UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GENERALIZACIÓN DE LA CAMINATA ALEATORIA ASOCIADA Y LA MARTINGALA DE WALD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ADRIÁN HINOJOSA CALLEJA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA
2013

1. Datos del alumno
Hinojosa
Calleja
Adrián
56 61 02 51
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
306652981

2. Datos del tutor
Dra
María Emilia
Caballero
Acosta

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ramsés Humberto
Mena
Chávez

4. Datos del sinodal 2
Dr
Arno
Siri
Jégousse

5. Datos del sinodal 3
Dr
José Luis
Pérez
Garmendia

6. Datos del sinodal 4
Dr
Fernando
Baltazar
Larios

7. Datos del trabajo escrito
Generalización de la caminata
aleatoria asociada y la martingala
de Wald
118 p
2013

A mi abuela Graciela Salicrup

Cambia lo superficial
Cambia también lo profundo
Cambia el modo de pensar
Cambia todo en este mundo

Cambia el clima con los años
Cambia el pastor su rebaño
Y así como todo cambia
Que yo cambie no es extraño

Cambia el más fino brillante
De mano en mano su brillo
Cambia el nido el pajarillo
Cambia el sentir un amante

Cambia el rumbo el caminante
Aunque esto le cause daño
Y así como todo cambia
Que yo cambie no es extraño

Cambia, todo cambia
Cambia, todo cambia

Fragmento de *Todo cambia* de Julio Numhauser

Agradecimientos

A la UNAM por 5 de los mejores años de mi vida,en los que y aprendí hice mías una de las cosas que más me apasionan en la vida: las matemáticas, por ser el proyecto cultural y social más importante de México y por que espero que cumplas 100 años más de ser pública, laica y gratuita. A la DGECI por otorgarme una beca para estudiar un semestre de intercambio en UCLA, en el cual entre muchas otras cosas invaluables estudié un gran curso de probabilidad. Al CONACYT que a través del Programa de Ayudantes de Investigador SNI apoyó este proyecto.

A todos los grandes maestros que he tenido, en particular a Paco Hernández por ser el primero en apoyar mis matemáticas; a Javier Páez por tus maravillosas clases de Cálculo y una amistad que sé, durará para siempre; a Gaby Campero por las mejores y más divertidas clases de Álgebra y por enseñarme que los espacios vectoriales no son triviales; a Mónica Clapp por dos extensivos, exhaustivos y excelentes cursos de Análisis Real con una probadita de Ecuaciones Diferenciales.

Quisiera agradecer especialmente a María Emilia Caballero, por que siempre he contado con tu apoyo incondicional, por motivarme para descubrir el mundo de la Probabilidad, aceptarme como tesista y proponerme un proyecto que resultó sacar lo mejor de mis capacidades matemáticas. A mis sinodales Ramsés Mena, Arno Siri Jégousse, José Luis Garmendía y Fernando Baltazar por tomarse el tiempo de leer esta tesis y por sus valiosas correcciones.

A mi psicóloga Elsa por que cada sábado aprendo a valorarme y quererme más.

A Pepis, Rogelio, Balam y Mariana por todo el cariño que he recibido de su parte. A mis amigos, los de toda la vida: Emanuel, Santiago, Rodrigo y Miguel; y con los que aprendí a sumar, restar y a veces multiplicar: Iván, Corro, Vicki, Jaime, Poncho y Sofía.

A Ximena por que estos últimos meses han sido increíbles a tu lado, te quiero muchísimo guapetona.

A mi abuelo Armando por esas inolvidables charlas con vaso de vino en mano, a mis tías Paqui y Nati por que mi amor por ustedes no puede caber en un vuelo de México a España, a mi hermano Gonzalo por que tu pensamiento crítico y forma

de ver el mundo me hacen sentir orgulloso, a mi papá Ariel por tus sacrificios por mí y mi hermano, a mi mamá Angelina por que extraño tus abrazos y por todos los esfuerzos que has hecho por nosotros.

De corazón a todos ustedes muchas gracias.

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar la teoría necesaria para poder comprender a profundidad el artículo *The associated random walk and martingales in random walks with stationary increments* publicado en el año 2010 por D. R. Grey [8]. En dicho artículo se define y estudia el concepto de caminata aleatoria asociada y martingala de Wald, se dan las condiciones para poder generalizarlo y finalmente se analizan ejemplos que cumplen dichas condiciones.

En el capítulo introductorio demostraremos las leyes 0-1: de Lévy y de Hewitt-Savage. Después introduciremos el concepto de caminata aleatoria y veremos como a partir de la Ley 0-1 de Hewitt-Savage podemos caracterizar su comportamiento asintótico.

Posteriormente estudiaremos el caso en que la transformada de Laplace de una caminata aleatoria satisface la condición de Crámer. En tal caso se puede construir la caminata aleatoria asociada . Mostraremos que si una caminata aleatoria satisface que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ c. s. entonces su caminata aleatoria asociada cumplirá que $\lim_{n\to\infty} S_n^* = -\infty$ c. s.. También construiremos la martingala de Wald a partir de una caminata aleatoria con condición de Crámer.

En el capítulo siguiente observaremos que para generalizar el concepto de caminata aleatoria asociado es necesario un proceso erdódico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla una condición similar a la de Crámer. Así construiremos un proceso asociado de manera análoga al caso de la caminata aleatoria asociada.

Es particularmente interesante la Proposición 3.18 donde se construye la medida de probabilidad para el proceso asociado, dicha demostración no está desarollada con detalle en el artículo de Grey. Para poder hacer esta demostración, utilizamos una técnica similar a la que se usa para probar el Teorema de Extensión de Kolmogorov, en la cual es fundamental que en un espacio de probabilidad definido en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ todo evento puede ser aproximado por un conjunto compacto.

Una vez dadas las condiciones para generalizar consideramos dos ejemplos que las satisfacen

1. Una cadena de Markov con incrementos estacionarios (Capítulo 4).

2. Un proceso con incrementos estacionarios gaussianos (Capítulo 5).

En la Proposicion 4.11 se muestra que una cadena de Markov irreducible con incrementos estacionarios es ergódica. De la misma manera en la Proposición 5.9 se muestra que un proceso con incrementos estacionarios gaussianos cuyos coeficientes de correlación convergen a cero es ergódico. Nada de esto es trivial ni está desarrollado en el artículo de Grey. Para poder hacer la demostración es necesario utilizar la convergencia de funciones características.

Otro detalle muy importante es que en el capítulo de caminata aleatoria asociada observamos que se satisface una relación de dualidad, si una caminata aleatoria S_n tiene caminata asociada S_n^* entonces esta tambien tendrá caminata asociada y volverá a ser la inicial es decir $S_n^{**} = S_n$. Al generalizar, dicha dualidad no siempre es válida, este resultado no es analizado a profundidad en este trabajo, para mayor información consúltese la tercer sección del artículo de Gray [8]. En los casos estudiados en los capítulos 3 y 4 si se satisface la dualidad.

En el último capítulo extendemos estas nociones al caso de procesos en tiempo continuo (que no es tratado en el artículo de Grey), y se trabaja con procesos de Lévy. Se hace una breve introducción a los procesos de Lévy y nos planteamos bajo qué condiciones un proceso de Lévy tiene proceso de Lévy asociado y cuáles de las propiedades de las caminatas aleatorias se preservan en este caso. La condición de Crámer para procesos de Lévy es fundamental en este capítulo.

Para poder leer esta tesis es altamente recomendado tener los conocimientos de un primer curso de probabilidad a nivel licenciatura así como los de un curso básico de teoría de la medida, además de comprender el concepto de esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra. Toda la demás teoría se desarrolla en la tesis o se da la referencia exacta para poder consultarla.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo probaremos dos generalizaciones de la Ley 0-1 de Kolmogorov: La Ley 0-1 de Lévy y la Ley 0-1 de Hewitt Savage. La Ley 0-1 de Lévy nos será útil más adelante. Al final de este capítulo utilizaremos la Ley 0-1 de Hewitt Savage para caracterizar el comportamiento asintótico de las caminatas aleatorias.

1.1. Ley 0-1 de Lévy y de Kolmogorov

Definición 1.1. *Sea* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una filtración en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *es decir una sucesión de* σ*-álgebras que satisface* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

a) Decimos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias está adaptada a* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* X_n *es* $\mathcal{F}_n$*-medible para toda* $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cumple que*

1. $E(|X_n|) < \infty$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *esta adaptada a* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es martingala con respecto a* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Una martingala se puede interpretar como un fenómeno aleatorio que evoluciona en el tiempo y cuya información al tiempo n está descrita por $\mathcal{F}_n$. Un ejemplo de esto sería un modelo para el desarrollo de un juego justo.

El siguiente resultado se puede consultar en [5] Teo 5.2.8.

Teorema 1.2 (Convergencia de martingalas)**.** *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala con respecto a una filtración* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\sup\{E(X_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty$ *entonces existe* X *una variable aleatoria,* $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$*-medible tal que*

a) $E|X| < \infty$.

b) $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *c.s.*

Aplicando este resultado podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Teorema de Lévy hacia adelante)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad, si tenemos una filtración* $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ *y* Y *una variable aleatoria integrable* $\mathcal{F}$*-medible entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(Y|\mathcal{G}_n) = E(Y|\mathcal{G}) \textit{ c.s. y en } L^1.$$

Demostración. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n = E(Y|\mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala. En efecto

1. Para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$E(|X_n|) = E(|E(Y|\mathcal{G}_n)|) \leq E(E(|Y| \mid \mathcal{G}_n) = E(|Y|) < \infty$$

ya que Y es integrable, por lo que se cumple la condición de integrabilidad.

2. Por definición de esperanza condicional $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está adaptada a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) = E(E(Y|\mathcal{G}_{n+1})|\mathcal{G}_n) = E(Y|\mathcal{G}_n) = E(X_n)$ ya que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$, (por la propiedad de anidamiento de la esperanza condicional).

Por 1. tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{E(X_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}} \leq \sup\{E(|X_n|)\}_{n\in\mathbb{N}} \leq E(|Y|) < \infty$$

y por el Teorema de Convergencia de Martingalas existe una variable aleatoria X integrable y $\mathcal{G}$-medible tal que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ c.s.}$$

y el Teorema de Covergencia Dominada nos permite afirmar que la convergencia también es válida en L^1.

Nos resta que verificar que $X = E(Y|\mathcal{G})$ c.s., observemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. X es $\mathcal{G}$-medible pues es límite de funciones $\mathcal{G}$-medibles.
2. Sea $A \in \mathcal{G}_{n_0}$. Para toda $n \geq n_0$

$$\int_A X_n dP = \int_A E(Y|\mathcal{G}_n) dP = \int_A Y dP$$

por que $A \in \mathcal{G}_{n_0} \subset \mathcal{G}_n$. Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \int_A \lim_{n\to\infty} X_n dP = \int_A X dP = \int_A Y dP.$$

En consecuencia para toda $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ se cumple la igualdad anterior y como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ es un π-sistema en $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ tenemos que para toda $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

Por los dos puntos anteriores y por la unicidad de la esperanza condicional $X = E(Y|\mathcal{G})$ c.s.

$\square$

Corolario 1.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, si tenemos una filtración $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ y Y una variable aleatoria integrable y medible con respecto a $\mathcal{G}$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(Y|\mathcal{G}_n) = Y \text{ c.s. y en } L^1.$$

Demostración. Es claro por el Teorema 1.3 ya que como Y es una variable aleatoria $\mathcal{G}$ medible

$$E(Y|\mathcal{G}) = Y \text{ c.s.}$$

$\square$

Corolario 1.5 (Ley 0-1 de Lévy)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si tenemos una filtración $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ y $A \in \mathcal{G}$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_n) = \mathbb{1}_A \text{ c.s. y en } L^1.$$

Demostración. Es claro inmediato del Corolario 1.4 pues $\mathbb{1}_A$ es $\mathcal{G}$-medible. $\square$

Con esto queda demostrada la ley 0-1 de Lévy la cual utilizaremos posteriormente en la tesis. Por completez deseamos dar una demostración de la ley 0-1 de Kolmogorov usando el resultado anterior. La ley 0-1 de Kolmogorov está relacionada con la σ-álgebra cola misma que definiremos a continuación.

Definición 1.6. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias en un espacio de probabilidad, sea $\mathcal{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, sea $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i$. $\mathcal{T}$ se llama la σ-álgebra cola de $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

Intuitivamente un elemento de la σ-álgebra cola se caracteriza por que si cambiamos un número finito de valores no afecta su ocurrencia, es decir el evento depende unicamente de la cola de la sucesión de variables aleatorias.

Teorema 1.7 (Ley 0-1 de Kolmogorov)**.** *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes en un espacio de probabilidad, sea $A \in \mathcal{T}$ un evento en la σ-álgebra cola de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces*

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}$, sean $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ...X_n)$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i)$. Es claro que $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ por lo cual $A \in \mathcal{F}$. Como $A \in \mathcal{T}$ en particular $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, por lo cual A es independiente de $\mathcal{F}_n$ y así

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) = P(A).$$

Como $A \in \mathcal{F}$ por la Ley 0-1 de Lévy al ser $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_A$$

de donde concluimos $P(A) \in \{0, 1\}$.

□

1.2. Ley 0-1 de Hewitt Savage y de Kolmogorov

Para poder analizar el comportamiento asintótico de las caminatas aleatorias es necesario contar con un resultado que generalice la Ley 0-1 de Kolmogorov: la Ley 0-1 de Hewitt Savage.

Observemos primero que la construcción de los borelianos en $\mathbb{R}^n$ puede ser extendida para construir los borelianos del espacio

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, ...) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.8. *Sea $\mathcal{C}$ la familia de los cilindros finito dimensionales en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es decir*

$$\mathcal{C} := \{R \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : R = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty\}.$$

Definimos a los borelianos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma(\mathcal{C})$.

El Teorema de Extensión de Kolmogorov nos da condiciones bajo las cuales si tenemos una colección de medidas $\{P^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se pueden extender de manera única a una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, la demostración se puede consultar en [5] Teo A.3.1.

Teorema 1.9 (Teorema de Extensión de Kolmogorov)**.** *Sean $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad consistentes en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decir que para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $a_i < b_i$, $i = 1, 2..., n$ se tiene*

$$P^{n+1}((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}) = P^n((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]).$$

Entonces existe una única medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que

$$P((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P^n((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]).$$

En particular podemos usar este teorema cuando $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias i.i.d. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, ...A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definimos

$$P^n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) := P(X_1 \in A_1, ...X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

y se puede extender a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de manera única ya que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ-álgebra generada por los cilindros finito dimensionales y obtenemos así el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P^n)$.

Es claro que la familia $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medidas consistentes y por el Teorema de Extensión de Kolmogorov existe una única medida de probabilidad $P^{\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $X := (X_1, X_2, ...)$:

$$P^{\mathbb{N}}(X \in B) = P^n((X_1, ..., X_n) \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \in B; X_j(\omega) \in \mathbb{R}, j \neq 1...n\}.$$

Ahora vamos a ver un resultado que nos permitirá aproximar a los borelianos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y que nos será útil para demostrar la Ley 0-1 de Hewitt Savage. Sean $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ las sub σ-álgebras de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ definidas por

$$\mathcal{F}_i := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : A = B \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

y consideremos a las familias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ definidas a continuación

$$\mathcal{C} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i,$$

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : \text{para toda } \varepsilon > 0, \text{ existe } B \in \mathcal{C} \text{ tal que } P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.10. $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *es decir la familia* $\mathcal{C}$ *nos permite aproximar a cualquier conjunto de* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Demostración. Observemos que $\mathcal{C}$ es un π-sistema pues:

1. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$.

2. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ entonces $A = C \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,$B = D \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $m = n + l$, así tenemos que $A \cap B = ((C \times \mathbb{R}^l) \cap B) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y como $(C \times \mathbb{R}^l) \cap B \in \mathbb{R}^m$, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Veamos que $\mathcal{D}$ es un λ-sistema. De hecho probaremos que es una σ-álgebra y en consecuencia es λ-sistema.

Es claro que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$, por que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que si $A \in \mathcal{D}$ entonces $A^c \in \mathcal{D}$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $B \in \mathcal{C}$ tal que $P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) < \varepsilon$. Como $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $B \in \mathcal{C}$ es claro que $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $B^c \in \mathcal{C}$ y como es una propiedad de la diferencia simétrica que $A \triangle B = A^c \triangle C^c$, $P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) = P^{\mathbb{N}}(A^c \triangle C^c)$ por lo cual $A^c \in \mathcal{D}$.

Por último veremos que si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$. Primero se verá el resultado para uniones finitas y esto se hará por inducción. Sean $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ tales que $A_i \cap Aj = \emptyset$ para $i \neq j$. Primero probemos por inducción que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ es trivial.

H.I. Supongamos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ entonces existe $B \in \mathcal{C}$ tal que

$$P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $A_{n+1} \in \mathcal{D}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que

$$P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \triangle c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \triangle (B \cup C)) &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) - 2P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \cap (B \cup C)) + P^{\mathbb{N}}(B \cup C) \\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap (B \cup C)) \\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \cap (B \cup C))\big] + P^{\mathbb{N}}(B \cup C)
\end{aligned}$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Continuando con el desarrollo

$$\begin{aligned}
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap (B^c \cap C)) \\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \cap C) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \cap (B \cap C^c))\big] + P^{\mathbb{N}}(B \cup C) \\
&\leq P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B) \\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \cap C)\big] + P^{\mathbb{N}}(B) + P^{\mathbb{N}}(C) \\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangle B) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \triangle C) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \in \mathcal{D}$ y por inducción $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Por la observación anterior existe $B \in \mathcal{D}$ tal que $P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo cual

$$\begin{aligned}
P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangle B) &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)
\end{aligned}$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Continuando con el desarrollo

$$\begin{aligned} &\leq P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \triangle B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) < \varepsilon \end{aligned}$$

y se concluye que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Es decir hemos probado que $\mathcal{D}$ es un λ-sistema. El Teorema de la Clase Monótona nos permite afirmar que $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y como $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ concluimos $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

□

Con los resultados anteriores podremos estudiar la Ley 0-1 de Hewitt Savage para lo cual solo nos falta definir un par de nuevos conceptos.

Definición 1.11. *Sea $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ decimos que π es una permutación finita si es biyectiva y $\pi(n) = n$ para todo n excepto en un número finito de casos.*

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias y $X = (X_1, X_2, ...)$un vector aleatorio infinito decimal definimos

$$\pi(X) := (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, ...).$$

Si $A = \{X \in B\}$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ denotamos

$$\pi(A) := \{\pi(X) \in B\}.$$

Definición 1.12. *Decimos que un evento $A = \{X \in B\}$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ es simétrico si $\pi(A) = A$, para toda permutación finita π.*

Teorema 1.13 (Ley 0-1 de Hewitt Savage)**.** *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. y sea $A = \{X \in B\}$ un evento simétrico entonces $P^{\mathbb{N}}(A) \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Sea $A = \{X \in B\}$ un evento simétrico. Por la Proposición 1.10 para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que si

$$A_n := \{X \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup A_n) = 0. \tag{1.1}$$

Consideremos la siguiente permutación finita

$$\pi_n(m) := \begin{cases} \text{n+m} & \text{si } 1 \leq m \leq n \\ \text{m - n} & \text{si } n < m < 2n \\ \text{m} & \text{si } 2n < m. \end{cases}$$

Como las variables aleatorias $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P^{\mathbb{N}}(X \in B) = P^{\mathbb{N}}(\pi_n(X) \in B).$$

Así

$$P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup A_n) = P_X(B \bigtriangleup B_n) = P_{\pi_n(X)}(B \bigtriangleup B_n). \tag{1.2}$$

Como A es simétrico se tiene que

$$A = \{X \in B\} = \pi_n(A) = \{\pi_n(X) \in B\}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} P_{\pi_n(X)}(B \bigtriangleup B_n) &= P^{\mathbb{N}}((\pi_n(X) \in B) \bigtriangleup (\pi_n(X) \in B_n)) \\ &= P^{\mathbb{N}}((X \in B) \bigtriangleup (\pi_n(X) \in B_n)) = P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup \pi_n(A_n)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Así por (1.2) y (1.3) tenemos

$$P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup A_n) = P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup \pi_n(A_n)). \tag{1.4}$$

Es una propiedad de la diferencia simétrica que

$$A \bigtriangleup (A_n \cap \pi_n(A_n)) \subseteq (A \bigtriangleup A_n) \cup (A \bigtriangleup \pi_n(A_n)).$$

Por (1.4)

$$P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup (A_n \cap \pi_n(A_n))) \leq P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup A_n) + P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup \pi_n(A_n))$$

$$= 2P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup A_n)$$

por lo cual por (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A \bigtriangleup (A_n \cap \pi_n(A_n))) = 0. \tag{1.5}$$

Como $P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n) = P^{\mathbb{N}}(A \backslash A_n) + P^{\mathbb{N}}(A_n \backslash A)$ por (1.1) tenemos que $\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A\backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n \setminus A) = 0$, por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A \setminus A_n) - P^{\mathbb{N}}(A_n \setminus A)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A) - P^{\mathbb{N}}(A \cap A_n) + P^{\mathbb{N}}(A \cap A_n) - P^{\mathbb{N}}(A_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A) - P^{\mathbb{N}}(A_n)) \end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A). \tag{1.6}$$

Análogamente por (1.4) usando (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(\pi_n(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A) \tag{1.7}$$

y por (1.5)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n \cap \pi_n(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A). \tag{1.8}$$

Finalmente por la independencia de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} P^{\mathbb{N}}(A_n \cap \pi_n(A_n)) &= P^{\mathbb{N}}(X \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \pi_n(X) \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n, (X_{\pi_n(1)}, X_{\pi_n(2)}, ...X_{\pi_n(n)}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n) P^n((X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n) P^n((X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^{\mathbb{N}}(X \in B_n) P^{\mathbb{N}}(\pi_n(X) \in B_n) \\ &= P^{\mathbb{N}}(A_n) P^{\mathbb{N}}(\pi_n(A_n)) \end{aligned}$$

y por (1.6), (1.7) y (1.8), $P^{\mathbb{N}}(A) = P^{\mathbb{N}}(A)^2$ por lo cual

$$P^{\mathbb{N}}(A) \in \{0, 1\}.$$

□

Por último igual que en la sección anterior podemos ofrecemos nueva demostración de la Ley 0-1 de Kolmogorov.

