UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO.

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
ACTUARIO

PRESENTA
JUAN MANUEL SÁNCHEZ HUERTA

Asesor: ACT. JOSÉ ROBERTO ARRIAGA ALEMÁN

SEPTIEMBRE 2012

A mi Madre.

Agradecimientos

En las siguientes líneas deseo expresar mi reconocimiento a todos aquellos que participaron directa o inderectamente en la realización de este logro.

La principal motivación no sólo para culminar el presente trabajo, sino que también fue pieza fundamental durante la carrera, es la mujer que me enseño a valorar todo lo me rodea y me refiero tanto aprovechar las oportunidades como apreciar las cualidades y generosidad de las personas, y sobretodo me ha enseñado que mientras exista un objetivo, sueño o como se le llame no importa si n son las veces que fracaso o me caigo porque $n+1$ son las veces que me he de levantar, por ello y por su invaluable e incondicional apoyo ¡Gracias Madre!.

Le agradezco a mi amigo y asesor por su tiempo, entusiasmo y apoyo brindado para la realización del trabajo, que no sólo se cumplió con un mero trámite (el título) sino que el tema y las consecuencias de la tesina reencendieron el deseo de continuar mi preparación y profundizar temas de interés. También quiero agradecer a todos y cada uno de los sinodales por su apoyo y tiempo dedicado a la lectura de esta tesina.

Gracias a todos mis compañeros y amigos que colaboraron desde una palmada de aliento hasta la recopilación de material como el pasar algunos detalles en LaTex, ya que sin ellos talvez hubiese tardado más tiempo en terminar el trabajo.

Finalmente pero no menos importante, estoy agradecido con la Universidad Nacional Autónoma de México, pues se ha convertido mas que en un segundo hogar en una extensión del mismo, forjando principios y valores como universitario.

Índice general

Introducción

Esta investigación tiene como principal objetivo dar una breve pero detallada introducción al cálculo estocástico, ya que ha sido muy útil en diversas áreas del conocimiento, como la física, biología, finanzas matemáticas, entre otras. Las funciones que aparecen en las aplicaciones satisfacen una ecuación integral de la forma

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))dW(s), \quad \forall t_0 \leq t \leq T. \tag{0.1}$$

Donde $X(t)$ representa la evolución de un fenómeno al tiempo t que está constituido por una parte determinista pero perturbado o corregido por una parte aleatoria. En la literatura, el movimiento brwoniano o proceso de Wiener es utilizado para representar dicha perturbación, ya que es un proceso gaussiano con incrementos independientes cuya derivada en el sentido generalizado es el ruido blanco gaussiano (veáse [Ar]).

Para que la ecuación (0.1) tenga sentido es necesario definir la segunda integral, ya que W no es de variación acotada sobre cualquier intervalo (ver Corolario 1.1) impidiendo su definición en el sentido de Riemann-Stieltjes.

La organización del trabajo está dividida en dos partes. Una primera parte con dos capítulos, en el primero se fija la notación empleada y se introduce el proceso de Wiener W, analizando algunas propiedades de dicho proceso motivando la continuación de la segunda parte. En el segundo capítulo estudiaremos en forma general los procesos estocásticos de segundo orden, que nos permitirán definir un cálculo diferencial e integral en L_2. Se presentan además algunos ejempos.

En la segunda parte, se introducen las nociones básicas del cálculo estocástico en el sentido de Itô. En el capítulo tres se define la integral de Itô [I] para procesos estocásticos adapatados a la filtración del procesos de Wiener, y que son cuadrado integrables. La de idea de esta integral es similar a la integral de una función con respecto a una medida. Primero se define para procesos simples como si W fuera de variación acotada y posteriormente se aproxima por integrales simples. Concluimos este capítulo extendiendo la definición de la integral de Itô para procesos no-anticipantes. Finalizamos con el capítulo cuatro definiendo el concepto de ecuación diferencial estocástica. Se presentan dos resultados, El primero es la regla diferencial de Itô que nos será útil para encontrar alguna solución a la ecuación (0.1), y el segundo resultado nos garantiza bajo que condiciones una solución existe y es única.

Capítulo 1

Introducción a los Procesos Estocásticos a Tiempo Continuo

1.1. Procesos Estocásticos

En el presente capítulo introducimos el concepto de proceso estocástico, veremos como se clasifican, así como algunos ejemplos y propiedades.

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $(S, \mathscr{S})$ un espacio medible y T un conjunto arbitrario de parámetros.

Definición. 1.1. *Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ indexada por T y con valores en S, también llamado **proceso aleatorio**, con **espacio de estados** S y **espacio parametral** T.*

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de acuerdo a las caracteristicas del espacio de estados y del espacio parametral, de la siguiente manera.

- Si $T \subset \mathbb{R}$ es un conjunto a lo más numerable, decimos que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico a **tiempo discreto**.
- Si $T \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, decimos que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico a **tiempo continuo**.
- Si $T \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, decmos que $X(\cdot)$ es un **campo aleatorio**.
- Si S es un conjunto a lo más numerable, decimos que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico **discreto**.
- Si $S \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, decimos que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico **continuo**.

Observación. 1. *Podemos ver a un proceso estocástico $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ como una familia de funciones de dos variables que están definidas sobre $T \times \Omega$ con valores en S, con regla de correspondencia $(t, \omega) \to X(t, \omega)$, tal que*

- *$X(t,\omega)$ es una variable aleatoria sobre Ω para cada $t \in T$ fijo, y*
- *para cada $\omega \in \Omega$ fijo, $t \to X(t,\omega)$ es una función de T en S conocida como **trayectoria** o **realización** del proceso estocástico.*

Usaremos la notación usual $X(t) \equiv X(t,\omega)$

Una trayectoria típica es la del movimietno Browniano que cuenta con la propiedad de ser continua, proceso que definiremos en esta sección y será fundamental en el desarrollo del presente trabajo.

Definición. 1.2. *Sea $X(\cdot) := \{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico, decimos que $X(\cdot)$ tiene:*

(a) ***Incrementos independientes**, si para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier colección de índices $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se cumple que las variables aleatorias (o "incrementos")*

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes.

(b) ***Incrementos estacionarios**, si para cualquier $t \geq 0$ y $h > 0$ la distribución del incremento $X(t+h) - X(t)$ depende sólo de h, es decir,*

$$X(t+h) - X(t) \sim X(h) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Ejemplo. 1.1. *Sea $X(\cdot) := \{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico con incrementos independientes. Demuestre que el proceso estocástico $Y(\cdot)$ definido por $Y(t) := X(t) - X(0)$, para $t \geq 0$, tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$.*

Demostración. Como $X(\cdot)$ tiene incrementos independientes, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier colección de índices $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ con $t_k \geq 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ tenemos que

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes. Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} Y(t_k) - Y(t_{k-1}) &= X(t_k) - X(0) - X(t_{k-1}) + X(0) \\ &= X(t_k) - X(t_{k-1}) \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Y(\cdot)$ tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$. $\square$

1.2. Movimiento Browniano

En 1828 el botánico inglés Robert Brown observó que los granos de polen en suspensión realizaban un movimiento irregular e inexplicable. Posteriormente se descubrió que este fenómeno es debido a los choques aleatorios de las partículas de polen con las moléculas del líquido. En los años 20 el matemático norteamericano Norbert Wiener presentó un modelo matemático para este movimiento basado en la teoría de los procesos estocásticos.

Las observaciones reales sugieren que las trayectorias son continuas y que los desplazamientos son independientes en intervalos de tiempo disjuntos. Además, debido al gran número de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitudes de tiempo no pequeños, y teniendo en cuenta el teorema del límite central, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias Gaussianas. La estructura matemática de un proceso estocástico a tiempo continuo, denotado en este caso por $\{W(t), t \geq 0\}$, ha resultado adecuada para modelar este fenómeno. La variable $W(t)$ puede representar la posición de la partícula al tiempo t. La definición matemática, en el caso unidimensional, es la siguiente.

Definición. 1.3. *Se dice que $W(\cdot) := \{W(t), t \geq 0\}$ es un **proceso de Wiener** (también llamado **movimiento browniano**) con parámetro $\sigma^2 > 0$ si satisface las siguientes condiciones.*

(a) $W(0) := 0$,

(b) *tiene incrementos independientes, y*

(c) *tiene incrementos estacionarios tales que,*

$$W(t+h) - W(t) \sim N(0, \sigma^2 h), \qquad \forall\, t \geq 0, h > 0, \tag{1.1}$$

*en donde σ es una constante positiva. Si $\sigma^2 = 1$, se dice que $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener **estándar**.*

Observación. 2. *Sea $W(\cdot)$ un proceso de Wiener. Como $W(t) = W(t) - W(0)$, se sigue de (1.1) que*

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \qquad \forall t > 0. \tag{1.2}$$

Proposición. 1.1. *Si $W(\cdot) := \{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener, entonces $W(\cdot)$ es una martingala.*

Demostración. Por demostrar que $W(\cdot)$ es una martingala (veáse la definición A.3). Sea $\mathscr{F}_t^W$ la filtración canónica, es decir, $\mathscr{F}_t^W := \sigma\{W_s, s \leq t\}$. Por definición $W(t)$ es adaptado a $\mathscr{F}_t^W$, luego por la observación 2 $\mathbb{E}(W(t)) = 0 < \infty$.

Ahora, sean $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq s \leq t$. Por la definición 1.3 $W(t) - W(s)$ es independiente de

$$(W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \ldots, W(s) - W(s_n)).$$

Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n)$, como la suma es una función Borel-medible, entonces $W(t) - W(s)$ es independiente de

$$f(W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \dots, W(s) - W(s_n)),$$

y como las variables $W(s_1), \dots, W(s_n), W(s)$ generan $\mathscr{F}_s^W$ implica que $W(t) - W(s)$ es independiente de $\mathscr{F}_s^W$. Uitlizando las propiedades de esperanza condicional (ver definición A.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W(t) \mid \mathscr{F}_s) &= \mathbb{E}(W(t) - W(s) + W(s) \mid \mathscr{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(W(t) - W(s) \mid \mathscr{F}_s) + W(s) \quad \Big(\text{pues } W(s) \text{ es } \mathscr{F}_s^W\text{-medible}\Big) \\
&= \mathbb{E}(W(t) - W(s)) + W(s).
\end{aligned}$$

Y como $W(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios con distribución normal con media cero se sigue que $\mathbb{E}(W(t) - W(s)) = 0$, obteniendo el resultado. $\square$

Definición. 1.4. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $0 < p < \infty$, Se define $L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, como el espacio de las variables aleatorias $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\int |X|^p d\mathbb{P} < \infty.$$

Usamos la notacón $X \in L_p(\Omega) \equiv L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Es decir, una variable aleatoria está en $L_p(\Omega)$ si tiene momento de orden p finito.

Sea $X(\cdot) := \{X(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que $X(n)$ converge a X en L_p cuando n tiende a infinito, si y sólo si $X(n) \in L_p$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int |X(n) - X|^p dP \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Usamos la notación $X(n) \xrightarrow{L_p} X$.

Enunciaremos las siguientes definiciones que serán de gran utilidad a lo largo del trabajo.

Definición. 1.5. *Sea $X(\cdot) := \{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico.*

(a) *Decimos que $X(\cdot)$ es un **proceso de segundo orden** si $X(t) \in L_2$ para todo $t \geq 0$, es decir, $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$.*

(b) *Decimos que $X(\cdot)$ es un **proceso gaussiano** si las combinaciones lineales*

$$a_1 X(t_1) + \cdots + a_n X(t_n) \tag{1.3}$$

son variables aleatorias gaussianas para cualquier colección finita de índices $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ y cualquier colección de números reales $a_1, \dots, a_n$. (Note que en este caso, $X(\cdot)$ es un proceso de segundo orden y $X(t)$ es una variable aleatoria gaussiana para todo $t \geq 0$).

De la oservación 2, se sigue que el proceso de Wiener es de segundo orden, pues para cada $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\,|W(t)|^2 = \sigma^2 t < \infty.$$

Definición. 1.6. *Si $X(\cdot) \in L_2(\Omega)$ definimos su **función de covarianza** K_X como*

$$K_X(s,t) := Cov(X(s), X(t))\ \forall s,t \geq 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} K_X(s,t) &= \mathbb{E}[(X(s) - \mathbb{E}X(s)) \cdot (X(t) - \mathbb{E}X(t))] \\ &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}X(s) \cdot \mathbb{E}X(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

En particular, con $s = t$, obtenemos la varianza de $X(t)$,

$$K_X(t,t) = Var(X(t)). \tag{1.5}$$

Observación. 3. *La función de covarianza es **simétrica**, es decir, $K_X(s,t) = K_X(t,s)$.*

Ejemplo. 1.2. *Sea $W(\cdot) := \{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener con parámetro σ^2. Demuestre que $W(\cdot)$ es un proceso gaussiano con media $\mathbb{E}(W(t)) = 0$ y función de covarianza $K_W(s,t) = \sigma^2 \text{mín}(s,t)$ para todo $s,t \geq 0$.*

Demostración. Sea $W(\cdot) := \{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener con parámetro σ^2, como $W(\cdot)$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier colección de índices $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ con $t_k \geq 0\ \forall k = 0,1,\ldots,n$, las variables aleatorias

$$W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

son independientes y con distribución $W(t_k) - W(t_{k-1}) \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$, donde $t_{-1} = 0$ así para cualquier $a_k \in \mathbb{R}$

$$a_k(W(t_k) - W(t_{k-1})) \sim N(0, a_k^2 \sigma^2 (t_k - t_{k-1})).$$

De donde se sigue que la combinación lineal

$$a_0 W(t_0) + a_1(W(t_1) - W(t_0)) + \cdots + a_n(W(t_n) - W(t_{n-1}), \tag{1.6}$$

tiene distrubución $N(0, \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \sigma^2 (t_k - t_{k-1}))$. Notemos que la combinación lineal en (1.6) es igual a

$$(a_0 - a_1)W(t_0) + (a_1 - a_2)W(t_1) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)W(t_{n-1}) + a_n W(t_n)$$

ahora dados $a_0^*, \ldots, a_n^* \in \mathbb{R}$ tomamos $a_n = a_n^*$ y para $k = 0, \ldots n-1$ $a_k = \sum_{i=k}^{n} a_i^*$, por lo que

$$a_0^* W(t_0) + a_1^* W(t_1) + \ldots + a_n^* W(t_n)$$

es normal. Por lo tanto $W(\cdot)$ es un proceso gaussiano.

Tomando $a_0^* = 1$, $a_i^* = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y $t_0 = t$, tenemos que $\mathbb{E}(W(t)) = 0$.

Para obtener la función de covarianza notemos que $\mathbb{E}W(s) \cdot \mathbb{E}W(t) = 0$, y los incrementos $W(s) - W(0) = W(s)$ y $W(t) - W(s)$ son independientes. Es necesario distinguir dos casos.

