. Ese tiempo de mano de obra es un factor de un tanto restrictivo porque la compañía tiene una política general de evitar el tiempo extra, si es posible. Las utilidades del fabricante para cada cámara normal son de $30, mientras que al utilidad para el modelo de lujo es de $40. Los administradores de la compañía han fijado las siguientes metas:

P_1 (Prioridad 1): Evitar las operaciones en tiempo extra en cada departamento.

P_2 (Prioridad 2): Los registros previos de ventas señalan que, en promedio, pueden venderse un mínimo de 10 cámaras normales y 10 de lujo por semana.

A los administradores les gustaría alcanzar estas metas. Dado que el tiempo de producción puede limitar la fabricación de esta cantidad de cada una de las cámaras, y puesto que la cámara de lujo tiene un mayor margen de utilidad, las metas de ventas deben ponderarse mediante la contribución de las utilidades de cada una de las cámaras. Es decir, $30 para la cámara normal y $40 para la de lujo. (Se podrán utilizar también pesos de 3 y 4 puesto que tienen la misma relación que las contribuciones a las utilidades).

P_3 (Prioridad 3): Maximizar las utilidades

Plantear el modelo de PM para este problema y resolverlo utilizando el método gráfico.

SOLUCIÓN

Como en los problemas anteriores conviene concentrar los datos en una tabla de información para poder plantear con mayor facilidad el problema.

	Depto.1	Depto. 2	Utilidades	Vender
Normal	2 horas	3 horas	$30	10
Lujo	4 horas	3 horas	$40	10
	80 horas	**80 horas**		

x_1*: Nº de cámaras normales producidas*

x_2*: Nº de cámaras de lujo producidas*

$$\begin{cases} \min(z) = P_1\left(d_1^+ + d_2^+\right) + P_2\left(30d_3^- + 40d_4^-\right) + P_3\left(d_5^-\right) \\ 2x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 80 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10 \\ 30x_1 + 40x_2 + d_5^- - d_5^+ = 1200 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

Paso 1: *Grafica o traza todas las restricciones estructurales e identifica la región factible. Si no existen restricciones estructurales, la región factible es el área en la que tanto x_1 y x_2 son ≥ 0 (el cuadrante no negativo).*

No hay restricciones estructurales por lo tanto sólo nos quedaremos con el cuadrante no negativo.

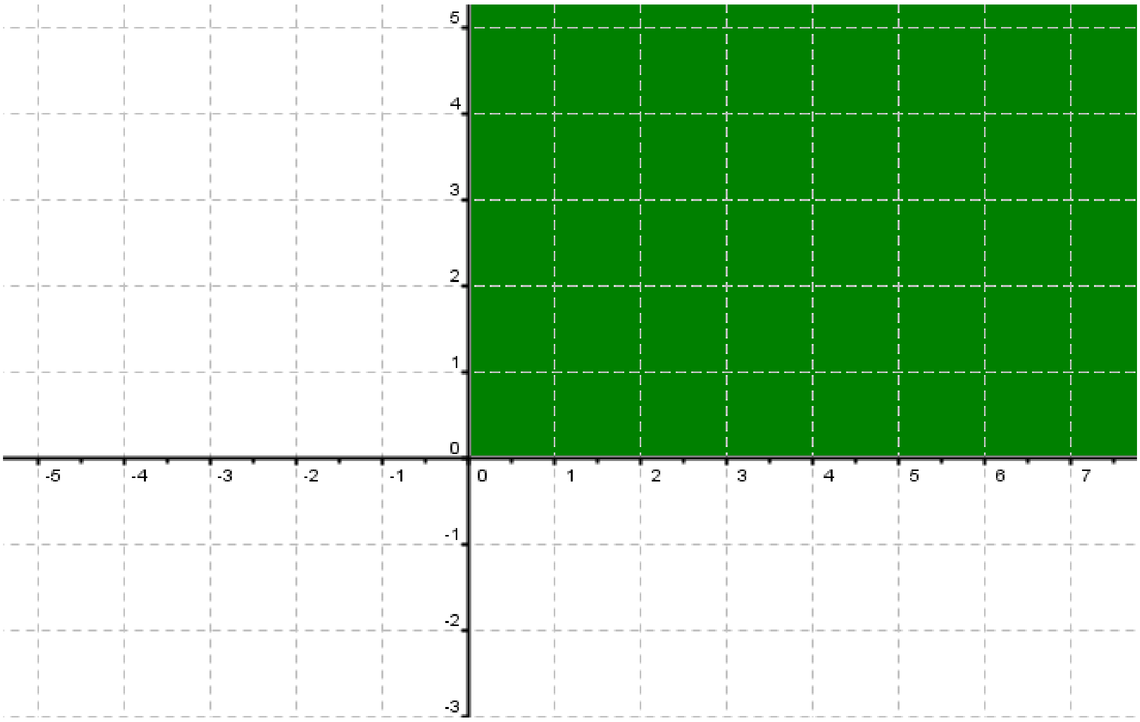
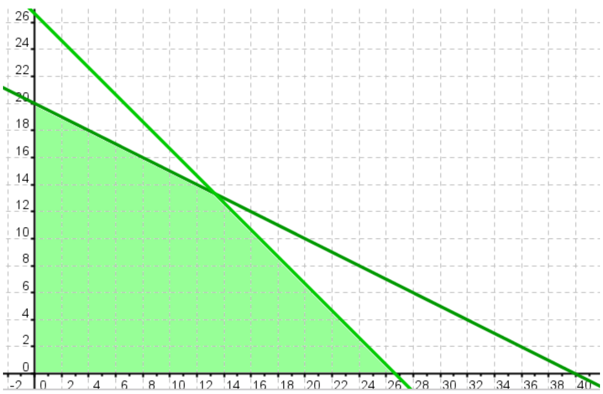


Ilustración 1 Cuadrante no negativo del plano cartesiano

Paso 2: *Grafique las líneas que corresponden a las restricciones de meta. Esto se logra igualando a cero las variables de desviación en la restricción de meta y trazando la ecuación resultante.*

En este caso tenemos 3 metas:

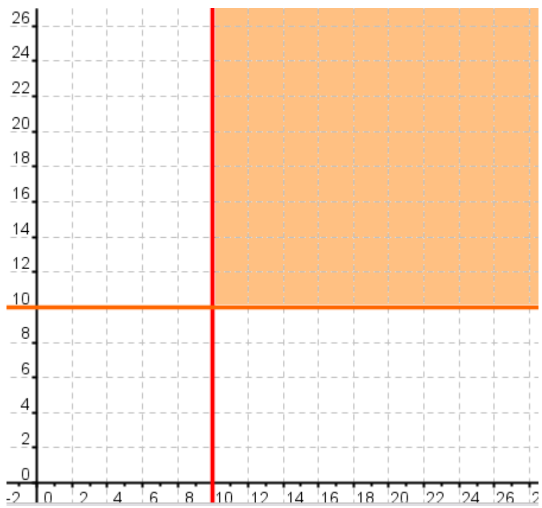
Meta 1:

$2x_1+4x_2+d_1^- - d_1^+ = 80$ $d_1^- = d_1^+ = 0$ $2x_1+4x_2 = 80$	$2x_1+4x_2=80$ $4x_2 = 80-2x_1$ $x_2 = \frac{80}{4} - \frac{2}{4}x_1$ $x_2 = -0.5x_1 + 20$	
$3x_1+3x_2+d_2^- - d_2^+ = 80$ $d_2^- = d_2^+ = 0$ $3x_1+3x_2 = 80$	$3x_1+3x_2=80$ $3x_2 = 80-3x_1$ $x_2 = \frac{80}{3} - \frac{3}{3}x_1$ $x_2 = -x_1 + 26.7$	

Meta 2:

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10$$
$$d_3^- = d_3^+ = 0$$
$$x_1 = 10$$

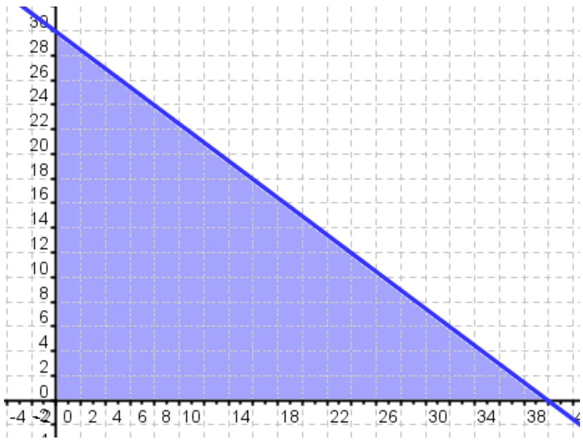
$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10$$
$$d_4^- - d_4^+ = 0$$
$$x_2 = 10$$

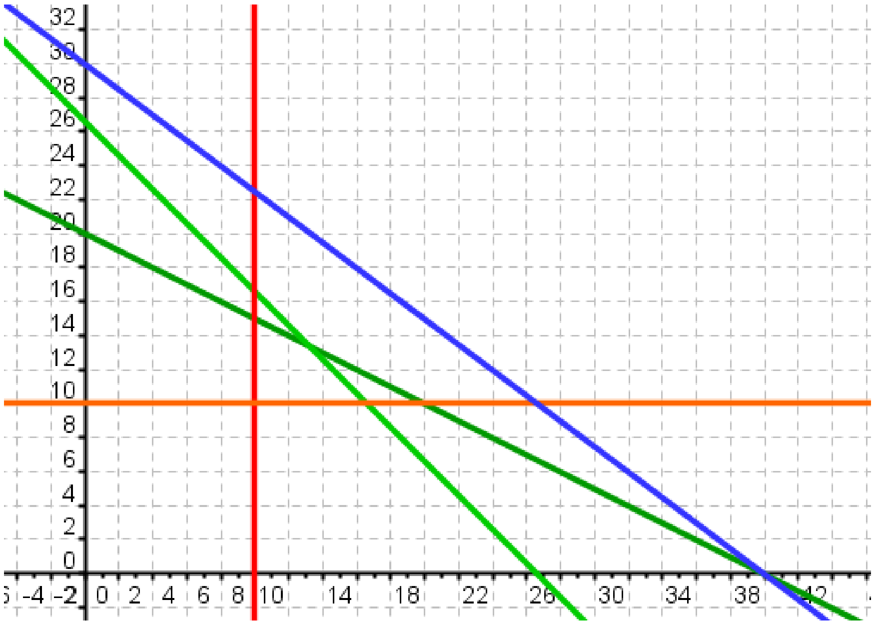


Meta 3:

$$30x_1 + 40x_2 + d_5^- - d_5^+ = 1200$$
$$d_5^- = d_5^+ = 0$$
$$30x_1 + 40x_2 = 1200$$

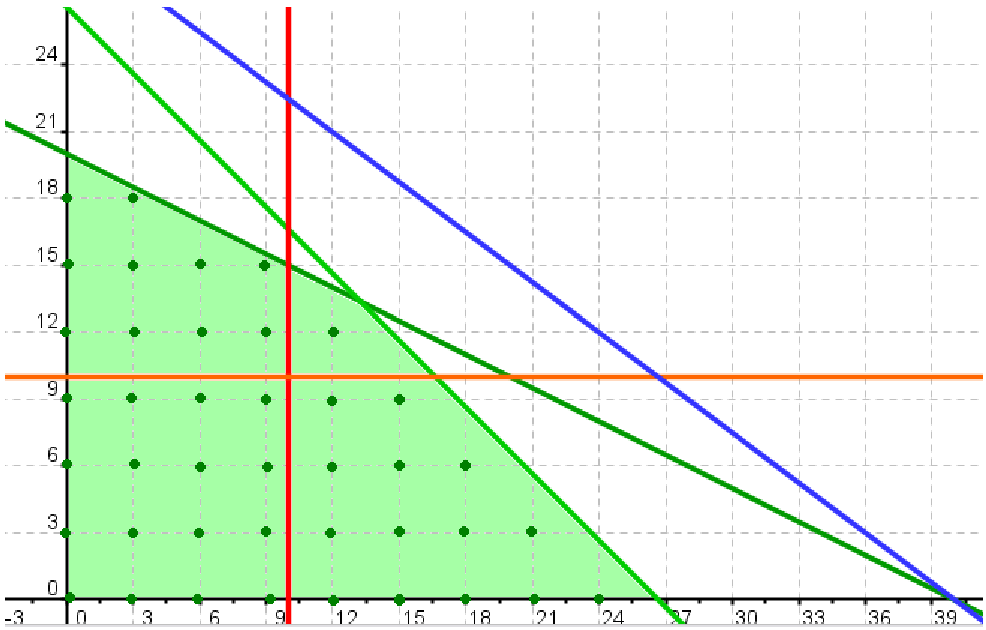
$$30x_1 + 40x_2 = 1200$$
$$40x_2 = 1200 - 30x_1$$
$$x_2 = \frac{1200}{40} - \frac{30}{40}x_1$$
$$x_2 = -0.75x_1 + 30$$





Paso 3: *Identifique la solución de mayor prioridad. Esto se logra determinando el punto o puntos de la región factible que satisfacen la meta de mayor prioridad.*

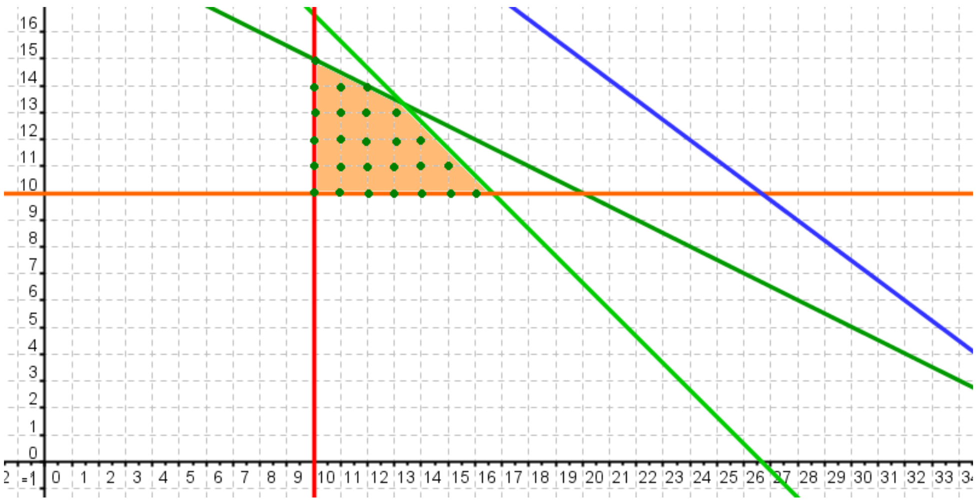
La meta que tiene la mayor prioridad es la meta 1 por lo tanto los puntos y la región factible es la siguiente:



Paso 4: *Pase a la meta que tiene la siguiente prioridad más alta y determine la o las "mejores soluciones, de manera que éstas no degraden la solución o soluciones ya alcanzadas para las metas de mayor prioridad.*

En este caso en la meta 2 hay una restricción que tiene más ponderación por lo tanto será la primera que se buscará para satisfacer.

$40P_2d_4^-$ *y su correspondiente restricción es* $x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10$



Paso 5: *Repita el paso 4 hasta que se hayan investigado todos los niveles de prioridad.*

Ahora se tiene la meta 2 pero con la siguiente ponderación:

$30P_2d_3^-$ *y su correspondiente restricción es* $x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10$ *pero en este caso coincide con la región antes trazada, así que continuamos con la última prioridad del problema que corresponde a la meta 3 cuya restricción es:* $30x_1 + 40x_2 + d_5^- - d_5^+ = 1200$

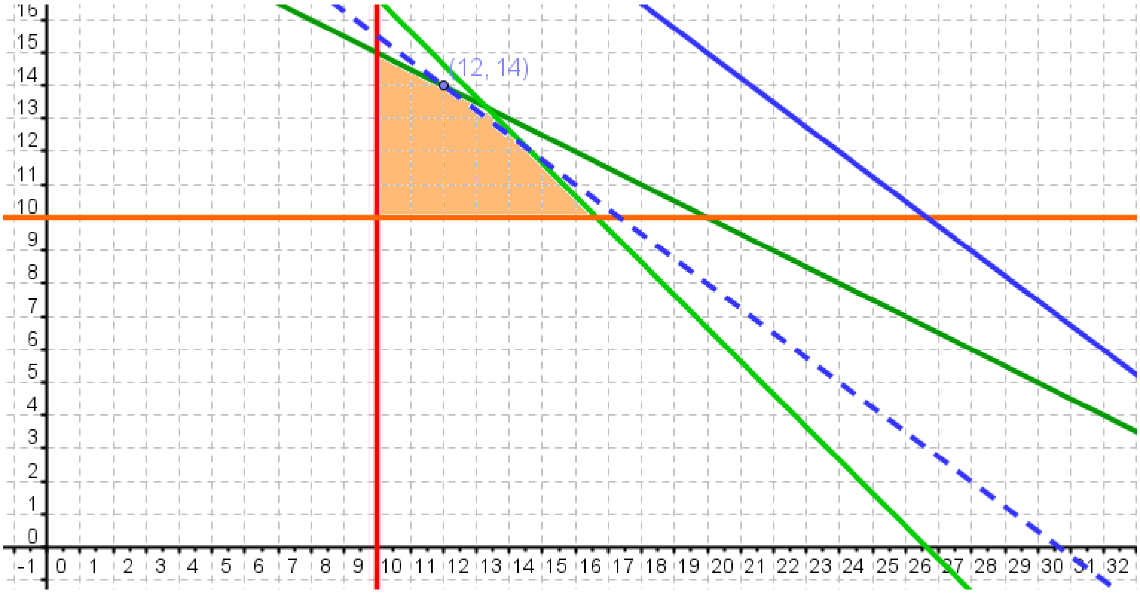


Ilustración 1 Método Gráfico concluido

De los puntos verdes marcados antes se escoge aquel que al trasladar la línea azul de manera paralela lo toque primero, de este modo obtendremos la solución entera, sino simplemente al tener las regiones factibles y al trasladar la línea azul hacia abajo, al tocar el primer punto de la región factible obtendremos la solución no entera de manera tradicional para darle respuesta a un problema de programación lineal como se ve a continuación:

