Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis del proceso de riesgo de prima dependiente con SONOR a través de estimaciones en grandes desviaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

KAREN IVONNE TORRES BARDALES

DIRECTOR DE TESIS:

ANA MEDA GUARDIOLA

2013

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción

El proceso de riesgo clásico de Lundberg es un modelo que describe la reserva de una compañía de seguros y utiliza el proceso de Poisson compuesto para representar el monto pagado a los asegurados. Dicho modelo contribuye a la toma de decisiones de una compañía de seguros.

Como una compañía desea contar con un capital positivo, tiene sentido preguntarse por la ruina. Se considera a la ruina como el primer instante en que se tiene un déficit en el capital; normalmente se desea calcular la probabilidad de ruina bajo las suposiciones de dicho modelo. Debido a la importancia de este evento, la ruina, se han hecho generalizaciones del modelo de riesgo en diferentes vertientes para tomar mejores decisiones dependiendo del objeto de interés.

Se pretende en este trabajo dar un modelo de riesgo más rico y realista, en dos direcciones: la primera, debido a riesgos ajenos al seguro contratado, una compañía puede no estar en condiciones para hacer frente a sus obligaciones, y en este sentido es deseable que la prima esté relacionada también con este problema y pueda depender del capital disponible en cada tiempo. La segunda, como rara vez se entrega el pago de la reclamación al tiempo que se presenta el siniestro, se desea incluir en el modelo un retraso en el pago, para incluir los tan conocidos "Siniestros Ocurridos pero NO Reportados" (SONOR). El modelo que se presenta es un modelo de riesgo con prima dependiente de la reserva con reclamaciones que tienen un defase con respecto al tiempo de ocurrencia del siniestro incluyendo en particular a las del tipo SONOR (ver §1.3), el tratamiento que se sigue en este trabajo está basado en el artículo [3] de Ganesh, Macci y Torrisi, quienes presentan ahí estimaciones asintóticas a la probabilidad de ruina y describen la trayectoria más probable que lleva a la misma.

El modelo de riesgo que se presenta, aunque tiene aspectos más realistas, sigue siendo tratable en términos del problema de la ruina, puesto que las estimaciones de la misma aún pueden ser obtenidas de manera asintótica. Estas estimaciones están basadas en resultados de la teoría de grandes desviaciones y utilizaremos estos resultados como una herramienta

poderosa en la obtención de probabilidades para eventos raros, como lo es la ruina.
Este análisis del modelo de riesgo a través de la teoría de grandes desviaciones fue hecho para el modelo clásico por Martin-Löf [7] y Djehiche [5], posteriormente en el de prima dependiente de la reserva por Asmussen y Nielsen [9]. En el artículo de Martin-Löf [7] se encuentran estimaciones prácticas en un sentido numérico. En el artículo de Asmussen y Nielsen se muestra además de estas estimaciones una trayectoria 'más probable' a la ruina, en el sentido de grandes desviaciones.

Las pruebas y notaciones de la teoría de grandes desviaciones aquí utilizadas son tomadas principalmente del libro de Dembo y Zeitouni [1], algunas más del libro de Frank den Hollander [4], aunque aquí se hacen las demostraciones detalladamente.

Se espera que el lector de este material pueda encontrar aquí vertientes de trabajo que interesan al sector asegurador: modelos que incluyen casos en que la prima depende de la reserva y consideraciones económicas tanto como de seguros respecto al retraso del pago de la reclamación.

Se presenta en el capítulo 1 de manera detallada el modelo de riesgo (ver §1.3). Encontramos en el capítulo 2 los teoremas y pruebas de la teoría de grandes desviaciones, entre los más útiles y bellos, los teoremas de Gärtner-Ellis §2.3.1, Dawson-Gärtner §2.5.1 y Principio de contracción §2.2.1, que a lo largo del capítulo 3 son la base para probar que el proceso Poisson generalizado (ver §1.2) cumple el principio de grandes desviaciones y a su vez, a través del Principio de contracción, el modelo de riesgo propuesto cumpla el principio de grandes desviaciones. Con este panorama, en el capítulo 4 presentamos finalmente la probabilidad de ruina del modelo y la trayectoria más probable a la ruina, ya que puede pensarse a la ruina como un evento raro en términos de la teoría de grandes desviaciones y con ello se pueden aprovechar los resultados del capítulo 3. Aunque se puede encontrar material en Grandes Desviaciones en esta tesis, el objetivo aquí es presentar esta teoría como una herramienta práctica y tratable para el problema de la ruina en cuestión.

Capítulo 1

Generalizaciones al modelo clásico: Modelo de prima dependiente que considera retrasos en el pago de la reclamación.

El proceso de riesgo clásico se define como un proceso estocástico $\{X_0(t)\}$ de la forma

$$X_0(t) = u + bt - C(t), \quad t > 0,$$

donde $u > 0$ es el capital inicial, $b > 0$ representa los ingresos obtenidos por las primas y

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$$

es el proceso de reclamaciones, donde $\{N_t\}$ es un proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$, $\{Z_n\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, no negativas y $\{N(t), Z_n : t \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ son independientes. Además se requiere que $\mathbb{E}e^{uZ_1} < \infty$ para algún $u > 0$.

Todas las variables aleatorias en este trabajo son definidas en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Para obtener modelos más realistas, el modelo clásico de riesgo se ha generalizado en varias direcciones. En este capítulo se muestran algunas de ellas y posteriormente el modelo que

en particular es de nuestro interés.

§1.1. Proceso de prima dependiente

El caso donde las primas dependen de la reserva actual ha sido ya considerado por muchos autores, por ejemplo Djehiche [5], Asmussen y Nielsen [9]. Todos estos autores consideran el proceso de riesgo de la forma

$$X_1(t) = u + \int_0^t b(X_1(s))ds - C(t), \quad t > 0,$$

donde b es una función medible (ver apéndice §A.2)no negativa. En el trabajo de Amussen y Nielsen [9] se prueba una desigualdad (la de Lundberg) para la probabilidad de ruina en un horizonte infinito y también se presenta una aproximación para esta.
La falta de regulación en el sector asegurador estadounidense daba pauta a compañías con poca responsabilidad social a defraudar a sus clientes, manteniendo una reserva muy por debajo de lo necesario para hacer frente a sus obligaciones, lo que llevó a intentar diferentes modelados para resolver este problema. Hacer la prima depender de la reserva es uno de ellos. Aunque los cálculos para las primas siempre estaban basados en el siniestro que se aseguraba, el riesgo de que la compañía se fuera a la ruina hacía que muchos modelos, aunque bien calculados en términos de la frecuencia en que ocurrían los siniestros, seguían sin asegurarle al contratante que su póliza pudiera ser ejercida en el momento necesario. De este modo se buscó flexibilizar las primas permitiendo estimar sus riesgos. Así que se centraron en modelos que consideraran este fenómeno, haciendo así a la prima de la póliza depender de la cantidad en reserva de la compañía.

§1.2. Retraso en el pago de la reclamación: El modelo Poisson generalizado

Otro tipo de generalizaciones del modelo clásico toman en cuenta el retraso en el pago de las reclamaciones, para modelar como un caso particular los Siniestros Ocurridos pero No Reportados. Muchos trabajos que describen este fenómeno proponen el modelo en términos del Poisson generalizado, véase [9], Nielsen y Asmussen, por ejemplo.

La influencia de factores macroeconómicos en la reserva de una compañía de seguros ha sido estudiada por varios autores. Muchos de ellos supusieron que se presentaba el pago de la reclamación al momento de la misma, aunque de hecho siempre existe un tiempo de defase entre ambos eventos. Desde el punto de vista económico, cuando ni la tasa de inflación ni la de interés tienen algún impacto directo sobre la reserva de la compañía como en el modelo clásico, el defase parece no tener impacto sobre la reserva.

Como es usual, las reclamaciones son contadas por un proceso $\{N_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, el cual consideramos un Poisson homogéneo con parámetro $\lambda > 0$. Los momentos de ocurrencia de las reclamaciones subsecuentes son representadas por T_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es decir, $T_n = \{\text{ínf}\, t \geq 0 \quad ; \quad N(t) = n\}$ con $T_0 = 0$ como el evento $\{T_n \leq t\}$ es equivalente al evento $\{N(t) \geq n\}$, $T \sim G(n, \frac{1}{\lambda})$ y los tiempos interarribo de las reclamaciones son representados por $U_n \quad, n \in \mathbb{N}$, es decir $U_n = T_n - T_{n-1}$. En trabajos previos como el de Boogaert y Haezendonck se define un proceso aleatorio más general $\{S_t^H : t \in \mathbb{R}_+\}$

$$S_t^H = \sum_{n=1}^{N_t} H(t - T_n, Z_n) \tag{1.1}$$

donde $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de vectores aleatorios en $\mathbb{R}^d$ es independiente del proceso de conteo $\{N_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ y H

$$(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to H(t, z) \in \mathbb{R}_+.$$

es una función medible tal que para cada z fija $H(t, z)$ es una función de t no decreciente y càdlàg (continua por la derecha y con límites por la izquierda). Este es el modelo que considereramos para las reclamaciones.

§1.3. El modelo

Combinando las ideas presentadas en las secciones anteriores, un proceso que generalice en el sentido que considere a la prima como una función de la reserva y al mismo tiempo que considere el retraso en el pago de la reclamación, nos lleva a proponer un proceso de la siguiente forma:

$$X(t) = u + \int_0^t b(X(s))ds - S(t), \quad t > 0, \tag{1.2}$$

donde $S = S_t^H$, es un proceso Poisson generalizado como en §1.2.

Este modelo es más realista en estas dos direcciones, pero tiene aun la ventaja de ser trabajable con herramientas de la teoría de grandes desviaciones. En el capítulo 2 se detallarán más a fondo las siguientes funciones, puesto que se desea describir a $S(t)$ y posteriormente a $X(S)$ en el sentido de grandes desviaciones. Empezamos por definir; con la misma notación:

$$\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) = \log \mathbb{E}[e^{\theta H(\infty,Z_1)}], \quad \Lambda(\theta) = \lambda(e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta)} - 1)$$

donde $H(\infty, Z_1) = \lim_{t\to\infty} H(t, Z_1)$ y Λ^* es la transformada de Legendre de Λ:

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}[\theta x - \Lambda(\theta)].$$

A continuación presentaremos las hipótesis necesarias:
(1) Existe $L > 0$ tal que $|b(x) - b(y)| \leq L|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. En otras palabras, b es Lipschitz continua.
(2) $\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$ y en consecuencia $\Lambda(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$. Esta condición significa que la cola de $H(\infty, Z_1)$ se va a cero más rápido que cualquier tasa exponencial y es útil para las grandes desviaciones.
(3) Existe $B > 0$ tal que $\lim_{x\to\infty} b(x) = B$. Esto nos da un comportamiento asintótico acotado para b.
(4) $\bar{b} = \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > \Lambda'(0)$. Como por ende $B > \Lambda'(0)$, esta condición corresponde a la clásica de ganancia neta. La interpretación de la condición de ganancia neta es intuitiva en el sentido que por cada unidad de tiempo, el tamaño esperado de la reclamación tiene que ser 'más pequeño' que el de la prima. En otras palabras, el flujo de efectivo (los ingresos debido a la prima menos los egresos debido a las reclamaciones) debe ser en promedio positivo.

Como la esperanza de un proceso estocástico es relativamente poco informativa con respecto a las fluctuaciones del proceso, no significa que bajo la condición (4) se evite enteramente la ruina, es por ello de interés calcular la probabilidad de ruina, lo hacemos en el capítulo 4.

Bajo estas hipótesis se muestra que el modelo propuesto cumple el principio de grandes desviaciones.

Capítulo 2

Grandes desviaciones

En este capítulo presentamos las nociones y teoremas de grandes desviaciones. Se introduce primero el principio de grandes desviaciones, qué se pretende describir con este principio y cómo se relaciona con la ruina. Posteriormente se prueba el teorema de Gärtner-Ellis, el cual presenta un principio de grandes desviaciones para familias de medidas de probabilidad indexadas a los naturales. Este resultado se extiende a conjuntos no numerables a través del teorema de Dawson-Gärtner.

§2.1. Preliminares

A continuación se presentará la notación y algunas definiciones importantes para grandes desviaciones en probabilidad y en convexidad. Primero para ello se aclararan algunas notaciones básicas. Las definiciones de objetos aquí presentados se encuentran en el Apéndice.

Notación 1. *Sea A un conjunto en un espacio topológico $\mathcal{X}$. Se denota como A^o al interior del conjunto y como ∂A a la frontera de dicho conjunto.*

Definición §2.1.1. *Sea*

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Se define el dominio esencial de la función f como el conjunto

$$\mathcal{D}_f = \{t \in \mathbb{R}^d : f(t) < \infty\}.$$

Sea Z_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, un vector en $\mathbb{R}^d$ definido en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P})$.

Definición §2.1.2. *Función Generadora de Momentos*
Denotaremos a la función generadora de momentos (también conocida como transformada de Laplace) de la siguiente manera:

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\, e^{\langle t, Z_n \rangle}, \quad t \in \mathbb{R}^d,\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{si la esperanza existe.}$$

Notación 2. *Se denota como* $\Lambda_n(t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *a la función*

$$\Lambda_n(t) = \begin{cases} \log \varphi_n(t) & \textit{si la esperanza existe} \\ \infty & \textit{si no existe} \end{cases}$$

conocida como el logaritmo de la función generadora de momentos.

Definición §2.1.3. *Para cada* $t \in \mathbb{R}^d$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *defínase* $\Lambda(\cdot)$ *como el límite*

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Lambda_n(nt) & \textit{si existe} \\ \infty & \textit{si el límite no existe} \end{cases}$$

Observación. Si $Z_1, Z_2, \ldots$ son idénticamente distribuidas entonces $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \cdots = \Lambda_n$, pero en otro caso Λ ya no tiene por qué ser el logaritmo de una generadora.

Definición §2.1.4. *Transformada de Legendre, Fenchel-Legendre o conjugada convexa.*
Se define Λ^**, la transformada de Legendre de* Λ*, como*

$$\Lambda^*(x) = \sup_{t \in \mathcal{D}_\Lambda} [\langle x, t \rangle - \Lambda(t)], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Notación 3. *Para un conjunto* S*, se denota como* $\Lambda^*(S) = \begin{cases} \inf_{x\in S} \Lambda^*(x) & \textit{si } S \subset \mathbb{R}^d, \\ \infty & \textit{si } S = \emptyset \end{cases}$

Definición §2.1.5. *Un punto* $x \in \mathbb{R}^d$ *es llamado expuesto para* Λ *si existe un punto* $t \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\Lambda^*(y) - \Lambda(x)^* > \langle y - x, t \rangle \quad \forall y \neq x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Este t es llamado "el plano de exposición" para x*, pues define un plano. Es abuso de notación, pero también se llama punto expuesto para* x*. Al conjunto de tales puntos t se le denota como* $\mathcal{F}$*.*

§2.2. Principios de grandes desviaciones y contración

Sea $Z_n = X_1 + \cdots + X_n \quad n \in \mathbb{N}$ con $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$. Se puede pensar a los eventos $\{Z_n \geq (\mu + a)n\} \quad a > 0$, como eventos 'de valores grandes', pues Z_n se 'aleja' de la media μ por una cantidad proporcional a n, esta desviación de la media queda fuera de lo que se espera con normalidad, es decir, estos eventos son raros en términos de ocurrencia, así que se desea medir la rareza de estos eventos. Se propone para ello la siguiente función:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \geq (\mu + a)n) = -I(a) < 0, \quad a > 0,$$

como una tasa a la cual esto sucede. El empleo del logaritmo es en realidad arbitrario, y se encuentra útil para una comparación porque se espera que esta probabilidad tienda exponencialmente a cero respecto a n. Como lo que se busca medir es cómo en promedio cada X_i se desvia una cantidad a de la media, se divide entre n. Se busca eliminar esta dependencia con n y describir un comportamiento límite. Se hace una caraterización a través de cotas asintóticas superior e inferior, pues brindan información acerca de este comportamiento aún cuando no se es posibe encontrar dicho límite.