Caso 1. *Para* $0 \leq s < t$*, tenemos*

$$\begin{aligned} K_W(s,t) &= \mathbb{E}W(s)W(t) \\ &= \mathbb{E}(W(s)(W(t) - W(s) + W(s))) \\ &= \mathbb{E}(W(s)(W(t) - W(s))) + \mathbb{E}W(s)^2 \\ &= \mathbb{E}W(s)\mathbb{E}(W(t) - W(s)) + \sigma^2 s \\ &= \sigma^2 s. \end{aligned}$$

Caso 2. *Análogamente para* $0 \leq t < s$*, obtenemos*

$$K_W(s,t) = \sigma^2 t.$$

De manera que $K_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$. $\square$

Ejemplo. 1.3. *Sea* $W(\cdot)$ *un proceso de Wiener, y sea* $\hat{W}(t) := W(t) - tW(1)$*, con* $0 \leq t \leq 1$*, el llamado* ***"puente browniano"****. Calcule* $\mathbb{E}\hat{W}(t)$ *y la función de covarianza de* $\hat{W}(t)$*.*

Demostración. Como $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)\right) &= \mathbb{E}(W(t)) - t\mathbb{E}(W(1)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\hat{W}(s)\hat{W}(t)\right) = \mathbb{E}[(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1))] \\ &= \mathbb{E}(W(s)W(t)) - t\mathbb{E}(W(s)W(1)) - s\mathbb{E}(W(1)W(t)) + st\mathbb{E}\left(W(1)^2\right) \end{aligned}$$

Del ejemplo 1.2, $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \sigma^2 \min(s,t)$, así

$$\begin{aligned} K_{\hat{W}}(s,t) &= \mathbb{E}\left(\hat{W}(s)\hat{W}(t)\right) \\ &= \sigma^2 \min(s,t) - t\sigma^2 \min(s,1) - s\sigma^2 \min(t,1) + st\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \min(s,t) - ts\sigma^2 - st\sigma^2 + st\sigma^2 \\ &= \sigma^2(\min(s,t) - st). \end{aligned}$$

$\square$

Definición. 1.7. *Sea* $X(\cdot) := \{X(t), t \geq 0\}$ *un proceso estocástico definido sobre* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$*. Decimos que* $X(\cdot)$ *es*

(a) ***continuo casi seguramente*** *(c.s.) o* ***continuo con probabilidad 1*** *(c.p.1) si sus trayectorias $t \to X(t)(\omega)$ son continuas (como funciones de $t \geq 0$) para casi todo $\omega \in \Omega$.*

(b) ***estocásticamente continuo*** *si para cualquier $t_0 \geq 0$ y cualquier $\epsilon > 0$*

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{P}\{|X(t) - X(t_0)| > \epsilon\} = 0.$$

Para verificar continuidad casi segura, un criterio de gran utilidad es el siguiente.

Teorema. 1.1 (Criterio de continuidad de Kolmogorov)**.** *Si existen constantes positivas α, β y γ tales que*

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^{\alpha}] \leq \beta |t-s|^{1+\gamma} \quad \forall t, s \geq 0, \tag{1.7}$$

entonces $X(\cdot)$ es un proceso estocástico continuo c.s.

Demostración. Véase [GyS, p. 170] □

Proposición. 1.2. *El prceso de Wiener es continuo casi seguramente.*

Demostración. Sabemos que los incrementos se distribuyen $N(0, \sigma^2(t-s))$, además si $X \sim N(0, \sigma^2)$, entonces $\mathbb{E}X^4 = 3\sigma^4$. Luego

$$\begin{aligned} [\mathbb{E}(W(t) - W(s))^4] &= 3[\sigma^2 \cdot (t-s)]^2 \\ &= 3\sigma^4 (t-s)^2 \\ &= 3\sigma^4 |t-s|^2 \end{aligned}$$

por el criterio de continuidad de Kolmogorov el movimiento browniano es continuo c.s. con $\alpha = 4$, $\gamma = 1$ y $\beta = 3\sigma_4$. □

Proposición. 1.3 (Variación cuadrática de $W(\cdot)$.). *Para cada $m = 1, 2, \ldots$. Definamos $\pi_m = \{a = t_0^m < t_1^m < \cdots < t_{n_m}^m = b\}$ una partición de $[a, b]$ (cuya norma se define como $|\pi_m| := \max_i |t_{i+1}^m - t_i^m|$) tal que $|\pi_m| \to 0$ cuando $m \to \infty$. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n_m - 1} (\Delta W_i^m)^2 \xrightarrow{L_2} b - a \quad \text{cuando} \quad m \to \infty, \tag{1.8}$$

donde $\Delta W_i^m = W(t_{i+1}^m) - W(t_i^m)$. Además, si $\sum_m |\pi_m| < \infty$ la convergencia es casi segura.

Demostración. Recordemos que si $X \sim N(0,1)$, entonces $\mathbb{E}(X^k) = 0$ para k impar y

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{k!}{2^{k/2}(k/2)!} \text{ si } k \text{ es par.}$$

Como $W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$,

$$\Delta W_i \sim N(0, \Delta t_i) \sim \sqrt{\Delta t_i} X$$

Así, tenemos que

$$\mathbb{E}\left((\Delta W_i)^2\right) = \mathbb{E}\left((\sqrt{\Delta t_i} X)^2\right) = \Delta t_i \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\left((\Delta W_i)^4\right) = \mathbb{E}\left((\sqrt{\Delta t_i} X)^4\right) = 3(\Delta t_i)^2.$$

Sea $S_m := \sum_{i=0}^{n_m - 1} (\Delta W_i^m)^2$, por lo tanto

$$\mathbb{E}(S_m) = \sum_{i=0}^{n_m - 1} \Delta t_i^m = b - a \, \text{y}$$

$$Var(S_m) = \mathbb{E}\left((S_m - \mathbb{E}(S_m))^2\right) = \mathbb{E}\left((S_m - (b-a))^2\right);$$

luego, notemos que (1.8) es equivalente a $Var(S_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Como $W(\cdot)$ tiene incrementos independientes,

$$Var(S_m) = \sum_{i=0}^{n_m - 1} Var\left((\Delta W_i^m)^2\right).$$

Pero

$$\begin{aligned} Var\left((\Delta W_i^m)^2\right) &= \mathbb{E}\left((\Delta W_i^m)^4 - \left(\mathbb{E}\left((\Delta W_i^m)^2\right)\right)^2\right) \\ &= 3(\Delta t_i^m)^2 - (\Delta t_i^m)^2 \\ &= 2(\Delta t_i^m)^2 \leq 2|\pi_m| \Delta t_i^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Var\,(S_m) \leq 2|\pi_m| \sum_{i=0}^{n_m - 1} \Delta t_i^m = 2|\pi_m|(b-a) \tag{1.9}$$

tomando el limite $Var(S_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. La convergencia casi segura se sigue de cuando $\sum_m |\pi_m| < \infty$, pues para cualquier $\epsilon > 0$ por la Desigualdad de Chebyshev

$$\mathbb{P}(|S_m - (b-a)| > \epsilon) \leq \frac{Var(S_m)}{\epsilon^2},$$

y por (1.9)

$$\sum_m \mathbb{P}(|S_m - (b-a)| > \epsilon) \leq 2(b-a) \sum_m |\pi_m| < \infty$$

Finalmente por el Lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}(|S_m - (b-a)| > \epsilon \, o.i.) = 0,$$

es decir, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe $K(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_k - (b-a)| \leq \epsilon \quad \forall k \geq K(\omega).$$

Por lo tanto

$$S_m \overset{c.s.}{\to} b - a \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

$\square$

Corolario. 1.1. *Las trayectorias de $W(\cdot)$ no son de variacón total acotada.*

Demostración. Sea π_m como en la Proposición 1.3. Sea

$$V := sup_{\pi_m} \sum_i \Delta W_i^m,$$

la variación total de las trayectorias de $W(\cdot)$. Supongamos que $V < \infty$ casi seguramente. Como $W(\cdot)$ tiene trayectorias continuas,

$$\begin{aligned} \sum_i (\Delta W_i^m)^2 &\leq \sup_i |\Delta W_i^m| \left(\sum_i |\Delta W_i^m| \right) \\ &\leq V \sup_i |\Delta W_i^m| \overset{|\pi_m| \to 0}{\to} 0. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues $\sum_i (\Delta W_i^m)^2 \to (b-a) \neq 0$ cuando $|\pi_m| \to 0$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(V = \infty) = 1.$$

□

Capítulo 2

Procesos Estocásticos de Segundo Orden

2.1. Definición, Propiedades y Ejemplos

En este capítulo veremos algunos conceptos básicos de los procesos estocásticos en L_2 que nos será posible definir un cálculo diferencial e integral en L_2.

De acuerdo con la definición 1.5 (a) un proceso estocástico $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ es un **proceso de segundo orden** si $X(t) \in L_2$ para todo $t \in T$. En este caso se dice que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico en L_2 y se escribe $X(\cdot) \in L_2$.

Definición. 2.1. *Decimos que dos procesos estocásticos $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ y $Y(\cdot) := \{Y(t), t \in T\}$ tienen las mismas* ***distibuciones finito-dimensionales*** *si para cualquier colección de índices $t_1, \ldots, t_n$ en T, y para cualesquiera $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$,*

$$\mathbb{P}(X(t_1) \in B_1, \ldots, X(t_n) \in B_n) = \mathbb{P}(Y(t_1) \in B_1, \ldots, Y(t_n) \in B_n).$$

Observación. 4. *Si $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$ son dos procesos gaussianos con la misma función media y la misma función de covarianza, entonces $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales. Pero si al menos uno de los procesos estocásticos $X(\cdot)$ ó $Y(\cdot)$ no es gaussiano, entonces no se cumple.*

Definición. 2.2. **(a)** *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un proceso estocástico (no necesariamente en L_2), y para cada $h \in \mathbb{R}$ fijo sea $Y_h(\cdot) = \{Y_h(t), t \in \mathbb{R}\}$ el proceso estocástico dado por*

$$Y_h(t) := X(t+h). \tag{2.1}$$

Se dice que $X(\cdot)$ es ***estrictamente estacionario*** *si para cualquier $h \in \mathbb{R}$ los procesos estocásticos $X(\cdot)$ y $Y_h(\cdot)$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.*

(b) *Se dice que un proceso estocástico $X(\cdot) = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ en L_2 es L_2-**estacionatrio** o **débilmente estacionario** si satisface que:*

(i) *su función media* $\mu_X(t) := \mathbb{E}X(t)$ *es constante, es decir,*

$$\mu_X(t) = \mu_X, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}; \tag{2.2}$$

(ii) *su función de covarianza* $K_X(s,t)$ *depende sólo de* $t-s$*, i.e.,*

$$K_X(s,t) = K_X(0,t-s) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Si $X(\cdot)$ es L_2-estacionatrio el lado derecho de (2.3) lo denotaremos por $r_X(t-s)$, es decir, para cada $s,t \in \mathbb{R}$,

$$r_X(t) := K_X(0,t) = K_X(s,s+t). \tag{2.4}$$

Por la observación 2, el proceso de Wiener no es estrictamente estacionario, ya que para cada t la distribución de $W(t)$ depende de t, por lo que $W(t)$ y $W(t+h)$ no tienen la misma distribucón. Pero tampoco es débilmente estacionario, esto se sigue de que su función de covarianza depende tanto de s como de t (ejemplo 1.2).

Proposición. 2.1. *Si* $X(\cdot) = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ *está en* L_2 *y es estrictamente estacionario, entonces es* L_2*-estacionario.*

Demostración. Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in \mathbb{R}\} \in L_2$. Como $X(\cdot)$ es estrictamente estacionario, entonces $X(t)$ y $X(t+h)$ tienen la misma distribucción para todo t y h en $\mathbb{R}$. Por lo tanto tales variables tienen medias iguales, es decir,

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+h) \quad \forall\, h,t \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que $\mu_X(t)$ es constante. Análogamente, para cualquier s,t,h, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(s)X(t)) &= \int\int xy dF_{X(s),X(t)}(x,y) \\
&= \int\int xy dF_{X(s+h),X(t+h)}(x,y) \\
&= \mathbb{E}(X(s+h)X(t+h))
\end{aligned}$$

Si tomamos $h = -s$, obtenemos

$$\mathbb{E}(X(s)X(t)) = \mathbb{E}(X(0)X(t-s)),$$

entonces $K_X(s,t) = K_X(0,t-s) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $X(\cdot)$ es L_2-estacionario. $\square$

Observación. 5. **(a)** *En general, el recíproco de la Proposición 2.1 es falso. Por ejemplo, sean* $X(t)$ *variables aleatorias independientes tales que*

$$X(t) \sim \begin{cases} N(0,1) & si\, t \geq 0 \\ Uni[-\frac{1}{2}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{12}] & si\, t < 0, \end{cases}$$

notemos que $X(\cdot) \in L_2$, pues $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$ para todo t, además $\mu_X(t) = 0$ y por independencia tenemos que

$$K_X(s,t) = \mathbb{E}(X(s)X(t)) = \mathbb{E}(X(s))\mathbb{E}(X(t)) = \begin{cases} 0 & si\, s \neq t \\ 1 & si\, s = t. \end{cases}$$

Entonces la función de covarianza sólo depende de $t-s$, i.e., $K_X(s,t) = K_X(0,t-s)$, por lo tanto $X(\cdot)$ es un proceso L_2-estacionario. Sin embargo $X(\cdot)$ no es estrictamente estacionario, ya que la distribución de $X(t)$ depende de t.

(b) *Si $X(\cdot)$ es un proceso estocátisco gaussiano y L_2-estacionario, entonces es estrictamente estacionario, ya que $\mu_X(t) = \mu_X(t+h)$ para toda $h, t \in \mathbb{R}$, y*

$$K_X(s,t) = K_X(0,t-s) = K_X(s+h,t+h),$$

es decir, los procesos $X(\cdot)$ y $Y_h(\cdot)$ tienen la misma función media y la misma función de covarianza. Por la observación 4, tenemos que $X(\cdot)$ es estrictamente estacionario, así el recícproco de la Proposición 2.1 es válido.

Ejemplo. 2.1. *Sean Y_1, Y_2 v.a. i.i.d. con distribución $N(0,\sigma^2)$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $X(t)$ el proceso estocástico definido como*

$$X(t) := Y_1 \cos \lambda t + Y_2 \operatorname{sen} \lambda t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que $X(t)$ es

(a) *gaussiano, y*

(b) *L_2-estacionario.*

Demostración. Probareros (a). Sean $t_1, \ldots, t_n, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j) = Y_1 \sum_{j=1}^{n} a_j \cos \lambda t_j + Y_2 \sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{sen} \lambda t_j,$$

se sigue que

$$\alpha Y_1 + \alpha Y_2 \sim N(0, (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2),$$

donde $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos \lambda t_j$ y $\beta = \sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{sen} \lambda t_j$. Por lo tanto $X(t)$ es gaussiano.

Ahora para (b). Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mathbb{E}(X(t)) \\ &= (\mathbb{E}(Y(1))) \cos \lambda t + (\mathbb{E}(Y(2))) \operatorname{sen} \lambda t = 0; \\ K_X(s,t) &= \mathbb{E}(X(s)X(t)) \\ &= \mathbb{E}(Y(1)^2 \cos \lambda s \cdot \cos \lambda t + Y(2)^2 \operatorname{sen} \lambda s \cdot \operatorname{sen} \lambda t \\ &\quad + Y(1)Y(2) \cos \lambda s \cdot \operatorname{sen} \lambda t + Y(1)Y(2) \operatorname{sen} \lambda s \cdot \cos \lambda t) \\ &= \sigma^2 (\cos \lambda s \cdot \cos \lambda t + \operatorname{sen} \lambda s \cdot \operatorname{sen} \lambda t) \\ &= \sigma^2 \cos \lambda (t-s). \end{aligned}$$

Por lo tanto $X(t)$ tiene media cero y función de covarianza $r_X(t) = K_X(0,t) = \sigma^2 \cos \lambda t$, i.e., $X(t)$ es débilmente estacionario. $\square$

Ejemplo. 2.2 (Proceso de Wiener con $T = \mathbb{R}$). *Se dice que $W(\cdot) = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ es un **proceso de Wiener** con párametro $\sigma^2 \geq 0$ si*

(a) $W(0) = 0$,

(b) $W(\cdot)$ *tiene incrementos independientes, y*

(c) $W(\cdot)$ *tiene incrementos estacionarios con*

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \qquad \forall\, t \geq s.$$

Demuestre que $W(\cdot)$ es un proceso estocástico en L_2 con función media cero y función de covarianza

$$K_W(s,t) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot \text{mín}\{|s|,|t|\} & si\, s \cdot t \geq 0, \\ 0 & si\, s \cdot t < 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $t \geq 0$, entonces $W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0, \sigma^2 t)$, y en caso contrario si $t < 0$, implica que $W(t) = W(0) - W(t) \sim N(0, -\sigma^2 t)$. Por lo que $\mathbb{E}(W(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Luego del ejemplo 1.2, $K_W(s,t) = \sigma^2 \text{mín}\{s,t\}$ para $s,t \geq 0$.

