



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

Instituto de Astronomía

AJUSTES ESTADÍSTICOS A CURVAS
DE LUZ DE GRBs SINTÉTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A :

TERESITA SUÁREZ NOGUEZ



instituto de astronomía

unam

Tutor:
DR. XAVIER HERNÁNDEZ DÖRING

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Ajustes estadísticos a curvas de luz de GRBs sintéticos.

que presenta para obtener el grado de
Maestra en Ciencias (Astronomía):
Teresita Suárez Noguez

Director de Tesis:
Dr. Xavier Hernández Döring

AGRADECIMIENTOS

A Xavier Hernández, mi asesor durante la maestría.

A mis padres, los quiero. A mi hermana Auned. A David. A mi amiga Aranza.

Gracias a mi maravilloso novio Juan V., por estar presente en todos los momentos y por tu invaluable ayuda.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular al Instituto de Astronomía. Al CONACyT por su apoyo económico durante la maestría.

A los Sinodales. Dr. Xavier Hernández Doring. Dr. Omar López Cruz- Dr. Ricardo Gómez Aiza. Dr. Sergio Mendoza Ramos. Dr. Leonid Gueorguiev.

Índice General

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	3
2.1. Explosiones de rayos gamma (Gamma Ray Bursts)	3
2.2. El modelo de la bola de fuego	6
2.2.1. Emisión de la fase inicial	9
2.2.2. Curvas de luz. Planteamiento del problema	9
2.3. Explosiones de rayos gamma en cosmología	11
3. Una revisión general de estadística	13
3.1. El concepto de probabilidad	13
3.2. Distribuciones de probabilidad	14
3.3. Estimación	16
3.3.1. Estimación de máxima verosimilitud	17
3.3.2. Intervalos de confianza	20
4. Solución del problema	23
4.1. Generación de datos artificiales	23
4.2. Estimación de parámetros (inversión del problema)	25
4.3. Intervalos de confianza	28
4.3.1. Elipses de covarianza	30
5. Modelaje de curvas de luz sintéticas.	33
6. Discusión y Conclusiones	49
A. Programa: Curva de luz artificial	53
B. Programa: Ajustes con el método de máxima verosimilitud	57

Índice de figuras

2.1. Imágenes registradas por los satélites Vela en 1970.	4
2.2. Distribución angular de 2704 GRBs del instrumento BATSE del satélite CGRO.	5
2.3. El modelo de la bola de fuego.	8
2.4. Curvas de luz del GRB 910717 en diferentes canales de energía.	10
3.1. Comportamiento de la varianza σ^2 en una distribución.	17
3.2. Funciones de verosimilitud.	18
3.3. Ejemplos de elipses de covarianza.	21
4.1. Comportamiento de una función de probabilidad particular.	24
4.2. Divisiones para simular mediciones usando un modelo base.	24
4.3. Dispersión simulada usando un ruido gaussiano.	25
4.4. Ejemplo de una curva de luz artificial.	26
4.5. Dos curvas como ejemplos de un ajuste a los datos de la curva de luz.	26
4.6. Gráfica de la función de verosimilitud logarítmica.	27
4.7. Gráfica que ilustra los intervalos de confianza.	29
4.8. Componentes de la elipse de covarianza.	30
4.9. Ejemplo de una elipse de covarianza.	32
5.1. Primer ejemplo de una curva de luz artificial.	34
5.2. Primera curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud.	35
5.3. Elipse de covarianza 1.1.	36
5.4. Elipse de covarianza 1.2.	36
5.5. Elipse de covarianza 1.3.	37
5.6. Segundo ejemplo de una curva de luz artificial.	38
5.7. Segunda curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud.	39
5.8. Elipse de covarianza 2.1.	40
5.9. Elipse de covarianza 2.2.	40
5.10. Elipse de covarianza 2.3.	41
5.11. Tercer ejemplo de una curva de luz artificial.	42
5.12. Tercera curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud.	43

5.13. Elipse de covarianza 3.1.	43
5.14. Elipse de covarianza 3.2.	44
5.15. Elipse de covarianza 3.3.	44
5.16. Curva de luz real del GRB 070318.	45
5.17. Ajuste estadístico de la curva de luz del GRB.	46
5.18. Primera elipse de covarianza del GRB 070318.	47
5.19. Segunda elipse de covarianza del GRB 070318.	47
5.20. Tercera elipse de covarianza del GRB 070318.	48

Capítulo 1

Introducción

Las explosiones de rayos gamma (GRBs) son pulsos cortos e intensos de rayos γ . Dado que se producen a distancias cosmológicas se necesitan flujos con energías muy grandes para explicar su emisión. Las observaciones que se tienen al día de hoy han permitido el desarrollo de un **modelo estándar** para un GRB, el cual describe las principales propiedades de las explosiones de rayos gamma con física estándar aplicada a estos objetos, este modelo se conoce como “el modelo de la bola de fuego”. Los GRBs tienen una duración del orden de segundos, lo que se detecta en ese corto tiempo es la *emisión de la fase inicial* en rayos γ y posteriormente se observa un *resplandor* que se detecta en rayos X , uv , visible, radio. Este resplandor se puede observar durante semanas ó incluso meses.

La curva de luz de la emisión de la fase inicial sigue la actividad de la fuente central, lo que permite la producción de las estructuras temporales complejas observadas en las curvas de luz de los GRBs. La intención de este trabajo es hacer un modelo matemático que describa el comportamiento de la emisión en esta fase. Estas curvas están bien descritas por una función tipo log-normal. En esta tesis se desarrolla un método para asignar estadísticamente los parámetros de esta función, a curvas de luz dadas para GRBs con distancias conocidas.

Usando como base un modelo matemático que representa el comportamiento de la curva de luz de la fase inicial se generan curvas de luz sintéticas que simulan una curva de luz real de un GRB observado. Esto va a establecer un modelo probabilístico completo, en este caso, la distribución de probabilidad.

Después se pone la restricción de que los datos deben obtener la distribución condicionada de los parámetros del modelo, es decir, se busca la probabilidad de que el modelo sea el que describe la curva de luz. Usando el método de máxima verosimilitud se obtienen los parámetros de la función tipo log-normal que mejor ajuste los datos. Y finalmente, para evaluar el ajuste del modelo, se calculan los intervalos de confianza para cada parámetro y se obtienen, graficando las elipses de covarianza, las correlaciones entre los parámetros.

De esta forma se trabaja con casos artificiales, generados computacionalmente, pero se logra probar el método aplicandolo a una curva de luz observada de un GRB real.

En todos los casos se puede observar que los valores estimados caen dentro de una elipse de covarianza, lo que significa que cada estimación tiene una probabilidad de 0.68 de ser el valor real.

En el capítulo (2) se muestra un panorama general de la teoría detrás de los GRBs, se describe el modelo que se tiene actualmente para explicar su emisión, se explican sus componentes y se plantea el problema. En el capítulo (3) se explica la teoría de la estadística que se utiliza para hacer el ajuste a las curvas de luz. En el capítulo (4) se describe la solución del problema, aplicando la estadística del método de máxima verosimilitud y estimación del error, usando herramientas de programación. En el capítulo (5) se muestran los resultados de este trabajo y finalmente, se muestran las conclusiones en el capítulo (6). En los apéndices A y B se describe el código de las rutinas usadas para generar las curvas de luz sintéticas y hacer los ajustes, en el lenguaje de programación *c*.

Capítulo 2

Marco Teórico

Históricamente, se detectaron explosiones de rayos gamma, GRBs (por sus siglas en inglés, Gamma Ray Bursts), por primera vez en 1967 por los satélites militares ‘Vela’ los cuales eran usados por el Departamento de Defensa de E.U.A para monitorear posibles explosiones nucleares dentro y fuera de la atmósfera terrestre, su descubrimiento se hizo público hasta 1973 (Klebesadel et al. 1973). Los satélites contaban con detectores omnidireccionales de rayos gamma, es imposible predecir desde dónde y cuando llegarán (Vedrenne & Atteia 2009). Pronto se dieron cuenta de que era un nuevo y extremadamente misterioso fenómeno cósmico. En los siguientes 25 años de su descubrimiento, solamente se observaron estos destellos breves de rayos gamma, que no podían ser localizados muy precisamente, los cuales se desvanecían muy rápido y parecían no dejar rastro.

Las curvas de luz de los GRBs varían en forma de una explosión a otra, también varían en escalas de tiempo desde milisegundos hasta cientos de segundos. En la figura (2.1) se muestran ejemplos de GRBs detectados por los satélites Vela (Klebesadel et al. 1973).

La energía electromagnética que emiten los GRBs durante decenas de segundos es comparable a la que emitiría el Sol durante unos $\sim 10^{10}$ años, que es aproximadamente la edad del universo, o a la energía que libera la vía Láctea en unos pocos años. Son los eventos más energéticos que se conocen en el Universo.

2.1. Explosiones de rayos gamma (Gamma Ray Bursts)

Los GRBs son pulsos cortos e intensos de rayos γ . Llegan desde distancias cosmológicas desde todas direcciones del cielo. En la figura (2.2) se muestra una gráfica con las posiciones de 2704 GRBs detectados por el instrumento BATSE (Burst and Transient Source Experiment) del satélite CGRO (Compton Gamma Ray Observatory), la cual muestra una distribución isotrópica de los destellos (Paciesas et al. 1999). Los GRBs son seguidos por un “resplandor” de baja energía, con una emisión de larga duración en rayos X, óptico y radio. En algunos casos se ha observado un resplandor en radio varios años después de la explosión (Tsvi Piran 2004).

El espectro observado de un GRB es no-térmico, lo que indica que las regiones son ópticamente delgadas (Tsvi Piran 2008). Típicamente se ajustan en un rango de MeV por leyes de

2.1 Explosiones de rayos gamma (Gamma Ray Bursts)

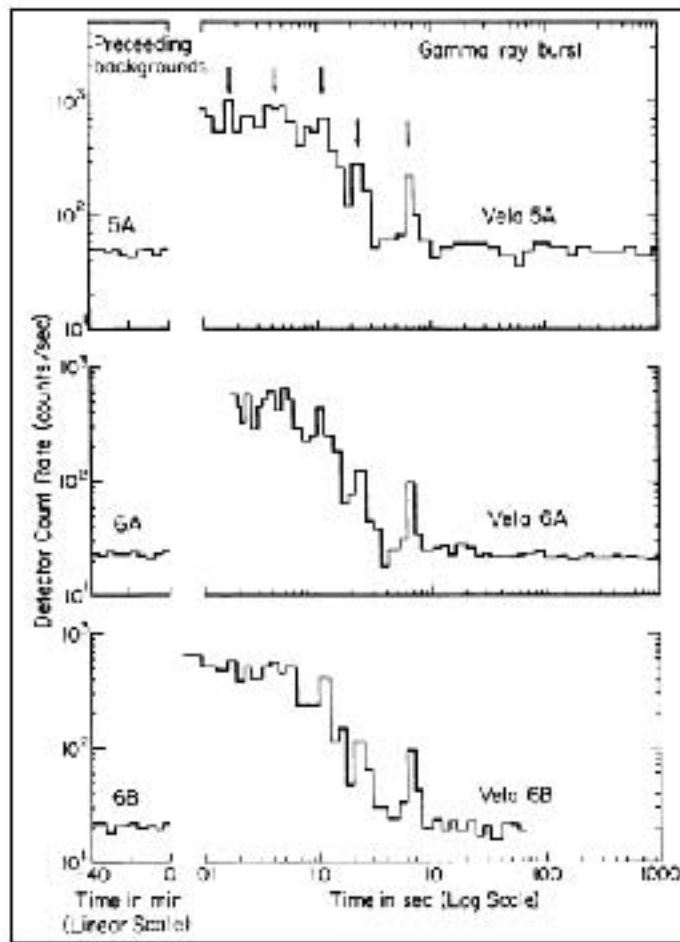


Figura 2.1: Conteo de fotones en función del tiempo de las explosiones de rayos gamma en 1970, como se registró en tres satélites Vela. (Imagen tomada del artículo de Klebesadel, Strong & Olson 1973).

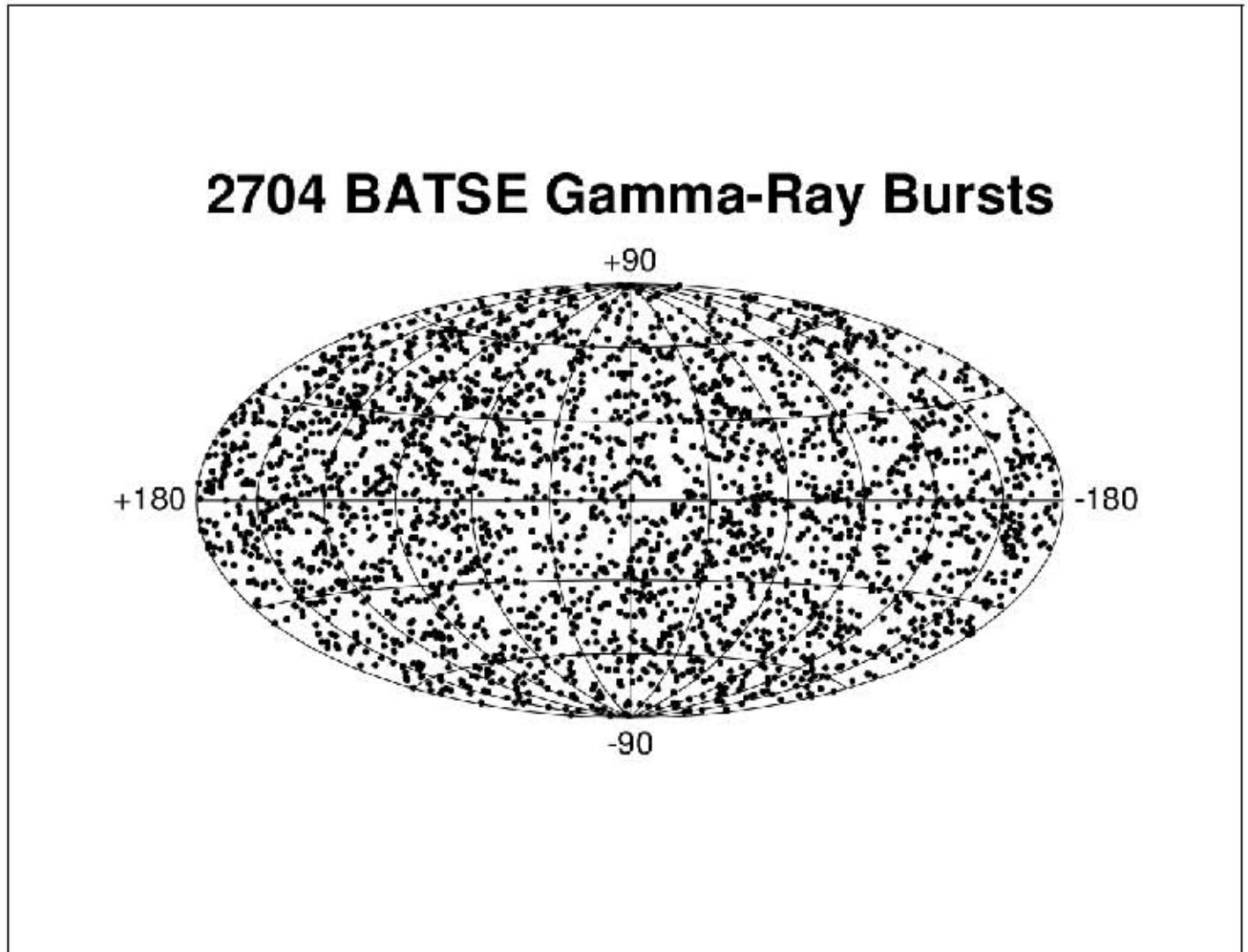


Figura 2.2: La distribución angular de 2704 GRBs de BATSE en coordenadas galácticas. La distribución es consistente con isotropía (Paciesas et al. 1999).

potencia segmentadas (Band et al. 1993). Estos son consistentes con una distribución espectral de energía para radiación sincrotrón ópticamente delgada producida por electrones acelerados a velocidades relativistas por frentes de choques en un flujo expulsado.

Los destellos de rayos gamma tienen una duración que va desde 0.001 a 1000 segundos, permitiendo clasificarlos en destellos largos con un tiempo mayor a dos segundos, $t_b \geq 2s$, y destellos cortos menores a dos segundos, $t_b \leq 2s$ (Kouveliotou et al. 1993), y en ocasiones presentan una subestructura abajo de los milisegundos. Se puede inferir el tamaño de las regiones de donde se emitió la energía por la duración de los destellos (Mészáros 2006). Las curvas de luz de rayos gamma pueden ser suaves, con un levantamiento rápido y decaimiento cuasi-exponencial (FREDs), o pueden reflejar un comportamiento con curvas de varios picos hasta curvas altamente variables (Fishman et al. 1995, Kouveliotou 1998). La distribución de los pulsos es compleja y pueden proporcionar pistas sobre la geometría de las regiones de emisión (Fenimore et al. 1996, Fenimore et al. 1999).

La interpretación que se da actualmente a cómo se produce la energía liberada en un GRB es que una enorme cantidad de energía gravitacional es liberada en un tiempo muy corto (del orden de segundos o menos) en una región muy pequeña (de decenas de kilómetros) por un evento estelar cataclísmico (el colapso del núcleo de una estrella masiva, o la fusión de dos núcleos de objetos compactos)(Mészáros 2006).

La principal dificultad con estos flujos era que una bola de fuego expandiéndose suavemente convertiría la mayoría de su energía en energía cinética de bariones acelerados (más que en energía de fotones), y produciría un espectro cuasi-térmico, mientras que a escalas de tiempo típicas no explican eventos más grandes que eventos de milisegundos. Mientras no todas las características observadas en un GRB se entienden, existe un consenso general entre las observaciones y el modelo de la bola de fuego. De acuerdo con el modelo de la bola de fuego los GRBs se producen cuando la energía cinética de un flujo ultra-relativista se disipa. El GRB en sí mismo se produce por disipación interna dentro del flujo mientras el resplandor se produce por choques externos con el medio que lo rodea (Tsvi Piran 2004).

2.2. El modelo de la bola de fuego

Dado que los GRBs se producen a distancias cosmológicas se necesitan flujos con energías muy grandes para explicar su emisión, estas energías pueden alcanzar los 10^{54} erg si la emisión es isotrópica (Mészáros 2006). Por argumentos de causalidad, usualmente se asume que las variaciones más rápidas medidas en una fuente astronómica delimitan su tamaño R , si definimos Δt como la variación más rápida de la luminosidad de la fuente, obtenemos que $R < c\Delta t$. Esta restricción es significativa para las explosiones de rayos gamma cosmológicas que muestran una variabilidad de milisegundos, lo que implica que, en ausencia de efectos relativistas especiales, las regiones de emisión típicas son de varios miles de kilómetros, donde $10^{51} - 10^{53}$ erg debe ser liberada en unos cuantos segundos. Estas altas energías producidas en un volumen muy pequeño nos lleva a la formación de una bola de fuego compuesta de rayos γ , positrones e^+ y electrones e^- .

El concepto de bola de fuego fue introducido por primera vez por Cavallo y Rees (1978).

Tales explosiones tan grandes se observan también en supernovas con energías similares pero en el caso de GRBs la enorme energía tiene que ser liberada en un volumen más pequeño y en tiempos más cortos; por lo tanto la fuente debe ser extremadamente opaca a creación de pares y deben emitir radiación térmica.

La cuestión de creación de pares es un problema central en la historia de los GRBs porque proveen una forma extremadamente eficiente para contener fotones por encima de ~ 1 MeV. La observación de un flujo significativo por encima de ~ 1 MeV en varios GRBs muestran que la creación de pares no era predominante en estas fuentes (Matz et al. 1985). Esto implica una baja densidad de fotones en las fuentes dados los altos flujos que se miden en la Tierra (Schmidt 1978). La eyección de materia a velocidades relativistas es un requerimiento necesario para producir la emisión de energía en los GRBs, estos varían en escalas tan cortas de tiempo que la región que emite debe ser muy pequeña. Energías tan grandes dentro de un cuerpo tan pequeño haría al sistema opaco a creación de pares fotón-fotón, haciendo la explosión mucho menos luminosa y el espectro que se obtendría sería muy diferente a lo que se observa.

Ésta solución no funciona para GRBs cosmológicos, por esta razón se debe tener una bola de fuego que sea inicialmente muy opaca a creación de pares. Debido a esta gran opacidad se espera que la bola de fuego se expanda relativistamente (Paczynski 1986 , Goodman 1986). La expansión altamente relativista de una bola de fuego modifica su radiación: los fotones *observados* están corridos al azul (es decir, un fotón de rayos X en una bola de fuego se vuelve un fotón de rayos γ en el marco de referencia del observador) mientras que las escalas de tiempo *observadas* son más cortas.

