



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN  
SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

PRESENTA:

**ÁNGEL VELÁZQUEZ GÁLVEZ**

TUTOR

**DR. CLAUDIO RUBÉN FUERTE ESQUIVEL**

2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. César Ángeles Camacho

Secretario: Dra. María Cristina Verde Rodarte

Vocal: Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

2<sup>do</sup>. Suplente: M.I. Rodolfo Lorenzo Bautista

México D.F. Ciudad Universitaria.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel

---

**FIRMA**

### *Dedicatoria*

*A mi familia: otra vez debo agradecerles mamá, papá y hermana por ser mi inspiración y mi fuerza; por ser mi soporte, mi apoyo y mi razón. Gracias por andar este camino a mi lado; una vez más, hemos llegado juntos a la meta.*



## *Agradecimientos*

*Agradezco al Dr. Claudio Fuerte por la dirección del presente proyecto, por su tiempo y apoyo, por compartir su conocimiento. Fue un privilegio trabajar con usted.*

*Mi más sincero agradecimiento y admiración al Dr. Paul Maya por todo el apoyo brindado de manera incondicional y desinteresada, por la confianza que inspira para solicitar su ayuda y por su revisión al presente trabajo.*

*Gracias a mis sinodales Dr. César Ángeles y M.I. Rodolfo Lorenzo por sus revisiones y comentarios que me sirvieron para mejorar mi tesis, y muy en especial a la Dra. Cristina Verde, porque sus comentarios, críticas y revisión de mi propuesta fueron muy enriquecedores y me ayudaron a comprender mucho mejor mi tema.*

*Mi eterno agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México por todo lo que me ha dado, por otorgarme la posibilidad de continuar mi aprendizaje, mi formación profesional y personal, por ser mi segundo hogar, y ahora, por permitirme alcanzar una meta más en mi vida.*

*Gracias también al fantástico grupo de amigos que se formó durante este tiempo, Marcheli, Enrique, Nancy y Mario. A su lado he vivido los mejores años de mi vida en la Universidad.*

*Agradezco a la Coordinación de Estudios de Posgrado por el apoyo económico otorgado durante mis estudios de posgrado.*

*A todos ustedes, gracias.*



*“The North American interconnected power system is the largest and most complex machine ever devised by man”*

*Charles Proteus Steinmetz*





## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo hacer un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio en un sistema eléctrico de potencia clásico de tres nodos debidos a cambios cuasiestáticos en la demanda de potencia reactiva del sistema. El estudio está basado en la dinámica no lineal a causa de que el conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas que modelan el comportamiento del sistema presenta esta característica. Se hace uso de la teoría de bifurcaciones con la finalidad de cuantificar cambios en la estabilidad del sistema. De esta manera se muestra el diagrama de bifurcación del sistema presentando todas las bifurcaciones que ocurren en él; es decir, tanto las bifurcaciones locales como las globales. Por otra parte, también se presenta la dinámica del sistema en algunos puntos de interés incluyendo aquellos en los que ocurre el fenómeno del colapso de voltaje. El estudio también aborda el comportamiento del sistema eléctrico de potencia al compensar la potencia reactiva por medio de dos dispositivos *FACTS*, el Compensador Estático de VAR's y el Compensador Estático Síncrono. La utilización de ambos dispositivos muestra que es posible incrementar la región de operación estable del sistema, retrasar la aparición de las bifurcaciones e incrementar el punto de máxima cargabilidad del sistema.

## Abstract

A stability study of equilibrium points in a classic three node electric power system due to quasi-static changes in its reactive power demand is developed in this work. The study is based on nonlinear dynamics because the set of differential-algebraic equations that model the system have this characteristic. Making use of the bifurcation theory in order to quantify changes in system stability is possible to show the bifurcation diagram with all local and global bifurcations that occur in the system. On the other hand, dynamics of the system is also shown in some interesting points including those in which the voltage phenomenon occurs. The study also discusses the electric power system behavior when the reactive power is compensated by two *FACTS* devices, a Static VAR Compensator and a Static synchronuos Compensator. Using of both devices shows that it is possible to increase the system's stable operating region, delay the emergence of bifurcations and increase the maximum point of system's loadability.

# Índice de Contenido

Resumen .....	i
Abstract.....	ii
Índice de Contenido.....	iii
Índice de Figuras .....	vi
Índice de Tablas.....	ix
Simbología y abreviaciones .....	x
1 Introducción.....	1
1.1 Introducción .....	1
1.2 Estado del arte.....	2
1.3 Objetivo.....	3
1.4 Justificación .....	3
1.5 Planteamiento del problema .....	3
1.6 Estructura de la tesis .....	4
2 Modelado de sistemas eléctricos de potencia.....	5
2.1 Introducción .....	5
2.2 Generador síncrono .....	5
2.2.1 Ecuación de oscilación.....	8
2.3 Red de transmisión .....	11
2.4 Cargas .....	12
2.4.1 Modelos estáticos .....	12
2.4.2 Modelo dinámico.....	13
2.5 Compensador Estático de VAR's (CEV) .....	14
2.6 Compensador Estático Síncrono ( <i>StatCom</i> ) .....	18
3 Conceptos de la teoría de bifurcación .....	24
3.1 Introducción .....	24
3.2 Definición de un sistema dinámico.....	24
3.2.1 Clasificación de sistemas dinámicos.....	25
3.2.1.1 Discretos o continuos.....	25
3.2.1.2 Autónomos o no autónomos .....	26
3.2.1.3 Invariantes en el tiempo o variantes en el tiempo .....	26
3.2.1.4 Lineales o no lineales.....	26
3.3 Geometría de sistemas dinámicos.....	27

3.4	Estabilidad de sistemas dinámicos .....	28
3.5	Puntos de equilibrio y su estabilidad .....	29
3.6	Ciclos límite y su estabilidad .....	33
3.6.1	Existencia de ciclos límite .....	34
3.7	Bifurcaciones .....	35
3.7.1	Bifurcaciones locales .....	35
3.7.1.1	Bifurcación Nodo-silla ( <i>SNB</i> ).....	36
3.7.1.2	Bifurcación Hopf ( <i>HB</i> ) .....	38
3.7.2	Bifurcaciones globales .....	41
3.7.2.1	Bifurcación de Dobleza de Ciclos ( <i>CFB</i> ).....	42
3.7.2.2	Bifurcación de Doble Periodo ( <i>PDB</i> ).....	43
4	Análisis de bifurcaciones en un sistema eléctrico de tres nodos sin compensar.....	44
4.1	Introducción .....	44
4.2	Metodología de la simulación.....	44
4.3	Software para simulación de sistemas dinámicos.....	44
4.4	Simulación del modelo del sistema de tres nodos sin compensar .....	45
4.4.1	Análisis de la parte superior izquierda del diagrama de bifurcación.....	49
4.4.2	Análisis de la parte inferior derecha del diagrama de bifurcación .....	59
5	Análisis del sistema de tres nodos compensado.....	65
5.1	Sistema de tres nodos sin compensar .....	65
5.2	Sistema de tres nodos compensado con <i>CEV</i> .....	67
5.2.1	Simulación del modelo de tres nodos compensado con <i>CEV</i> (modelo 1).....	68
5.2.2	Simulación del modelo de tres nodos compensado con <i>CEV</i> (modelo 2).....	71
5.2.3	Comparación de <i>CEV</i> modelo 1 y <i>CEV</i> modelo 2.....	74
5.3	Sistema de tres nodos compensado con <i>StatCom</i> .....	76
5.3.1	Simulación del sistema de tres nodos compensado por el <i>StatCom</i> .....	77
6	Conclusiones y aportaciones .....	84
6.1	Conclusiones .....	84
6.2	Aportaciones.....	86
	Referencias.....	87
	Apéndice A. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos en forma polar .....	A.1
	Apéndice B. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos en forma rectangular B.1	
	Apéndice C. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos con <i>CEV</i> .....	C.1
	C.1 Ecuaciones de control para el <i>CEV</i> modelo 1.....	C.4

---

C.2 Ecuaciones de control para el <i>CEV</i> modelo 2.....	C.4
Apéndice D. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos con <i>StatCom</i> .....	D.1
D.1 Lado de <i>ac</i> .....	D.1
D.2 Lado de <i>dc</i> .....	D.7
D.3 Sistema en por unidad.....	D.8
D.4 <i>StatCom</i> en por unidad.....	D.9
D.5 Control del <i>StatCom</i> para la regulación de potencia reactiva.....	D.9
D.6 Sistema de tres nodos con <i>StatCom</i> conectado al nodo de carga.....	D.10
Apéndice E. Archivos <i>ODE</i> de los modelos analizados.....	E.1
Apéndice F. Manual de <i>XPPAUT</i> para el análisis dinámico de los sistemas.....	F.1
F.1 Formato de un archivo <i>ODE</i> .....	F.2
F.3 Comandos más importantes.....	F.5
F.4 Pantalla de <i>AUTO</i> .....	F.6
F.5 Recomendaciones para el manejo de <i>XPPAUT</i> .....	F.8

# Índice de Figuras

Figura 2.1 Pares mecánicos y eléctricos en una unidad generadora .....	5
Figura 2.2 Diagrama esquemático de los devanados y ejes de un generador síncrono .....	6
Figura 2.3 Ángulos y referencias para la máquina síncrona .....	6
Figura 2.4 Diagrama simplificado del <i>CEV</i> .....	14
Figura 2.5 Modelado de los límites de la susceptancia $B$ .....	15
Figura 2.6 Diagrama de bloques de control del <i>CEV1</i> .....	15
Figura 2.7 Característica de control del <i>CEV2</i> .....	16
Figura 2.8 Diagrama de bloques de control del <i>CEV</i> .....	17
Figura 2.9 Circuito equivalente del <i>StatCom</i> .....	19
Figura 2.10 Vectores instantáneos de voltaje en la carga $V$ y en la salida del <i>StatCom</i> $E$ .....	20
Figura 2.11 Diagrama de control del <i>StatCom</i> .....	22
Figura 3.1 Órbita en el plano de fase y curva en el dominio del tiempo.....	27
Figura 3.2 Retrato de fase .....	28
Figura 3.3 Nodo estable.....	29
Figura 3.4 Foco inestable .....	30
Figura 3.5 Centro neutralmente estable.....	30
Figura 3.6 Punto silla .....	30
Figura 3.7 Ciclo límite estable.....	34
Figura 3.8 Ciclo límite inestable .....	34
Figura 3.11 Destrucción de los puntos de equilibrio .....	36
Figura 3.12 Diagrama de una bifurcación Nodo-silla .....	37
Figura 3.13 Retrato de fase de la bifurcación supercrítica .....	39
Figura 3.14 Diagrama de bifurcación de una bifurcación Hopf supercrítica .....	39
Figura 3.15 Retrato de fase de una bifurcación Hopf subcrítica .....	40
Figura 3.16 Diagrama de bifurcación de una bifurcación Hopf subcrítica .....	40
Figura 3.17 Movimiento de los valores propios complejos conjugados .....	41
Figura 3.18 Planos de fase de la bifurcación de Doble de Ciclos .....	42
Figura 3.19 Diagrama de una bifurcación de doblez.....	42
Figura 3.20 Bifurcación de Doble Periodo de Moon y Rand .....	43
Figura 4.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos .....	45
Figura 4.2 Comportamiento de las variables del sistema en $Q_I = 0$ [p.u.] .....	47
Figura 4.3 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.....	48

Figura 4.4 Comportamiento de las variables del sistema en $Q_I = 4.00$ [p.u.] .....	48
Figura 4.5 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia.....	49
Figura 4.6 Soluciones periódicas inestables surgiendo de la bifurcación Hopf subcrítica.....	50
Figura 4.7 Movimiento de los valores propios complejos conjugados para la bifurcación ( <i>UHB</i> ) .....	50
Figura 4.8 Comportamiento de las variables del sistema en <i>UHB</i> $Q_I = 6.27243$ [p.u.].....	51
Figura 4.9 Ciclo límite creado en la bifurcación Hopf subcrítica.....	51
Figura 4.10 Colapso de voltaje en $Q_I = 6.33$ [p.u.] .....	52
Figura 4.11 Colapso de voltaje en en $Q_I = 6.40$ [p.u.] .....	52
Figura 4.12 Ciclos límites a) y b) en $Q_I = 6.27242$ [p.u.] y $Q_I = 6.26999$ [p.u.] respectivamente .....	53
Figura 4.13 Región de biestabilidad del Sistema Eléctrico de Potencia .....	54
Figura 4.14 Dinámica del voltaje en $Q_I = 6.194$ [p.u.] converge a punto fijo .....	54
Figura 4.15 Dinámica del sistema en $Q_I = 6.194$ [p.u.] converge a ciclo límite estable .....	55
Figura 4.16 Dinámica del sistema en $Q_I = 6.194$ [p.u.] converge a punto de equilibrio .....	55
Figura 4.17 Voltaje del sistema en la bifurcación de doblez de ciclos .....	56
Figura 4.18 Ciclos límite en $Q_I = 6.21521, 6.21750, 6.21984$ y $6.22219$ [p.u.].....	57
Figura 4.19 Voltaje en el nodo de carga al sufrir bifurcación de doble periodo en cascada.....	58
Figura 4.20 Atractor extraño generado en $Q_I = 6.22219$ [p.u.].....	58
Figura 4.21 Variables del sistema durante el colapso en $Q_I = 6.22920$ [p.u.] .....	59
Figura 4.22 Oscilación periódica estable presentada en $Q_I = 6.54$ [p.u.].....	59
Figura 4.23 Soluciones periódicas estables surgiendo de la bifurcación Hopf supercrítica .....	60
Figura 4.24 Órbitas en $Q_I = 6.53835, 6.53805, 6.53765$ y $6.53723$ [p.u.] .....	61
Figura 4.25 Voltaje en la carga al sufrir bifurcaciones de doble periodo en cascada.....	61
Figura 4.26 Atractor extraño generado en $Q_I = 6.53680$ [p.u.].....	62
Figura 4.27 Variables del sistema durante el colapso en $Q_I = 6.53600$ [p.u.] .....	62
Figura 4.28 Dinámica del sistema en $Q_I = 6.54194$ [p.u.] .....	63
Figura 4.29 Movimiento de los valores propios complejos conjugados para la bifurcación ( <i>SHB</i> ).....	63
Figura 4.30 Colapso de voltaje en $Q_I$ mayor al punto máximo de cargabilidad del sistema.....	64
Figura 5.1 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos sin compensar .....	66
Figura 5.2 Sistema de tres nodos compensado con un <i>CEV</i> .....	67
Figura 5.3 Diagrama de bloques de control del <i>CEV1</i> .....	68
Figura 5.4 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos compensado por <i>CEV1</i> $B_{lim}=1.5$ [p.u.] .....	69
Figura 5.5 Comportamiento del sistema al compensar el nodo de carga para diferentes valores de la susceptancia límite $B_{lim}$ .....	70
Figura 5.6 Diagrama de bloques de control del <i>CEV2</i> .....	71