Sea $s < t \leq 0$. Por **(b)**, $W(s) - W(t) \perp W(t) - W(0)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \mathbb{E}\{[-(W(t) - W(s)) + W(t)]\, W(t)\} \\ &= -\mathbb{E}\left[(W(t) - W(s))W(t)\right] + \mathbb{E}\left(W(t)^2\right) \\ &= -\mathbb{E}((W(t) - W(s)))\,\mathbb{E}(W(t)) + \mathbb{E}\left(W(t)^2\right) \\ &= -\sigma^2 t \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de **(c)**, ya que $W(t) \sim N(0, -\sigma^2 t)$.

Por lo tanto $K_W(s,t) = -\sigma^2 t = \sigma^2(-t) = \sigma^2 |t|$ para $s < t \leq 0$. Analogámente $K_W(s,t) = \sigma^2 |s|$ cuando $t < s \leq 0$. Por lo tanto cuando s y t tienen el mismo signo, tenemos que

$$K_W(s,t) = \sigma^2 \text{mín}\{|s|,|t|\} \qquad \text{si} \qquad s \cdot t \geq 0.$$

Por otra parte si $s < 0 < t$, como $W(\cdot)$ tiene incrementos independientes y estacionarios con distribución normal de media cero, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \mathbb{E}\left[-(W(0) - W(s))(W(t) - W(0))\right] \\ &= -\mathbb{E}(W(0) - W(t))\,\mathbb{E}(W(t) - W(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogámente $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = 0$ cuando $t < 0 < s$, así $K_W(s,t) = 0$ si $s \cdot t < 0$. $\square$

Ejemplo. 2.3 (Movimiento browniano geométrico). *Sea $W(\cdot) := \{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener estándar. Entonces el proceso $X(\cdot)$ definido por*

$$X(t) := e^{\mu t + \sigma W(t)} \qquad \forall t \geq 0,$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ constantes. Demuestre que $X(\cdot)$ es un proceso estocástico en L_2, que no es gaussiano y con función media y de covarianza

$$\begin{aligned} m_X(t) &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \qquad \forall t \geq 0, \\ K_X(s,t) &= e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t+s)}(e^{\sigma^2 s} - 1) \qquad \forall 0 \leq s \leq t. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces su función generadora de momentos es

$$\begin{aligned} M_X(t) &:= \mathbb{E}\left(e^{tx}\right) \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

luego como $W(t) \sim N(0,t)$, entonces $\sigma W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, asì la función generadora de momentos de la variable aleatoria $\sigma W(t)$ evaluada en 1 es

$$M_{\sigma W(t)}(1) = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(X(t)) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\mu t + \sigma W(t)}\right) \\ &= e^{\mu t}\mathbb{E}\left(e^{\sigma W(t)}\right) \\ &= e^{\mu t} M_{\sigma W(t)}(1) \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}. \end{aligned}$$

Para calcular la función de covarianza notemos que

$$W(s) + W(t) = 2W(s) + W(t) - W(s)$$

donde $2W(s)$ y $W(t) - W(s)$ son incrementos independientes con distribución $N(0, 4s)$ y $N(0, t-s)$ respectivamente, implica que

$$\sigma(W(s) + W(t)) \sim N(0, \sigma^2(3s + t)).$$

Así

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(s)X(t)) &= \mathbb{E}\left(e^{\mu s+\sigma W(s)}e^{\mu t+\sigma W(t)}\right)\\
&= e^{\mu(s+t)}\mathbb{E}\left(e^{\sigma(W(s)+W(t))}\right)\\
&= e^{\mu(s+t)}M_{\sigma(W(s)+W(t))}(1)\\
&= e^{\mu(s+t)}e^{\frac{\sigma^2(3s+t)}{2}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
K_X(s,t) &= \mathbb{E}(X(s)X(t)) - \mathbb{E}(X(s))\mathbb{E}(X(t))\\
&= e^{\mu(s+t)}e^{\frac{\sigma^2(3s+t)}{2}} - e^{\mu s+\frac{\sigma^2 s}{2}}e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}}\\
&= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(s+t)}e^{\sigma^2 s} - e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(s+t)}\\
&= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(s+t)}\left(e^{\sigma^2 s}-1\right).
\end{aligned}
$$

Ahora tomando $s=t$ en (2.5), tenemos que

$$
\mathbb{E}\left(X^2(t)\right) = e^{2\mu t}e^{2\sigma^2 t} < \infty \quad \forall t \geq 0,
$$

es decir, $X(\cdot) \in L_2$. Finalmente $X(\cdot)$ no es gaussiano, ya que para $n=1$ en la definición 1.5, tomando $t_1 = t$ y $a_1 = 1$. Sea $Y := \mu t + \sigma W(t)$, entonces $Y \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Por lo que $X = \exp(Y)$ tiene distribución log-normal. □

2.2. Cálculo en L_2

2.2.1. Terminología

Definición. 2.3. *Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$). Una **seminorma** en V, es una función $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ tal que para $x,y \in V$ y todo $a \in \mathbb{R}$, se satisface:*

(a) $x = 0 \Rightarrow ||x|| = 0$,

(b) $||ax|| = |a|\ ||x||$, *(Homogeneidad absoluta)*

(c) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$. *(Subaditividad o desigualdad del triángulo)*

si además se cumple el recíproco de (a), es decir,

$$
||x|| = 0 \Rightarrow x = 0,
$$

*se dice que $||\cdot||$ es una **norma**. En este caso al par $(V, ||\cdot||)$ se le llama **espacio vectorial normado**.*

Definición. 2.4. *Una **métrica** o **distancia** en un conjunto V es una función $d : V \times V \to [0,\infty)$ tal que para todos los $x,y,z \in V$, se satisface:*

(a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$,

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

*Al par (V,d) se le llama **espacio vectorial métrico**.*

Claramente, si $(V,||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado, entonces (V,d) es un espacio vectorial métrico con la distancia $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ definida por $d(x,y) := ||x-y||$. Un espacio vectorial normado es **completo** si toda sucesión de Cauchy en V converge (con respecto a d), es decir, si $\{X(n)\} \subset V$ es una sucesión tal que $d(X(n),X(m)) \to 0$ cuando $n,m \to \infty$, entonces $\exists\, x \in V$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x(n)$.

Un espacio vectorial normado completo se llama **espacio de Banach**.

Hipótesis: Dado un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, diremos que cualesquiera dos v.a's X y Y son iguales si lo son casi seguramente, es decir, $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. (En otras otras palabras, si $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$, entonces $X = Y$.)

Ejemplo. 2.4. *Sea $p \geq 1$ y sea $L_p \equiv L_p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ el conjunto de todas las v.a's X tales que $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Entonces*

$$||X||_p := (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \tag{2.6}$$

define una seminorma sobre L_p. En efecto, $||X||_p = 0$ implica que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$; pero no implica que $X = 0$. Sin embargo, bajo la hipótesis, la expresión (2.6), define una norma sobre L_p. De hecho, $(L_p,||\cdot||_p)$ es un espacio de Banach.

Definición. 2.5. *Sea V un espacio vectorial. Un **producto interno** sobre V es una función $(x,y) \to \langle x,y\rangle$ de $V \times V \to \mathbb{R}$ tal que para $x,y,z \in V$ y todo $a \in \mathbb{R}$, se satisface:*

(a) $\langle x,x\rangle \geq 0$,

(b) $\langle x,x\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

(c) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$,

(d) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

Proposición. 2.2 (Propiedades del producto interno). *Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno sobre un espacio vectorial V. Sea*

$$||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{2.7}$$

(a) ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz.***

$$|\langle x,y\rangle| \leq ||x||\ ||y||\ \forall\ x,y \in V.$$

La igualdad es válida ssi x,y son linelamente dependientes, es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x + ay = 0$.

(b) *La expresión 2.7 define una norma sobre V.*

(c) *El producto interno es continuo en ambas variables, es decir, si $x(n) \to x$ y $y(m) \to y$, entonces $\langle x(n), y(m)\rangle \to \langle x,y\rangle$.*

Definición. 2.6. *Un espacio vectorial V con un producto interno $\langle x,y\rangle$ se dice que es un espacio **pre-Hilbert**. Si además es un espacio completo con respecto a la norma definida por 2.7, entonces es un **espacio de Hilbert**. (En particular, un espacio de Hilbert es de Banach.)*

Ejemplo. 2.5. *En el ejemplo 2.4 tómese $p = 2$. Entonces $L_2 \equiv L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con el producto interno*

$$\langle X,Y\rangle := \mathbb{E}(XY) \tag{2.8}$$

es un espacio de Hilbert; por 2.7, la norma en L_2 es

$$||X||_2 := \sqrt{\langle X,X\rangle} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}. \tag{2.9}$$

Bajo la hipótesis podemos escribir la desigualdad de Cauchy-Schwarz como

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq ||X||_2 \cdot ||Y||_2 = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}. \tag{2.10}$$

Por 2.9, tenemos convergencia en L_2, es decir,

$$X(n) \to X \quad en \quad L_2 \Leftrightarrow ||X(n) - X||_2 \to 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}|X(n) - X|^2 \to 0. \tag{2.11}$$

Además por la continuidad del producto interno tenemos el siguiente lema

Lema. 2.1. *Si $X(n) \to X$ y $Y(m) \to Y$ en L_2, entonces*

$$\mathbb{E}(X(n)Y(m)) \to \mathbb{E}(XY)$$

.

Lema. 2.2 (Criterio para la existencia de un limite en L_2). *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en L_2. Sea $t_0 \in T$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *Existe una v.a. $X \in L_2$ tal que $X(t) \to X$ en L_2 cuando $t \to t_0$.*

(b) *Existe un número $l \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbb{E}(X(t_n)X(t'_m)) \to l \quad cuando \quad n,m \to \infty \tag{2.12}$$

para cualesquiera dos sucesiones $t_n \to t_0, t'_m \to t_0$.

Demostración. (a)⇒(b). Sean $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{t'_m, m \in \mathbb{N}\}$ dos sucesiones tales que $t_n \to t_0$ y $t'_m \to t_0$. Entonces por (a)

$$X(t_n) \to X \quad \text{y} \quad X(t'_m) \to X \quad \text{en} \quad L_2.$$

Luego, por el Lema 2.1 tenemos que

$$\mathbb{E}(X(t_n)X(t'_m)) \to \mathbb{E}(X^2).$$

Por lo tanto con $l := \mathbb{E}(X^2)$ tenemos (b).

(b)⇒(a). Supongamos que $t_n \to t_0$. Como

$$\mathbb{E}[(X(t_n) - X(t_m))^2] = \mathbb{E}(X(t_n)^2) + \mathbb{E}(X(t_m)^2) - 2\mathbb{E}(X(t_n)X(t_m)),$$

por 2.12,

$$\mathbb{E}[(X(t_n - X(t_m))^2] \to l + l - 2l = 0 \quad \text{cuando} \quad n, m \to \infty,$$

es decir, $||X(t_n) - X(t_m)||_2 \to 0$ lo que implica que $\{X(t_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en L_2. Luego como L_2 es completo, existe $X \in L_2$ tal que $X(t_n) \to X$ en L_2.

Ahora sea $\{s_n\}$ cualquier otra sucesión tal que $s_n \to t_0$. Entonces

$$\mathbb{E}[(X(s_n) - X(t_n))^2] \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

implica que $||X(s_n) - X(t_n)||_2 \to 0$.

Como $||X(t_n) - X||_2 \to 0$ y utilizando la desigualdad del triángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} ||X(s_n) - X||_2 &\leq ||X(s_n) - X(t_n)||_2 + ||X(t_n) - X||_2 \\ &\to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

por lo tanto $X(s_n) \to X$. □

2.2.2. Continuidad en L_2

Definición. 2.7. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\} \in L_2$. Decimos que el proceso estocástico $X(\cdot)$ es L_2-**continuo en t** si $X(t+h) \to X(t)$ en L_2 cuando $h \to 0$. Decimos que el proceso estocástico $X(\cdot)$ es L_2-**continuo** si es L_2-continuo en todo punto $t \in T$.*

De la definición 2.7 se sigue que si $X(\cdot)$ es L_2-continuo, entonces la función media $\mu_X(\cdot)$ es continua, ya que por la desigualdad de Jensen, $\mathbb{E}[(X(t+h) - X(t))^2] \geq [\mu_X(t+h) - \mu_X(t)]^2$, entonces $\mu_X(t+h) \to \mu_X(t)$ cuando $h \to 0$.

Observación. 6. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico. Definamos $X_*(\cdot) = \{X(t) - \mu_X(t), t \in T\}$, entonces $X(\cdot)$ es L_2-continuo si y sólo si $X_*(\cdot)$ es L_2-continuo. Además*

$$\begin{aligned} \mu_{X_*}(t) &= 0 \quad \forall t \in T, \\ K_X(s,t) &= K_{X_*}(s,t) \quad \forall s, t \in T. \end{aligned}$$

Teorema. 2.1 (Criterio de continuidad). *Sea $\mu_X : T \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_X(\cdot)$ es continua. Entonces $X(\cdot)$ es L_2-continuo en t si y sólo si K_X es continua en (t,t).*

Demostración. Sea $t \in T$. Por la observación 6 podemos suponer $\mu_X(t) = 0 \quad \forall t \in T$.

($\Rightarrow$) Como $X(\cdot)$ es L_2-continuo en t, entonces

$$X(t+h) \to X(t) \quad \text{y} \quad X(t+h') \to X(t) \quad \text{en} \quad L_2 \quad \text{cuando} \quad h,h' \to 0.$$

Luego, cuando h,h' tienden a cero y por el Lema 2.1, tenemos

$$K_X(t+h,t+h') = \mathbb{E}(X(t+h)X(t+h')) \to \mathbb{E}(X(t)X(t)) = K(X)(t,t),$$

es decir, K_X es continua en (t,t).

($\Leftarrow$) Sea K_X continua en (t,t). Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X(t+h) - X(t))^2] &= K_X(t+h,t+h) + K_X(t,t) - 2K_X(t+h,t) \\ &\to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0,\end{aligned}$$

es decir, para cada $t \in T$, $X(t+h) \to X(t)$ en L_2 cuando $h \to 0$.