Teorema 1.14 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes en un mismo espacio de probabilidad, sea $A \in \mathcal{T}$ un evento en la σ-álgebra de cola entonces*

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}$, sea π una permutación finita, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\pi(n) = n$. Como A está en la σ-álgebra de cola entonces $A \in \sigma(X_{n_0}, X_{n_0+1,\dots})$ por lo cual $\pi(A) = A$ y así A es un evento simétrico, en consecuencia, por la Ley 0-1 de Hewitt Savage,

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

$\square$

1.3. Comportamiento asintótico de caminatas aleatorias

El comportamiento asíntótico de las caminatas aleatorias será central en esta tesis, en esta sección demostraremos que se puede caracterizar de una manera bastante simple.

Definición 1.15. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, al proceso $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\}_{n\in\mathbb{N}}$, se le conoce como caminata aleatoria.*

El siguiente teorema caracteriza el comportamiento de las caminatas aleatorias para demostrarlo utilizaremos la Ley 0-1 de Hewitt Savage.

Teorema 1.16. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n$ *y* $\liminf\limits_{n\to\infty} S_n$ *no son ambos finitos salvo en el caso trivial cuando* $S_n = 0$ *c.s. para toda* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Las siguientes tres posibilidades son excluyentes*

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ *c.s.*

   (b) $-\infty = \liminf\limits_{n\to\infty} S_n < \limsup\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ *c.s.*

(c) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *c.s.*

Demostración. Sean $Y = \limsup_{n\to\infty} S_n$, $A_b = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = b, b \in [-\infty, \infty]\}$. Sea π una permutación finita entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ $\pi(n) = n$. Así

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n} S_m) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n\geq n_0} S_m) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n\geq n_0} S_m) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\sup_{\pi(m)\geq n} S_m) = \limsup_{n\to\infty} S_{\pi(n)}\end{aligned}$$

entonces A_b es simétrico. Por la Ley 0-1 de Hewitt-Savage A_b tiene probabilidad 0 ó 1 y así existe $c \in [-\infty, \infty]$ tal que $\limsup_{n\to\infty} S_n = c$ c.s. Análogamente existe $d \in [-\infty, \infty]$ tal que $\liminf_{n\to\infty} S_n = d$ c.s.

Tenemos tres casos:

Caso 1) $c \in \mathbb{R}$**.**

Como las variables aleatorias son i.i.d. si $S_n^{'} = \sum_{i=2}^{n+1} X_i$ tenemos que

$$c = \limsup_{n\to\infty} S_n = X_1 + \limsup_{n\to\infty} S_n^{'} = X_1 + c \text{ c.s.}$$

Así $X_1 = 0$ c.s. e inductivamente $S_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ c.s. y se cumple el caso trivial. Ahora veamos que en los demás casos sucede lo enunciado en el inciso 2. de este teorema.

Caso 2) $c = \infty$**.**

Observemos que si $d \in \mathbb{R}$ como $\liminf_{n\to\infty} S_n = d$ entonces de manera análoga al caso anterior concluimos que $S_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ c.s. lo cual contradice que $c = \infty$.

Así solo tenemos dos posibilidades:

Subcaso 1) $d = \infty$**.**

Entonces $\liminf_{n\to\infty} S_n = \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ por lo que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s. y se cumple 2.(a).

Subcaso 2) $d = -\infty$**.**

Entonces $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ c.s, $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s. y se cumple 2.(b).

Caso 3) $c = -\infty$**.**

Como $-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty$, se satisface $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ c.s. correspondiente al inciso 2.(c).

□

Capítulo 2

La caminata aleatoria asociada y la martingala de Wald

En este capítulo definiremos el concepto de caminata aleatoria asociada y analizaremos algunas de sus propiedades, también construiremos la martingala de Wald.

2.1. La caminata aleatoria asociada

En el capítulo anterior demostramos que las caminatas aleatorias tienen cuatro posibles tipos de comportamiento asintótico. Si determinamos el valor de la esperanza de X_1, en algunos casos podremos conocer el comportamiento asintótico de la caminata aleatoria.

Proposición 2.1. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria tal que* $0 < E(X_1) < \infty$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ c.s.$$

Demostración. Sea $c = E(X_1)$ por la Ley Fuerte de los Grandes Números tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c \text{ c.s.}$$

Como $c > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon > 0$, además por el límite anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|\frac{S_n}{n} - c| < c - \varepsilon.$$

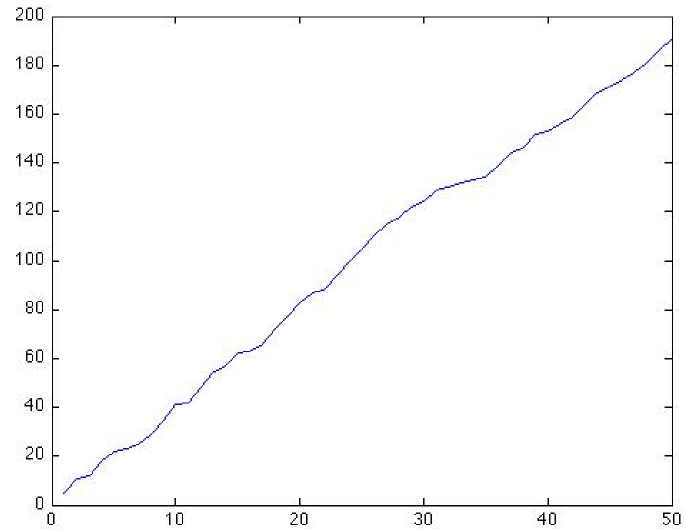


Figura 2.1: Primeros 50 pasos de una caminata aleatoria con distribución uniforme discreta en $\{1,2,3,4,5,6\}$ es decir con $E(X_1) = \frac{7}{2}$

En particular

$$c - \frac{S_n}{n} < c - \varepsilon$$

despejando

$$n\varepsilon < S_n.$$

Haciendo tender n a infinito

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

$\square$

La siguiente proposición es análoga:

Proposición 2.2. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria tal que $-\infty < E(X_1) < 0$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \ c.s.$$

Definición 2.3. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria con* $0 < E(X_i) < \infty$ *ó* $-\infty < E(X_i) < 0$ *y* F *la función de distribución de* X_1*, si existe* $\theta \neq 0$ *tal que*

$$E(e^{-\theta X_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF(x) = 1$$

decimos que cumple la condición de Crámer. En tal caso definimos la función de distribución

$$F^*(s) := \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x).$$

La caminata aleatoria $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i^* \quad {}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* X_i^* *tiene función de distribución* F^* *es la caminata aleatoria asociada de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

En la siguiente proposición mostramos las propiedades principales de la caminata aleatoria asociada:

Proposición 2.4. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria tal que* $0 < E(X_1) < \infty$ *con caminata aleatoria asociada entonces*

1. θ *es positivo.*

2. θ *es único.*

3. X_i *no puede ser constante c.s. y en consecuencia* X_i^* *tampoco.*

4. $E(X_1^*) < 0$.

5. $(F^*)^* = F$.

6. *La caminata aleatoria asociada tiene caminata aleatoria asociada y es la caminata aleatoria original.*

Demostración. 1. Sea $\phi(x) := e^{-\theta x}$, $x \in \mathbb{R}$, es claro que ϕ es convexa. Entonces por la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)\Big) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x) \\
\phi(E(X_i)) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF(x) = 1 \\
e^{-\theta E(X_i)} &\leq 1
\end{aligned}$$

como la función exponencial es creciente y $e^0 = 1$

$$-\theta E(X_i) \leq 0.$$

Así como $\theta \neq 0$ y $E(X_i) > 0$ concluímos $\theta > 0$.

2. Sea $K > 0$ una constante positiva. Observemos que por la Proposición 2.1 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

Por lo que, como θ es positivo

$$\lim_{n\to\infty} -\theta S_n = -\infty \text{ c.s.}$$

lo que implica, por continuidad de la función exponencial que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n} = 0 \text{ c.s.}$$

Si $S_n \geq -K$ entonces como θ es positivo $e^{-\theta S_n} \leq e^{\theta K}$. Así tenemos la siguiente desigualdad

$$e^{-\theta S_n} \mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}} \leq e^{\theta K} \mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}} \leq e^{\theta K}.$$

Como la función constante $e^{\theta K}$ es integrable entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; S_n \geq -K) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n} \mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}})$$

$$= E(\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n} \mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}}) = E(0) = 0.$$

Así debido a que $E(e^{-\theta S_n}) = E(e^{-\theta S_n}; S_n \geq -K) + E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K)$ y por la independencia de las v.a. tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta X_i})^n = 1 \tag{2.1}$$

en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K) = 1.$$

Supongamos que existe otro real positivo $a \neq \theta$ tal que $E(e^{-aX_i}) = 1$, tenemos dos casos:

Caso 1) $0 < a < \theta$. Una vez más tenemos que si $S_n \leq -K$ por la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} S_n(\theta - a) &\leq -K(\theta - a) \\ -aS_n &\leq -K(\theta - a) - S_n\theta \\ e^{-aS_n} &\leq e^{K(\theta - a) - S_n\theta} \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq \lim_{n\to\infty} E(e^{-K(\theta-a)-S_n\theta}) = e^{-(\theta-a)K}$$

la última igualdad es debida a (2.1).
Por un razonamiento análogo al que se hizo con θ, si a satisface las hipótesis de esta proposición

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq e^{-(\theta-a)K}.$$

Como K es positiva y arbitraria al hacer tender n a infinito, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = 0$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno.

Caso 2) $\theta < a$.

De manera análoga tendríamos que

$$e^{-(\theta-a)K} \leq= \lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \liminf_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K).$$

Como K es positiva y arbitraria conluíriamos que $\lim\limits_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \infty$, lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno. Una vez agotados los dos casos posibles tenemos que θ es única.

3. Supongamos que $X_i = c$ c.s. entonces

$$E(e^{-\theta X_i}) = e^{-\theta c} = 1$$
$$-\theta c = 0.$$

Como θ es distinto de cero $c = 0$, lo cual es una contradicción pues X_i tiene esperanza distinta de cero.

Ahora supongamos que $X_i^* = c$ c.s. tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\theta c} = E(e^{\theta X_i^*}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\theta x} dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1 \end{aligned}$$

entonces $\theta c = 0$. Como θ es distinto de cero entonces $c = 0$. Por lo cual la función de distribución F^* estaría dada por

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq s, \end{cases}$$

como la función exponencial es estrictamente positiva y F es la función de distribución de X tendríamos que $X = 0$ c.s. lo cual es una contradicción pues la esperanza de X es positiva.

4. Razonemos de manera análoga al inciso 1. de esta proposición sea $\varphi(x) := e^{\theta x}$. φ es estrictamente convexa pues θ es distinto de cero, además como X_i^* es no constante por la desigualdad estricta de Jensen

$$\varphi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x dF^*(x)\Big) < \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF^*(x)$$

$$\varphi(E(X_i^*)) < \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

Es decir,

$$e^{\theta E(X_i^*)} = \varphi(E(X_i^*)) < 1.$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente y $e^0 = 1$

$$\theta E(X_i^*) < 0.$$

Como $\theta > 0$ concluímos $E(X_i^*) < 0$.

5. Definamos las siguientes medidas de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu(E) := \int_E dF(x), \lambda(E) := \int_E dF^*(x)$$

Por la definición de F^* tenemos que

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu$$

Lo que muestra que μ es absolutamete continua con respecto a λ ya que si para algún $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu = 0.$$

Entonces como $e^{-\theta x} > 0$, $\mu(E) = \displaystyle\int_E d\mu = 0$.

Así por la Proposición A.4 del apéndice y por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym

$$\int e^{\theta x} d\lambda = \int e^{\theta x} e^{-\theta x} d\mu = \int d\mu = 1$$

En consecuencia por la definición de λ

$$E(e^{\theta X_i^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int e^{\theta x} d\lambda = 1.$$

Por lo cual

$$(F^*)^*(s) = \int_{-\infty}^{s} dF(x) = F(s)$$

6. Esta afirmación es inmediata por los incisos anteriores.

□

De manera análoga si la caminata aleatoria tuviera esperanza negativa tendríamos el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria tal que $-\infty < E(X_1) < 0$ con caminata aleatoria asociada entonces*

1. *θ es negativo.*
2. *θ es único.*
3. *X_i no puede ser constante c.s. y en consecuencia X_i^* tampoco.*
4. *$E(X_1^*) > 0$.*
5. *$(F^*)^* = F$.*
6. *La caminata aleatoria asociada tiene caminata aleatoria asociada y es la caminata aleatoria original.*

Observemos que por la Proposiciones 2.1, 2.4 y 2.5 si una caminata aleatoria S_n tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

Entonces su caminata aleatoria asociada S_n^* tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = -\infty \text{ c.s.}$$

De la misma forma si tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \text{ c.s.}$$

Entonces su caminata aleatoria asociada S_n^* tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \infty \text{ c.s.}$$

2.2. La martingala de Wald

La existencia de la caminata aleatoria asociada también nos permite la construir una martingala:

Proposición 2.6. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria con caminata aleatoria asociada $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es decir que satisface la condición de Crámer entonces $(V_n := e^{-\theta S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala con respecto a la filtración $(\sigma(X_1, ..., X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Como $e^{-\theta x} > 0$ y $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son independientes tenemos que

$$E|V_n| = E(e^{-\theta S_n}) = (E(e^{-\theta X_i}))^n = 1$$

pues $E(e^{-\theta X_i}) = 1$, lo que prueba que V_n es integrable para toda $n \in \mathbb{N}$ y es inmediato comprobar que V_n es $\sigma(X_1, ..., X_n)$-medible.

Finalmente utilizando propiedades básicas de la esperanza condicional

$$\begin{aligned} E(V_{n+1}|\sigma(X_1, ..., X_n)) &= E(e^{-\theta S_n} e^{-\theta X_{n+1}}|\sigma(X_1, ..., X_n)) \\ &= e^{-\theta S_n} E(e^{-\theta X_{n+1}}|\sigma(X_1, ..., X_n)) \\ &= e^{-\theta S_n} E(e^{-\theta X_{n+1}}) = e^{-\theta S_n} = V_n \end{aligned}$$

ya que $E(e^{-\theta X_{n+1}}) = 1$.

□

Definición 2.7. *Si una caminata aleatoria $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene caminata aleatoria asociada $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ decimos que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la martingala de Wald asociada a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2.3. Ejemplos

En general no todas las caminatas aleatorias tienen caminata aleatoria asociada, a continuación un par de ejemplos.

Ejemplo 2.1 (Distribución de Poisson)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución de Poisson $Pois(\lambda)$. En este caso la caminata aleatoria no tiene caminata aleatoria asociada pues

$$\begin{aligned} \psi(t) = E(e^{-tX_i}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-tk} e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-tk} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-t}\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{e^{-t}\lambda} = e^{\lambda(e^{-t}-1)}. \end{aligned}$$

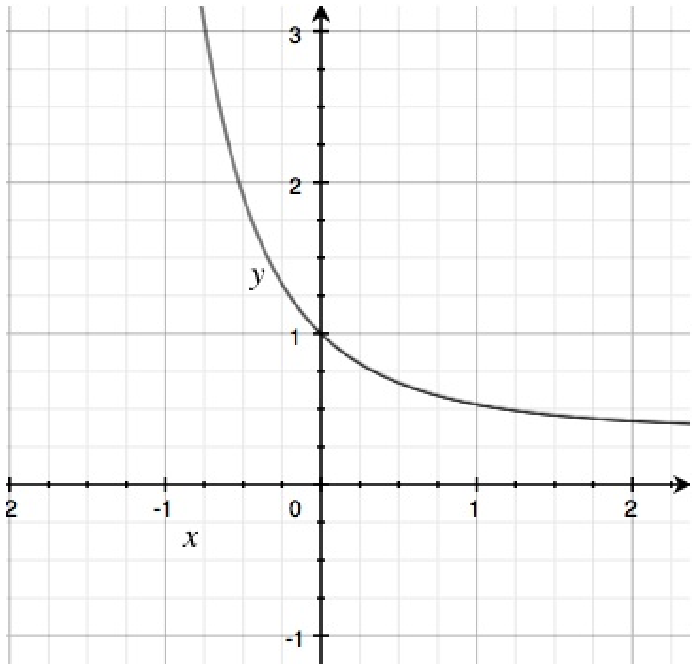


Figura 2.2: ψ en el caso $Pois(1)$

Como $\lambda > 0$, $\psi(t) = 1$ si y sólo si $t = 0$.

Ejemplo 2.2 (Distribución uniforme)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme $\mathcal{U}(a,b)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $-\infty < a < 0 < b < \infty$ y $a+b > 0$. Así tenemos que utilizando las propiedades de la distribución uniforme

$$E(X_i) = \frac{a+b}{2} > 0$$

$$\psi(t) = E(e^{-tX_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{-tb}-e^{-ta}}{-t(b-a)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por el Teorema de L'Hopital

$$\psi'(t) = \begin{cases} \frac{-a-b}{2} & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{-t(a+b)}[e^{tb}(at+1)-e^{ta}(bt+1)]}{t^2(a-b)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

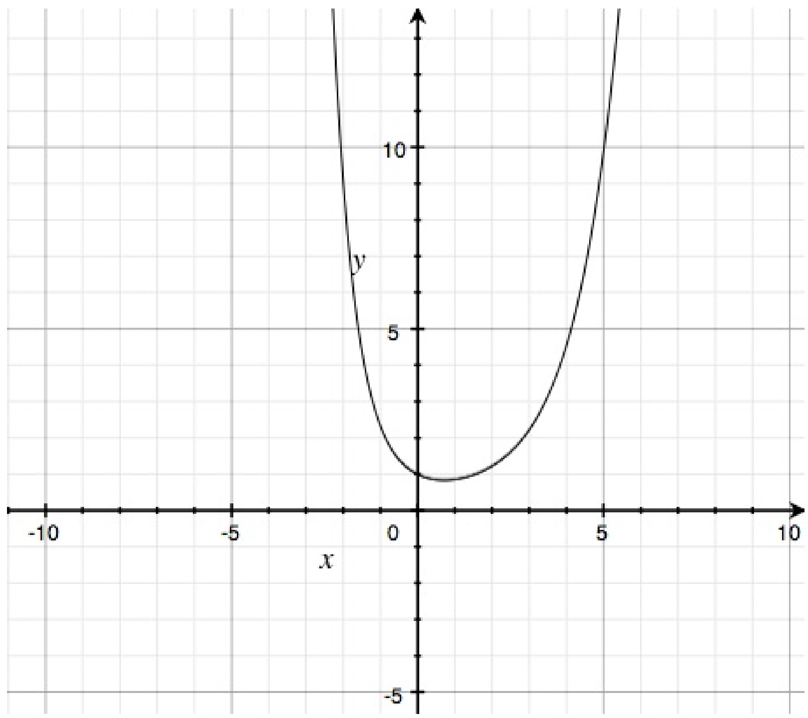


Figura 2.3: ψ en el caso $\mathcal{U}(-1,2)$

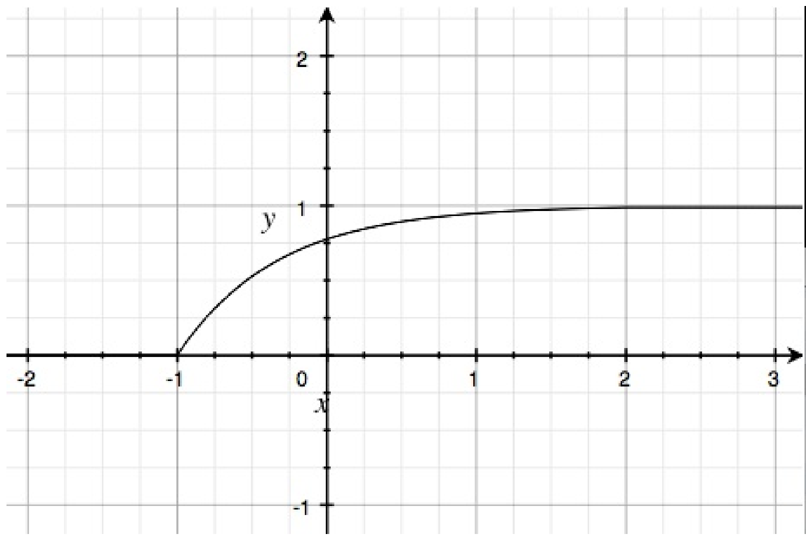


Figura 2.4: F^* en el caso $\mathcal{U}(-1,2)$

Así $\psi'(0) < 0$ y la función es decreciente en un intervalo alrededor del cero. Como $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$, $\psi(0) = 1$ y ψ es continua entonces existe $\theta > 0$ tal que $\psi(\theta) = 1$ y esta caminata aleatoria tiene caminata aleatoria asociada.

