



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

**DETECCIÓN Y CONTROL DE
CAVITACIÓN EN UN GENERADOR DE
ONDAS DE CHOQUE TÁNDEM
MULTIFUNCIONAL**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A

GUILLERMO CANSECO LÓPEZ

TUTOR:

ACHIM MAX LOSKE MEHLING

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

- Presidente: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier
- Secretario: Dr. Zenit Camacho José Roberto
- 1^{er.} Vocal: Dr. Loske Mehling Achim Max
- 2^{do.} Vocal: Dr. Santillán Gutiérrez Saúl Daniel
- 3^{er.} Vocal: Dr. Ocampo Mortera Miguel Ángel

Lugares donde se realizó la tesis:

CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA (CFATA-UNAM)

FACULTAD DE INGENIERÍA (FI-UNAM)

TUTOR DE TESIS:

Dr. Achim Max Loske Mehling

FIRMA

Índice

Dedicatoria	vi
Agradecimientos	vii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Hipótesis	5
1.3. Objetivo	5
2. Modelos de burbujas	9
2.1. Casos particulares de modelos de burbujas	9
2.2. Ecuaciones dinámicas de una burbuja esférica que colapsa	11
2.2.1. La burbuja vacía	11
2.2.2. La burbuja de gas	11
2.2.3. La ecuación de Gilmore	13
3. Litotricia y mecanismos de fractura	18
3.1. Mecanismos de fractura	18
3.1.1. Compresión directa	18
3.1.2. Efecto Hopkinson	18
3.1.3. Cavitación	19
4. Materiales y métodos	23
4.1. El arreglo experimental	23
4.1.1. El generador de burbujas	23
4.1.2. El Generador de Ondas de Choque Multifuncional	25
4.1.3. La cámara de alta velocidad y el circuito de retardo	28

4.2. La metodología experimental	30
4.2.1. Ondas de choque mono-pulso	30
4.2.2. Ondas de choque tándem	32
4.3. Simulación numérica	32
5. Resultados	40
5.1. Fotografía de alta velocidad	40
5.1.1. Ondas de choque mono-pulso	40
5.1.2. Ondas de choque tándem	43
5.2. Simulación numérica	49
6. Discusión	63
7. Conclusiones y recomendaciones	69
Apéndices	70
A. Hidrodinámica de una burbuja y cavitación acústica	70
A.1 La ecuación de continuidad	70
A.2 Casos particulares de la ecuación de continuidad	71
A.2.1 Caso 1. Flujo permanente	71
A.2.2 Caso 2. Flujo incompresible	71
A.3 La ecuación de Euler	71
A.4 La burbuja y el inicio de la cavitación	75
A.5 La tensión superficial	76
A.6 La ley de viscosidad de Stokes	80
A.7 Las ecuaciones de Navier Stokes	84
A.8 Núcleos de burbujas y el umbral de Blake	88

B. Ondas mecánicas	93
B.1 Movimiento ondulatorio	93
B.2 Ondas en materiales elásticos lineales	93
B.3 Descripción de movimientos ondulatorios específicos	100
B.3.1 Deformación longitudinal	100
B.3.2 Esfuerzo longitudinal	100
B.3.3 Ondas acústicas en fluidos	101
B.4 Ondas de choque	103
B.4.1 Ondas de choque en líquidos con burbujas	109
B.5 Solución de la ecuación de onda	111
B.5.1 Soluciones de ecuaciones de ondas de choque	116
C. Litotricia extracorpórea	121
C.1 Litotritores extracorpóreos	121
C.2 Litotritores electrohidráulicos	121
C.3 Litotritores piezoeléctricos	124
D. Listado de los programas usados en la simulación numérica	127
D.1 Programa principal	127
D.2 Funciones	129

Dedicatoria

Al amor y la tenacidad de mi madre y a mi finado padre, que me han impulsado durante toda mi vida.

A los motivos actuales de mí vivir: mi esposa María del Refugio, Pablo, Dinorah, Guillermo y Lizandra.

A mí querida hermana Azucena y su familia.

A mis familiares maternos y paternos.

A mis amigos de generación de Ingeniería Química Industrial y de Ingeniería Nuclear, por su cordial amistad.

A mis amigos y compañeros de trabajo en el CIDEC.

Agradecimientos

A mi tutor del doctorado y director de esta tesis, Dr. Achim Loske, le agradezco su gran sentido humano, su amistad, su trabajo, su empeño y su importante contribución y aportación a este proyecto. Sin su valiosa ayuda yo no hubiera podido finalizarlo.

La entusiasta participación del M. en C. Francisco Fernández fue crucial para la sincronización y grabación de las imágenes publicadas en esta tesis. Gracias a su asesoría profesional se resolvieron varios problemas experimentales.

Agradezco la valiosa aportación del Dr. Miguel de Icaza en la simulación numérica de la dinámica de una burbuja en agua. Su apoyo, ayuda y comentarios fueron decisivos para concluir la presente tesis.

Al Dr. Roberto Zenit le doy las gracias por sus comentarios, su valiosa asesoría y por el préstamo de la cámara de alta velocidad, propiedad del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM.

Al Dr. Víctor Castaño le debo mi más sincero agradecimiento por apoyar este proyecto desde mi llegada al Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada de la UNAM.

Al Dr. Eduardo Castaño, investigador del Posgrado de la Facultad de Química de la UAQ, agradezco sus desinteresadas asesorías en estadística y diseño de experimentos.

A los doctores Francisco Javier Solorio, Leopoldo González y Alejandro C. Ramírez mis agradecimientos por su constante apoyo administrativo y motivación desde el Departamento de Posgrado en Mecánica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

A mis sinodales en las distintas etapas del doctorado, por su contribución al mejoramiento de este proyecto:

Dr. Miguel Ocampo
Dr. José Luis Aragón
Dra. Suemi Rodríguez
Dr. Saúl Santillán

Al Sr. René Preza del CFATA, que estuvo encargado de la fabricación de varios componentes esenciales para los experimentos reportados aquí.

A la Q.F.I. María Concepción Arredondo le agradezco su apoyo en el Laboratorio de Ondas de Choque.

A la Fis. Rosa Elena López Escalera y a la Sra. Judith Estrada les agradezco por su gran ayuda y apoyo administrativo en el CFATA.

A mis compañeros del Laboratorio de Ondas de Choque del CFATA, por sus contribuciones y ayuda:

Dra. Luz María López
M. en C. Zoraida Martínez
M. en C. Ulises M. Álvarez
M. en C. Arturo Méndez

Al Dr. Vladislav Kravchenko del CINVESTAV, por sus valiosas asesorías para la integración numérica de algunas ecuaciones diferenciales no lineales.

A Lucía Sánchez y Socorro Barroso, por su ayuda en la realización de los trámites administrativos de la Sección Escolar y del Departamento de Posgrado en Mecánica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El trabajo experimental de esta tesis fue posible gracias al proyecto de investigación IN108410, financiado por la DGAPA de la UNAM.

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Uno de los padecimientos que ha incrementado en las últimas décadas es la urolitiasis, es decir, la formación de cálculos urinarios [1, 2]. Se ha reportado que entre el 5 y el 15% de la población sufrirá de urolitiasis en alguna etapa de su vida [3]. En una publicación que data de 1995, se reportó que en los Estados Unidos de América el costo anual por tratar este padecimiento asciende a 1.8 billones de dólares [4]. Antes de 1980, la mayoría de los pacientes con urolitiasis eran tratados por medio de cirugía abierta. Afortunadamente con técnicas novedosas, como la nefrolitotomía percutánea, la cirugía intrarenal uteroscópica retrógrada, la cirugía laparoscópica y la litotricia extracorpórea por ondas de choque (LEOCH), actualmente casi cualquier cálculo renal puede ser removido del aparato urinario sin necesidad de una cirugía abierta.

La LEOCH es una técnica para desintegrar cálculos renales, aplicando ondas de choque generadas fuera del paciente [5] (figura 1). El método, desarrollado en Alemania, actualmente se practica en todo el mundo. Entre los autores que han reportado el desarrollo histórico de la LEOCH se pueden citar a Jocham [6], Häusler [7], Delius et al. [8], Prieto et al. [9] y Loske [10]. A la fecha, la concentración de la energía transportada por las ondas de choque hasta un volumen del tamaño de un cálculo urinario es el único método para lograr una presión suficiente para fragmentarlo de manera no invasiva.

Clínicamente se usan tres diferentes tipos de litotritores que se diferencian principalmente por el método de generación de las ondas de choque: el electrohidráulico, el electromagnético y el piezoeléctrico (ver Apéndice C). Los litotritores con generadores electrohidráulicos – que fueron los primeros en salir al mercado – emiten una descarga eléctrica de alto voltaje en agua que da origen a un plasma que se expande súbitamente, produciéndose de esta manera una onda de choque. La onda de choque es reflejada posteriormente en un reflector elipsoidal, que se usa para concentrar en su segundo foco la energía que fue liberada por la onda generada en el primer foco de la elipse. Además del generador de ondas y del reflector, también forma parte del litotritor un equipo de fluoroscopia y/o ultrasonido para la localización del cálculo y un conjunto de sistemas automatizados para el posicionamiento del paciente. Si el paciente se coloca de manera apropiada, la onda de choque penetra en el cuerpo, enfocándose sobre el cálculo renal que debe situarse en el segundo foco del reflector mencionado. Como se muestra en la figura 1, inicialmente el paciente se colocaba dentro de una tina, con el nivel del agua hasta el cuello.

Durante un tratamiento de LEOCH se aplican varios cientos de ondas de choque. Las arenillas producidas durante la ruptura del cálculo, son desechadas a través del tracto urinario y el paciente queda libre del cálculo unos cuantos días después del tratamiento. Actualmente existen equipos más compactos con los cuales no es necesario colocar al paciente dentro de una tina con agua (figura 2). En estos litotritores el cuerpo del paciente se acopla directamente al generador de ondas de choque, mediante un contenedor de agua con una membrana de látex en su extremo. El objetivo primordial de la LEOCH es pulverizar los cálculos renales con el mínimo daño a los tejidos. En los Estados Unidos, cada año se benefician del orden de 700,000 pacientes de esta tecnología [11].

Los cálculos renales tienen formas, composiciones químicas y propiedades mecánicas variables. Los más comunes contienen calcio combinado con fosfatos u oxalatos. Los cálculos de estruvita se forman como resultado de una infección en el tracto urinario. Los de ácido úrico y de cistina son menos comunes y los de cistina y brushita son muy resistentes a la LEOCH [12], ya que se requiere más energía para romper los puentes disulfuro que unen los dímeros de la cistina y también para fracturar los cristales monoclinicos de la brushita, que la necesaria para la ruptura de los otros tipos de cálculos mencionados. Aquellos que se desarrollan a partir de cristales que se separan de la orina y se depositan en la parte interna de los riñones están formados por materiales frágiles con pequeñas grietas, que generalmente son cristales unidos entre sí por materiales orgánicos.

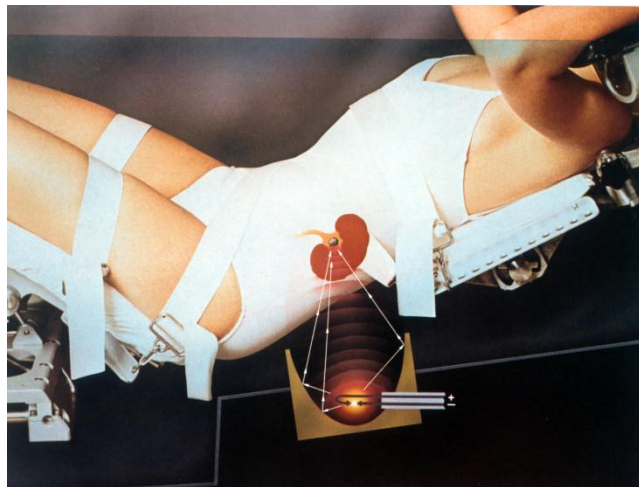


Figura 1.1

Esquema de un paciente durante un tratamiento de litotricia extracorpórea con el primer litotritor clínico comercial, denominado *Human Model 3 (HM3)* de la empresa Dornier Medizintechnik (Germering, Alemania).

Los esfuerzos de compresión y tensión que actúan sobre los cálculos ocasionan una pérdida de cohesión y el crecimiento de grietas. Generalmente los cálculos con estructuras laminadas y heterogéneas son menos resistentes que los formados por materiales homogéneos.

También se sabe que los materiales dúctiles son más resistentes a las ondas de choque que los frágiles. Esto se debe a que los cálculos más dúctiles, tales como los de la vesícula biliar, sufren deformaciones plásticas, lo que no sucede con los materiales frágiles. Por esta razón sólo el 20 % de los pacientes con cálculos de vesícula biliar pueden ser tratados con éxito usando LEOCH.

El perfil de presión de una onda de choque se puede alterar con la finalidad de incrementar al máximo la fragmentación de los cálculos renales y disminuir los daños a los tejidos. Los fenómenos responsables del trauma a los tejidos siguen siendo un campo de investigación. Se sabe que los cálculos se fracturan por el efecto Hopkinson (*spalling*), por cavitación acústica, compresión (*circumferential squeezing*), reflexión y difracción de la onda (*superfocusing*), fatiga y tensión debida al pulso de rarefacción que le sigue al pico positivo de la onda de choque. Estos mecanismos de fragmentación son presentados de manera más detallada en el capítulo 3.



Figura 1.2

Fotografía de un litotritor de nueva generación, modelo *Modulith SLX-F2*, marca Storz (Tägerwillen, Suiza).

La cavitación acústica es el crecimiento y colapso violento de microburbujas de gas en un fluido. Al colapsar, las burbujas emiten microchorros de líquido a alta velocidad (microjets) y ondas de choque secundarias, que actúan de forma semejante a los equipos cortadores de

materiales, principalmente metálicos, por chorros de agua a alta presión. Aunque el alcance de estos microjets es muy pequeño, poseen un potencial de destrucción considerable, siendo responsables de la erosión y del daño a propulsores de barcos, álabes de turbinas, válvulas y cálculos renales. La cavitación se genera en cualquier sitio de un fluido donde exista un cambio abrupto de presión positiva a “negativa”, es decir, donde el fluido súbitamente cambia de esfuerzos de compresión a esfuerzos de tensión. La cavitación fue descubierta por Leonhard Euler en 1754. Desde los primeros trabajos realizados por Rayleigh en 1945 [19], muchos investigadores han explicado los fenómenos que se producen durante el colapso de burbujas de cavitación [10]. Existe evidencia [23] de que la fragmentación de cálculos artificiales usados en algunos experimentos de litotricia extracorpórea se ha incrementado del 3 al 66 %, aumentando la cavitación acústica inducida por las ondas de choque, que es uno de los mecanismos más importantes para la fragmentación de cálculos urinarios durante una LEOCH [16]; sin embargo, en principio la cavitación también puede ocasionar daño vascular y hematomas perirenales e intrarenales. Afortunadamente las burbujas de cavitación que se forman en el tejido no pueden expandirse libremente debido a que son restringidas por los tejidos circundantes y su colapso por lo tanto no es tan violento.

Más de tres décadas después del primer tratamiento de LEOCH, las metodologías y los litotritores aún se encuentran en evolución. Constantemente se están buscando técnicas para mejorar la eficiencia y disminuir el dolor y el daño en los tejidos. Actualmente aún es necesaria la investigación básica y clínica para comprender y mejorar los mecanismos de fragmentación de los cálculos, así como para disminuir el daño a los tejidos. Es sorprendente la poca información que se tenía respecto a la interacción de las ondas de choque con los cálculos y los tejidos renales durante los primeros diez años de tratamiento en base a la litotricia extracorpórea. Aún ahora aunque se tiene una distribución de un poco más de un litotritor por cada millón de habitantes en Europa, Canadá, Estados Unidos y México y se han hecho progresos considerables tanto teóricos como experimentales, en la comprensión de la interacción de las ondas de choque con la materia y los mecanismos de fragmentación de los cálculos renales [10], aún no se tiene una explicación totalmente satisfactoria para todos los investigadores, que explique la forma en que las ondas de choque destruyen los cálculos renales y ocasionan daño a los tejidos. Por esto, se continúa investigando cómo aprovechar las ondas de choque y hacer más eficientes los mecanismos de interacción onda de choque-materia.

Lo descrito con anterioridad explica que el entendimiento y control de la cavitación acústica es de primordial importancia para hacer más eficiente la LEOCH [10, 16, 23].

Varios investigadores [10, 20, 24, 25, 26 y 27] han propuesto el uso de más de una onda de choque con separaciones en tiempo entre ellas del orden de los microsegundos, para mejorar la eficiencia de los tratamientos de litotricia extracorpórea.

Con la finalidad de optimizar la pulverización de los cálculos urinarios sin incrementar el daño a los tejidos, en el Laboratorio de Ondas de Choque del Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada de la UNAM, también se han realizado investigaciones (publicadas desde 2002) con parejas de ondas de choque, denominadas ondas de choque tándem. Para estas investigaciones, se desarrolló un generador de ondas de choque multifuncional, capaz de emitir parejas de ondas de choque con retardos entre sí que van desde aproximadamente 50 hasta 900 microsegundos [20, 28, 29, 30].

Las microburbujas que se encuentran en los fluidos que rodean a un cálculo urinario son fuertemente comprimidas por la llegada del pulso positivo de cada onda de choque. Posteriormente se expanden, aumentando su volumen cientos de veces. Si un instante antes del colapso de las burbujas incide sobre ellas una segunda onda de choque, aumenta la energía de colapso, es decir, el pulso positivo de la segunda onda de choque contribuye a comprimir cada burbuja hasta su colapso. Con ello es posible aumentar la energía de los microjets y, consecuentemente, el daño a los cálculos [20-22].

En vista de que la duración del colapso de las burbujas es mayor que la duración del pulso positivo de una segunda onda de choque, emitida con un pequeño retraso después de la primera, su pulso negativo llegará cuando las burbujas aún están colapsando. Se ha planteado, dentro de este proyecto, que este pulso negativo frenará el colapso. Partiendo de esta idea, surgió la pregunta de lo que sucedería si se alarga la fase positiva de la segunda onda de choque, de manera que el pulso negativo incida después del colapso de la burbuja.

1.2 Hipótesis

El empleo de ondas de choque tándem permitirá aumentar aún más la energía de colapso de las burbujas generadas por la primera onda, siempre que se modifique el perfil de la segunda onda de choque.

1.3 Objetivo

El objetivo de esta tesis es proponer un perfil de presión novedoso para ondas de choque tándem, que aumente la energía de colapso de las burbujas de cavitación formadas por la primera onda de choque.

Bibliografía

1. Anderson D A, Survey of the Incidence of Urolithiasis in Norway from 1853 to 1960. *Journal of the Oslo City Hospital*, 1966; 16: pp. 101-147.
2. Rao N P, Kavanagh J P, Preminger G M (eds.), *Urinary Tract Stone Disease*, Springer Verlag London Limited, Londres, Reino Unido, 2011.
3. Kerbl K, Rehman J, Landman J, Lee D, Sundaram C, Clayman R V, Current Management of Urolithiasis: Progress or Regress? *The Journal of Endourology*, 2002; 16: pp. 281-288.
4. Clark J Y, Thompson I M, Optenbug S A, Economic Impact of the Urolithiasis in the United States. *The Journal of Urology*, 1995; 154: pp. 2020-2024.
5. Häusler E, Kiefer W, Destruction of Kidney Stones by Means of Autofocused Guided Shockwaves, Segundo Congreso Europeo de Ultrasonido y Medicina, München, 1975.
6. Jocham D, Historical Development of ESWL. *Principles of Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy*. Robert A. Riehle, Robert C. Newman (Eds.). New York: Churchill Livingstone, 1987, pp. 1-11.
7. Häusler E, Stosswellenlithotripsie. Entwicklung, Stand, Perspektiven. Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Matouschek. Baden, Baden, Alemania, 1989.
8. Delius M, Brendel W, Historical Roots of Lithotripsy. *Journal of Lithotripsy and Stone Disease*. 2(3): pp. 161-163, 1990.
9. Prieto F E, Loske A M, México, UNAM, Coordinación de la Investigación Científica, *Underwater Shock Waves and Extracorporeal Lithotripsy: An Introduction to the Bibliography*, 1990.
10. Loske A M, *Shock Wave Physics for Urologists*, Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, UNAM, 2007.
11. Clark J Y, Thompson I M, Optenbug S A, Economic impact of urolitiasis in the United States. *The Journal of Urology* 1995; 154: pp. 2020-2024.
12. Cleveland R O, McAteer J A, Williams J C Jr, Correlation between the predicted stress field and observed sall-failure in artificial kidney stones treated by shock wave

lithotripsy (ESWL) in vitro. Proceedings of the 17th International Congress on acoustics, Bettuci A(ed.), Rome, Italy, 2002; Vol. VII: pp. 174-175.

13. Sass W, Braunlich M, Dreyer H, Matura E, Folberth W, Priesmeyer H, Seifer J, The mechanism of stone disintegration by shock waves. *Ultrasound in Medicine and Biology* 1991; 17(3): pp. 239-243.

14. Vakil N, Relationship of model stone properties to fragmentation mechanisms during lithotripsy. *Journal of Lithotripsy and Stone Disease* 1991; 4: pp. 304-310.

15. Zhong P, Preminger G M, Mechanism of differing stone fragility in extracorporeal shock wave lithotripsy. *The Journal of Endourology* 1994; 8: pp. 263.

16. Lokhandwalla M, Sturtevant B, Fracture mechanics model of stone comminution in ESWL and implications for tissue damage. *Physics in Medicine and Biology* 2000; 45: pp. 1923-1949.

17. Cleveland R O, McAteer J A, Müller R, Time-lapsed nondestructive assessment of shock wave damage to kidney stones in vitro using micro-computed tomography. *Journal of the Acoustical Society of America* 2001; 110(4): pp. 1733-1736.

18. Eisenmenger W, The mechanism of stone fragmentation in ESWL, *Ultrasound in Medicine and Biology* 2002; 28(6): pp. 769-774.

19. Rayleigh J W S, *The Theory of Sound*. New York: Dover Publications, 1945.

20. Loske A M, Prieto F E, Fernández F, Cauwelaert J, Tandem Shock Wave Cavitation Enhancement for Extracorporeal Lithotripsy, *Soc. Am.*, Sep. 2011,10(3).

21. Xi X, Zhong P, Improvement of stone fragmentation during shock wave lithotripsy using a combined EH/PEAA shock wave generator in vitro experiments, 1999.

22. Fernández F, Fernández G, Loske A M, Treatment time reduction using tandem shockwaves for lithotripsy: an in vivo study, *Journal of Endourology*, 2009, 23(8), pp. 1247-1253.

23. Zhu S, Cocks F H, Preminger G M, Zhong P, The role of stress waves and cavitation in stone comminution in shock wave lithotripsy, *Ultrasound in Med and Biol.*, 2002, 28(5), pp. 661-671.

24. Bailey M R, Cleveland R O, Blackstock D T, Crum L A, Use of two pulses to control cavitation in lithotripsy, *Proceedings of the 16th International Congress on Acoustics*, 1998b, pp. 2807-2808.

25. Cathignol D, Comparison between the effects of cavitation induced by two different pressure time shock wave form pulses , IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1998, 45: pp. 788-799.
26. Cleveland R O, Sapozhnikov O A, Bailey M R, Crum L A, A dual passive cavitation detector for localized detection of lithotripsy induced cavitation in vitro, The Journal of the Acoustical Society of America 2000, 107(3): pp. 1745-1758.
27. McAteer J A, Pishchalnikov Y A, Pishchalnikova I V, VonDerHaar R J, William J C Jr, Bailey M R, Evan A P, Importance of pulse synchrony to stone comminution in dual-pulse lithotripsy: independent characterization of the direct dual pulse lithotripter. The Journal of Urology 2004, pp. 171-443 [abstract].
28. Loske A M, Prieto F E, Fernández F, Van Cawelaert J, Tandem shock wave cavitation enhancement for extracorporeal lithotripsy, Journal of Physics in Medicine and Biology, 2002, 47(22), pp. 3945-3957.
29. Loske A M, Prieto F E, Fernández F, Van Cawelaert J, Piezoelectric tandem shock wave generation for extracorporeal shock wave lithotripters, Physica Medica, 2002c, 18(1), pp. 7-14.
30. Loske A M, Fernández F, Zendejas H, Paredes M, Castaño-Tostado E, Dual pulse shock wave lithotripsy, In vitro and in vivo study, The Journal of Urology, 2005, 174, pp. 2388-2392.

CAPÍTULO 2

Modelos de burbujas

2.1 Casos particulares de modelos de burbujas

En el apéndice A se presentan las ecuaciones generales que describen el comportamiento hidrodinámico de una burbuja para encontrar la presión, la velocidad y la posición en cualquier punto del gas o del líquido cuando la burbuja es excitada por una presión que varía con el tiempo. Se analizan también las leyes de conservación de la masa y del momento y las leyes que gobiernan el comportamiento de las sustancias en el estado líquido y gaseoso. También se tomaron en cuenta los fenómenos de difusión térmica y de masa en la ecuación de conservación de la energía y los fenómenos de evaporación y condensación que se presentan en la disolución de la burbuja.

En el apéndice B se incluye un breve resumen de las características y propiedades de las ondas mecánicas, el movimiento ondulatorio y las ondas de choque involucrados en este proyecto.

Además de la ecuación de continuidad (7), (38), (39), (40) y la ecuación del movimiento (19), (70), (71), (72), (73), (74), presentadas en el apéndice A, es necesario tomar en consideración las siguientes ecuaciones:

1. Para la energía del líquido se tiene la ecuación

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial r} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -P \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} \right) + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right)^2 + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho q \quad , \quad (1)$$

donde c_v es la capacidad calorífica a volumen constante del líquido, q es el flujo de calor (flujo de energía por unidad de masa y por unidad de tiempo), k es la conductividad térmica del líquido, μ es la viscosidad, ρ es la densidad, v_r es la velocidad radial, P es la presión, r es la posición radial y T es la temperatura del líquido [1].

2. La ecuación de difusión de gas en el líquido es

$$\frac{\partial C_d}{\partial t} + v_r \frac{\partial C_d}{\partial r} = D \left(\frac{\partial^2 C_d}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial C_d}{\partial r} \right), \quad (2)$$

donde C_d es la concentración de gas disuelto en el líquido y D es la difusividad del gas [1].

3. Las condiciones de frontera en la pared de la burbuja, es decir cuando $r(t) = R(t)$, son [1]:

$$D \frac{\partial C_d}{\partial r} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_g \right) \quad (3)$$

y

$$P + \frac{2S}{R} = P_T + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right). \quad (4)$$

Las leyes de difusión de masa y difusión térmica en el líquido son [1]:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_T \right) \left[L + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \right] + \rho_T \frac{R c_v}{3} \frac{\partial T}{\partial t} + P_T v_r, \quad (5)$$

donde ρ_T es la densidad total del gas contenido.

4. La condición de frontera en $r = \infty$, para la presión dependiente del tiempo, por ejemplo, la presión del pulso de presión de la onda de choque es [3]:

$$P(t) = 2P_A e^{-\alpha t} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad (6)$$

donde P_A es la amplitud de la onda de choque, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ es la constante de decaimiento, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia radial con $f = 83.3 \text{ kHz}$ y la presión en infinito P_∞ es $P_\infty = P_0 + P(t)$, donde P_0 es la presión inicial del líquido [3].

5. La ecuación de estado empleada para el líquido es [3]:

$$P = A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - B, \quad (7)$$

donde para este caso se ha usado la ecuación modificada de Tait, con P siendo la presión, ρ la densidad del líquido, $A = 300.1 \text{ MPa}$, $B = 300 \text{ MPa}$, $n = 7$ y $\rho_0 = 995.646 \text{ kg/m}^3$ es la densidad inicial del líquido.

6. La ecuación de estado para el gas es:

$$PV = nRT, \quad (8)$$

donde P es la presión del gas, V es el volumen ocupado por el gas, n es el número de moles, R es la constante universal de los gases y T es la temperatura en grados K.

Las expresiones anteriores son las 10 ecuaciones fundamentales de la dinámica de una burbuja inmersa en un fluido.

2.2 Ecuaciones dinámicas de una burbuja esférica que colapsa

2.2.1 La burbuja vacía

El movimiento de una burbuja esférica vacía, expandiéndose o contrayéndose está descrita por la ecuación de Rayleigh, en donde la posición radial se estudia en la pared de la burbuja y entonces $r = R$ para que la ecuación (90) del apéndice A, se reduzca a

$$\frac{P_L - P_\infty}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2, \quad (9)$$

donde $P_L = P(t)$, la presión en el líquido en la pared de la burbuja.

2.2.2 La burbuja de gas

Considérese una burbuja llena de gas que actúa como un absorbedor de la energía del líquido. La burbuja decrece en tamaño, eventualmente se detiene su reducción de tamaño y vuelve a crecer como se muestra en la figura 2.1.

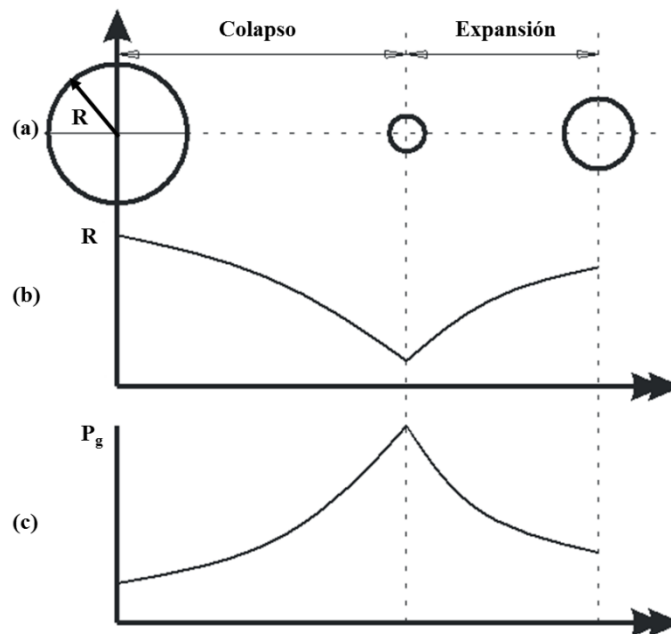


Figura 2.1

(a) Burbuja esférica llena de gas en colapso y expansión. (b) Gráfica del radio en función del tiempo. (c) Curva de la presión del gas dentro de la burbuja en función del tiempo.

Si el gas que llena la burbuja obedece la ley general de los gases, entonces

$$P_g \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) = R_g T \quad , \quad (10)$$

donde P_g es la presión del gas dentro de la burbuja y R_g es la constante particular del gas. Si se supone que los cambios en el gas de la burbuja son adiabáticos, entonces

$$P_g \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)^\kappa = \text{constante}, \quad (11)$$

donde κ es la relación de calores específicos del gas.

Supóngase que el contenido inicial del gas (cuando $R = R_o$) produce una presión en la burbuja $P_o + 2S/R_o$, donde P_o es la presión en el líquido circundante a la burbuja y S es la tensión superficial. Si el radio cambia de R_o a R , la presión del gas será

$$P_g = \left(P_o + \frac{2S}{R_o} \right) \left(\frac{R_o}{R} \right)^{3\kappa} . \quad (12)$$

Con esto la ecuación de Rayleigh-Plesset (90) se transforma en

$$\frac{\left(P_o + \frac{2S}{R_o} \right) \left(\frac{R_o}{R} \right) - P_\infty}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{2S}{\rho_L R} \quad , \quad (13)$$

ecuación derivada por primera vez por Noltingk y Neppiras en 1950 [1].

Finalmente, considerando los efectos viscosos del líquido, Rayleigh-Plesset y Poritsky obtuvieron la ecuación (90) del apéndice A

$$\frac{P_B - P_\infty}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R} . \quad (90)$$

Las ecuaciones (90) del apéndice A, (9) y (13) son aplicables bajo las siguientes consideraciones:

1. Que las burbujas permanecen esféricas todo el tiempo.
2. Que existan condiciones espaciales uniformes en la burbuja.
3. Que la única fuerza que actúa sobre la burbuja sea la gravedad.

4. Que la densidad del líquido sea grande y su compresibilidad sea pequeña comparada con los valores para el gas.
5. Qué el contenido de gas en la burbuja sea constante.
6. Que la presión de vapor en la burbuja sea despreciable.

2.2.3 La ecuación de Gilmore

Gilmore usó la hipótesis propuesta por Kirkwood y Bethe para considerar los cambios en la densidad de un líquido compresible que rodea a una burbuja esférica, modelando estos fenómenos por medio de las ecuaciones diferenciales parciales del flujo de un fluido compresible [2]. La hipótesis de Kirkwood y Bethe representa una extrapolación de la teoría acústica y es más exacta cuando todas las velocidades del líquido son pequeñas comparadas con la velocidad del sonido en el líquido. Se ha encontrado también que esta misma teoría ha dado buenos resultados, los cuales han concordado con los obtenidos con las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales parciales, para la velocidad de la pared de las burbujas hasta velocidades de 2.2 veces la velocidad del sonido.

Gilmore introdujo en su análisis los efectos de la tensión superficial, la viscosidad y aquellos debidos a la variación de la densidad en el líquido, dentro de las condiciones de frontera de la pared de la burbuja. Si una burbuja esférica crece o colapsa en un volumen infinito de líquido y si se desprecian los efectos debidos a la gravedad y a otras perturbaciones asimétricas, el flujo del líquido será simétrico esféricamente y también irrotacional. Para cualquier flujo irrotacional, el vector de velocidad, \mathbf{v} puede escribirse en términos del potencial de velocidad, ϕ

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi, \quad (14)$$

mientras que la ecuación para la conservación del momento (71) del apéndice A, se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{4\mu}{3\rho}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (15)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad y μ es la viscosidad del líquido. En la ecuación (15), se asume que el flujo es irrotacional y que la viscosidad μ es constante en todo el volumen del espacio (pero puede variar con el tiempo). El último término de la ecuación (15) puede transformarse usándose la ecuación de conservación de la masa (7) del apéndice A

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0, \quad (7)$$

la cual se puede escribir en términos de la derivada sustancial D/Dt cuando se sigue el movimiento del fluido

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (16)$$

Es evidente de la ecuación (16) que el término viscoso de la ecuación (15) es cero, si la viscosidad o la densidad del líquido son cero. Para el caso de las ecuaciones que se usan en el presente estudio, son de interés las situaciones en donde la viscosidad y la compresibilidad son moderadamente pequeñas. En la mayoría de los líquidos la variación de la viscosidad con la presión es más grande que la variación de la densidad con la presión, por lo tanto, si se desprecia el término que representa la interacción entre estos dos valores pequeños en la ecuación (15), se puede mostrar que el efecto sería aún más pequeño que la influencia que tienen los términos debidos a la variación de la viscosidad y que fueron omitidos en la ecuación (15). El uso de esta aproximación no implica que todos los efectos viscosos sean despreciados, ya que existe disipación viscosa aun cuando se tiene una situación de incompresibilidad, pero el término viscoso en este caso aparece sólo en la condición de frontera. Con esta simplificación, la ecuación (15) se integra para dar

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = -\int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (17)$$

Para la obtención de la ecuación (17) se hacen dos suposiciones. La primera es que la presión p_∞ a una distancia infinita de la burbuja es constante y que la velocidad y el potencial de velocidad se anulan en el infinito. Esto tiene como resultado que la constante de integración no aparezca en la ecuación anterior. Si se tiene una desviación de estas consideraciones en infinito se violará la condición de simetría esférica o si se conserva la simetría se propagará hacia adentro y alcanzará una amplitud infinita a cualquier distancia finita de la burbuja como consecuencia de la convergencia esférica. La segunda suposición es que la densidad del líquido ρ se puede expresar como una función solamente de la presión. Para un flujo isentrópico, sin disipación de calor o viscosa, esta condición se cumple completamente. También se cumple cuando se tienen procesos moderadamente viscosos. Su efecto sobre la densidad es usualmente despreciable para líquidos, ya que el coeficiente de expansión para los líquidos es pequeño. Si se denota a la integral de la ecuación (17) con el símbolo h y se reconoce como la entalpía se tiene que

$$h(p) = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} \quad (18)$$

es la diferencia entre la entalpía del líquido a presión p y la entalpía del líquido a p_∞ .

