



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA DE SISTEMAS–OPTIMIZACIÓN FINANCIERA**

**ESTUDIO DE CAMBIOS ESTRUCTURALES ASOCIADOS A PUNTOS DE INFLEXIÓN EN  
SERIES FINANCIERAS**

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:  
YONAHANDY MALFAVÓN RUIZ**

**TUTOR:  
DR. FEDERICO HERNÁNDEZ ÁLVAREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: M. I. Aguilar Juárez Isabel Patricia

Secretario: Dr. Ordorica Medallo Manuel

Vocal: Dr. Hernández Álvarez Federico

1<sup>er.</sup> Suplente: M. F. González Castañón Jorge Alberto

2<sup>do.</sup> Suplente: M. en C. Espinosa Ávila Eduardo

México, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Hernández Álvarez Federico

-----  
**FIRMA**

## Índice

1.	Introducción .....	1
2.	Objetivo.....	3
3.	Antecedentes .....	4
4.	Metodología.....	12
4.1.	Primer paso. Análisis cíclico de series de tiempo.....	13
4.1.1.	El algoritmo de Bry y Boschan.....	14
4.2.	Segundo paso. Análisis de Fama .....	21
4.2.1.	Cambios de signos totales.....	21
4.2.2.	Análisis de corridas de signos.....	22
4.2.3.	Distribución de corridas por longitud.....	23
4.3.	Tercer paso. Análisis de Chow.....	24
4.3.1.	Prueba de igualdad de conjunto de coeficientes en dos regresiones lineales. ....	24
5.	Resultados .....	29
6.	Conclusiones .....	40
7.	Anexos.....	42
8.	Referencias.....	46

## *Índice de tablas y figuras*

*Tabla 1. Clasificación de las series económicas en el tiempo.*

*Tabla 2. Clasificación de las series económicas respecto a su comportamiento en el tiempo.*

*Tabla 3. Ciclos económicos -expansiones, contracciones y promedios- de la serie mensual del IPC.*

*Tabla 4. Análisis de Eugene Fama de la serie mensual del IPC.*

*Tabla 5. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del IPC.*

*Tabla 6. Análisis comparativo de los dos diferentes casos para las ventanas de tiempo en la serie del IPC.*

*Tabla 7. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del S&P 500.*

*Tabla 8. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del DAX.*

*Figura 1. Ilustración del ciclo económico.*

*Figura 2. Serie diaria del IPC desde enero del 2011 a febrero 2012.*

*Figura 3. Serie mensual del IPC desde enero 1990 a marzo de 2013. Selección de picos y valles en la media móvil de 12 meses.*

*Figura 4. Serie mensual del IPC desde enero 1990 a marzo de 2013. Selección de picos y valles en la curva de Spencer.*

*Figura 5. Serie mensual del IPC desde enero 1990 a marzo de 2013. Selección de picos y valles en la curva con suavizado de 4 meses.*

*Figura 6. Serie mensual del IPC desde enero 1990 a marzo de 2013. Selección de picos y valles finales en la serie original.*

*Figura 7. Análisis de Bry y Boschan en la serie mensual del IPC desde octubre 1993 a octubre 2013.*

*Figura 8. Análisis comparativo de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del IPC.*

*Figura 9. Análisis comparativo de dos casos de ventanas en la serie del IPC.*

*Figura 10. Análisis comparativo de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del S&P 500.*

*Figura 11. Análisis comparativo de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del DAX.*

## 1. Introducción

La búsqueda de mayores rendimientos en activos financieros -acciones, opciones, derivados- ha motivado el interés por el estudio de ciclos económicos. En la actualidad existen modelos matemáticos que buscan comprender el comportamiento de los precios de activos, con el fin de diseñar estrategias que mejoren la toma de decisiones de inversión.

Desde el punto de vista macroeconómico, los ciclos económicos se definen como fases de expansión y contracción repetitivas a lo largo del tiempo. En series financieras, como el precio de las acciones, también se presentan dichos ciclos. Cuando existe un punto de inflexión en la serie quiere decir que existirá un cambio en su tendencia, mismo que se puede asociar a un cambio estructural en el comportamiento de la serie.

El presente trabajo tiene como objetivo identificar puntos de inflexión asociados a cambios estructurales, en series formadas por los precios mensuales de un activo a lo largo del tiempo. Al identificar cambios estructurales se puede inferir un cambio en la tendencia del precio del activo, y por lo tanto, recomendar una estrategia de inversión específica -comprar o vender- con el fin de obtener mayores rendimientos.

Se propone realizar tres estudios para identificar cambios estructurales: el primero es la aplicación del algoritmo para la identificación de puntos de giro en series de tiempo, propuesto por Bry y Boschan (Ref. [1]); el segundo la prueba "run test" que propone Eugene Fama (Ref. [2]), en esta prueba se aplica un análisis a los rendimientos de las acciones mediante la probabilidad condicional, donde se determina la probabilidad de ocurrencia de  $n$  número de rendimientos positivos (o negativos) consecutivos; por ejemplo, se puede obtener la probabilidad de que existan seis rendimientos positivos dado que ya ocurrieron cinco positivos. Por último, también se empleará la prueba estadística para la identificación de cambios estructurales en series de tiempo, propuesta por Gregory Chow (Ref. [3]). Esta prueba aplica dos regresiones lineales a una misma serie de tiempo, en ventanas o intervalos de tiempo diferentes, en donde se compara si los coeficientes obtenidos en ambas ventanas son estadísticamente iguales. En particular se desea verificar si un determinado número de observaciones nuevas mantienen el mismo comportamiento histórico de la serie; en caso de que el comportamiento sea diferente, entonces se puede inferir un cambio en la tendencia de la serie, lo que conduce a una recomendación específica en la estrategia de inversión.

El modelo se implementa utilizando el lenguaje de modelación algebraica MATLAB. La fuente de información de las series financieras se obtuvo de la página <http://mx.finanzas.yahoo.com/>, donde se encuentran las cotizaciones de las bolsas de valores del mundo. Los pasos del modelo propuesto son:

1. El algoritmo de Bry y Boschan, se emplea para la selección de los puntos de giro en las series formadas por los precios mensuales de cualquier activo financiero. A partir de estos puntos de inflexión se identifican las fases de expansión y contracción; así como la duración promedio de cada fase. Esta información ayuda a la estimación del tamaño de la ventana de tiempo que requiere el análisis de Chow, lo anterior permite caracterizar el comportamiento histórico o estructura prevaleciente en la serie de tiempo.
2. El análisis de Fama se aplica en las series de tiempo para estimar la probabilidad de que ocurra un número de rendimientos (positivos, negativos o nulos) consecutivos. Con base en este análisis se define el tamaño de la segunda ventana que utiliza el análisis de Chow, la cual se asocia al comportamiento reciente.
3. La prueba de Chow consiste en realizar dos regresiones lineales sobre una misma serie de tiempo, donde cada regresión está conformada por una cantidad de datos -conocidos como tamaño de la ventana- de distinta longitud. Las betas obtenidas por medio de la regresión en ambos intervalos se comparan estadísticamente por medio de la prueba F y se determina si ambas pueden considerarse como parte de una misma regresión lineal. Originalmente, Chow no aplica ningún criterio para definir el tamaño de los intervalos o ventanas de datos que se requieren para su prueba. En este trabajo se propone definir el tamaño de estas ventanas con base en dos características particulares de cada serie: la primera ventana, que explica el comportamiento histórico de la serie, considera el tamaño promedio de sus ciclos (expansiones y contracciones); mientras que la segunda ventana se determina mediante la probabilidad condicional de que exista un número determinado de rendimientos positivos y negativos consecutivos. Una vez realizada la prueba de Chow, se observa si el segundo intervalo -de menor tamaño- tiene el mismo comportamiento estadístico que el primer intervalo. En el caso de que se comporten estadísticamente iguales, entonces no existe un cambio



en la estructura de la serie y por lo tanto, se mantiene la tendencia histórica. En caso contrario, se considera que existe un cambio estructural. Por ejemplo, si la serie tiene un comportamiento histórico con tendencia negativa y se identifica un cambio en su estructura, entonces se recomendaría comprar el activo, dado que se esperaría que el valor del activo aumentara en el futuro próximo (cambio de la tendencia de negativo a positiva).

El resultado de este trabajo se puede aplicar en la formación de portafolios de inversión. Al aplicar el modelo a las acciones de la BMV se puede hacer la selección de aquellas que tengan una tendencia de precios a la alza -recomendación de compra- una vez formado este portafolio, se continúa aplicando el modelo con frecuencia mensual, semanal o diaria, según se requiera, con el fin de identificar puntos de inflexión o cambios estructurales que permitan definir la venta o compra de los activos del portafolio, a modo de maximizar el rendimiento del mismo.

## 2. Objetivo

Identificar los puntos de inflexión asociados a cambios estructurales en series financieras para que sea una herramienta complementaria en la toma de decisiones de inversión.

### 3. Antecedentes

Un ciclo económico es un conjunto de eventos que suceden en un periodo de tiempo y con un orden específico, tal como se ilustra en la figura 1.

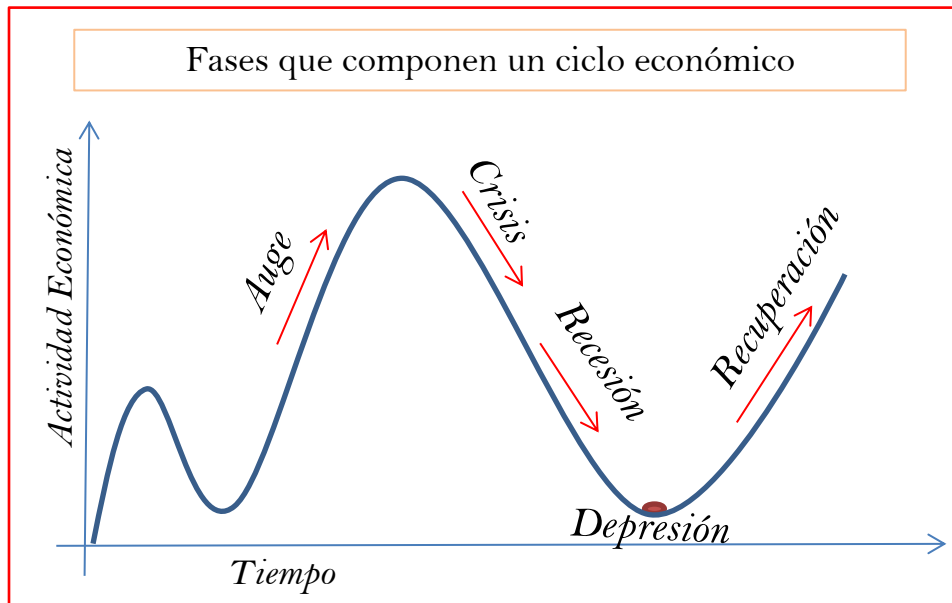


Figura 1. Ilustración de las fases del ciclo económico.

Las características (Ref. [4]) de cada fase de un ciclo económico son:

- **La crisis** se caracteriza por el aumento del desempleo y exceso de producción en relación con la demanda; además indica el término de un ciclo y marca el comienzo del siguiente.
- **La recesión** es el momento en que las actividades económicas -producción, comercio, banca, entre otras- presentan una desaceleración.
- **La depresión** es cuando se detiene el proceso de producción.
- **La recuperación** es el momento en que aumenta la producción, la inversión, el empleo, las ventas, entre otros.
- **El auge** es el tiempo en que la actividad económica se encuentra en prosperidad. Keynes comenta que el auge se caracteriza por las expectativas optimistas al rendimiento futuro de los bienes de capital.