Definición §2.2.1. *Función de tasa*
Defínase una función de tasa I como aquella $I : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ tal que sus conjuntos de nivel $\Psi_I(c) = \{x | I(x) \leq c\}$ son subconjuntos cerrados de $X \quad \forall c \in \mathbb{R}$. Llamamos función de tasa buena aquella que sus conjuntos de nivel son compactos.

Definición §2.2.2. *Principio de grandes desviaciones*
Se dice que una familia de medidas de probabilidad $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ definidas en el mismo espacio satisface el principio de grandes desviaciones con función de tasa I si

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(C) \leq -I(C) \quad \forall C \subset \mathcal{X} cerrado \tag{2.1}$$

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(O) \geq -I(O) \quad \forall O \subset \mathcal{X} abierto \tag{2.2}$$

con I una función de tasa.

Muchas veces $\frac{1}{n}$ hará la función de ϵ cuando $\mu_\epsilon(\cdot) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in \cdot) = \mu_n(\cdot)$ y se considerará el límite cuando n tiende a infinito.

Definición §**2.2.3.** *Principio débil de grandes desviaciones*

a) Para cada $\alpha < \infty$ *y cada conjunto* Γ *medible con* $\Gamma \subset \Psi_I(\alpha)^c$ *(* $\Psi_I(\alpha)^c$ *es el complemento del conjunto de nivel)*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq -\alpha. \tag{2.3}$$

b) Para cualquier $x \in \mathcal{D}_I$ *y cualquier conjunto medible* Γ *con* $x \in \Gamma^o$,

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \geq -I(x). \tag{2.4}$$

Definición §**2.2.4.** *Una familia de medidas de probabilidad* $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ *en* $\mathcal{X}$ *es* ***exponencialmente tensa*** *si para cada* $\alpha < \infty$, *existe un conjunto compacto* $K_\alpha \subset \mathcal{X}$ *tal que*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon \left(K_\alpha^c\right) \leq -\alpha.$$

Si no se especifica otra cosa, $\mathcal{X}$ pertenece a los borelianos con la topología usual. Como se trabajará con cotas asintóticas al logaritmo de la generadora de momentos, se encuentra de valiosa ayuda el siguiente lema en la prueba de varios teoremas de grandes desviaciones.

Lema §**2.2.1.** *Sea* N *un entero fijo. Entonces, para cada* $a_\epsilon^i \geq 0$,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \left(\sum_{i=1}^{N} a_\epsilon^i \right) = \max_{i=1,\ldots,N} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log a_\epsilon^i.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i \leq N \cdot \max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i \\
\Rightarrow \quad & \left(\sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i \right)^\epsilon \leq \left(N \cdot \max_{i=1,\ldots,N} (a_\epsilon^i) \right)^\epsilon \\
\Rightarrow \quad & \left(\epsilon \log \sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i \right) \leq \log \left(N^\epsilon \left(\max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i \right)^\epsilon \right) \\
\Rightarrow \quad & \left(\epsilon \log \sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i \right) \leq \epsilon \log(N) + \epsilon \log \max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i \\
\Rightarrow \quad & \left(\epsilon \log \sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i \right) - \epsilon \log \max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i, \leq \epsilon \log(N)
\end{aligned}
$$

como se cumple para toda ϵ, entonces

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \limsup_{\epsilon\to 0}\left(\epsilon \log \sum_{i=n}^{N} a_\epsilon^i\right) - \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i, \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log(N)$$

y como N es fija, $\epsilon \log N$ tiende a cero cuando ϵ tiende a cero, y por lo tanto

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log\left(\max_{i=1,\ldots,N} a_\epsilon^i\right) = max_{i=1,\ldots,N} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log(a_\epsilon^i).$$

Lema §2.2.2. *Sea $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ una familia exponencialmente tensa.*
a)Si la cota superior como en 2.3 se cumple para alguna $\alpha < \infty$ y todo subconjunto compacto de $\Psi_I(\alpha)^c$, entonces también se cumple para todo conjunto medible Γ con $\bar{\Gamma} \subset \Psi_I(\alpha)^c$. En particular, si $B_\mathcal{X} \subset B$ y la cota superior 2.1 se cumple para conjuntos compactos, entonces también se cumple para conjuntos cerrados.
b)Si la cota inferior 2.4 (la cota inferior en el caso $B_\mathcal{X} \subset B$) se cumple para todo conjunto abierto medible, entonces $I(\cdot)$ es una función de tasa buena.

Esto significa que cuando una familia de medidas de probabilidad exponencialmente tensa satisface el principio de grandes desviaciones débil con función de tasa $I(\cdot)$, entonces I es una función de tasa buena y el principio de grandes desviaciones también se cumple.

Demostración. a) Para establecer 2.3 se toma un conjunto $\Gamma \in \mathcal{B}$ y $\alpha < \infty$ tal que $\bar{\Gamma} \subset \Psi_I(\alpha)^c$. Sea K_α un conjunto compacto como en la definición §2.2.4, nótese que ambos $\bar{\Gamma}\cap K_\alpha \in \mathcal{B}$ y que $K_\alpha^c \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$\mu_\epsilon(\Gamma) \leq \mu_\epsilon(\bar{\Gamma} \cap K_\alpha) + \mu_\epsilon(K_\alpha^c).$$

Nótese que $\bar{\Gamma} \cap K_\alpha \subset \Psi_I(\alpha)^c$, entonces $\inf_{x\in\bar{\Gamma}\cap K_\alpha} I(x) \geq \alpha$. Combinando la desigualdad de la definición §2.2.4, la cota superior 2.3 para el conjunto compacto $\bar{\Gamma} \cap K_\alpha$ y el lema §2.2.1, resulta en $\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq -\alpha$. (b)Aplicando la cota inferior 2.4 al conjunto abierto $K_\alpha^c \in \mathcal{B}$, se concluye de la desigualdad de la definición §2.2.4 que el $\inf_{x\in K_\alpha^c} I(x) > \alpha$. Por lo tanto $\Psi_I(\alpha) \subset K_\alpha$ deriva en la compacidad del conjunto de nivel cerrado $\Psi_I(\alpha)$. Como esto se satisface para cualquier $\alpha < \infty$, se sigue que $I(\cdot)$ es una función de tasa buena.

Se recuerdan al lector las cotas de Chernoff:

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq e^{-ta}\varphi(t) \quad \forall t > 0$$

$$\mathbb{P}\{X \leq a\} \leq e^{-ta}\varphi(t) \quad \forall t < 0$$

donde $\varphi(t)$ es la generadora de momentos de X.

Teorema §2.2.1 (Principio de Contracción)**.** *Sea $\{Q_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ una familia de medidas de probabilidad en un espacio $\mathcal{X}$ que satisface el principio de grandes desviaciones. Sean*

$$\begin{cases} \mathcal{Y} & \text{un espacio métrico completo,} \\ T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} & \text{un mapeo continuo,} \\ \mu_\epsilon = Q_\epsilon \circ T^{-1} & \text{una medida de probabilidad imagen} \end{cases}$$

Entonces, $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ satisface el principio de grandes desviaciones en $\mathcal{Y}$ con función de tasa buena J dada por $J(y) = \operatorname{ínf}_{x\in\mathcal{X}:T(x)=y} I(x)$, con la convención de que $\operatorname{ínf}_{\emptyset} I = \infty$.

Demostración. Como T es continua , T^{-1} manda conjuntos abiertos en abiertos y cerrados en cerrados. Como $\{Q_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ satisface el principio de grandes desviaciones se sigue que para $C \subset \mathcal{Y}$ cerrado

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(C) &= \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log Q_\epsilon(T^{-1}(C)) \\ &\leq -I(T_{-1}(C)) \\ &= -\inf_{x\in T^{-1}(C)} I(x) \\ &= -\inf_{y\in C} \inf_{x\in T^{-1}(\{y\})} I(x) \\ &= -\inf_{y\in C} J(y) = -J(C). \end{aligned}$$

De manera análoga se tiene para $O \subset \mathcal{Y}$ abierto. Para probar que J es una función de tasa buena se muestra primero que

$$\mathcal{D}_I = \{x \in \mathcal{X} : I(x) < \infty\} \neq \emptyset$$

lo cual implica que el conjunto

$$D_J = \{y \in \mathcal{Y} : J(y) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Como I tiene conjuntos de nivel compactos debido a que imágenes continuas de compactos son conjuntos compactos, entonces J tiene conjuntos de nivel compactos. □

A lo largo de este capítulo la siguientes suposiciones serán esenciales para que una familia de probabilidades $\mu_n(\cdot)$, que no necesariamente sean la distribución de una suma de n variables aleatorias idénticamente distribuidas, cumplan el principio de grandes desviaciones.

Suposición §2.2.1. *Supóngase que* Λ *cumple:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Lambda_n(nt) = \Lambda(t) \in [-\infty, \infty]$ *y en particular dicho límite existe.*

2. $0 \in int(\mathcal{D}_\Lambda), \quad con \quad \mathcal{D}_\Lambda = \{t \in \mathbb{R}^d | \Lambda(t) < \infty\}.$

Lema §2.2.3. *Supóngase §2.2.1. Entonces:*
$\Lambda(\cdot)$ *es convexa,* $\Lambda(\cdot) > -\infty$ *y* $\Lambda^*(\cdot)$ *es una función de tasa buena y es convexa.*

Demostración. Como Λ_n es convexa para toda n, entonces también Λ es convexa. Ya que $\Lambda(0) = 0$, por convexidad y en combinación con la Suposición §2.2.1 implica que $\Lambda > -\infty$. Λ^* es semicontinua inferior y convexa porque es el supremo de funciones lineales. Como $0 \in \mathcal{D}^o_\Lambda$ existe $\delta > 0$ tal que $B_{2\delta}(0) \subset \mathcal{D}^o_\Lambda$. Ya que Λ es convexa, es continua en $\mathcal{D}_\Lambda$ y entonces se tiene que $\sup_{t\in B_\delta(0)} \Lambda(t) = c < \infty$. Por lo tanto

$$\Lambda^*(x) \geq \sup_{t\in B_\delta(0)} [\langle x, t\rangle - \Lambda(t)] \geq \delta|x| - c.$$

En consecuencia, Λ^* tiene conjuntos de nivel acotados.

§2.3. Teorema de Gärtner-Ellis

Teorema §2.3.1. *Gärtner-Ellis.*
Sea $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de vectores aleatorios en* $\mathbb{R}^d$*. Supóngase §2.2.1, es decir:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Lambda_n(nt) = \Lambda(t) \in [-\infty, \infty] \quad$ *existe,*

2. $0 \in \mathcal{D}^o_\Lambda, \quad con \quad \mathcal{D}_\Lambda = \{t \in \mathbb{R}^d | \Lambda(t) < \infty\}.$

Sea $\mu_n(\cdot) = \mathbb{P}(S_n \in \cdot)$*. Entonces,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(C) \quad \leq \quad -\Lambda^*(C) \quad \forall C \subset \mathbb{R}^d \text{ cerrado}, \tag{2.5}$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(O) \quad \geq \quad -\Lambda^*(O \cap \mathcal{F}) \quad \forall O \subset \mathbb{R}^d \text{ abierto}. \tag{2.6}$$

donde $\mathcal{F}$ *es el conjunto de los puntos expuestos* t *tales que* $\Lambda(x) - \Lambda(y) > \langle x - y, t\rangle$*.*
Si además Λ *satisface las siguientes condiciones:*

a) Λ *es semicontinua inferiormente* *b)* Λ *es diferenciable en* $\mathcal{D}_\Lambda^o$

c) $\lim_{t\to\partial\mathcal{D}_\Lambda\,,t\in\mathcal{D}_\Lambda}|\nabla\Lambda(t)|=\infty$,

entonces $\mu_n(\cdot)$ *satisface el principio de grandes desviaciones en* $\mathbb{R}^d$ *con función de tasa buena* $\Lambda^*(\cdot)$.

Demostración. Prueba del Teorema §2.3.1
(2.5) Cota superior:
Primero se probará para conjuntos compactos y después se extenderá a conjuntos cerrados probando la tensión exponencial de μ_n (véase la Definición §2.2.4).

A lo largo de esta sección será de utilidad la siguiente definición

Definición §2.3.1. *Sea* $\delta>0$. *Para* $x\in\mathbb{R}^d$, *defínase*

$$\Lambda_\delta^*(x)=\min\left\{\Lambda^*(x)-\delta,\frac{1}{\delta}\right\}.$$

Sea $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ compacto. Tómese $\delta>0$, entonces para cada $x\in\Gamma$ existe $t_x\in\mathbb{R}^d$ tal que

$$\sup_t[\langle x,t\rangle-\Lambda(t)]\geq\langle x,t_x\rangle-\Lambda(t_x)>\sup_t[\langle x,t\rangle-\Lambda(t)]-\delta\geq\Lambda_\delta^*(x).$$

Elíjase $\rho_x>0$ tal que $\rho_x|t_x|\leq\delta$ y sea

$$\gamma_x=\{y:|x-y|<\rho_x\}.$$

De ahí que

$$\inf_{y\in\gamma_x}\langle t_x,x-y\rangle\leq\rho_x|t_x|,$$

es decir que

$$\langle t_x,x\rangle-\inf_{y\in\gamma_x}\langle t_x,y\rangle\leq\rho_x|t_x|.$$

Entonces, para cualquier $x\in\Gamma$,

$$-\inf_{y\in\gamma_x}\langle t_x,y\rangle\leq\rho_x|t_x|-\langle t_x,x\rangle\leq\delta-\langle t_x,x\rangle$$

por lo tanto,

$$\inf_{y\in\gamma_x}\langle y-x,t_x\rangle\geq-\delta.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\mu_n(\gamma_x) &= \mathbb{P}(Z_n \in \gamma_x)\\ &\leq \mathbb{P}(\langle Z_n - x, t_x\rangle \geq -\delta)\\ &\leq e^{\delta n}\mathbb{E}(e^{n\langle Z_n - x, t_x\rangle})\\ &= e^{\delta n}\varphi_n(nt_x)e^{-n\langle x, t_x\rangle}.\end{aligned}$$

Como $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ es compacto, la cubierta formada por $\{\gamma_x\}_{x\in\Gamma}$ tiene una subcubierta finita $\{\gamma_{x_i}\}_{i=1,\ldots,k}$. Usando el Lema §2.2.1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log(\mu_n(\Gamma)) &\leq \frac{1}{n}\log\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_n(\gamma_{x_i})\right)\\ &\leq \frac{1}{n}\log(N \max_{i=1,\ldots,N}\mu_n(\gamma_{x_i}))\\ &\leq \frac{1}{n}\log(N) + \frac{1}{n}\max_{i=1,\ldots,N}(\delta n + \log\varphi_n(nt_{x_i}) - n\langle x_i, t_{x_i}\rangle) \quad \text{por (2.7)}\\ &\leq \frac{1}{n}\log(N) + \delta - \min_{i=1,\ldots,N}(\langle x_i, t_{x_i}\rangle - \frac{1}{n}\log\varphi_n(nt_{x_i}))\end{aligned}$$

Haciendo n tender a infinito se elimina la parte que depende de N pues tiende a cero