Para un campo de flujo del líquido formado por ondas salientes de presión y velocidad, si todas las velocidades del fluido son pequeñas comparadas con la velocidad del sonido y además la velocidad del sonido en el infinito no varía significativamente de su valor c_∞ , entonces se puede aplicar la expresión para ondas esféricas divergentes siguiente:

$$\phi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_\infty}\right) \quad , \quad (19)$$

donde r es la distancia desde el centro de la burbuja y f es una función no especificada del argumento $\left(t - \frac{r}{c_\infty}\right)$. Ahora la ecuación (17) puede escribirse como

$$r\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(f\left(t - \frac{r}{c_\infty}\right) \right) = f'\left(t - \frac{r}{c_\infty}\right) \quad , \quad (20)$$

donde se ha derivado la función f utilizando la regla de derivación de una función compuesta. Con $f(u) = f\left(t - \frac{r}{c_\infty}\right)$ y $u = \left(t - \frac{r}{c_\infty}\right)$ y

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad (21)$$

Las ecuaciones (19) y (20) muestran la aproximación cuasi-acústica, llamada así porque $r\phi$ y $r\left(h + \frac{v^2}{2}\right)$ se propagan de forma saliente con una velocidad c_∞ , a diferencia de la aproximación acústica convencional en donde el término $\frac{v^2}{2}$ es despreciable comparado con h . El término que se propaga con una velocidad saliente c_∞ , es rh . Como una aproximación más exacta, cuando las velocidades del líquido toman valores más cercanos a la velocidad del sonido, es mejor suponer que $r\phi$ y $r\left(h + \frac{v^2}{2}\right)$ se propagan de manera saliente con una velocidad variable de $(c+v)$, donde c es la velocidad local del sonido. Las suposiciones alternativas son sólo suposiciones equivalentes. Kirkwood and Bethe, usan la segunda de estas suposiciones.

Considerando que $r\left(h + \frac{v^2}{2}\right)$ se propaga con una velocidad $(c+v)$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[r\left(h + \frac{v^2}{2}\right) \right] = -(c+v) \frac{\partial}{\partial r} \left[r\left(h + \frac{v^2}{2}\right) \right] \quad , \quad (22)$$

ecuación que se puede escribir en función de la derivada sustancial $D/Dt = \partial/\partial t + v\partial/\partial r$ como

$$\frac{D}{Dt} \left[r \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] + c \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0, \quad (23)$$

que puede expandirse como

$$r \frac{Dh}{Dt} + rv \frac{Dv}{Dt} + (c+v) \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + rc \frac{\partial h}{\partial r} + rcu \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (24)$$

Para el caso esférico simétrico, la relación de momento (15) se reduce a

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial h}{\partial r}, \quad (25)$$

donde nuevamente se han despreciado los términos de viscosidad y compresibilidad. La ecuación de continuidad se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = -\frac{1}{c^2} \frac{Dh}{Dt}, \quad (26)$$

ya que $c^2 = dp/d\rho$ y $dh = dp/\rho$. Si se eliminan las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación (24), usándose las ecuaciones (25) y (26) se obtiene

$$r \frac{\partial h}{\partial r} \left(1 - \frac{v}{c} \right) + h \left(1 + \frac{v}{c} \right) - rc \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - 2cv \left(1 - \frac{v}{4c} - \frac{v^2}{4c^2} \right) = 0. \quad (27)$$

Esta es una ecuación que relaciona los campos de velocidad y entalpía en todo el líquido y, ya que el campo de entalpía es una función de la presión, se puede decir que se tiene también una relación entre los campos de velocidad y de presión.

Si se usan las ecuaciones (25) y (26) para eliminar las derivadas con respecto a r se obtiene

$$r \frac{Dh}{Dt} \left(1 - \frac{v}{c} \right) + ch \left(1 + \frac{v}{c} \right) - rc \frac{Dv}{Dt} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{3}{2} cv^2 \left(1 - \frac{v}{3c} \right) = 0, \quad (28)$$

que es la ecuación que se necesita para obtener los campos de velocidad y presión en cualquier punto del líquido.

Para obtener la descripción del movimiento de la pared de la burbuja se aplican las ecuaciones (27) y (28) con las consideraciones siguientes:

Ya que el crecimiento o colapso de la pared de una burbuja se puede describir como una función de la trayectoria de una partícula, se pueden usar las ecuaciones antes derivadas por medio de derivadas sustanciales o de una partícula.

Por comodidad, se cambian las derivadas sustanciales con respecto al tiempo por letras con puntos.

Se cambian las letras minúsculas siguientes por mayúsculas, para describir el comportamiento de las mismas variables involucradas, pero ahora referidas a la pared o frontera de la burbuja:

$$\begin{aligned} r &= R \\ v &= U \\ c &= C \\ h &= H. \end{aligned}$$

Con estas consideraciones, las ecuaciones (27) y (28), se pueden escribir como

$$R\ddot{R}\left(1-\frac{\dot{R}}{C}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{\dot{R}}{3C}\right)=H\left(1+\frac{\dot{R}}{C}\right)+\frac{R\dot{H}}{C}\left(1-\frac{\dot{R}}{C}\right). \quad (29)$$

Esta ecuación, presenta derivadas en función del tiempo.

La ecuación equivalente a la anterior, pero con derivadas en función de R es

$$RU\frac{dU}{dR}\left(1-\frac{U}{C}\right)+\frac{3}{2}U^2\left(1-\frac{U}{3C}\right)=H\left(1+\frac{U}{C}\right)+\frac{RU}{C}\frac{dH}{dR}\left(1-\frac{U}{C}\right). \quad (30)$$

El comportamiento de una burbuja afectada por un pulso de presión como el modelado por la ecuación (6) [3], se describe teóricamente por medio de la ecuación de Gilmore (29), modificada con $U = dR/dt$ de la manera siguiente:

$$R\left(1-\frac{U}{C}\right)\frac{dU}{dt}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{U}{3C}\right)U^2=H\left(1+\frac{U}{C}\right)+\frac{RU}{C}\left(1-\frac{U}{C}\right)\frac{dH}{dR}. \quad (31)$$

Referencias

1. Young R F, Cavitation (Imperial College Press, London), 1999, pp. 8-17.
2. Forrest R Gilmore. The Growth or Collapse of a Spherical Bubble in a Viscous Compressible Liquid (California Institute Technology, Pasadena, CA), 1952, Rep. No. 26-4, pp. 3-9.
3. Church C C, A Theoretical Study of Cavitation Generated by an Extracorporeal Shock Wave Lithotripter (Department of Biophysics, School of Medicine and Dentistry, The University of Rochester, Rochester, New York 14642), 1989, pp. 215-227.
4. Prosperetti A, Crum L A, and Commander K W, J. Acoustic. Soc. Am., 1988, 83, pp. 502-514.

CAPÍTULO 3

Litotricia y mecanismos de ruptura

3.1 Mecanismos de fractura

La aplicación de las ondas de choque a la destrucción de cálculos renales está basada en el hecho de que los cálculos, a diferencia de los tejidos, generalmente son objetos frágiles, esto es, su resistencia a la tensión es mucho menor que su resistencia a la compresión (ver Apéndice C) [1]. Existen principalmente tres efectos involucrados en la interacción de las ondas de choque con un cálculo: la compresión directa, el efecto Hopkinson y la cavitación [2].

3.1.1 Compresión directa

Este mecanismo de destrucción de los cálculos renales es una consecuencia de la acción de los frentes de onda que actúan directamente sobre la superficie anterior del cálculo, produciendo tensiones y compresiones, ocasionando con esto el desprendimiento de fragmentos [1, 4, 6]. Independientemente de ello, el cálculo sufre esfuerzos debido a que la onda que viaja a través de él lo hace con una velocidad mayor que la onda que viaja, por el tejido, alrededor del cálculo. En virtud de que la onda en el interior se adelanta con respecto a la onda en el exterior, se crea una diferencia de presión considerable que puede producir fisuras. Este efecto, conocido en inglés como “circumferential squeezing” ha sido estudiado por varios autores [7].

3.1.2 Efecto Hopkinson

Cuando una onda de choque generada en agua penetra un objeto cuya impedancia acústica es mayor a la del agua (la impedancia acústica de un cálculo es un orden de magnitud mayor a la del agua o del tejido) es parcialmente reflejada. La parte que penetra continúa propagándose como una onda de compresión. Al llegar a la interfase posterior del objeto la onda es nuevamente reflejada, transformándose en una onda de rarefacción que crea esfuerzos suficientemente grandes para desprender material en la sección posterior del

cálculo. El efecto Hopkinson también puede darse en sitios internos del cálculo, como cavidades o huecos e interfases de materiales cristalinos o con matrices diferentes. Estos esfuerzos de tensión causan nucleación y crecimiento de microgrietas, las cuales eventualmente se juntan, dando como resultado una fractura mayor. La parte negativa de la onda de presión generada por los litotritores también ejerce esfuerzos de tensión de un orden de magnitud semejante al que se presenta en el mecanismo de fractura por desprendimiento. La falla resultante no es llamada falla por desprendimiento, pero se modela y analiza de manera idéntica.

A diferencia del mecanismo de desprendimiento, en donde el cálculo se somete a un esfuerzo de tensión global, una carga de compresión global da como resultado un campo de esfuerzos de tensión local en la vecindad de los defectos pre-existentes en el cálculo, tales como fronteras de grano, cavidades, inclusiones y pequeñas grietas. Estos esfuerzos locales en materiales frágiles dan como resultado nucleación de microgrietas y fallas, como las que se presentan en el caso del desprendimiento de material del cálculo [2 y 8].

3.1.3 Cavitación

La cavitación es el crecimiento y colapso de burbujas de vapor en el seno de un líquido. Ocurre cuando la presión en un líquido disminuye súbitamente, produciendo burbujas. En contraste con la ebullición que es la formación de gas, a una presión específica y constante, cuando el líquido alcanza su temperatura de ebullición y se forman burbujas causadas por el incremento de energía en el fluido, la cavitación es la formación de burbujas causada por una reducción súbita de la presión. El término cavitación acústica se usa para cualquier fenómeno que involucre la formación o estimulación de una o varias burbujas por medio de un campo acústico. Se distingue entre dos tipos de cavitación: pseudocavitación y cavitación real. La pseudocavitación es la formación de burbujas a partir de microburbujas o pequeños sitios de nucleación (impurezas) en el líquido. El término cavitación real se refiere al desgarramiento de los enlaces moleculares del fluido. La presión con valor inferior a la que poseía el medio antes de que llegara la onda de choque, es la correspondiente a la parte negativa del pulso de presión originado por la onda de choque. Se denomina presión “negativa” o rarefacción y puede producir ambos tipos de cavitación. De hecho, cualquier pulso de presión negativa con suficiente amplitud puede generar cavitación. La cavitación se produce como resultado de la incapacidad de los líquidos de soportar presiones negativas muy grandes y cuando esto sucede, resulta una gran concentración de energía acústica en un volumen muy pequeño. El umbral para la cavitación depende de la duración del pulso, del perfil de la onda y de su amplitud. Para un pulso de un microsegundo este umbral es de aproximadamente 0.5 MPa para agua potable.

Al aumentar la duración del pulso, el umbral disminuye. Cuando un líquido se encuentra bajo esfuerzos de tracción, es posible que las burbujas microscópicas dentro de él aumenten su tamaño. Bajo estas circunstancias se forman burbujas en el líquido, a pesar de estar relativamente frío. Las cavidades con gas crecen hasta alcanzar un volumen máximo y cuando la presión regresa a su valor original, la energía potencial adquirida durante el crecimiento se transforma en energía cinética de colapso. Las cavidades colapsan hasta llegar a dimensiones aún más pequeñas que las originales. A pesar de que estas cavidades son pequeñas, se origina una densidad de energía elevada con un gran poder de destrucción. Los parámetros cruciales son la amplitud y la duración del pulso de rarefacción que aparece después de la compresión. Se ha reportado evidencia de que la cavitación inducida por las ondas de choque de un litotritor, es uno de los mecanismos más importantes para la ruptura de los cálculos renales tratados con ondas de choque [2, 3, 5 y 9]. En los experimentos *in vitro* se ha observado que el campo de presión generado por la onda de choque induce cavitación en el fluido circundante al cálculo [10].

Los colapsos de las burbujas adyacentes a la superficie de un sólido son asimétricos y dan como resultado pequeños chorros de líquido que inciden sobre la superficie del sólido. Las velocidades medidas de los chorros son del orden de 100 a 340 m/s [11]. Las velocidades y diámetros (10 a 100 μm) de los chorros dependen del perfil de presión y del diámetro inicial de las burbujas. El colapso es tan intenso que a su vez produce ondas de choque secundarias con frentes de onda esféricos, que generan tensiones considerables en el cálculo. Generalmente la cavitación no destruye objetos directamente. Más bien causa pequeñas fisuras y huecos en las superficies donde actúa. Existen evidencias experimentales [12] de que el daño no únicamente es originado por las ondas de choque secundarias, sino por los chorros microscópicos, anteriormente mencionados. El daño que generan estos pequeñísimos chorros es proporcional a la densidad del líquido, a la velocidad de la onda de compresión en el líquido y a la velocidad del chorro (*jet*) y consiste en una deformación inicial debida al impacto, seguida de un desgarramiento producido por el flujo de líquido a través de la superficie [13]. Se ha reportado que la cavitación puede formarse también dentro del tejido biológico (*in vivo* e *in vitro*), causando lesiones irreversibles [12, 14].

Referencias

1. Murata S, Watanabe H, Takahashi T, Watanabe K, Oinuma S, Studies on the application of microexplosion to medicine and biology, II, Construction and strength of

urinary calculi, *Jap. Urol.*, 1977, 68, pp. 249. Loske M A, *Shock Wave Physics for Urologists*, México, UNAM, 2007, pp. 61-84.

2. Chitnis P V, Characterization and comparative analysis of extracorporeal shock wave devices, M. Sc. Thesis, Boston: Boston University, College of Engineering, 2002.

3. Coleman A J, Saunders J E, Choi M J, An experimental shock wave generator for lithotripsy studies, *Physics in Medicine and Biology*, 1989, 34(11), pp. 1733-1742.

4. Vakil N, Relationship of the model stone properties to fragmentation mechanisms during lithotripsy, *Journal of Lithotripsy and Stone Disease*, 1991, 15(3), pp. 181-184.

5. Chitnis P V, Cleveland R O, Quantitative measurements of acoustic emissions from cavitation at the surface of a stone in response to a lithotripter shock wave, *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 119(4), pp. 1929-1932.

6. Cleveland R O, McAteer J A, Williams J C Jr, Correlation between the predicted stress field and observed spall-failure in artificial kidney stones treated by shock wave lithotripsy (ESWL) in vitro, *Proceedings of the 17th International Congress on Acoustic*, Bettucci A (ed.), Rome Italy, 2002, Vol. VII, pp. 174-175.

7. Eisenmenger W, The mechanism of stone fragmentation in ESWL, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 2001, 27, pp. 683-693.

8. Cleveland R O, McAteer J A, Muller R, Time-lapsed nondestructive assessment of shock wave damage to kidney stones in vitro using micro-computed tomography, *Journal of the Acoustical Society of America*, 2001, 110(4), pp. 1733-1736.

9. Delius M, Heine G, Brendel W, A mechanism of gall stone destruction by extracorporeal shock waves, *Gastroenterology*, 1988, 94, pp. A93.

10. Coleman A J, Saunders J E, Crum L A, Dyson M, Acoustic cavitation generated by an extracorporeal shock wave lithotripter, *Ultrasound in Medicine and Biology* 1987a, 13, pp. 69-76.

11. Plesset M S, Chapman R B, Collapse of an initially spherical vapor cavity in the neighborhood of a solid boundary, *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, (47), pp. 283.

12. Crum L A, Cavitation microjets as a contributory mechanism for renal calculi disintegration in ESWL, *The Journal of Urology*, 1988, 140, pp. 1587-1590.

13. Bowden E P, Brunton J H, The deformation of solids by liquid impact at supersonic speeds, *Proc. Roy. Soc. A.*, 1961, (263), pp. 433-450.

14. Frizell L A, Lee C S, Aschenbach P D, Borelli M J, Morimato R S, Dunn F, Involvement of ultrasonically induced cavitation in limb paralysis of the mouse neonate, *Journal of Acoustic Society*, 1983, 74(3), pp. 1062-1066.

CAPÍTULO 4

Materiales y Métodos

4.1 El arreglo experimental

Para detectar y controlar la cavitación de manera que se pueda aumentar la energía de colapso de las burbujas que se presentan en los tratamientos de litotricia extracorpórea (LEOCH), en este proyecto se planteó el objetivo de la sección 1.3 y la hipótesis de la sección 1.2. Para lograr el objetivo y verificar la hipótesis se definió el siguiente alcance del proyecto:

1. Realizar estudios experimentales de burbujas de cavitación con ondas de choque tándem para definir la posibilidad de aumentar la energía de colapso de las burbujas generadas por la primera onda, modificando el perfil de la segunda onda de choque. Para esto se usaron los materiales, métodos y el arreglo experimental que se describen a continuación y en la sección 4.2.
2. Realizar simulaciones numéricas analíticas de la dinámica de una burbuja de cavitación usando la formulación de Gilmore-Akulichev, para proponer un perfil de presión novedoso para ondas de choque tándem, que aumente la energía de colapso de las burbujas de cavitación formadas por la primera onda de choque, descritas en la sección 4.3.

4.1.1 El generador de burbujas

Con la finalidad de obtener burbujas pequeñas con un tamaño conocido (aproximadamente 1.3 mm de diámetro) y en una ubicación predecible, se diseñó un generador de burbujas de nylamid blanco. Como puede observarse en la figura 4.1, dicho generador está formado por una cámara de aire con forma de paralelepípedo (34.6 mm × 30 mm × 15 mm), conectada a la salida de un regulador de aire (no mostrado en la figura) que mantiene la presión entre 12.4 y 13.8 kPa. En una de sus caras se montó un tubo de nylamid blanco de 125 mm de largo, con diámetro externo e interno de 13.0 mm y 4.76 mm, respectivamente. Perpendicularmente al tubo, en el extremo opuesto a la cámara de aire, se montó una aguja de acero inoxidable de 100 mm de largo, del tipo usado en cromatografía líquida. Los diámetros externo e interno de la aguja son de 1.0 mm y 0.1 mm, respectivamente. El aire llena la cámara de entrada del generador de burbujas y fluye a través del tubo hasta la aguja. La aguja del generador de burbujas se alineó con el eje de simetría del generador de ondas de choque. El extremo de la aguja, por donde salen las burbujas, se ubicó 6 mm debajo del foco F del generador de ondas de choque (ver figura 4.2).

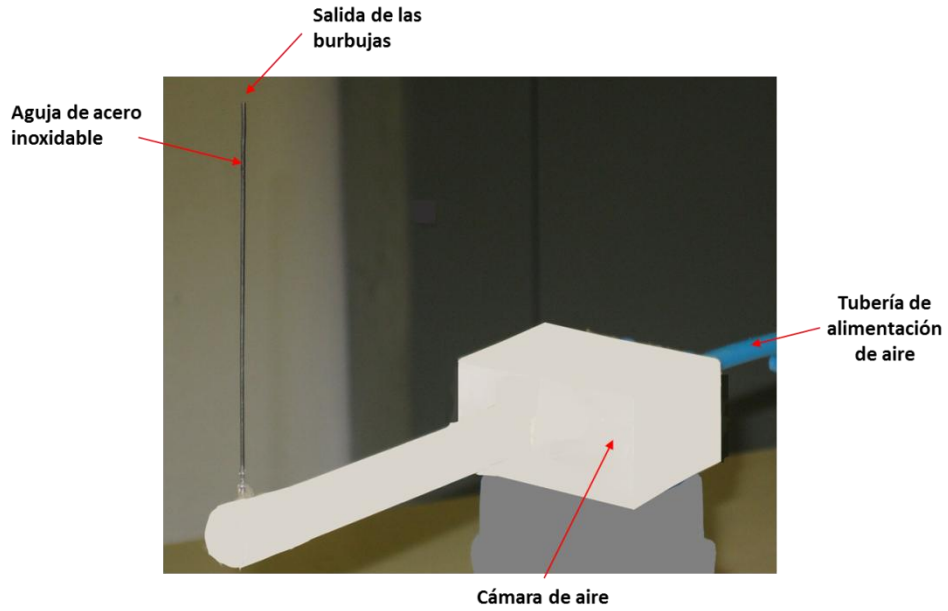


Figura 4.1
Fotografía del generador de burbujas de aire.

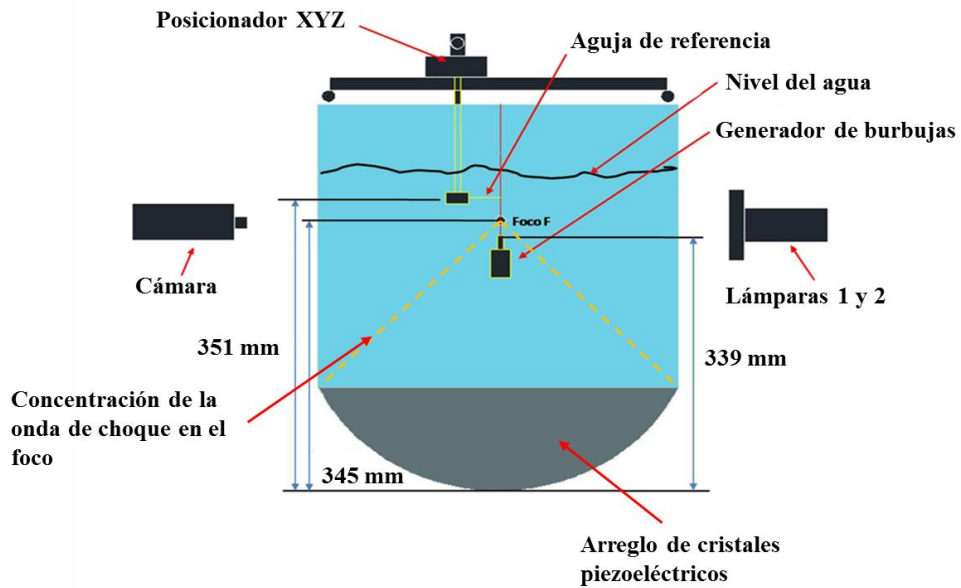


Figura 4.2
Esquema simplificado del arreglo experimental.
Se muestran los componentes, algunas dimensiones y el generador de burbujas (en los experimentos no obstruye la trayectoria de la onda de choque).

4.1.2 El Generador de Ondas de Choque Multifuncional

El Generador de Ondas de Choque Multifuncional está formado por una tina de pruebas rectangular de acrílico transparente con sistema de llenado y vaciado de agua, un generador de ondas de choque piezoeléctrico formado por cerca de 3,000 cristales piezoeléctricos colocados en un soporte hemisférico de aproximadamente 500 mm de diámetro, que operan en un intervalo de voltaje de 5 a 10 kV , un posicionador XYZ que se utiliza para fijar el generador de burbujas, así como un sistema de carga y descarga de los capacitores de alto voltaje y la electrónica de control para la selección de la magnitud del alto voltaje y del tiempo de retardo entre los pulsos tándem [1, 2]. El centro del cascarón esférico sobre el que se encuentran montados los cristales piezoeléctricos, es decir, el foco del generador (F), se localiza a 345 mm del fondo. En la figura 4.3 se muestra una parte del sistema.

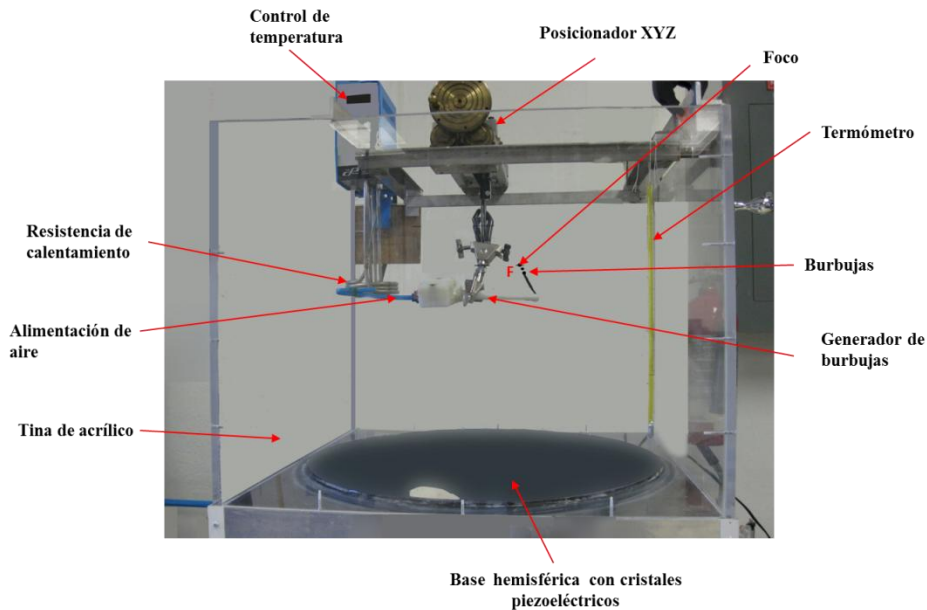


Figura 4.3

Fotografía de la tina de pruebas del Generador de Ondas de Choque Multifuncional.

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran el sistema eléctrico del Generador de Ondas de Choque Multifuncional y su tablero de control. A diferencia de los litotritores clínicos, el Generador de Ondas de Choque Multifuncional puede producir parejas de ondas de choque (ondas tándem) de manera repetible. Además, es posible producir ondas mono-pulso, del tipo usado en aplicaciones médicas. Tanto las ondas mono-pulso como las ondas tándem pueden generarse en modo manual o en modo automático. En el modo automático la frecuencia de repetición es de máximo 0.5 Hz.

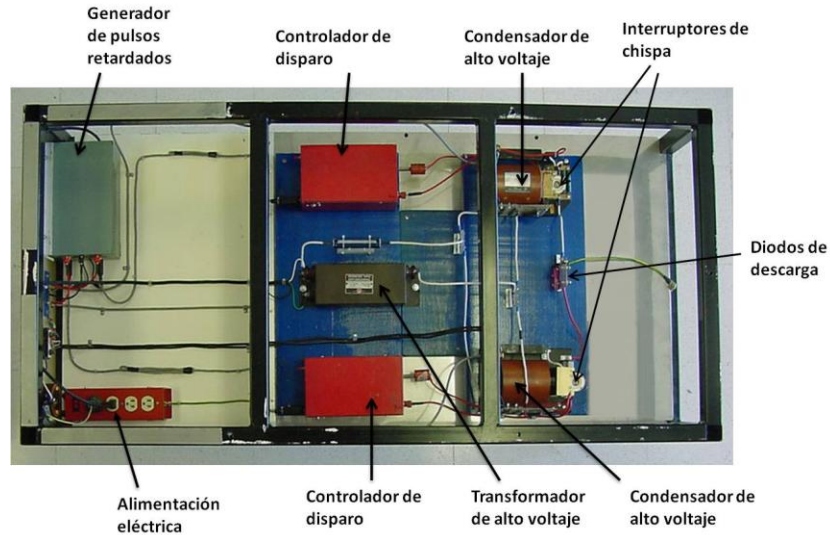


Figura 4.4

Fotografía del sistema eléctrico del Generador de Ondas de Choque Multifuncional.

Las salidas auxiliares del generador de pulsos retardados mostradas en la figura 4.5 sirven para conectar un osciloscopio y verificar el tiempo de retardo (*delay*) con que se generan las ondas de choque tándem. Las salidas escaladas (8) poseen atenuadores resistivos, con un factor de 1000 a 1 y una impedancia de salida de 150 k Ω , para reducir los voltajes de las descargas eléctricas que producen la primera y segunda onda de choque, de manera que pueda observarse el tiempo de retardo mediante un osciloscopio.



Figura 4.5

Fotografía del panel de control del Generador de Ondas de Choque Multifuncional: (1) alimentación eléctrica, (2) piloto de confirmación de encendido, (3) porta fusible de alimentación, (4) perilla de control del alto voltaje, (5) voltímetro, (6) selector del medidor de altos voltajes, (7) salidas auxiliares del generador de pulsos retardados, (8) salidas escaladas de las descargas eléctricas, (9) generador de pulsos retardados (GP), (10) perilla para ajustar el retardo de ondas de choque tándem.

El generador de pulsos retardados produce, de manera repetible, parejas de pulsos sucesivos con retardos pre-ajustables dentro del intervalo de 50 a 950 μs .

Para generar parejas de ondas de choque sucesivas, separadas por diezmilésimas de segundo, se adaptó y duplicó en el Laboratorio de Ondas de Choque del CFATA, el circuito original de alto voltaje. En la figura 4.6 se muestra un diagrama de bloques del circuito desarrollado [3]. El transformador T (entrada: 220 V_{RMS} , 60 Hz; salida: 5.32 kV_{RMS}) carga los capacitores C_1 y C_2 a un voltaje de 7.5 kV_{DC} . Los capacitores mantienen el voltaje mencionado hasta el instante en el cual se activa el interruptor de chispa I_1 . Al suceder esto, se descarga la energía almacenada en C_1 , excitando el arreglo de cristales piezoeléctricos, mismos que producen la primera onda de choque. Los interruptores de chispa I_1 e I_2 consisten en dos electrodos principales (uno de entrada y uno de salida) encapsulados dentro de una cavidad hermética. Un tercer electrodo, denominado gatillo o *trigger*, se localiza cerca del electrodo de salida. Cada controlador de disparo (CD) es capaz de producir una descarga eléctrica de baja corriente y alto voltaje (12 kV, 3 mA) entre el gatillo y el electrodo de salida. Esto ioniza el gas que se encuentra entre los dos electrodos principales, disminuyendo la resistencia eléctrica entre los mismos, por lo que se da la descarga eléctrica de alta energía proveniente, ya sea del capacitor C_1 o del capacitor C_2 .

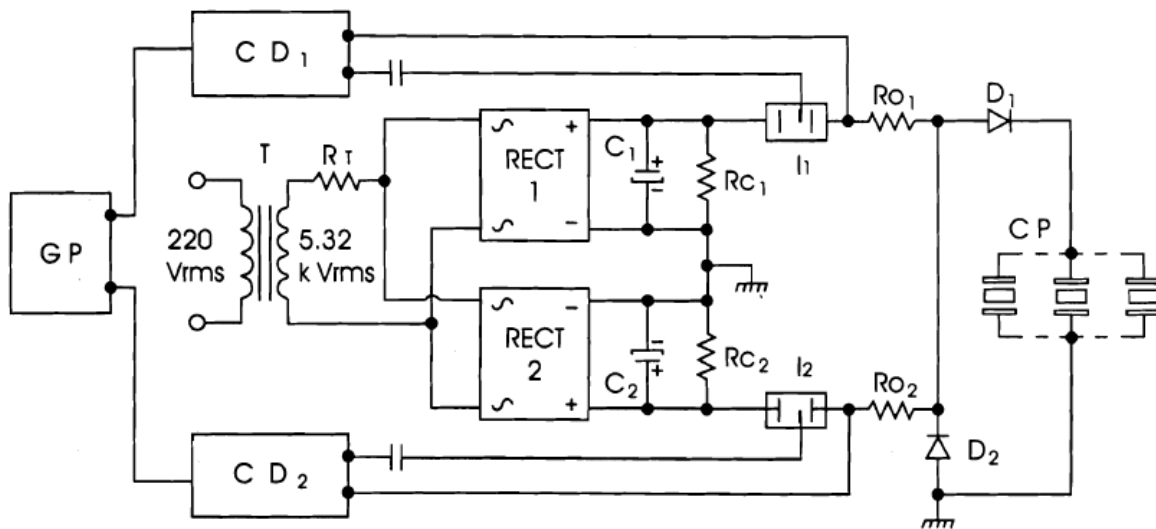


Figura 4.6

Diagrama de bloques del circuito eléctrico del Generador de Ondas de Choque Multifuncional. Se muestra el transformador T , el generador de pulsos GP , los interruptores de chispa I_1 e I_2 , los condensadores C_1 y C_2 , los controladores de disparo CD_1 y CD_2 , los puentes rectificadores $RECT 1$ y $RECT 2$, las resistencias de descarga RO_1 y RO_2 , los diodos de descarga D_1 y D_2 y el arreglo de cristales piezoeléctricos CP .

Un generador de pulsos (*GP*), acoplado a los controladores de disparo CD_1 y CD_2 , permite activar los interruptores de chispa con diferencias de tiempo variables. Al descargarse el capacitor C_2 , se produce la segunda onda de choque. El tiempo de repetición de generación de cada par de ondas de choque sucesivas puede variarse entre 1 y 10 s.

El generador de pulsos retardados *GP* emite, de manera repetible, pulsos de entre 3 y 5 volts de amplitud con duración de 50 μ s, para activar los controladores de disparo e interruptores de chispa. Para mayor información sobre el diseño del Generador de Ondas de Choque Multifuncional pueden consultarse los artículos citados al final de esta tesis [1-5].

El comportamiento de una burbuja de aire en agua se estudió para ondas de choque mono-pulso y ondas de choque tándem. En ambos casos, el generador de ondas de choque se usó en modo manual con un voltaje de 7.5 kV. A este voltaje se producen ondas de choque con un pico positivo P^+ de 37.8 ± 4.2 MPa y un pulso negativo P^- de 18.2 ± 2.4 MPa [2]. El nivel de agua dentro de la tina del Generador de Ondas de Choque Multifuncional se mantuvo 150 mm arriba del foco F .

4.1.3 La cámara de alta velocidad y el circuito de retardo

Para registrar la dinámica de burbujas de aire sometidas a la acción de ondas de choque, se usó un sistema de imagenología digital de alta velocidad *Motion Scope PCI* (ver figura 4.7), fabricado por *Redlake MASD, Inc.* (San Diego, CA, E.U.A.), formado por una cámara con un sensor *CCD* (charge coupled device) para la captura de imágenes con una resolución de 658 X 496 pixeles por imagen. La cámara tiene un acoplador tipo *C*, para usar objetivos diferentes. Las velocidades que pueden seleccionarse son: 60, 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000 y 8000 cuadros por segundo. En el trabajo reportado aquí se usó una velocidad de 8000 cuadros por segundo y un disparo (*trigger*) de 10%. Eso significa que las imágenes almacenadas en la memoria de la cámara corresponden en un 10% a aquellas registradas antes de que la cámara recibiera la señal proveniente del retardador de pulsos y en un 90% a imágenes grabadas después de recibir la señal mencionada [6].

A esta velocidad el tiempo entre imágenes subsecuentes es de 125 μ s. El objetivo usado fue un lente *Nikon 24-120 mm, AF - Nikkor - f1 : 3.5 - 5.6 D*. Las imágenes capturadas se transmitieron a una tarjeta *PCI* (Peripheral Component Interconnect), instalada en una computadora personal. Esta tarjeta posee un interruptor para el tipo de video (NTSC o PAL) y otro para seleccionar la salida de video (monitor o grabadora).

El sistema de iluminación consistió en una lámpara de 500 W y una lámpara de 350 W con sus respectivas pantallas difusoras. Ambas lámparas se colocaron a la misma altura de la cámara, del lado opuesto de la tina e iluminando hacia la cámara, de manera que las

burbujas aparecen como manchas negras sobre fondo blanco, es decir, se grabaron a contraluz (ver figura 4.2), porque esa fue la configuración que produjo las mejores imágenes..

