



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

Vigilancia de galerías de arte con reflectores giratorios

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)

PRESENTA:
ISRAEL ALDANA GALVÁN

DIRECTOR DE TESIS
DR. JORGE URRUTIA GALICIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

CODIRECTOR DE TESIS
DR. CARLOS BRUNO VELARDE VELÁZQUEZ
IIMAS-UNAM

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a la universidad por todas las experiencias vividas.

A mis padres Jesús y Aurora, porque siempre me han apoyado de manera incondicional.

A mi hermana Aby, porque intercambiar ideas contigo me ayuda a ver la vida con una perspectiva diferente e interesante.

A mi director de tesis Jorge, por apoyarme y guiarme en la elaboración de este trabajo.

A Carlos y David, por sus valiosas aportaciones.

A mis sinodales por sus oportunas observaciones.

A mis compañeros y amigos Joel, Carmen, Josué, Erick y Marcela con quienes compartí esta etapa resolviendo problemas interesantes.

Agradezco y dedico este trabajo a Gaby, mi pareja y compañera por su generosa paciencia, y con quien deseo compartir mi vida.

Índice general

Índice de figuras	3
Índice de tablas	5
1. Introducción	7
2. Teoría de gráficas	11
2.1. Definiciones	11
2.2. Grado de un vértice	12
2.3. Subgráficas	14
2.4. Caminos, paseos, trayectorias y ciclos	15
2.5. Conexidad	16
2.6. Tipos especiales de gráficas	16
2.7. Coloración en vértices	19
2.8. Planaridad	19
2.9. Gráfica dual	20
2.10. Gráficas geométricas	20
3. Galerías de arte e iluminación	23
3.1. Definiciones	23
3.2. Galerías ortogonales	25
3.3. Galerías de arte con agujeros	28
3.4. Iluminación con reflectores	30
3.4.1. Iluminación de polígonos simples	31
3.4.2. Iluminación de polígonos ortogonales	33
3.5. Iluminación con radares	39
4. Vigilancia de polígonos con radares	45
4.1. Introducción	45
4.2. Vigilancia de polígonos ortogonales, utilizando radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
4.3. Vigilancia de polígonos ortogonales con agujeros, utilizando radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices	50
4.4. Vigilancia de polígonos simples, utilizando radares- π , ubicados en los vértices	54
Conclusiones	63
Bibliografía	65
Índice alfabético	67

Índice de figuras

2.1.	Gráfica con cinco vértices y siete aristas.	12
2.2.	Diferentes grados de los vértices de un gráfica.	13
2.3.	Gráfica G y H subgráfica de G	14
2.4.	Gráfica bipartita.	17
2.5.	Ilustración del teorema 5.	18
2.6.	Una gráfica G , con su gráfica dual G'	21
3.1.	En ocasiones son necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ v-guardias, para vigilar un polígono ortogonal.	26
3.2.	Un polígono 1 – <i>ortogonal</i>	27
3.3.	Encontrando Q' , caso 1.	28
3.4.	Encontrando Q' , caso 2.	29
3.5.	El problema de la iluminación de estrados.	31
3.6.	Existen polígonos tales que no tienen conjuntos de vértices que los iluminen de peso $\frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon$	32
3.7.	Para cualquier $\epsilon > 0$ existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor o igual a $\frac{\pi}{2} - \epsilon$ aun permitiendo un reflector por vértice.	34
3.8.	Los polígonos ortogonales pueden tener 8 tipos de vértices.	35
3.9.	Colocación de los reflectores utilizando la regla NE.	35
3.10.	(a) Colocación de los reflectores utilizando la regla noroeste. (b) Colocación de los reflectores utilizando todas las reglas.	36
3.11.	(a) Una hélice con cuatro aspas y 12 vértices, requiere cuatro reflectores ortogonales. (b) Pegando dos hélices por un aspa, el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos por tres.	37
3.12.	(a) Una hélice con 32 vértices, y un agujero que 12 reflectores ortogonales. (b) Familia que $32 + 28h$ vértices que requiere $12 + 11h$ reflectores, donde h es el número de agujeros.	38
3.13.	Orientación inicial de radares- α para vigilar una recta L	40
3.14.	(a) Orientación en t . (b) Si $F(n, L) < \frac{3\pi}{2}$, L no está siempre completamente vigilada.	41
3.15.	dos radares- α	43

3.16. Orientación inicial 3 radares- α en posición colineal.	44
3.17. (a,b)Tres radares- π , vigilan el plano, (c) no lo vigilan permanentemente si su ángulo es menor que π	44
4.1. Etapas de vigilancia de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, que gira a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo, durante un ciclo completo de 2π y donde cada etapa dura $\frac{\pi}{2}$	48
4.2. (a) El cuadrante I forma un vértice-SO, (b) el cuadrante II forma un vértice-SE (c) cuadrantes I y II, (d) área vigilada por un radar- $\frac{3\pi}{2}$, que gira a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo, ubicado en cada uno de los 8 tipos de vértices existentes en un polígono ortogonal, durante la etapa E1, la cual contiene al área iluminada correspondiente a las reglas SE y SO.	49
4.3. Son necesarios al menos dos radares- $\frac{3\pi}{2}$, para vigilar continuamente un punto p en el plano.	50
4.4. En ocasiones son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices. En este ejemplo se utilizan radares en los vértices $\{2, 5\}$ para vigilar a y b , $\{1, 6\}$ para c y $\{8, 11\}$ para d y e	51
4.5. Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, a veces son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.	53
4.6. Si se utilizan las reglas de iluminación de los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, vértices contiguos de una arista horizontal norte tienen radares colocados por reglas de conjuntos diferentes.	55
4.7. Si se utilizan las reglas de iluminación de los conjuntos $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, vértices contiguos de una arista horizontal sur tienen radares colocados por reglas de conjuntos diferentes.	56
4.8. Un triángulo puede ser vigilado colocando un radar- π en cada vértice, todos con la misma alineación.	57
4.9. Un triángulo puede ser vigilado colocando un radar- π en cada vértice, todos con la misma alineación.	58
4.10. Para vigilar T se necesitan al menos tres radares- π , ubicados en los vértices.	59
4.11. En todo polígono simple existe una diagonal.	60
4.12. El interior de un polígono simple P , puede ser vigilado colocando n radares- π , uno en cada vértice de P , todos con la misma orientación.	60
4.13. Para vigilar un polígono simple de n vértices con radares- π , en ocasiones son necesarios n radares colocados en cada uno de sus vértices.	61

Índice de tablas

3.1.	$p^p(n, h)$ es el número mínimo de p-guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, $p^v(n, h)$ es el número mínimo de v-guardias, mismas condiciones, $ort^v(n, h)$ es el número mínimo de v-guardias, necesarios para vigilar un polígono ortogonal P con n vértices y h agujeros, $ort^p(n, h)$ es el número mínimo de p-guardias, mismas condiciones.	30
4.1.	Cuadrantes vigilados por las etapas $E1$ a $E4$ con radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, iniciados con orientación canónica en un polígono ortogonal P , junto con el área iluminada que se obtendría si se utilizaran reglas de iluminación con reflectores ortogonales en P	47
4.2.	Partición de los vértices inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, donde NE_c es el vértice convexo NE y NE_r es el vértice cóncavo NE , el resto de vértices se definen de manera similar.	47
4.3.	Resumen de resultados.	63

Capítulo 1

Introducción

En 1973 el matemático Victor Klee planteó el problema de determinar cuántos guardias se requieren para vigilar el interior de una galería de arte, el cual se puede también plantear en términos de iluminación, es decir, cuántas lámparas se requieren para iluminar el interior de una galería de arte. En adelante usaremos indistintamente los términos vigilar e iluminar, tratando de apegarnos a los términos utilizados en los artículos originales que se usan de referencia.

Vasek Chvátal estableció en 1976 el primer resultado para este problema, el cual señala que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono de n vértices. En 1978 S. Fisk [10] establece una demostración concisa y elegante del teorema. El resultado se presenta a continuación.

Teorema 1. [10] *Si S es un polígono con n vértices, entonces existe un conjunto T con a lo más $\frac{n}{3}$ puntos de S , tal que para cada punto q de S , existe un punto p de T con el segmento \overline{pq} contenido completamente en S .*

Demostración. Triangule S de tal forma que no se agreguen nuevos vértices. Toda triangulación tiene una coloración con tres colores (a, b, c) . Sea T_k el conjunto de vértices de color k , y asuma que $|T_a| \leq |T_b| \leq |T_c|$. Escoger $T = T_a$ implica que $|T| \leq \frac{n}{3}$. Finalmente, cada punto q de S se encuentra en algún triángulo de S , y cada triángulo de S tiene un punto p de T en él. Como los triángulos son convexos, tenemos que $\overline{pq} \subseteq S$. \square

El problema así resuelto es de naturaleza combinatoria, ya que responde a la generalidad de los polígonos de n vértices. Sin embargo, no todos los polígonos de n lados requieren ese número de guardias, por ejemplo, cualquier polígono convexo de n vértices sólo requiere de un guardia. Entonces tiene sentido preguntarse si existe algún algoritmo que dado un polígono P de n vértices calcule el número mínimo de guardias que lo vigilen. En 1983 J. O'Rourke y K. J. Supowit en [22], demuestran que encontrar el número mínimo de guardias que se requieren para vigilar una galería de arte modelada como un polígono simple con agujeros es un problema NP-Completo, en 1986 D. Lee and A. Lin [17], extienden el resultado para polígonos simples con guardias ubicados en los vértices, demostrando que también es NP-Completo, así mismo A. Aggarwal en [22], lo demuestra para guardias

ubicados en cualquier punto del polígono. Estos resultados abren el camino para investigar algoritmos de aproximación que busquen acercarse al número óptimo de guardias. Por otro lado, también surge un gran número de preguntas, por ejemplo ¿Qué sucede si el objeto a vigilar es un tipo especial de polígono? o ¿Qué pasa si se aplican restricciones a los guardias? Este tipo de preguntas generan nuevas variantes del problema.

En 1987 J. O'Rourke publica el libro *Art Gallery Theorems and Algorithms* [20], dedicado completamente al estudio de problemas de iluminación de polígonos en el plano. Posteriormente, surgen los compendios de T. Shermer [26] y J. Urrutia [29].

En 1994 V. Estivill Castro y J. Urrutia establecen reglas que permiten colocar reflectores en vértices de polígonos ortogonales de manera óptima con el objetivo de vigilarlo [8], en 2011 E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales Ponce y J. Urrutia presentan las condiciones que deben cumplir reflectores giratorios para poder vigilar el plano [7]. En adelante llamaremos *radares* a los reflectores giratorios.

Inspirados en estos resultados, en la presente investigación se abordan 3 variantes del problema de la galería de arte, dividiendo el trabajo en los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2** se da una introducción a la teoría de gráficas, mostrando los principales resultados del área que sirven de base teórica para nuestra investigación.
- **Capítulo 3** se da una introducción a los problemas sobre galerías de arte, mostrando algunos de los principales resultados que han construido la historia del área, y que al mismo tiempo sirven de base y han inspirado la presente investigación.
- **Capítulo 4** se presentan los resultados principales de la investigación, se abordan 3 variantes del problema de la galería de arte:
 1. ¿Cuántos guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios (cota justa) para vigilar el interior de un **polígono ortogonal** P ? En el que los guardias se encuentran ubicados en vértices de P , así mismo los guardias son radares con un ángulo de vigilancia de $\frac{3\pi}{2}$, y éstos giran a una misma velocidad constante.
 2. ¿Cuál es la cota justa de guardias para vigilar el interior de un **polígono ortogonal con agujeros** P ? En el que los guardias se encuentran ubicados en vértices de P , así mismo los guardias son radares con un ángulo de vigilancia de $\frac{3\pi}{2}$, y éstos giran a una misma velocidad constante.
 3. ¿Cuál es la cota justa de guardias para vigilar el interior de un **polígono simple** P ? En el que los guardias se encuentran ubicados en vértices de P , así mismo los guardias son radares con un ángulo de vigilancia π , y éstos giran a una misma velocidad constante.

En todos los casos, los resultados obtenidos inducen un algoritmo de orden $O(n)$ para ubicar la posición y configuración inicial de los radares. Los algoritmos también son presentados en el capítulo.

- **Capítulo 5** se presenta un resumen de los resultados obtenidos, así como la dirección sugerida para nuevas investigaciones.

Los problemas de iluminación pertenecen a las áreas de geometría combinatoria y geometría computacional. La geometría computacional es una rama de la ciencia de la computación con un desarrollo muy activo en los últimos años. Su objetivo es el estudio de algoritmos para resolver problemas planteados en términos geométricos. La geometría combinatoria es la rama de la matemática que estudia a los objetos geométricos considerándolos como entidades discretas.

Capítulo 2

Teoría de gráficas

En este capítulo, se presentan definiciones y resultados importantes de teoría de gráficas.

El primer trabajo sobre la teoría de gráficas fue escrito por el famoso matemático suizo Leonard Euler, y apareció en 1736. Desde un punto de vista matemático, la teoría de gráficas fue insignificante en un principio, ya que se le asociaba con algunos juegos de entretenimiento. Pero algunos descubrimientos recientes en matemáticas, y particularmente en sus aplicaciones, le han dado un gran impulso. Actualmente hay algunos temas en matemáticas puras donde la teoría de gráficas es una herramienta natural, pero hay muchos otros usos en conexión con preguntas altamente prácticas: apareamientos, problemas de transporte, el flujo en redes de tuberías, “programación” en general. En nuestro caso para iluminación, la teoría de gráficas es una importante herramienta de apoyo.

La teoría de gráficas también hace su aparición en diversos campos como la economía, la psicología y la biología. En matemáticas, la teoría de gráficas ha sido clasificada como una rama de la topología, pero también está fuertemente relacionada con el álgebra y la teoría de matrices.

Los resultados presentados a continuación se pueden consultar en [5].

2.1. Definiciones

Una Gráfica G es un par ordenado $(V(G), A(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos son llamados vértices o nodos, y un conjunto $A(G)$ ajeno de $V(G)$ de pares no ordenados de elementos distintos $\{u, v\}$ llamados aristas, juntos con una función f_G que asocia con cada arista de G un par no ordenado de vértices de G (no necesariamente distintos). Por ejemplo una gráfica G se define de la siguiente manera, (por simplicidad denotaremos uv al par no ordenado $\{u, v\}$). $G = (V, A)$; $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y f_G es definida: $f_G(e_1) = v_1v_2$, $f_G(e_2) = v_1v_3$, $f_G(e_3) = v_2v_3$ y $f_G(e_4) = v_3v_4$.

El número de vértices en G es llamado el *orden* de G y el número de aristas de G es el

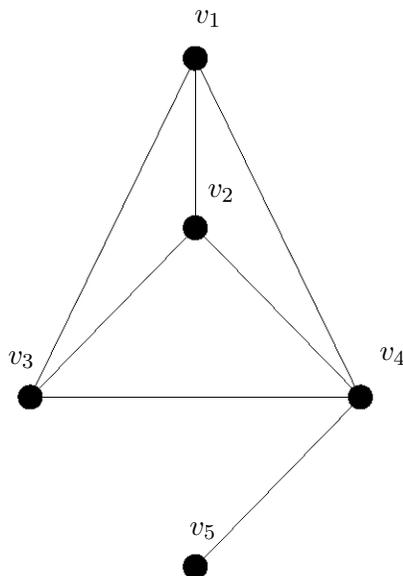


Figura 2.1: Gráfica con cinco vértices y siete aristas.

tamaño de G . También es conveniente representar a las gráficas por medio de diagramas. En tal representación, dibujamos los vértices con puntos o círculos y a las aristas con segmentos de línea o curvas que unen dos puntos apropiados. Un diagrama de la gráfica G con: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y $f_G(e_1) = v_1v_2$, $f_G(e_2) = v_1v_3$, $f_G(e_3) = v_1v_4$, $f_G(e_4) = v_2v_3$, $f_G(e_5) = v_2v_4$, $f_G(e_6) = v_3v_4$ y $f_G(e_7) = v_4v_5$ se muestran en la figura 2.1.

Si $e = uv \in A(G)$ (es decir, si uv es una arista de la gráfica G) entonces decimos que e une a los vértices u y v . Dos vértices u y v son *adyacentes* en una gráfica G si $uv \in A(G)$. Si $uv \notin A(G)$, entonces u y v son vértices no adyacentes. Si $e = uv \in A(G)$ entonces u y v son cada uno incidentes con e . Si uv y uw son aristas distintas de una gráfica G (es decir $v \neq w$) entonces uv y uw son aristas adyacentes. Así en la gráfica G descrita en la figura 2.1, v_1 y v_3 son adyacentes pero v_1 y v_5 no son adyacentes.

2.2. Grado de un vértice

Definición 1. (*grado de un vértice*)

El número de aristas que inciden en un vértice v de una gráfica G , se le llama el grado de v en G . El grado de v se denota por $\text{grado}_G(v)$ o simplemente $\text{grado}(v)$.

Definición 2. (*grado máximo*) (*grado mínimo*)

Se denotará por $\Delta(G)$, al grado máximo entre todos los vértices de la gráfica G , así también denotaremos por $\delta(G)$, al grado mínimo de entre todos los vértices de la gráfica G .

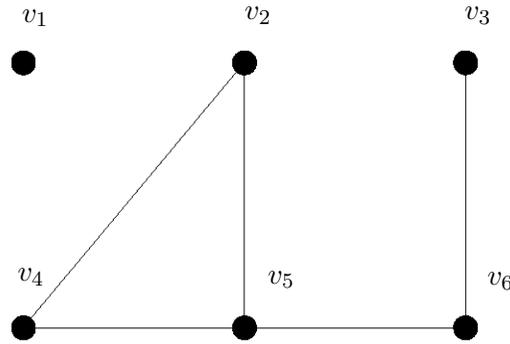


Figura 2.2: Diferentes grados de los vértices de un gráfica.

Para la gráfica de la figura 2.2, se tiene que: $\text{grado}(v_1) = 0$, $\text{grado}(v_2) = 2$, $\text{grado}(v_3) = 1$, $\text{grado}(v_4) = 2$, $\text{grado}(v_5) = 3$, $\text{grado}(v_6) = 2$.