Por el cálculo anterior tenemos que existe $\theta > 0$ tal que

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}}{b-a}dx = \frac{e^{-\theta b} - e^{-\theta a}}{-\theta(b-a)} = 1$$

Por lo cual la función de distribución de la caminata aleatoria asociada estaría dada por

$$F^*(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < a \\ \displaystyle\int_a^s \frac{e^{-\theta x}}{b-a}dx = \frac{e^{-\theta s} - e^{-\theta a}}{-\theta(b-a)} & \text{si } a \leq s \leq b \\ 1 & \text{si } b < s. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3 (Distribución de Laplace)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución de Laplace $L(\mu, b)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $0 < \mu < \infty$, además recordemos que se debe satisfacer $0 < b < \infty$. Utilizando las propiedades de la distribución de Laplace

$$E(X_i) = \mu > 0, \psi(t) = E(e^{-tX_i}) = \frac{e^{-\mu t}}{1 - b^2t^2}, |t| < \frac{1}{b}.$$

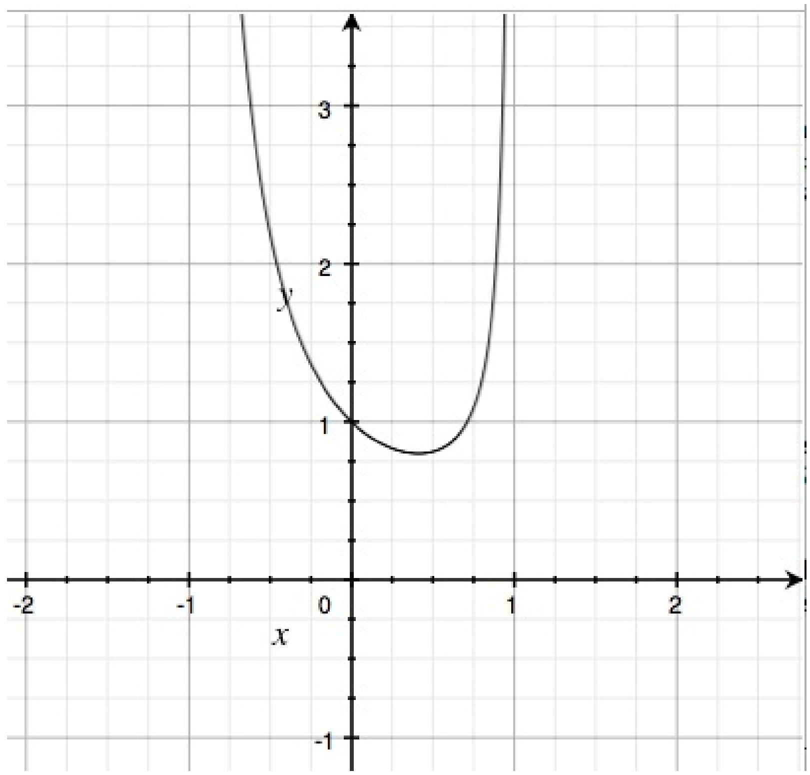


Figura 2.5: ψ en el caso $L(1,1)$

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior

$$\psi'(t) = \frac{e^{-t\mu}(\mu(b^2t^2-1)+2b^2t)}{(1-b^2t^2)^2}.$$

Así $\psi'(0) = -\mu < 0$ y la función es decreciente en un intervalo alrededor del cero. Como $\lim\limits_{t\to\frac{1}{b}} \psi(t) = \infty$, $\psi(0) = 1$ y ψ es continua entonces existe $\theta > 0$ tal que $\psi(\theta) = 1$ y esta caminata aleatoria tiene caminata aleatoria asociada.

Ejemplo 2.4 (Distribución Normal)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución Normal $N(\mu,\sigma^2)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $0 < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Es una propiedad de la distribución Normal que

$$\psi(t) = E(e^{-tX_i}) = e^{-\mu t + \frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Como queremos que la función generadora valga 1, y la función exponencial es inyectiva queremos encontrar las soluciones a la ecuación

$$-\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} = 0$$

que son $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2\mu}{\sigma^2}$. Si tomamos el primer valor construimos la misma función de distribución, por lo cual tomamos $\theta = \frac{2\mu}{\sigma^2}$ y tenemos que la función de distribución de la caminata aleatoria asociada está dada por

$$F^*(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Por lo que la caminata aleatoria asociada tiene distribución Normal $N(-\mu, \sigma^2)$. En el quinto capítulo de esta tesis estudiaremos condiciones más generales bajo las cuales un proceso gaussiano tiene un proceso asociado.

Capítulo 3

La generalización

En el capítulo anterior consideramos $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d., ahora estudiaremos un caso más general en el cual las variables aleatorias son ergódicas.

3.1. Generalización de la caminata aleatoria asociada

Definición 3.1. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que dicha sucesión es estacionaria si para toda $m, k \in \mathbb{N}$*

$$(X_1, ..., X_m) \triangleq (X_{1+k}, ..., X_{m+k}).$$

Definición 3.2. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en dicho espacio. Un evento $A \in \mathcal{F}$ es invariante con respecto a la sucesión si existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$*

$$A = \{\omega : (X_n, X_{n+1}, ...) \in B\} = \{\omega : (X_1, X_2, ...) \in B\}.$$

En particular es claro que cuando $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. también son estacionarias sin embargo la estacionariedad no implica forzosamente la independecia, los ejemplos analizados en los siguientes dos capítulos son muestra de lo anterior.

Proposición 3.3. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en dicho espacio. Si*

$$\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{F} | A \text{ es invariante con respecto a } (X_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$$

entonces $\mathcal{I}$ es una σ-álgebra.

Demostración. Usaremos sistemáticamente el hecho de que para toda $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := (X_n, X_{n+1}, ...) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es una función y las propiedades de la imagen inversa de funciones: Es claro que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = Y_n^{-1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y $\emptyset = Y_n^{-1}(\emptyset)$ por lo que $\Omega, \emptyset \in \mathcal{I}$.

Además si $A \in \mathcal{I}$, existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que $A = (Y_n \in B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$; en consecuencia $A^c = (Y_n \in B^c)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir $A^c \in \mathcal{I}$.

Finalmente si $A_i \in \mathcal{I}, i = 1, 2, ...$ existen $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), i = 1, 2, ...$ tales que $A_i = (Y_n \in B_i), n = 1, 2, ...$ Entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty}(Y_n \in B_i)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\mathcal{I}$ es σ-álgebra. □

Finalmente podemos definir el concepto que nos ayudará a generalizar la caminata aleatoria asociada:

Definición 3.4. *Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión estacionaria de variables aleatorias decimos que dicha sucesión es ergódica si $\mathcal{I}$ la σ-álgebra de los conjuntos invariantes es trivial i.e. para todo $A \in \mathcal{I}$*

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Una vez más, en el caso i.i.d. las variables aleatorias son ergódicas, en efecto tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.5. *Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. entonces dicha sucesión es ergódica.*

Demostración. Debido a que las variables aleatorias son i.i.d. es claro que la sucesión es estacionaria. Sea A un conjunto invariante. Existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{\omega : (X_n, X_{n+1}, ...) \in B\}.$$

En consecuencia A es un evento cola y por la Ley 0-1 de Kolmogorov
$P(A) \in \{0, 1\}$, es decir, la sucesión es ergódica.

□

La importancia de las sucesiones estacionarias y ergódicas se manifiesta en el siguiente teorema el cual generaliza la Ley de los Grandes Números, su demostración se puede consultar en [14] Teo 3 pp 413.

Teorema 3.6 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias estacionarias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $E(|X_1|) < \infty$. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n = E(X_1 | \mathcal{I}) \text{ c.s. y en } L_1.$$

Además si la sucesión es ergódica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n = E(X_1) \text{ c.s. y en } L_1.$$

De manera similar a la Proposición 2.1 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.7. *Sea* $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ergódica tal que* $0 < E(X_1) < \infty$, *(*$-\infty < E(X_1) < 0$*) entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}, (\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \text{ c.s.})$$

Demostración. Es análoga a la Proposición 2.1. □

Las condiciones para construir la caminata aleatoria asociada fueron dadas en la Definición 2.3. Ahora enumeraremos las condiciones necesarias para poder generalizar, las primeras dos son:

Condición 1. *La sucesión* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de variables aleatorias es ergódica y* $0 < E(X_i) < \infty$, *(*$-\infty < E(X_i) < 0$*).*

Condición 2. *Existe* $\theta > 0, (\theta < 0)$ *tal que*

$$q := \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}),$$

es positivo y finito.

Esto se satisface en el caso de la caminata aleatoria asociada:

Proposición 3.8. *Sean* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *variables aleatorias i.i.d. con caminata aleatoria asociada, entonces satisfacen la Condición 2.*

Demostración. Como las $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tienen caminata aleatoria asociada entonces existe $\theta \neq 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$E(e^{-\theta X_n}) = 1.$$

Como son independientes

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta X_i})^n = 1,$$

y $q = 1$. □

Las dos condiciones anteriores son suficientes para garantizar la unicidad de θ. Nótese como el poder describir el comportamiento asíntotico de las variables aleatorias que es una consecuencia directa de la ergodicidad, es central en la demostración.

Proposición 3.9. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión ergódica de variables aleatorias que satisface las Condiciones 1 y 2 entonces θ es único.*

Demostración. Por comodidad supondremos $E(X_i) > 0$ y $\theta > 0$, el otro caso es análogo. Sea $K > 0$ una constante positiva. Observemos que por la Proposición 3.7

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

Como θ es positivo

$$\lim_{n\to\infty} -\theta S_n = -\infty \text{ c.s.}$$

Lo cual implica

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n} = 0 \text{ c.s.}$$

Si $S_n \geq -K$ entonces, como θ es positivo, $e^{-\theta S_n} \leq e^{\theta K}$. Así tenemos la siguiente desigualdad

$$e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n\geq -K\}} \leq e^{\theta K}\mathbb{1}_{\{S_n\geq -K\}} \leq e^{\theta K}.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n\geq -K\}}) = E(\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n\geq -K\}}) = E(0) = 0.$$

Debido a que $E(e^{-\theta S_n}) = E(e^{-\theta S_n}; S_n \geq -K) + E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K)$ y por hipótesis tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = q \tag{3.1}$$

y concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K) = q.$$

Ahora supongamos que existe otro real positivo $a \neq \theta$ tal que $\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = q$. Por convexidad necesariamente $a > 0$ y tenemos dos casos:

Caso 1) $0 < a < \theta$.

Una vez más tenemos que si $S_n \leq -K$ por la desigualdad anterior

$$S_n(\theta - a) \leq -K(\theta - a)$$

$$-aS_n \leq -K(\theta - a) - S_n\theta$$

$$e^{-aS_n} \leq e^{K(\theta-a)-S_n\theta}.$$

En consecuencia

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq \lim_{n\to\infty} E(e^{K(\theta-a)-S_n\theta}) = e^{-(\theta-a)K}q$$

la última igualdad se sigue por (3.1).

Por un razonamiento análogo al que se hizo con θ si a satisface las hipótesis de esta proposición

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq e^{-(\theta-a)K}q.$$

Como K es positiva y arbitraria concluimos que $\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = 0$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser finito.

Caso 2) $\theta < a$.

De manera análoga tendríamos que

$$e^{-(\theta-a)K}q \leq= \lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \liminf_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K).$$

Como K es positiva y arbitraria conluíriamos que $\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \infty$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser positivo.

Una vez agotados los dos casos posibles tenemos que θ es única.

□

Hasta ahora solo hemos considerado variables aleatorias cuyo índice corre en los números naturales, teniendo cuidado se puede construir de manera análoga la teoría para variables aleatorias con índices en los números enteros, estas se pueden interpretar como un proceso con pasado y futuro.

Para hacer la construcción de manera ordenada es necesario definir $\mathbb{R}^{-m,n}$ que es esencialmente lo mismo que $\mathbb{R}^{m+n+1}$

$$\mathbb{R}^{-m,n} := \{(x_{-m}, x_{-m+1}, ..., x_{n-1}, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nuestro objetivo es poder extender los borelianos a

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} := \{(..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 3.10. *Sean $\mathcal{C}$ los cilindros finito dimensionales en $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ es decir*

$$\mathcal{C} := \{R \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : R = \mathbb{R}^{-\infty,-m-1} \times (a_{-m}, b_{-m}] \times ...$$

$$\times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{n+1,\infty}, -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty\}.$$

Definimos a los borelianos como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) = \sigma(\mathcal{C})$

El Teorema de Extensión de Kolmogorov nos provee condiciones bajo las cuales si tenemos una colección de medidas P^n en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$ podemos extenderlas de manera única a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$. La demostración es análoga al caso de los naturales y se puede consultar en [5] Teo A.3.1.

Teorema 3.11 (Teorema de Extensión de Kolmogorov)**.** *Sean $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad consistentes en $(\mathbb{R}^{-n,n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n}))$ es decir tales que para toda $n \in \mathbb{N}$*

$$P^{n+1}(\mathbb{R} \times (a_{-n}, b_n] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}) = P^n((a_{-n}, b_n] \times ... \times (a_n, b_n]).$$

Entonces existe una única medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}))$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P(\mathbb{R}^{-\infty,-n} \times (a_{-n}, b_n] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{-\infty,-m-1}) = P^n((a_{-n}, b_{-n}] \times ... \times (a_n, b_n])$$

El concepto de estacionariedad también puede ser extendido.

Definición 3.12. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de variables aleatorias, decimos que es una sucesión estacionaria, si para toda $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$*

$$(X_1, ..., X_m) \triangleq (X_{1+k}, ..., X_{m+k}).$$

Toda sucesión de variables aleatorias estacionarias con índice en los naturales se puede encajar en una sucesión estacionaria con índice en los enteros, la construcción se realiza a continuación:

Proposición 3.13. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estacionaria de variables aleatorias entonces puede ser encajada en una sucesión estacionaria $(\bar{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, i.e una sucesión estacionaria tal que para toda $m \in \mathbb{N}$*

$$(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_m) \triangleq (X_1, ..., X_m).$$

Demostración. Para el espacio $(\mathbb{R}^{-n,n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n}))$ si tenemos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$ definimos la medida de probabilidad

$$P^n(A) := P((X_1, ..., X_{2n+1}) \in A)$$

Como $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estacionaria $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medidas de probabilidad consistentes y por el Teorema de Extensión de Kolmogorov existe una medida de probabilidad $P^{\mathbb{Z}}$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}))$ tal que para toda $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$

$$P^{\mathbb{Z}}(A) = P^n(A).$$

Así la sucesión estacionaria $(\bar{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ que buscábamos es aquella para la cual se cumple que para toda $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$

$$P((X_{-n},...,X_n) \in A) = P^{\mathbb{Z}}(A).$$

Lo cual es más que suficiente para definirla, además de que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$(\bar{X}_1,...,\bar{X}_m) \triangleq (X_1,...,X_m).$$

□

Para continuar con nuestra generalización utilizamos la sucesión ergódica $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisface las Condiciones 1 y 2 denotamos por $(\bar{X})_{i\in\mathbb{Z}}$ a la sucesión estacionaria contruida en la Proposición 3.13. Así para $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que $n \geq m$ definimos

$$S_{m,n} := \sum_{i=m}^{n} \bar{X}_i, \;\; \mathcal{F}_{m,n} := \sigma(\bar{X}_m,...\bar{X}_n).$$

La siguiente condición es:

Condición 3. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias que satisfacen las Condiciones 1 y 2, sea $(S_{-m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ la sucesión construida en la Proposición 3.13. Para toda $B \in \mathcal{F}_{-k,k}$ con $k \in \mathbb{N}$*

$$q(B) := \lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B)$$

existe donde θ es como en la Condición 2.

Esto se satiface en el caso de la caminata aleatoria asociada:

Proposición 3.14. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con caminata aleatoria asociada, entonces satisfacen la condición anterior.*

Demostración. El límite existe pues si $B \in \mathcal{F}_{-k,k}$ y $m,n \geq k$ por la independecia de las variables aleatorias y la condición de Crámer se tiene que

$$E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B) = E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}})E(e^{-\theta S_{-k,k}}; B)E(e^{-\theta S_{k+1,n}}) = E(e^{-\theta S_{-k,k}}; B),$$

y obtenemos que $q(B) = E(e^{-\theta S_{-k,k}}; B)$.

□

Una vez que construímos la sucesión $(\bar{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ queremos encontrar una sucesión $(\bar{X}_i{}^*)_{i\in\mathbb{Z}}$ que sea equivalente a la caminata aleatoria asociada del capítulo anterior, para esto necesitaremos un resultado de convergencia de medidas de probabilidad. Esta demostración fue desarrollada a partir de [7].

Proposición 3.15. *Sean $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de medidas de probabilidad sobre un espacio $(\Omega,\mathcal{F})$. Si tenemos que para toda $A\in\mathcal{F}$, el siguiente límite existe*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A)$$

y definimos $P(A)$ como el valor de dicho límite, i.e.

$$P(A) := \lim_{n\to\infty} P_n(A).$$

Entonces P es una medida de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$

Demostración. Se probarán los siguientes resultados:

1. $P(\Omega) = 1 \geq P(A) \geq P(\emptyset) = 0$ para todo $A\in\mathcal{F}$.

2. $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ para $A_i\in\mathcal{F}$ $i = 1,...,k$ tales que $A_i\cap A_j = \emptyset$ si $i\neq j$, $i,j = 1,...k$.

3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ para $A_i\in\mathcal{F}$ $i = 1,...,k$ tales que $A_i\cap A_j = \emptyset$ si $i\neq j$, $i,j = 1,...k$.

4. P es una medida de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$.

1. Como $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son medidas de probabilidad tenemos que

$$P_n(\Omega) = 1 \geq P_n(A) \geq P_n(\emptyset) = 0$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\Omega) = 1 \geq \lim_{n\to\infty} P_n(A) \geq \lim_{n\to\infty} P_n(\emptyset) = 0$$

y debido a la existencia del límite

$$P(\Omega) = 1 \geq P(A) \geq P(\emptyset) = 0.$$

2. Aditividad finita: Lo demostraremos para $k = 2$, sean $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ eventos excluyentes como $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son medidas de probabilidad

$$P_n(A_1 \cup A_2) = P_n(A_1) + P_n(A_2)$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A_1 \cup A_2) = \lim_{n\to\infty} P_n(A_1) + \lim_{n\to\infty} P_n(A_2)$$

y en consecuencia

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Una vez probado para $k = 2$ es claro que por inducción

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

para $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, ..., k$ eventos ajenos dos a dos.

3. Aditividad numerable: Sean $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2...$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, primero mostraremos que

$$\lim_{j\to\infty} P(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i) = 0.$$

Para ello construiremos dos sucesiones $j_0 < k_0 < j_1 < k_1...$ y
$m_0 < n_0 < m_1 < n_1...$ que nos auxiliarán. Sea $\varepsilon > 0$, definamos los primeros términos de la sucesión.

Sea $j_0 = 1$. Como por hipótesis las medidas de probabilidad P_n convergen a P existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) > P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como P_{m_0} es medida de probabilidad existe $k_0 > m_0$ tal que

$$P_{m_0}(\bigcup_{i=k_0+1}^{\infty} A_i) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

y en consecuencia debido a que P_{m_0} es medida de probabilidad y por las últimas dos desigualdades

$$P_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{k_0} A_i) = P_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - P_{m_0}(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i) > P_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$> P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir

$$P_{m_0}(\bigcup_{i=1}^{k_0} A_i) > P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente una vez más como las medidas convergen a P existe $n_0 > m_0$ tal que

$$P_n(\bigcup_{i=1}^{k_0} A_i) < P(\bigcup_{i=1}^{k_0} A_i) + \frac{\varepsilon}{8} \text{ para } n \geq n_0.$$

Así hemos construído el primer término cada una de las sucesiones buscadas, para construir los siguientes definimos el siguiente conjunto

$$B_r := \bigcup_{s=0}^{r} \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i \text{ para } r = 0, 1, 2...$$

Observemos que se cumplen las siguientes propiedades

$$B_0 = \bigcup_{i=j_0}^{k_0} A_i$$

$$B_1 = B_0 \cup \bigcup_{i=j_1}^{k_1} A_i.$$

Finalmente

$$B_r = B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i. \tag{3.2}$$

Ahora supondremos que hemos construído los términos $j_{r-1}, k_{r-1}, m_{r-1}, n_{r-1}$ y construiremos j_r, k_r, m_r, n_r. Como $P_{n_{r-1}}$ es medida de probabilidad existe $j_r > k_{r-1}$ tal que

$$P_{n_{r-1}}(\bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.3}$$

Como las medidas de probabilidad convergen a P existe $m_r > n_{r-1}$ tal que

$$P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) > P(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Observemos que como se pidío que $j_r > k_r$; B_{r-1} y $\bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i$ son conjuntos ajenos por lo cual al ser P_{m_r} medida de probabilidad existe $k_r > j_r$ tal que

$$P_{m_r}(\bigcup_{i=k_r+1}^{\infty} A_i) < \frac{\varepsilon}{4}$$

y en consecuencia debido a que P_{m_r} es medida de probabilidad y por las últimas dos desigualdades

$$\begin{aligned}
P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i) &= P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - P_{m_r}(\bigcup_{i=k_r+1}^{\infty} A_i) \\
&> P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4} \\
&> P(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = P(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

es decir

$$P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i) > P(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Finalmente una vez más como las medidas convergen a P existe $n_r > m_r$ tal que

$$P_n(\bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i) < P(\bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i) + \frac{\varepsilon}{2^{r+3}} \text{ para } n \geq n_r. \tag{3.5}$$

Una vez construída la sucesión definamos

$$B := \bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i$$

Así tenemos que por (3.4)

$$P_{m_r}(B) \geq P_{m_r}(B_r) = P_{m_r}(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{k_r} A_i) \tag{3.6}$$

$$> P(B_{r-1} \cup \bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.7}$$

$$\geq P(B_r \cup \bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.8}$$

$$= P(B_r) + P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.9}$$

(3.6) es cierta debido a que $B_r \subseteq B$ y por (3.2).
(3.7) es cierta por (3.4).
(3.8) es cierta por que $B_r \cup \bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i \subseteq B_{r-1} \cup \bigcup\limits_{i=j_r}^{\infty} A_i$.
(3.9) es cierta por el inciso 2 de esta proposición.
Por lo cual tenemos que

$$P_{m_r}(B) > P(B_r) + P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Ahora usando que P_{n_r} es medida de probabilidad tenemos que

$$P_{n_r}(B) = P_{n_r}(\bigcup_{s=0}^{r} \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) + P_{n_r}(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i)$$

$$= \sum_{s=0}^{r} P_{n_r}(\bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) + P_{n_r}(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) \tag{3.11}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{r} P_{n_r}(\bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) + P_{n_r}(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) \tag{3.12}$$

$$< \sum_{s=0}^{r}(P(\bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) + \frac{\varepsilon}{2^{s+3}}) + \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.13}$$

$$< \sum_{s=0}^{r}(P \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= P(B_r) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.14}$$

(3.11) es cierta porque P_{n_r} es medida de probabilidad y los eventos son ajenos.