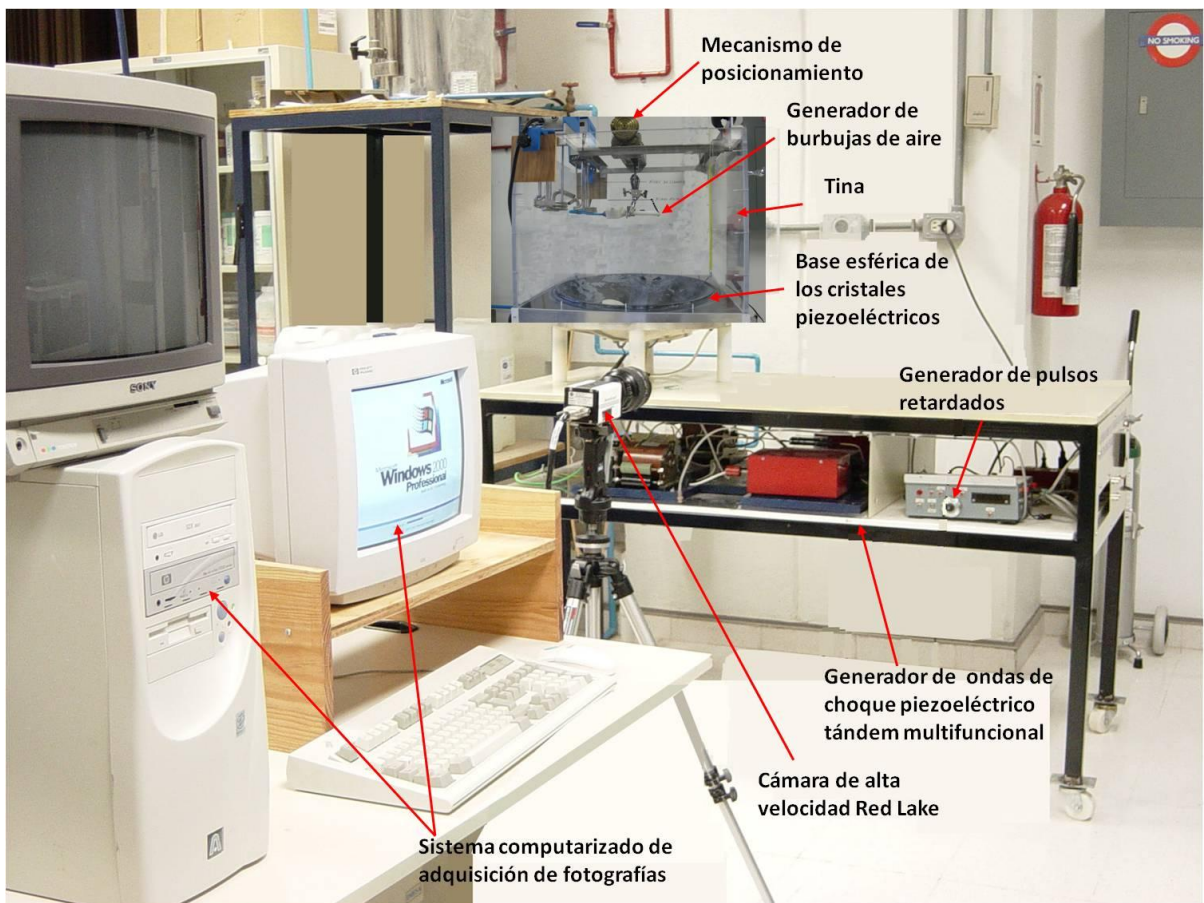


Figura 4.7
Fotografía del arreglo experimental.

A la máxima velocidad de la cámara sólo es posible obtener una imagen cada $125 \mu\text{s}$. Como la “vida” de una burbuja de cavitación, desde que incide la onda de choque hasta el colapso, no excede $600 \mu\text{s}$, se tendrían únicamente unas cuantas imágenes por evento. Con la finalidad de obtener mayor información sobre la dinámica del fenómeno, se optó por superponer imágenes de varios eventos, es decir, se retardó el inicio de la captura de las imágenes en múltiplos enteros de $25 \mu\text{s}$, por medio de un circuito electrónico de retardo desarrollado en el Laboratorio de Ondas de Choque del CFATA. El circuito está formado por dos resistencias, una de ellas variable hasta $10 \text{ k}\Omega$ y la otra de 100Ω , un condensador de 22 nF y un microcircuito multivibrador SN74121 (Texas Instruments, Dallas TX, EUA). El circuito recibe como entrada un pulso *TTL* proveniente del generador de ondas de choque y emite un pulso de salida, hacia la cámara, con un tiempo de retardo que puede ser

seleccionado en un intervalo que varía entre 1.5 μs y 155 μs . En este estudio el tiempo de retardo usado siempre fue de 25 μs para utilizar sus múltiplos hasta 100 μs .

Para facilitar la medición de las dimensiones de las burbujas, se colocó una aguja de referencia, en posición horizontal, con su punta a 351 mm del centro del fondo del generador piezoeléctrico sobre el eje de simetría, es decir, la punta de dicha aguja se encontraba 6 mm arriba del foco F (ver figura 4.2). La separación entre la salida del generador de burbujas y la punta de la aguja fue de 12 mm. Como no se tenía control sobre la posición vertical de las burbujas, la burbuja seleccionada para las mediciones siempre fue aquella que se encontraba más cerca de F . Durante el tiempo de interés (850 μs), las burbujas ascendían una distancia de aproximadamente 0.4 mm, quedando siempre dentro del cuadro de grabación. Para medir los diámetros de las burbujas se usó el *software Redlake Imagin Motion Scope* (versión 2.21.1) incluido en el sistema de imagenología.

4.2 La metodología experimental

4.2.1 Ondas de choque mono-pulso

La estrategia usada se muestra, de manera esquemática, en la figura 4.8. Se realizó una primera grabación en la que apareció la burbuja (denominada burbuja 1) en $t = 0, 125, 250, 375, 500, 625$ y $750 \mu\text{s}$. Posteriormente se realizó una segunda grabación de otra burbuja (burbuja 2) también cada 125 μs (el tiempo más corto entre una imagen y la siguiente), sin embargo, en este caso la primera imagen se obtuvo en $t = 25 \mu\text{s}$ en lugar de $t = 0 \mu\text{s}$, es decir, se grabó la burbuja en $t = 25, 150, 275, 400, 525, 650$ y $775 \mu\text{s}$. Como siguiente paso, se grabó una burbuja 3 en $t = 50, 175, 300, 425, 550, 675$ y $800 \mu\text{s}$, una burbuja 4 en $t = 75, 200, 325, 450, 575, 700$ y $825 \mu\text{s}$ y una burbuja 5 en $t = 100, 225, 350, 475, 600, 725$ y $850 \mu\text{s}$. Este procedimiento se repitió tres veces. Finalmente se midieron los “diámetros” verticales DV y “diámetros” horizontales DH , definidos como se muestra en la figura 4.9, para obtener el “diámetro” D_t para cada burbuja y cada tiempo, definido como: $D_t = (DV + DH) / 2$. Se recurrió a dicha aproximación, ya que las burbujas generalmente no son esféricas. Para concluir, se promediaron los diámetros D_t de las tres burbujas captadas en $t = 0, 25, 50, 75, 100, 125 \mu\text{s}$.

Con esta metodología fue posible adquirir información sobre la vida de una burbuja de cavitación cada 25 μs , aunque debe tenerse en mente que los resultados no se obtuvieron de una única burbuja, como podría haber sido el caso con una cámara de mayor velocidad, sino de cinco burbujas similares. Por razones prácticas también se calcularon los diámetros

promedio adimensionales DA , definidos como el diámetro promedio D_t , dividido entre el diámetro D_0 de la burbuja en $t = 0$.

Para fijar el tiempo $t = 0$, en cada grabación se localizó la imagen correspondiente a la llegada de la onda de choque (primera onda de choque en el caso de ondas tándem). Posteriormente se seleccionó como imagen inicial ($t = 0$) la imagen inmediatamente anterior a la de llegada de la onda de choque.

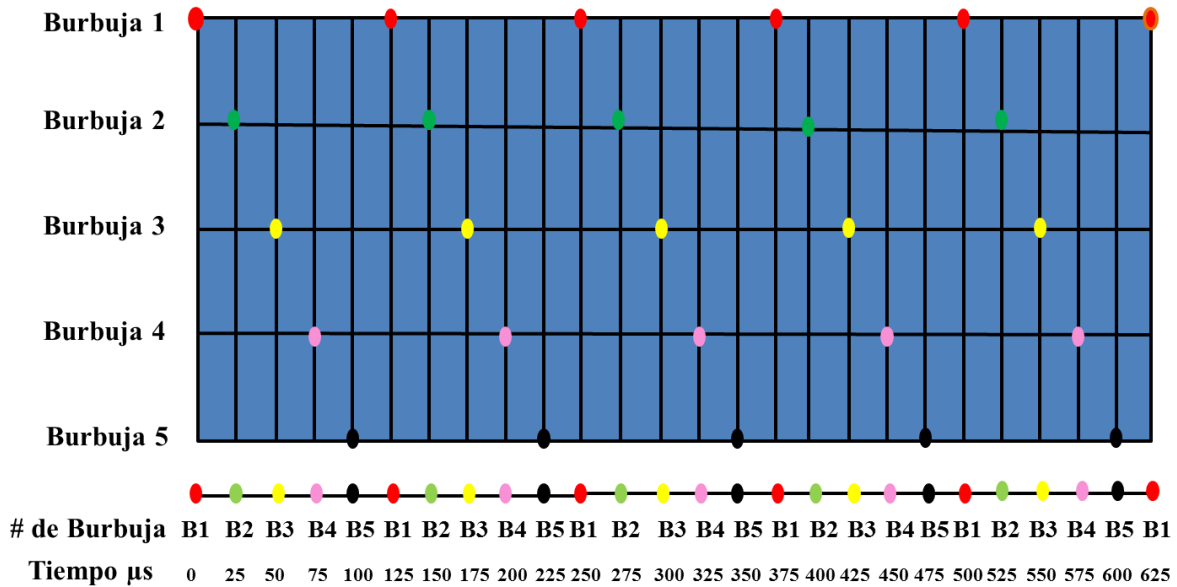


Figura 4.8

Representación esquemática de la estrategia seguida para obtener secuencias de imágenes de burbujas expuestas a ondas de choque con una cámara capaz de grabar una imagen cada 125 microsegundos.

Debido a que no tenía sentido analizar las imágenes de burbujas antes de la llegada de la onda de choque (el diámetro permanece constante) y más de 850 μs después de la llegada de la onda de choque (la burbuja se desintegra después de colapsar), de un número muy grande de imágenes que resultaron de cada grabación (aproximadamente 16,000 imágenes), únicamente se presenta la imagen inicial ($t = 0$) y 6 imágenes posteriores.

Para visualizar los resultados obtenidos, se preparó una gráfica de los diámetros adimensionales DA vs tiempo para cada uno de los tiempos de interés ($t = 0$ hasta $t = 850$ μs) en intervalos de 25 μs .

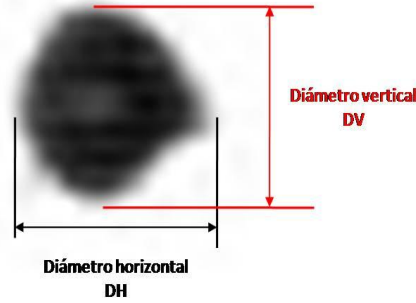


Figura 4.9

Definición del “diámetro” vertical y “diámetro” horizontal de una burbuja de aire en agua sometida a la acción de una onda de choque. El criterio seguido para definir los diámetros fue el de medir siempre el máximo tamaño de la burbuja.

4.2.2 Ondas de choque tándem

En vista de que el tiempo de experimentación y análisis de los resultados para cada conjunto de parámetros es largo, se decidió grabar burbujas sometidas a ondas de choque tándem sólo para cuatro diferentes retardos (*delays*) entre 200 y 300 μs . Este es el rango de retardos para el cual se ha reportado una máxima eficiencia de fractura de cálculos renales *in vitro* [2]. Para disminuir el error al ajustar el *delay* con la perilla de ajuste fino del generador de pulsos (ver figura 4.5), se usaron tiempos de retardo correspondientes a vueltas completas de dicha perilla ya que con esto se evitan errores de apreciación, resultando los siguientes retardos: 239, 257, 275 y 293 μs . Para cada *delay* se repitió la metodología descrita en la sección anterior, de manera que se obtuvieron cuatro gráficas de diámetros adimensionales vs tiempo para los tiempos de interés ($t = 0$ hasta $t = 850 \mu\text{s}$) en intervalos de 25 μs .

4.3 Simulación numérica

La dinámica de una burbuja esférica de aire inmersa en agua fue simulada usando la ecuación de Gilmore-Akulichev descrita en el apéndice A.10.3 [7-10]:

$$R \left(1 - \frac{U}{C} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{U}{3C} \right) U^2 = H \left(1 + \frac{U}{C} \right) + \frac{RU}{C} \left(1 - \frac{U}{C} \right) \frac{dH}{dR} \quad (1)$$

donde R es el radio de la burbuja y $U = dR/dt$ es la velocidad de la pared de la burbuja (interfase aire - agua). La velocidad del sonido en el agua puede expresarse como:

$$C = \sqrt{C_l^2 + (n-1)H} \quad (2)$$

en cuyo caso $C_l = 1509.7$ m/s, $n = 7$ y $H(P)$ es la diferencia de la entalpía del líquido entre la presión de equilibrio P_∞ y la presión P :

$$H(P) = \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} \quad (3)$$

siendo $\rho = \rho(P)$ la densidad del líquido. H y C se determinaron usando la ecuación de Tait, que para un proceso isentrópico está dada por:

$$P = (P_\infty + B) (\rho/\rho_\infty)^n - B \quad (4)$$

El cambio en la entalpía dH , donde $H = U + PV$, está dado por $dH = Tds + VdP$, ya que $dU = TdS - PdV$, donde U es la energía interna, P la presión, V el volumen y T la temperatura absoluta.

El cambio en la entalpía se calculó de la integral de Riemann $dh = v dP = dP/\rho$, donde $\rho = 1/v$ es la densidad, ya que los procesos físicos pueden considerarse adiabáticos y modelarse usando aproximaciones isentrópicas. Esto se debe a que la propagación de una onda de choque implica variaciones sumamente rápidas. La ecuación de Gilmore-Akulichev fue integrada numéricamente usándose el método de Runge-Kutta de cuarto y quinto órdenes sin considerar la difusión del gas de la burbuja hacia el líquido, ni la entrada de gas disuelto en el líquido hacia la burbuja.

La velocidad del sonido $C^{1/2} = (\partial P/\partial \rho)_s$ está dada por

$$C^2 = C_\infty^2 [(P + B)/(P_\infty + B)]^{1-1/n} \quad (5)$$

donde $C_\infty^2 = (P_\infty + B)n/\rho_\infty$.

El radio de la burbuja en un instante t se definió como R . Para las simulaciones numéricas se usaron tres diferentes radios iniciales R_0 (0.7 mm, 0.07 mm y 0.007 mm). El valor más grande se seleccionó en vista de que el radio de las burbujas

generadas en el laboratorio (ver sección 4.1.1) equivale a aproximadamente 0.7 mm. En un caso clínico (burbujas en el fluido que rodea a un cálculo urinario) este radio es, por lo menos, diez veces menor [11-13]. Por ese motivo también se corrieron simulaciones con un radio R_0 equivalente a 0.07 y 0.007 mm. La mayoría de los cálculos se realizaron para el radio intermedio de 0.07 mm y únicamente se repitieron con el radio mayor y el radio menor para los parámetros de mayor interés. En esta tesis se analizó la dinámica de una burbuja expuesta al paso de:

- (a) ondas de choque mono-pulso, del tipo usado en equipos clínicos,
- (b) ondas de choque tándem y
- (c) ondas de choque tándem modificadas.

Para simular una onda de choque mono-pulso convencional (C) se recurrió a la forma analítica propuesta por Church [7, 8, 12], ya que modela muy bien los pulsos de presión que se presentan en una LEOCH:

$$P_C(t) = 2 P^+ [\exp(-\alpha t)] [\cos(\omega t + \pi/3)], \text{ para } t \geq 0,$$

donde P^+ es la amplitud del pulso positivo (101 MPa), $\alpha = 9.1 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ se define como la constante de decaimiento y $\omega = 2\pi \cdot (83.3 \text{ kHz})$ es la frecuencia angular.

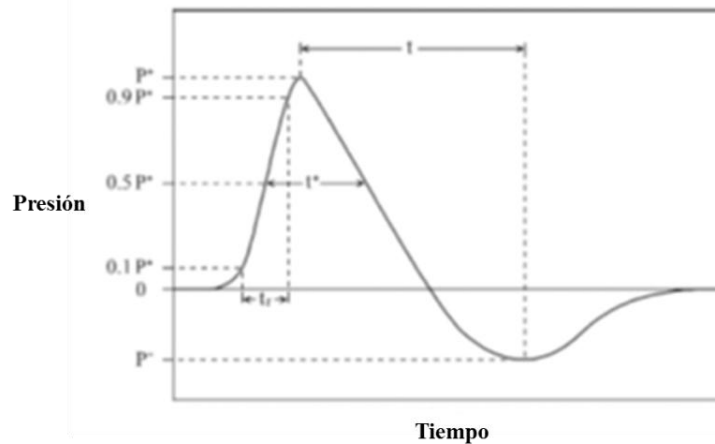


Figura 4.10

Parámetros usados para definir una onda de choque: t_r = tiempo de ascenso, t^+ = ancho del pulso positivo, t = duración total, P^+ = amplitud pulso positivo, P^- = amplitud del pulso negativo.

El valor absoluto de la amplitud del pulso negativo P^- es 16.4 MPa. El tiempo de ascenso de la presión t_r (ver figura 4.10) para un litotritor real es de 2 a 20

nanosegundos, sin embargo, por simplicidad en este trabajo se seleccionó $t_r = 0$ (ver figura 4.11). El ancho del pulso positivo t^+ y la duración total t se fijaron en $0.338 \mu\text{s}$ y $1.998 \mu\text{s}$, respectivamente.

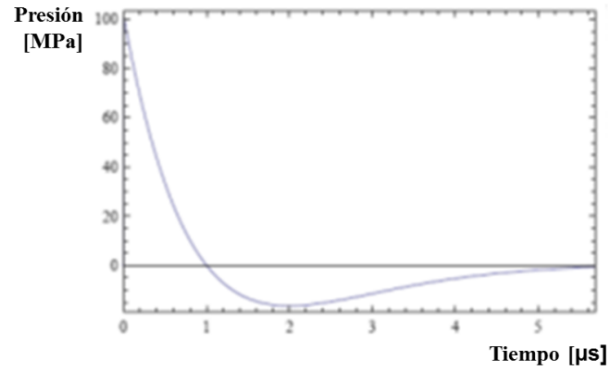


Figura 4.11

Perfil de presión de una onda de choque mono-pulso convencional C , definida para la simulación numérica.

Las ondas de choque tándem (TCC), se definieron como una onda C seguida de otra onda C con retrasos que se variaron entre 10.5 y $290.5 \mu\text{s}$ (ver figura 4.12).

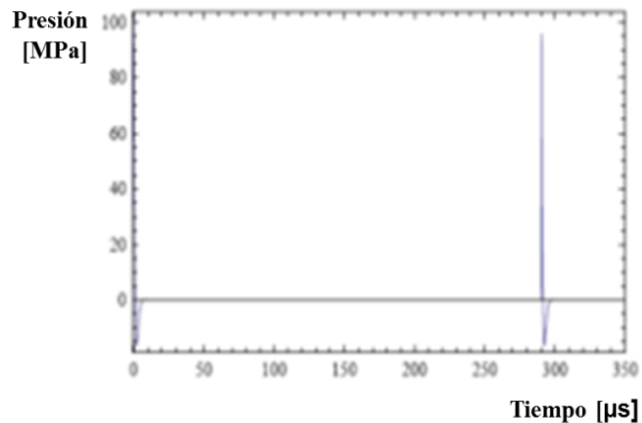


Figura 4.12

Perfil de una onda de choque tándem (TCC), definida como una onda de choque convencional C , seguida de otra onda C idéntica.

Además, se definió un pulso “lento” (S) como

$$P_S(t) = (t/t_r) P^+, \text{ para } 0 \leq t \leq t_r$$

y

$$P_S(t) = 2 P^+ [\exp(-\alpha t/8)] \{ \cos [(\omega t/8) + \pi/3] \}, \text{ para } t \geq t_r,$$

con $t_r = 0.8 \mu\text{s}$, $t^+ = 3.463 \mu\text{s}$, la duración total $t = 14.98 \mu\text{s}$, $P^+ = 101 \text{ MPa}$ y $P^- = 20.8 \text{ MPa}$ (ver figura 4.13). Las ondas de choque modificadas (*TCS*) se definieron como un pulso *C* seguido de un pulso *S* (ver figura 4.14).

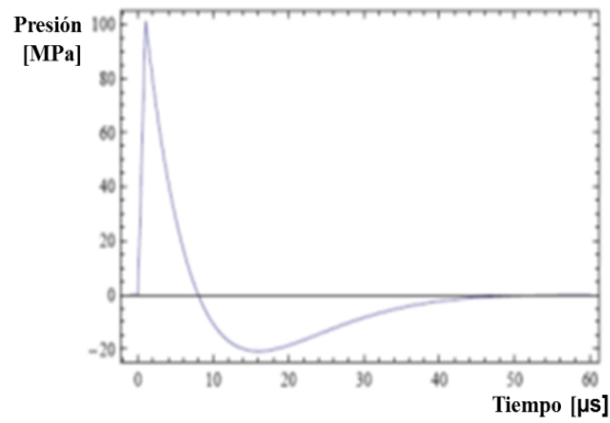


Figura 4.13

Perfil de presión de un pulso “lento” *S*.

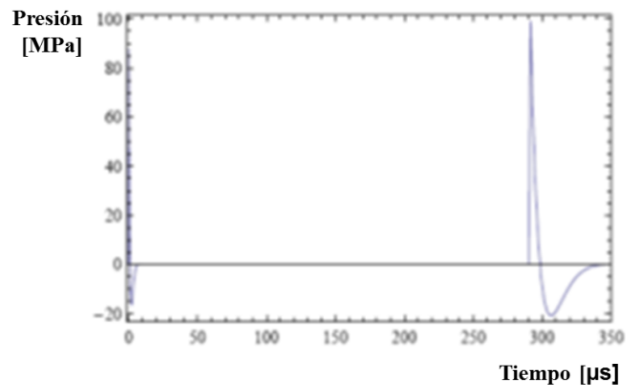


Figura 4.14

Perfil de una onda de choque tándem modificada (*TCS*), definida como una onda de choque convencional *C*, seguida de un pulso *S*.

En vista de que el desarrollo de hidrófonos más sensibles y rápidos mostró que el perfil de presión de una onda de choque posee un pulso de tensión más alargado,

algunos autores [14] propusieron usar $\alpha = 3.5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ y $f = \omega / 2\pi = 50 \text{ kHz}$ en lugar de los valores mencionados arriba. Por este motivo todas las simulaciones se repitieron con estos valores. Para conocer la influencia que tiene la amplitud del segundo pulso (S) de una onda de choque tándem modificada en la dinámica de una burbuja en agua, se repitieron las simulaciones mencionadas reduciendo dicha amplitud en un 50%.

Para ondas tándem las simulaciones se repitieron para un gran número de retardos, iniciando en $290.5 \mu\text{s}$ y reduciendo dicho retardo en saltos de $5 \mu\text{s}$. La última simulación se corrió para $10.5 \mu\text{s}$. El retardo inicial se fijó en $290.5 \mu\text{s}$, ya que éste es el tiempo que requiere la burbuja en colapsar después del paso de un mono-pulso C . En la mayoría de los casos, se graficó el logaritmo base 10 de R/R_0 en función del tiempo adimensional (TA) que se calcula como

$$TA = t / t_{ref} \quad (6)$$

donde t es el tiempo y $t_{ref} = 246 \mu\text{s}$ es el tiempo de referencia o tiempo que tarda la onda de choque en llegar al foco del Generador de Ondas de Choque Tándem y se calcula en base a los datos siguientes:

Distancia desde el fondo del Generador de Ondas de Choque hasta el foco (F)
 $345 \text{ mm} = 0.345 \text{ m}$. Velocidad del sonido en el agua de 1403 m/s a $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

$$t_{ref} = 0.345/1403 = 0.000246 \text{ segundos}$$

Referencias

1. Fernández F, Loske A M, Van Cauwelaert J, Prieto F E, Electronic device to improve the efficiency of extracorporeal lithotripters, Journal of Applied Research and Technology (Revista del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM), 2004, 2(2), pp. 170-178.
2. Loske A M, Prieto F E, Fernández F, Van Cauwelaert J, Tandem shock wave cavitation enhancement for extracorporeal lithotripsy, Physics in Medicine and Biology, 200-247, pp. 1-13.

3. Fernández F, Loske A M, Van Cauwelaert J, Prieto F E, Méndez A, Manual del Usuario del Generador de Ondas de Choque Multifuncional, Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, UNAM, Juriquilla, Querétaro, 2006.
4. Fernández F, Loske A M, Zendejas H, Castaño E, Paredes M I, Desarrollo de un litotriptor extracorporal más eficiente, Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, 2005, 26(1), pp. 7-15.
5. Loske A M, Shock Wave Physics for Urologists, Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, UNAM, Juriquilla, Querétaro, México, 2007, ISBN 978-970-32-4377-8, pp. 61-84.
6. Instructions for operating The Motion Scope PCI High Speed Digital Imaging System, Redlake MASD, Inc., Manual No. 9400-0010, Revision S, February 15, 2002.
7. Canseco G, de Icaza-Herrera M, Fernández F, Loske A M, Modified shock waves for extracorporeal shock wave lithotripsy: A simulation based on the Gilmore formulation, Ultrasonics, 2011, 51, pp. 803-810.
8. Church C C, A theoretical study of cavitation generated by an extracorporeal shock wave lithotripter, The Journal of the Acoustical Society of America, 1989, 86, pp. 215–227.
9. Choi M J, Coleman A J, Saunders J E, The influence of fluid properties and pulse amplitude on bubble dynamics in the field of a shock wave lithotripter, Physics in Medicine and Biology, 1993, 38, pp. 1561–1573.
10. Gilmore F R, The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, Pasadena CA, California Institute of Technology, 1952, Report 26-4, pp. 1–40.
11. Ohl C D, Ikink R, Shock-wave-induced jetting of micron-size bubble, Physics Review Letters, 2003, 90(214502), pp. 1–4.
12. Zhu S, Zhong P, Shock wave-inertial microbubble interaction: A theoretical study based on the Gilmore formulation for bubble dynamics, The Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 106, pp. 3024–3033.
13. Illoreta J I, Zhou Y, Sankin G N, Zhong P, Szeri A J, Assessment of shock wave lithotripters via cavitation potential, Physics of Fluids, 2007, 19, pp. 086103 1–16.

14. Matula T J, Hilmo P R, Storey B D, Szeri A J, Radial response of individual bubbles subjected to shock wave lithotripsy pulses in vitro, *Physics of Fluids*, 2002, 14, pp. 913–921.

CAPÍTULO 5

Resultados

5.1 Fotografía de alta velocidad

5.1.1 Ondas de choque mono-pulso

La tabla 5.1 muestra los diámetros promedio adimensionales DA obtenidos cada $25 \mu\text{s}$, para burbujas sometidas a la acción de una onda de choque mono-pulso. A pesar de que estos valores se obtuvieron midiendo los diámetros de varias burbujas, siguiendo la metodología y las definiciones descritas en el capítulo anterior, aquí frecuentemente se tratarán como si provinieran de una única burbuja, representativa para ciertos parámetros experimentales. Los primeros cinco valores se refieren a tiempos ($t = 0, 25, 50, 75$ y $100 \mu\text{s}$) en los que la onda de choque todavía no llegaba a la burbuja, por lo que $DA = 1$. Puede observarse que la onda de choque incidió sobre la burbuja en algún instante entre $t > 100 \mu\text{s}$ y $t < 125 \mu\text{s}$. Esto produjo cavitación acústica intensa (ver figura 5.1), impidiendo distinguir la burbuja de interés que se encontraba en la vecindad de F . Las burbujas de cavitación se forman a partir de microburbujas (núcleos de cavitación) contenidas en el agua, abarcando un volumen relativamente grande en torno a F . La mayoría de ellas quedaban “fuera de foco”, por lo que aparecían como imágenes borrosas. Generalmente había varias burbujas entre la burbuja emitida por el generador de burbujas y el objetivo de la cámara, bloqueando ocasionalmente la visión. Para $t \geq 250 \mu\text{s}$ nuevamente fue posible distinguir la burbuja de interés.

Para hacer homogéneas las gráficas de este trabajo, en algunos casos se presentan radios de las burbujas y tiempos adimensionales utilizando el tiempo de referencia $t_{ref} = 246 \mu\text{s}$, descrito anteriormente.

Tiempo (μs)	TA	DA
0	0	1
25	0.1016	1
50	0.2032	1
75	0.3048	1
100	0.4065	1
125	0.5081	<i>ND</i>
150	0.6097	<i>ND</i>

175	0.7113	<i>ND</i>
200	0.8130	<i>ND</i>
225	0.9146	<i>ND</i>
250	1.0162	2.251
275	1.1178	2.244
300	1.2195	2.434
325	1.3211	2.853
350	1.4227	2.290
375	1.5243	1.708
400	1.6260	1.832
425	1.7276	2.338
450	1.8292	2.229
475	1.9308	1.909
500	2.0325	1.716
525	2.1341	1.664
550	2.2357	1.284
575	2.3373	1.498
600	2.4390	1.687
625	2.5406	1.706
650	2.6422	1.765
675	2.7439	1.827
700	2.8455	1.743
725	2.9471	1.673
750	3.0487	1.492
775	3.1504	1.285
800	3.2520	1.311
825	3.3536	1.333
850	3.4552	1.434

Tabla 5.1

Diámetros adimensionales (*DA*) obtenidos a partir de las imágenes correspondientes a la acción de una onda de choque mono-pulso sobre una burbuja de aire en agua para diferentes tiempos adimensionales (*TA*) antes y después de la llegada de la onda de choque (*ND* = no determinado, el promedio de las desviaciones estándar de los diámetros presentados es de 0.2040).

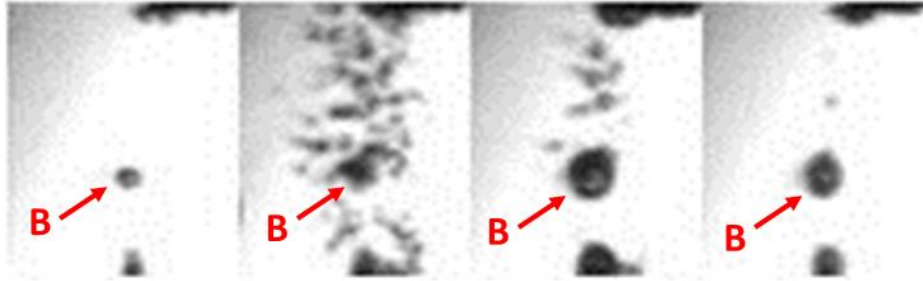


Figura 5.1

Fotografías de alta velocidad que muestran una burbuja antes (primera imagen) y algunos microsegundos después del paso de una onda de choque mono-pulso por la región de interés. En el segundo cuadro se observa la formación de una gran cantidad de burbujas de cavitación que no permite medir la burbuja de interés (B).

Los valores mostrados en la tabla 5.1 aparecen graficados en la figura 5.2. Inicialmente puede observarse que la burbuja se mantiene en reposo, hasta que incide la onda de choque, impidiendo la captura confiable de información hasta $t = 250 \mu s$. Es de suponerse que en algún instante entre 100 y 250 μs la burbuja sufre una compresión considerable, seguida de una expansión y que el máximo que se observa en la gráfica ($t = 325 \mu s$) sea el segundo máximo después de la compresión de la burbuja.

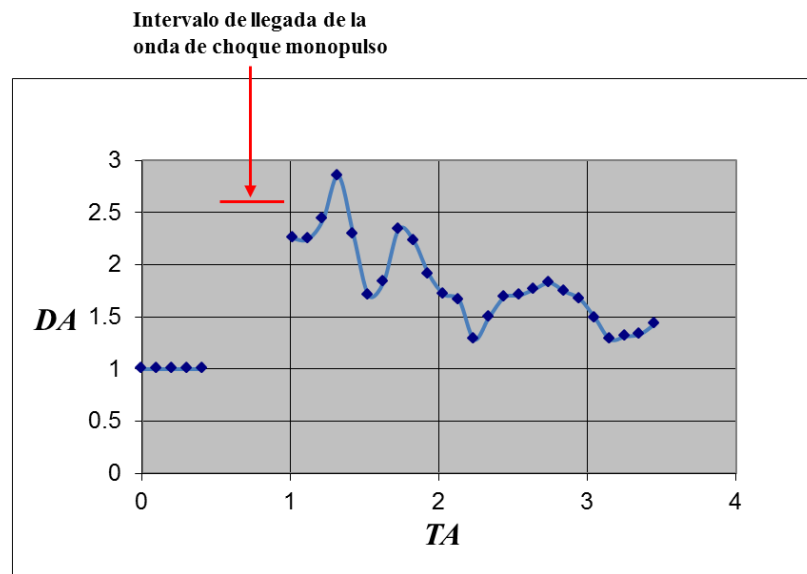


Figura 5.2

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos de las imágenes correspondientes a la acción de una onda de choque mono-pulso sobre una burbuja de aire en agua vs. tiempo adimensional (TA).

Como era de esperarse, la burbuja oscila durante varios cientos de microsegundos, para finalmente estabilizarse en un diámetro final mayor a D_0 (no mostrado en la figura 5.2).

El promedio de la desviación estándar reportado para el caso monopulso y para cada *delay*, se calculó sacando la desviación estándar de los diámetros medidos en cada uno de los tres experimentos realizados, luego se sacó el promedio de cada grupo de diámetros (normalmente 7 grupos de diámetros con los cuales se cubre hasta 750 μs) para 0, 125, 250, 375 y 500 μs y finalmente con estos promedios se sacó el promedio global (o promedio de los promedios) para cada *delay*.

5.1.2 Ondas de choque tándem

En la figura 5.3 pueden observarse los diámetros adimensionales (*DA*) de 25 imágenes registradas a diferentes tiempos antes y después de la llegada de una pareja de ondas de choque con un retardo entre la primera y la segunda onda equivalente a 239 μs . En los cinco primeros cuadros (0 a 100 μs) aparece la burbuja en equilibrio. Su posición vertical varía, ya que en realidad no se trata de la misma burbuja sino de cinco burbujas diferentes, con radio inicial similar (ver figura 4.8). La burbuja captada en 0, 125, 250, 375 y 500 μs sí es la misma burbuja. Puede observarse que su posición horizontal cambia muy poco, debido a que su velocidad de ascenso, que tuvo valores entre 289 y 694 mm/s (velocidad promedio de 496 mm/s), es relativamente pequeña. Lo mismo sucede con las imágenes de la segunda, tercera, cuarta y quinta columnas del mosaico de imágenes mostrado en la figura 5.3. La primera onda de choque incidió sobre la(s) burbuja(s) poco antes de 125 μs .

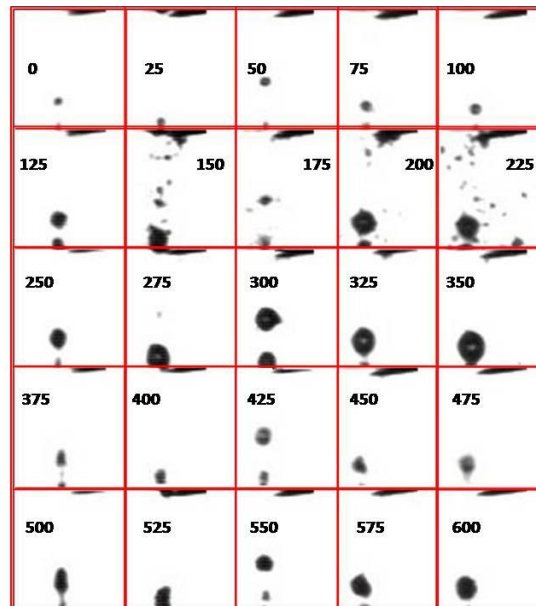


Figura 5.3

Fotografías de alta velocidad de una burbuja de aire en agua, obtenidas en diferentes tiempos antes y después del paso de una pareja de ondas de choque con retardo entre la primera y la segunda onda de 239 μs .

Esto puede afirmarse ya que en la imagen correspondiente a 125 μs la burbuja tiene un diámetro mayor al inicial, revelando que sufrió una compresión súbita, que típicamente dura menos de un microsegundo, y se encuentra en fase de expansión, que típicamente es del orden de los 3 microsegundos. Alrededor de 175 μs vuelve a colapsar. En la imagen de 200 μs se encuentra en expansión. La segunda onda de choque llega aproximadamente después de 360 μs (125 μs + 239 μs = 364 μs), motivo por el cual la burbuja aparece con un tamaño mínimo en los cuadros correspondientes a 375 μs y 400 μs . Posteriormente la burbuja oscila hasta estabilizarse en un diámetro final (no mostrado en la figura 5.3).