Figura 5.7 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos compensado por $CEV2$ $B_{lim}=1.5$ [p.u] $K=0.001$ .....	72
Figura 5.9 Diagramas de bifurcación para diferentes valores de pendiente característica, $K$ , del $CEV$ .....	74
Figura 5.10 Comparación de regulación de voltaje del $CEV1$ y el $CEV2$ .....	75
Figura 5.11 Diagramas de bifurcación del sistema sin compensar y del sistema compensado por el $CEV1$ y el $CEV2$ .....	76
Figura 5.12 Circuito equivalente del $StatCom$ .....	76
Figura 5.13 Sistema de tres nodos compensado con un $StatCom$ .....	77
Figura 5.15 Diagramas de bifurcación del sistema sin compensar sin y con $StatCom$ .....	81
Figura 5.16 Superposición de los diagramas de bifurcación del sistema con $StatCom$ conectado y desconectado .....	82
Figura 5.17 Diagramas de bifurcación para diferentes niveles de inyección de potencia reactiva, $Q_{ac,ref}$ , del $StatCom$ .....	82
Figura A.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos con carga dinámica .....	A.1
Figura A.2 Modelo del sistema de potencia de tres nodos .....	A.1
Figura A.3 Modelo del sistema con el equivalente de Thévenin en la parte izquierda .....	A.5
Figura A.4 Modelo del sistema con la admitancia izquierda remodelada.....	A.5
Figura B.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos con carga dinámica .....	B.1
Figura B.2 Modelo del sistema de tres nodos simplificado .....	B.1
Figura C.1 Sistema de tres nodos con $CEV$ en el nodo de carga .....	C.1
Figura C.2 Modelo simplificado del sistema de tres nodos con un $CEV$ en el nodo de carga.....	C.1
Figura C.3 Diagrama de bloques de control del $CEV1$ .....	C.4
Figura C.4 Diagrama de bloques de control del $CEV2$ .....	C.4
Figura D.1 Circuito equivalente del $StatCom$ .....	D.1
Figura D.2 Sistema de referencia trifásico y D-Q.....	D.3
Figura D.3 Vectores instantáneos de voltaje en la carga $V$ y en la salida del $StatCom$ $E$ .....	D.6
Figura D.4 Diagrama de control del $StatCom$ .....	D.9
Figura D.5 Sistema de tres nodos compensado con un $StatCom$ .....	D.10
Figura D.6 Circuito equivalente simplificado del sistema de tres nodos con $StatCom$ .....	D.11
Figura F.1 Componentes de la ventana principal de XPPUT .....	F.4
Figura F.2 Componentes de la ventana principal de $AUTO$ .....	F.6

# Índice de Tablas

Tabla 4.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos sin compensar .....	46
Tabla 4.2 Valores propios en la <i>SNB</i> .....	64
Tabla 5.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos sin compensar .....	66
Tabla 5.2 Ubicación de las bifurcaciones del sistema de tres nodos sin compensar .....	66
Tabla 5.3 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos compensados por el <i>CEV1</i> .....	69
Tabla 5.4 Ubicación de las bifurcaciones del sistema para cada valor de $B_{lim}$ .....	70
Tabla 5.5 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos compensados por el <i>CEV2</i> .....	72
Tabla 5.6 Ubicación de las bifurcaciones del sistema de tres nodos en operación normal y compensado por el <i>CEV2</i> con $B_{lim}=1.5$ [p.u] y $K=0.001$ .....	72
Tabla 5.7 Ubicación exacta de las bifurcaciones del sistema sin compensar y compensado por los <i>CEV</i> s .....	75
Tabla 5.8 Parámetros utilizados en el sistema de tres nodos compensado por un <i>StatCom</i> .....	80
Tabla 5.9 Ubicación de las bifurcaciones del sistema para cada valor de $B_{lim}$ .....	83

# Simbología y abreviaciones

$B$	Susceptancia
$B_{CEV}$	Susceptancia equivalente del <i>CEV</i>
$B_{lim}$	Valor límite de la susceptancia
$B_{max}$	Susceptancia máxima
$B_{min}$	Susceptancia mínima
$C$	Capacitancia
<i>CEV</i>	Compensador Estático de VAR's
<i>CFB</i>	Bifurcación de Doble de Ciclos
<i>CF-RCT</i>	Capacitor Fijo - Reactor Controlado por Tiristores
$D, d_m$	Coefficiente de amortiguamiento de la máquina síncrona
$E$	Magnitud de voltaje en terminales del <i>StatCom</i>
$F$	Frecuencia del voltaje del bus en el modelo de carga dependiente de la frecuencia
$f_0$	Frecuencia nominal en el modelo de carga dependiente de la frecuencia
<i>FACTS</i>	Sistemas Flexibles de Transmisión en Corriente Alterna (Flexible Alternating Current Transmission System)
$G$	Conductancia
$H$	Constante de inercia de la máquina síncrona
<i>HB</i>	Bifurcación Hopf
$J$	Matriz jacobiana
$K$	Pendiente de regulación del <i>CEV2</i>
$k$	Índice de modulación del voltaje de salida del <i>StatCom</i>
$K_{1p}, K_{2p}$	Parámetros del control del <i>StatCom</i>
$K_{1q}, K_{2q}$	Parámetros del control del <i>StatCom</i>
$K_d, K_q$	Parámetros del control del <i>StatCom</i>
$K_{pdc}, K_{idc}$	Parámetros del control del <i>StatCom</i>
$K_{pw}, K_{pv}, T$	Constantes de carga del modelo de carga dinámico
$K_{qw}, K_{qv}, K_{qv2}$	Constantes de carga del modelo de carga dinámico
$L$	Inductancia
$L_0$	Órbita periódica
$M$	Momento angular de la máquina síncrona
<i>ODE</i>	Archivo de extensión .ode el cual contiene el código fuente que después se corre en <i>XPPAUT</i>
$P(x)$	Función de Poincaré
<i>p.u.</i>	por unidad

$P_0, Q_0$	Potencias constantes activa y reactiva de la carga no lineal en el modelo de carga dinámico
$P_1, Q_1$	Potencias constantes activa y reactiva del modelo de carga dinámico
$P_d$	Potencia de amortiguamiento del generador síncrono
$PDB$	Bifurcación de Doble Periodo
$P_{di}$	Potencia activa demandada en el nodo $i$
$P_{ei}$	Potencia activa inyectada en el nodo $i$
$P_{ge}$	Potencia activa de salida del generador hacia la red
$P_{gi}$	Potencia activa generada en el nodo $i$
$P_m$	Potencia mecánica de entrada al generador
$Q_{acref}$	Potencia reactiva de referencia para el <i>StatCom</i>
$Q_{di}$	Potencia reactiva demandada en el nodo $i$
$Q_{ei}$	Potencia reactiva inyectada en el nodo $i$
$Q_{gi}$	Potencia reactiva generada en el nodo $i$
$R$	Resistencia
$R_{dc}$	Resistencia del lado de corriente directa del <i>StatCom</i>
$R_s, L_s$	Resistencia e inductancia del transformador de acoplamiento del <i>StatCom</i>
$SHB$	Bifurcación Hopf Supercrítica
$SNB$	Bifurcación Nodo-silla
<i>StatCom</i>	Compensador Estático Síncrono
$t$	Tiempo
$T_a$	Par de aceleración del generador síncrono
$T_b, T_c, K_i, K_p$	Parámetros del control del CEV2
$T_{CEV}, K_{CEV}$	Parámetros del control del CEV1
$T_e$	Par eléctrico del generador síncrono
$T_m$	Par mecánico del generador síncrono
$UHB$	Bifurcación Hopf Subcrítica
$V$	Magnitud de voltaje en el nodo de carga del sistema de tres nodos
$V_{dc}$	Voltaje en el capacitor del <i>StatCom</i>
$V_{ref}$	Voltaje de referencia
<i>VSC</i>	Fuente conmutada de voltaje
$X$	Reactancia
$x_*$	Punto de equilibrio
<i>XPPAUT</i>	Software para la simulación de sistemas dinámicos (X-Windows Phase Plane Plus Auto) (Software libre)
$Y$	Admitancia
$Y_{BUS}$	Matriz de admitancia nodal
<i>ZIP</i>	Modelo de carga que combina los modelos de impedancia, corriente y potencia constante
$\alpha$	Ángulo entre el voltaje en terminales del <i>StatCom</i> y el voltaje en el nodo de conexión
$\alpha_0$	Valor inicial de $\alpha_m$

$\alpha_f$	Parámetro de sensibilidad de la frecuencia en el modelo de carga dependiente de la frecuencia
$\alpha_m$	Ángulo instantáneo del eje de referencia <i>Bus</i> con respecto al eje <i>A</i>
$\delta$	Ángulo de voltaje en el nodo de carga del sistema de tres nodos
$\delta_e$	Desplazamiento angular del rotor en radianes eléctricos
$\delta_m$	Ángulo de voltaje en terminales del generador del sistema de tres nodos
$\theta$	Ángulo de voltaje en nodos de carga
$\theta_0$	Valor inicial del ángulo mecánico del rotor
$\theta_m$	Ángulo mecánico del rotor
$\mu, \lambda$	Parámetros de bifurcación
$\varphi^t$	Operador de evolución del sistema dinámico
$\omega$	Variación de la velocidad angular del rotor con respecto a la velocidad síncrona en el sistema de tres nodos
$\omega_0, \omega_e$	Velocidad síncrona en radianes eléctricos sobre segundo
$\omega_b$	Velocidad angular base
$\omega_{m0}$	Velocidad síncrona en radianes mecánicos sobre segundo
$\omega_{rm}$	Velocidad angular del rotor en radianes mecánicos sobre segundo

# 1 Introducción

## 1.1 Introducción

En sus inicios, los sistemas eléctricos de potencia se diseñaban de manera que los consumidores de energía se encontraran cerca de los puntos de generación, haciendo que la operación de este tipo de sistemas fuera muy simple [Kundur94]. Sin embargo, con el tiempo el contexto operativo de los sistemas ha cambiado en forma radical donde los centros de generación están cada vez más distantes de los centros de consumo, existe la apertura del sector eléctrico, además de que presiones económicas, políticas y ambientales han retrasado la expansión del sistema [Llamas04].

Las condiciones anteriores han provocado que los sistemas eléctricos de potencia operen cada vez más cerca de sus límites de estabilidad [Kundur94]. El hecho de operar en estas regiones ha dado como resultado el surgimiento de fenómenos dinámicos muy complejos no observados anteriormente, provocando cambios significativos en la estabilidad del sistema, incluso operando en regímenes normales [Kundur94]. Esto ha provocado una gran preocupación por parte de los ingenieros que planifican y operan el sistema con relación a la confiabilidad y seguridad con que se operan y controlan las redes de transmisión y distribución. En este nuevo contexto operativo se han reportado comportamientos no lineales de las variables eléctricas que definen el estado de los sistemas eléctricos [Strogatz00]. Tales comportamientos han puesto de manifiesto que algunos procesos dinámicos no están bien entendidos y por ende, no son considerados en los métodos computacionales utilizados en la operación y control de redes eléctricas.

El fenómeno de inestabilidad de voltaje se considera como una manifestación de una perturbación del estado estacionario dada inicialmente por un decremento gradual de la magnitud de voltaje en uno o varios puntos de la red de transmisión. En una segunda etapa, existe un decremento repentino de la magnitud de voltaje que produce la operación de esquemas de protección, iniciándose una posible interrupción en el sistema de transmisión. Existen dos formas generales de estudiar este fenómeno. La primera consiste en estudiar el fenómeno desde un punto de vista estático en base a las ecuaciones de flujos de potencia. Sin embargo, esta aproximación estática no permite analizar oscilaciones no lineales de las variables de estado que acontecen durante el fenómeno. De tal manera, la segunda forma de análisis consiste en plantear el problema desde un punto de vista dinámico por medio del análisis de las ecuaciones diferencial-algebraicas que modelan al sistema eléctrico de potencia.

La teoría de bifurcaciones es muy importante en el análisis de sistemas no lineales debido a que permite predecir cualitativamente comportamientos dinámicos muy complejos debidos a la variación de sus parámetros [Strogatz00], [Nayfeh95]. Estos cambios cualitativos se manifiestan en modificaciones en la estabilidad del sistema; es decir la aparición y desaparición de soluciones estables, también llamados puntos de equilibrio, cuando uno de los parámetros del sistema es modificado. En el caso de sistemas eléctricos de potencia, la teoría de bifurcaciones se ha aplicado para caracterizar cambios cualitativos en la respuesta dinámica de la magnitud de voltaje por variaciones lentas en sus parámetros sobre un rango especificado [Strogatz00], [Nayfeh95]. Entre los tipos de comportamiento dinámico que pueden llegar a observarse en los sistemas eléctricos de potencia están los ciclos límite, el movimiento cuasiperiódico e incluso caos [Strogatz00].

En el presente trabajo, se desarrolla un estudio basado en la dinámica no lineal y teoría de bifurcaciones al variar un parámetro del sistema de potencia y localizar la región de operación estable del sistema, así como la región inestable.

Por otra parte, se mostrará que la aplicación, tanto de compensadores estáticos de VAR (*CEV*) como Compensador Estático Síncrono (*StatCom*), incrementan la región de operación estable y retrasan la aparición de las bifurcaciones, las cuales aparecerán a un mayor voltaje y en un parámetro también mayor.

## 1.2 Estado del arte

Algunos trabajos de investigación en el área de sistemas eléctricos enfocados al estudio de inestabilidades no lineales se basan en la teoría de bifurcaciones. En [Dobson88] y [Dobson89] se analiza un sistema de potencia de tres nodos con una gran variedad de comportamientos dinámicos no lineales. El sistema es modelado por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas cuya solución permite obtener los puntos de equilibrio del sistema. La estabilidad de estos puntos de equilibrio es analizada por medio de técnicas de valores característicos para determinar cualitativamente el comportamiento dinámico del sistema ante una perturbación pequeña. En este artículo se demuestra que el punto de colapso de voltaje se asocia a la pérdida de estabilidad de un punto de equilibrio debida a una bifurcación nodo-silla.

En [Chiang90] se propone el uso de un modelo estático y uno dinámico para analizar el fenómeno del colapso de voltaje. Los modelos propuestos son capaces de explicar tanto el periodo caracterizado por el decremento gradual del voltaje y el seguido por una etapa con un decremento acelerado que, finalmente, termina en el colapso del voltaje. Por otra parte, en [Chiang92] se muestra la existencia del comportamiento caótico en un pequeño sistema de potencia de tres nodos.