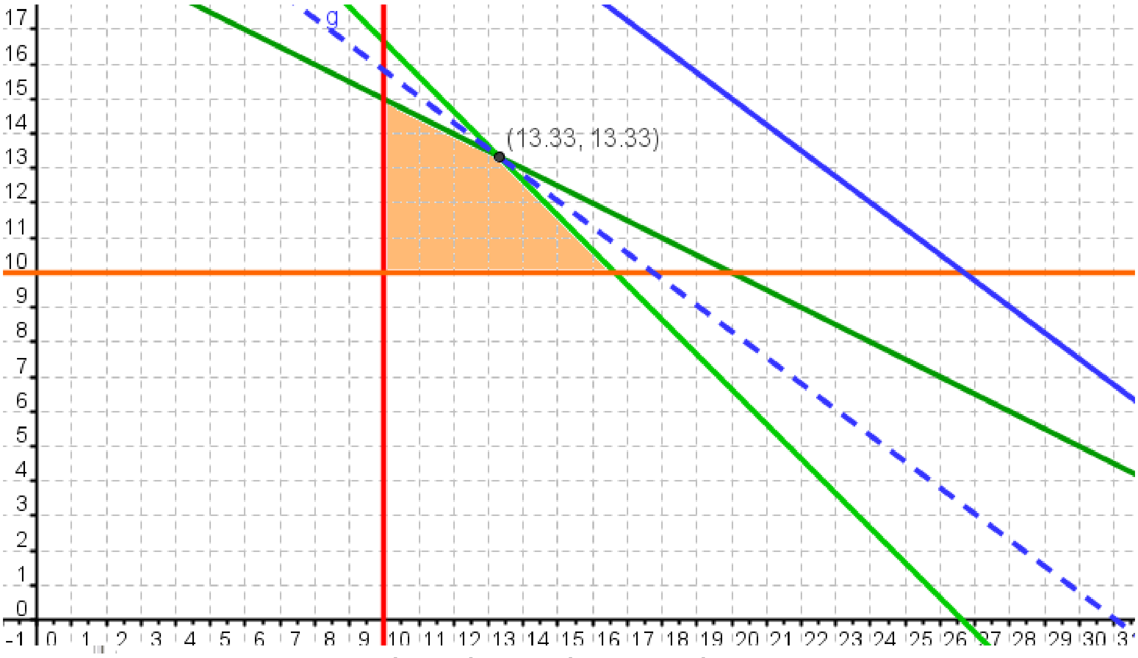
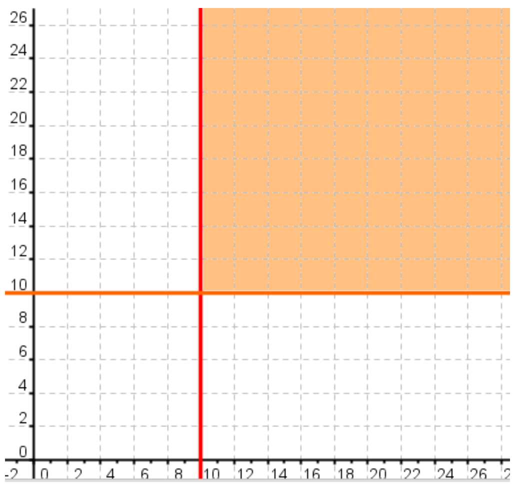


Ilustración 2 Método Gráfico solución no entera

Cabe señalar que las regiones factibles se determinan como si fuera un problema de programación lineal ordinario, por ejemplo, en el problema dice "P_2 (Prioridad 2): Los registros previos de ventas señalan que, en promedio, pueden venderse un mínimo de 10 cámaras normales y 10 de lujo por semana"

Cómo se había planteado corresponde a la meta 2: $x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10$ *y* $x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10$ *pero si lo plantemos como programación lineal nuestra restricciones quedarían* $x_1 \geq 10$ *y* $x_2 \geq 10$ *por lo tanto si trazamos la región factible la tendremos de la siguiente manera:*



EL ALGORITMO DE PM: AMPLIACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX

Paso 1: Establezca la tabla simplex modificada e inicial. Esta tabla incluirá un renglón $(Z_j - C_j)$ para cada nivel de prioridad. Fijar $k=1$, en donde k es un identificador que representa al renglón $(Z_j - C_j)$ asociado al nivel de prioridad P_k. Continúe en el paso 2.

Paso 2: Verifique si ya tiene la solución óptima examinando el valor (solución) del segundo término (lado derecho) del renglón $(Z_j - C_j)$ para la prioridad P_k; por tanto, vaya al paso 6. Si n o existe un valor de cero vaya al paso 3.

Paso 3: Determine la nueva variable que entra examinando el renglón $(Z_j - C_j)$ para la prioridad P_k. Examine cada uno de los coeficientes positivos de ese renglón. Identifique el mayor de ellos para el cual no existan coeficientes negativos con una mayor prioridad en la misma columna. La variable de esa columna, asociada con el mayor coeficiente positivo, es la variable que entra. Si existe un empate en los valores de los coeficientes que determinan la variable de entrada, puede decidirse en forma arbitraria. Si no existe ningún coeficiente positivo en el renglón P_k que satisfaga las condiciones anteriores, entonces vaya al paso 6, si no es así proceda con el paso 4.

Paso 4: Determine la variable que sale utilizando el procedimiento normal del método simplex.

Paso 5: Elabore una nueva tabla. Se emplea el procedimiento normal del método simplex para actualizar los coeficientes del cuerpo de la tabla. Se calculan los nuevos renglones $(Z_j - C_j)$ de la misma manera para elaborar la tabla inicial. Vaya al paso 2.

Paso 6: Evalúe el siguiente nivel de prioridad más baja fijando $k = k+1$. Si k es mayor que K, en donde K es el número total de niveles de prioridad, entonces deténgase; la solución es óptima. Si $k \leq K$, entonces el renglón $(Z_j - C_j)$ para el nivel de prioridad P_k debe examinarse; por lo tanto vaya al paso 2.

EJEMPLO

Una agencia de publicidad quiere determinar el programa de anuncios en TV para una compañía, la cual, tiene tres objetivos:

Objetivo 1 Sus anuncios deben ser vistos por un mínimo de 40 millones de personas con ingresos altos.

Objetivo 2 Sus anuncios deben ser vistos por un mínimo de 60 millones de personas con ingresos bajos.

Objetivo 3 Sus anuncios deben ser vistos por un mínimo de 35 millones de mujeres con ingresos altos.

La agencia puede comprar dos tipos de anuncios: los que aparecen durante los juegos de futbol y los que aparecen junto a los melodramas; a lo más puede gastar 600 000 dólares. Los costos del comercial y las audiencias potenciales de anuncio de un minuto se muestran en la tabla 1:

	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Costo
Anuncio en el futbol	7 millones	10millones	5 millones	100,000
Anuncio en los melodramas	3 millones	5 millones	4 millones	60,000

La agencia debe calcular cuántos anuncios debe comprar durante el futbol y cuántos durante los melodramas, para la compañía

SOLUCIÓN

Primeramente planteamos el problema, definiendo nuestras variables:

x_1*: Nº de anuncios durante el futbol*

x_2*: Nº de anuncios durante el melodrama*

$$(PM)\begin{cases} \min(z) = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^- \\ s.a. \qquad 7x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ \qquad 10x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\ \qquad 5x_1 + 4x_2 + d_3^- - d_3^+ = 35 \\ \qquad 100x_1 + 60x_2 \le 600 \\ \qquad x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

Nota: a la restricción $100x_1 + 60x_2 \le 600$ *le añadimos una variable de holgura*[3]*, es decir,* $100x_1 + 60x_2 + x_3 = 600$

Paso 1: *Establezca la tabla simplex modificada e inicial. Esta tabla incluirá un renglón* $(Z_j - C_j)$ *para cada nivel de prioridad. Fijar* $k=1$*, en donde* k *es un identificador que representa al renglón* $(Z_j - C_j)$ *asociado al nivel de prioridad* P_k*. Continúe en el paso 2.*

$P_1 \to z_1 - c_1 = -1$ *pues el renglón* $(Z_j - C_j)$ *se considera como el coeficiente original de* d_1^- *en la función objetivo multiplicado por -1*

Planteamos la tabla simplex inicial:

Tabla simple inicial:

---

[3] ***Variable de holgura:*** (Método Simplex) Si la inecuación tiene una desigualdad del tipo "≤", deberemos añadir una nueva variable, llamada variable de holgura para convertir la inecuación en igualdad. http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
d_1^-	7	3	0	1	-1	0	0	0	0	40
d_2^-	10	5	0	0	0	1	-1	0	0	60
d_3^-	5	4	0	0	0	0	0	1	-1	35
x_3	100	60	1	0	0	0	0	0	0	600
$z_1 - c_1$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$z_2 - c_2$	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
$z_3 - c_3$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

Ilustración 3 Tabla Simplex

Tabla simplex modificada:

		↓									
		x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
←	d_1^-	7*	3	0	1	-1	0	0	0	0	40
	d_2^-	10	5	0	0	0	1	-1	0	0	60
	d_3^-	5	4	0	0	0	0	0	1	-1	35
	x_3	100	60	1	0	0	0	0	0	0	600
	$z_1' - c_1'$	7	3	0	0	-1	0	0	0	0	40
	$z_2' - c_2'$	10	5	0	0	0	0	-1	0	0	60
	$z_3' - c_3'$	5	4	0	0	0	0	0	0	-1	35

Se realizan las operaciones pertinentes, para obtener los renglones $z_i - c_i$, por ejemplo:

$$\text{El renglón } z_1' - c_1' = \text{renglón } d_1^- + \text{ el renglón } (z_1 - c_1)$$

$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 7+0=7$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 3+0=3$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 0+0=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 1+(-1)=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = -1+(0)=-1$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 0+0=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 0+0=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 0+0=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 0+0=0$$
$$\text{El renglón } z_1'-c_1' = 40+0=40$$

Y dichos valores se acomodan de manera horizontal. Escogemos el pivote como se hace en el método simplex, es decir, entra a la base x_1 *pues 7 es el mayor de los* $z_1'-c_1's$ *y sale* d_1^- *pues* $\min\left\{\frac{40}{7},\frac{60}{10},\frac{35}{5},\frac{600}{100}\right\}=\frac{40}{7}$ *cuyo valor corresponde a* d_1^-.

Convertimos a uno el pivote y continuamos este mismo procedimiento:

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
x_1	1*	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	0	$\frac{40}{7}$
d_2^-	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	-1	0	0	$\frac{20}{7}$
d_3^-	0	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	1	-1	$\frac{45}{7}$
x_3	0	$\frac{120}{7}$	1	$-\frac{100}{7}$	$\frac{100}{7}$	0	0	0	0	$\frac{200}{7}$
$z_1'-c_1'$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$z_2'-c_2'$	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	-1	0	0	$\frac{20}{7}$
$z_3'-c_3'$	0	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	0	-1	$\frac{45}{7}$

Paso 2: *Verifique si ya tiene la solución óptima examinando el valor (solución) del segundo término (lado derecho) del renglón* $(Z_j - C_j)$ *para la prioridad* P_k*; por tanto, vaya al paso 6. Si no existe un valor de cero vaya al paso 3*

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
x_1	*1**	$\frac{3}{7}$	*0*	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	*0*	*0*	*0*	*0*	$\frac{40}{7}$
d_2^-	*0*	$\frac{5}{7}$	*0*	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	*1*	*-1*	*0*	*0*	$\frac{20}{7}$
d_3^-	*0*	$\frac{13}{7}$	*0*	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	*0*	*0*	*1*	*-1*	$\frac{45}{7}$
x_3	*0*	$\frac{120}{7}$	*1*	$-\frac{100}{7}$	$\frac{100}{7}$	*0*	*0*	*0*	*0*	$\frac{200}{7}$
$z_1' - c_1'$	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
$z_2' - c_2'$	*0*	$\frac{5}{7}$	*0*	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	*0*	*-1*	*0*	*0*	$\frac{20}{7}$
$z_3' - c_3'$	*0*	$\frac{13}{7}$	*0*	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	*0*	*0*	*0*	*-1*	$\frac{45}{7}$

Podemos observar que ya tiene la solución óptima, pues examinando el valor (solución del renglón $(Z_j - C_j)$ *para la prioridad* P_k *ya es cero por lo tanto se cumple la meta 1.*

Paso 6: *Evalúe el siguiente nivel de prioridad más baja fijando* $k = k + 1$*. Si* k *es mayor que* K*, en donde* K *es el número total de niveles de prioridad, entonces deténgase; la solución es óptima. Si* $k \leq K$*, entonces el renglón* $(Z_j - C_j)$ *para el nivel de prioridad* P_k *debe examinarse; por lo tanto vaya al paso 2.*

Ahora continuamos con la tabla simplex obteniendo lo siguiente:

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
d_1^-	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	0	0	$\frac{40}{7}$
d_2^-	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	-1	0	0	$\frac{20}{7}$
d_3^-	0	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	1	-1	$\frac{45}{7}$
← x_3	0	$\frac{120}{7}$	1	$-\frac{100}{7}$	$\frac{100}{7}$*	0	0	0	0	$\frac{200}{7}$
$z_1'-c_1'$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$z_2'-c_2'$	0	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	-1	0	0	$\frac{20}{7}$
$z_3'-c_3'$	0	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	0	-1	$\frac{45}{7}$

Se escoge el pivote mediante el método simplex y finalmente obtenemos la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
x_1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{100}$	0	0	0	0	0	0	6
d_2^-	0	-1	$-\frac{1}{10}$	0	0	1	-1	0	0	0
d_3^-	0	$-\frac{29}{7}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	0	0	1	-1	5
d_1^+	0	$\frac{120}{7}$	$\frac{7}{100}$	-1	1*	0	0	0	0	2
$z_1'-c_1'$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$z_2'-c_2'$	0	-1	$-\frac{10}{7}$	0	0	0	-1	0	0	0
$z_3'-c_3'$	0	1	$-\frac{1}{20}$	0	0	0	0	0	-1	5

Con esto observamos que cumplimos la meta 1 y la meta 2, sin embargo, la meta 1 la rebasamos en dos unidades, lo anterior lo podemos observar en el renglón $\left(Z_j - C_j\right)$ *correspondiente.*

x_1*=6,* d_1^+ *=2. Aquí estamos indicando que la meta 1 alcanza su valor óptimo en 6 unidades pero la rebasamos en 2 unidades.*

1.5 EJERCICIOS

PROBLEMA1: Plantear como un problema de metas múltiples

Una empresa fabrica dos productos. Cada producto requiere tiempo en dos departamentos de producción: el producto uno requiere veinte horas en el departamento uno y diez horas en el departamento dos; el producto dos requiere diez horas en el departamento uno y diez horas en el dos. El tiempo de producción está limitado a sesenta horas en el departamento uno y cuarenta en el departamento dos.

La contribución de los dos productos a las utilidades es de cuarenta y ochenta pesos respectivamente:

a) El objetivo de los administradores es maximizar las utilidades
b) Además de la meta de las utilidades, se incluyen cuando menos dos unidades de cada tipos de producto

SOLUCIÓN:

Antes de comenzar hay que recopilar los datos del problema para que sea fácil su planteamiento, para lo anterior conviene hacer el compendio en una tabla.

	DEPTO 1	DEPTO 2	UTILIDADES
PRODUCTO 1	20	10	$40
PRODUCTO 2	10	10	$80
	60 hrs	40 hrs	

Definimos las variables:

x_1*: Cantidad del producto uno a producir*

x_2*: Cantidad del producto dos a producir*

Planteamos el problema como ***programación lineal***

$$(PL)\begin{cases} \max(z) = 40x_1 + 80x_2 \\ \text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ \qquad 10x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lo replanteamos per ahora como ***programación de una sola meta***

$$(PM)\begin{cases} \min(z) = d_1^- \\ \text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ \qquad 10x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ \qquad 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \\ \qquad d_1^-, d_1^+ \geq 0 \end{cases}$$

Donde:

$\min(z) = d_1^-$*: Trata de minimizar el que no se alcance la meta de maximizar las utilidades, en otras palabras, se minimiza la suma de las desviaciones*

$\left.\begin{array}{l} 20x_1 + 10x_2 \le 60 \\ 10x_1 + 10x_2 \le 40 \end{array}\right\}$ *Representan las restricciones estructurales*

$\$Y$ *: es la meta de utilidades que se propone en base a experiencia del negocio*

$40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y$ *: Restricción de utilidades*

Ahora finalmente se agrega la meta del inciso b para formar el ***problema de programación de metas múltiples sin prioridades*** *(Se van a tener tres metas)*

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = d_1^- + d_2^- + d_3^- \\
\text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \le 60 \\
\qquad\quad 10x_1 + 10x_2 \le 40 \\
\qquad\quad 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y \\
\qquad\quad x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2 \\
\qquad\quad x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2 \\
\qquad\quad x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \ge 0
\end{cases}
$$

Donde:

$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2$: *Representa que se incluyen cuando menos dos unidades del producto uno*

$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2$: *Representa que se incluyen cuando menos dos unidades del producto dos*

$\min(z) = d_1^- + d_2^- + d_3^-$ *: Al minimizar* d_2^- *y* d_3^- *lo que estamos haciendo es asegurar que se van a producir al menos dos unidades de cada tipo de producto, esta parte nos ayuda a representar la frase "al menos".*

Como alternativa podemos plantear el ***problema de programación de metas múltiples con prioridades.***

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = P_1 d_1^- + P_2\left(d_2^- + d_3^-\right) \\
\text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \le 60 \\
\qquad 10x_1 + 10x_2 \le 40 \\
\qquad 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y \\
\qquad x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2 \\
\qquad x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2 \\
\qquad x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \ge 0
\end{cases}
$$

Donde:

P_n *: Es la prioridad* n

En este caso la primer prioridad la tiene la meta uno $P_1 d_1^-$ *y la segunda prioridad la tienen la meta dos y tres* $P_2\left(d_2^- + d_3^-\right)$

Otro planteamiento de ***problema de programación de metas múltiples con prioridades*** *sería:*

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^- \\
\text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \le 60 \\
\qquad 10x_1 + 10x_2 \le 40 \\
\qquad 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y \\
\qquad x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2 \\
\qquad x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2 \\
\qquad x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \ge 0
\end{cases}
$$

En este caso la primer prioridad la tiene la meta uno $P_1 d_1^-$ *, la segunda prioridad la tienen la meta dos* $P_2 d_2^-$ *y la tercer prioridad la tiene la meta tres* $P_3 d_3^-$ *.*

Finalmente podemos plantear el ***problema de programación de metas múltiples con prioridades y ponderaciones.***

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = P_1 d_1^- + P_2\left(k_2 d_2^- + k_3 d_3^-\right) \\
\text{s.a} \qquad 20x_1 + 10x_2 \le 60 \\
\qquad\quad 10x_1 + 10x_2 \le 40 \\
\qquad\quad 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ = \$Y \\
\qquad\quad x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2 \\
\qquad\quad x_2 + d_3^- - d_3^+ = 2 \\
\qquad\quad x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \ge 0
\end{cases}
$$

Donde:

k_i *: es la ponderación de la meta* i

Problema 2: Plantear como un problema de metas múltiples

La Beta Corporation está considerando la asignación de un presupuesto de publicidad de $150,000 a dos revistas (A y B). Las exposiciones que se logran por cada cien dólares de gastos de publicidad son 1,000 y 750 respectivamente, para las dos revistas; y se ha pronosticado que se obtiene un promedio de $10 de ventas por cada exposición a la publicidad. Los administradores han decidido que no puede asignarse más del 75% del presupuesto a la revista A. La compañía ha indicado que le gustaría lograr exactamente 1.5 millones de exposiciones con su programa de publicidad. El objetivo de los administradores es asignar sus recursos de manera que maximicen las ventas.