La tabla 5.2 muestra los diámetros promedio adimensionales obtenidos cada 25 μs , para burbujas sometidas a la acción de ondas de choque tándem con los cuatro *delays* usados (239, 257, 275 y 293 μs). Al igual que en el caso anterior, estos valores se obtuvieron midiendo los diámetros de varias burbujas, siguiendo la metodología y las definiciones descritas en el capítulo anterior. En las primeras cinco imágenes ($t = 0, 25, 50, 75$ y $100 \mu\text{s}$) la primera onda de choque todavía no llegaba y la burbuja mantuvo su diámetro inicial D_0 , por lo que $DA = 1$. Las ondas de choque incidieron sobre la burbuja en algún instante entre $t > 100 \mu\text{s}$ y $t < 125 \mu\text{s}$. De manera similar a lo sucedido con el uso de ondas mono-pulso, esto produjo cavitación acústica, limitando la visión y la medición confiable de la burbuja. Para $t \geq 250 \mu\text{s}$ nuevamente fue posible distinguir la burbuja de interés.

Tiempo (μs)	TA	DA $\Delta t = 239 \mu\text{s}$	DA $\Delta t = 257 \mu\text{s}$	DA $\Delta t = 275 \mu\text{s}$	DA $\Delta t = 293 \mu\text{s}$
0	0	1	1	1	1
25	0.1016	1	1	1	1
50	0.2032	1	1	1	1
75	0.3048	1	1	1	1
100	0.4065	1	1	1	1
125	0.5081	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>
150	0.6097	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>
175	0.7113	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>

200	0.8130	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>
225	0.9146	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>	<i>ND</i>
250	1.0162	1.593	2.568	2.919	3.130
275	1.1178	2.153	2.731	2.603	2.699
300	1.2195	2.484	2.784	3.063	2.948
325	1.3211	2.397	2.540	2.402	2.471
350	1.4227	2.526	2.559	2.792	3.200
375	1.5243	1.469	2.562	2.688	2.938
400	1.6260	1.334	2.423	2.379	2.441
425	1.7276	1.870	2.135	2.914	2.915
450	1.8292	1.604	2.797	2.754	3.014
475	1.9308	2.078	2.316	2.652	2.964
500	2.0325	1.757	1.565	1.634	1.935
525	2.1341	1.799	1.639	1.729	1.606
550	2.2357	1.637	1.540	1.629	2.064
575	2.3373	1.819	1.994	2.253	1.888
600	2.4390	1.972	1.694	1.888	1.856
625	2.5406	1.407	2.263	2.316	2.204
650	2.6422	1.232	2.228	1.796	1.912
675	2.7439	1.860	1.752	2.292	2.043
700	2.8455	1.702	2.199	1.663	1.575
725	2.9471	1.681	2.051	1.822	2.367
750	3.0487	1.613	1.922	1.847	2.206
775	3.1504	1.793	1.626	1.663	1.842

800	3.2520	1.438	1.622	2.171	2.392
825	3.3536	1.574	2.236	1.907	1.572
850	3.4552	1.713	1.564	1.733	2.532

Tabla 5.2

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos a partir de las imágenes correspondientes a la acción de una pareja de ondas de choque (tándem) sobre una burbuja de aire en agua para diferentes tiempos antes y después de la llegada de las ondas de choque.

Se obtuvieron resultados para cuatro retardos (239, 257, 275 y 293 μs) entre la primera y la segunda onda de choque. (ND = no determinado).

Los valores mostrados en la tabla 5.2 aparecen graficados en las figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7. En todos los casos la burbuja se mantiene en reposo hasta que incide la primera onda de choque, impidiendo la captura confiable de información hasta $t = 250 \mu\text{s}$. No es posible determinar el tiempo exacto de la llegada de la segunda onda de choque, sin embargo, conociendo el *delay* y observando las variaciones de tamaño de las burbujas, puede estimarse la región correspondiente a dichos arribos (ver figuras 5.4 a 5.7). Al igual que para ondas mono-pulso, después de algunos cientos de microsegundos, la burbuja permanece oscilando hasta estabilizarse en un diámetro final mayor a D_0 (no mostrado).

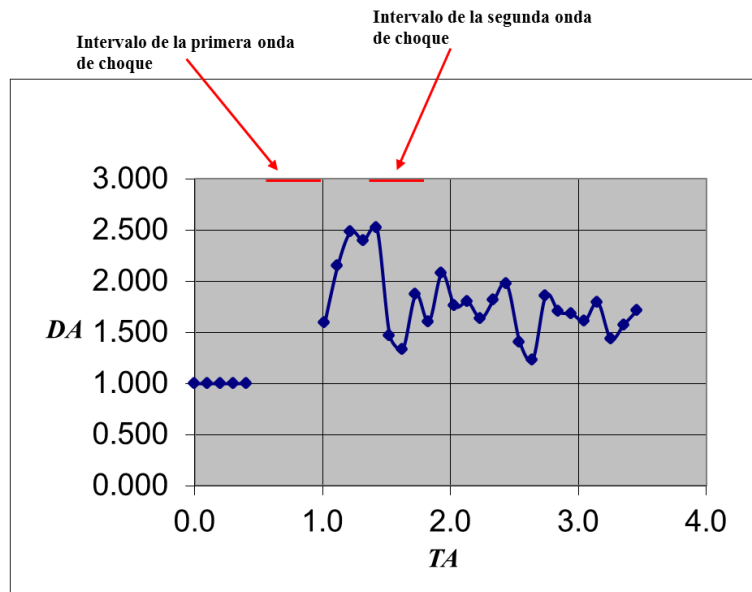


Figura 5.4

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos a partir de las imágenes correspondientes a la acción de una pareja de ondas de choque ($\text{delay} = 239 \mu\text{s}$) sobre una burbuja de aire en agua vs. el tiempo adimensional (TA), (el promedio de las desviaciones estándar de los valores presentados es de 0.238).

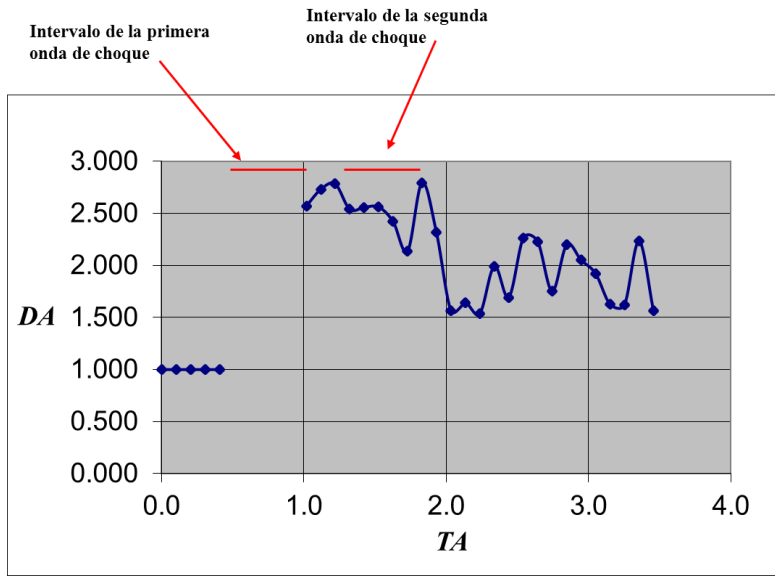


Figura 5.5

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos de las imágenes correspondientes a la acción de una pareja de ondas de choque ($delay = 257 \mu s$) sobre una burbuja de aire en agua vs. el tiempo adimensional (TA), (el promedio de las desviaciones estándar de los valores es de 0.2682).

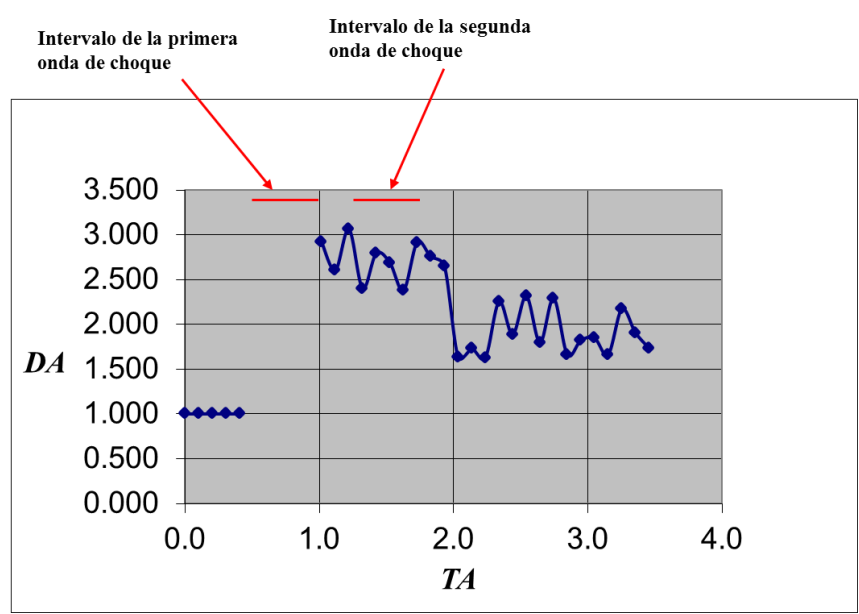


Figura 5.6

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos de las imágenes correspondientes a la acción de una pareja de ondas de choque ($delay = 275 \mu s$) sobre una burbuja de aire en agua vs. el tiempo adimensional (TA), (el promedio de las desviaciones estándar de los valores es de 0.3069).

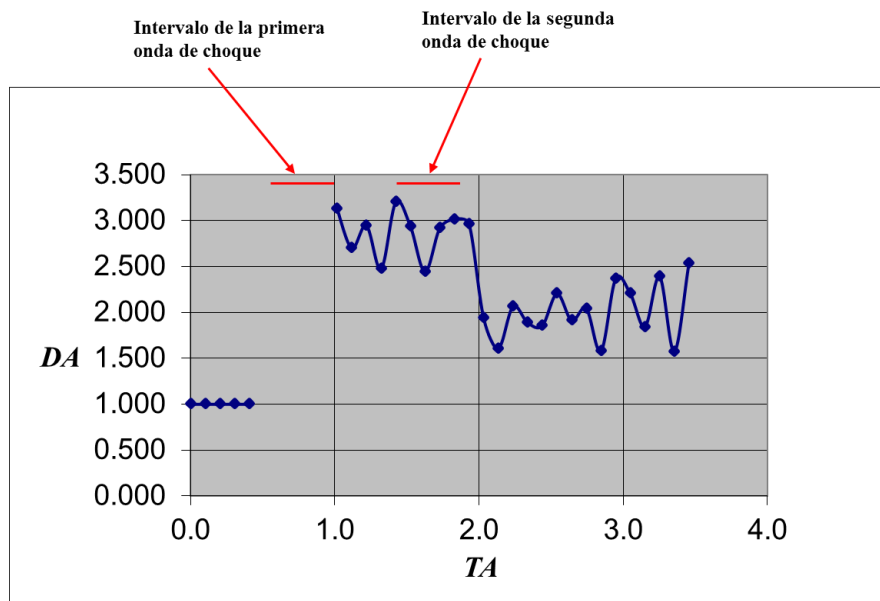


Figura 5.7

Diámetros adimensionales (DA) obtenidos de las imágenes correspondientes a la acción de una pareja de ondas de choque ($delay = 293 \mu s$) sobre una burbuja de aire en agua vs. el tiempo adimensional (TA), (el promedio de las desviaciones estándar de los valores es de 0.3768).

En la tabla 5.3 se resumieron los diámetros D iniciales, máximos y mínimos que se obtuvieron. Puede observarse que el generador de burbujas produce burbujas con diámetros que varían entre 1.23 y 1.36 mm. El diámetro máximo de todas las series se obtuvo antes de la llegada de la segunda onda de choque, exponiendo las burbujas a ondas de choque tándem con un $delay$ de 293 μs . El mínimo diámetro se registró para ondas tándem con un $delay$ de 239 μs .

Tipo de onda	D inicial (mm)	D máximo (mm)	D mínimo (mm)	Desviación estándar
Mono-pulso	1.28	3.97	1.50	0.2040
Tándem 239 μs	1.23	3.83	1.20	0.2380
Tándem 257 μs	1.24	4.10	1.83	0.2682
Tándem 275 μs	1.34	4.06	2.03	0.3069
Tándem 293 μs	1.36	5.26	1.50	0.3768

Tabla 5.3

Tabla de diámetros promedio (D) iniciales, máximos y mínimos y desviaciones estándar de las burbujas expuestas a ondas de choque mono-pulso y tándem.

5.2 Simulación numérica

Los resultados de la simulación numérica muestran que el radio de una burbuja de aire en agua, expuesta a una onda de choque mono-pulso C varía varios órdenes de magnitud (ver figura 5.8), lo que no pudo verse de los datos experimentales. En $t = 0$ la contribución de la energía de la burbuja debida a la onda de choque es cero y $R = R_0$. En el instante en el que el pulso positivo incide sobre la burbuja, esta sufre un colapso forzado, adquiriendo energía transmitida por el pulso. Después del paso de la onda de choque, la burbuja crece inercialmente hasta que el $\log_{10}(R/R_0)$ alcanza un valor máximo de 1.355 en $t = 146 \mu\text{s}$. En este instante inicia el segundo colapso (colapso inercial), ya que toda la energía cinética se ha transformado en energía potencial, es decir, el trabajo realizado sobre la burbuja por la onda de choque equivale a la energía potencial máxima adquirida por la burbuja. El segundo mínimo ($\log_{10}(R/R_0) = -1.531$) sucede $290.5 \mu\text{s}$ después de la llegada de la onda de choque. El $\log_{10}(R/R_0)$ correspondiente al segundo máximo y al tercer mínimo fueron de 0.468 y -0.731, respectivamente. Finalmente, la burbuja permanece oscilando por cientos de microsegundos hasta adquirir un radio final estable (no mostrado en la figura 5.8).

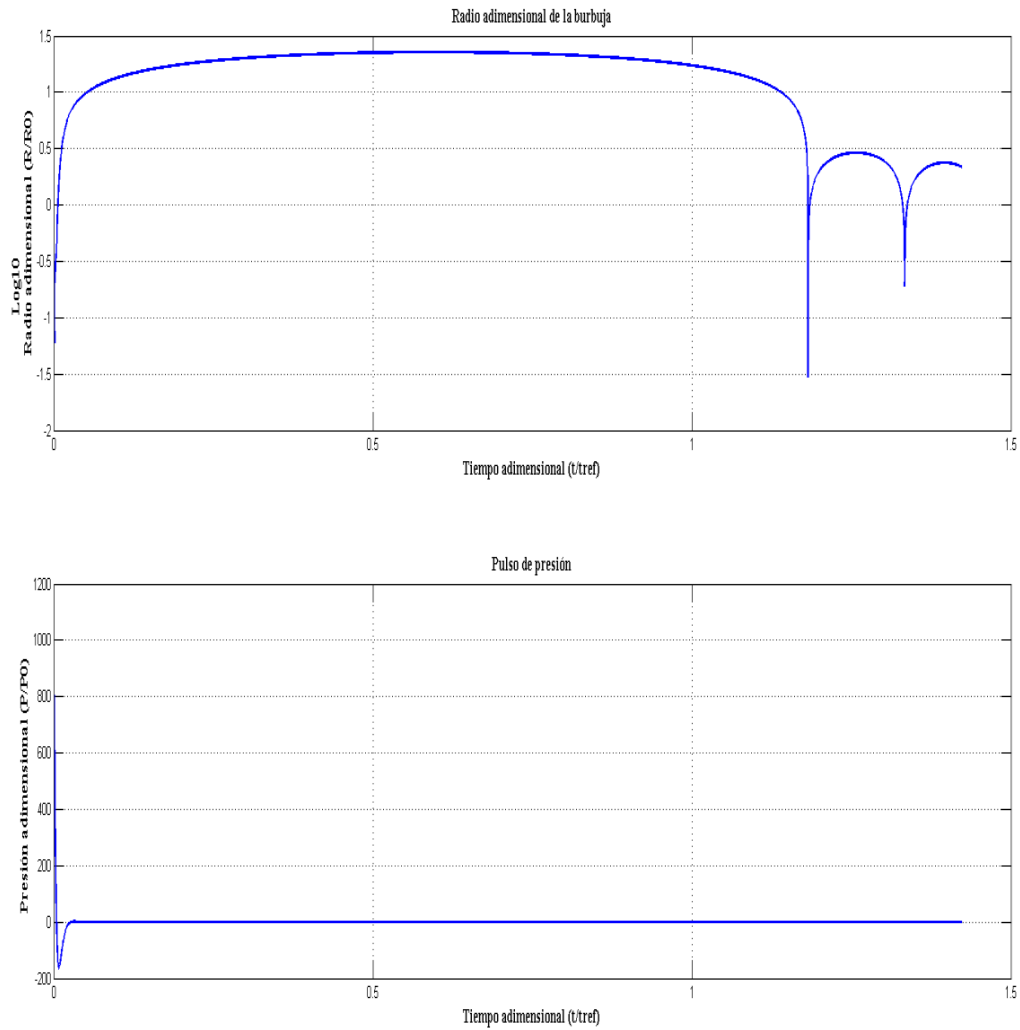


Figura 5.8

Logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de una burbuja expuesta a una onda de choque mono-pulso convencional C , en función de tiempo adimensional (TA) ($R_0 = 0.07$ mm, $\alpha = 9.1 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523$ kHz).

El comportamiento de la burbuja expuesta a una onda de choque tándem TCC con un *delay* equivalente a $290.5 \mu\text{s}$ mostró el mismo comportamiento mostrado en la figura 5.8 antes del segundo colapso. Esto se debe a que la burbuja ya había colapsado al incidir la segunda onda de choque; sin embargo, la energía depositada por la segunda onda C , aumentó el tamaño de la burbuja después del segundo colapso desde $\log_{10}(R/R_0) = 0.468$ hasta

$\log_{10}(R/R_0) = 1.354$ y el tiempo entre el segundo y tercer colapso de $37.6 \mu\text{s}$ a $289.8 \mu\text{s}$. El valor de $\log_{10}(R/R_0)$ correspondiente al tercer mínimo resultó ser -1.530 .

Con retardos menores a $290.5 \mu\text{s}$ el pulso positivo de la segunda onda de choque le impartió energía adicional a la burbuja antes del segundo colapso. Para una burbuja de 0.07 mm de radio, este efecto resultó ser máximo con un retraso (*delay*) de $287 \mu\text{s}$. Usando este retardo, se obtuvo el radio R_2 más pequeño y el valor del $\log_{10}(R/R_0)$ bajó hasta -1.677 para $t = 288.7 \mu\text{s}$. Este radio mínimo se dio $1.7 \mu\text{s}$ después de la llegada del segundo pulso C . Esto se muestra en la figura 5.9. Al repetir la simulación numérica para retardos entre ondas de choque más cortos que $287 \mu\text{s}$, el pulso positivo de la segunda onda C inhibió la expansión de la burbuja, resultando en radios R_2 más grandes.

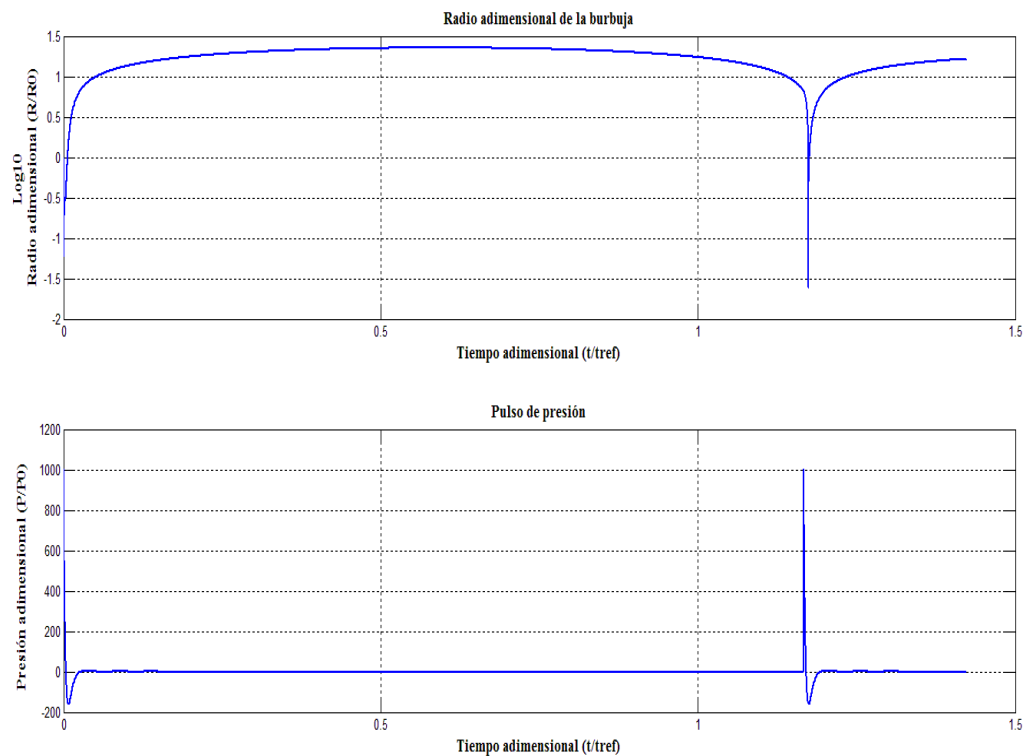


Figura 5.9

Logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de una burbuja expuesta a una onda de choque tándem TCC , en función de tiempo adimensional (TA). El retardo entre la primera y la segunda onda de choque fue de $287 \mu\text{s}$ ($R_0 = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523 \text{ kHz}$).

La dinámica de la burbuja al aplicar el perfil de presión TCS , usando un retardo de $290.5 \mu\text{s}$ entre la onda C y la onda S , se muestra en la figura 5.10. Comparando esta figura con la

figura 5.8 es evidente que se almacenó una mayor cantidad de energía en la burbuja después del segundo colapso, ya que su radio aumenta enormemente (de $\log_{10}(R/R_0) = 0.47$ a $\log_{10}(R/R_0) = 2.32$). Como consecuencia de lo anterior, el tercer colapso aparece mucho más tarde (después de aproximadamente $2960 \mu\text{s}$) y el radio final después del tercer colapso es significativamente menor ($\log_{10}(R/R_0) = -2.03$).

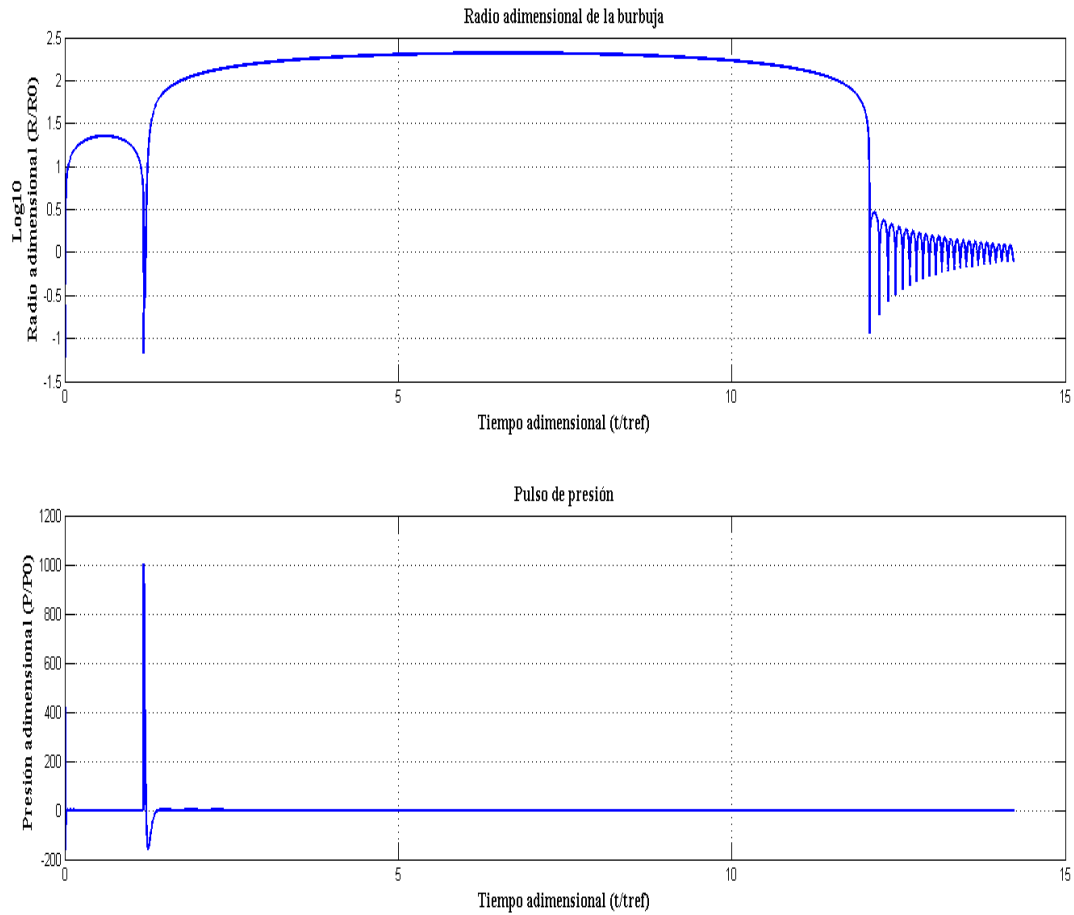


Figura 5.10

Logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de una burbuja expuesta a una onda de choque tándem modificada TCS , en función de tiempo adimensional (TA). El retardo entre la primera onda (C) y el segundo pulso (S) fue de $290.5 \mu\text{s}$ ($R_0 = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523 \text{ kHz}$).

Tal y como sucedió con el perfil de presión TCC , se requirió un *delay* menor para optimizar la energía del segundo colapso. El mínimo valor de R_2 se obtuvo para un retardo entre C y S

de $150.5 \mu\text{s}$, resultando $\log_{10}(R/R_0) = -1.989$ en $t = 157 \mu\text{s}$ (ver figura 5.11). En este caso el segundo mínimo ocurrió $6.5 \mu\text{s}$ después de la llegada del pulso S . Es recomendable comparar la figura 5.11 con la figura 5.9, que corresponde al mejor resultado obtenido usando ondas de choque tándem convencionales (TCC).

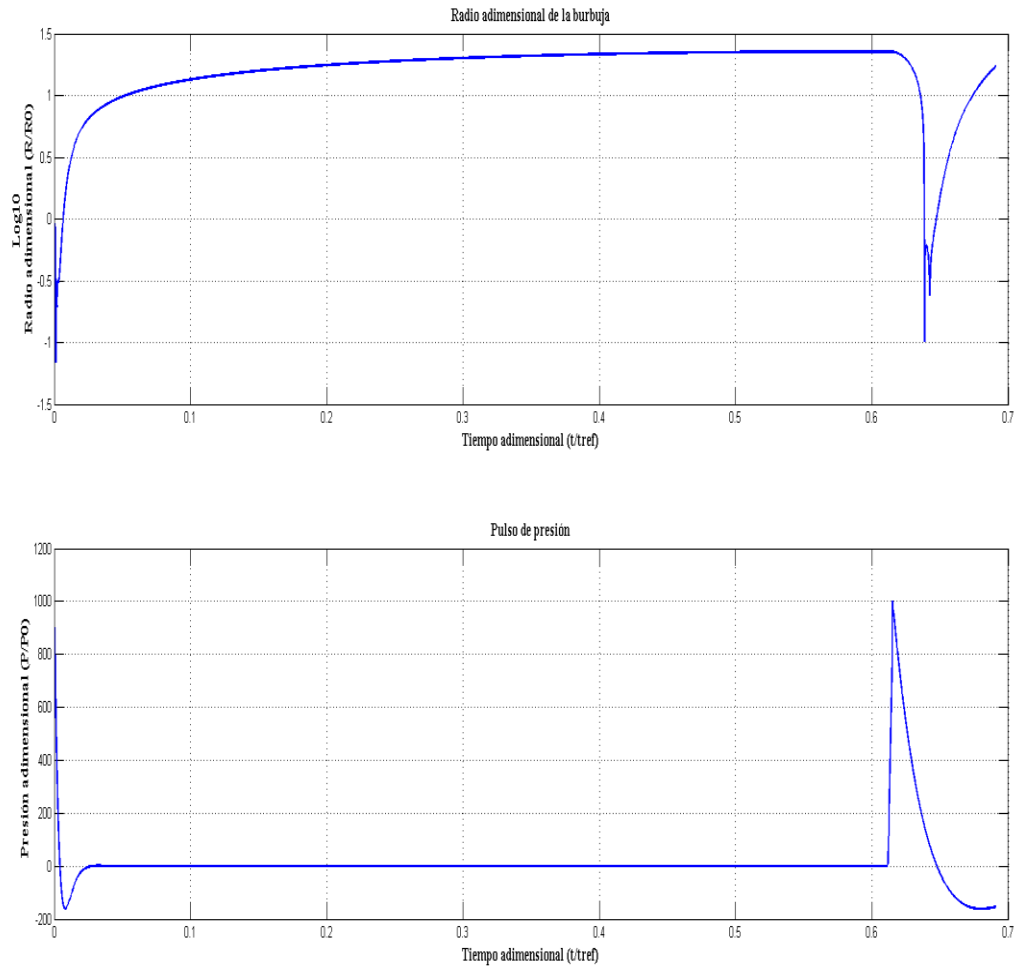


Figura 5.11

Logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de una burbuja expuesta a una onda de choque tándem modificada TCS , en función de tiempo adimensional (TA). El retardo entre la primera onda (C) y el segundo pulso (S) fue de $150.5 \mu\text{s}$ ($R_0 = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523 \text{ kHz}$).

En la figura 5.12 se muestra del resultado de someter una burbuja con un radio diez veces menor ($R_0 = 0.007 \text{ mm}$) a una onda de choque tándem modificada. Comparando este resultado de ($\log_{10}(R/R_0) = 3.3$) correspondiente al radio R_2 con el de ($\log_{10}(R/R_0) = 2.3$)

para ($R_0 = 0.07$ mm), queda claro que el de la burbuja pequeña supera significativamente al incremento correspondiente a la burbuja mayor.

Tal y como sucedió con las burbujas de radio inicial $R_0 = 0.07$ mm, para las burbujas pequeñas ($R_0 = 0.007$ mm), el perfil *TCS* fue significativamente más eficiente que el *TCC*.

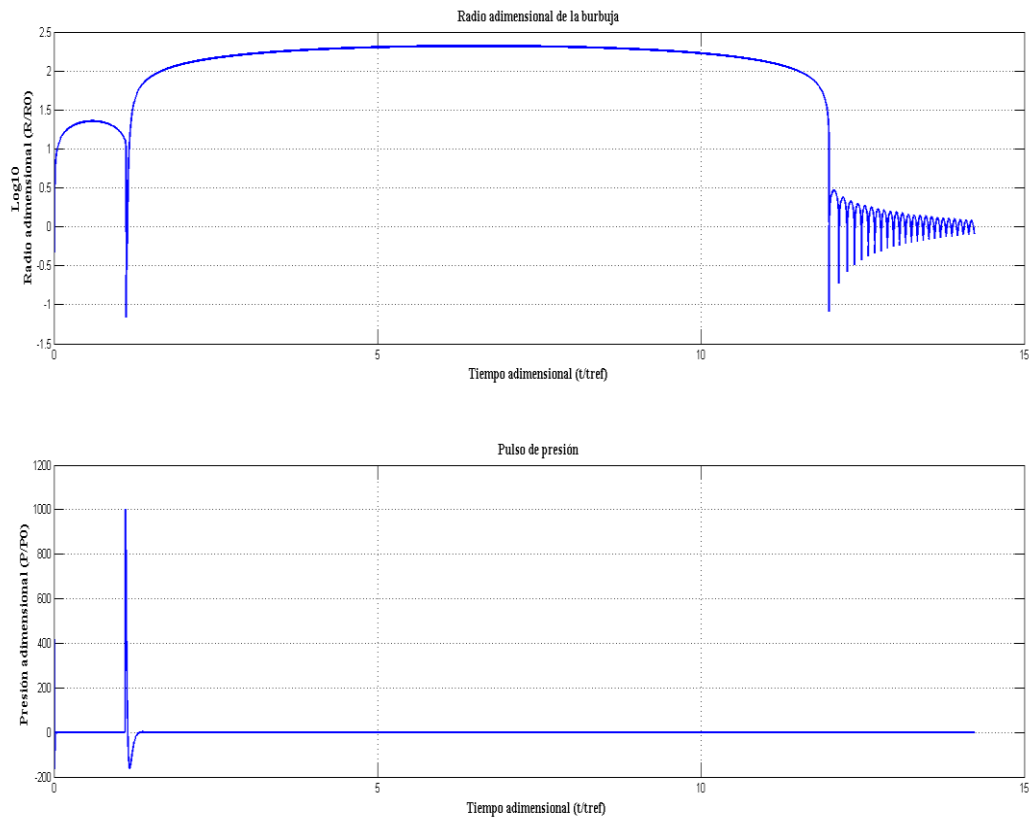


Figura 5.12

Logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de una burbuja expuesta a una onda de choque tándem modificada (*TCS*), en función de tiempo adimensional (TA). El retardo entre la primera onda (C) y el segundo pulso (S) fue de $271.14 \mu\text{s}$ ($R_0 = 0.007$ mm, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523$ kHz).

Al repetir la simulación numérica para ondas de choque tándem modificadas *TCS* reduciendo la amplitud del pulso S en un 50% resultó una reducción del $\log_{10}(R/R_0)$ para R_2 de 2.03 a 1.91.

Corriendo las simulaciones numéricas con $\alpha = 3.5 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ y $f = 50 \text{ kHz}$, los *delays* (retardos) óptimos resultaron ser mayores. En todos los casos, el perfil de presión *TCS* fue más eficiente que el *TCC*, es decir, generó radios R_2 más pequeños.

En la figura 5.13 se muestra una gráfica de R_2/R_0 en función del retardo entre la primera y segunda onda de choque, tanto para ondas tándem convencionales *TCC* como para ondas tándem modificadas *TCS*. Puede observarse que para cada *delay*, el cociente R_2/R_0 resultó ser menor para el perfil *TCS* que el mejor valor (R_2/R_0 más pequeño) obtenido con ondas *TCC*. Con el perfil de presión *TCS* se obtuvieron radios R_2 pequeños en un rango relativamente amplio de retardos (aproximadamente 50 a 250 μs), en cambio para ondas *TCC*, R_2 es significativamente más pequeño en un intervalo de retardos muy estrecho (aproximadamente 270 a 285 μs). El mismo comportamiento se observó para burbujas con radio inicial R_0 de 0.7 mm y 0.007 mm.

La figura 5.13 presenta una forma de evaluar la efectividad de la segunda onda de choque en función de la relación R_2/R_0 vs. el tiempo adimensional. Otra forma de evaluar la efectividad del colapso de cavitación, se puede dar en función del ruido de cavitación y la presión acústica [1].

El colapso violento de las burbujas de cavitación produce ruido y daño en las superficies de los materiales sólidos circundantes a la burbuja. El ruido es una consecuencia momentánea de las grandes presiones que se generan cuando los gases contenidos dentro de la burbuja se comprimen fuertemente. El flujo en el líquido causado por el volumen desplazado por una cavidad en crecimiento o en colapso se puede considerar que depende sólo de la variación de la presión y puede calcularse a partir de la ecuación (79) del apéndice A

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{r^2} \frac{dC}{dt} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^4} \quad (79)$$

en donde el primer termino de la derecha, llamado el termino de inestabilidad inercial, es el dominante, ya que decae más lentamente con respecto al radio que el segundo término.