Por lo tanto $X(\cdot)$ es L_2-continuo. □

Ejemplo. 2.6. *Sea $W(\cdot) = \{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ el proceso de Wiener del ejemplo 2.2. Entonces $W(\cdot)$ es L_2-continuo.*

Demostración. Como $W(\cdot)$ tiene función media $\mu_W(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces $\mu_W(\cdot)$ es continua, y

$$K_W(t,t) = Var(X(t)) = \sigma^2|t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que $K_W(t,t)$ es continua en (t,t), por el Teorema 2.1, $W(\cdot)$ es L_2-continuo en t para toda $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $W(\cdot)$ es L_2-continuo □

Corolario. 2.1. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un propceso estocástico con función media μ_X continua. Si K_X es continua en (t,t) para todo $t \in T$, entonces K_X es continua en (s,t) para todo $s,t \in T$.*

Demostración. Nuevamente por la observación 6 sea $\mu_X(t) = 0$ para todo $t \in T$, por el Teorema 2.1, para cada $s,t \in T$, tenemos

$$X(s+h) \to X(s) \quad \text{y} \quad X(t+h') \to X(t) \quad \text{en} \quad L_2 \quad \text{cuando} \quad h,h' \to 0.$$

Como $K_X(s+h,t+h') = \mathbb{E}(X(s+h)X(t+h'))$ y por el Lema 2.1,

$$K_X(s+h,t+h') \to K_X(s,t) \quad \text{cuando} \quad h,h' \to 0.$$

Por lo tanto $K_X(s,t)$ es continua en (s,t) para todo $s,t \in T$. □

Teorema. 2.2. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en L_2 tal que es débilmente estacionario. Sea $r_X(t) := K_X(0,t)$. Entonces*

(a) *Si $X(\cdot)$ es L_2-continuo en algún punto $t \in T$, entonces r_X es continua en 0.*

(b) *Si r_X es continua en 0, entonces es continua en todo $t \in T$ y, además $X(\cdot)$ es L_2-continuo.*

Demostración. (a) Sea $t \in T$. Sea $X(\cdot)$ L_2-continuo. Entonces $X(t+h) \to X(t)$ cuando $h \to 0$, además como $X(\cdot)$ es débilmente estacionario,

$$r_X(h) = \mathbb{E}(X(t)X(t+h)),$$

por el Lema 2.1, tenemos

$$r_X(h) \to \mathbb{E}(X(t)X(t)) = r_X(0) \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Por lo tanto r_X es continua en 0.

(b) Sea $t \in T$. Como r_X es continua en 0,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X(t+h) - X(t))^2] &= K_X(t+h, t+h) + K_X(t,t) - 2K_X(t+h,t) \\ &= r_X(0) + r_X(0) - 2r_X(h) \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0,\end{aligned}$$

es decir, para cada $t \in T$, $X(t+h) \to X(t)$ en L_2 cuando $h \to 0$.

Por lo tanto $X(\cdot)$ es L_2-continuo.

Ahora, $X(s+t+h) \to X(s+t)$ en L_2 cuando $h \to 0$, y por el Lema 2.1 se sigue que

$$r_X(t+h) = \mathbb{E}(X(s)X(s+t+h)) \to \mathbb{E}(X(s)X(s+t)) = r_X(t) \quad \text{cuando} \quad h \to 0,$$

es decir, r_X es continua en todo $t \in T$.

□

2.2.3. Diferenciabilidad en L_2

Definición. 2.8. *Sea $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en L_2. Decimos que $X(\cdot)$ es L_2–**diferenciable** en $t \in T$ si existe una variable aleatoria $X'(t) \in L_2$ tal que*

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \to X'(t) \quad \text{en} \quad L_2 \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

En este caso escribimos $X'(t) = \frac{d}{dt}X(t)$.

Ejemplo. 2.7. . *El proceso de Wiener $W(\cdot)$ no es L_2–diferenciable.*

Demostración. Supongamos que $W(\cdot)$ es L_2–diferenciable. Sea $t \in T$, entonces existe una variable aleatoria $W'(t) \in L_2$ talque

$$\frac{W(t+h)-W(t)}{h} \to W'(t) \quad \text{en} \quad L_2 \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Por el Lema 2.2 existe $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2\right) \to l \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Sin embargo, como $W(t+h)-W(t) \sim N(0,\sigma^2|h|)$ vemos que al lado izquierdo es igual a

$$\frac{1}{h^2}\sigma^2\,|h| = \frac{\sigma^2}{|h|} \to \infty \quad \text{cuando} \quad h \to 0,$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2\right) = \infty$$

Lo cual contradice la hipótesis. Asimismo si existiece $W'(t)$ por la continuidad del producto interno

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2\right) \to \mathbb{E}\left(W'(t)^2\right) \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2 - W'(t)^2\right) \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

De modo que

$$\mathbb{E}\left(W'(t)^2\right) = \lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2\right) = \infty.$$

Por lo tanto $W'(t)^2 \notin L_2$. Por lo tanto $W(\cdot)$ no es L_2–diferenciable. □

Proposición. 2.3. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico L_2–estacionario con función de covarianza $r(t) = K_X(0,t)$. Si $X(\cdot)$ es L_2–diferenciable para todo $t \in T$, entonces r es dos veces diferenciable, y el proceso estocástico $X'(\cdot) = \{X'(t), t \in T\}$ es L_2–estacionario con media cero y función de covarianza $-r''(t)$.*

Demostración. Como $X(\cdot)$ es L_2-diferenciable,

$$\frac{1}{h}[X(s+h)-X(s)] \to X'(s) \quad en \quad L_2 \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Y también $X(s+t) \to X(s+t)$ en L_2 cuando $h \to 0$. Por el Lema 2.1 se sigue que

$$\frac{1}{h}[r(t-h) - r(t)] \to \mathbb{E}\big(X(s+t)X'(s)\big).$$

Como $X(s+t), X'(s) \in L_2$, usando la desigualda de Holder tenemos que

$$\mathbb{E}\big(X(s+t)X'(s)\big) < \infty.$$

Por lo tanto, r es diferenciable en todo $t \in T$ y

$$-r'(t) = \mathbb{E}\big(X(s+t)X'(s)\big). \tag{2.13}$$

Por otra parte

$$\frac{1}{h'}[X(s+t+h') - X(s+t)] \to X'(s+t) \quad en \quad L_2$$

y $X'(s) \to X'(s)$ en L_2 cuando $h' \to 0$, de 2.13 y por el Lema 2.1 se sigue que

$$\frac{1}{h'}[-r'(t+h') + r'(t)] \to \mathbb{E}\big(X'(s+t)X'(s)\big).$$

Es decir, $r''(t)$ existe para todo t y es igual a $-\mathbb{E}(X'(s+t)X'(s))$. □

2.2.4. Integrabilidad en L_2

Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en L_2 y $[a,b]$ un intervalo contenido en T. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Para cada partición $\pi_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, definimos

$$I(\pi_n) := \sum_{i=1}^{n} g(t_i)X(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Sea $|\pi_n| := \text{máx}\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$. Si existe una variable aleatoria $I \in L_2$ tal que $I(\pi_n) \to I$ en L_2 cuando $|\pi_n| \to 0$ y, además, la variable limite I es independiente de la selección de las particiones π_n, decimos entonces que $g(\cdot)X(\cdot)$ es L_2–**integrable** sobre $[a,b]$ y escribimos

$$I := \int_a^b g(t)X(t)dt.$$

Teorema. 2.3. *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico en L_2 y $[a,b] \subset T$ con función media m_X continua sobre $[a,b]$. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a,b]$. (Basta pedir que sea continua por partes.)*

(a) *Si $g(\cdot)X(\cdot)$ es L_2–integrable sobre $[a,b]$, entonces*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b g(t)X(t)dt\right) = \int_a^b g(t)m_X(t)dt. \tag{2.14}$$

(b) *Si además, la función de covarianza K_X es continua sobre $[a,b] \times [a,b]$, entonces $g(\cdot)X(\cdot)$ es L_2-integrable sobre $[a,b]$ y la integral I tiene esperanza $\mathbb{E}(I)$ dada por 2.14, segundo momento $\mathbb{E}(I^2)$ dado por*

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^b g(t)X(t)dt\right)^2\right) = \int_a^b \int_a^b g(s)g(t)\mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right]dsdt, \tag{2.15}$$

y varianza

$$Var(I) = \int_a^b \int_a^b g(s)g(t)K_X(s,t)dsdt, \tag{2.16}$$

Demostración. (a) Sea $\pi_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición de $[a,b]$ tal que $|\pi_n| \to 0$. Entonces, por linealidad de la esperanza

$$\mathbb{E}\left(I(\pi_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)m_X(t_i)(t_i - t_{i-1}),$$

luego, como g y m_X son continuas en $[a,b]$, entonces $g \cdot m_X$ es integrable en el sentido de Riemann,

$$\mathbb{E}\left(I(\pi_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)m_X(t_i)(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b g(t)m_X(t)dt.$$

Por otra parte, como $I(\pi_n) \to I$ en L_2, es decir, $\mathbb{E}(|I(\pi_n) - I|^2) \to 0$. Utilizando la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos que $|\mathbb{E}(I(\pi_n) - I)|^2 \leq \mathbb{E}(|I(\pi_n) - I|^2)$. Por lo tanto

$$|\mathbb{E}\left(I(\pi_n)\right) - \mathbb{E}(I)|^2 \to 0,$$

es decir, $\mathbb{E}(I(\pi_n)) \to \mathbb{E}(I)$, esto demuestra (a).

(b) Sea π_n como en (a) y sea $\pi'_m : a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ otra partición de $[a,b]$. Notemos que $\mathbb{E}(X(s)X(t))$ es continua en $[a,b] \times [a,b]$, ya que es suma de funciones continuas, $\mathbb{E}(X(s)X(t)) = K_X(s,t) + \mathbb{E}(X(s))\mathbb{E}(X(t))$, por propiedades de la integral de Riemann,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I(\pi_n)I(\pi'_m)\right] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(t_i)g(s_j)\mathbb{E}\left[X(t_i)X(s_j)\right](t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})) \\ &\to \int_a^b \int_a^b g(t)g(s)\mathbb{E}\left[X(t)X(s)\right]dsdt.\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 2.2 existe una variable aleatoria I en L_2 talque $I(\pi_n) \to I$ en L_2, así mismo $I(\pi'_n) \to I$ en L_2, por la continuaidad del producto interno obtenemos

$$\mathbb{E}(I(\pi_n)I(\pi'_n)) \to \mathbb{E}\left(I^2\right)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(I^2\right) = \int_a^b \int_a^b g(s)g(t)\mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right] dsdt$$

Finalmente de (2.14) y (2.15) se deduce (2.16). □

Teorema. 2.4. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes, y supóngase que m_X y K_X son ambas funciones continuas. Entonces*

$$Cov\left[\int_a^b f(t)X(t)dt, \int_c^d g(s)X(s)ds\right] = \int_a^b f(t)\left[\int_c^d g(s)K_X(s,t)ds\right]dt$$
$$= \int_c^d g(s)\left[\int_a^b f(t)K_X(s,t)dt\right]ds$$

Además, el proceso $Y(t) := \int_a^t X(s)ds$ satisface que para todo $t,s \in T$, con $s,t \geq a$

$$m_Y(t) := \int_a^t m_X(u)du, \tag{2.17}$$

$$K_Y(s,t) = \int_a^s \int_a^t K_X(u,v)dudv = \int_a^t \int_a^s K_X(u,v)dvdu \tag{2.18}$$

Demostración. El resultado se sigue de manera análoga al Teorema anterior. □

Observación. 7. *Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ conntinua por partes y m_X y K_X continuas. Si $X(\cdot)$ es un proceso gaussiano, entonces $I = \int_a^b g(t)X(t)dt$ es una variable aleatoria gaussiana, ya que como I es el límite en L_2 de variables gaussianas, veáse Proposición A.3.*

Ejemplo. 2.8. *Sea $W(\cdot) = \{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$. Por el ejemplo 1.2 $W(\cdot)$ es un porceso gaussiano y por la observación anterior con $g(t) = 1$, tenemos que para cada $b \geq 0$, la integral es $\int_0^b W(t)dt$ es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza dada por*

$$Var\left(\int_0^b W(t)dt\right) = \int_0^b \int_0^b K_W(s,t)dsdt$$
$$= 2\int_0^b \left(\int_0^s \sigma^2 tdt\right)ds$$
$$= \sigma^2 \int_0^b s^2 ds = \sigma^2 b^3/3.$$

Capítulo 3

Integración Estocástica

3.1. Introducción

En esta capítulo presentaremos las ideas básicas de la teoría de integración estocástica en el caso donde el integrando es un proceso estocástico adaptado a la filtración con respecto a la cual el integrador es un Proceso de Wiener. El objetivo es definir integrales estocásticas de la forma

$$\int_a^b f(t)dW(t) \quad \text{donde} \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Porque para cada t, $t \mapsto W(t)$ no es de variación acotada sobre cualquier intervalo, imposibilitando definir (3.1) en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Ahora daremos la idea que usó K. Itô (1944) para definir la integral estocástica (3.1)

3.2. Integral de Itô

Definiremos la integral estocástica como se hace en la teoría de integración, primero para procesos simples y después aproximaremos a procesos más generales.

Consideremos un intervalo $[a,b]$, donde $a < b < \infty$ con sus Borelianos restringidos al intervalo $[a,b]$, es decir, con $\mathbb{B}_{[a,b]} = \sigma\{B \cap [a,b], B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}\}$, y con la medidad de Lebesgue $\lambda(dt) = dt$. Además consideremos el espacio usual $L_2(\Omega) \equiv L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y también el espacio $L_2([a,b] \times \Omega) \equiv L_2([a,b] \times \Omega, \mathscr{B}_{[a,b]} \times \mathscr{F})$ con producto interno dado por

$$\langle f,g \rangle := \mathbb{E}\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right) = \int_a^b \mathbb{E}(f(t)g(t))\,dt \tag{3.2}$$

Así, la norma en $L_2([a,b] \times \Omega)$ es

$$||f||_{L_2([a,b]\times\Omega)} := \langle f,f \rangle^{1/2} = \left(\int_a^b \mathbb{E}\left(f^2(t)\right)dt \right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Wiener estándar definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea $\mathscr{F}^W := \{\mathscr{F}_t, t \geq 0\}$ la filtración natural de $W(\cdot)$.

Definición. 3.1. *Para $0 \leq a < b$, definamos a $N[a,b]$ como la familia de Procesos Estocásticos $f(\cdot) = \{f(t), t \geq 0\}$ tales que*

(a) $(t,w) \to f(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible;*

(b) $f(\cdot)$ *está adaptado a* $\mathscr{F}^W$*;*

(c) $f \in L_2([a,b] \times \Omega)$*, es decir,* $\int_a^b \mathbb{E}\left(f^2(t)\right) dt = \mathbb{E}\left(\int_a^b f^2(t)dt\right) < \infty$.

Definición. 3.2. *Sea $f \in N[a,b]$.Decimos que f es un* ***Proceso Estocástico Simple*** *si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ tal que*

$$f(t) \equiv f(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1;$$

en otras palabras,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

en donde, por convención,$[t_{n-1}, t_n) \equiv [t_{n-1}, b]$. Denotemos por $\mathscr{S}[a,b]$ la subfamilia de procesos estocásticos simples $f \in N[a,b]$.

Definición. 3.3. *(La integral de Itô para Procesos Estocásticos en $\mathscr{S}[a,b]$.) Si $f \in \mathscr{S}[a,b]$ es simple, definimos la* ***integral de Itô*** *de f como*

$$\int_a^b f(t)dW(t) := \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta W_i, \tag{3.4}$$

donde $\Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$. La denotaremos como $\int_a^b f dW$ ó $I(f)$.