(3.12) se cumple porque $\bigcup_{s=r+1}^{\infty} \bigcup_{i=j_s}^{k_s} A_i \subseteq \bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i$.
(3.13) es consecuencia de (3.5) y (3.3).
El inciso 2 de esta proposición muestra (3.14).
Por lo todo lo anterior tenemos que

$$P_{n_r}(B) < P(B_r) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.15}$$

En consecuencia de (3.10) y (3.15) se deduce que

$$P_{m_r}(B) - P_{n_r}(B) > P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) - \varepsilon$$

Como $n_{r+1} > m_{r+1} > n_r > m_r$ y como las sucesiones $(P_{n_r})_{r\in\mathbb{N}}$ y $(P_{m_r})_{r\in\mathbb{N}}$ convergen a un mismo límite, por la desigualdad anterior

$$\varepsilon \geq \lim_{r\to\infty} P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) \geq 0.$$

Como ε es estrictamente porsitiva y arbitraria, se concluye que

$$\lim_{r\to\infty} P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) = 0. \tag{3.16}$$

Ahora por los incisos 1 y 2 tenemos que para toda $j_r \leq k \leq j_{r+1}$

$$P(\bigcup_{i=j_{r+1}}^{\infty} A_i) \leq P(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i) \leq P(\bigcup_{i=j_r}^{\infty} A_i)$$

por lo cual podemos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} P(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i) = 0.$$

Finalmente tenemos que por la aditividad finita de P, se tiene

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{j-1} P(A_i) + P(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i)$$

y por (3.16)

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Es decir P es medida de probabilidad en $\mathcal{F}$.

□

Corolario 3.16. *Sean $(P_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ una colección de medidas de probabilidad sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ si tenemos que para toda $A \in \mathcal{F}$ el siguiente límite existe*

$$\lim_{m,n\to\infty} P_{m,n}(A)$$

y definimos $P(A)$ como el valor de dicho límite, i.e.

$$P(A) := \lim_{m,n\to\infty} P_{m,n}(A)$$

entonces P es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Demostración. Sea $P_n(A) := P_{n,n}(A)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = \lim_{m,n\to\infty} P_{m,n}(A) = P(A).$$

Así P_n cumple las hipótesis de la Proposición 3.15 lo que implica que P es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

□

En el siguiente ejemplo se observa por que la hipótesis de que las medidas converjan es necesaria.

Ejemplo 3.1. Sean $(\mathbb{N}^+, 2^{\mathbb{N}^+}, P_n)$ una colección de espacios de probabilidad cuya medida está definida de la siguiente manera

$$P_n(\{m\}) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leq m \leq n \\ 0 & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Sea

$$A := \{1\} \cup \{4,5,6\} \cup \{13,14,...,24\}... = \{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3 \cdot 2^{2k} + 1, ..., 3 \cdot 2^{2k+1}\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{3\cdot 2^{2n}}(A) &= P_{3\cdot 2^{2n}}(\{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}\{3\cdot 2^{2k}+1,...,3\cdot 2^{2k+1}\}) \\
&= P_{3\cdot 2^{2n}}(\{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1}\{3\cdot 2^{2k}+1,...,3\cdot 2^{2k+1}\}) \\
&= \frac{1}{3\cdot 2^{2n}}(1+\sum_{k=0}^{n-1}(3\cdot 2^{2k+1}-3\cdot 2^{2k})) \\
&= \frac{1}{3\cdot 2^{2n}}(1+3(\frac{2}{3}(2^{2n}-1)-\frac{1}{3}(2^{2n}-1))) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
P_{3\cdot 2^{2n+1}}(A) &= P_{3\cdot 2^{2n+1}}(\{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}\{3\cdot 2^{2k}+1,...,3\cdot 2^{2k+1}\}) \\
&= P_{3\cdot 2^{2n+1}}(\{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{n}\{3\cdot 2^{2k}+1,...,3\cdot 2^{2k+1}\}) \\
&= \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}(1+\sum_{k=0}^{n}(3\cdot 2^{2k+1}-3\cdot 2^{2k})) \\
&= \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}(1+3(\frac{2}{3}(4\cdot 2^{2n}-1)-\frac{1}{3}(4\cdot 2^{2n}-1))) \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

La probabilidad del evento A no puede converger a ningún valor, pues oscila entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Por lo tanto estas medidas de probabilidad no convergen a ninguna función. Así la hipótesis de la convergencia es necesaria si se quiere construir una nueva medida de probabilidad.

Regresando a nuestra generalización utilizaremos las Condiciones 1, 2, 3 y el Corolario 3.16 para construir una nueva medida de probabilidad en $\mathcal{F}_{-k,k}$.

Proposición 3.17. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfagan las Condiciones 1, 2 y 3 sea $S_{-m,n}$ la suma construída a partir de ellos. Para $k \in \mathbb{N}$ y $m, n \geq k$ tenemos que*

1.

$$P^*_{m,n} := \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B)}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} \text{ con } B \in \mathcal{F}_{-k,k}$$

es una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_{-k,k}$.

2.

$$P^*_k(B) := \lim_{m,n\to\infty} P^*_{m,n}(B) = \frac{q(B)}{q} \text{ con } B \in \mathcal{F}_{-k,k}$$

es una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_{-k,k}$.

Demostración. 1. $P^*_{m,n}$ está bien definida pues si $B \in \mathcal{F}_{-k,k}$ entonces $B \in \mathcal{F}_{m,n}$ cuando $m, n \geq k$ además como la función exponencial es estrictamente positiva $E(e^{-\theta S_{-m,n}}) > 0$.

$P^*_{m,n}$ es medida de probabilidad pues
a)
$$P^*_{m,n}(\emptyset) = \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \emptyset)}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} = 0, P^*_{m,n}(\Omega) = \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \Omega)}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} = 1.$$

b) Si $B \in \mathcal{F}_{-k,k}$ entonces $\emptyset \subseteq B \subseteq \Omega$ por lo cual como la función exponencial es positiva
$$E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \emptyset) \leq E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B) \leq E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \Omega)$$
y por el inciso a) concluímos
$$P^*_{m,n}(\emptyset) = 0 \leq P^*_{m,n}(B) \leq 1 = P^*_{m,n}(\Omega).$$

c) Por las propiedades de la esperanza y como se definió $P^*_{m,n}$ la aditividad numerable se satisface claramente.

2. Por el inciso 1. $P^*_{m,n}$, es una colección de medidas de probabilidad en $\mathcal{F}_{-k,k}$. Por las Condiciones 2, 3 y por la ergodicidad, para todo $B \in \mathcal{F}_{-k,k}$

$$\begin{aligned}\lim_{m,n\to\infty} P^*_{m,n}(B) &= \frac{\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B)}{\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}})} = \frac{\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B)}{\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n})} \\ &= \frac{q(B)}{q} = P^*_k(B).\end{aligned}$$

Por lo cual las medidas de probabilidad convergen a una función y por el Corolario 3.16, P^*_k es una medida de probabilidad.

□

Una función $Q : \mathcal{A} :\to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de Ω se llama medida de probabilidad en el álgebra $\mathcal{A}$ si

1. Es finitamente aditiva.

2. Es continua en el vacío i.e. si para $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, ...$ y $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ entonces $\lim_{n\to\infty} Q(A_n) = 0$.

Nosotros hemos construído una medida de probabilidad P_k^* para cada $k \in \mathbb{N}$ y podemos definir una medida en $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ de la siguiente forma

$$P^*(B) := P_k^*(B) \text{ si } B \in \mathcal{F}_{-k,k}.$$

Esta nueva medida se puede extender de manera única a

$$\mathcal{F}_{-\infty,\infty} = \sigma(\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}).$$

La idea se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 3.18. *Tenemos que*

1. $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ *es una álgebra.*

2. P^* *está bien definida y es medida de probabilidad en* $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$.

3. P^* *se puede extender de manera única a* $\mathcal{F}_{-\infty,\infty}$.

Demostración. 1. Sean $A, B \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ así $A \in \mathcal{F}_{-k,k}$, $B \in \mathcal{F}_{-l,l}$ para algún $l, m \in \mathbb{N}$ por lo cual

a) $A^c \in \mathcal{F}_{-k,k}$ y en consecuencia $A^c \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$.

b) Sin pérdida de generalidad supongamos que $k \leq l$ esto implica que $\mathcal{F}_{-k,k} \subseteq \mathcal{F}_{-l,l}$, por lo cual $A \cup B \in \mathcal{F}_{-l,l}$ y en consecuencia $A \cup B \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$.

Por lo anterior $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ es un álgebra.

2. P^* está bien definida: si $B \in F_{-k,k} \cap F_{-l,l}$ por como se definieron P_k^* y P_l^* es claro que

$$P^*(B) = P_k^*(B) = P_l^*(B).$$

Primero demostraremos que P^* es finitamente aditiva, así sean $B_1, ..., B_n \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ una cantidad finita de eventos tales que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}_{-l,l}$, por lo cual

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = P_l^*(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P_l^*(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P^*(B_i)$$

y P^* es finitamente aditiva. Ahora sea $B_n \in \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ una sucesión de eventos tal que $B_{n+1} \subset B_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Queremos demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} P^*(B_n) = 0.$$

Como $B_{n+1} \subset B_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P^*(B_{n+1}) \leq P^*(B_n).$$

Así el límite que queremos calcular existe, procederemos por contradicción suponiendo que existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} P^*(B_n) = \delta.$$

Por la última desigualdad y el límite anterior para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P^*(B_n) \geq \delta. \tag{3.17}$$

Sin perdida de generalidad asumiremos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{F}_{-n,n}$. En consecuencia existe $\hat{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$ tal que

$$B_n = \{(\bar{X}_{-n}, ..., \bar{X}_n) \in \hat{B}_n\}.$$

Como P_n es medida de probabilidad existe $\hat{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n})$ compacto (Consúltese [14] Cap II.3 Pr 9) tal que $\hat{A}_n \subset \hat{B}_n$ y definimos

$$A_n := \{(\bar{X}_{-n}, ..., \bar{X}_n) \in \hat{A}_n\}.$$

Entonces

$$P^*(B_n \setminus A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{3.18}$$

Sean

$$C_n := \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} \{(\bar{X}_{-k}, ..., \bar{X}_k) \in \hat{A}_k\} = \{(\bar{X}_{-n}, ..., \bar{X}_n) \in \hat{C}_n\} \tag{3.19}$$

$$\hat{C}_n = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbb{R}^{n-k} \times \hat{A}_k \times \mathbb{R}^{n-k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n}).$$

Tenemos que

$$P^*(B_n \setminus C_n) = P^*(B_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P^*(B_n \setminus A_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} P^*(B_k \setminus A_k) \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3.20}$$

La primer desigualdad es una propiedad de las medidas de probabilidad (aunque estamos demostrando que P^* es medida de probabilidad es claro que esto es cierto por cómo se definió P^* al ser una cantidad finita de eventos), la segunda desigualdad es consecuencia de que $B_{l+1} \subset B_l$ para toda $l \in \mathbb{N}$, la última desigualdad es debida a (3.18).

Por construcción $C_n \subset B_n$, por lo cual

$$P^*(B_n) = P^*(C_n) + P^*(B_n \setminus C_n).$$

Combinando esto con (3.17) y (3.20) tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P^*(C_n) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Esto implica que para toda $n \in \mathbb{N}$, $C_n \neq \emptyset$ y en consecuencia $\hat{C}_n \neq \emptyset$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ tómese $(x_{-n}^{(n)}, ..., x_n^{(n)}) \in \hat{C}_n$. Por lo cual para $k \geq n$, $(x_{-n}^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in \hat{A}_n$.

En particular para $k \geq 1$, $(x_{-1}^{(k)}, x_0^{(k)}, x_1^{(k)}) \in \hat{A}_1$ pero $\hat{A}_1$ es compacto por lo cual podemos encontrar una subsucesión (n_1) tal que

$$\lim_{n_1 \to \infty} (x_{-1}^{(n_1)}, x_0^{(n_1)}, x_1^{(n_1)}) = (x_{-1}, x_0, x_1)$$

con $(x_{-1}, x_0, x_1) \in \hat{A}_1$.

Análogamente tenemos que para $k \geq 2$, $(x_{-2}^{(k)}, x_{-1}^{(k)}, x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in \hat{A}_2$, pero $\hat{A}_2$ es compacto por lo cual podemos encontrar una subsucesión (n_2) de (n_1) tal que

$$\lim_{n_2 \to \infty} (x_{-2}^{(n_2)}, x_{-1}^{(n_2)}, x_0^{(n_2)}, x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2)$$

con $(x_{-2}^{(0)}, x_{-1}^{(0)}, x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \hat{A}_2$. Siguiendo el proceso inductivamente encontramos $(..., x_{-n}, ..., x_n, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $(x_{-n}, ..., x_n) \in \hat{A}_n$.

Esto implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ y como $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto lo contrario, en conclusión tenemos que P^* es finitamente aditiva y continua en el vacío por lo cual por [3] Prop 1.2.4. P^* es una medida de probabilidad en $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$.

3. Demostramos que $\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-k,k}$ es un álgebra y P^* una medida de probabilidad en ella. Como $\mathcal{F}_{-\infty,\infty}$ es generada por esta álgebra debido al Teorema de Extensión de Carathéodory (Consúltese [5]A.1.3.), existe una única medida de probabilidad que extienda P^* a $\mathcal{F}_{-\infty,\infty}$.

$\square$

Tenemos una nueva medida de probabilidad P^* en $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty})$. Observemos que podemos asignarle a $(\hat{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la función de distribución

$$P^*(X_{-n}, ...X_n \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n,n}).$$

Finalmente hemos construído el proceso estacionario asociado.

Definición 3.19. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfagan las Condiciones 1, 2 y 3. Al espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P^*)$ junto con las variables aleatorias $(\hat{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ con función de distribución*

$$P^*((\hat{X}_{-n}, ..., \hat{X}_n) \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{-n.n})$$

lo llamamos el proceso estacionario asociado al espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P)$.

Las condiciones con las que hemos generalizado no son suficientes para poder asegurar la dualidad, ni siquiera podremos asegurar la ergodicidad en la medida de probabilidad P^*, este tema todavía no ha sido investigado a profundidad, pero para darse una idea de las condiciones que podrían funcionar consúltese [7] Sección 3. En los siguientes capítulos veremos dos ejemplos en los que si se dará la dualidad. Lo que si es posible es asegurar es que la medida P^* es estacionaria.

Proposición 3.20. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfagan las Condiciones 1, 2 y 3 entonces el espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P^*)$ es estacionario i.e. para toda $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$*

$$P^*((\hat{X}_1, ..., \hat{X}_m) \in B) = P^*((\hat{X}_{1+k}, ..., \hat{X}_{m+k}) \in B)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que $k \in \mathbb{N}$, la demostración en el otro caso es análoga. Sean $B_1 := \mathbb{R}^{m+1} \times B$, $B_2 := \mathbb{R}^{m+2k} \times B$ Tenemos que

$$\begin{aligned} P^*((\hat{X}_1, ..., \hat{X}_m) \in B) &= \lim_{m,n\to\infty} \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B_1)}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B_2)}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} = P^*((\hat{X}_{1+k}, ..., \hat{X}_{m+k}) \in B). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos que el espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P)$ es estacionario y por lo tanto para m, n suficientemente grandes

$$E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B_1) = E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B_2).$$

$\square$

En el caso en el que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. hemos construido la misma caminata aleatoria que en el capítulo anterior.

Proposición 3.21. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con caminata aleatoria asociada, entonces el espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P^*)$ está formado con variables aleatorias i.i.d. tales que*

$$P^*(\hat{X}_k \leq x_k) = E(e^{-\theta \hat{X}_k}; (-\infty, x_k]).$$

Demostración. Como $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. entonces el espacio $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty,\infty}, P)$ está formado por variables i.i.d. por lo cual

$$P^*(\hat{X}_1 \leq x_1, ..., \hat{X}_k \leq x_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m,n\to\infty} \frac{E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \mathbb{R}^{2k+1} \times (-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_k])}{E(e^{-\theta S_{-m,n}})} \\
&= \lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta \hat{X}_1}; (-\infty, x_1])...E(e^{-\theta \hat{X}_k}; (-\infty, x_k]) \\
&= P^*(\hat{X}_1 \leq x_1)...P^*(\hat{X}_k \leq x_k).
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos la independencia y que $E(e^{-\theta X_i}) = 1$. De las igualdades anteriores también se deduce que

$$P^*(\hat{X}_k \leq x_k) = E(e^{-\theta \hat{X}_k}; (-\infty, x_k]).$$

□

3.2. Generalización de la martingala de Wald

Ahora daremos la condición necesaria para poder construir la martingala, esta es muy similar a la Condición 3. Sea $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_{1,k}$.

Condición 4. *Para toda $B \in \mathcal{F}_k$ con $k \in \mathbb{N}$*

$$r(B) := \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; B)$$

existe donde θ es como en la Condición 2.

Proposición 3.22. *Sean $B \in \mathcal{F}_k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $r(B)$ como en la Condición 4 tenemos que*

1. $r : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida en $(\Omega, \mathcal{F}_k)$ con masa total q.

2. r es absolutamente continua con respecto a P.

3. r tiene derivada de Radon-Nikodym V_k con respecto a P la cual satisface

$$\int_B V_k dP = r(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{F}_k$$

donde V_k es $\mathcal{F}_k$-medible.

Demostración. 1. De manera análoga a la Proposición 3.17 tenemos que si para $B \in \mathcal{F}_k$ definimos

$$P_n^*(B) = \frac{E(e^{-\theta S_n}; B)}{E(e^{-\theta S_n})}$$

es una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_k$ así por la Proposición 3.15

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(B) = \frac{r(B)}{q}$$

es una medida de probabilidad en $\mathcal{F}_k$, lo cual implica que $r(B)$ es una medida en $\mathcal{F}_k$ con masa total q.

2. Sea $B \in \mathcal{F}_k$ tal que $P(B) = 0$ entonces

$$\int_B e^{-\theta S_n} dP = 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo cual

$$r(B) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; B), \lim_{n\to\infty} \int_B e^{-\theta S_n} dP = 0.$$

Así r es absolutamente continua con respecto a P.

3. Por los incisos 1. y 2. tenemos dos medidas P, r en $\mathcal{F}_k$ que son σ-finitas, además r es absolutamente continua con respecto a P. Por el Teorema de Radon Nikodym existe una función $V_k \in M^+(\Omega, \mathcal{F}_k)$ la cual satisface

$$\int_B V_k dP = r(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{F}_k.$$

$\square$

Proposición 3.23. *Sea $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como en la Proposición 3.22 entonces $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es martingala con respecto a $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. 1. Por la Proposición 3.22 tenemos que $V_k \in M^+(\Omega, \mathcal{F}_k)$, además como es la derivada de Radon-Nikodym

$$E|V_k| = E(V_k) = \int V_k dP = r(\Omega).$$

Por la Condición 2

$$r(\Omega) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = q < \infty$$

por lo cual

$$E|V_k| < \infty.$$

2. Es claro ya que la Proposición 3.22, nos dice que $V_k \in M^+(\Omega, \mathcal{F}_k)$.

3. Tenemos que $V_k \in M^+(\Omega, \mathcal{F}_k)$. Por como se constuyeron V_k y V_{k+1} para todo $B \in \mathcal{F}_k$

$$\int_B V_k dP = \int_B V_{k+1} dP = r(B).$$

Así V_k es una versión de $E(V_{k+1}|\mathcal{F}_k)$ y por la unicidad de la esperanza condicional

$$V_k = E(V_{k+1}|\mathcal{F}_k).$$

□

Hemos construído una martingala que generaliza la martingala de Wald, pues en el caso i.i.d. para $B \in \mathcal{F}_k$ usando 3.14

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; B) = E(e^{-\theta S_k}; B) = r(B)$$

y $V_k = e^{-\theta S_k}$ es la misma martingala construída en el Capítulo 2.

Capítulo 4

Incrementos estacionarios en cadenas de Markov

En este capítulo estudiaremos el proceso estacionario asociado a una cadena de Markov. Para comenzar definamos qué es una cadena de Markov.

Definición 4.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $\boldsymbol{E}$ *un subconjunto no vacío, finito o numerable de los números reales. Una sucesión de variables aleatorias*

$$\{X_n : \Omega \longrightarrow E, n \in \mathbb{N}\}$$

se llama cadena de Markov con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ *si satisface la condición de Markov, esto es si para todo* $n \geq 1$ *y toda sucesión* $x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x, y \in \boldsymbol{E}$ *se cumple*

$$P(X_n = y | X_{n-1} = x, X_{n-2} = x_{n-2}, ..., X_0 = x_0) = P(X_n = y | X_{n-1} = x)$$

siempre que los eventos por los que se está condicionando tengan probabilidad positiva. La distribución de X_0 *se llama distribución inicial y la denotaremos utilizando el vector*

$$\pi := (\pi_x)_{x \in E} = \{P(X_0 = x)\}_{x \in E}.$$

Nos limitaremos a estudiar las cadenas de Markov homogéneas cuya definición se da a continuación:

Definición 4.2. *Sea* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una cadena de Markov, si para toda* $x, y \in \boldsymbol{E}$ *y toda* $m, n \in \mathbb{N}$ *se cumple que*

$$P(X_n = y | X_{n-1} = x) = P(X_m = y | X_{m-1} = x),$$

se dice que la cadena de Markov es homogénea.

Al no depender de n, $P(X_n = y|X_{n-1} = x)$ se denota por $p_{x,y}$. En el caso finito a la matriz $(p_{x,y})_{x,y\in E}$ se le llama matriz de transición, en el caso numerable por extensión se le llama igual.

A partir de ahora supondremos que la cadena de Markov es homogénea y no lo mencionaremos más. Así podemos definir qué es un vector invariante.

Definición 4.3. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con matriz de transición $P = (p_{x,y})_{x,y\in E}$ si existe un vector $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$ tal que todas sus entradas son no negativas, la suma de ellas es 1 y*

$$\pi P = \pi$$

decimos que dicho vector es de probabilidad invariante o que la cadena tiene distribución estacionaria.

La siguiente proposición muestra las implicaciones de la existencia de un vector invariante, la demostración se puede consultar en [2] Prop 1.4.3.

Proposición 4.4. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ y con vector de probabilidad invariante $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$. Si X_0 tiene distribución inicial π entonces*

1. *X_n tiene la misma distribución que X_0 para toda $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Para toda $n, k \in \mathbb{N}$ y para $x_i \in \boldsymbol{E}$, $i = 0, 1..., n$ la distribución conjunta es invariante bajo corrimientos es decir*

   $$P(X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+k} = x_n, ..., X_k = x_0)$$

   lo cual implica que $(X_0, ..., X_n) \triangleq (X_k, ..., X_{n+k})$ y en consecuencia la cadena de Markov es estacionaria.