El comportamiento de estas fases también se presenta en series financieras, tales como las acciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Burns y Mitchell (Ref. [5]) consideraron el análisis de estas fases en series financieras como “expansión” y “contracción”. La expansión es la fase que se presenta entre un valle y un pico. En el caso de que se presente una transición de pico a un valle, se le denomina contracción. La unión de una contracción con una expansión se considera un ciclo económico.

Los primeros estudios acerca de ciclos económicos fueron realizados por Carlos Marx (1818-1883) y John Maynard Keynes (1882-1946); que en su contexto histórico – S. XIX- el principal interés fue comprender los movimientos cíclicos de las crisis, sus causas y efectos. Uno de los primeros exponentes de la economía fue Carlos Marx (Ref. [6]), economista británico, quien menciona que el sistema económico está constituido por las relaciones sociales en el tiempo y las relaciones de producción. Marx consideraba a las crisis como los medios más radicales para restablecer la armonía. Se manifiesta mediante el conflicto entre la capacidad productiva y las relaciones productivas que constituyen el capitalismo. La producción de mercancías y la contratación de la fuerza de trabajo dependen de los dos factores anteriores, por lo que las crisis se reflejan en el desempleo y la producción.

Por su parte, el economista británico John Maynard Keynes (Ref. [6]) plantea una serie de políticas monetarias para disminuir los efectos de las crisis. Estas políticas económicas se dirigían principalmente a la inflación y la demanda de dinero.

Keynes (Ref. [7]) afirmó que el movimiento cíclico se presenta cuando el sistema de fuerzas que empujan hacia arriba –en la expansión- toman impulso y producen efectos acumulativos unas sobre otras, pierden gradualmente su potencia hasta que, en cierto momento tienden a ser reemplazadas por las operantes en el sentido opuesto. Además de existir cierta regularidad en la secuencia y duración de los movimientos ascendentes o descendentes. De igual manera comentó que el fenómeno de la crisis –el hecho de que la sustitución de un impulso descendente por otro ascendente ocurre con frecuencia de modo repentino y violento, mientras que, por regla general, no existe un movimiento de inflexión tan cortante cuando el movimiento ascendente es substituido por la tendencia a bajar. Este reconocido economista comentó que el auge del ciclo se caracteriza por las expectativas del mercado respecto al rendimiento futuro de los bienes de capital, sin embargo mencionó que las bases para hacer dichas expectativas son muy precarias y se apoyan en pruebas variables e inseguras, expuestas a cambios violentos y repentinos.

El NBER - *The National Bureau of Economic Research*- es la institución encargada de estudiar los sucesos económicos en Estados Unidos. Dentro de sus funciones se encuentran: el desarrollo de nuevas medidas estadísticas, estimación de modelos cuantitativos del comportamiento económico, evaluación de los efectos económicos de las políticas públicas y proyección de los efectos de las propuestas de política alternativa. Una de sus primeras publicaciones -acerca de los ciclos- fue "*Bussines Cycles and Unemployment*" (Ref. [8]); en el cual Mitchell definió al ciclo económico como una repetición constante y de forma irregular de auges y depresiones. Observó que Estados Unidos en 115 años se enfrentó a múltiples crisis – en los años 1812,1818, 1825, 1837, 1847, 1857, 1873, 1884, 1890, 1893, 1903, 1907, 1910, 1913, 1920- la primera observación fue que los periodos de las crisis varían de manera considerable. Mitchell menciona que primero se consideraba a las crisis como normales, en ese tiempo, se decía que es una característica recurrente de los negocios. Una crisis se espera que sea seguida por una depresión, la depresión por un renacimiento, el renacimiento por la prosperidad y la prosperidad por una nueva crisis. La información económica histórica es diferente para cada país; por ejemplo, Estados Unidos tiene información de dos siglos atrás. Por su parte Inglaterra y Francia cuentan con tres siglos de información económica. Gracias a esta información histórica Mitchell se percató de que hay varios tipos de crisis, unas se caracterizan por una leve recesión de la actividad empresarial, tal como sucedió en los años 1910 y 1913, a veces genera pánico como en 1873, 1893 y 1907. En ocasiones, la depresión es interrumpida por un pequeño renacimiento como en 1895; en otros casos se intensifica por la presión financiera como en 1896 y 1914. También existen casos donde la depresión es breve y grave como en 1908; a veces es breve y suave como en 1911, otras tantas tienen una larga duración y grave como en 1874-1878. Los avivamientos generalmente se desarrollan en la prosperidad, pero hay excepciones como la de 1895. La prosperidad puede alcanzar un tono alto, como en 1906-1907 y 1916-1917, o puede permanecer moderada hasta superar una crisis leve como en 1913.

Otra publicación importante -del NBER- fue "*Measuring Bussines cycles*" (Ref.[5]). Los autores –Burns y Mitchell- en un inicio consideraron medir los ciclos económicos mediante el análisis de todo el ciclo sobre la base de un patrón temporal, posteriormente fue modificado para incluir el análisis en la fases que componen al ciclo, por lo que consideraron "prosperidad" y "depresión", posteriormente se reemplazó los términos anteriores por "expansión" y "contracción", respectivamente. Con base en lo anterior, una expansión es la fase que se presenta entre un valle y un pico, por su parte, la contracción

sucede entre un pico y un valle. Se considera un ciclo a la unión de una contracción con una expansión o viceversa. Por ejemplo, ver Figura 2.



Figura 2. Serie diaria del IPC desde enero del 2011 a febrero 2012. Se considera una contracción del 27 de julio al 31 de agosto y una expansión del 31 agosto al 18 de octubre. Se considera un ciclo a la unión de una contracción con expansión.

Otra investigación importante acerca de los ciclos económicos es el estudio del comportamiento cíclico de series económicas de 1952 a 1991 en Estados Unidos de América, Inglaterra, Francia y Alemania, realizado por Víctor Zarnowitz (Ref. [9]). En este estudio se encontraron características que comparten los ciclos en series económicas -cabe mencionar que las series económicas que estudiaron fueron: precios de producción, costos de insumos, ganancias, productividad, inversión; moneda, crédito y tasas de interés- mismas que se enumeran a continuación:

1. Los ciclos de negocios son secuencias no periódicas pero recurrentes que se manifiestan como expansiones y contracciones.
2. Los ciclos se encuentran en series económicas, además presentan regularidades de movimiento; relativa sincronía y amplitud.
3. La mayoría de las fluctuaciones de los ciclos son de naturaleza endógena, es decir se origina debido a causas internas.
4. La mayoría de las interacciones cíclicas se producen entre las siguientes variables: precios de producción, costos de los insumos y beneficios; productividad e inversión; moneda, crédito y tasas de interés.

5. Los ciclos de negocios tienen elementos en común, que se atribuyen a más de un factor, como son factores financieros y factores reales, además de las expectativas actuales respecto al rendimiento futuro de un activo; todos estos elementos participan e interactúan.
6. En economías en crecimiento, las recesiones son típicamente pequeñas y suaves.
7. En la actualidad se le ha dado más importancia a elementos aleatorios, así como a las actividades políticas y de gobierno, con el propósito de:
  - i. Estudiar los impactos que inciden en la economía en diferentes tiempos para estudiar su frecuencia, persistencia y repercusión.
  - ii. Es importante conocer cuáles son las políticas que pueden reducir o agravar la inestabilidad cíclica de la económica, cuándo y cómo lo hacen.
8. Las proyecciones macroeconómicas deben considerar un modelo matemático de referencia, en conjunto con el juicio y la experiencia del investigador.
9. Los principales indicadores macroeconómicos rara vez se equivocan, pero pueden dar señales falsas de recuperación o de recesión.

Las características comunes que Zarnowitz observó en las series financieras se presentan de igual manera en las acciones de la Bolsa Mexicana de valores, ya que estas series presentan ciclos cortos, largos, profundos y suaves.

Zarnowitz mencionó que en las últimas dos décadas han surgido dos teorías con motivaciones muy específicas: la primera es construir modelos dinámicos con características empíricas básicas de los ciclos de negocio; la segunda es que estos modelos deben tener bases macroeconómicas y su objetivo final es maximizar las utilidades.

Es importante hacer hincapié en que los modelos ayudan a la definición de las estrategias de inversión, siempre y cuando modelen la realidad. A partir de dichos modelos se toman mejores decisiones con el objetivo de aumentar los rendimientos de la inversión.

Zarnowitz (1992) observó que hay una relación temporal entre los ciclos de diferentes series. La evidencia de su estudio mostró:

1. Cuando existe una caída en la demanda agregada, los salarios y los precios no presentan cambios inmediatos en sus series.
2. La variación de tasas de interés impacta de manera inmediata a la inflación –por ejemplo, grandes y rápidas inflaciones también pueden ser asociadas con condiciones económicas depresivas-.
3. Los salarios escalonados han contribuido a la estabilización relativa de la economía.
4. Los costos de producción promedio tienden a crecer en desaceleraciones y recesiones económicas; además disminuyen al final de la recesión y particularmente al principio y lo alto de la expansión.
5. La tasa de cambio en los costos, dirige la tasa de costo en los precios.
6. Cuando el precio excede al costo, los beneficios por unidad aumentan. En caso de que suceda lo contrario, entonces hay una caída en ganancia y en periodos de crecimiento constante, la ganancia se mantiene.
7. La inflación es un factor que afecta el cambio relativo entre los precios y costos. Si hay un aumento en la inflación, entonces los precios y los costos tienden a incrementar. Por otro lado, si existe una inflación moderada, los precios y costos se mantienen constantes.
8. En ciertas teorías, si la demanda es menor que la producción, entonces las ventas tienden a disminuir.

Zarnowitz observó que las relaciones en el tiempo se presentan en las acciones de la Bolsa Mexicana de valores, ya que existen series que presenta ciclos sincronizados, desfasados o con fase contraria.

Las relaciones temporales en las series económicas han sido causa de muchos estudios. Los primeros en estudiar las series respecto a su comportamiento en el tiempo fueron los investigadores del NBER (Ref. [10]), la clasificación de las series económicas se encuentra indicada en la tabla 1.

**Tabla 1. Clasificación de las series económicas en el tiempo.**

Serie	Información
<b>Adelantadas</b>	Son series que proporcionan la tendencia de la dirección de los ciclos.
<b>Coincidentes</b>	Son series que miden la actividad económica.
<b>Retrasadas</b>	Son series que cambian su dirección después de las series coincidentes.

La primera lista de indicadores -con estas características- fue compilada por Wesley C. Mitchell y Arthur F. Burns en 1930. Posteriormente, Geoffrey Moore y Charlotte Boschan también trabajaron en esa lista. En 1961 se comenzó una publicación mensual del reporte de indicadores de los ciclos económicos: “*Bussines Cycle Developments (BCB)*”. En 1968 se renombró como: “*Bussines Conditions Digest*”. En 1990 se incorporó en otra publicación: “*Bureau of Economic Analysis (BEA)*”. A partir de 1995 “*The Conference Board (TCB)*” es el encargado de la publicación de los “*Bussines Cycle Indicators (BCI)*”.



La última clasificación de las series de acuerdo a su comportamiento en el tiempo se aprecia en la tabla 2:

**Tabla 2. Clasificación de las series económicas respecto a su comportamiento en el tiempo.**

Indicador	Series económicas
<b>Adelantado</b>	Nuevos pedidos Expectativas del consumidor Permisos de vivienda Precios de las acciones Cambios en las tasas de interés.
<b>Coincidente</b>	Empleo Producción Ingreso personal Manufactura Ventas de Comercio
<b>Atrasados</b>	Promedios de inventarios de ventas Cambios en los costos por unidad de trabajo Cargos promedios en las tasa de interés preferenciales de los bancos. Costos del consumidor, así como cotos sociales, es decir cuánto cambiarán los precios de los servicios a los consumidores, o duración promedio del desempleo.