Proposición. 3.1 (Propiedades de $I(f)$ para procesos simples)**.** *Sean f, g procoesos en $\mathscr{S}[a,b]$ y α, β números reales. Entonces:*

(a) $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dW = \alpha \int_a^b f dW + \beta \int_a^b g dW$;

(b) *la integral de Itô $\int_a^b f dW$ es una variable aleatoria con media cero, es decir*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f dW\right) = 0, \tag{3.5}$$

y variaza

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^b f dW\right)^2\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left(f^2(t)\right) dt = \mathbb{E}\left(\int_a^b f^2(t)dt\right). \tag{3.6}$$

Al resultado anterior se le llama ***isometría de Itô****.*

Demostración. La demostración de (a) se deja como ejercicio para el lector
(b) Como $W(\cdot)$, tiene incrementos independientes, entonces la variable aleatoria $\Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ es independiente de $\mathscr{F}_{t_i}^W$ y por propiedades de esperanza condicional

$$\mathbb{E}\left(\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right) = \mathbb{E}(\Delta W_i) = 0 \tag{3.7}$$

También como $h(x) = x^2$ es $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-medible, entonces $h(\Delta W_i)$ es independiente de $\mathscr{F}_{t_i}^W$, así

$$\mathbb{E}\left((\Delta W_i)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right) = \mathbb{E}\left((\Delta W_i)^2\right) = t_{i+1} - t_i.$$

Ahora, como

$$\mathbb{E}(f(t_i)\Delta W_i) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right)\right).$$

Como $f \in \mathscr{S}[a,b]$, entonces está acotada y además $f(t)$ es $\mathscr{F}_t^W$ para todo t, entonces por (3.7),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(t_i)\Delta W_i) &= \mathbb{E}\left(f(t_i)\mathbb{E}\left(\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right)\right)\\ &= 0 \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \cdots, n-1,\end{aligned}$$

que junto con la definición 3.3 se sigue que

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f dW\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f(t_i)\Delta W_i) = 0.$$

Nuevamente por la definición de la integral de Itô 3.3 se obtiene

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^b f dW\right)^2\right) = A + B, \tag{3.8}$$

donde

$$A := \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)^2 (\Delta W_i)^2\right)$$

y

$$B := 2\mathbb{E}\left(\sum_{i<j} f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j\right).$$

Se puede observar que $B = 0$ por que, para $t_i < t_j$, $f(t_i)$ es $\mathscr{F}_{t_i}^W$-medible, pero como $\mathscr{F}^W$ es filtración, entonces $\mathscr{F}_{t_i}^W \subset \mathscr{F}_{t_j}$. Por lo que $f(t_i)$ es $\mathscr{F}_{t_j}^W$-medible, y por (3.7)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}^W\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \mathbb{E}\left(\Delta W_j \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}^W\right)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big(f(t_i)^2 (\Delta W_i)^2 \Big)$$

y como $f(t_i)^2$ es $\mathscr{F}_{t_i}^W$-medible y acotada,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(f(t_i)^2 (\Delta W_i)^2 \Big) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\Big(f(t_i)^2 (\Delta W_i)^2 \,\Big|\, \mathscr{F}_{t_i}^W \Big) \right) \\
&= \mathbb{E}\left(f(t_i)^2 \mathbb{E}\Big((\Delta W_i)^2 \,\Big|\, \mathscr{F}_{t_i}^W \Big) \right) \\
&= \mathbb{E}\left(f(t_i)^2 \right) (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}$$

vemos que

$$A = \int_a^b \mathbb{E}\Big(f^2(t) \Big)\, dt.$$

Obteniendo el resultado. □

Definición. 3.4. *Sean $(V_1, \|\cdot\|_1)$ y $(V_2, \|\cdot\|_2)$ dos espacios vectoriales normados con productos internos $\langle \cdot,\cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$, respectivamente. Se dice que una función lineal $I : V_1 \to V_2$ es una isometría si para todo $v \in V_1$ se cumple que $\|I(v)\|_2 = \|v\|_1$.*

En este caso es fácil ver que

$$\left\langle v, v' \right\rangle_1 = \left\langle I(v), I(v') \right\rangle_2 \quad \forall v, v' \in V_1. \tag{3.9}$$

Ahora interpretemos la integral de Itô como una función $I : \mathscr{S}[a,b] \to L_2(\Omega)$ que a cada proceso $f \in \mathscr{S}[a,b]$ le asocia la variable aleatoria $I(f) = \int_a^b f dW$ definida en (3.4). Por la Proposición 3.1 I es lineal, mientras que la igualdad en (3.6) establece que la norma de $I(f) \in L_2$ coincide con la norma de $f \in L_2([a,b] \times \Omega)$, es decir $I : \mathscr{S}[a,b] \to L_2(\Omega)$ es una isometría.

En particular, (3.9) se puede escribir

$$\langle f, g \rangle = \langle I(f), I(g) \rangle \quad \forall f, g \in \mathscr{S}[a,b],$$

en donde $\langle f, g \rangle$ está dado por (3.2), mientras que

$$\langle I(f), I(g) \rangle = \mathbb{E}\left(I(f) \cdot I(g) \right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b f dW \cdot \int_a^b g dW \right),$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f dW \cdot \int_a^b g dW \right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right) = \int_a^b \mathbb{E}\left(f(t) g(t) \right) dt \tag{3.10}$$

para todo $f, g \in \mathscr{S}[a,b]$. Ahora, para poder extender la definición de la integral de Itô es necesario el siguiente resultado

Lema. 3.1. *El espacio $\mathscr{S}[a,b]$ es **denso** en $N[a,b]$ respecto de la norma en $L_2([a.b]\times\Omega)$, es decir, para toda $f(\cdot)\in N[a,b]$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathscr{S}[a,b]$ tal que*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt\right)\to 0 \quad \textit{cuando} \quad n\to\infty. \tag{3.11}$$

Demostración. Supongamos primero que f es acotada con trayectorias $t\mapsto f(t,\omega)$ continuas para cada $\omega\in\Omega$.

Para cada $n=1,2,\cdots$, sea $\pi_n=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ la partción de $[a,b]$ definida como $t_i:=a+i(b-a)/n$ para $i=1,\ldots,n$, y sea $f_n\in\mathscr{S}[a,b]$ la función

$$f_n(t):=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(t).$$

Sea $\|f\|:=\sup_t|f(t)|$ y nótese que

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} f(t)I_{[t_i,t_{i+1})}(t).$$

Luego

$$\forall t\in[t_i,t_{i+1}):|f_n(t)-f(t)|\leq \sup_{t_i<t<t_{i+1}}|f(t_i)-f(t)|/n\leq 2\|f\|/n$$

y por lo tanto

$$\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)-f(t)|^2\,dt\leq\frac{4\|f\|^2}{n^2}(b-a)\to 0$$

cuando $n\to\infty$. Luego por el Teorema de Convergencia Acotada

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt\right)\to 0 \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Ahora, sea $f\in N[a,b]$ acotada, es decir, existe una constante M talque $|f(t,\omega)|\leq M$ para todo $(t,\omega)\in[a,b]\times\Omega$.

En este caso existe una sucesión de funciones $f_n\in N[a,b]$ tales que $t\longmapsto f_n(t,\omega)$ es continua para todo $\omega\in\Omega$ y, además,$|f_n(t,\omega)|\leq M$ y $f_n(t,\omega)\to f(t,\omega)$ para todo $(t,\omega)\in[a,b]\times\Omega$. Nuevamente por Convergencia Acotada implica (3.11).

Finalmente tomenos $f\in N[a,b]$ arbitraria. Para cada $n=1,2,\cdots$. Sea $f_n\in N[a,b]$ la función truncada

$$\begin{aligned} f_n(t) &:= f(t) \quad \text{si} \quad |f(t)|\leq n \quad (\text{i.e.} -n\leq f(t)\leq n),\\ &:= n \quad \text{si} \quad f(t)>n,\\ &:= -n \quad \text{si} \quad f(t)<-n. \end{aligned}$$

Nótese que cada f_n es acotada (por que $|f_n| \leq n$), está dominada por $f(|f_n| \leq |f|$ para todo n), y $f_n(t) \to f(t)$ para todo $t \in [a,b]$ cuando $n \to \infty$. Esto implica (3.11), por Convergencia Acotada. $\square$

Así el Lema 3.1 nos permitirá construir la integral de Itô para $f \in N[a,b]$. Si $f \in N[a,b]$, por el Lema 3.1 existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathscr{S}[a,b]$ que satisface (3.11). Sea $I(f_n) = \int_a^b f_n dW$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{I(f_n)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ya que para cada $m \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|I(f_n) - I(f_m)\|_2 &= \mathbb{E}\left(|I(f_n) - I(f_m)|^2\right)^{1/2} \\
&= \mathbb{E}\left(\left|\int_a^b (f_n - f_m)\, dW\right|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Como $(f_n - fm) \in \mathscr{S}[a,b]$ y por la isometría de Itô (3.6), tenemos que

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_a^b (f_n - f_m)\, dW\right|^2\right)^{1/2} = \mathbb{E}\left(\int_a^b (f_n(t) - f_m(t))^2\, dt\right)^{1/2},$$

y por (3.11)

$$\begin{aligned}
\|I(f_n) - I(f_m)\|_2 &= \mathbb{E}\left(\int_a^b (f_n(t) - f_m(t))^2\, dt\right)^{1/2} \\
&= \|f_n - f_m\|_{L_2([a,b]\times\Omega)} \\
&\leq \|f_n - f\|_{L_2([a,b]\times\Omega)} + \|f_m - f\|_{L_2([a,b]\times\Omega)} \\
&\to 0 \quad \text{cuando} \quad n,m \to \infty.
\end{aligned}$$

Como $L_2(\Omega)$ es completo, entonces existe una variable aleatoria $I(f) \in L_2$ tal que $I(f_n) \xrightarrow{L_2} I(f)$

Definición. 3.5. *Al limite $I(f)$ se le llama la **integral de Itô** de f y escribimos*

$$I(f) := \int_a^b f(t)dW(t) \xleftarrow{L_2} \int_a^b f_n(t)dW(t) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Luego, como la función limite es una función Borel medible, entonces $I(f)$ también es variable aleatoria. Además, por la Proposición A.3 y (3.12) se estilan las siguientes propiedades de $I(f)$ para $f \in N[a,b]$

(a) $I(f)$ es independiente de la sucesión aproximadamente$\{f_n\}$.

(b) La integral $I(f)$ satisface para todo f, g en $N[a,b]$:

$$\mathbb{E}(I(f)) = \mathbb{E}\left(\int_a^b f\, dW\right) = 0, \tag{3.13}$$

$$Var\left(I\left(f\right)\right) = \mathbb{E}\left(\left(\int_a^b f dW\right)^2\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left(f^2(t)\right) dt, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} Cov\left(\int_a^b f dW, \int_a^b g dW\right) &= \mathbb{E}\left(\int_a^b f dW \cdot \int_a^b g dW\right) \\ &= \int_a^b \mathbb{E}\left(f(t)g(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ejemplo. 3.1. *Para cada $\pi : \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ partición de $[a,b]$ tal que $|\pi| \to 0$ cuando $n \to \infty$ sea*

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)\Delta W_i,$$

donde $W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$.

Ahora, como

$$W(t_i)\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) = \frac{1}{2}\left(W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)\right) - \frac{1}{2}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2,$$

entonces

$$S_n = \frac{1}{2}\left(W^2(b) - W^2(a)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2$$

Por la variación cuadrática (1.3) tenemos que

$$S_n \xrightarrow{L_2} \frac{1}{2}\left(W^2(b) - W^2(a)\right) - \frac{1}{2}(b-a) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por lo tanto, como $W(\cdot)$ está en $N[a,b]$, obtenemos la integral de Itô

$$\int_a^b W dW = \frac{1}{2}\left(W^2(b) - W^2(a)\right) - \frac{1}{2}(b-a).$$

Definición. 3.6. *Si $f \in N[a,b]$ y $A \in \mathbb{B}_{[a,b]}$, entonces $f \cdot \mathbb{I}_A \in N[a,b]$. Sea*

$$\int_A f(t)dW(t) := \int_a^b f(t)\mathbb{I}_A(t)dW(t).$$

*En particular, si $f \in N[0.T]$ para algún $T > 0$, entonces podemos definir la **integral idefinida***

$$X(t) := \int_0^t f(s)dW(s) \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.16}$$

Proposición. 3.2. *Sea $f \in N[0,T]$ y $X(\cdot)$ el procesos estocástico dado por (3.16). Entonces*

(a) *$X(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{F}^W$; y*

(b) $X(\cdot)$ *es un proceso en* L_2 *y una martingala con respecto a* $\mathscr{F}^W$*. Por lo tanto:*

(c) $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|>\epsilon\right)\leq\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^T\mathbb{E}\left(f^2(s)\right)ds,$

(d) $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right)\leq 4\int_0^T\mathbb{E}\left(f^2(s)\right)ds.$

Demostración. (a) Para un proceso estocástico $f\in\mathscr{S}[0,T]$, el resultado se sigue de la definición de integral en (3.4), luego para $f\in N[a,b]$, (a) se sigue de la definición de $I(f)$ en (3.12), pues limite de funciones medibles es medible nuevamente. Por lo tanto $X(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{F}^W$

(b) Por (3.13) y (3.14), $\mathbb{E}(X(t))=0$ y $Var(X(t))=\mathbb{E}\left(X^2(t)\right)=\int_0^t\mathbb{E}\left(f^2(s)\right)ds.$. Así sólo basta mostrar que para $0\leq s\leq t<T$

$$\mathbb{E}\left(X(t)\,\middle|\,F_s^W\right)=X(s)$$

Pero como por definición de filtración $X(s)$ es $\mathscr{F}_S^W$-medible, entonces

$$X(s)=\mathbb{E}\left(X(s)\,\middle|\,F_s^W\right),$$

luego por linealidad de la esperanza condicional equivale a demostrar

$$\mathbb{E}\left(X(t)-X(s)\,\middle|\,F_s^W\right)=0\quad 0\leq s\leq t<T.$$

De hecho, como

$$X(t)=\int_0^t fdW=\int_0^s fdW+\int_s^t fdW=X(s)+\int_s^t fdW,$$

debemos probar que

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t fdW\,\middle|\,\mathscr{F}_s^W\right)=0. \tag{3.17}$$

Verifiquemos (3.17) para $f\in\mathscr{S}[0,T]$. Sea $\pi_n=\{s=t_0<t_1,\ldots,<t_n=t\}$ una partición de $[s,t]$, entonces

$$\int_s^t fdW:=\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i)\Delta W_i,$$

donde $\Delta W_i=W(t_{i+1}-W(t_i))$. Luego por linealidad

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t fdW\,\middle|\,\mathscr{F}_s^W\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i\,\middle|\,\mathscr{F}_s^W\right).$$

Como $\mathscr{F}_s^W\subset\mathscr{F}_{t_i}^W$, utilizando la propiedad de torre (A.1)

$$\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i\,\middle|\,\mathscr{F}_s^W\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i\,\middle|\,\mathscr{F}_{t_i}^W\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_s^W\right),$$

ahora, por definición $f(t_i)$ es $\mathscr{F}_{t_i}^W$-medible, en la esperanza condicional interna

$$\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right) = f(t_i)\mathbb{E}\left(\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}^W\right) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(f(t_i)\Delta W_i \,\middle|\, \mathscr{F}_s^W\right) = 0$$

Esto demuestra (3.17) para $f \in \mathscr{S}[0,T]$, utilizando este resultado y de la definición de integral pàra procesos en $N[0,T]$ (3.12) se obtiene el resultado para toda $f \in N[0,T]$.

Para los incisos (c) y (d), por (b), como

$$\mathbb{E}\left(|X(T)|^2\right)\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T f(s)dW(s)\right)^2\right) = \int_0^T \mathbb{E}\left(f^2(s)\right)ds$$

y utilizando las desigualdades para martingalas (A.3) y (A.4) con $p = 2$ respectivamente obtenemos el resultado deseado.