SOLUCIÓN

Realizamos la concentración de los datos para facilitar la abstracción del problema

	Exposiciones	Presupuesto	Ventas $10
Revista A	1,000 x 100 dólares	$\leq 75\%$	
Revista B	750 x 100 dólares		
	$150,000	$1,500,000	

Definimos las variables del problema:

x_1*: Presupuesto de la revista A*

x_2*: Presupuesto de la revista B*

Planteamos de inicio el problema como un PPL (problema de programación lineal)

$$(PPL)\begin{cases} \max(z) = 100x_1 + 75x_2 \\ s.a \qquad x_1 + x_2 \leq 150,000 \\ \qquad x_1 \leq 0.75(150,000) \\ 10x_1 + 7.5x_2 = 1,500,000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

El problema no tiene solución como un (PPL), entonces recurrimos a la programación por objetivos, quedando definido el problema de la siguiente manera:

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = d_1^- - d_1^+ \\
s.a \qquad x_1 + x_2 \le 150,000 \\
\qquad x_1 \le 0.75(150,000) \\
10x_1 + 7.5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1,500,000 \\
x_1, x_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0
\end{cases}
$$

Donde:

$\min(z) = d_1^- - d_1^+$ *: Al minimizar esta función lo que estamos haciendo es que se logren exactamente 1, 500,000 exposiciones con el programa de publicidad, es decir,* d_1^- *quiere decir que nos falten exposiciones y* d_1^+ *quiere decir que nos sobren exposiciones.*

PROBLEMA 3: Plantear como un problema de metas múltiples

Una compañía fabrica tres clases de abrigos para caballeros: deportivos (A), formal (B) y ejecutivo (C). La compañía es un negocio propiedad de una familia y operando por ésta, pero la mayoría de los empleados nos son miembros de la familia. Debido a la naturaleza competitiva del negocio a la gran demanda de la mano de obra de la industria, es de gran importancia mantener satisfechos a los empleados.

Los administradores de la compañía consideran que una medida importante para satisfacer las necesidades de sus empleados es ofrecerles empleo de tiempo completo, aun cuando esto exija producir en exceso e incurrir en algunas pérdidas. Por fortuna, los administradores esperan que la demanda de sus productos siga siendo bastante elevada. De hecho, para satisfacer parte de la demanda, podría ser necesario operar en tiempo extra.

Las tres líneas de abrigo de la compañía se fabrican en dos departamentos. La tabla es un programa semanal de requerimientos de mano de obra y materiales para el proceso de fabricación. Los precios unitarios para las tres líneas son

$100, $150 y $250 respectivamente. Los administradores han determinado que a un nivel normal de producción los costos variables son de $70, $80 y $100 por abrigo respectivamente. Los costos tiempo extra son $2 por hora encima del salario normal para el departamento 1 y $3 para el 2. Los materiales extra pueden adquirirse a un costo de $2 por yarda por encima del costo normal.

Los administradores de la compañía han pronosticado que la demanda del mercado para el abrigo deportivo es de 1000 unidades por semana y la demanda de las otras dos líneas es de 500 y 200 unidades respectivamente. El nivel de equilibrio de producción es de 100 unidades del producto deportivo y 50 unidades de cada uno de los otros productos.

Para ayudarse a analizar el problema los administradores de la compañía han identificado en orden de prioridad las siguientes metas:

1. Utilizar toda la capacidad de producción disponible, es decir, no debe existir tiempo muerto en ningún departamento
2. Alcanzar los niveles de producción de punto de equilibrio en cada una de las líneas de productos
3. Dado que probablemente exista escasez de mano de obra en el departamento 2, y dado que puede enviarse personal, en tiempo extra, a ese departamento, el tiempo extra aquí puede ser mayor que el del departamento 1. Sin embargo, el tiempo extra en el departamento 2 debe estar limitado a 600. El tiempo extra del departamento 1 no debe ser mayor de 200 horas
4. Alcanzar una meta de utilidades semanales de $20,000
5. Satisfacer todas las demandas del mercado. Dentro de esta meta, deben de utilizarse ponderaciones distintas para reflejar la contribución unitaria normal a las utilidades

REQUERIMIENTOS DE PRODUCTOS (por unidad)

	Deportivo	Formal	Ejecutivo	Recursos
Depto. 1	4 h	12 h	10 h	8,000 h
Depto. 2	6h	6 h	16 h	4,000 h
Material	$8y^2$	$6y^2$	$12y^2$	$8,000y^2$

SOLUCIÓN

Primero como todo problema lo conveniente es concentrar los datos para que sea más sencillo su planteamiento.

Deportivos (A)	***$100***	***$70***	***1000 unidades***	***100 unidades***
Formal (B)	*$150*	*$80*	*500 unidades*	*50 unidades*
Ejecutivo (C)	*$250*	*$100*	*200 unidades*	*50 unidades*

Depto. 1	***$2***	***200 materiales***
Depto. 2	*$3*	*300 materiales*
Utilidades	*$20,000*	

Definimos las variables a emplear:

x_1*: Número de abrigos deportivos a producir*

x_2*: Número de abrigos formales a producir*

x_3*: Número de abrigos ejecutivos a producir*

Planteamos el problema como un problema de programación lineal:

$$(PPL)\begin{cases} \max(z) = 100x_1 + 150x_2 + 250x_3 - 70x_1 - 80x_2 - 100x_3 \\ s.a \quad 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 \le 8,000(\text{horas}) \\ 6x_1 + 6x_2 + 16x_3 \le 4,000(\text{horas}) \\ 8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \le 8,000(\text{yardas}) \\ x_1 \le 100(\text{equilibrio}) \\ x_1 \ge 1,000(\text{demandas}) \\ x_2 \le 50(\text{equilibrio}) \\ x_2 \ge 500(\text{demandas}) \\ x_3 \le 50(\text{equilibrio}) \\ x_3 \ge 200(\text{demandas}) \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ahora planteamos de acuerdo a programación de metas múltiples con prioridades y ponderaciones:

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = P_1\left(d_1^- + d_2^-\right) + P_2\left(d_3^- + d_4^- + d_5^-\right) + P_3\left(d_6^- + d_7^-\right) + P_4\left(d_8^-\right) + P_5\left(30d_9^- + 70d_{10}^- + 150d_{11}^-\right) \\
s.a \quad 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + d_1^- - d_1^+ = 8,000(\text{horas}) \\
6x_1 + 6x_2 + 16x_3 + d_2^- - d_2^+ = 4,000(\text{horas}) \\
8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \le 8,000(\text{yardas}) \\
x_1 + d_3^- - d_3^+ = 100(\text{equilibrio}) \\
x_2 + d_4^- - d_4^+ = 50(\text{equilibrio}) \\
x_3 + d_5^- - d_5^+ = 50(\text{equilibrio}) \\
d_1^+ + d_6^- - d_6^+ = 200 \\
d_2^+ + d_7^- - d_7^+ = 600 \\
30x_1 + 70x_2 + 150x_3 + d_8^- - d_8^+ = 20,000 \\
x_1 + d_9^- - d_9^+ = 1000(\text{demanda}) \\
x_2 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 500(\text{demanda}) \\
x_3 + d_{11}^- - d_{11}^+ = 200(\text{demanda}) \\
x_1, x_2, x_3, d_i \ge 0 \qquad \text{con } i = 1,\ldots,11
\end{cases}
$$

PROBLEMA 4: Plantear como un problema de metas múltiples

La KEYSTONE ELECTRONICS fabrica y comercializa aparatos novedosos de video. La compañía está organizada con base en centros de utilidad, es decir, se determina el desempeño de cada centro operativo (unidad) de la compañía a través de las utilidades semanales que genera. El centro de utilidades de tableros de circuitos los fabrica de dos clases, que se utilizan en diversos productos finales que manufactura la compañía. Se requieren 15 minutos para fabricar el tablero de circuito Nº 1; 24 minutos para fabricar el Nº 2. Las horas normales de operación para el centro son 240 horas semanales. Las utilidades para los tableros son $4 para el tablero Nº 1 y $5 para el Nº 2. El gerente del centro de utilidades ha listado en orden de prioridad, las siguientes metas:

- Meta 1. Alcanzar utilidades semanales de cuando menos $4,000
- Meta 2. Limitar la operación de tiempo extra del centro a 24 horas
- Meta 3. Cumplir con pedidos comprometidos de 100 unidades del tablero Nº 1 y 150 unidades del tablero Nº 2
- Meta 4. Surtir demanda pronosticada para cada circuito de 500 unidades del tablero Nº 1 y 400 unidades para el Nº 2
- Meta 5. Utilizar todas las horas – hombre disponibles en horario normal

SOLUCIÓN

Definimos nuestras variables:

x_1*: Nº de tableros del circuito Nº 1 producidos*

x_2*: Nº de tableros del circuito Nº 2 producidos*

$$
(PM)\begin{cases}
\min(z) = P_1\left(d_1^-\right) + P_2\left(d_3^+\right) + P_3\left(d_4^- + d_5^-\right) + P_4\left(d_6^- + d_7^-\right) + P_1\left(d_2^-\right) \\
s.a \quad 4x_1 + 5x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4{,}000 \\
15x_1 + 24x_2 + d_2^- - d_2^+ = 240\text{horas} * 60\text{minutos} \\
d_2^+ + d_3^- - d_3^+ = 24\text{horas} * 60\text{minutos} \\
x_1 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\
x_2 + d_5^- - d_5^+ = 150 \\
x_1 + d_6^- - d_6^+ = 500 \\
x_2 + d_7^- - d_7^+ = 400 \\
x_1, d_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, 7
\end{cases}
$$

PROBLEMA 5: Plantear empleando las metas múltiples

La T&L MACHINE COMPANY fabrica tres tipos diferentes de baleros que se utilizan en equipo textil. Todos los baleros se fabrican en una operación de prensado. El tiempo de fabricación que se requiere para elaborar un balero básico es de 5 horas, en tanto que uno de alta precisión es de 12 horas de tiempo de producción. El balero de aplicación general requiere 8 horas de tiempo de producción. La compañía dispone de 340 horas semanales de capacidad de producción. Las utilidades unitarias que se obtienen de la venta de baleros son: $1,000 por balero básico; $1,450 por balero de aplicación general y $2,500 por los de alta precisión. El departamento de mercadotecnia de T & L ha señalado que el comportamiento de la demanda de los baleros implica que la compañía puede vender todos que fabrica. Los administradores de T & L han listado las siguientes metas (en orden de importancia):

- Meta 1: Utilizar toda la capacidad de producción existente
- Meta 2: Alcanzar las metas semanales de ventas por cada tipo de balero: 20 básicos, 24 de aplicación general y 15 de alta precisión. Asignar pesos diferenciales de acuerdo con la utilidad relativa de cada tablero
- Meta 3: Limitar el tiempo extra a 40 horas por semana
- Meta 4: Maximizar las utilidades

SOLUCIÓN

Identificamos las variables a emplear:

x_1 : *Nº de baleros básicos*

x_2 : *Nº de baleros de alta precisión*

x_3 : *Nº de baleros de aplicación general*

Ahora involucrando las prioridades por meta, los costos y las horas obtenemos nuestro modelo matemático:

$$\begin{cases} \min(z) = P_1\left(d_1^- - d_1^+\right) + P_2\left(1000d_2^- + 2500d_3^- + 1450d_4^-\right) + d_5^+ + d_6^- \\ s.a \qquad 5x_1 + 12x_2 + 8x_3 + d_1^- - d_1^+ = 340 \\ \qquad\qquad x_1 + d_2^- - d_2^+ = 20 \\ \qquad\qquad x_2 + d_3^- - d_3^+ = 15 \\ \qquad\qquad x_3 + d_4^- - d_4^+ = 24 \\ \qquad\qquad d_1^+ + d_5^- - d_5^+ \leq 40 \\ \qquad\qquad 1000x_1 + 2500x_2 + 1450x_3 + d_6^- - d_6^+ = Xganancias \end{cases}$$

PROBLEMA 6: Plantear como metas múltiples

La DELTA MANUFACTURING INC. Fabrica dos tipos de productos (A y B). La fabricación de ambos productos requiere dos operaciones. La primera operación se lleva a cabo en el departamento Nº 1. La fabricación del producto A requiere 3 horas en la primera operación en tanto que el producto B requiere 4 horas en esta misma operación. La segunda operación puede llevarse a cabo ya sea en el departamento 2 o en el 3. El tiempo necesario de producción en el departamento 2 para cada unidad A es de 3 horas; para unidad de B de 6 horas. Si se emplea el departamento 3, el tiempo de producción para cada unidad de A es de 8 horas y para B es de 10 horas. Existen 3,000, 3,600 y 5,000 horas disponibles de tiempo de producción en los respectivos departamentos. Los costos de mano de obra asociados con los tres departamentos son:

Departamento 1: $6.50 por hora

Departamento 2: $8.00 por hora

Departamento 3: $5.00 por hora

La DELTA tiene una demanda de 400 unidades para el producto A y 620 unidades para el producto B. La compañía ha establecido las siguientes metas (en orden de prioridad):

- Meta 1: Satisfacer la demanda de los clientes
- Meta 2: Limitar el tiempo extra en el departamento 2 a 1,000 horas
- Meta 3: Minimizar los costos totales
- Meta 4: Minimizar el tiempo extra en los departamentos 1 y 3

SOLUCIÓN

Como este problema cuenta con mucha información es conveniente hacer una tabla que nos simplifique la identificación de los componentes:

	Operación 1	Operación 2		Demanda
	Depto. 1	Depto. 2	Depto. 3	
Producto A	3 horas	3 horas	8 horas	400
Producto B	4 horas	6 horas	10 horas	620
Disponibilidad en las horas de producción	3,000 horas	3,600 horas	5,000 horas	
Costos de mano de obra	$6.50 por hora	$8.00 por hora	$5.00 por hora	

x_1 : Nº de artículos producidos del producto A

x_2 : Nº de artículos producto del producto B

$$\begin{cases} \min(z) = P_1\left(d_1^- + d_2^-\right) + P_2\left(d_3^+\right) + P_3\left(d_4^+ + d_5^+\right) + P_4\left(d_6^+ + d_7^+\right) \\ s.a \qquad x_1 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ \qquad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 620 \\ \qquad 3x_1 + 6x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \\ \qquad 6.5\left(3x_1 + 4x_2\right) + 8\left(3x_1 + 6x_2\right) + d_4^- - d_4^+ = 5,000 \\ \qquad 6.5\left(3x_1 + 4x_2\right) + 5\left(8x_1 + 10x_2\right) + d_5^- - d_5^+ = 10,000 \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 + d_6^- - d_6^+ = 3,000 \\ \qquad 8x_1 + 10x_2 + d_7^- - d_7^+ = 5,000 \\ \qquad 3x_1 + 6x_2 \le 3,600 \end{cases}$$

Problema 7: Plantear empleando programación de metas

El NW SHOPPING MALL organiza eventos especiales para atraer a clientes potenciales a sus establecimientos. Los dos eventos más populares, que parecen atraer a los adolescentes, al grupo de jóvenes y de mediana edad y a los ciudadanos de la tercera edad, son los conciertos con orquestas y los espectáculos de arte y exposiciones de artesanías. Los costos por presentación de una orquesta y de un grupo de arte son de 1500 y de 3000 dólares, respectivamente. El presupuesto anual total (estricto) asignado para los dos eventos es de 15000 dólares. El gerente del centro comercial calcula la asistencia a los eventos como sigue:

Evento	**Número de asistentes por presentación**		
	Adolescentes	Jóvenes y de mediana edad	Ciudadanos de la tercera edad
Concierto con orquesta	200	100	0
Espectáculos de arte	0	400	250

El gerente ha establecido metas mínimas de 1000, 1200 y 800 asistentes para los adolescentes, el grupo de jóvenes de mediana edad y los ciudadanos de la tercera edad, respectivamente.

SOLUCIÓN

Planteamos nuestras variables:

x_1*: Asistentes al concierto de orquesta*

x_2*: Asistentes al espectáculo de arte*

$$\begin{cases} \min(z) = \left(d_1^- + d_1^+\right) + \left(d_2^- + d_3^- + d_4^-\right) \\ s.a. \qquad 1500x_1 + 3000x_2 = 15000 \\ \qquad 200x_1 + d_2^- - d_2^+ = 1000 \\ \qquad 100x_1 + 400x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1200 \\ \qquad 250x_1 + d_4^- - d_4^+ = 8000 \\ \qquad x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

Problema 8: Plantear utilizando programación por objetivos

CIRCLE K FARMS consume 3 toneladas diarias de alimento especial. El alimento, una mezcla de piedra caliza, maíz y semilla de soya, debe satisfacer los siguientes requerimientos alimenticios:

Calcio: por lo menos al 0.8% pero no más del 1,2%

Proteínas: por lo menos el 22%

Fibra: como máximo el 5%

La siguiente tabla proporciona el contenido alimenticio de los ingredientes del alimento:

	Libra por libra de ingrediente		
Ingrediente	Calcio	Proteínas	Fibra
Piedra caliza	0.380	0.00	0.00
Maíz	0.001	0.09	0.02
Semilla de soya	0.002	0.50	0.08

Nota: Se plantea utilizando programación de metas pues no existen costos para plantear como PL.

SOLUCIÓN

Como todo problema definimos las variables y posteriormente planteamos usando las variables de desviación.

x_1*: Cantidad de piedra caliza*

x_2*: Cantidad de maíz*

x_3*: Cantidad de semilla de soya*

$$\begin{cases} \min(z) = d_1^- + d_2^+ + d_3^- + d_4^+ \\ s.a. \quad 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 + d_1^- - d_1^+ = 0.008(x_1 + x_2 + x_3) \\ \quad 0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 + d_2^- - d_2^+ = 0.012(x_1 + x_2 + x_3) \\ \quad 0.09x_2 + 0.50x_3 + d_3^- - d_3^+ = 0.22(x_2 + x_3) \\ \quad 0.02x_2 + 0.08x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0.05(x_2 + x_3) \\ \quad x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

Problema 9: Plantear empleando programación de metas

Se fabrican 2 productos en dos máquinas secuenciales. La siguiente tabla proporciona los tiempos de empleo de las máquinas en minutos por unidad para los dos productos.