3. *Si $x, y \in \boldsymbol{E}$ satisfacen que $\pi_x > 0$ y $\pi_y = 0$ entonces $p_{x,y} = 0$.*

La Proposición 4.4 nos enseña la importancia de la existencia de un vector invariante, pues se muestra que si una cadena tiene vector invariante y X_0 se distribuye como dicho vector entonces la cadena es estacionaria, esta condición fue pedida para generalizar la caminata aleatoria asociada. El siguiente corolario prueba que dicha propiedad se puede extender a $\mathcal{B}(\mathbf{E}^{\mathbb{N}})$.

Corolario 4.5. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de Markov con espacio de estados* $\boldsymbol{E}$ *y con vector de probabilidad invariante* $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$. *Sea* $B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{E}^{\mathbb{N}})$ *y supongamos que* X_0 *tiene distribución inicial* π *entonces para* $n, k \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$(*)P((X_0, X_1, ..., X_i, ...) \in B) = P((X_{k+1}, ..., X_{k+i}, ...) \in B).$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{I} := \{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : D = \prod_{n=1}^{\infty} D_n, D_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Es claro que $\mathcal{I}$ es un π-sistema tal que

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Veremos que si $D = \prod_{n=1}^{\infty} D_n \in I$ entonces $(*)$ se cumple, sean

$$A := \{\omega : (X_1, X_2 ...) \in D\}, A_n := \{\omega : (X_1, ..., X_n) \in \prod_{m=1}^{n} D_m\}$$

Tenemos que por defininción A_n decrece a A. En consecuencia
$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ y finalmente

$$\begin{aligned} P(A) &= \lim_{n\to\infty} P((X_0, ... X_n) \in \prod_{m=1}^{n} D_m) \\ &= \lim_{n\to\infty} P((X_k, ... X_{k+n}) \in \prod_{m=1}^{n} D_m) \\ &= P((X_k, ..., X_{k+n}, ...) \in D) \end{aligned}$$

□

Los siguientes resultados son importantes en la teoría de cadenas de Markov para un entendimiento más completo consúltese [2].

Definición 4.6. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una cadena de Markov con espacio de estados* $\boldsymbol{E}$, *para* $x, y \in \boldsymbol{E}$ *se dice que*

1. *De* x *se accede a* y *si existe* $n \geq 0$ *tal que* $P^{(n)}_{x,y} > 0$ *y se denota por* $x \to y$.

2. *x se comunica con y, si $x \to y$ e $y \to x$ lo que se denota por $x \leftrightarrow y$.*

3. *$C(x) := \{y \in \boldsymbol{E} | x \leftrightarrow y\}$ es la clase de comunicación de x.*

4. *La cadena es irreducible si para todo $x \in \boldsymbol{E}$, $C(x) = \boldsymbol{E}$.*

5. *$d(x) := mcd\{n | P_{x,x}^{(n)} > 0\}$ es el periodo de x donde mcd significa máximo común divisor.*

6. *Un estado es aperiódico si $\mathrm{d}(x) = 1$ y la cadena es aperiódica si todos los estados lo son.*

Lema 4.7. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible y aperiódica con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ y con vector de probabilidad invariante $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$, entonces*

$$\pi_y > 0 \text{ para todo } y \in \boldsymbol{E}.$$

Teorema 4.8 (Teorema de Convergencia)**.** *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible y aperiódica con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ y con vector de probabilidad invariante $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} p_{x,y}^{(n)} = \pi_y.$$

Aunque para construir la cadena de Markov asociada utilizaremos cadenas de Markov irreducibles, para poder asegurar la ergodicidad de una cadena de Markov es necesaria una condición más débil, la idea se resume a continuación:

Definición 4.9. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\boldsymbol{E}$, decimos que la cadena es descomponible si existen dos subconjuntos ajenos no vacíos A_1, A_2 de $\boldsymbol{E}$ tales que*

$$\sum_{x_j \in A_k} p_{x_i,x_j} = 1, x_i \in A_k, k = 1, 2.$$

Si no se puede descomponer en dichos subconjuntos decimos que la cadena es no descomponible.

Proposición 4.10. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible entonces es no descomponible.*

Demostración. Supongamos que la cadena es descomponible entonces existen dos subconjuntos ajenos no vacíos A_1, A_2 de E tales que

$$\sum_{x_j \in A_k} p_{x_i,x_j} = 1, x_i \in A_k, k = 1, 2.$$

Al ser no vacíos y ajenos existen $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ y por la igualdad anterior

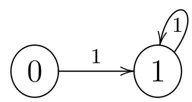
$$C(x_1) \subseteq E \setminus \{x_2\} \neq E$$

y la cadena no es irreducible lo cual es una contradicción.

□

Observemos que no toda cadena de Markov no descomponible es irreducible por lo cual los conceptos no son equivalentes.

Ejemplo 4.1. Consideremos una cadena de Markov con el siguiente diagrama de transición



esta cadena no es irreducible pues $1 \nrightarrow 0$.

La única manera de descomponer los estados sería

$$A_0 = \{0\}, A_1 = \{1\}.$$

Sin embargo

$$\sum_{x_j \in A_0} p_{x_i,x_j} = 0, x_i \in A_0$$

por lo cual la cadena es no descomponible.

Una vez hechas estas observaciones podemos encontrar las condiciones para que una cadena de Markov sea ergódica en el sentido de la Definición 3.4.

Proposición 4.11. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov no descomponible con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ y con vector de probabilidad invariante $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$. Si X_0 tiene distribución π entonces la cadena de Markov es ergódica.*

Demostración. Sea A un evento invariante entonces existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{\omega : (X_0, X_1, ...) \in B\} = \{\omega : (X_n, X_{n+1}, ...) \in B\}.$$

Sea $F := \{x_i \in \mathbf{E} | \pi_{x_i} > 0\}$.

Como la cadena es estacionaria, con un razonamiento análogo al Corolario 4.5, se tiene que para cada $x_j \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = x_j) &= P(\{\omega : (X_1, X_2, ...) \in B\}|X_1 = x_j) \\ &= P(\{\omega : (X_0, X_1, ...) \in B\}|X_0 = x_j) = P(A|X_0 = x_j). \end{aligned}$$

Inductivamente para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x_j \in \mathbf{E}$

$$P(A|X_n = x_j) = P(A|X_0 = x_j). \tag{4.1}$$

Además

$$\begin{aligned} P(A|X_0 = x_j) &= E(P(A|X_1, X_0)|X_0 = x_j) \\ &= E(P(A|X_1)|X_0 = x_j) \\ &= \sum_{x_i \in E} \frac{P(A|X_1 = x_i)\mathbb{1}_{(X_1 = x_i)}\mathbb{1}_{(X_0 = x_j)}}{P(X_0 = x_j)} \\ &= \sum_{x_i \in E} P(A|X_1 = x_i)\frac{P(X_1 = x_i, X_0 = x_j)}{P(X_0 = x_j)} \\ &= \sum_{x_i \in F} P(A|X_1 = x_i)p_{x_1, x_j}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La Ley 0-1 de Lévy dice que para $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$

$$\lim_{n \to \infty} P(A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_A \tag{4.3}$$

Como $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es cadena de Markov, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P(A|\mathcal{F}_n) = P(A|X_n)$$

y al ser estacionaria

$$P(A|X_n) = P(A|X_0). \tag{4.4}$$

Así por (4.3) y (4.4) para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P(A|X_n) = P(A|X_0) = \mathbb{1}_A. \tag{4.5}$$

Es claro que $0 \leq P(A|X_n) \leq 1$ y por el Teorema de Convergencia Dominada, usando (4.1) y (4.5)

$$\begin{aligned} E(P(A|X_0))(1 - P(A|X_n))) &= \lim_{n \to \infty} E(P(A|X_n))(1 - P(A|X_n))) \\ &= E(\mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_A)) = E(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A) = 0. \end{aligned}$$

Una vez más como $0 \leq P(A|X_0) \leq 1$ implica que $0 \leq P(A|X_0)^2 \leq P(A|X_0)$ y $0 \leq P(A|X_0) - P(A|X_0)^2 = P(A|X_0)(1 - P(A|X_0))$. Como mostramos que $E(P(A|X_0)(1 - P(A|X_0))) = 0$ concluímos

$$P(A|X_0)(1 - P(A|X_0)) = 0.$$

Lo cual implica que $P(A|X_0 = x_j)$ solo puede ser 0 ó 1 cuando $\pi_{x_j} > 0$.

Sean

$$A_1 := \{x_i \in E | \pi_{x_i} > 0, P(A|X_0 = x_i) = 1\}$$
$$A_2 := \{x_i \in E | \pi_{x_i} > 0, P(A|X_0 = x_i) = 0\}.$$

Se sigue de (4.2) y de la Proposición 4.4 que si $x_i \in A_1$

$$\begin{aligned} 1 = P(A|X_0 = x_j) &= \sum_{x_j \in F} P(A|X_1 = x_j) p_{x_i,x_j} \\ &= \sum_{x_j \in A_1} P(A|X_0 = x_j) p_{x_i,x_j} = \sum_{x_j \in A_1} p_{x_i,x_j}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Análogamente de (4.2) también obtenemos que

$$1 - P(A|X_0 = x_j) = 1 - \sum_{x_j \in F} P(A|X_0 = x_j) p_{x_i,x_j}$$

$$= \sum_{x_j \in F} p_{x_i,x_j} - P(A|X_0 = x_j) p_{x_i,x_j} = \sum_{x_j \in F} (1 - P(A|X_0 = x_j)) p_{x_i,x_j}.$$

Utilizando esta igualdad si $x_i \in A_2$

$$1 = \sum_{x_j \in F} (1 - P(A|X_0 = x_j)) p_{x_i,x_j} = \sum_{x_j \in A_2} (1 - P(A|X_0 = x_j)) p_{x_i,x_j}$$

$$= \sum_{x_j \in A_2} p_{x_i,x_j}. \tag{4.7}$$

Por (4.6) y (4.7) y como la cadena es no descomponible A_1 ó A_2 deben de ser vacíos, así tenemos dos casos

Caso 1) $A_1 = \emptyset$ así $P(A|X_0) = 0$ y $P(A) = E(P(A|X_0) = 0$.

Caso 2) $A_2 = \emptyset$ así $P(A|X_0) = 1$ y $P(A) = E(P(A|X_0)) = 1$ y la cadena es ergódica.

□

El siguiente corolario es una clara clara consecuencia de las Proposiciones 4.11 y 4.10 :

Corolario 4.12. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible con espacio de estados $\boldsymbol{E}$ y con vector de probabilidad invariante $\pi = (\pi_x)_{x\in E}$. Si X_0 tiene distribución π entonces la cadena de Markov es ergódica.*

A partir de ahora supondremos que estamos trabajando con una cadena de Markov irreducible $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con vector invariante π y que X_0 tiene distribución π. Por el Corolario 4.12 se sabe que es ergódica, es decir, que satisface la Condición 1 del Capítulo 3.

Además impondremos las condiciones adicionales:

1. La cadena es aperiódica.

2. Para alguna $\theta \neq 0$ la matriz $Q := (p_{x,y}e^{-\theta y})_{x,y\in E}$ tiene valor propio 1 y es regular, es decir existen dos vectores v, c, tales que

   (R1) $v^T c = 1$

   (R2) $v^T Q = v^T$

   (R3) $Qc = c$

   (R4) $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = cv^T$.

   A esta condición se le llama condición de regularidad.

Teorema 4.13. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov, irreducible, aperiódica, con vector invariante y distribución inicial π que además satisface la condición de regularidad*

1. Si $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ entonces S_n cumple la Condición 2 del Capítulo 3, es decir

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n})$$

existe.

2. Si $S_{m,n}$ es la sucesión doblemente infinita construída en el Capítulo 3 entonces para toda $B \in \mathcal{F}_{m,n} = \sigma(X_m, X_{m+1}, ..., X_{n-1}, X_n)$

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}; B)$$

existe, es decir se satisface la Condición 3 del Capítulo 3.

Demostración.

1. Utlizando propiedades básicas de cadenas de Markov

$$\begin{aligned}
E(e^{-\theta S_n}) &= \sum_{x_1\in E}\sum_{x_2\in E}...\sum_{x_n\in E} P(X_1=x_1,X_2=x_2,...X_n=x_n)e^{-\theta(x_1+...+x_n)}\\
&= \sum_{x_1\in E}\sum_{x_2\in E}...\sum_{x_n\in E} \pi_{x_1}p_{x_1,x_2}...p_{x_{n-1},x_n}e^{-\theta(x_1+...+x_n)}\\
&= \sum_{x_1\in E}\sum_{x_2\in E}...\sum_{x_n\in E} \pi_{x_1}e^{-\theta x_1}p_{x_1,x_2}e^{-\theta x_2}...p_{x_{n-1},x_n}e^{-\theta x_n}\\
&= \pi^T Q^n \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \lim_{n\to\infty} \pi^T Q^n \mathbf{1} = \pi^T c v^T \mathbf{1}$$

es decir el límite existe y se cumple la Condición 2.

2. Sea $B\in\mathcal{F}_{-k,k}$ como el espacio de estados es numerable sin pérdida de generalidad bastará demostrarlo cuando B satisface

$$B=\{\bar{X}_{-k}=x_{-k},...,\bar{X}_k=x_k\}, x_i\in E.$$

Usando propiedades de la esperanza condicional

$$\begin{aligned}
E(e^{-\theta S_{-m,n}};B) &= E(e^{-\theta S_{-m,n}}\mathbb{1}_B) = E(E(e^{-\theta S_{-m,n}}\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{-k,k}))\\
&= E(E(e^{-\theta(S_{-m,-k-1}+S_{-k,k}+S_{k+1,n})}\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{-k,k}))\\
&= E(E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}\mathbb{1}_B e^{-\theta S_{-k,k}}\mathbb{1}_B e^{-\theta S_{k+1,n}}\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{-k,k}))\\
&= E(e^{-\theta S_{-k,k}}\mathbb{1}_B E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}\mathbb{1}_B e^{-\theta S_{k+1,n}}\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{-k,k}))\\
&= e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)}E(E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}\mathbb{1}_B e^{-\theta S_{k+1,n}}\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_{-k,k}))
\end{aligned}$$

$$= E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}|\bar{X_{-k}}=x_{-k})e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)}P(B)E(e^{-\theta S_{k+1,n}}|\bar{X}_k=x_k). \tag{4.8}$$

Si definimos $\mu_x := \pi_x e^{-\theta x}, x\in E$, por el Lema 4.7 $\pi_x\neq 0$, por lo cual $\mu_x\neq 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
&E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}|\bar{X}_{-k}=x_{-k}) = E(e^{-\theta S_{-k-1+m}}|X_0=x_{-k})\\
&= \sum_{x_{-m}\in E}...\sum_{x_{-k-1}\in E} e^{-\theta(x_{-m}+...+x_{-k-1})}\pi_{x_{-m}}p_{x_{-m},x_{-m+1}}...\frac{p_{x_{-k-1},x_{-k}}}{\pi_{x_{-k}}}\\
&= \frac{1}{\mu_{x_{-k}}}\sum_{x_{-m}\in E}...\sum_{x_{-k-1}\in E} e^{-\theta(x_{-m+1}+...+x_{-k})}\mu_{x_{-m}}p_{x_{-m},x_{-m+1}}...p_{x_{-k-1},x_{-k}}\\
&= \mu_{x_{-k}}^{-1}(\mu^T Q^{m-k})_{x_{-k}}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}|\bar{X}_{-k}=x_{-k}) &= \lim_{m\to\infty} \mu_{x_{-k}}^{-1}(\mu^T Q^{m-k})_{x_{-k}} \\ &= \mu_{x_{-k}}^{-1} v_{x_{-k}} \mu^T c. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nótese que como c es eigenvector derecho de Q

$$\begin{aligned}\mu^T c &= \sum_{x_j\in E} \mu_{x_j} c_{x_j} = \sum_{x_j\in E} \pi_{x_j} e^{-\theta x_j} c_{x_j} \\ &= \sum_{x_j\in E}\sum_{x_i\in E} \pi_{x_j} p_{x_i,x_j} e^{-\theta x_j} c_{x_j} = \sum_{x_j\in E} \pi_{x_i} \sum_{x_j\in E} p_{x_i,x_j} e^{-\theta x_j} c_{x_j} \\ &= \sum_{x_i\in E} \pi_i c_i = \pi^T c.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.9)

$$\lim_{m\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,-k-1}}|\bar{X}_{-k}=x_{-k}) = \mu_{x_{-k}}^{-1} v_{x_{-k}} \pi^T c. \tag{4.10}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}&e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)} P(\bar{X}_{-k}=x_{-k},...,\bar{X}_k=x_k) \\ &= e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)} P(X_0=x_{-k},...,\bar{X}_{2k}=x_k) \\ &= e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)} \pi_{x_{-k}} P_{x_{-k},x_{-k+1}}...P_{x_{k-1},x_k}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}&E(e^{-\theta S_{k+1,n}}|\bar{X}_k=x_k) = E(e^{-\theta S_{n-(k+1)}}|X_0=x_k) \\ &= \sum_{x_{k+1}\in E} ... \sum_{x_n\in E} e^{-\theta(x_{k+1}+...+x_n)} p_{x_k,x_{k+1}}...p_{x_{n-1},x_n} = (Q^{n-k}\mathbf{1})_{x_k}.\end{aligned}$$

Por lo cual por

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_{k+1,n}}|\bar{X}_k=x_k) = \lim_{n\to\infty}(Q^{n-k}1)_{x_k} = c_{x_k} v^T \mathbf{1}. \tag{4.12}$$

Utilizando (4.8) (4.10) (4.11) y (4.12) podemos concluír

$$\begin{aligned}&\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}};B) \\ &= (\mu_{x_{-k}}^{-1} v_{x_{-k}} \pi^T c)(e^{-\theta(x_{-k}+...+x_k)} \pi_{x_{-k}} P_{x_{-k},x_{-k+1}}...p_{x_{k-1},x_k})(c_{x_k} v^T \mathbf{1}) \\ &= (e^{-\theta(x_{-k+1}+...+x_k)} p_{x_{-k},x_{-k+1}}...p_{x_{k-1},x_k} c_{x_k} v_{x_{-k}})(\pi^T c v^T \mathbf{1}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por lo que el límite existe y se satisface la condición requerida.

□

Recordemos que en el Capítulo 3 construimos la medida de probabilidad del proceso estacionario asociado. En este caso con unos cuantos cálculos podremos caracterizar el proceso asociado de la cadena de Markov, este resultará ser ergódico y cumplirá la dualidad.

Proposición 4.14. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov como en Teorema 4.13 entonces su proceso estacionario asociado satisface:*

1. $P^*(\bar{X}_{-k} = x_{-k}, ..., \bar{X}_k = x_k) = e^{-\theta(x_{-k+1}+...+x_k)} P_{x_{-k},x_{-k+1}} ... P_{x_{k-1},x_k} c_{x_k} v_{x_{-k}}$.
2. *La caminata aleatoria asociada es una cadena de Markov estacionaria con distribución inicial $\pi^* = (c_x v_x)_{x\in E}$ y matriz de trancisión*
$$P^* = (P^*_{x,y})_{x,y\in E} = (P_{x,y} e^{-\theta y} \frac{c_y}{c_x})_{x,y\in E}.$$
3. $P(\bar{X}_k = x_k, \bar{X}_{k+1} = x_{k+1}) \neq 0$ *si y sólo si* $P^*(\bar{X}^*{}_k = x_k, \bar{X}^*{}_{k+1} = x_{k+1}) \neq 0$.
4. *Es estacionaria, irreducible y aperiódica cómo la original.*
5. $(P^*)^* = P$ *es decir en este caso se cumple la dualidad.*

Demostración. 1. Por el Teorema 4.13 y como $S_{-m,n} \triangleq S_{m+n}$ tenemos que

$$\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \pi^T c v^T \mathbf{1}.$$

Combinando esto con (4.13) tenemos que

$$\begin{aligned} P^*(\bar{X}_{-k} = x_{-k}, ..., \bar{X}_k = x_k) &= P^*_k(\bar{X}_{-k} = x_{-k}, ..., \bar{X}_k = x_k) \\ &= \frac{\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}}; \bar{X}^*{}_{-k} = x_{-k}, ..., \bar{X}^*{}_k = x_k)}{\lim\limits_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta S_{-m,n}})} \\ &= e^{-\theta(x_{-k+1}+...+x_k)} P_{x_{-k},x_{-k+1}} ... P_{x_{k-1},x_k} c_{x_k} v_{x_{-k}}. \end{aligned}$$

2. Por el inciso 1. es claro que π^* es la distribución inicial. Por como se construyeron c y v son vectores derecho e izquierdo de Perron-Frobenius con respecto a la matriz Q la cual tiene entradas positivas, así podemos asegurar que para toda $x \in E$, $c_x v_x > 0$. Claramente por el inciso 1. cumple la condición de Markov y

$$P^*_{x,y} = \frac{P^*(\bar{X}_0 = x, \bar{X}_1 = y)}{P^*(\bar{X}_0 = x)} = \frac{e^{-\theta y} P_{x,y} c_y v_x}{c_x v_x} = P_{x,y} e^{-\theta y} \frac{c_y}{c_x}$$

por lo cual es cadena de Markov.

Por último para probar que la cadena es estacionaria observemos que por la condición de regularidad (R2)

$$\pi^{*T}P^* = \pi^*(P_{x,y}e^{-\theta y}\frac{c_y}{c_x})_{x,y\in E} = \pi^*(\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}Q(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}$$

$$= (c_y v_y)_{y\in E}{}^T(\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}Q(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}$$
$$= v^T Q(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E} = v^T(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E} = \pi^{*T}.$$

3. Para demostrar la ida supongamos que $P(\bar{X}_k = x_k, \bar{X}_{k+1} = x_{k+1}) \neq 0$ así $\pi_k P_{x_k,x_{k+1}} \neq 0$ lo cual recordando que para toda j, $e^{-\theta_j} \neq 0$, $c_j \neq 0$ y por como se definieron $\pi^*_{x_k}$, $P^*_{x_k,x_{k+1}}$ implica que $P^*(\bar{X^*}_k = x_k, \bar{X^*}_{k+1} = x_{k+1}) \neq 0$.

El regreso es análogo a la ida.