Por una (p, q) -gráfica entendemos que es una gráfica de orden p y tamaño q . La gráfica de la figura 2.2 es una $(6, 5)$ -gráfica, además la suma de los grados es 10, es decir, $2q$.

Teorema 2. *Para toda gráfica G , la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de aristas. Así, si G es una (p, q) -gráfica con vértices v_1, v_2, \dots, v_p entonces $\sum_{i=1}^p \text{grado}(v_i) = 2q$.*

Demostración. Al sumar los grados de los vértices de una gráfica G , contamos cada arista dos veces, una por cada uno de los vértices en que incide la arista. \square

Definición 3. *(vértice par o impar)*

Un vértice v , es llamado par o impar, de acuerdo a si $\text{grado}(v)$ es par o impar.

Teorema 3. *Toda gráfica contiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Sea G una gráfica. Si G no contiene vértices impares, entonces se cumple el resultado. Suponga que G contiene k vértices impares, denotados por v_1, v_2, \dots, v_k . Si G contiene vértices pares los denotamos por u_1, u_2, \dots, u_n .

Por el Teorema 2, $\sum_{i=1}^k \text{grado}(v_i) + \sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j) = 2q$ donde q es el número de aristas de G . Como cada uno de los números $\text{grado}(u_1), \text{grado}(u_2), \dots, \text{grado}(u_n)$ es par, entonces

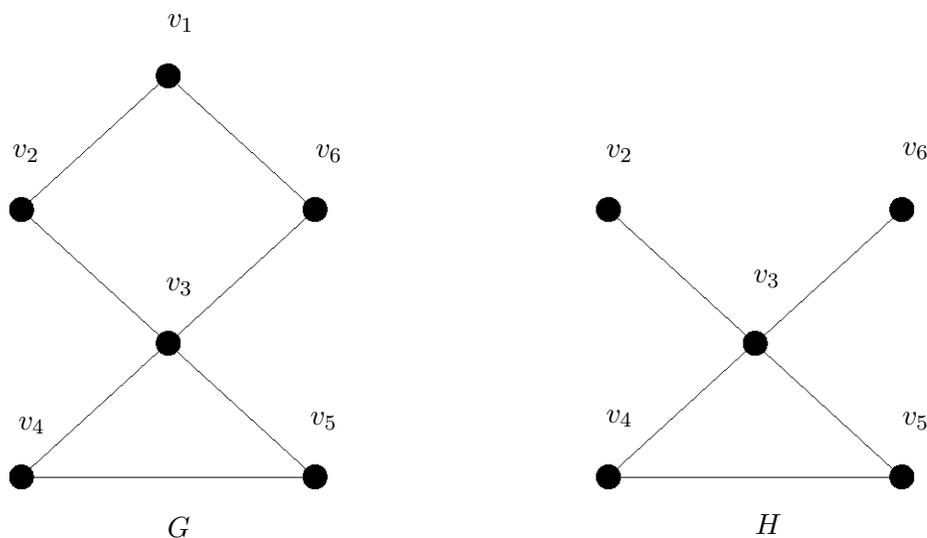


Figura 2.3: Gráfica G y H subgráfica de G .

$\sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j)$ también es par, así tenemos que $\sum_{i=1}^k \text{grado}(v_i) = 2q - \sum_{j=1}^n \text{grado}(u_j)$ es par, pero cada uno de los números $\text{grado}(v_1), \text{grado}(v_2), \dots, \text{grado}(v_k)$ es impar. Por lo tanto, k debe ser par, así G tiene un número par de vértices de grado impar. Si G no tiene vértices pares, entonces $(\text{grado}(v_1) + \text{grado}(v_2) + \dots + \text{grado}(v_k)) = 2q$ de donde concluimos también que k es par. \square

2.3. Subgráficas

Definición 4. (subgráfica)

Sea G una gráfica. Una gráfica H es una subgráfica de G $H \leq G$, si H es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición 5. (supergráfica)

Cualquier gráfica G' , para la cual una gráfica G es una subgráfica, es llamada una supergráfica de G .

Definición 6. (subgráfica generadora)

Una subgráfica generadora H de G , es cualquier subgráfica que tenga el mismo número de vértices.

En la figura 2.3 se muestra una gráfica G y H subgráfica de G .

Definición 7. (*subgráfica inducida*)

Una subgráfica inducida H de G , es aquella que cumple que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H)$ es el conjunto de todas las aristas de G con vértices de H .

2.4. Caminos, paseos, trayectorias y ciclos

Definición 8. (*camino*)

Un camino en una gráfica G , es una secuencia finita de vértices x_0, x_1, \dots, x_n y aristas a_1, a_2, \dots, a_n de G :

$$x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n$$

donde los puntos finales de a_i son x_{i-1} y x_i para cada i . La longitud de un camino es n .

Definición 9. (*uv – camino*)

Un uv – camino en una gráfica G , es un camino que comienza en el vértice u y termina en el vértice v .

Definición 10. (*uv – paseo*)

Un uv – paseo en una gráfica, es un uv – camino que no repite aristas.

Definición 11. (*uv – trayectoria*)

Una uv – trayectoria, es un uv – camino o (uv – paseo) tal que no repite vértices.

Definición 12. (*circuito*)

Un uv – paseo en el cual $u = v$, y que contiene al menos tres aristas es llamado circuito. Un circuito debe terminar en el mismo vértice en que se empezó.

Definición 13. (*ciclo*)

Un circuito que no repite vértices (excepto el primero y el último) es llamado ciclo.

denotaremos un ciclo C de G como $C = v_0v_1, \dots, v_kv_0$.

Definición 14. (*distancia*)

En una gráfica G , la distancia entre dos vértices u y v , es la longitud del menor uv – camino.

Denotaremos $d(u, v)$ como la distancia entre u y v .

Definición 15. (*excentricidad de una gráfica*)

La excentricidad $e(v)$ de un vértice v , es el máximo valor de $d(v, w)$, donde w es cualquier vértice de la gráfica.

Definición 16. (*radio de una gráfica*)

El radio $r(G)$ de G , es la excentricidad del vértice de menor excentricidad.

Definición 17. (*vértice central*)

Un vértice es llamado vértice central, si su excentricidad es igual al radio de la gráfica.

Definición 18. (*centro de una gráfica*)

El centro $c(G)$ de una gráfica, es el conjunto de sus vértices centrales.

2.5. Conexidad

Definición 19. (*vértices conectados*)

Dos vértices u y v en una gráfica G , están conectados si $u = v$ o si $u \neq v$ y existe una uv - trayectoria en G .

Definición 20. (*gráfica conexa*)

Una gráfica G es conexa, si todo par de vértices de G están conectados. En otro caso se dice que G es desconexa.

Definición 21. (*componente conexa*)

Una subgráfica conexa H de una gráfica G , es una componente conexa (o simplemente una componente) de G , si $H = H'$ siempre que H' sea una subgráfica conexa de G que contenga a H . Es decir, una componente de una gráfica es una subgráfica conexa máxima.

Una gráfica es conexa si y solo si el número de sus componentes es uno. Denotaremos por $C(G)$ a las componentes de G .

Definición 22. (*vértice de corte*)

Sea G una gráfica, se dice que v es un vértice de corte de G , si $C(G - v) > C(G)$.

Definición 23. (*arista de corte*)

Sea G una gráfica, se dice que a es una arista de corte (o puente) de G , si $C(G - a) > C(G)$.

2.6. Tipos especiales de gráficas

Definición 24. (*gráfica bipartita*)

Una gráfica G es llamada bipartita, si es posible separar al conjunto $V(G)$ en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2 , tal que toda arista de G , une a un vértice de V_1 con un vértice de V_2 .

En la figura 2.4 se presenta una gráfica bipartita.

Definición 25. (*gráfica bipartita completa*)

La gráfica bipartita completa $K_{m,n}$, es una gráfica con m vértices en V_1 y n vértices en V_2 , en la cual existe una arista entre cada vértice de V_1 y de V_2 .

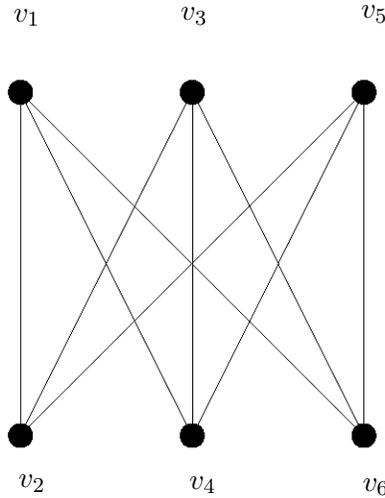


Figura 2.4: Gráfica bipartita.

Teorema 4. *Una gráfica no trivial es bipartita si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Demostración. Sea $G = (V, A)$ una gráfica bipartita, (X, Y) su bipartición, y C un ciclo en G , tal que $C = v_0v_1, \dots, v_kv_0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $v_0 \in X$, debido a que $v_0v_1 \in A$ y dado que G es bipartita, entonces $v_1 \in Y$.

En general tenemos que $v_{2i} \in X$ y $v_{2i+1} \in Y$. Dado que $v_kv_0 \in A$ tenemos que $v_k \in Y$, por tanto $k = 2i + 1$ para algún valor de i y se sigue que C tiene longitud par.

Para demostrar la otra implicación, sin pérdida de generalidad necesitamos considerar sólo el caso en el que G es conexa. Sea entonces G una gráfica conexa sin ciclos de longitud impar, para algún $u \in V$, definimos la división (X, Y) como sigue: $X = \{x \in V \text{ tal que } d(x, u) \text{ es par}\}$, $Y = \{y \in V \text{ tal que } d(y, u) \text{ es impar}\}$.

Sin pérdida de generalidad sean x_1 y $x_2 \in X$. Sea P el camino más corto que va de u a x_1 y Q el que va de u a x_2 . Sea v el último vértice común de P y Q . Como P y Q son los caminos más cortos, entonces también lo son sus secciones que van de u a v y que por lo tanto tienen la misma longitud. Como las longitudes de P y Q son pares, también lo es el camino x_1 a v a x_2 , a través de P y Q respectivamente. Si $x_1 \sim x_2$, entonces el camino x_1 a x_2 junto con la arista x_1x_2 forman un ciclo de longitud impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto ningún vértice en X es adyacente, y G es bipartita. \square

Definición 26. (*árbol*)

Sea G una gráfica, se dice que G es un árbol si G es una gráfica conexa y no tiene ciclos.

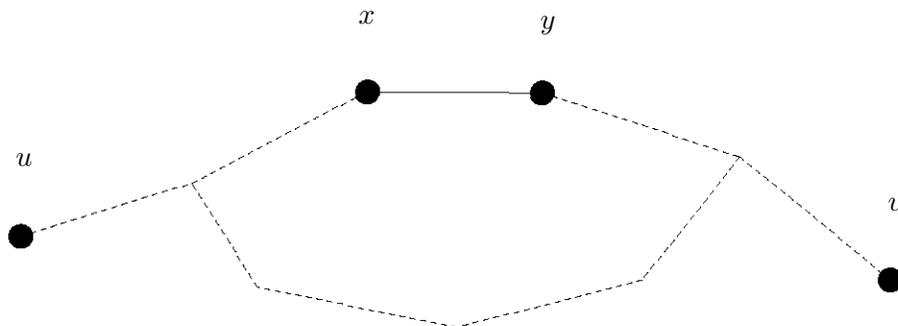


Figura 2.5: Ilustración del teorema 5.

Definición 27. (*bosque*)

Sea G una gráfica, se dice que G es un bosque si G es una gráfica que no contiene ciclos. (Puede ser conexa o desconexa).

Teorema 5. Sea $G = (V, A)$ un árbol, entonces para cualesquiera 2 vértices u y $v \in V$, existe un único camino que los une.

Demostración. Dado que todo árbol es conexo, existe al menos un uv -camino. Supongamos que existe más de un uv -camino y sean P_1 y P_2 dos de estos caminos. Dado que $P_1 \neq P_2$ existe al menos una arista $xy \in P_1$ tal que $xy \notin P_2$, como se muestra en la figura 2.5. Entonces $(P_1 \cup P_2) - xy$ es conexa, por lo que existe un xy -camino, sea P tal camino, entonces $P \cup \{xy\}$ forma un ciclo, contradiciendo la hipótesis de que G es un árbol. \square

Teorema 6. Si $G = (V, A)$ un árbol, entonces $|A| = |V| - 1$.

Demostración. Por inducción en $|V|$. Supongamos que $|V| = 1$, claramente $|A| = 0 = |V| - 1$. Supongamos que el teorema es cierto para todo árbol con menos de $|V|$ vértices con $|V| \geq 2$. Tomemos la arista $uv \in A$, por el teorema anterior $G - uv$ es desconexa dado que no existe otro uv -camino, y $C(G - uv) = 2$ (el número de componentes conexas de G), sean $H_1 = (V_1, A_1)$ y $H_2 = (V_2, A_2)$ tales componentes. Vemos que las dos son acíclicas y por tanto árboles con menos de $|V|$ vértices. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

que: $|A_i| = |V_i| - 1$ para $(i = 1, 2)$ y además sabemos que: $|A| = |A_1| + |A_2| + 1$ y $|V| = |V_1| + |V_2|$ por lo tanto: $|A| = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = |V| - 1$. \square

2.7. Coloración en vértices

Definición 28. (*k-coloración*)

Sea $G = (V, A)$ una gráfica, una *k-coloración* de los vértices de G es una función $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Una coloración induce una partición de los vértices de G en conjuntos de la forma $c_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$. Estos conjuntos son llamados las *clases cromáticas* inducidas por c . Se dice que una *k-coloración* c de G es buena, si para cualesquiera dos vértices u, v adyacentes en G , se tiene que $c(u) \neq c(v)$.

2.8. Planaridad

Definición 29. (*gráfica plana*)

Una gráfica es plana si tiene una representación en el plano, de tal manera que dos aristas tienen un punto común si y sólo si son adyacentes.

Definición 30. (*caras de una gráfica*)

Una gráfica plana divide al plano en diferentes regiones conexas, a la cerradura de cada una de estas regiones se le llama cara de la gráfica, teniendo siempre una cara no acotada llamada cara exterior. El resto de caras son llamadas caras interiores.

Definición 31. (*caras adyacentes*)

Sea $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ el conjunto de caras de G , decimos que dos caras f_i, f_j son adyacentes si comparten una arista e en su frontera. Diremos que e es incidente en f_i y f_j , de igual forma se dice que f_i y f_j son incidentes en e .

Euler enunció el siguiente teorema, el cual define una relación entre el número de aristas, vértices y caras de una gráfica plana, conocido como la fórmula de Euler.

Teorema 7. Sea $G = (V, A)$ una gráfica conexa dibujada en el plano definiendo el conjunto de caras F , entonces: $|V| - |A| + |F| = 2$.

Demostración. Por inducción sobre $|F|$. Supongamos que $|F| = 1$, entonces G tiene una única cara, la cual tendrá que ser su cara exterior, esto implica que G no tiene ciclos, por lo que al ser también conexa G es un árbol, entonces sabemos que: $|A| = |V| - 1$. Lo cual cumple con el teorema.

Ahora supongamos que el teorema es válido para toda gráfica plana conexa con menos de $n \geq 2$ caras, sea G una gráfica con n caras, y sea e una arista que no sea de corte en G . Entonces e incide en al menos una cara interior de G . Consideremos la gráfica $G - e$, se puede ver que las dos caras en las que incide e se convierte en una sola. Entonces $G - e$ es conexa con $n - 1$ caras y satisface la hipótesis de inducción. $G - e$ es una subgráfica generadora de G , y su número de aristas es $|A| - 1$, de modo que: $|V| - (|A| - 1) + (|F| - 1) = 2$. Por lo que obtenemos: $|V| - |A| + |F| = 2$. \square

2.9. Gráfica dual

Definición 32. (*gráfica dual*)

Sea G una gráfica plana, se puede definir a otra gráfica G^* a partir de G de la siguiente forma: Por cada cara f de G se tiene un vértice f^* en G^* , y por cada arista e de G , se consideran las caras f y g , incidentes en e , entonces G^* tendrá la arista e^* que conecta a los vértices f^* y g^* . Decimos que G^* es la gráfica dual de G , y podemos ver que G^* es también una gráfica plana, pues puede ser dibujada colocando cada vértice f^* en el interior de la cara f , y dibujando la arista e^* de forma que cruce sólo en un punto a e sin que cruce ninguna otra arista de G . Esta forma de dibujarla se puede ver en la figura 2.6.

2.10. Gráficas geométricas

Definición 33. (*gráfica geométrica*)

Una gráfica geométrica, es una gráfica dibujada en el plano, de tal forma que sus vértices son puntos, y una arista uv es el segmento \overline{uv} .

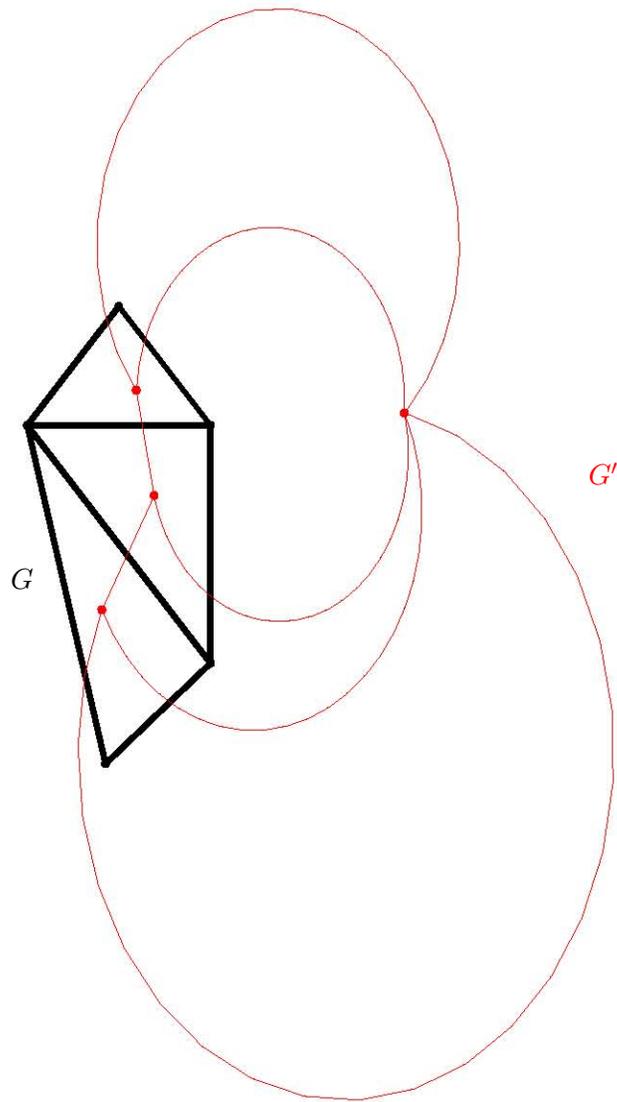


Figura 2.6: Una gráfica G , con su gráfica dual G' .