El NBER cuenta con el “*NBER’s Business Cycle Dating Committee*”, esta entidad es el comité encargado de la determinación oficial de los ciclos económicos de Estados Unidos, está formado por 9 personas cuyo objetivo es definir la cronología del ciclo que se está cursando. De forma particular, Bry y Boschan desarrollaron un algoritmo que reproduce las técnicas de descripción cuantitativa y fluctuaciones cíclicas de series económicas que se utilizan por dicho comité.

Las series conformadas por los precios de las acciones tienen comportamientos cíclicos -expansiones y contracciones- además presentan cierto grado de sincronía unas series respecto a otras.

## 4. Metodología

La metodología de este estudio consiste en la aplicación de tres análisis -los resultados obtenidos de los dos primeros se utilizan como referencia para el tercer estudio-. El primer estudio es el análisis empírico desarrollado y aplicado por el NBER, en el cual Bry y Boschan (Ref. [1]) plasmaron una serie de pasos computacionales para la identificación de puntos de giro en series de tiempo. El segundo análisis lo propuso Eugene Fama (Ref. [2]), mismo que se considera de naturaleza estocástica, porque se justifica mediante la probabilidad condicional de que suceda un *n*-ésimo cambio positivo (negativo) -en el rendimiento del activo- dado que los cambios de uno hasta *n*-1 también tuvieron valores positivos (negativos). De manera similar, se puede calcular para los casos en el que el cambio sea negativo o bien sea cero. Por último, el estudio de cambios estructurales propuesto por Gregory Chow (Ref. [3]) es un modelo lineal con dominio en el tiempo cuyo objetivo es identificar cambios estructurales en series de tiempo a través de la comparación de dos periodos en el tiempo que se analizan estadísticamente para determinar si pertenecen o no a una misma regresión lineal. En caso afirmativo, la estructura de la serie es la misma para ambos periodos; si no sucede así, entonces hay un cambio estructural.

## 4.1. Primer paso. Análisis cíclico de series de tiempo

De acuerdo a los investigadores del NBER, el análisis cíclico en series de tiempo requiere de tres procedimientos básicos:

- Determinación de puntos de inflexión
- Análisis del ciclo de negocio estándar
- Análisis de recesión y recuperación

**La determinación de puntos de inflexión** -picos y valles- en las series de tiempo permite distinguir analíticamente a las expansiones y contracciones, para lo cual, la serie tiempo debe estar ajustada estacionalmente. Dicha determinación está sujeta al juicio personal de quien haga la interpretación ya que se basa en un conjunto de reglas empíricas. Las inflexiones y las tendencias en los ciclos se han logrado identificar a través de la observación y el estudio del comportamiento de varias series económicas a través del tiempo.

**El análisis del ciclo de negocio estándar** es una descripción histórica del comportamiento cíclico de la serie económica en el tiempo. Este análisis utiliza los valores de la serie durante varios ciclos completos y resume el comportamiento cíclico, el cual se describe mediante sus duraciones, amplitudes y fases; así como los patrones intra-cíclicos y los cambios seculares –cambios repetitivos después de cierto periodo-. Estas medidas son, casi siempre, sobre la base de ciclos completos, aunque al explicar el comportamiento histórico no está particularmente adaptado a las condiciones de la actividad económica actual, donde la identificación del ciclo es el problema en cuestión.

Por su parte, **el análisis de recesión y recuperación** tiene como objetivo medir el porcentaje de cambio de los valores de las series de tiempo respecto a puntos de referencia -como picos o valles anteriores- durante los periodos dados con duración de tres, cuatro o seis meses. Además compara los cambios durante la expansión o contracción respecto a las fases de varios ciclos precedentes, lo que permite dar contexto acerca de la economía actual, su evolución, su fuerza o debilidad relativa, o bien, su carácter relativo típico o distintivo a ciertos patrones experimentados previamente. Al comparar el ciclo actual con experiencias previas, en varias actividades estratégicas, permite evaluar las condiciones actuales del ciclo económico además de identificar las principales diferencias. Este análisis puede ser realizado en un entorno de ajustes como los cambios de políticas gubernamentales y ver sus resultados.

#### **4.1.1. El algoritmo de Bry y Boschan**

De acuerdo al NBER los métodos de análisis cíclico no necesitan ser restringidos en su aplicación ya que en la actualidad pueden ser ocupados por gobiernos, universidades, asociaciones profesionales y empresas que participan en actividades de investigación. El constante incremento en la medición de series de tiempo y los avances tecnológicos -equipos de cómputo y *software*- han ayudado a realizar análisis más eficientes de los ciclos económicos a nivel regional, industrial, empresarial y personal. Gracias a su amplia cobertura se puede aplicar a cualquier serie de tiempo y para este trabajo se aplica una selección de índices.

En el presente trabajo se comenta sólo la selección computacional de los puntos de inflexión. A continuación se describen los pasos del algoritmo propuesto por Bry y Boschan:

- I. Determinación de valores extremos en la serie y su substitución por valores promedio.
- II. Identificación de puntos de inflexión en la media móvil de 12 meses de la serie (ya con los valores extremos remplazados)
  - a) Identificación de los picos (o valles) más altos en una vecindad  $\pm 5$  meses.
  - b) Verificación de la alternancia entre crestas y valles mediante la selección del mayor pico de múltiples picos o del menor valle de múltiples.
- III. Determinación de los puntos de inflexión en la curva de Spencer (ya con los valores extremos remplazados)
  - a) La identificación del pico mayor (o menor) en una vecindad de  $\pm 5$  meses.
  - b) Verificación de la duración mínima de un ciclo: 15 meses, si es necesario se eliminan los picos más bajos y/o los valles más altos.
- IV. Determinación de los puntos de inflexión correspondientes a la serie suavizada con un filtro de 3 a 6 meses, dependiente del valor de meses del ciclo dominante (MCD, por sus siglas en inglés).<sup>1</sup>
  - a) La identificación del valor más alto (o el más bajo) dentro de una vecindad  $\pm 5$  meses en las inflexiones en la curva de Spencer.
- V. Determinación de los puntos de inflexión en la serie sin suavizar.
  - a) Identificación del pico mayor (o valle menor) en una vecindad  $\pm 4$  meses o MCD (meses del ciclo dominante), el que sea mayor, o se puede realizar esta selección de inflexiones en una serie con un pequeño suavizado de media móvil.
  - b) Eliminación de puntos inflexión en un periodo de seis meses al comienzo y al final de las series
  - c) Eliminación de picos menores (o valles mayores) en los extremos de la serie.
  - d) Eliminación de ciclos en los cuales su duración es menor que 15 meses.
  - e) Eliminación de fases en los cuales su duración es menor que 5 meses.
- VI. Determinación final de los puntos de inflexión.

---

<sup>1</sup> El MCD de cualquier serie es el número de meses necesarios para que la componente de tendencia cíclica se imponga sobre la componente aleatoria en la serie de tiempo.

## **Paso 1: Identificación y sustitución de valores extremos**

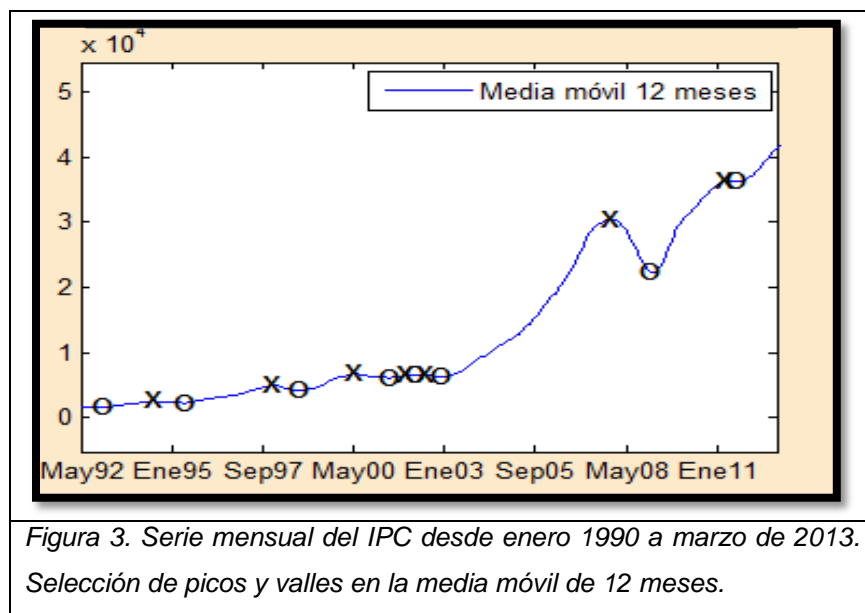
Las representaciones de los movimientos de tendencia de los ciclos deben estar libres de la influencia de observaciones extremas debido a eventos que no pertenecen a la tendencia del ciclo. Para evitar dichos valores extremos se aplica, sobre la serie original, el promedio móvil ponderado de Spencer (ver anexo uno).

**Los valores extremos** se encuentran fuera del rango delimitado por  $\pm 3.5$  desviaciones estándar a partir del promedio del cociente entre los valores de la curva original y los valores de la curva de Spencer. **Dichos valores extremos se substituyen**, en la serie original, por aquellos valores obtenidos en la curva de Spencer, quitando así las observaciones extremas de la serie original.

## Paso 2: Identificación de picos y valles en la serie suavizada por un filtro de media móvil de 12 meses.

Posteriormente, se determinan las inflexiones -pico o valle- **en la media móvil de 12 meses** (ver anexo dos) -después del ajuste de los valores extremos-. La serie con suavizado de 12 meses parece ser conveniente para la eliminación de las fluctuaciones de periodo corto o de muy poca profundidad.

Para la selección de puntos de inflexión, primero se establecen los puntos de inflexión tentativos, después se prueba que cumplan ciertas reglas, la primera es que cualquier mes cuyo valor es superior tanto a los cinco meses precedentes como a los cinco meses posteriores se le considerará como fecha de un pico provisional. Posteriormente, el mes cuyo valor es inferior tanto a los cinco valores anteriores como a los posteriores se le considerará como la fecha tentativa de un valle provisional. La selección de puntos de inflexión en la media móvil de doce meses está sujeta a una sola prueba, que es la de alternancia de picos y valles. La eliminación de puntos de inflexión es simple, para dos o más picos contiguos, se elige el mayor, pero si tienen el mismo valor se escoge el último en la serie. Para el caso de los valles, el procedimiento es el mismo. La selección de picos y valles en la media móvil de 12 meses se ilustra en la figura 3.