Varios modelos de pequeños sistemas de potencia se analizan en [García02], donde se hace un estudio de sistemas de potencia representados por grupos de ecuaciones diferenciales, mostrando los diferentes tipos de bifurcaciones que ocurren en ellos, demostrando así que los sistemas eléctricos pequeños pueden experimentar fenómenos dinámicos muy complejos. En [Carvajal07] se analizan sistemas eléctricos de potencia por medio de la teoría de bifurcaciones al variar más de un parámetro del sistema.

Un estudio sobre las bifurcaciones Hopf inducidas por los controles del Compensador Estático de Var (*CEV*) se hace en [Gu06], en donde se comparan dos modelos de la máquina síncrona conectada a una carga sin el *CEV* y posteriormente con el *CEV*, y se hace un análisis de bifurcaciones al variar más de un parámetro para estudiar el efecto de los parámetros del sistema sobre la bifurcación Hopf.

Por lo descrito anteriormente, es claro que la aplicación de la teoría de bifurcaciones al análisis de sistemas eléctricos de potencia es de gran ayuda para predecir y entender posibles inestabilidades no lineales ocasionadas por pequeñas perturbaciones en el punto de equilibrio del sistema.

### 1.3 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema eléctrico de potencia de tres nodos. Lo anterior nos permitirá conocer la estabilidad de voltaje del sistema incluyendo el fenómeno de colapso de voltaje. Se realizará un análisis a partir de los resultados arrojados en las simulaciones y basados en el modelado dinámico del sistema de potencia y la teoría de bifurcación. Por otra parte, se estudia la aplicación, tanto de Compensadores Estáticos de VAR's (CEV) como del Compensador Estático Síncrono (*StatCom*) y su efecto en la estabilidad del sistema.

### 1.4 Justificación

En años recientes se han desarrollado estudios de inestabilidad de voltaje para comprender el fenómeno de colapso de voltaje. La aplicación de controladores enmarcados en el concepto de sistemas flexibles de transmisión en corriente alterna (*FACTS*) ha demostrado su factibilidad para el control de sistemas eléctricos de potencia [Coronado01]. En este trabajo se analiza un sistema de potencia de tres nodos al cual se le aplica la teoría de bifurcaciones variando un parámetro del sistema. Empleando este tipo de análisis podemos encontrar la región de operación estable del sistema y explicar los comportamientos no lineales que toman lugar en la dinámica de éste y que pueden provocar cambios significativos en la estabilidad del sistema pudiendo llegar inclusive al colapso de voltaje. La utilización de este tipo de análisis puede ser de gran ayuda como una herramienta predictiva de los fenómenos arriba mencionados.

### 1.5 Planteamiento del problema

Con la finalidad de obtener la dinámica del sistema eléctrico de potencia y poder realizar el análisis de la estabilidad de voltaje, el primer paso es modelar en forma dinámica a los elementos que intervienen directamente en este fenómeno. Como resultado de este modelado, se obtienen conjuntos de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones algebraicas. Estos sistemas de ecuaciones son, en general, no lineales, tal que la teoría de bifurcación encaja perfectamente para este tipo de análisis. Esta teoría consiste básicamente en mostrar cómo las soluciones del sistema de potencia relacionadas con el punto de operación, se afectan con respecto a la variación de uno o más parámetros del sistema.

Para la simulación de los sistemas de potencia, modelados en el presente trabajo como sistemas dinámicos, se utilizará el software *XPPAUT (X-Windows Phase Plane Plus Auto)* [XPPAUT11]. Cabe mencionar que el análisis se realizará a partir de los resultados arrojados por el simulador. *XPPAUT* es una herramienta para simulación, animación y análisis de sistemas dinámicos [Ermentrout01] la cual se divide en dos partes: *XPP* se utiliza para la simulación numérica de las ecuaciones; permite localizar puntos fijos y trazar diagramas de fase de sistemas no lineales. Una vez que se encuentra un punto fijo se utiliza el programa *AUTO* para trazar el diagrama de bifurcación. Este software tiene la capacidad de esquematizar los diagramas de bifurcación indicando soluciones estables e inestables de puntos de equilibrio y si éstos son de tipo periódico u oscilatorio. Además, es posible simular la dinámica de cualquier punto del diagrama de bifurcación, pudiéndose observar claramente



diversos tipos de operación propios de los sistemas no lineales e incluso el fenómeno del colapso de voltaje.

Con respecto a la estabilidad, ésta se puede evaluar también por medio de valores característicos en cualquier punto de operación en el diagrama de bifurcación. El programa también proporciona de manera visual la estabilidad del sistema por medio de los multiplicadores de Floquet.

La aportación del presente trabajo consiste principalmente en explicar algunas de las posibles inestabilidades de voltaje que pueden llegar a presentarse en los sistemas eléctricos de potencia; así como, la posibilidad de controlar el voltaje, retrasando la aparición de dichas inestabilidades, por medio de dispositivos basados en electrónica de potencia como los compensadores estáticos de VAR's y los compensadores estáticos síncronos.

## 1.6 Estructura de la tesis

En el Capítulo 1 se presenta la introducción a este trabajo. Posteriormente se da una breve descripción del estado del arte en cuanto a algunas aplicaciones de la teoría de bifurcaciones. Por último se describe el objetivo, justificación y planteamiento del problema analizado en este trabajo.

El Capítulo 2 contiene la descripción del modelado de todos los elementos que intervienen en la dinámica de los sistemas de potencia y sus respectivos controles.

El Capítulo 3 describe la teoría de bifurcación como herramienta de análisis de los sistemas no lineales, los conceptos de puntos de equilibrio y órbitas periódicas así como su estabilidad. También se presenta la forma en que los sistemas dinámicos no lineales pueden ser linealizados para realizar un análisis de estabilidad. Además, se incluye una breve descripción algunos de los diversos tipos de bifurcaciones locales y globales que presentan los sistemas no lineales.

El Capítulo 4 contiene todos los resultados de las simulaciones de los modelos matemáticos que representan el sistema de potencia de tres nodos sin compensar. Estos resultados contienen diagramas de bifurcación, dinámica del sistema en los puntos de operación más importantes y la posición o movimiento de valores propios indicando los cambios en la estabilidad del sistema debida a la variación de parámetros.

El Capítulo 5 contiene todos los resultados de las simulaciones de los modelos matemáticos que representan el sistema de potencia de tres nodos compensado. Estos resultados contienen los diagramas de bifurcación del sistema compensado por los *CEV's* y el *StatCom*; así como, la comparación de los resultados arrojados por los dispositivos compensadores de potencia reactiva y del sistema sin compensar.

El Capítulo 6 contiene las conclusiones a las que se han llegado y las aportaciones que se han hecho con el presente trabajo.

## 2 Modelado de sistemas eléctricos de potencia

### 2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una descripción detallada de los modelos matemáticos usados en esta tesis para representar los diferentes elementos que componen el sistema de potencia con la finalidad de efectuar análisis de estabilidad de sus puntos de equilibrio. Los dispositivos eléctricos considerados son: generador síncrono, red de transmisión, cargas, compensador estático de VAR's (CEV) y compensador estático síncrono (*StatCom*). Estos modelos son desarrollados por medio de ecuaciones diferenciales y algebraicas.

### 2.2 Generador síncrono

El modelado del generador síncrono tiene una importancia central en el análisis de estabilidad de voltaje de los sistemas de potencia ya que es la principal fuente de potencia reactiva del sistema. El generador síncrono puede ser representado como una masa rotatoria sobre la que actúan dos pares en sentido contrario. El par mecánico,  $T_m$ , tiende a acelerar o incrementar la velocidad de rotación,  $\omega_{Rm}$ , mientras que  $T_e$ , el par eléctrico, disminuye esta velocidad. Un diagrama para ejemplificar lo anterior se muestra en la Figura 2.1.

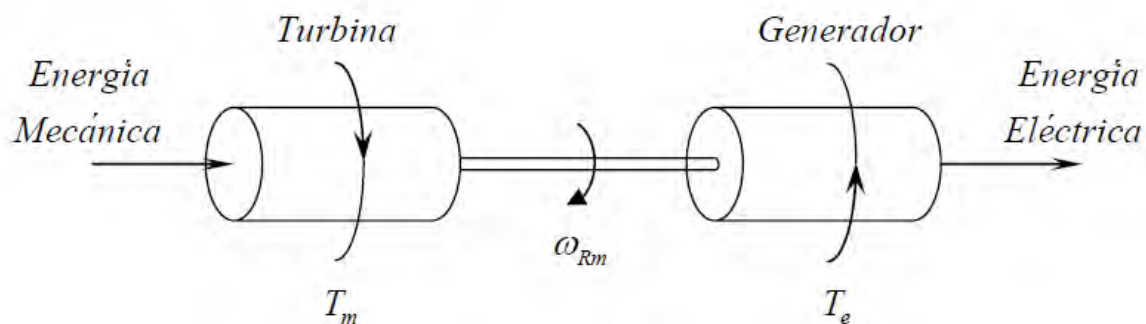


Figura 2.1 Pares mecánicos y eléctricos en una unidad generadora.

La interacción entre el campo magnético del estator con el campo magnético del rotor da lugar al par eléctrico  $T_e$ . Por otra parte, el par mecánico  $T_m$  es producido por un sistema gobernador turbina. En estado estacionario, el campo magnético del rotor gira a la misma velocidad que el del estator; es decir, a velocidad síncrona  $\omega_{m0}$ .

La transformación de Park es de gran ayuda para simplificar el análisis de máquinas síncronas, tal transformación lleva el circuito trifásico del estator a dos ejes que rotan a la misma velocidad, llamados eje directo y eje de cuadratura. El eje directo (eje  $d$ ) está alineado con el eje magnético del devanado de campo, y el eje de cuadratura (eje  $q$ ) está  $90^\circ$  adelantado al eje  $d$  como lo muestra la

Figura 2.3. Por otra parte, en la Figura 2.2 se muestran un conjunto de devanados estáticos (fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ ) colocados sobre el estator y otros devanados colocados sobre los ejes  $d$  y  $q$  que se desplazan con respecto a los primeros en forma angular.

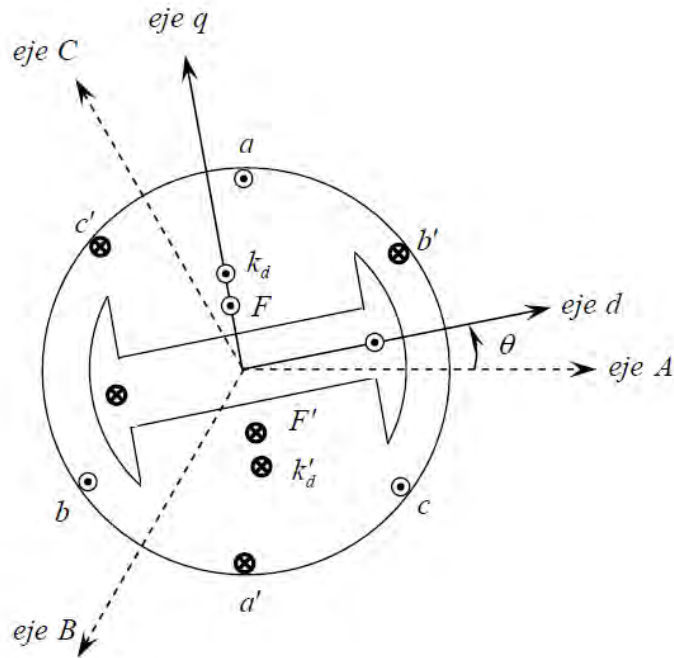


Figura 2.2 Diagrama esquemático de los devanados y ejes de un generador síncrono

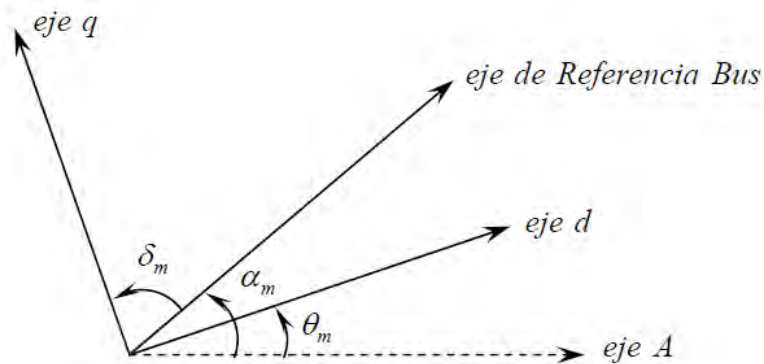


Figura 2.3 Ángulos y referencias para la máquina síncrona

Se considera al eje de la fase de armadura  $A$  como el eje de referencia estacionario. Entonces el ángulo mecánico  $\theta_m$ , es medido con respecto al eje de referencia estacionario.  $\theta_m$  es el ángulo instantáneo entre los ejes  $d$  y  $A$ , mientras que  $\theta_0$  es su valor inicial.  $\theta_m$  puede ser calculado entonces de la siguiente manera:

$$\theta_m = \omega_{m0}t + \theta_0 \quad (2.1)$$

Para fines de análisis se define un eje de referencia que gira a velocidad síncrona  $\omega_{m0}$  y que es llamado eje de referencia Bus. El movimiento angular de este eje con respecto al eje estacionario es definido por la ecuación:

$$\alpha_m = \omega_{m0}t + \alpha_0 \quad (2.2)$$

donde  $\alpha_m$  es el ángulo instantáneo del eje de referencia Bus con respecto al eje  $A$  y  $\alpha_0$  es el ángulo inicial de  $\alpha_m$ .

El desplazamiento angular del rotor  $\delta_m$  se mide entre el eje de cuadratura de la máquina y el eje de referencia Bus. De acuerdo a la Figura 2.3 la relación entre ambas posiciones está dada por:

$$\theta_m + \frac{\pi}{2} = \delta_m + \alpha_m \quad (2.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.1) y (2.2) en (2.3) se obtiene:

$$\theta_0 = \delta_m + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

de tal manera que sustituyendo (2.4) en (2.1) se obtiene:

$$\theta_m = \omega_{m0}t + \delta_m + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

Al derivar la ecuación (2.5) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_{m0} + \frac{d\delta_m}{dt} \quad (2.6)$$

donde  $\frac{d\theta_m}{dt}$  es la velocidad angular del rotor con respecto al eje estacionario  $A$  y  $\frac{d\delta_m}{dt}$  es la velocidad angular del rotor con respecto al eje de referencia Bus, que también puede verse como la desviación de la velocidad del rotor con respecto a la velocidad síncrona. Por lo tanto, en estado estacionario la velocidad del rotor es igual a la velocidad de sincronismo del campo magnético del estator. Sin embargo, cuando ocurre alguna perturbación la velocidad del rotor es diferente a la velocidad síncrona, produciéndose un cambio en la diferencia angular en los campos magnéticos del rotor y estator lo que produce variaciones entre los pares mecánicos y eléctricos, originándose oscilaciones de potencia eléctrica en el sistema. La ecuación que describe la dinámica de la desviación de la velocidad angular del rotor con respecto a la velocidad de sincronismo es llamada ecuación de oscilación [kundur94].