Si el volumen de la cavidad en función del tiempo se designa como $V(t)$ y se sustituye su valor en la ecuación (50) del apéndice A

$$C(t) = R^2 \frac{dR}{dt}, \quad (50)$$

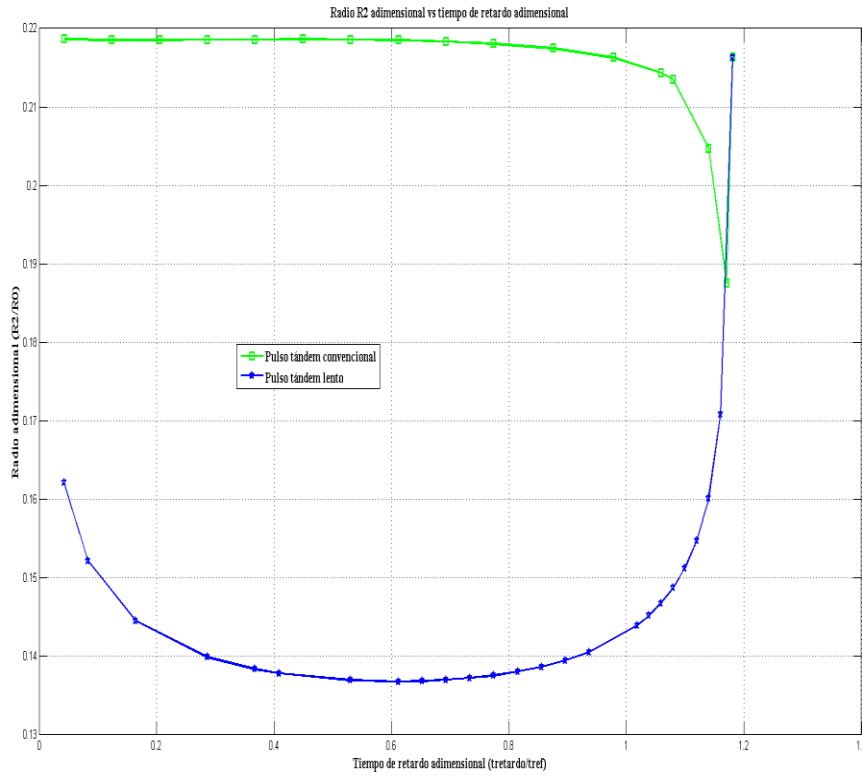


Figura 5.13

Gráfica del radio R_2 normalizado de una burbuja sometida a ondas de choque tándem convencionales (TCC) y modificadas (TCS) en función del retardo entre la primera y segunda onda ($R_0 = 0.07$ mm, $\alpha = 9.1 \times 10^5$ s $^{-1}$; $\omega = 523$ kHz).

la componente de la presión en el lado lejano de la burbuja, conocida como presión acústica radiada, se evalúa en $r = R$ como

$$p_a = \frac{\rho_L}{4\pi R} \frac{d^2V(t)}{dt^2} \quad (51)$$

y ya que el ruido de cavitación, evaluado como la magnitud de la presión acústica p_a , es proporcional a la segunda derivada del volumen de la burbuja con respecto al tiempo, está claro que el pulso de ruido generado por el colapso de la burbuja será máximo cuando $d^2V(t)/dt^2$ sea máximo y positivo, lo que ocurre cuando la burbuja se reduce a su tamaño mínimo.

La figura 5.14 presenta una gráfica de la presión acústica adimensional y del radio adimensional de la burbuja para un pulso de presión convencional para una burbuja sometida a una sola onda de choque. La burbuja estaría bajo las mismas condiciones que la que se presentó en la figura 5.8.

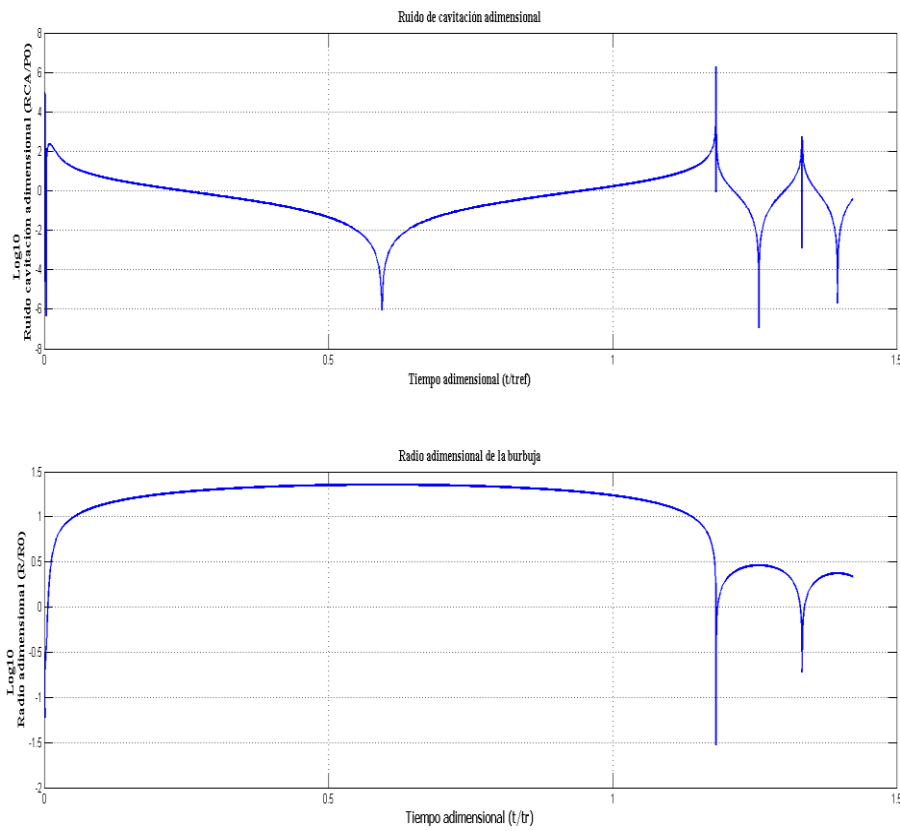


Figura 5.14

Gráfica superior: presión acústica adimensional de una burbuja sometida a una onda de choque mono-pulso convencional C , en función de tiempo adimensional ($R_0 = 0.07$ mm, $\alpha = 9.1 \times 10^5$ s⁻¹; $\omega = 523$ kHz). Gráfica inferior: logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de la misma burbuja con respecto al tiempo adimensional.

La figura 5.15 presenta una gráfica de la presión acústica adimensional y del radio adimensional de la burbuja sometida a los pulsos de presión de una serie de ondas tándem convencionales TCC . La burbuja estaría bajo las mismas condiciones que la que se presentó en la figura 5.9.

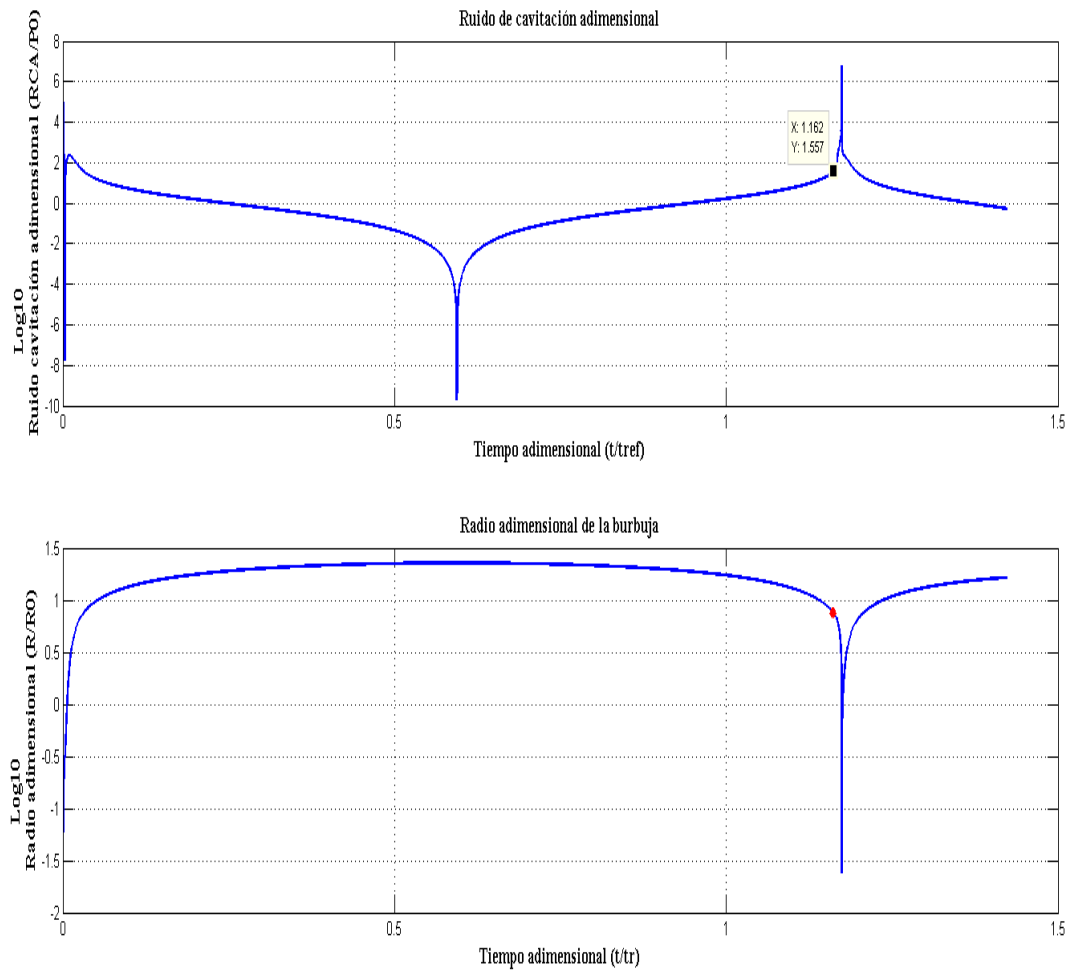


Figura 5.15

Gráfica superior: presión acústica adimensional de una burbuja sometida a una pareja de ondas tándem convencionales *TCC*, en función de tiempo adimensional ($R_0 = 0.07$ mm, $\alpha = 9.1 \times 10^5$ s $^{-1}$; $\omega = 523$ kHz). Gráfica inferior: logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de la misma burbuja con respecto al tiempo adimensional. La marca negra en la gráfica superior indica la llegada de la segunda onda de choque y corresponde a la marca roja de la grafica inferior. Los tiempos correspondientes son $TA = 1.16$ y $t = 286$ μ s.

La figura 5.16 es una gráfica de la presión acústica adimensional y del radio adimensional de la burbuja sometida a los pulsos de presión de una serie de ondas tándem convencionales *TCS*. La burbuja estaría bajo las mismas condiciones que la que se presentó en la figura 5.10.

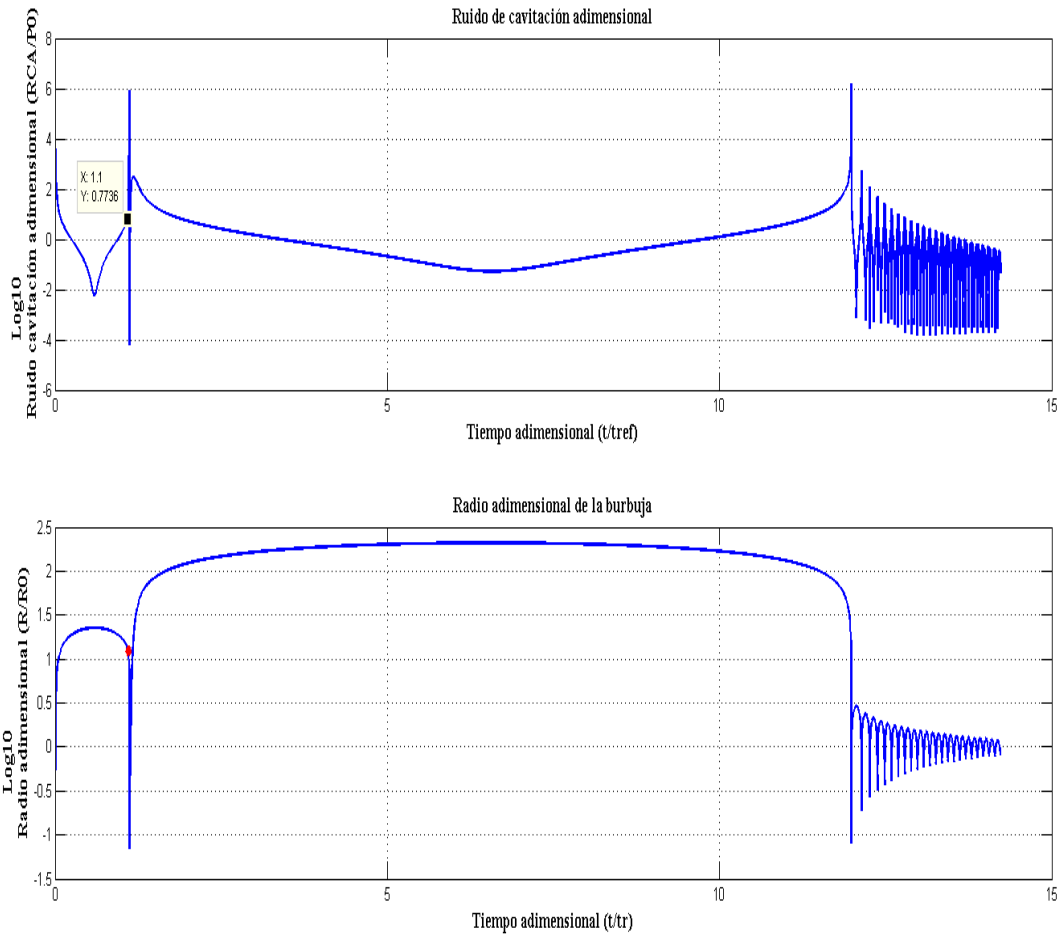


Figura 5.16

Gráfica superior: presión acústica adimensional de una burbuja sometida a una serie de ondas tándem *TCS*, en función de tiempo adimensional ($R_0 = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523 \text{ kHz}$). Gráfica inferior: logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de la misma burbuja con respecto al tiempo adimensional. La marca negra en la gráfica superior indica la llegada de la segunda onda de choque y corresponde a la marca roja de la grafica inferior. Los tiempos correspondientes son $TA = 1.10$ y $t = 271.14 \text{ }\mu\text{s}$.

La figura 5.17 es una gráfica de la presión acústica adimensional y del radio adimensional de la burbuja sometida a los pulsos de presión de una serie de ondas tándem convencionales *TCS*. La burbuja estaría bajo las mismas condiciones que la que se presentó en la figura 5.11.

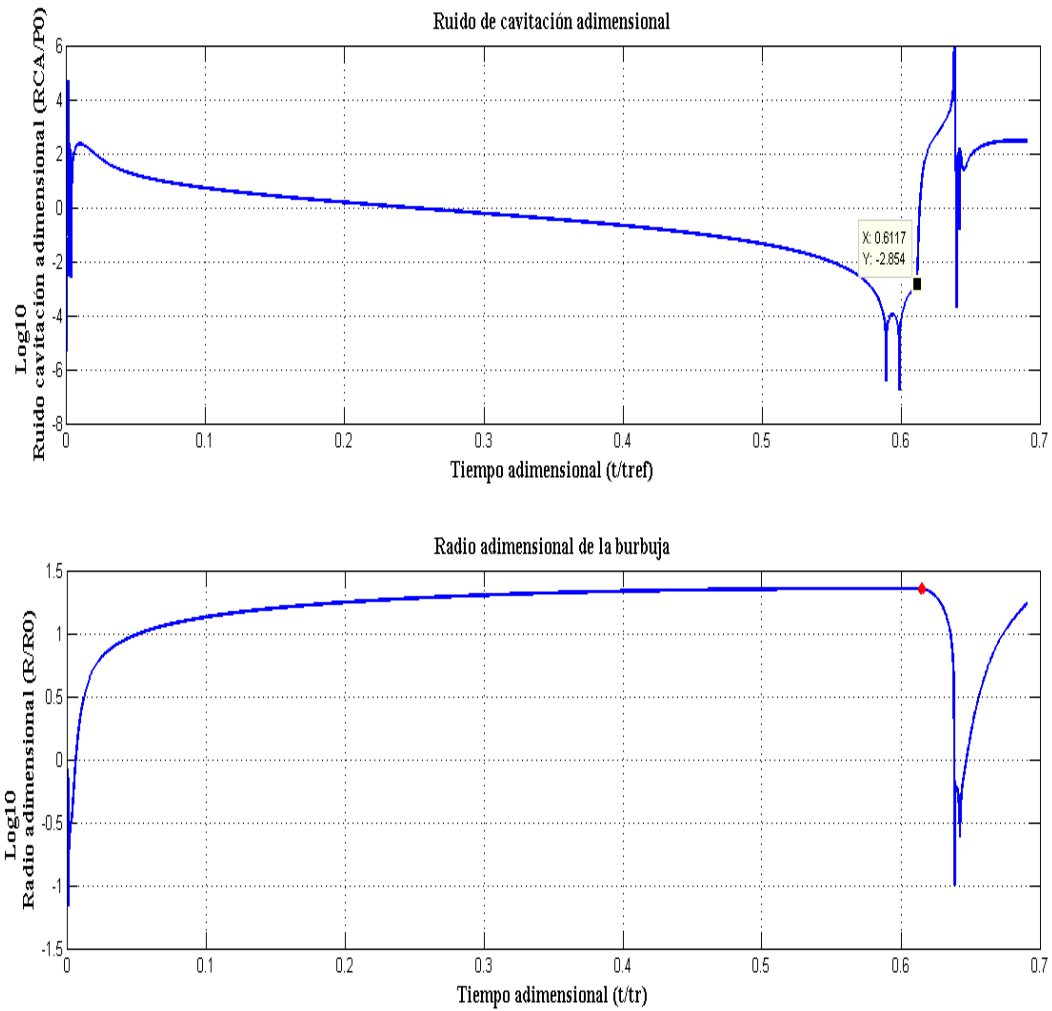


Figura 5.17

Gráfica superior: presión acústica adimensional de una burbuja sometida a una serie de ondas tándem *TCS*, en función de tiempo adimensional ($R_0 = 0.07 \text{ mm}$, $\alpha = 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 523 \text{ kHz}$). Gráfica inferior: logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de la misma burbuja con respecto al tiempo adimensional. La marca negra en la gráfica superior indica la llegada de la segunda onda de choque y corresponde a la marca roja de la grafica inferior. Los tiempos correspondientes son $TA = 0.61$ y $t = 150.5 \text{ }\mu\text{s}$.

La figura 5.18 es una gráfica de la presión acústica adimensional y del radio adimensional de la burbuja sometida a los pulsos de presión de una serie de ondas tándem convencionales *TCS*. La burbuja estaría bajo las mismas condiciones que la que se presentó en la figura 5.12.

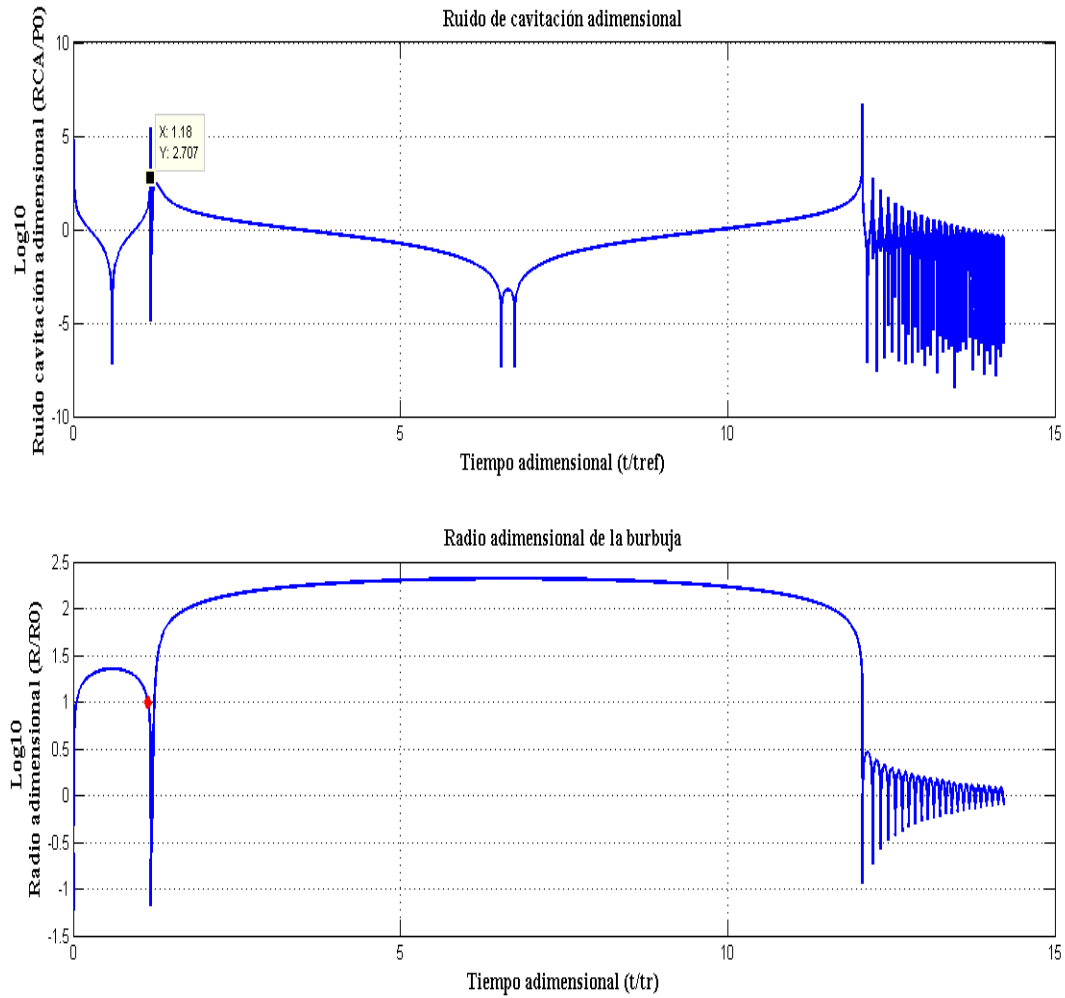


Figura 5.18

Gráfica superior: presión acústica adimensional de una burbuja sometida a una serie de ondas tándem *TCS*, en función de tiempo adimensional ($R_0 = 0.007$ mm, $\alpha = 9.1 \times 10^5$ s⁻¹; $\omega = 523$ kHz). Gráfica inferior: logaritmo base 10 del radio R (normalizado) de la misma burbuja con respecto al tiempo adimensional. La marca negra en la gráfica superior indica la llegada de la segunda onda de choque y corresponde a la marca roja de la grafica inferior. Los tiempos correspondientes son $TA = 1.18$ y $t = 290.5$ μ s.

En el apéndice D puede consultarse el listado de los programas utilizados para la simulación numérica de este proyecto.

Referencias

1. Brennen E C, Cavitation and Bubble Dynamics (Oxford University Press), 1995, (3.8) pp. 96.

CAPÍTULO 6

Discusión

El estudio de la interacción de ondas de choque con burbujas inmersas en un fluido es de interés en medicina y biología molecular. Así, por ejemplo, la formación de burbujas y su consecuente colapso contribuye a pulverizar cálculos urinarios muy duros; sin embargo, la cavitación acústica también genera daños a los tejidos del paciente, motivo por el cual es deseable tener un control efectivo sobre este fenómeno [1-5]. Con la finalidad de comprender mejor los fenómenos involucrados en la formación y el colapso de burbujas sometidas al paso de ondas de choque y cumplir con el objetivo de esta tesis, como ya se mencionó en la sección 4.1, se filmaron burbujas en agua y se realizaron simulaciones numéricas.

El análisis experimental de la dinámica de una burbuja de aire sometida a la acción de ondas de choque en agua, se dificultó por dos motivos: El primero fue la falta de una cámara digital más rápida y el segundo, la súbita generación de una nube de burbujas al paso de cada onda de choque, impidiendo la visión de la burbuja de interés por aproximadamente 150 μs . La carencia de una cámara más rápida trató de resolverse superponiendo imágenes desfasadas en tiempo, provenientes de varias burbujas expuestas a ondas de choque, sin cambiar los parámetros experimentales. Esta metodología incrementa notablemente el tiempo de experimentación, pero – en principio – permite el análisis de la reacción de una burbuja a la acción de una onda de choque en intervalos de 25 μs . La formación de una gran cantidad de burbujas alrededor de la burbuja que se deseaba grabar, impidió observar las variaciones del tamaño de la burbuja bajo estudio justamente en el instante más importante, es decir, durante el paso de la, o las, ondas de choque por el foco F . En un futuro, este inconveniente podría resolverse usando agua purificada y desaerada, con un bajo contenido de núcleos de cavitación (impurezas que propician la generación de burbujas), microburbujas y aire disuelto.

El funcionamiento del generador de burbujas fue satisfactorio. La máxima variación en el diámetro D de las burbujas fue de 0.13 mm. En las figuras 5.2, 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 puede apreciarse que, por los motivos descritos, entre $t = 100 \mu\text{s}$ y $t = 250 \mu\text{s}$ no se cuenta con información sobre el diámetro de la burbuja. En todos los casos, la primera onda de choque llegó entre $t = 100 \mu\text{s}$ y $t = 125 \mu\text{s}$. Esta incertidumbre de 25 μs también se tiene con respecto a la llegada de la segunda onda de choque. Así, por ejemplo, en la modalidad tándem con retardo de 239 μs , la segunda onda de choque llegó a F aproximadamente entre $t = 339 \mu\text{s}$ y $t = 364 \mu\text{s}$. En la figura 5.4 puede distinguirse una reducción súbita del diámetro de la burbuja alrededor de los 360 μs . Dicha reducción coincide con la llegada de

la segunda onda de choque, bajando el diámetro a un valor menor ($DA = 1.334$) que el diámetro ($DA = 1.708$) medido para la onda mono-pulso (figura 5.2). Al analizar todas las gráficas provenientes de ondas de choque tándem, se concluye que el segundo colapso tardó más al aumentar el retardo entre las ondas de choque. Para retardos de 239, 257, 275 y 293 μs el segundo mínimo apareció aproximadamente en $t = 400, 500, 500$ y $520 \mu\text{s}$ respectivamente. Es probable que las fluctuaciones menores en el diámetro de las burbujas que pueden observarse en las figuras 5.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 sean un artificio de la metodología usada y no representen un fenómeno físico.

En vista de las complicaciones experimentales mencionadas, se le dio mayor énfasis a la simulación numérica de la dinámica de una burbuja en agua, cuyos resultados revelaron fenómenos novedosos y de interés práctico. El algoritmo usado fue comparado con los resultados obtenidos por Church [8] para una burbuja del mismo radio ($R_0 = 0.3 \times 10^{-3} \text{ mm}$) expuesta a la misma onda de choque. La gráfica del $\log_{10} (R/R_0)$ vs tiempo resultó idéntica.

Como se mencionó anteriormente, la ecuación de Gilmore ha sido usada por diferentes autores para simular las variaciones del radio de una burbuja sujeta a los cambios de presión de un generador de ondas de choque clínico [8-11]. Una de las suposiciones que se hacen al aplicar esta ecuación es que R_0 es mucho menor que el espesor del pulso de presión. El radio de burbuja más grande $R_0 = 0.07 \text{ mm}$ usado en esta tesis es 36 veces menor que el ancho del pulso (aproximadamente 2.5 mm). No se tomó en cuenta la difusión de gas hacia el interior de la burbuja (y viceversa). Debido a que los pulsos de presión modelados son descripciones matemáticas, el error por no considerar los efectos de difusión es menor que el error debido a la elección de un perfil de presión ideal en lugar de uno real.

Para las presiones usadas en esta tesis, la ecuación de van der Waals podría haber arrojado resultados más precisos, sin embargo, esto hubiera complicado la simulación e incrementado los tiempos de cómputo. En vista de que el objetivo de esta tesis fue analizar si, en principio, el uso de ondas de choque tándem modificadas podría aumentar los efectos de cavitación y, con ello, la fragmentación de cálculos urinarios, se optó por el uso de la ecuación de Gilmore (sección 4.3). Otro argumento importante a favor del uso de la ecuación seleccionada son varias publicaciones sobre simulaciones de la dinámica de una burbuja expuesta a ondas de choque generadas con litotritores, usándose la ecuación de Gilmore, contra las cuales se pueden comparar los resultados aquí obtenidos [8-12].

Como se vio en el capítulo 5, en la vecindad de un cálculo, una burbuja no oscila varias veces hasta adquirir el equilibrio. En lugar de ello sufre un colapso, con la consecuente generación de una onda de choque secundaria y la emisión de un microjet de fluido. El radio de burbuja máximo después del paso de una onda de choque puede ser usado como una medida del trabajo hecho por la onda de choque sobre la burbuja, es decir, del daño potencial que puede generar la burbuja al colapsar. Al estudiar la dinámica de una burbuja sujeta a la acción de ondas tándem no tiene sentido hacer esto, ya que la segunda onda de

choque llega después de que la burbuja adquiere su radio máximo. Debido a ello, en esta tesis se seleccionó el radio mínimo (R_2) del segundo colapso como medida de la capacidad que tiene cierto perfil de presión para aumentar la energía de colapso de la burbuja. Entre más pequeño resulte R_2 o $\log_{10}(R/R_0)$, mayor es el potencial de ese perfil de presión para producir daño vía cavitación. En una simulación numérica también puede usarse el tiempo entre el segundo y el tercer colapso de la burbuja como medida del potencial de cierto perfil de presión (tándem o mono-pulso) para aumentar la energía de colapso de la burbuja.

Los resultados obtenidos sugieren que es posible obtener radios R_2 más pequeños y ciclos de expansión y colapso más largos usando ondas de choque convencionales, siempre y cuando la segunda onda de choque incida sobre la burbuja antes de que inicie su colapso. Esto concuerda con los resultados reportados por otros autores [12]. La contribución más importante de esta tesis fue demostrar que el nuevo perfil de presión propuesto (onda de choque tándem modificada) genera radios R_2 considerablemente más bajos, aumentando la energía de los microjets. Es de esperarse que el uso de este perfil de presión aumente la eficiencia de pulverización de cálculos renales durante un tratamiento de litotricia extracorpórea.

Otra medición del daño potencial que puede generar una burbuja al colapsar se basa en la teoría del ruido de cavitación o presión acústica radiada reportada por Brennen y otros autores [16].

Es importante tener en mente que las simulaciones numéricas reportadas aquí se basan sólo en una burbuja esférica, inmersa en un fluido homogéneo e infinito. En realidad, cada onda de choque produce una nube de burbujas y el colapso de una burbuja en agua es influenciado por la existencia de las burbujas vecinas y por la interfase líquido-cálculo renal. A pesar de esto, los resultados obtenidos son una guía útil en el diseño de perfiles de presión más eficientes para su uso en litotricia extracorpórea y otras aplicaciones.

Los resultados obtenidos al reducir el radio de la burbuja de $R_0 = 0.07$ mm a $R_0 = 0.007$ mm, mostraron que el *delay* óptimo entre parejas de ondas de choque en la nueva modalidad tándem varía muy poco al cambiar el radio inicial. Esta observación es de gran importancia práctica ya que en un caso clínico los radios de las microburbujas presentes en la vecindad del cálculo varían. Una de las ventajas de usar ondas de choque tándem modificadas es el hecho de que con este perfil de presión es posible aumentar la energía de colapso de las burbujas para un rango de retardos mucho mayor. Las ondas tándem convencionales generan los mejores resultados, es decir los radios R_2 más pequeños, sólo para un rango de retardos muy estrecho (de aproximadamente 270 a 285 μ s); sin embargo, las ondas tándem modificadas generan radios R_2 mucho menores para un rango muy amplio de retardos (aproximadamente 10 a 280 μ s). El perfil de presión *TCS* produce colapsos de burbuja más violentos que el *TCC* para cualquier *delay*.

En la práctica clínica es posible que al incidir una onda de choque en la vecindad de un cálculo renal, aún existan fragmentos de burbujas y núcleos de cavitación provenientes de la onda de choque anterior, que pueden disminuir la amplitud del pulso negativo incidente [13]. Esto indica la relevancia dependerá en gran medida de la frecuencia de aplicación de las ondas de choque en la efectividad de un sistema. Experimentos de fractura de modelos de cálculos renales *in vitro* podrían ser de utilidad para estudiar la influencia de la frecuencia de aplicación de ondas de choque en la eficiencia de fractura al usar perfiles de presión *TCC* y *TCS*.

A pesar de que en esta tesis sólo se estudió la dinámica de las burbujas para dos radios iniciales, es de suponerse que las conclusiones principales sean válidas para burbujas de tamaños muy variados.

La ventaja de usar un generador piezoeléctrico es que con este sistema es posible ajustar los parámetros del perfil de presión con sólo modificar la excitación de los cristales piezoeléctricos. Estudios recientes han mostrado que no es factible producir ondas de choque tándem con un generador de ondas de choque electrohidráulico [14]. Esto se debe a que la burbuja de plasma entre los electrodos no ha desaparecido antes de que se debiera producir la siguiente onda de choque. En el caso de los generadores electromagnéticos sí es posible emitir dos ondas de choque con retardos suficientemente cortos para producir ondas tándem [15]. Como el tiempo que requieren los cristales piezoeléctricos para regresar a su condición inicial es menor a un microsegundo, sí es posible emitir ondas de choque tándem con generadores piezoeléctricos. En un litotritor piezoeléctrico comercial obviamente sería necesario incluir un capacitor con los componentes para su carga y descarga controlada. Esta modificación no es complicada y podría hacerse en cualquier litotritor piezoeléctrico en un tiempo corto, sin necesidad de retirarlo del hospital o modificar su diseño general.

Dado un ancho de pulso de compresión de 2.5 mm y una velocidad de la onda de 1493.2 m/s [17], el tiempo que se mantiene la compresión en una burbuja es del orden de 1.7 ns. Como este tiempo es menor que la duración del colapso de una burbuja (aproximadamente 600 μ s), se pensó en aumentar la duración del pulso positivo de la segunda onda de choque.

Referencias

1. Lokhandwalla M, Sturtevant B, Fracture mechanics model of stone comminution in ESWL and implications for tissue damage *Physics in Medicine and Biology* 2000, 45, pp. 1923-1949.

2. Arora M, Junge L, Ohl C D, Cavitation cluster dynamics in shock-wave lithotripsy. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 2005, 31(6), pp. 827-839.
3. Evan A P, Willis L R, Lingeman J E, Shock Wave Lithotripsy (SWL) induces significant structural and functional changes in the kidney, *Journal of the Acoustical Society of America*, 2003, 114(4), pp. 2454.
4. Evan A P, Willis L R, McAteer J A, Bailey M R, Connors B A, Shao Y, Lingeman J E, Williams J C Jr, Fineberg N S, Crum L A, Kidney damage and renal functional changes are minimized by waveform control that suppresses cavitation in SWL, *The Journal of Urology*, 2002, 168, pp. 1556-1562.
5. Fernández F, Fernández G, Loske A M, Treatment time reduction using tandem shockwaves for lithotripsy: an *in vivo* study, *Journal of Endourology*, 2009, 23(8), pp. 1247-1253.
6. Álvarez U M, Ramírez A, Fernández F, Méndez A, Loske A M, The influence of single-pulse and tandem shock waves on bacteria, *Shock Waves*, 2008, vol. 17, pp. 441-447.
7. Loske A M, Campos-Guillen J, Fernández F, Castaño-Tostado E, Enhanced shock wave-assisted transformation of *Escherichia coli*, *Ultrasound in Medicine and Biology*, 2011, 37 (3), pp. 502-510.
8. Church C C, A theoretical study of cavitation generated by an extracorporeal shock wave lithotripter, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, 86, pp. 215–227.
9. Zhu S, Zhong P, Shock wave-inertial microbubble interaction: a theoretical study based on the Gilmore formulation for bubble dynamics, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1999, 106, pp. 3024–3033.
10. Choi M J, Coleman A J, Saunders J E, The influence of fluid properties and pulse amplitude on bubble dynamics in the field of a shock wave lithotripter, *Physics in Medicine and Biology*, 1993, 38, pp. 1561–1573.
11. Matula T J, Hilmo P R, Storey B D, Szeri A J, Radial response of individual bubbles subjected to shock wave lithotripsy pulses *in vitro*, *Physics of Fluids*, 2002, 14, pp. 913–921.
12. Zhong P, Cocks F H, Cioanta I, Preminger G M, Controlled, forced collapse of cavitation bubbles for improved stone fragmentation during shock wave lithotripsy, *The Journal of Urology*, 1997, 158, pp. 2323–2328.