Capítulo 3

Galerías de arte e iluminación

En 1973 el matemático Victor Klee planteó el problema de determinar cuántos guardias se requieren para vigilar el interior de una galería de arte.

Diremos que un punto a vigila un punto b en un polígono simple, si el segmento de línea \overline{ab} que los une, se encuentra completamente contenido en el interior del polígono.

El problema de la galería de arte se puede plantear de la siguiente forma: Dado un polígono simple P , encontrar el conjunto G de puntos mínimo en P , tal que todo punto de P es vigilado desde un punto de G .

Lee and A. Lin [17], han demostrado que este problema es NP-Completo. Vasek Chvátal [6] estableció en 1976 que el número de puntos de G nunca excederá $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ para un polígono simple de n lados. Desde entonces se han estudiado muchas variaciones de este problema.

En este capítulo se presentan variantes del problema original, así como resultados recientes en el área.

3.1. Definiciones

Una galería de arte, puede ser modelada como un polígono, simple, ortogonal o con agujeros, definidos a continuación junto con otras definiciones que serán utilizadas a lo largo de la investigación:

Definición 34. (*Polígono*)

Un polígono P es una secuencia ordenada de n puntos en el plano v_1, \dots, v_n ($n \geq 3$) llamados vértices de P , junto con el conjunto de segmentos de recta que unen v_i con v_{i+1} ($i = 1, \dots, n - 1$) y v_{n-1} con v_1 llamadas aristas de P .

Definición 35. (*Polígono simple*)

Un polígono P se dice que es un polígono simple, si y sólo si cualquier par de sus aristas no consecutivas no se intersectan entre si.

Un polígono simple divide al plano en dos regiones, una no acotada llamada exterior y otra acotada llamada interior. Por simplicidad al decir polígono nos referiremos a un polígono simple junto con su interior.

Definición 36. (*Polígono ortogonal*)

Un polígono P se dice que es un polígono ortogonal, si y sólo si sus aristas son paralelas a alguno de los ejes coordenados, y además el ángulo entre dos aristas siempre es $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$.

Definición 37. (*Polígono con agujeros*)

Consideremos un polígono P y un conjunto de polígonos Q_1, \dots, Q_n , tales que $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ para $(i \neq j)$ y Q_i ($i = 1, \dots, n$) está totalmente contenido en el interior de P . El conjunto: $H = P - \bigcup_{i=1}^n \text{interior}(Q_i)$ será llamado polígono con agujeros. En el caso que P y Q_i ($i = 1, \dots, n$) sean polígonos ortogonales, H será llamado polígono ortogonal con agujeros.

Definición 38. (*Visibilidad*)

Dados dos puntos p y q en un polígono P , se dice que q es visible desde p si y sólo si el segmento \overline{pq} está totalmente contenido en P .

Definición 39. (*Vigilancia, Iluminación*)

Decimos que un subconjunto finito de puntos G , contenido en P , vigila o ilumina a P si y sólo si cualquier punto $p \in P$, es visible desde algún punto de G , de la misma forma diremos que $g \in G$ vigila o ilumina a p , si p es visible desde g .

Definición 40. (*Diagonal*)

Una diagonal de un polígono P es un segmento de recta que conecta dos vértices de P y está en el interior de P .

Definición 41. (*Triangulación*)

Una triangulación $T(P)$ de un polígono P , es una división del interior de P en triángulos con interiores mutuamente ajenos, de tal forma que las aristas de estos triángulos solamente pueden ser aristas o diagonales de P .

Definición 42. (*Reflector*)

Un reflector r es una lámpara que ilumina una zona angular de tamaño α , llamaremos a r un reflector- α , el tamaño de r también será llamado α . Si un reflector debe ser colocado en un vértice de un polígono P , se le llamará un vreflector. En el caso que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, r se llamará un reflector ortogonal.

Al estudiar el problema de vigilancia de galerías de arte, se pueden establecer restricciones a la forma de los polígonos utilizados para modelar la galería, así como a los guardias, a los que además se les puede restringir respecto a su ubicación en el polígono, dando origen variantes interesantes del problema. A continuación se describen las principales variantes estudiadas:

De acuerdo al polígono utilizado para modelar la galería:

1. **Galería de arte tradicional:** La galería está formada por un conjunto de habitaciones rectangulares, dentro de un edificio rectangular.
2. **Galería ortogonal:** Utilizan polígonos ortogonales para modelarla.
3. **Galería con agujeros:** Utilizan polígonos con agujeros para modelarla.
4. **Jardín de esculturas:** En esta variante, la idea es colocar transmisores, que emiten señales, a partir de las cuales se pretende probar si un punto se encuentra dentro o fuera de la galería, en este caso las paredes no interfieren con las señales emitidas por los transmisores.

A continuación se mencionan las principales restricciones impuestas a los vigilantes:

1. **Puntos guardia (p-guardia):** Se colocan en cualquier punto contenido en un polígono.
2. **Vértices guardia (v-guardia):** Se colocan sólo en los vértices de un polígono.
3. **Aristas guardia (a-guardia):** Los guardias se pueden mover sobre aristas de un polígono.
4. **Guardias móviles (m-guardia):** Los guardias se pueden mover sobre diagonales de un polígono.
5. **Reflectores:** Vigilan una zona angular de tamaño α .
6. **Radares:** Es un reflector giratorio. Se considerará que uno o más radares, giran a una misma velocidad constante de un radian por unidad de tiempo.
7. **Modems:** Los guardias pueden vigilar a través de un número acotado de objetos (paredes). Un modem m vigila un punto p , si el segmento \overline{mp} , intersecciona a lo más, un número acotado de objetos.

3.2. Galerías ortogonales

Como ya se mencionó, para modelar galerías ortogonales se utilizan polígonos ortogonales. En 1983 Kahn, Klawe y Keitman [16] demuestran lo siguiente:

Teorema 8. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices, entonces para vigilar P son suficientes y en ocasiones necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ v-guardias.*

Para la demostración descomponen el polígono en cuadriláteros convexos, se obtiene una gráfica 4-coloreable, de tal forma que cada cuadrilátero tenga un vértice de cada uno de los cuatro colores, la cual induce una partición de los vértices compuesta por cuatro partes, por lo que una de estas partes está compuestas por a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices, obteniendo

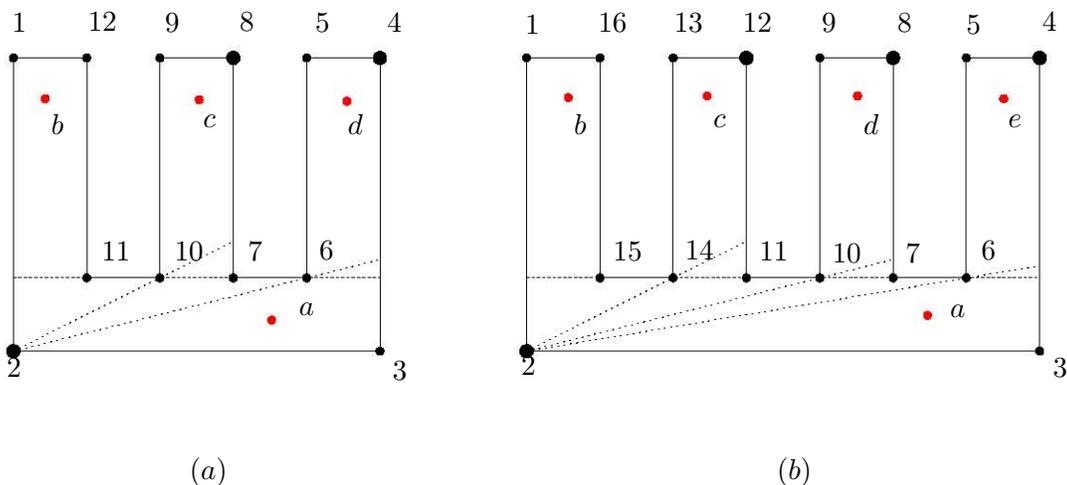


Figura 3.1: En ocasiones son necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ v-guardias, para vigilar un polígono ortogonal.

así la suficiencia del teorema. Para la necesidad se puede ver que la familia de polígonos sugerida por la figura 3.1 requiere al menos un guardia por cada lengua.

La mayor parte del artículo está dedicada a demostrar que todo polígono ortogonal tiene una descomposición en cuadriláteros convexos.

Edelsbrunner, O'Rourke y Welzl [11] presentaron un algoritmo que en tiempo $O(n)$ obtiene un conjunto de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ p-guardia que vigilan un polígono ortogonal dado. Su algoritmo se basa en una descomposición del polígono en subpolígonos con forma de L .

Lubiw, Sack y Toussaint [25] presentaron otro algoritmo lineal para ubicar los p-guardias, basado en la cuadrilaterización del polígono.

A continuación se presenta el siguiente resultado de Lubiw [18], el cual complementa al teorema anterior.

Teorema 9. *Cualquier polígono ortogonal se puede cuadrilaterizar con cuadriláteros convexos.*

Demostración: Para este fin se define un polígono P (1-ortogonal), si cumple con:

1. Todas las aristas de P , con la posible excepción de una arista distinguida denotada como e , son paralelas al eje X o eje Y .
2. Con la posible excepción de e , las aristas horizontales y verticales se alternan.
3. Todos los ángulos internos son menores o iguales a $\frac{3\pi}{4}$.
4. Ningún vértice de P se encuentra en el interior de la nariz de la arista inclinada.

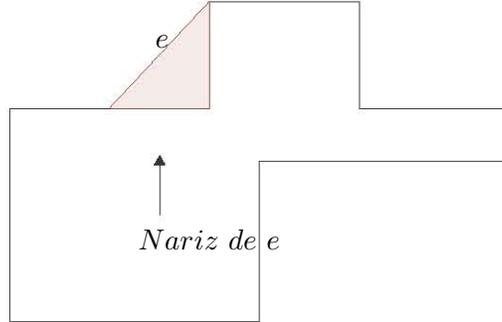


Figura 3.2: Un polígono 1 – ortogonal.

5. P tiene un número par de vértices.

Un ejemplo se presenta en la figura 3.2.

Notemos que un polígono ortogonal es 1 – ortogonal. En la definición no se prohíbe explícitamente que e sea paralela a los ejes X o Y . Si P es ortogonal, entonces e debería ser escogida de entre cualquier arista de P . Si se demuestra que cualquier polígono 1 – ortogonal se puede descomponer en cuadriláteros convexos, entonces el teorema habrá sido probado.

La nariz de la arista inclinada e de P es el triángulo T a la derecha y hacia el interior de P , tal que:

1. La hipotenusa de T es e .
2. Las otras dos aristas de T son paralelas a los ejes X y Y .

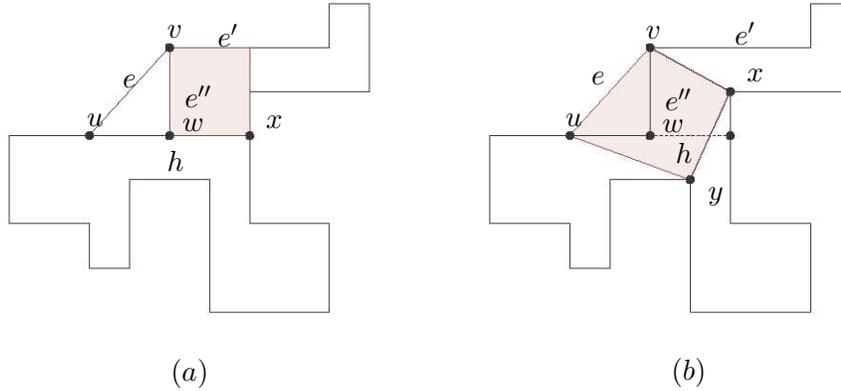
A continuación se probará el siguiente resultado:

Teorema 10. [18] *Cualquier polígono 1 – ortogonal se puede cuadrilaterizar con cuadriláteros convexos.*

Demostración. Si P tiene cuatro aristas, debe ser convexo, y por lo tanto se obtiene el resultado. Ahora se probará que si P tiene más de cuatro aristas, siempre existe un cuadrilátero Q' que al ser removido parte a P en dos polígonos 1 – ortogonales, y utilizando inducción se obtiene el resultado.

Supongamos sin pérdida de generalidad que la pendiente de la arista inclinada se encuentra entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y que los vértices de e son etiquetados con u y v de tal forma que el vértice u tiene la coordenada y más pequeña. Sea w el tercer vértice de la nariz T de e .

Como P tiene un número par de aristas, y todos sus ángulos internos son de tamaño a lo más $\frac{3\pi}{2}$, las dos aristas adyacentes a e son horizontales. Sea e' la arista horizontal de P que precede a e en sentido positivo alrededor de la frontera de P . Procedemos ahora a

Figura 3.3: Encontrando Q' , caso 1.

encontrar los cuatro vértices de Q' . Los primeros dos vértices de Q' son u y v . Sea e'' el segmento de recta semiabierto que une v con w , abierto en w . Deslice e'' hacia la derecha hasta que choque con un vértice de P . Si e'' pega con una arista completa de P , entonces los puntos finales de esta arista, junto con u y v son los vértices de Q' , como se muestra en la figura 3.4 (a). Suponga que e'' pega sólo con un vértice x de P ; x es el tercer vértice de Q' .

Considere ahora el segmento de línea semiabierto h que une u con la línea vertical que pasa por x , h no contiene a u , pero contiene su punto final derecho. Deslice h hacia abajo hasta que choque con un vértice de P , o con una arista horizontal f de P por el interior. En el primer caso, sea y el punto más a la derecha al que le pega h . El cuarto vértice de Q' es y . Este caso se ilustra en la figura 3.3 (b).

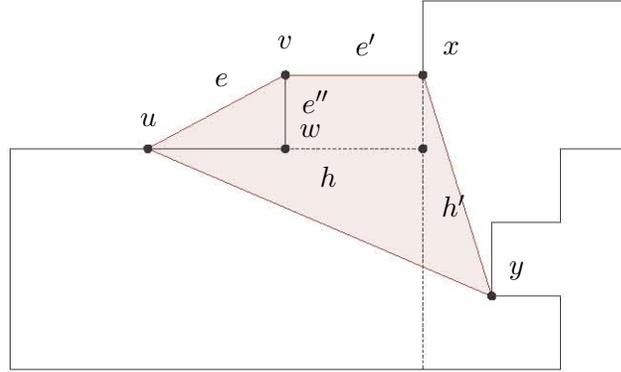
Ahora veamos el caso en el que h le pega a una arista f de P . Esto sólo puede pasar si x es el segundo vértice final de e' . Este caso es ilustrado en la figura 3.4. En este caso, considere el segmento vertical de recta semiabierto h' que une x con f , cerrado por abajo y abierto por arriba. Deslice h' hacia la derecha hasta que pegue con un vértice de P . Si pega con más de un vértice, seleccione como y al menor de esos puntos, para ser el último vértice de Q' .

Ahora es fácil verificar que se puede dividir $P - Q'$ en dos o tres polígonos 1-ortogonales. \square

3.3. Galerías de arte con agujeros

O'Rourke en [20], da el siguiente resultado para polígonos con agujeros:

Teorema 11. Sea $p^v(n, h)$ el número mínimo de v -guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, entonces $p^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$

Figura 3.4: Encontrando Q' , caso 2.

La prueba procede eliminando los agujeros uno a la vez, cortando a P sobre una diagonal que una dos vértices de P , uno de los cuales es vértice de un agujero, y el otro pertenece a la cara exterior.

Sea $p^p(n, h)$ el número mínimo de p -guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, Shermer establece que $p^p(n, h) \geq \lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$, y conjetura que la cota es justa, prueba su conjetura para $h = 1$, para valores mayores que 1 la conjetura continua abierta, estos resultados se pueden ver en [20].

Para p -guardias Bjorling-Sachs y Souvaine [3] e independientemente Hoffmann, Kaufman y Kriegel [9] probaron:

Teorema 12. $\lceil \frac{n+h}{3} \rceil$ p -guardias son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier polígono P con n vértices y h agujeros.

Bjorling-Sachs y Souvaine [4] presentan un algoritmo de tiempo $O(n^2)$ que encuentra la posición de tales guardias. La idea principal del resultado de Bjorling-Sachs y Souvaine consiste en remover un canal de cuatro lados, tal que un vértice nuevo es agregado por cada canal y además existe un triángulo T en el polígono resultante tal que cualquier vértice de T vigila el interior del canal. Este triángulo es forzado a aparecer en una triangulación del polígono resultante, de modo que usando la prueba de Fisk para el teorema de Chvátal se obtiene el resultado.

Para polígonos ortogonales, el método de O'Rourke se extiende para mostrar el siguiente resultado:

Teorema 13. Sea $ort^v(n, h)$ el número mínimo de v -guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, entonces

$$ort^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor.$$

Autor	Resultado	Referencia
O'Rourke	$p^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$	[20]
Shermer	$p^p(n, h) \geq \lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$	[20]
Bjorling-Sachs y Souvaine	$p^p(n, h) \leq \lceil \frac{n+h}{3} \rceil$	[3]
Hoffmann, Kaufman y Kriegel	$p^p(n, h) \leq \lceil \frac{n+h}{3} \rceil$	[9]
O'Rourke	$ort^v(n, h) \leq \lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$	[20]
Hoffman	$ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$	[12]

Tabla 3.1: $p^p(n, h)$ es el número mínimo de p-guardias, necesarios para vigilar un polígono P con n vértices y h agujeros, $p^v(n, h)$ es el número mínimo de v-guardias, mismas condiciones, $ort^v(n, h)$ es el número mínimo de v-guardias, necesarios para vigilar un polígono ortogonal P con n vértices y h agujeros, $ort^p(n, h)$ es el número mínimo de p-guardias, mismas condiciones.