Máquina	Producto 1	Producto 2
1	5	3
2	6	2

La cuota diaria de producción para los dos productos es de 80 y 60 unidades, respectivamente. Cada máquina trabaja 8 horas al día. Las horas extra, aun cuando no son deseables, se puede utilizar, si es necesario, para cumplir con la cuota de producción.

SOLUCIÓN

Planteando nuestras variables podemos dar paso a la programación de metas

x_1*: Unidades del producto 1*

x_2*: Unidades del producto 2*

$$\begin{cases} \min(z) = \left(d_1^- + d_2^+\right) + \left(d_3^+ + d_4^+\right) \\ s.a. \quad x_1 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ \quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\ \quad 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 480 \\ \quad 6x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 480 \\ \quad x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Problema 10: Plantear usando programación por objetivos

La familia Von Trapp está en proceso de mudarse a otra ciudad, donde tanto el padre como la madre han aceptado nuevos trabajos. Al tratar de encontrar una ubicación ideal para su hogar, los Von Trapp hicieron una lista de las siguientes metas:

a) Debe estar tan cerca como sea posible del lugar de trabajo de la señora von Trapp (dentro de un radio de $\frac{1}{4}$ de milla)
b) Debe estar tan lejos como sea posible del ruido del aeropuerto (por lo menos a 10 millas)
c) Debe estar razonablemente cerca de un centro comercial (dentro de un radio de 1 milla)

Al prepararse para resolver el problema, el señor y la señora Von Trapp localizaron las coordenadas x – y (en relación con una referencia en la ciudad) del trabajo, el aeropuerto y un centro de compras como (1,1), (20,15) y (4,7), respectivamente (todas las distancias son en millas).

Nota: Las restricciones no son necesariamente lineales)

SOLUCIÓN

$A:(x,y)$ *Coordenadas de la casa de la familia Von Trapp*

$B:(1,1)$ *Coordenadas del trabajo de la Sra. Von Trapp*

$C:(20,15)$ *Coordenadas del aeropuerto*

$D:(4,7)$ *Coordenadas del centro comercial*

Como el problema habla acerca de radios recordemos la ecuación de distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.

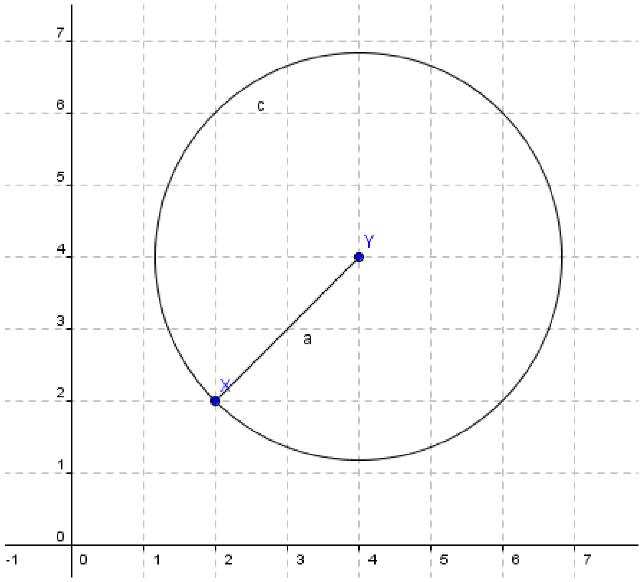


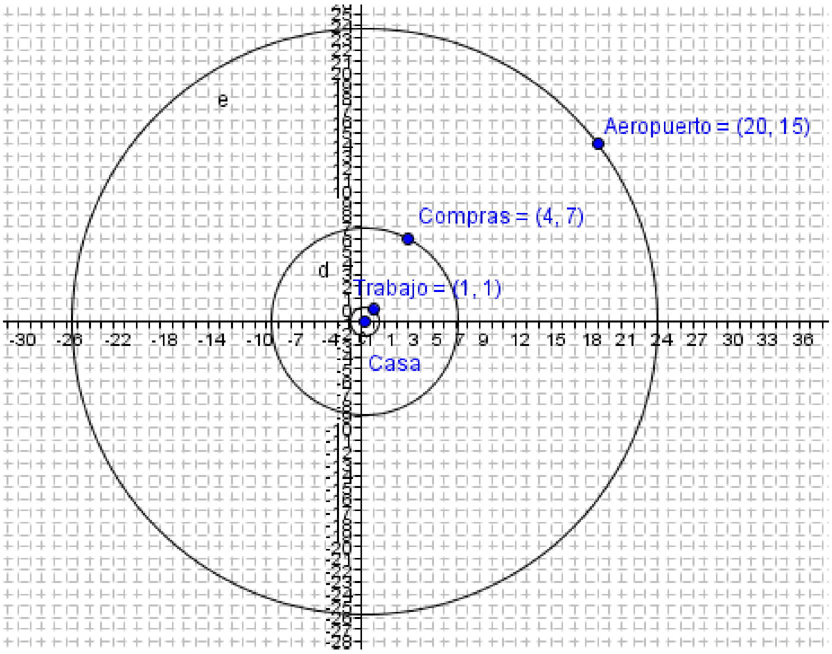
Ilustración 4 Problema de restricciones no lineales

Donde:

X= (x_1,x_2) *y* *Y=* (y_1,y_2) *entonces la ecuación deseada es:* $d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Utilizándola para resolver nuestro problema tenemos lo siguiente:

$$
\begin{cases}
\min(z) = d_1^+ + d_2^- + d_3^+ \\
s.a. \quad \text{a)} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + d_1^- - d_1^+ = \dfrac{1}{4} \\
\qquad\quad \text{b)} \sqrt{(x-20)^2 + (y-15)^2} + d_2^- - d_2^+ = 10 \\
\qquad\quad \text{c)} \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} \ + d_3^- - d_3^+ = 1 \\
\qquad\quad x, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \qquad i = 1,2,3
\end{cases}
$$



2 PROGRAMACIÓN ENTERA

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará la diferencia entre la programación lineal y la programación entera. Planteará y resolverá problemas aplicando algoritmos principales

2.1 PROGRAMACIÓN ENTERA: DIFERENCIA CON LA PROGRAMACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN: Un **problema de programación entera (PPE)** es un problema en el cual sus variables son enteras o una combinación de variables enteras y continuas.

CLASIFICACIÓN GENERAL DE LOS PROBLEMAS ENTEROS

- **PROBLEMA ENTERO PURO**
  Es un (PPE) en el cual todas las variables son enteras

$$(PPE)\begin{cases} opt(z) = CX \\ s.a \qquad AX \le b \\ \qquad\quad X \ge 0 \\ \qquad\quad X \in Z^{+} \end{cases}$$

Ecuación 2 Forma general de un Problema entero puro

- **PROBLEMA ENTERO MIXTO**
  Es un (PPE) en el cual algunas de las variables son enteras y otras son continuas

$$(PPE)\begin{cases} opt(z) = CX + DY \\ s.a \qquad AX + BY \leq b \\ \qquad X, Y \geq 0 \\ \qquad X \in Z^{+} \end{cases}$$

Ecuación 3 Forma General del Problema Entero Mixto

- **PROBLEMA BINARIO**

  Es un (PPE) en el cual sus variables son 0 o 1

$$(PPE)\begin{cases} opt(z) = CX \\ s.a \qquad AX \leq b \\ \qquad X = 0 \text{ o } 1 \end{cases}$$

Ecuación 4 Forma General del Problema Binario

El problema binario se puede considerar dentro de un problema entero puro

2.2 FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

EJEMPLO

$$(PPE)\begin{cases} \max(z) = 3x_1 + 5x_2 \\ s.a \qquad 5x_1 + 8x_2 \leq 20 \ldots (1) \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \\ \qquad x_1, x_2 \in Z^{+} \end{cases}$$

Realizar el planteamiento anterior mediante programación entera.

SOLUCIÓN:

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = 0 \ldots (1)$$
$$5x_2 = -3x_1$$
$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1$$

x_1	x_2
0	0
$\frac{5}{3}$	-1

$$5x_1 + 8x_2 \le 20 \ldots (1)$$
$$8x_2 \le 20 - 5x_1$$
$$x_2 \le \frac{20}{8} - \frac{5}{8}x_1$$

x_1	x_2
0	$\frac{20}{8}$
$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{8}$

La solución se encontrará en el primer cuadrante

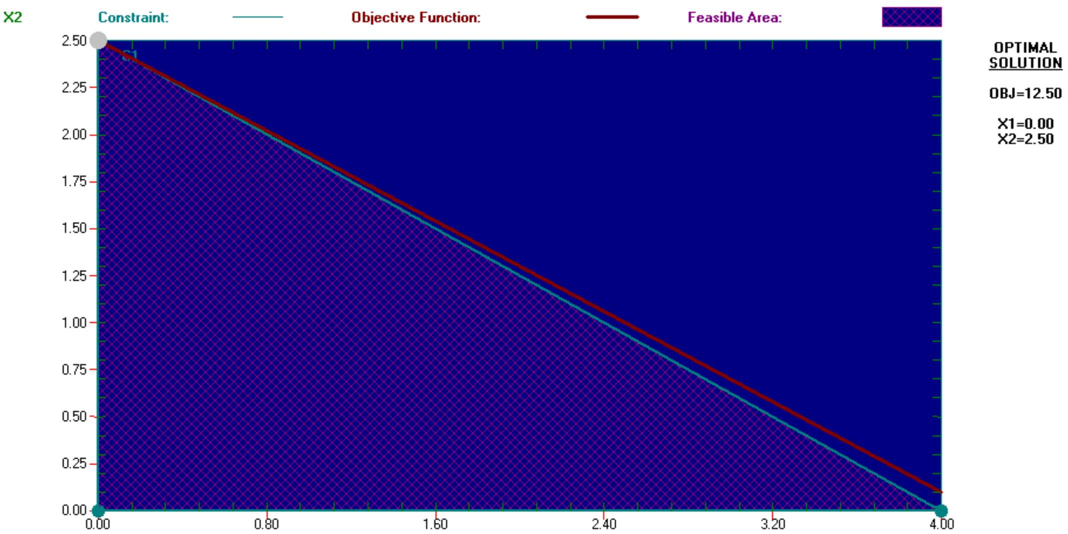


Ilustración 5 Método Gráfico
Imagen obtenida del WinQSB apartado *linear and Integer Programming*

MÉTODO DE REDONDEO

En este método se corre el riesgo de pérdida de información o dejar fuera del conjunto.

x_1	x_2	REDONDEAR x_2	FUNCIÓN OBJETIVO
0	$\frac{20}{8}=2.5$	2	$\max(z)=3(0)+5(2)=10$
0	$\frac{20}{8}=2.5$	3	$\max(z)=3(0)+5(3)=15$

El redondeo número 2 no funciona pues el punto $x_1=0$ y $x_2=3$ sale del conjunto solución.

MÉTODO DE ENUMERACIÓN DE PUNTOS

En este método se vuelve muy engorroso mostrar todos los puntos

COORDENADAS	FUNCIÓN OBJETIVO
$(0,0)$	$z\max=3(0)+5(0)=0$
$(1,0)$	$z\max=3(1)+5(0)=3$
$(2,0)$	$z\max=3(2)+5(0)=6$
$(3,0)$	$z\max=3(3)+5(0)=9$
$(4,0)$	$z\max=3(4)+5(0)=12$
$(1,1)$	$z\max=3(1)+5(1)=8$
$(0,1)$	$z\max=3(0)+5(1)=5$
$(0,2)$	$z\max=3(0)+5(2)=10$
$(2,1)$	$z\max=3(2)+5(1)=11$

Donde toda la columna de coordenadas forma el conjunto solución C y la solución óptima está dada por la pareja $(4,0)$ dando como función objetivo $z\max=3(4)+5(0)=12$.

RESTRICCIONES O BIEN

$$\begin{cases} f(x_1,...,x_n) \le 0 \\ g(x_1,...,x_n) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_1,...,x_n) \le My \\ g(x_1,...,x_n) \le M(1-y) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \; y = 0 \;\; \Rightarrow f \le 0 \;\; \& \;\; g \le M \qquad M >> 0$$

$$\text{Si } \; y = 1 \;\; \Rightarrow f \le M \;\; \& \;\; g \le 0$$

$$x_i \ge 0 \quad \text{factibilidad}$$

Ecuación 5 Restricciones o bien

RESTRICCIONES "SI" ENTONCES

- Si $f(x_1,...,x_n) > 0$ se satisface entonces se tiene que se satisface $g(x_1,...,x_n) \ge 0$
- Si $f(x_1,...,x_n) > 0$ no se satisface entonces $g(x_1,...,x_n)$ se puede o no satisfacer

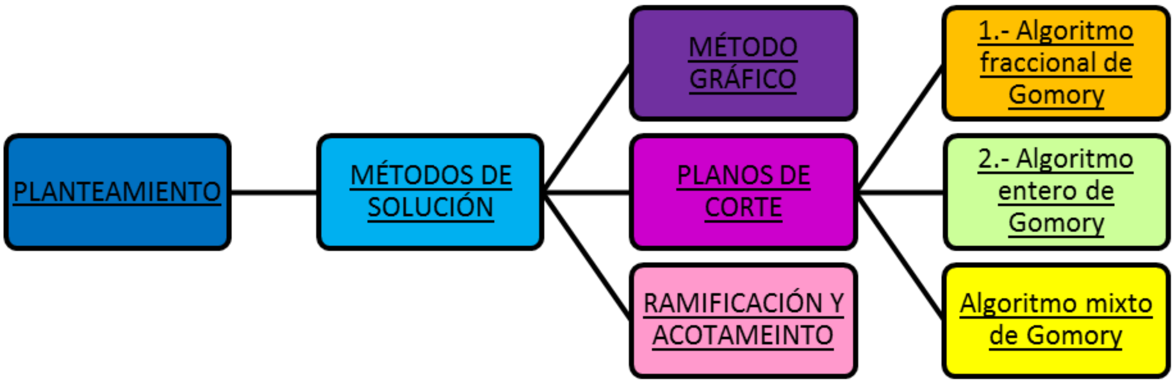
$$\left.\begin{array}{l} -g(x_1,...,x_n) \le 0 \\ g(x_1,...,x_n) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -g(x_1,...,x_n) \le My \\ g(x_1,...,x_n) < M(1-y) \end{array}\right\}$$

$$\text{Si } \; y = 0 \;\; \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -g(x_1,...,x_n) \le 0 \\ f(x_1,...,x_n) \le M \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(x_1,...,x_n) \ge 0 \\ f(x_1,...,x_n) \le M \end{array}\right\}$$

$$\text{Si } \ y=1 \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -g\left(x_1,\ldots,x_n\right)\le 0 \\ f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\le M \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g\left(x_1,\ldots,x_n\right)\ge -M \\ f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\le 0 \end{array}\right\}$$

Ecuación 6 Restricciones Si entonces

2.3 ALGORITMOS DE SOLUCIÓN DE PROGRAMACIÓN ENTERA



PROBLEMA TIPO MOCHILA

Métodos de solución:

- **BINARIO**

EJEMPLO

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{llevo el articulo} \\ 0 & \text{no llevo el articulo} \end{cases}$$

Ecuación 7 Problema tipo mochila

- **ENTERO PURO**

Aquí se convierte la restricción a $X_i \leq 1$ y esto da la posibilidad de tomar 0 o 1

$$\sum V_i X_i \leq V$$

Donde:

V_i: Volumen de cada artículo

V: Volumen de la mochila

MÉTODOS DE PLANOS DE CORTE

Estos métodos fueron los primeros que aparecieron en la solución de problemas de PE.

Definición:

$$[X] = \max_{Y \in \mathbb{Z}} Y \leq X$$

$$I \ldots \begin{cases} \max(z) = CX \\ s.a \quad AX = b \\ \qquad\; X \geq 0 \\ \qquad\; X \in Z \end{cases}$$

Una restricción típica de I se puede escribir como:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = x_{B_i}$$

$$\sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = x_{B_i}$$

Con $i \in 1,\ldots,m$ $j \in 1,\ldots,n$

$$\sum \left[a_{ij} \right] X_j + \sum \left(a_{ij} - \left[a_{ij} \right] \right) X_j + X_{n+i} = \left[X_{B_i} \right] + \left(X_{B_i} - \left[X_{B_i} \right] \right)$$

$$\sum \left[a_{ij} \right] X_j + X_{n+i} - \left[X_{B_i} \right] = \left(X_{B_i} - \left[X_{B_i} \right] \right) - \sum \left(a_{ij} - \left[a_{ij} \right] \right) X_j$$

La expresión:

$$\sum \left(a_{ij} - \left[a_{ij} \right] \right) X_j \geq \left(X_{B_i} - \left[X_{B_i} \right] \right)$$

Ecuación 8 Ecuación "Corte" para el método de Planos de Corte

Constituye lo que se llama **CORTE.**

ALGORITMO FRACCIONAL DE GOMORY

1º Se resuelve el problema entero como un problema lineal olvidándose de las condiciones de integralidad

2º Si el resultado óptimo del paso 1º o del paso 3º es entero pare.
Se ha obtenido el resultado óptimo del problema original. De otra manera continúe en el paso 3º

3º Seleccione el máximo $\left(X_{B_i} - \left[X_{B_i} \right] \right)$ (incluyendo el renglón z) y genere un corte:

$$\sum \left(a_{ij} - \left[a_{ij} \right] \right) X_j \geq \left(X_{B_i} - \left[X_{B_i} \right] \right)$$

Añádase este corte como una restricción adicional junto con su variable de holgura, exceso o superfluo.

4º Resuélvase el problema por el algoritmo dual simplex y regrese al paso 2º

Sea

$$(I)\ldots\begin{cases}\max(z)=CX\\ s.a\ \ AX=b\\ \qquad X\geq 0\end{cases}$$

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+i}=x_{B_i}$$

TEOREMA: Dado (I) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\left[a_{ij}\right]\right)X_j\geq\left(X_{B_i}-\left[X_{B_i}\right]\right)\qquad i\in 1,\ldots,m$$

Demostración:

Una restricción de (I)

(1) $\quad\sum a_{ij}x_j+x_{n+i}=x_{B_i}$

Multiplicando por h con $h>0$ se tiene:

(2) $\quad\sum ha_{ij}X_j+hX_{n+i}=hX_{B_i}$

(3) $\quad\sum[h]a_{ij}X_j+[h]X_{n+i}=[h]X_{B_i}$

De (3) $\sum\left[ha_{ij}\right]X_j+[h]X_{n+i}\leq hX_{B_i}$ con $\sum\left[ha_{ij}\right]X_j+[h]X_{n+i}$ entero

(4) $\quad\sum\left[ha_{ij}\right]X_j+[h]X_{n+i}\leq\left[hX_{B_i}\right]$

Restando $(3)-(4)$ se obtiene:

$$(3)-(4)\qquad\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\left[a_{ij}\right]\right)X_j\geq\left(X_{B_i}-\left[X_{B_i}\right]\right)$$

ALGORITMO ENTERO – PURO DE GOMORY

Definición: Un vector X es **lexicográficamente positivo** $(X \succ 0)$ si el primer componente de X distinta de cero es positivo.