## 2.2.1 Ecuación de oscilación

La ecuación de oscilación es esencialmente la segunda ecuación de Newton, la cual establece que el par de aceleración del rotor es el producto escalar de su momento de inercia y su aceleración angular. La aceleración del rotor se obtiene al derivar la ecuación (2.6) con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (2.7)$$

mientras que el par de aceleración  $T_a$  está dado por:

$$T_a = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = J \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (2.8)$$

donde  $J$  es el momento de inercia de la masa del rotor en  $[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$

El par de aceleración también se puede expresar como la diferencia entre el par mecánico y el par eléctrico, así como el par de amortiguamiento  $T_d$ . Este último debido al acoplamiento entre la turbina y el rotor del generador. La expresión para el par de aceleración  $T_a$  es:

$$T_a = T_m - T_e - T_d \quad (2.9)$$

donde los pares actuando sobre el rotor están expresados en  $[\text{N}\cdot\text{m}]$ .

La potencia es el producto del par por la velocidad angular. De esta manera al multiplicar ambos miembros de la igualdad de las ecuaciones (2.8) y (2.9) por la velocidad angular del rotor,  $\omega_{Rm}$ , se puede llegar a lo siguiente:

$$P_a = J\omega_{Rm} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = J\omega_{Rm} \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_m - P_{ge} - P_d \quad (2.10)$$

donde  $P_m$ ,  $P_{ge}$  y  $P_d$  son las potencias mecánica de entrada, eléctrica de salida y de amortiguamiento, respectivamente, en  $[\text{W}]$ .  $P_a$  es la potencia de aceleración y  $J\omega_{Rm}$  es denominado momento angular del rotor y sus unidades son  $[\text{J}\cdot\text{s}]$ .

En estado estacionario la velocidad angular del rotor,  $\omega_{Rm}$ , es igual a la velocidad síncrona,  $\omega_{m0}$ , y el momento angular del rotor,  $J\omega_{m0}$ , es denominado momento angular  $M$  en  $[\text{J}\cdot\text{s}]$ . Entonces, la ecuación (2.10) puede ser escrita como [Kundur94]:

$$M \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = M \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_{ge} - P_d \quad (2.11)$$

Frecuentemente es común que se dé como dato la constante de inercia  $H$ , cuyas unidades están dadas en [J] matemáticamente se tiene [Kundur94]:

$$H = \frac{J\omega_{m0}^2}{2} \quad (2.12)$$

Despejando el momento de inercia,  $J$ , de (2.12) y sustituyendo en (2.10) se tiene:

$$\frac{2H}{\omega_{m0}} \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_m - P_{ge} - P_d \quad (2.13)$$

De la ecuación anterior se observa que en el numerador  $\delta_m$  está expresado en radianes mecánicos, mientras que en el denominador  $\omega_{m0}$  está expresado en radianes mecánicos sobre segundo. Al efectuar la división los radianes mecánicos se cancelan; en otras palabras, la ecuación (2.13) es independiente de las unidades en que se defina el ángulo por lo que será reescrita considerando ahora a los radianes como radianes eléctricos de la siguiente manera [Kundur94]:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta_e}{dt^2} = P_m - P_{ge} - P_d \quad (2.14)$$

en donde  $\delta_e$  es el desplazamiento angular del rotor, entre el eje de cuadratura de la máquina y el eje de referencia Bus, medido en radianes eléctricos y  $\omega_0$  es la velocidad síncrona en radianes eléctricos sobre segundo.

Para propósitos del análisis aquí considerado, es común asumir que la potencia mecánica,  $P_m$ , de entrada al generador permanece constante durante el intervalo de tiempo de estudio [Anderson77].

La potencia de amortiguamiento se puede definir en función de la desviación de la velocidad con respecto a la de sincronismo:

$$P_d = D \frac{d\delta_e}{dt} \quad (2.15)$$

donde el término  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento.

El término  $P_{ge}$  es la potencia activa de salida del generador hacia la red, y está determinada de la siguiente forma: Asumiendo que se tienen  $n$  nodos generadores y  $m$  nodos de carga donde no se tienen unidades generadoras, la ecuación de potencia para el generador  $i$  es:

$$\begin{aligned} P_{gei} = & V_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ m}}^n V_i V_j [G_{ij} \cos \delta_i - \delta_j + B_{ij} \text{sen } \delta_i - \delta_j] \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} V_i V_k [G_{ik} \cos \delta_i - \theta_k + B_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_k] + P_{Li} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\delta$  es la variable que describe el ángulo de voltaje en terminales del generador y  $\theta$  representa el ángulo de voltaje en los nodos de carga, respectivamente. Adicionalmente,  $V$  es la magnitud del voltaje nodal, independientemente del tipo de nodo,  $i$  es el número del generador del que se está obteniendo la ecuación de los  $n$  generadores que conforman la red, mientras que  $j$  y  $k$  son índices auxiliares.

La ecuación (2.12) en términos del momento angular,  $M$ , y la velocidad síncrona,  $\omega_{m0}$ , es:

$$H = \frac{M\omega_0}{2} \quad (2.17)$$

despejando  $M$  de (2.17) se tiene:

$$M = \frac{2H}{\omega_0} \quad (2.18)$$

Finalmente sustituyendo (2.15) y (2.18) en (2.14) se obtiene la ecuación de oscilación de la máquina síncrona:

$$M \frac{d^2\delta_e}{dt^2} + D \frac{d\delta_e}{dt} = P_m - P_{ge} \quad (2.15)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden puede ser escrita como dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_e}{dt} &= \omega \\ M \frac{d\omega}{dt} &= P_m - P_{ge} - D\omega \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\delta_e$  es el desplazamiento angular del rotor y  $\omega$  es la variación de la velocidad angular del rotor,  $\omega_r$ , con respecto a la velocidad síncrona,  $\omega_0$ ; es decir,  $\omega = \omega_r - \omega_0$ .

## 2.3 Red de transmisión

El modelo de un elemento de transmisión está dado por las ecuaciones de flujos de potencia inyectada en sus terminales. Asumiendo que el elemento de transmisión está conectado entre los nodos de carga  $i$  y  $j$ , las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \cos \theta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j] \\ Q_{ij} &= -V_i^2 B_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \theta_i - \theta_j] \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde la conductancia,  $G_{ij}$ , es la parte real de la admitancia,  $Y_{ij}$ , y la susceptancia,  $B_{ij}$ , es su parte imaginaria; es decir,  $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ .  $Y_{ij}$  es un elemento de la matriz de admitancia nodal,  $Y_{BUS}$ , expresada en forma rectangular.

De igual manera, si el elemento está conectado entre un nodo generador  $i$  y un nodo de carga  $j$ , las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E_i^2 G_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \cos \delta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j] \\ Q_{ij} &= -E_i^2 B_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \delta_i - \theta_j] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Adicionalmente, para cada nodo del sistema se debe cumplir el balance de potencia. En el caso del nodo  $i$ , el balance de potencia queda descrito por:

$$\begin{aligned} P_{gi} &= P_{di} + P_{ei} = P_{di} + \sum_{j \in \Omega} P_{ij} \\ Q_{gi} &= Q_{di} + Q_{ei} = Q_{di} + \sum_{j \in \Omega} Q_{ij} \end{aligned} \quad (2.18)$$

en donde:

$\Omega$  es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$

$P_{gi}$ ,  $Q_{gi}$  son la potencia activa y reactiva generada en el nodo  $i$ , respectivamente

$P_{di}$ ,  $Q_{di}$  son la potencia activa y reactiva demandada en el nodo  $i$ , respectivamente

$P_{ei}$ ,  $Q_{ei}$  son la potencia activa y reactiva inyectada al nodo  $i$ , respectivamente

La expresión para las potencias de demanda en el bus  $i$  dependerá del tipo de modelo de carga empleado. Debe puntualizarse que la ecuación (2.18) corresponde a la ecuación (2.14) en el caso de que el nodo  $i$  contenga uno o más generadores.



## 2.4 Cargas

Con frecuencia en el análisis de sistemas eléctricos de potencia, el modelado de la carga es considerado como balanceado y de potencias activa y reactiva constantes, sin que estas dependan del voltaje o la frecuencia. En años recientes esta consideración no parece del todo consistente con los problemas del mundo real y los resultados que éste arroja [Chen96].

La carga eléctrica puede considerarse como una representación matemática de la relación existente entre el voltaje nodal (magnitud y ángulo) y la potencia (activa o reactiva) o la corriente que fluye hacia la carga [IEEE93]. En general, las cargas pueden clasificarse en dos tipos: cargas estáticas y cargas dinámicas [Chen96]. Las primeras son modeladas por ecuaciones algebraicas que expresan las potencias activa y reactiva en cualquier instante de tiempo en función de la magnitud del voltaje del bus y frecuencia en ese mismo instante de tiempo. Por el contrario, las cargas dinámicas son modeladas por ecuaciones diferenciales que expresan las potencias activa y reactiva en cualquier instante de tiempo en función del voltaje del bus y frecuencia dados en el instante de la evaluación y de instantes de tiempo pasados [García02].

### 2.4.1 Modelos estáticos

Entre los modelos clásicos de cargas estáticas están los siguientes [García02] [Chen96]:

**Impedancia constante:** esta es una carga donde la potencia varía directamente con respecto al cuadrado de la magnitud del voltaje.

**Corriente constante:** en esta carga la potencia varía directamente con la magnitud del voltaje.

**Potencia constante:** en esta carga la potencia no varía con cambios en la magnitud del voltaje.

**Modelo polinomial:** Las siguientes ecuaciones polinomiales pueden ser usadas para modelar la potencia activa y reactiva de una carga como función del voltaje en terminales [Chen96]:

$$P = P_0 \left( a_1 \frac{V^2}{V_0^2} + a_2 \frac{V}{V_0} + a_3 \right) \quad (2.19)$$

$$Q = Q_0 \left( a_4 \frac{V^2}{V_0^2} + a_5 \frac{V}{V_0} + a_6 \right)$$

Este modelo también es conocido como modelo ZIP, por el hecho de que están agregados los tres primeros tipos de cargas: Impedancia ( $Z$ ), corriente ( $I$ ) y potencia ( $P$ ) constantes. Las variables  $V_0$ ,  $P_0$  y  $Q_0$  son el voltaje y potencias nominales [García02] mientras que los coeficientes  $a_i$  pueden ser obtenidos mediante regresión cuadrática

**Modelo exponencial:** este modelo de carga representa la relación entre la potencia y el voltaje como una ecuación exponencial el cual esta descrito por [García02]:

$$P = P_0 \frac{V}{V_0}^p$$

$$Q = Q_0 \frac{V}{V_0}^q$$
(2.20)

Los exponentes pueden tomar cualquier valor incluso valores negativos.

**Modelo dependiente de la frecuencia:** este modelo es representado por el producto de un modelo polinomial o exponencial y un factor descrito por:

$$1 + \alpha_f(f - f_0)$$
(2.21)

donde  $f$  es la frecuencia del voltaje de bus,  $f_0$  es la frecuencia nominal y  $\alpha_f$  es el parámetro de sensibilidad de la frecuencia del modelo. Sin embargo, este modelo no es muy usado debido a que la frecuencia no es una variable de estado en el análisis de las redes eléctricas. Esta variable puede ser calculada tomando la derivada del ángulo del voltaje de bus y es de gran importancia para los modelos dinámicos, especialmente para el modelo dinámico empleado de la carga no lineal.

Estos modelos de cargas estáticas se pueden incluir fácilmente en la formulación de flujos de potencia en los que, regularmente, sólo se utiliza el modelo de potencia constante.

## 2.4.2 Modelo dinámico

Los modelos para las cargas dinámicas pueden llegar a ser variados debido a la gran diversidad de cargas que hay en un sistema. La forma genérica de este tipo de modelos de carga se obtiene substituyendo las ecuaciones de flujo de potencia en el modelo, obteniéndose la forma una representación de la forma:

$$z = h(z, t, y(t))$$
(2.22)

en este caso,  $z(t)$  es el vector de variables de estado del bus de carga. La descripción del modelo, para analizar fenómenos dinámicos, empleado en este trabajo se muestra a continuación:

**Modelo dinámico:** Este modelo de carga es un modelo mixto que incluye una combinación en paralelo de un modelo estático de carga basado en potencia constante y un modelo dinámico. En el presente trabajo se considera como carga dinámica una carga no lineal. El modelo considerado para este dispositivo es el propuesto por Walve [Walve86] que expresa las potencias activa y reactiva como función de la magnitud del voltaje nodal y el ángulo. Este modelo está descrito por las ecuaciones:

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\delta + K_{pv}(V + TV)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\delta + K_{qv}V + K_{qv2}V^2$$
(2.23)

en donde  $P_0$  y  $Q_0$  son las constantes real y reactiva de la carga no lineal;  $P_1$  y  $Q_1$  representan a la carga modelada como potencia constante,  $K_{pw}$ ,  $K_{pv}$ ,  $T$ ,  $K_{qw}$ ,  $K_{qv}$ ,  $K_{qv2}$ , son coeficientes de carga.

## 2.5 Compensador Estático de VAR's (CEV)

Un Compensador Estático de VAR's (CEV) es un dispositivo que consiste de un grupo de capacitores conectados en derivación y un banco de reactores con rápido control por la conmutación de tiristores (Ver Figura 2.4). Un CEV puede ser considerado como una reactancia variable conectada en derivación la cual es ajustada en respuesta a las condiciones operativas del sistema de potencia a fin de controlar parámetros específicos de la red. Dependiendo de la reactancia equivalente del CEV, capacitiva o inductiva, el dispositivo es capaz de extraer corriente capacitiva o inductiva del sistema eléctrico de potencia en su punto de acoplamiento. El control propio de esta reactancia equivalente permite la regulación de la magnitud de voltaje,  $V$  (valor rms), en el nodo del sistema de potencia donde el CEV es conectado. En este trabajo se presentan dos modelos de control reportados en la literatura [Srivastava98], [Laufenberg97].