Sea $ort^p(n, h)$ el número mínimo de p-guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, O'Rourke en [20] conjetura que $ort^p(n, h)$ es independiente de h : $ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, Aggarwal [1] verificó esta conjetura para $h = 1$ y $h = 2$, y permaneció abierta hasta 1990, cuando F. Hoffmann [12] demostró:

Teorema 14. *Sea $ort^p(n, h)$ el número mínimo de p-guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h agujeros ortogonales, entonces*

$$ort^p(n, h) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

Hoffman procedió mostrando que cualquier polígono ortogonal con agujeros puede ser dividido en $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ polígonos en forma de estrella, cada uno con a lo más 16 vértices.

Para v-guardias la cota superior se mantiene en $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$, sin embargo, Shermer conjetura que $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ v-guardias siempre bastan para vigilar un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros [20].

En el cuadro 3 se presenta un resumen de los resultados sobre Galerías de arte con agujeros.

3.4. Iluminación con reflectores

Un problema estudiado sobre iluminación con reflectores, se conoce como el problema de la iluminación de estrados, en [29] J. Urrutia estudió este problema, el cual consiste en decidir si los reflectores de un teatro pueden ser rotados sobre sus bases de tal manera que todo el estrado quede iluminado.

Supongamos que tenemos un segmento de línea L y un conjunto de reflectores $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ representados por fuentes de luz que iluminan una zona angular de tamaño α_i , ($i = 1, \dots, n$). Supongamos que los vértices de dichos reflectores están fijos, y que éstos se

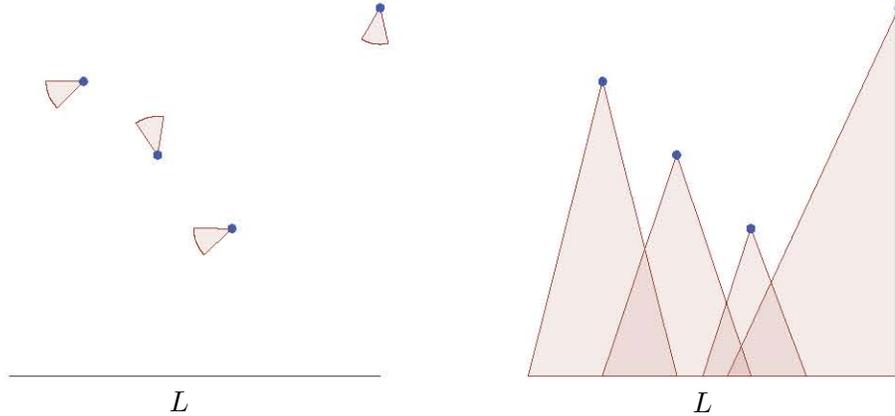


Figura 3.5: El problema de la iluminación de estrados.

pueden rotar sobre sus vértices. ¿Será posible rotar $\{r_1, \dots, r_n\}$ de tal manera que L quede iluminado? Un ejemplo se puede ver en la figura 3.5.

En [13] Ito Hiroy, Uehara Hideyuki y Yokoyama Mitsuo demostraron que el problema es NP-Completo.

Los problemas de iluminación óptima de estrados con reflectores han sido estudiados en [15] y [13], de iluminación del plano en [27], y de iluminación de polígonos en [21].

3.4.1. Iluminación de polígonos simples

A continuación, se hace un resumen de resultados sobre iluminación de polígonos usando reflectores, los cuales se pueden ver en [28].

Considere un polígono simple P con n vértices. Supongamos que a cada vértice v_i de P se le asocia un peso α_i igual al tamaño del ángulo interno de v_i , ($i = 1, \dots, n$) en P . Dado un subconjunto S de los vértices de P , asociemos un peso a S igual a la suma de los pesos de los elementos de S , entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 15. [21] *Todo polígono P con n vértices tiene un subconjunto S que lo ilumina de tal manera que el peso de S es a lo más $\frac{(n-2)\pi}{3}$. Para cada $\epsilon > 0$ existen polígonos tales que no tienen conjuntos de vértices que los iluminen de peso $\frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon$.*

Demostración. Considere el hecho de que la suma de los ángulos internos de cualquier polígono con n vértices es $(n-2)\pi$. Entonces se triangula P añadiendo $n-3$ diagonales internas, se tres-colorean los vértices de P de tal forma que si dos vértices están unidos por una arista de P o por una diagonal, reciben colores diferentes. Esto induce una partición de los vértices de P en tres partes, cada una de las cuales ilumina P . Por tanto alguna de ellas tiene peso a lo más $\frac{(n-2)\pi}{3}$.

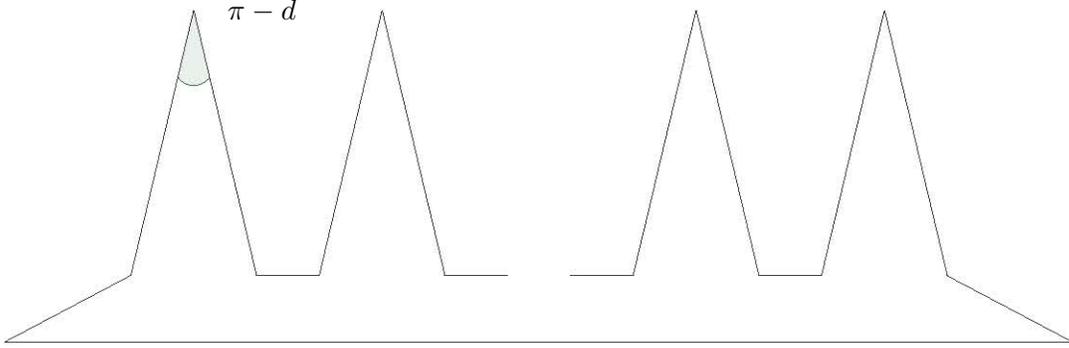


Figura 3.6: Existen polígonos tales que no tienen conjuntos de vértices que los iluminen de peso $\frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon$.

Para probar que $\frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon$ no es suficiente, considere el polígono de la figura 3.6, el cual contiene $n = 3m + 2$ vértices, m vértices de peso $\pi - d$. El polígono puede ser escogido de tal manera que cada vértice de peso $\pi - d$ es visible sólo desde los vértices adyacentes a él, d puede escogerse tan pequeño como se quiera. Entonces para iluminar dichos puntos es necesario escoger, para cada uno, un vértice de peso al menos $\pi - d$, por lo tanto para iluminar P se necesita un subconjunto de vértices de peso al menos $m(\pi - d)$. Si se escoge $0 < \frac{3\epsilon}{n-2} < d$ y como $m = \frac{n-2}{3}$, se tiene que $m(\pi - d) = \frac{n-2}{3}(\pi - d) > \frac{n-2}{3}(\pi - \frac{3\epsilon}{n-2}) = \frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon$, lo cual prueba el resultado. \square

Otro resultado importante es el siguiente:

Teorema 16. [21] *Para cualquier $\epsilon > 0$ existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor o igual a $\pi - \epsilon$ aún permitiendo un reflector por vértice.*

Demostración. Para la demostración sólo se probará que reflectores de tamaño menor o igual a $\frac{\pi}{2}$, no son suficientes. La prueba general para π se obtiene a partir de este resultado, la prueba completa puede encontrarla en [21].

Considere el polígono P presentado en la figura 3.7. Este polígono es simétrico con respecto a la vertical por el vértice v_m . Los ángulos internos a los vértices v_1, v_2 y v_3 son mayores que $\frac{\pi}{2}$. Supongamos por ahora que no está permitido colocar un reflector en el

vértice v_m y que todos los reflectores que se usan son de tamaño a lo más $\frac{\pi}{2}$.

Como el ángulo interno a P en v_3 es mayor que $\frac{\pi}{2}$, para iluminar todos los puntos de P en el entorno de v_3 , un reflector en v_3 no es suficiente. Además, si un punto de P está lo suficientemente cerca a v_3 , éste no es visible desde v_2 , r_1 y v_1 . Por tanto para iluminar todos los puntos en el entorno de v_3 se necesitan utilizar reflectores en v_3 y en r_2 . Esto implica que el reflector colocado en r_2 no ilumina v_2 .

Utilizando argumentos análogos, se puede ver que para iluminar el entorno de v_2 se necesitan los reflectores en v_2 y r_1 . Por tanto para iluminar el entorno de v_1 sólo se puede utilizar el reflector en v_1 . Pero como este reflector no basta por si solo para iluminar el entorno de v_1 , esto fuerza a utilizar el reflector en v_m para completar la iluminación de dicho entorno.

Ya que P es simétrico, para iluminar el entorno de v_0 también es necesario el reflector en v_m ! Como el reflector en v_m no puede iluminar simultáneamente v_0 y v_1 se puede concluir que no es posible iluminar P con reflectores de tamaño menor o igual a $\frac{\pi}{2}$ en cada vértice.

Se puede ver que el ejemplo de la figura 3.7 puede ser modificado agregando vértices en ambos lados de P de tal manera que:

1. Cada lado contiene m vértices convexos, y $m - 1$ cóncavos
2. Cada v_i es visible sólo desde r_{i-1} y r_i , ($i = 1, \dots, m - 1$) y v_m es sólo visible desde v_{m-1}
3. Para m suficientemente grande los ángulos convexos en los vértices v_1, \dots, v_m son arbitrariamente cercanos a π [21].

Si permitimos reflectores de tamaño π sobre las aristas de P se sabe que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ reflectores- π bastan [23]. \square

3.4.2. Iluminación de polígonos ortogonales

En [8] Vladimir Estivill y Jorge Urrutia, así como en [28] establecen el siguiente resultado.

Teorema 17. *Sea P un polígono ortogonal de n vértices, entonces $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales, ubicados en los vértices, son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar P .*

Para la demostración primero se establecen cuatro reglas para colocar reflectores (reglas de iluminación), donde cada una de ellas es capaz de iluminar el interior de un polígono ortogonal: $\{NE, NO, SE, SO\}$.

Dado un polígono P , una arista e de P se dice que será una arista norte (arista-N por simplicidad), si el interior del polígono se encuentra por debajo de e , análogamente definimos las aristas sur, este y oeste. Un vértice se dice que es vértice-NE si las aristas

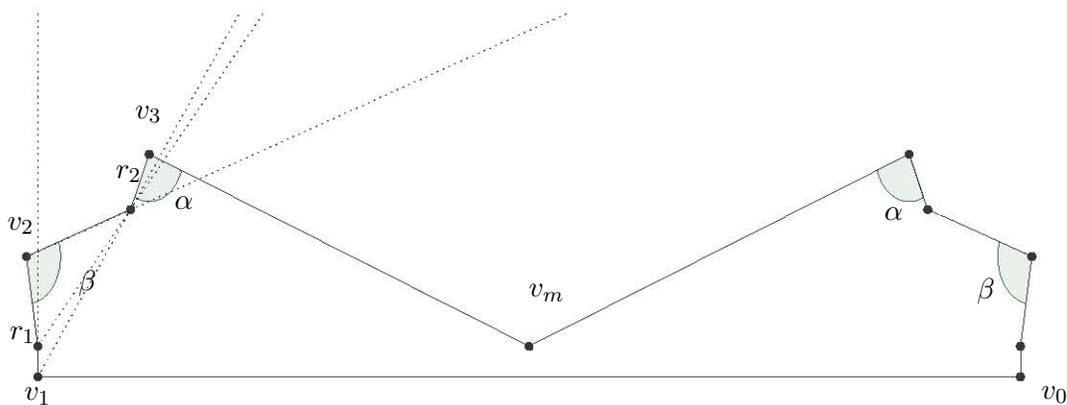


Figura 3.7: Para cualquier $\epsilon > 0$ existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor o igual a $\frac{\pi}{2} - \epsilon$ aun permitiendo un reflector por vértice.

del polígono que inciden en el vértice son una arista norte y una arista este. De manera similar se definen vértice-NO, vértice-SE y vértice-SO, como se ilustra en la figura 3.8.

A continuación se definen las siguientes reglas de iluminación:

1. Regla NE: para cada arista norte e del polígono, colocar un reflector ortogonal alineado con e en el vértice este de e , para cada arista este e del polígono, colocar un reflector ortogonal alineado con e en el vértice norte de e , como se muestra en la figura 3.9 (a).
2. Las reglas NO, SE, y SO se definen de manera similar.

Veremos que estas reglas de iluminación, producen una asignación de los reflectores ortogonales de tal forma que iluminen el interior de un polígono ortogonal.

Teorema 18. *La regla noreste produce una asignación de reflectores que iluminan el interior del polígono ortogonal P .*

Demostración. Sea p un punto en el interior del polígono P , sea x el primer punto en la frontera de P visible por un rayo horizontal que sale de p hacia el este. Entonces x se encuentra en una arista este e y p es visible desde x .

Ahora, considere un punto x' en e justo arriba de x , y considere el rectángulo R cuyos puntos extremos son x' y p , como se muestra en la figura 3.9 (b). Si x' se encuentra lo

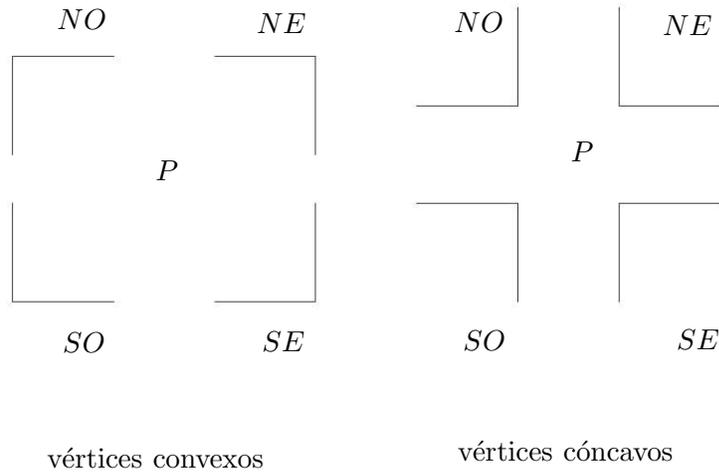


Figura 3.8: Los polígonos ortogonales pueden tener 8 tipos de vértices.

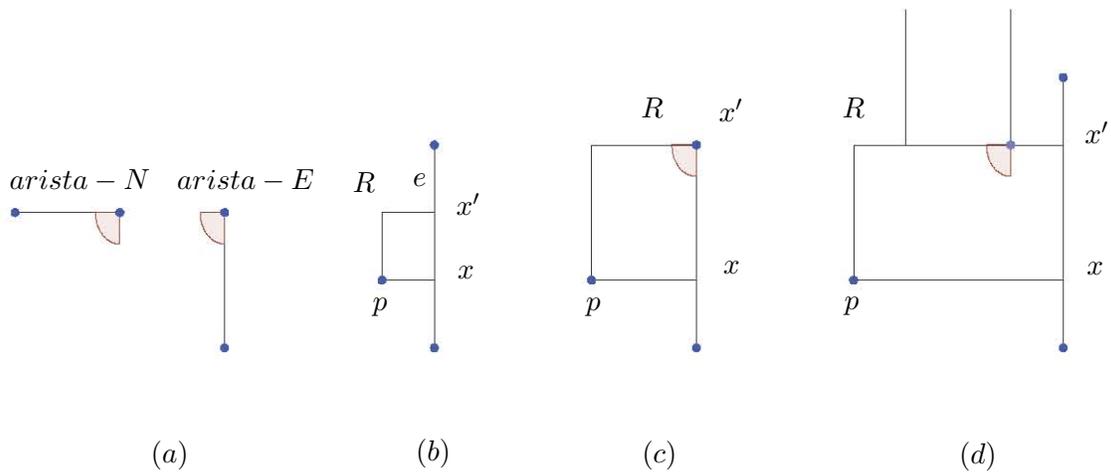


Figura 3.9: Colocación de los reflectores utilizando la regla NE.

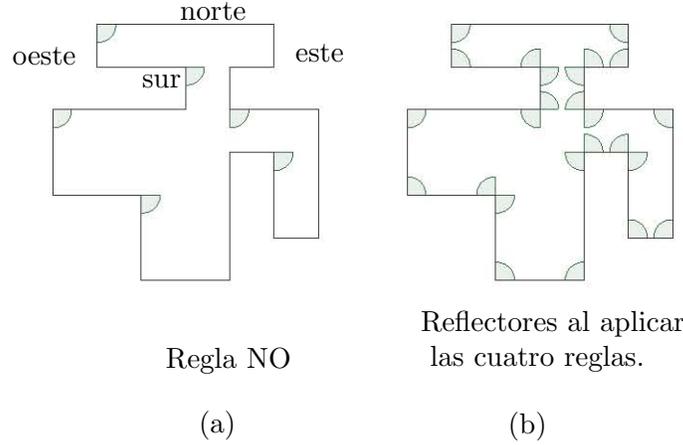


Figura 3.10: (a) Colocación de los reflectores utilizando la regla noroeste. (b) Colocación de los reflectores utilizando todas las reglas.

suficientemente cerca de x , el rectángulo R estará contenido en P . Considere mover x' hacia el norte, mientras R se mantenga completamente contenido en el interior de P , en algún momento no se podrá continuar. Esto sucede porque:

- x' ha alcanzado el vértice norte de e , en cuyo caso, p es iluminado por un reflector en este punto, como se muestra en la figura 3.9 (c).
- El lado superior del rectángulo R ha coincidido con una arista norte, en cuyo caso, p es iluminado por un reflector en el punto este de esta arista norte, como se muestra en la figura 3.9 (d).

En cualquier caso, p es iluminado y la prueba se ha completado. \square

La demostración de las otras reglas es similar.

Demostración del teorema 17. Por las reglas de iluminación previamente descritas, el polígono P puede iluminarse de cuatro maneras diferentes colocando reflectores ortogonales en vértices de P .

Los conjuntos de reflectores utilizados en las reglas NO, NE, SE, y SO son ajenos. Se puede ver que al poner reflectores ortogonales usando simultáneamente las cuatro reglas de iluminación, en cada vértice cóncavo se pondrán exactamente dos reflectores y en cada vértice convexo uno, como se ilustra en la figura 3.10.