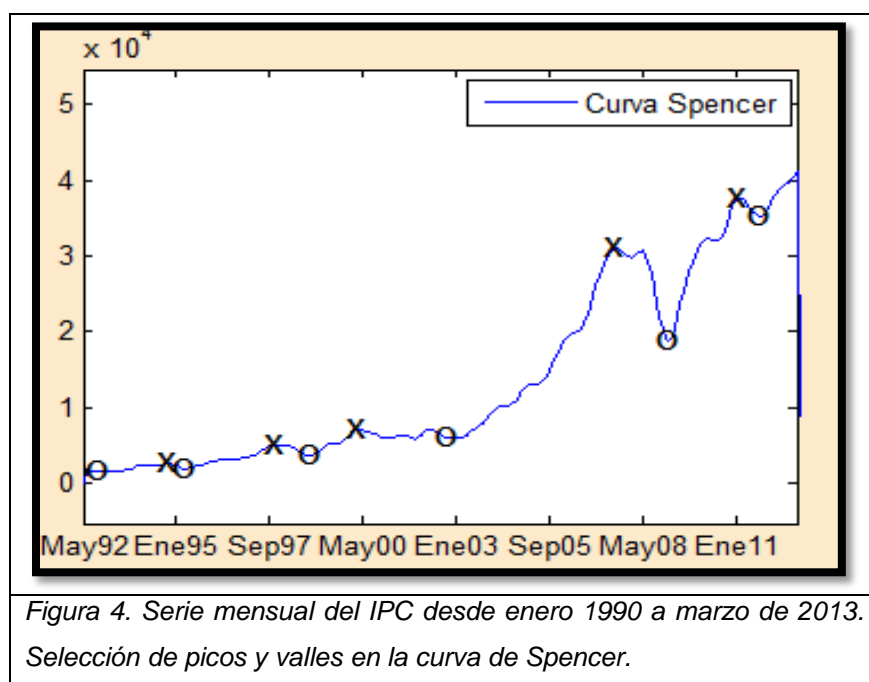
### Paso 3: Identificación de picos y valles en la serie ajustada con el filtro de Spencer.

El algoritmo busca ubicar los picos y valles en la curva de Spencer, los cuales fueron encontrados en el paso anterior, dentro de una vecindad o ventana de  $\pm 5$  meses, es decir, en este intervalo se busca el mayor (o menor) de los once puntos del intervalo que se forma para cada ventana, para ubicar los picos (o valles). Una vez seleccionadas las inflexiones, éstas son sujetas a las siguientes dos pruebas:

1. Las fases – pico-pico, valle-valle- deben tener al menos quince meses de duración.
2. La alternancia se debe de mantener, es decir, pico–valle–pico.

No pueden existir puntos de giro a menos de seis meses al principio y final de la serie para evitar picos o valles falsos.

Al identificar los puntos de giro cercanos, el algoritmo excluye el pico menor, y el mayor de los valles. La exclusión de cualquier punto de giro, requiere la eliminación del punto de giro opuesto, para mantener la alternancia entre picos y valles. En la figura 4 se ilustran las inflexiones en la curva de Spencer.



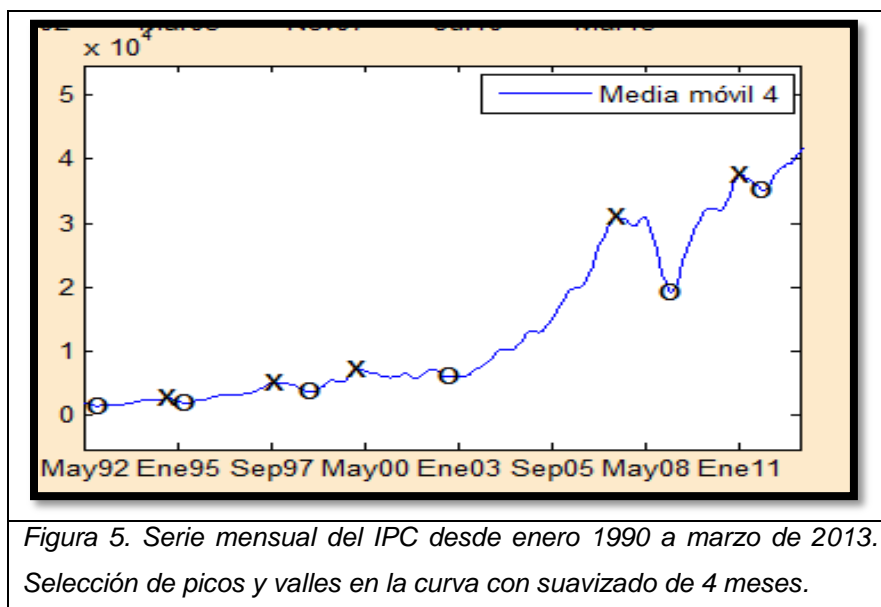


**Paso 4: Identificación de picos y valles en la serie suavizada por un filtro de media móvil de 4 meses.**

La última búsqueda de puntos de giro se realiza en la serie **con suavizado a corto plazo** aplicando el criterio MCD -*Month-Cycle-Domain*, por sus siglas en inglés-. El MCD de cualquier serie es el número de meses necesarios para que la componente de tendencia cíclica se imponga sobre la componente aleatoria en la serie de tiempo. Si la serie tiene ciclos fuertes y poca aleatoriedad, no pasará mucho tiempo (tal vez no más de uno o dos meses) hasta que el cambio promedio en la componente de tendencia cíclica sea mayor que la variación media en la componente aleatoria. Si la serie tiene ciclos de poca profundidad, pero frecuentes, pueden pasar muchos meses antes de que el movimiento de tendencia cíclica se imponga.

Sobre esta nueva curva, de suavizado de corto plazo, se ubican los puntos de giro obtenidos sobre la curva de Spencer, del paso 3. Por último se verifica que sigan siendo máximos o mínimos en un rango de  $\pm 5$  meses en la nueva curva.

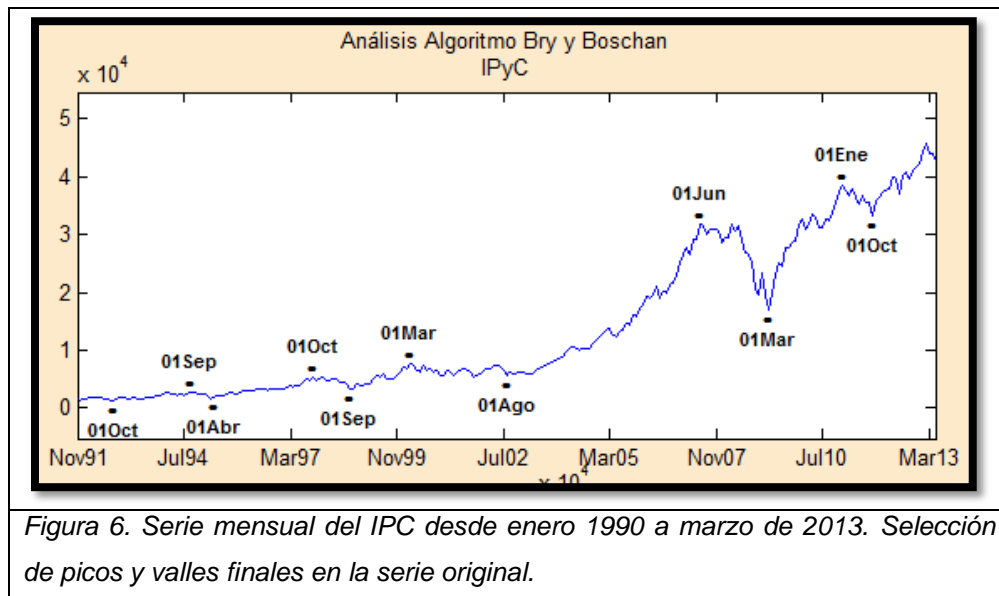
De manera particular, para este trabajo se hace el suavizado a corto plazo mediante una media móvil de cuatro meses, la cual se ilustra en la figura 5.



**Paso 5: Identificación de picos y valles en la serie original.**

El último paso del algoritmo consiste en localizar los **puntos de inflexión en la serie original sin valores extremos**, que corresponde a los encontrados en la serie suavizada con la media móvil de cuatro meses. El algoritmo establece el pico mayor en la serie de datos sin suavizar dentro de un rango de  $\pm 4$  meses. Para evitar señales falsas, se eliminan seis meses al principio de la serie y seis al final. Por último se verifica que la duración mínima de los ciclos sea de 15 meses, además de que ninguna de sus fases sea menor a 5 meses.

**Paso 6. Se indican las inflexiones finales en la serie original sin los valores extremos, como se ilustra en la figura 6.**



## 4.2. Segundo paso. Análisis de Fama

Eugene Fama realizó un estudio acerca del mercado de capitales para su tesis doctoral, posteriormente escribió un artículo sobre dicho estudio (Ref. [2]). Fama menciona que hay dos teorías para el estudio del mercado de capitales, la primera de ellas es el análisis histórico del comportamiento de las series de tiempo y la segunda, toma en cuenta a las series de tiempo como caminatas aleatorias. El primer caso, asumen que el comportamiento histórico de los precios de las acciones contiene la información importante acerca del comportamiento futuro de las mismas, mientras que en el segundo no se asume de esa manera, sino que los precios son vistos como cadenas de Markov.

Fama menciona que los rendimientos son independientes entre sí y que no tienen una distribución normal. Analiza la varianza, la correlación y por último realiza una prueba que se conoce como “*run test*”. Esta prueba, identifica el comportamiento de las secuencias de cambios de precios con un mismo signo. Por ejemplo, una corrida positiva (negativa) de longitud  $i$ , es una secuencia de  $i$  rendimientos positivos (negativos), en la longitud  $i + 1$  sigue un rendimiento negativo (positivo) o nulo. Las pruebas que realiza de cambios de signos son: totales, por signo y la última por longitud. A continuación se mencionan las tres pruebas, sin embargo para este trabajo de tesis se utiliza la referente a la longitud.

### 4.2.1. Cambios de signos totales

El análisis matemático de Fama asume que la muestra proporcional de cada signo -positivo, negativo o nulo- es representativa, por ello considera que las muestras son estimaciones adecuadas y proporcionales a la población.

Para calcular los cambios de signos totales en la serie, se considera  $N$  como el cambio de signos totales en la serie y  $n_i$  como el número de cambios que pueden ser: positivo, negativo o nulo:

$$m = \frac{[N(N + 1) - \sum_{i=-1}^3 n_i^2]}{N} \dots (1)$$

Para cualquier acción, la suma de los números esperados positivos, negativos y nulos será igual al total de números esperados de corridas de todos los signos ( $m$ ).

### 4.2.2. Análisis de corridas de signos

El cambio de signo en los precios es generado por un proceso de Bernoulli independiente con probabilidades  $P(+)$ ,  $P(-)$ , y  $P(0)$ . Para simplificar el desarrollo de este análisis sólo se desarrollará la probabilidad de  $P(+)$ . De manera similar se calcula para los otros dos casos.

Para muestras largas, el número esperado de corridas positivas  $P(+)$  de longitud  $i$ , en la muestra de  $N$  cambios de signo, es aproximadamente:

$$NP(+)^i[1 - P(+)]^2 \dots (2)$$

El número esperado de corridas positivas es:

$$\sum_{i=1}^{\infty} NP(+)^i[1 - P(+)]^2 = NP(+)[1 - P(+)] \dots (3)$$

La probabilidad de la corrida positiva puede ser expresada como el promedio del número esperado de corridas positivas en una muestra de tamaño  $N$ . Para obtener la proporcionalidad respecto al número total esperado de los cambios de signo, recordando que  $m$  son los cambios de signos positivos, negativos y nulos, se divide entre  $m$ , por lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$P(+run) = \frac{NP(+)[1 - P(+)]}{m} \dots (4)$$

El cambio esperado de signo del número total real de corridas positivas ( $\bar{R}(+)$ ) es el número de cambios positivos reales ocurridos por su probabilidad de ocurrencia. Matemáticamente se expresa:

$$\bar{R}(+) = R[P(+run)] \dots (5)$$

### 4.2.3. Distribución de corridas por longitud

De acuerdo a Fama, existe una distribución esperada por longitud para cada signo, que se obtiene mediante probabilidad condicional. Los resultados se comparan con la distribución de ocurrencia real.