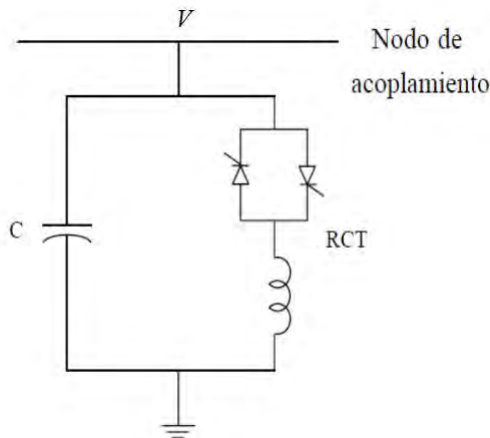


Figura 2.4 Diagrama simplificado del CEV

Como ya se mencionó, el CEV puede ser considerado como una reactancia variable conectada en derivación,  $B_{CEV}$ . El primer modelo de CEV a considerar [Srivastava98] es un dispositivo simple que usa como señal de retroalimentación la magnitud de voltaje del nodo donde está conectado,  $V$ , siendo su objetivo controlar este voltaje a un valor de referencia especificado,  $V_{ref}$ . Lo anterior se logra variando el valor de la susceptancia equivalente del CEV,  $B_{CEV}$ , en función del voltaje en el nodo de conexión. De esta manera, si el voltaje en el nodo de conexión se encuentra sobre el valor de referencia, la susceptancia equivalente del CEV actuará como una carga inductiva, consumiendo reactivos del sistema y así decrementando la tensión en el nodo. Por otra parte, si la tensión en el nodo es inferior al valor de referencia, el CEV se comportará ahora como un capacitor en derivación inyectando potencia reactiva al sistema y de esta forma elevando la tensión en el nodo hasta alcanzar su nivel de referencia.

Este modelo es de primer orden, y su función de transferencia corresponde a un filtro paso-bajas. Los parámetros del control son los siguientes:  $T_{CEV}$ ,  $K_{CEV}$ ; en donde  $T_{CEV}$  y  $K_{CEV}$  son ganancias del filtro. Por otra parte, la señal de entrada está definida como  $V_{ref} - V$  y la señal de salida como  $B$ . Sin embargo, la susceptancia equivalente de CEV no es infinita, tiene límites debidos a la capacidad de los inductores y capacitores que lo conforman; en otras palabras, existe una susceptancia máxima,  $B_{max}$ , y una mínima,  $B_{min}$ , entre las cuales se encuentra la susceptancia equivalente del CEV. Entonces, con la finalidad de aproximar matemáticamente este comportamiento se introduce una función de saturación. Una buena aproximación se obtiene con la función tangente hiperbólica la cual es una función no lineal, continua y suave. De esta manera, la susceptancia  $B_{CEV}$  está limitada y modelada de forma simétrica, tal como lo muestra la segunda ecuación algebraica en (2.24). La Figura 2.5 muestra como se limita la variable  $B$ . Por lo tanto, la susceptancia correspondiente al CEV que el sistema de potencia ve en el nodo donde éste está conectado es  $B_{CEV}$ . Finalmente, en el diagrama de bloques de la Figura 2.6 se muestra el modelo no lineal completo del CEV1.

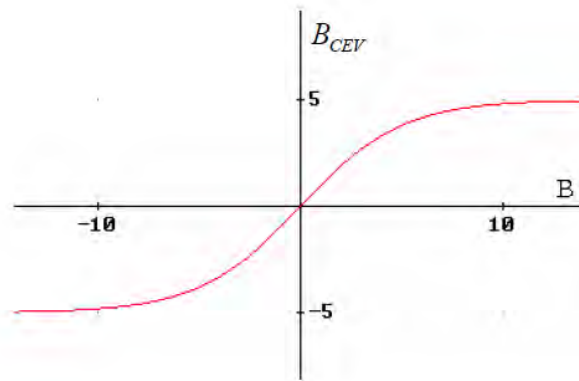


Figura 2.5 Modelado de los límites de la susceptancia  $B$

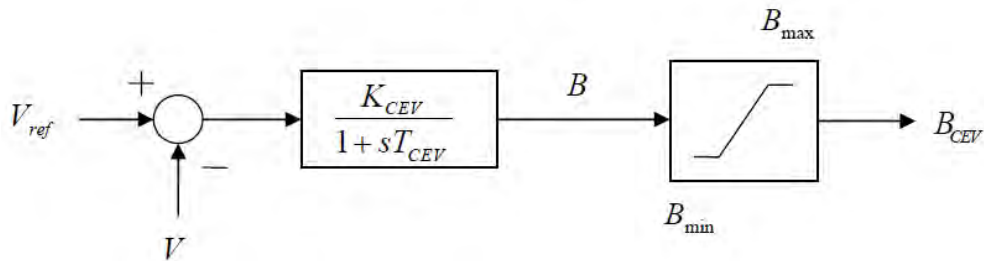


Figura 2.6 Diagrama de bloques de control del CEV1

Las ecuaciones no lineales que modelan la susceptancia del CEV1 son:

$$B = \frac{1}{T_{CEV}} K_{CEV}(V_{ref} - V) - B \quad (2.24)$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

en donde  $B_{lim} = B_{max} = B_{min}$

El segundo modelo del compensador es más completo [Laufenberg97], ya que considera explícitamente la combinación del capacitor fijo y el reactor controlado por tiristores (CF-RCT). De tal manera, la reactancia capacitiva vista por el sistema es modificada por la reactancia inductiva controlada por los tiristores.

El objetivo es controlar la magnitud de voltaje, del nodo en donde está conectado, a un valor de referencia especificado,  $V_{ref}$ . La interacción del CEV con el sistema se puede explicar con base en la Figura 2.7 de la siguiente manera. Un decremento en el nivel de carga inductivo del sistema resulta en un incremento en la magnitud de voltaje en todos los nodos del sistema. Esta acción produce que la característica voltaje-corriente del sistema eléctrico se incremente. Si el CEV no estuviera conectado a la red, el voltaje  $V$  se incrementaría a un valor  $V_1$ . Sin embargo, la interacción entre el sistema de potencia y el CEV mueve a un nuevo punto de operación B. El CEV mantiene la magnitud de voltaje en  $V_3$  por la absorción de corriente inductiva  $I_3$ . Por el contrario, un incremento en el nivel de carga produce un decremento en las magnitudes nodales. Para esta condición el CEV mantiene la magnitud de voltaje en  $V_4$  por la inyección de corriente capacitiva  $I_4$ . Debe ser observado que sin el CEV la magnitud de voltaje sería  $V_2$ . Si el rango de compensación inductivo-capacitivo es excedido el compensador se comporta como un inductor o capacitor fijo. Esta característica se observa en la Figura 2.7. De esta manera se observa que la operación del compensador es dependiente de la magnitud de voltaje en el nodo de acoplamiento y de la pendiente de la característica de control del CEV.

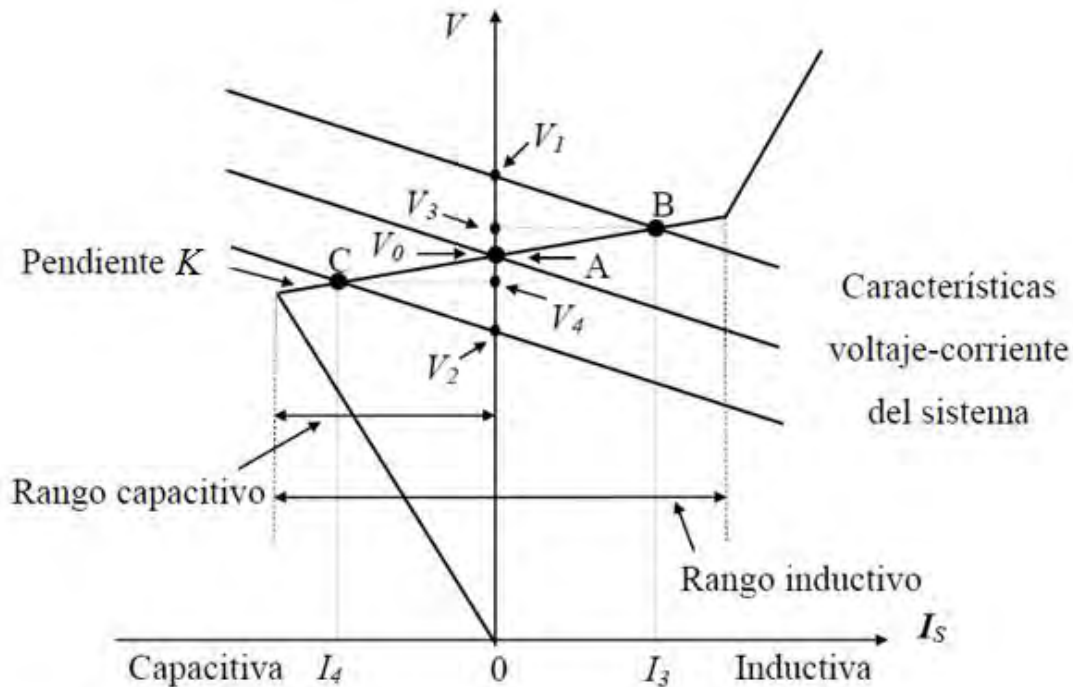


Figura 2.7 Característica de control del CEV2

El diagrama de bloques del *CEV2* es mostrado en la Figura 2.8 [Laufenberg97]. La susceptancia vista por el sistema en el nodo de acoplamiento es la variable  $B_{CEV}$ , la cual está entre los límites del compensador  $B_{min}$  y  $B_{max}$  determinados por  $B_{lim}$ . La corriente vista por el compensador es obtenida al multiplicar la susceptancia, sin limitar, por el voltaje en el nodo donde está conectado el compensador. El bloque  $K$  representa la pendiente de la característica de control del *CEV*, mostrada en la Figura 2.7. Esta pendiente determina la regulación de voltaje que proporciona el compensador.

La señal de entrada es  $V_{ref} - V$  y la señal de salida como  $B_{CEV}$ . Los parámetros del control son  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $K$ ,  $K_i$ ,  $K_p$ , y  $B_{lim}$  en donde  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $K$ ,  $K_i$ ,  $K_p$  son ganancias y  $B_{lim} = B_{max} = B_{min}$ . De esta manera se observa que con la finalidad de modelar la capacidad finita del compensador se hace nuevamente uso de la función de saturación  $\tanh$  tal como se muestra en la penúltima ecuación de (2.25).

Por último cabe aclarar que en los centros de control la única variable del compensador que se manipula es el valor de referencia,  $V_{ref}$ , y en general el valor de  $K$  no se modifica.

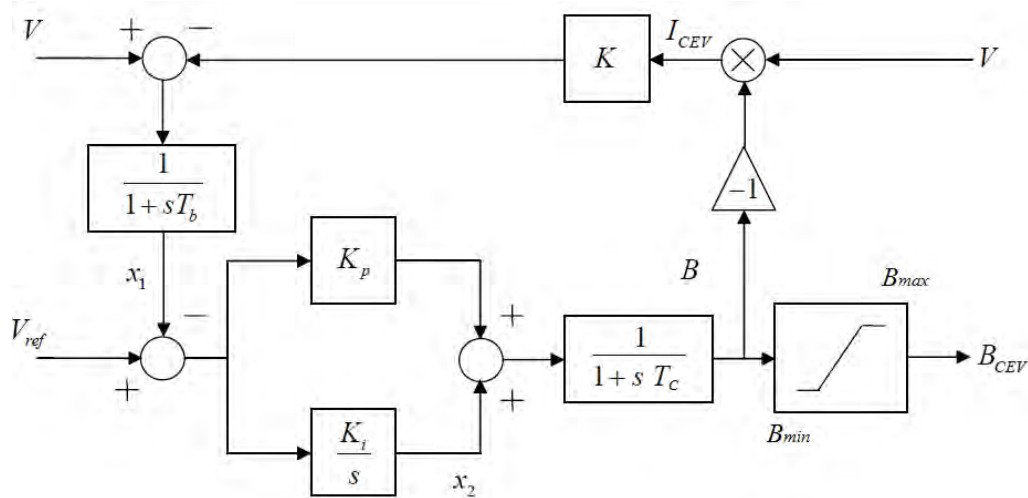


Figura 2.8 Diagrama de bloques de control del *CEV*

Con base en el diagrama de bloques, las ecuaciones no lineales que forman el modelo matemático del *CEV2* son:

$$x_1 = \frac{1}{T_b} [V - 1 + KB - x_1]$$

$$x_2 = K_i (V_{ref} - x_1)$$

$$B = \frac{1}{T_c} [x_2 + K_p (V_{ref} - x_1) - B]$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

$$Q = V^2 B_{CEV}$$

(2.25)

Por último, es importante puntualizar que un compensador estático de VAR es conectado directamente a la red de alto voltaje por medio de un transformador reductor. En la Figura 2.4 no se ha dibujado este transformador y para fines de simulación tampoco se ha agregado, evitando así tener ecuaciones algebraicas de un nodo intermedio que podrían dificultar la obtención de resultados. Es decir, se asume que la reactancia inductiva de este transformador es despreciable con respecto a la capacidad del compensador. Lo importante de este modelo simplificado es el efecto que se puede obtener en algún sistema de potencia al controlar la reactancia inductiva o capacitiva de acuerdo a un voltaje de referencia especificado.

## 2.6 Compensador Estático Síncrono (*StatCom*)

El rápido desarrollo de la tecnología de semiconductores en relación a la capacidad de dispositivos conmutables para operar a mayores niveles de alto voltaje y alta corriente, ha permitido la construcción y puesta en servicio de controladores electrónicos en sistemas de transmisión. Estos sistemas son denominados sistemas flexibles de transmisión en corriente alterna (*FACTS*). Los dispositivos *FACTS* han demostrado ser efectivos en controlar el flujo de potencia y amortiguar oscilaciones en sistemas de potencia [Dong04]. Algunos dispositivos *FACTS* están actualmente en servicio en Japón, Brasil, U.S.A, y otras localidades alrededor del mundo [Dong04].

La mayoría de los controles son primero desarrollados y simulados usando un conjunto de ecuaciones dinámicas que describen cada dispositivo *FACTS*. Los modelos dinámicos de los dispositivos *FACTS* son no-lineales y variantes en el tiempo debido a la naturaleza de los elementos de conmutación que los conforman.

El *StatCom* (compensador estático síncrono) es un dispositivo basado en una fuente conmutada de voltaje (*VSC*) conectada en paralelo al sistema de transmisión a través de un transformador de acoplamiento. La finalidad de este controlador es convertir un voltaje de entrada de corriente directa (*dc*) en un voltaje de corriente alterna (*ac*) trifásico, con una magnitud de voltaje y ángulo de fase controlable a frecuencia fundamental. Un *StatCom* no tiene inercia, por lo cual puede actuar en fracciones de segundo [Uzunovic01]. El *StatCom* puede ser usado para la regulación de voltaje en un sistema de potencia, permitiendo un incremento de transmisión de potencia, mejoramiento de la característica de operación en estado estable, así como la estabilidad operativa del sistema.

El *StatCom* está compuesto de un transformador de acoplamiento, un *VSC* y un dispositivo de almacenamiento de energía. El dispositivo de almacenamiento de energía es un pequeño capacitor, por lo cual el *StatCom* sólo tiene la capacidad de intercambiar potencia reactiva con el sistema de potencia. Si una batería o cualquier otra fuente de voltaje de *dc* son usadas para reemplazar al

capacitor, entonces el *StatCom* podría intercambiar potencia activa y reactiva con el sistema de potencia. Un circuito equivalente de este dispositivo es mostrado en la Figura 2.9.