13. Pishchalnikov Y A, Sapozhnikov O A, Bailey M R, Pishchalnikova I V, Williams J C, McAteer J A, Cavitation selectively reduces the negative pressure phase of lithotripter shock pulses, *Acoustics Research Letters Online*, 2005, 6, pp. 280–286.
14. Fernández E, “Temporalidad de los fenómenos físicos involucrados en la generación electrohidráulica de ondas de choque”, Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias UNAM, 2012.
15. Huber P, Debus J, Jöchle K, Simiantonakis I, Jenne J, Rastert R, Spoo J, Lorenz W J, Wannemacher M, Control of cavitation activity by different shockwave pulsing regimes, *Physics in Medicine and Biology*, 1999, 44, pp. 1427–1437.
16. Brennen E C, *Cavitation and Bubble Dynamics* (Oxford University Press), 1995, (3.8) pp. 96.
17. Alonso M, Finn J E, *Física, Vol. II*, (Addison Wesley Longman, Pearson), 1998, pp. 735.

CAPÍTULO 7

Conclusiones y recomendaciones

Para estudiar la dinámica de una burbuja en agua sometida a ondas de choque, se requiere de una cámara de alta velocidad con capacidad de registrar del orden de 10^5 a 10^6 cuadros por segundo. Con este tipo de cámaras se pueden analizar fenómenos hidrodinámicos, tales como los colapsos de las burbujas sometidas a ondas de choque y los microchorros que se forman.

Para reducir la formación de nubes de burbujas al paso de la onda de choque se recomienda usar agua con un bajo contenido de gases disueltos y núcleos de cavitación.

Las simulaciones numéricas realizadas indican que las ondas de choque tándem modificadas pueden poseer ventajas significativas con respecto a las ondas tándem convencionales.

De acuerdo con los resultados presentados en el capítulo 5, hay evidencia, aunque puede considerarse aún incipiente, de que la hipótesis establecida en la sección 1.2 es verdadera. Los resultados de las simulaciones numéricas indican que se justifica invertir recursos en la evaluación *in vitro* e *in vivo* de ondas de choque tándem modificadas para la fractura de cálculos renales. En un futuro, este tipo de perfil de presión podría mejorar los resultados de los tratamientos de litotricia extracorpórea. Independientemente de lo anterior, el uso de ondas de choque tándem modificadas puede ser de beneficio para otras aplicaciones como, por ejemplo, la transfección de células con ondas de choque.

Hidrodinámica de una burbuja y cavitación acústica

En este capítulo se deriva la ecuación de continuidad usada para analizar el principio de conservación de la materia aplicado al flujo de fluidos, a la cavitación acústica y al comportamiento dinámico de las burbujas. En seguida se deriva la ecuación de Euler para estudiar el movimiento de un fluido ideal y posteriormente se generaliza la ecuación de Euler considerando la viscosidad, para llegar finalmente a las ecuaciones de Navier-Stokes. Una vez derivadas las ecuaciones de Navier-Stokes, se aplican de manera particular al estudio de las burbujas esféricas en agua, para obtener la ecuación de Rayleigh, la ecuación de Rayleigh-Plesset y la ecuación de Gilmore. Estas ecuaciones modelan el comportamiento de una burbuja de gas expuesta al paso de una onda de choque.

A.1 La ecuación de continuidad

La dinámica de los fluidos tiene por objeto el estudio de los fluidos (gases y líquidos) en movimiento. Debido a que los fluidos son tratados como medios continuos, los fenómenos considerados en la dinámica de los fluidos son generalmente macroscópicos. Esto significa que cualquier elemento de volumen de fluido, por pequeño en extensión que se suponga, siempre será tan grande como para contener un número muy grande de moléculas. Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, se llama infinitesimalmente pequeño a aquello que es pequeño comparado con el volumen del cuerpo bajo consideración, pero aún grande comparado con las distancias entre las moléculas. Para propósitos prácticos y de las consideraciones necesarias en este proyecto deberá entenderse claramente que existen diferencias entre los términos “partícula de fluido” y “punto” en un fluido. Al hablar de un “punto” se hace referencia a una posición en el espacio y al hablar de “partículas” se hace mención a elementos de fluido muy pequeños formados por un gran número de moléculas. Si se trata el desplazamiento de una partícula de fluido, no se estará hablando del desplazamiento individual de una molécula, sino del movimiento de un volumen que contendrá muchísimas moléculas [1]. Cuando se menciona la velocidad del fluido $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ en un punto dado (x, y, z) en el espacio en un tiempo dado t , se refiere a la velocidad de las partículas del fluido en puntos fijos en el espacio.

La ecuación asociada con la conservación de la materia en los fluidos se puede obtener considerando un volumen V_0 del espacio. La masa de fluido en este volumen es $\int \rho dV$, donde ρ es la densidad del fluido y la integración anterior se efectúa sobre todo el volumen V_0 . La masa de fluido que cruza, por unidad de tiempo, a través de un elemento $d\mathbf{f}$ de la superficie que limita el volumen es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$; la magnitud del vector $d\mathbf{f}$ es igual al área del elemento de superficie y su dirección es normal a ella. Si por convención $d\mathbf{f}$ es positiva cuando sale de la superficie entonces $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ es positivo si el fluido sale del volumen y

negativo cuando entra al volumen. La masa total de fluido que sale del volumen V_0 por unidad de tiempo es

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} . \quad (1)$$

La integración se efectúa sobre toda la superficie cerrada que delimita al volumen en cuestión. El decremento por unidad de tiempo de la masa de fluido en el volumen V_0 puede escribirse como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV . \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} . \quad (3)$$

La integral de superficie puede ser transformada por la fórmula de Green a una integral de volumen

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (4)$$

y así se obtiene

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (5)$$

Ya que esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe ser cero y se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6)$$

Esta es la ecuación de continuidad. Expandiendo el término de la divergencia se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0 \quad (7)$$

A.2 Casos particulares de la ecuación de continuidad

A.2.1 Caso 1. Flujo permanente (o estacionario)

Cuando las propiedades y las características de cada punto del fluido permanecen invariantes en el tiempo, el flujo se conoce como permanente. Esto quiere decir que el término $\partial \rho / \partial t = 0$ y la ecuación (7) queda como

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0 \quad (8)$$

A.2.2 Caso 2. Flujo incompresible

Si la densidad se mantiene constante con respecto al tiempo y a la posición en el fluido, entonces $\partial \rho / \partial t = 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0$ y la ecuación (7) se reduce a

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

o

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (10)$$

A.3 La ecuación de Euler

Considerando que las fuerzas que actúan sobre un volumen en el fluido, son exclusivamente las debidas a las variaciones de la presión hidrostática, se puede obtener la fuerza ejercida por la presión sobre toda la superficie de un volumen de fluido, mediante la expresión

$$-\oint p \, d\mathbf{f} \quad (11)$$

donde p es la presión de cualquier punto del fluido y la integral se evalúa sobre la superficie que encierra al volumen. Transformando esta integral en una integral de volumen se tiene

$$-\oint p \, d\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad} \, p \, dV \quad (12)$$

El fluido que rodea el elemento de volumen dV ejerce sobre tal elemento una fuerza ($-dV \mathbf{grad} p$). En otras palabras, podemos decir que la fuerza $-\mathbf{grad} p$ actúa sobre un volumen unitario de fluido. Ahora se puede escribir la ecuación del movimiento de un elemento de volumen en el fluido igualando la fuerza por unidad de volumen ($-\mathbf{grad} p$) con el producto de la masa por unidad de volumen ρ y la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ de dicho elemento:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad} p . \quad (13)$$

La derivada $d\mathbf{v}/dt$ que aparece en la ecuación (13) no sólo denota la relación de cambio de la velocidad del fluido en un punto fijo en el espacio, sino la variación de la velocidad de una partícula de fluido que se mueve y cambia de posición en dicho punto.

Es conveniente que la derivada $d\mathbf{v}/dt$ se exprese en términos de cantidades que se refieren a puntos fijos en el espacio. Para hacer esta transformación es necesario notar que el cambio $d\mathbf{v}$, durante el tiempo dt , en la velocidad de la partícula considerada de fluido se compone de dos partes: del cambio en la velocidad de un punto fijo en el espacio, durante dt , y de la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) de dos puntos separados una distancia $d\mathbf{r}$, donde $d\mathbf{r}$ es también la distancia que se mueve la partícula de fluido dada en el tiempo dt .

La primera parte es $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$, donde la derivada $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ se calcula para x, y, z constantes, en el punto dado del espacio.

La segunda parte es

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} . \quad (14)$$

Así

$$d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) dt + (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} . \quad (15)$$

Dividiendo ambos lados por dt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} . \quad (16)$$

Sustituyendo (16) en la ecuación (13) se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p , \quad (17)$$

que es la ecuación requerida para describir el movimiento de un fluido no viscoso (sin esfuerzos cortantes). Esta ecuación fue obtenida por primera vez en 1755 por Leonard Euler y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de los fluidos [2].

Si el fluido se encuentra en un campo gravitacional se debe agregar una fuerza adicional $\rho \mathbf{g}$ donde \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad que actúa sobre cualquier volumen unitario.

Esta fuerza se suma en el miembro derecho de la ecuación anterior, la cual toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}. \quad (18)$$

Si \mathbf{g} se expresa como ($g \mathbf{grad} z$), donde z es el potencial asociado con las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del fluido, la ecuación (18) se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + g \mathbf{grad} z. \quad (19)$$

En la derivación de la ecuación del movimiento anterior, no se han considerado los procesos de disipación de energía que pueden presentarse en un fluido en movimiento, como consecuencia de la fricción interna (viscosidad) en el fluido y del intercambio de calor entre las diferentes partes de él. Por lo tanto las ecuaciones obtenidas son válidas solamente para movimientos de fluidos en los cuales la conductividad térmica y la viscosidad son despreciables. A tales fluidos se les conoce como fluidos no viscosos o ideales.

La ausencia de intercambio de calor entre las diferentes partes del fluido y sus alrededores significa que el movimiento del fluido es adiabático a lo largo de todo el fluido. El movimiento de un fluido ideal es adiabático. Para el movimiento adiabático, la entropía de cualquier partícula del fluido permanece constante. Si la entropía se denota por s , la condición de movimiento adiabático se puede escribir como

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (20)$$

donde la derivada total con respecto al tiempo denota, al igual que en la ecuación (16), la relación de cambio de la entropía para una partícula de fluido dado cuando esta se mueve en el fluido. Esta condición se puede escribir también como

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s = 0. \quad (21)$$

Esta es la ecuación general que describe el movimiento adiabático de un fluido ideal. Usando la ecuación de continuidad (6) como modelo, se puede escribir una ecuación para la entropía, de manera semejante a la de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (22)$$

en donde el producto $\rho s \mathbf{v}$ es la densidad de flujo de entropía.

La ecuación adiabática usualmente toma una forma mucho más simple. Si la entropía es constante en todo el volumen del fluido para algún instante inicial, mantiene su mismo valor constante en todas partes durante los tiempos siguientes en los movimientos posteriores del fluido. Para este caso se puede escribir la ecuación adiabática como

$$s = \text{constante}. \quad (23)$$

Se dice que tal movimiento es isentrópico. Se puede usar el hecho de que el movimiento es isentrópico para escribir la ecuación (17) de manera diferente, si se usa la primera ley de la termodinámica

$$dw = Tds + Vdp, \quad (24)$$

donde w es la entalpía o función de calor por unidad de masa del fluido, $V = 1/\rho$ es el volumen específico y T es la temperatura. Ya que s es constante, se tiene

$$dw = Vdp = dp/\rho \quad (25)$$

y como $(\mathbf{grad} p)/\rho = \mathbf{grad} w$. La ecuación (17) puede entonces escribirse en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w. \quad (26)$$

A.4 La burbuja y el inicio de la cavitación

Los estudios de los fundamentos físicos de la formación de “vacíos” de vapor en el seno de un líquido puro se remontan a los trabajos pioneros de Gibbs (1961). La teoría moderna de la nucleación homogénea se debe a Volmer y Weber (1926), a Farkas (1927), a Becker y Doring (1935), y Zeldovich (1943), entre otros, de acuerdo a la revisión del tema hecha por Brennen [3].

A.5 La tensión superficial

En un líquido puro, la tensión superficial es la manifestación macroscópica de las fuerzas intermoleculares que tienden a mantener juntas a las moléculas y evitan la formación de agujeros o vacíos grandes. El concepto de tensión superficial o, más bien, el de energía de superficie, se puede extender a burbujas o vacíos de pocas distancias intermoleculares de tamaño, en donde se ha comprobado que tal aproximación es sorprendentemente exacta [3]. Considérese la burbuja de radio R mostrada en la figura A.1, que se encuentra rodeada por agua. En dicha burbuja hay una presión interna P_i como resultado de la presión de los gases en ella contenida (por ejemplo aire y vapor de agua). Si P_g es la presión del aire y P_v es la presión del vapor del agua, se tiene

$$P_i = P_g + P_v. \quad (27)$$

Como resultado de las fuerzas de tensión superficial, la presión dentro de la burbuja en reposo es mayor que la presión del líquido en la pared de la burbuja [4]:

$$P_i = P_L + P_\sigma. \quad (28)$$

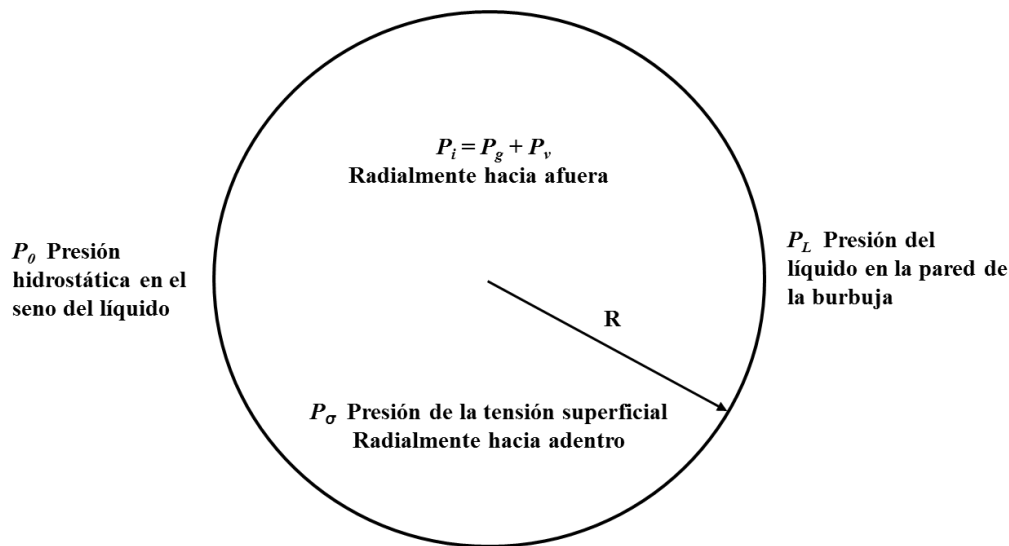


Figura A.1

Presiones a las que está sujeta una burbuja de gas estática dentro de un líquido.

Si la presión del líquido en la pared de la burbuja es P_L , entonces la presión dentro de la burbuja está dada por la ecuación (28). Haciendo un corte imaginario para dividir la burbuja en dos mitades, la presión de exceso P_σ tenderá a empujar a las dos mitades de la burbuja para que se aleje una de otra. La fuerza por unidad de longitud que balancea el exceso de presión y mantiene a la burbuja estática es la tensión superficial S . Debido al equilibrio de la presión de exceso o presión de Laplace con la tensión superficial, se tiene que para una burbuja esférica

$$P_{\sigma} \pi R^2 = 2S\pi R, \quad (29)$$

de donde la presión de Laplace estará dada como

$$P_{\sigma} = \frac{2S}{R}. \quad (30)$$

Si la burbuja no fuera esférica, la presión de Laplace sería

$$P_{\sigma} = S \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (31)$$

donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura máximo y mínimo de la burbuja.

La condición de equilibrio de presiones se puede escribir como:

$$P_L = P_g + P_v - P_{\sigma} \quad (32)$$

o en función de la tensión superficial S

$$P_L = P_g + P_v - \frac{2S}{R} \quad (33)$$

y si P_L se mantiene en un valor constante, ligeramente menor que

$$P_g + P_v - \frac{2S}{R}, \quad (34)$$

entonces la burbuja crecerá e incrementará su diámetro R hasta que ocurra la ruptura.

Para aplicar la ecuación de continuidad (6) a una burbuja y expresar tal ecuación en coordenadas esféricas [5], se emplea la fórmula de transformación para la divergencia en un sistema de coordenadas generalizado x_i :

$$\text{div} \cdot \mathbf{P} = \sum \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_j h_k P_i), \quad (35)$$

donde el operador divergencia actúa sobre un vector \mathbf{P} de componentes P_i con coeficientes métricos h_i , h_j , y h_k , que para el caso de un sistema de coordenadas esféricas, se designan como:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \text{ sen} \theta \quad (36)$$

y las coordenadas esféricas son:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \phi \quad (37)$$

Para el caso de la ecuación de continuidad, el vector \mathbf{P} de la ecuación (35) se sustituye por el producto $\rho\mathbf{v}$, y la divergencia queda como

$$\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \text{sen}\theta \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \text{sen}\theta \rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \rho v_\phi) \right]. \quad (38)$$

Desarrollando y arreglando términos se tiene

$$\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi). \quad (39)$$

Sustituyendo el valor de la divergencia de la ecuación (38) en la ecuación (6) se tiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (40)$$

que es la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas, aplicable al caso la burbuja de interés para esta tesis.

Si en la ecuación (40) se aplican las condiciones siguientes:

1. Flujo estacionario
2. Únicamente variación radial
3. Fluido incompresible

resulta que

1. con la aplicación de flujo estacionario la ecuación (40) se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0, \quad (41)$$

2. para una burbuja con sólo variación radial

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0, \quad (42)$$

ya que la variación en θ y en ϕ es cero,

3. aplicando en la ecuación (42) la condición de incompresibilidad se puede sacar la densidad ρ del paréntesis, ya que la densidad, con esta condición, es independiente de la posición radial y se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) = 0. \quad (43)$$

Además, debido a que sólo existe variación radial, la derivada parcial se convierte en derivada total

$$\frac{d}{dr}(r^2 v_r) = 0. \quad (44)$$

Derivando esta ecuación se tiene

$$r^2 \frac{d}{dr} v_r + 2r v_r = 0. \quad (45)$$

Separando variables,

$$\frac{dv_r}{v_r} = -\frac{2dr}{r} \quad (46)$$

e integrando se tiene

$$\ln v_r = -2 \ln r + \ln C. \quad (47)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos y sacando antilogaritmos se obtiene

$$v_r = \frac{C}{r^2}, \quad (48)$$

donde v_r es función de la posición radial y del tiempo, es decir, $v_r = v_r(r, t)$ quedando la dependencia temporal en la constante de integración C , ya que está relacionada con r por medio de una condición de frontera cinemática en la superficie de la burbuja. Cuando se considera que no hay transporte de masa a través de la interfase de la burbuja, la velocidad radial se expresa como

$$v_r(r,t) = \frac{dr}{dt}. \quad (49)$$

Sustituyendo la ecuación (49) en la (48) se obtiene:

$$C(t) = r^2 \frac{dr}{dt}, \quad (50)$$

que es una buena aproximación cuando hay evaporación o condensación en la interfase de la burbuja.

A.6 Ley de viscosidad de Stokes

La ley de viscosidad de Newton establece que el esfuerzo cortante en un fluido es directamente proporcional al gradiente de la velocidad de deformación a corte del fluido

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}, \quad (51)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica o constante de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y el gradiente de la velocidad de deformación y puede verse como la propiedad del fluido que manifiesta el rozamiento interno entre una capa de fluido y su capa adyacente.

τ es el esfuerzo cortante del fluido, v es la componente del vector de velocidad de deformación en la dirección y y dy es el cambio en la dirección del movimiento analizado. La ecuación (51) es la más simple de las conocidas como ecuaciones constitutivas de los fluidos. Las ecuaciones constitutivas relacionan el campo de esfuerzos con el correspondiente campo de velocidades de deformación en los fluidos. A continuación, se describen las ecuaciones constitutivas basadas en la Ley de Stokes. En ellas se supone que cada una de las componentes que forman el tensor de esfuerzos

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (52)$$

está relacionada linealmente mediante un conjunto de constantes con cada una de las seis componentes independientes del tensor (velocidad de deformación) de variación con respecto al tiempo de las deformaciones:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} \quad (53)$$

donde v_x , v_y y v_z son las componentes de la velocidad en cada uno de los ejes coordenados; las componentes $\dot{\varepsilon}_{xx}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}$ y $\dot{\varepsilon}_{zz}$ son las variaciones con respecto al tiempo de las deformaciones normales y $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx}$, $\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy}$ y $\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx}$ son las variaciones con respecto al tiempo (velocidades de deformación cortante) de las deformaciones cortantes.

El tensor de variación de las deformaciones con respecto al tiempo, es simétrico y combinado con la presión p y las treinta y seis constantes C_{ij} da lugar a los esfuerzos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + C_{11}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{12}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{13}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{14}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{15}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{16}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{yy} &= -p + C_{21}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{22}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{23}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{24}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{25}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{26}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{zz} &= -p + C_{31}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{32}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{33}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{34}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{35}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{36}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{xy} &= 0 + C_{41}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{42}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{43}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{44}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{45}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{46}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 0 + C_{51}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{52}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{53}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{54}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{55}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{56}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{xz} &= 0 + C_{61}\dot{\varepsilon}_{xx} + C_{62}\dot{\varepsilon}_{yy} + C_{63}\dot{\varepsilon}_{zz} + C_{64}\dot{\varepsilon}_{xy} + C_{65}\dot{\varepsilon}_{yz} + C_{66}\dot{\varepsilon}_{xz} \end{aligned} \quad (54)$$

Las constantes C_{ij} de la ecuación (54) se conocen como coeficientes de viscosidad y los fluidos que se comportan de acuerdo a estas relaciones se conocen como fluidos newtonianos. Debe notarse que la ley de la viscosidad de Stokes es la generalización de la ley de viscosidad de Newton. Entonces el tensor diádico de esfuerzos de la ecuación (52) puede escribirse de manera simplificada como la relación lineal

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + \mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (55)$$

donde p es la presión, \mathbf{I} es el tensor diádico unitario

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

\mathbf{c} es la matriz de constantes C_{ij}

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (57)$$

y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ es el tensor diádico de relación de deformaciones (velocidades de deformación) con respecto al tiempo, dado por la ecuación (53).

Parecería que la ley constitutiva antes presentada, con sus 36 constantes, es demasiado complicada para describir los esfuerzos en los fluidos; sin embargo, la mayor parte de los fluidos newtonianos de interés tienen propiedades que no dependen de la dirección del flujo, si se toman en consideración las definiciones y consideraciones siguientes:

Una línea de corriente es una línea de flujo en donde el vector de velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a la línea de corriente. Una ecuación que expresa el hecho de que el vector velocidad es tangente a la línea de corriente es

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (58)$$

Flujo paralelo es aquel en el cual las líneas de corriente son rectas y paralelas entre sí. Para este caso particular, la ley de viscosidad de Stokes, se reduce a la ley de Newton para flujos paralelos: un elemento de fluido en un flujo paralelo sólo se encuentra sometido a esfuerzos cortantes que se reducen a

$$\sigma_{xy} = \frac{C_{44}}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (59)$$

donde el coeficiente de viscosidad μ es

$$\mu = \frac{C_{44}}{2}. \quad (60)$$

Cuando las propiedades de un fluido son las mismas en todas las direcciones, se dice que el fluido es isotrópico y para este caso, las 36 constantes de viscosidad se reducen por medio de rotaciones de los ejes coordenados a tres, el coeficiente de viscosidad dado por la ecuación (60), el coeficiente C_{12} que se define como

$$C_{12} = \mu' = \zeta, \quad (61)$$

que es llamado segundo coeficiente de viscosidad y C_{11} el cual es

$$C_{11} = C_{44} + C_{12}, \quad (62)$$

lo que sería equivalente a

$$C_{11} = 2\mu + \mu' = 2\mu + \zeta, \quad (63)$$

reduciéndose con esto el número de coeficientes de viscosidad de 36 a 2. Con ello la ley de viscosidad de Stokes se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{xx} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{yy} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{zz} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{yz} \end{aligned} \quad (64)$$

Para muchos fluidos la presión termodinámica p puede expresarse como

$$p = -\bar{\sigma} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (65)$$

y con esto sumando, las tres primeras ecuaciones de (64) se obtiene que el segundo coeficiente de viscosidad puede quedar en función del primero como

$$\zeta = \mu' = -\frac{2}{3}\mu. \quad (66)$$

Si se sustituye ahora el valor del segundo coeficiente de viscosidad en las ecuaciones (64), las ecuaciones constitutivas de la ley de Stokes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \mu \left[2\dot{\epsilon}_{xx} - \frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \right] \\ \sigma_{yy} &= -p + \mu \left[2\dot{\epsilon}_{yy} - \frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \right] \\ \sigma_{zz} &= -p + \mu \left[2\dot{\epsilon}_{zz} - \frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \right] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu\dot{\epsilon}_{yz}. \end{aligned} \quad (67)$$

Sustituyendo los valores del tensor de deformaciones dados en la ecuación (53), las ecuaciones (67) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p + \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] \\
\sigma_{yy} &= -p + \mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] \\
\sigma_{zz} &= -p + \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] \\
\sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
\sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
\sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{68}$$

Para el caso de flujo incompresible, las ecuaciones (67) de la ley de Stokes se reducen a

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
\sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
\sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{69}$$

A.7 Las ecuaciones de Navier Stokes

Si en la ecuación de Euler (19) se incluyen los términos de disipación de energía que se presentan durante el movimiento del fluido (ecuaciones 68), como resultado de las irreversibilidades termodinámicas se tiene la ecuación

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p + g \mathbf{grad} z + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}), \tag{70}$$

donde ζ y μ son los coeficientes de viscosidad que en general son funciones de la presión y de la temperatura, pero para nuestro caso consideramos que permanecen constantes. En algunos casos a ζ se le llama la segunda viscosidad.

Para el caso de fluidos incompresibles $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y entonces la ecuación (70) se reduce en un término quedando como

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p + g \mathbf{grad} z + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (71)$$

Aplicando la ecuación (71) al caso de una burbuja, en coordenadas curvilíneas esféricas se tienen las tres ecuaciones de Navier Stokes siguientes [6]:

Para r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r. \quad (72)$$

Para θ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta. \quad (73)$$

Para ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho g_\phi, \quad (74)$$

donde, para el caso de coordenadas esféricas, el operador laplaciano ∇^2 está dado como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (75)$$

Suponiendo que la burbuja se encuentra en un fluido newtoniano, es decir, que la única energía disipativa existente en el fluido es la debida a la viscosidad, y que no existe variación de la velocidad en las direcciones θ y ϕ , ya que se considera que la burbuja es esférica y cada parámetro sólo depende de la variable r , la cual es la distancia radial desde el centro de la burbuja, se tiene así un problema hidrodinámico de una pared de la burbuja en movimiento que separa gas y vapor del líquido circundante. Entonces la ecuación (73) se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r \right) \quad (76)$$

y sustituyendo el valor de v_r de la ecuación (48) en el término que está dentro del paréntesis en el miembro del lado derecho de la ecuación (76), este se anula, quedando:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r}. \quad (77)$$

Sustituyendo el valor de la velocidad radial de la burbuja dada por la ecuación (48) en la ecuación (77) se tiene

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{dC}{dt} - \frac{2C^2}{r^5}, \quad (78)$$

donde ρ_L es la densidad del líquido. Hasta ahora no se ha considerado la contribución de la viscosidad. Esto se hará cuando se aplique la condición de frontera en la superficie de la burbuja [7].

Integrando la ecuación (78) con respecto a r , con la condición de que P tenderá a P_∞ cuando r tiende a r_∞ se tiene

$$\frac{P - P_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{r} \frac{dC}{dt} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^4}. \quad (79)$$

Ahora, si se considera la condición de frontera dinámica en la superficie de la burbuja ($r = R$) de acuerdo al equilibrio de la figura A.2 se tiene

$$(\sigma_{rr})_{r=R} + P_B - \frac{2S}{R} = 0. \quad (80)$$

Ya que el esfuerzo en la dirección radial σ_{rr} está dado como

$$\sigma_{rr} = -P + 2\mu_L \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (81)$$

sustituyendo (81) en (80) se obtiene el equilibrio de fuerzas por unidad de área siguiente:

$$(-P)_{r=R} + 2\mu_L \frac{\partial v_r}{\partial R} + P_B - \frac{2S}{R} = 0. \quad (82)$$

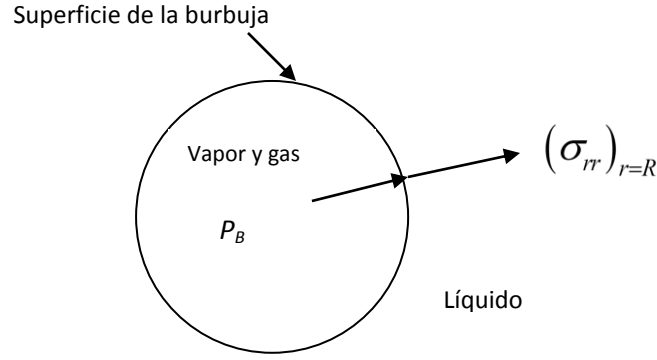


Figura A.2

Condición de frontera dinámica en la superficie de una burbuja esférica.

Despejando $(P)_{r=R}$ de la ecuación (82) se obtiene

$$P_B + 2\mu_L \frac{\partial v_r}{\partial R} - \frac{2S}{R} = (P)_{r=R}. \quad (83)$$

Derivando con respecto a r la ecuación (48), sustituyendo el valor de C de la ecuación (50) y considerando que se evalúa en $r = R$, queda

$$\frac{\partial v_r}{\partial R} = -2 \frac{C}{R^3} = -\frac{2}{R} \frac{dR}{dt} = -\frac{2}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (84)$$

Sustituyendo el valor de la derivada de (84) en la ecuación (83) se llega a

$$P_B - \frac{4\mu_L}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{R} = (P)_{r=R}. \quad (85)$$

Sustituyendo el valor de $(P)_{r=R}$ de la ecuación (85) en el término de P (la presión en la distancia radial R) del miembro izquierdo de la ecuación (79) puede escribirse

$$\frac{\left(P_B - \frac{4\mu_L}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{R} \right) - P_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{R} \frac{dC}{dt} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{R^4}. \quad (86)$$

Arreglando la ecuación (86) y considerando que $\mu_L/\rho_L = \nu_L$ es conocida como la viscosidad cinemática, queda

$$\frac{P_B - P_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{R} \frac{dC}{dt} - \frac{1}{2} \frac{C^2}{R^4} + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}. \quad (87)$$

Ahora derivando C con respecto al tiempo en la ecuación (50) se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d\left(R^2 \frac{dR}{dt}\right)}{dt} = \frac{1}{R} \left[R^2 \frac{d^2R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \right] = R \frac{d^2R}{dt^2} + 2 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2. \quad (88)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (87) y sustituyendo el valor de C de la ecuación (50) en el segundo término del miembro del lado derecho de la ecuación (87) llegamos a

$$\frac{P_B - P_\infty}{\rho_L} = R \frac{d^2R}{dt^2} + 2 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}. \quad (89)$$

Simplificando términos semejantes queda

$$\frac{P_B - P_\infty}{\rho_L} = R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}, \quad (90)$$

que es la ecuación generalizada de Rayleigh-Plesset, para la descripción dinámica de una burbuja. En la ecuación (90) tanto la presión dentro de la burbuja P_B como la presión en el líquido P_∞ son funciones del tiempo. Una ecuación semejante a la (90) fue derivada por primera vez por Rayleigh en 1917, sin los términos de viscosidad y tensión superficial. Plesset aplicó la ecuación (90) para modelar el comportamiento de las burbujas sujetas a cavitación.

A.8 Núcleos de burbujas y el umbral de Blake

Walton y Reynolds [8] encontraron que la resistencia teórica “de ruptura” del agua sometida a tensión, a temperatura ambiente, es del orden de 10^8 Pa (1000 atm) lo que presupondría que se requeriría de una reducción de presión de al menos 1000 atm para producir cavitación. Experimentalmente se ha observado que se produce cavitación aún con amplitudes de presión de 1 atm, lo cual se atribuye a la existencia de núcleos de cavitación en el líquido. El núcleo más sencillo que se puede considerar es el de una burbuja esférica que se encuentra en el líquido y que contiene en su interior una mezcla de vapor del líquido y algunos gases que se encuentran también disueltos en el líquido. Una burbuja libre como la descrita, ascenderá lentamente hasta la superficie del líquido. El gas contenido en la burbuja se difundirá hacia el líquido saliendo de la burbuja. Epstein y Plesset [8] estimaron que a una burbuja de aire de 10 micrómetros de radio en agua saturada de aire le toma 7 segundos disolverse. Se han propuesto varios mecanismos para la estabilización de la burbuja. El más aceptado es aquel que supone que una bolsa de gas es atrapada en una grieta angulada pequeña de una superficie sólida o en una partícula contaminante

imperfectamente humedecida. El agua potable ordinaria puede contener miles de partículas sólidas por centímetro cúbico. Por medio de filtración puede removerse la mayoría de las partículas sólidas del agua, de manera que finalmente logra resistir presiones negativas de hasta 200 atm.

Una burbuja en un líquido nunca está en equilibrio, pero para los fines de este estudio se considerará que si lo está, ya que el movimiento previo al paso de una onda de choque es despreciable con respecto al que le ocasiona dicha perturbación. Si se desprecia la presión de vapor del líquido (que para el agua es de 0.023 atm a 20 grados centígrados), se tiene una burbuja de gas perfecto en equilibrio con el líquido, de acuerdo a como lo muestra la figura A.3. La burbuja tendrá una presión de gas dada por

$$P_g = P_o + \frac{2S}{R_o}, \quad (91)$$

donde P_g es la presión del gas, P_o es la presión del líquido, S es la tensión superficial del líquido y R_o es el radio de la burbuja. Así se tiene la ecuación

$$R_o = \frac{2S}{P_g - P_o} . \quad (92)$$

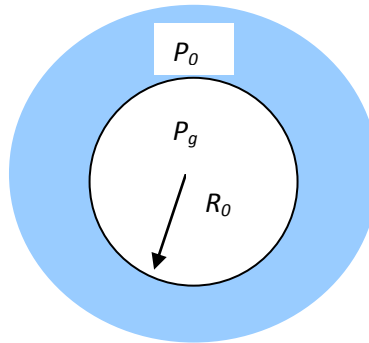


Figura A.3

Burbuja de gas en un líquido, sometida a un equilibrio inestable.

Si a este radio R_o se le designa como radio crítico R_c cuando se alcanza la estabilidad, entonces

$$R_c = \frac{2S}{P_g - P_o} . \quad (93)$$

Esta es una condición inestable si $R < R_c$, ya que la tensión superficial $2S/R$ predomina y la burbuja se contrae. Si $R > R_c$, la presión del gas predomina y la burbuja se expande

indefinidamente. De esta manera se pueden presentar cinco formas distintas en que la burbuja es desviada de la estabilidad:

1. Que suba la burbuja en el seno del líquido, como resultado de la fuerza boyante.
2. Que se disuelva la burbuja por difusión de gas hacia fuera de ella.
3. Que la burbuja se contraiga debido a la tensión superficial.
4. Que la burbuja crezca por un aumento en la presión interna del gas.
5. Que la burbuja crezca por una disminución de la presión fuera de la burbuja.

Si la burbuja se encuentra en un estado de equilibrio inestable, como el descrito por las ecuaciones (92) y (93), se está disolviendo y subiendo lentamente en el seno del líquido. Para esta condición podemos evaluar la presión acústica mínima P_A necesaria para que crezca la burbuja de radio R_B que contiene solamente gas.