EJEMPLO

$X = (3,4,5) \Rightarrow (X \succ 0)$

$Y = (0,-3,4) \Rightarrow (Y \prec 0)$

Dados dos vectores X & Y se dice que $X \succ Y$ si $X - Y \succ 0$

Definición: Una solución básica es **dual factible** si:

$$Z_j - C_j \geq 0 \quad (\max)$$
$$Z_j - C_j \leq 0 \quad (\min)$$

Ecuación 9 Soluciones "Dual Factible"

EJEMPLO

Sea

$$\begin{cases} \max(z) = 3x_1 - 2x_2 \\ s.a \qquad 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad\quad x_1 + 5x_2 + x_4 = 3 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La solución básica sería $x_3 = -4$ y $x_4 = 3$ pero no es factible pues $x_3 < 0$ y además $z_1 - c_1 = -3$ y $z_2 - c_2 = 2$ $\therefore$ no es dual factible.

El Algoritmo puro entero de Gomory requiere:

a) Tener todos los coeficientes de la matriz A enteros
b) Que la solución básica sea dual factible
c) Algún valor X_{B_i} sea menor que cero

ALGORITMO ENTERO – MIXTO DE GOMORY

Este algoritmo sirve para resolver problemas enteros mixtos.

Una restricción de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{ni} = x_{bi}$$

MÉTODO DE BIFURCACIÓN Y ACOTAMIENTO

La **relajación de un (PE)** es resolverlo como un (PL) continuo donde:

$(Solución\ de\ un\ PE) \leq (Solución\ óptima\ de\ un\ PL\ continuo)$

ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

Paso 1.- Resuelva el problema como uno lineal. Si la solución es entera, deténgase si no continuar en el paso 2.

Paso 2.- Elegir arbitrariamente una variable entera X_j cuyo resultado sea fraccionario e igual a X_{B_j}.

Paso 3.- Resolver un par de nuevos problemas similares al problema anterior pero uno con la restricción adicional $X_j \leq \left[X_{B_j}\right]$ y el otro con la restricción adicional $X_j \geq \left[X_{B_j}\right] + 1$

Paso 4.- de los sub problemas resueltos en el paso 3 analizar sólo aquellos sub problemas cuya solución (entera o fraccionaria) sea mayor (MAX) o menor (Min) a cualquiera de las soluciones enteras conocidas (cota inferior)

Paso 5.- Seleccionar el modelo lineal que tenga el máximo (mínimo) valor de la función objetivo en caso de Maximización (Minimización). Si las variables enteras tienen valor entero se ha obtenido la solución óptima, si no regresar al paso 2.

LAS SOLUCIONES DE UN SUBPROBLEMA PUEDEN SER:

1. Que no tenga soluciones factibles
2. Que su solución sea menor que la cota inferior
3. Que sea la solución óptima del problema original

Se dice que un sub problema está agotado si ocurre (1) o (2)

TÉCNICA DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO PARA LA PROGRAMACIÓN BINARIA

La idea básica es dividir (ramificar) y vencerás acotando. Como es muy difícil resolver el problema se divide en sub problemas cada vez más pequeños hasta que se puedan vencer. La división se hace mediante una partición del conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños. La conquista se hace en parte acotando la mejor solución en el subconjunto y después descartando los subconjuntos cuya cota que indique que no es posible que se tenga una solución óptima para el problema original.

Los pasos básicos son:

- Ramificación
- Acotamiento
- Sondeo (eliminación y pruebas de Optimalidad)

ALGORITMO DEL AGENTE VIAJERO

Paso 1.- Partir de un nodo inicial al cual se le asocia un valor inicial de la siguiente forma:

El mínimo que hay que restar a cada renglón para obtener al menos un cero en cada fila más el mínimo que hay que restar a cada columna para que haya al menos un cero en cada columna. Ir al paso 2)

Paso 2.- Se elige arbitrariamente una pareja (i, j) cuya entrada en la matriz resultante, después de la reducción a ceros, sea nula. Su ramificación es:

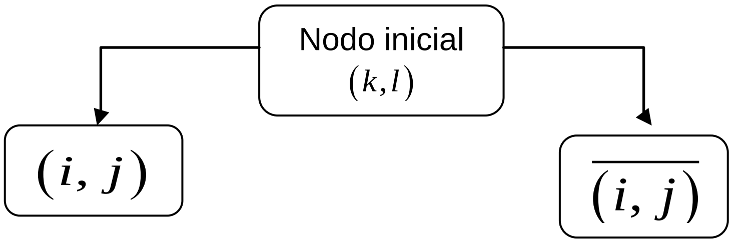


Ilustración 6 Diagrama del Algoritmo del viajero

Nota 1: (i, j) Significa que el evento j debe ocurrir después del i

$\overline{(i, j)}$ Significa que el evento j no debe ocurrir después del i

Nota 2: Se supone que ambas ramificaciones emanan del nodo (k,l)

Paso 3: El costo de $\overline{(i, j)}$ es el costo asociado al nodo (k,l) más la suma de la matriz asociada a (k,l), del menor elemento en la fila i, diferente del elemento en la posición (i, j), más el menor elemento de la columna j, diferente al elemento (i, j)

El costo de (i, j) es el costo asociado al nodo (k,l) más al cantidad que es necesario restar para hacer ceros en cada renglón y columna de una matriz idéntica a la asociada al nodo (k,l) a la cual se le han quitado los renglones k e i y las columnas l y j.

De los dos nodos se ramifica el que tiene el valor más pequeño. Ir al paso 4

Paso 4.- Para encontrar los nodos a los que se bifurca, por ejemplo si es el (i, j) necesita una secuencia (i,t) donde t es cualquier posición de la fila j en la matriz original que contenga un cero.

Se analizan los nodos calculando su costo y se escoge el nodo que tenga el costo mínimo.

Para ramificar de un nodo $\overline{(i, j)}$ hay que tomar la matriz asociada al nodo anterior (del cual proviene $\overline{(i, j)}$). Cambiar la posición (i, j) por ∞ denotando que esa secuencia no es deseable y reducir la matriz encontrando ceros en cada columna y renglón. El nodo a ramificar será entonces uno con entrada cero y el algoritmo se repite.

PROGRAMACIÓN ENTERA Y HEURÍSTICA

Paso 1.- Se escoge la X_{B_i} más negativa. Se designa a esa fila con r.

Si el *método dual simplex* genera un pivote -1, itérese y repita el paso 1. Si no, se continúa en el paso 2

Paso 2.- Se escoge aquella columna no básica, con $a_{rj} < 0$ que lexicográficamente sea la menor. Se designa a la columna por k. Al primer elemento distinto de cero de dicha columna se le designa por a_{pk} (>0), siendo su fila correspondiente la p.

Paso 3.- Para las columnas con $a_{rj} < 0$, se calcula el :

$u_j = \left\lfloor \frac{a_{pj}}{a_{pk}} \right\rfloor$, (Parte entera) si es que a_{pj} es el primer elemento distinto de cero en la columna p. De otra manera $u_j = \infty$

Paso 4.- Se calcula $\lambda = \max\left\{\frac{|a_{rj}|}{u_j}\right\}$ para $a_{rj} < 0$ y $u_j \neq \infty$

Paso 5.- Se deriva un corte

$$\sum_{j=1}^{n}\left\lceil \frac{a_{rj}}{\lambda} \right\rceil X_j \leq \left\lceil \frac{X_{B_i}}{\lambda} \right\rceil$$

Paso 6.- Se anexa este corte a la tabla, junto con su variable de holgura correspondiente, y se aplica el método dual simplex pivoteando en algún elemento del corte. Si el resultado es $X_B \geq 0$ (entero), entonces es la solución óptima. Si no, se regresa al paso 1. Para efectos de notación, al elemento de la tabla en la fila i columna j, se le designa a_{ij}

EJEMPLO

PROBLEMA TIPO MOCHILA RESULETO CON MÉTODO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO.

Sabemos que el problema tipo mochila lo podemos ver de las dos siguiente maneras:

$$(1)\begin{cases} \max(z) = \sum v_i x_i \\ s.a \qquad \sum k_i x_i \leq \text{k} \\ \qquad\qquad x_i \geq 0, x_i \in Z \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \max(z) = \sum v_i x_i \\ s.a \qquad \sum k_i x_i \leq \text{k} \\ \qquad\qquad x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ecuación 10 Forma general del Problema tipo Mochila

Notación:

Nodo i: se lleva el artículo i

$\bar{i}$: No se lleva el artículo i

(i, j): Se lleva el artículo j después del artículo i

$(i, \bar{j})$: No se lleva el artículo j después del artículo i

$(\bar{i}, j)$: Se lleva el artículo j después de no haberse llevado el artículo i.

Nuevo	Proyecto original	Inversión en millones k_i	Proyecto anual de la inversión	$\frac{\text{Retorno anual de la inv. i}}{\text{inv. i}}$
a	B	c	d	e
1	3	30	60	2
2	1	36	54	1.5
3	4	32	32	1
4	2	24	18	0.75
5	5	26	13	0.5

2.4 EJERCICIOS

Problema: Plantear el siguiente problema usando programación

La FORD fabrica tres vehículos: fiesta, Escort, Focus. Las contribuciones a las utilidades son \$270, \$400 y \$450 respectivamente. Las necesidades de batería para cada vehículo son como sigue: Fiesta 1, Escort 2, Focus 3. Los generadores de carga instalados en los vehículos son necesarios en estas cantidades: Fiesta 2, Escort 2, Focus 3. Si la empresa tiene 100 baterías y 120 cargadores a la mano y no tiene oportunidad de conseguir ninguna más esta semana. ¿Cuántos coches debe fabricar para maximizar utilidades?

SOLUCIÓN

Primeramente, para que sea muy sencilla la resolución del problema, es una sugerencia el agrupar los datos en una tabla, ya que en la tabla misma nos va a ir diciendo cuáles son las variables que debemos de emplear y sus correspondientes coeficientes de costos.

	Utilidades	Batería	Generador
Fiesta	$270	1	2
Escort	$400	2	2
Focus	$450	3	3
		100	120

Con la tabla vemos que tenemos perfectamente definidas las variables:

x_1 :*Número de autos Fiesta a fabricar*

x_2 :*Número de autos Escort a fabricar*

x_3 : *Número de autos Focus a fabricar*

Ahora si procedemos a la abstracción del problema:

$$\begin{cases} \max(z) = 270x_1 + 400x_2 + 450x_3 \\ \text{s.a} \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100 \\ \qquad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 120 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \in Z^+ \end{cases}$$

^

Problema: Plantear el siguiente problema conocido como el Problema tipo mochila

Un excursionista planea salir de campamento. Hay cinco artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan las 60 libras que considera que puede cargar. Para auxiliarse en la solución ha asignado un valor a cada artículo en orden ascendente de importancia:

Artículo	1	2	3	4	5
Peso	42	23	21	15	7
Valor	100	60	70	15	15

¿Qué artículos debería llevar para maximizar el valor total sin sobrepasar la restricción de peso?

SOLUCIÓN

Realizamos la abstracción del problema identificando las variables a emplear, en este caso como se trata de llevar o no llevar el artículo, podemos hacer uso de variables binarias las cuales nos permiten concretar esta parte del problema, definiéndolas de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} 0 \text{ si no llevamos el artículo } i \\ 1 \text{ si llevamos el artículo } i \end{cases}$$

Y entiéndase por el artículo i desde el artículo 1 hasta el artículo 5.

Una vez definida nuestra variable planteamos el problema:

$$\begin{cases} \max(z) = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 \\ \text{s.a} \qquad 42x_1 + 23x_2 + 21x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60\text{lb} \wedge \\ \qquad\qquad x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Problema: Plantear el siguiente problema. A este problema se le conoce como Problema de Asignación

Una competencia de relevos de 400 metros incluye a cuatro diferentes nados. Un entrenador tiene a seis nadadores muy veloces quienes nadan sucesivamente 100 metros de dorso, de pecho, de mariposa y libre cuyos tiempos esperados (en segundos) en los eventos se dan a continuación:

	Dorso	Pecho	Mariposa	Libre
1	65	73	63	57
2	67	70	65	58
3	68	72	70	55
4	67	75	75	59
5	71	69	66	57
6	79	71	66	59

¿Cómo debe el entrenador asignar la competencia?

SOLUCIÓN

Aquí tenemos en juego dos cosas:

1.- el número de nadador que va a emplear el entrenador

2.- El estilo que va a realizar ese nadador

Por lo tanto para pasar a términos algebraicos usamos una variable con doble indexación:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Asignar al nadador } i \text{ el estilo } j \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Entonces una vez definida nuestra variable de estudio procedemos a plantear nuestro problema, el cual, estará en función de minimizar el tiempo total de la competencia usando los cuatro tipos de nado.

$$\begin{cases} \min(z) = 65x_{11} + \ldots + 59x_{64} \\ s.a \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1 \\ x_{ij} \in Z^{+} \end{cases}$$

En el cuál cabe destacar que tenemos dos tipos de restricciones:

1.- <u>Restricciones por nadador.</u>

EJEMPLO

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$ *Ésta restricción nos dice que sólo se le asigna 1 estilo al nadador número 4*

2.- Restricciones por estilo.

EJEMPLO

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1$ *Ésta restricción nos dice que sólo se asigna un nadador al estilo dos (Pecho)*

Problema: Plantear el siguiente problema. A este problema se le conoce como Problema de Asignación de Proyectos

Un empresario está considerando la realización de proyectos de expansión y dispone de 5 proyectos. No podrá realizar todos los proyectos a la vez, sólo tres proyectos. La información que se resume en la siguiente tabla muestra en miles de pesos la cantidad que deberá invertir en dichos proyectos, se tiene un horizonte a tres años (ingresos) por año.

Proyectos	Año 1	Año 2	Año 3	Ganancia esperada
1	15	13	12	20
2	8	14	20	40
3	20	14	13	20
4	12	8	14	15
5	15	14	16	30
Presupuesto (esperado) disponible	25	25	25	

SOLUCIÓN

Proponemos nuestra variable de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} 1 \ \text{ si el proyecto } i \text{ se realiza} \\ 0 \ \text{ si no} \end{cases}$$

Y nuestro problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \max(z) = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \\ s.a \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ \qquad 15x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 12x_4 + 15x_5 \leq 25 ... año\ 1 \\ \qquad 13x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 8x_4 + 14x_5 \leq 25 ... año\ 2 \\ \qquad 12x_1 + 20x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 16x_5 \leq 25 ... año\ 3 \end{cases}$$

Donde nuestra función objetivo representa las ganancias esperadas por cada proyecto durante los tres años.

La primera restricción que encontramos es para asegura que no se puedan realizar todos los proyectos a la vez, sólo tres de ellos.

Y por último nuestras tres restricciones son para cada año del horizonte de inversión que representa la cantidad en miles de pesos que se deberá de invertir en dichos proyectos.

Plantear el siguiente problema: Este ejercicio es conocido como el Problema del agente viajero

Un viajero tiene que visitar cada una de las cuatro ciudades y lo quiere hacer de tal manera que visite una sola vez partiendo de la ciudad 1 y regrese a ella, viajando el menor tiempo posible, la siguiente tabla muestra los tiempos entre ciudades horas.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4
Ciudad 1	0	1	5	4
Ciudad 2	7	0	3	1
Ciudad 3	5	-	0	2
Ciudad 4	4	1	2	0

Se desea minimiza el tiempo total de recorrido y a partir de la ciudad, regresar a ella, cada ciudad debe visitarse una sola vez.

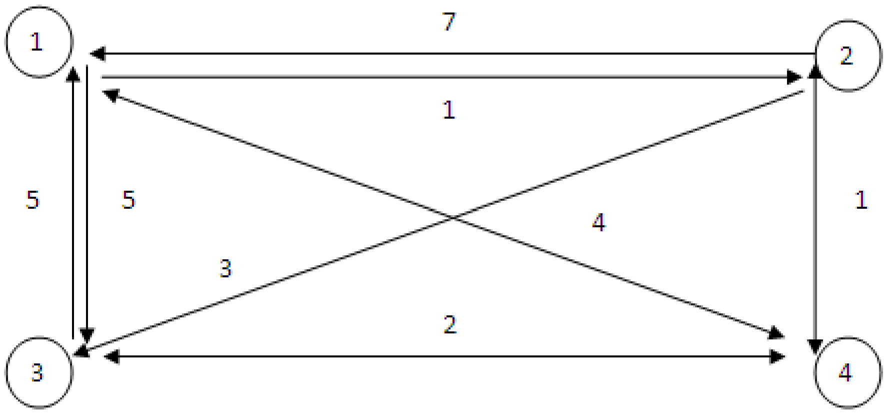


Ilustración 7 Diagrama del algoritmo del Viajero

SOLUCIÓN

Como en todos nuestros problemas debemos de comenzar proponiendo nuestra variable de estudio:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el viajero visita } j \text{ después de } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Y posteriormente pasamos a plantear el problema:

$$
\begin{cases}
\min(z) = x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 3x_{23} + x_{24} + 5x_{31} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 2x_{43} \\
s.a. \quad x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
x_{31} + x_{34} = 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\
x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
x_{12} + x_{42} = 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1
\end{cases}
$$

Aquí en este planteamiento observamos que las primeras cuatro restricciones que están igualadas a uno garantizan la condición del problema que cada ciudad debe visitarse una sola vez así mismo que son las condiciones de salida; las siguientes cuatro restricciones también garantizan la condición que cada ciudad debe visitarse una sola vez así mismo que son las condiciones de llegada.

Cabe señalar que este problema se resuelve por el método de ramificación y acotamiento.

Problema: Plantee el siguiente problema llamado problema de Costo fijo

He sido abordado por tres compañías de teléfonos para que me suscriba a su servicio de larga distancia. AVANTEL cobraría una tarifa fija de 16 pesos al mes, más 25 centavos por minuto. TELMEX cobraría 25 pesos al mes, pero reducirá el costo por minuto a 21 centavos. En cuanto a ATT la tarifa mensual fija es de 18 pesos y el costo por minuto es de 22 centavos. Generalmente se hace un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no pague la tarifa fija, a menos que haga las llamadas y de que pueda dividir mis llamadas entre las tres compañías, según me parezca.