El número esperado de corridas positivas con longitud  $i$  de acuerdo a la ecuación (3) es:

$$NP(+)[1 - P(+)]$$

Por lo que la proporción esperada de corridas positivas de longitud  $i$  es:

$$\frac{\text{Número esperado de corridas positivas con longitud } i}{\text{Número total esperado de corridas positivas}} = \frac{NP(+)^i [1 - P(+)]^2}{NP(+)[1 - P(+)]} \dots (6)$$

Reduciendo la expresión anterior, se obtiene:

$$NP(+)^{i-1} [1 - P(+)] \dots (7)$$

Esta proporción es equivalente a la probabilidad condicional de corridas positivas de longitud  $i$ . La suma de todas las probabilidades condicionales anteriores es uno.

Estas probabilidades pueden ser usadas para calcular las distribuciones del número total real de corridas de cada signo. La fórmula de números esperados de cambios positivos de longitud  $i$ , con  $i = 1, 2, \dots, \infty$  es:

$$\bar{R}_i(+) = R(+)P(+)^{i-1} [1 - P(+)] \dots (8)$$

Fama comprueba que existen muy pocas corridas largas, y la corrida de mayor longitud es de 7 a 8 cambios del mismo signo. Lo comprobó de forma matemática y empírica concluyendo que no existe una tendencia en las series financieras.

De forma particular aplicamos el análisis empírico en el programa para contar el número de cambios consecutivos del mismo signo en la serie de tiempo -positivo y negativos- para utilizarlo en el tercer paso (Análisis de Chow).

### 4.3. Tercer paso. Análisis de Chow

Este último paso describe la metodología de cambios estructurales realizada por Gregory Chow en su tesis de doctorado (Ref. [3]). La serie de tiempo que toma para su estudio empírico se compone por la demanda de coches en Estados Unidos entre los años 1921 y 1957. Calcula dos regresiones lineales de la demanda en dos diferentes periodos de tiempo, el primero es de 33 años y el segundo de 4 años. Uno de los resultados de las regresiones lineales son los ponderadores de las variables independientes conocidos como betas ( $\beta$ ). En la ecuación (9) se expresa la variable dependiente  $y$  en función de la variable independiente  $x$  multiplicada por el ponderador  $\beta_1$ . De acuerdo al número de  $n$  variables explicativas o independientes se obtienen el mismo número de  $n$  betas. Mediante la prueba F compara los errores de ambas regresiones bajo el supuesto de que el conjunto de betas son iguales. Si es así, tendrían un comportamiento similar, en el caso contrario existiría un cambio estructural en la serie.

#### 4.3.1. Prueba de igualdad de conjunto de coeficientes en dos regresiones lineales.

La regresión para las primeras  $n$  observaciones, es:

$$y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \dots (9)$$

Donde  $y_1$  y  $\varepsilon_1$  son vectores columna con  $n$  elementos,  $X_1$  es una matriz no singular de  $n$  por  $p$ , y  $\beta_1$  es el vector columna de los coeficientes de la regresión con  $p$  elementos.

La segunda regresión para  $m$  observaciones, es:

$$y_2 = X_2\beta_2 + \varepsilon_2 \dots (10)$$

Donde  $y_2$  y  $\varepsilon_2$  son vectores columna con  $n$  elementos,  $X_2$  es una matriz no singular de  $m$  por  $p$ , y  $\beta_2$  es el vector columna de los coeficientes de la regresión con  $p$  elementos.

$$y_1 = X_1\beta_1 + 0\beta_2 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = 0\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon_2$$

O también se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (11)$$

Chow establece la hipótesis nula acerca  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta$ , por lo que podemos escribir la ecuación (11), como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (12)$$

Si la hipótesis nula se cumple, la suma de cuadrados de los residuos bajo  $H_0$  debe ser igual a la suma de los cuadrados de la hipótesis alternativa ( $H_a: \beta_1 \neq \beta_2$ ) más la suma de los cuadrados de las desviaciones de los dos conjuntos de estimadores de  $y$ , bajo estas dos hipótesis se seguirá una distribución F con ciertos grados de libertad. Si la hipótesis nula es verdadera, el estimador de  $\beta$  es denotado por  $b_0$ :

$$\begin{aligned} b_0 \left[ \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ = [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1} [X_1'X_2'] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \beta + [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1} [X_1'X_1'] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (13) \end{aligned}$$

Por lo que los residuos de esta regresión son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b_0 &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \beta \\ &- \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1} [X_1'X_1'] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[ I - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1} [X_1'X_2'] \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (14) \end{aligned}$$

La suma de los residuos de mínimos cuadrados bajo la hipótesis nula se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b_0 \right\|^2 &= \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b_0 \right]' \left[ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} b_0 \right] \\ &= [\varepsilon_1' \varepsilon_2'] \left[ I - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1} [X_1'X_2'] \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (15) \end{aligned}$$

Si consideramos una sola regresión de  $n + m$  observaciones regresadas linealmente sobre  $p$  variables explicativas, entonces los grados de libertad para los errores se consideran como:  $n + m - p$ .

Por otra parte, en caso de que la hipótesis alternativa ( $H_a: \beta_1 \neq \beta_2$ ) los estimadores de mínimos cuadrados  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X_1'X_1]^{-1}X_1'y_1 \\ [X_2'X_2]^{-1}X_2'y_2 \end{bmatrix} \dots (16)$$

Los residuos bajo la hipótesis alternativa son:

$$\begin{bmatrix} y_1 - X_1b_1 \\ y_2 - X_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I - X_1[X_1'X_1]^{-1}X_1']\varepsilon_1 \\ [I - X_2[X_2'X_2]^{-1}X_2']\varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (17)$$

La suma de cuadrados de los residuos, bajo la hipótesis alternativa, es:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} y_1 - X_1b_1 \\ y_2 - X_2b_2 \end{bmatrix} \right\|^2 &= \|y_1 - X_1b_1\|^2 + \|y_2 - X_2b_2\|^2 \\ &= \varepsilon_1'[I - X_1[X_1'X_1]^{-1}X_1']\varepsilon_1 + \varepsilon_2'[I - X_2[X_2'X_2]^{-1}X_2']\varepsilon_2 \dots (18) \end{aligned}$$

En las últimas dos formas cuadráticas se tienen rangos  $n - p$  y  $m - p$  respectivamente. Además  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son independientes, por lo que el rango de la ecuación anterior es:  $m + n - 2p$ .

La suma de cuadrados bajo  $H_0$  (ecuación 15) se descompondrá en la suma de cuadrados bajo la  $H_a$  (ecuación 18) más la suma cuadrados de las diferencias:

La siguiente ecuación representa la diferencia de los coeficientes de las regresiones en cada periodo menos la tendencia que seguirían si pertenecieran a la misma regresión -hipótesis nula-

$$[X_1b_1 - X_1b_0] = [X_2b_2 - X_2b_0] \dots (19)$$

A partir de la identidad:

$$\begin{bmatrix} y_1 - X_1b_0 \\ y_2 - X_2b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - X_1b_1 \\ y_2 - X_2b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1b_1 - X_1b_0 \\ X_2b_2 - X_2b_0 \end{bmatrix} \dots (20)$$



Al elevar al cuadrado los elementos de ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} y_1 - X_1 b_0 \\ y_2 - X_2 b_0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} y_1 - X_1 b_1 \\ y_2 - X_2 b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 b_1 - X_1 b_0 \\ X_1 b_1 - X_2 b_0 \end{vmatrix}^2 \dots (21)$$

De acuerdo al producto cruzado del lado derecho de la ecuación (21), se aprecia que será cero. Para reducir la ecuación anterior la podemos expresar de la siguiente forma:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \dots (22)$$

A continuación se muestra que el rango de la forma cuadrática de  $Q_3$  puede tener como valor máximo a  $p$ . A partir de las ecuaciones (13) y (15), se obtiene que:

$$[X_1'X_1 + X_2'X_1]b_0 = X_1'y_1 + X_2'y_2 = X_1'X_1b_1 + X_2'X_2b_2 \dots (23)$$

Lo cual implica que:

$$b_2 - b_0 = -(X_1'X_1)^{-1}X_2'X_1(b_1 - b_0) \dots (24)$$

Substituyendo en la ecuación anterior dentro de  $Q_3$ , se tiene:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \begin{vmatrix} X_1(b_2 - b_0) \\ -X_2(X_2'X_2)^{-1} - X_1'X_1(b_1 - b_0) \end{vmatrix}^2 \\ &= [b_1' - b_0'] [X_1' - X_1'X_1(X_2'X_2)^{-1}X_2'] \begin{vmatrix} X_1 \\ -X_2(X_2'X_2)^{-1}X_1'X_1 \end{vmatrix} [b_1 - b_0] \dots (25) \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una forma cuadrática en  $b_1 - b_0$  y por lo que no tiene un rango mayor que  $p$ . Pero  $b_1 - b_0$  es una transformación lineal de  $\varepsilon$ 's, como se muestra en la ecuación (13) y en la siguiente ecuación:

$$b_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1 = \beta_1 + (X_1'X_1)^{-1}X_1'\varepsilon_1$$

Por lo que:

$$(b_1 - b_0) = \beta_1 - \beta + \{[X_1'X_1]^{-1}X_1'0\} - [X_1'X_1 + X_2'X_2]^{-1}[X_1'X_2'] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \dots (26)$$

Bajo la hipótesis nula  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $Q_3$  es la forma cuadrática de  $\varepsilon$ 's y tiene un rango máximo de  $p$ . A partir de la ecuación (26), se aprecia que  $Q_3$  tenderá a ser más grande cuando la hipótesis nula es falsa.

Se ha observado que el rango de  $Q_2$  es  $m + n - 2p$ . El rango de  $Q_1$  es menor o igual que la suma del rango de  $Q_2$  más el rango de  $Q_3$ , el rango de  $Q_3$  debe ser  $p$ . Bajo la hipótesis nula  $Q_2$  y  $Q_3$  se distribuyen de forma independiente  $\chi^2(m + n - 2p)\sigma^2$  y  $\chi^2(p)\sigma^2$ . Mientras la distribución  $Q_3$  es afectada si la  $H_0$  no se mantiene, entonces  $Q_2$  tendrá la misma distribución independiente. De este modo se puede probar  $H_0$  mediante la prueba  $F$ .

$$F(p, m + n - 2p) = \frac{\frac{Q_3}{p}}{\frac{Q_2}{m + n - 2p}}$$

$$= \frac{\|X_1b_1 - X_1b_0\|^2 + \|X_2b_2 - X_2b_0\|^2}{\|y_1 - X_1b_1\|^2 + \|y_1 - X_2b_2\|^2} \times \frac{(m + n - 2p)}{p} \dots (27)$$

La ecuación anterior es la prueba del análisis de covarianza cuando  $m > p$ .

La prueba que se utiliza para el presente trabajo es la ecuación (27), ya que la podemos describir de la siguiente forma:

$$F(p, m + n - 2p) = \frac{\frac{SSE(T1 + T2) - SEE(T1) - SEE(T2)}{p}}{\frac{SEE(T1) + SEE(T2)}{m + n - 2p}}$$

Dónde:

*SSE – suma del cuadrado de los errores*

*T1 – periodo 1 , con n observaciones*

*T2 – periodo 2, con m observaciones*

*m – tamaño de la primera muestra.*

*n – tamaño de la segunda muestra*

*p – es el número de regresores.*

## 5. Resultados

Para el análisis de resultados se consideraron tres índices bursátiles para tres diferentes países: México, Estados Unidos y Alemania.