Por lo tanto, expansión relativista provee una forma muy eficiente de reducir la tasa de creación de pares: en el marco de referencia de la fuente que se está moviendo los fotones son más suaves por un factor Γ (el factor de Lorentz de un flujo relativista),

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (2.1)$$

u es la velocidad tal de una partícula medida por un sistema de referencia inercial. Los fotones vienen de una región con un tamaño típico $R < \Gamma^2 c \Delta t$ (en vez de $R < c \Delta t$ para una fuente estacionaria), así la densidad de fotones se reduce considerablemente.

Las observaciones que se tienen al día de hoy han permitido el desarrollo del **modelo estándar** de un GRB, el cual describe las principales propiedades de las explosiones de rayos gamma con física estándar aplicada a estos objetos. A este modelo se le conoce como “el modelo de la bola de fuego”, que básicamente consiste en un mecanismo central que genera la energía y expulsa chorros de material cuya subestructura se compone, de manera muy general, de:

- Choques externos: el choque de la bola de fuego con el medio externo que rodea la fuente y radian en rayos X , ultravioleta, visible, rojo y radio. Este choque explica bastante bien la etapa del GRB conocida como *resplandor*; y,
- Choques internos: se usan para explicar las curvas de luz de la emisión inicial en rayos gamma. Estos choques ocurren dentro de eyecciones (chorros de material conocidos como

2.2 El modelo de la bola de fuego

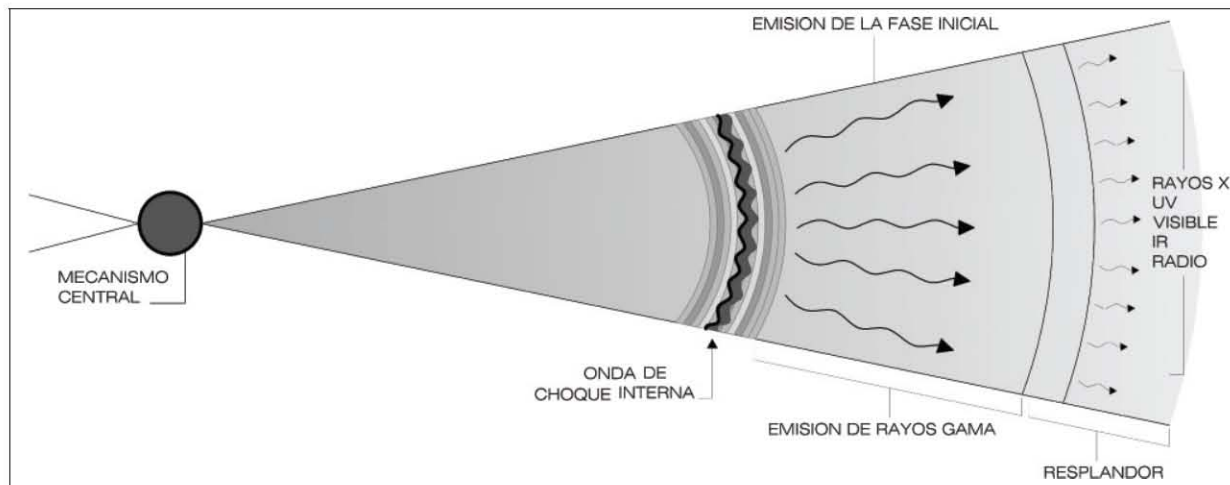


Figura 2.3: Comportamiento esquemático del modelo de la bola de fuego. De forma general consiste en un mecanismo central que expulsa *chorros* (también conocidos como “jets”) que tienen una subestructura de choques internos y choques externos. La figura muestra las radiaciones típicas producidas en diferentes regiones: la emisión de la fase inicial de rayos- γ es producida por choques internos a una distancia típica de $10^{14} - 10^{15}$ cm. La emisión característica de un resplandor producido por choques de la explosión con el medio que rodea al GRB es en rayos γ , X , O y R , a una distancia de $10^{16} - 10^{17}$ cm (adaptado de Mészáros 2006).

jets) que se mueven rápidamente cuando el flujo, que varía con el tiempo, es expulsado por el mecanismo central, produce cascadas eyectadas sucesivamente con diferentes factores de Lorentz. Aparecen varios choques cuando los cascadas más rápidas alcanzan a los que van más lento.

En los choques externos el flujo interactúa con el medio externo, mientras los choques internos son choques dentro del mismo flujo, lo cual da lugar a una importante diferencia, los choques externos son altamente relativistas, mientras que los choques internos son levemente relativistas (Rees & Mészáros 1994).

La figura (2.3) muestra un esquema general de una bola de fuego y especifica donde aparecen los choques internos y externos y qué tipo de radiación puede asociarse con estas regiones. Este escenario teórico predice bien muchas de las propiedades observadas de las explosiones. Todo el cuadro de la bola de fuego y el modelo de la onda de choque que sigue al resplandor ha sido ampliamente probado con las observaciones, y se ha convertido en el modelo dominante para el entendimiento actual de los GRBs. El modelo de choques internos-externos en el cual se basa este trabajo no depende de la naturaleza de la fuente central. Es irrelevante si la fuente de energía inicial se debe a la fusión de objetos compactos o al colapso del núcleo de una estrella masiva.

2.2.1. Emisión de la fase inicial

La emisión de la fase inicial (conocida en inglés como el “Prompt Emission”) es producida por choques internos que aparecen dentro de un viento relativista producido por una fuente altamente variable. Si el factor de Lorentz de la fuente es variable, los cascarones sucesivos pueden tener velocidades relativamente grandes, lo que implica que un cascarón rápido que sale después de uno más lento lo alcanzará eventualmente y chocará con él.

Para que la emisión de la fase inicial sea detectable, los choques se tienen que dar cuando las eyecciones hayan alcanzado distancias suficientemente largas para permitir que la radiación resultante escape sin termalización o pérdidas adiabáticas (Rees & Mészáros 1994).

Cada choque produce su propia emisión y la emisión resultante de la fase inicial (su espectro y variabilidad) es la suma de emisiones simultáneas de múltiples choques. Esta emisión produce las curvas de luz que son el objeto de estudio de este trabajo.

2.2.2. Curvas de luz. Planteamiento del problema

Una curva de luz proporciona información sobre los procesos físicos del objeto que se está observando. Lo que se obtiene es la intensidad de luz $I(t)$, ó la energía $E(t)$, en función del tiempo. Para estos objetos en particular es detectada en rayos γ . La curva de luz de la emisión de la fase inicial sigue la actividad de la fuente central, lo que permite la producción de las estructuras temporales complejas observadas en las curvas de luz de los GRBs. En la figura (2.4) se muestran ejemplos de curvas de luz tomadas con BATSE (Burst and Transient Source Explorer), el detector de rayos gamma del satélite Compton Gamma Ray Observatory, en cuentas de luz por segundo (Paciesas et al. 1999). Existen varios modelos que intentan reproducir los perfiles altamente variables observados en la mayoría de los GRBs, los cuales tienen la propiedad de que los intervalos de tiempo entre el pico y el lugar donde comienza el pulso sigue una distribución log-normal (McBreen et al. 1994 , Li&Fenimore 1996). Actualmente los únicos modelos físicos para explicar curvas de luz se limitan a la distribución temporal de la energía emitida, sin incluir ningún detalle sobre los procesos radiativos, e.g. Mendoza et al. 2010, Piran 2011. La intención de este trabajo es hacer un modelo matemático que describa el comportamiento de la emisión en esta fase. Para esto se considerarán GRBs cercanos típicamente a $z \leq 1.3$ (a distancias conocidas).

Se puede obtener la curva de luz en el marco de referencia del objeto.¹ Esta curva de luz, que

¹Con el corrimiento al rojo se puede corregir el tiempo y la energía para cambiar a la curva de luz en el marco de referencia del objeto . Primero se asume una cosmología, por ejemplo el GRB 070318 tiene un corrimiento al rojo $z = 0.84$. El instrumento del satélite toma conteos de fotones por canal de energía, en este caso el GRB 070318 fue tomado por el satélite *SWIFT* que tiene aproximadamente 2 keV de ancho en cada canal (de 14 a 16 keV, de 16 a 18 keV, 18 a 20 keV, ...), cada fotón de una cierta energía es registrado como un conteo en el canal correspondiente (ver figura(2.4)). El número de conteos por cada canal genera una curva de luz y para tener la curva integrada se suman los conteos de cada canal en cada bin de tiempo (tiempo de integración). Así el satélite construye la curva de luz en el sistema del observador. Entonces, para pasar la curva de luz al sistema de referencia del GRB se considera que el número de fotones no cambia, solo cambia su energía, y conociendo el corrimiento al rojo, se puede traducir el ancho de cada canal a lo que sería el ancho de energía de cada canal en el sistema en reposo. Por ejemplo, la energía de un cierto bin que tiene 3 conteos en el canal de 14 a 16 keV es $15 \times 3 \times (1 + z) = 45 \times 1 \times 1.84 = 82.8$. El 15 es el centro del canal de 14 a 16 keV, el $(1 + z)$ es la corrección

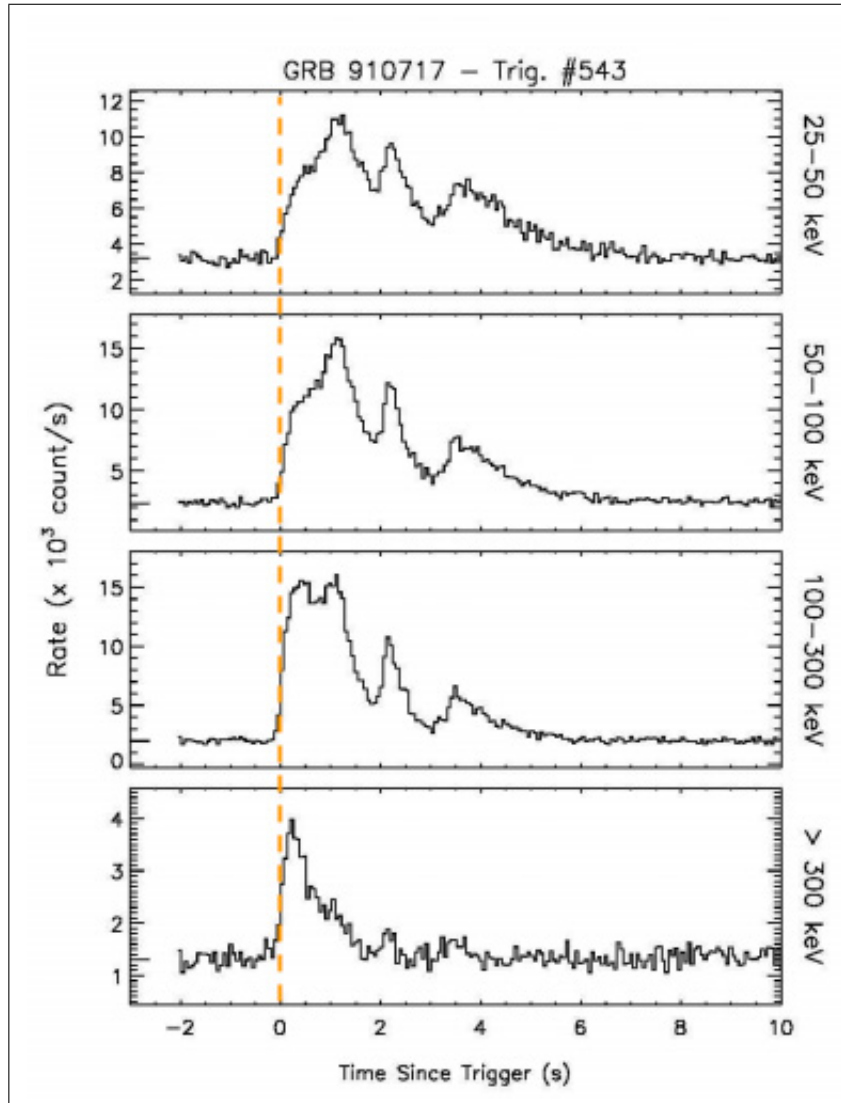


Figura 2.4: Curvas de luz del GRB 910717 en diferentes canales de energía, los cuales se muestran del lado derecho, tomadas de la base de datos de BATSE (Paciesas et al. 1999). <http://www.batse.msfc.nasa.gov/batse/grb/lightcurve/>

muestra la energía del GRB en función del tiempo, tiene un comportamiento tipo una función log-normal:

$$E(t; A, t_0, \Delta t, \sigma) = A \exp \left\{ \frac{-\log^2 \left(\frac{t-t_0}{\Delta t} \right)}{2\sigma^2} \right\}, \quad (2.2)$$

donde $A, t_0, \Delta t$ y σ son parámetros desconocidos y los cuales queremos determinar. Estadísticamente A es la amplitud de la curva, σ es una medida del ancho de la distribución y la suma $(t_0 + \Delta t)$ es el modo.

En esta tesis desarrollaremos un método para asignar estadísticamente los parámetros anteriores a las curvas de luz dadas. Para los GRBs con distancia conocida se podría obtener la distribución de estos parámetros matemáticos.

Suponiendo que las distribuciones estadísticas de estos parámetros sean universales se podría, en principio, asignar probabilísticamente distancias a GRBs lejanos, y de esa manera, hacer inferencias cosmológicas en un rango de corrimientos al rojo mucho mayor a lo accesible actualmente.

Un campo donde los GRBs pueden ser una herramienta muy útil es en la cosmología observacional.

2.3. Explosiones de rayos gamma en cosmología

Se ha encontrado que existe una relación entre la luminosidad máxima y la forma de la curva de luz de las supernovas SNe Ia, las cuales se toman como candela estándar para medir la geometría y la dinámica del universo. Sin embargo, el máximo corrimiento al rojo, z , de las SNe Ia que se puede medir actualmente es aproximadamente de 1.7 (He Gao 2011).

Por otro lado, el corrimiento al rojo de la última superficie de dispersión de la radiación cósmica de fondo (la cual se denota con las iniciales CMB- *cosmic microwave background*) está a $z = 1091.3$.

Recientemente los GRBs fueron propuestos para complementar las SNe Ia y la CMB para explorar el universo temprano ya que son las explosiones observadas más intensas en el universo lejano y ocurren en rangos de alto corrimiento al rojo, se extienden hasta $z = 8.2$ o mayores (Tanvir et al. 2009, He Gao et al. 2012).

Sin embargo existen varias relaciones de la luminosidad de los GRBs entre las propiedades espectrales y temporales que han sido ampliamente discutidas.

Muchos autores han hecho uso de la luminosidad de los GRBs como candelas estándares a corrimientos al rojo muy altos más allá del rango de los corrimientos al rojo de las SNe Ia para hacer investigación en cosmología.

Uno usualmente necesita asumir un modelo cosmológico con ciertos parámetros cosmológicos *a priori* para calibrar relaciones empíricas de GRBs, debido a la ausencia de una muestra con corrimientos al rojo pequeños que sean cosmológicamente independientes.

cosmológica de la energía (se considera $z = 0.84$ del ejemplo del GRB 070318). Para hacer la corrección del tiempo, se obtiene el tiempo en el sistema en reposo con $t_{observado}/(1+z)$.

2.3 Explosiones de rayos gamma en cosmología

Existen métodos propuestos recientemente que permiten calibrar las relaciones de luminosidad de GRBs de una forma que es independiente del modelo cosmológico como el de Liang *et al.* (2008). La motivación de este método de calibración es que los objetos que se encuentran a un mismo corrimiento al rojo deberían tener la misma distancia luminosa en cualquier cosmología.

El método desarrollado en esta tesis no pretende tomar a los GRBs como candela estándar. Una vez que ya se conoce la distribución estadística de los parámetros de su curva de luz para GRBs cercanos, se hace la suposición de que los GRBs lejanos tienen los mismos valores y así calcular la probabilidad de que un GRB se encuentre a cierta distancia. No se trata solamente de hacer un ajuste simple. Si no se tiene una asignación estadísticamente confiable y no se conoce la correlación de los parámetros no se puede usar realmente para hacer cosmología.

Capítulo 3

Una revisión general de estadística

En este capítulo se mencionan las herramientas de estadística que usan para el análisis de los datos de las curvas de luz de la sección (2.4). Las definiciones y la teoría aquí mencionadas se pueden consultar en el libro *Data Analysis: Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*.

El objetivo de los métodos estadísticos es inferir las propiedades de una *población* a partir de las propiedades de una *muestra* observada. Una **población** representa la colección completa de elementos o resultados de la información buscada. Una **muestra** constituye un subconjunto de una población, que contiene elementos que realmente se observan.

3.1. El concepto de probabilidad

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se le llama **espacio muestral**. Al subconjunto de un espacio muestral se le denomina **evento**. Todo evento en un espacio muestral tiene una **probabilidad** de ocurrir. Dado un experimento y cualquier evento A :

1. La expresión $P(A)$ denota la probabilidad de que ocurra el evento A .
2. $P(A)$ constituye la proporción de veces que se presenta el evento A en tiempo, si es que el experimento se realizara una y otra vez.

En probabilidad se tiene un conjunto mínimo de axiomas generalmente usados:

1. Para cualquier evento A , le corresponde un número no-negativo,

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (3.1)$$

2. Sea E todo el espacio muestral que corresponde a un evento que ocurrirá en cada experimento. La probabilidad de que ocurra E es igual a la unidad, es decir

$$P(E) = 1. \quad (3.2)$$

3. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de A o de B es

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3.3)$$

De este último se puede obtener el siguiente resultado

$$P(A^c + A) = P(A) + P(A^c) = 1, \quad (3.4)$$

dónde A^c es el complemento de A , de aquí se obtiene que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3.2. Distribuciones de probabilidad

Muchas de las características de una población pueden estar agrupadas en una función de distribución de probabilidad $F(x)$.

Una **variable aleatoria** le asigna un valor numérico a cada resultado en un espacio muestral. Hay dos tipos de variables aleatorias: **discretas** y **continuas**. Una variable aleatoria discreta es aquella cuyos valores posibles forman un conjunto discreto, i.e., los valores se pueden ordenar y existen separaciones entre los valores adyacentes. Por otra parte, los valores de una variable aleatoria continua siempre están contenidos en un intervalo; es decir, son todos los puntos entre dos números.

Sea X una variable aleatoria continua. La probabilidad de que X esté entre cualesquiera dos valores a y b es igual al área bajo *la curva* entre a y b . La curva se llama distribución de probabilidad.

Considere la variable aleatoria X y un número real x que tome cualquier valor en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ¿cuál sería la probabilidad de que ocurra el evento $X < x$?. Esta probabilidad es una función de x y se llama *función de distribución* (cumulativa) de X :

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.5)$$

Es decir $F(x)$ representa la probabilidad, que una observación X tomada al azar de una población no exceda a x . Las funciones de distribución son siempre monotónicas y no-decrecientes.

¹ Ahora si se toma el caso límite en la ec. (3.5) y haciendo uso la ec. (3.2), se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X < x) = P(E) = 1. \quad (3.6)$$

¹**Definiciones:**

Sea $F(x)$ una función definida en $[a, b]$.

- F es creciente en $[a, b]$ si y solo si se cumple que:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.
- F es decreciente en $[a, b]$ si y solo si se cumple que:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2) \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.
- F es monótona en $[a, b]$ si y solo si F es creciente ó decreciente en $[a, b]$.

Aplicando la ec. (3.4) obtenemos

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - P(X < x) \quad (3.7)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \geq x) = 0. \quad (3.8)$$

Las funciones de distribución que son continuas y diferenciables son de especial interés para nosotros.

La primera derivada

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \quad (3.9)$$

se llama la *función de densidad de probabilidad* de X . Es una medida de la probabilidad de un evento ($x \leq X < x + dx$)

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad (3.10)$$

De las ecuaciones (3.5) y (3.8) se puede deducir que

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (3.11)$$

y en particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (3.12)$$

Usualmente no es posible determinar la función de distribución intuitivamente, en vez de eso se tiene que obtenerla observando el experimento. Normalmente sólo se puede determinar unos cuantos parámetros característicos en vez de la distribución completa, los cuales se describen a continuación:

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces *la media* de X está dada por

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (3.13)$$

2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces *la varianza* de X está dada por

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx, \quad (3.14)$$

la cual tiene la forma de un momento de inercia, es una medida del ancho o la dispersión de la densidad de probabilidad sobre el promedio. Si la varianza es pequeña, las medidas individuales caen cerca de μ ; si es grande, caerán lejos de la media (ver figura 3.1).

3. La *desviación estándar* es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\sigma^2(x)}$. También conocida como la dispersión de X . La varianza es por si misma una medida de la desviación promedio de las medidas de X del valor esperado.