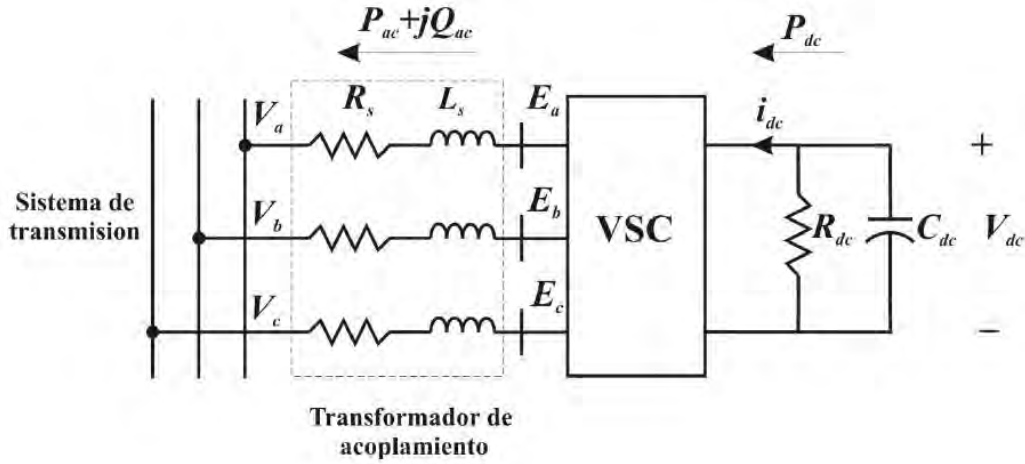


Figura 2.9 Circuito equivalente del *StatCom*

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff a cada una de las fases del lado de *ac*, se tiene lo siguiente; cabe mencionar que las tensiones en el lado de *ac* son valores *rms*:

$$\begin{aligned} E_a - V_{L_s} - V_{R_s} - V_a &= 0 \\ E_b - V_{L_s} - V_{R_s} - V_b &= 0 \\ E_c - V_{L_s} - V_{R_s} - V_c &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para la fase *A* se sabe que los voltajes en la resistencia  $R_s$  y en el inductor  $L_s$  están dados por las siguientes ecuaciones:

$$V_{R_s} = R_s i_a \quad (2.27)$$

$$V_{L_s} = L_s \frac{di_a}{dt} \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.27) y (2.28) en (2.26) las ecuaciones del lazo para el circuito pueden ser escritas de la siguiente forma [Dong]:

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_a + \frac{1}{L_s} (E_a - V_a) \\ \frac{di_b}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_b + \frac{1}{L_s} (E_b - V_b) \\ \frac{di_c}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_c + \frac{1}{L_s} (E_c - V_c) \end{aligned} \quad (2.29)$$



La ecuación (2.29) en forma matricial es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} E_a - V_a \\ E_b - V_b \\ E_c - V_c \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

en donde  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico, el vector  $[E_{abc}]$  contiene el voltaje de fase en el lado de *ac* del inversor,  $[V_{abc}]$  es el vector con los voltajes del lado sistema de potencia y el vector  $[i_{abc}]$  está asociado a las corrientes de fase. El voltaje de salida del *StatCom* es [Dong] [Dong04]:

$$E_a = kV_{dc} \cos(\omega_e t + \alpha + \delta) \quad (2.31)$$

en donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $k$  es el índice de modulación,  $\alpha$  es el ángulo que existe entre el voltaje en terminales del *StatCom*  $E$  y el voltaje en el nodo de conexión  $V$ ,  $\delta$  es el ángulo del voltaje en el nodo de acoplamiento y  $\alpha + \delta$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado al sistema (Ver Figura 2.10). Para definir un marco de referencia síncrono propio, el modelo dinámico se puede simplificar mediante la transformación de Park. La transformación de Park o  $d-q$  convierte las componentes ' $abc$ ' del sistema trifásico a otro sistema de referencia ' $dq\theta$ '.

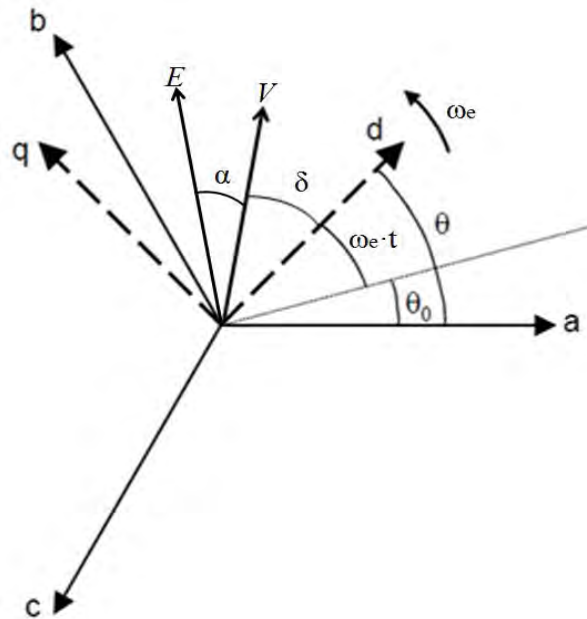


Figura 2.10 Vectores instantáneos de voltaje en la carga  $V$  y en la salida del *StatCom*  $E$

Transformando el modelo del *StatCom* a este marco de referencia, las ecuaciones en por unidad en el bus de conexión pueden ser escritas como [Dong], [Dong04], [Lehn02], [Schauder93]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}i'_d &= -\frac{R'_s\omega_b}{L'}i'_d + \omega_e i'_q + \frac{k\omega_b}{L'}\cos\alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'}\cos\delta \\ \frac{d}{dt}i'_q &= -\frac{R'_s\omega_b}{L'}i'_q - \omega_e i'_d + \frac{k\omega_b}{L'}\sin\alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'}\sin\delta \\ \frac{d}{dt}V'_{dc} &= -\frac{3}{2}kC'_{dc}\omega_b \cos\alpha + \delta i'_d + \sin\alpha + \delta i'_q - \frac{C'_{dc}\omega_b}{R'_{dc}}V'_{dc}\end{aligned}\quad (2.32)$$

donde  $i'_d$  e  $i'_q$  son las corrientes inyectadas del *StatCom* en [p.u.],  $V'_{dc}$  es el voltaje del capacitor en [p.u.],  $R'_{dc}$  representa las pérdidas por conmutación en [p.u.],  $R'_s$  y  $L'$  son las resistencias e inductancias en [p.u.] del transformador de acoplamiento respectivamente y  $V'$  es el voltaje en [p.u.] en el bus de conexión. La obtención de las ecuaciones (2.32) se detalla en el Apéndice D.

Las ecuaciones de balance de potencia activa y reactiva en el nodo de conexión del *StatCom* están dadas por las ecuaciones:

$$-P_{di} = P_{ei} = -V_i i_d \cos\delta + i_q \sin\delta + \sum_{j \in \Omega} P_{ij} \quad (2.33)$$

$$-Q_{di} = Q_{ei} = -V_i i_d \sin\delta - i_q \cos\delta + \sum_{j \in \Omega} Q_{ij} \quad (2.34)$$

en donde el primer término del lado derecho de la igualdad indica la potencia activa y reactiva inyectada por el *StatCom* respectivamente; por otra parte, la sumatoria corresponde a las ecuaciones de flujo de potencia del sistema; además  $\Omega$  es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$ ,  $P_{di}$  es la potencia demandada en el nodo  $i$ ,  $P_{ei}$  es la potencia inyectada al nodo  $i$ .

Los objetivos de control del *StatCom* son proveer potencia reactiva y mantener el voltaje del capacitor constante. Conceptualmente, el intercambio de potencia reactiva del *StatCom* con el sistema de potencia es controlado al regular la amplitud de voltaje de salida del *StatCom* con respecto a la magnitud de voltaje medido en su punto de conexión con la red de transmisión. Si la amplitud de voltaje de salida del *StatCom* es mayor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, la corriente fluye a través del transformador desde el *StatCom* hacia el sistema de potencia, y el dispositivo inyecta potencia reactiva. Por el contrario, si la amplitud del voltaje de salida del *StatCom* es menor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, entonces la corriente fluye desde el sistema de potencia hacia el *StatCom*, tal que el dispositivo absorbe potencia reactiva. Si la amplitud de voltaje de salida del *StatCom* y la amplitud de voltaje del sistema de potencia son las mismas, el *StatCom* no genera ni absorbe potencia reactiva [Uzunovic01].

La forma de lograr el intercambio de potencia reactiva y mantener el voltaje del capacitor constante es ajustando el índice de modulación,  $k$ , y el ángulo de fase,  $\alpha + \delta$ , en (2.31). El control implementado en este trabajo es el mostrado en la Figura 2.11 [Dong04].

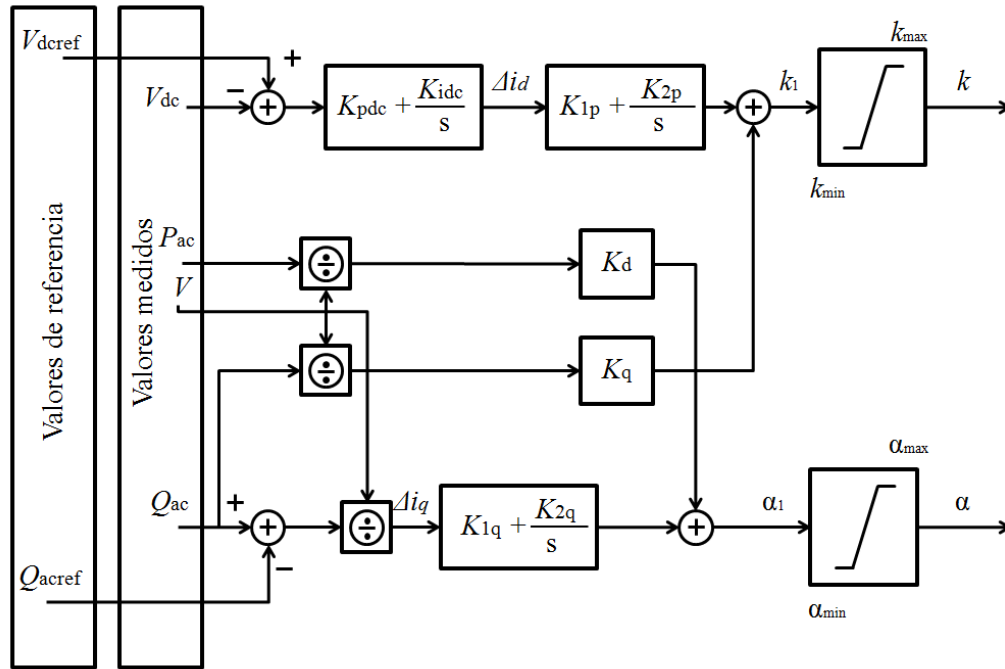


Figura 2.11 Diagrama de control del StatCom

En este control las variables medidas  $V_{dc}$  y  $Q_{ac}$  son comparadas con los valores de referencia y usadas para calcular los errores de las señales en  $i_d$  e  $i_q$ . Un control proporcional-integral (PI) es usado para producir las señales de control de  $k$  y  $\alpha$  [Dong]. El ángulo  $\alpha$  y el índice de modulación  $k$  son afectados por los cambios en  $i_d$  e  $i_q$ ; sin embargo,  $\alpha$  está más correlacionada con los cambios en  $i_d$  y  $k$  está más correlacionada con  $i_q$  [Dong]. En base a esta observación, los términos de acoplamiento pueden ser despreciados ( $K_d = K_q = 0$ ), logrando un control desacoplado. Los parámetros del control  $K_{pdc}$ ,  $K_{1p}$  y  $K_{1q}$  corresponden a las ganancias de los controles proporcionales, mientras que  $K_{idc}$ ,  $K_{2p}$  y  $K_{2q}$  a las ganancias de los controles integrales.

Finalmente se observa que las salidas  $k$  y  $\alpha$  están limitadas por medio de una función de saturación  $\tanh$  y que el límite está dado de acuerdo a lo siguiente:  $k_{lim} = K_{max} = K_{min}$  y  $\alpha_{lim} = \alpha_{max} = \alpha_{min}$ .

Con base en el diagrama de la Figura 2.11, las ecuaciones de control son:

$$x_1 = K_{i_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc}$$

$$\Delta i_d = K_{p_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} + x_1$$

$$x_2 = K_{2p} \Delta i_d$$

$$K_1 = K_{1p} \Delta i_d + x_2$$

(2.31)

$$x_3 = K_{2q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V}$$

$$\alpha_1 = K_{1q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} + x_3$$

$$k = k_{lim} \tanh \frac{k_1}{k_{lim}}$$

$$\alpha = \alpha_{lim} \tanh \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}$$

## 3 Conceptos de la teoría de bifurcación

### 3.1 Introducción

A continuación se definen formalmente los elementos sobre los cuales se desarrolla la teoría de las bifurcaciones. Se precisan términos tales como: sistema dinámico, órbita, plano de fase, conjunto invariante y estabilidad. Del mismo modo se presentan las funciones de Poincaré mediante las cuales el análisis de los sistemas dinámicos continuos se puede simplificar.

Posteriormente se presenta una breve descripción de la teoría de bifurcaciones en donde se detallan términos como bifurcaciones locales y globales, y los diferentes tipos que se pueden presentar en cada una de las anteriores. Adicionalmente se muestran planos de fase cuando acontecen bifurcaciones locales o globales con la finalidad de aclarar los conceptos.

### 3.2 Definición de un sistema dinámico

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyas variables de estado siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un sistema de ecuaciones y dinámicos porque sus variables de estado varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. Así, un sistema dinámico es la representación matemática de un proceso determinístico. Si se conoce la ley que gobierna su evolución y su estado inicial, se puede predecir cualquier estado futuro del sistema. Todos los posibles estados del sistema se pueden representar por puntos en algún conjunto  $X$  llamado espacio de estados de esta forma:

$$X = \{x : x \text{ es un estado del sistema dinámico}\}$$

mientras que el conjunto de  $n$  variables en el tiempo  $t$ , es llamado vector de estado.

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

La evolución del sistema dinámico supone un cambio de estado en un tiempo  $t \in T$ , en donde  $T$  es un conjunto ordenado. Dependiendo de la naturaleza de  $T$ , se pueden clasificar los sistemas dinámicos en dos grupos:

- Sistemas dinámicos de tiempo continuo, si  $T = \mathbb{R}^n$
- Sistemas dinámicos de tiempo discreto, si  $T = \mathbb{Z}^n$

La ley de evolución que determina al vector de estados  $x(t)$  del sistema en un tiempo  $t$ , a partir de un estado inicial  $x(t_0)$  conocido, se puede definir en forma general así:

$\forall t \in T \exists \varphi^t$ , tal que:

$$\begin{aligned} \varphi^t: X &\rightarrow X \\ \varphi^t: x(t_1) &= \varphi^t x(t_0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

La función o mapa  $\varphi^t$  es llamado operador de evolución del sistema dinámico. En el caso de sistemas continuos, la familia de operadores  $\varphi^t$   $t \in T$  es llamado flujo.