□

Definición. 3.7. *Sean $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ y $Y(\cdot) = \{Y(t), t \geq 0\}$ dos procesos estcásticos sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Decimos que $X(\cdot)$ es una **versión** de $Y(\cdot)$ si*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1 \quad t \geq 0.$$

Teorema. 3.1 (Continuidad de la integral). *Si $f \in N[0,T]$ y $X(t) := \int_0^t f dW$, entonces existe una versión $Y(\cdot)$ de $X(\cdot)$ que tiene trayectorias continuas c.s.*

Demostración. Sea $0 = t_0 <, t_1 \ldots, < t_n = T$ una partición de $[0,T]$. Para cada $t \in [0.T]$ definamos $t^* := \text{máx}\{t_i, t_i \leq t\}$. Entonces

$$X(t) = \int_0^t f dW = \sum_{i=0}^{i-1} f(t_i)\Delta W_i + f(t^*)[W(t) - W(t^*)]$$

el resultado se sigue del hecho que $W(\cdot)$ es continuo. Ahora extendamos a procesos $f \in N[0,T]$. Por el Lema 3.1 existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathscr{S}[0,T]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}\left(|f_n(s) - f(s)|^2\right) = 0. \tag{3.18}$$

Así si tomamos $X_n(t) := \int_0^t f_n dW$ y por la proposición 3.2, cuando $n \to \infty$, tenemos

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_n(t) - X(t)| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^T \mathbb{E}\left(|f_n(s) - f(s)|^2\right) \to 0.$$

Por lo tanto, existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ para la cual

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n_k}(t)-X(t)|>\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{1}{2^k}\quad\forall k$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n_k}(t)-X(t)|>\frac{1}{2^k}\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty.$$

Luego por el Lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n_k}(t)-X(t)|>\frac{1}{2^k}o.i.\right)=0$, es decir, para casi todo $\omega\in\Omega$ existe $K(\omega)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X_{n_k}(t,\omega)-X(t,\omega)|\leq\frac{1}{2^k}\quad\forall k\geq K(\omega)$$

Como $X(\cdot)$ es el limite uniforme casi seguramente de una sucesión de variables aleatorias continuas, implica que $X(\cdot)$ es continuo. $\square$

3.3. La integral de Itô para Procesos Estocásticos no-anticipantes

En esta sección veremos como es posible extender la definición de integral de Itô a procesos medibles pero no necesariamente adaptados la filtración natural del proceso de Wiener pero para ello es necesario definir el concepto de familia de sub-σálgebras no-anticipante.

Sea $W(\cdot)=\{W(t),t\geq 0\}$ un proceso de Wiener sobre $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición. 3.8. *Sea $\mathscr{G}(\cdot)=\{\mathscr{G}_t,t\geq 0\}$ una familia de sub$-\sigma-$álgebras de $\mathscr{F}$. Decimos que $\mathscr{G}(\cdot)$ es **no-anticipante** con respecto a $W(\cdot)$ si:*

(a) *$\mathscr{G}(\cdot)$ es creciente, es decir, $\mathscr{G}_s\subset\mathscr{G}_t$ para toda $0\leq s\leq t$;*

(b) *$W(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{G}(\cdot)$;*

(c) *Para todo $t\geq 0$ y $h>0$, $W(t+h)-W(t)$ es independiente de $\mathscr{G}_t$*

Ejemplo. 3.2. **(a)** *La filtración natural $\mathscr{G}(\cdot)\equiv\mathscr{F}^W$ (es decir, $\mathscr{G}_t=\mathscr{G}_t^W$ para todo $t\geq 0$) es no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$. De hecho, $\mathscr{F}^W$ es la familia "mas pequeña"de filtraciones no-anticipantes.*

(b) *Sea C una variable aleatoria independiente de $\mathscr{F}_t^W$ para todo $t\geq 0$, y para cada $t\geq 0$ sea $\mathscr{G}_t$ la minima $\sigma-$álgebra que contiene a $\sigma\{C\}$ y $\mathscr{F}_t^W$. Entonces $\mathscr{G}(\cdot)=\{\mathscr{G}_t,t\geq 0\}$ es una filtración no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$.*

Definición. 3.9. *Sea $\mathscr{G}(\cdot) = \{\mathscr{G}_t, t \geq 0\}$ una familia no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$. Para $0 \leq a < b$, definamos a $N[a,b]_{na}$ como la familia de procesos estocásticos $f(\cdot) = \{f(t), t \geq 0\}$ tales que*

(a) $(t,w) \to f(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible,*

(b) $f(\cdot)$ *está adaptado a* $\mathscr{G}(\cdot)$*,*

(c) $f \in L_2([a,b] \times \Omega)$.

Notemos que si $f \in N[a,b]_{na}$, por definición de $\mathscr{G}(\cdot)$, la constucción de la integral de Itô y las pruebas de los resultados vistos en la sección anterior se siguen de manera análoga sustituyendo $\mathscr{F}^W$ por $\mathscr{G}(\cdot)$. Por lo tanto

$$\int_a^b f dW,$$

se define como en (3.12) y cumple con todas las propiedades vistas.

Ahora, para poder extender la integral de Itô para procesos $f \notin L_2([a,b] \times \Omega)$, necesitamos relajar la condición de integrabilidad en la definición 3.9, así consideremos la siguiente familia de procesos estocásticos.

Definición. 3.10. *Sea $\mathscr{G}(\cdot) = \{\mathscr{G}_t, t \geq 0\}$ una familia no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$. Para $0 \leq a < b$, definamos a $M[a,b]_{na}$ como la familia de procesos estocásticos $f(\cdot) = \{f(t), t \geq 0\}$ tales que*

(a) $(t,w) \to f(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible,*

(b) $f(\cdot)$ *está adaptado a* $\mathscr{G}(\cdot)$*,*

(c) $\int_a^b f^2(t)\, dt < \infty$ *c.s.*

Definición. 3.11. *Sea $f \in M[a,b]_{na}$ un proceso estocástico simple, es decir, existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ talque*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\, I_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

definimos la integral de Itô como en la definición 3.3, es decir

$$\int_a^b f(t)\, dW(t) := \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\, \Delta W_i \quad \left(\quad con \quad \Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i) \right).$$

Teorema. 3.2. *Los procesos escalonados son densos en $M[a,b]_{na}$ c.s., es decir, para cada $f \in M[a,b]_{na}$ existe una sucesión $\{f_n\}$ de procesos simples en $M[a,b]_{na}$ tal que*

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0 \quad c.s. \tag{3.19}$$

Demostración. Veáse [Ar], Lemma 4.4.5. □

Sean $f \in M[a,b]_{na}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{S}[a,b]_{na}$. Entonces la sucesión de integrales $\int_a^b f_n dW$ converge en probabilidad y definimos la integral de Itô de f como

$$\int_a^b f dW := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dW \quad \text{en probabilidad.} \tag{3.20}$$

(Los detalles pueden consultarse en el libro de Arnold (1974), Sección 4.4.)

La definición de la integral de Itô (3.20) para procesos f en $M\,[a,b]_{na}$ es más general que (3.12) o que la definición 3.9, en el sentido que $M\,[a,b]_{na}$ es un espacio mucho mayor que (es decir, que contiene a)

$$N\,[a,b]_{na} \supset N\,[a,b]\,.$$

Sin embargo, esta generalidad tiene un precio muy alto; por ejemplo, en general, la integral en (3.20) no tiene las propiedades (3.13) y (3.14).

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En este capítulo veremos ecuaciones de la forma

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{4.1}$$

para toda $t_0 \leq t \leq T$ y con condición inicial $X(t_0)$ que supondremos independiente de $W(t) - W(t_0)$. Donde $b(t, X(t))$ y $\sigma(t, X(t))$ son funciones de $[0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ y se conocen como los coeficientes de **tendencia** o **deriva** y de **difusión** respectivamente.

En las siguientes secciones veremos la regla diferencial de Itô o también conocida como la fórmula de Itô, la cual es clave para encontrar una solución a (4.1), además un resultado análogo al caso determinista, bajo que condiciones se garantiza la existencia y unicidad, para finalizar con un par de ejemplos.

4.1. La regla diferencial de Itô

La regla diferencial de Itô es la versión estocástica de la clásica regla de la cadena en el cálculo diferencial ordinario. Consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo. 4.1. *Del ejemplo 3.1 sabemos que*

$$\int_a^b W dW = \frac{1}{2}\left(W^2(b) - W^2(a)\right) - \frac{1}{2}(b-a).$$

Que equivale a

$$W^2(b) - W^2(a) = (b-a) + \int_a^b 2W(s)dW(s) = \int_a^b 1 ds + \int_a^b 2W(s)dW(s).$$

Si $a = 0$ y $b = t$, entonces obtenemos

$$W^2(t) = \int_0^t 1 ds + \int_0^t 2W(s)dW(s) \tag{4.2}$$

En notación diferencial (4.2) se puede escribir como

$$dW^2(t) = dt + 2W(t)dW(t).$$

Notemos que el proceso estocástico $W^2(t)$ es la suma de dos integrales en donde la primera es una integral de Riemann mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Este proceso puede interpretarse como un sistema derminista gobernado por la por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica. Esto nos lleva a introducir la noción de proceso de Itô.

Sea $\mathscr{G}(\cdot) = \{\mathscr{G}_t, t \geq 0\}$ una filtración no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$.

Sean $b(t,\omega), \sigma(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ dos procesos estocásticos medibles, adaptados a $\mathscr{G}(\cdot)$ y tales que para toda $t \geq 0$

$$\int_0^t |b(s)|ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty \quad c.s.$$

Definición. 4.1 (Diferencial estocástica). *Si $X(\cdot) := \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso estocástico talque*

$$X(b) - X(a) = \int_a^b b(t)dt + \int_a^b \sigma(t)dW(t) \quad \forall 0 \leq a \leq b \leq T, \tag{4.3}$$

*decimos que $X(\cdot)$ es un **proceso de Itô** o que $X(\cdot)$ tiene una **diferencial estocástica** en $[0,T]$ y usaremos la notación*

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t). \tag{4.4}$$

Antes de enunciar el resultado clave que nos permitirá realizar algunos cálculos para encontrar la solución a una ecuación diferncial estocástica consideremos algunas observaciones

Observación. 8. (a) *Considere la regla formal:*

$\cdot$	dt	$dW(t)$
dt	0	0
$dW(t)$	0	dt

Cuadro 4.1: Tabla de multiplicación de Mckean.

Notemos que la variación cuadrática de W justifica la tabla. Entonces, por (4.4) y la tabla 4.1 formalmente tenemos que

$$(dX)^2 = b^2(dt)^2 + \sigma^2(dW)^2 + 2b\sigma(dt)(dW) = \sigma^2 dt,$$

es decir,

$$(dX(t))^2 = \sigma^2(t)dt. \tag{4.5}$$

(b) ***Notación***. *Denotemos por $C^{1,2} \equiv C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ el espacio de funciones $g(t,x)$ que son de clase C^1 en $t \geq 0$ y de clase C^2 en $x \in \mathbb{R}$.*

Además, denotaremos por subíndices a las derivadas parciales, es decir, $g_t := \partial g/\partial t$, $g_x := \partial g/\partial x$. Sea $X(\cdot)$ un proceso de Itô y sea $g(t,x) \in C^{1,2}$, en este caso escribimos

$$(Lg)(t,X(t)) := g_t(t,X(t)) + g_x(t,X(t))b(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))\sigma^2(t). \tag{4.6}$$

Teorema. 4.1 (Regla diferencial de Itô.). *Sea $X(\cdot) := \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Itô, y sea $g(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Entonces el proceso estocástico $Y(\cdot) := \{g(t,X(t)), 0 \leq t \leq T\}$ tiene la diferencial estocástica*

$$dY(t) = g_t(t,X(t))dt + g_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g_{x,x}(t,X(t))(dX(t))^2. \tag{4.7}$$

Es decir, por (4.4) y (4.5)

$$\begin{aligned} dY(t) = &\left(g_t(t,X(t)) + g_x(t,X(t))b(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))\sigma^2(t)\right)dt \\ &+ g_x(t,X(t))\sigma(t)dW(t), \end{aligned} \tag{4.8}$$

o usando (4.6)

$$dY(t) = Lg(t,X(t))dt + g_x(t,X(t))\sigma(t)dW(t). \tag{4.9}$$

Demostración. Sea $t_0 \in [0,t]$. Por demostrar

$$Y(t) - Y(t_0) = \int_{t_0}^{t} Lg(s,X(s))ds + \int_{t_0}^{t} g_x(s,X(s))\sigma(s)dW(s),$$

con Lg como en (4.6). Lo probaremos primero para procesos estcásticos constanes con respecto a t y $\mathscr{G}_{t_0}$-medibles, es decir, para cada $\omega \in \Omega$ y para cada $t \geq 0$ $b(t,\omega) \equiv u(\omega)$ y $\sigma(t,\omega) \equiv v(\omega)$ son variables aleatorias independientes de t, luego para procesos simples y finalmente el caso general por aproximación.

Sea $\Pi : \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ una partición de $[t_0,t]$. Sea $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$ y $\Delta X_i := X(t_{i+1}) - X(t_i)$, como $X(\cdot)$ es un proceso de Itô, tememos que

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) - X(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} b ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma dW(s) \\ &= b\Delta t_i + \sigma \Delta W_i, \end{aligned}$$

donde $\Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Notemos que

$$(\Delta X_i)^2 = b^2(\Delta t_i)^2 + \sigma^2(\Delta W_i)^2 + 2b\sigma(\Delta t_i)(\Delta W_i). \tag{4.10}$$

Además, como $Y(t) = g(t, X(t))$ para todo $0 \leq t \leq T$ entonces

$$Y(t) - Y(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta g_i$$

donde $\Delta g_i = g(t_{i+1}, X(t_{i+1})) - g(t_i, X(t_i))$. Ahora, como $g \in C^{1,2}$ por la fórmula de Taylor existen números $0 < \theta_i, \theta_i^* < 1$ tales que

$$\begin{aligned}\Delta g_i = {} & g_t(t_i + \theta_i \Delta t_i, X(t_i))\Delta t_i + g_x(t_i, X(t_i))\Delta X_i \\ & + \frac{1}{2} g_{xx}(t_i, X(t_i) + \theta_i^* \Delta X_i)(\Delta X_i)^2\end{aligned} \tag{4.11}$$

Por continuidad de g_t y de $X(\cdot)$, cuando $|\Pi| \to 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_i, X(t_i))\Delta t_i \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} g_t(s, X(s))ds \tag{4.12}$$

y

$$\alpha_n := \sup_{1 \leq i \leq n} |g_t(t_i + \theta_i \Delta t_i, X(t_i)) - g_t(t_i, X(t_i))| \xrightarrow{c.s.} 0$$

Entonces

$$\begin{aligned}& \left| \sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_i + \theta_i \Delta t_i, X(t_i))\Delta t_i - \sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_i, X(t_i))\Delta t_i \right| \\ & \leq \alpha_n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \\ & = \alpha_n (t - t_0) \xrightarrow{c.s.} 0 \qquad \text{cuando} \quad |\Pi| \to 0.\end{aligned}$$

Luego, utilizando (4.12), el primer término del lado derecho de (4.11) satisface

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_i + \theta_i \Delta t_i, X(t_i))\Delta t_i \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} g_t(s, X(s))ds \qquad \text{cuando} \quad |\Pi| \to 0 \tag{4.13}$$

Análogamente, por la continuidad de g_x y $X(\cdot)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_i, X(t_i))\Delta t_i \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} g_x(s, X(s))ds \qquad \text{cuando} \quad |\Pi| \to 0$$

También, por la convergencia en 3.20 tenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_i, X(t_i))\Delta W_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_{t_0}^{t} g_x(s, X(s))dW(s) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por lo tanto, el segundo término del lado derecho en (4.11) se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_i, X(t_i))\Delta X_i = b\sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_i, X(t_i))\Delta t_i + \sigma \sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_i, X(t_i))\Delta W_i$$

$$\xrightarrow{\mathbb{P}} \int_{t_0}^{t} bg_x(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma g_x(s, X(s))dW(s) \quad \text{cuando} \quad |\Pi| \to 0. \tag{4.14}$$

Luego, por continuidad de g_{xx} y de $X(\cdot)$, tenemos que cuando $|\Pi| \to 0$

$$\beta_n := \max_{1\leq i\leq n} |g_{xx}(t_i, X(t_i) + \theta_i^* \Delta X_i) - g_{xx}(t_i, X(t_i))| \xrightarrow{c.s.} 0, \tag{4.15}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))\Delta t_i \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} g_{xx}(s, X(s))ds \quad \text{cuando} \quad |\Pi| \to 0 \tag{4.16}$$