Ya que la desviación estándar tiene las mismas dimensiones de X , está se asocia con el error en la medición, $\sigma(x) = \Delta X$.

Se puede resumir lo anterior en los valores esperados

$$\mu_l = E\{(x - \mu)^l\}, \quad (3.15)$$

los cuales son llamados los *l-ésimos momentos* de la variable sobre la media. Los momentos más bajos son, evidentemente, $\mu_0 = 1$ y $\mu_1 = 0$. El segundo momento es $\mu_2 = E(\{(X - \mu)^2\})$ y es el momento más bajo que contiene información sobre la desviación estándar de la variable X desde su media. Esta es la *varianza* de X . El tercer momento sobre la media se llama *skewness* pero no es relevante para el trabajo que aquí se presenta.

El *modo* (o el valor más probable) de una distribución se define como el valor de la variable aleatoria que corresponde a la probabilidad más alta, se denota como x_m :

$$P(X = x_m) = \max. \quad (3.16)$$

Si la distribución tiene una densidad de probabilidad diferenciable, el modo, que corresponde a su máximo, es fácilmente determinado por las condiciones

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0. \quad (3.17)$$

En muchos casos existe solamente un máximo; se dice entonces que la distribución es unimodal.

3.3. Estimación

La estimación de la distribución de una población es una parte importante del análisis estadístico. Cuando la forma de la distribución de una población, tal como la normal, exponencial, o chi-cuadrada, se asume, el problema se reduce a estimar los parámetros de la distribución. A esto se le llama estimación paramétrica.

Para ver cómo procede la estimación de las observaciones, sea X_1, X_2, \dots, X_n un conjunto de datos muestreados de una población, es decir, variables aleatorias. Los parámetros estimados se denotan normalmente con un gorrito, por ejemplo, $\hat{\mu}$ es un estimado de la media poblacional μ . La media poblacional, mediana y varianza (cuando existen) pueden ser estimadas por las correspondientes versiones de la muestra.

La media de la muestra

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.18)$$

y la varianza de la muestra

$$\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad (3.19)$$

son buenos estimadores de la media poblacional μ y la varianza σ^2 . Otro parámetro que importa en una distribución es el modo. El modo es el número que ocurre más seguido y es el punto del máximo global de la función de densidad de probabilidad. Existen varios métodos de estimación, el método de máxima verosimilitud y el método de mínimos cuadrados son los más usados para hacer inferencia en la ciencia. En el caso de tener errores gaussianos son equivalentes ambos métodos pero el método de máxima verosimilitud tiene la ventaja de que si los errores no fueran gaussianos simplemente se pone una función distinta para el error, es decir, permite cambiar el modelo y el método sigue funcionando bien, por esa razón se usa el de máxima verosimilitud en este trabajo.

Este método sigue la formulación de la estadística bayesiana, se establece primero un modelo probabilístico completo, un conjunto de datos con una distribución de probabilidad *a priori*, después se restringen los datos a obtener la distribución condicionada de los parámetros del modelo, es decir, se busca la probabilidad de que el modelo sea el que describe los datos y finalmente evaluar el ajuste del modelo.

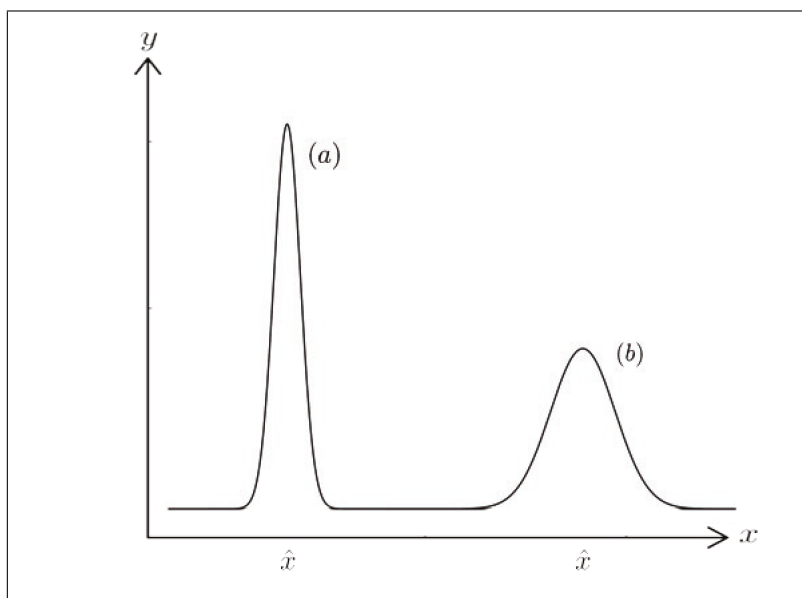


Figura 3.1: Distribución con varianza pequeña (a) y varianza grande (b) (Brandt 1998).

3.3.1. Estimación de máxima verosimilitud

El método de *máxima verosimilitud* lo introdujo R.A. Fisher en 1912, normalmente proporciona un estimador razonable de un parámetro o de un vector de parámetros λ . Suponga que los datos X_1, \dots, X_n provienen de una distribución discreta o de una distribución continua para el cual la función de masa de probabilidad o la función de densidad de probabilidad es $f(X; \lambda)$, donde el parámetro λ pertenece a algún espacio de parámetros Ω . En el caso discreto, la probabilidad de observar X_1, \dots, X_n , o verosimilitud, es

$$L(X_1, \dots, X_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \lambda). \quad (3.20)$$

Cuando L es considerada como una función de λ , dados ciertos datos X_i , se le llama *función de verosimilitud*. Intuitivamente, es como obtener solamente aquellos datos que cargan la mayor oportunidad de ser obtenidos. Esa es la idea básica detrás de este método. Entre todos los valores de λ , el que te da la máxima probabilidad para los datos observados puede estar cerca del verdadero valor de la población. La misma idea puede extenderse a densidades de probabilidad en el caso continuo. El estimador de máxima verosimilitud de λ es el valor de λ en el espacio de parámetros, que maximiza L para un conjunto de datos dados. En el caso de una población Gaussiana, la media de la muestra es el estimador de máxima verosimilitud de la media de la población.

La figura (3.3.1) ilustra la situación para varias formas de la función de verosimilitud para el caso de un sólo parámetro λ .

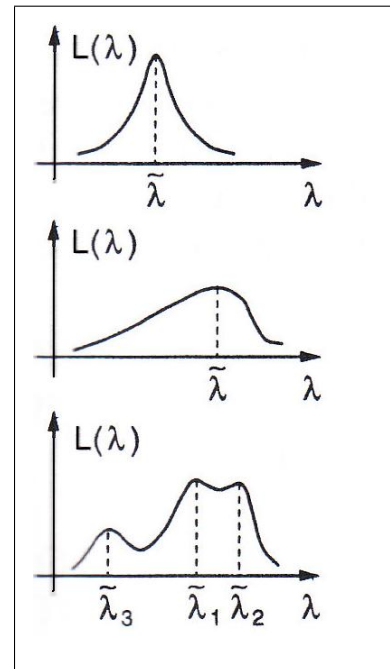


Figura 3.2: Funciones de verosimilitud (Brandt 1998).

El máximo puede ser localizado simplemente haciendo la primera derivada de la función de verosimilitud con respecto al parámetro λ_i igual a cero. La derivada de un producto con muchos factores puede ser difícil de trabajar, razón por la cual se decide trabajar con el logaritmo natural de L .

Se construye primero el logaritmo de la función de verosimilitud,

$$l = \ln L = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \lambda). \quad (3.21)$$

La función l también es comunmente llamada función de verosimilitud. Se puede ver que los máximos de (3.21) son idénticos a los de (3.20). Para el caso de un solo parámetro se construye

$$l' = dl/d\lambda = 0. \quad (3.22)$$

El problema de estimación de parámetros se reduce a resolver esta ecuación de verosimilitud. Derivando (3.21)

$$l' = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\lambda} \ln f(x_i; \lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^n \phi(x_i; \lambda), \quad (3.23)$$

donde

$$\phi(x_i; \lambda) = \frac{\frac{d}{d\lambda} f(x_i; \lambda)}{f(x_i; \lambda)}, \quad (3.24)$$

es la derivada logaritmica de la densidad f con respecto a λ . En el caso general de p parámetros, la ecuación de verosimilitud (3.22) se remplaza por el sistema de p ecuaciones simultáneas,

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.25)$$

A continuación se ilustra un ejemplo de obtención de parámetros. Consideremos que las mediciones x_i se encuentran dispersas alrededor del valor verdadero λ . Suponga que los errores están normalmente distribuidos, tal que una medición corresponda a obtener una muestra de una distribución Gaussiana con media λ y el error en la medición σ_i . La probabilidad *a posteriori* para la medición será

$$f(x_i; \lambda) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - \lambda)^2}{2\sigma_i^2}\right) dx. \quad (3.26)$$

De todas las n mediciones uno obtiene la función de verosimilitud de la ec. (3.20)

$$l = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - \lambda)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (3.27)$$

con el logaritmo como en la ec. (3.21)

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \lambda)^2}{\sigma_i^2} + \text{const.} \quad (3.28)$$

Hacemos que la ecuación de verosimilitud cumpla la condición

$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \lambda)}{\sigma_i^2} = 0, \quad (3.29)$$

cuya solución es

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (3.30)$$

3.3.2. Intervalos de confianza

Como se mencionó en la ec. (3.25) se puede determinar simultáneamente el conjunto de p parámetros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Resulta que (además de determinar los parámetros) las estimaciones de sus errores se vuelven significativamente más complicadas en el caso de varios parámetros. En particular vamos a necesitar tanto las correlaciones como los errores de los parámetros.

En la sección anterior se interpretó la función de verosimilitud $L(\lambda)$ como la medida de la probabilidad de que un valor verdadero λ_0 de un parámetro sea igual a λ . El resultado de un estimador está representado de forma abreviada por

$$\lambda = \tilde{\lambda} \pm \sigma(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \pm \Delta\tilde{\lambda}. \quad (3.31)$$

Ya que la función de verosimilitud es asintóticamente una distribución normal, al menos cuando se tiene muestras grandes, se puede interpretar que λ_0 tiene 68,3% de probabilidad de caer en el intervalo (a 1σ)

$$\tilde{\lambda} - \Delta\tilde{\lambda} < \lambda_0 < \tilde{\lambda} + \Delta\tilde{\lambda}. \quad (3.32)$$

En la práctica esta relación se usa para muestras largas y finitas.

En el caso de varios parámetros esta región no está determinada solamente por los errores sino por toda la matriz de covarianza. En el caso especial de dos parámetros la elipse de covarianza es

$$\frac{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)^2}{\tilde{\sigma}_1^2} - 2\rho \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{\tilde{\sigma}_1} \frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2} + \frac{(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)^2}{\tilde{\sigma}_2^2} = 1 - \rho^2, \quad (3.33)$$

la cual está centrada en el punto $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$. Los valores del centro van a estar determinados por los valores que maximizan la función de verosimilitud, los cuales se denotan en la siguiente sección por λ_z .

Usando propiedades de las secciones cónicas se obtiene el coeficiente de correlación

$$\rho = \tan(2\alpha) \frac{(\tilde{\sigma}_1^2 - \tilde{\sigma}_2^2)}{2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2}, \quad (3.34)$$

el cual mide la relación lineal entre dos variables aleatorias. Los ejes principales de la elipse forman un ángulo α con respecto a los ejes x y y .

Las elipses de covarianza siempre caen dentro de un rectángulo determinado por el punto $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$ y las desviaciones estándar $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$. La elipse toca al rectángulo en cuatro puntos. Para los casos extremos $\rho = \pm 1$ la elipse se convierte en una de las dos diagonales del rectángulo, lo cual significa que los parámetros que componen la elipse se encuentran muy correlacionados. Adicionalmente es importante obtener las elipses de covarianza pues la probabilidad de que el valor real caiga dentro la elipse es de 0.68 (1σ).

En la figura (3.3) se representan algunos ejemplos de elipses de covarianza, en esta imagen el eje x se denota por x_1 y el eje y por x_2 , además el centro se encuentra en las coordenadas $(a_1, a_2) = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$.

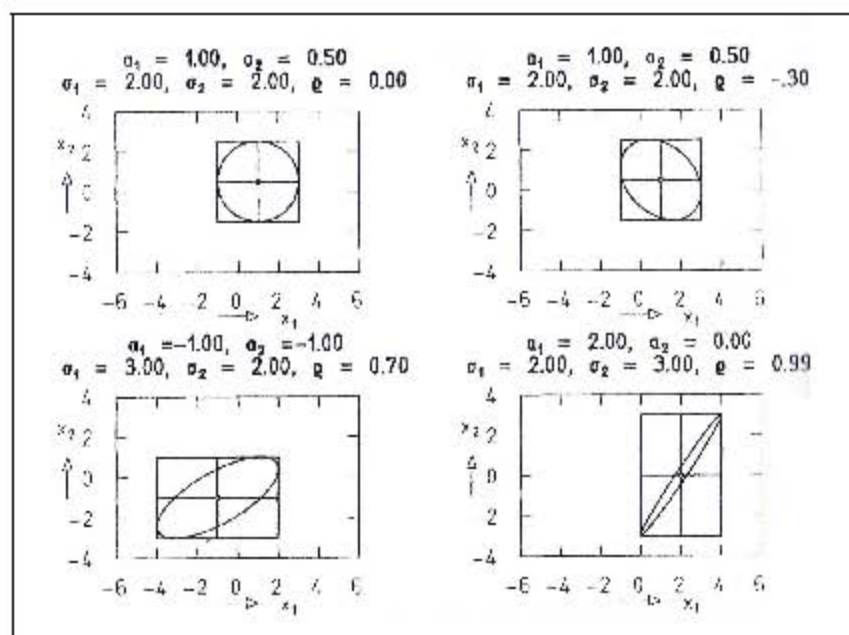


Figura 3.3: Componentes de la elipse de covarianza (Brandt 1998).

Capítulo 4

Solución del problema

Se hace la suposición de que la ec (6.1), que se muestra a continuación, describe el comportamiento de la curva de luz de un GRB en su mismo marco de referencia

$$E(t; A, t_0, \Delta t, \sigma) = A \exp \left\{ \frac{-\ln^2 \left(\frac{t-t_0}{\Delta t} \right)}{2\sigma^2} \right\},$$

dónde $A, t_0, \Delta t$ y σ son parámetros desconocidos.

El primer problema a considerar es el de generar una curva de luz artificial que simule el comportamiento de una curva de luz real, el objetivo de estos datos es crear curvas de luz con parámetros conocidos. Este procedimiento se muestra en la sección (4.1).

En la sección (4.2) se ajustan con el método de máxima verosimilitud las curvas producidas en (4.1). En este problema se tiene que la población está descrita por una función de probabilidad $f(X, \lambda) = E(t; \lambda)$ con parámetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (A, t_0, \Delta t, \sigma)$.

El procedimiento consiste en obtener la función de verosimilitud $l = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n E(t_i, \lambda_j)$ y determinar el valor de cada una de las λ 's para las cuales l es un máximo.

En la sección (4.3) se obtienen los intervalos de confianza.

4.1. Generación de datos artificiales

Usando la ecuación (6.1) se puede generar una curva de luz $E_s(t_i; \lambda_s)$, con parámetros conocidos $\lambda_s = (A_s, t_{0s}, \Delta t_s, \sigma_s)$ y donde $i = 0, \dots, N$ y N es el número total de datos. Para ejemplificar supongase que se tiene un GRB con valores $A = 7$, $t_0 = 200$, $\Delta t = 200$ y $\sigma = 0.3$. Entonces, se genera un modelo específico sustituyendo estos valores en la ecuación (6.1), su comportamiento se muestra gráficamente en la figura (4.1). No necesariamente es un caso real.

$$E(t) = 7 \exp \left\{ \frac{-\ln^2 \left(\frac{t-200}{200} \right)}{2(0.3)^2} \right\}. \quad (4.1)$$

Ahora se considera el caso de una curva de luz que resultó de tomar m mediciones. Es decir se divide el modelo en $m = 50$ intervalos y se toma el punto en la curva correspondiente al centro del intervalo, como se muestra en la figura (4.2).

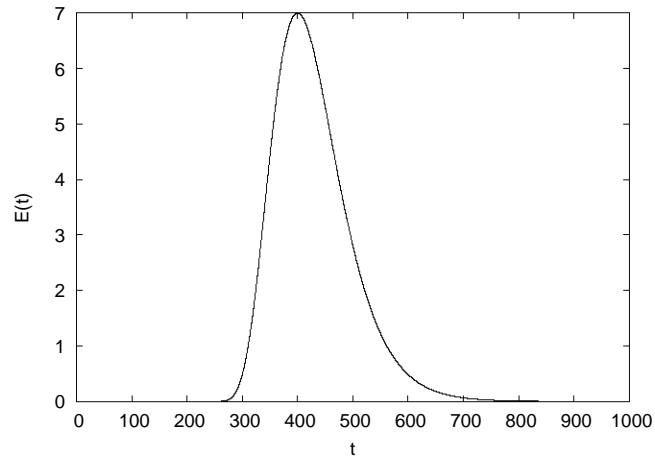


Figura 4.1: La función de probabilidad de la ec. (6.1). Esta función simula la curva de luz que representa el modelo de la ec. (6.1).

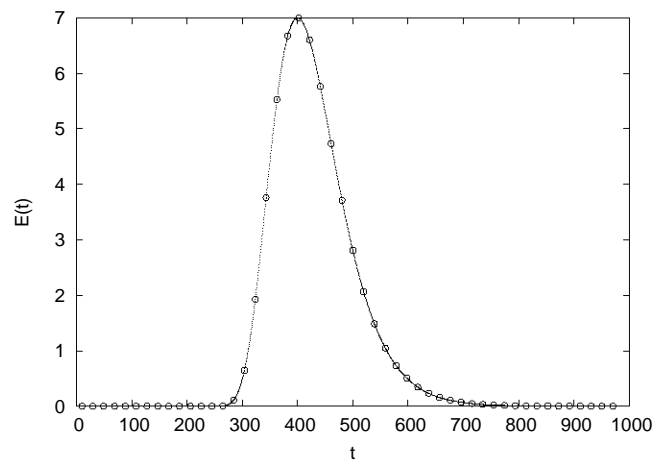


Figura 4.2: Se muestra como se divide el modelo en $m = 50$ mediciones y se toman los puntos que se encuentran en el centro de los círculos para agregarle un ruido gaussiano.

4.2 Estimación de parámetros (inversión del problema)

A cada una de las mediciones se le agrega el ruido

$$\Delta y = \sqrt{-2e^2 \log(u)} \cos(2\pi v), \quad (4.2)$$

donde u y v toman valores aleatoriamente en el intervalo $[0, 1]$.

El ruido depende del término e que es la amplitud del error, el cual se determina como una fracción del parámetro de amplitud A . En los ejemplos que se muestran en el capítulo (5) se trabaja con valores de e de un quinto y un décimo de la amplitud, es decir, $e/A = 1/10$ y $e/A = 1/5$ respectivamente. Se escogen estos valores porque son del orden de los errores en los datos observacionales.

En la figura (4.3) se muestran los errores aleatorios que simulan los errores observacionales de la curva de luz, trabajando bajo la suposición de que los errores de los datos tienen una distribución gaussiana.

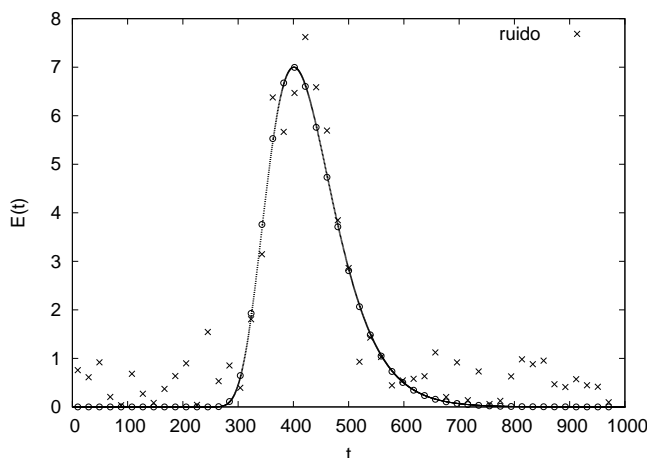


Figura 4.3: En esta imagen se muestra cómo a cada medición se le agrega un ruido gaussiano para simular la dispersión.

Quitando la curva continua que representa el modelo se obtiene el resultado de la curva de luz artificial que se muestra en la imagen (4.4). Esta curva es con la que se trabajará en la siguiente sección. En el apéndice A se muestra la rutina, programada en el lenguaje de programación c , que realiza este procedimiento y genera las curvas de luz.

4.2. Estimación de parámetros (inversión del problema)

Ahora se observa el problema bajo un ángulo ligeramente distinto.