¿Cómo debo utilizar los servicios de las tres compañías para minimizar mi cuenta mensual de teléfono?

SOLUCIÓN

Primeramente definimos nuestras variables de estudio:

x_1*: Nº de minutos de la compañía AXTEL*

x_2*: Nº de minutos de la compañía TELMEX*

x_3*: Nº de minutos de la compañía ATT*

Cabe señalar que nuestras variables son enteras pues si hablamos menos de un minuto nos van a cobrar el minuto completo.

Además de nuestras variables principales tenemos que definir otras variables pues tenemos que modelar la utilización del servicio y no sólo el costo por los minutos.

$$y_1 = \begin{cases} 1 \text{ si se utiliza el servicio de AVANTEL} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 \text{ si se utiliza el servicio de TELMEX} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1 \text{ si se utiliza el servicio de ATT} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Y por lo tanto nuestro problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \min(z) = 0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3 \\ s.a \qquad x_1 + x_2 + x_3 \le 200 \\ \qquad x_1 \le 200y_1 \\ \qquad x_2 \le 200y_2 \\ \qquad x_3 \le 200y_3 \\ \qquad x_i \ge 0 \quad \text{tal que } \ x \in Z^+ \end{cases}$$

Este problema es mixto entero binario

Problema de cobertura de conjuntos

Este tipo de problema se caracteriza porque la función objetivo siempre es minimizar.

Hay seis municipios de Tlaxcala. El gobierno debe determinar en qué lugar construir estaciones de bomberos. El gobierno quiere construir una mínima cantidad de estaciones de bomberos para asegurar que por lo menos una estación está dentro de 15 minutos (tiempo de viaje) de cada ciudad. En la siguiente tabla se muestran los tiempos requeridos (en minutos) para viajar entre las ciudades. Formular el modelo.

DE / HACIA	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	25	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	30	20	20	25	0	14
6	20	10	20	25	14	0

SOLUCIÓN

Primeramente definimos nuestra variable:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si se contruye la estación de bomberos en el municipio } i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Ahora como se mencionó antes, éste problema consiste en minimizar una función objetivo que queda determinada de la siguiente manera de acuerdo a las estaciones de bomberos, pues se busca construir las mínimas:

$$\begin{cases} \min(z) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ s.a \quad x_1 + x_2 \geq 1 & \text{partiendo del municipio 1} \\ \quad x_1 + x_2 + x_6 \geq 2 & \text{partiendo del municipio 2} \\ \quad x_3 + x_4 \geq 1 & \text{partiendo del municipio 3} \\ \quad x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 & \text{partiendo del municipio 4} \\ \quad x_5 + x_6 \geq 1 & \text{partiendo del municipio 5} \\ \quad x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 & \text{partiendo del municipio 6} \end{cases}$$

Obsérvese que las restricciones están dadas por la condición de que por lo menos una estación esté dentro de quince minutos de viaje de cada ciudad, entonces las variables se seleccionaron de acuerdo a la tabla como se observa a continuación:

Los números en verde nos indican el sub de la variable pues es el municipio a donde queremos llegar y los recuadros en naranja nos indican los municipios candidatos a colocar estación de bomberos.

DE / HACIA	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	25	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	30	20	20	25	0	14
6	20	10	20	25	14	0

Formular el siguiente problema como un problema de Programación Entera Mixto (PEM)

Considere el siguiente modelo matemático:

$$\max(z) = 3x_1 + 2f(x_2) + 2x_3 + 3g(x_4)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

1.- $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \le 15$

2.- Al menos una de las siguientes desigualdades se cumple:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 4$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 3$$

3.- Al menos dos de las siguientes desigualdades se cumplen:

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \le 10$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \le 10$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 10$$
$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10$$

4.- $x_3 = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3$

5.- $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4)$

Dónde: $f(x_2) = \begin{cases} -5 + 3x_2 & \text{si } x_2 > 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases}$ y

$$g(x_4) = \begin{cases} -3 + 5x_4 & \text{si } x_4 > 0 \\ 0 & \text{si } x_4 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Replanteando el problema lo tendremos de la siguiente manera:

$$\max(z) = 3x_1 + 2(-5 + 3x_2) + 2x_3 + 3(-3 + 5x_4)$$
$$\max(z) = 3x_1 - 10 + 6x_2 + 2x_3 - 9 + 15x_4$$
$$\max(z) = 3x_1 - 10y_1 + 6x_2 + 2x_3 - 9y_2 + 15x_4$$
$$s.a \qquad x_1 \le my_1$$
$$x_2 \le my_2$$

Para las restricciones tenemos lo siguiente:

1.- $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 15 \le my_3$

2.-
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 \le my_4$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 3 \le my_5$$

3.-
$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 10 \le my_6$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 - 10 \le my_7$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 10 \le my_8$$
$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 \le my_9$$

4.-
$$x_3 - 1 = my_{10}$$
$$x_3 - 2 = my_{11}$$
$$x_3 - 3 = my_{12}$$

$$x_3 - 1 = my_{10}$$
$$x_3 - 2 = my_{11}$$
$$x_3 - 3 = my_{12}$$

5.- $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$$y_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Lo mixto radica en que hay variables enteras binarias y las otras no necesariamente.

3 PROGRAMACIÓN DINÁMICA

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno analizará las características principales de la programación dinámica (PD) determinística y estocástica

3.1 DEFINICIONES

- La programación dinámica es una técnica matemática útil para a toma de decisiones secuenciales intercaladas.
- Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de decisiones
- La PD descompone un problema de N variables en N etapas y cada etapa es un subproblema de una variable

3.2 REQUERIMIENTOS

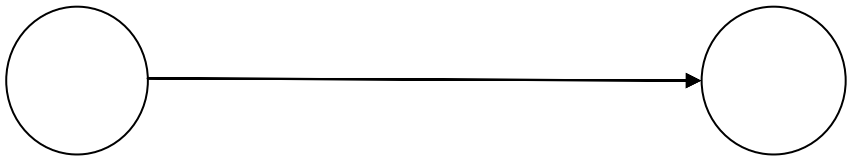
1) El problema se puede dividir en etapas, cada una de las cuales requiere de una política de decisión
2) Cada etapa tiene cierto número de estados asociados con su inicio
3) El efecto de la política de decisión en cada etapa es trasformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la etapa siguiente
4) Se elabora una política de decisión óptima para cada etapa en cada uno de los estados posibles
5) El procedimiento de solución comienza cuando se determina la política óptima para la última etapa
   La política óptima para la última etapa prescribe la política óptima de decisión para cada estado posible en esa etapa
6) Se dispone de una función recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa n+1

3.3 EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD Y FUNCIÓN RECURSIVA

PRINCIPIO DE OTIMALIDAD: Las decisiones futuras para las etapas restantes formarán una política óptima independientemente de las políticas adoptadas en las etapas anteriores.

3.4 PROGRAMACIÓN DINÁMICA DETERMINÍSTICA

En la programación dinámica determinística, el *estado* es la siguiente *etapa* está completamente determinado por el *estado* y la *política de decisión de la etapa actual.*



$f_n(S_n, X_n)$ $f_{n+1}(S_{n+1})$

Ilustración 8 Etapas de la Programación Dinámica

NOTACIÓN:

N : Número de etapas

n: Etiqueta de la etapa actual ($n = 1, 2, \ldots, n$)

S_n: Estado actual de la etapa n

X_n : Variable de decisión de la etapa n

X_n^*: Valor óptimo de X_n (dado S_n)

$f_n(S_n, X_n)$: Contribución de los estados $n, n+1, \ldots, N$ a la función objetivo si el sistema se encuentra en el estado S_n en la etapa n, la decisión inmediata es X_n y en adelante se toman decisiones óptimas.

3.5 EJEMPLOS

MODELO DE INVERSIÓN A n AÑOS

Sean dos bancos donde:

$P_1, \ldots, P_n$ La cantidad de dinero depositada en los dos bancos.

r_1 El primer banco

r_2 El segundo banco

q_{i1} Y q_{i2} del banco uno y dos respectivamente

ETAPAS: i con $i = 1, \ldots, n$ los n años

ALTERNATIVAS:

I_i: Lo invertido en el 1º banco en el año i

$\bar{I}_i$: Lo invertido en el 2º banco en el año i

ESTADOS:

X_i: Cantidad de capital disponible en el año i

$$X_i = I_i + \overline{I_i} \Rightarrow \overline{I_i} = X_i - I_i$$

Cuando $i = 1 \Rightarrow x_1 = P_1$

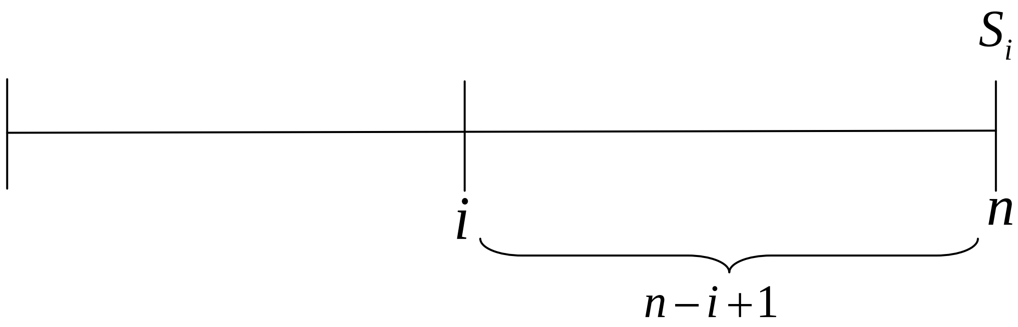
$$X_i = P_i + q_{i-1\,1} I_i + q_{i-2\,2} \overline{I_i}$$

$$X_i = P_i + q_{i-1\,1} I_i + q_{i-2\,2} \left(X_i - I_i \right)$$

$$X_i = P_i + \left(q_{i-1\,1} - q_{i-2\,2} \right) I_i + q_{i-2\,2} X_i$$

$\max(z) = \sum_{i=1}^{n} S_i$ Donde $S_i = \left(1 + r_k\right)^{n+1-i}$ con $k = 1, 2$

NOTA: Se eleva a la $n+1-i$ considerando que la inversión es al final del año



Renombrando el siguiente término:

Si $\alpha_k = \left(1 + r_k\right) \Rightarrow S_i = \alpha_k^{n-i+1}$

Como puedo invertir en los dos bancos entonces:

$$S_i = I_i \alpha_1^{n-i+1} + \left(X_i - I_i \right) \alpha_2^{n-i+1}$$
$$\Rightarrow S_i = \left(\alpha_1^{n-i+1} + \alpha_2^{n-i+1} \right) I_i + \alpha_2^{n-i+1} X_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$S_n = \left(\alpha_1 + q_{n\,1} - \alpha_2 - q_{n\,2}\right) I_n + \left(\alpha_2 + q_{n\,2}\right) X_n$$

$$\begin{cases} f_i\left(X_i\right) = \max\left\{S_i + f_{i+1}\left(X_{i+1}\right)\right\} & i = 1, \dots, n \\ \qquad I_i \in \left[0, X_i\right] & \\ f_{n+1}\left(X_{n+1}\right) = 0 & \end{cases}$$

^

3.6 PROBLEMA DE DIMENSIONALIDAD

El aumento en la cantidad de variables de estado aumenta los cálculos en cada etapa. Esto es especialmente evidente en los modelos de programación dinámica con cálculos tabulares, en los que la cantidad de renglones de cada cuadro corresponde a todas las combinaciones posibles de variables de estado. Esta dificultad computacional es tan evidente en la programación dinámica, que en las publicaciones se le llama **MALDICIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD.**

3.7 COMPARACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA CON LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación dinámica consiste en una técnica que permite determinar de manera eficiente las decisiones que optimizan el comportamiento de un sistema que evoluciona a lo largo de una serie de etapas.

La naturaleza del razonamiento que se debe realizar en programación dinámica es muy diferente al de la programación lineal. En programación lineal, se pretende describir una determinada situación en términos de un modelo matemático determinado; una vez conocida la naturaleza de las variables de decisión, y expresadas la función objetivo y las restricciones en función de esas variables, la resolución del modelo puede confiarse, sin mayores problemas, a un programa informático. La programación dinámica no admite una resolución sistemática de este tipo; más que un modelo concreto, es una estrategia de resolución común a muchas situaciones en principio diferentes entre sí.

Además, es frecuente que la resolución del modelo esté muy relacionada con la situación que se ha de modelar. En contrapartida, las simplificaciones que en ocasiones deben realizarse en programación lineal para poder resolver el modelo no son necesarias en programación dinámica, que admite gran variedad de relaciones entre variables.

3.8 PROGRAMACIÓN DINÁMICA PROBABILÍSTICA

Las condiciones y resultados no son fijos y se requieren conceptos de probabilidad para encontrar la solución.

Se van a tener al igual que en programación dinámica determinística los siguientes elementos:

$$\left.\begin{array}{l} Etapas \\ Alternativas \\ Estados \end{array}\right\} funcion\ recursiva$$

Ilustración 9 Elementos de la Programación Dinámica Determinística

EJEMPLO

RULETA RUSA

Ilustración-10 Juego de la Ruleta Rusa
http://jackpot-casino.softonic.com/symbian/imagenes

n : Números de la ruleta

p_n : Probabilidad del número n

INSTRUCCIONES DEL JUEGO:

- Un jugador paga $\$X$ por girar m veces la ruleta
- El jugador recibe el doble del número en el último giro

$$\begin{aligned}
&Etapas: \text{ El i-esimo giro} \\
&Alternativas \begin{cases} \text{girar} \\ \text{terminar} \end{cases} \\
&Estados: \text{los } n \text{ numeros de la ruleta}
\end{aligned}$$

Cuya función recursiva se define de la siguiente manera:

$f_i(j)$: Valor esperado máximo si se está en la etapa i dado que el último giro fue j

$$f_i(j) = \max \begin{cases} 2j & \text{si termina} \\ \sum p_k f_{i+1}(k) & \text{si continua} \end{cases}$$

Ecuación 11 función recursiva de la ruleta rusa

Con $f_{m+1}(j) = 2j$ y $f_i(j) = \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} p_k f_{i+1}(k) \right\}$

Es decir, si estamos en el primer giro nuestra función recursiva se verá de la siguiente manera:

$$f_1(0) = p_1 f_2(1) + p_2 f_2(2) + \ldots + p_n f_2(n)$$

EJEMPLO:

La ruleta está marcada del 1 al 5 con probabilidad[4] de que caiga en el uno de 0.30, con probabilidad de que caiga en el dos de 0.25, con probabilidad de que caiga en el tres de 0.20, con probabilidad de que caiga en el cuatro de 0.15 y 0.10 de que caiga en el cinco. El jugador paga $5 por un máximo de 4 vueltas.

Determinar la solución óptima

SOLUCIÓN:

$$n: 1, 2, 3, 4, 5$$

$$p_1 = 0.30 \quad p_2 = 0.25 \quad p_3 = 0.20 \quad p_4 = 0.15 \quad p_5 = 0.10$$

$$Etapas: \text{ El i-esimo giro}$$

$$Alternativas \begin{cases} \text{girar} \\ \text{terminar} \end{cases}$$

$$Estados: \text{los } n \text{ numeros de la ruleta}$$

p1	0.30
p2	0.25
p3	0.20
p4	0.15
p5	0.10
Total	1.00

Etapa	5	
Estados	función	Sol. Óptima
1	2	terminar
2	4	terminar
3	6	terminar
4	8	Terminar
5	10	Terminar

La columna de la alternativa terminar se calcula de la siguiente manera:

---

[4] ***Por los axiomas de Kolmogórov de probabilidad***: las probabilidades están entre 0 y 1 y como son mutuamente excluyentes los eventos las probabilidades se pueden sumar, obteniendo la probabilidad del universo que es 1, es decir, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0.30 + 0.25 + 0.20 + 0.15 + 0.10 = 1$

$$f_{m+1}\left(j\right)=2j$$

Etapa	4			
Estados	**terminar**	**girar**	**Sol. Óptima**	**Resultado**
1	2	5	5	Girar
2	4	5	5	Girar
3	6	5	6	terminar
4	8	5	8	Terminar
5	10	5	10	Terminar

etapa	3			
estados	**terminar**	**girar**	**Sol. Óptima**	**Resultado**
1	2	6.15	6.15	Girar
2	4	6.15	6.15	Girar
3	6	6.15	6.15	Girar
4	8	6.15	8	terminar
5	10	6.15	10	terminar

etapa	2			
estados	**terminar**	**girar**	**Sol. Óptima**	**Resultado**
1	2	6.8125	6.8125	Girar
2	4	6.8125	6.8125	Girar
3	6	6.8125	6.8125	Girar
4	8	6.8125	8	terminar
5	10	6.8125	10	terminar

etapa	1			
estados	**terminar**	**girar**	**Sol. Óptima**	**Resultado**
1	2	7.309375	7.309375	Girar
2	4	7.309375	7.309375	Girar
3	6	7.309375	7.309375	Girar
4	8	7.309375	8	terminar
5	10	7.309375	10	terminar

Resultados Nº de vuelta	Estrategia
1	Comienza el juego
2	Continúe si la vuelta uno produce 1, 2 o 3 de otra forma termine
3	Continúe si la vuelta dos produce 1, 2 o 3 de otra forma termine
4	Continúe si la vuelta tres produce 1 o 2 de otra manera termine

4 MODELOS DE INVENTARIOS

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno explicará la importancia de los sistemas de inventarios y formulará modelos para deducir reglas de decisión.

4.1 CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS DE INVENTARIOS

El objetivo de los modelos de inventarios es presentar algunos métodos que ayuden a lograr una buena administración en los inventarios y una relación eficiente de ellos con la Administración Financiera.

Tanto e inventario como las cuentas por cobrar, presentan una proporción significativa de los activos en la mayoría de las empresas que requieren de inversiones sustanciales. Por ello, las prácticas administrativas que den como resultado minimizar el porcentaje del inventario total, pueden representar grandes ahorros de dinero.

La eficiencia del control de inventarios puede afectar la flexibilidad de operación de la empresa. Dos empresas esencialmente idénticas, con la misma calidad de inventario, pero con grandes diferencias en los grados de flexibilidad de sus operaciones, pueden tener inventarios desbalanceados, debido básicamente a controles ineficientes de éstos. Ello ocasiona que en determinado momento se encuentren con abundancia de alguna materia y carencia de otra.

Finalmente estas deficiencias tienen efectos negativos en la utilidad. En otras palabras, la ineficiencia de control de inventarios para un nivel dado de flexibilidad afecta el monto de las inversiones que requieren, es decir, a menor eficiencia en el sistema de control de inventarios, mayor la necesidad de inversión. Consecuentemente, las altas inversiones en inventarios tendrán un impacto adverso en la utilidad de la empresa.