Blake, Neppiras y Noltingk [8] analizaron que si se considera a la burbuja en equilibrio, la presión dentro de ella se puede expresar como $P_o + 2S/R_B$. Entonces sí la burbuja cambia de tamaño debido a un decremento de la presión externa absoluta, la condición de equilibrio cambia a

$$\left(P_o + \frac{2S}{R_B}\right)\left(\frac{R_B}{R}\right)^3 = P_o - P_A + \frac{2S}{R}, \quad (94)$$

donde el término del miembro izquierdo de la ecuación (94) evalúa la presión del gas dentro de la burbuja, considerando dentro de ella una expansión isotérmica. En el miembro derecho de la ecuación (94), P_A es el pico de presión acústica negativa. Para encontrar el valor mínimo de la presión externa ($P_A - P_o$) para el crecimiento explosivo de una burbuja se calcula

$$\frac{\partial(P_A - P_o)}{\partial R} = 0, \quad (95)$$

lo que da como resultado

$$P_A - P_o = \frac{4S}{3R^*}, \quad (96)$$

donde

$$R^* = \left[\frac{3R_B^3 \left(P_o + \frac{2S}{R_B}\right)}{2S} \right]^{1/2} \quad (97)$$

es llamado el radio crítico. Resolviendo para P_A en términos del tamaño inicial de la burbuja R_o y cambiando P_A por P_B se llega a la presión conocida como presión umbral de Blake

$$P_B = P_o + \frac{8S}{9} \left[\frac{3S}{2 \left[P_o + \left(\frac{2S}{R_B} \right) \right] R_B^3} \right]^{1/2}, \quad (98)$$

ecuación que puede ser aproximada con

$$P_B = P_o + 0.77 \left(\frac{S}{R_B} \right) \quad (99)$$

cuando $2S/R_o \gg P_o$; y a

$$P_B = P_o + \frac{8S}{9} \left[\frac{3S}{2P_o R_B^3} \right]^{1/2} \quad (100)$$

cuando $P_o \gg 2S/R_o$.

En todas estas ecuaciones R_B es el radio mínimo de la burbuja que crecerá por la acción de la presión umbral de Blake [8]. Ese radio es algunas veces también llamado radio de Blake. Debe notarse que en la ecuación (98) se han despreciado los efectos viscosos e inerciales, por lo que tal ecuación sólo es aplicada para casos de procesos cuasi-estáticos.

Referencias

1. Landau D L, Lifshitz M E, Fluid Mechanics (Course of Theoretical Physics Volume 6, Second Edition, Butterworth Heinemann), 2003, pp. 1-2.
2. Landau D L, Lifshitz M E, Fluid Mechanics (Course of Theoretical Physics Volume 6, Second Edition, Butterworth Heinemann), 2003, pp. 3-4.
3. Brennen E C, Cavitation and Bubble Dynamics (Oxford University Press), 1995, pp. 1-29.
4. Leighton G T, The Acoustic Bubble (Academia Press, UK), 1994, pp. 67-70.

5. Sokolnikoff S I, Redheffer M R, Mathematics of Physics and Modern Engineering (Mc Graw Hill, Second Edition), 1966, pp. 411-418.
6. Shames H I, Mecánica de Fluidos, (Mc Graw Hill, Tercera edición), 1995, pp. 406-422.
7. Brennen E C, Cavitation and Bubble Dynamics (Oxford University Press), 1995, pp. 30-37.
8. Young R F, Cavitation (Imperial College Press, London), 1999, pp. 8-17.

APÉNDICE B

Ondas mecánicas

B.1 Movimiento ondulatorio

Si se tiene una propiedad física descrita por un campo y repentinamente se presenta una perturbación del estado físico en un punto, las propiedades físicas del sistema, descritas por las ecuaciones del campo, dan como resultado la propagación de una perturbación. Esto genera cambios en las condiciones físicas de otros puntos del espacio. Las propiedades físicas consideradas pueden ser el campo electromagnético, la deformación de un resorte, la presión de un gas, la deformación de un sólido, el desplazamiento transversal de una cuerda, el campo gravitacional, una onda de choque, o la propagación del sonido, entre otros. Las ondas mecánicas se propagan solamente si existe un medio. Son generadas cuando se imparte energía al medio y una parte de este se desplaza desde su posición inicial, ocasionando vibración de las moléculas que se encuentran unidas por las fuerzas intermoleculares. La vibración se trasmite a las moléculas vecinas y se propaga por el medio. De esta forma la energía se transfiere de una molécula a otra. Todas las oscilaciones son causadas por las fuerzas restauradoras resultantes de las fuerzas intermoleculares [1]. Las ondas transportan energía. La cantidad de energía transmitida por un medio y el mecanismo responsable de ese transporte difiere de un caso a otro.

B.2 Ondas en materiales elásticos lineales

Como se vio en la sección A.7, las ecuaciones de Navier-Stokes se derivan a partir de la conservación del momento angular y lineal y de las ecuaciones constitutivas, basadas en la ley de viscosidad de Stokes [2]. Si se considera un cuerpo elástico lineal con un comportamiento mecánico descrito en función de los esfuerzos a los que se encuentra sometido cada punto del cuerpo, se llega a las ecuaciones de movimiento de Navier (1), las cuales son el resultado del equilibrio dinámico de las fuerzas que actúan en un elemento diferencial de un sólido elástico en movimiento (ver figura B.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1}$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2)$$

es el tensor de esfuerzos en un punto del material [3, 4]. Si u , v y w son las componentes del vector de desplazamiento de un punto del cuerpo en cada una de las direcciones de los ejes coordenados x , y y z , t es el tiempo, ρ es la densidad del material analizado. X , Y y Z son las componentes de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen, dadas en función de la densidad y de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa f_x , f_y y f_z como

$$\begin{aligned} X &= \rho f_x \\ Y &= \rho f_y \\ Z &= \rho f_z \end{aligned} \quad (3)$$

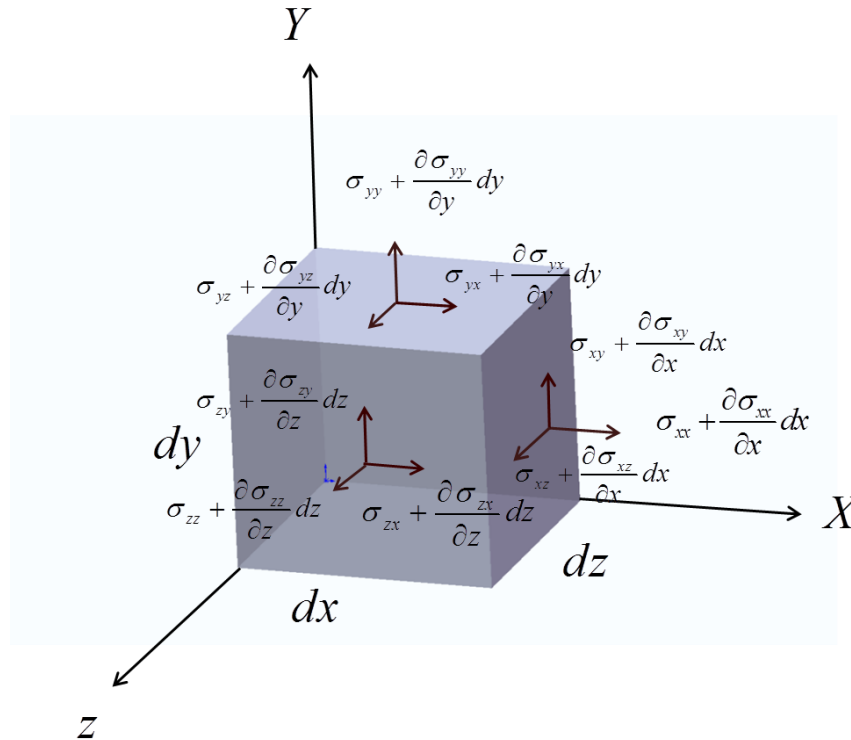


Figura B.1

Elemento diferencial de un sólido elástico, donde se muestran los esfuerzos que actúan sobre sus caras positivas.

Los esfuerzos sobre una superficie orientada con respecto a un vector normal n_j de una parte del material considerado, sobre la otra a la cual está unido, se calculan como

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad , \quad (4)$$

donde t_i son los esfuerzos en la cara normal al vector n_j y σ_{ji} son los componentes del tensor de esfuerzos en el punto considerado del material elástico lineal de acuerdo con la ecuación (2) [3-5]. Las deformaciones unitarias y los esfuerzos para un material elástico lineal están relacionados por medio de la ley de Hooke inversa para las deformaciones unitarias normales:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] \quad , \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

donde E es conocido como el módulo de Hooke o de elasticidad y por las relaciones de Hooke inversas, para las deformaciones angulares o cortantes.

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (6)$$

siendo G el módulo de cortante o módulo de rigidez que está dado como [3]:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad . \quad (7)$$

El tensor de deformaciones unitarias puede escribirse como [4]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (8)$$

y las deformaciones unitarias se relacionan con los desplazamientos por medio de la ecuación en notación indicial

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} \frac{\Delta y}{\Delta x} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (9)$$

con

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

que para coordenadas cartesianas es equivalente a

$$\alpha, \beta = x, y, z$$

con

$$\begin{aligned} u_1 &= u_x = u \\ u_2 &= u_y = v \\ u_3 &= u_z = w \end{aligned} \quad (10)$$

Las deformaciones unitarias se relacionan con los esfuerzos por medio de la ley de Hooke generalizada inversa, expresada por las ecuaciones (5) y (6), donde las deformaciones cortantes $\gamma_{\alpha\beta}$ se obtienen de las deformaciones unitarias $\varepsilon_{\alpha\beta}$ mediante

$$\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta . \quad (11)$$

De esta manera, el tensor de deformaciones en función de las deformaciones unitarias normales y angulares queda como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} . \quad (12)$$

La ley de Hooke generalizada que relaciona las deformaciones con los esfuerzos puede presentarse en función de las ecuaciones de Lamé como [3]

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_{xx} \right) = \lambda e + 2G\varepsilon_{xx} \\
\sigma_{22} = \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_{yy} \right) = \lambda e + 2G\varepsilon_{yy} \\
\sigma_{33} = \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu e}{1-2\nu} + \varepsilon_{zz} \right) = \lambda e + 2G\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{13}$$

donde la constante de Lamé λ está dada por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{14}$$

la constante G es el módulo de rigidez o módulo cortante definido desde el capítulo 2.

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1+\nu} \right) \tag{15}$$

y la relación volumétrica e está dada como

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} . \tag{16}$$

De esta manera el tensor de esfuerzos se completa, incluyendo las ecuaciones (13) para los esfuerzos normales y las relaciones (6), entre los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias cortantes.

El tensor de esfuerzos en notación indicial, puede expresarse como

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{17}$$

en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{18}$$

para

$$i, j = 1, 2, 3 .$$

Tomándose en cuenta todas estas consideraciones aplicables a un cuerpo elástico lineal y sustituyéndose las ecuaciones para los esfuerzos en función de las deformaciones y estas a su vez en función de los desplazamientos u , v y w en las ecuaciones (1), se obtiene [3]:

$$\begin{aligned}
 G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right) + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{19}$$

ó

$$\begin{aligned}
 G\Delta u + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 G\Delta v + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 G\Delta w + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + \rho f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} ,
 \end{aligned} \tag{20}$$

donde el operador laplaciano Δ , en coordenadas cartesianas es

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \tag{21}$$

Estas son las ecuaciones de Navier, presentadas en el formato conocido como ecuaciones de Lamé [3].

Si las ecuaciones (19) y (20) se presentan en notación indicial se tiene

$$(\lambda + G)\partial_i \partial_k u_k + G\partial^j \partial_j u_i + \rho f_i = \rho \partial_t^2 u_i \tag{22}$$

para

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

En notación vectorial se tiene [2]

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u} , \tag{23}$$

donde el operador gradiente $\nabla = \mathbf{grad}$, en coordenadas cartesianas está dado como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (24)$$

Si se usa la identidad

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad , \quad (25)$$

la ecuación (23) se puede escribir como [2]

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - G\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \partial_i \partial_i \mathbf{u} \quad , \quad (26)$$

donde se observa que las ondas elásticas en general, tienen deformaciones tanto de expansión y contracción como rotacionales.

La ecuación general (26) describe el movimiento ondulatorio de un cuerpo elástico considerado como una región R con frontera δR y en cada punto de tal región continua, se tienen los esfuerzos dados por el tensor σ_{ij} y los desplazamientos u , v y w que definen el tensor de deformaciones ε_{ij} .

Si se tiene una región y sus condiciones de frontera se describen en función de los esfuerzos para una parte de ella y en función de los desplazamientos para otra parte de ella, se dice que las condiciones de frontera son mezcladas. Esta situación modela, por ejemplo, el comportamiento en donde una superficie sólida tiene una frontera con un gas de densidad pequeña y compresibilidad correspondiente a una situación de vacío. Otro escenario común es aquél en donde la región es ocupada por dos sólidos que tienen propiedades diferentes. Aquí la descripción del comportamiento en la interfase de contacto entre los dos sólidos se vuelve complicada y en muchos casos lo que se hace es suponer que los esfuerzos y los desplazamientos son continuos en esta zona. Una situación semejante se da cuando en la región estudiada se tiene una frontera compuesta por un sólido y un gas. En la modelación de estos casos se ignora la viscosidad, los esfuerzos cortantes se anulan y los esfuerzos normales y los desplazamientos se consideran continuos. Aún con las simplificaciones mencionadas, los problemas del movimiento ondulatorio, sólo se pueden resolver para casos contados y en muchas ocasiones estos modelos resultan inadecuados. Una de las complicaciones más frecuentes que se presenta en las modelaciones es la no linealidad.

B.3 Descripción de movimientos ondulatorios específicos

B.3.1 Deformación longitudinal

En general para movimientos ondulatorios unidimensionales, se supone que las variables del campo ondulatorio, dependen sólo de un desplazamiento y del tiempo. Para el caso conocido como deformación longitudinal [2], se considera que sólo el desplazamiento u_1 es finito y que u_2 y u_3 son cero.

Por lo tanto las ecuaciones de esfuerzo y deformación unitaria, se reducen a

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G)\partial_1 u_1 \quad (27)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\partial_1 u_1 \quad (28)$$

y la ecuación del movimiento ondulatorio se escribe como

$$(\lambda + 2G)\partial_1 \partial_1 u_1 + \rho f_1 = \rho \partial_t^2 u_1 \quad . \quad (29)$$

B.3.2 Esfuerzo longitudinal

Para el caso de esfuerzo longitudinal, todos los componentes del tensor esfuerzo son cero, excepto σ_{11} , entonces [2]

$$\sigma_{11} = E\partial_1 u_1 \quad (30)$$

$$\partial_2 u_2 = \partial_3 u_3 = -\nu \partial_1 u_1 \quad , \quad (31)$$

siendo ν el módulo de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad . \quad (32)$$

La ecuación del movimiento ondulatorio resulta ser

$$E\partial_i\partial_i u_1 + \rho f_1 = \rho\partial_i\partial_i u_1 \quad . \quad (33)$$

B.3.3 Ondas acústicas en fluidos

Cuando los efectos viscosos se suponen despreciables en un fluido, la única componente de esfuerzo importante es la presión hidrostática P . En ausencia de movimiento ondulatorio, la presión en el fluido adquiere un valor de equilibrio P_e que puede variar con la posición como consecuencia de los efectos gravitacionales. Si un fluido se encuentra en reposo y pasa a través de él una onda de compresión, la presión local diferirá de su valor de equilibrio en la cantidad

$$p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) - P_e(\mathbf{r}) \quad . \quad (34)$$

El incremento de presión $p(\mathbf{r}, t)$ es una función escalar de la posición y del tiempo, mientras que el desplazamiento ocasionado en el fluido $\zeta(\mathbf{r}, t)$ es una función vectorial de la posición y del tiempo. Ya que es más fácil trabajar con una función escalar que con una vectorial, la ecuación de onda para las ondas acústicas se derivará en función de $p(\mathbf{r}, t)$.

La deformación volumétrica o dilatación e , que se asocia al incremento de presión, se relaciona al desplazamiento $\zeta(\mathbf{r}, t)$ por la ecuación

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) = \nabla \cdot \zeta \quad . \quad (35)$$

El incremento de presión $p(\mathbf{r}, t)$ se relaciona con la deformación volumétrica por medio del módulo volumétrico B

$$p(\mathbf{r}, t) = -Be = -B\nabla \cdot \zeta \quad , \quad (36)$$

ecuación equivalente a la ley de Hooke en un fluido. Analizando el equilibrio de fuerzas en la figura B.2, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta F_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (37)$$

$$\Delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z .$$

La fuerza neta en forma vectorial para el elemento cúbico será

$$\Delta \mathbf{F} = -(\nabla p) \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 \boldsymbol{\zeta}}{\partial t^2} . \quad (38)$$

Dividiendo la ecuación (38) entre el elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, queda

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\zeta}}{\partial t^2} . \quad (39)$$

Esta ecuación relaciona $p(\mathbf{r}, t)$ con el vector $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}, t)$. Para dejar la ecuación en función del incremento de presión, se calcula la divergencia de ambos miembros de la ecuación (39) y se obtiene

$$-\nabla \cdot \nabla p = \rho_0 \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta})}{\partial t^2} . \quad (40)$$

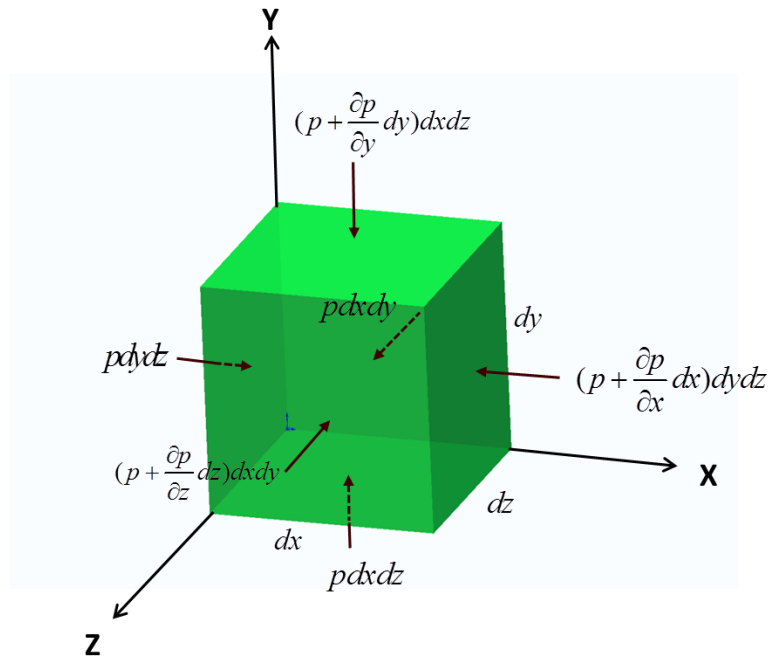


Figura B.2
Fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido.

Sustituyendo el valor de $\nabla \cdot \zeta$ de la ecuación (36) en la ecuación anterior se tiene

$$\nabla^2 p = \frac{1}{C_f} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad , \quad (41)$$

que es la ecuación de onda para el fluido en función del incremento de presión $p(\mathbf{r}, t)$, con una velocidad de propagación de la onda C_f en el fluido de

$$C_f = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad , \quad (42)$$

donde el operador laplaciano es la divergencia del gradiente y en coordenadas cartesianas se tiene

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \mathbf{div} \cdot \mathbf{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \quad (43)$$

B.4 Ondas de choque

En ondas sonoras, cuando la velocidad de la fuente v_s excede a la velocidad de la onda v (figura B.3) se forma un frente de onda cónico que se conoce como onda de choque [6, 12].

Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en tiempos diferentes durante su movimiento. En $t = 0$ la fuente está en S_0 y en algún tiempo posterior t la fuente está en S_n . En el momento t , el frente de onda con centro en S_0 alcanza un radio vt . En este tiempo la fuente viaja una distancia $v_s t$ hasta S_n . En el instante en que la fuente se encuentra en S_n las ondas están empezando a generarse en este lugar y por ello el frente de onda tiene un radio cero en este punto. La línea tangente dibujada desde S_n hasta el frente de onda centrado en S_0 es tangente a todos los otros frentes de onda generados en

tiempos intermedios. Así se ve que la envolvente de estos frentes de onda es un cono con semi-ángulo θ dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s} \quad . \quad (44)$$

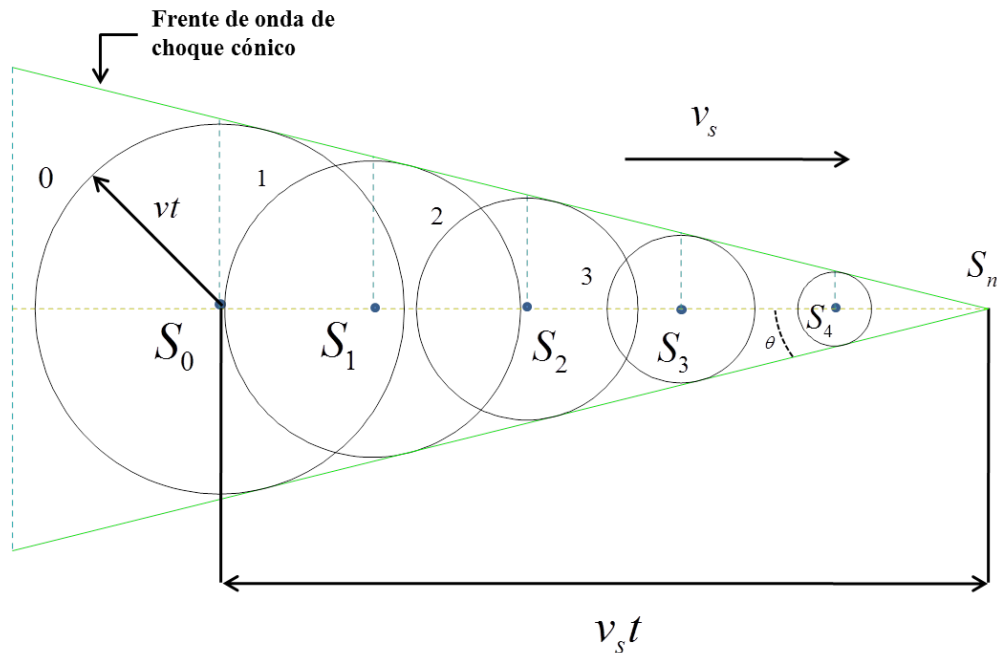


Figura B.3

Frente de onda de choque cónico, producido cuando una fuente se mueve de S_0 a S_n con una velocidad v_s mayor que la del medio v .

La relación v/v_s se conoce como número de Mach (M). Este tipo de choque transporta una gran cantidad de energía concentrada en la superficie del cono.

En seguida se deriva la velocidad de una onda de choque en un gas ideal que se genera con un pistón (ver figura B.4). Se comienza analizando lo que le sucede a un gas en reposo en un tubo de sección transversal S cuando un pistón comienza a actuar sobre el gas a una velocidad constante u_p iniciándose el estudio desde el reposo en el tiempo $t = 0$. El tubo inicialmente se encuentra lleno de un gas a presión P_0 , con densidad ρ_0 y energía interna

por unidad de masa E_0 , correspondiente a una temperatura T_0 . El gas tiene una relación de calores específicos γ y una velocidad del sonido en condiciones normales c_0 dada por

$$c_0 = \left(\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2} . \quad (45)$$

Se usa c sin subíndice para designar a la velocidad del frente de choque que viaja a lo largo del tubo cuando el pistón se mueve súbitamente a la velocidad u_p [6 y 8]. La figura B.4 muestra la situación en el tubo, después de que el pistón se ha movido durante un tiempo t . Para esta situación se tienen las consideraciones siguientes:

1. El pistón se ha movido hacia adelante una distancia $u_p t$.
2. El frente de choque se ha movido hacia adelante una distancia ct .
3. La presión en el gas detrás del frente de choque se ha incrementado de P_0 a una nueva presión P_1 , con la densidad variando de ρ_0 a ρ_1 .

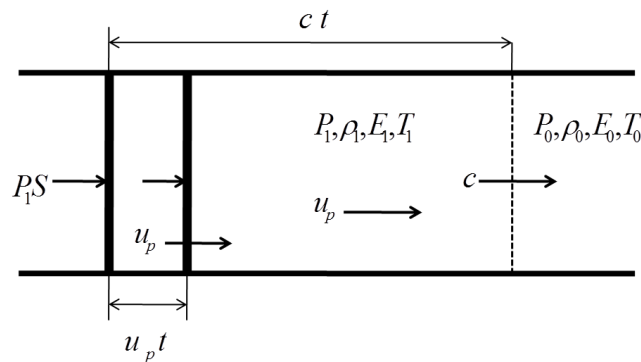


Figura B.4
Frente de choque generado por un pistón.

4. El gas entre el pistón y el frente de choque se mueve como un continuo con la velocidad u_p del pistón.
5. El gas comprimido se ha calentado desde su temperatura original T_0 hasta una nueva temperatura T_1 , lo que ha ocasionado que la energía por unidad de masa cambie de E_0 a E_1 .

6. La fuerza externa que se requiere aplicar sobre el pistón para mantenerlo en movimiento con una velocidad estacionaria u_p es $P_1 S$.

La conservación de la masa requiere que

$$\rho_0 ctS = \rho_1 (c - u_p) tS \quad , \quad (46)$$

así que en el frente de choque la relación de densidades es

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{c}{c - u_p} \quad . \quad (47)$$

Si se aplica la segunda ley de Newton al gas contenido entre el pistón y el frente de choque y se tienen en cuenta las consideraciones siguientes:

En el tiempo t el gas contenido tiene la masa $\rho_0 ctS$, la cual ha adquirido la velocidad u_p y la cantidad de movimiento $\rho_0 ctSu_p$.

La variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo debe ser igual a la fuerza externa neta que ocasiona el cambio en la cantidad de movimiento. Ya que la presión inicial en el gas es P_0 y en el extremo posterior al pistón es P_1 , la fuerza neta es $(P_1 - P_0)S$,

el equilibrio con la segunda ley de Newton nos lleva a

$$(P_1 - P_0)S = \rho_0 cu_p \quad . \quad (48)$$

Si se iguala el trabajo hecho por las fuerzas externas sobre el gas, a la energía total que adquiere dicho gas en el tiempo t , y considerándose que el único trabajo que actúa sobre el gas es el realizado por el pistón se tiene

$$P_1 Su_p t = \frac{1}{2} (\rho_0 ctS) u_p^2 + (\rho_0 ctS) (E_1 - E_0) \quad , \quad (49)$$

donde los dos términos del lado derecho son respectivamente, la energía cinética de la porción considerada de gas y su incremento de energía interna. Aquí la presión P_1 es la que actúa sobre el pistón y no solamente la diferencia $(P_1 - P_0)$ es la que responsable del incremento en la cantidad de movimiento del gas. Dividiendo la ecuación (49) entre S y t , queda

$$P_1 u_p = \frac{1}{2} (\rho_0 c) u_p^2 + (\rho_0 c) (E_1 - E_0) \quad . \quad (50)$$

Las tres ecuaciones, (48), (49) y (50), derivadas para una onda de choque y expresando respectivamente la ley de la conservación de la masa, la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía, son conocidas como las ecuaciones de Rankine-Hugoniot [6 y 8]. Estas ecuaciones explícitamente involucran ocho variables, es decir, las tres variables que definen el estado inicial del gas P_0, ρ_0, E_0 , las tres variables que definen el estado final del gas P_1, ρ_1, E_1 y las dos velocidades u_p y c .

Una sustancia homogénea de composición fija, tal como un gas, queda caracterizada por tres variables extensivas: su volumen, su energía interna total y su entropía, y por dos variables intensivas, la presión y la temperatura absoluta. De estas cinco variables, sólo dos pueden escogerse de manera independiente. Estas dos determinan el estado termodinámico de la sustancia, con lo cual las otras tres variables quedan definidas. Una expresión para la energía interna por unidad de masa como una función de T y ρ nos permite calcular E para diferentes valores de T y ρ . La entropía se puede calcular a partir de la ecuación de estado, de la expresión para $E(T, \rho)$ y de las leyes termodinámicas [6]. Para un gas particular en el tubo analizado, las ecuaciones termodinámicas nos sirven para calcular E_0 y T_0 para valores conocidos de P_0 y ρ_0 , de manera que estas variables pueden considerarse conocidas. Si se especifica la velocidad del pistón u_p , entonces sólo se desconocen las cuatro variables P_1, ρ_1, E_1 y c . Para determinarlas se tienen las tres ecuaciones de Rankine-Hugoniot [6, 8]. Con las ecuaciones termodinámicas del gas se tienen cuatro ecuaciones para relacionar P_1, ρ_1, E_1 e incidentalmente se puede obtener también T_1 .

Para el caso de ondas sónicas de pequeña amplitud, se asocia un incremento reversible en la energía interna del gas con la compresión adiabática de este. En el caso de una onda de choque, el incremento en la energía interna es mucho más grande que el incremento reversible de la energía potencial que ocurriría si el gas es comprimido adiabáticamente. Es decir, el paso del frente de choque involucra un calentamiento irreversible del gas, semejante al que se tendría en un proceso en donde existe una fuerza de fricción grande.

Cuando se tiene una ecuación que relaciona la energía interna E del gas con P y ρ como, por ejemplo, la que se deriva en función del gas ideal, se tiene para la energía interna de una masa unitaria de gas ideal que se encuentra a la temperatura absoluta T

$$E = \frac{1}{\mu} C_v T \quad , \quad (51)$$

donde C_v es el calor específico molar a volumen constante y μ es el peso molecular. Para un gas ideal, E es independiente de ρ y el calor específico molar de un gas a presión constante C_p se relaciona con C_v por medio de la ecuación

$$C_p = C_v + R \quad , \quad (52)$$

donde R es la constante universal de los gases. De esta manera, la ecuación de estado de un gas ideal, puede escribirse como

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{\mu} T \quad , \quad (53)$$

con la densidad ρ en vez del volumen.

Si se introduce la relación de calores específicos $\gamma = C_p/C_v$, en la ecuación (51) y se elimina T a partir de la ecuación (53), se encuentra la expresión para E

$$E = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad . \quad (54)$$

La diferencia de energía interna por unidad de masa en los estados inicial y final del gas es

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) \quad . \quad (55)$$

Con esta ecuación se pueden solucionar las ecuaciones de Rankine-Hugoniot para la velocidad de choque y para las condiciones del gas detrás del frente de choque. La solución de las cuatro ecuaciones puede iniciarse eliminando $E_1 - E_0$ entre las ecuaciones (50) y (55), posteriormente usando la ecuación (48) para eliminar P_1 y la ecuación (49) para eliminar ρ_1 . De esta forma se puede llegar a la ecuación

$$c^2 - \frac{1}{2}(\gamma + 1)u_p c - c_0^2 = 0 \quad , \quad (56)$$

donde c_0 es la velocidad del sonido en condiciones normales (ecuación 45). Resolviendo la ecuación anterior, se tiene para la velocidad de choque de un gas ideal

$$c = \frac{1}{4}(\gamma + 1)u_p + \sqrt{\frac{1}{16}(\gamma + 1)^2 u_p^2 + c_0^2} \quad . \quad (57)$$

Esta expresión claramente muestra que la velocidad de choque siempre excede tanto a c_0 como a la velocidad del pistón u_p (ya que $\gamma > 1$).

La velocidad de choque puede expresarse también en función de la presión en exceso ($P_1 - P_0$) que existe en el gas detrás del frente de choque. Usando la ecuación (48) para eliminar u_p de la ecuación (56) y usando (45) para $\rho_0 c_0^2$ se tiene

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{P_1 - P_0}{P_0} \right)} \quad . \quad (58)$$

Si se introduce el número de Mach $M = c/c_0$ la ecuación (58) puede escribirse como

$$\frac{P_0}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \quad . \quad (59)$$

El número de Mach del gas que se mueve detrás del frente de choque puede evaluarse como

$$M_p = \frac{u_p}{c_0} = \frac{2}{1 + \gamma} \left(M - \frac{1}{M} \right) \quad . \quad (60)$$

La relación de densidades de la ecuación (47) puede escribirse como

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{c}{c - u_p} = \frac{M}{M - \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right] (M - 1/M)} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/M^2} \quad (61)$$

al introducir la ecuación (60) para u_p / c_0 .

La relación de temperatura queda de la siguiente manera:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1 \rho_0}{P_0 \rho_1} = \left[1 + \frac{2\lambda}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \right] \quad . \quad (62)$$

B.4.1 Ondas de choque en líquidos con burbujas

La propagación de una onda de choque en un líquido con burbujas depende del comportamiento de las burbujas. Como se mencionó en el capítulo 2, la propagación de ondas de choque en líquidos con burbujas ocasiona una perturbación en el líquido que

rodea a las burbujas. El comportamiento de las burbujas ante estos cambios se describió por la ecuación de Rayleigh-Plesset

$$\frac{P_B - P_\infty}{\rho_L} = R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R} \quad (63)$$

y la ecuación de Gilmore

$$R\ddot{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{C} \right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C} \right) = H \left(1 + \frac{\dot{R}}{C} \right) + \frac{R\dot{H}}{C} \left(1 - \frac{\dot{R}}{C} \right) \quad , \quad (64)$$

donde la burbuja de radio R se supone siempre esférica, ρ_L es la densidad del líquido, S es la tensión superficial, ν_L es la viscosidad cinemática del líquido, P_∞ es la presión en el líquido alejado de la burbuja, P_B es la presión en la burbuja, H es la entalpía de la burbuja y C es la velocidad del sonido. Si se desprecia la difusión del gas hacia adentro y hacia afuera de la burbuja, la masa dentro de la burbuja permanece constante

$$R^3 \rho_g = \text{constante.} \quad (65)$$

En el capítulo 2 se vio que se necesita la ecuación de energía, tanto para el líquido que rodea a la burbuja, como para el gas dentro de la burbuja. Por la diferencia que existe entre la capacidad calorífica del líquido y la del gas, se puede considerar que la temperatura del líquido permanece constante.

La ecuación de energía para un gas ideal es

$$\rho_g c_p \frac{DT_g}{Dt} - \frac{Dp_g}{Dt} = k \nabla^2 T_g \quad . \quad (66)$$

En esta ecuación T_g es la temperatura del gas en la burbuja, k y c_p son la conductividad térmica y el calor específico a presión constante, respectivamente, mientras que D/Dt es la derivada material. El coeficiente de difusión de calor χ , para el gas dentro de la burbuja se define como

$$\chi = \frac{k}{\rho_g c_p} \quad . \quad (67)$$

Para el aire χ es del orden de $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Para una variación de la temperatura del gas con una frecuencia w , la temperatura externa penetra hasta una profundidad del orden de $\sqrt{\chi/w}$. Esto permite en algunos casos límite evitar el uso de la ecuación de la energía (66).

Para identificar estos casos límite se compara $\sqrt{\chi/w}$ con el radio de la burbuja R y la longitud de onda l_g de la onda de presión en el gas dentro de la burbuja. Cuando l_g es mayor que R y esta última es pequeña con respecto a $\sqrt{\chi/w}$, el gas se puede considerar como isotérmico. Cuando l_g es mayor que R , pero esta última es grande con respecto a $\sqrt{\chi/w}$, el gas se puede considerar adiabático. También cuando incrementa la frecuencia y la longitud de onda l_g es más pequeña que R , el gas se considera adiabático. Finalmente, ya que $\sqrt{\chi/w}$ disminuye como $\sqrt{1/w}$ y l_g se reduce como $1/w$, cuando la frecuencia se incrementa. Entonces los cambios de presión son nuevamente isotérmicos (ver tabla 3.1).

Rango de frecuencia	Longitudes	Comportamiento termodinámico
Bajo	$1 < \frac{\chi}{wR^2} < \frac{l_g}{R}$	Isotérmico
Moderadamente alto	$\frac{\chi}{wR^2} < 1 < \frac{l_g}{R}$	Adiabático
Alto	$\frac{\chi}{wR^2} < \frac{l_g}{R} < 1$	Adiabático
Muy alto	$\frac{l_g}{R} \ll \frac{\chi}{wR^2} \ll 1$	Isotérmico

Tabla B.1

Comportamiento termodinámico de las burbujas oscilantes de gas.