Se parte del hecho de que se tiene la curva de la figura (4.4) y se quiere encontrar la función de probabilidad de esta curva.

Se hace la suposición de que los valores de los parámetros λ_s no se conocen. Entonces, se tiene el conjunto de datos $E_a(t_i; \lambda_z)$ donde λ_z es desconocida.

4.2 Estimación de parámetros (inversión del problema)

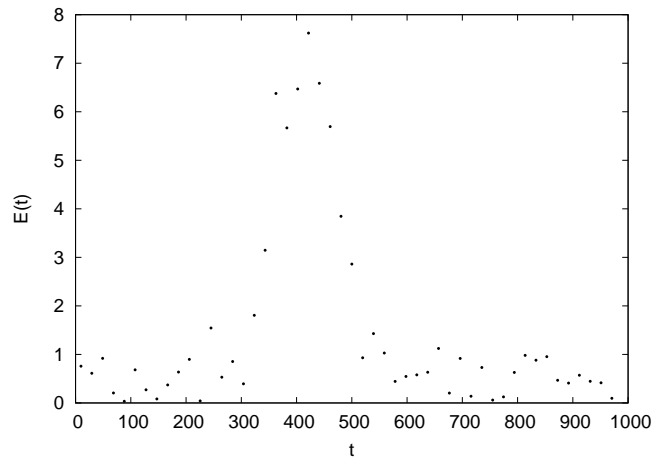


Figura 4.4: En esta imagen se muestra la curva de luz artificial.

Usando el método de máxima verosimilitud queremos encontrar la curva que mejor ajusta los datos y así determinar los valores de λ_z .

Puesto que el método de máxima verosimilitud encuentra el mejor ajuste, un análisis perfecto nos daría $\lambda_z = \lambda_s$. Los resultados que se obtienen de los valores λ_z son diferentes a los que tiene λ_s debido a la incertidumbre en los datos, con este método se va a reproducir lo mejor posible el modelo en (4.1).

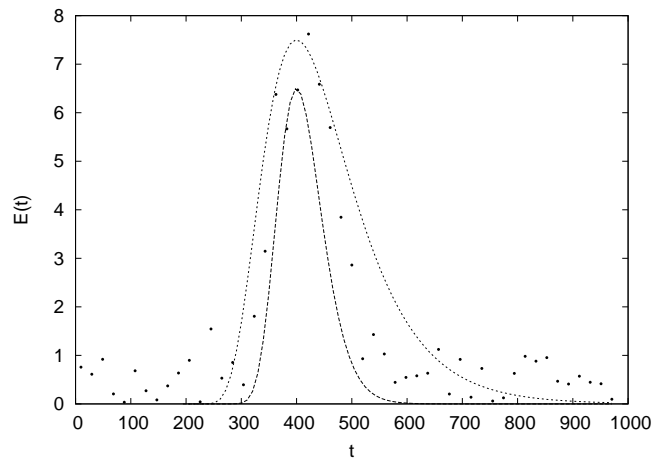


Figura 4.5: Se muestran dos curvas que el modelo generará para compararlas y elegir la que mejor ajuste.

Lo que se tiene inicialmente es la curva de luz de la figura (4.4) y se quiere encontrar la curva de luz de la ec. (6.1) que más se parezca a (4.1).

De la ec. (3.28) se puede calcular la función de verosimilitud

4.2 Estimación de parámetros (inversión del problema)

$$l = -\frac{1}{2e^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - A \exp \left\{ -\frac{\ln^2\left(\frac{t_i-t_0}{\Delta t}\right)}{2\sigma^2} \right\} \right) \quad (4.3)$$

En un solo parámetro esta función es muy fácil de entender, suponga que se conocen todos los parámetros excepto σ . Se quiere saber cuál es el valor de σ que nos dé una $E(t; \lambda)$ lo más parecida a $E(t)$ en (4.1). Se calcula el logaritmo de la función de verosimilitud y se obtiene un conjunto de valores que se muestran en la figura (4.6). El valor de interés es el de la x para la cual l es máximo, en la gráfica (4.6) se puede apreciar que el valor que da el máximo es $\sigma = 0.3$, éste valor concuerda con el valor de σ con el que se creó el modelo original.

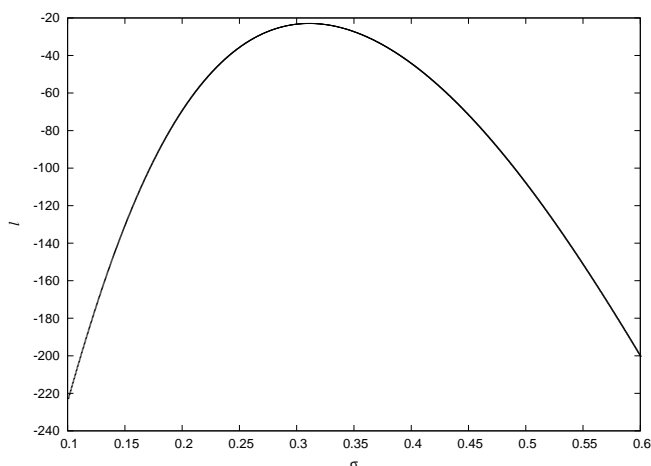


Figura 4.6: Gráfica de la función de verosimilitud logarítmica. En el eje x se tienen todos los posibles valores de σ en ese intervalo. En el eje y se muestra los valores que adquiere la función de verosimilitud para cada σ .

Sin embargo el problema real que se tiene no es en una dimensión, es en $4D$, puesto que depende de 4 parámetros, lo cual lo hace más complicado pues se convierte en el cálculo de la matriz

$$l[t_{0_j}][A_k][\delta t_m][\sigma_p] = -\sum_{i=1}^n \left(y_i - A_k \exp \left\{ -\frac{\ln^2\left(\frac{t_i-t_{0_j}}{\Delta t_m}\right)}{2\sigma_p^2} \right\} \right), \quad (4.4)$$

que significa que se tienen que hacer todas las posibles combinaciones para calcular el valor de cada uno de los parámetros para los cuales la función de verosimilitud logarítmica es máxima, $l_{\text{máx}}$. Gráficamente se vuelve imposible de ilustrar.

El procedimiento descrito para encontrar los valores que maximizan la función de verosimilitud se realiza con la subrutina *matriz()* que se muestra en el apéndice B. Ahí se puede observar que cada parámetro tiene asignado un índice que lo varía y evalúa en un cierto intervalo, mientras lo varía va calculando la función de verosimilitud con la subrutina *likelihood()*. Hace todas las posibles combinaciones dentro de esos intervalos y va buscando el valor máximo. Primero se

le asigna un valor enorme a $Lmax$ (ó muy pequeño según el signo) para asegurar que el primer valor que encuentre sea menor a $Lmax$ siempre, y lo va reemplazando con otro mayor hasta que llega al valor más grande. Ya que lo encuentra busca los parámetros asociados a ese $Lmax$ evaluando el índice correspondiente ($jmax$, $kmax$, etc) en cada parámetro.

```
Lmax=-20000000.0;
likelihood(); //Aqui se calculan las likelihood
if(L[j][k][m][p]>=Lmax)
//Si el valor de L[j][k][m][p] es mayor o igual a Lmax asigna los sig. valores
{
Lmax=L[j][k][m][p] ;
jmax=j;
kmax=k;
mmax=m;
pmax=p;
}
```

Puesto que el cálculo que se realiza es del orden de n^4 y considerando el error computacional que se carga con cada cálculo, es importante optimizar tiempo y número de cálculos, por lo que se vuelve una labor importante definir los intervalos en donde la matriz tiene que buscar para calcular. Como es necesario ahorrar tiempo de cómputo y optimizar recursos es necesario restringir el espacio de valores iniciales de cada parámetro en la matriz (4.8).

De los datos se puede tener una idea del rango posible para cada uno de los parámetros, por ejemplo, de la fig. (4.4) se puede deducir tentativamente algunos intervalos para A y σ , para el caso de t_0 y Δt se vuelve un poco más complicado puesto que ambos están co-relacionados como $t_0 + \Delta t = \mu$, esto significa que cada uno puede estar dentro del intervalo $0 \leq (t_0, \Delta t) \leq 400$ tal que se cumpla que la suma de ambos sea igual a μ . Como se mencionó en el capítulo (3), las estimaciones puntuales no son siempre perfectas. Deseamos cuantificar la precisión del estimador. Para eso es necesario calcular los intervalos de confianza.

4.3. Intervalos de confianza

El caso de la estimación del valor de un solo parámetro es muy sencillo para calcular el intervalo de confianza de la ec. (3.32).

Se debe cumplir la condición

$$l_{\text{máx}} - l < \Delta l \tag{4.5}$$

con una $\Delta l = 0.5$. Se pone la condición de que el intervalo es simétrico y se obtienen dos valores de σ para los cuales se cumple esta condición $l_{\text{máx}} - 0.5 \leq \sigma \leq l_{\text{máx}} + 0.5$.

La función de verosimilitud $L(\lambda)$ tiene la forma de una distribución normal con media $\tilde{\lambda} = \mu$ y varianza $\sigma^2 = b^2$. En los valores $\lambda = \tilde{\lambda} \pm b$, donde λ es una desviación estandar de $\tilde{\lambda}$, uno tiene

$$l_{\text{máx}} - l = 1/2 \tag{4.6}$$

El resultado se ilustra en la fig. (4.7), el intervalo está determinado por los puntos negros y se puede observar que el valor $\sigma = 0.3$ del modelo original cae dentro del intervalo.

Como el problema depende de 4 parámetros es necesario calcular las elipses de covarianza que se mencionaron en el capítulo (3).

La condición que se debe cumplir ahora es

$$l_{\text{máx}} - l[t_{0_j}][A_k][\Delta t_m][\sigma_p] = \Delta l = 0.5. \quad (4.7)$$

La idea es encontrar los valores $t_{0 \text{ máx}}, A_{\text{máx}}, \Delta t_{\text{máx}}, \sigma_{\text{máx}}$ para los cuales se cumple la igualdad de (4.7), cada uno de estos valores cumple las siguientes relaciones

$$\left(\begin{array}{c|cccc} t_{0 \text{ máx}} & A(t_{0 \text{ máx}}) & \Delta t(t_{0 \text{ máx}}) & \sigma(t_{0 \text{ máx}}) \\ A_{\text{máx}} & t_0(A_{\text{máx}}) & \Delta t(A_{\text{máx}}) & \sigma(A_{\text{máx}}) \\ \Delta t_{\text{máx}} & t_0(\Delta t_{\text{máx}}) & A(\Delta t_{\text{máx}}) & \sigma(\Delta t_{\text{máx}}) \\ \sigma_{\text{máx}} & t_0(\sigma_{\text{máx}}) & \Delta t(\sigma_{\text{máx}}) & A(\sigma_{\text{máx}}) \end{array} \right). \quad (4.8)$$

El lado izquierdo de la matriz muestra el valor del intervalo de confianza máximo de cada parámetro, por ejemplo, en la figura (4.7) el τ_+ corresponde al valor $\sigma_{\text{máx}}$ de la matriz. Del lado derecho de la línea en la matriz se muestran los valores asociados, de los tres parámetros restantes, a ese valor del intervalo de confianza. Con estos valores se construyen las coordenadas de una matriz que va a formar un elipsoide de los intervalos de confianza.

En la subrutina *coordenadas()* del apéndice B se calculan los valores de los intervalos de confianza, se hace la suposición de que son simétricos y solamente se calculan los intervalos mayores (y por simetría se infieren los menores).

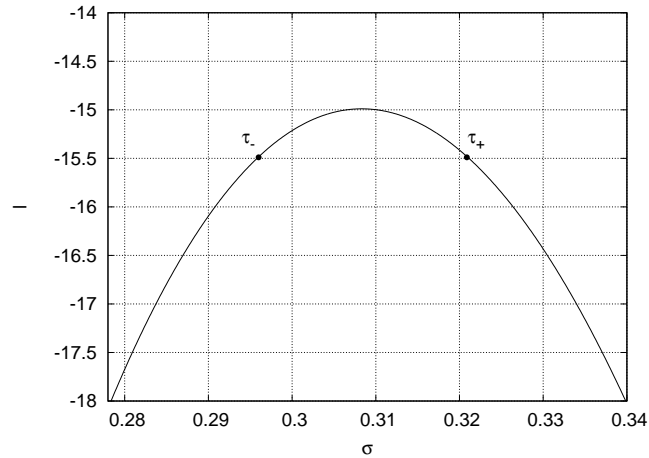


Figura 4.7: Intervalo de confianza para el parámetro σ . Se muestran los valores de σ que se obtienen al cumplir la condición $l_{\text{máx}} - 0.5 \leq \sigma \leq l_{\text{máx}} + 0.5$.

Cuando se hace el cálculo de máxima verosimilitud para un modelo cuyos parámetros iniciales son $t_0 = 100$, $A = 7.0$, $\Delta t = 300$ y $\sigma = 0.3$, se obtiene la l que dice donde está el máximo y los parámetros correspondientes a ese máximo.

$$l_{\text{máx}} = -23,0972; \quad \lambda_z = \begin{cases} t_0 = 95.2 \\ A = 7.28 \\ \Delta t = 301.2 \\ \sigma = 0.312 \end{cases}$$

Para generar las elipses de covarianza primer se construye la matriz asociada a los parámetros del máximo, la cual proporciona las coordenadas para las elipses.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} t_{0\text{máx}} = 108.7 & A(t_{0\text{máx}}) = 7.37 & \Delta t(t_{0\text{máx}}) = 288.9 & \sigma(t_{0\text{máx}}) = 0.28 \\ A_{\text{máx}} = 7.58 & t_0(A_{\text{máx}}) = 95.8 & \Delta t(A_{\text{máx}}) = 301.2 & \sigma(A_{\text{máx}}) = 0.302 \\ \Delta t_{\text{máx}} = 305.5 & t_0(\Delta t_{\text{máx}}) = 95.7 & A(\Delta t_{\text{máx}}) = 7.23 & \sigma(\Delta t_{\text{máx}}) = 0.31 \\ \sigma_{\text{máx}} = 0.315 & t_0(\sigma_{\text{máx}}) = 108.7 & \Delta t(\sigma_{\text{máx}}) = 288.94 & A(\sigma_{\text{máx}}) = 7.37 \end{array} \right) \quad (4.9)$$

En este trabajo solamente son relevantes tres elipses: las de los parámetros $(A, \Delta t)$, (A, σ) y $(\Delta t, \sigma)$. No se considera t_0 para generar una cuarta elipse porque no tiene interés físico, este parámetro sólo dice cuándo se empieza a ver el destello.

4.3.1. Elipses de covarianza

En la ec. (3.33) se tiene la forma de la elipse de covarianza que se quiere obtener.

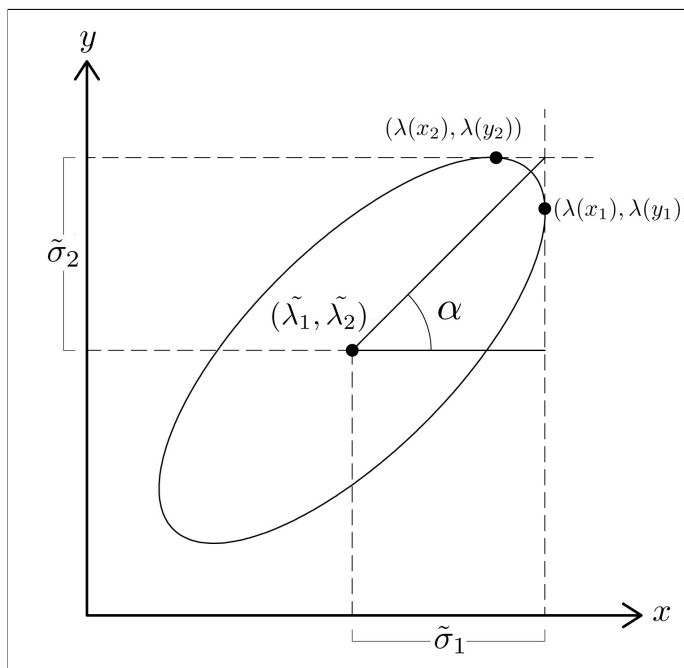


Figura 4.8: Componentes de la elipse de covarianza que satisfacen la ec. (3.33).

Se muestra un esquema general de una elipse de covarianza en la figura (4.8). Las componentes que se muestran en la figura se determinan de la siguiente manera.

Los puntos $(\lambda(\mathbf{x}_1), \lambda(\mathbf{y}_1))$ y $(\lambda(\mathbf{x}_2), \lambda(\mathbf{y}_2))$ deben satisfacer la ecuación de la elipse, estos dos puntos determinan un rectángulo de base $\lambda(\mathbf{x}_1)$ y altura $\lambda(\mathbf{y}_2)$, se debe cumplir la condición de que la elipse toca al rectángulo solamente en estos dos puntos. Las distancias $\tilde{\sigma}$ tienen una definición general que se obtiene geoméricamente de la fig (4.8)

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda(x_1) - \tilde{\lambda}_1 = A_{\text{máx}} - \tilde{\lambda}_1 = 7.58 - 7.28 = 0.33 \quad (4.10)$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \lambda(y_2) - \tilde{\lambda}_2 = \Delta t_{\text{máx}} - \tilde{\lambda}_2 = 305.5 - 301,2 = 4.3 \quad (4.11)$$

El valor de ρ que aparece en la ecuación (3.33), la cual se muestra a continuación,

$$\frac{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)^2}{\tilde{\sigma}_1^2} - 2\rho \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{\tilde{\sigma}_1} \frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2} + \frac{(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)^2}{\tilde{\sigma}_2^2} = 1 - \rho^2, \quad (4.12)$$

se determina geoméricamente por la ec. (3.34), donde α es el ángulo del eje semi-mayor de la elipse con respecto al eje x . En este caso la definición no sirve porque es necesario saber ρ para generar la elipse y por lo tanto saber dónde está el semi-eje mayor.

Para resolver este problema se parte del hecho de que los dos puntos que se usan para obtener la elipse deben satisfacer la ecuación de la elipse (3.33), por lo tanto se sustituye el valor de $\tilde{\sigma}_1$ en la ecuación de la elipse

$$\frac{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)^2}{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)^2} - 2\rho \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1} \frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2} + \frac{(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)^2}{\tilde{\sigma}_2^2} = 1 - \rho^2, \quad (4.13)$$

para obtener la ecuación cuadrática

$$\rho^2 - \rho \left[2 \frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2} \right] + \frac{(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)^2}{\tilde{\sigma}_2^2} = 0, \quad (4.14)$$

la cual tiene sólo una raíz

$$\rho_1 = \frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2}. \quad (4.15)$$

Si se hace la misma sustitución con el valor de $\tilde{\sigma}_2$ en la ecuación de la elipse desarrollando un procedimiento similar se obtiene una segunda raíz de ρ

$$\rho_2 = \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{\tilde{\sigma}_1}. \quad (4.16)$$

Se hace el promedio de ρ_1 y ρ_2 para obtener la ρ que va a satisfacer la ec. (3.33)

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\sigma}_2} + \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{\tilde{\sigma}_1} \right). \quad (4.17)$$

Esto determina completamente la elipse de covarianza. Para graficarla se resuelve para λ_2 la ec. (3.33) y se dan valores para λ_1 en el intervalo $\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\sigma}_1 - 1 \leq \lambda_1 \leq \lambda(x_1) + 1$.

4.3 Intervalos de confianza

En la figura (4.9) se muestra un ejemplo de una elipse de covarianza usando los parámetros de la sección anterior, esta imagen muestra el centro en $(\tilde{\lambda}_1 = a_1 = 7.28, \tilde{\lambda}_2 = a_2 = 301.2)$, muestra cuales son los puntos $(\lambda(x_1) = x_1, \lambda(y_1) = y_1)$ y $(\lambda(x_2) = x_2, \lambda(y_2) = y_2)$. Los otros dos puntos que no están etiquetados son puntos reflejados de $(\lambda(x_1), \lambda(y_1))$ y $(\lambda(x_2), \lambda(y_2))$.