La respuesta en estado estacionario del sistema es el comportamiento asintótico de éste cuando el tiempo tiende a infinito. Por su parte, la respuesta en estado transitorio del sistema es aquel comportamiento que muestra el sistema antes de alcanzar el estado estacionario.

## 3.2.1 Clasificación de sistemas dinámicos

### 3.2.1.1 Discretos o continuos

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente. Los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales; éstas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y ecuaciones diferenciales con retrasos (DDEs). Por otro lado si el tiempo es discreto los sistemas se describen por medio de ecuaciones de diferencias (DEs).

En lo referente a ecuaciones diferenciales, la diferencia entre las ODEs y las PDEs es la variable con respecto a la cual varían las variables de estado del sistema. En las ODEs sólo hay una variable independiente que es generalmente el tiempo. En contraste, en una PDE puede haber dos o más variables independientes.

En el presente trabajo se abordará el modelo clásico de tres nodos de un sistema eléctrico de potencia. El modelo corresponde a un sistema dinámico continuo cuya ley de evolución está dada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). En el caso de un sistema autónomo contenido en un espacio de estados, la ley de evolución del sistema está dada en términos de las velocidades  $\dot{x}(t)$  como funciones de las variables de estado  $x(t)$  de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{3.2}$$

en donde  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\dot{x}(t) = d[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T / dt \in \mathbb{R}^n$  y la función vectorial  $f(x(t)) = [f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t))]^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable. La ecuación (3.2) representa un sistema autónomo de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias. Dada una condición inicial para el vector de estado en el tiempo  $t=0$ ,  $x(0) = x_0$ , la solución de (3.2) puede obtenerse por métodos de integración numérica. Lo anterior constituye la solución de un problema de valor inicial.

### 3.2.1.2 Autónomos o no autónomos

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  mientras que si al sistema dinámico lo modela la ODE no autónoma o forzada  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  el sistema dinámico es no autónomo.

La diferencia entre una y otra radica en que la primera no contiene ningún estímulo externo al sistema que fuerce el comportamiento natural de la dinámica del sistema, mientras que la segunda sí. La función que fuerza el comportamiento del sistema puede ser constante, periódica, aleatoria, etc.

### 3.2.1.3 Invariantes en el tiempo o variantes en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si este no depende explícitamente del tiempo. De la definición se puede concluir que todo sistema autónomo es invariante en el tiempo. En general, un sistema dinámico es invariante en el tiempo si:

$$x(t) = x(t + \delta) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}(t + \delta) \quad \forall t \quad (3.3)$$

es decir, para que el sistema sea invariante en tiempo, dos trayectorias que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazamiento en el tiempo. De no cumplirse con la ecuación (3.3) el sistema dinámico recibe el nombre de sistema variante en el tiempo [Nayfeh95].

Los modelos de sistemas eléctricos de potencia analizados en el presente trabajo corresponden a sistemas invariantes en el tiempo ya que no depende explícitamente del tiempo; en otras palabras, la respuesta obtenida en un tiempo dado será la misma que obtengamos con un desplazamiento en el tiempo.

### 3.2.1.4 Lineales o no lineales

Un sistema dinámico es lineal si se cumple que:

$$\dot{x} = f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad (3.4)$$

es decir, es lineal si la función  $f$  que relaciona la tasa de incremento de las variables de estado con sus valores actuales cumple con el principio de superposición.

Existen técnicas ampliamente usadas para analizar estos sistemas lineales como lo son la transformada de Laplace, el principio de superposición, la transformada de Fourier, etc. Por lo anterior es usual encontrar soluciones analíticas exactas de sistemas lineales.

Sin embargo, si algún sistema no cumple la ecuación (3.4), éste se dice es no lineal. El hecho de ser no lineal hace que su análisis sea mucho más complejo [Vidyasagar93]. En la mayoría de las ocasiones no se podrá encontrar soluciones analíticas exactas a los problemas no lineales, por lo tanto la representación de la dinámica del sistema se auxilia mucho de técnicas geométricas de visualización y análisis [Slotine91].

Los modelos empleados en el presente trabajo son no lineales. La respuesta de las variables de estado en el tiempo será obtenida mediante la aplicación de un método numérico. Mientras que la estabilidad de los puntos singulares se obtendrá mediante la linealización alrededor de los puntos de equilibrio y empleando los multiplicadores de Floquet para el caso de los ciclos límite; tal como se trata en los temas 3.5 y 3.6. Como se había mencionado anteriormente, para la obtención de las respuestas en el tiempo, la estabilidad de los puntos singulares y la obtención de los diagramas de bifurcación al variar un parámetro del sistema se hará uso del software *XPPAUT*.

### 3.3 Geometría de sistemas dinámicos

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en una gráfica de la variable de estado contra el tiempo o en una en el espacio de estados. El espacio estados de un sistema  $n$ -dimensional  $x(t) = f(x(t))$  es el espacio en donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada variable de estado del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito.

Una órbita o trayectoria es el conjunto de puntos que definen la evolución de un sistema en el espacio de estados a partir de un estado inicial  $x_0$ . Debido a que la solución se obtiene a partir de la condición inicial  $x_0$ , la órbita pasa a través de  $x_0$  en  $t = 0$ . La trayectoria, conforme el tiempo varía de cero a infinito, se representa en el espacio de estados y recibe el nombre de plano de fase. En la Figura 3.1 se muestra, a manera de ejemplo, la trayectoria en un plano de fase y su respectiva solución en el dominio del tiempo.

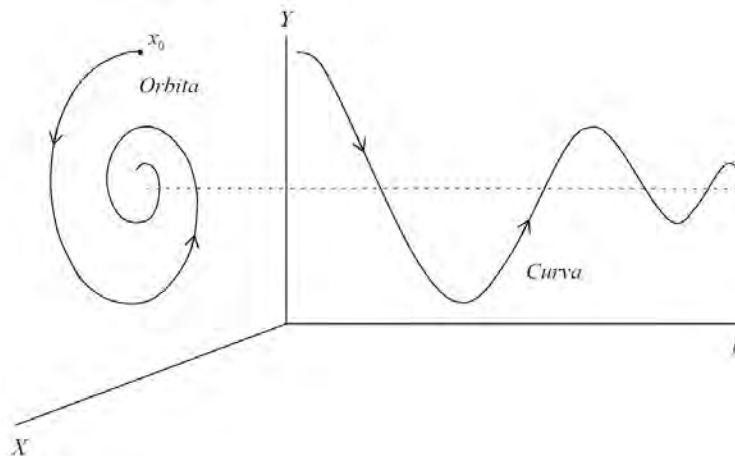


Figura 3.1 Órbita en el plano de fase y curva en el dominio del tiempo



Un retrato de fase es una colección de trayectorias que representa las soluciones de  $x(t)$  en el espacio de estados y proporciona información sobre los comportamientos transitorio y asintótico de la solución del sistema [Nayfeh95]. El retrato de fase nos permite conocer lo que sucede en un sistema no lineal iniciando en diferentes condiciones iniciales y sin tener que resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales no lineales [Slotine91]. La Figura 3.2 muestra a manera de ejemplo un retrato de fase en el que se pueden ver diferentes trayectorias surgidas de diferentes condiciones iniciales.

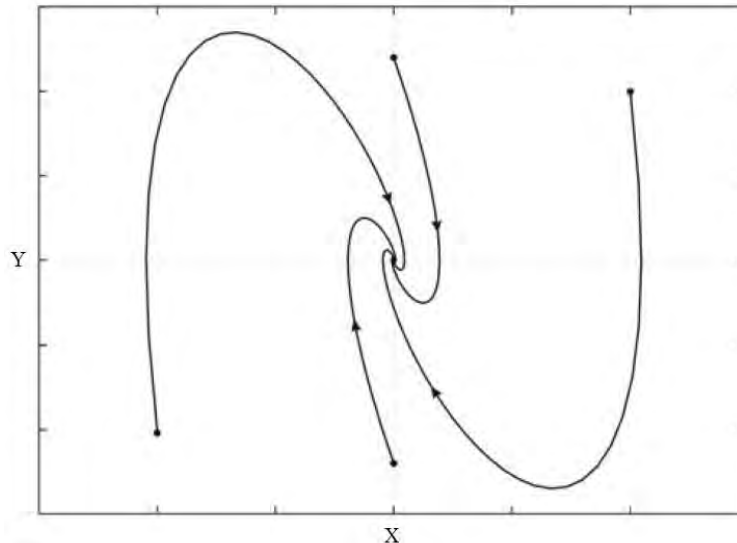


Figura 3.2 Retrato de fase

### 3.4 Estabilidad de sistemas dinámicos

Se dice que una singularidad del espacio fase es estable, sumidero o atractor si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre. De hecho si dicha región atrae a todas las trayectorias del espacio fase, recibe el nombre de atractor global (Véase figura 3.2). Por otro lado, una singularidad del espacio fase tiene estabilidad de Lyapunov si todas las trayectorias que comienzan suficientemente cercanas a ella se mantienen cercanas a esta durante todo el tiempo [Vidyasagar93].

Puede darse la situación de que una singularidad del espacio fase tenga estabilidad de Lyapunov pero no sea atractor, si esto sucede se dice que es neutralmente estable. En el caso en que los dos tipos de estabilidad ocurran al mismo tiempo, la singularidad se dice ser asintóticamente estable [Nayfeh95].

Por último, una singularidad es inestable, repulsor o fuente cuando no es ni atractor ni tiene estabilidad de Lyapunov; es decir, las trayectorias que inician cercanas a ella divergen conforme pasa el tiempo [Nayfeh95].

La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos o ciclos límite [Nayfeh95].

### 3.5 Puntos de equilibrio y su estabilidad

Las singularidades para las cuales  $\dot{x} = 0$  son llamadas puntos de equilibrio, fijos o críticos. Los puntos de equilibrio  $x_*$  de un sistema dinámico, como el expresado por  $\dot{x} = f(x)$ , se obtienen de la solución de esta ecuación, considerando que no existe ninguna dinámica en el sistema, es decir  $\dot{x} = 0$ . El resultado es un conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$0 = f(x) \quad (3.5)$$

Si  $f(x_*) = 0$ , entonces  $\varphi^t(x_*) = x_*$ . Si  $f(x)$  es lineal, entonces existe sólo una solución o punto de equilibrio. Por otra parte, si el sistema es no lineal; es decir,  $f(x)$  es no lineal, existen múltiples soluciones que satisfacen la ecuación (3.2); es decir, múltiples puntos de equilibrio [Slotine91].

En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos de equilibrio, éstos pueden ser [Slotine91]:

**Nodo:** es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto, lo que sucede si los valores propios del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, ver figura 3.3. En cambio, si las trayectorias se alejan del nodo, éste es inestable y los valores propios del sistema son reales, positivos y diferentes entre ellos. En el caso en el que los valores propios del sistema sean reales e iguales, el nodo recibe el nombre de nodo estrella y es estable o inestable dependiendo del signo de los valores propios.

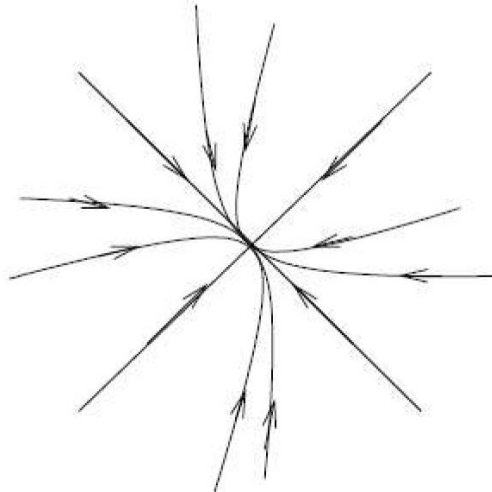


Figura 3.3 Nodo estable

**Foco:** Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él; para que esto suceda los valores propios del sistema son complejos conjugados con parte real negativa. Los focos inestables se producen cuando las trayectorias divergen de él y corresponden a sistemas con valores propios complejos conjugados con parte real positiva, ver Figura 3.4.

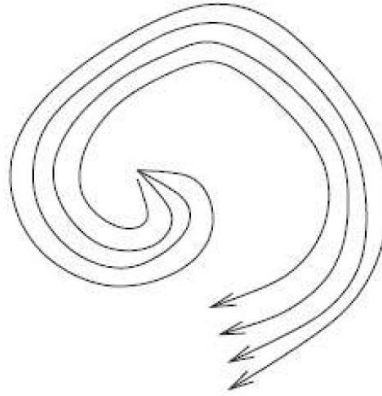


Figura 3.4 Foco inestable

**Centro:** Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando los valores propios del sistema son imaginarios puros, ver Figura 3.5.

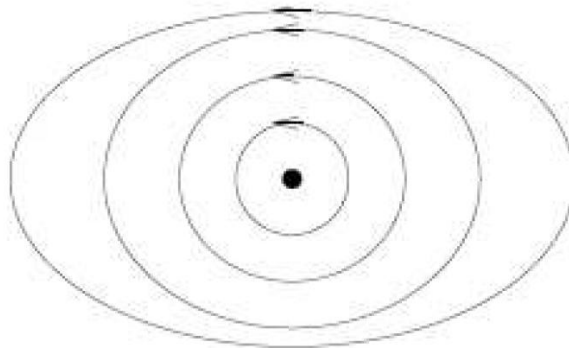


Figura 3.5 Centro neutralmente estable

**Punto silla:** Las trayectorias inicialmente tienden al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando existen valores propios de un sistema que son distintos y de signo opuesto, ver Figura 3.6.

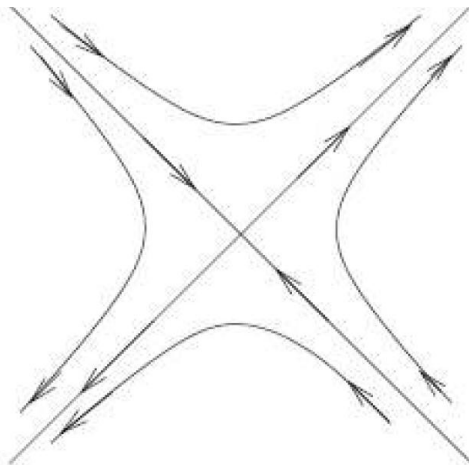


Figura 3.6 Punto silla

Los puntos fijos representan una posición de equilibrio del sistema pero no su estabilidad; es decir, que en el punto de equilibrio el sistema está en reposo, pero no significa que el sistema sea estable ante alguna perturbación.

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{x} = Ax$ , es fácil conocer el tipo de punto fijo y la estabilidad que presenta dicho sistema; simplemente se calculan los valores propios  $\lambda_i$  a partir de la ecuación característica del sistema  $\det A - \lambda I = 0$  y se analiza la relación que hay entre los valores propios. Si todos los valores propios tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Por el contrario, si al menos un valor propio tiene parte real positiva el sistema es inestable [Nise04].