Como el número de vértices cóncavos es $\frac{n-4}{2}$, y el número de vértices convexos es $\frac{n+4}{2}$ [29], el número total de reflectores utilizado por las cuatro reglas es $\frac{3n-4}{2}$. Esto indica que una de las cuatro reglas de iluminación utiliza a lo más $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.

Para probar que existen polígonos que requieren $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales, considere los polígonos de la figura 3.11. El primero P_{12} , que llamaremos la hélice con cuatro aspas tiene 12 vértices, y requiere cuatro reflectores ortogonales. El segundo se obtiene

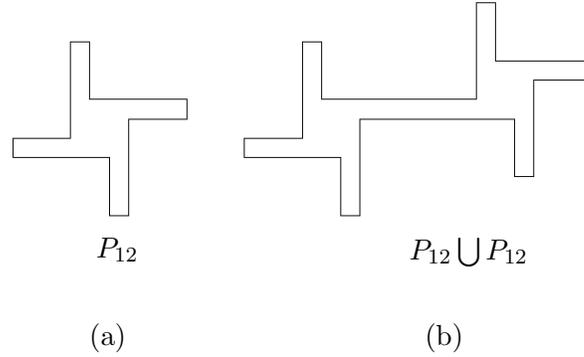


Figura 3.11: (a) Una hélice con cuatro aspas y 12 vértices, requiere cuatro reflectores ortogonales. (b) Pegando dos hélices por un aspa, el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos por tres.

pegando dos hélices por un aspa. Se puede ver que el número de vértices se incrementa en 8, y el número de reflectores requeridos en tres.

Repitiendo esta operación de pegar copias extras de P_{12} se puede obtener una familia de polígonos con $n = 12 + 8m$ vértices que requieren $4 + 3m$ reflectores ortogonales, es decir $4 + 3\lfloor \frac{n-12}{8} \rfloor = \lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ lo cual prueba nuestra cota inferior. \square

A continuación se presenta la extensión del resultado anterior a polígonos ortogonales con agujeros, el resultado puede consultarse en [14].

Teorema 19. *Sea P un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros. Un total de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son suficientes para iluminar P .*

Demostración. Iluminemos P utilizando cada una de las reglas de iluminación descritas anteriormente, teorema 18. Sea $\|X\|$ el número de reflectores utilizados por la regla X .

Notemos que cada arista del polígono recibe a lo más dos reflectores (por ejemplo, una arista norte recibe un reflector en su vértice este con la regla noreste y en su vértice oeste con la regla noroeste) y los conjuntos de reflectores para cada par de reglas son ajenos. Más aún, en la regla noreste, un vértice convexo recibe sólo un reflector. Por lo tanto el número de reflectores $\|NE\|$, usados por la regla noreste es $\|NE\| = \|SE\|_r + \|NO\|_r + \|NE\|_c$, donde $\|SE\|_r$ es el número de vértices sureste cóncavos, $\|NE\|_c$ es el número de vértices noreste convexos.

Entonces el número total de vértices ortogonales usados por las cuatro reglas está dado por $\|NE\| + \|NO\| + \|SE\| + \|SO\| = 2r + c$, donde r es el número de vértices cóncavos en el polígono P y c es el número de vértices convexos.

Ya que para un polígono ortogonal sin agujeros $c = \frac{n+4}{2}$ y $r = \frac{n-4}{2}$, y como para un polígono ortogonal con agujeros los vértices convexos en el agujero son vértices cóncavos en el polígono, mientras que los vértices cóncavos en el agujero son vértices convexos en el polígono, tenemos que la regla de iluminación que utiliza el menor número de reflectores

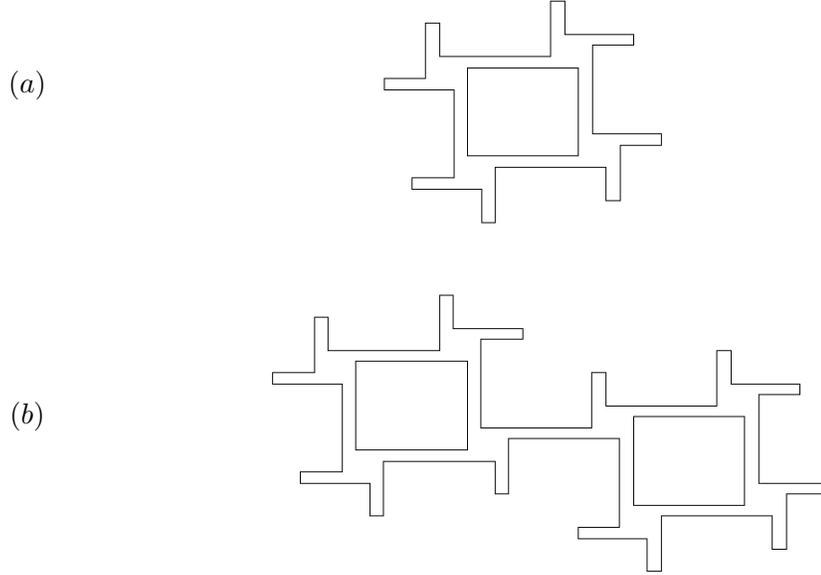


Figura 3.12: (a) Una hélice con 32 vértices, y un agujero que 12 reflectores ortogonales. (b) Familia que $32 + 28h$ vértices que requiere $12 + 11h$ reflectores, donde h es el número de agujeros.

utiliza $\lfloor \frac{2r+c}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(r_0+c_1+\dots+c_h)+c_0+r_1+\dots+r_h}{4} \rfloor$ reflectores, donde $c_i + r_i = n_i$ y c_i es el número de vértices convexos en el i -ésimo agujero. Como $n = \sum_{i=0}^h n_i$, se tiene que $\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor$ es $\lfloor \frac{2(\frac{n_0-4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i+4}{2}) + \frac{n_0+4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i-4}{2}}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ lo cual completa la prueba. \square

Para ver que la cota es justa se tiene el siguiente teorema.

Teorema 20. [14] Sea P un polígono ortogonal con n vértices y h agujeros. Un total de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar P .

Demostración. Para mostrar la necesidad de este número de reflectores, considere el polígono P_{32} de la figura 3.12(a). Ésta contiene 32 vértices, un agujero y requiere 12 reflectores. Evaluando la fórmula $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ para $n = 32$ y $h = 1$ da 12. Para valores mayores de h pegamos nuevamente copias de P_{32} a lo largo de una arista vertical como en la figura 3.12(b). Repitiendo este proceso h veces, se producen polígonos con $32 + 28h$ vértices que requieren $12 + 11h$ reflectores, lo cual prueba el resultado. \square

3.5. Iluminación con radares

En [7] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales y J. Urrutia presentan resultados interesantes utilizando radares, con diferentes variantes, a continuación se presentan algunos de estos resultados.

Definición 43. ($F(P; R)$)

Sea P un conjunto de puntos en el plano y R una región plana. Sea $F(P; R)$ el ínfimo sobre todos los ángulos $\alpha \leq 2\pi$ tal que si radares- α son localizados en los puntos P , entonces existe una orientación inicial de los radares de tal forma que toda la región R es vigilada.

Definición 44. ($F(n; R)$)

Sea R una región en el plano. Sea $F(n; R)$ el ínfimo sobre todos los $F(P; R)$ donde P es un conjunto de radares- α .

Definición 45. (sector vigilado)

Considere un radar- α colocado en un punto k que rota en sentido positivo. Definimos el sector vigilado por el radar en el tiempo t , de la siguiente manera:

- Sea $F_k(\phi; 0)$ que denota el sector inicial definido por el radar cuando su orientación es ϕ ; éste es el sector circular definido por un círculo de radio infinito centrado en k y delimitado por kk_ϕ y $kk_{\phi+\alpha}$.
- Al tiempo t el radar rotará un ángulo de t radianes. Sea $F_k(\phi, t)$ que denota el sector circular al tiempo t , el cual está definido por un círculo de radio infinito, centrado en k y delimitado por $kk_{\phi-t}$ y $kk_{\phi-t+\alpha}$.

Teorema 21. [7] Para cualquier conjunto P de $n \geq 2$ radares en una recta L , se tiene que $F(P; L) = \frac{3\pi}{n}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que la recta L es horizontal. Sea $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de n radares- α en L , y sean los puntos tales que la coordenada x de p_i sea menor que la de p_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Primero se probará que el ángulo $\frac{3\pi}{n}$ es siempre suficiente. Sea la orientación inicial de los radares $F_{p_i}(\frac{i3\pi}{n}; 0)$, para ($i = 0, 1, \dots, n-1$), como se muestra en la figura 3.13.

Se define un plano dual de la siguiente manera: cada radar i es un sector circular de un círculo unitario C delimitado por $\frac{i3\pi}{n}$ y $\frac{(i+1)3\pi}{n}$, en el tiempo t , la recta L es representada como un segmento dirigido \vec{L} tal que \vec{L} cruza el centro de C y la cabeza de \vec{L} forma un ángulo t con el eje horizontal, como se muestra en la figura 3.14 (a).

En el plano dual, los radares son estáticos mientras que L rota de manera continua. La orientación \vec{L} de L preserva la rotación de los radares en el plano original. La cabeza de \vec{L} representa ∞ , mientras que la cola representa $-\infty$ del plano original.

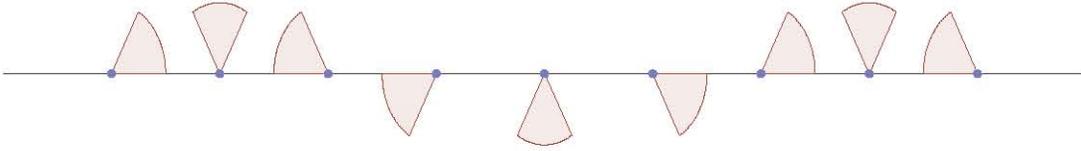


Figura 3.13: Orientación inicial de radares- α para vigilar una recta L .

Como la suma de ángulos es 3π , el sector circular $[0, \pi)$ de C en el plano dual es siempre vigilado por dos conjuntos $S_1, S_2 \subseteq P$ de radares, mientras que el sector circular $[\pi, 2\pi)$ de C en el plano dual es vigilado por un conjunto $S_3 \subseteq P$ de radares.

Observe que cada radar en S_3 está entre S_1 y S_2 en el plano original. Sean $a \in S_1$, $b \in S_2$ y $c \in S_3$ los radares que vigilan un segmento de \vec{L} en el tiempo t en el plano dual. Si a y b vigilan la cabeza de \vec{L} , c vigila la cola. Por lo tanto, L está vigilada por c y b en el plano original. De manera similar si a y b vigilan la cola de \vec{L} , c vigila la cabeza. Por lo tanto, L está vigilada por a y c en el plano original.

Ahora se probará que un ángulo de $\frac{3\pi}{n}$ es siempre necesario. Supongamos por contradicción que la suma de ángulos es menor que 3π . Entonces existe un tiempo t cuando sólo dos radares, supongamos a y b vigilan un segmento de \vec{L} en el plano dual como se representa en la figura 3.14 (b). Asuma que a vigila la cola y b la cabeza de \vec{L} en el plano dual, como se muestra en la figura 3.14 (b). Por lo tanto, L está completamente vigilada en el plano original. Sin embargo, en el tiempo $t + \pi$, a vigila la cabeza y b la cola de \vec{L} en plano dual. Por lo tanto, el segmento \overline{ab} de L en el plano original no está cubierto. \square

Otro resultado interesante es sobre vigilancia del plano con radares de π , el cual también se presenta en [7], primero se demostrará un lema.

Lema 1. [7] Sean a y b dos radares- α en una línea horizontal. Asuma que la orientación inicial en a y b es $F_a(\pi; 0)$, $F_b(\pi - \alpha; 0)$ respectivamente, adicionalmente que la coordenada x de a es menor que la coordenada x de b . Si $0 \leq t \leq \pi$, entonces la intersección de los

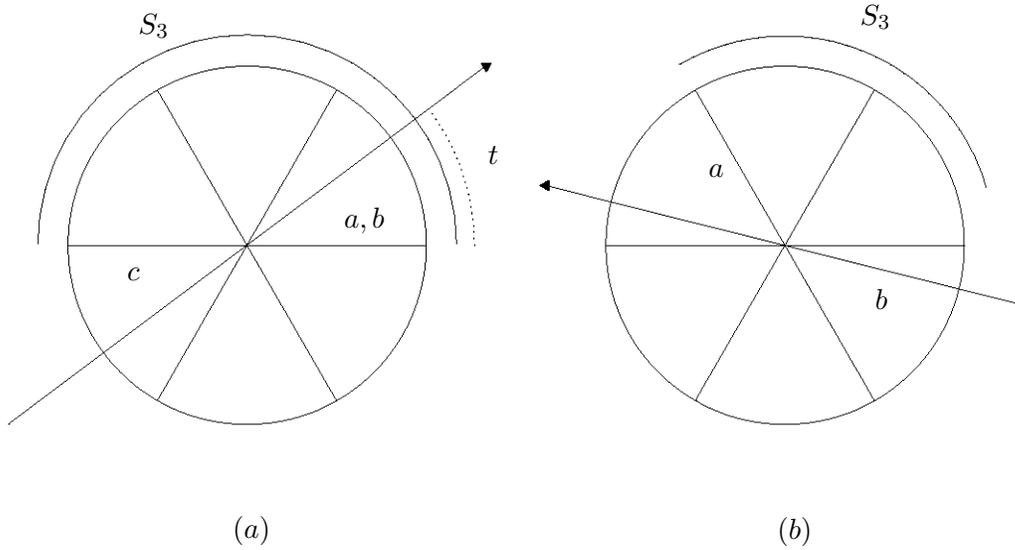


Figura 3.14: (a) Orientación en t . (b) Si $F(n, L) < \frac{3\pi}{2}$, L no está siempre completamente vigilada.

sectores circulares de los radares, vigilan un sector de 2α . Si $\pi < t < 2\pi$, entonces los radares dejan un corredor sin vigilar.

Demostración. Sean l_a, l_b, r_a y r_b los rayos izquierdo y derecho que definen los conos de los radares en a y en b respectivamente. Sea h el eje horizontal. Al tiempo t , $\angle(l_b, h) = \pi - t$.

Observe que $\angle(r_a, r_b) = -\alpha$ y $\angle(l_b, l_a) = \alpha$. Por lo tanto cuando $\pi < t < 2\pi$, los rayos r_a y r_b no se intersectan, es decir $F_a(\pi; t) \cap F_b(\pi - \alpha; t) = \emptyset$, ya que la coordenada x de a es menor que la de b .

Considere la intersección x entre r_a y l_b ; como se muestra en la figura 3.15. No es difícil ver que l_a y r_b determinan un cono de vigilancia incidente en x de tamaño 2α . \square

Teorema 22. [7] Sea P el plano. Se tiene que $F(3; P) = \pi$.

Demostración. Sean p, q, r tres radares- π en el plano. Si los radares son colineales, entonces se puede verificar, como se verá adelante, que la configuración inicial de la figura 3.16 es correcta. Por lo tanto supongamos sin pérdida de generalidad que los radares no son colineales, además se puede asumir que el segmento \overline{pr} es horizontal y que q se encuentra arriba de \overline{pr} . Sea C el circuncírculo de p, q, r , oriente p como $F_p(l; 0)$, donde l es el ángulo de la tangente de C en p , q como $F_1(\pi + \angle qpr; 0)$ y r como $F_r(0; 0)$ como se muestra en la figura 3.17 (a).

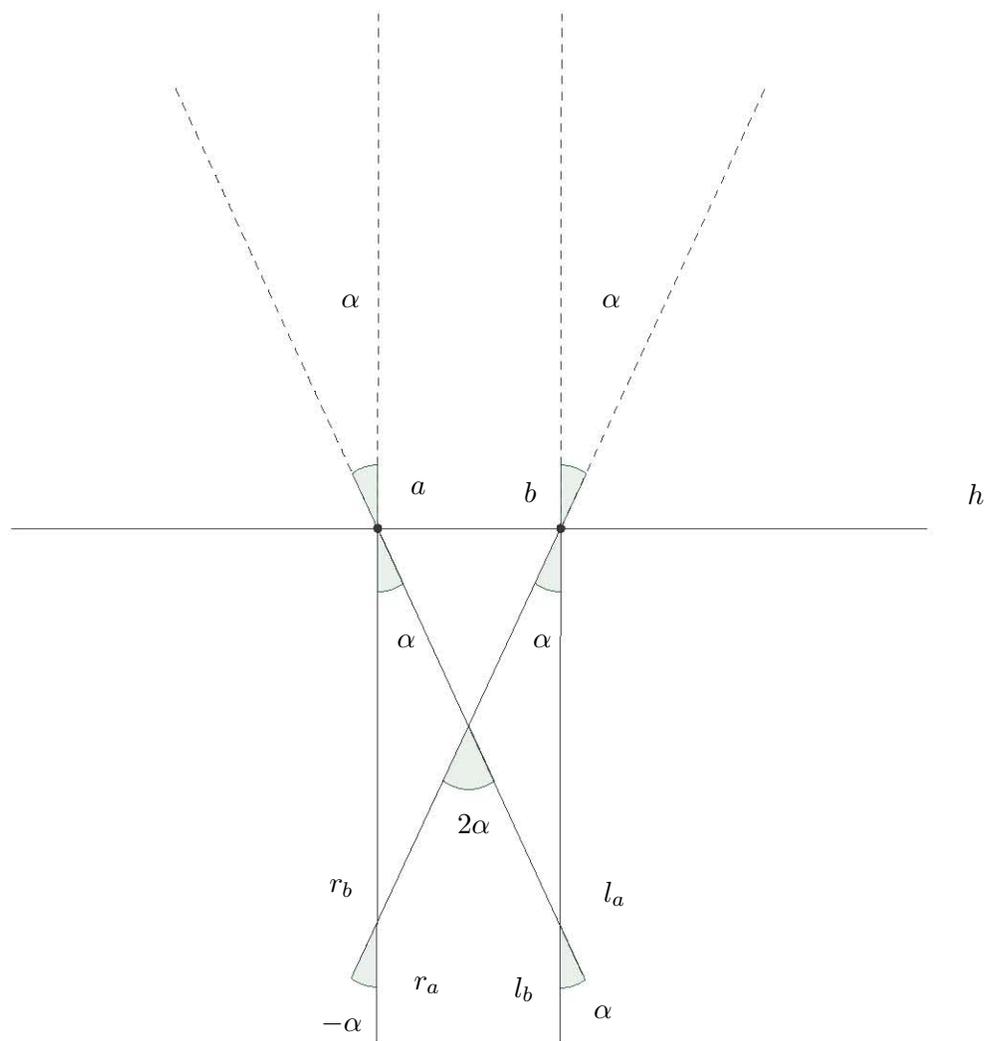
Considere cualquier punto a en la circunferencia C de pqr , observe que el ángulo que forma cada radar con a es igual al arco, como se muestra en la figura 3.17 (b). Por lo tanto se intersectan en a . Se puede verificar que cuando a está en el arco pr , qr deja un cono sin vigilar con vértice en a . De cualquier forma, p vigila el cono no vigilado.