**El índice de Precios y Cotizaciones -IPC-** es el índice bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores, está conformado por las 35 empresas de alta bursatilidad y que tiene el mayor valor en el mercado.

**El índice Standard and Poor's 500- S&P 500-** es uno de los más representativo de la situación real del mercado de Estados Unidos. Se compone de 500 empresas y se calcula mediante una capitalización ponderada de dichas acciones.

**El DAX** es el índice conformado por las 30 empresas más grandes de Alemania que cotizan en la Bolsa de Frankfurt.

Para estudiar los cambios estructurales se decidió tomar el periodo de veinte años comprendido entre octubre de 1993 y octubre de 2013, cada dato corresponde al valor mensual del índice correspondiente.

Índice	Precios históricos
IPC -México-	Octubre 1993 - Octubre 2013
S&P 500 -Estados Unidos-	Octubre 1993 - Octubre 2013
DAX -Alemania-	Octubre 1993 - Octubre 2013

## Análisis del IPC

Análisis de Bry y Boschan en la serie mensual del IPC.

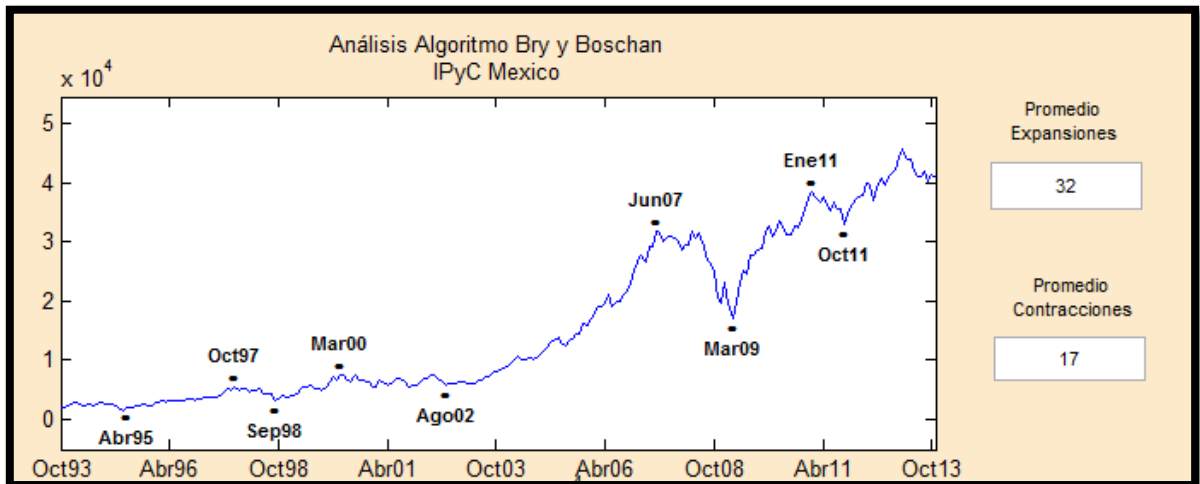


Figura 7. Análisis de Bry y Boschan en la serie mensual del IPC desde octubre 1993 a octubre 2013.

Expansiones	Meses Expansión	Contracciones	Meses Contracción
Abril-95 a Oct-97	30	Oct-97 a Sep-98	11
Sep-98 a Mar-00	18	Mar-00 a Ago-02	29
Ago-02 a Jun-07	58	Jun-07 a Mar-09	21
Mar-09 a Ene-11	22	Ene-11 a Oct-11	9
<b>Promedio</b>	<b>32</b>	<b>Promedio</b>	<b>17</b>
<b>Promedio expansiones y contracciones</b>		<b>24</b>	

Tabla 3. Ciclos económicos –expansiones, contracciones y promedios-de la serie mensual del IPC.

## Análisis de Eugene Fama

Número de Consecutivos Positivos	5
Número de Consecutivos Negativos	4
<b>Promedio</b>	<b>4</b>

Tabla 4. Análisis de Eugene Fama de la serie mensual del IPC.



Tabla de cambios estructurales de Chow.

Se comparan las fechas de los cambios estructurales ubicadas alrededor de las fechas de los puntos de giro.

Se indican los cambios estructurales (CE), así como el cambio estructural coincidente con el algoritmo de Bry y Boschan (CE/B&B) y finalmente se indica la fecha en que ocurre un punto de inflexión de Bry y Boschan (B&B).

No.	Fecha	CE/B&B	Descripción
1	01-Mar-1997	CE	En este primer caso los cambios estructurales se encuentran antes del pico de del 1-Oct-13.
2	01-Apr-1997	CE	
3	01-May-1997	CE	
4	01-Jun-1997	CE	
5	01-Jul-1997	CE	
6	01-Aug-1997	CE	
7	01-Sep-1997	CE	
8	01-Oct-1997	CE /B&B	
9	01-Feb-1998	CE	Este segundo caso detecta varios cambios estructurales antes del valle, sin embargo en este caso no detecta el valle como cambio estructural.
10	01-Apr-1998	CE	
11	01-May-1998	CE	
12	01-Jun-1998	CE	
13	01-Aug-1998	CE	
	01-Sep-1998	B&B	
14	01-Mar-1999	CE	Este tercer caso detecta varios cambios estructurales después del pico, sin embargo en este caso el pico no es cambio estructural.
	01-Mar-2000	B&B	
15	01-Apr-2000	CE	
16	01-Jun-2000	CE	
17	01-Jul-2000	CE	
18	01-Aug-2000	CE	
19	01-Dec-2001	CE	
20	01-Apr-2004	CE	
21	01-Dec-2004	CE	
22	01-Jan-2005	CE	
23	01-Feb-2005	CE	
24	01-Mar-2005	CE	
25	01-Jun-2005	CE	
26	01-Jul-2005	CE	
27	01-Aug-2005	CE	
28	01-Sep-2005	CE	
29	01-Nov-2005	CE	
30	01-Feb-2006	CE	
31	01-Mar-2006	CE	
32	01-Apr-2006	CE	
33	01-May-2006	CE	

34	01-Sep-2006	CE	Para este caso indica seis cambios estructurales antes del pico de B&B
35	01-Oct-2006	CE	
36	01-Nov-2006	CE	
37	01-Dec-2006	CE	
38	01-Feb-2007	CE	
39	01-Mar-2007	CE	
	01-Jun-2007	B&B	
40	01-Oct-2008	CE	Para este caso los cambios estructurales se indican antes del pico, además de que el pico sí es un cambio estructural.
41	01-Dec-2008	CE	
42	01-Jan-2009	CE	
43	01-Feb-2009	CE	
44	01-Mar-2009	CE/B&B	
45	01-Apr-2009	CE	
46	01-Jul-2011	CE	
47	01-Apr-2013	CE	

*Tabla 5. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro –Bry y Boschan-en la serie del IPC.*

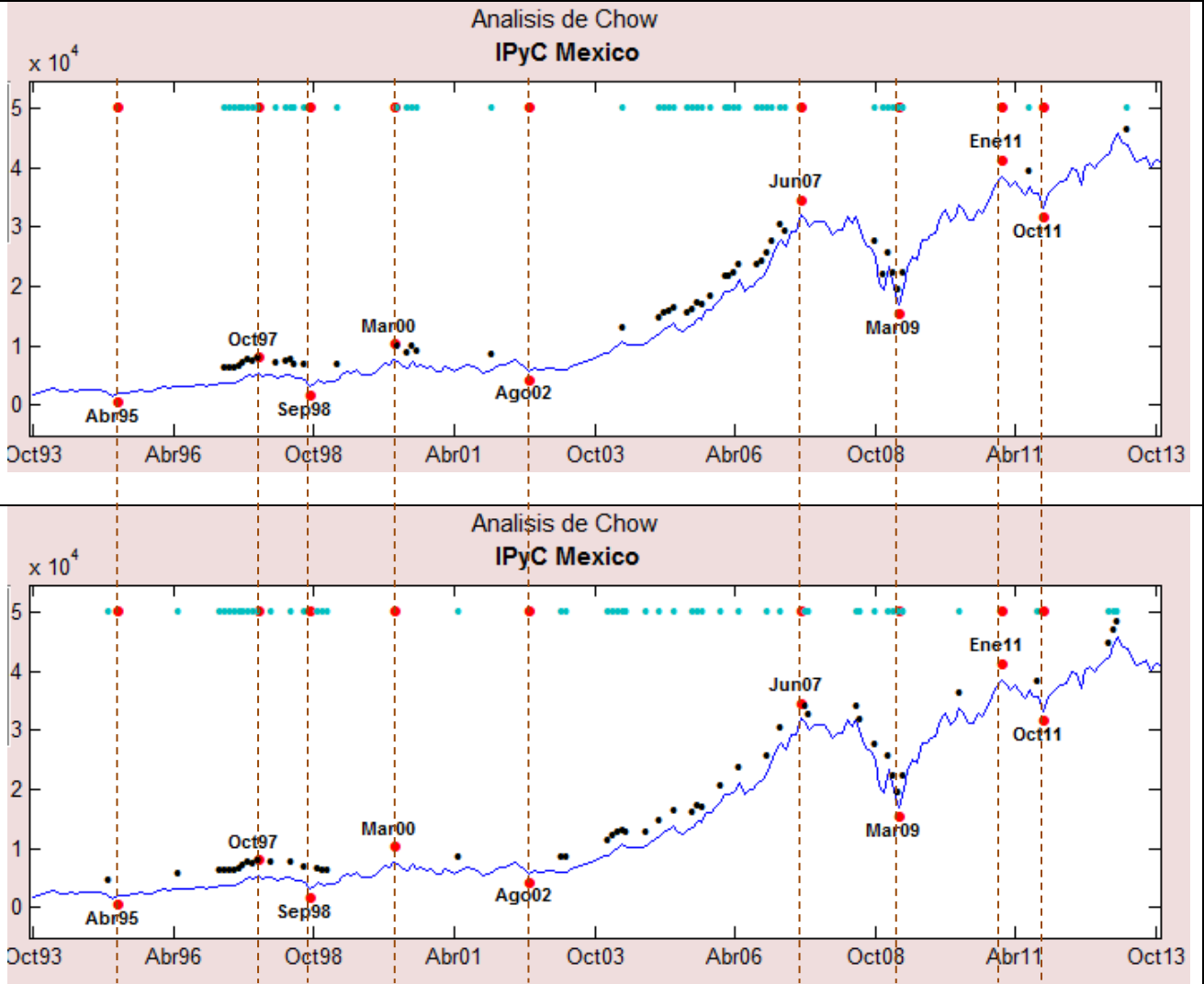
#### Observaciones.

Al comparar las fechas de cambios estructurales respecto a las correspondientes de los picos y valles del algoritmo de Bry y Boschan se encuentra que una serie de cambios estructurales suceden antes que las inflexiones. Sin embargo en un caso suceden después de la inflexión.

No todos los cambios estructurales se asocian a los puntos de giro ya que hay cambios estructurales que son máximos o mínimos locales, es decir que la serie sufre cambios en la tendencia lo que implica un cambio en la estructura.

Lo que podemos observar es que al final de la serie el algoritmo de Chow identifica muy pocos cambios estructurales, por lo que se decidió probar un segundo tamaño de ventanas con base en el análisis de ciclos del NBER. Sus investigadores consideran que la duración de un ciclo no debe ser menor a quince meses y ninguna de sus fases debe de ser menor a cinco meses. Se decidió realizar el análisis con el valor de quince para  $n$  y cinco para  $m$ .