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(\Gamma) &\leq \delta - \min_{i=1,\ldots,N}(\langle x_i, t_{x_i}\rangle - \Lambda(t_{x_i}))\\ &\leq \delta - \min_{i=1,\ldots,N}\Lambda^*_\delta(x_i)\\ &\leq \delta - \Lambda^*_\delta(\Gamma).\end{aligned}$$

Cuando δ tiende a cero se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(\Gamma) \leq -\Lambda^*(\Gamma). \quad \square$$

Ahora se mostrará la tensión exponencial de $\{\mu_n\}$. Se sabe que todo conjunto C cerrado y acotado en $\mathbb{R}^d$ es compacto, en particular $C \cap [-N, N]^d$ es compacto para toda $N > 0$. Entonces si se combinan la última desigualdad obtenida y el Lema §2.2.1, se tiene:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(C) \leq \max\{-\Lambda^*(C\cap[-N,N]^d), -M_N\} \quad \forall N > 0,$$

donde $-M_N = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\mu_n(\mathbb{R}^d \diagdown [-N,N]^d)$. Así que se reduce a probar que el

$$\lim_{N\to\infty} M_N = \infty,$$

ya que por otro lado

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda^*(C\cap[-N,N]^d) = \Lambda^*(C).$$

Entiéndanse $\mathbf{e^1},\ldots,\mathbf{e^d}$ como los vectores unitarios en $\mathbb{R}^d$. Como $0\in\mathcal{D}^o_\Lambda$ por la Hipótesis §2.2.1, existe $\delta>0$ tal que $\Lambda(-\delta\mathbf{e^i})<\infty$ y $\Lambda(\delta\mathbf{e^i})<\infty$ para toda $i=1,\ldots,d$. Las cotas de Chernoff nuevamente son útiles y se tienen así dos desigualdades que se cumplen para toda i:

$$\mathbb{P}(\langle Z_n,\mathbf{e^i}\rangle \le -N) \le e^{-n\delta N}\varphi_n(-n\delta\mathbf{e^i}),\ \text{y}$$

$$\mathbb{P}(\langle Z_n,\mathbf{e^i}\rangle \ge N) \le e^{-n\delta N}\varphi_n(n\delta\mathbf{e^i}).$$

Aplíquese nuevamente el Lema §2.2.1,

$$\begin{aligned}
-M_N = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d) \ &\le\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}_n(\exists i\in\{1,\ldots,d\}|Z_n^i\notin[-N,N])\\
&\le\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{d}(\mathbb{P}(Z_n^i\le -N)+\mathbb{P}_n(Z_n^i\ge N))\\
&\le\ -\delta N + \max_{i=1,\ldots,d}\max\{\Lambda(-\delta\mathbf{e^i}),\Lambda(\delta\mathbf{e^i})\}.
\end{aligned}$$

Hágase N tender a infinito:

$$\lim_{N\to\infty}\max[-\Lambda^*(C\cap[-N,N]^d), -M_N] = -\Lambda^*(C)$$

por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(C)\le -\Lambda^*(C).$$

(2.6) Cota inferior (cota inferior del principio de grandes desviaciones restringida al conjunto de puntos expuestos):

Sea $B_\epsilon(x)$, la bola de radio ϵ con centro en x. Basta con probar que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(B_\epsilon(x))\ge -\Lambda^*(x)\quad \forall x\in\mathcal{F},$$

pues de hecho, para cualquier conjunto abierto O se tiene que

$$\mu_n(O) \geq \mu_n(B_\epsilon(x)) \quad \forall x \in O \cap \mathcal{F} \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0(x).$$

Se recuerda que $\mathcal{F}$ es la notación para el conjunto de los puntos expuestos. Sea $x \in \mathcal{F}$, y sea $\eta \in \mathcal{D}_\Lambda^o$ un plano de exposición para x. Entonces $\varphi_n(n\eta) < \infty$ para n lo suficientemente grande, por ello se puede definir una nueva medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ en términos de μ de la siguiente manera:

$$\frac{d\tilde{\mu}_n}{d\mu_n}(y) = \frac{1}{\varphi_n(n\eta)} e^{n\langle y,\eta\rangle}, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Se verifica fácilmente que $\tilde{\mu}_n$ es, en efecto, una medida de probabilidad. El argumento del cambio de medida de la original a una nueva medida, es una técnica muy utilizada en esta teoría, parece un truco pero en realidad es más que eso, es decir que el evento raro se convierte en uno típico gracias a la "dirección" en la que se modifica μ_n. Una desviación no se produce de manera arbitraria, sino más bien "en el modo más probable" y esto se refleja en las funciones tasa. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log \mu_n(B_\epsilon(x)) &= \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} \mu_n(dy) \\
&= \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) + \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} e^{-n\langle y,\eta\rangle} \tilde{\mu}_n(dy) \\
&= \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) + \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} e^{-n\langle y+x-x,\eta\rangle} \tilde{\mu}_n(dy) \\
&= \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) + \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} e^{-n\langle x,\eta\rangle} e^{-n\langle y-x,\eta\rangle} \tilde{\mu}_n(dy) \\
&= \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) - \langle x, n\rangle + \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} e^{-n\langle y-x,\eta\rangle} \tilde{\mu}_n(dy) \\
&\geq \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) - \langle x, n\rangle + \frac{1}{n}\log \int_{B_\epsilon(x)} e^{-n\langle \epsilon,\eta\rangle} \tilde{\mu}_n(dy) \\
&\geq \frac{1}{n}\log \varphi_n(n\eta) - \langle x, \eta\rangle - \epsilon|\eta| + \frac{1}{n}\log \tilde{\mu}_n(B_\epsilon(x))
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad utiliza que $|y-x| \leq \epsilon$ para $y \in B_\epsilon(x)$. Cuando se aplican los límites correspondientes llegamos a que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \mu_n(B\epsilon(x)) \geq [\Lambda(\eta) - \langle x, \eta\rangle] + \lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \tilde{\mu}_n(B_\epsilon(x)) \tag{2.7}$$

Sea $\tilde{\varphi}_n$ la notación para la función generadora de momentos asociada con $\tilde{\mu}_n$. Se tiene entonces la relación

$$\tilde{\varphi}_n(nt) = \frac{\varphi_n(n(t+\eta))}{\varphi_n(n\eta)}$$

y así $\tilde{\varphi}_n$ §2.2.1 (1)

$$\tilde{\Lambda}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\varphi}_n(nt) = \Lambda(t+\eta) - \Lambda(\eta), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d,$$

y como consecuencia de la anterior identidad, $0 \in \mathcal{D}^o_{\tilde{\Lambda}}$ por lo tanto también cumple §2.2.1(2). Incluso se tiene la siguiente relación entre $\tilde{\Lambda}^*$ y Λ^*:

$$\tilde{\Lambda}^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}^d}[\langle x,t\rangle - \tilde{\Lambda}(t)] = \Lambda^*(x) - \langle x,\eta\rangle + \Lambda(\eta). \tag{2.8}$$

Por el lema §2.2.3 $\tilde{\Lambda}^*$ es una función de tasa y por ende se puede aplicar (2.5) a $(\tilde{\mu}_n)$ para así obtener

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_n(\mathbb{R}^d - \backslash B_\epsilon(x)) \leq -\tilde{\Lambda}^*(\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)) \quad \forall\epsilon > 0$$

Una función semicontinua inferiormente alcanza un mínimo en cada conjunto compacto no vacío. Como $\tilde{\Lambda}$ satisface las hipótesis del Lema §2.2.3, entonces

$$\tilde{\Lambda}^*(\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)) = \tilde{\Lambda}^*(x_0) \quad \text{para algún}\, x_0 \in B_\epsilon(x).$$

Como $x \in \mathcal{F}$ y $\eta \in \mathcal{D}^o_\Lambda$ es un plano de exposición para x, se tiene por la relación (2.8)

$$\tilde{\Lambda}^*(x_0) = \Lambda^*(x_0) - \langle x_0,\eta\rangle + \Lambda(\eta),$$

y entonces,

$$\tilde{\Lambda}^*(x_0) =\geq [\Lambda^*(x_0) - \langle x_0,\eta\rangle] - [\Lambda^*(x) - \langle x,\eta\rangle] > 0,$$

por lo tanto $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_n(\mathbb{R}^d \setminus B_{\epsilon(x)}) < 0$, para toda $\epsilon > 0$ ya que $\tilde{\mu}_n(\mathbb{R}^d) = 1$ para toda n. Esto implica que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_n(B_\epsilon(x)) = 0.$$

Entonces, de la ecuación (2.7) :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(B\epsilon(x)) \geq [\Lambda(\eta) - \langle x,\eta\rangle] + \lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{\mu}_n(B_\epsilon(x))$$

se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(B_\epsilon(x))\geq -\Lambda^*(x).$$

c)Extensión a cualquier conjunto abierto.

Definición §2.3.2. *Sea $A\subset\mathbb{R}^d$ no vacío y convexo. Entonces el* ***interior relativo*** *de A se define como*

$$ri(A)=\{x\in A:\forall y\in A\quad\exists\varepsilon>0 \text{ tal que } x-\epsilon(y-x)\in A\}.$$

Nótese que $ri(A)\supset A^\circ$. Si $A=\{x\}$, entonces $A^\circ=\emptyset$, mientras que $ri(A)=A$. Bastará con mostrar que $\Lambda^*(O\cap ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*}))\leq\Lambda^*(O)$.
Sea $y\in O\cap ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$ y z en $ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$. Entonces para $\delta>0$ suficientemente pequeña,

$$\delta z+(1-\delta)y\in O\cap ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*}).$$

Se sigue que

$$\Lambda^*(O\cap ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})\leq\lim_{\delta\to 0}\Lambda^*(\delta z+(1-\delta)y)\leq\Lambda^*(y),$$

donde la última desigualdad utiliza que Λ^* es continua en $ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$ y convexa en $\mathbb{R}^d$. Tomando ínfimo sobre $y\in O\cap ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$.

Por lo tanto se cumple el principio de grandes desviaciones sobre cualquier conjunto abierto para funciones Λ semicontinua inferiormente, diferenciable y esencialmente suave. □

Teorema §2.3.2 (Principio de contracción inversa)**.** *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ espacios topológicos de Hausdorff. Supóngase que $g:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ es una biyección continua, y que $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ es una familia medidas de probabilidad exponencialmente tensa en $\mathcal{Y}$. Si $\{\mu_\epsilon\circ g^{-1}\}$ satisface el principio de grandes desviaciones con función de tasa $I:\mathcal{X}\mapsto[0,\infty]$, entonces $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ satisface el principio de grandes desviaciones con función de tasa buena $I'(\cdot)=I(g(\cdot))$.*

Demostración. Nótese que para cada $\alpha<\infty$, por la continuidad de g, el conjunto de nivel $\{y: I'(y)\leq\alpha\}=g^{-1}(\Psi_I(\alpha))$ es cerrado. Además $I'\geq 0$, y por lo tanto I' es una función de tasa. Como $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\geq 0}$ es una familia exponencialmente tensa es suficiente probar las desigualdades 2.3 y 2.4 con la función de tasa $I'(\cdot)$.
Cota superior: Sea $K\subset\mathcal{Y}$ un conjunto arbitrario y compacto. Aplíquese la cota superior del principio de grandes desviaciones para $\{\mu_\epsilon\circ g^{-1}\}_{\epsilon\geq 0}$ en el conjunto compacto $g(K)$ para

obtener

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(K) &= \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log[\mu_\epsilon\circ g^{-1}(g(K))]\\ &\le -\inf_{x\in g(K)} I(x)\\ &= -\inf_{y\in K} I'(y),\end{aligned}$$

lo cual es en efecto la cota superior para $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon\ge 0}$.
Cota inferior: Fíjese $y\in\mathcal{Y}$ con $I'(y)=I(g(y))=\alpha<\infty$ y una vecindad compacta G de y. Dado que $\{\mu_\epsilon\}$ es exponencialmente tensa, existe un conjunto compacto $K_\alpha\subset\mathcal{Y}$ tal que

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(K_\alpha^c)<-\alpha. \tag{2.9}$$

Debido a que g es una biyección $K_\alpha^c=g^{-1}\circ g(K_\alpha^c)$ y $g(K_\alpha^c)=g(K_\alpha)^c$. Ya que g es continua el conjunto $g(K_\alpha)$ es compacto y en consecuencia $g(K_\alpha)^c$ es un conjunto abierto. Entonces, la cota inferior del principio de grandes desviaciones para la familia $\{\mu_\epsilon\circ g^{-1}\}_{\epsilon\ge 0}$ resulta en

$$-\inf_{x\in g(K_\alpha^c)} I(x)\le\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(K_\alpha^c)<-\alpha.$$

Como $I(g(y))=\alpha$, y por la desigualdad anterior entonces se tiene que $y\in K_\alpha$. Ya que g es una biyección continua, es un homeomorfismo entre los conjuntos compactos K_α, por lo tanto el conjunto $g(G\cap K_\alpha)$ es una vecindad de $g(y)$ en $g(K_\alpha)\in\mathcal{X}$. Por ello existe una vecindad G' de $g(y)$ en $\mathcal{X}$ tal que

$$G'\subset g(G\cap K_\alpha)\cup g(K_\alpha)^c=g(G\cup K_\alpha^c),$$

donde la última igualdad se cumple porque g es una biyección. En consecuencia para cada $\epsilon>0$,

$$\mu_\epsilon(G)+\mu_\epsilon(K_\alpha^c)\ge\mu_\epsilon\circ g^{-1}(G'),$$

y por el principio de grandes desviaciones (que se cumple para $\{\mu_\epsilon\circ g^{-1}\}_{\epsilon\ge 0}$),

$$\begin{aligned}\max\{\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(G),\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(K_\alpha^c)\} &\ge \liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon\circ g^{-1}(G')\\ &\ge -I(g(y))\\ &= -I'(y).\end{aligned}$$

Debido a que $I'(y) = \alpha$, lo anterior y en combinación con la desigualdad §2.3, se tiene que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G) \geq -I'(y).$$

Como lo anterior se cumple para cada $y \in \mathcal{Y}$ y cada vecindad G de y, entonces se tiene la cota inferior.

Corolario 1. *Sea $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ una familia de medidas de probabilidad exponencialmente tensa en $\mathcal{X}$ con la topología τ_1. Si $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ satisface el principio de grandes desviaciones con respecto a una topología Hausdorff τ_2 en $\mathcal{X}$ que es más rudimentaria que τ_1 (ver apéndice §A.1), entonces el mismo principio de grandes desviaciones se cumple con respecto a la topología τ_1.*

Demostración. Se usa g como el encaje natural de $(\mathcal{X}, \tau_1)$ en $(\mathcal{X}, \tau_2)$, la cual es continua porque τ_1 es más fina que τ_2. Nótese que debido a la continuidad de g, las medidas $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$ están bien definidas como medidas de Borel (ver Apéndice §A.2) en (X, τ_2).

§2.4. Límites proyectivos

En esta sección veremos cómo extender el principio de grandes desviaciones de espacios 'pequeños' a un espacio más grande que coincide ser el límite proyectivo (ver apéndice §A.1) de los 'pequeños'. La motivación principal es aprovechar que se cumple el principio de grandes desviaciones en secuencias numerables de variables aleatorias en $\mathbb{R}^d$ mientras el cero pertenece al dominio esencial y el límite del logaritmo de la generadora de momentos existe (vease §2.3.1). Usamos la idea de que las distribuciones finitamente dimensionales que corresponden a la proyección de un proceso indexado al tiempo caracterizan a dicho proceso.

Un sistema proyectivo $(Y_j, p_{ij})_{i \leq j \leq J}$ consiste de espacios topológicos de Hausdorff $Y_{j\,j \in J}$ y mapeos continuos $p_{ij} : Y_j \to Y_i$ tales que $p_i j = p_{ij} \circ p_{jk}$ donde $i \leq j \leq k$.