Cuando a está en el arco rq los roles cambian a pq y r respectivamente y cuando a está en arco qp , los roles cambian a pr y q respectivamente. Esto prueba la cota si los puntos son no colineales.

Supongamos que p, q y r son colineales. Sin pérdida de generalidad asuma que están en una recta horizontal, y que la coordenada x de q es mayor que la coordenada x de p y menor que la coordenada x de r . Oriente p, q, r como $F_p(0; 0)$, $F_q(\pi; 0)$ y $F_r(0; 0)$. Por el lema 1 p y q cubren el plano en el tiempo $t < \pi$ y q y r cubren el plano en el tiempo $\pi \leq t < 2\pi$.

Para probar que la cota es justa, asuma por contradicción que $F(3, P) = \pi - \epsilon$. Asuma que en el tiempo t los radares vigilan el plano.

Entonces ya que dos radares no pueden cubrir el plano, existe un punto a en el área vigilada por p donde se intersectan un lado del radar q con otro del radar r , como se muestra en la figura 3.17 (c). Sin embargo a no es vigilado en el tiempo $t + \pi$ ya que $F(3, P) = \pi - \epsilon$. \square

Figura 3.15: dos radares- α .

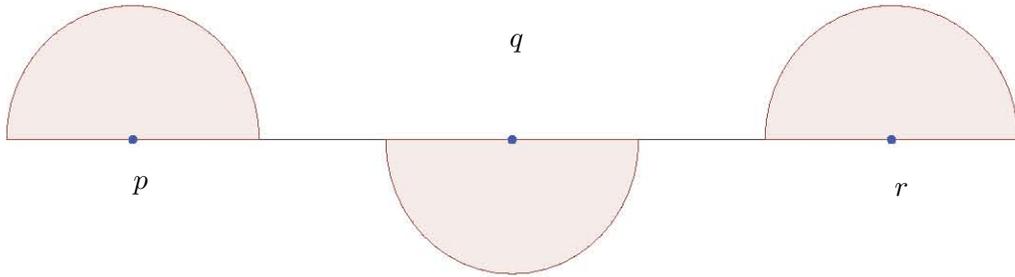


Figura 3.16: Orientación inicial 3 radares- α en posición colineal.

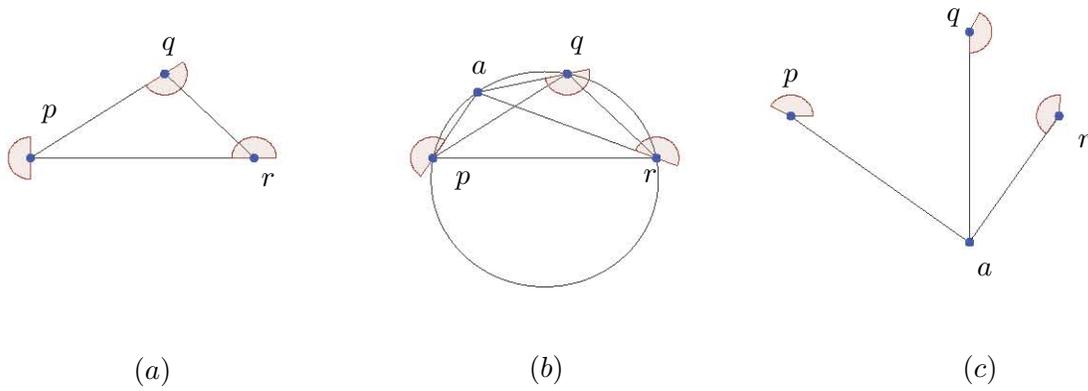


Figura 3.17: (a,b) Tres radares- π , vigilan el plano, (c) no lo vigilan permanentemente si su ángulo es menor que π .

Capítulo 4

Vigilancia de polígonos con radares

4.1. Introducción

En 1994 V. Estivill Castro y J. Urrutia establecen reglas que permiten colocar reflectores en vértices de polígonos ortogonales de manera óptima con el objetivo de vigilarlos [8], en 2011 E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales Ponce y J. Urrutia presentan las condiciones que deben cumplir radares para poder vigilar el plano [7].

Estos resultados establecen las bases necesarias para poder resolver el problema de vigilar una galería de arte con radares. Si la galería es modelada con un polígono ortogonal, entonces el problema será equivalente a utilizar cámaras móviles como guardias. Si la galería es modelada con un polígono simple, entonces podemos pensar en una región poligonal ubicada en un mapa, la cual deseamos vigilar con radares.

De esta manera, se combinan resultados anteriores para resolver un problema más específico.

En este capítulo se presentan resultados sobre la vigilancia de polígonos con radares, primero para vigilar el interior de polígonos ortogonales, después veremos que con algunas observaciones el resultado puede ser extendido a polígonos ortogonales con agujeros. Finalmente, se abordará el problema sobre polígonos simples.

Para simplificar nuestra exposición, usaremos indistintamente el término vigilar e iluminar, tratando de acoplarnos a los términos utilizados en los artículos originales que se usan de referencia.

4.2. Vigilancia de polígonos ortogonales, utilizando radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices

En [8], así como en [28], Estivill Castro y J. Urrutia establecen que $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar un polígono ortogonal de n vértices. Durante la demostración del resultado, se establecen cuatro reglas $\{NE, NO, SE, SO\}$ para colocar reflectores (reglas de iluminación), donde cada una de ellas es capaz de iluminar el interior de un polígono ortogonal, Estas reglas se pueden consultar en la subsección 3.4.2.

Utilizando estas reglas se demostrará el siguiente resultado.

Definición 46. (*orientación canónica*)

La orientación, donde el ángulo recto sin vigilancia de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, coincide con el cuarto cuadrante del plano cartesiano, se denominará *orientación canónica*, como se muestra en la figura 4.1 (a).

Teorema 23. Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices son suficientes m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.

Demostración. Para vigilar un polígono ortogonal P con radares- $\frac{3\pi}{2}$, bastará ver que en todo momento está activa alguna de las reglas de iluminación mencionadas en la subsección 3.4.2.

Supongamos que se coloca un radar- $\frac{3\pi}{2}$ con orientación canónica en cada vértice de un polígono ortogonal P . Los radares al girar de manera continua a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo, completarán un ciclo de 2π en cuatro etapas de $\frac{\pi}{2}$ cada una.

Durante la etapa $E1$, los radares pasarán de su posición inicial $P0$ a una posición $P1$, vigilando un área subtendida por un ángulo π con centro en el radar, como se muestra en la figura 4.1 (a).

Si se colocan los ejes del plano cartesiano haciendo coincidir el origen con los radares, entonces durante la etapa $E1$ los cuadrantes I y II estarán vigilados, como se muestra en la figura 4.1 (b).

El área vigilada, cuadrantes I y II , contiene al área que se obtendría si se utilizaran las reglas de iluminación SE y SO con reflectores ortogonales, como se puede ver en la figura 4.2(a), (b), (c) y (d). Si se analizan de manera similar el resto de las etapas, llegaremos al resumen presentado en la tabla 4.1.

Analizando la tabla 4.1, se puede ver que en cada etapa está contenida el área vigilada por dos reglas diferentes. También se puede observar que el conjunto de reglas $\{NE, SO\}$ es suficiente para vigilar P durante las cuatro etapas, ya que en cada etapa aparece al menos una de las reglas. De la misma forma el conjunto de reglas $\{NO, SE\}$ es suficiente para vigilar P .

Observemos que los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ utilizan vértices ajenos para la colocación de radares, como se puede ver en la tabla 4.2. Los dos conjuntos de reglas

Etapas	Cuadrantes	Reglas
$E1$	II y I	SE, SO
$E2$	I y IV	SO, NO
$E3$	IV y III	NO, NE
$E4$	III y II	NE, SE

Tabla 4.1: Cuadrantes vigilados por las etapas $E1$ a $E4$ con radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, iniciados con orientación canónica en un polígono ortogonal P , junto con el área iluminada que se obtendría si se utilizaran reglas de iluminación con reflectores ortogonales en P .

Conjunto	vértices			
$\{NE, SO\}$	NE_c	SO_c	NO_r	SE_r
$\{NO, SE\}$	NE_r	SO_r	NO_c	SE_c

Tabla 4.2: Partición de los vértices inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, donde NE_c es el vértice convexo NE y NE_r es el vértice cóncavo NE , el resto de vértices se definen de manera similar.

utilizan el total de los vértices de P , por lo tanto los conjuntos $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ inducen una partición del conjunto de vértices.

La partición inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ es de dos partes, por lo tanto una de ellas está compuesta por a lo más m vértices. Si mantenemos radares en los vértices de esta parte, tendremos que son suficientes m radares para vigilar el interior de P . \square

Más adelante en el teorema 30 se demostrará que las partes de la partición inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, utilizan exactamente m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, cada una.

Corolario 1. *Sea P un polígono ortogonal. Si se colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, con orientación canónica, utilizando el conjunto de reglas de iluminación $\{NE, SO\}$ o $\{NO, SE\}$, entonces el interior de P estará vigilado.*

Demostración. El resultado se obtiene de la demostración del teorema 23. \square

Ahora veremos que la cota es justa, primero veremos que un radar no es suficiente para vigilar un punto en el plano, y que dos radares sí lo son.

Teorema 24. *Para mantener vigilado permanentemente un punto en el plano, un radar- $\frac{3\pi}{2}$ no es suficiente, mientras que dos, sí lo son.*

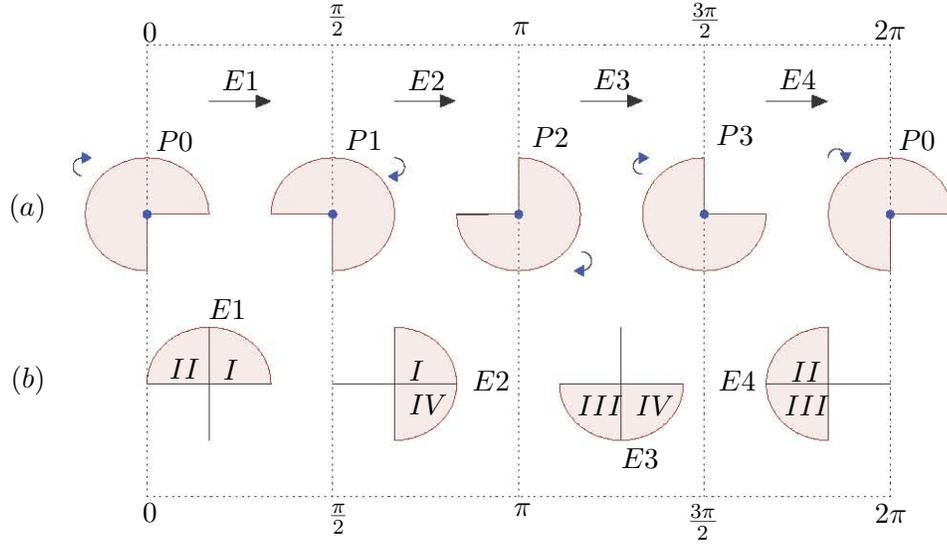


Figura 4.1: Etapas de vigilancia de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, que gira a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo, durante un ciclo completo de 2π y donde cada etapa dura $\frac{\pi}{2}$.

Demostración. Sea p un punto en el plano y A otro punto en que se encuentra un radar- $\frac{3\pi}{2}$. Sea t un instante en el que el radar está justo antes de dejar de vigilar p , es evidente que un ϵ después p no estará vigilado, como se puede ver la figura 4.3 (a).

Sean A y B dos puntos con radares- $\frac{3\pi}{2}$, que giran a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo. Coloquemos el radar de A en la misma posición del caso anterior. Coloquemos el radar de B vigilando p , justo al comienzo de su periodo de vigilancia, como se muestra en la figura 4.3 (b).

El radar en B vigilará continuamente p por un periodo de $\frac{3\pi}{2}$, al finalizar este periodo, el radar en A se encontrará vigilando a p justo cuando faltan $\frac{\pi}{2}$ para dejar de hacerlo, como se muestra en la figura 4.3 (c).

Al finalizar el último periodo de $\frac{\pi}{2}$ los radares de A y B se encontrarán nuevamente en la configuración inicial, vigilando a p continuamente. \square

Teorema 25. *En ocasiones son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices.*

Demostración. Consideremos el polígono de la figura 4.4 (a), por el teorema 24, los puntos a , b y c deben ser vigilados por al menos dos radares.

El punto a sólo puede ser vigilado por radares ubicados en los vértices 2, 3, 4 y 5. El

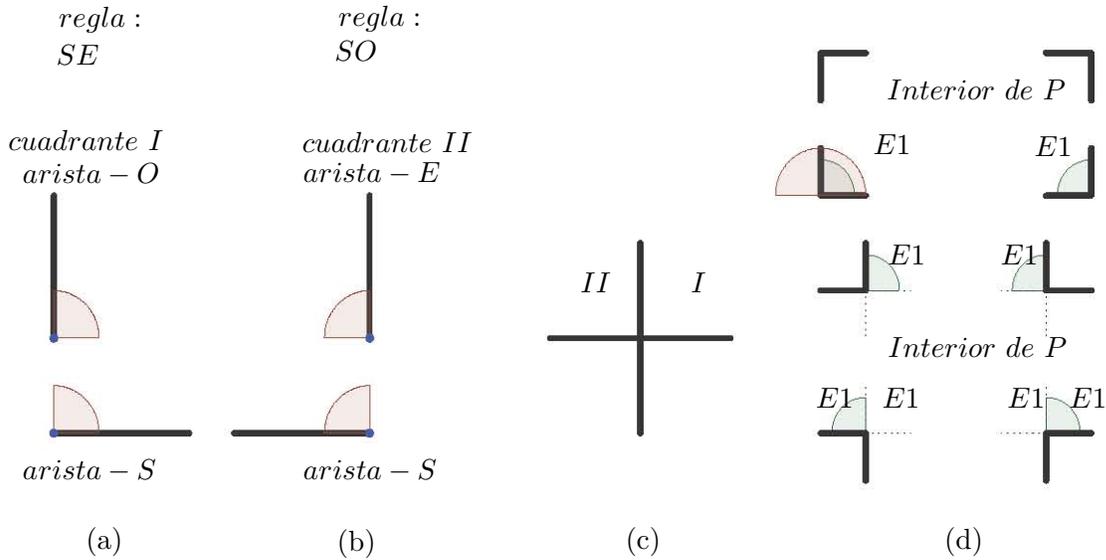


Figura 4.2: (a) El cuadrante I forma un vértice-SO, (b) el cuadrante II forma un vértice-SE (c) cuadrantes I y II, (d) área vigilada por un radar- $\frac{3\pi}{2}$, que gira a una velocidad de 1 radian por unidad de tiempo, en sentido negativo, ubicado en cada uno de los 8 tipos de vértices existentes en un polígono ortogonal, durante la etapa E1, la cual contiene al área iluminada correspondiente a las reglas SE y SO.

punto b , sólo puede ser vigilado por los vértices 1, 2, 5 y 6. El punto c , sólo puede ser vigilado por los vértices 1, 6, 7 y 8.

En cualquier selección que hagamos de los vértices, al utilizar dos por cada uno de los puntos a , b y c , será necesario utilizar al menos cuatro de los ocho vértices para ubicar radares.

Ahora considere la sucesión de polígonos sugerida por el polígono de la figura 4.4 (b). Al agregar un polígono igual al de la figura 4.4 (a), y unirlos por los vértices 8 y 7 de la figura original a los vértices 3 y 4 de la nueva copia respectivamente, tendremos la figura 4.4 (b).

Si observamos la figura 4.4 (b), se puede ver que el análisis previo se mantiene igual hasta el punto c , para los puntos d y e el análisis es similar, ya que d sólo puede ser vigilado por los puntos 7, 8, 11 y 12, mientras que e sólo puede ser vigilado por los puntos 8, 9, 10 y 11.

Para éste nuevo polígono se agregaron cuatro vértices, y fue necesario utilizar al menos dos de ellos para mantener vigilado el polígono, es claro que si seguimos agregando polígonos como los de la figura 4.4 (a) de la misma manera, será necesario utilizar

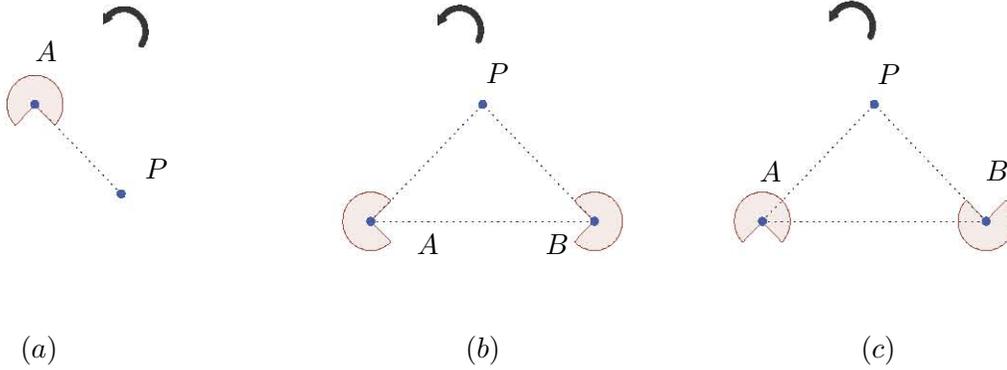


Figura 4.3: Son necesarios al menos dos radares- $\frac{3\pi}{2}$, para vigilar continuamente un punto p en el plano.

al menos m vértices para mantener vigilado el nuevo polígono. \square

Teorema 26. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices son suficientes y en ocasiones necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.*

Demostración. Por los teoremas 23 y 25, se obtiene el resultado. \square

4.3. Vigilancia de polígonos ortogonales con agujeros, utilizando radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices

En [14] Thomas Shermer, James Abello, Vladimir Estivill y Jorge Urrutia, establecieron que $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ guardias ortogonales ubicados en vértices, son suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar el interior de un polígono ortogonal de n vértices y h agujeros, ver teorema 19.