4. En el segundo inciso probamos que la cadena es estacionaria.

Observemos que el inciso 3. de esta demostración implica que dos estados se comunican entre si en la cadena sí y sólo si se comunican en la cadena asociada, lo cual implica que la cadena es irreducible y aperiódica sí y sólo si la cadena asociada lo es. Como la cadena es irreducible y aperiódica la asociada también.

5. Sean $P = (P_{x,y})_{x,y\in E}$ la matriz de transición de la cadena y
$Q^* := (P^*_{x,y}e^{\theta y})_{x,y\in E})$. Queremos demostrar que Q^* cumple las condiciones de regularidad . Como la cadena es estacionaria, irreducible y aperiódica por el Teorema 4.8

1. $\pi^T P = \pi^T$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1}\pi^T$.

Por el inciso 1. de esta proposición

$$Q^* = (P^*_{x_i,y_j}e^{\theta y_j})_{x_i,y_j\in E} = (P_{x_i,y_j}\frac{c_{y_j}}{c_{x_i}})_{x_i,y_j\in E}$$

$$= (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}.$$

Sean $v^* = (\pi_{x_i}c_{x_i})_{x_i\in E}$, $c^* = (\frac{1}{c_{x_i}})_{x_i\in E}$, veamos que estos vectores cumplen las condiciones de regularidad

(R*1) $v^{*T}c^* = \sum\limits_{x_i\in E}\pi_{x_i} = 1$ pues π es vector de probabilidad

(R*2)

$$v^{*T}Q^* = (\pi_{x_i}c_{x_i})^T_{x_i\in E}(\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}$$

$$= \pi P(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E} = \pi(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E} = v^{*T}$$

(R*3)

$$Q^*c^* = (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}(\frac{1}{c_{x_i}})_{x_i\in E}$$

$$= (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P\mathbf{1} = (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}\mathbf{1} = c^*$$

(R*4)

$$\lim_{n\to\infty} Q^{*n} = \lim_{n\to\infty}((\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E})^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}P^n(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}$$

$$= (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}(\lim_{n\to\infty} P^n)(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E}$$

$$= (\frac{1}{c_{x_i}}\delta_{i,i})_{x_i,y_j\in E}1\pi^T(c_{y_j}\delta_{j,j})_{x_i,y_j\in E} = c^*(v^*)^T.$$

Por lo cual la cadena asociada tiene cadena asociada. Usando el inciso 1. de esta proposición la cadena asociada debe satisfacer

$$P^{**}_{x,y} = P^*_{x,y}e^{\theta y}\frac{c^*_y}{c^*_x} = P_{x,y}e^{-\theta y}\frac{c_y}{c_x}e^{\theta y}\frac{c_x}{c_y} = P_{x,y}$$

$$\pi^{**}_x = c^*_x v^*_x = \pi_x$$

y la cadena asociada a la cadena asociada es la original.

□

Observemos que se cumple la condición para poder construir la martingala

Proposición 4.15. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov como en la Proposición 4.14 entonces se cumple la Condición 4 del Capítulo 3 y en consecuencia $V_k = e^{-\theta S_k}c_{X_k}v^T 1$ es martingala con respecto a $\mathcal{F}_k$.*

Demostración. Para mostrar que se cumple la Condición 4 será suficiente suponer que

$$B = \{X_1 = x_1, ...X_k = x_k\}, x_i \in \mathbf{E}.$$

Así

$$E(e^{-\theta S_n}; B) = \sum_{x_{k+1}\in E} ... \sum_{x_n \in E} e^{-\theta(x_1+...+x_n)} P(B) P_{x_k, x_{k+1}} ... P_{x_{n-1}, x_n}$$

$$= P(B) e^{-\theta(x_1+...+x_k)} \sum_{x_{k+1}\in E} ... \sum_{x_n \in E} e^{-\theta(x_{k+1}+...+x_n)} P_{x_k, x_{k+1}} ... P_{x_{n-1}, x_n}.$$

Repitiendo el mismo procedimiento que se hizo en (4.12) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; B) = P(B) e^{-\theta(x_1+...+x_k)} c_{x_k} v^T \mathbf{1} = r(B)$$

y se cumple la Condición 4.

Por último observemos que

$$\int_B V_k dP = E(V_k; B) = E(e^{-\theta S_k} c_{X_k} v^T \mathbf{1}; B)$$

$$= P(B) e^{-\theta(x_1+...+x_k)} c_{x_k} v^T \mathbf{1} = r(B)$$

por lo cual V_k es la martingala pedida.

□

Capítulo 5

Incrementos estacionarios gaussianos

En este capítulo encontraremos las condiciones para la existencia del proceso estacionario asociado en procesos gaussianos.

Definición 5.1. *Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución normal o gaussiana con parámetros μ y σ^2 si la función*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

es una función de densidad de X. También decimos que X tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Decimos que una variable con distribución normal es estándar si $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

El siguiente resultado se puede consultar en cualquier libro elemental de probabilidad.

Proposición 5.2. *Sea X una variable aleatoria con distribución gaussiana con parámetros μ y σ^2 entonces $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.*

Una vez definida la distribución normal, se puede construir la distribución normal multivariada.

Definición 5.3. *Se dice que una vector aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ es un vector gaussiano si existen n variables aleatorias independientes $U_1, ..., U_n$ con distribución normal estándar, una matriz de $n \times n$ invertible A y un vector n-dimensional tales que $X = AU + \mu$, en donde*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Las siguientes proposiciones se pueden encontrar en [6] Cap III:

Proposición 5.4. *Sea* $(X_1, ..., X_n)$ *un vector gaussiano y sean* A*,* U *y* μ *tales que* $X = AU + \mu$ *entonces* μ *y* $C = AA^t$ *son respectivamente el vector de esperanzas y la matriz de covarianzas de* $(X_1, ..., X_n)$ *es decir satisfacen*

$$\mu = (E(X_i))_{i=1,...,n} \text{ y } C = (Cov(X_i, X_j))_{i,j=1,...,n}.$$

Además la función

$$f_{X_1,...,X_n}(x) = \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\}$$

es la densidad de $(X_1, ..., X_n)$*.*

Proposición 5.5. *Sean* $(X_1, ..., X_n)$ *y* $(Y_1, ..., Y_n)$ *vectores aleatorios gaussianos entonces tienen la misma función de distribución si y sólo si para toda* $i, j \in \{1, ..., n\}$ $E(X_i) = E(Y_i)$ *y tienen la misma matriz de covarianzas es decir para toda* $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$Cov(X_i, X_j) = Cov(Y_i, Y_j).$$

Si un vector gaussiano tiene vector de esperanzas μ y matriz de covarianzas C diremos que tiene su distribución normal $N(\mu, C)$. Finalmente podemos definir que es un proceso gaussiano.

Definición 5.6. *Sean* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *un conjunto de variables aleatorias en un espacio de probabilidad, decimos que son un proceso gaussiano si para toda* $n \in \mathbb{N}$*, el vector* $(X_1, ..., X_n)$ *tiene distribución normal multivariada.*

A partir de este momento supondremos que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un proceso gaussiano estacionario y satisface que

$$\mu = E(X_i) > 0, \sigma^2 = Var(X_i) > 0.$$

Por ser estacionario μ y σ^2 no dependen de i.

Para todo par de variables aleatorias con varianza positiva en un mismo espacio de probabilidad se puede definir el coeficiente de correlación.

Definición 5.7. *Sean* X, Y *dos variables aleatorias en un mismo espacio de probabilidad tales que tienen varianza positiva definimos su coeficiente de correlación* $\rho_{X,Y}$ *como*

$$\rho_{X,Y} := \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

Proposición 5.8. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con varianza positiva entonces para toda $n, m, r \in \mathbb{N}$ los coeficientes de correlación satisfacen*

$$\rho_{X_n,X_{n+r}} = \rho_{X_m,X_{m+r}}.$$

Definimos ρ_r como

$$\rho_r := \rho_{X_n,X_{n+r}}.$$

Demostración. Como el proceso es estacionario tenemos que

$$(X_n, ..., X_{n+r}) = (X_m, ..., X_{m+r})$$

$$Cov(X_n, X_{n+r}) = Cov(X_m, X_{m+r})$$

por lo cual

$$\rho_{X_n,X_{n+r}} = \frac{Cov(X_n, X_{n+r})}{\sqrt{Var(X_n)}\sqrt{Var(X_{n+r})}} = \frac{Cov(X_n, X_{n+r})}{\sigma^2}$$

$$= \frac{Cov(X_m, X_{m+r})}{\sigma^2} = \frac{Cov(X_m, X_{m+r})}{\sqrt{Var(X_m)}\sqrt{Var(X_{m+r})}} = \rho_{X_m,X_{m+r}}.$$

□

Para poder construir el proceso estacionario asociado es necesario agregar la siguiente condición de regularidad:

(R1) $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} r|\rho_r| < \infty$

A continuación se enuncia y demuestra una propiedad muy importante de los procesos gaussianos, a saber, si los coeficientes de correlacción tienden a cero entonces el proceso es asintóticamente independiente. Esta es la herramienta básica para probar que un proceso gaussiano es ergódico.

Proposición 5.9. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con varianza estrictamente positiva tal que*

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r = 0$$

entonces el proceso tiene las siguientes propiedades:

1. *Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ y $A_n = \{(X_n, ..., X_{n+m-1}) \in B\}$ se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_1 \cap A_n) = P(A_0)^2.$$

2. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es ergódico.*

Demostración. 1. Tenemos que

$$P(A_0 \cap A_n) = P((X_1, ..., X_m, X_n, ..., X_{n+m-1}) \in B \times B).$$

Sea $Y_n = (X_1, ..., X_m, X_n, ..., X_{n+m-1})$ como $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un proceso gaussiano se tiene que Y_n es un vector gaussiano.

Denotemos por C_n a la matriz de covarianzas de Y_n la cual que se puede escribir como

$$C_n = \begin{pmatrix} D & E_n \\ E_n^t & D \end{pmatrix}$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho_1 & \cdots & \sigma^2\rho_{m-1} \\ \sigma^2\rho_1 & \sigma^2 & \cdots & \sigma^2\rho_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2\rho_{m-1} & \sigma^2\rho_{m-2} & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} \sigma^2\rho_{n+m-1} & \sigma^2\rho_{n+m-2} & \cdots & \sigma^2\rho_n \\ \sigma^2\rho_{n+m-2} & \sigma^2\rho_{n+m-1} & \cdots & \sigma^2\rho_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2\rho_n & \sigma^2\rho_{n+1} & \cdots & \sigma^2\rho_{n+m-1} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte por hipótesis:

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r = 0$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0.$$

En consecuencia

$$C := \lim_{n\to\infty} C_n = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Sea $Z = (W_1, ..., W_{2m})$ un vector normal con matriz de covarianzas C y vector de esperanzas $\mu = (E(X_0))$. Como Y_n es un vector normal su función característica está dada por

$$\phi_{Y_n}(t) = \exp(it^T\mu - \frac{1}{2}t^T C_n t)$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \exp(it^T\mu - \frac{1}{2}t^T C_n t)$$

$$= \exp(it^T\mu - \frac{1}{2}t^TCt) = \phi_Z(t).$$

Como las funciones características de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen puntualmente a la función característica de Z y como

$$P(Z \in \partial(B \times B)) = 0$$

pues la distribución de Z es absolutamente continua, se concluye que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a Z, es decir que

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \in B \times B) = P(Z \in B \times B).$$

Por último la matriz de covarianzas de Z es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

lo que muestra que $(Y_1, ..., Y_m)$ y $(Y_{m+1}, ..., Y_{2m})$ son independientes. En consecuencia

$$P(Z \in B \times B) = P((Y_0, ..., Y_m) \in B)P((Y_{m+1}, ..., Y_{2m}) \in B) = P(A_0)^2$$

y finalmente

$$\lim_{n\to\infty} P(A_0 \cap A_n) = P(A_0)^2.$$

2. Sea S un evento invariante entonces existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$S = \{\omega : (X_0, X_1, ...) \in B\} = \{\omega : (X_n, X_{n+1}, ...) \in B\} = S_n.$$

Sea $\varepsilon > 0$ sabemos que por la Proposición 1.10 existen $m \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tales que

$$A = \{\omega : (X_0, ..., X_{m-1}) \in B_m\}, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

$$P(S \triangle A) < \varepsilon \tag{5.1}$$

Sea $A_n = \{\omega : (X_n, ..., X_{n+m-1}) \in B_m\}, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, como el proceso es estacionario tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P(A) = P(A_n),$$

$$P(S \triangle A) = P(S_n \triangle A_n) < \varepsilon$$

lo cual como S es invariante implica que

$$P(S \triangle A_n) < \varepsilon.$$

Es una propiedad de la diferencia simétrica que por (5.1)

$$|P(S) - P(A)| < \varepsilon.$$

Observemos que

$$|P(S \cap S_n) - P(A \cap A_n)| \leq |P(S \cap S_n) - P(S \cap A_n)| + |P(S \cap A_n) - P(A \cap A_n)|$$

$$= |P(S_n) - P(S \cap A_n)| + |P(S \cap A_n) - P(A \cap A_n)|$$
$$= P(S_n \backslash A_n) + |P(S \cap A_n) - P(A \cap A_n)|$$
$$\leq P(S_n \triangle A_n) + P((S \cap A_n) \triangle (A \cap A_n))$$
$$\leq P(S_n \triangle A_n) + P(S \triangle A) < 2\varepsilon.$$

Como S es un evento invariante $S = S_n$ y así

$$|P(S) - P(A \cap A_n)| < 2\varepsilon$$

pero además por el primer inciso de esta proposición

$$\lim_{n\to\infty} P(A \cap A_n) = P(A)^2$$

por lo cual

$$|P(S) - P(A)^2| < 2\varepsilon.$$

Finalmente

$$|P(S) - P(S)^2| \leq |P(S) - P(A)^2| + |P(A)^2 - P(S)^2|$$

$$= |P(S) - P(A)^2| + (P(A) + P(S))|P(A) - P(S)|$$
$$\leq |P(S) - P(A)^2| + 2|P(A) - P(S)| < 2\varepsilon.$$

Así $P(S) - P(S)^2 = 0$ y $P(S) \in \{0, 1\}$, es decir, el proceso es ergódico.

□

Corolario 5.10. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con esperanza y varianza positiva tal que cumple la condición de regularidad (R1), entonces el proceso cumple la Condición 1 del Capítulo 3 es decir es ergódico.*

Demostración. Es una propiedad de las series que si se cumple la condición (R1) implica que $\lim_{r\to\infty} \rho_r = 0$ y así por la Proposición 5.9 el proceso es ergódico.

□

Definamos las siguientes series

$$R := \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r$$

$$S := \sum_{r=1}^{\infty} r\rho_r$$

que como consecuencia de (R1) también convergen.

Proposición 5.11. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con varianza y esperanza positiva entonces la variable aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución normal con parámetros $nE(X_1)$ y $\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)$.*

Demostración. La suma de las variables de un vector normal multivariada tienen distribución normal por lo cual solo tenemos que calcular los parámetros.

$$E(S_n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_1)$$

$$Var(S_n) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= n\sigma^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \sigma^2\rho_{j-i} = n\sigma^2 + 2\sigma^2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r$$

$$= \sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r).$$

$\square$

Proposición 5.12. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con esperanza y varianza positivas, que cumple la condición de regularidad (R1) entonces la variable aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ cumple la Condición 2 del Capítulo 3 si y sólo si $R > -\frac{1}{2}$.*

Si se cumple la Condición 2 tenemos que

$$\theta = \frac{2E(X_1)}{\sigma^2(1+2R)}, \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \exp\{-\frac{4E(X_1)^2 S}{\sigma^2(1+2r)}\}.$$

Demostración. Por la Proposición 5.11, S_n tiene distribución normal de parámetros $nE(X_1)$ y $\sigma^2(n+2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)$. En consecuencia $E(e^{-\theta S_n})$ es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal y

$$E(e^{-\theta S_n}) = \exp\{-nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2\}.$$

Así la Condición 2 se cumplirá si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} -nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2$$

existe.

Demostremos la ida de esta proposición. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} -nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2$$

existe.

Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} -nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\rho_r)\theta^2\} - \sigma^2\sum_{r=1}^{n-1} r\rho_r\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\rho_r)\theta^2\} - \sigma^2 S\theta^2.$$

Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} -E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\rho_r)\theta^2 = -E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2R)\theta^{2.}$$

Así para que el límite exista se debe de cumplir

$$-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2R)\theta^2 = 0$$

esto implica que

$$\theta = 0 \text{ ó } \theta = \frac{2E(X_1)}{\sigma^2(1+2R)}.$$

Queremos que $\theta > 0$ pues si no estaríamos en el caso trivial y las hipótesis piden que $E(X_1) > 0, \sigma^2 > 0$ entonces se debe satisfacer

$$R > -\frac{1}{2}$$

y descartamos el primer valor de θ.

Demostremos el regreso de esta proposición. Supongamos que $R > -\frac{1}{2}$. Sea

$$\theta = \frac{2E(X_1)}{\sigma^2(1+2R)}. \tag{5.2}$$

Lo cual implica que como $E(X_1) > 0, \sigma^2 > 0$ entonces $\theta > 0$ y además

$$-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2R)\theta^2 = 0. \tag{5.3}$$

Veamos que para ese valor de θ el límite existe

$$\lim_{n\to\infty} -nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\rho_r)\theta^2\} - \sigma^2\sum_{r=1}^{n-1} r\rho_r\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2(R - \sum_{r=n}^{\infty}\rho_r)\theta^2\} - \sigma^2 S\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(1+2R)\theta^2 - \sum_{r=n}^{\infty}\rho_r\theta^2\} - \sigma^2 S\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} -n\sum_{r=n}^{\infty}\rho_r\theta^2 - \sigma^2 S\theta^2 = -\sigma^2 S\theta^2. \tag{5.4}$$

En la penúltima igualdad se utilizó (5.3) y en la última que por la condición de regularidad (R1)

$$n|\sum_{r=n}^{\infty}\rho_r| \le \sum_{r=n}^{\infty}|r\rho_r| < \infty$$

lo cual implica que

$$= \lim_{n\to\infty} -n\sum_{r=n}^{\infty}\rho_r = 0$$

completando así el regreso de esta proposición.

Por último observemos que por (5.4) y (5.2)

$$\lim_{n\to\infty} -nE(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(n+2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)\theta^2 =$$

$$-\sigma^2 S\theta^2 = -\frac{4E(X_1)^2 S}{\sigma^2(1+2R)^2}$$

y finalmente

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \exp\{-\frac{4E(X_1)^2 S}{\sigma^2(1+2R)^2}\}.$$

□

Ahora veamos que la Condición 3 del Capítulo 3 se satisface si $R > \frac{1}{2}$.

Proposición 5.13. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano estacionario con esperanza y varianza positivas, que cumple la condición de regularidad (R1) entonces la variable aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ cumple la Condición 3 del Capítulo 3 si $R > \frac{1}{2}$.*

Demostración. Observemos que $S_{-m,n} = (1^T X^k + Y_{-m,n})$ donde

$$X^k = (\bar{X}_{-k}, ..., \bar{X}_k), Y_{-m,n} = S_{-m,-k-1} + S_{k+1,n}.$$

X^k es una vector normal con vector de esperanzas constante μ, a su matriz de covarianzas la denotaremos por C_k.

Por una razonamiento análogo a la Proposición 5.11, $Y_{-m,n}$ es una variable aleatoria normal tal que

$$E(Y_{-m,n}) = E(S_{-m,-k-1}) + E(S_{k+1,n}) = E(\bar{X}_0)(m+n-2k) \tag{5.5}$$

denotaremos a la esperanza y la varianza como

$$E(Y_{-m,n}) = \lambda_{-m,n}, Var(Y_{-m,n}) = \tau^2_{-m,n}.$$

Sea $v^k_{-m,n}$ el vector de covarianzas entre $Y_{-m,n}$ y X^k es decir

$$v^k_{-m,n} = (Cov(Y_{-m,n}, \bar{X}_i))_{i\in\{-k,...,k\}}.$$

Por la bilinealidad de la covarianza

$$Cov(Y_{-m,n}, \bar{X}_i) = Cov(S_{-m,-k-1} + S_{k+1,n}, \bar{X}_i)$$

$$= \sum_{j=-m}^{-k-1} Cov(\bar{X}_j, \bar{X}_i) + \sum_{l=k+1}^{n} Cov(\bar{X}_l, \bar{X}_i) = \sigma^2 (\sum_{r=i+k+1}^{i+m} \rho_r + \sum_{r=k+1-i}^{n-i} \rho_r)$$

por lo cual

$$\lim_{m,n\to\infty} Cov(Y_{-m,n}, \bar{X}_i) = \lim_{m,n\to\infty} \sigma^2 (\sum_{r=i+k+1}^{i+m} \rho_r + \sum_{r=k+1-i}^{n-i} \rho_r)$$

$$= \sigma^2 (2R - \sum_{r=1}^{i+k} \rho_r - \sum_{r=1}^{k-i} \rho_r).$$

Así el vector $v^k_{-m,n}$ tiene límite cuando m, n tienden a infinito, denotaremos por v^k a este límite es decir

$$\lim_{m,n\to\infty} v^k_{-m,n} = v^k = (\sigma^2 (2R - \sum_{r=1}^{i+k} \rho_r - \sum_{r=1}^{k-i} \rho_r))_{\{i\in -k,\ldots,k\}}$$

$$= (\sigma^2 (2R + 1 - 1 - \sum_{r=1}^{i+k} \rho_r - \sum_{r=1}^{k-i} \rho_r))_{\{i\in -k,\ldots,k\}}$$

$$= \sigma^2 (2R+1)\mathbf{1} + C_k \mathbf{1}. \tag{5.6}$$

Como $S_{-m,n}$ y S_{m+n+1} tienen la misma distribución, por la Proposición 5.11

$$Var(S_{-m,n}) = Var(S_{m+n+1}) = \sigma^2 (m + n + 1 + 2 \sum_{r=1}^{m+n} (m + n + 1 - r)\rho_r).$$

Por otro lado

$$Var(S_{-m,n}) = Var(\mathbf{1}^T X + Y_{-m,n}) = Var(1^T X) + Cov(\mathbf{1}^T X, Y_{-m,n}) + Var(Y_{-m,n})$$

$$= \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} + 2\mathbf{1}^T v^k_{-m,n} + \tau^2_{-m,n}.$$

Usando las dos igualdades anteriores tenemos que

$$\tau^2_{-m,n} - \sigma^2 [1 + 2R](m + n + 1)$$

$$= \sigma^2(m+n+1+2\sum_{r=1}^{m+n}(m+n+1-r)\rho_r) - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_{-m,n}^k - \sigma^2[1+2R](m+n+1)$$

$$= 2\sigma^2(m+n+1)\{\sum_{r=1}^{m+n}\rho_r - R\} - 2\sigma^2\sum_{r=1}^{m+n} r\rho_r - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_{-m,n}^k$$

$$= -2\sigma^2\{\sum_{r=m+n+1}^{\infty}(m+n+1)\rho_r\} - 2\sigma^2\sum_{r=1}^{m+n} r\rho_r - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_{-m,n}^k$$

y por un razonamiento análogo a (5.4)

$$\lim_{m,n\to\infty} \tau_{-m,n} - \sigma^2[1+2R](m+n+1) = -2\sigma^2 S - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v^k. \tag{5.7}$$

Es una propiedad de los vectores normales (Consúltese [12] Teo 3.2.4) que la distribución de $Y_{-m,n}$ condicionada en $\bar{X}_{-k} = x_{-k}, ..., \bar{X}_k = x_k$ ó $X^k = x$ es normal de la forma $N(\lambda_{-m,n} + {v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1}(x-\mu), \tau_{-m,n}^2 - {v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1} v_{-m,n}^k)$.