B.5 Solución de la ecuación de onda

En esta sección se utilizará de manera indistinta la notación matemática normal o la notación simplificada siguiente:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots, \quad (68)$$

La solución de la ecuación de onda para una cuerda con movimiento transversal sujeta a tensión [6]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (69)$$

se puede obtener si se escribe esta ecuación en la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_l} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_l} \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi = 0 \quad , \quad (70)$$

donde $c_l = \sqrt{T/\mu}$ es la velocidad de sonido en la cuerda. El operador diferencial de la ecuación de onda actúa sobre el desplazamiento ξ y se ha dividido en dos factores, los cuales sólo son posibles de obtener, cuando c_l , la velocidad de propagación de la onda, no es función de x o t . Si se hace el cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= x - c_l t \\ v &= x + c_l t \end{aligned} \quad (71)$$

se pueden sustituir estas ecuaciones en (70) y se llega a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_l} \frac{\partial}{\partial t} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial u} \quad (72)$$

y

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_l} \frac{\partial}{\partial t} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial v} \quad . \quad (73)$$

Introduciendo estos cambios, la ecuación (70) se reduce a

$$4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = 0 \quad . \quad (74)$$

La ecuación de onda presentada en esta forma, tiene la solución

$$\xi(u, v) = f_1(u) + f_2(v) \quad , \quad (75)$$

donde $f_1(u)$ y $f_2(v)$ son funciones completamente arbitrarias, no relacionada una con la otra y limitadas en la forma sólo por los requisitos de continuidad. De esta manera se llega a la solución para la ecuación de onda conocida como de D'Alembert [6 y 9],

$$\xi(u, v) = f_1(x - c_1 t) + f_2(x + c_1 t) \quad . \quad (76)$$

Para una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, se tienen dos soluciones independientes de forma funcional definida, que pueden combinarse en una solución general que contiene dos constantes arbitrarias. De manera diferente, la solución de la ecuación diferencial parcial unidimensional de onda contiene dos funciones arbitrarias de $x - c_1 t$ y $x + c_1 t$ como soluciones. Ya que la ecuación de onda es lineal, cada una de estas soluciones puede a su vez ser considerada como la suma de muchas otras funciones de $x \pm c_1 t$.

Cuando el movimiento ondulatorio de una onda elástica no se puede describir por medio de la ecuación (71), debido a que se presente el caso en el que la velocidad de la onda es función de su frecuencia (dispersión), se puede demostrar que las ondas no sinusoidales cambian su forma conforme viajan y las únicas que conservan su forma funcional al viajar en el medio son las ondas sinusoidales.

La función ondulatoria de la ecuación (71), puede expresarse como

$$\xi(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - c_1 t) + A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + c_1 t) \quad (77)$$

donde λ es la longitud de onda, $c_1 = \sqrt{T/\mu}$ es la velocidad del sonido y A es la amplitud del movimiento [11]. Para una onda viajera que se mueve hacia la derecha, la ecuación (77) se reduce a

$$\xi(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - c_1 t) \quad (78)$$

y usándose la representación de la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (79)$$

este mismo movimiento sinusoidal se puede escribir como

$$\xi(x, t) = \operatorname{Re} \left(A \exp \left(i \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - c_1 t) \right) \right) \right), \quad (80)$$

donde Re , se refiere a la parte real del vector complejo $A \exp \left(i \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - c_1 t) \right) \right)$.

Hasta ahora se ha presentado la solución de D'Alembert de la ecuación de onda sin poner énfasis en las condiciones iniciales y las condiciones de frontera de los problemas. Si ahora se analiza la solución completa para el problema de valor inicial de la ecuación de onda se tiene

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty \quad (81)$$

con valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \right\} \quad -\infty < x < \infty \quad (82)$$

es

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (83)$$

Esta solución, formada por la superposición de dos ondas viajeras que se mueven en direcciones opuestas, se puede obtener por medio de la transformada de Fourier de x , por medio de la transformada de Laplace de t o por la técnica de transformación en coordenadas canónicas. En la ecuación diferencial parcial anterior no existen fronteras para x , ya que puede variar desde menos infinito hasta más infinito. Si ahora las condiciones de frontera fueran

$$u(0, t) = 0 \quad 0 < t < \infty \quad (84)$$

las condiciones iniciales cambian a

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < \infty \quad (85)$$

y la solución de la ecuación diferencial parcial ahora es

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi & x \geq ct \\ \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi & x \leq ct \end{cases} \quad (86)$$

Hasta ahora se ha presentado la solución para la ecuación diferencial parcial de onda primero sin fronteras en la variable espacial y posteriormente para cuando la variable

espacial se limita a todo el dominio de los números positivos. Si la ecuación de onda se limita a valores finitos en la variable espacial tanto en la dirección negativa y en la positiva se tiene

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad 0 < t < \infty \quad . \quad (87)$$

Para este caso, pueden presentarse tres clases generales de condiciones de frontera:

Extremos controlados

$$u(0, t) = g_1(t) \quad (88)$$

$$u(L, t) = g_2(t) \quad (89)$$

Fuerza definida en las fronteras

$$u_x(0, t) = g_1(t) \quad (90)$$

$$u_x(L, t) = g_2(t) \quad (91)$$

Fronteras elásticas

$$u_x(0, t) - \gamma_1 u(0, t) = g_1(t) \quad (92)$$

$$u_x(L, t) - \gamma_1 u(L, t) = g_1(t) . \quad (93)$$

Con las ecuaciones diferenciales parciales lineales unidimensionales, sus condiciones de frontera y sus condiciones iniciales descritas hasta ahora, se puede estudiar el movimiento ondulatorio de la vibración transversal, longitudinal y torsional de cuerdas y sólidos, las ondas longitudinales sonoras, las ondas electromagnéticas de la luz y la electricidad, las ondas de probabilidad de la mecánica cuántica y las ondas transversales en el agua.

B.5.1 Soluciones de ecuaciones de ondas de choque

Las ondas de choque son fenómenos físicos que en muchos casos pueden describirse por ecuaciones diferenciales parciales de coeficientes variables y no lineales del tipo llamado, ecuaciones de conservación. El método de las características, es una técnica muy importante para solucionar problemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden con valores iniciales [12].

La ecuación de difusión

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \quad (94)$$

donde α^2 es el coeficiente de difusión y v es la velocidad del medio, es una ecuación diferencial parcial de coeficientes variables del tipo

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \quad (95)$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x) \quad -\infty < x < \infty. \quad (96)$$

Si no hay difusión, $\alpha = 0$ y sólo se tiene convección. Entonces la onda, solución de la ecuación

$$u_t = -vu_x \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \quad (97)$$

viajará a lo largo del eje x con una velocidad v .

Si $a(x,t)$ y $b(x,t)$ de la ecuación (95) son constantes, se tendrá la solución de una onda viajera, en cambio si son funciones de x y t , entonces la velocidad del medio variará a lo largo de la corriente y con el tiempo. La solución de (95) se basa en el hecho físico de que el disturbio inicial en un punto x se propaga sólo a lo largo de una curva en el plano tx . A esa curva se le llama característica. Este fenómeno contrasta con muchas otras ecuaciones diferenciales parciales, donde un disturbio inicial en un punto afecta a todos los puntos de las demás soluciones posteriores. Como consecuencia de esta característica de las ecuaciones diferenciales parciales se ha desarrollado el método de solución llamado método de las características donde (95) se resuelve haciéndose una transformación de coordenadas. Las coordenadas x y t se remplazan por dos nuevas s y τ que tienen las propiedades siguientes:

s sólo cambiará a lo largo de la curva característica

τ cambiará a lo largo de la curva inicial.

Con esto el método de las características transforma la ecuación diferencial parcial en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que siguen la secuencia siguiente:

A partir de (95) se obtienen las ecuaciones diferenciales características

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t) \quad (98)$$

$$\frac{dt}{ds} = b(x,t) \quad (99)$$

Posteriormente se integran (98) y (99) y se hallan las constantes de integración a partir de las condiciones

$$x(0) = \tau \quad y \quad t(0) = 0. \quad (100)$$

Como siguiente paso, se hace la transformación de coordenadas de (x,t) a (s, τ)

$$x = x(s, \tau) \quad y \quad t = t(s, \tau) \quad (101)$$

considerándose que

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = a(x, t)u_x + b(x, t)u_t \quad (102)$$

y sustituyéndose (102) en (95) se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{ds} + c[x(s, \tau), t(s, \tau)]u = 0 \quad 0 < s < \infty \quad (103)$$

con condición inicial

$$u(0) = f(\tau) \quad . \quad (104)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria se resuelve junto con su condición inicial, para obtener la solución $u(s, \tau)$ y finalmente se resuelve para s y τ en términos de x y t .

El método de las características para la integración de ecuaciones diferenciales parciales es usado para resolver ecuaciones de coeficientes variables y ecuaciones no lineales como las de conservación, donde se describen fenómenos físicos tales como los de la teoría del transporte y los de las ondas de choque.

Las ecuaciones diferenciales parciales de conservación pueden ser:

para una dimensión espacial

$$u_t + f_x = 0 \quad (105)$$

para dos dimensiones espaciales

$$u_t + f_x + f_y = 0 \quad (106)$$

o para tres dimensiones espaciales

$$u_t + f_x + f_y + f_z = 0 \quad . \quad (107)$$

Analizado la ecuación (105), se puede ver que se tienen dos incógnitas, la densidad u y el flujo f , el cual, a su vez es una función de la densidad. Si la funcionalidad entre el flujo y la densidad es creciente, resulta natural pensar que si aumenta u también aumentará f . Para estas situaciones, algunos modelos típicos de flujo pueden ser

$$f(u) = Au(1-u) \quad (106)$$

$$f(u) = ku \quad (107)$$

$$f(u) = u^2 \quad . \quad (108)$$

Si se sustituye alguno de estos modelos en la ecuación de conservación se tiene

$$u_t + \frac{df}{du} u_x = u_t + g(u)u_x = 0 \quad . \quad (109)$$

Por ejemplo, si se toma el flujo como $f(u) = u^2$, la ecuación de conservación es

$$u_t + 2uu_x = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad 0 < t < \infty \quad . \quad (110)$$

Cuando las curvas características se juntan, se presenta el fenómeno denominado “onda de choque”, que lleva a una solución discontinua del problema aquí considerado. El parámetro más importante en este caso es la rapidez de propagación del frente de choque que se calcula como

$$S = \frac{f(u_d) - f(u_i)}{u_d - u_i} \quad , \quad (111)$$

donde u_d y u_i son los valores de las densidades a la derecha y a la izquierda del frente de onda. $f(u_d)$ y $f(u_i)$ son los valores correspondientes al flujo para esos mismo puntos.

Referencias

1. Loske M A, Shock Wave Physics for Urologists, Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, UNAM, 2007, pp. 39-50. ISBN: 978-970-32-4377-8.
2. Harris G J, Linear Elastic Waves, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2001, pp. 1-5.
3. Volterra E, Gaines H J, Advanced Strength of Materials, Prentice Hall, 1971, pp. 8-28.
4. Chou Ch P, Pagano J N, Elasticity Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches, Dover, 1992, pp. 2-62.
5. Sokolnikoff S I, Mathematical Theory of Elasticity, Mc Graw Hill, 1956, pp. 6-42.
6. Elmore C W, Heald A M, Physics of Waves, Dover, 1985, pp. 5-13, 98-101, 135-147, 169-175.
7. Granger A R, Fluid Mechanics, Dover, 1995, pp. 180-187.
8. Zel'dovich B Y, Raizer P Y, Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Dover, 2002, pp. 45-67.
9. Graff F K, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, 1991, pp. 1-23.
10. Feynman P R, Leighton B R, Sands Matthew, Física, Mc Graw Hill, 1998, pp. 47-1 – 51-14.
11. French P A, Vibration and Waves, W. W. Norton & Co., 1971, pp. 161-246.
12. Farlow S J, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, 1982, pp. 205-222.

APÉNDICE C

Litotricia extracorpórea

C.1 Litotritores extracorpóreos

Desde los inicios de la litotricia extracorpórea, se han desarrollado más de sesenta tipos de litotritores. A pesar de que estos equipos evolucionaron con la finalidad de mejorar la desintegración de los cálculos y reducir los daños a los tejidos, sus principios básicos de operación no han cambiado [2, 11, 12]. Un litotritor está compuesto por un generador de ondas de choque, un sistema para concentrar las ondas de choque, un equipo de imagenología para la localización del cálculo y un conjunto de elementos automatizados para el posicionamiento del paciente y/o del generador. Las ondas de choque se producen fuera del paciente, se concentran y se dirigen hacia el cálculo urinario que se desea fracturar [14]. Para lograr la pulverización del cálculo se requiere de varios cientos de ondas de choque. En general los circuitos eléctricos de todos los generadores de ondas de choque clínicos operan de manera semejante. Inicialmente se carga un capacitor de alto voltaje y posteriormente se descarga súbitamente, suministrando toda su energía a un transductor electro-acústico. En los últimos 20 años, la tendencia ha sido obtener regiones focales más pequeñas, lograr un enfoque más preciso y reducir el daño a los tejidos expuestos a las ondas de choque; sin embargo, basándose en resultados clínicos, algunos autores han sugerido regresar a los litotritores con regiones focales más grandes y presiones menores. Los litotritores se pueden clasificar en electrohidráulicos, piezoeléctricos y electromagnéticos [2]. En esta tesis únicamente se describirá, de manera superficial, el funcionamiento de los sistemas electrohidráulicos y piezoeléctricos. Los litotritores electrohidráulicos se describen porque son los más populares, además de que fueron los primeros en salir al mercado. Los generadores piezoeléctricos se tratan ya que para este trabajo se usó un generador de ondas de este tipo.

C.1.1 Litotritores electrohidráulicos

Como se mencionó en la introducción, en los litotritores electrohidráulicos se genera una descarga de alto voltaje (15 a 30 kV) entre dos electrodos sumergidos en agua, localizados en el foco $F1$ de un reflector elipsoidal. La energía eléctrica es suministrada por una fuente de alto voltaje y se almacena en un conjunto de capacitores. Los electrodos se conectan a las terminales del conjunto de capacitores, los cuales liberan la energía cuando se activa un interruptor de chispa. El pico de la corriente eléctrica en la descarga es del orden de 10 a 20 kA, dependiendo de la inductancia del circuito. En el espacio localizado entre los

electrodos (aproximadamente 1 a 2 mm) se forma un canal de plasma que se expande súbitamente comprimiendo al medio circundante, el cual normalmente es agua, produciéndose de esta forma una onda de choque esférica. Suponiendo que el agua tiene propiedades isotrópicas, la velocidad de propagación de la onda en todas las direcciones es la misma.



Figura C.1

Litotritor electrohidráulico extracorpóreo modelo *Lithospace*, marca Advanced Shockwave Technology GmbH, Jena, Alemania.

La onda de choque se origina en el primer foco ($F1$) de una sección de un elipsoide de revolución metálico, con el fin de que sea parcialmente reflejada y concentrada en el segundo foco ($F2$), lugar en donde se deberá colocar el cálculo que se pretende pulverizar. La coincidencia del cálculo con la localización del segundo foco geométrico del elipsoide de revolución del litotritor, se logra con la ayuda de un sistema de fluoroscopia y/o de ultrasonido [1]. La figura C.1 muestra un litotritor electrohidráulico. Usualmente las presiones máximas en esta región son del orden de 35 a 150 MPa. Las descargas eléctricas de la bujía dentro del agua generan pulsos de presión de muy corta duración. El perfil de estos pulsos de presión (figura C.2) depende de varios parámetros, algunos de los cuales, como el voltaje de la descarga, la capacitancia del circuito, la conductividad del agua y la temperatura pueden ser controlados. El tiempo de ascenso de la presión es más corto en los generadores electrohidráulicos que en los piezoeléctricos o electromagnéticos. Dicho tiempo es de 1 a 10 ns [2, 3]. En estos equipos aproximadamente el 5% de la energía eléctrica se convierte en energía mecánica [4].

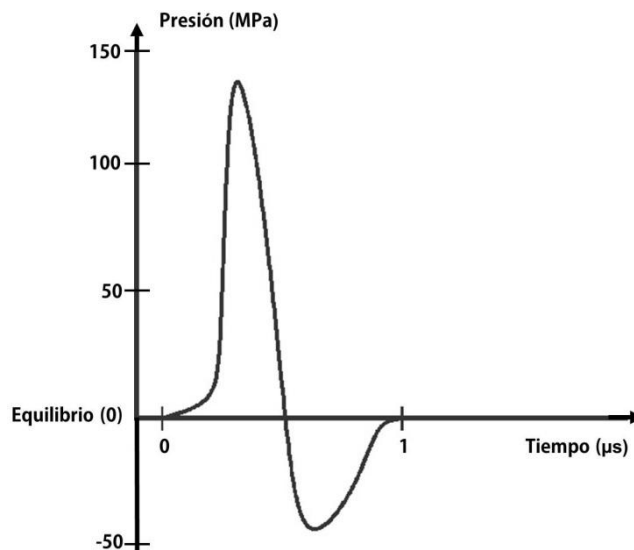


Figura C.2

Perfil de una onda de choque generada con un litotritor electrohidráulico. Tiempo 0, instante de llegada de la onda de choque. Tiempo 1, instante en el que la onda de choque ya pasó por el lugar de observación. Duración del pulso de 1 a 5 μs . Presiones máximas de hasta 150 MPa. Tiempo de ascenso del pulso, decenas de nanosegundo.

En realidad, en los litotritores electrohidráulicos se genera más de una onda de choque. La primera es la onda de choque debida al rompimiento eléctrico del agua en *F1*, que viaja directamente de *F1* a *F2* sin ser reflejada en la superficie del elipsoide de revolución (ver figura C.3). Su contribución a la fragmentación del cálculo es pequeña. La onda de choque reflejada llega a *F2* décimas de microsegundos después que la directa. Ambas ondas son seguidas por otro pulso reflejado, generado cuando la burbuja de plasma colapsa en *F1*. Hay evidencia de que la onda de choque enfocada en *F2* es la principal responsable de la desintegración de los cálculos, junto con los fenómenos asociados al colapso de las burbujas de cavitación en *F2* [2, 5, 6].

El paciente se recuesta sobre la camilla del litotritor. Usando el sistema de posicionamiento del equipo, se hace coincidir el cálculo con el foco *F2* (ver figura C.1). De esta manera las ondas de choque entran en el cuerpo y son enfocadas sobre el cálculo. Actualmente, para acoplar la energía generada en *F1* al cuerpo del paciente, se usa un colchón lleno de agua o una tina con agua (ver figura C.1). Un aspecto de consecuencias clínicas importantes es la forma del perfil de presión. En general, la amplitud del pulso de rarefacción (frecuentemente denominado “pulso negativo”) alcanza su máxima amplitud (valor de presión mínimo) 10 a 30 mm antes de *F2*. Ya que la fase negativa de la onda de choque genera cavitación acústica, uno de los mecanismos de fragmentación de cálculos renales más importantes, algunos investigadores han sugerido situar el cálculo dos centímetros más cerca de *F1*, en lugar de colocarlo exactamente en *F2* [7, 8].

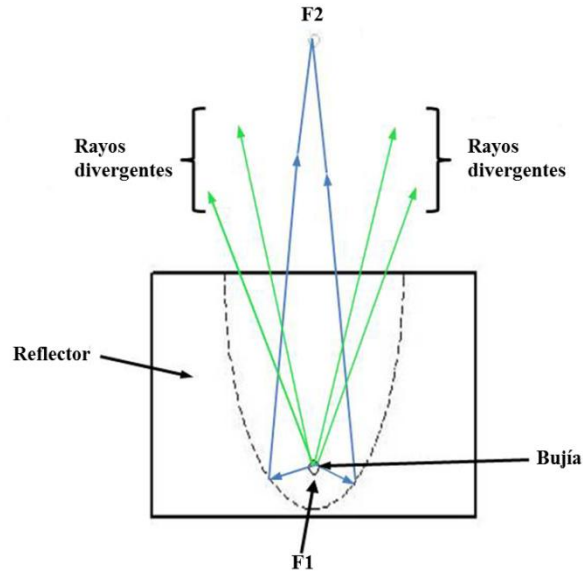


Figura C.3

Reflector elipsoidal con rayos convergentes y divergentes.
Rayos convergentes en $F2$ y como divergente en verde.

La eficiencia en la desintegración de los cálculos depende en buena medida del diseño del reflector y del tipo y forma de la bujía o electrodo utilizado para generar las ondas de choque [9, 10].

4.1.1 Litotritores piezoeléctricos

Un cristal piezoeléctrico, como por ejemplo, un cristal de titanato de bario o de titanato circonato de plomo, es un material que tiene la propiedad de aumentar o disminuir súbitamente su tamaño al aplicarle una abrupta diferencia de potencial eléctrico, comprimiendo al medio que lo circunda, generándose de esta manera una onda de compresión. Los litotritores piezoeléctricos, del tipo usado en este estudio, cuentan con unos 3000 cristales montados sobre un cascarón esférico de aproximadamente 500 mm de diámetro [13]. Todos los cristales reciben un pulso de alto voltaje (5 a 10 kV). El pulso de compresión generado se transforma por superposición en una onda de choque que converge al centro de curvatura del cascarón esférico, región donde se coloca el cálculo urinario. Las ondas de choque se acoplan al paciente a través de una membrana de látex o directamente por contacto del costado del paciente con el espejo de agua de la tina. Los cristales piezoeléctricos se aíslan del agua, por medio de un polímero flexible.

El circuito eléctrico está formado por un sistema para la carga de los capacitores y un sistema para el control de las descargas. Para controlar la frecuencia de generación de las

ondas de choque, se usa un interruptor de estado sólido accionado por un generador de pulsos. El tiempo de ascenso de la onda de choque generada con un litotritor piezoeléctrico es del orden de 300 ns [2]. Entre sus ventajas se encuentran el bajo desgaste que sufren sus componentes, la generación de un campo electromagnético débil y una apertura relativamente grande. Estos litotritores generan pulsos de rarefacción con amplitudes mayores que los electrohidráulicos, causando mayor cavitación.

Referencias

1. Coptcoat M J, Miller R A, Wickham J E A, The End of the Stone Age, London, BDI Publishing, 1987.
2. Loske M A, Shock Wave Physics for Urologists, México, UNAM, 2007, pp. 61-84.
3. Chitnis P V, Characterization and comparative analysis of extracorporeal shock wave devices, M. Sc. Thesis, Boston: Boston University, College of Engineering, 2002.
4. Coleman A J, Saunders J E, Choi M J, An experimental shock wave generator for lithotripsy studies, Physics in Medicine and Biology, 1989, 34(11), pp. 1733-1742.
5. Pischalnikov Y A, Saposhnikov O A, Bailey M R, Pischalnikova I V, Williams J C Jr, McAteer J A, Cavitation selectively reduces the negative-pressure phase of lithotripter shock pulses, Acoustics Research Letters Online, 2005, 6(4), pp. 280-286.
6. Chitnis P V, Cleveland R O, Quantitative measurements of acoustic emissions from cavitation at the surface of a stone in response to a lithotripter shock wave, Journal of the Acoustical Society of America, 2006, 119(4), pp. 1929-1932.
7. Sokolov D L, Bailey M R, Crum L A, Blomgrem P M, Connors B A, Evan A P, Prefocal alignment improves stone comminution in shockwave lithotripsy, The Journal of Endurology, 2002, 16(10), pp. 709-715.
8. Sokolov D L, Bailey M R, Crum L A, Blomgrem P M, Connors B A, Evan A P, Pre-focal alignment improves lithotripsy stone comminution in vitro, The Journal of Endurology, 2003, 169, pp. 488-489.
9. Loske A M, Prieto F E, The influence of electrode shape on the performance of electrohydraulic lithotripters, Journal of Lithotripsy and Stone Disease, 1993, 5(4), pp. 228-239.

10. Loske A M, Prieto F E, Improving underwater shockwave focusing efficiency, In: Urolithiasis, Pak CYC, Resnick MI, Preminger GM (eds.), Dallas, TX, Millet The Printer, 1996, pp. 401-402.
11. Brümmer F, Staudenraus J, Eisenmenger W, Hülser D F, Fundaments of the physics and medical and biological effects of different generated shock waves with respect to the clinical application, Bundesministerium für Forschung und Technologie, 1992, 8706, pp. 6.
12. Loske A M, Applications of shock waves in medicine, In: Handbook of Shock Waves, Ben-Dor G, Elperin T, Igra O, Lifshitz A (eds.), San Diego, San Francisco, New York, Boston, Academic Press, 2001, Chapter 12.
13. Loske A M, Prieto F E, Fundamentos técnicos de litotripsia extracorporal, México City, JGH Editores, 1999. ISBN 970-681-001-3.
14. Lokhandwalla M, Stutervant B, Fracture mechanics model of stone comminution in ESWL and implications for tissue damage, Physics in Medicine and Biology, 2000, 45, pp. 1923-1949.

APÉNDICE D

Listado de los programas usados en la simulación numérica

D.1 Programa principal

```
%Programa principal que llama uu_m.m,

global rr0 te tg
global ttand
%global pes
%global ps rhos hhs ccs udospuntos
%tiempo de retardo de la segunda onda

te=290.5e-6; % tiempo en segundos que tarda en llegar la segunda onda de
choque
tg=5350e-6; %Tiempo grande de finalización
ttand=te;
%Tiempo de referencia para llegar al foco del generador de ondas de
choque
tr = 246e-6; % tiempo en segundos que tarda en llegar la onda de choque

%Tiempo adimensional = tiempo entre tiempo de referencia (t/tr)

%Presión atmosférica usada como referencia para normalización
adimensional
p0 = 101325; %Presión en Pa

rr0=7e-5; %radio inicial de la burbuja (m)

%Radio adimensional = radio(t) entre radio inicial de la burbuja (r/rr0)

%Velocidad del sonido inicial en el agua
cc0 = 1403; % Velocidad (m/s)

%Velocidad del radio de la burbuja adimensional (rpunto/cc0)
it=.003e-6;

initial=[rr0 0]; % vector estado inicial.
tf = 0.00350; % el tiempo final.

preci = odeset('AbsTol',[1e-10 1e-10], 'RelTol',1e-12);

%Llamada a la función uu_m

%Llamada a la funcion de integracion de la EDO
```



```

[t,r] = ode45(@uu_m, (0:it:tf), initial, preci);

[pe rho hhs ccs pss udot]=rpuntopunto(t,r);

%Presión
presion=pe;

%Pulso de presión
pulso=pss;

%Densidad
ro=rho;

%Entalpía
entalpia=hhs;

%Velocidad del sonido
velocidadsonido=ccs;

%Ruido de cavitación
rca=ro.*(r(:,1).*udot(2,:)+2.*r(:,2).^2);

%Gráfica del radio en función del tiempo
figure;
subplot(2,1,1)
plot(t/tr,log10(r(:,1)/rr0)) %axis([0,0.0004, -100, 0.002])
title('Radio adimensional de la burbuja'),xlabel('Tiempo adimensional
(t/tref)'),ylabel('Log10 Radio adimensional (R/R0)'), grid;

% Gráfica del pulso de presión
subplot(2,1,2)
plot(t/tr,pulso/p0)
title('Pulso de presión'), xlabel('Tiempo adimensional
(t/tref)'),ylabel('Presión adimensional (P/P0)'),grid;

figure;
subplot(2,1,1)
plot(t/tr,log10(r(:,2)/cc0)) %axis([0,0.0004, -1000, 5000])
title('Velocidad adimensional del radio de la burbuja'),xlabel('Tiempo
adimensional (t/tref)'),ylabel('Log10 Velocidad radio adimensional
(Rpunto/cc0)'),grid;

%Pulso de presión
subplot(2,1,2)
plot(t*1e6,pulso/1e6)
title('Pulso de presión'), xlabel('Tiempo
(microsegundos)'),ylabel('Presión (MPa)'),grid;

%Ruido de cavitación
figure;
plot(t/tr,log10(rca/p0))

```

```

title('Ruido de cavitación adimensional de la burbuja'), xlabel('Tiempo
adimensional (t/tref)'), ylabel('Log10 Ruido cavitación adimensional
(RCA/P0)'), grid;

%Ruido y radio combinados
figure;
%Ruido
subplot(2,1,1)
plot(t/tr,log10(rca/p0))
title('Ruido de cavitación adimensional'), xlabel('Tiempo adimensional
(t/tref)'), ylabel('Log10 Ruido cavitación adimensional (RCA/P0)'), grid;

%Radio
subplot(2,1,2)
plot(t/tr,log10(r(:,1)/rr0)) %axis([0,0.0004, -100, 0.002])
title('Radio adimensional de la burbuja'),xlabel('Tiempo adimensional
(t/tr)'),ylabel('Log10 Radio adimensional (R/R0)'), grid;

```

D.2 Funciones

Función uu_m

```

function udot = uu_m(t, r)

global aa bb rr0 p0 sigma eta mux m pa alfa w cc0 rho0

cc0=1403;           % cc_\infty
aa=281173165;      % aa
bb=281071841;      % bb
p0=.101325e6;      % p0
rho0=999.9;        % \rho0
mux=0.001787;      % \mu
sigma=0.07564;     % \sigma
m=7;               % = m
eta=1.4;           % = \eta
pa=1000*p0;        % PA
alfa=9.1e5;        % \alpha
f=83300;           % No es global
w=2*pi*f;          % \omega
rr0 = 7e-5;        % rr00 y rr0

%Cálculo de la presión en el líquido que rodea a la pared de la burbuja
ps = pL(r);
%Cálculo de la densidad del líquido
rhos = rho(ps);
%Cálculo de la entalpía del líquido
hhs = hh(t,ps);
%Cálculo de la velocidad del sonido en el líquido en la pared de la
burbuja
ccs = cc(t,ps);
%Derivada de la presión con respecto al radio
dpdrs = dPdR(r);
%
```

```

u1 = r(2);
ua = (1+r(2)/ccs)*hhs/(r(1)*(1-r(2)/ccs));
ub = (r(2)*dpdrs)/(ccs*rhos);
uc = -(3/2)*r(2)*r(2)*(1-r(2)/(3*ccs))/((1-r(2)/ccs)*r(1));
%udospuntos = ua+ub+uc;
udot = [u1;ua+ub+uc];
end

function pl=pL(r)
%Presión en la pared de la burbuja
% rr: radio, rv: radial
%presión del gas pg =(p0+2*sigma/rr0)*(rr0./rr).^(3*eta)
%contribución de la tensión superficial 2*sigma./rr
%parte de esfuerzo cortante por la viscosidad 4*mux*rv./rr
global p0 sigma rr0 eta mux
rr = r(1);
rv = r(2);
pl = (p0+2*sigma/rr0)*(rr0./rr).^(3*eta) - 2*sigma./rr- 4*mux*rv./rr;
end

function rHo = rho(p)
% la densidad como función de la presión
global aa bb rho0 m
rHo = rho0.*((p+bb)./aa).^(1/m);
end

function c = cc (t,p)
%la velocidad del sonido en la pared de la burbuja
global cc0 m
c = sqrt(cc0*cc0 + (m-1)*hh(t,p));
end

function h = hh (t, p)
%la entalpía como función de una sola variable: la presión
global m aa bb p0 rho0
h=(m*aa.^(1./m))*((bb + p).^((-1 + m)/m)...
- (bb + p0 + pAR(t)).^((-1 + m)/m))./((-1 + m)*rho0);
end

function pss=pAR(t)
%la suma de los tres pulsos de presión
global te tg;
if (t < 0)
    pss = 0;
elseif (t < te)
    pss = pA(t);
elseif (te <= t && t < tg)
    pss = pg(t-te);
else
    pss = 0;
end
end

function psd=pA(t)
%pulso de presión aplicado

```

```

global pa alfa w
psd=(2*pa).*(exp(-alfa.*t)).*(cos(w.*t+(pi/3)));
end

function psg = pg(t)
% pulso gordo
global pa alfa w
pb = 1000*128339;
h = 1e-6;
if (t < 0)
    psg = 0;
elseif (t <= h)
    psg = pa.*t./h;
elseif (t < 60e-6)
    psg = 2*pb.*(exp(-alfa.*t./8)).*(cos(w.*t./8+(pi/3)));
else
    psg = 0;
end
end

function dpdr = dPdR(r)
% la derivada de la presión respecto del radio
global mux eta rr0 p0 sigma
dpdr=- (3*eta/rr0)*(p0+2*sigma/rr0)*(rr0/r(1))^(3*eta+1)...
    + (2*sigma+4*mux*r(2))/r(1)^2;
end

```

Función rdotdot

```

function [ps rhos hhs ccs pat udot] = rpuntopunto(t, r)

global aa bb rr0 p0 sigma eta mux m pa alfa w cc0 rho0

cc0=1403;           % cc_\infty
aa=281173165;      % aa
bb=281071841;      % bb
p0=.101325e6;      % p0
rho0=999.9;        % \rho0
mux=0.001787;      % \mu
sigma=0.07564;     % \sigma
m=7;               % = m
eta=1.4;           % = \eta
pa=1000*p0;        % PA
alfa=9.1e5;        % \alpha
f=83300;           % No es global
w=2*pi*f;          % \omega
rr0 = 7e-5;        % rr00 y rr0

%Cálculo de la presión en el líquido que rodea a la pared de la burbuja
ps = pL(r);

```

```

%Cálculo del pulso de presión
pat=pAR(t);
%Cálculo de la densidad del líquido
rhos = rho(ps);
%Cálculo de la entalpía del líquido
hhs = hh(t,ps);
%Cálculo de la velocidad del sonido en el líquido en la pared de la
burbuja
ccs = cc(t,ps);
%Derivada de la presión con respecto al radio
dpdrs = dPdR(r);
%
u1 = r(:,2);
ua = (1+r(:,2)./ccs).*hhs./(r(:,1).*(1-r(:,2)./ccs));
ub = (r(:,2).*dpdrs)./(ccs.*rhos);
uc = -(3/2).*r(:,2).*r(:,2).*(1-r(:,2)./(3*ccs))./((1-
r(:,2)./ccs).*r(:,1));
udot = [u1;ua+ub+uc];
end

function pl=pL(r)
%presión en el líquido donde termina la burbuja, que rodea la burbuja
% rr: radio, rv: radial
%presión del gas pg =(p0+2*sigma/rr0)*(rr0./rr).^3*eta)
%contribución de la tensión superficial 2*sigma./rr
%parte de la viscosidad 4*mux*rv./rr
global p0 sigma rr0 eta mux
rr = r(:,1);
rv = r(:,2);
pl = (p0+2*sigma/rr0)*(rr0./rr).^3*eta - 2*sigma./rr- 4*mux*rv./rr;
end

function rHo = rho(p)
% la densidad como función de la presión
global aa bb rho0 m
rHo = rho0.*((p+bb)./aa).^(1/m);
end

function c = cc(t,p)
%la velocidad del sonido en la pared de la burbuja
global cc0 m
c = sqrt(cc0*cc0 + (m-1).*hh(t,p));
end

function h = hh(t,p)
%la entalpía como función de una sola variable: la presión
global m aa bb p0 rho0
pat=pAR(t);
h=(m.*aa.^(1./m))./(rho0.*(m-1)).*((bb + p).^(m-1)./m)...
- (bb + p0 + pat).^(m + 1)./m);
end

function pss=pAR(t)
global ttand
global pa
%
```

```

if ttand<=0
% pulso de presion.
    if (t < 0)
        pss = 0;
    elseif (t>= 0)
        pss = pB(t);
    end
%
%elseif (ttand>=t)
%    pss = pA(t);
%
else
    if (t < 0)
        pss = 0;
    elseif (t>=0)
        tdif=t-ttand;
        tdif1=tdif(tdif<=0);
        ted=length(tdif1);
        lt=length(t);
        mt=lt-ted;
        if (mt==0)
            pss1=pA(t);
            pss2=0;
        else
            tdifdos=t(1:mt);
            pss1=pA(t);
            pss21=zeros(1,ted)';
            %Tiempo de duraci3n del pico del pulso
            tuno=tdifdos(tdifdos<= 0.8e-6);
            ttuno=length(tuno);
            pss221=zeros(1,ttuno)';
            for ka=1:ttuno
                pss221(ka)= pa.*tuno(ka)./(1e-6);
            end
            nt=mt-ttuno;
            tdiftres=tdifdos(1:nt);
            pss222=pB(tdiftres);
            pss22=[pss221;pss222];
            pss2=[pss21; pss22];
        end
        pss = pss1 + pss2;
    end
end
end

function pss=pA(t)
%pulso de presion aplicado
global pa alfa w
pss=(2.*pa).*(exp(-alfa.*t)).*(cos(w.*t+(pi/3)));
end

function pss=pB(t)
%pulso de presion aplicado
global pa alfa w
pss=(2.*pa).*(exp(-alfa.*t./8)).*(cos((w.*t./8)+(pi/3)));
end

```

```
function dpdr = dPdR(r)
% la derivada de la presión respecto del radio
global mux eta rr0 p0 sigma
dpdr=-(3.*eta./rr0).*(p0+2*sigma./rr0).*(rr0./r(:,1)).^(3.*eta+1)...
      + (2.*sigma+4.*mux.*r(:,2))./r(:,1).^2;
end
```