Definición §2.4.1. *El **límite proyectivo** de este sistema, denotado por $\mathcal{X} = \varprojlim Y_j$, es el conjunto del espacio del producto topológico $Y = \prod_{j \in J} Y_j$, consistente de todos los elementos $x = (y_j)_{j \in J}$ para lo cual $y_i = p_{ij}(y_j)$ con $i \leq j$, equipado con la topología inducida por Y.*

§2.5. Teorema de Dawson-Gärtner

Teorema §2.5.1. *Sea $\mu_{\epsilon\epsilon\geq 0}$ una familia de medidas de probabilidad en $\mathcal{X}$, tal que para cualquier $j \in J$ la familia de medidas $\{\mu_\epsilon \circ p_j^{-1}\}_{\epsilon\geq 0}$ en $\mathcal{X}_j$ satisface grandes desviaciones con función de tasa buena $I_j(\cdot)$. Entonces, μ_ϵ satisface el principio de grandes desviaciones con función de tasa buena*

$$I(\mathbf{x}) = \sup_{j\in J} I_j(p_j(x)), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

Demostración. Al ser $I(\cdot)$ supremo de funciones no negativas es entonces no negativa. Demostraremos ahora que la función de tasa es efectivamente buena. Para cualquier $\alpha \in [0,\infty)$ y $j \in J$ recordemos que $\Psi_{I_j}(\alpha)$ es la notación para el conjunto de nivel compacto de I_j,es decir $\Psi_{I_j}(\alpha) = \{x_j : I_j(x_j) \leq \alpha\}$. Como para cualquier $i \leq j \in J, \quad p_{ij} : \mathcal{X}_j \to \mathcal{X}_i$ es un mapeo continuo (véase apéndice en la sección de topología),

$$\mu_\epsilon \circ p_i^{-1} = (\mu_\epsilon \circ p_j^{-1}) \circ p_{ij}^{-1},$$

usando el principio de contraccion se tiene que

$$I_i(x_i) = \inf_{x_j \in p_{ij}^{-1}(x_i)} I_j(x_j)$$

y alternativamente $\Psi_{I_i}(\alpha) = p_{ij}(\Psi_{I_j(\alpha)})$.

Por lo tanto,

$$\Psi_I(\alpha) = \prod_{j\in J} \Psi_{I_j}(\alpha).$$

Por el teorema de Tychonoff (ver apéndice), el límite proyectivo de subconjuntos compactos de $\mathcal{X}_j, j \in J$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{X}$.

Posteriormente mostraremos la desigualdad inferior con ideas distintas a las que se usan en Gärtner y Ellis (sin usar tensión exponencial) que es una técnica común en Grandes Desviaciones. Esta vez se aprovechará que bajo funciones continuas, en este caso las proyecciones, imágenes inversas de abiertos son también abiertos. (Ver por Dembo y Zeitouni[1])

Bastará con probar que para cada conjunto medible (ver apéndice §A.2) $A \subset \mathcal{X}$ y cada $x \in A^o$ existe $j \in J$ tal que

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) \geq -I_j(p_j(\mathbf{x})).$$

Como la colección $\{p_j^{-1}(U_j) | U_j \subset \mathcal{X}_j\}$ es abierta entonces es una base de la topología de

$\mathcal{X}$, existe una $j \in J$ y un conjunto abierto $U_j \subset \mathcal{X}_j$ tal que $\mathbf{x} \in p_j^{-1}(U_j) \subset A^o$. Entonces, por la cota inferior que se tiene de $\{\mu_\epsilon \circ p_j^{-1}\}$,

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log(\mu_\epsilon \circ p_j^{-1}(U_j)) \\ &\geq -\inf_{x \in U_j} I_j \\ &\geq -I_j(p_j(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Ahora se probará la cota superior. Sea $A \subset \mathcal{X}$ un conjunto medible y sea $A_j = p_j(\bar{A})$. Entonces, $A_i = p_{ij}(A_j)$ para cualquier $i \leq j$, implica que $p_{ij}(\bar{A}_j) \subseteq \bar{A}_i$ por que las p_{ij} son continuas. Por lo tanto $\bar{A} \subseteq \varprojlim \bar{A}_j$. Para probar la otra contención, se elije $\mathbf{x} \in (\bar{A})^c = (A^c)^o$. Como $(\bar{A})^c$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$, existe alguna $j \in J$ y un conjunto abierto $U_j \subseteq \mathcal{X}_j$ tal que $x \in p_j^{-1}(U_j) \subseteq (\bar{A})^c$. En consecuencia para este valor j, $p_j(\mathbf{x}) \in U_j \subseteq A_j^c$ lo cual implica que $p_j(\mathbf{x}) \notin \bar{A}_j$. Por lo tanto,

$$\bar{A} = \varprojlim \bar{A}_j.$$

Combinándose este resultado con el hecho de que el límite proyectivo (ver Apéndice) de $\Psi_{I_j}(\alpha)$ coincide con el conjunto de nivel de I, se tiene para cada $\alpha < \infty$,

$$\bar{A} \cap \Psi_I(\alpha) = \varprojlim(\bar{A}_j \cap \Psi_{I_j}(\alpha)).$$

Sea $\alpha < \inf_{x \in \bar{A}} I(x)$, para aquellas $\bar{A} \cap \Psi_I(\alpha) = \emptyset$. Entonces,

$\bar{A}_j \cap \Psi_{I_j}(\alpha) = \emptyset$ para alguna $j \in J$. Como $A \subseteq p_j^{-1}(\bar{A}_j)$, por el principio de grandes desviaciones que cumple $\{\mu_\epsilon \circ p_j^{-1}\}$,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon \circ p_j^{-1}(\bar{A}_j) \leq -\alpha.$$

Esta desigualdad se cumple para cada A medible y $\alpha < \infty$ tal que $\bar{A} \cap \Psi_I(\alpha) = \emptyset$. En consecuencia se tiene la cota superior del principio de grandes desviaciones para$\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$.

Capítulo 3

Grandes desviaciones en el modelo propuesto

En este capítulo probaremos que el modelo con prima dependiente de la reserva cumple el principio de grandes desviaciones, con el fin de encontrar posteriormente aproximaciones asintóticas a la probabilidad de ruina. Lo primero que se probará es una discretización del proceso Poisson generalizado y después con la ayuda de los teoremas anteriormente presentados se hace a un tiempo continuo.

§3.1. Grandes desviaciones para el proceso Poisson generalizado

El objetivo de esta sección es probar que el proceso Poisson generalizado satisface el principio de grandes desviaciones. Para este fin utilizaremos el teorema de Gärtner-Ellis y después extenderemos este resultado con el teorema de Dawson-Gärner gracias a un corolario que se desprende del teorema de contracción inverso. La mayoría del material en este capítulo se encuentra en los artículos de Ganesh, Macci y Torrisi [2], [3].
Con la notación y resultados que se han presentado en el Capítulo 2 se verificará que $(S(\alpha t_1), \ldots, (\alpha t_n))$ satisface el principio de grandes desviaciones, este como una discretización y rescalamiento del proceso de reclamaciones original (ver por ejemplo Asmussen y Nielsen [9]).

Para poder cumplir con la primera hipótesis del teorema de Gärtner-Ellis; se verifica primero que el ímite del logaritmo de la función generadora de momentos para esta discretización existe.

Lema §3.1.1. *El límite,*

$$\Lambda_{t_1\dots,t_n}(\theta_1\dots,\theta_n)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\log\mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{S(\alpha t_i)}{\alpha}\right)\right],$$

existe.

Veáse primero que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\theta_i S(\alpha t_i) &= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j=1}^{N(\alpha t_i)}H(\alpha t_i-T_j,Z_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)}H(\alpha t_i-T_j,Z_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\theta_i\sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)}H(\alpha(t_i-t_k)+\alpha t_k-T_j,Z_j).\end{aligned}$$

Tomando las esperanzas y condicionando al tamaño del salto en el proceso Poisson,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp\sum_{i=1}^{n}\theta_i S(\alpha t_i)] &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\sum_{i=k}^{n}\theta_i\sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)}H(\alpha(t_i-t_k)+\alpha t_k-T_j,Z_j)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\sum_{i=k}^{n}\theta_i\sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)}H(\alpha(t_i-t_k)+\alpha t_k-T_j,Z_j)\right]\right.\\ &\qquad\left.\Big|N(\alpha t_k)-N(\alpha t_{k-1})\right]\end{aligned}$$

Como T_j está uniformemente distribuido en $(\alpha t_{k_1},\alpha t_k)$ con $N(\alpha t_{k-1})+1\leq j\leq N(\alpha t_k)$ cuando se condiciona como en la última igualdad, entonces también se puede ver que (αt_k-T_j) se distribuye uniformemente en $(0,\alpha(t_k-t_{k-1}))$. Denotaremos por $U_j^{(k)}$ a la variable aleatoria que distribuye uniformemente sobre el intervalo anterior. Condicionamos con respecto al evento $N(\alpha t_k)-N(\alpha t_{k-1})=m$:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i \sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)} H(\alpha(t_i - t_k) + U_j^{(k)}, Z_j) \middle| N(\alpha t_k) - N(\alpha t_{k-1}) = m\right] \\
= \;& \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i \sum_{j=1}^{m} H(\alpha(t_i - t_k) + U_j^{(k)}, Z_j) \middle| N(\alpha t_k) - N(\alpha t_{k-1})\right] \\
= \;& \prod_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + U_j^{(k)}, Z_j)\right] \frac{e^{-\lambda\alpha(t_k - t_{k-1})}(\lambda\alpha(t_k - t_{k-1}))^m}{m!} \\
= \;& \prod_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + U_j^{(k)}, Z_j)\right] \middle| U_j^{(k)}\right] \\
= \;& \prod_{j=1}^{m} \int_0^{\alpha(t_k - t_{k-1})} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + s, Z_j)\right] \frac{1}{\alpha(t_k - t_{k-1})} \\
= \;& \left(\int_0^{\alpha(t_k - t_{k-1})} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + s, Z_1)\right] \frac{1}{\alpha(t_k - t_{k-1})}\right)^m,
\end{aligned}
$$

si hacemos $\alpha(t_k - t_{k-1}) = w_k$, entonces

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i \sum_{j=N(\alpha t_{k-1})+1}^{N(\alpha t_k)} H(\alpha(t_i - t_k) + \alpha t_k - T_j, Z_j)\right] \middle| N(\alpha t_k) - N(\alpha t_{k-1})\right] \\
= \;& \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^{w_k} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha t_i - t_k + s, Z_1)\right] \frac{1}{w_k}\right)^m \frac{e^{-\lambda w_k}(\lambda w_k)^m}{m!} \\
= \;& e^{-\lambda w_k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^{w_k} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha t_i - t_k + s, Z_1)\right] \frac{1}{w_k}\right)^m (\lambda w_k)^m}{m!} \\
= \;& e^{-\lambda w_k} \exp\{\lambda \int_0^{w_k} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha t_i - t_k + s, Z_1)\right] ds\}.
\end{aligned}
$$

Tomando logaritmos resulta:

$$
\log \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i S(\alpha t_i)\right] = \lambda \left[\int_0^{w_k} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha t_i - t_k + s, Z_1)\right] ds - w_k\right],
$$

dividiendo entre α y multiplicando por 1

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\log \mathbb{E}[\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i S(\alpha t_i)] \\
= \quad & \lambda(t_k - t_{k-1}) \left[\frac{1}{\alpha(t_k - t_{k-1})} \int_0^{w_k} \mathbb{E}\left[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha t_i - t_k + s, Z_1)\right] - 1]ds \right] \\
= \quad & \lambda(t_k - t_{k-1}) I_k(\alpha)
\end{aligned}$$

donde

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{\alpha(t_k - t_{k-1})} \int_0^{\alpha(t_k - t_{k-1})} \mathbb{E}[\exp \sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + s, Z_1] - 1)ds$$

combinando los resultados anteriores se tiene que

$$\frac{1}{\alpha}\log \mathbb{E}[\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i S(\alpha t_i)] = \lambda \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) I_k(\alpha).$$

En el caso que $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=k}^{n} \theta_i$ pertenezca al dominio esencial, existe θ^* tal que $\theta^* \geq 0$ y $\theta^* \geq \sum_{i=k}^{n} \theta_i$ para toda $k = 1, \ldots, n$.

Lema §3.1.2. *Sea $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $w_1, \ldots, w_n \geq 0$ tal que $w_1 \leq w_n$. Entonces $\sum_{i=k}^{n} \theta_i w_i \leq \theta^* w^*$ para toda $k \in 1, \ldots, n$ para cualquier $\theta^* \geq$ máx{máx{$\sum_{i=k}^{n} \theta_i : k \in \{1, \ldots, n\}\}, 0\}$ para cualquier $w^* \geq w_n$.*

Demostración. Supóngase se cumple para alguna $k > 1$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k-1}^{n} \theta_i w_i &= \sum_{i=k}^{n} \theta_i w_i + \theta_{k-1} w_{k-1} \\
&\leq \sum_{i=k}^{n} \theta_i w_i + \left(\sum_{i=k}^{n} \theta_i w_i \theta^* - \sum_{i=k}^{n} \theta_i \right) w_{k-1} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \theta_i (w_i - w_{k-1}) + \theta^* w_{k-1} \\
&\leq \theta^*(w^* - w_{k-1}) + \theta^* w_{k-1} \\
&= \theta^* w^*.
\end{aligned}$$

Debido a que $H(\alpha(t_i - t_k) + s, Z_1) \geq H(\alpha(t_{i-1} - t_k) + s, Z_1)$ para toda s y Z_1 fijo se tiene por el lema anterior:

$$\sum_{i=k}^{n} \theta_i H(\alpha(t_i - t_k) + s, Z_1) \leq \theta^* H(\infty, Z_1).$$

Si se toma el límite y después se aplica el teorema de la convergencia dominada (véase apéndice §A.2)

$$\lim_{\alpha\to\infty} I_k(\alpha) = \mathbb{E}[e^{\sum_{i=k}^{n}\theta_i H(\infty,Z_1)}] - 1 = e^{\Lambda_H(\infty,Z)(\sum_{i=k}^{n}\theta_i)} - 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}[\exp \sum_{i=1}^{n} \theta_i S(\alpha t_i)] = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \Lambda(\sum_{i=k}^{n} \theta_i)$$

En el caso que $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=j}^{n} \theta_i$ pertenezca al dominio esencial para alguna $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} I_j(\alpha) &= \frac{1}{\alpha(t_j - t_{j-1})} \int_0^{\alpha(t_j - t_{j-1})} \mathbb{E}[\exp(\sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i<0} H(\alpha(t_i - t_j) + s, Z_1) \\ &\quad + \sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i>0} H(\alpha(t_i - t_j) + s, Z_1))] - 1 \\ &\geq \frac{1}{\alpha(t_j - t_{j-1})} \int_0^{\alpha(t_j - t_{j-1})} \mathbb{E}[\exp(\sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i<0} H(\infty, Z_1) \\ &\quad + \sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i>0} H(\alpha(t_i - t_j) + s, Z_1))] - 1 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando s tiende a infinito

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i<0} H(\infty, Z_1) + \sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i>0} H(\alpha(t_i - t_j) + s, Z_1)\right)\right] \\ &\qquad = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i<0} H(\infty, Z_1) + \sum_{i=j}^{n} \theta_i \mathbb{I}_{\theta_i>0} H(\infty, Z_1)\right)\right] \end{aligned}$$

donde la igualdad se cumple por el teorema de la convergencia monótona (véase apéndice§A.2). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} I_j(\alpha) &\geq \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j}^{n}\theta_i H(\infty, Z_1)\right) - 1\right]\\ &= e^{\Lambda_{H(\infty,Z_1)}\left(\sum_{i=j}^{n}\theta_i\right)} - 1 = \infty.\end{aligned}$$

Lema §3.1.3. Λ *satisface las hipótesis del teorema de Gartner-Ellis, es decir*

1. *Existe* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Lambda_n(nt) = \Lambda_{t_1,\ldots,t_n}(t)$,
2. $0 \in \mathcal{D}_\Lambda$,
3. $\Lambda_{t_1,\ldots,t_n}$ *es semicontinua inferior en* $\mathbb{R}^d$,
4. $\Lambda_{t_1,\ldots,t_n}$ *diferenciable en* $\mathcal{D}^o_\Lambda$, *y*
5. $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}^d$ *o bien* Λ *es empinada en su frontera* $\partial\mathcal{D}_\Lambda$.