**Comparación de dos casos de ventanas en la serie mensual del IPC.**  
**Figura superior** considera las ventanas de  $n=22$  y  $m=4$ .  
**Figura inferior** considera las ventanas de  $n=15$  y  $m=5$ .



*Figura 9. Análisis comparativo de dos casos de ventanas en la serie del IPC.*

A continuación se muestra la tabla comparativa de las fechas de cambios estructurales respecto a los puntos de giro de Bry y Bochan –B&B– para los dos casos de ventanas.



<b>Ventanas n=22 y m=4</b>		<b>Ventana n=15 y m=5</b>	
Cambio estructural	Punto de inflexión	Cambio estructural	Punto de inflexión
Primera inflexión (01-Abrl-95)			
-	01-Abrl-95	01-Feb-1995	01-Abrl-95
Segunda inflexión (01-Oct-1997)			
01-May-1997		01-May-1997	
01-Jun-1997		01-Jun-1997	
01-Jul-1997		01-Jul-1997	
01-Aug-1997		01-Aug-1997	
01-Sep-1997		01-Sep-1997	
01-Oct-1997	01-Oct-1997	01-Oct-1997	01-Oct-1997
Tercera inflexión (01-Sep-1998)			
01-Apr-1998		01-May-1998	
01-May-1998			
01-Jun-1998		01-Aug-1998	
01-Aug-1998	01-Sep-1998		01-Sep-1998
		01-Nov-1998	
		01-Dec-1998	
		01-Jan-1999	
Cuarta inflexión (01-Mar-2000)			
-	01-Mar-2000	-	01-Mar-2000
01-Apr-2000		-	
01-Jun-2000		-	
01-Jul-2000		-	
01-Aug-2000		-	
Quinta inflexión (01-Aug-2000)			
-	01-Aug-2002	-	01-Aug-2000
Sexta inflexión (01-Jun-2007)			
01-Nov-2006		01-Nov-2006	
01-Dec-2006			
01-Feb-2007		01-Feb-2007	
01-Mar-2007	01-Jun-2007		01-Jun-2007
		01-Jul-2007	
		01-Aug-2007	
Séptima Inflexión (01-Mar-2009)			
01-Jan-2009		01-Jan-2009	
01-Feb-2009		01-Feb-2009	
01-Mar-2009	01-Mar-2009	01-Mar-2009	01-Mar-2009
01-Apr-2009		01-Apr-2009	
Séptima Inflexión (01-Ene-2011)			
-	01-Ene-11	-	01-Ene-11
Octava Inflexión (01-Oct-2011)			
-	01-Oct-11	01-Sep-2011	01-Oct-11

Tabla 6. Análisis comparativo de los dos diferentes casos para las ventanas de tiempo en la serie del IPC.

Es de suma relevancia mencionar que para el caso de  $n=22$  y  $m=4$  se aprecia un pico en la fecha del 01-Feb-2013, mientras que en las ventanas de  $n=15$  y  $m=5$  marca tres cambios estructurales en las fechas del 01-Dec-2012, 01-Jan-2013 y 01-Feb-2013, lo cual indica que se aproxima un cambio en la estructura. Parece ser un pico que el algoritmo de Bry y Boschan todavía no indica, porque elimina los datos en los extremos de la serie. Así se concluye que el algoritmo de Chow ayuda con los cambios estructurales en periodos que el algoritmo de Bry y Boschan no considera por las características del algoritmo.

Al hacer la comparación de los valores de las ventanas obtenidos a partir del promedio de los ciclos de Bry y Boschan y del análisis de Fama -caso  $n=22$  y  $m=4$ - ; respecto al segundo caso con los valores sugeridos por el NBER - $n=15$  y  $m=5$ - se observa que en este último caso, existen mayores coincidencias entre los cambios estructurales y los puntos de giro. Por esta razón, el análisis subsecuente para el resto de los índices se realizará tomando los valores del segundo caso - $n=15$  y  $m=5$ .

## S&P 500

Análisis de Chow n=15 y m=5

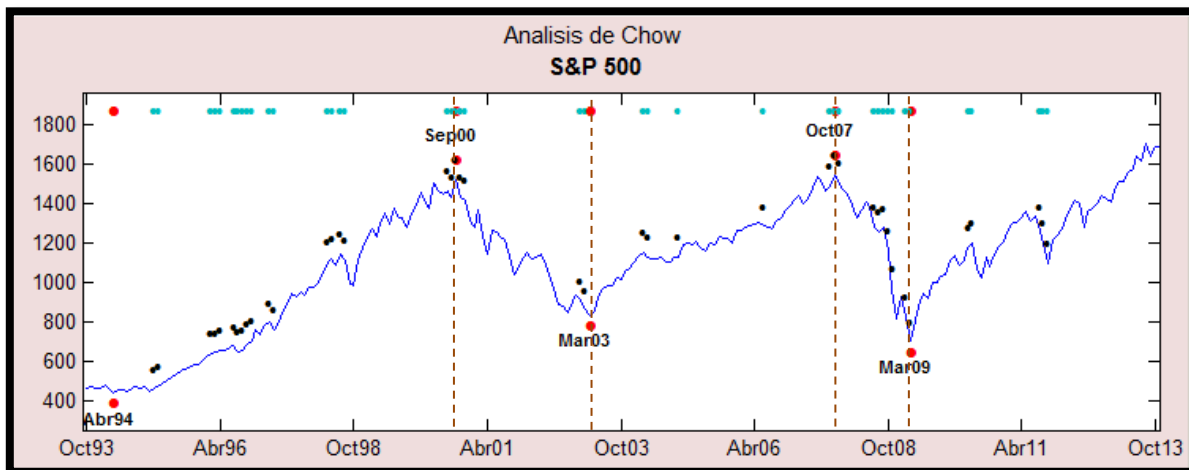


Figura 10. Análisis comparativo de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro –Bry y Boschan- en la serie del S&P 500.

Cambios Estructurales	Puntos de Inflexión
Primera Inflexión (01-Sep-2000)	
01-Jul-2000	
01-Aug-2000	
01-Sep-2000	01-Sep-2000
01-Oct-2000	
Segunda inflexión (01-Mar-2003)	
01-Jan-2003	
01-Feb-2003	
	01-Mar-2003
Tercera inflexión (01-Oct-2007)	
01-Sep-2007	
01-Oct-2007	01-Oct-2007
01-Nov-2007	
Cuarta Inflexión (01-Mar-2009)	
01-Nov-2008	
01-Feb-2009	
01-Mar-2009	01-Mar-2009

Tabla 7. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro –Bry y Boschan- en la serie del S&P 500.

Es importante mencionar que el primer punto de inflexión, correspondiente a la fecha 1-Abril-94, se presenta en los primeros seis meses de la serie. El análisis de Chow toma como valor de la primera  $m=15$  por lo que dicho punto de inflexión se localiza dentro de la primer ventana. El algoritmo puede localizar un cambio estructural sólo si ocurre a partir del quinceavo dato, por lo que en el sexto dato es imposible encontrar un cambio estructural.

Para aquellos cambios estructurales que no están cercanos a los puntos de giro del algoritmo de B&B no se consideran señales falsas debido a que preceden a picos o valles locales.

## DAX

Análisis de Chow  $n=15$  y  $m=5$

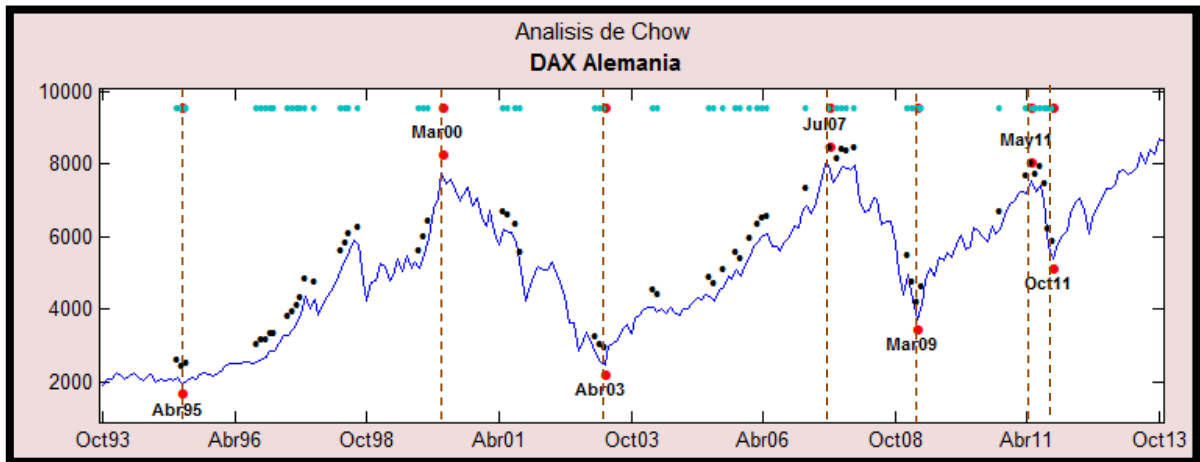


Figura 11. Análisis comparativo de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro -Bry y Boschan- en la serie del DAX.

Cambios Estructurales	Puntos de Inflexión
Primera Inflexión (01-Apr-1995)	
01-Mar-1995	01-Apr-1995
01-Apr-1995	
01-May-1995	
Segunda inflexión (01-Mar-2000)	
01-Oct-1999	01-Mar-2000
01-Nov-1999	
01-Dec-1999	
Tercera inflexión (01-Apr-2003)	

Tercera inflexión (01-Apr-2003) -continúa-	
01-Feb-2003	
01-Mar-2003	
01-Apr-2003	01-Apr-2003
Cuarta Inflexión (01-Jul-2007)	
01-Jul-2007	01-Jul-2007
01-Sep-2007	
01-Oct-2007	
Quinta inflexión (01-Mar-2009)	
01-Jan-2009	
01-Feb-2009	
01-Mar-2009	01-Mar-2009
01-Apr-2009	
Quinta inflexión (01-May-2011)	
01-Apr-2011	
01-May-2011	01-May-2011
01-Jun-2011	
Sexta Inflexión (01-Oct-2011)	
01-Aug-2011	
01-Sep-2011	
01-Oct-2011	01-Oct-2011

*Tabla 8. Tabla comparativa de cambios estructurales -Chow- respecto a puntos de giro –Bry y Boschan-en la serie del DAX.*

En el índice DAX todas las inflexiones de Bry y Boschan se encuentran cerca de las fechas de los cambios estructurales. Por lo que podemos ver que los cambios estructurales de Chow aplicados a series financieras son una herramienta útil.

## 6. Conclusiones

La principal aportación del presente trabajo es establecer una metodología para determinar los valores de las ventanas que se utilizan en el análisis de Chow. Los valores se determinan a partir de la aplicación del algoritmo de Bry y Boschan y del análisis de corridas de longitud de Eugene Fama. Originalmente, Chow no planteó una metodología para determinar el valor de dichas ventanas. El NBER define de manera muy precisa que los ciclos deben tener una duración mínima de quince meses, además de que ninguna de sus fases debe ser menor a cinco meses. El uso de los valores sugeridos para el tamaño de las ventanas -quince y cinco meses, respectivamente- permite identificar cambios estructurales alrededor de los puntos de inflexión.

Los valores de las ventanas para el análisis de Chow debe tomar en cuenta la naturaleza de la serie en estudio. En este caso la serie financiera fue mensual por lo que la consideración del tamaño de las ventanas –quince y cinco meses, respectivamente- fue el correcto.