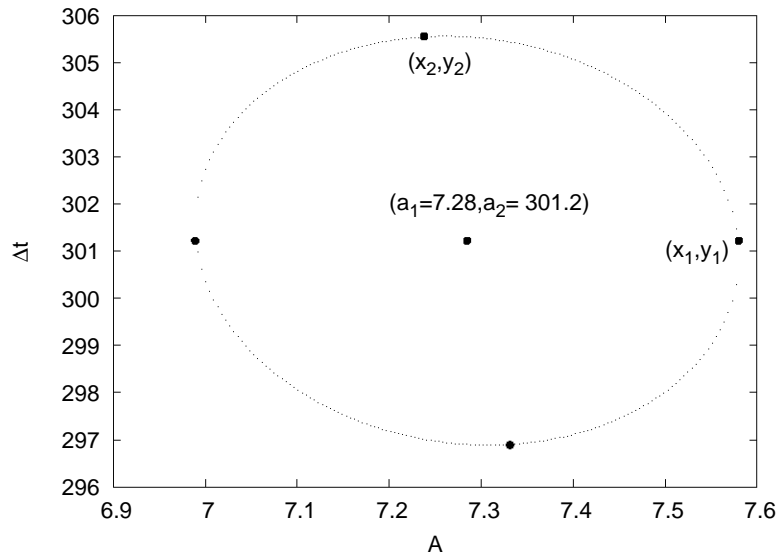


Figura 4.9: Ejemplo de una elipse de covarianza entre dos parámetros. El centro de la elipse está en (a_1, a_2) . La $\tilde{\sigma}_1$ es la distancia horizontal y el $\tilde{\sigma}_2$ es la distancia vertical.

La subrutina *intervalosconfianza()* del apéndice B resuelve las ecuaciones de esta sección y genera los archivos para las elipses. Las subrutinas *elipse1()*, *elipse2()*, *elipse3()* mandan llamar a la subrutina *intervalosconfianza()* para generar elipses con los parámetros que ahí se especifican.

Capítulo 5

Modelaje de curvas de luz sintéticas.

Se muestran algunos ejemplos de curvas de luz artificiales obtenidas con el procedimiento de la sección (4.1), para cada uno de los ejemplos se exponen los parámetros λ_s que determinan el modelo inicial del cual se parte para generar la curva de luz, se muestran los resultados λ_z obtenidos con el método de máxima verosimilitud, los cuales sirven para comparar con λ_s y de esta manera comprobar que el método y el procedimiento funcionan. Además se especifica en cada caso la amplitud del ruido, e , con que se generaron los datos.

En la parte de los intervalos de confianza, para medir el error en los resultados, se obtiene la matriz de la ec. (4.8) con los valores más grandes del intervalo para cada parámetro. Es decir, si para cada parámetro se obtiene un intervalo de confianza $[q, p]$ en donde cae el verdadero valor, en esta sección se obtiene el valor de p que corresponde al máximo valor del intervalo de confianza como se explica en la sección (4.3). Se muestra la matriz con las coordenadas de las elipses. Cada elipse de covarianza está definida por dos parámetros, el centro de la elipse, (a_1, a_2) , está dado por los valores de esos dos parámetros obtenidos en el ajuste, λ_z , por el método de máxima verosimilitud, ver la figura (4.8). Adicionalmente los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de cualesquiera dos parámetros γ_1 y γ_2 corresponden a $(\gamma_{1max}, \gamma_2(\gamma_{1max}))$ y $(\gamma_1(\gamma_{2max}), \gamma_2)$ respectivamente.

En la sección (4.3.1) se menciona que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , representados por puntos negros en las elipses que se muestran en este capítulo, deben cumplir la condición de que forman un rectángulo tal que la elipse toca al rectángulo en ese punto.

En las figuras (5.5), (5.9), (5.14) y (5.15) se puede observar que los puntos negros no caen justamente en la elipse como sucede por ejemplo en la figura (5.10). Esto se debe a una inconsistencia entre el modelo estadístico y las simulaciones, el método implica un ruido gaussiano real y el procedimiento que se realizó en este trabajo tiene un ruido gaussiano con la condición de que siempre sea positivo, es decir, en las curvas de luz como en la figura (5.1) ningún punto cae por debajo de $y = 0$.

EJEMPLO 1

La curva de luz que se muestra en la fig. (5.1) tiene una amplitud de ruido de $e/A = 1/10$ y se generó en base a un modelo con parámetros iniciales

$$\lambda_s = \begin{cases} t_0 = 200 \\ A = 7 \\ \Delta t = 200 \\ \sigma = 0.3 \end{cases} \quad (5.1)$$

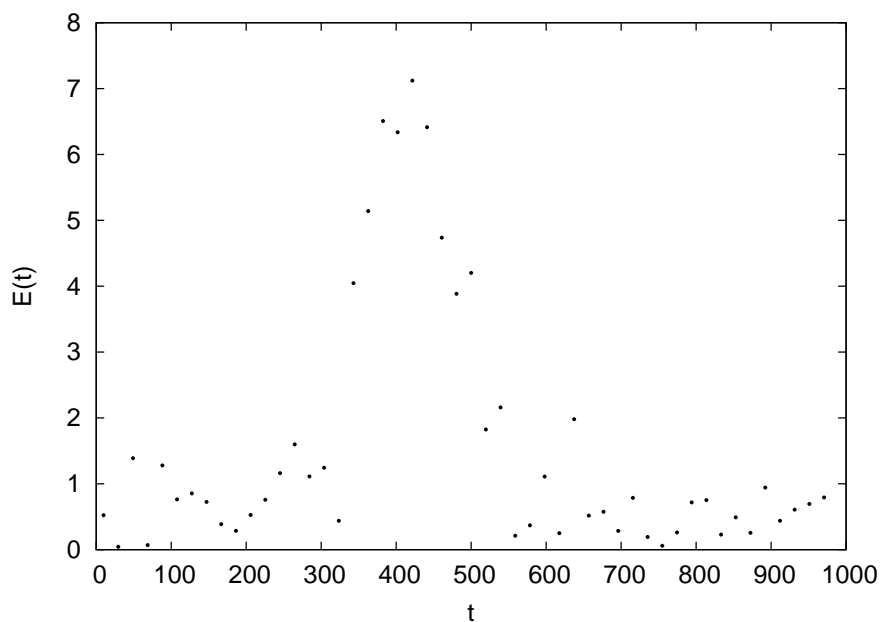


Figura 5.1: Ejemplo de una curva de luz artificial con los parámetros de entrada de la ec. (5.1).

Los parámetros obtenidos de la estimación por el método de máxima verosimilitud

$$\lambda_z = \begin{cases} t_0 = 201.944 \\ A = 6.92 \\ \Delta t = 198.44 \\ \sigma = 0.314 \end{cases} \quad (5.2)$$

Los valores que generan la matriz de la ecuación (4.8) son los valores de los máximos de los intervalos de confianza y sus coordenadas correspondientes.

$$\left(\begin{array}{c|ccc}
 t_{0max} = 205.555556 & A(t_{0max}) = 6.815353 & \Delta t(t_{0max}) = 198.22222 & \sigma(t_{0max}) = 0.405083 \\
 A_{max} = 7.282020 & t_0(A_{max}) = 203.055556 & \Delta t(A_{max}) = 198.22222 & \sigma(A_{max}) = 0.303813 \\
 \Delta t_{max} = 209.111111 & t_0(\Delta t_{max}) = 195.277778 & A(\Delta t_{max}) = 6.799798 & \sigma(\Delta t_{max}) = 0.303813 \\
 \sigma_{max} = 0.335460 & t_0(\sigma_{max}) = 202.22222 & \Delta t(\sigma_{max}) = 198.2222 & A(\sigma_{max}) = 6.675353
 \end{array} \right) \quad (5.3)$$

En la figura (5.2) se muestra el modelo original, la curva de luz artificial (5.1) con sus barras de error Δx y $\Delta y = e$, el ajuste con los parámetros máximos λ_z , y dos curvas de luz correspondientes al máximo y mínimo valor del intervalo de confianza en A .

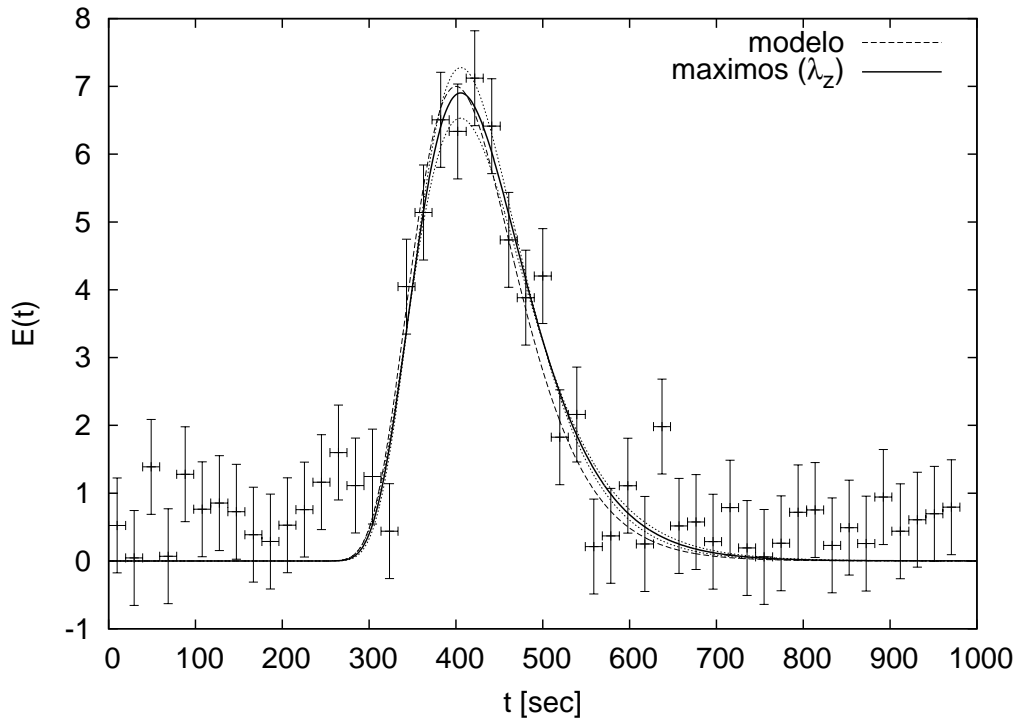


Figura 5.2: Curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud (línea continua). Se muestra el modelo original, con el que se hizo la curva de luz artificial, con una línea discontinua . Las curvas punteadas corresponden al valor máximo y mínimo del intervalo de confianza para el caso de la amplitud A .

Usando las coordenadas de la matriz (5.3) se obtienen las tres elipses de covarianza de la sección (4.3.1).

El ruido destruye información y por lo tanto es imposible recuperar los valores de entrada λ_s . Se puede observar que los valores de λ_s caen dentro de la elipse, la cual está determinada

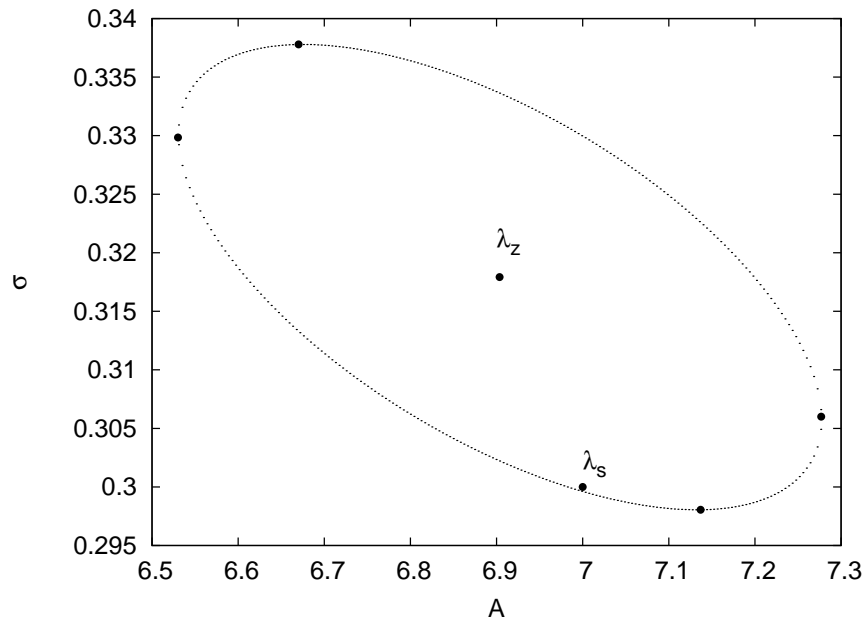


Figura 5.3: Elipse de covarianza para los parámetros A vs σ .

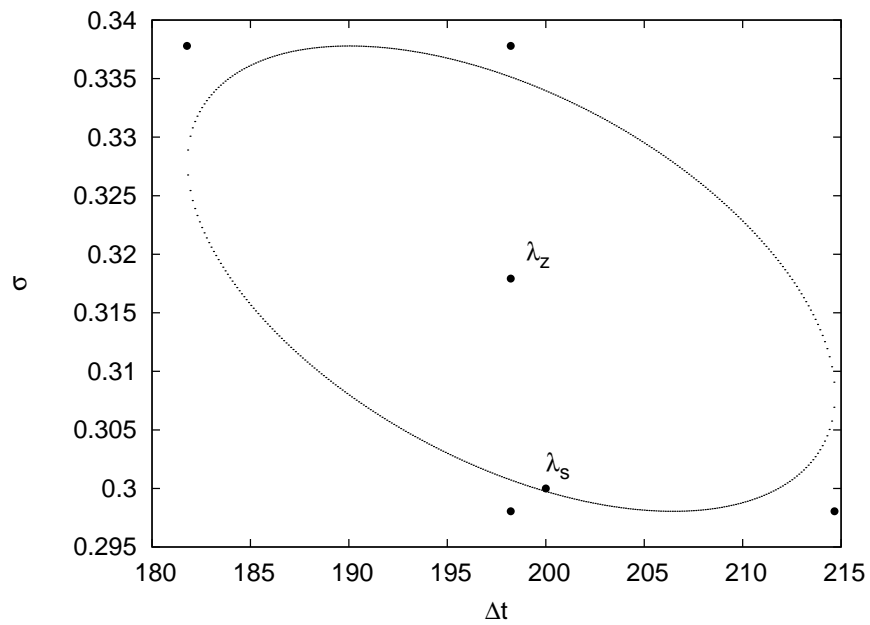


Figura 5.4: Elipse de covarianza para los parámetros Δt vs σ .

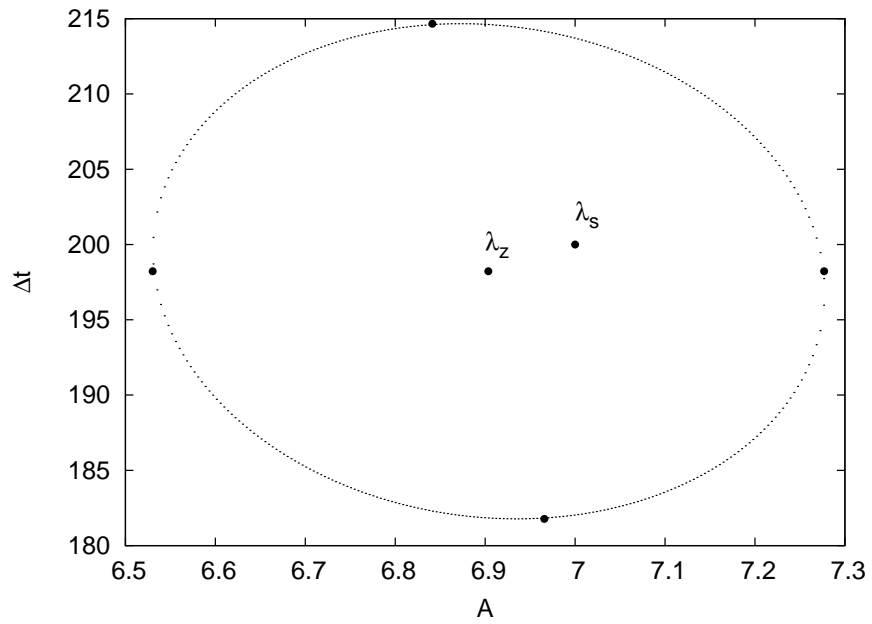


Figura 5.5: Elipse de covarianza para los parámetros A vs Δt .

por el intervalo de confianza de los dos parámetros que se muestran en cada gráfica. Esto sirve como prueba de que el método funciona.

EJEMPLO 2

La curva de luz que se muestra en este caso en la fig. (5.6) tiene una amplitud de ruido de $e/A = 1/10$ y se generó en base a un modelo con parámetros iniciales

$$\lambda_s = \begin{cases} t_0 = 150 \\ A = 9 \\ \Delta t = 300 \\ \sigma = 0.2 \end{cases} \quad (5.4)$$

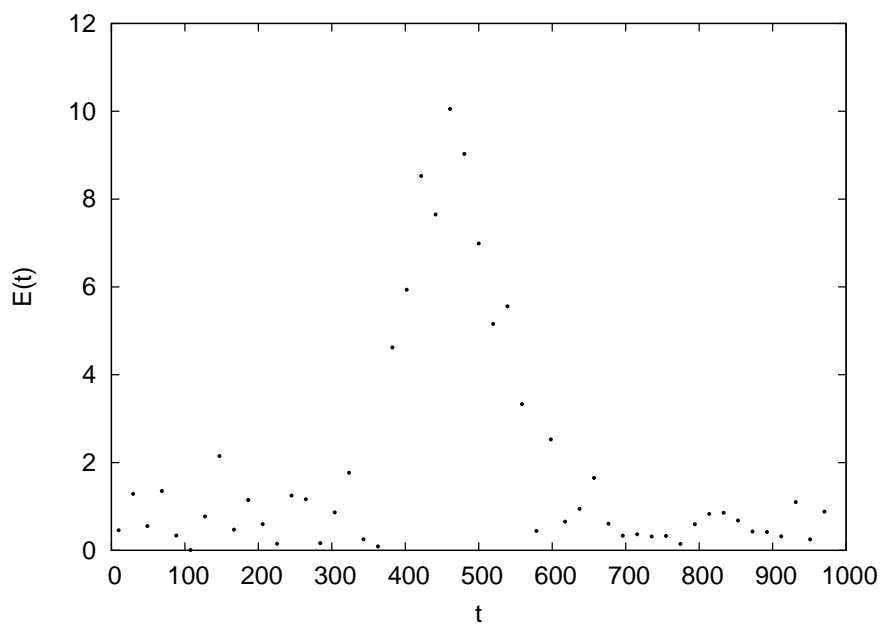


Figura 5.6: Ejemplo de una curva de luz artificial con los parámetros de entrada de (5.4).

Los parámetros obtenidos de la estimación por el método de máxima verosimilitud

$$\lambda_z = \begin{cases} t_0 = 164.72 \\ A = 9.29 \\ \Delta t = 290.28 \\ \sigma = 0.21 \end{cases} \quad (5.5)$$

Los valores que generan la matriz de la ecuación (4.8) son los valores de los máximos de los intervalos de confianza y sus coordenadas correspondientes.

$$\left(\begin{array}{l|llll} t_{0max} = 165.0 & A(t_{0max}) = 9.3 & \Delta t(t_{0max}) = 293.9 & \sigma(t_{0max}) = 0.23 \\ A_{max} = 9.82 & t_0(A_{max}) = 165.0 & \Delta t(A_{max}) = 290.83 & \sigma(A_{max}) = 0.202 \\ \Delta t_{max} = 315.0 & t_0(\Delta t_{max}) = 144.17 & A(\Delta t_{max}) = 9.3 & \sigma(\Delta t_{max}) = 0.195 \\ \sigma_{max} = 0.224 & t_0(\sigma_{max}) = 165.0 & \Delta t(\sigma_{max}) = 290.56 & A(\sigma_{max}) = 9.06 \end{array} \right) \quad (5.6)$$

En la figura (5.7) se muestra el modelo original, la curva de luz artificial de la figura (5.6) con sus barras de error Δx y $\Delta y = e$, el ajuste con los parámetros máximos λ_z , y dos curvas de luz correspondientes al máximo y mínimo valor del intervalo de confianza en A .

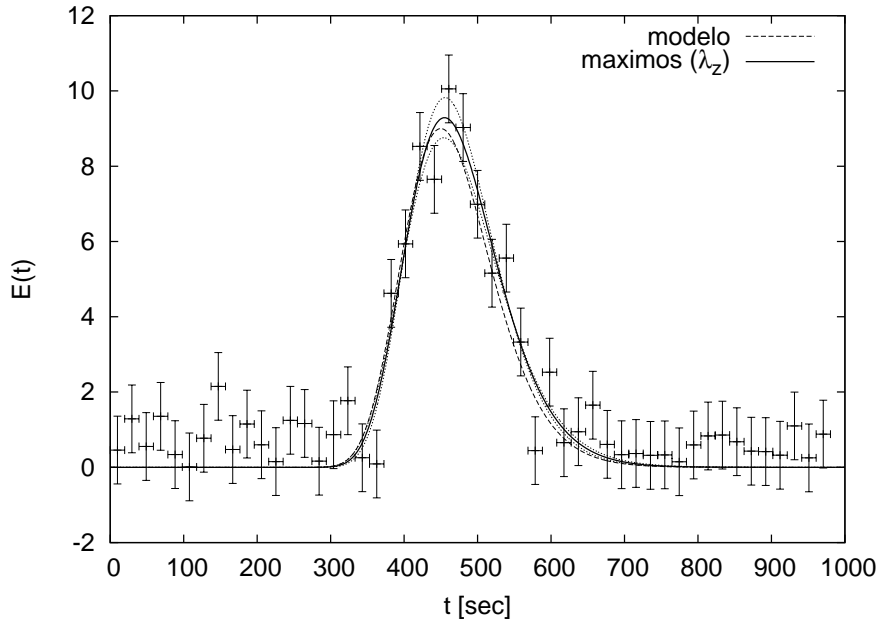


Figura 5.7: Curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud.

Usando las coordenadas de la matriz (5.6) se obtienen las tres elipses de covarianza de las figuras (5.8),(5.9) y (5.10) como se explicó en el capítulo (4).

Dado que es imposible recuperar los valores de entrada λ_s , se puede observar sólo en los dos casos de las figuras (5.9) y (5.10) que λ_s cae dentro de las elipses.

Los valores λ_s en el caso de la figura (5.8) conformada por A vs. σ caen fuera de la elipse pero caen dentro de los intervalos de confianza de cada parámetro $\sigma(0.197, 0.224)$ y $A(8.75, 9.82)$.

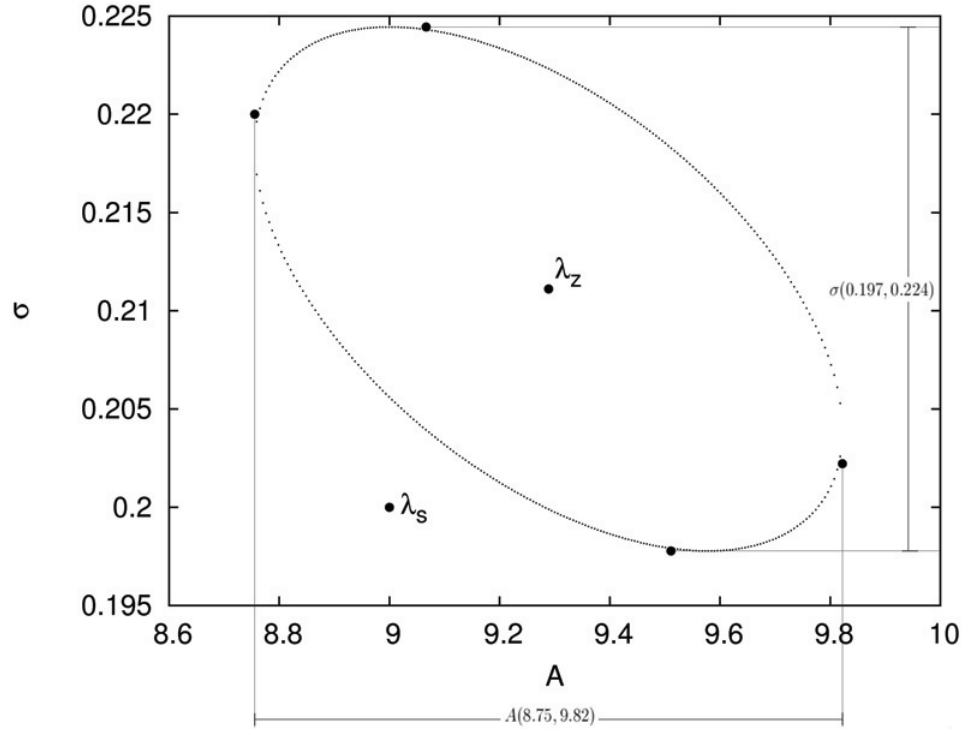


Figura 5.8: Elipse de covarianza para los parámetros A vs σ .

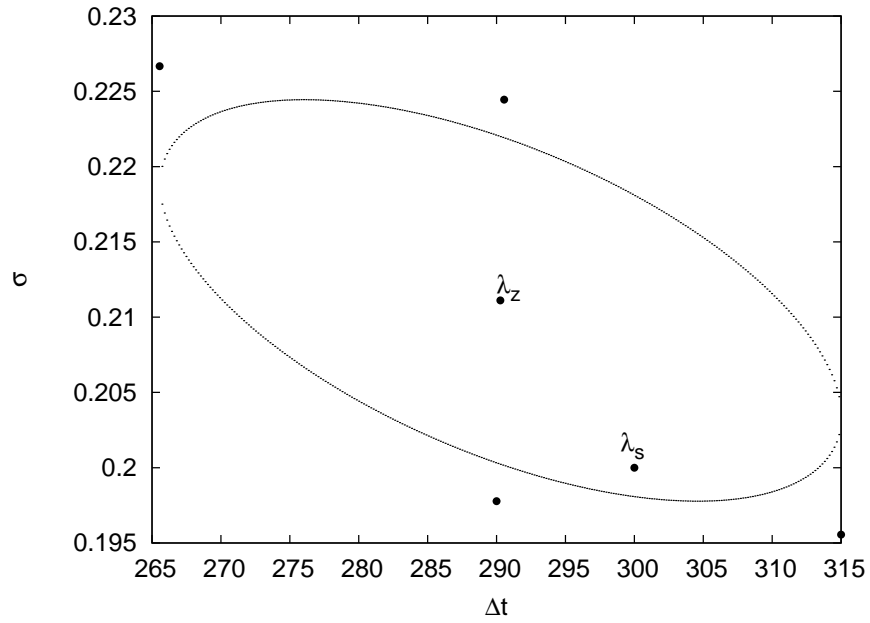


Figura 5.9: Elipse de covarianza para los parámetros Δt vs σ .

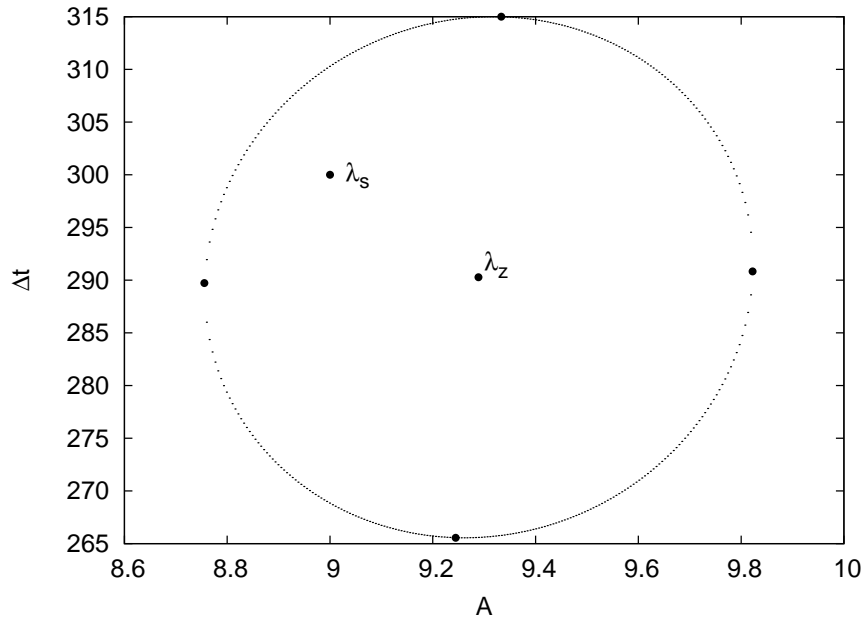


Figura 5.10: Elipse de covarianza para los parámetros A vs Δt .

EJEMPLO 3

Ejemplificamos ahora con una curva de luz usando los mismos parámetros iniciales de la ec. (5.4) de la curva de luz anterior pero con una amplitud de ruido de $e/A = 1/5$, lo que significa que el ruido de los datos es más grande que en el caso anterior. Se obtiene la curva de luz (5.11).

$$\lambda_s = \begin{cases} t_0 = 150 \\ A = 9 \\ \Delta t = 300 \\ \sigma = 0.2 \end{cases} \quad (5.7)$$

Los parámetros obtenidos de la estimación por el método de máxima verosimilitud

$$\lambda_s = \begin{cases} t_0 = 140.3 \\ A = 9 \\ \Delta t = 303.05 \\ \sigma = 0.235 \end{cases} \quad (5.8)$$

La matriz de la ecuación (4.8) con los valores de los máximos de los intervalos de confianza y sus coordenadas correspondientes.

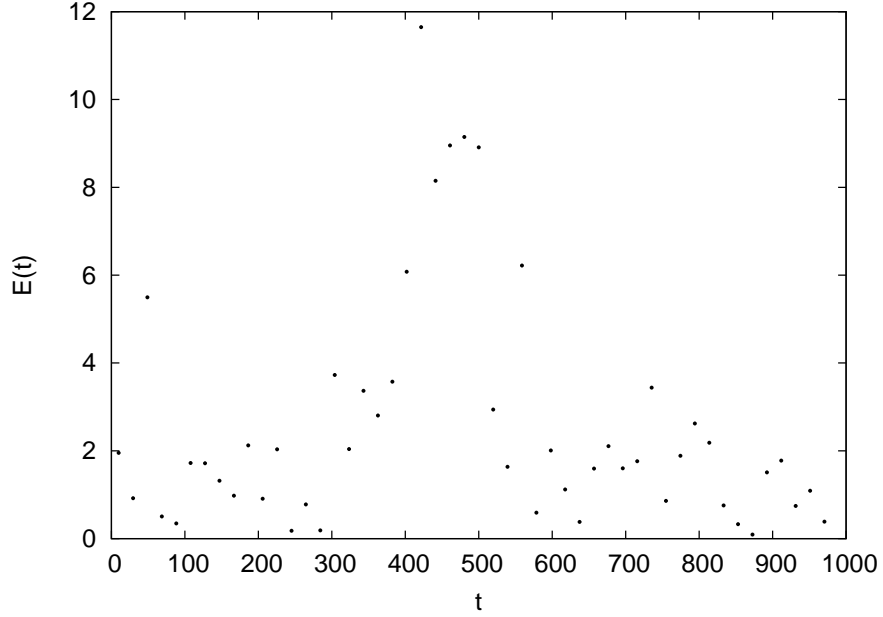


Figura 5.11: Ejemplo de una curva de luz artificial con los parámetros de entrada de (5.7).

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
 t_{0max} = 161.4 & A(t_{0max}) = 8.93 & \Delta t(t_{0max}) = 290.27 & \sigma(t_{0max}) = 0.193 & \\
 A_{max} = 10.0 & t_0(A_{max}) = 158.3 & \Delta t(A_{max}) = 290.27 & \sigma(A_{max}) = 0.217 & \\
 \Delta t_{max} = 312.2 & t_0(\Delta t_{max}) = 140.27 & A(\Delta t_{max}) = 8.95 & \sigma(\Delta t_{max}) = 0.231 & \\
 \sigma_{max} = 0.3 & t_0(\sigma_{max}) = 155.0 & \Delta t(\sigma_{max}) = 290.27 & A(\sigma_{max}) = 8.13 &
 \end{array} \right) \quad (5.9)$$

En la figura (5.12) se muestra el modelo original, la curva de luz artificial (5.11), el ajuste con los parámetros máximos, y dos curvas de luz correspondientes a los valores del intervalo de confianza en A .

Usando las coordenadas de la matriz (5.9) se obtienen las tres elipses de covarianza (5.13), (5.14), (5.15) como se explicó en el capítulo (4).

Las elipses (5.13) y (5.15) contienen a los valores de λ_s , vemos en el caso de la elipse (5.14) que λ_s cae fuera de la elipse pero si cae en los intervalos de confianza individuales de los parámetros $\sigma(0.171, 0.3)$ y $\Delta t(293.8, 312.2)$.

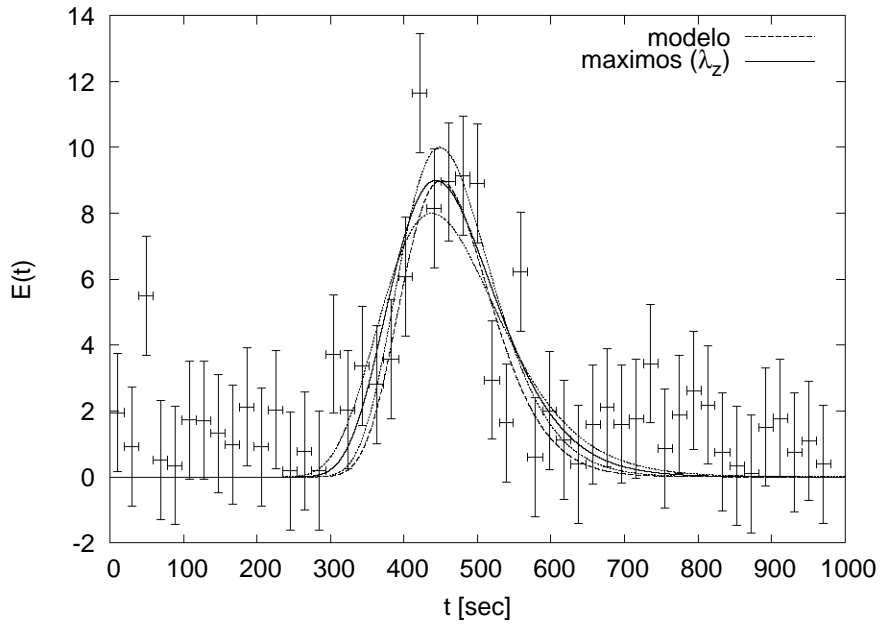


Figura 5.12: Curva de luz resultante de hacer un ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud.

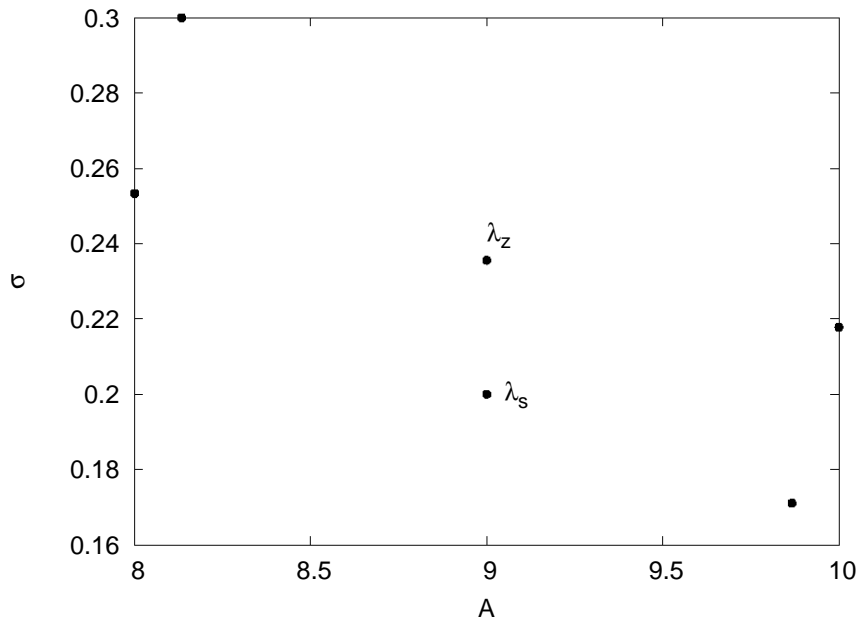


Figura 5.13: Elipse de covarianza para los parámetros A vs σ .

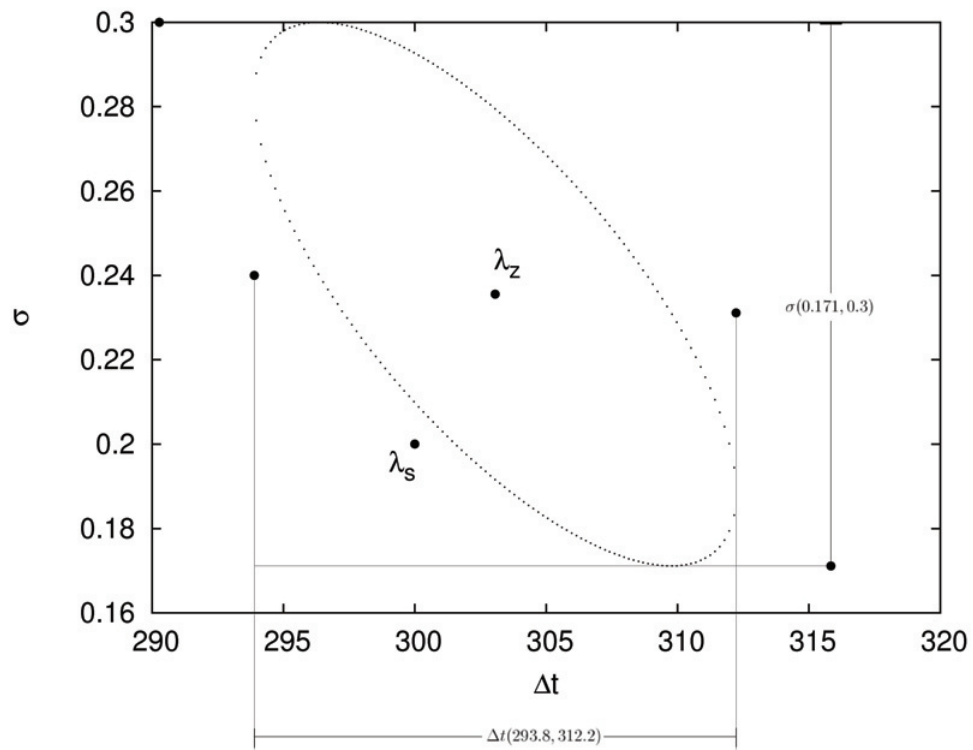


Figura 5.14: Elipse de covarianza para los parámetros Δt vs σ .

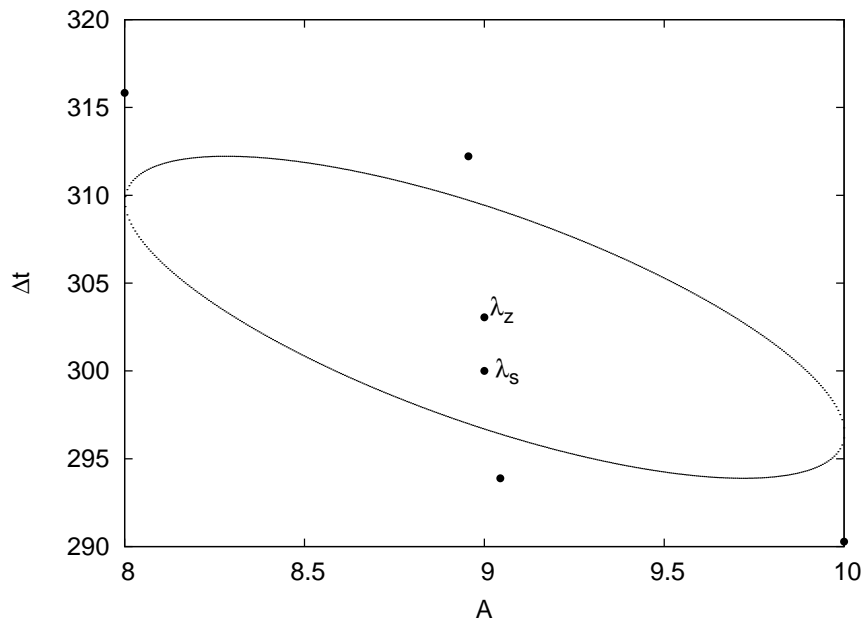


Figura 5.15: Elipse de covarianza para los parámetros A vs Δt .

EJEMPLO 4- La curva de luz del GRB 070318

Se muestra a continuación el análisis estadístico de la curva de luz observada del GRB 070318. Los datos fueron tomados por el satélite *SWIFT* y para cambiar al sistema de referencia del GRB estos datos fueron procesados por el Dr. Jose Ignacio Cabrera del Instituto de Astronomía, UNAM. La curva de luz que se muestra en la figura (5.16) es la curva en el sistema de referencia del objeto. El GRB 070318 tiene un corrimiento al rojo de $z = 0.836$.

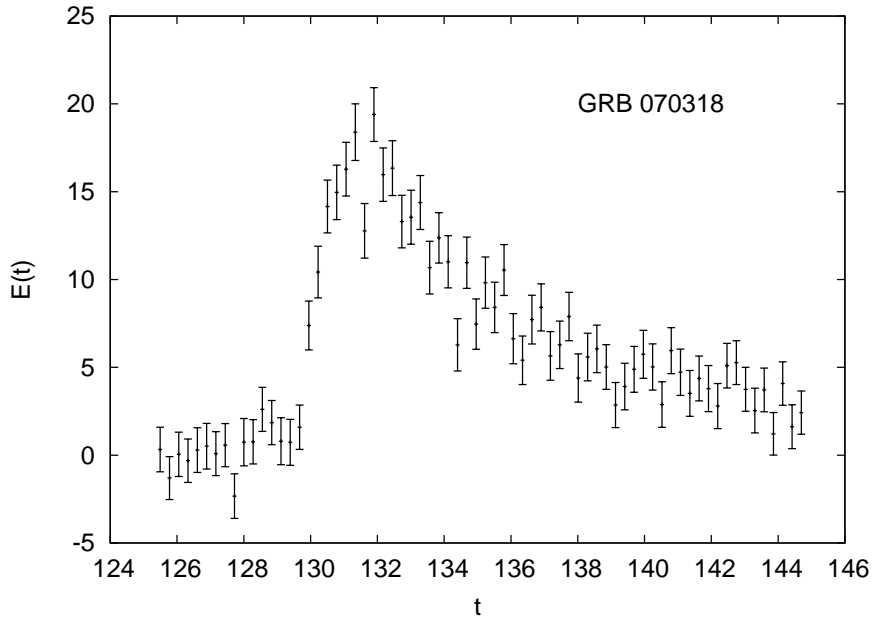


Figura 5.16: Curva de luz real del GRB 070318 en su propio marco de referencia.

Los parámetros obtenidos de la estimación por el método de máxima verosimilitud con una amplitud de ruido de $e \simeq A/10 = 16/10$

$$\lambda_s = \begin{cases} t_0 = 129.4 \\ A = 16.3 \\ \Delta t = 1.78 \\ \sigma = 1.1 \end{cases} \quad (5.10)$$

La matriz de la ecuación (4.8) con los valores de los máximos de los intervalos de confianza y sus coordenadas correspondientes.

$$\left(\begin{array}{l|llll} t_{0max} = 129.5 & A(t_{0max}) = 16.17 & \Delta t(t_{0max}) = 1.83 & \sigma(t_{0max}) = 0.91 \\ A_{max} = 16.66 & t_0(A_{max}) = 129.5 & \Delta t(A_{max}) = 1.7 & \sigma(A_{max}) = 1.08 \\ \Delta t_{max} = 1.833 & t_0(\Delta t_{max}) = 129.5 & A(\Delta t_{max}) = 16.16 & \sigma(\Delta t_{max}) = 1.10 \\ \sigma_{max} = 1.12 & t_0(\sigma_{max}) = 129.5 & \Delta t(\sigma_{max}) = 1.77 & A(\sigma_{max}) = 16.16 \end{array} \right) \quad (5.11)$$

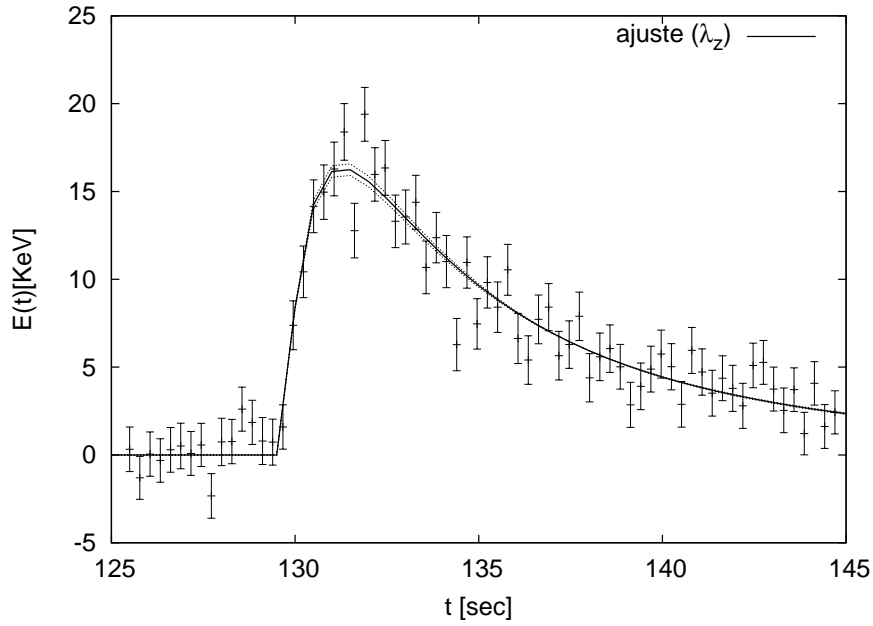


Figura 5.17: Curva de luz del GRB 070318. Se muestra el ajuste estadístico por el método de máxima verosimilitud (línea continua).

En la figura (5.17) se muestra la curva de luz observada (5.11), el ajuste con los parámetros máximos, y dos curvas de luz correspondientes a los valores del intervalo de confianza en A .

Usando las coordenadas de la matriz (5.11) se obtienen las tres elipses de covarianza (5.18), (5.19), (5.20) como se explicó en el capítulo (4).

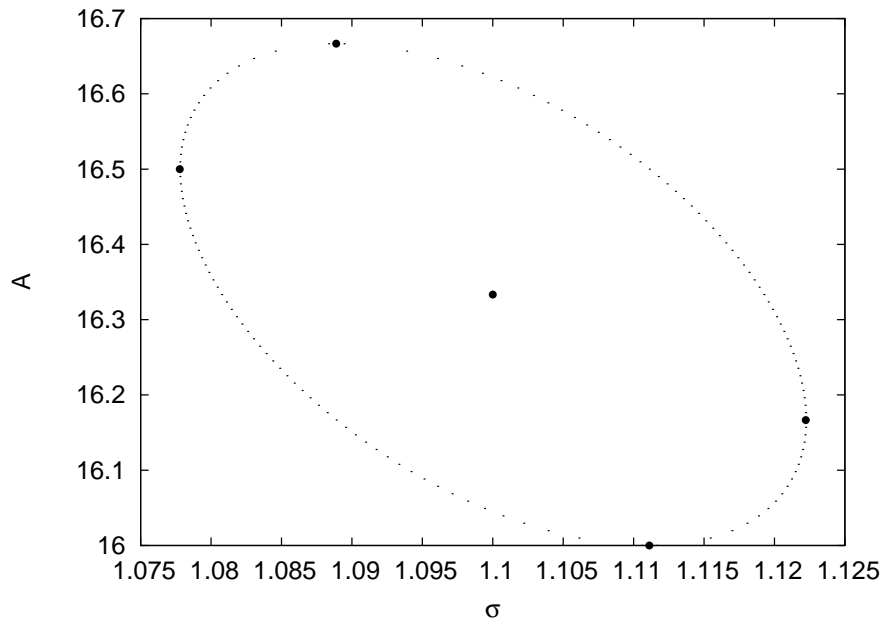


Figura 5.18: Elipse de covarianza para los parámetros A vs σ .

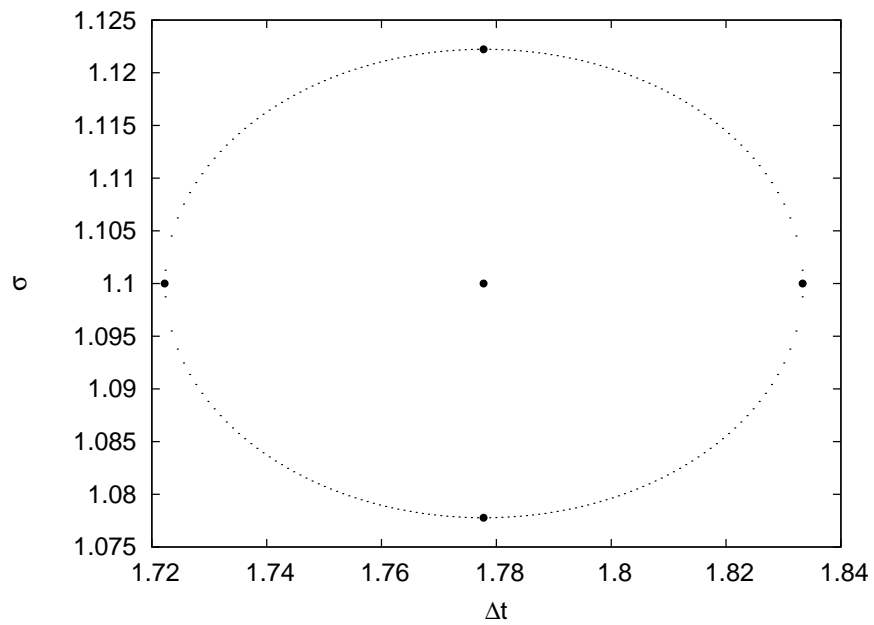


Figura 5.19: Elipse de covarianza para los parámetros Δt vs σ .

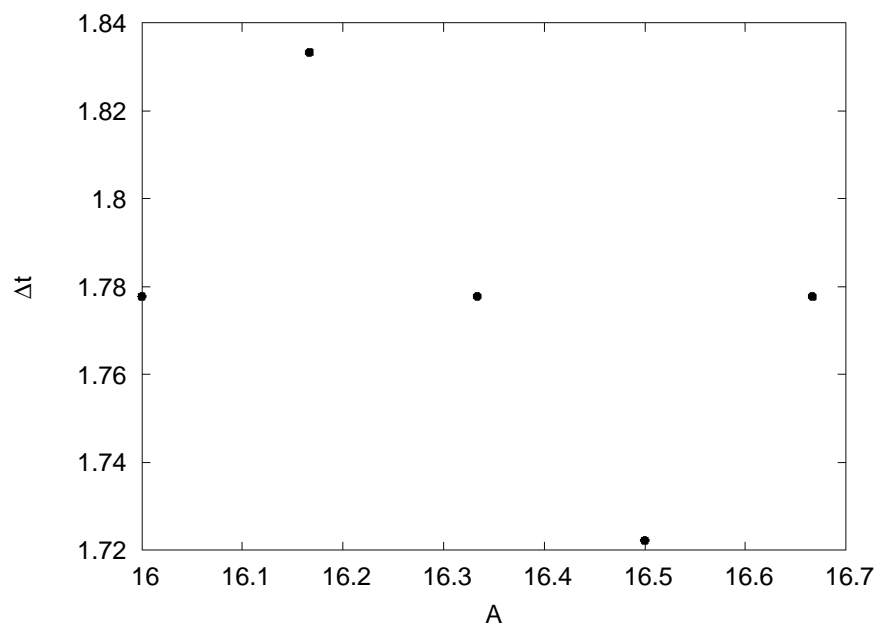


Figura 5.20: Elipse de covarianza para los parámetros A vs Δt .

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

Se generaron curvas de luz de GRB sintéticos en base a un modelo con un comportamiento tipo una función log-normal:

$$E(t; A, t_0, \Delta t, \sigma) = A \exp \left\{ \frac{-\log^2 \left(\frac{t-t_0}{\Delta t} \right)}{2\sigma^2} \right\}, \quad (6.1)$$

donde A es la amplitud de la curva, σ es una medida del ancho de la distribución y la suma $(t_0 + \Delta t)$ es el modo. Usando el método de máxima verosimilitud se ajustaron las curvas de luz sintéticas para obtener los parámetros de la curva que mejor ajusta los datos. La intención de generar curvas de luz artificiales es conocer los parámetros que determinan una curva de luz de un GRB en su marco de referencia para comparar con los parámetros obtenidos en el ajuste.

En las figuras (5.2),(5.7) y (5.12) se puede apreciar el modelo con el que fueron creados los datos artificiales y la curva del ajuste. Se grafican además un par de curvas que resultan de evaluar el modelo con los valores de los intervalos de confianza para el caso particular del parámetro A , se observa que el modelo y el ajuste caen dentro de estas dos curvas.

Como prueba de que el método funciona se calcularon los intervalos de confianza a 1σ dibujando las elipses de covarianza y se puede observar que las λ_s caen dentro de los intervalos de confianza, lo cual muestra la robustez del método.

El método que se describe en este trabajo será una herramienta útil para ajustar curvas de luz observacionales. En el ejemplo 4 del capítulo anterior se muestra el ajuste de un caso real, figura (5.17). La curva de luz observada del GRB 070318 de la figura (5.16) consta de 70 mediciones, tiene una amplitud del error $e = A/15$ y está en el sistema de referencia del objeto, es decir, los datos obtenidos por el observador (el satélite *SWIFT*) fueron corregidos por expansión asumiendo una cosmología. El GRB 070318 tiene un corrimiento al rojo de $z = 0.836$.

En la tabla (6.1) se muestra un resumen de los valores con los cuales se generaron las curvas artificiales de los ejemplos 1, 2 y 3. En la tabla (6.2) se muestra un resumen de los valores obtenidos de ajustar curvas de luz usando el método de máxima verosimilitud, junto con sus intervalos de confianza. Los casos que se muestran en las tablas son los que se trataron en el capítulo (5). El ejemplo 2 y el ejemplo 3 fueron generados con el mismo modelo, lo que se ilustra es que una amplitud del error pequeño obtiene mejores ajustes que una curva con amplitud del error grande.

λ_s	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
A	7	9	9
σ	0.3	0.2	0.2
Δt	200	300	300
t_0	200	150	150

Tabla 6.1: Se muestran los valores λ_s con los cuales se generaron las curvas de luz artificiales de los ejemplos 1, 2 y 3. Los ejemplos 2 y 3 tienen los mismos parámetros pero su amplitud del error (e) cambia.

λ_z	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	GRB 070318
e/A	1/10	1/10	1/5	1/15
A	6.92 ± 0.36	9.29 ± 0.53	9 ± 1	16.3 ± 0.36
σ	0.34 ± 0.02	0.21 ± 0.014	0.235 ± 0.65	1.1 ± 0.02
Δt	198.4 ± 16.5	290.28 ± 24.7	303.05 ± 9.15	1.78 ± 0.053
t_0	201.9 ± 3.7	164.72 ± 0.28	140.3 ± 21.1	129.4 ± 0.1

Tabla 6.2: Se muestran los valores resultantes del ajuste para cada uno de los ejemplos del capítulo (5) y sus intervalos de confianza. En la primera línea se muestra la amplitud del error e . Las tres primeras columnas son casos de curvas artificiales mientras que la cuarta columna es el caso real del GRB 070318.

Bibliografía

- [1] Gilbert Vedrenne & Jean Luc Atteia. *Gamma-Ray Bursts: The brightest explosions in the Universe*. Springer, 2009.
- [2] G. J. Babu and E. D. Feigelson. *Astrostatistics*. 1996.
- [3] D. Band, J. Matteson, L. Ford, B. Schaefer, D. Palmer, B. Teegarden, T. Cline, M. Briggs, W. Paciesas, G. Pendleton, G. Fishman, C. Kouveliotou, C. Meegan, R. Wilson, and P. Lestrade. BATSE observations of gamma-ray burst spectra. I - Spectral diversity. , 413:281–292, August 1993.
- [4] S. Brandt. *Data Analysis: Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. 1998.
- [5] G. Cavallo and M. J. Rees. A qualitative study of cosmic fireballs and gamma-ray bursts. , 183:359–365, May 1978.
- [6] E. E. Fenimore, C. D. Madras, and S. Nayakshin. Expanding Relativistic Shells and Gamma-Ray Burst Temporal Structure. , 473:998, December 1996.
- [7] E. E. Fenimore, E. Ramirez-Ruiz, and B. Wu. GRB 990123: Evidence that the Gamma Rays Come from a Central Engine. , 518:L73–L76, June 1999.
- [8] G. J. Fishman and C. A. Meegan. Gamma-Ray Bursts. , 33:415–458, 1995.
- [9] G. J. Fishman, C. A. Meegan, R. B. Wilson, M. N. Brock, J. M. Horack, C. Kouveliotou, S. Howard, W. S. Paciesas, M. S. Briggs, G. N. Pendleton, T. M. Koshut, R. S. Mallozzi, M. Stollberg, and J. P. Lestrade. The first BATSE gamma-ray burst catalog. , 92:229–283, May 1994.
- [10] H. Gao, N. Liang, and Z.-H. Zhu. Calibration of GRB Luminosity Relations with Cosmography. *International Journal of Modern Physics D*, 21:50016, 2012.
- [11] E.D. Feigelson G.J. Babu. *Astrostatistics*. Chapman&Hall, 1996.
- [12] J. Goodman. Are gamma-ray bursts optically thick? , 308:L47–L50, September 1986.
- [13] R. W. Klebesadel, I. B. Strong, and R. A. Olson. Observations of Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin. , 182:L85, June 1973.

- [14] C. Kouveliotou, C. A. Meegan, G. J. Fishman, N. P. Bhat, M. S. Briggs, T. M. Koshut, W. S. Paciesas, and G. N. Pendleton. Identification of two classes of gamma-ray bursts. , 413:L101–L104, August 1993.
- [15] S. M. Matz, D. J. Forrest, W. T. Vestrand, E. L. Chupp, G. H. Share, and E. Rieger. High-energy emission in gamma-ray bursts. , 288:L37–L40, January 1985.
- [16] P. Mészáros. Gamma-ray bursts. *Reports on Progress in Physics*, 69:2259–2321, August 2006.
- [17] W. S. Paciesas, C. A. Meegan, G. N. Pendleton, M. S. Briggs, C. Kouveliotou, T. M. Koshut, J. P. Lestrade, M. L. McCollough, J. J. Brainerd, J. Hakkila, W. Henze, R. D. Preece, V. Connaughton, R. M. Kippen, R. S. Mallozzi, G. J. Fishman, G. A. Richardson, and M. Sahi. The Fourth BATSE Gamma-Ray Burst Catalog (Revised). , 122:465–495, June 1999.
- [18] B. Paczynski. Gamma-ray bursters at cosmological distances. , 308:L43–L46, September 1986.
- [19] T. Piran. Gamma-ray bursts and the fireball model. , 314:575–667, June 1999.
- [20] T. Piran. The physics of gamma-ray bursts. *Reviews of Modern Physics*, 76:1143–1210, October 2004.
- [21] T. Piran, D. Guetta, and M. Rodriguez-Martinez. Gamma-Ray Bursts and New Physics. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 163:23–37, 2006.
- [22] M. J. Rees and P. Meszaros. Unsteady outflow models for cosmological gamma-ray bursts. , 430:L93–L96, August 1994.
- [23] W. K. H. Schmidt. Distance limit for a class of model gamma-ray burst sources. , 271:525–527, February 1978.
- [24] N. R. Tanvir, D. B. Fox, A. J. Levan, E. Berger, K. Wiersema, J. P. U. Fynbo, A. Cucchiara, T.ühler@, N. Gehrels, J. S. Bloom, J. Greiner, P. A. Evans, E. Rol, F. Olivares, J. Hjorth, P. Jakobsson, J. Farihi, R. Willingale, R. L. C. Starling, S. B. Cenko, D. Perley, J. R. Maund, J. Duke, R. A. M. J. Wijers, A. J. Adamson, A. Allan, M. N. Bremer, D. N. Burrows, A. J. Castro-Tirado, B. Cavanagh, A. de Ugarte Postigo, M. A. Dopita, T. A. Fatkhullin, A. S. Fruchter, R. J. Foley, J. Gorosabel, J. Kennea, T. Kerr, S. Klose, H. A. Krimm, V. N. Komarova, S. R. Kulkarni, A. S. Moskvitin, C. G. Mundell, T. Naylor, K. Page, B. E. Penprase, M. Perri, P. Podsiadlowski, K. Roth, R. E. Rutledge, T. Sakamoto, P. Schady, B. P. Schmidt, A. M. Soderberg, J. Sollerman, A. W. Stephens, G. Stratta, T. N. Ukwatta, D. Watson, E. Westra, T. Wold, and C. Wolf. A γ -ray burst at a redshift of $z \sim 8.2$. , 461:1254–1257, October 2009.

Apéndice A

Programa: Curva de luz artificial

Este programa genera datos aleatorios en base a una función tipo log-normal, que se muestra en la ecuación 6.1. Los datos que se obtienen con este programa son los que representan una curva de luz artificial como se explica en la sección (4.1). El código está escrito en el lenguaje de programación *c*, se describe a continuación en tres partes: la primera es el encabezado del programa y la definición de todas las variables, la segunda parte consta de la definición de la función que se manda a llamar en el *main* y finalmente en la tercera parte se muestra el *main*.

```
//Se incluyen las librerias que se van a utilizar.
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
//Se definen el archivo para escritura de datos
#define foutput "ruido.dat"

FILE *fdat;

//Definicion de todas las variables
int i,N;
double pi, a, b, h, u, v, E;
double funcionp;
double ruido;
double rm=RANDMAX;

//Parametros que se incluyen en la funcion
double A;
double t0;
double sigma;
double t;
double Dt;
```

Definición de una función log-normal, esta función se manda llamar en el *main*.

```
double funcion (double y)
{
double f;
    if ((y-t0)<0.0)
    {f=0.0;}
    else
    {f=A*exp(-pow(log((y-t0)/Dt),2.0)/(2.0*sigma*sigma));}
    return f;
}
```

Finalmente se incluye el *main* que es donde se desarrolla la parte importante del programa.

```
int main()
{
//Los numeros a y b definen el intervalo de la curva de luz
a=0.0;
b=1000.0;
//El numero de datos o mediciones se denota con N
N=51;
//Se define el n\’umero pi
pi=4.0*atan(1.0);
//Parametros de la gaussiana
A=8.0;//10.0;
t0=100.0;//500.0;
sigma=0.350;//200.0;
Dt=150.0;
//La amplitud del ruido
E=A/10.0;
//Se abre el archivo de escritura
fdat=fopen(foutput, "w");

srand(time(NULL));
for(i=1; i<N; i++)
{
//////////random//////////
u = rand()/rm; //genera numeros al azar
v= rand()/rm ; //genera numeros al azar
//printf("u=%f v=%f\n",u,v);
//Imprime los valores de u y v
//////////
```

```

h=(b-a)/N;
//divide el intervalo en N subintervalos
t=a+ (h*i)- (0.5*h);
//Da los puntos de la mitad de las divisiones
ruido=(sqrt(-2.0*E*E*log(u))*cos(2.0*pi*v));
funcionp=funcion(t)+ ruido;
if (funcionp<0.0)
{
    funcionp=funcion(t)-ruido;
}
fprintf(fdat, "%f %f %f %f\n",t,funcionp, h/2.0,E);
//imprime los datos de la curva de luz
}

(void) fclose(fdat);
system("gnuplot ruido.gpl");
//se genera la grafica de la curva de luz
return (0);
}

```


Apéndice B

Programa: Ajustes con el método de máxima verosimilitud

Este programa manda leer los datos de la curva de luz artificial y hace un ajuste usando el método de máxima verosimilitud como se explica en la sección (4). Los resultados que se muestran en el capítulo (5) son producidos con este programa incluyendo las gráficas del modelo y las elipses.

```
FILE *fdat0;      //Escribe las coordenadas
FILE *mod;
FILE *fdat;      //Escribe los archivos de puntos1,2,3.dat
FILE *open;      //Abre aprchivo ruido.dat para lectura
FILE *output_file; //Escribe los archivos elipse1,2,3.dat
```

Se define una función tipo log-normal que se va a usar para generar el modelo que se muestra en las gráficas de la sección (5).

```
double funcionmodelo (double y, double wA, double wt0, double wDt, double wsigma)
{
    double f;
    if ((y-wt0)<0.0)
        {f=0.0;}
    else
        {
            f=wA*exp(- pow(log ((y-wt0)/wDt) ,2.0)/(2.0*wsigma*wsigma) );
        }
    return f;
}
```

La subrutina *modelo()* utiliza la función anterior para generar un archivo de datos que contenga al modelo correspondiente a cada caso, genera cuatro archivos: *modelo0.dat*, *modelo1.dat*,

modelo2.dat, *modelo3.dat*. Cada uno corresponde al modelo original, al modelo con los parámetros de máxima verosimilitud y adicionalmente genera dos curvas correspondientes al máximo y mínimo del intervalo de confianza en A.

```

double modelo()
{
    rjk=1000;
    sprintf(basename2, "modelo");
//crea un archivo de datos con el nombre "modelo"
    sprintf( string2, "%s%d.dat", basename2, number );
//numera los archivos que se crean con la linea anterior
    mod = fopen( string2, "w" );

    for(ih=0; ih<2*rjk; ih++)
    {
        c=ih/2.0;
        fprintf(mod, "%f %f \n",c,funcionmodelo(c,A0,t00,Dt0,sigma0));
//imprime el archivo de datos
    }
    (void) fclose(mod);
    return (0);
}

```

Esta subrutina manda llamar los datos del archivo *ruido.dat* o de la curva de luz real que se quiera ajustar. Si el archivo que contiene los datos cambia de nombre simplemente se modifica el nombre del *.dat*.

```

double lectura()
{
    open=fopen("ruido.dat","r"); //Abre el archivo para lectura
    for (i=1; i<n+1; i++)//indice para leer los datos
    {
//Estas 4 lineas leen las columnas del archivo
        fscanf(open, "%f \n",&ti[i]);
        fscanf(open, "%f \n",&funcion[i]);
        fscanf(open, "%f \n",&h[i]);
        fscanf(open, "%f \n",&Err[i]);
        x[i]=funcion[i]; //Estas son las X j-esimas
    }
    return (0);
}

```

Se crea una función que manda llamar a los parámetros, esta función se usa en la subrutina *likelihood()*.

```

double parametro (double p1, double p2, double p3, double p4)
    { //p1-> A  p2-> t0  p3-> Dt  p4-> sigma
      double f; //loggaussiana;
//loggaussiana= p1*exp( - pow(log( ti [ i ]/p2) ,2.0)/(2.0*p3*p3 ) ) ;
//Este va a ser mi parametro lambda

      if (( ti [ i ]-p2)<0.0)
        { f=0.0; }
      else
        {
          f=p1*exp(- pow(log (( ti [ i ]-p2)/p3) ,2.0)/(2.0*p4*p4) );
        }
      return ( f );
    }

```

Esta subrutina calcula las funciones de verosimilitud usando la función *parametro(p1,p2,p3,p4)*.

```

double likelihood ()
{
  for ( i=1; i<n+1; i++) //indice para leer los datos
    {
L [ j ] [ k ] [ m ] [ p ] = L [ j ] [ k ] [ m ] [ p ] - pow ( x [ i ] - parametro ( A , t0 , Dt , sigma ) , 2.0 ) / ( 2.0 * E * E );
    } //termina i

  return ( L [ j ] [ k ] [ m ] [ p ] );
}

```

Esta subrutina busca un intervalo que le de una restricción al espacio de los valores que utiliza la subrutina *likelihood()* para evaluar cada parámetro al calcular las funciones de verosimilitud.

```

double intervalos ()
{
  normalizacion = 0.0;
  mean_sum = 0.0;
  var_sum = 0.0;
  puntomax = -500000000.0;
for ( i=1; i<n+1; i++) //Indice para las sigmas
  {
  punto = funcion [ i ];
  if ( punto >= puntomax )
    { puntomax = punto; intmax = i; }
  normalizacion = normalizacion + funcion [ i ];
  mean_sum = mean_sum + ( log ( ti [ i ] ) * funcion [ i ] );
  } //termina i

```

```

    mean=mean_sum/normalizacion;
    for (i=1; i<n+1; i++)//indice para leer los datos
    {
var_sum=var_sum+((log(ti[i])-mean)*(log(ti[i])-mean)*funcion[i]);
    }
promedio_A= (puntomax+funcion[intmax-1]+funcion[intmax+1])/3.0;
//saca el promedio de las amplitudes
A_a=promedio_A+1.0*Err[1];
A_b=promedio_A-1.0*Err[1];
var= var_sum/(normalizacion);
deltavar=0.25*var;
//Calcula el 25% de la varianza para sumarla y
//restarla y conseguir los intervalos de sigma
sigma_a=var-deltavar;
sigma_b=var+deltavar;
printf("mean %f\n",mean);
printf("var %f sigma_a%f sigma_b%f \n",var, sigma_a, sigma_b);
printf("A_a=%f A_b=%f\n",A_a,A_b );
return(0);
}

```

La subrutina *printdatos()* imprime el archivo de lectura en la pantalla. Sirve para saber si está leyendo bien los datos pero no es importante en el programa general.

```

double printdatos()
{
//Subrutina que imprime el archivo de lectura en la pantalla
for (i=1; i<n+1; i++)//indice para leer los datos
{
//Imprime las columnas del archivo de lectura
printf("%f %f %f %f\n",ti[i],funcion[i],h[i],Err[i]);
}
return(0);
}

```

La subrutina *matriz()* genera las matrices que se muestran por ejemplo en la ecuación (5.3).

```

double matriz()
{
for(j=1;j<N+1;j++) //Indice para t0
{
t0=t0_a+((t0_b-t0_a)/N)*j;
for(k=1;k<N+1;k++) //Indice para la A
{
A=A_a+((A_b-A_a)/N)*k;
}
}
}

```

```

    for (m=1;m<N+1;m++) //Indice para Dt
    {
    Dt=Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*m;
    for (p=1;p<N+1;p++) //Indice para sigma
    {
    sigma=sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*p;
    L[0][0][0][0]=0;
//Aqui se calculan las likelihood
    likelihood ();
    if (L[j][k][m][p]>=Lmax)
    {
        Lmax=L[j][k][m][p] ;
        jmax=j ;
        kmax=k ;
        mmax=m ;
        pmax=p ;
    }
    } // cierra el ciclo en j
    } // cierra k
    } // cierra m
} // cierra el ciclo en p

//Dl=lmax-0.5;

t0max=t0_a+((t0_b-t0_a)/N)*jmax ;
Amax=A_a+((A_b-A_a)/N)*kmax ;
Dtmax=Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*mmax ;
sigmamax=sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*pmax ;

return (0);
}

```

En la subrutina *coordenadas()* se encuentra el máximo valor en $Lmax - L[\text{array}] < 0,5$, lo que significa que encuentra el valor más grande de los intervalos de confianza.

```

double coordenadas ()
{

Amaxima=-50000.0;
sigmamaxima=-50000.0;
Dtmaxima=-50000.0;
t0maxima=-50000.0;

```

```

    for (j=1;j<N+1;j++) //Indice para t0
    {
t0=t0_a+((t0_b-t0_a)/N)*j;
    for (m=1;m<N+1;m++) //Indice para Dt
    {
Dt=Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*m;
    for (p=1;p<N+1;p++) //Indice para sigma
    {
sigma=sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*p;
        for (k=1;k<N+1;k++) //Indice para la A
        {
A=A_a+((A_b-A_a)/N)*k;

            if (Lmax-L[j][k][m][p]<0.50)
            {
                if (A>=Amaxima)
                {
Amaxima=A;
jA=j;
mA=m;
pA=p;
                }

                if (Dt>=Dtmaxima)
                {
Dtmaxima=Dt;
jDt=j;
kDt=k;
pDt=p;
                }

                if (sigma>=sigmamaxima)
                {
sigmamaxima=sigma;
ksigma=k;
msigma=m;
jsigma=j;
                }

                if (t0>=t0maxima)
                {
t0maxima=t0;
kt0=k;

```

```

        mt0=m;
        pt0=k;
        }
        }
    }//cierra el ciclo en j
} // cierra k
} //cierra m
} // cierra el ciclo en p

t0A=    t0_a+((t0_b-t0_a)/N)*jA;
DtA=    Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*mA;
sigmaA=sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*pA;

t0Dt=    t0_a+(    (t0_b-t0_a)/N)*jDt;
ADt=    A_a+(    (A_b-A_a)/N)*kDt;
sigmaDt= sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*pDt;

Asigma =    A_a+(( A_b- A_a)/N)*ksigma;
Dtsigma=    Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*msigma;
t0sigma=    t0_a+((t0_b-t0_a)/N)*jsigma;

At0=    A_a+((A_b-A_a)/N)*kt0;
Dtt0=    Dt_a+((Dt_b-Dt_a)/N)*mt0;
sigmat0=sigma_a+((sigma_b-sigma_a)/N)*pt0;

fdat0=fopen(foutput, "w");
fprintf(fdat0," L_max=%f t0_max=%f A_max=%f Dt_max=%f
sigma_max=%f\n",Lmax, t0max,Amax,Dtmax,sigmamax);
fprintf(fdat0," A maxima=%f t0(Amax)=%f Dt(Amax)=
sigma(Amax)=%f\n", Amaxima,t0A,DtA,sigmaA);
fprintf(fdat0," t0 maxima=%f A(t0max)=%f Dt(t0max)=
sigma(t0max)=%f\n", t0maxima,At0,Dtt0,sigmat0);
fprintf(fdat0," Dt maxima=%f A(Dtmax)=%f t0(Dtmax)=
sigma(Dtmax)=%f\n", Dtmaxima,ADt,t0Dt,sigmaDt);
fprintf(fdat0," sigma maxima=%f A(sigma max)=%f Dt(sigma max)=
t0(sigma max)=%f\n", sigmamaxima,Asigma,Dtsigma,t0sigma);
(void) fclose(fdat0);

return(0);
}

```

En la subrutina *intervalosconfianza()* se generan los archivos de datos para graficar las elipses de covarianza.

```
double intervalosconfianza ()
{
    signal1=(puntox1-a1);
//La distancia horizontal del primer punto al centro
    sigma2=(puntoy2-a2);
//La distancia vertical del segundo punto al centro

    refx1=(a1-signal1);
    refy1=a2-(puntoy1-a2);
    refx2=2.0*a1-puntox2;
    refy2=a2-sigma2;
//La rho esta relacionada con el angulo del semiejemayor de la elipse
//Las rhos fueron calculadas analiticamente para volver a comprobar
    rho1= (puntoy1-a2)/sigma2;
    rho2= (puntox2-a1)/signal1;
    rho=(rho1+rho2)/2.0;
    printf("RHO= %f\n", rho);

    NN=1000;
//significa el numero de puntos que va a graficar en las elipses

    sprintf(basename1, "puntos");
    sprintf( string1, "%s%d.dat", basename1, file_number );
    fdat = fopen( string1, "w" );
    fprintf(fdat, "%f %f \n", a1, a2);
    fprintf(fdat, "%f %f \n", puntox1, puntoy1);
    fprintf(fdat, "%f %f \n", puntox2, puntoy2);
    fprintf(fdat, "%f %f \n", refx1, refy1);
    fprintf(fdat, "%f %f \n", refx2, refy2);
    (void) fclose(fdat);
    printf(" x1= %f y1= %f \n", refx1, refy1);
    printf(" x2= %f y2= %f \n", refx2, refy2);
    sprintf(basename, "ellipse");
    sprintf( string, "%s%d.dat", basename, file_number );
    output_file = fopen( string, "w" );

    for (p=0;p<NN+1;p++)
    {
```

```

        x1=i1+(i2-i1)*p/NN;
        beta1=2.0*rho*sigma2*(x1-a1)/sigma1;
        beta2=pow(sigma2*(x1-a1)/sigma1,2);
        beta3=(1.0-(rho*rho))*sigma2*sigma2;
        gam1=-2.0*a2-(beta1);
        gam2=(a2*a2)+(beta1*a2)+beta2-beta3;

        //x2^2+gam1*x2+gam2=0;

        factor=(gam1*gam1)-(4.0*gam2);
        raiz1=(-gam1+sqrt(factor))/2.0;
        raiz2=(-gam1-sqrt(factor))/2.0;
        if(factor >=0.0)
        {
        fprintf(output_file, "%f %f\n",x1, raiz1);
        fprintf(output_file, "%f %f\n",x1, raiz2);
        }
        }

        (void) fclose(output_file);

    return(0);
}

```

En esta subrutina se manda llamar la subrutina *intervalosconfianza()* para graficar las elipses de A vs. σ .

```

double elipse1()
{
    //"A vs sigma ");
    a1=Amax;
//El centro esta ubicado en (a1,a2) =(A,sigma)
    a2=sigmamax;
    puntox1=Amaxima; //x1
    puntoy1=sigmaA; //y1
    puntox2=Asigma; //x2
    puntoy2=sigmamaxima; //y2
    // Limites para graficar
    i1=Amax-(0.3*Amax);
    i2=Amax+(0.3*Amax);
    //printf(" i1=%f i2=%f\n", i1, i2);
    file_number= 1;
}

```

```

    intervalosconfianza ();
    Aminima=refx1 ;
    sigmaAmin=refy1 ;
    Asigmamin=refx2 ;
    sigmaminima=refy2 ;
    return (0);
}

```

En esta subrutina se manda llamar la subrutina *intervalosconfianza()* para graficar las elipses de Δt vs. σ .

```

    double elipse2 ()
    {
        //”Dt vs sigma ”);
        a1=Dtmax;
//El centro esta ubicado en (a1 ,a2) =(Dt, sigma)
        a2=sigmamax;
        puntox1=Dtmaxima;          //x1
        puntoy1=sigmaDt;           //y1
        puntox2=Dtsigma;           //x2
        puntoy2=sigmamaxima;       //y2
        // Limites para graficar
        i1=Dtmax-(0.3*Dtmax); //270.0; //Amax-(Amax/20.0)
        i2=Dtmax+(0.3*Dtmax); //325.0; //Amax+(Amax/20.0)
        //printf(” i21=%f i22=%f\n” , i1 , i2 );
        file_number= 2;
        intervalosconfianza ();

        Dtminima=refx1 ;
        sigmaDtmin=refy1 ;
        Dtsigmamin=refx2 ;

        return (0);
    }

```

En esta subrutina se manda llamar la subrutina *intervalosconfianza()* para graficar las elipses de A vs. Δt .

```

    double elipse3 ()
    {
        //”A vs Dt ”);
//El centro esta ubicado en (a1 ,a2) =(A, Dt)
        a1=Amax;
        a2=Dtmax;

```

```

puntox1=Amaxima;          //x1
puntoy1=DtA;             //y1
puntox2=ADt;             //x2
puntoy2=Dtmaxima;        //y2
// Limites para graficar
i1=Amax-(0.3*Amax); //4.50;           //Amax-(Amax/20.0)
i2=Amax+(0.3*Amax); //7.50; //Amax+(Amax/20.0)
//      printf(" i21= %f i22= %f\n", i1 , i2 );
file_number= 3;
intervalosconfianza ();
DtAmin=refy1;
ADtmin=refx2;

return (0);
}

```

En esta subrutina se calculan los valores mínimos de los intervalos de confianza, no se grafica nada.

```

double elipse4 ()
{
//" t0 vs A ";
a1=t0max;
//El centro esta ubicado en las coordenadas (a1 ,a2) =(A,Dt)
a2=Amax;
puntox1=t0maxima;          //x1
puntoy1=At0;              //y1
puntox2=t0A;              //x2
puntoy2=Amaxima;          //y2

sigma1=(puntox1-a1);
//La distancia horizontal del primer punto al centro
sigma2=(puntoy2-a2);
//La distancia vertical del segundo punto al centro

refx1=(a1-sigma1);
refy1=a2-(puntoy1-a2);
refx2=2.0*a1-puntox2;
refy2=a2-sigma2;

t0minima=refx1;
t0Amin=refx2;

```

```
At0min=refy1;
```

```
return(0);  
}
```

El *main()*. En esta parte del programa se mandan llamar todas las subrutinas. Se determinan los valores de los parámetros iniciales.

```
int main(void)  
{
```

```
    N=90;
```

```
    n=50;
```

```
//n es el numero de puntos random Se usa para lectura de datos
```

```
//Definicion de los parametros de la funcion
```

```
//lognormal para generar el archivo modelo.dat
```

```
    A0=8.0;
```

```
    t00=100.0;
```

```
    Dt0=150.0;
```

```
    sigma0=0.350;
```

```
    number= 0;
```

```
    modelo();
```

```
//Limites de cada parametro para hacer el max. like.
```

```
//y calcular sus i confianza
```

```
    t0_a=90.0;
```

```
    t0_b=110.0;
```

```
    A_a=7.5;
```

```
    A_b=8.7;
```

```
    Dt_a=140.0;
```

```
    Dt_b=160.0;
```

```
    sigma_a=0.33;
```

```
    sigma_b=0.45;
```

```
    sigma=0;
```

```
    A=0;
```

```
    t0=0;
```

```
    Dt=0;
```

```
    Lmax=-20000000.0;
```

```
    Ae=8.0;
```

```
//Esta Ae tiene el mismo valor del A0=7.0 del input
```

```

E=Ae/20.0;

delta=1e-5;

lectura(); //Manda llamar los datos de entrada
//en esta subrutina se calculan la varianza y la amplitud

//intervalos();
matriz();
//IMPRIMIMOS EL MODELO USANDO LOS PARAMETROS
//DEL MAXIMUM LIKELIHOOD
A0=Amax;
t00=t0max;
Dt0=Dtmax;
sigma0=sigmamax;
number=1;
modelo();

coordenadas();
//IMPRIMIMOS EL MODELO USANDO COMO PARAMETROS
//LOS I CONFIANZA MAS GRANDES
A0=Amaxima;
t00=t0A;
Dt0=DtA;
sigma0=sigmaA;
number=2;
modelo();

printf("A vs Sigma\n");
ellipse1();
printf("Dt vs Sigma\n");
ellipse2();
printf("A vs Dt\n");
ellipse3();
printf("t0 vs A\n");
ellipse4();

//IMPRIMIMOS EL MODELO USANDO COMO PARAMETROS
//LOS I CONFIANZA MAS GRANDES
A0=Aminima;
t00=t0Amin;
Dt0=DtAmin;
sigma0=sigmaAmin;

```

```
    printf(" Aminima= %f  t0Amin= %f  DtAmin
= %f sigmaAmin = %f" ,A0, t00 ,Dt0 ,sigma0 );

    number=3;
    modelo ();
    printf("mean  %f\n",mean);
    system("gnuplot plot.gpl");
//esta linea genera las graficas

    return (0);
}
```