¿POR QUÉ SE CREA EL MODELO DE INVENTARIOS?

Para responder esta pregunta podemos observar las siguientes situaciones en una empresa:

- “Lo siento, ahorita no hay “X” cosa”
- Un inventario es esencial para mercaderías[5] físicas (a veces se utiliza en servicios)
- Mantener inventarios abastecidos
- Minimizar la cantidad de mercadería almacenada
- Minimizar la cantidad de reabastecimiento en un tiempo determinado

En resumen un MODELO DE INVENTARIOS se crea para resolver las preguntas ¿Cuándo? Y ¿Cuánto?

4.2 ESTRUCTURA DE LOS SISTEMAS DE INVENTARIOS

Existen dos tipos de inventarios:

1. INVENTARIOS DETERMINÍSTICOS: Se puede predecir la demanda
2. INVENTARIOS ESTOCÁSTICOS: No se puede predecir la demanda

COMPONENTES DE MODELOS DE INVENTARIO

1. **COSTO DE ORDENAR**

$Q =$ Cantidad de productos

$c =$ Costo unitario

$K =$ Costo fijo de preparación

$c(Q) =$ Costo Q de ordenar unidades

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } Q = 0 \\ K + cQ & \text{si } Q > 0 \end{cases}$$

[5] ***Mercadería:*** Materias primas, productos en proceso de elaboración y productos terminados, correspondientes a los establecimientos industriales o comerciales disponibles para su comercialización, exposición o depósito (LARREA SEGUROS CIMA BROKERS S.A).

2. COSTO DE MANTENER EL INVENTARIO

- Capital invertido, espacio, seguros, protección, impuestos
- Usualmente proporcionales a la cantidad de productos almacenados, pero a veces mientras se va aumentando la cantidad de inventario se aumenta el precio por producto

3. COSTO POR FALTANTES

- CON FALTANTES:
    - Hacer esperar al cliente
    - Cliente buena onda
    - Menor costo
- SIN FALTANTES
    - Cumplir inmediatamente
    - Cliente mala onda
    - Mayor costo

4. INGRESO

Usualmente no se puede controlar, ya que depende del mercado

5. VALOR DE RECUPERACIÓN

- Valor de artículos sobrantes cuando no se requiera más del inventario
- Mercadería perdida
- Se incorpora el costo de mantener

6. TASA DE DESCUENTO

Porcentaje de lo que vale el dinero con relación a cuándo se invirtió, se puede obtener el valor presente neto

4.3 MODELOS PROBABILÍSTICOS Y DETERMINÍSTICOS

MODELO DETERMINÍSTICO DE REVISIÓN CONTINUA

- Es la situación más común
- Si se reducen los inventarios se ordena un reabastecimiento (por eso es revisión continua)
- Ésta representa el MODELO DEL LOTE ECONÓMICO (*Economic Order Quantity EOQ)*
- Nosotros conocemos:

- o $a =$ La tasa constante conocida como la demanda
- o $Q =$ Tamaño fijo de lotes

¤ Los costos básicos que se requieren minimizar son:

- o $K =$ Costo de preparación
- o $c =$ Costo de producir o de comprar una unidad
- o $h =$ costo de mantener inventario por unidad

<u>MODELO DE LOTE ECONÓMICO (EOQ) BÁSICO</u>

SUPUESTOS:

- *Se conoce a (la tasa de demanda)*
- *No se permite plantear faltantes*
- *La cantidad ordenada Q llega toda cuando se desea, cuando el nivel de inventario es igual a 0*
- *A veces hay tiempo de entrega por lo que se necesita un punto de reorden*

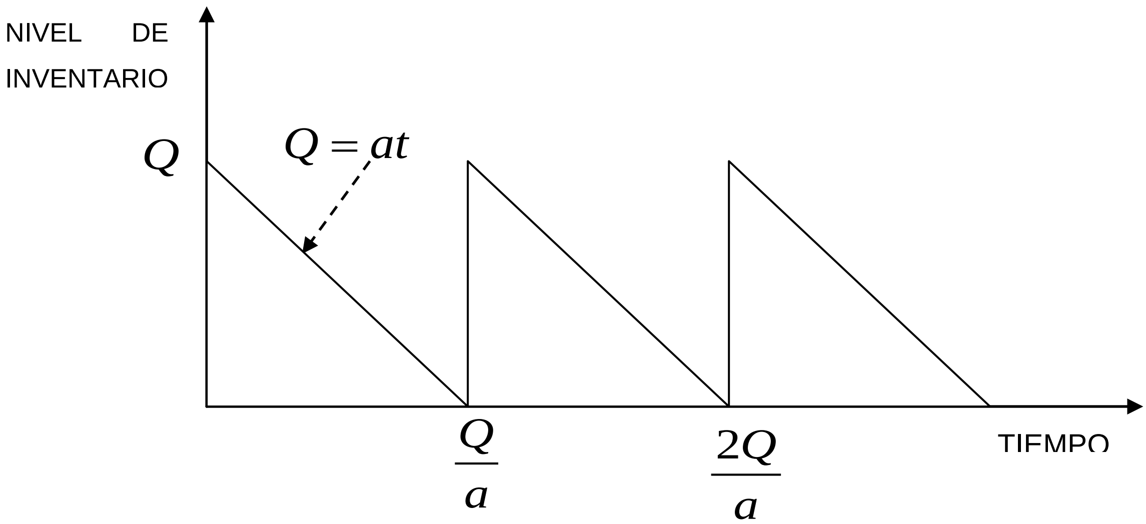
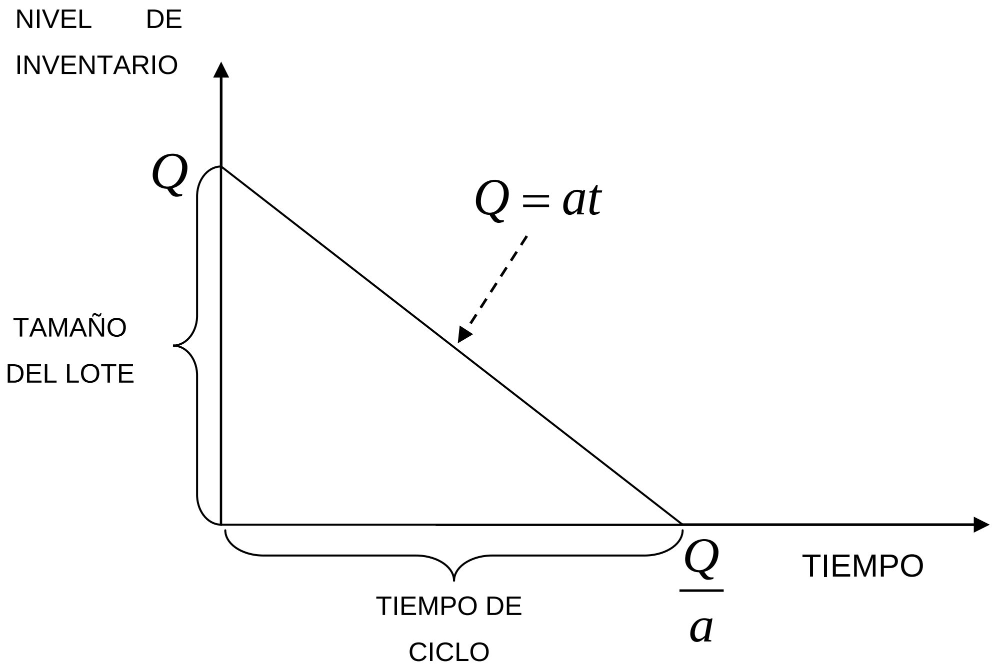


Ilustración 11 modelo de Inventarios

TIEMPO DE REORDEN

Recordemos que el tiempo de adelanto es el tiempo que transcurre entre el momento que hacemos el pedido o requisición y la llegada de la mercancía. Puede ser determinístico o estocástico.



El tiempo de adelanto tL puede ser mayor que el ciclo o menor que éste, sin embargo consideramos que $tL \leq tC$

$tR =$ Tiempo de Reorden

$tC =$ Tiempo de Ciclo

$R^* =$ Cantidad crítica para reordenar

ECUACIONES ASOCIADAS AL MODELO DE LOTE ECONÓMICO BÁSICO

- cQ : Costo por ciclo de producir u ordenar
- $\frac{Q}{2}$: Nivel de inventario promedio
- $\frac{hQ}{2}$: Costo de mantener el inventario promedio
- $\frac{hQ^2}{2a}$: Costo de mantener inventario por ciclo
- $K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}$: Costo total por ciclo

Donde:

Costo total por ciclo= Preparacion+Producir+Mantener

- $T = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$: Costo total por unidad de tiempo
- El valor Q^* que minimiza al costo total por unidad de tiempo T es la primera derivada con respecto a Q igualada a cero [6]

$$\frac{dT}{dQ} = -\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

$$-\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

$$-\frac{aK}{Q^2} = -\frac{h}{2}$$

$$\frac{Q^2}{aK} = \frac{2}{h}$$

$$Q^2 = \frac{aK2}{h}$$

$$Q = \sqrt{\frac{aK2}{h}}$$

- El tiempo de ciclo t^* sería

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

ALGORITMO MODELO DE REVISIÓN CONTINUA

[6] ***Criterio de la primera derivada***: utilizado para determinar los mínimos y máximos relativos que pueden existir en una función, mediante el cual, se observa el cambio de signo en un intervalo abierto señalado que contiene a un punto crítico c. En este caso existirá un mínimo $(c, f(c))$ en la función, ya que cambiará de negativa a positiva en el punto crítico c.

- Tomar valores iniciales del problema:

$a =$ Costo de compra

$h =$ Costo de almacenamiento

$K =$ Demanda de un artículo

$L =$ Tiempo de anticipación

- Hallar la cantidad a pedir

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

- Hallar el intervalo entre pedido
- Hallar la demanda diaria
- Hallar la demanda entre el periodo de anticipación

MODELO DE LOTE ECONÓMICO (EOQ) CON FALTANTES PLANEADOS

Este modelo se utiliza cuando los clientes aceptan retrasos

SUPUESTOS:

- Se conoce la tasa de demanda a
- La cantidad ordenada Q llega toda cuando se desea
- Se permiten faltantes planeados. Cuando hay faltantes, los clientes afectados esperan que el producto esté disponible de nuevo. Las ordenes se satisfacen cuando se reabastece el inventario.

MODELO DE LOTE ECONÓMICO (EOQ) CON DESCUENTOS POR CANTIDAD

Hasta se había supuesto que el costo de adquisición o fabricación de una unidad era constante y no dependía del tamaño del lote**.**

Este modelo se utiliza cuando nos dan descuentos por cantidad producida o comprada.

SUPUESTOS

- Se conoce la tasa de demanda a
- La cantidad ordenada Q llega toda cuando se requiera
- No se permite planear faltantes
- El costo unitario de cada artículo depende de la cantidad en el lote
- La cantidad óptima para reabastecer Q^* es independiente del costo por unidad

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

Ecuación 12 Modelo de lote con descuento

- Es normal que se otorguen descuentos por cantidad, es decir, que entre más grande sea el lote producido el costo de producción unitario disminuya
- El costo total por unidad de tiempo se define:

$$T_j = \frac{aK}{Q} + ac_j + \frac{hQ}{2}$$

PROCEDIMIENTO

- Se grafican todas las T_j (opcional)
- Se validan las T_j que estén dentro de la región factible dependiendo de su c_j
- Se busca el costo mínimo de cada región (valor más cercano a Q^*
- Se comparan los costos mínimos de cada región y se selecciona el mínimo
- Después se selecciona la cantidad a ordenar basado en el costo mínimo y calculamos el tiempo de reabastecimiento para esa cantidad

4.4 EJERCICIOS

Problema 1: El sistema de inventarios ABC

El sistema de inventarios ABC se basa en la identificación de aquellos productos que, dado su valor, representa la más alta inversión en el inventario; permitiendo obtener una reducción considerable en el control, al demandar la concentración en un número reducido de artículos, en vez de uno elevado. La idea básica consiste en dividir al inventario en tres partes diferentes:

- **Artículos tipo A:**

  Son aquellos que poseen un valor elevado y que representan entre un 70% y 80% del valor total del inventario. Por lo regular comprenden entre un 10% y 20% de los productos.

- **Artículos tipo B:**

  Son aquellos que poseen un valor intermedio, entre el 15% y 20% del valor total del inventario. Por lo regular comprenden del 20% al 30% del volumen del inventario.

- **Artículos tipo C:**
  Son aquellos que poseen un valor bajo, entre el 5% y el 10% del valor total del inventario y ascienden a un volumen entre el 50% y 70% de todos los artículos.

Este criterio de clasificación es un tanto "arbitrario", pues algunas compañías añaden otros criterios adicionales.

Suponga que en una compañía se utilizaron 10 artículos. Plantear como modelo de inventarios mediante el sistema ABC

SOLUCIÓN

Se enlista cada uno de los productos desplegando su volumen de uso y el precio que tiene asociado.

Producto	Unidades empleadas al año	Costo unitario

α	40,000	7
β	195,000	11
χ	4,000	10
δ	100,000	5
ε	2,000	14
ϕ	240,000	7
γ	16,000	8
η	80,000	6
ι	10,000	7
φ	5,000	9

Se multiplican las cantidades anteriores para cada uno de los productos, y se les dará un rango (entre 1 y 10) de acuerdo al valor obtenido (de mayor a menor)

Producto	Unidades empleadas al año	Costo unitario	Monto anual	Rango
α	40,000	7	280,000	5
β	195,000	11	2,145,000	1
χ	4,000	10	40,000	9
δ	100,000	5	500,000	3
ε	2,000	14	2,800	10
ϕ	240,000	7	1,680,000	2
γ	16,000	8	128,000	6
η	80,000	6	480,000	4
ι	10,000	7	70,000	7
φ	5,000	9	45,000	8

Se ordenan de acuerdo a su rango, para este caso la empresa considera como productos tipo A aquellos que representen el 71% de la inversión, del tipo B aquellos que capten aproximadamente el 23% y los restantes como del tipo C, se añade una columna correspondiente al porcentaje acumulado de acuerdo al volumen monetario.

Producto	Monto annual	Rango	Monto Anual acumulativo	Porcentaje Acumulativo	Clase
β	2,145,000	1	2,145,000	4.6%	A
ϕ	1,680,000	2	3,825,000	12.8%	A
δ	500,000	3	4,325,000	22.0%	A
η	480,000	4	4,805,000	32.3%	A
α	280,000	5	5,085,000	43.2%	A
γ	128,000	6	5,213,000	54.3%	A
ι	70,000	7	5,283,000	65.6%	A
φ	45,000	8	5,328,000	77.0%	B
χ	40,000	9	5,368,000	88.5%	B
ε	2,800	10	5,370,800	100.0%	C

La compañía debe enfocar su máxima atención sobre los productos que hayan sido catalogados como tipo A, obteniendo con ello una reducción en el manejo de inventario.

Existen dos principios básicos de acuerdo al esquema ABC:

1. *Tener suficientes artículos de un bajo valor para que estén disponibles cuando se necesiten*
2. *Concentrar el esfuerzo ganado en la reducción del inventario de valor elevado*

Se pueden seguir las siguientes recomendaciones:

- ***GRADO DE CONTROL EN EL INVENTARIO ABC***

  1. *Para los productos tipo A, deberá concentrarse el máximo control posible, tal que se incluyan los registros más exactos, un nivel de supervisión estricto, llenados periódico de órdenes de pedido, etc.*
  2. *Para los productos del tipo B, se requerirá un control normal que involucre una atención regular y el manejo de formas de registros*
  3. *Para los productos del tipo C, podrán usarse los niveles de control más simples tales como revisión visual periódica del inventario físico, llenado de registro bastante simples.*

- ***REGISTROS EN EL INVENTARIO ABC***

  1. *Los productos del tipo A requerirán los más completos, exactos y detallados registros con actualizaciones constantes. Un registro estricto en lo que respecta al manejo de facturas.*
  2. *Para los productos del tipo B, sólo se necesitará registros manuales con actualizaciones periódicas*
  3. *Para los productos del tipo C, se pueden usar los registros más simples*

- ***PRIORIDAD EN LOS INVENTARIOS ABC***

  1. *Para los productos del tipo A, deberá ser la más estricta, para reducir los tiempos de entrega y los niveles de inventario*
  2. *Para los productos del tipo B, se requerirá un tratamiento normal sólo deberá dárseles una prioridad considerable cuando se presenten situaciones críticas*
  3. *Para los productos del tipo C, podrá dársele la más baja prioridad*

En general, este tipo de sistema es recomendable cuando se maneja un volumen elevado de unidades. Hay que tener en cuenta que para llevar un inventario, es necesario identificar por su valor a cada uno de los artículos que los componen, una variedad considerable puede presentar problemas de manejo y control, en cuyo caso resulta conveniente agruparlos bajo la clasificación ABC antes indicada.

Problema de EOQ con descuentos

En múltiples ocasiones es posible obtener descuentos por parte de los proveedores cuando se adquiere un volumen determinado de productos. Inclusive los descuentos pueden ser múltiples si se consideran diverso tamaños.

En la producción, ocurre lo mismo si se piensa que un mayor aprovechamiento de los recursos puede ser más económico. Ante tal instancia, es necesario que el investigador tenga en cuenta lo siguiente:

- Mientras más unidades se soliciten podrá obtenerse un mejor descuento
- Un pedido de mayor volumen disminuye el número de órdenes a realizar en un año, incurriendo por ello en costos menores
- Un mayor volumen de inventario acarrea costos de mantenimiento mayores

Para tomar la decisión de aceptar o no un descuento, el investigador podrá evaluar el impacto de los costos para cada opción de la siguiente manera:

1. Comienza con el último descuento
2. Calcula el EOQ con base en el último descuento. Ten en cuenta que dada la existencia de los descuentos se emplea esta ecuación:

$$Q_k = \sqrt{\frac{2aK}{PCC_m}}$$

Donde:
a es la demanda
K es el costo de colocar una orden
PC precio de compra (con el decuento)
C_m el costo de mantenimiento en forma porcentual

3. Si Q_k es admisible para el precio de descuento, es decir, se encuentra en el rango del volumen para el que se aplica el descuento, sigue al paso 6
4. Si es inadmisible, considere el EOQ igual al límite inferior del actual descuento y calcula el costo total del inventario, tal que incluya el precio de adquisición de los productos
5. Selecciona el siguiente descuento y ve al paso 2
6. Calcula el costo total del inventario, tal que incluyas el costo de adquisición de los productos
7. Compara el costo anterior con todos los que hayan sido calculados con anterioridad. El menor y su EOQ asociado son los óptimos.