Demostración. 1. Es el lema anterior §3.1.1.
2. Se cumple por hipótesis.
3. Recordemos que

$$\begin{aligned}\Lambda(\theta) &= \lambda(e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}-1})\\ &= \lambda(e^{\log\varphi(\theta)_{H(\infty,Z)-1}})\\ &= \lambda(\varphi_{H(\infty,Z)}(\theta) - 1),\end{aligned}$$

y como $\log\varphi_{H(\infty,Z)}(\theta)$ es semicontinua inferior, entonces $\Lambda(\theta)$ es semicontinua inferior. Por lo tanto, $\Lambda_{t_1\ldots t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\Lambda(\sum_{i=k}^{n}\theta_i)$ es también semicontinua inferior.
4. Debido a que $\Lambda(\theta)$ es diferenciable en el interior del su dominio esencial, implica que $\Lambda_{t_1\ldots t_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ es diferenciable.
5. Si $\mathcal{D}(\Lambda) \neq \mathbb{R}$, $\Lambda_{H(\infty,Z)}$ es el logaritmo de una generadora de momentos de una variable aleatoria no negativa entonces, $\mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(\Lambda_{H(\infty,Z)}) = (-\infty,\bar{\theta})$ o $(-\infty,\bar{\theta}]$ para alguna $\bar{\theta}$ en $\mathbb{R}$ y como $\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ en una vecindad alrededor del cero, entonces $\bar{\theta} > 0$.
Sea $\{\theta^{(m)}\}_{m\geq 1}$ una sucesión en el interior del dominio esencial de $\Lambda_{t_1\ldots t_n}$ tal que $\theta^{(m)}$ tiende a $\theta \in \mathbb{R}$ y además $\theta \in \partial(\mathcal{D}_{\Lambda_{t_1\ldots t_n}})$. Entonces, $\sum_{i=k}^{n}\theta_i^{(m)} < \bar{\theta}$ para toda $m \geq 1$ y con $1 \leq k \leq n$

y existe j tal que $\sum_{i=j}^{n}\theta_i = \bar{\theta}$. Ya que $\theta^{(m)}$ pertenece al interior $\mathcal{D}_{\Lambda_{t_1\dots t_n}}$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j^{(m)}}\Lambda_{t_1\dots t_n}(\theta^{(m)}) = \sum_{k=1}^{j}(t_k - t_{k-1})\Lambda'(\sum_{i=k}^{n}\theta_i^{(m)}).$$

Debido a que Λ es empinada implica que $\Lambda'(\sum_{i=k}^{n}\theta_i^{(m)})$ tiende a infinito conforme m lo hace, puesto que $\sum_{i=k}^{n}\theta_i^{(m)}$ tiende a $\bar{\theta}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j^{(m)}}\Lambda_{t_1,\dots,t_n}(\theta^{(m)}) \to \infty,$$

es decir, $\Lambda_{t_1\dots t_n}(\theta)$ es empinada. □

Por el teorema de Gärtner-Ellis se puede concluir que $\left(\frac{S(\alpha t_1)}{\alpha},\dots,\frac{S(\alpha t_n)}{\alpha}\right)$ satisface el principio de grandes desviaciones en $\mathbb{R}^d$ con función de tasa

$$\Lambda^*_{t_1,\dots,t_n} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}^d}\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i - \Lambda_{t_1,\dots,t_n}(\theta_1,\dots,\theta_n)\right].$$

Nótese que $\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j=1}^{i}(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\theta_i(x_j - x_{j-1})$, entonces

$$I_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\theta_i(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\Lambda(\sum_{i=j}^{n}\theta_i)].$$

Si se hace $v_j = \sum_{i=j}^{n}\theta_i$ con $j = 1,\dots,n$, se tiene la siguiente identidad:

$$I_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}[\sum_{j=1}^{n}v_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\Lambda(v_j)]$$

Considérese para cada $j = 1,\dots,n$ una sucesión de valores reales tal que $\{v_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} v_{j,k}\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - \Lambda(v_{j,k}) = \Lambda^*\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right).$$

Esta sucesión existe por la definición de Λ^* como un supremo, entonces se tiene

$$I_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) \geq \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})[v_{j,k}\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - \Lambda(v_{j,k})].$$

Si se hace k tender a infinito se cumple la siguiente desigualdad:

$$I_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) \geq \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\Lambda^* \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right).$$

Lema §**3.1.4.** $\{\frac{S(\alpha\cdot)}{\alpha}\}$ *satisface el principio de grandes desviaciones.*

Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de todos los mapeos de $[0,1]$ a $\mathbb{R}^d$ tal que $t = 0$ es enviado al origen, y $\mathcal{X}$ es equipado con la topología de convergencia puntual (véase apéndice §A.1) en $[0,1]$.

Definición §**3.1.1.** *Un orden parcial por inclusiones se define en J el conjunto de todas las particiones en $[0,1]$, de la siguiente manera: para $i,j \in J$, $\quad i = \{s_1,\dots,s_{|i|}\} \leq j = \{t_1\dots,t_{|j|}\}$ si $s_l = t_{q(l)}$ para alguna $q(l)$, $q : 1,\dots,|i| \to 1,\dots,|j|$ inyectiva.*

Para $i \leq j \in J$, la proyección canónica

$$p_{ij} : (\mathbb{R}^d)^{|j|} \to (\mathbb{R}^d)^{|i|}$$

es la restricción de las proyecciones coordenadas de $\mathcal{Y}_j$ a $\mathcal{Y}_i$. Notar que son funciones continuas. Sea $\bar{\mathcal{X}}$ el límite proyectivo de $\{\mathcal{Y}_j = (\mathbb{R}^d)^{|j|}\}_{j\in J}$ con respecto a las proyecciones p_{ij}. Entonces, $\bar{\mathcal{X}}$ puede ser identificado con el espacio $\mathcal{X}$. Cada $g \in X$ corresponde a $(p_j(g))_{j\in J}$, la cual pertenece a $\bar{\mathcal{X}}$ ya que $p_i(g) = p_{ij}(p_j(g))$ para $i \leq j \in J$. En el caso contrario, cada $x = (x_j)_{j\in J}$ de $\bar{\mathcal{X}}$ puede ser identificado a través del siguiente mapeo $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ tal que $f(t) = x_{\{t\}}$ para $t > 0$ y $f(0) = 0$. Las funciones tasa en cada $\mathcal{Y}_j$, I_j, son como en §3.1 y de hecho son funciones de tasa buena. Entonces aplicando el teorema de Dawson-Gärtner se tiene el principio de grandes desviaciones para $S(\cdot)$ con función de tasa buena

$$I(f) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\dot{f}(t))dt, & \text{si } f \in \mathcal{AC}, f(0) = 0 \\ \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Considérese $f \in \mathcal{AC}$ (el conjunto de las funciones absolutamente continuas, ver apéndice). Sea $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$ y para $k \geq 1$ se define

$$g^k(t) = k\int_{[kt]/k}^{([kt]+1)} g(s)ds \quad t \in [0,1), \quad g^k(1) = k\int_{1-\frac{1}{k}}^{1} g(s)ds$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{X}}(f) &\geq \liminf_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{k}\Lambda^*(k\left[f\left(\frac{l}{k}) - f(\frac{l-1}{k}\right)]\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 \Lambda^*(g^k(t))dt. \end{aligned}$$

Por el teorema de Lebesgue (veáse apéndice §A.2), $\lim_{k\to\infty} g^k(t) = g(t)$ casi donde sea en [0,1]. Por lo tanto por el lema de Fatou (veáse apéndice §A.2)y la semicontinuidad de $\Lambda^*(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 \Lambda^*(g^k(t))dt &\geq \int_0^1 \liminf_{k\to\infty} \Lambda^*(g^k(t))dt \\ &\geq \int_0^1 \Lambda^*(g(t))dt \\ &= I(f). \end{aligned}$$

De la identidad en §4.2 se tiene que

$$\begin{aligned} & \sup_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k} \sum_{l=1}^{k} [(v_j)(f(t_l) - f(t_{l-1})) - (t_l - t_{l-1})\Lambda(v_j))] \\ = & \sup_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k} \sum_{l=1}^{k} [(v_j)(\dot{f}(s))ds - \sup_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k} \sum_{l=1}^{k} (t_l - t_{l-1})\Lambda(v_j))] \\ = & \int_0^1 [(v_j)(f(t_l) - f(t_{l-1})) - \int_0^1 \Lambda(v_j))] \\ \leq & \int_0^1 \sup[\langle v_j, \dot{f}(s)ds\rangle) - \Lambda(v_j))] \\ = & \int_0^1 \Lambda^*(\dot{f}(s))ds \\ = & I(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_{\mathcal{X}} = \sup_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k, \theta_1,\ldots,\theta_k} \sum_{l=1}^{k} [(v_j)(f(t_l) - f(t_{l-1})) - (t_l - t_{l-1})\Lambda(v_j))] \leq I(f)$$

Finalmente supóngase que no es absolutamente continua. Entonces existen $\delta > 0$ y $\{s_1^n < t_1^n \leq \cdots \leq s_{k_n}^n < t_{k_n}\}$ una sucesión de particiones en $[0,1]$ tal que $\sum_{l=1}^{k_n}(t_l^n - s_l^n)$ tiende a cero y $\sum_{l=1}^{k_n} |f(t_l) - f(s_l^n)| \geq \delta$. Nótese que debido a que Λ^* es no negativa y por §4.2

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{X}}(f) &= \sup_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k \theta_1,\ldots,\theta_k \in \mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{k} [\langle \theta_l, f(t_l) - f(t_{l-1})\rangle - (t_l - t_{l-1})\Lambda(\theta_l))] \\ &\geq \sup_{0\leq s_1<t_1\leq s_2<t_2<\cdots\leq s_k<t_k \theta_1,\ldots,\theta_n \in \mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{k} [\langle \theta_l, f(t_l) - f(s_l)\rangle - (t_l - s_l)\Lambda(\theta_l))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para $t_l = t_l^n$, $s_l = s_l^n$, y una θ_l en la dirección de $f(t_l) - f(s_l)$ y con $|\theta_l| = \rho$ se tiene la siguiente cota:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{X}}(f) &\geq \limsup_{n\to\infty} \{\rho \sum_{l=1}^{k_n} |f(t_l) - f(s_l^n)| - [\sup_{|\theta|=\rho} \Lambda(\theta)] \sum_{l=1}^{k_n} (t_l^n - s_l^n)\} \\ &\geq \rho\delta. \end{aligned}$$

La arbitrariedad de ρ implica que $I_{\mathcal{X}}(f) = \infty$.

§3.2. Grandes desviaciones para el modelo de riesgo

Teorema §3.2.1. *Supónganse*

1. *b es Lipschitz continua,*
2. *$\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$ y también $\Lambda(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$,*
3. *existe $B > 0$ tal que el $\lim_{x\to\infty} b(x) = B$,*
4. *$\bar{b} = \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > \Lambda'(0)$.*

Entonces (X) cumple el principio de grandes desviaciones con función de tasa buena

$$J(g) = \begin{cases} \int_0^\infty \Lambda^*(-\dot{g}(t) + b(g(t)))dt & \text{si } g \in AC[0,\infty) \cap D_u^{B-\Lambda'(0)}, \\ \infty & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Como se mencionó anteriormente $S(\cdot)$ satisface el principio de grandes desviaciones en $D_0^{\Lambda'(0)}$ con función de tasa I. Considerar el funcional definido en $D_0^{\Lambda'(0)}$ por $F(f) = g$, donde g es la única solución càdlàg de la ecuación integral

$$g(t) = u + \int_0^t b(g(s))ds - f(t), \quad t \geq 0$$

No vamos a probar que la ecuación tiene solución única. Ésto se puede ver en [8]: S satisface las condiciones para ser una semimartingala. Por último, al ser la función de primas Lipschitz continua y el proceso de reclamaciones una semimartingala se puede mostrar (Teorema 7 pág 197 [8]) que existe en efecto una solución única fuerte. (Los resultados que aquí se mencionan se encuentran en el apéndice §A.4). Basta con probar que el funcional F es continuo, así se puede aplicar posteriormente el principio de contracción §2.2.1 a $F(S(\cdot))$.

Notación 4. *Sea $D[0,\infty)$ el conjunto de funciones càdlàg con valores en los reales en $[0,\infty)$. Definimos el conjunto*

$$D_a^{\mu} = \{f \in D[0,\infty) : f(0) = a \text{ y } \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{1+t} = \mu\}$$

Se equipa a D_a^{μ} con la métrica

$$d_{a,\mu}(f,g) = \sup_{t\geq 0} \frac{|f(t)-g(t)|}{1-t}.$$

Veamos que $F(f) \in D_u^{B-\Lambda'(0)}$. Por definición de F, $g = F(g)$ es una función cádlag, y $g(0) = u - f(0) = u$. Elijamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\Lambda'(0) + \varepsilon < \bar{b}$, lo cual es posible por (N). Como $f \in D_0^{\Lambda'(0)}$, existe una $T > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(t)}{1+t} - \Lambda'(0) \right\| \leq \varepsilon$$

para toda $t \geq T$. Pero $g(t) \geq u + \bar{b}t - f(t)$ de lo que se sigue $g(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. En consecuencia podemos elegir T tal que $|b(g(s)) - B| < \varepsilon$ para toda $s > T$. Ahora, por la desigualdad del triángulo, tenemos para $t > T$ que

$$\left\| \frac{g(t)}{1+t} - [B - \Lambda'(0)] \right\| \leq \\ \left\| \frac{u + \int_0^T b(g(s))ds - B(1+T)}{1+t} \right\| + \left\| \frac{\int_T^t [b(g(s)) - B]ds}{1+t} \right\| + \left\| \frac{f(t)}{1+t} - \Lambda'(0) \right\|$$

El primer término en la derecha se va a cero conforme t tiende a infinito pues el numerador es una constante. El segundo y tercer término son acotados por ε. Entonces el término de la izquierda está acotado por 3ε para t suficientemente grande. Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario se sigue que $g \in D_u^{B-\Lambda'(0)}$.

Se prueba a continuación la continuidad de F. Por (A), existe $K > 0$ tal que $|b(x) - B| < \varepsilon$

para toda $x > K$. Fijamos $f \in D_0^{\Lambda'(0)}$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que $\bar{b} - \Lambda'(0) > 2\varepsilon$, lo cual es posible por (N). Entonces, podemos encontrar $T > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(t)}{1+t} - \Lambda'(0)\right| < \varepsilon \text{ y } \quad u - \bar{b}t - (\Lambda'(0) + 2\varepsilon)(1+t) > K,$$

para todo $t > T$. Ahora se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{(1+T)e^{LT}}$ y sea $f_1 \in D_0^{\Lambda'(0)}$ tal que $d_{0,\Lambda'(0)}(f, f_1) < \delta$. Se definen $g_1 = F(f_1)$ y $g = F(f)$. Obsérvese que para todo $t \geq 0$,

$$\frac{|g(t) - g_1(t)|}{1+t} \leq d_{0,\Lambda'(0)}(f, f_1) + \frac{1}{1+t}\int_0^t |b(g(s)) - b(g_1(s))| ds$$

$$\leq \delta + L\int_0^t \frac{|g(s) - g_1(s)|}{1+s} ds,$$

donde L es la constante de Lipschitz para $b(\cdot)$. Por lo tanto, por el lema de Gronwall (véase apéndice §A.2),

$$\frac{|g(t) - g_1(t)|}{1+t} \leq \delta e^{Lt} \leq \varepsilon \quad \forall t \leq T.$$

De ahora en adelante sea $t > T$ fija y arbitraria. Como $d_{0,\Lambda'(0)}(f, f_1) < \delta$ y $|\frac{f(t)}{1+t} - \Lambda'(0)| < \varepsilon$ se sigue que

$$f_1(t) < f(t) + \delta(1+t) < (\Lambda'(0) + \varepsilon + \delta)(1+t) < (\Lambda'(0) + 2\varepsilon)(1+t).$$

Entonces, se tiene que

$$g_1(t) = u + \int_0^t b(g_1(s)) ds - f_1(t) > u + \bar{b}t - (\Lambda'(0) + 2\varepsilon)(1+t) > K,$$

y de ese modo, $g(t) > K$. Así,

$$|b(g(t)) - b(g_1(t))| \leq |b(g(t)) - B| + |B - b(g_1(t))| < 2\varepsilon.$$

Se tiene también que

$$g(t) - g_1(t) = g(T) - g_1(T) + \int_T^t [b(g(s)) - b(g_1(s))] ds - (f(t) - f_1(t)) + (f(T) - f_1(T)).$$

De la ecuación anterior y la cota obtenemos que para $t \leq T$

$$\frac{|g(t) - g_1(t)|}{1+t} \leq \epsilon + \frac{2\varepsilon(t-T)}{1+t} + 2\delta < 5\varepsilon.$$

Lo cual resulta en la continuidad de F en f. Como $f \in D_0^{\Lambda'(0)}$ fue arbitaria, entonces F es continua en $D_0^{\Lambda'(0)}$. $\square$

Capítulo 4

Trayectoria más probable a la ruina

En la primera sección de este capítulo se verifica que en el principio de grandes desviaciones probado en el capítulo anterior se cumple la igualdad para el conjunto definido como ruina, en la segunda sección se encuentra una expresión explícita de la probabilidad de ruina bajo la condición clásica de Cramér y por último en la tercera sección se muestra que se puede encontrar una trayectoria que conduce a la ruina tal que satisface condiciones de las proposiciones siguientes.

§4.1. Probabilidad de Ruina

En esta sección se muestran algunas estimaciones a través de grandes desviaciones para obtener cotas asintóticas a la probabilidad de ruina del proceso

$$X(t) = u + \int_0^t b(X(s))ds - S(t), \quad t > 0,$$

donde $S = S_t^H$, es un proceso Poisson generalizado como en §1.2.

Notación 5. *Sea $u > 0$. Se define como*

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0 : X(t) \leq 0 | X(0) = u)$$

*a la **probabilidad de ruina**.*

Para $\varepsilon > 0$, sea $\psi_\varepsilon(u)$ evaluada para el proceso $\{X_t^\varepsilon\}$ definido como arriba sólo con λ remplazado por $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ y $H(t, Z_i)$ por $\varepsilon H(t, Z_i)$.

Notación 6. *Para* $0 \leq v \leq u$, *y* J *la función de tasa*

$$J(g) = \begin{cases} \int_0^\infty \Lambda^*(-\dot{g}(t) + b(g(t)))dt & \text{si } g \in \mathcal{AC}[0,\infty) \cap D_u^{B-\Lambda'(0)}, \\ \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

como en §3.2.1.
Sea $w(u,v)$ *:*

$$w(u,v) = \inf\{J(g) : g \in AC[0,\infty) \cap D_u^{B-\Lambda'(0)} \quad y\ g(t) = v \text{ para alguna } \quad t \geq 0\},$$

donde $D_u^{B-\Lambda'(0)} = \{f \in D[0,\infty) : f(0) = a \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{1+t} = \mu\}$.

Proposición §4.1.1. *Bajo la suposiciones:*

1. b *es Lipschitz continua,*
2. $\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ *para toda* $\theta \in \mathbb{R}$ *y también* $\Lambda(\theta) < \infty$ *para toda* $\theta \in \mathbb{R}$,
3. *existe* $B > 0$ *tal que el* $\lim_{x\to\infty} b(x) = B$,
4. $\bar{b} = \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > \Lambda'(0)$,

se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon(u) = -w(u,0)$$

para cualquier $u > 0$.

Demostración. Consideramos la función $Q : D_u^{B-\Lambda'(0)} \to (-\infty, u]$ dada por

$$Q(g) = \inf\{g(t) : t \geq 0\}.$$

Como Q es continua y por el principio de grandes desviaciones para $X^\varepsilon(\cdot)$ se cumple que

$$\begin{aligned} -\inf\{J(g) : Q(g) < 0\} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon(u) \\ &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon(u) \\ &\leq -\inf\{J(g) : Q(g) \leq 0\} \end{aligned}$$

Como J es una función de tasa buena, el ínfimo sobre el abierto se alcanza en alguna $h \in \mathcal{AC}[0,\infty) \cap D_u^{B-\Lambda'(0)}$ tal que $Q(h) \leq 0$. Nótese que el conjunto $\{g : Q(g) \leq 0\}$ es cerrado por la continuidad de Q. Como J es una función de tasa buena, alcanza su mínimo en conjuntos compactos por ser semicontinua inferior. Como $B - \Lambda'(0) > 0$ por hipótesis y $h \in D_u^{B-\Lambda'(0)}$ por cómo se eligió h, entonces $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, ya que $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{1+t} = B - \Lambda'(0)$. Debido a que $Q(h) = \inf_{t\geq 0} h(t) \leq 0$, existe una $t_0 > 0$ tal que $h(t_0) = 0$. Considérese g_h tal que

$$\begin{cases} g_h(t) = h(t) & \text{si } t \leq t_0, \\ \dot{g}_h(t) = b(g_h(t)) - \Lambda'(0) & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

Así, se tiene $Q(g_h) = \text{ínf}\{g_h(t) : t \geq 0\} \leq 0$ porque $g_h(t_0) = 0$.

$$\begin{aligned} J(g_h) &= \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt + \int_{t_0}^{\infty} \Lambda^*(-[b(g_h(t)) - \Lambda'(0)] + b(g_h(t)))dt \\ &= \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt + \int_{t_0}^{\infty} \Lambda^*(\Lambda'(0)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $J(g_h) \leq J(h)$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que h entonces también satisface

$$h(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{h}(t) = b(h(t)) - \Lambda'(0)\, t \geq t_0,$$

para alguna $t_0 > 0$. Por lo tanto, se obtiene

$$\text{ínf}\{J(g) : Q(g) \leq 0\} = J(h) = \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt = w(u, 0), \tag{4.1}$$

donde la primera igualdad se cumple por definición de h, la segunda por el Teorema §3.2.1 y la última por la continuidad de J y la definición de w.

Se mostrará a continuación que $\text{ínf}\{J(g) : Q(g) < 0\} = J(h)$. Sea $\alpha > 0$ fija. Para cualquier $\delta > 0$, se denota g_δ a

$$g_\delta(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ -\alpha(t - t_0) & \text{si } t_0 < t \leq t_0 + \delta \\ -\alpha\delta + \int_{t_0+\delta}^{t} b(g_\delta(s))ds - \Lambda'(0)[t - (t_0 + \delta)] & \text{si } t_0 + \delta < t. \end{cases}$$

Entonces se sigue de la segunda línea de la definición de g_δ que $Q(g_\delta) < 0$ y

$$
\begin{aligned}
& J(g_\delta) \\
= \ & \int_0^\infty \Lambda^*(-\dot{g}_\delta(t) + b(g_\delta(t)))dt \\
= \ & \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Lambda^*(\alpha + b(-\alpha(t-t_0)))dt + \int_{t_0+\delta}^\infty \Lambda^*(-\dot{g}_\delta + b(g_\delta))dt \\
= \ & \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Lambda^*(\alpha + b(-\alpha(t-t_0)))dt + \\
& \qquad \int_{t_0+\delta}^\infty \Lambda^*(-b(g_\delta(t)) + \Lambda'(0) + b(g_\delta(t)))dt \\
= \ & \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Lambda^*(\alpha + b(-\alpha(t-t_0)))dt + \int_{t_0+\delta}^\infty \Lambda^*(\Lambda'(0))dt \\
= \ & J(h) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Lambda^*(\alpha + b(h(t-t_0)))dt,
\end{aligned}
$$

ya que $\Lambda^*(\Lambda'(0)) = 0$, y por §4.1.
Finalmente,

$$
\begin{aligned}
J(h) &= \inf\{J(g) : Q(g) \leq 0\} \\
&\leq \inf\{J(g) : Q(g) < 0\} \\
&\leq J(g_\delta) \\
&= J(h) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Lambda^*(\alpha + b(-\alpha(t-t_0)))dt.
\end{aligned}
$$

La primera igualdad es por definición de h, y la tercera desigualdad por definición de ínfimo ya que es cota para cualquiera, en este caso g_δ. Ahora bien, al tender δ a cero, y como $\Lambda^*(x)$ es finita para todo x positivo, se obtiene la igualdad.

§4.2. Condición de Cramér

Una expresión explícita para la probabilidad de ruina puede ser obtenida cuando se tiene la siguiente condición, la cual corresponde a la condición clásica de Cramér, es decir:

Suposición §4.2.1. *Condición de Cramér*
Para toda $c \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x)$, *existe* $\gamma_c > 0$ *tal que* $\Lambda(\gamma_c) - c\gamma_c = 0$.

Recordemos que la función $\Lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Lambda_n(nt)$ cuando el límite existe donde $\Lambda_n(t) = \log\varphi_n(t)$ el es logaritmo de la función generadora de momentos.
Es necesario que la constante c sea mayor que el ínfimo de la función de primas b. Ésta a su vez satisface la condición de ganancia neta, la cual en promedio hará que el modelo mantenga el capital positivo en promedio, pero no es del todo suficiente para alejarse de la ruina. De esta forma, bajo las mismas hipótesis, $f'(\gamma_c) = \Lambda'(\gamma_c) - c > 0$. (Los valores $\{\gamma_c : c \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x)\}$ se llaman coeficientes de ajuste local.) Cuando la Suposición §4.2.1 se cumple, para cualquier $c \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x)$, tenemos la siguiente identidad

$$\inf_{t>0} t\Lambda^*\left(\frac{1}{t}+c\right) = \frac{\Lambda^*(\Lambda'(\gamma_c))}{\Lambda'(\gamma_c)-c} = \gamma_c, \tag{4.2}$$

y el ínfimo se alcanza únicamente en $t = \frac{1}{\Lambda'(\gamma_c)-c}$.
Probemos la identidad §4.2 ocurre. Se ve primero la última igualdad:

$$\frac{\Lambda^*(\Lambda'(\gamma_c))}{\Lambda'(\gamma_c)-c} = \frac{\sup_\theta\{(\theta\Lambda'(\gamma_c)) - \Lambda(\theta)\}}{\Lambda'(\gamma_c)-c}$$

si y sólo si θ es la solución de la ecuación

$$\Lambda'(\gamma_c)) - \Lambda'(\theta) = 0,$$

por lo tanto $\theta = \gamma_c$; de ahí que

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda^*(\Lambda'(\gamma_c))}{\Lambda'(\gamma_c)-c} &= \frac{\gamma_c\Lambda'(\gamma_c)) - \Lambda(\gamma_c)}{\Lambda'(\gamma_c)-c}\\ &= \frac{\gamma_c\Lambda'(\gamma_c)) - c\gamma_c}{\Lambda'(\gamma_c)-c}\\ &= \frac{\gamma_c[\Lambda'(\gamma_c)) - c]}{\Lambda'(\gamma_c)-c}.\end{aligned}$$

Ahora se muestra que el ínfimo se alcanza justamente en $t = \frac{1}{\Lambda'(\gamma_c)-c}$.

$$\begin{aligned}\inf_{t>0} t\Lambda^*\left(\frac{1}{t}+c\right) &= \inf_{t>0} t\sup_\theta\{\left(\theta\left(\frac{1}{t}+c\right)\right) - \Lambda(\theta)\}\\ &= \inf_{t>0}\sup_\theta\{t\left(\theta\left(\frac{1}{t}+c\right)\right) - t\Lambda(\theta)\}\end{aligned}$$

Derivando con respecto a t la función $f(t) = t\left(\theta\left(\frac{1}{t}+c\right)\right) - t\Lambda(\theta)$

$$\theta c - \Lambda(\theta) \tag{4.3}$$

Derivando con respecto a θ la función $f(\theta) = t(\theta(\frac{1}{t}+c)) - t\Lambda(\theta)$

$$(1-tc) - t\Lambda'(\theta), \tag{4.4}$$

se iguala §4.2 a cero,

$$\theta c - \Lambda(\theta) = 0$$

por lo tanto, de la identidad de Cramér §4.2.1 se tiene que $\theta = \gamma_c$. Ahora, si §4.2 se iguala a cero

$$\begin{aligned} 1 + t(c - \Lambda'(\theta)) &= 0 \\ \Leftrightarrow t(\Lambda'(\theta) - c) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\Lambda'(\theta) - c} &= t \end{aligned}$$

finalmente se sustituye $\theta = \gamma_c$.

Por último mostraremos la primera igualdad.

$$\begin{aligned} \inf_{t>0} t\Lambda^*\left(\frac{1}{t}+c\right) &= \frac{\Lambda^*((\Lambda'(\gamma_c)-c)+c)}{\Lambda'(\gamma_c)-c} \\ &= \frac{\Lambda^*(\Lambda'(\gamma_c))}{\Lambda'(\gamma_c)-c}. \end{aligned}$$

Teorema §4.2.1. *Bajo las suposiciones:*

1. *b es Lipschitz continua,*
2. *$\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$ y también $\Lambda(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$,*
3. *Existe $B > 0$ tal que el $\lim_{x\to\infty} b(x) = B$,*
4. *$\bar{b} = \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > \Lambda'(0)$,*

se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \psi_\varepsilon(u) = -\int_0^u \gamma_{b(x)}dx \quad u > 0$$

Probaremos primero el siguiente lema:

Lema §4.2.1. *Para cualquier $0 \leq v \leq u$ se tiene $w(u,0) = w(u,v) + w(v,0)$.*

Demostración. Se tiene que $w(r,r) = 0$ para cualquier $r \geq 0$, se verifica ahora para el caso $0 < v < u$. Probaremos primero que $w(u,0) \leq w(u,v) + w(v,0)$. Sean f y g tales que alcanzan el ínfimo en la definición de $w(u,v)$ y $w(v,0)$ respectivamente. La existencia de estas funciones se asegura de la bondad de $J(\cdot)$. Existe t_0 tal que $f(t_0) = v$ y $s_0 > 0$ tal que $g(s_0) = 0$. Si se define h como:

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ g(t - t_0) & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

La función h es absolutamente continua porque f y g lo son y también $h(t_0 + s_0) = g(s_0) = 0$. Por lo tanto

$$w(u,0) \leq J(h) = \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{f}(t) + b(f(t)))dt + \int_{t_0}^{\infty} \Lambda^*(-\dot{g}(t - t_0) + b(g(t - t_0)))dt$$

$$\leq J(f) + J(g) = w(u,v) + w(v,0).$$

Ahora se probará $w(u,0) \geq w(u,v) + w(v,0)$. Sea h tal que alcanza el ínfimo de la definición de $w(u,0)$. Como $Q(h) = \text{ínf}_{t \geq 0} h(t) \leq 0$ existe una $t_0 > 0$ tal que $h(t_0) = 0$. Debido a que $h(0) = u$ y h es continua, exite una $s_0 \in (0, t_0)$ tal que $h(s_0) = v$. Ahora sean f y g funciones continuas definidas por

$$\begin{cases} f(t) = h(t) & \text{si } 0 \leq t < s_0, \\ \dot{f}(t) = b(f(t)) - \Lambda'(0) & \text{si } t \geq s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(t) = h(t + s_0) & \text{si } 0 \leq t < t_0 - s_0, \\ \dot{g}(t) = b(g(t)) - \Lambda'(0) & \text{si } t \geq t_0 - s_0. \end{cases}$$

Así entonces, $f(0) = u$, $f(s_0) = v$, $g(0) = v$ y $g(t_0 - s_0) = 0$. Por lo tanto, $w(u,v) \leq J(f)$, $w(v,0) \leq J(g)$, se tiene

$$\begin{aligned} w(u,0) &= J(h) \geq \int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{h}(t) + b(h(t)))dt \\ &= \int_0^{s_0} \Lambda^*(-\dot{f}(t) + b(f(t)))dt + \int_{s_0}^{t_0} \Lambda^*(-\dot{g}(t - s_0) + b(g(t - s_0)))dt \\ &= J(f) + J(g) \geq w(u,v) + w(v,0) \end{aligned}$$

por lo tanto, $w(u,0) \geq w(u,v) + w(v,0)$ con lo cual se obtiene la segunda desigualdad y se prueba el lema.

Demostración. (Teorema §4.2)
Se probará que la igualdad siguiente se cumple:

$$w'(u,0) = \gamma_{b(u)},$$

donde $w'(\cdot,\cdot)$ es la derivada de $w(\cdot,\cdot)$ con respecto al primer argumento. Para este fin se revisa que el límite por la izquierda y el límite por la izquierda coincidan. Tenemos que

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{w(u+\delta,0) - w(u,0)}{\delta} \text{ y } \lim_{\delta\to 0^+} \frac{w(u-\delta,0) - w(u,0)}{\delta}$$

por el lema anterior puede escribirse como:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{w(u+\delta,u)}{\delta} \text{ y } \lim_{\delta\to 0^+} -\frac{w(u,u-\delta)}{\delta}.$$

Considérese el límite por la derecha. Nótese que $w(u+\delta,u) = \inf\{J(g) : g \in \mathcal{S}_{u,\delta}\}$ $\mathcal{S}_{u,\delta} = \{g \in D_{u+\delta}^{B-\Lambda'(0)} : g(t) = u$ para alguna $t \geq 0$ y $\{g(s) : s \in [0,t]\} \subset [u, u+\delta]\}$. Sea $g \in \mathcal{AC}[0,\infty) \cap \mathcal{S}_{u,\delta}$ fija, pero arbitaria. Para una t tal que se cumplan las propiedades de g,

$$J(g) \geq \int_0^t \Lambda^*(-\dot{g}(s) + b(g(s)))ds$$

usando la desigualdad de Jensen ya que Λ^* es convexa,

$$\int_0^t \Lambda^*(-\dot{g}(s) + b(g(s)))ds \geq t\Lambda^*\left(\frac{1}{t}\int_0^t (-\dot{g}(s) + b(g(s)))ds\right)$$

integrando y evaluando en $g(t) = u$ y $g(0) = u + \delta$,

$$= t\Lambda^*\left(\frac{\delta}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t b(g(s))ds\right)$$

por la linealidad de b, usando el hecho de que $g(s) \in [u, u+\delta]$,

$$J(g) \geq \inf_{s\in[u,u+\delta]} t\Lambda^*(\frac{\delta}{t} + b(s))$$

por definición de ínfimo,

$$\geq \delta \inf_{s\in[u,u+\delta]} \inf_{t>0} \frac{t}{\delta}\Lambda^*(\frac{1}{\frac{t}{\delta}} + b(s))$$

$$= \delta \inf_{s\in[u,u+\delta]} \gamma_{b(s)}$$

usando la identidad §4.2.

Entonces $w(u+\delta,u) \geq \delta \inf_{s\in[u,u+\delta]} \gamma_{b(s)}$.

Ahora sea $g \in \mathcal{S}_{u,\delta} \cap \mathcal{AC}_0[0,\infty)$ definida como

$$\begin{cases} g(t) = u - (\Lambda'(\gamma_{b(u)}) - b(u))(t - \frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)})-b(u)}) & \text{si } 0 \leq t < \frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)})-b(u)}, \\ \dot{g}(t) = b(g(t)) - \Lambda'(0) & \text{si } t \geq \frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)})-b(u)}. \end{cases}$$

Se tiene

$$w(u+\delta,u) \leq \int_0^{\frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)})-b(u)}} \Lambda^*(-\dot{g}(t) + b(g(t)))dt$$

$$= \int_0^{\frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)})-b(u)}} \Lambda^*(\Lambda'(\gamma_{b(u)}) - b(u) + b(g(t)))dt$$

y al sustituir con la definición de g,

$$\leq \frac{\delta}{\Lambda'(\gamma_{b(u)}) - b(u))} \sup_{s\in[u,u+\delta]} \Lambda^*(\Lambda'(\gamma_{b(u)}) - b(u) + b(s))$$

utilizando propiedades de integrales.

Entonces,

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{w(u+\delta,u)}{\delta} \leq \frac{\Lambda^*(\Lambda'(\gamma_{b(u)}))}{\Lambda'(\gamma_{b(u)}) - b(u)} = \gamma_{b(u)},$$

nuevamente por la identidad que se deriva de la condición de Cramér, la continuidad de Λ^* y de $b(\cdot)$. En conclusión, $\lim_{\delta\to 0^+} \frac{w(u+\delta,u)}{\delta} = \gamma_{b(u)}$. Lo que significa que la probabilidad de ruina se acerca a la cota de Cramér conforme ϵ tiende a cero.

§4.3. Trayectoria 'más probable' a la ruina

Existen varias trayectorias del proceso (X_t) que iniciando con un capital incial u para algún t_0, $X_{t_0} = 0$, es decir que estas conducen a la ruina. Una vez que es de interés este conjunto de trayectorias, nos interesa en partícular aquella que es m̀ás probable', entendemos por la más probable aquella que su función de tasa corresponda a la de la probabilidad de ruina.

Teorema §4.3.1. *Supónganse*

1. *b es Lipschitz continua,*
2. *$\Lambda_{H(\infty,Z)}(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$ y también $\Lambda(\theta) < \infty$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$,*
3. *existe $B > 0$ tal que el $\lim_{x\to\infty} b(x) = B$,*
4. *$\bar{b} = \inf_{x\in\mathbb{R}} b(x) > \Lambda'(0)$,*

y sea g la solución de

$$\dot{g}(t) = -\Lambda'(\gamma_b(g(t))) + b(g(t)) \tag{4.5}$$

con la condición inicial $g(0) = u$. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 0$ y

$$\int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{g}(t) + b(g(t)))dt = \int_0^u \gamma_{b(x)}dx.$$

Demostración. Sea $c \geq \bar{b}$ fija, pero arbitaria. Recordemos que $\Lambda_H = \log \mathbb{E}[e^{\theta H(\infty,Z)}]$ y que $\Lambda(\theta) = \Lambda[e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}} - 1]$. Por la condición de Cràmer §4.2.1 se tiene $c = \frac{\Lambda(\gamma_c)}{\gamma_c}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Lambda'(\gamma_c) &= \lambda e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - c = \lambda e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - \frac{\Lambda(\gamma_c)}{\gamma_c} \\
&= \lambda e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - c = \lambda e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - \frac{\lambda[e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}} - 1]}{\gamma_c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda'(\gamma_c) - c &= \lambda e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}(\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - \frac{\lambda e^{\Lambda_H - 1}}{\gamma_c} \\
&= \lambda\left[e^{\Lambda_{H(\infty,Z)}(\gamma_c)}(\Lambda'_{H(\infty,Z)}(\gamma_c) - \frac{1}{\gamma_c}) + \frac{1}{\gamma_c}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_c}\mathbb{E}\left[\gamma_c H(\infty, Z_1)e^{\gamma_c H(\infty,Z_1)} - e^{\gamma_c H(\infty,Z_1)} + 1\right].
\end{aligned}$$

La función $f(x) = xe^x - e^x + 1$ es convexa y alcanza su mínimo en $x = 0$. Por ello $\Lambda'(\gamma_c) - c > 0$ para toda $\gamma_c > 0$ y por lo tanto para toda $c \geq \bar{b}$. Además por la suposición de que la variable aleatoria no negativa $H(\infty, Z_1)$ no es idénticamente cero, el lado derecho de la última igualdad tiende a infinito cuando γ_c tiende a infinito. En consecuencia, se tiene

$$\inf_{c\geq\bar{b}} \Lambda'(\gamma_c) - c > 0.$$

De esto se sigue que existe $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 0$. Recuérdese que

$$\dot{g}(t) = -\Lambda'(\gamma_b(g(t))) + b(g(t)),$$

ahora nótese que

$$\int_0^{t_0} \Lambda^*(-\dot{g}(t) + b(g(t)))dt = \int_0^{t_0} \Lambda^*(\Lambda'(\gamma_{b(g(t))}))dt$$

cuando se sustituye se elimina b(g(s)),

$$= \int_0^{t_0} \Lambda\gamma_{b(g(t))}[\Lambda'(\gamma_{b(g(t))}) - b(g(t))]dt$$

usamos la identidad de Crámer §4.2,

$$= \int_0^{t_0} \gamma_{b(g(t))}[-\dot{g}(t)]dt = \int_0^{u} \gamma_{b(x)}dx$$

se obtiene de la definición de g.

La primera igualdad se cumple por hipótesis, la segunda se sigue de la identidad §4.2, la tercera también por hipótesis. Por último la cuarta desigualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $x = g(t)$ donde $g(t_0) = 0$ y $u = g(0)$.

Este teorema no presenta de manera explícita la trayectoria que lleva a la ruina sino se presenta como la solución de la ecuación §4.3.1. Se considera la 'más probable' en términos de grandes desviaciones.

El modelo presentado en el Capítulo 1 encuentra finalmente aquí la probabilidad de ruina y describimos cómo es que se llega, mostrando "el camino más probable". Estimar la ruina es el objeto de nuestro interés y para ello se presentaron aquí técnicas de grandes desviaciones (ver Capítulo 2) aplicadas a este modelo §1.3 (ver Capítulo 3).

Apéndice A

Apéndice

§A.1. Topología

Un **conjunto dirigido** es un conjunto A equipado con la relación binaria $\lesssim$ tal que

1. $\alpha \lesssim \alpha$ para toda $\alpha \in A$;
2. Si $\alpha \lesssim \beta$ y $\beta \lesssim \gamma$ entonces $\alpha \lesssim \gamma$;
3. para cualquier $\alpha, \beta \in A$ existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha \lesssim \gamma$ y $\beta \lesssim \gamma$.

Una **red** en un conjunto X es un mapeo $\alpha \mapsto x_\alpha$ de un conjunto dirigido de un conjunto A a un conjunto X. Denotado como $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ o solamente por $\langle x_\alpha \rangle$ si A se sobreentiende y se dice que $\langle x_\alpha \rangle$ es indexado por A.

Definición §A.1.1. *Sea $X \neq \emptyset$, una topología en $\mathcal{X}$ es una familia τ de subconjuntos de X, que contiene a $\emptyset$ y X, es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas, es decir, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$, entonces*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$$

y si $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, entonces

$$\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau.$$

*(X, τ) es llamado **un espacio topológico**.*

Definición §A.1.2. *Una **base** para τ es una familia $B \subset \tau$ que contiene una vecindad base para τ en cada $x \in X$.*

Definición §A.1.3. ***Vecindad Base***
Si τ topología en X, una vecindad base para τ en $x \in X$ es una familia $N \subset \tau$ tal que

- $x \in V, \quad \forall V \in N$
- *si* $U \in \tau \quad x \in U, \exists V \in N \quad V \subset U$

Sea $F(\Omega, \Omega_1)$ la colección de todas las funciones de el conjunto Ω a Ω_1. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de Ω, la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ de convergencia uniforme en miembros de $\mathcal{A}$ tiene como vecindad base los conjuntos

$$\{g \in F(\Omega, \Omega_1) : \sup_{x \in A} d(g(x), f(x)) < \delta\},$$

$$f \in F(\Omega, \Omega_1), \quad A \in \mathcal{A}, \quad \delta > 0, d \in \mathcal{D}.$$

Convergencia relativa a $\tau_{\mathcal{A}}$ significa convergencia uniforme en cada $A \in \mathcal{A}$. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \Omega$ obtenemos la **topología de la convergencia uniforme** en Ω; Si $\mathcal{A}$ es la colección de todos los singuletes $\{x\}$, $x \in \Omega$, se tiene la **topología de la convergencia puntual**.

Definición §A.1.4. *Si τ_1 y τ_2 son topologías en X tales que $\tau_1 \subset \tau_2$, se dice que τ_1 es más* ***débil*** *o* ***rudimentaria*** *que τ_2, o inversamente que τ_2 es más* ***fuerte*** *o* ***fina****.*

Si X es cualquier conjunto y $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de mapeos de X en los espacios topológicos X_α, hay una única topología más debil generada por $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. En otras palabras, τ es una topologia generada por los conjuntos de la forma $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ donde $\alpha \in A$ y U_α es abierto en X_α El ejemplo que es de relevancia de esta construcción para este trabajo es el producto Cartesiano de espacios topológicos. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es cualquier familia de espacios topológicos, el **producto topológico** en $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la topologia débil generada por los mapeos cordenados $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$. Cuando se considera un producto Cartesiano de especios topológicos, siempre es provisto con el producto topológico a menos que se especifique de otra forma. Una base para el producto topológico es dado por los conjuntos de la forma $\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\alpha j}^{-} 1(U_{\alpha j})$ donde n pertence a los naturales y $U_{\alpha j}$ es abierto en $X_{\alpha j}$ para $1 \leq j \leq n$.

Un sistema proyectivo $(Y_j, p_{ij})_{i \leq j \leq J}$ consiste de espacios topológicos de Hausdorff $Y_{j\, j \in J}$ y mapeos continuos $p_{ij} : Y_j \to Y_i$ tales que $p_i j = p_{ij} \circ p_{jk}$ donde $i \leq j \leq k$.

Definición §A.1.5. *El* ***límite proyectivo*** *de este sistema, denotado por $\mathcal{X} = \varprojlim Y_j$, es el conjunto del espacio del producto topológico $Y = \prod_{j \in J} Y_j$, consistente de todos los elementos $x = (y_j)_{j \in J}$ para lo cual $y_i = p_{ij}(y_j)$ con $i \leq j$, equipado con la topología inducida por Y.*

Teorema §**A.1.1.** *Si X es un espacio topológico, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es compacto.*

2. *Cada sucesión en X tiene un punto de acumulación.*

3. *Cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Proposición §**A.1.1.** *Si $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ es una sucesión en un espacio topológico X, entonces $x \in X$ es un punto de acumulación de $\langle x_\alpha \rangle$ si y solo si $\langle x_\alpha \rangle$ tiene una subsucesión que converge a x.*

Teorema §**A.1.2** (Tychonoff)**.** *Un producto de espacios compactos es compactos*
Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es cualquier familia de espacios topologicos compactos, entonces $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es compacto.