Utilizando la variación cuadrática de $W(\cdot)$ (1.8), es decir, cuando $|\Pi| \to 0$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 \xrightarrow{L_2} t - t_0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t - t_0,$$

y por (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta X_i)^2 =& b^2 \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta t_i)^2 + \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 + 2b\sigma \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta t_i)(\Delta W_i) \\ &\xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2(t - t_0)\end{aligned}$$

y utilizando este hecho junto con (4.14), observamos que el último término en (4.11) basta suponer que $\theta_i^* = 0$.Es decir, por demostrar

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta X_i)^2 &= b^2 A_n + \sigma^2 B_n + 2b\sigma C_n \\ &\xrightarrow{\mathbb{P}} v^2 \int_{t_0}^{t} g_{xx}(s, X(s))ds \quad \text{cuando} |\Pi| \to 0\end{aligned} \tag{4.17}$$

donde

$$\begin{aligned}A_n &:= \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta t_i)^2 \\ B_n &:= \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta W_i)^2 \\ C_n &:= \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta t_i)(\Delta W_i).\end{aligned}$$

Para demostrar (4.17), notemos que por (4.16)

$$|A_n| \leq |\Pi| \left| \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))\Delta t_i \right| \xrightarrow{c.s.} 0,$$

por lo tanto, también la convergencia se da en probabilidad, analógamente como

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))\Delta W_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_{t_0}^{t} g_{xx}(s, X(s))dW(s),$$

implica que

$$|C_n| \leq |\Pi| \left| \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))\Delta W_i \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Finalmente sumemos un cero a B_n, es decir,

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i)) \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i \right)$$

Pero como g_{xx} y $X(\cdot)$ son continuos, obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i))(\Delta t_i) \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} g_{xx}(s, X(s))ds,$$

mientras que por la variación cuadrática de $W(\cdot)$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_i, X(t_i)) \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Por lo tanto

$$B_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_{t_0}^{t} g_{xx}(s, X(s))ds,$$

obteniendo (4.17). Así de (4.13), (4.14) y (4.17) se sigue el resultado cuando u v son constantes, Así se cumple tambiém para procesos simples en $[t_0, t]$, pues particionamos el intervalo $[t_0, t]$ en un número finito de intervalos en cada uno de los cuales $b(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son constantes, es decir, para cada $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ tenemos que

$$b(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t) \quad \text{y} \quad \sigma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Y por lo ya probado tambien se cumple para procesos estocásticos $b, \sigma \in \mathscr{S}[t_0, t]$.

Luego, supongamos que $b(t, \omega), \sigma(t\omega) \in M[t_0, t]_{na}$ Por el Teorema 3.2 existen sucesiones $\{b_n(\cdot)\}$ y $\{\sigma_n(\cdot)\}$ de procesos simples tales que

$$\int_{t_0}^{t} |b_n(s) - b(s)|ds \xrightarrow{c.s.} 0, \quad \int_{t_0}^{t} |\sigma_n(s) - \sigma(s)|^2 ds \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Sea
$$X_n(t) := X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b_n(s)ds + \int_{t_0}^{t} \sigma_n(s)dW(s).$$
Entonces $X_n(t) \xrightarrow{c.s.} X(t)$ uniformemente, Como $g \in C^{1,2}$ tenemos que la sucesión
$$Y_n(t) := g(t, X_n(t)) \xrightarrow{c.s.} g(t, X(t)) = Y(t).$$

Por lo tanto
$$Y_n(t) - Y_n(t_0) = \int_{t_0}^{t} Lg(s, X_n(s))ds + \int_{t_0}^{t} g_x(s, X_n(s))\sigma_n(s)dW(s)$$
Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior obtenemos el resultado deseado (4.9). $\square$

4.2. Existencia y Unicidad

En esta sección veremos las condiciones de Itô para la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial estocástica de la forma 4.1, a este tipo de ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô, y se interpreta como la ecuación integral
$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))dW(s), \quad \forall t_0 \leq t \leq T. \tag{4.18}$$
Sea $\mathscr{G}(\cdot) := \{\mathscr{G}_t, t \geq 0\}$ la filtración no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$ definida por $\mathscr{G}_t := \sigma\{X(t_0), W(s) : s \leq t\}$

Teorema. 4.2. *Sea una ecuación diferencial estocástica de Itô tal que los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ satisfacen las siguientes condiciones, para alguna $K \geq 0$, para todo $t \in [t_0, T]$ y para cada $x, y \in \mathbb{R}$,*

*(a) (**Lipschitz**)*
$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \tag{4.19}$$

*(b) (**crecimiento lineal**)*
$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1 + |x|). \tag{4.20}$$

Entonces existe un proceso estocástico $X(\cdot)$ tal que

(a) $X(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{G}(\cdot)$,

(b) $X(t)$ satisface (4.18) para todo $t \in [t_0, T]$ casi seguramente,

(c) $X(t)$ *es continuo y es único casi seguramente, es decir, si* $X(\cdot)$ *y* $Y(\cdot)$ *son dos procesos estocásticos continuos tales que satisfacen* (4.18), *entonces*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le T} |X(t) - Y(t)| > 0\right) = 0. \tag{4.21}$$

Demostración. Daremos una prueba suponiendo que la condición inicial $X(t_0)$ satisface $\mathbb{E}(X(t_0)) < \infty$.

Bajo esta condición se puede demostrar que

$$(a)\mathbb{E}\left(X^2(t)\right) < \infty \quad \forall \quad t_0 \le t \le T, \quad y \quad (b)\int_{t_0}^{T} \mathbb{E}\left(\sigma(s, X(s))^2\right) ds < \infty. \tag{4.22}$$

Primero probemos la unicidad. Supongamos que $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$ dos soluciones de (4.18), por lo tanto para $t_0 \le t \le T$ tenemos

$$\begin{aligned} X(t) - Y(t) = &\int_{t_0}^{t} (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} (\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Y(s)))dW(s). \end{aligned} \tag{4.23}$$

elevemos al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior, y utilizando la desigualdad $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} (X(t) - Y(t))^2 \le &\, 2\left(\int_{t_0}^{t} (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))ds\right)^2 \\ &+ 2\left(\int_{t_0}^{t} (\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Y(s)))dW(s)\right)^2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por la desigualdad de Schwartz

$$\left(\int_{t_0}^{t} fg\right)^2 \le \left(\int_{t_0}^{t} f^2\right)\left(\int_{t_0}^{t} g^2\right),$$

con $g(\cdot) \equiv 1$ de la primer integral en (4.24) tenemos que

$$\left(\int_{t_0}^{t} (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))ds\right)^2 \le (t - t_0)\int_{t_0}^{t} (b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))^2 ds.$$

Así, al tomar esperanza y utilizando la isometía de Itô en la segunda la segunda integral en (4.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X(t) - Y(t))^2\right) \le &\, 2(t - t_0)\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left((b(s, X(s)) - b(s, Y(s)))^2\right) ds \\ &+ 2\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left((\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Y(s)))^2\right) ds. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Luego, por la condición de Lipschitz,

$$\mathbb{E}\Big((b(s,X(s)) - b(s,Y(s)))^2\Big) \le K^2\mathbb{E}\Big((X(s) - Y(s))^2\Big) \tag{4.26}$$

analogámente para σ. Por lo tanto, definiendo $g(t) := \mathbb{E}\Big((X(t) - Y(t))^2\Big)$, de (4.25) vemos que

$$g(t) \le L\int_{t_0}^{t} \sigma(s)ds \quad con \quad L := (2(t-t_0)+2)K^2. \tag{4.27}$$

Luego, por la desigualdad de Bellman-Gronwall (Lema A.1) obtenemos que

$$\mathbb{E}\Big((X(t) - Y(t))^2\Big) = 0 \quad \forall \quad t_0 \le t \le T. \tag{4.28}$$

Entonces $(X(t) - Y(t))^2 = 0$ casi seguramente, es decir,

$$\mathbb{P}(|X(t) - Y(t)| = 0) = 1 \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Luego, si Q es el conjunto de los números racionales, se sigue que

$$\mathbb{P}(|X(t) - Y(t)| = 0 \quad \forall t \in Q \cap [t_0, T]) = 1.$$

Por lo tanto, por la continuidad de $t \mapsto |X(t) - Y(t)|$, concluímos que

$$\mathbb{P}(|X(t) - Y(t)| = 0 \quad \forall \in [t_0, T]) = 1$$

Para probar la existencia usaremos el método de Picard. Sean

$$X^{(n)}(\cdot) := \Big(X^{(n)}(t), t_0 \le t \le T\Big) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, \ldots,$$

donde $X^{(0)}(\cdot) \equiv X(t_0)$ y para $n \ge 1$ definamos

$$X^{(n)}(t) := X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s, X^{(n-1)}(s))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X^{(n-1)}(s))dW(s) \tag{4.29}$$

donde $t \in [t_0, T]$. Por inducción, el proceso $X^{(n)}(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{G}$ y es continuo.

Por demostrar que existe un proceso estocástico $X(\cdot)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t) = X(t) \quad \text{c.s. uniformente en} \quad t \in [t_0, T], \tag{4.30}$$

además que $X(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial estocástica (4.18).

Para probar (4.30) verificaremos que

$$\sup_{t_0 \le t \le T} \mathbb{E}\Big(\Big|X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)\Big|^2\Big) \le L_1 \cdot (L_0(T-t_0))^n / n! \quad \forall n \ge 0, \tag{4.31}$$

en donde $L_0 = L_0(K, T - t_0)$ y $L_1 = L_1(L_0, T - t_0, \mathbb{E}(X(t_0)^2))$ son constantes, y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t_0 \le t \le T} \left| X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t) \right| \ge 1/n^2 \right) < \infty. \tag{4.32}$$

Verifiquemos (4.31). Sea $n = 0$, entonces

$$X^{(1)}(t) - X^{(0)}(t) = \int_{t_0}^{t} b(s, X(t_0))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(t_0))dW(s).$$

Usando el mismo argumento utilizado para obtener (4.25) se ve que

$$\mathbb{E}\left(\left(X^{(1)}(t) - X^{(0)}(t)\right)^2\right) \le 2(t - t_0)\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(b^2(s, X(t_0))\right)ds + 2\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\sigma^2(s, X(t_0))\right)ds$$

Por otra parte, por la condición de crecimieto lineal tenemos que

$$\mathbb{E}\left(b^2(s, X(t_0))\right) \le 2K^2(1 + \mathbb{E}\left(X^2(t_0)\right))$$

y análogamente para $\mathbb{E}(\sigma^2(s, X(t_0)))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(X^{(1)}(t) - X^{(0)}(t)\right)^2\right) &\le 2(t - t_0)(2K^2(1 + \mathbb{E}\left(X^2(t_0)\right)))(t - t_0 + 1) \\ &\le 2(T - t_0)(2K^2(1 + \mathbb{E}\left(X^2(t_0)\right)))(T - t_0 + 1) =: L_1.\end{aligned}$$

entonces (4.31) es válida para $n = 0$. Ahora para $n \ge 1$, un argumento obtenemos que

$$\mathbb{E}\left(\left(X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)\right)^2\right) \le L_0 \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\left(X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s)\right)^2\right) ds,$$

con $L_0 := 2(T - t_0 + 1)K$. Finalmente, iterando la desigualdad anterior

$$\mathbb{E}\left(\left(X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)\right)^2\right) \le L_0^n \frac{1}{(n+1)!} \int_{t_0}^{t} t - s^{n-1} \mathbb{E}\left(\left(X^{(1)}(s) - X^{(0)}(s)\right)^2\right) ds$$

Como $\mathbb{E}\left(X^{(1)}(\cdot) - X^{(0)}(\cdot)\right) \le L_1$, se sigue (4.31).

Ahora demostremos (4.32). Sea

$$D_n := \sup_{t_0 \le t \le T} \left| X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t) \right|$$

Por la desigualdad de Chebyshev,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(D_n \ge 1/n^2\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mathbb{E}\left(D_n^2\right).$$

Notemos que para demostrar (4.32) veremos que, para alguna constante M,

$$\mathbb{E}\left(D_n^2\right) \leq M(L_0(T-t_0))^{n-1}/(n-1)! \quad \forall n \geq 1 \tag{4.33}$$

ya que si suponemos válida dicha desigualdad, por el criterio del cociente para convergencia de series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(D_n \geq 1/n^2\right) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (L_0(T-t_0))^{n-1}/(n-1)! < \infty.$$

Por lo que verifiquemos (4.33). Notemos que por construcción de $X^n(t)$,

$$D_n \leq A_n + B_n$$

donde

$$A_n := \int_{t_0}^{T} \left| b(s, X^{(n)}(s)) - b(s, X^{(n-1)}(s)) \right| ds$$

y

$$B_n := \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^{t} (\sigma(s, X^{(n)}(s)) - \sigma(s, X^{(n-1)}(s))) dW(s) \right|.$$

Nuevamente usando que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

$$\mathbb{E}\left(D_n^2\right) \leq 2\mathbb{E}\left(A_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(B_n^2\right),$$

de modo que para demostrar (4.33) basta probar que existen constantes M_1, M_2 tales que

$$\mathbb{E}\left(A_n^2\right) \leq M_1 (L_0(T-t_0))^{n-1}/(n-1)! \tag{4.34}$$

$$\mathbb{E}\left(B_n^2\right) \leq M_2 (L_0(T-t_0))^{n-1}/(n-1)! \tag{4.35}$$

Ahora probemos (4.34). Pero se sigue de la condición de Lipschitz, pues

$$A_n^2 \leq K \int_{t_0}^{T} \left| X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s) \right| ds,$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$A_n^2 \leq K^2 (T-t_0) \int_{t_0}^{T} \left| X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s) \right|^2 ds$$

Esto implica que

$$\mathbb{E}\left(A_n^2\right) \leq K^2 (T-t_0) \int_{t_0}^{T} \mathbb{E}\left(\left| X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s) \right|^2 \right) ds$$

Finalmente por (4.31) tenemos que el lado derecho en la desigualdad anterior es menor o igual que

$$K^2(T-t_0)^2 L_1(L_0(T-t_0))^{(n-1)}/(n-1)!$$

Tomando $M_1 := K^2(T-t_0)^2 L_1$ se sigue (4.34).

Por demostrar (4.35), utlizando la desigualdad de Doob para martingalas (A.4) con p=2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_n^2\right) &\leq 4\mathbb{E}\left(\left(\int_{t_0}^{T}(\sigma(s,X^{(n)}(s))-\sigma(s,X^{(n-1)}(s)))dW(s)\right)^2\right)\\
&= 4\int_{t_0}^{T}\mathbb{E}\left(\left(\sigma(s,X^{(n)}(s))-\sigma(s,X^{(n-1)}(s))\right)^2\right)ds \quad \text{(isometría de Ito)}\\
&\leq 4K^2\int_{t_0}^{T}\mathbb{E}\left(\left(X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)\right)^2\right)ds \quad \text{(condición de Lipschitz)}\\
&\leq M_2(L_0(T-t_0))^{n-1}/(n-1)! \quad \text{(por (4.31))},
\end{aligned}$$

con $M_2 := 4K^2(T-t_0)L_1$, obtenemos el resultado.