Suponga que un Hospital puede obtener para el producto E, una serie de descuentos que el proveedor ofrece, siempre y cuando se adquiera bajo un determinado volumen. A continuación de muestran los descuentos correspondientes:

Volumen de compra: (unidades)	Monto del descuento: (sobre el precio de compra)
menos de 500	30
entre 500 y 599	27
Entre 600 y 699	25.5
Entre 700 y 999	24.9
1000 o más	24.6

Determina la política óptima de pedido empleando el proceso iterativo, sabiendo que la demanda anual del producto E es de 1,800 unidades, el costo de colocar una orden es de 350 y el costo anual de mantener una unidad en el inventario es de 20%.

SOLUCIÓN

1. *Comienza con el último descuento*

Quinto descuento:

K=5

2. *Calcula el EOQ con base en el último descuento.*

Tamaño óptimo del lote:

$$Q_5 = \sqrt{\frac{2(350)(1800)}{(24.6)(.2)}} = 506 \text{ unidades}$$

4. *Si es inadmisible, considere el EOQ igual al límite inferior del actual descuento y calcula el costo total del inventario, tal que incluya el precio de adquisición de los productos*

6. *Calcula el costo total del inventario, tal que incluyas el costo de adquisición de los productos*

Es inadmisible Q_5 *para que se aplique el descuento, se hace* $Q_5 = 1000$ *costo total del inventario:*

$$\frac{(350)(1800)}{1000}+\frac{(.2)(24.6)(1000)}{2}+(1800)24.6=47,370$$

5. Selecciona el siguiente descuento y ve al paso 2

Se hace k=4

Tamaño del lote óptimo

$$Q_4=\sqrt{\frac{(2)(350)(1800)}{(24.9)(.2)}}=503$$

Es inadmisible, entonces $Q_4=700$*. Costo total del inventario:*

$$\frac{(350)(1800)}{700}+\frac{(.2)(24.6)(700)}{2}+(1800)24.6=47,463$$

Se hace k=3

Tamaño del lote óptimo: $Q_3=497$

Q_3 *es inadmisible*

Costo total del inventario: 48,480

Se hace k=2

Tamaño del lote óptimo: 483

Q_2 *es inadmisible*

Costo total del inventario: 52,210

Se hace k=1

Tamaño del lote óptimo: 460

Como Q_1 es admisible

Costo total del inventario 56,745

7. Compara el costo anterior con todos los que hayan sido calculados con anterioridad. El menor y su EOQ asociado son los óptimos.

El menor costo es el asociado al quinto descuento por lo que conviene adquirir en cada pedido 1,000 unidades a un costo total del inventario de 47,370

EL EJERCICIO FINAL

Para finalizar la tesina se mostrará a continuación un problema el cual se le dará el tratamiento de la siguiente manera: primeramente se realizará el modelo, posteriormente se le dará solución y para culminar la respectiva interpretación de los resultados.

PROBLEMA

El departamento de Refacciones, almacena en general sólo 2 o 3% de las refacciones disponibles. La mayoría de los clientes entienden esto y no les importa esperar las partes de órdenes especiales. Supongamos que uno de los distribuidores almacena un tipo particular de chapa de puertas. La chapa cuesta $500. El distribuidor vende 100 cada año ya que se usan en varios modelos. El costo normal de la orden es de $40. Si un cliente pide una chapa cuando no se tiene en almacén, se incurre en un costo faltante de $100 por unidad. Si el costo de mantenimiento es de $200 por unidad al año.

- ¿Cuál es la cantidad óptima de reorden?
- ¿Cuál es el nivel máximo de inventario?
- ¿Cuál es el número de faltantes permitidos?
- ¿Cuál es el costo total anual verdadero del inventario?

SOLUCIÓN

Dadas las condiciones del problema y de acuerdo a lo estudiado en anteriores capítulos hay que identificar las variables que tenemos involucradas para poder plantear las ecuaciones necesarias:

La demanda anual de las chapas: $D_{ch} = 100 \text{ unidades al año}$

El costo de colocar una unidad: $C = 40 \text{ por orden}$

El costo por unidad faltante: $C_f = 100 \text{ por unidad}$

El costo de mantenerla en el inventario: $C_m = 200 \text{ por unidad por año}$

Si realizamos el siguiente cálculo:

$$\text{Tamaño del lote óptimo} = \sqrt{\frac{2CD_{ch}\left(C_m + C_f\right)}{C_m C_f}}$$

$$\text{Tamaño del lote óptimo} = \sqrt{\frac{2(40)(100)(200+100)}{(200)(100)}} = 11$$

Esto indica que el distribuidor debe solicitar en cada pedido once chapas para satisfacer su demanda.

Por otro lado:

$$\text{Faltante permitido} = \sqrt{\frac{2CD_{ch}C_m}{\left(C_m + C_f\right)C_f}}$$

$$\text{Faltante permitido} = \sqrt{\frac{2(40)(100)(200)}{(200+100)(100)}} = 7$$

Lo que significa que 7 compras se quedarán sin surtir de inmediato.

El inventario máximo que se puede tener se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{Tamaño del lote óptimo-Faltante permitido} = 11 - 7 = 4$$

El costo mínimo=costo anual de ordenar+costo anual de mantenimeinto+ costo anual por faltantes

$$\text{El costo mínimo=}\frac{D_{ch}}{\text{tamaño del lote op}} + \frac{\left(\text{tamaño del lote op-faltante permitido}\right)^2}{\text{2tamaño del lote op}}\left(\text{costo de mant. en el inv.}\right) + \frac{\text{faltante permitido}^2}{\text{2tamaño del lote op}}\left(\text{costo por unid. faltante}\right)$$

$$\text{El costo mínimo=}\frac{100}{11} + \frac{\left(\text{11-7}\right)^2}{2\left(11\right)}\left(200\right) + \frac{7^2}{2\left(11\right)}\left(100\right) = \$731.81$$

Y el costo verdadero total anual es el resultado de sumarle al costo mínimo el costo anual de las unidades que es $(\$500)(100)$

Por lo tanto el costo total verdadero anual es del 50,000+731.81=$50,731.81

Como dato adicional se puede saber el tiempo en el que los productos van a agotarse y esto se realiza:

$$tiempo = \frac{\left(\text{tamaño del lote óptimo-faltante permitido}\right)}{\text{demanda anual}}$$

$$tiempo = \frac{\left(\text{11-7}\right)}{100} = 0.04 años$$

$$tiempo = 0.04 años * 365 = 15 \text{ días}$$

CONCLUSIONES

Esta tesina significó una meta más que cumplir, pues permitió elaborar con todo cuidado un compendio de ejercicios y teoría para que el alumno pueda explotar al máximo el material didáctico; y enriquecer su conocimiento al investigar métodos de solución.

Respecto a los problemas que se plantean, se amplió el espectro de opciones para resolverlos, pues fue una ardua práctica de planteamiento de los mismos, con lo anterior se refuerza el objetivo de la licenciatura[7] en Actuaría porque permite *"un razonamiento analítico mediante la aplicación creativa de los principios científicos, siendo capaz de estudiar, plantear, formular y aplicar modelos de contenido matemático, con el fin de proveer información para la planeación, previsión y toma de decisiones"; ahora en la transición a la vida profesional desarrollaré y aplicaré los conocimientos y herramientas matemáticas para analizar, evaluar y resolver problemas económicos y sociales que involucran riesgos"*

De acuerdo a la pregunta de investigación, dado que los alumnos aun no cuentan con los "Apuntes y Ejercicios Resueltos de Investigación de Operaciones II", en estas conclusiones y hasta este momento aún no se le puede dar una respuesta numérica a la pregunta, sin embargo, la tesina al brindar una gama muy amplia de ejemplos en los que se realizan planteamientos de problemas, cuenta con altas probabilidades de que le vaya a ser de mucha utilidad al estudiante permitiéndole un óptimo aprendizaje de la materia.

Esta tesina a su vez, da pie para que se complemente con ejercicios de mayor complejidad, así como también para que se amplíe su temario y se profundice más en los temas; permitiendo dejar un legado para las futuras generaciones.

---

[7] http://www.acatlan.unam.mx/licenciaturas/11/

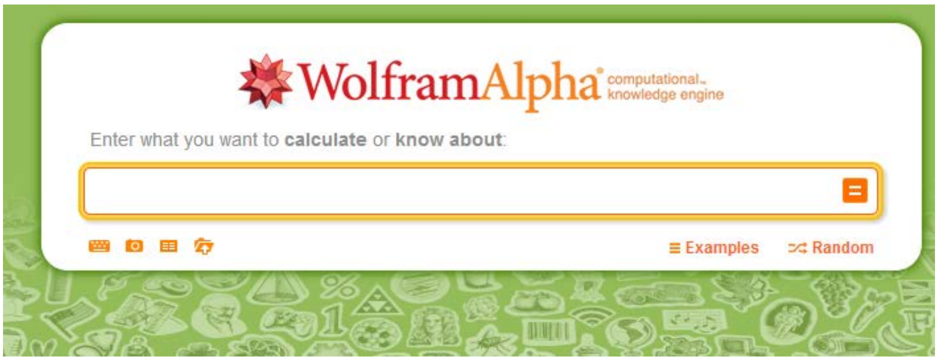
Además de ser un apoyo para el estudiante, la Tesina "Apuntes y Ejercicios Resueltos de Investigación de Operaciones II" es un agradecimiento a la Universidad por su apoyo decidido, generoso y desinteresado durante mis estudios de la licenciatura en Actuaría a lo largo de 4 años, y durante ese tiempo, me hizo crecer como persona y estudiante para convertirme en lo que ahora soy, una profesionista.

ANEXOS

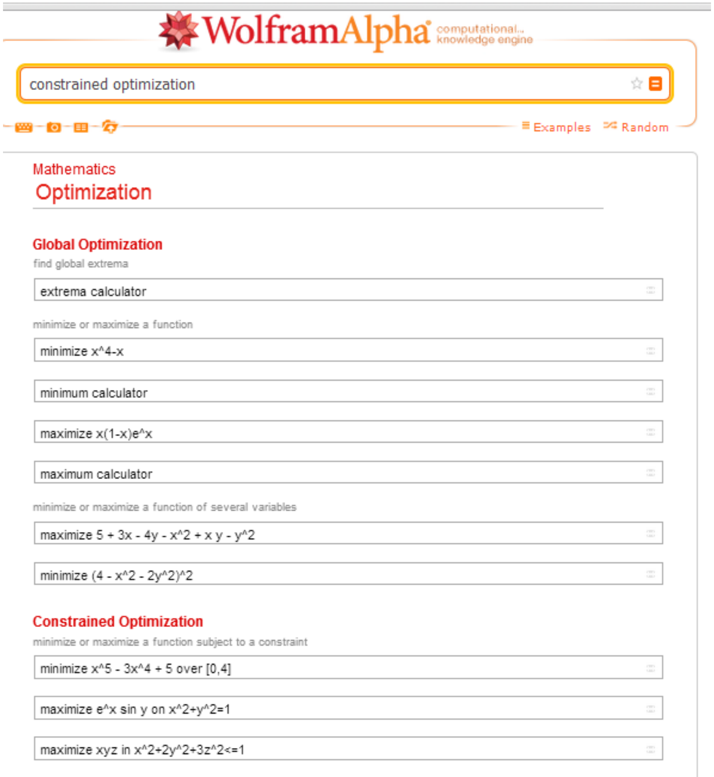
A continuación se presentan alternativas computacionales para resolver los problemas de una manera rápida:

En la actualidad existe un sinfín de programas computacionales que permiten resolver de manera eficiente el trabajo, a lo que nos preguntaremos ¿Por qué enseñar entonces a resolver problemas? Porque mediante el planteamiento se fortalece el análisis y se proponen métodos de solución, en lo anterior se plasma el ingenio y la habilidad para poder abstraer el problema a una o varias ecuaciones, y una vez que se tienen dichas ecuaciones, el programa únicamente debe de fungir como herramienta para dar una solución rápida y para poder variar los parámetros y observar diversos escenarios.

Para ello existe un potente motor de solución de problemas una vez que ya los tenemos planteados denominado WOLFRAMALPHA, el cual cuenta con el módulo de OPTIMIZACIÓN, entre otras herramientas que nos ayudan a visualizar paso a paso la solución, así como su gráfica, y demás descripciones que queramos obtener.



http://www.wolframalpha.com/



También para la materia de Investigación de Operaciones existe un programa específico que nos apoya en la solución mediante el método simplex y dual simplex llamado TORA.

Se presenta a continuación un resumen visualizado en forma de cartel, el cual muestra otras ecuaciones importantes para resolver problemas relativos a la materia de Investigación de Operaciones II


cartel de IDO II.pdf

TABLA DE ECUACIONES

TABLA DE ILUSTRACIONES

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bellini, D. I. (s.f.). *Investigación de Operaciones.* Obtenido de http://www.investigacion-operaciones.com/Curso_inv-Oper_carpeta/Clase17.pdf

Enciclopedia y Biblioteca Virtual de las Ciencias Sociales, Económicas y Jurídicas. (s.f.). Obtenido de http://www.eumed.net/libros/2006c/216/1j.htm

Investigación de Operaciones Aplicación de la Investigación Operativa en la gestión de empresas. (s.f.). Obtenido de http://www.investigaciondeoperaciones.net/

LARREA SEGUROS CIMA BROKERS S.A. (s.f.). *GLOSARIO DE TÉRMINOS DE SEGUROS*. Obtenido de http://www.larreaseguros.com/glosario/

Plataforma de Optimización. (s.f.). Obtenido de http://132.248.180.203/ido/login/index.php

Sampieri, R. H. (2010). *Metodología de la investigación.* México, Perú: McGraw-Hill.

Taha, H. A. (2004). Investigación de Operaciones . En H. A. Taha, *Investigación de Operaciones 7ª edición* (pág. 848). México: Pearson Educación.

TECNOLOGIA EDUCATIVA - WEB PERE MARQUÉS. (s.f.). Obtenido de http://www.peremarques.net/medios.htm

PROGRAMACIÓN ENTERA

Cintya Grajales de la Cruz

E– mail: cintygrajales@gmail.com

OBJETIVO ESPECÍFICO:

El alumno identificará la diferencia entre la programación lineal y la programación entera. Planteará y resolverá problemas aplicando algoritmos principales

DEFINICIÓN: ***Un problema de programación entera es un problema en el cual sus variables son enteras o una combinación***

SUBTEMAS

PROBLEMA ENTERO PURO

Es un problema de programación entera en el cual todas las variables son enteras

EJEMPLO: Asignación de Capital

PROBLEMA ENTERO MIXTO

Es un problema de programación entera en el cual algunas de las variables son enteras y otras son continuas

EJEMPLO: En inversiones

PROBLEMA ENTERO BINARIO

Es un problema de programación entera en el cual las variables son CERO o UNO

EJEMPLO: problema tipo mochila

PROBLEMA DE COBERTURA DE CONJUNTOS

EJEMPLO: Minimizar el número de elementos del conjunto 2 para cubrir todos los elementos del conjunto 1

RESTRICCIONES O BIEN

Dada las dos restricciones:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$$

Se quiere estar seguro de que se satisfaga al menos una de las dos restricciones

EJEMPLO:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq MY$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \Rightarrow g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1-Y)$$
$$Y = 0,1$$

RESTRICCIONES SI...ENTONCES

Si una restricción

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$$

Se satisface entonces la restricción

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$

se tiene que cumplir

MÉTODO GRÁFICO

Realiza el método para los conjuntos no convexos

CARACTERÍSTICAS: Puntos de Celosía (puntos que están en el conjunto solución)

ALGORITMO FRACCIONAL DE GOMORY

La matriz puede o no ser entera

CARACTERÍSTICAS:

El corte está dado por

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - [a_{ij}]\right) X_j \geq \left(X_{Bi} - [X_{Bi}]\right)$$

ALGORITMO ENTERO MIXTO DE GOMORY

Funciona igual que el fraccional de Gomory

CARACTERÍSTICAS:
El corte está dado por
Para variables no enteras

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} \left(1 - a_{ij} + [a_{ij}]\right) X_j +$$

Para variables enteras

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - [a_{ij}]\right) X_j +$$

Con

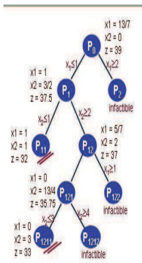
$$\left(a_{ij} - [a_{ij}]\right) \leq h$$

Para variables enteras

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} \left(1 - a_{ij} + [a_{ij}]\right) X_j \geq h$$

con

$$\left(a_{ij} - [a_{ij}]\right) \geq h$$



ALGORITMO DE LANG - DOIG

En la solución óptima del PL se elige una variable que no es entera y se definen dos subproblemas

$$a) X_j \leq [X_{BJ}]$$

$$b) X_j \geq [X_{BJ}] + 1$$

De estos dos subproblemas se elige el mejor y se ramifica

ALGORITMO ENTERO PURO DE GOMORY

La matriz debe ser entera

Se escoge el valor Lexicográficamente menor

CARACTERÍSTICAS:
El corte está dado por

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \left[\frac{a_{rj}}{\lambda}\right] \leq \left[\frac{X_{Bi}}{\lambda}\right]$$

MÉTODO DE BIFURCACIÓN

Utiliza la estrategia de divide y vencerás.

Divide la región factible en segmentos de tal manera que la solución anterior del PPL que no sea entera no se incluya en la nueva región factible. Dividir la región da como resultado subproblemas adicionales.

MÉTODOS DE PLANO DE CORTE

Métodos que busca la solución óptima añadiendo restricciones con el objeto de excluir soluciones no enteras de la programación lineal

CARACTERÍSTICAS:

$[X]$ Máximo entero con $Y \leq X$

ALGORITMO DE DRIEBEEK

Está basado en el método de Lang– Doig y convierte las variables enteras en binarias

CARACTERÍSTICAS:

Sea una variable entera entonces:

$$X_i = \sum_{k=0}^{n} K\alpha_{ik} \qquad \text{Con} \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} = 1$$

Y

$$\alpha_{ik} = 0 \text{ o } 1 \ \forall i,k$$

Si $\alpha_{ik} = 1$ esto implica que la variable entera $X_i = K$

Para cada variable α_{ik} no básica, el costo penal por alcanzar un valor $\alpha_{ik} = 1$ es decir, $X_i = K$ es el precio sombrea de α_{ik}

B) Para cada variable α_{ik} básica se calcula el costo penal por :

$$(X_{BK} - 1)\max\left\{\frac{Z_{ik} - C_{ik}}{Y_{ik}} \middle| Y_{ik} < 0\right\}$$