Así su funcion generadora de momentos debe ser

$$E(e^{-\theta Y_{-m,n}} | X^k = x)$$

$$= \exp\{-[\lambda_{-m,n} + v_{-m,n}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_{-m,n}^2 - {v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1} v_{-m,n}^k]\theta^2\}.$$

Observemos que

$$-[\lambda_{-m,n} + {v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_{-m,n}^2 - {v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1} v_{-m,n}^k]\theta^2$$

$$= \{-\lambda_{-m,n}\theta + \frac{1}{2}\tau_{-m,n}^2\theta^2\} +$$

$$\{-[{v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1} v_{-m,n}^k]\theta^2\}.$$

Por una parte tenemos que

$$\lim_{m,n\to\infty} -\lambda_{-m,n}\theta + \frac{1}{2}\tau_{-m,n}^2\theta^2$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} -\lambda_{-m,n}\theta + \frac{1}{2}\{\tau_{-m,n}^2 - \sigma^2[1+2R](m+n+1) + \sigma^2[1+2R](m+n+1)\}\theta^2$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} -\lambda_{-m,n}\theta + \frac{1}{2}\{\sigma^2[1+2R](m+n+1)\}\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}1^T C_k 1 - 1^T v^k$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} -E(\bar{X}_0)(m+n-2k)\theta + \frac{1}{2}\{\sigma^2[1+2R](m+n+1)\}\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} (m+n)\{-E(\bar{X}_0)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2[1+2R]\theta^2\} + 2kE(\bar{X}_0)\theta$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2[1+2R]\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

$$= 2kE(\bar{X}_0)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2[1+2R]\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

en la segunda igualdad usamos (5.7), en la tercera (5.5) y en la última (5.3).

Por otra parte tenemos que

$$\lim_{m,n\to\infty} -[v_{-m,n}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v_{-m,n}^k}^T C_k^{-1} v_{-m,n}^k]\theta^2$$

$$= -[v^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v^k}^T C_k^{-1} v^k]\theta^2$$

por lo cual podemos concluir que

$$\lim_{m,n\to\infty} -[\lambda_{-m,n} + {v_{-m,n}^k}^T C^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_{-m,n}^2 - {v_{-m,n}^k}^T C^{-1} v_{-m,n}^k]\theta^2$$

$$= \alpha_k^T x + \beta_k$$

donde

$$\alpha_k^T = -\theta {v^k}^T C_k^{-1}$$

$$\beta = {v^k}^T C_k^{-1}\mu\theta + \frac{1}{2}[-{v^k}^T C_k^{-1} v^k]\theta^2 + 2kE(\bar{X}_0)\theta$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2[1+2R]\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k.$$

Observemos que por (5.6) y (5.2)

$$\alpha_k^T = -\theta {v^k}^T C_k^{-1} = -\theta(\sigma^2(2R+1)\mathbf{1}^T - \mathbf{1}^T C_k^T)C_k^{-1}$$

$$= -2\mu^T C_k^{-1} + \theta\mathbf{1}^T$$

así tenemos que

$$\lim_{m,n\to\infty} E(e^{-\theta Y_{-m,n}} | X^k = x) = \exp(\alpha_k^T x + \beta_k).$$

Lo cual implica que existen a_k, b_k tales que para toda $m, n \in \mathbb{N}$

$$E(e^{-\theta Y_{-m,n}}|X^k = x) \leq \exp(a_k^T x + b_k).$$

Sea $B \in \mathcal{F}_{-k,k} = \sigma(X^k)$. Es una propiedad de la esperanza condicional que

$$E(\exp(-\theta S_{-m,n})\mathbb{1}_B|X^k) = E(\exp(-\theta(Y_{-m,n} + \mathbf{1}^T X^k))\mathbb{1}_B|X^k)$$
$$= \exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_{-m,n})|X^k)$$

por lo cual tenemos que

$$E(\exp(-\theta S_{-m,n}); B) = E(\exp(-\theta S_{-m,n})\mathbb{1}_B) = E(E(\exp(-\theta S_{-m,n})\mathbb{1}_B|X^k)))\cdot$$
$$E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_{-m,n})|X^k)).$$

Por último como para toda $m, n \in \mathbb{N}$

$$\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_{-m,n})|X^k) \leq \exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k) \exp(a_k^T X^k + b_k)$$

y como X^k tiene distribución normal

$$E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k) \exp(a_k^T X^k + b_k)) < \infty.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{m,n\to\infty} E(\exp(-\theta S_{-m,n}; B)) = E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B \exp(\alpha_k^T X + \beta_k))$$
$$= E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k + \alpha_k^T X + \beta_k); B) = E(\exp(-2\mu C_k^{-1} X^k + \beta_k); B)$$

y se cumple la Condición 3.

$\square$

Con los cálculos anteriores podemos caracterizar el proceso asociado al proceso gaussiano.

Proposición 5.14. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano como en la Proposición 5.13 entonces el proceso estacionario asociado satisface:*

1. *Es un proceso gaussiano con misma matriz de covarianzas y vector de esperanzas $-\mu$.*

2. *$(P^*)^* = P$ es decir se cumple la dualidad.*

Demostración. 1. En la Proposición 5.13 verificamos que

$$\lim_{m,n\to\infty} E(\exp(-\theta S_{-m,n};B)) = E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k+\beta_k);B)$$

y en este caso la medida de probabilidad del proceso asociado cumple que para todo $B\in\mathcal{F}_{-k,k}$

$$\begin{aligned}P^*(B) &= \frac{E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k+\beta_k);B)}{E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k+\beta_k))}\\ &= \frac{E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k);B)}{E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k))}.\end{aligned}$$

Así si $f_{X^k}(x)$ es la función de densidad de X^k esto implica que la función de densidad del proceso asociado X^{*k} está dada por

$$f_{X^{*k}}(x) = \frac{\exp(-2\mu C_k^{-1}x)f_{X^k}(x)}{E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k))}.$$

Como X^{*k} es vector normal

$$\begin{aligned}&\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k)f_{X^k}(x)\\ &= \exp(-2\mu C_k^{-1}x)\frac{\sqrt{|C_k^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^{2k+1}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^TC_k^{-1}(x-\mu)\}\\ &= \frac{\sqrt{|C_k^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^{2k+1}}\exp\{-\frac{1}{2}(x+\mu)^TC_k^{-1}(x+\mu)\}.\end{aligned}$$

De la misma manera usando su función generadora de momentos

$$\begin{aligned}E(\exp(-2\mu C_k^{-1}X^k) &= exp\{-2\mu C_k^{-1}\mu+\frac{1}{2}(-2\mu C_k^{-1})C_k(-C_k^{-1}2\mu)\}\\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

Sustituyendo las dos últimas igualdades tenemos que la densidad de X^{*k} está dada por

$$f_{X^{*k}}(x) = \frac{\sqrt{|C_k^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^{2k+1}}\exp\{-\frac{1}{2}(x+\mu)^TC_k^{-1}(x+\mu)\}$$

por lo cual X^{*k} es normal multivariada con matriz de covarianzas C_k y vector de esperanzas $-\mu$.

2. Es claro pues en el inciso anterior vimos que el proceso asociado tiene la misma matriz de covarianza, es decir cumple con las condiciones de regularidad. Además su vector de esperanzas es $-\mu$, por lo cual si construyéramos su proceso asociado tendríamos un proceso gaussiano con matriz de covarianzas C_k y vector de esperanzas $-(-\mu) = \mu$ es decir regresamos al proceso original.

□

Verifiquemos que se cumple la condición para construir la martingala.

Proposición 5.15. *Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un proceso gaussiano como en la Proposición 5.13 entonces $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ cumple la Condición 4 del Capítulo 3 y en consecuencia la martingala asociada es de la forma*

$$V_k = \exp(-\theta \boldsymbol{1}^T X^k + \gamma_k^T X^k + \delta_k)$$

con $X_k = (X_1, ...X_k)^T$.

Demostración. Observemos que $S_n = (1^T X^k + Y_n)$ donde $X^k = (X_1, ..., X_k)$, $Y_n = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$. Por un lado tenemos que X^k es una vector normal con vector de esperanzas constante $\mu = (E(X_1))_{i\in\{1,...,k\}}$, a su matriz de covarianzas la denotaremos por C_k.

Por otro lado por un razonamiento análogo a la Proposición 5.11 Y_n es una variable aleatoria normal tal que

$$E(Y_n) = E(\sum_{i=k+1}^{n} X_i) = E(X_1)(n-k). \tag{5.8}$$

Para ahorrar espacio denotaremos esta esperanza como

$$E(Y_n) = \lambda_n$$

también la varianza como

$$Var(Y_n) = \tau_n^2.$$

Sea v_n^k el vector de covarianzas entre Y_n y X^k es decir

$$v_n^k = (Cov(Y_n, X_i))_{i\in\{1,...,k\}}.$$

Por la bilinearidad de la covarianza

$$Cov(Y_n, X_i) = Cov(\sum_{i=k+1}^{n} X_i, X_i) = \sum_{l=k+1}^{n} Cov(X_l, X_i) = \sigma^2 \sum_{r=k+1-i}^{n-i} \rho_r$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} Cov(Y_n, X_i) = \lim_{n\to\infty} \sigma^2 \sum_{r=k+1-i}^{n-i} \rho_r = \sigma^2(R - \sum_{r=1}^{k-i} \rho_r).$$

Así el vector v_n^k tiene límite cuando n tiende a infinito, denotaremos por v^k a este límite es decir

$$\lim_{n\to\infty} v_n^k = v^k = (\sigma^2(R - \sum_{r=1}^{k-i} \rho_r))_{i\in\{1,\ldots,k\}}.$$

Por la Proposición 5.11

$$Var(S_n) = \sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} Var(S_n) = Var(\mathbf{1}^T X^k + Y_n) &= Var(\mathbf{1}^T X^k) + Cov(\mathbf{1}^T X^k, Y_n) + Var(Y_n) \\ &= \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} + 2\mathbf{1}^T v_n^k + \tau_n^2. \end{aligned}$$

Usando las dos igualdades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} &\tau_n^2 - \sigma^2[1+2R]n \\ &= \sigma^2(n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\rho_r) - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_n^k - \sigma^2[1+2R]n \\ &= 2\sigma^2 n\{\sum_{r=1}^{n-1} \rho_r - R\} - 2\sigma^2 \sum_{r=1}^{n-1} r\rho_r - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_n^k \\ &= -2\sigma^2\{\sum_{r=n}^{\infty} n\rho_r\} - 2\sigma^2 \sum_{r=1}^{n-1} r\rho_r - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v_n^k. \end{aligned}$$

Por un razonamiento análogo a (5.4)

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n - \sigma^2[1+2R]n = -2\sigma^2 S - \mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - 2\mathbf{1}^T v^k. \tag{5.9}$$

Es una propiedad de los vectores normales (consúltese [12] Teo 3.2.4) que la distribución de Y_n condicionada en $X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k$ ó $X^k = x$ es normal de la forma $N(\lambda_n + {v_n^k}^T C_k^{-1}(x-\mu), \tau_n^2 - {v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k)$.

Utilizando la fórmula de la función generadora de momentos de una distribución normal

$$E(e^{-\theta Y_n}|X^k = x)$$

$$= \exp\{-[\lambda_n + {v_n^k}^T C^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_{-n}^2 - {v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k]\theta^2\}.$$

Observemos que

$$-[\lambda_n + {v_n^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_n^2 - {v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k]\theta^2$$

$$= \{-\lambda_n\theta + \frac{1}{2}\tau_n^2\theta^2\} +$$

$$\{-[{v_n^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k]\theta^2\}.$$

Por una parte tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} -\lambda_n\theta + \frac{1}{2}\tau_n^2\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\lambda_n\theta + \frac{1}{2}\{\tau_n^2 - \sigma^2[1+2R]n + \sigma^2[1+2R]n\}\theta^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\lambda_n\theta + \frac{1}{2}\{\sigma^2[1+2R]n\}\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

$$= \lim_{n\to\infty} -E(X_1)(n-k)\theta + \frac{1}{2}\{\sigma^2[1+2R]n\}\theta^2 - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\{-E(X_1)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2[1+2R]\theta^2\} + kE(X_1)\theta - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

$$= kE(X_1)\theta - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

en la segunda igualdad usamos (5.9), en la tercera (5.8) y en la última (5.3).

Por otra parte tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} -[{v_n^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k]\theta^2$$

$$= -[{v^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[-{v^k}^T C_k^{-1} v]\theta^2.$$

Por lo cual podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} -[\lambda_n + {v_n^k}^T C_k^{-1}(x-\mu)]\theta + \frac{1}{2}[\tau_n^2 - {v_n^k}^T C_k^{-1} v_n^k]\theta^2$$

$$= \gamma_k^T x + \delta_k$$

donde

$$\gamma_k = -\theta {v^k}^T C_k^{-1}$$

$$\delta_k = {v^k}^T C_k^{-1} \mu\theta + \frac{1}{2}[-{v^k}^T C_k^{-1} v^k]\theta^2 + kE(X_1)\theta - \sigma^2 S - \frac{1}{2}\mathbf{1}^T C_k \mathbf{1} - \mathbf{1}^T v^k$$

y tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta Y_n}|X^k = x) = e^{\gamma_k^T x + \delta_k}.$$

Lo cual además implica que existen c_k, d_k tales que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$E(e^{-\theta Y_n}|X^k = x) \leq \exp(c_k^T x + d_k).$$

Sea $B \in \mathcal{F}_k = \sigma(X^k)$, es una propiedad de la esperanza condicional que

$$E(\exp(-\theta S_n)\mathbb{1}_B|X^k) = E(\exp(-\theta(Y_n + 1^T X^k))\mathbb{1}_B|X^k)$$

$$= \exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_n)|X^k)$$

por lo cual tenemos que

$$E(\exp(-\theta S_n; B) = E(\exp(-\theta S_n)\mathbb{1}_B) = E(E(\exp(-\theta S_n)\mathbb{1}_B|X^k)))\cdot$$

$$E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_n)|X^k)).$$

Como para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B E(\exp(-\theta Y_n)|X^k) \leq \exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\exp(b_k^T X^k + c_k)$$

y como X^k tiene distribución normal

$$E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\exp(b_k^T X^k + c_k)) < \infty.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} E(\exp(-\theta S_n; B) = E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k)\mathbb{1}_B \exp(\gamma_k^T X^k + \delta_k))$$

$$= E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k + \gamma_k^T X^k + \delta_k); B) = r(B)$$

y se cumple la Condición 4.

Por último

$$\int_B V_k dP = E(\exp(-\theta \mathbf{1}^T X^k + \gamma_k^T X^k + \delta_k); B) = r(B)$$

por lo cual V_k es la martingala pedida.

□

Capítulo 6

La transformada de Esscher, el proceso de Lévy asociado y la martingala de Wald

Hasta ahora solo hemos analizado ejemplos de procesos aleatorios cuyos índices corren en un espacio discreto (ya sean los números naturales o los números enteros). Una pregunta interesante es si es posible generalizar el concepto de caminata aleatoria a procesos cuyos índices sean no numerables, la respuesta es que si. En este capítulo definiremos los procesos de Lévy(cuyo índice corre en los números reales) y construiremos su proceso asociado.

6.1. Procesos de Lévy

Definición 6.1. *Un proceso real valuado* $X = \{X_t : t \geq 0\}$ *definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es un proceso de Lévy si*

1. *Tiene incrementos independientes i.e. para toda* $n \geq 1$ *y* $0 \leq t_0 < ... < t_n$, $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0} ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

2. $X_0 = 0$ *c.s.*

3. *Tiene incrementos estacionarios i.e. la distribución de* $X_{s+t} - X_s$ *no depende de* s.

4. *Tiene trayectorias càdlàg c.s. es decir para casi todo* $\omega \in \Omega$ *la función* f : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = X_t(\omega)$$

tiene limíte por la izquierda y es continua por la derecha en todos sus puntos.

Definición 6.2. *Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ decimos que X es infinitamente divisible si para toda $n \in \mathbb{N}$ existen $(X_{n,i})_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ variables aleatorias i.i.d. tales que*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}.$$

Existe una estrecha relación entre los procesos de Lévy y las variables aleatorias infinitamente divisibles ya que es una propiedad que los caracteriza. La siguiente demostración se puede consultar en [13] Teo 7.10.

Proposición 6.3. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy entonces X_t es infinitamente divisible para toda $t \geq 0$.*

La función característica de una variable aleatoria infinitamente divisible es distinta de cero para todo número real. Una demostración se puede consultar en [5] Ej 3.8.3.

Proposición 6.4. *Sea X una variable aleatoria infinitamente divisible entonces su función característica*

$$\phi(t) = E(e^{itX})$$

Es distinta de cero para toda $t \in \mathbb{R}$.

Así podemos fijar una rama del logaritmo y definir el exponente característico de un proceso de Lévy.

Definición 6.5. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy, decimos que la función $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$\psi(\theta) = -\log E(e^{i\theta X_1})$$

es su exponente característico pues satisface

$$e^{-\psi(\theta)} = E(e^{i\theta X_1}).$$

Es fácil ver que ψ caracteriza a todo el proceso pues para toda $t \geq 0$

$$E(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\psi(\theta)}$$

es decir ψ determina su función característica.

Uno de los teoremas más importantes en la teoría de procesos de Lévy es la fórmula de Lévy-Khintchine, la cual da una descripción explícita de su exponente característico, su demostración se puede encontrar en [13] Teo 8.1 .

Teorema 6.6 (Fórmula de Lévy-Khintchine)**.** *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy entonces su exponente característico satisface que para toda $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x 1_{(|x|<1)}) d\Pi$$

dónde $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π es una medida concentrada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\Pi < \infty$. A la terna (a, σ, Π) se le llama la tripleta característica del proceso de Lévy.

Inversamente si tenemos una tripleta característica (a, σ, Π) existe un proceso de Lévy $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con dicha tripleta característica.

A partir de todo proceso de Lévy se puede construir una caminata aleatoria:

Proposición 6.7. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy entonces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una caminata aleatoria.*

Demostración. Sea $Y_n = X_n - X_{n-1}$ como $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy tenemos que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son i.i.d. además

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n - X_0 = X_n$$

y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una caminata aleatoria. $\square$

Sin embargo no toda caminata aleatoria puede ser extendida a un proceso de Lévy:

Ejemplo 6.1 (Distribución uniforme)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d con distribución uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ entonces $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es una caminata aleatoria. Supongamos que se puede extender a un proceso de Lévy, entonces X_1 sería infinitamente divisible y para toda $n \in \mathbb{N}$ existirían $X_{1,1}, ..., X_{1,n}$ i.i.d. tales que

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{1,i}$$

así como X_1 toma valores en $[0,1]$ esto implica que para $1 \leq i \leq n$,

$$0 \leq X_{1,i} \leq \frac{1}{n} \text{ c.s.}$$

y en consecuencia

$$0 \leq X_{1,i}^2 \leq \frac{1}{n^2} \text{ c.s.}$$

Por lo cual para toda $n \in \mathbb{N}$

$$Var(X_1) = nVar(X_{1,1}) = n\{E(X_{1,1}^2) - E(X_{1,1})^2\}$$

$$\leq nE(X_{1,1}^2) \leq \frac{1}{n}$$

y esto es una contradicción ya que $Var(X_1) = \frac{1}{12}$.

6.2. La transformada de Esscher

Si un proceso de Lévy cumple condiciones similares e incluso más generales que en el caso de la caminata aleatoria asociada podemos construir un nuevo proceso de Lévy utilizando la transformada de Esscher. Para poder hacerlo definamos el exponente de Laplace.

Definición 6.8. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy, si $E(e^{\beta X_1}) < \infty$ para $\beta \in I$, (I un intervalo) se dice que*

$$\varphi(\beta) = \log E(e^{\beta X_1})$$

es su exponente de Laplace pues satisface

$$e^{\varphi(\beta)} = E(e^{\beta X_1}).$$

Así podemos construir un nuevo proceso de Lévy, para una demostración consúltese [10] Teo 3.6, Teo 3.9.

Teorema 6.9. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con tripleta característica (a, σ, Π), si existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$E(e^{\beta X_1}) < \infty.$$

Entonces bajo el cambio de medida

$$P^*(X_t \in B) = E(e^{\beta X_t - \varphi(\beta)}; B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy con tripleta característica (a^*, σ^*, Π^*) donde

$$a^* = a - \beta\sigma^2 + \int_{|x|<1} (1 - e^{\beta x}) x d\Pi, \sigma^* = \sigma, d\Pi^* = e^{\beta x} d\Pi.$$

Al cambio de medida P^* lo llamamos la transformada de Esscher.