El análisis de Chow es una herramienta adicional para la toma de decisiones financieras -compra o venta de activos-. Es importante hacer hincapié que el algoritmo de Chow indica los cambios estructurales y en el presente trabajo, se identifican claramente cuáles de ellos son asociados a puntos de giro. También se observa que el algoritmo identifica cambios estructurales asociados a máximos o mínimos locales, lo anterior se puede apreciar a partir de la figura 8 hasta la figura 11. Sin embargo, para la toma de decisiones de compra y venta, es importante observar si existen varios cambios estructurales consecutivos, además si se presentó un pico o un valle –B&B- para conocer la tendencia que presenta la serie.

Por ejemplo, el algoritmo de Chow marca tres cambios estructurales de dic-2012 a feb-2013 en la gráfica del IPC –figura 8-, por lo que se espera que el algoritmo de Bry y Boschan indique un punto de giro en los meses subsecuentes. Por otra parte el DAX y S&P 500 se encuentran en fase de expansión sin ningún cambio estructural, lo cual sugiere que se mantendrán en dicha fase.

Al comparar los cambios estructurales con el análisis de puntos de inflexión de Bry y Boschan, se observa que las inflexiones de Bry y Boschan se encuentran en dos situaciones específicas. La primera sucede cuando se presentan varios cambios

estructurales y posteriormente ocurre una inflexión. La segunda ocurre cuando el punto de inflexión se ubica entre varios cambios estructurales. Cuando el algoritmo de Chow indica varios cambios estructurales consecutivos, se puede estimar que pronto existirá un punto de inflexión -ya sea un pico o un valle- pero también hay que tomar en cuenta que las series de tiempo presentan diferentes ciclos; es decir, presentan variaciones tanto en duración como en profundidad. El algoritmo de Chow identifica todos los cambios estructurales en la serie, pero no todos los ellos que se asocian a los picos o valles de Bry y Boschan. Lo anterior se debe a que el algoritmo de Bry y Boschan realiza la selección de un pico entre varios picos y de igual manera sucede con los valles. Por su parte, el análisis de Chow se aplica a todo lo largo de la serie, por lo que es posible encontrar cambios estructurales correspondientes a máximos o mínimos locales. Es importante destacar que el análisis de Chow es una herramienta que se recomienda utilizar junto con el algoritmo de Bry y Boschan ya que este último nos indica el comportamiento anterior en la serie, es decir si le precede un pico o valle. Por su parte, el algoritmo de Chow analiza el último comportamiento en la serie y verifica si existen varios cambios estructurales, lo que podría prever la ocurrencia de una inflexión próxima.

Es de suma relevancia tener en cuenta el tipo de datos de la serie en estudio –diarios, semanales, mensuales o anuales- además de conocer las expansiones y contracciones históricas de la serie para poder obtener resultados que nos ayuden a comprender el comportamiento de dicha serie.

Una vez que se identificaron los cambios estructurales, algunos asociados a puntos de inflexión, el lector podría realizar un programa que analice a partir del último punto de inflexión de Bry y Boschan para verificar la existencia de varios cambios estructurales consecutivos, que podrían preceder a un nuevo punto de inflexión de Bry y Boschan. Incluso se podrían trabajar los datos de forma diaria o semanal; pero primero habría que hacer pruebas para la selección adecuada del tamaño de las ventanas para esos dos casos, ya que en este trabajo sólo se usaron valores para las series mensuales.

Es importante comentar que este algoritmo no da un pronóstico sobre la ocurrencia de cambios estructurales, ya que la última fecha en la cual se pudiera localizar un cambio estructural, se encontraría entre los valores de la primera ventana -n- y la segunda ventana -m-. Por lo que el último cambio de estructura que se podría encontrar es m datos antes del último dato de la serie.

## 7. Anexos

### Anexo uno. Promedio Móvil Ponderado de Spencer

En el estudio de series de tiempo se ha utilizado el suavizado en las series con el fin de eliminar la aleatoriedad y poder así poder estudiar el patrón que tiene la serie con el fin de poder realizar una proyección. (Ref. [11]).

Los métodos de descomposición tratan de identificar tres componentes básicas que tienen a caracterizar la economía y las series de negocios. Estos componentes son tendencia, ciclo y factores de estacionalidad. La tendencia se refiere al comportamiento de largo plazo de los datos y puede aumentar, decrecer o no cambiar. El factor cíclico representa las subidas y bajadas de la economía. El factor de estacionalidad relaciona fluctuaciones periódicas de longitud constante que son causadas por factores temporales, como temperatura, meses de año, etc. La diferencia entre el factor cíclico y el factor estacional, es que este último se repite en intervalos como un año, mes o semanas; mientras que el cíclico tiene una duración mayor que varía de ciclo a ciclo.

La descomposición asume que las series de datos se componen en:

$$data = pattern + error$$

$$data = f(tendencia, ciclo, estacionalidad) + error$$

El error se asume como la diferencia entre los efectos de los tres componentes -tendencia, ciclo y estacionalidad- y el dato actual de la serie.

**Los promedios móviles son usados para eliminar la estacionalidad y la aleatoriedad de las series de datos**, los promedios móviles son considerados como la parte medular para los métodos de descomposición y existen diferentes tipos de promedios móviles.



### Promedios móviles centrales

En este caso el promedio móvil –MA, por sus siglas en inglés en inglés “*Moving Averages*”- debe de ser centrado en el medio de los valores de los datos promedio. En el caso de tener número de datos impares, no hay problema. El valor central es  $(N + 1)/2$ , cuando  $N$  es impar resulta un decimal –0.5 –. Para poder centrar esos valores se realiza un doble promedio móvil que se expresa con diferentes pesos en la misma ecuación. Por ejemplo un promedio móvil de doce meses, es equivalente al promedio móvil de trece meses ponderado.

Este modelo de promedio móvil de doce meses se conformará por dos medias móviles una de seis punto cinco meses y otra de siete punto cinco meses, dando como resultado la media móvil de doce meses centrada.

$$M_7'' = \frac{M_{6,5} + M_{7,5}}{2} \quad \dots (1)$$

Donde,

$$M_{6,5} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{12})}{12} \quad \dots (2)$$

$$M_{7,5} = (X_2 + X_3 + \dots + X_{13})/12$$

Siendo  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son los valores de la serie de tiempo.

Substituyendo, obtenemos la media móvil de doce meses centrada:

$$M_7'' = \frac{X_1 + 2X_2 + 2X_2 \dots + 2X_{12} + X_{13}}{24} \quad \dots (3)$$

**El promedio móvil de Spencer y Henderson se conforma por cuatro medias móviles para obtener una media móvil ponderada de siete meses.**

$$M_{2,5} = \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{4} \quad \dots (4)$$

$$M_{3,5} = \frac{(X_2 + X_3 + X_4 + X_5)}{4} \quad \dots (5)$$

$$M_{4,5} = \frac{(X_3 + X_4 + X_5 + X_6)}{4} \dots (6)$$

$$M_{5,5} = \frac{(X_4 + X_5 + X_6 + X_7)}{4} \dots (7)$$

(Cuatro medias móviles de cuatro medias móviles)

Al conformar el promedio de cuatro promedios móviles de la serie original.

$$M_4'' = \frac{(M_{2,5} + M_{3,5} + M_{3,5} + M_{4,5})}{4} \dots (8)$$

Substituyendo las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) en (8) obtenemos:

$$M_4'' = \frac{(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 3X_5 + 2X_6 + X_7)}{16} \dots (9)$$

Como resultado se obtiene una media móvil ponderada de 7 meses.

Se aplica una media móvil ponderada de 5 meses a la expresión (9), que es la media móvil ponderada de 7 meses, obteniendo la siguiente expresión:

$$M_6''' = \frac{(M_4'' + M_5'' + M_6'' + M_7'' + M_8'')}{5} \dots (10)$$

Substituyendo (9) en (10), se tiene la siguiente expresión:

$$M_6''' = \frac{(X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 10X_4 + 13X_5 + 14X_6 + 13X_7 + 10X_8 + 6X_9 + 3X_{10} + X_{11})}{80} \dots (11)$$

(Medía móvil ponderada de 11 meses)

El último promedio móvil aplicado a la expresión anterior, es un promedio móvil de cinco términos el cual se pondera de la siguiente manera:

$$M_8'''' = \frac{-3}{4}M_6''' + \frac{3}{4}M_7''' + M_8''' + \frac{3}{4}M_9''' - \frac{3}{4}M_{10}''' \dots (12)$$

Substituyendo (11) en (12) se obtiene el promedio móvil ponderado de Spencer o filtro de Spencer

$$M_8''' = \frac{(-3X_1 - 6X_2 - 5X_3 + 3X_4 + 21X_5 + 46X_6 + 67X_7 + 74X_8 + 67X_9 + 46X_{10} + 21X_{11} + 3X_{12} - 5X_{13} - 6X_{14} - 3X_{15})}{320} \dots (13)$$

## Anexo dos

### Media móvil de 12 meses centrada

Otro suavizado para el análisis de series de tiempo es el de media móvil de doce meses centrada. Se utiliza para datos mensuales, esto suavizaría efectos estacionalidad de las series de tiempo, y puede llegar a ser útil para los métodos de descomposición en tendencia, estacionalidad, entre otros.

El resultado de aplicar el suavizado de media móvil se obtiene al realizar el promedio centrado con igual ponderación de doce datos. Para este caso en particular el nuevo dato es el promedio de la suma de los seis datos anteriores con el actual y los cinco datos posteriores.

## 8. Referencias

[1]	Bry G. Boschan Ch. Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs. UMI. Vol. 0-87014-223-2. 1971. Vol.URL: <a href="http://www.nber.org/books/bry_71-1">http://www.nber.org/books/bry_71-1</a> . 1971
[2]	Fama, Eugene. The Behavior of Stock-Market prices. JSTOR. 1965. 74-81p.p.
[3]	Chow, Gregory. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. Econometrica, Vol. 28, No. 3, (Jul., 1960), pp. 591-605
[4]	Dagum, Camilo. Bee Estela. Ed. S. XXI. Introducción a la econometría, 1971.
[5]	Burns, Arthur. Mitchell, Wesley C. Measuring Business Cycles. NBER. Volume ISBN: 0-870-14085-X. 1946. <a href="http://www.nber.org/books/burn46-1">http://www.nber.org/books/burn46-1</a>
[6]	Keynes J. Teoría de la ocupación, el interés y el dinero. Ed. Fondo de cultura económica. 279-235 p.p.
[7]	Economía Informa. Publicación bimestral de la Facultad de Economía de la UNAM. Marzo-Abril 2012. Num.373. pp. 3-27
[8]	Wesley C. Mitchell. Bussines Cycles and Unemployment. NBER. Volume ISBN: 0-87014-003-5. 1923. Vol. URL: <a href="http://papers.nber.org/books/comm23-1">http://papers.nber.org/books/comm23-1</a>
[9]	Zarnowitz, Victor. Business Cycles, Theory, History, Indicators, and Forecasting. The University of Chicago. United States of America.1992. <a href="http://papers.nber.org/books/zarn92-1">http://papers.nber.org/books/zarn92-1</a>
[10]	The Conference Board. Business Cycle Indicators Handbook. United States of America. 2001. <a href="http://www.conference-board.org/pdf_free/economics/bci/BCI-Handbook.pdf">http://www.conference-board.org/pdf_free/economics/bci/BCI-Handbook.pdf</a>
[11]	Markridakis, S. Wheelwright, S. Métodos de Proyección y Aplicaciones. Ed. Wiley series in management. 2da. Edición. Estados Unidos de América, 1983.