En esta sección se extenderán estos resultados abordando la variante de radares, demostrando que para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, son suficientes y en ocasiones necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.

Comenzaremos por demostrar la suficiencia.

Teorema 27. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, son suficientes m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.*

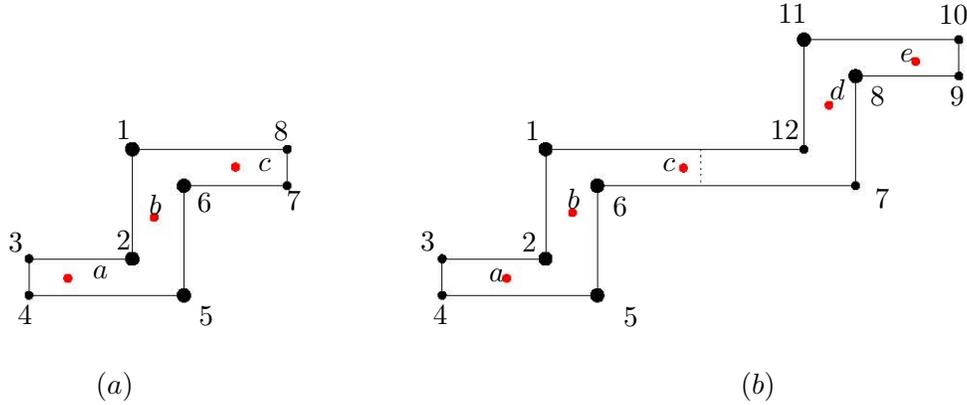


Figura 4.4: En ocasiones son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, para vigilar el interior de un polígono ortogonal de $2m$ vértices. En este ejemplo se utilizan radares en los vértices $\{2, 5\}$ para vigilar a y b , $\{1, 6\}$ para c y $\{8, 11\}$ para d y e .

Demostración. Sea H un polígono ortogonal con $2m$ vértices y h agujeros, definido como en la definición 37 del capítulo 3. Observemos lo siguiente:

1. Las cuatro reglas de iluminación definidas en la subsección 3.4.2 siguen siendo válidas para iluminar H . La demostración es muy similar, con la única observación de que al extender un rayo hacia el este, desde un punto p del interior del polígono, el rayo se encontrará con una arista este, la cual puede pertenecer al polígono sin agujeros, o ser de algún agujero, en cualquier caso, los argumentos de la demostración se mantienen.
2. La partición de los vértices, inducida por los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ del teorema 23, cuadro 4.1, se sigue manteniendo por los mismos argumentos.
3. Los vértices cóncavos en un agujero son vértices convexos en H , mientras que los vértices convexos en el agujero son vértices cóncavos en H .

Por las observaciones (1) y (2), podemos afirmar que m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices, son suficientes para vigilar H , igual que en el teorema 23. Veamos que la cota no depende del número de agujeros.

Por la observación (2), tenemos que las dos partes de la partición, inducida por los conjuntos $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, utilizan el total de vértices convexos y cóncavos.

Denotamos por c_0 al total de vértices convexos en el polígono P , y c_i , $i = \{1, 2, \dots, h\}$ al total de vértices convexos en el agujero i . De la misma manera denotamos por r_0 al total

de vértices cóncavos en el polígono P , y r_i , $i = \{1, 2, \dots, h\}$ al total de vértices cóncavos en el agujero i .

Tenemos que $c_i + r_i = 2m_i$ y $2m = \sum_{i=0}^h 2m_i$. Entonces por las observaciones (2) y (3), tenemos que una de las partes de la partición utiliza a lo más:

$$\begin{aligned} \frac{(c_0 + r_1 + \dots + r_h) + (r_0 + c_1 + \dots + c_h)}{2} &= \\ \frac{c_0 + c_1 + \dots + c_h + r_0 + r_1 + \dots + r_h}{2} &= \\ \frac{\sum_{i=0}^h c_i + \sum_{i=0}^h r_i}{2} &= \\ \frac{\sum_{i=0}^h 2m_i}{2} &= \\ \frac{2m}{2} &= m \end{aligned}$$

□

Para ver que la cota es justa sólo falta verificar la necesidad.

Teorema 28. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, en ocasiones son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.*

Demostración. Considere la familia de polígonos sugerida por la figura 4.5 (a). Por el teorema 24, el punto a debe ser vigilado por al menos dos radares de los vértices 1,2,5 y 6. De la misma forma el punto b sólo puede ser vigilado por al menos dos de los radares de los vértices 3,4,7 y 8. Por lo tanto son necesarios al menos cuatro de los ocho vértices para vigilar los puntos a y b .

En la figura 4.5 (b) un análisis parecido nos obliga a utilizar al menos ocho de los dieciséis vértices para vigilar los puntos a , b , c y d .

Finalmente en la figura 4.5 (c) necesitamos al menos doce de los veinticuatro vértices para vigilar los puntos a , b , c , d , e y f .

En cada nuevo polígono sugerido aumentamos ocho vértices y estamos obligados a utilizar al menos cuatro de éstos para poder vigilar todos los puntos al interior del polígono. Por lo tanto para vigilar esta familia de polígonos son necesarios al menos m radares ubicados en los vértices. □

Teorema 29. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, son suficientes y en ocasiones necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.*

Demostración. Por los teoremas 27 y 28, se obtiene el resultado. □

Los teoremas 23 y 27, inducen el siguiente algoritmo de orden $O(n)$ sobre el número de vértices, el cual sirve para vigilar de manera continua el interior de un polígono ortogonal P de h agujeros n vértices en total:

Para cada vértice de P :

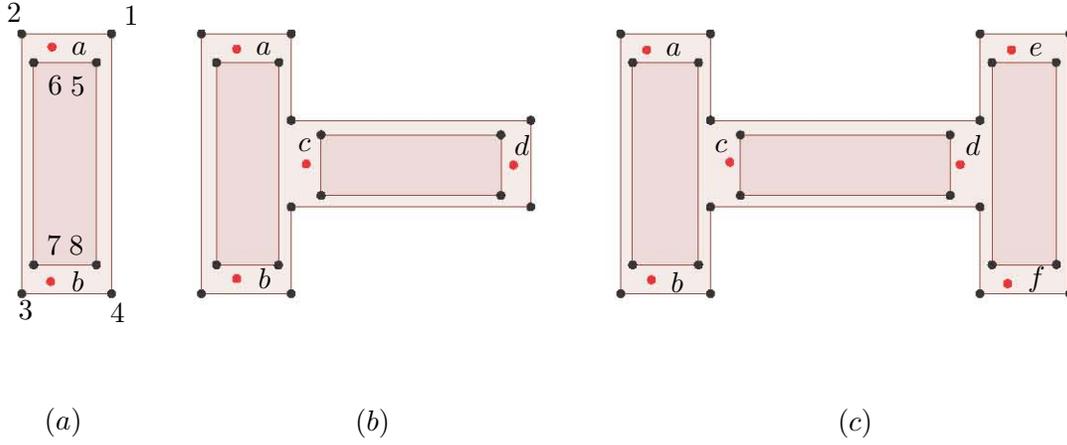


Figura 4.5: Para vigilar el interior de un polígono ortogonal de h agujeros y $2m$ vértices en total, a veces son necesarios m radares- $\frac{3\pi}{2}$, ubicados en los vértices.

1. Seleccionar un conjunto de reglas con el que se desea vigilar P , $\{NE, SO\}$ o $\{NO, SE\}$.
2. Para cada vértice v_i , $\{i = 1, 2, \dots, n\}$ de P :
 - a) Si se escogió el conjunto $\{NE, SO\}$ y $v_i \in \{NE_c, SO_c, NO_r, SE_r\}$. Agregar un radar con orientación canónica.
 - b) Si se escogió el conjunto $\{NO, SE\}$ y $v_i \in \{NE_r, SO_r, NO_c, SE_c\}$. Agregar un radar con orientación canónica.
3. Fin.

Finalmente demostraremos dos propiedades interesantes de los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$.

Teorema 30. *Las reglas de iluminación $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$:*

1. *Inducen una partición de los vértices, cuyas clases de equivalencia tiene la misma cardinalidad.*
2. *Producen una asignación de radares en vértices independientes.*

Demostración. Sea P un polígono ortogonal con $2m$ vértices. Observemos lo siguiente:

1. En todo vértice inciden dos aristas, una vertical y una horizontal.

2. Todo polígono ortogonal de $2m$ vértices tiene m aristas horizontales.

En la demostración de los teoremas 23 y 27, se vio que los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$ inducen una partición de los vértices de P . Para ver que sus clases de equivalencia tiene la misma cardinalidad, analicemos los vértices junto con las reglas de iluminación.

Supongamos que un vértice v_1 , es un vértice izquierdo de una arista horizontal norte e . Entonces la arista vertical de v_1 puede ir hacia arriba o hacia abajo, formando un vértice cóncavo noreste NE_r o un vértice convexo noroeste NO_c respectivamente.

Estos vértices tendrán un radar si se está vigilando con las reglas del conjunto $\{NO, SE\}$ de acuerdo con el cuadro 4.1, como se muestra en la figura 4.6.

Ahora el vértice v_2 de la derecha de e , puede tener su arista vertical de tal forma que se forme un vértice NO_r o un vértice NE_c , en cualquier caso v_2 tendrá radar sólo si se están utilizando las reglas del conjunto $\{NE, SO\}$, como se puede ver en el cuadro 4.1 y en la figura 4.6.

Por la observación (1) basta analizar de manera similar los vértices de una arista horizontal sur, como se muestra en la figura 4.7. Confirmando que las reglas del conjunto $\{NE, SO\}$ o $\{NO, SE\}$, utilizan un vértice por cada arista horizontal, el cual es diferente para cada conjunto de reglas.

De esta forma cada conjunto de reglas asigna radares a conjuntos independientes de vértices.

Por la observación (2) tenemos m aristas horizontales, por lo tanto cualquiera de las dos partes tiene m vértices. \square

4.4. Vigilancia de polígonos simples, utilizando radares- π , ubicados en los vértices

Primero se presentarán resultados de vigilancia en triángulos. Se demostrará que un triángulo puede ser vigilado con tres radares- π , ubicados en los vértices, y no menos. Este resultado puede obtenerse como corolario del teorema 6 presentado en [7]. A continuación se hará una demostración diferente, la cual involucra una configuración inicial diferente, que será de gran utilidad.

Teorema 31. *Sea T un triángulo, entonces para vigilar T son suficientes tres radares- π , ubicados en los vértices, todos con la misma configuración inicial, y no puede ser vigilado con menos.*

Demostración. Primero se demostrará que tres radares son suficientes: Sea T un triángulo con vértices A, B, C y ángulos α, β, γ respectivamente, además con radares- π en cada uno de sus vértices, los cuales están orientados en la misma dirección y giran a una velocidad constante de un radian por unidad de tiempo.

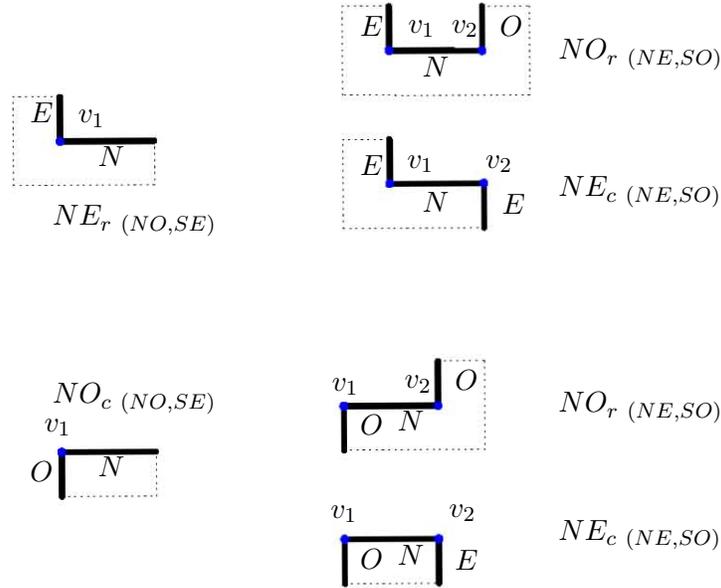


Figura 4.6: Si se utilizan las reglas de iluminación de los conjuntos de reglas $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, vértices contiguos de una arista horizontal norte tienen radares colocados por reglas de conjuntos diferentes.

Sin pérdida de generalidad supongamos que los radares están orientados con su base paralela a la base BC de T , (llamaremos a esta configuración inicial, configuración débil), como se ilustra en la figura 4.8 (a).

Entonces en la configuración inicial, T estará vigilado por los dos radares de la base i.e. los radares B y C .

Durante un periodo de tiempo $(\pi - \gamma)$, T estará vigilado por el radar en C , como se puede ver en la figura 4.8 (a), (b) y la figura 4.9. A partir de este punto, los radares estarán alineados ahora con la base CA de T .

Durante un periodo de tiempo $(\pi - \alpha)$, T estará vigilado por el radar en A , como se puede ver en la figura 4.8 (b), (c) y la figura 4.9. Ahora los radares estarán alineados con la base AB de T .

Finalmente durante un periodo de tiempo $(\pi - \beta)$, T estará vigilado por el radar en B , como se puede ver en la figura 4.8 (c), (d) y la figura 4.9. En este punto se alcanza nuevamente la configuración inicial y el ciclo comienza de nuevo. Entonces T estuvo vigilado por un periodo total de $(\pi - \gamma) + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) = 2\pi$ ya que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

A continuación se demostrará que T no puede ser vigilado con menos de tres radares:

Para ver que no es posible vigilar T con un radar, supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos únicamente el radar de B , y supongamos que se encuentra en la posición donde su base está alineada con un punto p sobre T , como se muestra en la figura 4.10

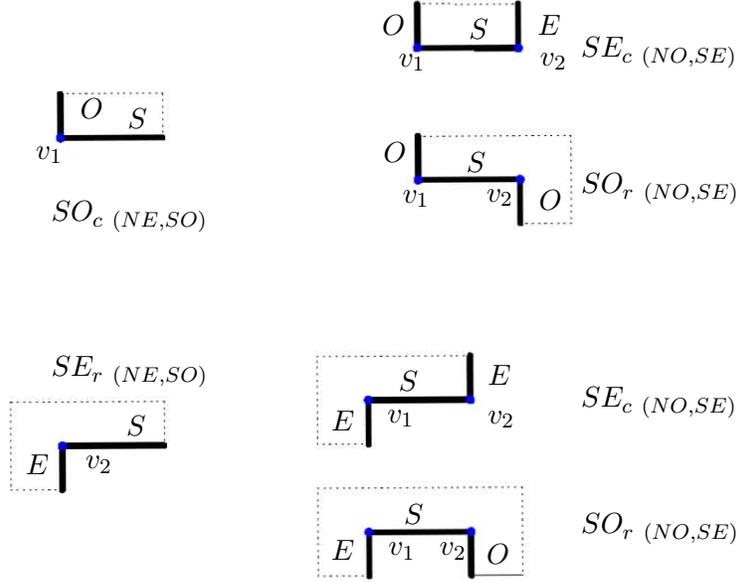


Figura 4.7: Si se utilizan las reglas de iluminación de los conjuntos $\{NE, SO\}$ y $\{NO, SE\}$, vértices contiguos de una arista horizontal sur tienen radares colocados por reglas de conjuntos diferentes.

(a). Entonces cualquier punto del triángulo $\triangle PBC$ se encontrará sin vigilar.

Para ver que dos radares tampoco son suficientes, supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos los radares de B y C , donde el radar de B se encuentra en la misma posición del caso anterior.

Dado que el triángulo $\triangle PBC$ no es vigilado por el radar de B , éste debe ser vigilado por el radar de C . Para que esto suceda, la posición del radar de C debe ser tal que su base y el lado BC de T forme un ángulo α , con $\alpha \in [0, \pi - \gamma]$, como se muestra en la figura 4.10 (b).

T se encontrará vigilado por C , sin embargo π radianes después el triángulo $\triangle ABP$, se encontrará sin vigilar, como se muestra en la figura 4.10 (b), con lo que se obtiene el resultado. \square

Ahora se demostrará que cualquier polígono simple puede ser triangulado, este resultado se puede consultar en [19].

Teorema 32. *Sea P un polígono simple de n vértices, entonces P se puede triangular y esta triangulación consta de $n - 2$ triángulos.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre n , si $n = 3$, P es un triángulo y el resultado se cumple. Sea $n > 3$, y supongamos que el resultado se cumple para $m < n$.

Primero se probará la existencia de una diagonal en P , sea v el vértice más a la izquierda de P , sean u y w los vecinos de v en la frontera de P , si el segmento \overline{uw} cae

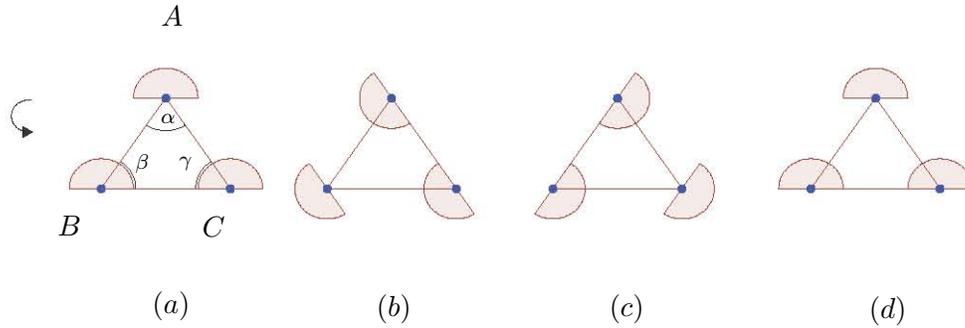


Figura 4.8: Un triángulo puede ser vigilado colocando un radar- π en cada vértice, todos con la misma alineación.

en el interior de P , habremos encontrado una diagonal, como se muestra en la figura 4.11 (a), en caso contrario debe haber uno o más vértices en el interior del triángulo formado por u , v y w , o en la diagonal \overline{uw} , de esos vértices, sea v' el más alejado de la recta que pasa por u y w . El segmento que conecta v' y v no puede intersectar ninguna arista de P , porque esa arista tendría un vértice en el interior del triángulo que estaría más lejos de la recta que pasa por u y v , en contradicción con la definición de v' . Por lo tanto el segmento $\overline{vv'}$ es una diagonal de P , como se muestra en la figura 4.11 (b).