Proposición 6.10. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy, si existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$E(e^{\beta X_1}) < \infty.$$

Entonces $V_t := e^{\beta X_t - \varphi(\beta)t}$ es martingala con respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ pues

1. *$E|V_t| < \infty$.*

2. *V_t está adaptada a $\mathcal{F}_t$.*

3. *$E(V_t|\mathcal{F}_s) = V_s$ para $s < t$.*

Demostración. 1. Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tenemos que

$$E(\exp(\beta X_{\frac{p}{q}})) = E(\exp(\beta \sum_{i=1}^{p} X_{\frac{i}{q}} - X_{\frac{i-1}{q}}))$$

$$= \prod_{i=1}^{p} E(\exp(\beta X_{\frac{i}{q}} - X_{\frac{i-1}{q}})) = E(\exp(\beta X_{\frac{1}{q}}))^p.$$

Con un razonamiento análogo obtenemos que

$$E(\exp(\beta X_1)) = E(\exp(\beta X_{\frac{1}{q}}))^q.$$

Utilizando las últimas dos cadenas de igualdades

$$E(\exp(\beta X_{\frac{p}{q}})) = E(\exp(\beta X_1))^{\frac{p}{q}}.$$

Como X_t es proceso de Lévy tiene trayectorias càdlàg y al satisfacerse la igualdad para los racionales tenemos que para toda $t \geq 0$

$$E(\exp(\beta X_t)) = E(\exp(\beta X_1))^t. \tag{6.1}$$

Como $e^x > 0$ tenemos que

$$E(|V_t|) = E(e^{\beta X_t + \psi(-i\beta)t}) = E(\exp(\beta X_t - \log(E(e^{\beta X_1}))t))$$

$$= E(\frac{e^{\beta X_t}}{E(e^{\beta X_1})^t}) = \frac{E(e^{\beta X_t})}{E(e^{\beta X_1})^t} = 1 < \infty.$$

2. Es claro.

3. Como X_t es proceso de Lévy utilizando la igualdad calculada en el primer inciso tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(V_t|\mathcal{F}_s) &= E(e^{\beta X_s - \varphi(\beta)t} e^{\beta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_t) = e^{\beta X_s - \varphi(\beta)t} E(e^{\beta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_t) \\
&= e^{\beta X_s - \varphi(\beta)s} E(e^{\beta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s) e^{-\varphi(\beta)(t-s)} = V_s E(e^{\beta(X_t - X_s)}) e^{-\varphi(\beta)(t-s)} \\
&= V_s E(e^{\beta(X_{t-s})}) e^{-\varphi(\beta)(t-s)} = V_s E(e^{\beta X_1})^{t-s} e^{-\varphi(\beta)(t-s)} \\
&= V_s e^{\varphi(\beta)(t-s)} e^{-\varphi(\beta)(t-s)} = V_s.
\end{aligned}
$$

□

6.3. El proceso de Lévy asociado

Con la transformada de Esscher podemos construir el análogo a la caminata aleatoria asociada. Los procesos de Lévy también cumplen la Ley de los Grandes Números, la demostración se puede consultar en [13] Teo 36.5.

Teorema 6.11. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy si $E(|X_1|) < \infty$ entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = E(X_1) \ c.s.$$

La demostración de la siguiente proposición es completamente análoga a la Proposición 2.1.

Proposición 6.12. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy tal que*
$0 < E(X_1) < \infty$,$(-\infty < E(X_1) < 0)$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \infty(-\infty) \ c.s.$$

Así podemos definir el proceso de Lévy asociado:

Definición 6.13. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con $0 < E(X_1) < \infty$ ó $-\infty < E(X_1) < 0$ y F la función de distribución de X_1, si existe $\theta \neq 0$ tal que*

$$E(e^{-\theta X_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF(x) = 1.$$

Definimos la función de distribución

$$F^*(s) := \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x).$$

El proceso de Lévy $(X_t^*)_{t\geq 0}$ tal que X_1^* tiene función de distribución F^* es el proceso de Lévy asociado a X_t.

Comprobemos que el proceso de Lévy asociado está bien definido es decir que $(X_t^*)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy:

Proposición 6.14. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy que satisface las condiciones de la Definición 6.13 entonces $(X_t^*)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy.*

Demostración. $(X_t)_{t\geq 0}$ satisface las condiciones del Teorema 6.9 para $\beta = -\theta$ y bajo el cambio de medida

$$P^*(X_t \in B) = E(e^{\beta X_t - \varphi(\beta)}; B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy. Observemos que

$$\varphi(\beta) = \log E(e^{-\theta X_1}) = \log(1) = 0.$$

Sustituyendo

$$P^*(X_t \in B) = E(e^{\beta X_t}; B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Por como se definió

$$P(X_t^* \in B) = E(e^{\beta X_t}; B) = P^*(X_t \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

por lo cual $(X_t^*)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy.

□

El proceso de Lévy asociado tendrá exactamente las mismas propiedades que la caminata aleatoria asociada:

Proposición 6.15. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Levy en tal que $0 < E(X_1) < \infty$ con proceso de Levy asociado entonces*

1. *θ es positivo.*
2. *θ es único.*
3. *X_1 no puede ser constante c.s. y en consecuencia X_1^* tampoco.*
4. *$E(X_1^*) < 0$.*
5. *$(F^*)^* = F$.*
6. *El proceso de Lévy asociado tiene proceso de Lévy asociado y es el proceso de Lévy original.*

Demostración. 1. Sean

$$f(x) := x$$
$$\psi(x) := e^{-\theta x}$$

ψ es convexa entonces por la desigualdad de Jensen

$$\psi\big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)\big) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(f(x))dF(x)$$

$$\psi(E(X_1)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x}dF(x) = 1$$

$$e^{-\theta E(X_1)} \leq 1.$$

Como la función exponencial es creciente y $e^0 = 1$

$$-\theta E(X_1) \leq 0$$

por lo cual como $\theta \neq 0$ y $E(X_1) > 0$ concluímos $\theta > 0$.

2. Sea $K > 0$ una constante positiva. Observemos que por la Proposición 6.12

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \infty \text{ c.s.}$$

Por lo cual como θ es positivo

$$\lim_{n\to\infty} -\theta X_t = -\infty \text{ c.s.}$$

Es una propiedad de la función exponencial que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\theta X_t} = 0 \text{ c.s.}$$

Si $X_t \geq -K$ entonces como θ es positivo $e^{-\theta X_t} \leq e^{\theta K}$. Así tenemos la siguiente desigualdad

$$e^{-\theta X_t}\mathbb{1}_{\{X_t\geq -K\}} \leq e^{\theta K}\mathbb{1}_{\{X_t\geq -K\}} \leq e^{\theta K}.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{-\theta X_t}; X_t \geq -K) = \lim_{t\to\infty} E(e^{-\theta X_t}\mathbb{1}_{\{X_t\geq -K\}})$$

$$= E(\lim_{t\to\infty} e^{-\theta X_t}\mathbb{1}_{\{X_t\geq -K\}}) = E(0) = 0.$$

Debido a que $E(e^{-\theta X_t}) = E(e^{-\theta X_t}; X_t \geq -K) + E(e^{-\theta X_t}; X_t \leq -K)$ y por (6.1) tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{-\theta X_t}) = 1 \tag{6.2}$$

por lo cual concluimos que,

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{-\theta X_t}; X_t \leq -K) = 1.$$

Supongamos que existe otro real positivo $a \neq \theta$ tal que $E(e^{-aX_1}) = 1$, tenemos dos casos

Caso 1) $0 < a < \theta$.

Una vez más tenemos que si $X_t \leq -K$ por la desigualdad anterior

$$X_t(\theta - a) \leq -K(\theta - a)$$

$$-aX_t \leq -K(\theta - a) - X_t\theta$$

$$e^{-aX_t} \leq e^{K(\theta-a)-X_t\theta}.$$

En consecuencia

$$\limsup_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}; X_t \leq -K) \leq \lim_{t\to\infty} E(e^{K(\theta-a)-X_t\theta}) = e^{-(\theta-a)K}$$

la última igualdad es debida a (6.2).

Por un razonamiento análogo al que se hizo con θ si a satisface las hipótesis de esta proposición

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}) = \limsup_{n\to\infty} E(e^{-aX_t}; X_t \leq -K) \leq e^{-(\theta-a)K}.$$

Como K es positiva y arbitraria al hacer tender K a infinito concluíriamos que $\lim_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}) = 0$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno.

Caso 2) $\theta < a$. De manera análoga tendríamos que

$$e^{-(\theta-a)K} \leq= \lim_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}) = \liminf_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}; X_t \leq -K).$$

Como K es positiva y arbitraria conluíriamos que $\lim_{t\to\infty} E(e^{-aX_t}) = \infty$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno.

Una vez agotados los dos casos posibles tenemos que θ es única.

3. Supongamos que $X_1 = c$ c.s. entonces

$$E(e^{-\theta X_1}) = e^{-\theta c} = 1$$

$$-\theta c = 0.$$

Como θ es distinto de cero entonces $c = 0$ lo cual es una contradicción pues X_1 tiene esperanza distinta de cero. Ahora supongamos que $X_1^* = c$ c.s. entonces tenemos que

$$e^{\theta c} = E(e^{\theta X_1^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\theta x} dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$
$$\theta c = 0.$$

Como θ es distinto de cero $c = 0$. Por lo cual la función de distribución F^* estaría dada por

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq s \end{cases}$$

como la función exponencial es estrictamente positiva y F es la función de distribución de X_1 tendríamos que $X_1 = 0$ c.s. lo cual es una contradicción pues la esperanza de X_1 es positiva.

4. Razonando de manera análoga a 1 sea

$$\chi(x) := e^{\theta x}$$

χ es estrictamente convexa pues θ es distinto de cero, además cómo X_1^* es no constante entonces por la desigualdad estricta de Jensen

$$\chi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF^*(x)\Big) < \int_{-\infty}^{\infty} \chi(f(x)) dF^*(x)$$

$$\chi(E(X_1^*)) < \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$
$$e^{\theta E(X_1^*)} = \chi(E(X_1^*)) < 1.$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente y $e^0 = 1$

$$\theta E(X_1^*) < 0$$

como $\theta > 0$ concluímos $E(X_1^*) < 0$.

5. Definamos las siguientes medidas de probabilidad

$$\mu(E) := \int_E dF(x)$$

$$\lambda(E) := \int_E dF^*(x) \text{ con } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Por como se construyó F^* tenemos que

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu,$$

esto implica que λ es absolutamente continua con respecto a μ ya que si

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu = 0$$

para algún $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces como $e^{-\theta x} > 0$ se sigue que

$$\mu(E) = 0.$$

Por la Proposición A.4 del apéndice y por la unicidad de la derivada de Radon-Nykodim

$$\begin{aligned}\int e^{\theta x} d\lambda &= \int e^{\theta x} e^{-\theta x} d\mu \\ &= \int d\mu = 1.\end{aligned}$$

En consecuencia por como se definió λ

$$E(e^{\theta X_1^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int e^{\theta x} d\lambda = 1.$$

Por lo cual

$$(F^*)^*(s) = \int_{-\infty}^{s} dF(x) = F(s).$$

6. Es claro por los incisos anteriores.

$\square$

De manera análoga si el proceso de Lévy tuviera esperanza negativa tendríamos el siguiente resultado:

Proposición 6.16. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy tal que $-\infty < E(X_1) < 0$ con proceso de Lévy asociado entonces*

1. *θ es negativo.*
2. *θ es único.*

3. *X_1 no puede ser constante c.s. y en consecuencia X_1^* tampoco.*
4. *$E(X_1^*) > 0$.*
5. *$(F^*)^* = F$.*
6. *El proceso de Lévy asociado tiene proceso de Lévy asociado y es el proceso de Lévy original.*

Observemos que por la Proposición 6.2 y el inciso 4 de la prueba anterior si un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \infty \text{ c.s.}$$

Entonces su proceso de Lévy asociado $(X_t^*)_{t\geq 0}$ tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{t\to\infty} X_t^* = -\infty \text{ c.s.}$$

De la misma forma si tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \text{ c.s.}$$

Entonces su proceso de Lévy asociado tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{t\to\infty} X_t^* = \infty \text{ c.s.}$$

6.4. La martingala de Wald

Como lo hicimos en los capítulos anteriores la existencia del proceso de Lévy asociado nos permite construir una martingala.

Proposición 6.17. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con proceso de Lévy asociado X_t^* entonces $V_t := e^{-\theta X_t}$ es martingala con respecto a*
$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Demostración. Como $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene proceso de Lévy asociado cumple con las hipótesis de la Proposición 6.10 para $\beta = -\theta$ entonces $e^{\beta X_t - \varphi(\beta)t}$ es martingala con respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$. Observemos que

$$\varphi(\beta) = \log E(e^{-\theta X_1}) = \log(1) = 0$$

en consecuencia V_t es martingala.

□

Definición 6.18. *Si un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene proceso de Lévy asociado X_t^* decimos que V_t es la martingala de Wald asociada a X_t.*

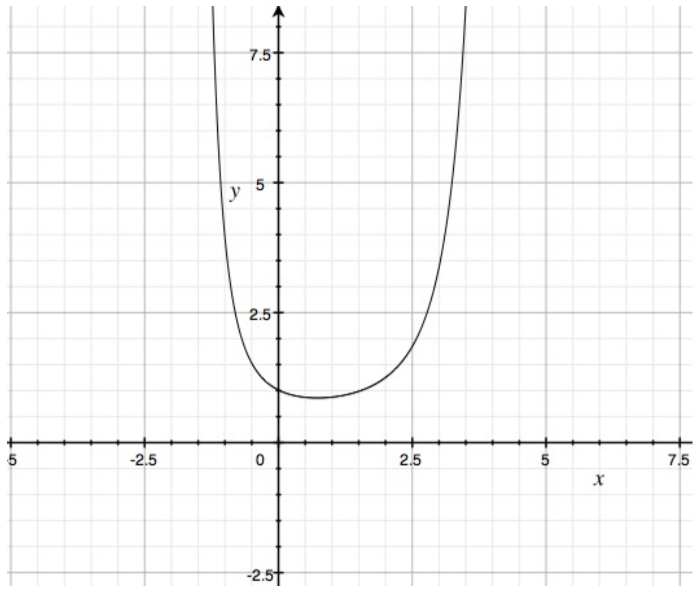


Figura 6.1: La transformada de Laplace en un proceso de Poisson compuesto con $Pois(1)$ y caminata aleatoria con distribución uniforme $\mathcal{U}(-1, 2)$

6.5. Ejemplos

En general no todas los procesos de Lévy tienen proceso de Lévy asociado a continuación un ejemplo:

Ejemplo 6.2 (Proceso de Poisson homogéneo)**.** Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson homogéneo con parámetro $c > 0$ i.e. un proceso de Lévy tal que X_t se distribuye como Poisson $Pois(\lambda t)$.

El argumento para demostrar que no tiene proceso de Lévy asociado es completamente análogo al Ejemplo 2.1.

Sin embargo observemos como a partir de una caminata aleatoria S_n con caminata aleatoria asociada y un proceso de Poisson podemos construir un proceso de Lévy con proceso de Lévy asociado.

Ejemplo 6.3 (Proceso de Poisson compuesto)**.** Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson compuesto i.e. $X_t(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega)$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_n$ es una caminata aleatoria, N_t es independiente de la caminata y se distribuye como Poisson $Pois(\lambda t)$, $\lambda \neq 0$.

Tenemos que

$$E(e^{-tX_1}) = E(E(e^{-tX_1}|N_1)) = \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-tX_1}|N_1 = k)P(N_1 = k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-tY_k})P(N_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-tY_1})^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(E(e^{-tY_1})\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{E(e^{-tY_1})\lambda} \\
&= e^{\lambda(E(e^{-tY_1})-1)}.
\end{aligned}
$$

Por lo cual X_t tiene proceso de Lévy asociado si y sólo si para alguna $\theta > 0$, $E(e^{-\theta Y_1}) = 1$, es decir que la caminata aleatoria S_n tenga caminata aleatoria asociada.

Apéndice A

Propiedad de la derivada de Radon-Nikodym

Uno de los resultados más importantes de teoría de la medida es el Teorema de Radon-Nikodym, en esta sección lo utilizaremos pero no lo demostraremos. Recordemos las siguientes definiciones:

Definición A.1. *Sea μ una medida en un espacio de medida (X, Σ) si existen $A_i \in \Sigma$ tales que $\mu(A_i) < \infty$ y $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ decimos que μ es σ-finita.*

Definición A.2. *Sean λ y μ medidas en un espacio de medida (X, Σ) si para todo $E \in X$ tal que $\mu(E) = 0$ tenemos que $\lambda(E) = 0$ decimos que λ es absolutamente continua con respecto a μ.*

Así podemos enunciar el Teorema de Radon-Nikodym para una demostración consúltese [1] Teo 8.9.

Teorema A.3 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sean λ y μ medidas σ-finitas en un espacio de medida (X, Σ) si λ es absolutamente continua con respecto a μ entonces existe una función f en $M^+(X, \Sigma)$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \Sigma.$$

Más aún la función queda determinada de manera única μ casi seguramente.

A la función f obtenida en el Teorema A.3 la nombramos la derivada de Radon-Nikodym de λ con respecto a μ y la denotamos por $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$. A continuación una propiedad de dicha derivada.

Proposición A.4. *Sean λ y μ medidas σ-finitas en un espacio de medida (X, Σ) si λ es absolutamente continua con respecto a μ y $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$.*

Entonces para todo $g \in M^+(X, \Sigma)$

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu.$$

Demostración. Como es usual dividiremos la demostración en varios pasos:

1. $g(x) = \mathbb{1}_B(x)$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym tenemos que

$$\begin{aligned} \int g d\lambda &= \int \mathbb{1}_B d\lambda = \lambda(B) \\ &= \int_B f d\mu = \int \mathbb{1}_B f d\mu = \int g f d\mu \end{aligned}$$

así la igualdad se cumple en este caso.

2. $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es decir g es simple. Utilizando el inciso anterior y las propiedades básicas de la integral

$$\begin{aligned} \int g d\lambda &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i} d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{B_i} d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{B_i} f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i} f d\mu = \int g f d\mu \end{aligned}$$

así se cumple la igualdad.

3. $g \in M^+(X, \Sigma)$. Como $g \in M^+(X, \Sigma)$ sabemos que existe una sucesión monótona creciente de funciones simples g_n en $M^+(X, \Sigma)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Debido a que $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ es la derivada de Radon-Nikodym $f \in M^+(X, \Sigma)$ y así $g_n f$ es una sucesión monótona creciente de funciones en $M^+(X, \Sigma)$ que por el límite anterior satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) f(x) = g(x) f(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Utilizando el inciso 2, los dos límites anteriores y el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\int g d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n f d\mu = \int g f d\mu.$$

$\square$

Apéndice B

El Teorema de la derivación bajo el signo de integral

A continuación demostraremos un teorema que en ciertos casos nos permite derivar funciones.

Teorema B.1 (Teorema de la derivación bajo el signo de integral). *Sean $X_t = X(\omega, t)\omega \in \Omega$, $t \in [a, b]$ una colección de v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Si la función $t \longrightarrow X_t$ es continua en $[a, b]$ c.s., con derivada continua y acotada por Y una v.a. aleatoria integrable en (a, b) c.s. Entonces $t \longrightarrow E(X_t)$ es derivable en (a, b) y*

$$\frac{dE(X_t)}{dt} = E(\frac{dX_t}{dt}).$$

Demostración. Queremos probar que para todo $t_0 \in (a, b)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(X_{t+t_0}) - E(X_{t_0})}{t} = E(\frac{dX_t}{dt}).$$

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_n \longrightarrow 0$ y $t_0 \in (a, b)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $t_n + t_0 \in (a, b)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$f_n(\omega) := \frac{X_{t_n+t_0}(\omega) - X_{t_0}(\omega)}{t_n.}$$

Entonces

$$\frac{E(X_{t_n+t_0}) - E(X_{t_0})}{t_n} = \int \frac{(X_{t_n+t_0}) - (X_{t_0})}{t_n} dP = \int f_n dP.$$

Sea

$$A := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ es continua en } [a, b],$$

$$\text{su derivada es continua y acotada por una v.a. integrable Y en } (a, b)\}.$$

Por hipótesis si $\omega \in A$ entonces por el Teorema del Valor Medio

$$f_n(\omega) = \frac{X_{t_n+t_0}(\omega) - X_{t_0}(\omega)}{t_n} = \frac{dX_{t_0+\theta_n}(\omega)}{dt} \text{ para algún } |\theta_n| < t_n.$$

Debido a que la derivada es continua

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \frac{dX_{t_0}}{dt} \text{ si } \omega \in A$$

por la penúltima igualdad y por hipótesis

$$|f_n(\omega)| \leq Y(\omega) \text{ si } \omega \in A \text{ con } E(Y) < \infty.$$

Entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n) = E(\frac{dX_{t_0}}{dt})$$

y en consecuencia por como se definió f_n

$$\frac{dE(X_{t_0})}{dt} = E(\frac{dX_{t_0}}{dt}).$$

□

Bibliografía

[1] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*,Wiley Classics Library Edition, 1995.

[2] M. E. Caballero, V. M. Rivero, G. Uribe Bravo, C. Velarde, *Cadenas de Markov: Un enfoque elemental*, Segunda Edición, Aportaciones Matemáticas SMM, 2008.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser Boston, 1980.

[4] J. G. Conlon, *Notas del curso Probability and Random Processes*, University of Michigan, 2010.

[5] R. Durrett, *Probability, Theory and Examples*, Cuarta edición, Cambridge University Press, 2010.

[6] M. A. García, *Introducción a la teoría de la probabilidad, Segundo Curso*, Fondo de Cultura Económica, 2005.

[7] D. R. Grey, *A note on convergence of probability measures*, Journal of Applied Probability, 38, pp 1055-1058, 2001.

[8] D. R. Grey, *The associated random walk and martingales in random walks with stationary increments*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 378, pp 345-357, 2010.

[9] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer-Verlag, 1997.

[10] A. E. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy Processes with applications*, Springer-Verlag, 2006.

[11] G. Lindgren, *Lectures on Stationary Stochastic Processes; a course of PhD students in Mathematical Statistics and other fields*, Lund Institute of Technology, 1999.

[12] K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby, *Multivariate Analysis*, New York: Academic Press, 1979.

[13] K. I. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999.

[14] A. N. Shiryaev, *Probability*, Segunda edición, Springer-Verlag.

[15] D. Williams, *Probability with Martingales*, Segunda edición, Cambridge University Press, 1991.