Luego por (4.34) y (4.35), se sigue (4.32), es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(D_n \geq 1/n^2\right) < \infty.$$

Por el Lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{D_n \geq 1/n^2\right\}\right) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\left\{D_n < 1/n^2\right\}\right) = 1$$

Es decir, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe $N(\omega)$ tal que

$$D_n := \sup_{t_0\leq t\leq T}\left|X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t)\right| < 1/n^2 \quad \forall n \geq N(\omega).$$

Por lo tanto $\left\{X^{(n)}(t)\right\}$ es una sucesión de Cauchy casi seguramente, ya que

$$X^{(n)}(t) = X^{(0)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1}(X^{(i+1)}(t)-X^{(i)}(t)).$$

Por lo tanto, existe un proceso estocástico $X(\cdot)$ tal que

$$X^n(t) \to X(t) \quad \text{c.s. uniformemente sobre} \quad [t_0,T] \tag{4.36}$$

Esta convergencia uniforme implica que $X(\cdot)$ está adaptado a $\mathscr{G}(\cdot)$ y que $X(t)$ es continuo en todo $t \in [t_0, T]$.

Por último verifiquemos que $X(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))dW(s) \quad \forall t_0 \leq t \leq T. \tag{4.37}$$

Para $t = t_0$ el resultado es inmediato, ya que $X^{(n)}(t_0) = X(t_0)\ \forall n \geq 0$, se sigue de (4.36) que

$$X(t_0) = \lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t_0) = X(t_0) \quad \text{casi seguramente.}$$

Por otra parte, también se tiene que

$$\int_{t_0}^{T} b(s, X^{(n)}(s))ds \xrightarrow{c.s.} \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))ds \quad \forall t \in [t_0, T] \tag{4.38}$$

por (4.36) y la condicion de Lipschitz tenemos que

$$\left| \int_{t_0}^{t} b(s, X^{(n)}(s))ds - \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))ds \right| \leq K \int_{t_0}^{t} \left| X^{(n)}(s) - X(s) \right| ds$$
$$\xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{por (4.36).}$$

Finalmente, por (4.36) y (4.31), cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$X^{(n)}(t) \xrightarrow{L_2} X(t) \quad \text{uniformemente sobre} \quad [t_0, T] \tag{4.39}$$

entonces

$$\int_{t_0}^{t} \sigma(s, X^{(n)}(s))dW(s) \xrightarrow{L_2} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))dW(s) \quad \forall t_0 \leq t \leq T.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(s, X^{(n)}(s))dW(s) - \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))dW(s)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(s, X^{(n)}(s))dW(s) - \sigma(s, X(s))\right)^2\right) \\
&= \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\left(\sigma(s, X^{(n)}(s)) - \sigma(s, X(s))\right)^2\right) ds \quad \text{(isometría de Ito)} \\
&\leq K^2 \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}\left(\left|X^{(n)}(s) - X(s)\right|^2\right) ds \quad \text{(condición de Lipschitz)} \\
&\to 0 \quad \text{(por (4.39)).}
\end{aligned}$$

Un argumento similar demuestra que la convergencia en (4.38) también se cumple en L_2. En conclusión, $X(\cdot)$ satisface (4.37). $\square$

Observación. 9. **(a)** *La condición de Lipschitz (4.19) garantiza que la solución sea única. Por ejemplo, tomando* $\sigma(t, X(t)) = 0$*, sea*

$$dX(t) = 3X^{2/3}(t)dt \quad \forall t \geq 0 \quad con \quad X(0) = 0,$$

entones para cualquier $a > 0$*, la función*

$$X(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t \leq a \\ (t-a)^3 si \quad t > a, \end{cases}$$

es solución, ya que la derivada de la función $b(t, x) = x^{2/2}$ *no está acotada.*

(b) *Si no se cumple la condición de crecimiento lineal (4.20), la solución puede explotar en un tiempo finito. Por ejemplo*

$$dX(t) = X^2(t)dt \quad con \quad X(0) = 1,$$

entonces para $0 \leq t < 1$, $|b(t, x) - b(t, y)| = |x^2 - y^2| \leq 2|x - y|$*, es decir cumple la condición de Lipschitz. Por lo tanto tiene la única solución*

$$X(t) = \frac{1}{1-t},$$

pero $X(t) \to \infty$ *cuando* $t \uparrow 1$

Ejemplo. 4.2. *Considere la ecuación diferencial estocástica*

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \tag{4.40}$$

con condicón inicial $X(0) = x_0 > 0$*, en donde* $\mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$.

Notemos que los coeficientes $b(t, x) = \mu x$ *y* $\sigma(t, x) = \sigma x$ *satisfacen las condiciones del Teorema 4.2. Por lo tanto existe una solución única para (4.40). Para encontrar dicha solución, sea* $g(t, x) = \ln(x)$*, entonces utilizando la regla diferencial de Itô (4.7) a el proceso* $Y(\cdot) = \{g(t, X(t)), t \geq 0\}$ *tenemos*

$$dY(t) = \frac{1}{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X^2(t)}\right)(dX(t))^2$$

Sustituyendo (4.40) y por (4.5)

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{1}{X(t)}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)) - \frac{1}{2X^2(t)}\sigma^2 X^2(t)dt \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t), \end{aligned}$$

o en su forma integral

$$Y(t) - Y(0) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t).$$

Por lo tanto

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}.$$

Conclusiones

El cálculo estocástico ha sido una herramienta muy útil para diversas areas del conocimiento, en particular en la de Finanzas Matemáticas. Desde 1900, con Louis Bachelier que pone el primer ladrillo de las finanzas modernas al presentar su tesis titulada "Teoría de la Especulación", donde propone un movimiento Browniano para modelar la dinámica de los precios de las acciones con el objetivo de valuar opciones, y aunque fue un buen principio, la fórmula que dedujo permitía que los precios tomarán valores negativos.

Pero en la decada de los 60's su trabajo es retomado y con el cálculo estocástico, en los últimos años los mercados financieros han experimentado una gran revolución, pasando por los trabajos de Merton, Black y Scholes, que logran dar una solución satisfactoria al problema de valuar una opción, donde uno de los supuestos es modelar el precio de un activo con un movimiento browniano geométrico.

Actualmete, es posible buscar información de cualquier índole, pero alguna de las veces no es tan confiable como quisiéramos, además aunque ya no debería complicarse cualquier lectura en inglés, lamentablemente muchos de los libros a nivel licenciatura no se leen por el idioma. Es por ello que uno de los propósito del presente tabajo fue recopilar los conceptos básicos del cálculo estocástico, cuidando el mínimo detalle siempre con carácter formal, proporsionando al estudiante de los últimos semestres de la carrera de Actuaría en la FES Acatlán un material de apoyo para aquellos interesados en el tema. O bien, también esta pensado para que la tesina sea parte de notas de clase de la materia Prosesos Estocásticos II que se imparte en dicha carrera.

Finalmente mas que conclusión mi deseo personal se bifurca, por una parte, una vez teneniendo la integral con respecto al movimieto browniano y por ende la definición de una ecuación diferencial estocástica en el sentido de Itô, sería momento que el lector se aventurara en el mundo de las finanzas matemáticas. Por otra parte, cuando estaba apunto de culminar el presente trabajo surgió de manera natural las siguiente preguntas: ¿es posible definir la integral estocástica con respecto a otro proceso estocástico?, o ¿qué características debe tener dicho proceso?; esperando motivar al lector continuar con su preparación académica con un posgrado, con el fin que encuentre la solución a las preguntas planteadas y muchas más.

A

Apéndice

Definición. A.1. *Sea $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico y $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathscr{F}$.*

(a) *$\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ es una **filtración** de $\mathscr{F}$ si la familia es no decreciente, en el sentido de que*

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \quad \forall s, t \in T, \quad con \quad s < t;$$

(b) *$X(\cdot)$ **es adaptado** a la filtración $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ si X_t es $\mathscr{F}_t$-medible para todo $t \in T$ (i.e., $X^{-1}(t, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \subset \mathscr{F}_t$ para $t \in T$).*

(c) *La filtración definida por $\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X(s) : s \leq t\}$ se le llama **filtración natural** o **generada** por X. Recuerde que $\sigma\{X(s) : s \leq t\}$ es la $\sigma-$álgebra más pequeña que contiene a la familia $\left\{X(s, B)^{-1} : 0 \leq s \leq t \text{ y } B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}\right\}$*

Definición. A.2. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleaoria en L_1, entonces existe una variable aleatoria Y tal que*

a *Y es $\mathscr{G}$-medible, y*

b $\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P} \; \forall G \in \mathscr{G}$.

*A la variable aleatoria Y se le llama la **esperanza condicional de** X **dada la σ-álgebra** $\mathscr{G}$ y se denota por*

$$Y := \mathbb{E}(X|\mathscr{G}).$$

Esta variable aleatria es única c.s., es decir, si Z es otra variable aleatoria que satisface la definición, entonces $Y = Z$ c.s.

Proposición. A.1 (Propiedades de $\mathbb{E}(X|\mathscr{G})$.)**.** *Sean X y Y variables aleatorias en $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. Entonces*

(a) *Si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, entonces*

$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X).$$

(b) *Linealidad:*

$$\mathbb{E}(aX+bY\,|\,\mathscr{G}) = a\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}) + b\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G}) \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

(c) *Esperanza iterada:*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})) = \mathbb{E}(X).$$

(d) *Si X es $\mathscr{G}$-medible y acotada, entonces*

$$\mathbb{E}(XY\,|\,\mathscr{G}) = X\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})$$

(e) *Si X es $\mathscr{G}$-medible, entonces*

$$\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}) = X$$

(f) *Si X es independiente de $\mathscr{G}$, entonces*

$$\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$$

(g) *Propiedad de Torre: Si $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \mathscr{F}$, entonces*

$$\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}_1)\,|\,\mathscr{G}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}_2)\,|\,\mathscr{G}_1). \tag{A.1}$$

(h) *Desigualdad de Jensen. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y $h(X) \in \mathscr{L}_1$, entonces*

$$h(\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})) \leq \mathbb{E}(h(X)\,|\,\mathscr{G}). \tag{A.2}$$

Demostración. La prueba de los incisos (a)-(g) se sigue directamente de la definición de esperanza condicional. Y para (h) se deduce del Teorema de la línea de soporte que dice que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces existen sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $h(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto significa que $h(X) \geq a_n X + b_n$ para todo n, así que

$$\mathbb{E}(h(X)\,|\,\mathscr{G}) \geq a_n \mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G}) + b_n \quad \text{c.s.}$$

Ahora, tomando el supremo sobre n se sigue el resultado. □

Definición. A.3. *Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es una* ***martingala con respecto a*** *$\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ una filtración (o $\{X(t), \mathscr{F}_t, t \in T\}$ es una martingala) si*

(a) *$\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$ es una filtración de $\mathscr{F}$,*

(b) *$\{X(t) \in T\}$ es adaptado a $\{\mathscr{F}_t, t \in T\}$,*

(c) *$X(t)$ está en L_1 $\forall t \in T$, y*

(d) $\mathbb{E}(X(t)\,|\,\mathscr{F}_s) = X(s) \quad \forall \quad s,t \in T, \quad con \quad s \leq t.$

Si la igualdad en (d) se sustituye por $\geq$ ó $\leq$, es decir, para todo $s \leq t$

$$\mathbb{E}(X(t) \,|\, \mathscr{F}_s) \geq X(s) \quad \text{ó} \quad \mathbb{E}(X(t) \,|\, \mathscr{F}_s) \leq X(s)$$

se dice entonces que $\{X(t), \mathscr{F}_t, t \in T\}$ es **submartingala** o una **supermartingala**, respectivamente.

Proposición. A.2 (Desigualdades para martingalas.). *Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ una martingala en L_p, es decir, $\mathbb{E}(|X(t)|^p) < \infty$ para $t \geq 0$. Entonces*

(a) Para todo $p \geq 1, T \geq 0$ y $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)| \geq \epsilon\right) \leq \epsilon^{-p} \mathbb{E}(|X(T)|^p); \tag{A.3}$$

(b) Para $p > 1$ se cumple la desigualdad maximal de Doob:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X(T)|^p). \tag{A.4}$$

Demostración. La demostración de (a) y (b) se puede ver, por ejemplo, en [KyS, p. 13], Theorem 3.8. □

Proposición. A.3. *Sean $X, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias en L_2 tales que $X_n \xrightarrow{L_2} X$. Entonces*

(a) $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$ *cuando $n \to \infty$,*

(b) $\mathbb{E}(X_n^2) \longrightarrow \mathbb{E}(X^2)$ *cuando $n \to \infty$.*

(c) *Si $X_1 \ldots, X_n$ son gaussianas, entonces también X lo es.*

Demostración. Como convergencia en L_p implica convergencia en distribución, basta pedir convergencia débil en (c), ya que,

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_n}\right) =: \phi_{X_n}(u) \to \phi_{X_n}(u) := \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Sean $\mu_n = \mathbb{E}(X_n)$ y $\sigma_n^2 = Var(X_n)$.Como X_n es gaussiana, entonces $\mathbb{E}\left(e^{iuX_n}\right) = e^{iu\mu_n - \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}}$. Por lo tanto

$$e^{\frac{\sigma_n^2 u^2}{2}} = \left|\mathbb{E}\left(e^{iuX_n}\right)\right| \to \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right)$$

por lo que $\left\{e^{-\sigma_n^2}\right\}$ es convergente y como la función característica es distinta de cero en una vecindad de cero, tenemos que $\{\sigma_n^2\}$ es acotada y convergente sea σ^2 dicho límite. Esto implica que $\{\mu_n\}$ también está acotada. Pero como $e^{iu\mu_n}$ es convergente para cualquier u, esto muestra que para cualesquiera dos subsucesionales μ^1 y μ^2 de

μ_n satisfacen $\mu^1 - \mu^2 = 2k\pi/u$ para toda $u \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, implica que $k = 0$. Entonces $\mu^1 = \mu^2$. Sea μ el límite de μ_n. Entonces

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_n}\right) = e^{iu\mu_n - \frac{\sigma^2 u^2}{2}},$$

es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

□

Definición. A.4. *Sean $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ y $Y(\cdot) = \{Y(t), t \geq 0\}$ dos procesos estocásticos sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Decimos que $X(\cdot)$ es una versión de $Y(\cdot)$ si*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Lema. A.1 (Desigualdad de Bellman-Gronwall). *Sean $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ funciones continuas, y si una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface*

$$g(t) \leq h(t) + \int_a^t f(s)g(s)ds \quad t \in [a,b],$$

entonces

$$g(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)f(s)e^{\int_s^t f(\tau)d\tau}ds \quad t \in [a,b].$$

En particular si, $f(t) = L$ es constante

$$g(t) \leq h(t) + L\int_a^t e^{L(t-s)}h(s)ds \quad t \in [a,b].$$

Demostración. Veáse [Kh, pp. 651-652]. □

Bibliografía

[A] Applebaum D., (2004) *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.

[Ar] Arnold L., (1974) *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. J. Wiley and Sons.

[As] Ash R. B., (2000) *Probability and Measure Theory*. Second Edition Academic Press.

[B] Brown R., (1828) *A brief account of Microscopical Observation made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*, Philosophical Magazine. N. S. 4, 161-173.

[CyW] Chung K. L. y Williams R. J., (1983) *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhuser.

[GyS] Gikhman I.I. y Skorokhod A.V. (1969) *Introduction to the Theory of Random Processes*. Saunders.

[HPS] Hoel P. G., Port S. C. y Stone C. J. (1972) *Introduction to Stochastic Processes*. Houghton Mifflin.

[I] Itô, K., (1944) *Stochastic Integral*. Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 519-524.

[K] Kallenberg O. (2002) *Foundations of Modern Probability*. Second Edition Springer-Verlag.

[KyS] Karatzas I. y Shreve S. E., (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition Springer-Verlag.

[Kh] Khalil, H., (2002) *Nonlinear Systems*. Third Ediciï¿½n. Prentice-Hall.

[Kl] Klebaner F.C., (1998) *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press.

[Ø] Øksendal B., (1992) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer-Verlag.

[R] Rincón L., (2005) Construyendo la integral estocástica de Itô *Aportaciones Matemáticas*, Serie Comunicaciones 35, 265-283. SMM.

[S] Steele J.M., (2001) *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag.