



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

**EFFECTOS VISCOELÁSTICOS EN LA  
INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA**

INGENIERÍA CIVIL - ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

**JOSÉ JAVIER CABRERA ROMERO**

TUTOR:

**ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS**

2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Sánchez Sesma Francisco José  
Secretario: Dr. Ovando Shelley Efraín  
Vocal: Ing. Rodríguez Cuevas Neftalí  
1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Rivera Constantino Rigoberto  
2<sup>do.</sup> Suplente: M. I. Mendoza Escobedo Carlos Javier

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, México D. F.

**TUTOR DE TESIS:**

Ing. Rodríguez Cuevas Neftalí

---

**FIRMA**

## **Agradecimientos**

Al profesor Nefalí Rodríguez Cuevas por compartir sus conocimientos sobre ingeniería, en particular los de mecánica estructural.

A mis sinodales, que amablemente revisaron y observaron la necesidad de aclarar algunos párrafos y explicar varias figuras.

## RESUMEN

Con fines prácticos, en este trabajo se estudia un problema de interacción suelo estructura en condiciones estáticas de carga. El modelo que se utiliza es un cilindro de base rígida apoyado en un terreno caracterizado viscoelástico homogéneo; el cilindro esta sujeto a la acción de una fuerza vertical constante y excéntrica que le produce un momento de volteo en la base. El ejercicio requiere la aplicación de un procedimiento práctico para la obtención de expresiones matemáticas que resultan función de la variable tiempo y que describen cualquier comportamiento. En la teoría de la viscoelasticidad, con base en la aplicación de un principio de correspondencia y a partir de la solución elástica del problema, se obtiene la correspondiente solución viscoelástica. Así, a partir de los resultados de pruebas en materiales reales, que han mostrado que el modelo reológico de Burgers puede representar pruebas en las cuales se excita la componente distorsional de deformaciones, mientras que la componente volumétrica se representa utilizando un resorte de Hooke, se generó un modelo de Burgers modificado para representar el comportamiento del suelo. Finalmente, se aplicó el modelo con datos de una prueba de consolidación efectuada en material arcilloso del valle de México. El modelo utilizado en este trabajo, reproduce eficientemente la respuesta volumétrica instantánea del material y describe su comportamiento viscoso para este tipo de suelos arcillosos.

Palabras clave: Interacción suelo estructura, Arcillas, Deformaciones del suelo, Viscoelasticidad lineal, Burgers.

## ABSTRACT

A mathematical model for soil structure interaction is presented when the soil material is represented as linear viscoelastic: a solid cylindrical body supported by viscoelastic material. Load conditions are static: vertical load eccentrically applied that produces a turning movement. On the basis of testing results from real materials, that have shown the rheological model of Burgers could represent the distortional strain component, while volumetric component of deformation is represented by Hooke's spring, is generated a modified model of Burgers for complete behavior of soil. Finally, the model is applied using data from a soil test carried out on Mexico's Valley Clay. The model presented in this work, efficiently reproduce the volumetric instantaneous response of materials and describe its viscous behavior on this kind of soils.

Key words: Soil structure interaction, Clays, Soil strains, Viscoelasticity, Burgers.

## CONTENIDO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>RESUMEN</b>   | <b>ii</b> |
| <b>CONTENIDO</b>   | <b>iv</b> |
| <b>CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 INTRODUCCIÓN   | 1         |
| 1.2 ANTECEDENTES   | 3         |
| <b>CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN ELÁSTICA AL PROBLEMA DE UN CILÍNDRO RÍGIDO APOYADO EN UN SEMIESPACIO</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1. INTRODUCCIÓN  | 9         |
| 2.2. PLACA CIRCULAR RÍGIDA APOYADA SOBRE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO   | 10        |
| 2.2.1. Carga vertical concéntrica  | 11        |
| 2.2.2. Carga excéntrica  | 14        |
| 2.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA DEFINIR LOS EFECTOS QUE PRODUCE LA APLICACIÓN CÉNTRICA DE LA CARGA, ASÍ COMO LOS RESULTADOS CUANDO LA CARGA ES EXCÉNTRICA | 16        |
| <b>CAPÍTULO 3. PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA DEL PROBLEMA</b>   | <b>19</b> |
| 3.1. INTRODUCCIÓN  | 19        |
| 3.2. MODELO REOLÓGICO DE BURGERS   | 20        |
| 3.2.1. Solución mediante la Transformada de Laplace  | 23        |
| 3.3. MODELO DE BURGERS MODIFICADO  | 25        |
| 3.4. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA DEL PROBLEMA DEL CILÍNDRO RÍGIDO SOBRE UN SEMI-ESPACIO VISCOELÁSTICO,  |           |

|  |           |
|--|-----------|
| CUANDO EL MATERIAL SE REPRESENTA POR EL MODELO DE BURGERS MODIFICADO   | 26        |
| <b>CAPÍTULO 4. OBTENCION DE CONSTANTES Y PARÁMETROS VISCOELÁSTICOS DE ARCILLAS DEL VALLE DE MEXICO, EN UN SITIO ESPECÍFICO</b> | <b>31</b> |
| 4.1. INTRODUCCIÓN  | 31        |
| 4.2. PROCEDIMIENTO PARA OBTENER DE RESULTADOS DE PRUEBAS EXPERIMENTALES A LAS CONSTANTES VISCOELASTICAS REPRESENTATIVAS        | 31        |
| 4.3. ARCILLAS DEL VALLE DE MÉXICO  | 33        |
| <b>CAPÍTULO 5. APLICACIÓN A LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA PARA CARGA Y MOMENTO CONSTANTE</b>                                       | <b>36</b> |
| 5.1. APLICACIÓN PARA CARGA CONSTANTE   | 36        |
| <b>COMENTARIOS FINALES</b>   | <b>40</b> |
| <b>ANEXOS</b>  | <b>41</b> |
| <b>REFERENCIAS</b>   | <b>46</b> |



# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES

### 1.1. INTRODUCCIÓN

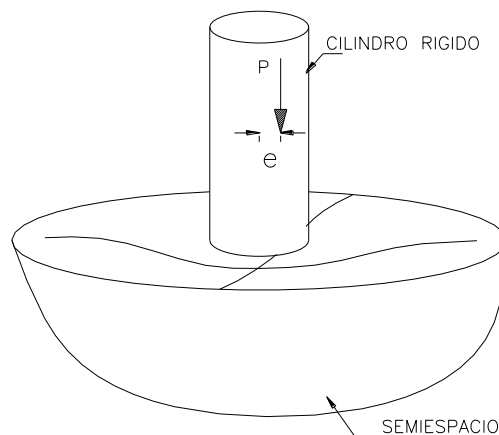
Se puede enunciar brevemente que en un análisis de interacción, en general, se busca determinar los esfuerzos y deformaciones internas en cada uno de los cuerpos que interactúan, junto con el cálculo de los desplazamientos y presiones en las superficies de contacto que resultan. La parte del análisis que describe las reacciones del suelo de cimentación debe tomar en cuenta el carácter viscoelástico del medio. Esto último, busca que los desplazamientos esperados se mantengan dentro de límites aceptables, recomendados por normas de diseño y construcción. En este sentido, los suelos arcillosos ofrecen un buen ejemplo de las complejidades que se pueden presentar en las respuestas del material en función del tiempo. Más adelante se citan algunos ejemplos específicos de estructuras de edificación o de infraestructura en general, que se han visto afectados en algunas de las funciones para las que fueron diseñadas a causa de comportamientos imprevistos del terreno de cimentación.

En no pocas ocasiones, como ocurre en centros urbanos donde el suministro de agua potable proviene del subsuelo bajo la misma población, las propiedades del material son alteradas y los efectos que se esperarían en condiciones normales de “consolidación” cambian. Con ello se aumenta la complejidad del problema.

La parte del análisis que considera las reacciones de la estructura parece estar relativamente resuelta, si se considera que los materiales con que se construye la superestructura se acercan más a las hipótesis supuestas en los modelos de comportamiento. Por ejemplo, un acero estructural se puede aceptar homogéneo e isótropo. No obstante, según sea el tipo de estructura, sus desplazamientos globales pueden ocasionar problemas de inestabilidad

general o acumulación de esfuerzos importantes por cambios en la posición de los centros de masas.

Con fines prácticos, en este trabajo se estudia un problema de interacción suelo estructura en condiciones estáticas de carga. El modelo que se utiliza es un cilindro de base rígida apoyado en un terreno caracterizado viscoelástico homogéneo; el cilindro esta sujeto a la acción de una fuerza vertical constante y excéntrica que le produce un momento de volteo en la base, figura 1.1 El ejercicio requiere la aplicación de un procedimiento práctico para la obtención de expresiones matemáticas que resultan función de la variable tiempo y que describen cualquier comportamiento. En la teoría de la viscoelasticidad, con base en la aplicación de un principio de correspondencia y a partir de la solución elástica del problema que tenga las mismas condiciones de frontera, se obtiene la correspondiente solución viscoelástica.



**Figura 1.1. Problema que se resuelve**

Existe evidencia de una estructura cilíndrica cimentada sobre terreno arcilloso y de su comportamiento en el transcurso de ocho siglos, que muestra el tipo de movimiento que ha experimentado desde su construcción en el año de 1173. La inclinación de la Torre de Pisa, figura 2 y 3, ilustra un comportamiento entre suelo y estructura como el que se considera en este trabajo.

## 1.2 ANTECEDENTES

Los suelos de tipo arcilloso pueden ser representativos de comportamientos sensibles al paso del tiempo, en relación con la vida útil de las estructuras de ingeniería civil que tienen contacto con él. Sin embargo, los tiempos que toma este material para hacer notorios sus efectos dependen de muchos factores. El procedimiento constructivo para cada estructura está entre los más importantes; y es así que pueden pasar meses o decenas de años para ver sus efectos.

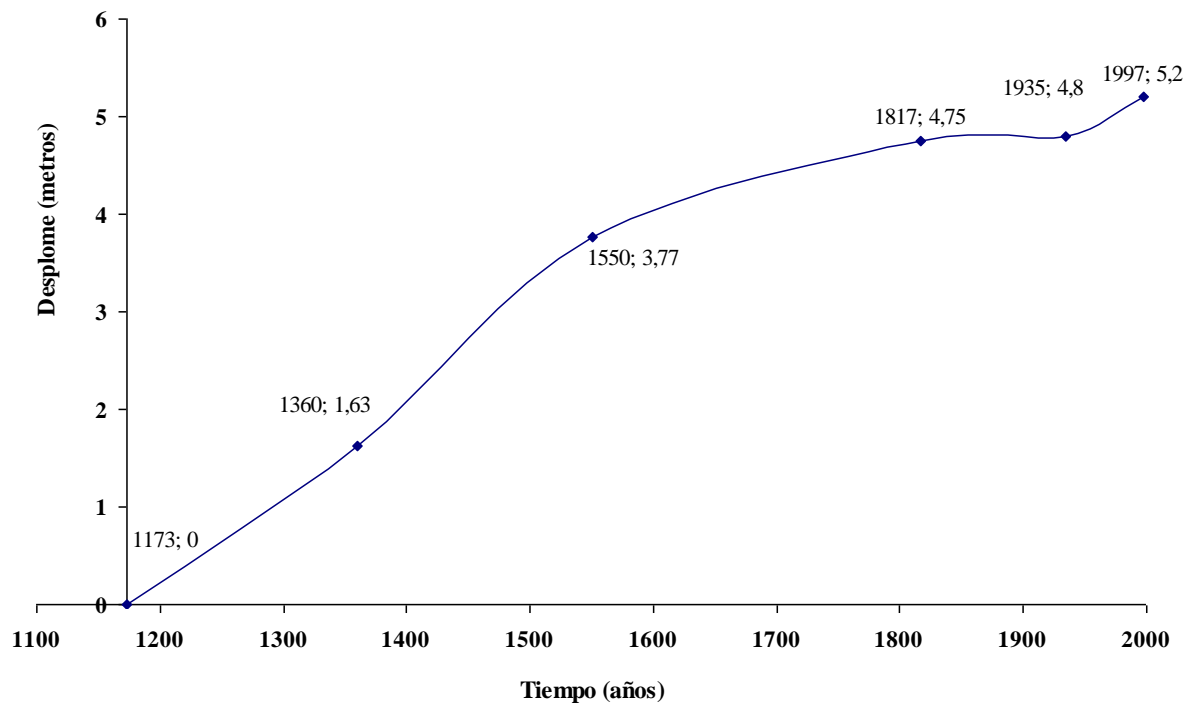


**Figura 2. Torre de Pisa**



**Figura 3. Torre de Pisa**

La información registrada, acerca del desplome que presentaba la Torre inclinada de Pisa, indica que desde las primeras etapas de su construcción se presentaron asentamientos en el terreno arcilloso de cimentación, que orillaron a interrupciones para su corrección, figura 4 (consultado en internet). Se inició su construcción en 1173 y terminó en 1370, para llegar a una altura de 55.863m (8 pisos). Desde el año en que la torre del campanario quedaba lista para su inauguración, 1372, la torre siguió inclinándose de manera lenta. Aproximadamente por cuatro siglos el suelo de cimentación cedió libremente, hasta un primer intento de rehabilitación en 1835. En este intervalo intermedio de tiempo, el comportamiento de la torre se parece al representado por el modelo viscoelástico propuesto (en la grafica, entre los puntos de 1360 a 1817).



**Figura 4. Registros del desplome de la torre de Pisa**

Técnicamente el proceso que ocurre es el de consolidación, y obedece como en todo a sus propiedades físicas. Durante la sobrecarga del suelo, en suelos saturados, teóricamente es el

agua la que toma toda la carga al inicio y la va transfiriendo al esqueleto sólido a medida que se drena a través de estratos permeables. Se estima que esta pérdida de volumen de agua es la que se transforma en deformación vertical o asentamiento.

Se puede citar algunos otros registros relacionados con el comportamiento de estructuras en suelos compresibles. Se considera por ejemplo, el hundimiento general de la superficie del suelo en áreas relativamente grandes de terreno y el agrietamiento superficial.

Ciudades que se han emplazado en terrenos compresibles, (Ciudad de México, México; Shanghai, China; Houston, EUA; Venecia, Italia, entre otras) registran hundimientos generales importantes. En parte debidos a la sobrecarga de construcciones pesadas, como edificios, pero que se aceleran por otras actividades de la población que modifican particularmente las propiedades del suelo, como es la extracción del agua del subsuelo para consumo de la misma población.

En la Ciudad de México, (Santoyo, 2005; Marsal, 1959) el hundimiento total durante el siglo pasado se midió en 8m y, actualmente se desliza a razón de 8.4cm/año (Santoyo, 2006). El registro más significativo del hundimiento regional corresponde a la torre poniente de la catedral metropolitana, como también son sensibles los desniveles en las vías del transporte del metro con trazo inicialmente recto. Se afectan también servicios subterráneos de agua potable y de desalojo de aguas residuales. Se estima que en el futuro se requerirá de un sistema nuevo de drenaje debido a la inversión de las pendientes con que fluyen, por gravedad, algunas partes del actual sistema.

Otros registros importantes muestran la aparición de grietas en la superficie, ligados principalmente con la extracción de agua del subsuelo que modifica las propiedades del suelo. Se presentan desplazamientos diferenciales a cada lado de las grietas cuando atraviesa por edificaciones o vías terrestres. Algunas localidades presentan este fenómeno, donde los costos por mantenimiento de viviendas pueden orillar al abandono de residencias.

Es necesario considerar también, que un edificio mal cimentado puede producir asentamientos importantes, que afecten al área vecina al edificio, e induzcan desplomes.

La experiencia ha mostrado que en la presencia de suelos que sufren consolidación, los comportamientos entre el suelo y la estructura de cimentación se vuelven importantes. Es ahí donde tienen mayor sentido estudios como el presente. Se ha logrado considerable simplificación cuando, desde la perspectiva de la mecánica de medios continuos, las arcillas se pueden tratar como medios continuos con metodologías aceptables.

Los primeros trabajos para representar las deformaciones en suelos finos saturados, en términos de una consolidación por disipación de la presión de agua en los poros del suelo, corresponden a Karl Terzaghi (1943). Dentro de esta teoría de consolidación primaria, en las masas de suelo, sujetas a sobrecarga constante en el tiempo, los estados de esfuerzo y de deformación se modifican con el tiempo.

Procesos de deformación dependientes del tiempo, fuera de las consideraciones hidrodinámicas de la teoría de consolidación primaria, se les suele hacer referencia como de consolidación secundaria (Schiffman, 1966). Así también, ciertos suelos no saturados y rocas suaves presentan procesos de deformación muy lentos (creep), que en general se pueden representar efectivamente por modelos viscoelásticos lineales. El análisis de interacción suelo-estructura se puede efectuar con la introducción de modelos reológicos elementales (modelos de Maxwell, Kelvin, sólido de tres-parámetros o fluido de tres-parámetros) o con la representación de un continuo viscoelástico, donde las relaciones esfuerzo-deformación-tiempo para ambas componentes volumétrico, y distorsional, quedan representadas por expresiones del tipo integral o diferencial (Selvadurai, 1979).

Desde un punto de vista fenomenológico, la propiedad viscoelástica del suelo, también se manifiesta en los materiales de construcción del cimiento, y origina efectos diferidos.

El análisis de interacción suelo-estructura que se presenta en este trabajo, hace uso del modelo reológico denominado fluido de cuatro-parámetros. El modelo, también denominado de Burgers, se combina con el de un sólido elástico en lo que denominaremos Burgers modificado, para representar por completo el comportamiento del suelo. El primero representará la componente distorsional del comportamiento y el sólido elástico a la componente volumétrica.

Además, si se considera a los tres grupos en que se pueden dividir los problemas de diseño estructural:

- a) problemas de resistencia del material,
- b) problemas de desplazamientos, y
- c) estabilidad,

Se destaca que el diseño de estructuras esta principalmente gobernado en términos de desplazamientos, es decir, estados limite de servicio. Por lo que se presta mayor atención a las relaciones deformación- tiempo, bajo esfuerzos constantes.

En el siguiente capitulo se presenta la solución elástica del problema planteado. Su relación con la solución viscoelástica del mismo problema, mediante un principio de correspondencia de la teoría viscoelástica lineal, permite ilustrar principalmente los desplazamientos en la superficie de contacto en función del tiempo. Esta solución viscoelástica es desarrollada en el capítulo tres con un modelo reológico de Burgers modificado. El capítulo 4, presenta un procedimiento para calcular los parámetros viscoelásticos involucrados en el modelo a partir de ensayos geotécnicos y, que excitan la componente distorsional de deformación de muestras de suelo. El último capítulo es una aplicación con parámetros calculados de una arcilla del valle de México.



## **CAPÍTULO 2**

### **SOLUCIÓN ELÁSTICA AL PROBLEMA DE UN CILINDRO RÍGIDO APOYADO EN UN SEMIESPACIO**

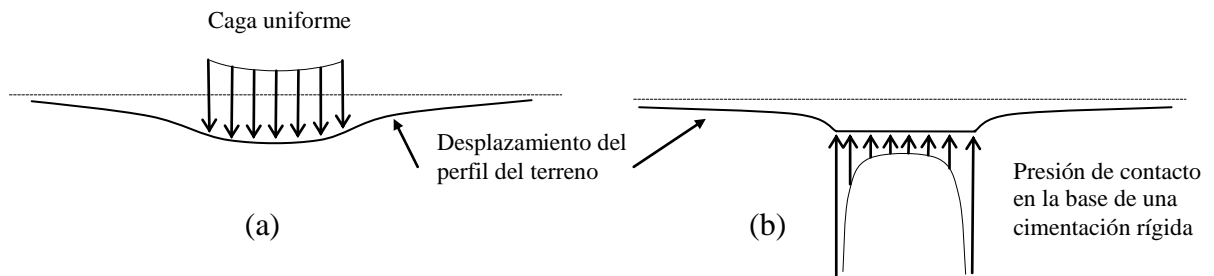
#### **2.1. INTRODUCCIÓN**

El uso de la teoría elástica lineal ha resultado adecuado en la solución de muchos problemas de estructuras cimentadas en terrenos deformables. Una razón importante reside en que los niveles de esfuerzos a que se someten los suelos de cimentación son pequeños; el nivel de esfuerzos cortantes en la masa de suelo, resulta considerablemente menor que su resistencia última. Se considera que las cimentaciones se diseñan con factores de seguridad de 3 o mayor (Selvadurai, 1979; 1996).

Soluciones consideradas fundamentales para su aplicación a problemas de geotecnia son: el problema de Boussinesq, para una carga puntual aplicada normal a la superficie de un semiespacio; el problema de Cerrutti, de carga puntual horizontal actuando en la superficie de un semiespacio; el problema de Mindlin, de una carga puntual, horizontal o vertical, actuando en el interior de un medio semi-infinito, entre otras. Un semi-espacio se define como la región localizada a un solo lado de un plano de referencia.

Existen variadas aplicaciones, con la integración del citado problema de Boussinesq sobre regiones definidas en la superficie del semi-espacio, y se obtienen las distribuciones de esfuerzos y deformaciones en la masa de suelo para áreas uniformemente cargadas, de muy diversas formas. En la figura 2.1a, se muestra para un área circular con presión uniforme (como la que transmitiría una cimentación completamente flexible), una distribución de desplazamientos verticales en la superficie libre del medio, que se asemeja a un tazón: los desplazamientos al centro del área cargada son los máximos; debajo de los bordes se reduce su magnitud aproximadamente un tercio y mas allá de 1.5 veces el radio del círculo los desplazamientos verticales son mínimos y continúan reduciéndose. Este resultado puede explicar, cualitativamente, que es necesario que la distribución de esfuerzos de contacto

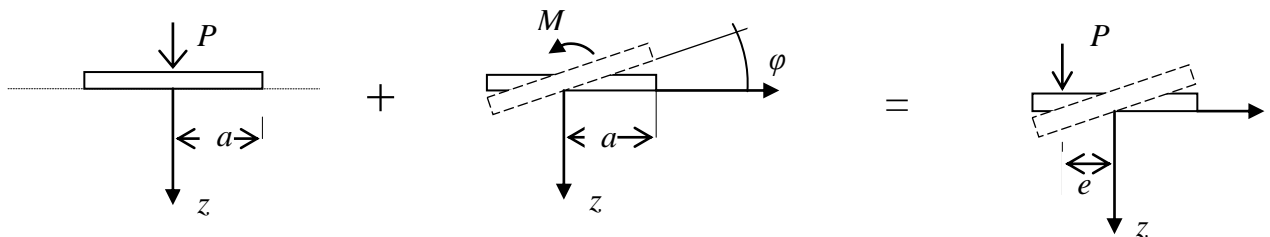
aumente de manera importante cerca de los bordes debajo de un cuerpo rígido, para lograr que en cualquier punto debajo del mismo cuerpo, el desplazamiento sea constante. Se considera que el medio de apoyo es homogéneo, isótropo, elástico, figura 2.1b. La condición de material *isótropo* se ha utilizado en arcillas y experimentalmente se obtienen los resultados que ilustra la figura 2.1. En todo este trabajo, el análisis del sistema suelo-estructura considera el suelo como medio continuo.



**Figura 2.1 Presiones de contacto en medio homogéneo, isótropo, elástico**

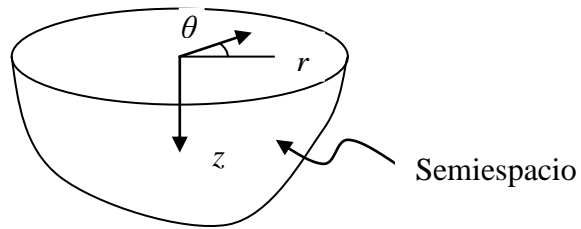
## 2.2. PLACA CIRCULAR RÍGIDA APOYADA SOBRE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO

El problema de un cilindro rígido bajo carga excéntrica, figura 1.1, se pueden descomponer en otros de más sencilla resolución: una acción vertical simétrica y una de rotación, figura 2.2.



**Figura 2.2. Superposición de efectos**

El primer problema se ha resuelto por varias técnicas, Boussinesq lo hizo primero. El segundo problema se ha publicado en artículos sobre mecánica de sólidos y de matemáticas aplicadas (Muki, 1955; Sneddon, 1961; Poulos, 1974). Estos resultados analíticos, emplean convenientemente un sistema de referencia en coordenadas cilíndricas, figura 2.3.



**Figura 2.3. Sistema de referencia cilíndrico (r, θ, z)**

### 2.2.1. Carga vertical concéntrica

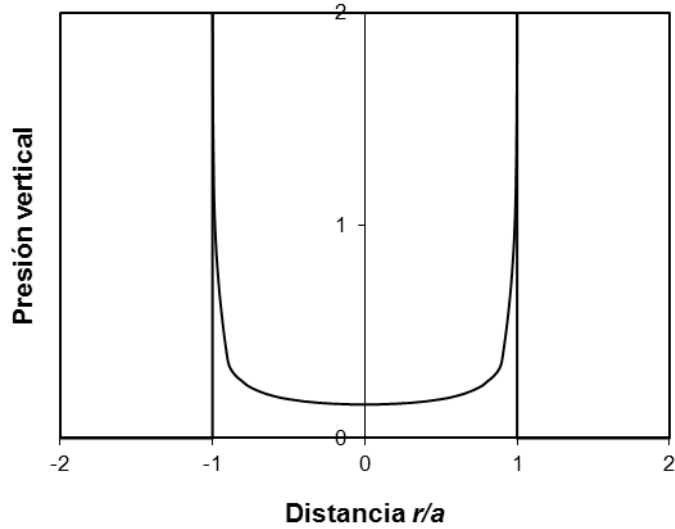
Para esta condición de carga, las ecuaciones (2.1) a (2.3) presentan valores para la superficie libre,  $z=0$ . Estos valores no dependen del ángulo  $\theta$ , ya que exhiben simetría radial. En puntos de la superficie libre, los esfuerzos son nulos fuera del área cargada y tienen una reacción variable en la superficie de contacto. La variación teórica de la componente vertical del esfuerzo resulta:

$$[\sigma_z]_{z=0} = -\frac{P}{2\pi a} \frac{1}{(a^2 - r^2)^{3/2}} \quad 0 < r < a \quad (2.1)$$

$r$  = distancia radial desde el centro de la base circular

$a$  = radio de círculo

$P$  = Carga total; gráficamente se ilustra en la figura 2.4.



**Figura 2.4. Distribución de presiones de contacto por carga puntual concéntrica**

Usualmente interesa determinar la componente vertical del desplazamiento  $u$ , en la superficie libre del medio para estimar asentamientos. Cuando la base rígida ha penetrado una profundidad  $\delta$ , se tienen la componente vertical,  $u_z$  y también una radial,  $u_r$ :

$$[u_z(r)]_{z=0} = \begin{cases} \delta & 0 \leq r \leq a \\ \frac{2\delta}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) & a \leq r \end{cases} \quad (2.2)$$

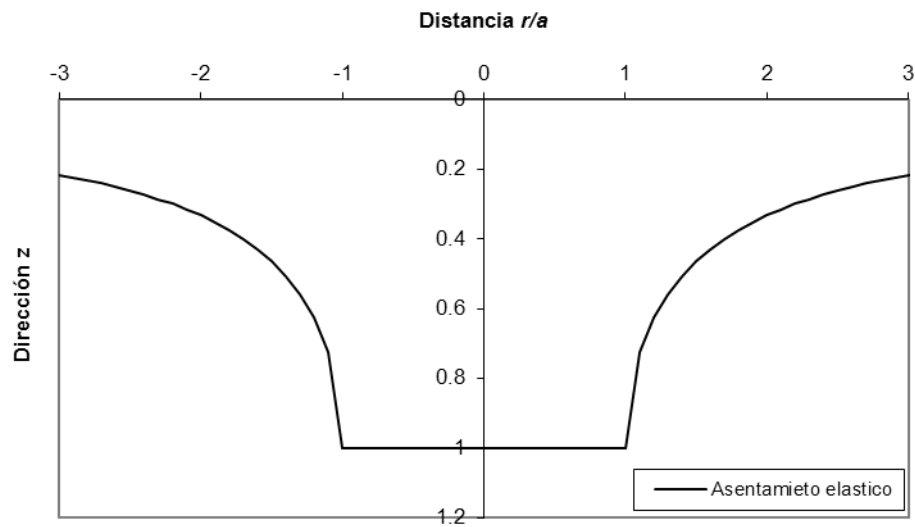
$$[u_r(r)]_{z=0} = \begin{cases} -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\delta}{\pi}\right) \frac{a - (a^2 - r^2)^{1/2}}{r} & 0 \leq r \leq a \\ -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\delta a}{\pi r}\right) & r > a \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{En donde } \delta = \frac{\pi}{2} (1-\nu^2) \frac{pa}{E} \quad (2.4)$$

$$p = \text{presión media aplicada} = \frac{P}{\pi a^2}$$

$E$  = módulo elástico de Young y  $\nu$ , la relación de Poisson.

Se puede notar que la gráfica de valores del desplazamiento vertical, en la superficie de contacto, coincide con la configuración deformada del medio, figura 2.5.



**Figura 2.5. Desplazamiento vertical (z) debido a carga puntual simétrica**

Se han introducido  $E$  y  $\nu$ , constantes elásticas del material. Hay otras tres constantes, pero sus valores están interrelacionados y se pueden obtener unas a partir de otras:

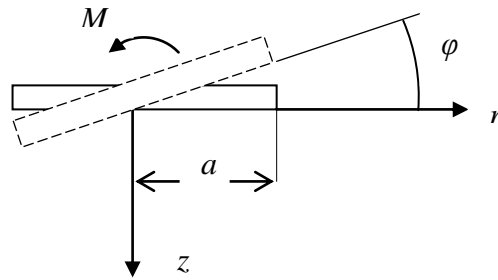
$$\text{Módulo de cortante: } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\text{Módulo volumétrico: } K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

y la Constante de Lamé:  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$

Solo dos de estos parámetros son necesarios para describir el comportamiento de cuerpos elásticos, isótropos, junto con sus relaciones constitutivas.

### 2.2.2. Carga excéntrica



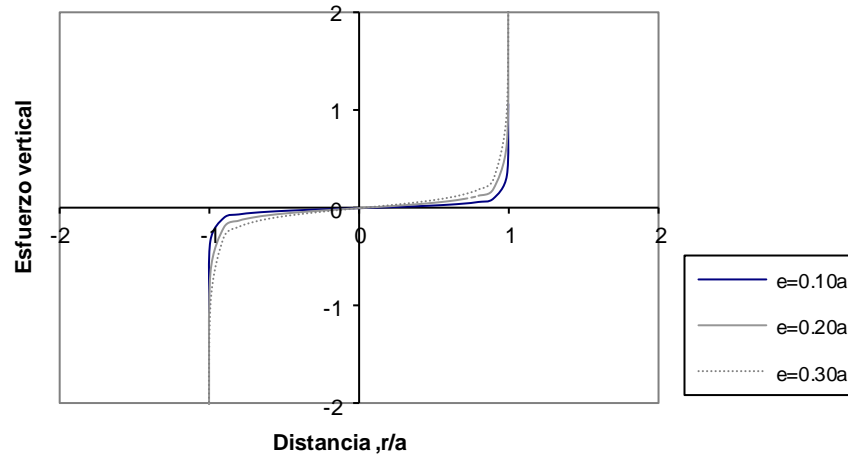
**Figura 2.6. Carga de momento**

En la manera que se ha resuelto el problema, se considera que los esfuerzos cortantes desaparecen en todos los puntos donde  $z=0$ ; el contacto se considera sin fricción entre el cuerpo y el medio en que se apoya. También, el ángulo de inclinación,  $\phi$ , que produce el par de momento  $M$  es pequeño, figura 2.6. La variación del esfuerzo vertical en la superficie de contacto se representa por:

$$[\sigma_z]_{z=0} = \frac{3rM}{2\pi a^4 \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{1/2}} \cos \theta \quad 0 < r < a \quad (2.5)$$

Con relación al problema propuesto, el momento de volteo,  $M$ , resulta de la fuerza puntual  $P$  y su excentricidad  $e$ ; si se considera esta última como una fracción del radio de la base, se

obtiene la distribución de esfuerzos normales a la superficie que se muestra en la figura 2.7; estos valores son teóricos, ya que físicamente el suelo no resistirá los esfuerzos de tensión.



**Figura 2.7. Esfuerzos verticales en la superficie de contacto debidos a  $M=Pe$**

Bajo este tipo de carga, el desplazamiento vertical en la superficie libre se puede obtener de las expresiones generales propuestas por R. Muki (1995).

$$[u_z(r)]_{z=0} = \begin{cases} \phi r \cos \theta & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\phi}{\pi} \left( -2a \left( 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2r \sin^{-1} \left( \frac{a}{r} \right) \right) \cos \theta & a \leq r \end{cases} \quad (2.6)$$

El ángulo de inclinación se calcula como:  $\phi = \frac{3(1-\nu^2)M}{4a^3E}$  (2.7)

### 2.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA DEFINIR LOS EFECTOS QUE PRODUCE LA APLICACIÓN CÉNTRICA DE LA CARGA, ASI COMO PARA CARGA EXCÉNTRICA

Se ha considerado una solución para el problema de un cilindro rígido apoyado en un medio elástico lineal. Se ha supuesto que la superficie del medio que está en contacto con el cilindro, se presenta sin fricción. La distribución de presiones y de desplazamientos en este problema quedan determinados directamente, dado que solo se determinan las expresiones que produzcan un desplazamiento uniforme en la superficie de contacto.

La distribución de esfuerzos verticales de contacto cerca de los bordes del cilindro tiene valores teóricos infinitos y que representarían esfuerzos cortantes infinitos tratándose de una masa de suelo, idealizada como elástica lineal. En suelos reales, la resistencia a esfuerzo cortante es limitada. Esto conduce a limitar sus valores en el perímetro. Figura 2.8. Resultados experimentales en arcillas presentan este hecho.

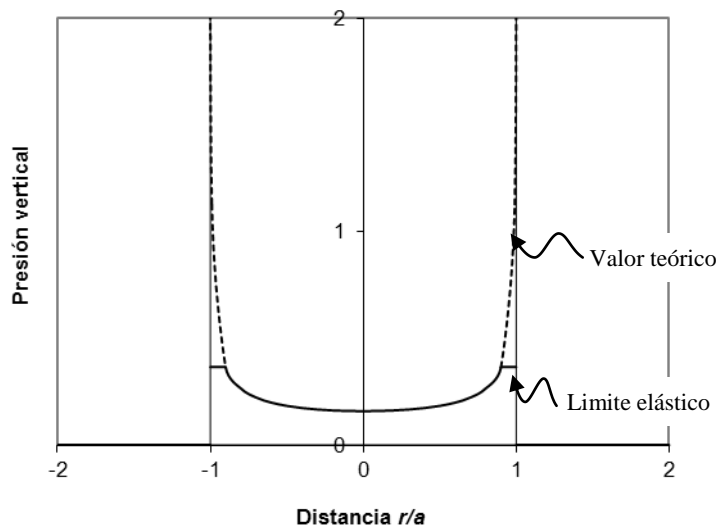
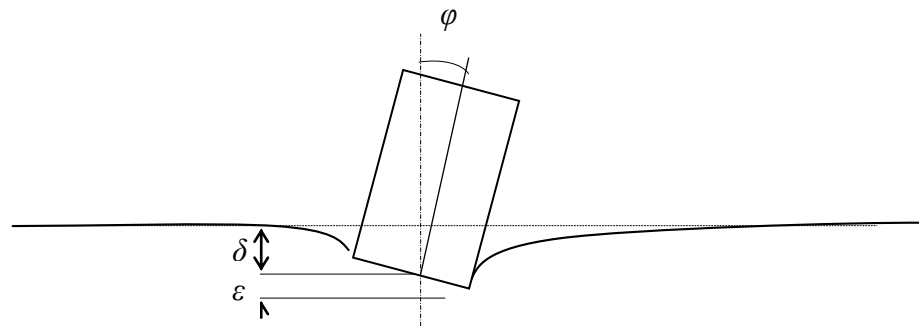


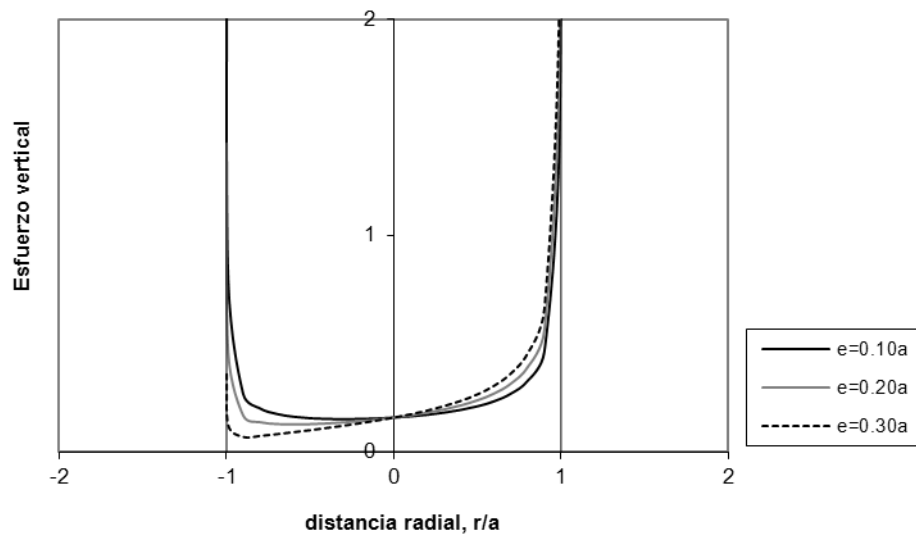
Figura 2.8. Distribución de esfuerzos de contacto para carga simétrica



La suma de esfuerzos verticales, ecuaciones (2.1) y (2.5), indica que las ecuaciones son válidas para  $\varepsilon < \delta/2$ , considerando  $\varepsilon = a \cdot \varphi$  y la figura 2.9, debido a que se ha supuesto sin adherencia la superficie de contacto. La carga concentrada,  $P$ , se aplica con una excentricidad menor de un tercio de radio,  $a$ , para evitar esfuerzos de tensión, figura 2.10.



**Figura 2.9. Desplazamientos por carga excéntrica**



**Figura 2.10. Distribución de presiones de contacto por carga asimétrica**

En general, el diseño de cimentaciones queda controlado por los desplazamientos, así como por las rotaciones permitidos en la estructura, establecidos por el propietario o por el reglamento de la localidad.

- Movimiento vertical medio,
- Inclinación media de la construcción, y
- Deformación diferencial de la propia estructura y sus vecinas.

Al considerar las ecuaciones (2.4) y (2.7), se obtienen las acciones necesarias para producir desplazamientos unitarios en la superficie de contacto, de la masa de suelo. Se obtienen las rigideces a traslación vertical y a rotación que posee el medio portante. Este valor es función de la geometría del área cargada, radio de la base,  $a$ , y de las propiedades mecánicas del suelo  $\nu$  y  $E$ :

$$K_z = \frac{4Ga}{1-\nu} \quad (2.8)$$

$$K_R = \frac{8Ga^3}{3(1-\nu)} \quad (2.9)$$

En estas últimas se ha utilizado la relación que existe con el modulo de cortante  $G$ , mencionado en la sección 2.2.1.

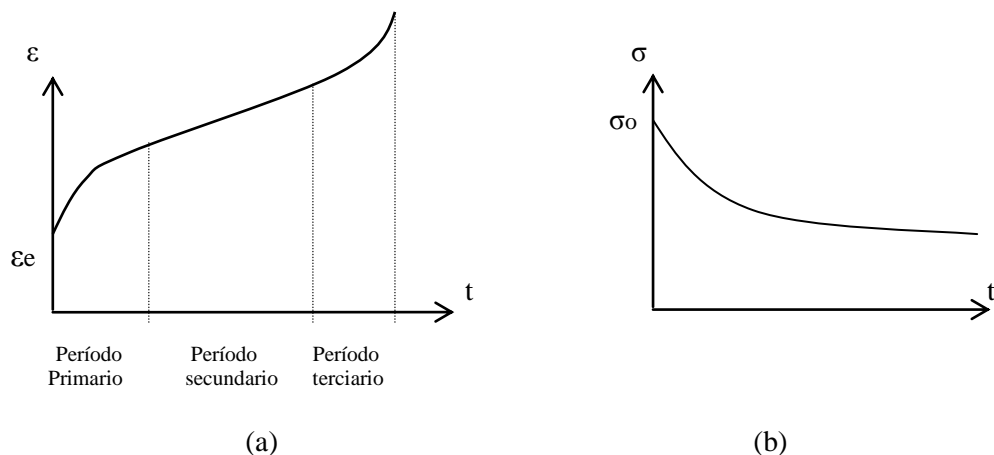
## CAPÍTULO 3

### PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA DEL PROBLEMA

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En general, en mayor o menor medida, los materiales presentan características que se modifican con el tiempo, principalmente su estructura interna. El material común para construcción de cimentaciones, concreto reforzado, posee un módulo de deformación unitaria que aumenta con el tiempo; suelos que exhiben consolidación presentan cambios volumétricos y de forma, también importantes. La interacción suelo estructura es diferente al transcurrir el tiempo.

En relación con los suelos, en donde su comportamiento bajo cargas sostenidas es de interés a largo plazo, deformaciones dependientes del tiempo y relajación de esfuerzos son importantes. Estos efectos dependen de diversos factores: estructura del suelo, historia de cargas, condiciones de drenaje y, por cambios en el tiempo de temperatura, presión, y ambiente bioquímico. No obstante, siguen patrones lógicos y predecibles. En la fig. 3.1a, para la condición de esfuerzo constante, el tercer periodo no siempre se llega a presentar, a menos que los esfuerzos cortantes sean elevados.



**Figura 3.1 Creep y relajacion de esfuerzos. (a) Creep bajo esfuerzo sostenido. (b) Relajación de esfuerzos bajo deformación constante.**

Las deformaciones dependientes del tiempo son resultado de esfuerzos volumétricos y cortantes. Cambios de volumen resultan de la consolidación primaria (la velocidad es controlada por la disipación de agua intersticial en la estructura del suelo) y compresión secundaria (controlada por la viscosidad intergranular del suelo). La deformación por corte es usualmente llamada creep desviador o creep de corte. (Mitchell, 1993).

Resultados de pruebas en materiales reales en los cuales se ha excitado la componente distorsional de volumen han observado que se pueden representar dichos resultados con modelos viscoelásticos simples. En particular, se estudia el arreglo reológico de Burgers, para después analizar el problema considerando características dependientes del tiempo, principalmente en el suelo de cimentación.

Se emplea un procedimiento, para resolver las ecuaciones diferenciales del modelo, mediante el empleo de la transformación de Laplace. En la mecánica de medios continuos se establece una relación entre la solución elástica de un problema y su análoga viscoelástica lineal del mismo problema mediante el principio de correspondencia entre las dos soluciones. En el espacio de la transformación de Laplace, las relaciones constitutivas entre las transformadas de la componente volumétrica y distorsional del modelo viscoelástico, se pueden hacer análogas a expresiones de tipo lineal y establecer así tal principio de correspondencia.

### 3.2. MODELO REOLÓGICO DE BURGERS

La relación constitutiva para Burgers se presenta por la ecuación diferencial:

$$P_2 [\ddot{T}]_+ P_1 [\dot{T}]_+ [T] = q_2 [\ddot{E}]_+ q_1 [\dot{E}]_+ \quad (3.1)$$

Los puntos indican derivación con respecto al tiempo.  $[T]$  y  $[E]$  son el tensor de esfuerzos aplicado al material y el tensor de deformaciones unitarias correspondiente;  $P_2$ ,  $P_1$ ,  $q_2$  y  $q_1$  se conocen como parámetros viscoelásticos. Cuando analizamos el comportamiento de este material bajo esfuerzo constante, la relación constitutiva se simplifica y resulta:

$$q_2 [\ddot{E}] + q_1 [\dot{E}] = [T] \quad (3.2)$$

La solución de la ecuación diferencial se puede escribir:

$$[E] = C_1 + C_2 \left[ 1 - e^{\frac{-q_1 t}{q_2}} \right] + \frac{[T]}{q_1} t \quad (3.3)$$

$$\text{Si } P_2 = \frac{\eta_M \eta_K}{G_M G_K}$$

$$P_1 = \frac{\eta_M}{G_M} + \frac{\eta_K}{G_K} + \frac{\eta_M}{G_K}$$

$$q_2 = \frac{\eta_M \eta_K}{G_K}$$

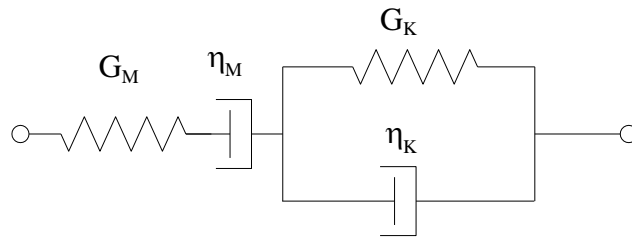
$$q_1 = \eta_M$$

$$\tau_K = \frac{\eta_K}{G_K}$$

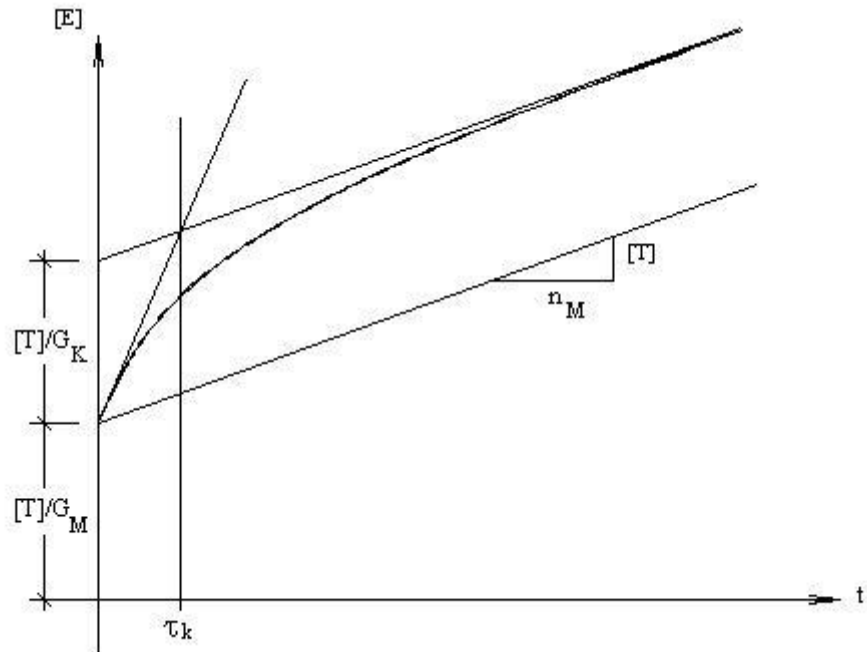
$$[E] = [T] \left( \frac{1}{G_M} + \frac{t}{\eta_M} + \frac{1}{G_K} \left( 1 - e^{\frac{-t}{\tau_K}} \right) \right) \quad (3.4)$$

$G_M$ ,  $G_K$ ,  $\eta_M$ , y  $\eta_K$  son el módulo elástico y el coeficiente de viscosidad en los modelos básicos de Maxwell y Kelvin, figura 3.1. y 3.2. Las dimensiones de los módulos elásticos

son las de esfuerzo,  $[F/L^2]$ ; mientras que los coeficientes viscosos se relacionan con el tiempo,  $[F \cdot T/L^2]$ . A partir de estas dimensiones se puede determinar las de los parámetros viscoelásticos  $P_2, P_1, q_2$  y  $q_1$ , de acuerdo con las relaciones en (3.3) y (3.4).



**Figura 3.1. Modelo de Burgers**



**Figura 3.2. Respuesta de material de Burgers a esfuerzo constante**

### 3.2.1. Solución mediante la transformada de Laplace

Materiales considerados como viscoelásticos, presentan las relaciones constitutivas:

$$\left. \begin{aligned} P_v[T_v] &= Q_v[E_v] \\ P_0[T_0] &= Q_0[E_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$P_v$ ,  $P_0$ ,  $Q_v$  y  $Q_0$  son operadores diferenciales lineales del tiempo. Al aplicar la transformación de Laplace a ambos miembros de (3.5):

$$\left. \begin{aligned} P_v[\bar{T}_v] &= Q_v[\bar{E}_v] \\ P_0[\bar{T}_0] &= Q_0[\bar{E}_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$P_v$ ,  $P_0$ ,  $Q_v$  y  $Q_0$  son expresiones algebraicas en “s” e independientes del tiempo. Esto permite hacer una analogía entre las soluciones elásticas y la transformada de las soluciones viscoelásticas.

Al aceptar que, en un material elástico lineal:

$$\left. \begin{aligned} [T_v] &= \frac{E}{1-2\nu} [E_v] \\ [T_0] &= \frac{E}{1+\nu} [E_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

De las expresiones (3.6):

$$[\bar{T}_v] = \frac{Q_v}{P_v} [\bar{E}_v]$$

$$[\bar{T}_0] = \frac{Q_0}{P_0} [\bar{E}_0]$$

Podemos hacer la siguiente comparación con (3.7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_V}{P_V} &= \frac{E^*}{1-2\nu^*} \\ \frac{Q_0}{P_0} &= \frac{E^*}{1+\nu^*} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$E^*$  y  $\nu^*$  son operadores algebraicos en “s”. Al dividir la primera entre la segunda de las ecuaciones (3.8):

$$\frac{Q_V P_0}{Q_0 P_V} = \frac{1+\nu^*}{1-2\nu^*}$$

y resolver para  $\nu^*$  y después por sustitución para  $E^*$ , se tiene que para que la analogía sea válida:


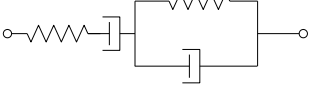
$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{3Q_0 Q_V}{2Q_V P_0 + Q_0 P_V} \\ \nu^* &= \frac{Q_V P_0 - Q_0 P_V}{2Q_V P_0 + Q_0 P_V} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Así, se puede recurrir al siguiente principio de correspondencia: Si se conoce la solución elástica de algún problema específico, basta sustituir en esa solución a las variables cinemáticas y estáticas por sus valores transformados y a  $\nu$  y  $E$  por  $\nu^*$  y  $E^*$  para obtener la transformada de Laplace del problema viscoelástico correspondiente. Al antitransformar, se obtiene la solución del problema en el dominio del tiempo.



### 3.3. MODELO DE BURGERS MODIFICADO

El resultado de pruebas en materiales reales, ha mostrado que Burgers puede representar el resultado de pruebas en las cuales se excita la componente distorsional de deformaciones, mientras que la componente volumétrica se representa suficientemente utilizando un resorte de Hooke. Estos resultados han permitido generar el modelo de *Burgers modificado* para representar el comportamiento de materiales reales en niveles intermedios de esfuerzo,  $0.15[T]_{RUPTURA} \leq [T] \leq 0.50[T]_{RUPTURA}$ .

| Componente volumétrica  | Componente distorsional  |
|---|--|
|  |  |
| Rel. constitutiva: $P_V[T_V]=Q_V[E_V]$  | $P_0[T_0]=Q_0[E_0]$  |
| Ec. Diferencial: $[T_V]=q_0[E_V]$   | $P_2[\ddot{T}] + P_1[\dot{T}] + [T] = q_2[\ddot{E}] + q_1[\dot{E}]$                  |

Para aplicar el principio de correspondencia, se debe identificar a los operadores diferenciales que aparecen en las relaciones constitutivas:

$$P_V=1$$

$$Q_V=q_0$$

$$P_0 = P_2 \frac{d^2}{dt^2} (\dots) + P_1 \frac{d}{dt} (\dots) + 1(\dots)$$

$$Q_0 = q_2 \frac{d^2}{dt^2} (\dots) + q_1 \frac{d}{dt} (\dots)$$

Al tomar transformadas de Laplace:

$$P_V=1$$

$$Q_V=q_0$$

$$P_0 = p_2 S^2 + p_1 S + 1$$

$$Q_0 = q_2 S^2 + q_1 S$$

Si las condiciones iniciales fueran todas nulas, de las ec. (3.9):

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{3(q_2 s^2 + q_1 s)q_0}{2q_0(p_2 s^2 + p_1 s + 1) + (q_2 s^2 + q_1 s)(1)} \\ v^* &= \frac{q_0(p_2 s^2 + p_1 s + 1) - (q_2 s^2 + q_1 s)}{2q_0(p_2 s^2 + p_1 s + 1) + (q_2 s^2 + q_1 s)} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Estos valores de  $E^*$  y  $v^*$  se sustituyen en la solución elástica, para aplicar el principio de correspondencia y calcular la solución viscoelástica del problema cuando el material es representado por *Burgers modificado*.

#### **3.4. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA DEL PROBLEMA DEL CILINDRO RÍGIDO SOBRE UN SEMIESPACIO VISCOELÁSTICO, CUANDO EL MATERIAL SE REPRESENTA POR EL MODELO DE BURGERS MODIFICADO**

Al tomar la expresión para el desplazamiento vertical de la superficie de contacto producido por carga vertical concéntrica,  $P$ , de la ecuación (2.2) se tiene:

$$\delta = \frac{P}{2a} \frac{(1-\nu^2)}{E} \quad (3.11)$$

Al sustituir las variables cinemáticas y estáticas por sus valores transformados y,  $E$  y  $\nu$  por  $E^*$  y  $\nu^*$  dados en (3.10) se obtiene la transformada de Laplace de la solución viscoelástica:

$$L\{\delta\} = \frac{P}{2a} \frac{(1-\nu^{*2})}{E^*}$$

$$L\{\delta\} = \frac{P}{2a} \left\{ \frac{(2q_0(p_2s^2 + p_1s + 1) + (q_2s^2 + q_1s))^2 - (q_0(p_2s^2 + p_1s + 1) - (q_2s^2 + q_1s))^2}{s(2q_0(p_2s^2 + p_1s + 1) + (q_2s^2 + q_1s))(3q_0(q_2s^2 + q_1s))} \right\} \quad (3.12)$$

Al antitransformar (3.12) se obtiene  $\delta(t)$ , la componente vertical del desplazamiento en función del tiempo.

$$\delta(t) = \frac{P}{2a} f(t) \quad (3.13)$$

En el anexo 1 se presenta la solución dada por un programa de computadora. Donde  $f(t)$ , es una función del tiempo con la siguiente forma:

$$f(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{C_4t} + C_5e^{C_6t} \text{sen}C_7t + C_8e^{C_9t} \text{cos}C_{10}t \quad (3.14)$$

Las constantes dentro de  $f(t)$ ,  $C_1$  a  $C_{10}$ , en función de los parámetros viscoelásticos toman los siguientes valores:

$$C_1 = \frac{3}{4q_0} + \frac{p_1}{2q_1} - \frac{q_2}{2q_1^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2q_1}$$

$$C_3 = \frac{q_2}{2q_1^2} + \frac{p_2}{2q_2} - \frac{p_1}{2q_1}$$

$$C_4 = -\frac{q_1}{q_2}$$

$$C_5 = \frac{\left(\frac{3q_2^2 p_1}{2} - \frac{3q_2^2 q_1}{4q_0} - 6q_0 q_1 p_2^2 + 3q_0 p_2 q_2 p_1 - \frac{9p_2 q_2 q_1}{2}\right)}{(16q_0^2 p_2 + 8q_2 q_0 - q_1^2 - 4q_1 q_0 p_1 - 4q_0^2 p_1^2)(2q_0 p_2 + q_2)} \sqrt{\frac{16q_0^2 p_2 + 8q_2 q_0 - q_1^2 - 4q_1 q_0 p_1 - 4q_0^2 p_1^2}{4q_0^2 p_2^2 + 4q_2 q_0 p_2 + q_2^2}}$$

$$C_6 = -\frac{(q_1 + 2q_0 p_1)}{2(2q_0 p_2 + q_2)}$$

$$C_7 = \frac{\sqrt{\frac{16q_0^2 p_2 + 8q_2 q_0 - q_1^2 - 4q_1 q_0 p_1 - 4q_0^2 p_1^2}{(2q_0 p_2 + q_2)^2}}}{2}$$

$$C_8 = \frac{3q_0 p_1^2 q_2 - 6q_2^2 + 3q_1 q_2 p_1 + \frac{3q_1^2 q_2}{4q_0} - 12q_0 q_2 p_2}{(16q_0^2 p_2 + 8q_2 q_0 - q_1^2 - 4q_1 q_0 p_1 - 4q_0^2 p_1^2)(2q_0 p_2 + q_2)}$$

$$C_9 = C_6 = -\frac{(q_1 + 2q_0 p_1)}{2(2q_0 p_2 + q_2)}$$

$$C_{10} = C_7 = \frac{\sqrt{\frac{16q_0^2 p_2 + 8q_2 q_0 - q_1^2 - 4q_1 q_0 p_1 - 4q_0^2 p_1^2}{(2q_0 p_2 + q_2)^2}}}{2}$$

Para ilustrar este resultado, se consideran los siguientes valores y se supone que las condiciones de temperatura no cambian. Estos son valores representativos de algunos suelos arcillosos (Rodríguez, 1971).

Temperatura = 18°

Módulo elástico Maxwelliano,  $G_M = 7.621 \text{ kg/cm}^2$

Módulo elástico Kelviniano,  $G_K = 12.176 \text{ kg/cm}^2$

Coefficiente de viscosidad maxwelliano,  $\eta_M = 4.5477 \times 10^7 \text{ kg}\cdot\text{seg/cm}^2$

Coefficiente de viscosidad Kelviniano,  $\eta_K = 0.3945 \times 10^5 \text{ kg}\cdot\text{seg/cm}^2$

Por tanto, los parámetros viscoelásticos del modelo son:

$$p_2 = 19334022255 \text{ seg}^2$$

$$p_1 = 9705537.54 \text{ seg}$$

$$q_2 = 1.47345 \times 10^{11} \text{ kg}\cdot\text{seg/cm}^2$$

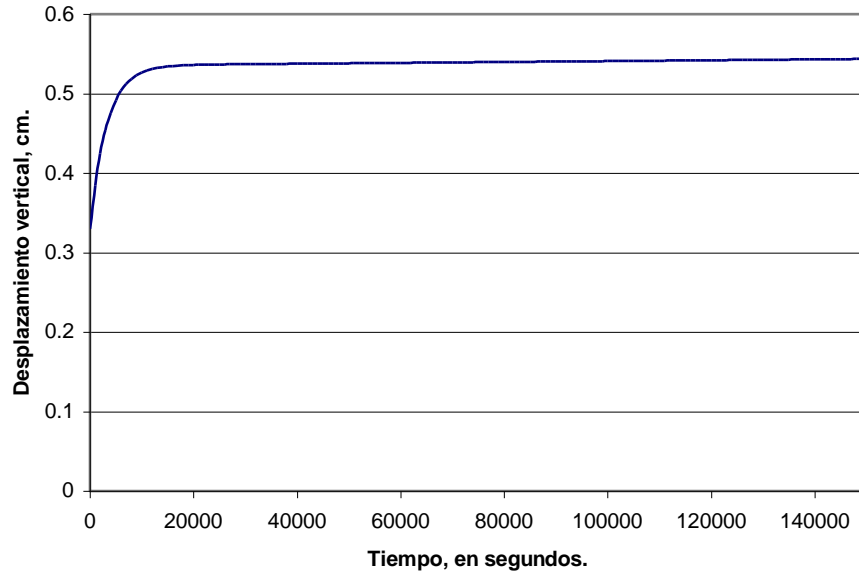
$$q_1 = 4.5477 \times 10^7 \text{ kg}\cdot\text{seg/cm}^2$$

$$\tau_K = 3239.98 \text{ seg.}$$

Además, si se considera el módulo de elasticidad,  $E = 188 \text{ kg/cm}^2$  y  $\nu = 0.45$ , se tiene el parámetro que representa la componente volumétrica de deformación con un resorte de Hooke, en Burgers modificado:

$$q_0 = \frac{T_V}{E_V} = \frac{E}{1 - 2\nu} = 1880 \text{ kg/cm}^2 \quad (3.15)$$

Con estos datos, al aplicar la ec. (3.13) aparecen los desplazamientos que se ilustran en la figura 3.3. En ésta figura se representa la evolución, durante los primeros 2 días, del desplazamiento vertical debajo de un cilindro de radio 100cm *cargado concéntricamente* con 1000kg de peso.



**Figura 3.3. Desplazamiento vertical del cilindro bajo carga simétrica P**

De manera semejante se pueden obtener expresiones para otras componentes de desplazamiento o esfuerzo. Así, para el giro debido a momento de volteo, ecuación (2.7):

$$\phi = \frac{3M}{4a^3} \frac{(1-\nu^2)}{E}$$

Se reemplaza  $E$  y  $\nu$  por  $E^*$  y  $\nu^*$  para obtener:

$$L\{\phi\} = \frac{3M}{4a^3} \frac{(1-\nu^{*2})}{E^*}$$

El primer cociente de esta ecuación es una constante. Al antitransformar se obtiene la constante que multiplica a la antitransformada del segundo cociente.  $f(t)$  es la misma función del tiempo que en la ec. (3.13). La rotación en la base  $\phi(t)$ , cuando al cilindro se aplica un momento de volteo constante,  $M$ , es:

$$\phi(t) = \frac{3M}{4a^3} f(t) \tag{3.16}$$

## CAPÍTULO 4

### OBTENCIÓN DE CONSTANTES Y PARÁMETROS VISCOELÁSTICOS DE ARCILLAS DEL VALLE DE MÉXICO, EN UN SITIO ESPECÍFICO

#### 4.1. INTRODUCCION

Para identificar a las constantes  $G_M$ ,  $G_K$ ,  $\eta_M$ , y  $\eta_K$  o a los parámetros viscoelásticos, es necesario realizar dos tipos de pruebas:

- a) con excitación de la componente volumétrica
- b) con excitación de la componente distorsional

Se recomienda realizar pruebas en cámaras triaxiales a presión constante o pruebas en torsión para excitar la componente distorsional.

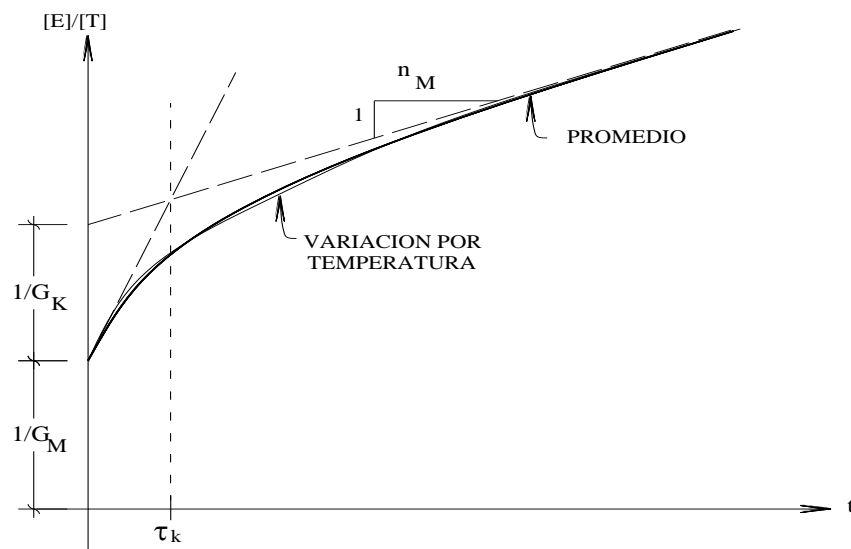
Pruebas controladas (Rodríguez, 1971) en areniscas, tobas, concreto simple, madera, concreto reforzado, mostraron que es posible obtener constantes viscoelásticas representativas, lo que nos permite representar a estos materiales con el modelo de Burgers, mientras los niveles de esfuerzo se mantenga por debajo del 50% del esfuerzo de ruptura.

#### 4.2. PROCEDIMIENTO PARA OBTENER DE RESULTADOS DE PRUEBAS EXPERIMENTALES LOS PARAMETROS REPRESENTATIVOS

Para obtener de resultados de pruebas experimentales a los parámetros representativos:

- Se selecciona un espécimen del material que interesa y se coloca en un dispositivo mecánico que permita mantener esfuerzo constante en la probeta.

- Se coloca dentro de un horno a temperatura constante (se intentará que sea la temperatura en que se hallaría el material naturalmente).
- De la curva promedio de deformación específica, figura 4.1, trazada con los datos registrados, se pueden conocer las constantes  $G_M$ ,  $G_K$ ,  $\eta_M$ , y  $\eta_K$  que se relacionan con los parámetros del modelo. En la gráfica trazada, las dimensiones de la ordenada son del recíproco de un esfuerzo  $[L^2/F]$  y, las de la abscisa son de tiempo.



**Figura 4.1. Obtención de constantes y parámetros para el modelo de Burgers**

Los parámetros viscoelásticos deben guardar la relación termodinámica:

$$p_1 q_1 > q_2$$

$$p_1^2 > 4p_2$$

$$p_1 q_1 q_2 > p_2 q_1^2 + q_2^2$$

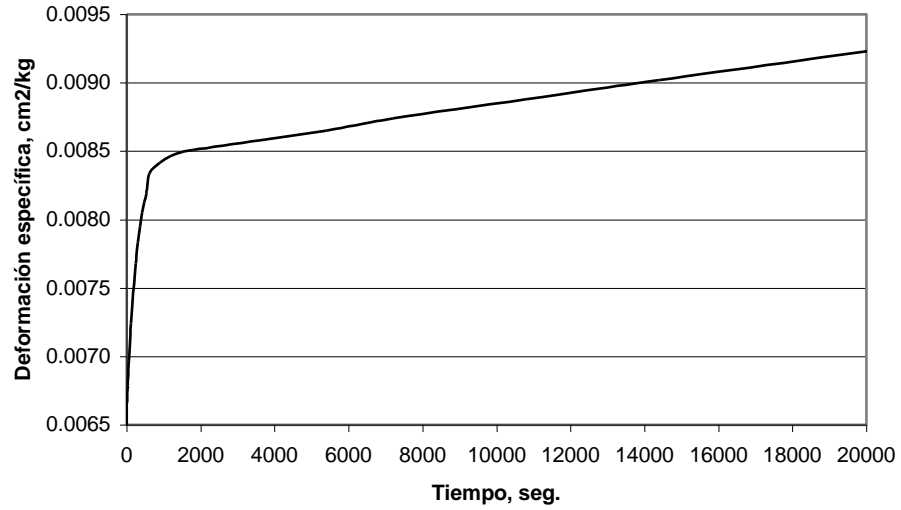


Y pertenecen a la relación constitutiva que representa la componente distorsional de deformación, modelada con Burgers. Mientras que el parámetro relacionado con el modelo de Hooke para la componente volumétrica,  $q_0$ , se obtiene de otro ensaye que nos proporcione el módulo elástico y la relación de Poison del material, según la relación (3.15).

### 4.3. ARCILLAS DEL VALLE DE MEXICO

También es posible con la ayuda de programas y asignando un nivel de error en la aproximación, obtener los valores apropiados para el modelo a partir de los datos registrados en una prueba física. Mediante ciclos de ajuste el programa calcula la curva de deformaciones específicas,  $[E]/[T]$ , y compara sus resultados con los de la prueba para definir el nivel de error.

Se consideran los resultados de una prueba de consolidación anisotrópica, efectuada en material arcilloso del valle de México. Los detalles relativos a ésta muestra extraída de la zona del lago (Parque Ramón López Velarde, Delegación Benito Juárez), como demás pruebas que se le realizaron, equipo utilizado y sobre el procedimiento de la pruebas se hallan en la tesis de maestría titulada *Reproducción de vibraciones en arcillas mediante modelos viscoelásticos* (García, 1995). La figura 4.2 presenta la curva promedio de los datos registrados para una prueba de consolidación anisotrópica en cámara triaxial, bajo esfuerzo vertical total constante de  $0.20\text{kg/cm}^2$  (se indica que en este ensaye se retiro la presión confinante de la cámara). La deformación especifica para este caso, se calcula como la relación de deformación unitaria a esfuerzo axial,  $\varepsilon/\sigma$ .



**Figura 4.2. Obtención de constantes y parámetros**

En un programa como el presentado en el anexo 2, ingresan los vectores de deformaciones y los correspondientes de tiempo:

$$\text{Tiempo} = \begin{Bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix}; \quad \text{y Deformaciones} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix}$$

De esta manera se obtiene un conjunto de valores para los parámetros viscoelásticos, figura 4.3:

$$P_1 = 0.213153 \times 10^6 \text{ seg}$$

$$P_2 = 0.519785 \times 10^8 \text{ seg}^2$$

$$q_1 = 0.250784 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{seg} / \text{cm}^2$$

$$q_2 = 0.799669 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{seg} / \text{cm}^2$$

```

MS Viscoelasticity
Auto
1.000000 0.995475 0.995600 0.995753 1.021741 1.028772
1.017983 0.995095 0.994420 0.994229 0.994614 0.996250
0.995973 0.996005 0.996373 0.995957 0.993101 0.995578
0.995391
VALIOR MEDIO=0.99991083 VARIANZA=0.00010334 DESVIACIONESTANDAR =0.01016554
END CICLO 7 P1= 0.21315313E+06, P2= 0.51978476E+08 Q1= 0.25078416E+08,Q2= 0.79
966879E+10
0.53455429E+13 0.79966879E+10 0.11079375E+14 0.20791390E+09 0.4274663
6E+23 0.32754610E+23
P1*Q1 MAYOR QUE Q2
+ AY
P1**2 MAYOR QUE 4.0 * P2
+ AY
P1*Q1*Q2 MAYOR QUE P2* Q1**2 + Q2**2
+ AY
FIN DEL PROBLEMA

```

**Figura 4.3. Parámetros viscoelásticos obtenidos con programa de computo.**

## CAPÍTULO 5

### APLICACIÓN A LA SOLUCIÓN VISCOELÁSTICA PARA CARGA CONSTANTE

#### 5.1. APLICACIÓN PARA CARGA CONSTANTE

Bajo carga constante, y al considerar características mecánicas de arcilla compresible como la del valle de México, se puede hacer la siguiente estimación para la distribución de desplazamientos en la superficie libre. Se ha calculado el desplazamiento sobre un área circular de radio 100cm, una carga de 1000kg y los parámetros viscoelásticos calculados en el capítulo anterior. También se considera un módulo elástico,  $E=188\text{kg/cm}^2$  y una relación de Poisson,  $\nu=0.45$  para obtener  $q_0$ . Por tanto, en la ecuación (3.13) para calcular el desplazamiento vertical debido a carga simétrica constante:

$$\delta(t) = \frac{P}{2a} f(t)$$

Sustituimos:

$$P_1 = 0.213153 \times 10^6 \text{ seg}$$

$$P_2 = 0.519785 \times 10^8 \text{ seg}^2$$

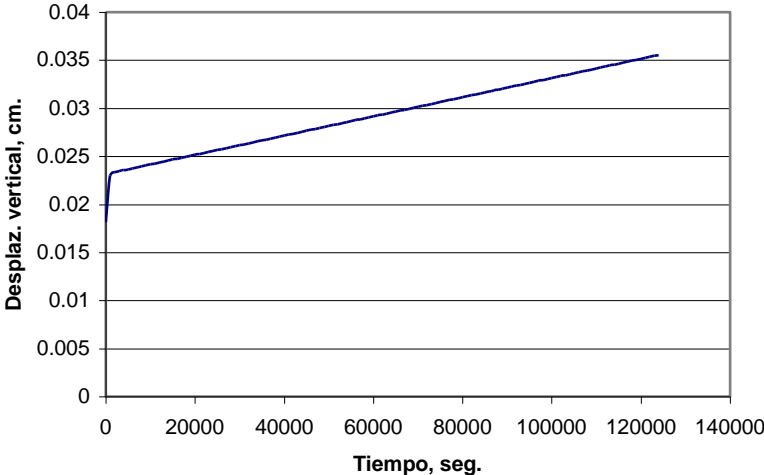
$$q_1 = 0.250784 \times 10^8 \text{ kg}\cdot\text{seg}/\text{cm}^2$$

$$q_2 = 0.799669 \times 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{seg}/\text{cm}^2 \text{ y,}$$

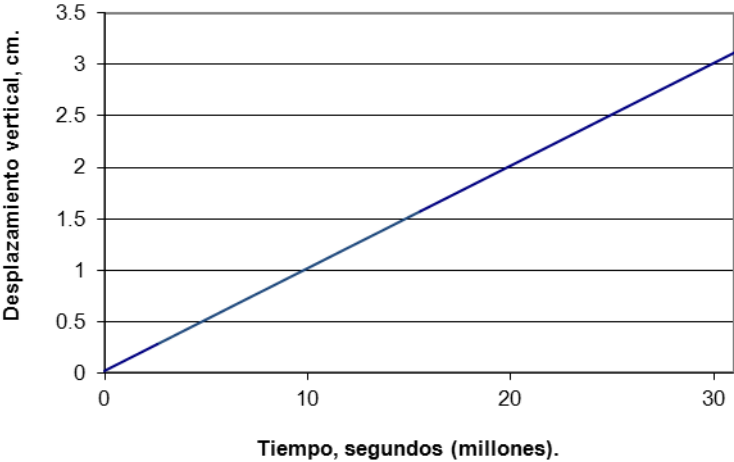
$$q_0 = \frac{E}{1-2\nu} = 1880 \text{ kg}/\text{cm}^2$$

Así, al inicio de la carga se presenta el desplazamiento instantáneo de la parte elástica Maxwelliana. La variación es alta hasta que se alcanza  $\tau_K$ , y después tiende asintóticamente a una recta que depende de la constante viscosa  $\eta_M$ . La figura 5.1 ilustra el desplazamiento vertical al centro del cilindro durante los dos primeros días y, la figura 5.2

ilustra su tendencia lineal para un año de tiempo. Para fines prácticos de ingeniería se supone que el desplazamiento crece indefinidamente, (aunque algunos autores opinan que los suelos reales llegan a un valor estable (Mitchell, 1993)).

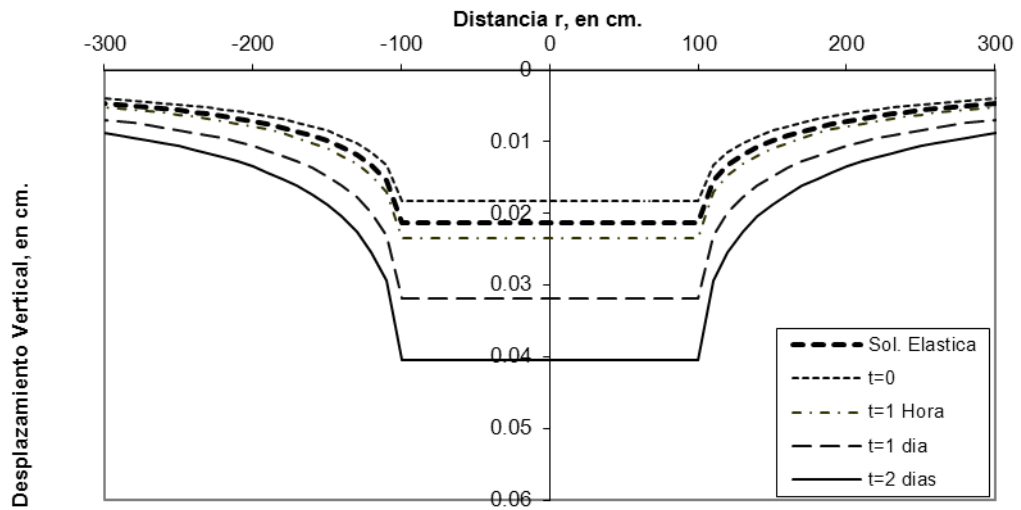


**Figura 5.1. Desplazamiento vertical al centro del cilindro debido a carga simétrica**



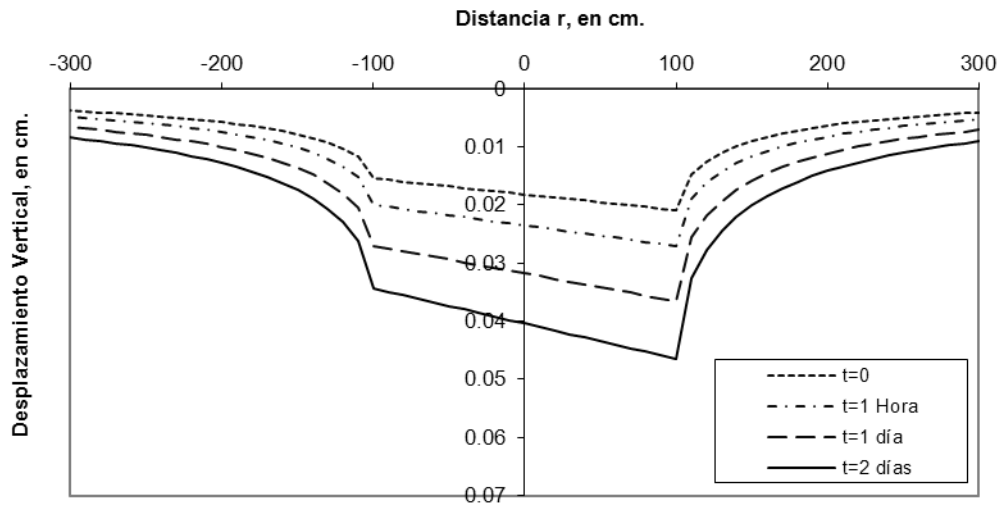
**Figura 5.2. Desplazamiento vertical al centro del cilindro debido a carga simétrica**

La figura 5.3, del perfil desplazado del medio viscoelástico para algunos tiempos particulares, se compara con la solución que considera al suelo como material elástico. Se ilustra que la representación viscoelástica lineal al iniciar la carga, en tiempo cero, es poco menor que la representación con un comportamiento elástico. Y que al cabo de la primera hora, para este ejemplo, el desplazamiento ha aumentado rápidamente. Al transcurrir el tiempo la solución viscoelástica del problema deja ver que el desplazamiento de la superficie cargada se continúa indefinidamente.



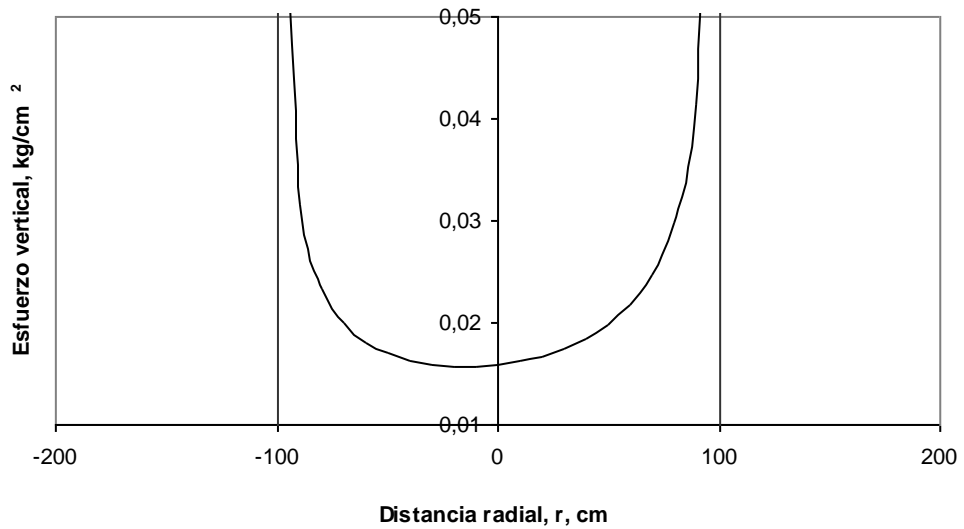
**Figura 5.3. Desplazamientos en la superficie de contacto debido a carga simétrica**

Ahora, el problema inicial requiere conocer el comportamiento por la aplicación de una carga excéntrica. Se superponen los efectos de la aplicación de una carga simétrica con los que produce un momento de volteo, ecuaciones (3.13) y (3.16). Considérese también que, el desplazamiento vertical debido al giro de volteo es  $\varepsilon=r\cdot\varphi$  ( $r\leq a$ ). El principio de superposición es aplicable en materiales que presentan viscoelasticidad lineal. En la Figura 5.4 se ha considerado una excentricidad en la aplicación de la carga, de  $0.05a$ .



**Figura 5.4. Desplazamientos en la superficie libre debidos a carga asimétrica**

La distribución de presiones de contacto se ilustra en la figura 5.5.



**Figura 5.5. Distribución de esfuerzos de contacto por carga asimétrica**

## COMENTARIOS FINALES

1. En presencia de suelos compresibles siempre es necesario evaluar el comportamiento de la cimentación (desplazamientos y reacciones) no solo a corto plazo, también a largo plazo.
2. Los desplazamientos dependientes del tiempo son debidos tanto a las deformaciones volumétricas como de las distorsionales, mismas que se utilizan en los modelos reológicos para su representación.
3. Se puede observar que las propiedades mecánicas de los materiales son variables en el tiempo. Y se pueden representar mediante modelos viscoelásticos lineales en intervalos de esfuerzos inferiores al 50% del esfuerzo de ruptura.
4. El modelo utilizado en este trabajo, reproduce eficientemente la respuesta volumétrica instantánea del material y describe su comportamiento viscoso para este tipo de suelos arcillosos. Al respecto se puede afirmar que las deformaciones continúan indefinidamente.
5. Una ventaja que se puede aprovechar en lo que respecta a condiciones diferentes de carga es que la teoría viscoelástica lineal permite la superposición de causas y efectos.
6. La evidencia física registrada en una construcción se asemeja a la obtenida mediante viscoelasticidad lineal.



## Anexo 1

Solución de la transformada inversa de Laplace con Matlab (Release 12), para obtener la función dependiente del tiempo  $f(t)$  en términos de constantes viscoelásticas.

```
» syms s p1 p2 q0 q1 q2
```

```
» ilaplace(((2*q0*p2*(s^2+p1*s/p2+1/p2)+q2*(s^2+q1*s/q2))^2-  
(q0*p2*(s^2+p1*s/p2+1/p2)-  
q2*(s^2+q1*s/q2))^2)/(s*(2*q0*p2*(s^2+p1*s/p2+1/p2)+q2*(s^2+q1*s/q2))^3*q0*q2*(s^  
2+q1*s/q2)))
```

ans:

```
3/4/q0+1/2/q1*p1-1/2/q1^2*q2+1/2/q1*t+3*q0*exp(-  
1/2*(q1+2*q0*p1)/(2*q0*p2+q2)*t)/(16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)*p1^2*q2*cos(1/2*((16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-  
4*q1*q0*p1-4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)^2)^(1/2)*t)+3/2*exp(-  
1/2*(q1+2*q0*p1)/(2*q0*p2+q2)*t)/(16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)*((16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(4*q0^2*p2^2+4*q2*q0*p2+q2^2))^(1/2)*q2^2*p1*sin(1/2*((16*q0^2*p2  
+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)^2)^(1/2)*t)-6*exp(-  
1/2*(q1+2*q0*p1)/(2*q0*p2+q2)*t)/(16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)*q2^2*cos(1/2*((16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)^2)^(1/2)*t)+3*exp(-  
1/2*(q1+2*q0*p1)/(2*q0*p2+q2)*t)/(16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)*q1*q2*p1*cos(1/2*((16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-  
4*q1*q0*p1-4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)^2)^(1/2)*t)-3/4/q0*exp(-  
1/2*(q1+2*q0*p1)/(2*q0*p2+q2)*t)/(16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-  
4*q0^2*p1^2)/(2*q0*p2+q2)*((16*q0^2*p2+8*q2*q0-q1^2-4*q1*q0*p1-
```

$$\begin{aligned}
& 4*q_0^2*p_1^2)/(4*q_0^2*p_2^2+4*q_2*q_0*p_2+q_2^2))^{(1/2)}*q_2^2*q_1*\sin(1/2*((16*q_0^2*p_2 \\
& +8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1-4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)+3/4/q_0*\exp(- \\
& 1/2*(q_1+2*q_0*p_1)/(2*q_0*p_2+q_2)*t)/(16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)*q_1^2*q_2*\cos(1/2*((16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2- \\
& 4*q_1*q_0*p_1-4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)-6*q_0*\exp(- \\
& 1/2*(q_1+2*q_0*p_1)/(2*q_0*p_2+q_2)*t)/(16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)*((16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(4*q_0^2*p_2^2+4*q_2*q_0*p_2+q_2^2))^{(1/2)}*q_1*p_2^2*\sin(1/2*((16*q_0^2*p_2 \\
& +8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1-4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)-12*q_0*\exp(- \\
& 1/2*(q_1+2*q_0*p_1)/(2*q_0*p_2+q_2)*t)/(16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)*q_2*p_2*\cos(1/2*((16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)+3*q_0*\exp(- \\
& 1/2*(q_1+2*q_0*p_1)/(2*q_0*p_2+q_2)*t)/(16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)*p_2*((16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(4*q_0^2*p_2^2+4*q_2*q_0*p_2+q_2^2))^{(1/2)}*q_2*p_1*\sin(1/2*((16*q_0^2*p_2+8 \\
& *q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1-4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)-9/2*\exp(- \\
& 1/2*(q_1+2*q_0*p_1)/(2*q_0*p_2+q_2)*t)/(16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)*p_2*((16*q_0^2*p_2+8*q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1- \\
& 4*q_0^2*p_1^2)/(4*q_0^2*p_2^2+4*q_2*q_0*p_2+q_2^2))^{(1/2)}*q_2*q_1*\sin(1/2*((16*q_0^2*p_2+8 \\
& *q_2*q_0-q_1^2-4*q_1*q_0*p_1-4*q_0^2*p_1^2)/(2*q_0*p_2+q_2)^2)^{(1/2)}*t)+1/2/q_1^2*\exp(- \\
& q_1*t/q_2)*q_2+1/2*\exp(-q_1*t/q_2)/q_2*p_2-1/2/q_1*\exp(-q_1*t/q_2)*p_1
\end{aligned}$$

## Anexo 2

### PROGRAMA EN FORTRAN PARA EL CÁLCULO DE CONSTANTES VISCOELÁSTICAS

```

C
C *****
C *
C *
C *
C *
C *
C *
C *****
C
C *****
C
C
C DIMENSION NOM(5),NFECHA(27)
C DIMENSION T(50), X(50), XC(50), R(50)
100 FORMAT (1H )
101 FORMAT ('1', ' NP=', I3, ' CALCULO DE CONSTANTES DE MUESTRA *', 5A1, '
1 *', 27A1, '//, ' ERROR=', F12.8, ' NUMERO MAXIMO DE CICLOS=', I3, '//)
102 FORMAT (I3, 5A1, F12.8, I3, 27A1)
103 FORMAT (6F10.6)
104 FORMAT (/, 6(3X, F10.0))
105 FORMAT (' GM=', E15.8, ' GK=', E15.8, ' EM=', E15.8, ' EK=', E15.8)
106 FORMAT (/, ' CICLO ', I3, ' TK=', E15.8)
107 FORMAT (/, ' FIN DEL PROBLEMA ')
108 FORMAT (/, ' COCIENTES X SOBRE XC ')
109 FORMAT (' VALIOR MEDIO=', F10.8, ' VARIANZA=', F10.8, ' DESVIACION
1 ESTANDAR =', F10.8)
110 FORMAT ('END CICLO ', I3, ' P1='E15.8', ' P2=', E15.8, ' Q1=', E15.8, '
1, Q2=', E15.8, /)
111 FORMAT (/, 24H P1*Q1 MAYOR QUE Q2)
112 FORMAT (/, 31H P1**2 MAYOR QUE 4.0 * P2)
113 FORMAT (/, 40H P1*Q1*Q2 MAYOR QUE P2* Q1**2 + Q2**2)
114 FORMAT(14H+ AY)
115 FORMAT (55H+ EN ' ' <<<***>>> ' '
1)
116 FORMAT (/, 6(3X, F10.6))
117 FORMAT (/6(2X, E15.8))
118 FORMAT (' EN LA EXPRECION DE TK APARECE EL LOGARITMO DE UN NUMERO
1NEGATIVO', E15.8)
129 FORMAT (6F12.0)
222 FORMAT (I5)
1 READ ( 5, 102, END= 13 )NP, NOM, ERROR, MAXIMO, NFECHA
IF(NP) 13, 13, 12
12 PRINT 101, NP, NOM, NFECHA, ERROR, MAXIMO

READ(5, 129)(T(I), I=1, NP)
PRINT 104, (T(I), I=1, NP)
READ (5, 103)(X(I), I=1, NP)
PRINT 116, (X(I), I=1, NP)
DO 201 I=1, NP
201 X(I)=X(I)*1.0E-06
130 GM=1.0/X(1)
F1=(T(4)-T(2))/(T(3)-T(2))
AX=(X(2)-X(1))/(T(2)-T(1))
BX=(X(3)-X(2))/(T(3)-T(2))
CX=(X(4)-X(3))/(T(4)-T(3))

```

```

      TK=(T(4)-T(2))/(T(3)-T(1))
      TK=TK*(AX-BX)/(BX-CX)
      IF(TK) 14,14,15
14  PRINT 118,TK
      GO TO 1
15  TK=T(3)/(2.0*ALOG(TK))
      ICLO=0
      2  ICLO=ICLO+1
          PRINT 106, ICLO,TK
          ET1=EXP(-T(2)/TK)
          ET2=EXP(-T(3)/TK)
          ET3=EXP(-T(4)/TK)
          GK=(F1*ET2-ET3-(F1-1.0)*ET1)/(X(4)-X(2)-F1*(X(3)-X(2)))
          EM=(T(4)-T(2))/(X(4)-X(2)+(ET3-ET1)/GK)
          EK=TK*GK
          PRINT 105,GM,GK, EM, EK
          AX=0.
          BX=0.
          DO 3 I=1,NP
              XC(I)=1.0/GM+T(I)/EM+(1.0-EXP(-T(1)/TK))/GK
              R(I)=X(I)/XC(I)
          AX=AX+R(I)
      3  BX=BX+(R(I)-1.0)**2
          AX=AX/FLOAT(NP)
          BX=BX/FLOAT(NP)
          CX=SQRT(BX)
          PRINT 108
          PRINT 116,(R(I),I=1,NP)
          PRINT 109,AX,BX,CX
          IF (ABS(AX-1.)-ERROR) 6,5,5
      5  TK=TK/AX
          IF (ICLO-MAXIMO) 2,6,6
      6  P1=EM/GM+EM/GK+EK/GK
          P2=EM*EK/(GK*GM)
          Q1=EM
          Q2=EM*EK/GK
          PRINT 100
          PRINT 110,ICLO,P1,P2,Q1,Q2
          P1Q1=P1*Q1
          P12=P1*P2
          P24=P2*4
          P1Q1Q2=P1*Q1*Q2
          P2Q122=P2*Q1*Q1+Q2*Q2
          PRINT 117,P1Q1,Q2,P12,P24,P1Q1Q2,P2Q122
          PRINT 111
          IF(P1Q1-Q2) 7,7,801
      7  PRINT 115
          GO TO 8
801  PRINT 114
      8  PRINT 112
          IF(P12-P24) 9,9,1001
      9  PRINT 115
          GO TO 10
1001 PRINT 114
      10 PRINT 113
          IF (P1Q1Q2-P2Q122) 11,11,1201

```

```
11 PRINT 115
   GO TO 4
1201 PRINT 114
    4 PRINT 107
      GO TO 1
13 CALL EXIT
   END
```

## REFERENCIAS

- García Legl, Hildrun Francisca, (1995), “Reproducción de vibraciones en arcillas mediante modelos viscoelásticos”, Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM. Pág. 109-134.
- Marsal, R. J. y Mazari, Marcos, (1969), “El subsuelo de la ciudad de México”, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, pp. 170-205, vol. 2.
- Mitchell, James K., (1993), “Fundamentals of soil behavior”, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., pp. 383.
- Muki R., (1995), “On the Sneddon’s method by Hankel transforms for the three dimensional problem of elasticity theory”, Proceedings of the 5th Japan National Congress for App. Mech., 1955 I-25, pp. 119-124.
- Poulos, H. G., and Davis, E.H., (1974), “Elastic solutions for soil and rock mechanics”, Wiley, New York. pp. 166, 167.
- Rodríguez Cuevas, Neftalí, (1971), “Viscoelastic constants for a model representing the mechanical behavior of materials”, Procs, Southampton 1969 Civil Engineering.
- Santoyo Villa, Enrique, (2005), “Síntesis geotécnica de la cuenca del valle de México”.
- Santoyo Villa, Enrique, (2006), “Datos recientes sobre el hundimiento regional”. Revista “Ingeniería Civil”, Numero 442, Febrero 2006, pag. 4-9.
- Schiffman, R. L. Ladd, C. C. and Chen, A. T. F., (1976), “The secondary consolidation of clay” en: J. Kavtchenko and P. M. Sirieys (Editors), Proc. IUTAM Symp. On Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, Springer-Verlag, Berlin, pp. 273-304.
- Selvadurai A.P.S., (1979), “Elastic analysis of soil-foundation interaction”, Elsevier Scientific Publishing Company., pp. 40-42.

Selvadurai A.P.S., (1996), "Elasticity and Geomechanics", Cambridge University Press. pp. 1-4, 131-138.

Sneddon I., (1945), "Fourier Transforms", pp.451-463.

Sneddon I., (1961), "Progress in solid mechanics", pp. 399-418.

Terzaghi K., (1943), "Theoretical soil mechanics", Wiley, New York.

Sitio consultado en internet: <http://www.endex.com/gf/buildings/ltpinfo.htm>, visitado el 25 de mayo del 2005.