Demostración. Es suficiente mostrar que cualquier sucesión $\langle x_i \rangle_{i \in I}$ in X tiene un punto de acumulación. Debemos hacer esto al examinar puntos de acumulación de las sucesiones $\langle \pi_B(x_i) \rangle$ en los subproductos de X. Sea

$$\mathcal{P} = \bigcup_{B \in A} \{p \in \prod_{\alpha \in B} X_\alpha : \text{p es un punto de acumulacion de } \langle \pi_B(x_i) \rangle\}$$

$\mathcal{P}$ es no vacío, debido a que cada X_α es compacto y entonces $\langle \pi_B(x_i) \rangle$ tiene puntos de acumulación cuando $B = \{\alpha\}$. Además, $\mathcal{P}$ es parcialmente ordenado por extensión; es decir, $p \leq q$ si q es una extensión definida como arriba.

Supóngase que $\{p_l : l \in L\}$ es un subconjunto linealmente ordenado de $\mathcal{P}$, donde $p_l \in \prod_{\alpha \in B_l} X_\alpha$. Sean $B^* = \bigcup_{l \in L} B_l$, y p^* el único elemento de $\prod_{\alpha \in B^*} X_\alpha$ que extiende cada p_l. Se dice que $p^* \in \mathcal{P}$, de hecho, de la definición de producto topológico, cualquier vecindad de p^* contiene un conjunto de la forma $\prod_{\alpha \in B^*} U_\alpha$ donde U_α es abierto en X_α y $U_\alpha = X_\alpha$ para casi toda alfa excepto un número finito de ellas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Cada una de estas α_j con $j = 1, \ldots, n$ pertenece a alguna B_l, entonces por el ordenamiento todas ellas pertenecen a una sola B_l. Pero entonces $\prod_{\alpha \in B_l} U_\alpha$ es una vecindad de p_l, entonces $\langle \pi_{B_l}(x_i) \rangle$ es frecuente en $\prod_{\alpha \in B_l} U_\alpha$; por lo tanto $\langle \pi_{B^*}(x_i) \rangle$ es frecuente en $\prod_{\alpha \in B^*} U_\alpha$, entonces p^* es un punto de acumulación de $\langle \pi_{B^*}(x_i) \rangle$. Por ende p^* es una cota superior para $\{p_l\}$ en $\mathcal{P}$.
Por el lema de Zorn, entonces $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximo $\bar{p} \in \prod_{\alpha \in \bar{B} X_\alpha}$. Supóngase que $A \neq B$, elíjase $\gamma \in A \setminus B$. Por la proposición anterior hay una subsucesión $\langle \pi_{\bar{B}}(x_{i(j)}) \rangle_{j \in J}$ de $\langle \pi_{\bar{B}}(x_i) \rangle$ que tiende a algún $\bar{p}$, ya que X_γ es compacto hay una subred $\langle \pi_\gamma(x_{i(j(k))}) \rangle_{k \in K}$

de $\langle \pi_\gamma(x_{i(j)})\rangle$ que tiende a alguna $p_\gamma \in X_\gamma$. Sea q el único elemento de $\prod_{\alpha\in\bar{B}\cup\{\gamma\}} U_\alpha$ que extiende ambos $\bar{p}$ y p_γ; entonces la sucesión $\langle \pi_{\bar{B}\cup\{\gamma\}}(x_{i(j(k))})\rangle_{k\in K}$ tiende a q y por lo tanto q es un punto de acumulación de $\langle \pi_{\bar{B}\cup\{\gamma\}}(x_i)\rangle$ lo cual contradice la maximalidad de $\bar{p}$. Por lo tanto $\bar{p}$ es un punto de acumulacion de $\langle x_i\rangle$.

Teorema §A.1.3. *Una función semicontinua inferior f alcanza su mínimo sobre cualquier conjunto compacto K.*

Demostración. Supóngase que f no tiene un mínimo y sea $\alpha = \inf f(K)$. Entonces para cada $x \in K$, se tiene $\alpha < f(x)$ y existe $\varepsilon(x) > 0$ que satisface:

$$\alpha < f(x) - \varepsilon(x).$$

Entonces por la semicontinuidad inferior, existe una vecindad de $U(x)$ de x tal que $f(x) - \varepsilon(x) < f(y)$ para toda $y \in U(x)$. Ahora $U(x)$ es una cubierta de K, entonces hay una cantidad finita de $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset U(x_1) \cup \cdots \cup \cdots \cup U(x_n).$$

Sea β dado por $\beta = \min f(x_k) - \varepsilon(x_k) : k = 1, \ldots, n$. Entonces $\alpha < \beta$, y para cualquier $y \in K$, $y \in U(x_k)$ para alguna k y por lo tanto $\beta \leq f(x_k) - \varepsilon(k) < f(y)$, lo cual significa $\beta \leq \inf f(K) = \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f debe alcanzar su mínimo en algún punto en K.

§A.2. Análisis

Sea X un conjunto no vacio. Un **álgebra** de conjuntos en X es un una colección no vacia A de subconjuntos de X que es cerrada bajo uniones finitas y complementos, en otras palabras, si $E_1, \ldots, E_n \in A$ entonces $\cup_1^n E_j \in A$; y si $E \in A$ entonces $E^c \in A$. Una **σ-álgebra** es un álgebra que es cerrada bajo uniones numerables. Si X es un espacio métrico , o más general un espacio topológico, la σ-álgebra generada por la familia de conjuntos abiertos en X (o equivalentemente , por la familia de conjuntos cerrados en X) es llamada la **σ-álgebra de Borel** en X y se denota por B_X. Sus miembros son llamados los **conjuntos de Borel**. Sea X un conjunto equipado con una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Una **medida** en $\mathcal{M}$ es una función $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty)$:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,

2. si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ conjuntos ajenos en $\mathcal{M}$, entonces $\mu(\cup_1^{\infty} E_j) = \sum_1^{\infty} \mu(E_j)$.

Definición §A.2.1. *Si X es un conjunto y $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra, $(X, \mathcal{M})$ es llamado un* ***espacio medible*** *y los conjuntos en $\mathcal{M}$ son llamados conjuntos medibles. Si μ es una medida en $(X, \mathcal{M})$, entonces $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es llamado un* ***espacio de medida****.*
Sea f una función definida en el espacio medible X, con valores en los reales extendidos. f se dice una ***función medible*** *si el conjunto $\{x|f(x) > a\}$ es medible para cada real a.*

Teorema §A.2.1. *(Convergencia Monótona) Sea $(X, \mathbf{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M(X, \mathbf{F}, [0, \infty))$ una sucesión creciente. Denotamos por $g : X \to [0, \infty)$ a la función límite*

$$g = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Entonces $g \in M(X, \mathbf{F}, [0, \infty))$ y

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Ver páginas 48 y 49 [6]

Corolario 2. *(Lema de Fatou) Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\bar{\mathbb{M}}^{+}(X, S)$ entonces: $\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in S$*

Ver página 51 [6]

Definición §A.2.2. *Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es llamada* ***absolutamente continua*** *si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada conjunto finito de intervalos ajenos $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$,*

$$\sum_1^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon.$$

Al conjunto de tales funciones F lo de notamos como $\mathcal{AC}$. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D_{f,R}$ denota al conjunto de puntos en R en los que f no es continua, es decir,

$$D_{f,R} = \{x \in R | f \text{ no es contina en } x\}$$

Teorema §A.2.2. *(de Lebesgue) Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada, f es integrable sobre R si y sólo si $D_{f,R}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Teorema §A.2.3. *(Teorema de la convergencia dominada) Sea $\{f_p\}$ una sucesión de funciones medibles sobre E que converge puntualmente a la función f y supongamos que existe una función F integrable sobre E tal que $|f_p| \leq F$ para todo p, entonces*

1. *f es integrable sobre E,*
2. *$\int_E f = \lim \int_E f_p$.*

Lema §A.2.1. *(de Gronwall) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y tal que $g(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, función continua tal que*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

entonces

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds.$$

§A.3. Convexidad

Definición §A.3.1. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **convexa** si y sólo si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in A$ y todo número $\theta \in [0, 1]$ se cumple la desigualdad*

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2).$$

Lema §A.3.1. *(desigualdad de Jensen) Si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida con $\mu(X) = 1$, $g : X \to (a, b)$ con $g \in L^1(\mu)$ y F convexa en (a, b) entonces*

$$F\left(\int g d\mu\right) \leq \int F \circ g d\mu.$$

Lema §A.3.2. *Sea f una función esencialmente suave y convexa. Si $f(0) = 0$ y $f*(x) = 0$ para alguna $x \in \mathbb{R}^d$ entonces $0 \in int(\mathcal{D}_f)$*

Ver página 342 [1]

Teorema §A.3.1. *(Rockafellar) Si $\Lambda : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$ es una función esencialmente suave, semicontinua inferior, convexa, entonces $ri(\mathcal{D}_{*^*}) \subset \mathcal{F}$.*

El **subdiferencial** de cualquier función convexa $g(x)$ en x es el conjunto $\{\lambda : g(y) \geq g(x) + \langle \lambda, y - x \rangle \forall y \in \mathbb{R}^d\}$

Demostración. Supóngase que $\mathcal{D}_{\Lambda^*} \neq \emptyset$. Sea un punto fijo $x \in ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$ y se define la función

$$f(\lambda) = \Lambda(\lambda) - \langle \lambda, x \rangle + \Lambda^*(x).$$

Si $f(\lambda) = 0$, entonces λ pertenece al subdiferencial de $\Lambda^*(\cdot)$ en x. La prueba de que $x \in \mathcal{F}$ está basada en mostrar que tal λ (como en la definición) existe y que pertenece a $\mathcal{D}^\circ_\Lambda$. Observa que $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ es una función convexa, semicontinua inferior y que $\inf_{\lambda \in \mathbb{R}^d} f(\lambda) = 0$. Se corrobora entonces que la transformada de Legendre de $f(\cdot)$ es $f^*(\cdot) = \Lambda^*(\cdot + x) - \Lambda^*(x)$. Por lo tanto, con $x \in ri(\mathcal{D}_{\Lambda^*})$ se sigue que $0 \in ri(\mathcal{D}_{f^*})$. Por el lema anterior existe una $\eta \in \mathcal{D}_{\Lambda^*}$ tal que $f(\eta) = 0$. Sea $\widetilde{\Lambda}(\cdot) = \Lambda(\cdot + \eta) - \Lambda(\eta)$. Por hipótesis, $\widetilde{\Lambda}$ es una función esencialmente suave, convexa y $\widetilde{\Lambda}(0) = 0$. Además $\widetilde{\Lambda}^*(x) = f(\eta) = 0$. En consecuencia por el Lema §A.3.2 $\widetilde{\Lambda}(\cdot)$ es finita en una vecindad al origen. Por lo tanto, $\eta \in \mathcal{D}^\circ_\Lambda$ y por hipótesis $f(\cdot)$ es diferenciable en η. Más aún, $f(\eta) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^d} f(\lambda)$, lo que implica que $\nabla f(\eta) = 0$, es decir, $x = \nabla \Lambda(\eta)$. Por lo tanto $x \in \mathcal{F}$.

§A.4. Integración estocástica

En un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Además se provee de una **filtración** $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}$. Una filtración es una familia de σ-álgebras $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}$ creciente: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s < t$.

Definición §A.4.1. *Una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty]$ es un* ***tiempo de paro*** *si el evento $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ con $0 \le t \le \infty$.*

Un **proceso estocástico** X en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una colección de variables aleatorias $(X_t)_{0 \le t \le \infty}$. El proceso X se dice **adaptado** si $X_t \in \mathcal{F}_t$ (es decir, es $\mathcal{F}_t$ medible) para cada t. Las funciones $t \mapsto X_t(\omega)$ mapeo $[0, \infty)$ en $\mathbb{R}$ son llamadas **trayectorias muestra** del proceso estocástico X.

Definición §A.4.2. *Un proceso estocástico X se dice* ***càdlàg*** *si tiene trayectorias que son continuas por la derecha con límites por la izquierda, casi seguramente.*

Definición §A.4.3. *Un proceso H se dice ser* ***predecible simple*** *si H tiene una representación*

$$H_t = H_0 \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbb{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$$

donde $0 = T_1 \le \cdots \le T_n$ es una secuencia finita de tiempos de paro, $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$ con $|H_i| < \infty$ con $0 \le i \le n$, casi seguramente.

La colección de procesos predecibles simpres se denota por S. Si equipamos a S por la topologia de la convergencia uniforme en (t, ω) se denota por S_u. Al espacio de variables aleatorias con valores finitos con la topología de la convergencia en probabilidad se denota por L^0.
Para un proceso dado X se define un mapeo lineal $I_X : S \to L^0$ como sigue:

$$I_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}),$$

donde $H \in S$ tiene la representación

$$H_t = H_0 \mathbb{I}_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbb{I}_{(T_i, T_{i+1}]}.$$

Definición §**A.4.4.** *Un proceso X es una **semimartingala total** si X es càdlàg, adaptado y $I_X : S_u \to L^0$ es continua.*

Para un proceso X y un tiempo de paro T, la notación X^T denota el proceso $(X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$.

Definición §**A.4.5.** *Un proceso X es llamado **semimartingala** si para cada $t \in [0, \infty)$, X^t es una semimartingala total.*

Teorema §**A.4.1.** *Cada proceso adaptado con trayectorias càdlàg de variación finita en compactos es una semimartingala.*

Demostración. Basta observar que $|I_X(H)| \leq |H|_u \int_0^\infty |dXs|$
El proceso H pertence a L si es de trayectorias càdlàg y es adaptado.

Definición §**A.4.6.** *Un operador F es un **funcional de Lipschitz** si para cada X, Y en $\mathbb{D}$ satisface las siguientes dos condiciones*

1. *para cualquier tiempo de paro T, $X^{T-} = Y^{T-}$ implica $F(X)^{T-} = F(Y)^{T-}$*

2. *existe un proceso creciente finito $K = (K_t)_{t \geq 0}$ tal que*

$$|F(X)_t - F(Y)_t| \leq K_t |X - Y|_t$$

casi seguramente para cada $t \geq 0$.

Teorema §A.4.2. *Sea Z una semimartingala, $Z_0 = 0$, el proceso $J \in D$ y el operador F funcional de Lipschitz, entonces la ecuación*

$$X_t = J_t + \int_0^t F(X)_{s-} dZ_s$$

tiene una solución en $\mathbb{D}$ y es única. Además si J es una semimartingala entonces también X es una semimartingala.

Demostración. ver página 197 Protter [8].

Bibliografía

[1] O. Zeitouni A. Dembo. *Large Deviations Techniques and Applications.* Springer, 1998.

[2] G.L. Torrisi A. Ganesh, C. Macci. Sample path large deviations principles for poisson shot noise processes and applications. *Electronic Journal of Probability*, 345:21, 2005.

[3] G.L. Torrisi A. Ganesh, C. Macci. A class of risk processes with reserve-dependent premium rate: sample path large deviations and importance sampling. *Elsevier*, 345:21, 2007.

[4] F. den Holander. *Large Deviations.* Fields Institute Monographs, 2000.

[5] H. Djehiche. A large deviation estimate for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 33:42–59, 1993.

[6] G. Grabinski. *Teoria de la medida.* Editoriales ciencias, 2009.

[7] A. Martin-Löf. Entropy, a useful concept in risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal*, 20:223–235, 1986.

[8] Protter. *Stochastic Differential Ecuations.* Springer, 1990.

[9] H.M. Nielsen S. Asmussen. Ruin probabilities via local adjustment coefficients. *Journal of Applied Probability*, 33:736–755, 1995.