Cualquier diagonal corta P en dos subpolígonos simples P_1 y P_2 , sean m_1 y m_2 el número de vértices de P_1 y P_2 respectivamente. Tanto m_1 como m_2 son menores que n , entonces por inducción P_1 y P_2 pueden ser triangulados, y por lo tanto P .

Para probar que cualquier triangulación de P tiene $n - 2$ triángulos, considere una diagonal en cualquier triangulación T_P , esta diagonal corta a P en dos subpolígonos P_1 y P_2 con m_1 y m_2 vértices respectivamente. Cada vértice de P pertenece a uno de los dos subpolígonos, excepto por los vértices que definen la diagonal, los cuales pertenecen a los dos, por lo tanto $m_1 + m_2 = n + 2$, por inducción cualquier triangulación de P_i consta de $m_i - 2$ triángulos, lo cual implica que T_P consta de $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$ triángulos. \square

Finalmente se abordará el problema de vigilar polígonos simples con radares- π , ubicados en los vértices. Se demostrará que si el polígono cuenta con n vértices, entonces son suficientes n radares- π en ocasiones necesarios n radares.

Teorema 33. *Sea P un polígono simple de n vértices, entonces para vigilar P son suficientes n radares- π , ubicados en los vértices.*

Demostración. Por el teorema 32, P se puede triangular. Sea $T(P)$ una triangulación de

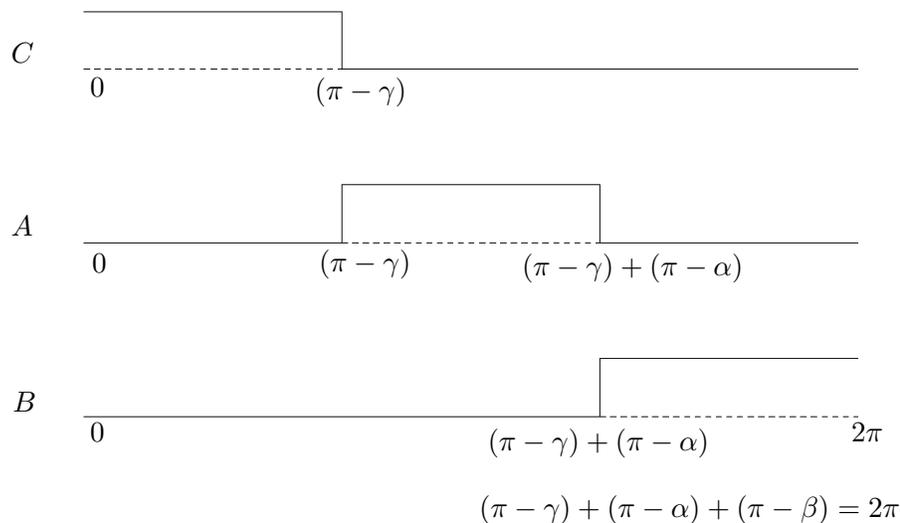


Figura 4.9: Un triángulo puede ser vigilado colocando un radar- π en cada vértice, todos con la misma alineación.

P .

Por el teorema 31, cada triángulo de $T(P)$ puede ser vigilado colocando un radar- π , en cada uno de sus vértices. Cada vértice de $T(P)$ es un vértice de P , al colocar un radar en cada vértice de $T(P)$, cada triángulo de $T(P)$ estará vigilado, y por lo tanto P estará vigilado con n radares, como se muestra en la figura 4.12. \square

El teorema 33, induce el siguiente algoritmo de orden $O(n)$ sobre el número de vértices, el cual sirve para vigilar un polígono simple P de n vértices:

1. Para cada vértice v_i , $\{i = 1, 2, \dots, n\}$ de P :
 - a) Agregar un radar con configuración débil.
2. Fin.

Hasta ahora se ha demostrado que para un polígono de n vértices siempre es suficiente utilizar n radares- π , ubicados en los vértices para vigilarlo, a continuación se demostrará la necesidad.

Teorema 34. *Sea P un polígono simple de n vértices, entonces para vigilar P en ocasiones son necesarios n radares- π , ubicados en los vértices.*

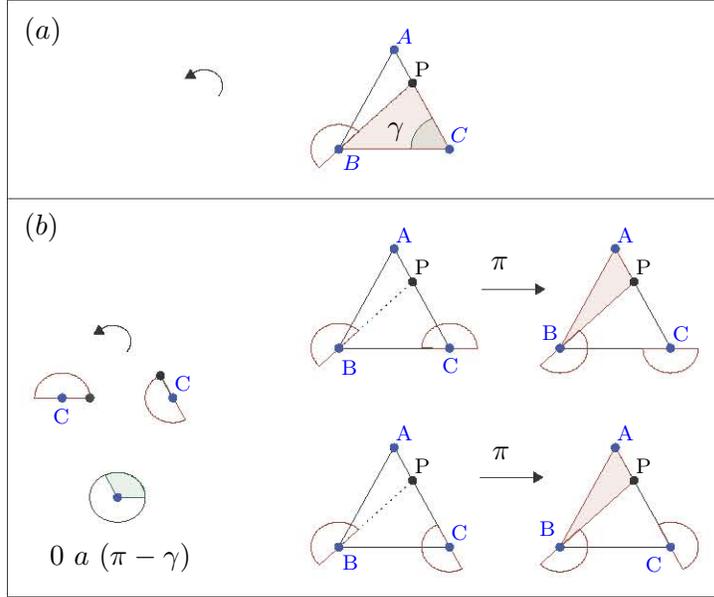


Figura 4.10: Para vigilar T se necesitan al menos tres radares- π , ubicados en los vértices.

Demostración. Considere el polígono de la figura 4.13, por el teorema 31 un triángulo sólo puede ser vigilado por tres radares, ubicados en sus respectivos vértices.

Observemos que para $\epsilon > 0$, un conjunto de puntos A contenidos en la bola de radio ϵ con centro en el punto a ($A \subseteq b_\epsilon(a)$), tal que $|A| > 1$, sólo puede ser vigilado por los puntos 4, 5 y 6. Un conjunto de puntos $B \subseteq b_\epsilon(b)$, tal que $|B| > 1$, sólo puede ser vigilado por los puntos 1, 2 y 3. Un conjunto de puntos $C \subseteq b_\epsilon(c)$, tal que $|C| > 1$, sólo puede ser vigilado por los puntos 1', 2' y 3'. Finalmente un conjunto de puntos $D \subseteq b_\epsilon(d)$, tal que $|D| > 1$, sólo puede ser vigilado por los puntos 4', 5' y 6'. Por lo tanto es necesario ubicar un radar en cada uno de los vértices de tal manera que los conjuntos A , B , C y D sean vigilados. Es claro que por cada oreja, será necesario agregar un radar en cada vértice de la oreja. \square

Teorema 35. *Sea P un polígono simple de n vértices, entonces para vigilar P son suficientes y en ocasiones son necesarios n radares- π , ubicados en los vértices.*

Demostración. Por los teoremas 33 y 34, se obtiene el resultado. \square

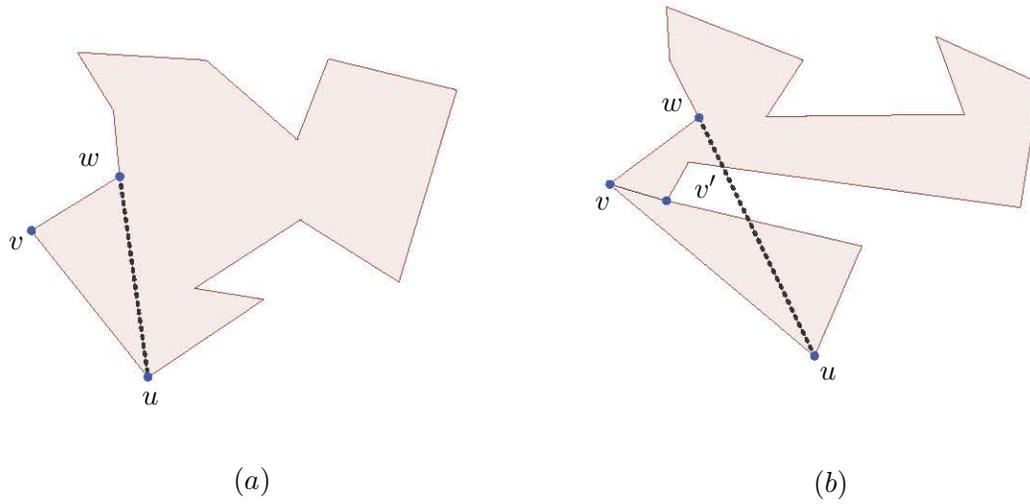


Figura 4.11: En todo polígono simple existe una diagonal.

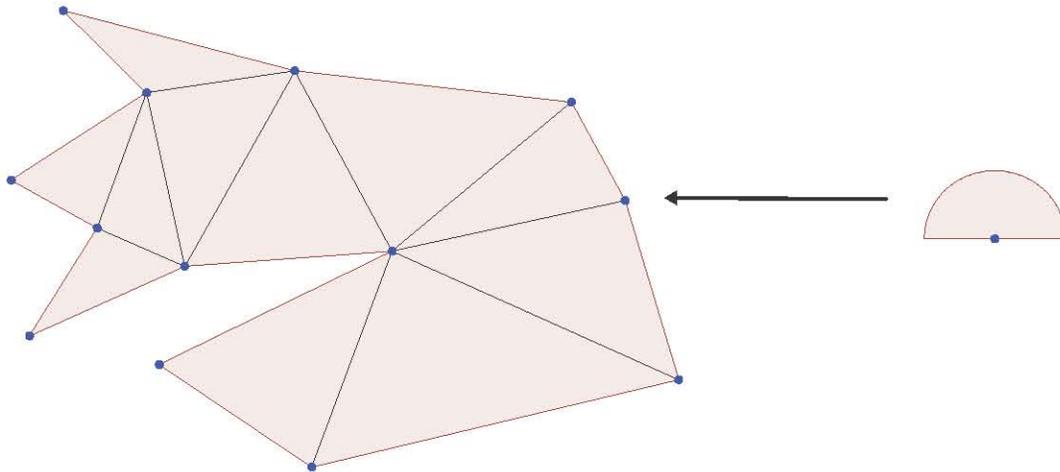


Figura 4.12: El interior de un polígono simple P , puede ser vigilado colocando n radares- π , uno en cada vértice de P , todos con la misma orientación.

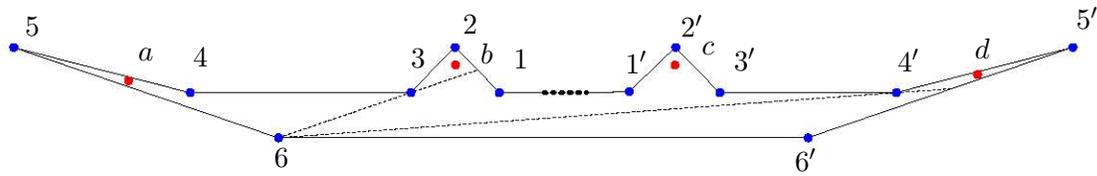


Figura 4.13: Para vigilar un polígono simple de n vértices con radares- π , en ocasiones son necesarios n radares colocados en cada uno de sus vértices.

Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo de la presente investigación, se han estudiado tres nuevas variantes del problema de la galería de arte, respondiendo a la siguiente pregunta:

¿Cuántos guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios (cota justa) para vigilar el interior de un polígono P ? En donde P es:

1. Ortogonal.
2. Ortogonal con agujeros.
3. Simple.

Los guardias se modelaron como radares ubicados en los vértices de P , los cuales giran a una misma velocidad constante. Así mismo, se consideró que cada guardia ilumina o vigila una zona angular de tamaño α .

También se obtuvieron algoritmos que entregan los vértices de P que deben ser utilizados para ubicar reflectores, así como la configuración inicial de los reflectores de tal forma que P se encuentre siempre vigilado. El resumen de los resultados obtenidos se puede consultar en la tabla 4.3.

Para futuras investigaciones es interesante extender las capacidades de los guardias presentadas en este trabajo, agregando la posibilidad de que puedan atravesar un cierto número de paredes (modems), combinando así los resultados del presente trabajo, con investigaciones como las presentadas en [24] y [2]. También es interesante tratar de extender los resultados incrementando la dimensión para ubicar las galerías en \mathbb{R}^3 .

Polígono	No. de guardias	Ángulo de vigilancia	Complejidad del algoritmo
Ortogonal	$\frac{n}{2}$ cota justa.	$\frac{3\pi}{2}$	$O(n)$
Ortogonal con agujeros	$\frac{n}{2}$ cota justa.	$\frac{3\pi}{2}$	$O(n)$
Simple	n cota justa.	π	$O(n)$

Tabla 4.3: Resumen de resultados.

Bibliografía

- [1] A. Aggarwal. The art gallery theorem: its variations applications and algorithmic aspects. (1984).
- [2] D. Flores-Peñaloza T. Hackl C. Huemer J. Urrutia Aichholzer, R. Fabila-Monroy and B. Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. (2009).
- [3] I. Bjorling-Sachs and D. Souvaine. A tight bound for guarding polygons with holes. (1991).
- [4] I. Bjorling-Sachs and D. Souvaine. An efficient algorithm for guard placement in polygons with holes. (1995).
- [5] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graduate Texts in Mathematics, Graph Theory*. Springer, (1988).
- [6] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. (1975).
- [7] O. Morales E. Kranakis, F. MacQuarie and J. Urrutia. Uninterrupted coverage of a planar region with rotating directional antennae. (2011).
- [8] V. Estivill and J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries. (1994).
- [9] M. Kaufman y K. Kriegel F. Hoffman. The art gallery problem for polygons with holes. (1991).
- [10] S. Fisk. A short proof of chvátal's watchman theorem. (1978).
- [11] J. O'Rourke y E. Welzl H. Edelsbrunner. Stationing guards in rectilinear art galleries. (1984).
- [12] F. Hoffman. On the rectilinear art gallery problem, proc. icalp. (1990).
- [13] UEHARA Hideyuki ITO Hiroy and YOKOYAMA Mitsuo. Np-completeness of stage illumination problems. (2000).

- [14] T. Shermer J. Abello, V. Estivill and J. Urrutia. Illumination with orthogonal floodlights. (1995).
- [15] E. Rivera-Campo J. Czyzowicz and J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of stages. (1993).
- [16] M. Klawe J. Kahn and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. (1983).
- [17] D. Lee and A. Lin. Computational complexity of art gallery problems. (1986).
- [18] A. Lubiw. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. (1985).
- [19] Marc Van Kreveld Mark Overmars Mark de Berg, Otfried Cheong. *Computational Geometry*. Springer, Berlin, (2008).
- [20] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, New York, (1987).
- [21] J. O'Rourke and D. Xu. Illumination of polygons with 90 textdegree vertex lights. (1994).
- [22] J. O'Rourke and K. J. Supowit. Some np-hard polygon decomposition problems. (1983).
- [23] J. Czyzowicz J. Urrutia P. Belleville, P. Bose and J. Zaks. K-guarding polygons on the plane. (1994).
- [24] Andres Ruis Vargas R. Fabila-Monroy and J. Urrutia. On modem illumination problems. (2009).
- [25] J. Sack and Toussaint. Guard placement in rectilinear polygons. (1988).
- [26] T. C. Shermer. *Recent results in art galleries*. Proc. IEEE, 80(9):1384-1399, (1992).
- [27] W. Steiger and I. Streinu. Positive and negative results on the floodlight problem. (1994).
- [28] J. Urrutia. Iluminando polígonos con reflectores. (1995).
- [29] J. Urrutia. *Art gallery and illumination problems*. Sack and J. Urrutia editors, North-Holland, (2000).

Índice alfabético

- (p, q) -gráfica, 12
- 1 – *ortogonal*, 25
- camino*, 15
- k -coloración, 19
- uv – *camino*, 15
- uv – *paseo*, 15
- uv – *trayectoria*, 15
- árbol, 16
- algoritmo, 50
- arista de corte, 16
- bosque, 16
- caras adyacentes, 19
- caras de una gráfica, 19
- centro de una gráfica, 15
- circuito, 15
- componente conexa, 16
- Diagonal, 23
- excentricidad de una gráfica, 15
- Galería con agujeros, 23
- Galería de arte tradicional, 23
- Galería ortogonal, 23
- Galerías de arte con agujeros, 28
- Galerías ortogonales, 25
- Gráfica, 11
- gráfica bipartita, 16
- gráfica bipartita completa, 16
- gráfica conexa, 16
- gráfica dual, 20
- gráfica geométrica, 20
- gráfica plana, 19
- grado de un vértice, 12
- Iluminación, 23
- Iluminación con radares, 39
- Iluminación con reflectores, 30
- Iluminación de polígonos ortogonales, 33
- Iluminación de polígonos simples, 31
- Jardín de esculturas, 23
- Modems, 23
- orden de una gráfica, 11
- orientación canónica, 46
- Polígono, 23
- Polígono con agujeros, 23
- polígono con agujeros, 50
- Polígono ortogonal, 23
- polígono ortogonal con agujeros, 50
- Polígono simple, 23
- Puntos guardia, 23
- Radares, 23
- radio de una gráfica, 15
- Reflector, 23
- Reflectores, 23
- sector vigilado, 39
- subgráfica, 14
- subgráfica conexa, 16
- subgráfica generadora, 14

subgráfica inducida, 14

tamaño de una gráfica, 11

Triangulación, 23

vértice central, 15

vértice de corte, 16

vértices conectados, 16

Vértices guardia, 23

Vigilancia, 23

Vigilancia de polígonos con radares, 45

Vigilancia de polígonos ortogonales, 46

Vigilancia de polígonos ortogonales con agujeros, 50

Visibilidad, 23