Por otro lado, el análisis de los puntos fijos de un sistema no lineal  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  se puede hacer linealizando el sistema alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio y analizando cada sistema linealizado por separado.

Esto se realiza de la siguiente manera:

Considerando un sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{3.6}$$

resolviendo las ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) \\ 0 &= g(x, y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

se obtiene el punto de equilibrio  $(x_*, y_*)$ . Ahora, se definen dos variables que representan una pequeña perturbación del punto de equilibrio:

$$\begin{aligned} u &= x - x_* \\ v &= y - y_* \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, primeramente desarrollando la derivada de  $u$  con respecto al tiempo ( $x_*$  es constante por ser punto de equilibrio) y expresando la ecuación resultante por una expansión en series de Taylor:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{d}{dt} (x - x_*) = \dot{x} \\
 u &= f(x, y) = f(x_* + u, y_* + v) \\
 u &= f(x_*, y_*) + u \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) + O(u^2, v^2, uv) \\
 u &= u \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Un equivalente lineal del sistema no lineal original está determinado por la ecuación (3.11). Esta ecuación se obtiene al considerar lo siguiente:

- Las perturbaciones  $u$  y  $v$  son pequeñas, tal que los términos cuadráticos y de mayor orden de la expansión de Taylor se pueden despreciar.
- Debido a que  $(x_*, y_*)$  son puntos de equilibrio,  $f(x_*, y_*) = 0$

De manera similar para  $v$ :

$$v = u \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) + v \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) \tag{3.10}$$

Agrupando las ecuaciones (3.9) y (3.10) es posible expresar al sistema linealizado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} &= \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad (x_*, y_*) \\
 \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} &= [J]_{(x_*, y_*)} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

en donde la matriz  $J$  (matriz Jacobiana), es evaluada en el punto de equilibrio  $(x_*, y_*)$ .

Cuando todos los valores propios de  $J$  tienen parte real diferente de cero, independientemente de los valores de sus partes imaginarias, el punto fijo asociado es llamado punto fijo hiperbólico. Si al menos un valor propio tenga parte real cero, este punto fijo es llamado punto fijo no hiperbólico. La existencia de dos teoremas, Hartman-Grobman que se aplica a puntos fijos hiperbólicos y el de Shoshitaishvili aplicable a puntos fijos no hiperbólicos [Nayfhe95], nos permiten relacionar la estabilidad de los puntos fijos del sistema linealizado (3.11) con la estabilidad de los puntos fijos del sistema no lineal (3.6). De estos dos teoremas se concluye lo siguiente [Nayfhe95]:

- A. El punto fijo del sistema no lineal (3.6) es estable si el punto fijo del sistema lineal (3.11) es asintóticamente estable.
- B. El punto fijo del sistema no lineal (3.6) es inestable si el punto fijo del sistema lineal (3.11) es inestable.
- C. La linealización no puede determinar la estabilidad de puntos fijos no hiperbólicos. En este último caso, es necesario un análisis no lineal para determinar la estabilidad; es decir, es necesario retener los términos cuadráticos, y algunas veces los términos de mayor orden, en la expansión en series de Taylor dada en (3.9).

El teorema de Hartman-Grobman [Nayfhe95], [Kuznetsov98] implica que las trayectorias en la vecindad de un punto hiperbólico del sistema no lineal son cualitativamente similares a las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio hiperbólico del sistema lineal; es decir, en la vecindad del punto de equilibrio hiperbólico, el comportamiento dinámico del sistema linealizado es cualitativamente similar al comportamiento dinámico local del sistema no lineal.

### 3.6 Ciclos límite y su estabilidad

Las singularidades para las cuales la solución  $x(t)$  de la ecuación  $\dot{x} = f(x(t))$  es periódica; es decir:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ x(t+\tau) &\neq x(t) \quad 0 < \tau < T \end{aligned} \tag{3.12}$$

en donde  $T$  es el periodo mínimo de la solución dinámica, recibe el nombre de ciclo límite únicamente si no existen otras soluciones periódicas cercanas a ella. Un ciclo límite es entonces una solución periódica aislada y corresponde a una órbita periódica aislada en el espacio de fase. A diferencia de los puntos de equilibrio, los ciclos límite se caracterizan por estados variantes en el tiempo [Slotine91].

Los ciclos límite son inherentemente un fenómeno no lineal aunque de acuerdo a lo visto en el tema anterior, en sistemas lineales pueden existir soluciones periódicas llamadas centros, estas órbitas cerradas no están aisladas.

La estabilidad de los ciclos límite se puede resumir de la siguiente forma:

- Un ciclo límite es asintóticamente estable si todas las órbitas, comenzando cerca de éste, alcanzan el ciclo límite conforme el tiempo se incrementa.
- Un ciclo límite es inestable si todas las órbitas, comenzando cerca de éste, se alejan o divergen del mismo.

En algunos casos se pueden tener ciclos límite semiestables. La Figura 3.7 muestra un ciclo límite estable mientras que la Figura 3.8 uno inestable.

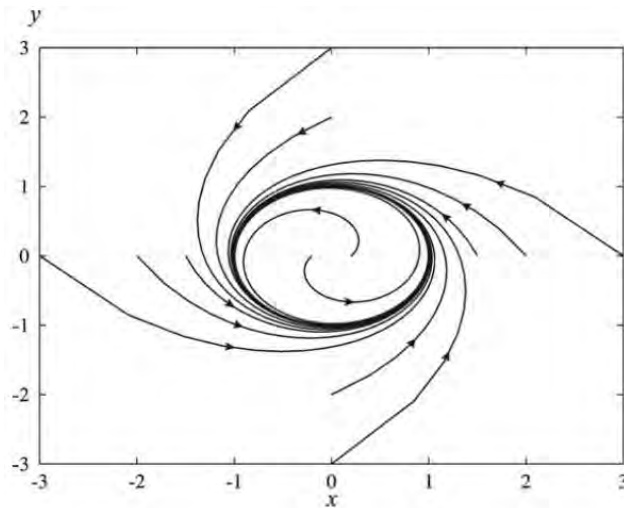


Figura 3.7 Ciclo límite estable

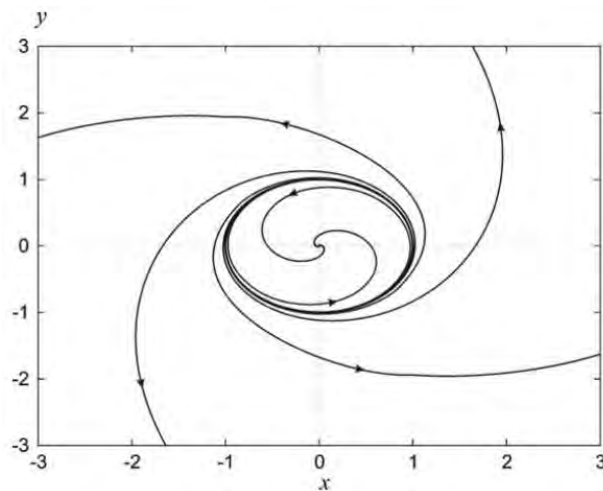


Figura 3.8 Ciclo límite inestable

### 3.6.1 Existencia de ciclos límite

En la presente sección se presentan dos teoremas clásicos para predecir la existencia de ciclos límite en sistemas dinámicos [Slotine91]. El primer teorema muestra una relación simple entre la existencia de un ciclo límite y el número de puntos singulares que encierra.

**Teorema de Poincaré:** *Si en un sistema autónomo de segundo orden existe un ciclo límite, entonces  $N = S + 1$ .*

En este teorema  $N$  representa el número de nodos, centros y focos encerrados por un ciclo límite y  $S$  representa el número de puntos silla encerrados por el ciclo límite. De este teorema se infiere que un ciclo límite debe encerrar al menos un punto de equilibrio.

**Teorema de Poincaré-Bendixson:** *Si una trayectoria de un sistema autónomo de segundo orden permanece en una región  $\Omega$ , entonces al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

- a) *la trayectoria tiende a un punto de equilibrio*
- b) *la trayectoria tiende a un ciclo límite asintóticamente estable*
- c) *la trayectoria es en sí misma un ciclo límite*

## 3.7 Bifurcaciones

Existen ocasiones en las que es deseable estudiar el comportamiento de un sistema dinámico, conforme uno o varios de sus parámetros independientes del tiempo cambian de valor. Uno de los campos matemáticos que permite la realización de este estudio es la teoría de bifurcaciones. Una bifurcación indica un cambio cualitativo en las características dinámicas de un sistema (cambio en la característica topológica del flujo), tales como el número, tipo y estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas periódicas, conforme se varían uno o más parámetros de los cuales depende el sistema. En la teoría de bifurcaciones el espacio formado por las variables de estado y los parámetros de control es llamado espacio estado o espacio estado-parámetro, mientras que la trayectoria plasmada en este espacio es llamada diagrama de bifurcación. La manera en como estos parámetros son variados es en forma estática, esto quiere decir que son variados muy lentamente de tal manera que sus valores instantáneos pueden ser considerados constantes. Los valores de los parámetros en los cuales acontecen estos cambios son llamados parámetros de bifurcación. El punto de equilibrio en el espacio de estados en donde acontece este cambio es llamado punto de bifurcación.

El cambio cualitativo del sistema al encontrarse con un punto de bifurcación se cataloga como bifurcación local o bifurcación global [Nayfeh95]. El primer tipo de bifurcación se refiere al cambio de estabilidad que ocurre en el plano de fase en la vecindad de un punto fijo del sistema [Nayfeh95]. Las bifurcaciones que tratan con el periodo de las soluciones periódicas se clasifican como bifurcaciones globales [Nayfeh95]. Las bifurcaciones globales implican aspectos globales del plano de fase y no pueden ser detectadas analizando vecindades cercanas a los puntos de equilibrio [Kuznetzov98].

A continuación, se describe de manera más detallada las características de las bifurcaciones locales y globales.

### 3.7.1 Bifurcaciones locales

Este tipo de bifurcaciones están asociadas al cambio de estabilidad de un punto de equilibrio; es decir, el plano de fase en la vecindad de un punto de equilibrio antes y después de una bifurcación



local es cuantitativamente diferente. Dos de las posibles bifurcaciones locales que pueden dar lugar a la pérdida de estabilidad del punto de equilibrio son la bifurcación nodo-silla y la bifurcación Hopf. La primera bifurcación es llamada estática debido a que en el punto de bifurcación sólo convergen soluciones asociadas a puntos de equilibrio. Por el contrario, en la bifurcación Hopf convergen soluciones estáticas y soluciones periódicas, por lo que esta bifurcación se clasifica como dinámica. A continuación, se describe cada una de ellas en detalle [Yang98].

### 3.7.1.1 Bifurcación Nodo-silla (SNB)

Esta bifurcación está asociada con la aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme el parámetro de control es variado. Este proceso es mostrado en la Figura 3.11, donde dos puntos de equilibrio se mueven uno hacia otro aniquilándose entre sí.

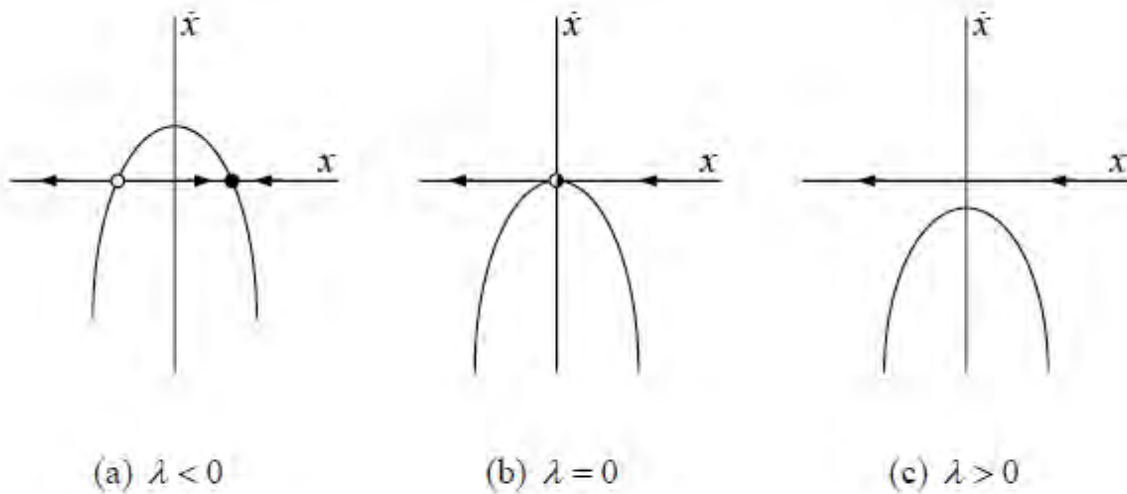


Figura 3.11 Destrucción de los puntos de equilibrio

Si el parámetro de bifurcación  $\lambda$  es menor que cero, existen dos puntos de equilibrio en el sistema, uno estable y otro inestable. Cuando el parámetro es igual a cero, los puntos de equilibrio estable e inestable chocan, y se produce el punto de bifurcación Nodo-silla. Si el parámetro de control es mayor a cero no existen puntos de equilibrio.

Desde el punto de vista matemático, el proceso que provoca una bifurcación Nodo-silla se puede explicar de la siguiente manera: Si el parámetro de bifurcación  $\lambda$  es menor que cero, y dependiendo de la condición inicial de las variables de estado, existen diversas soluciones que satisfacen las ecuaciones algebraicas no lineales. En este caso es posible obtener dos puntos de equilibrio en el sistema, uno estable y otro inestable. Cuando el parámetro es igual a cero, el Jacobiano del sistema se vuelve singular; tal que  $\det J(x_*) = 0$  y no es posible obtener una solución del conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales. Por último, si el parámetro de control es mayor a cero no existen

puntos de equilibrio, lo cual implica que el proceso iterativo aplicado para la solución de las ecuaciones algebraicas no lineales nunca convergerá.

Considerando la ecuación diferencial  $\dot{x} = -x^2 - \lambda$ , el diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 3.12. Para un valor del parámetro de bifurcación menor que cero, esta ecuación tiene dos soluciones, una estable y otra inestable. Las soluciones asociadas a puntos de equilibrio estables e inestables obtenidas para diferentes valores de  $\lambda$  son representadas en el diagrama de bifurcación en línea continua gruesa y línea discontinua delgada, respectivamente. Conforme  $\lambda$  tiende a cero, ambas soluciones se aproximan entre sí, hasta que quedan localizadas en el mismo lugar en el espacio de control-estado para el valor de  $\lambda = 0$ . En este valor acontece la bifurcación Nodo-silla. Para valores de  $\lambda$  mayores de cero, no existe solución alguna del sistema.

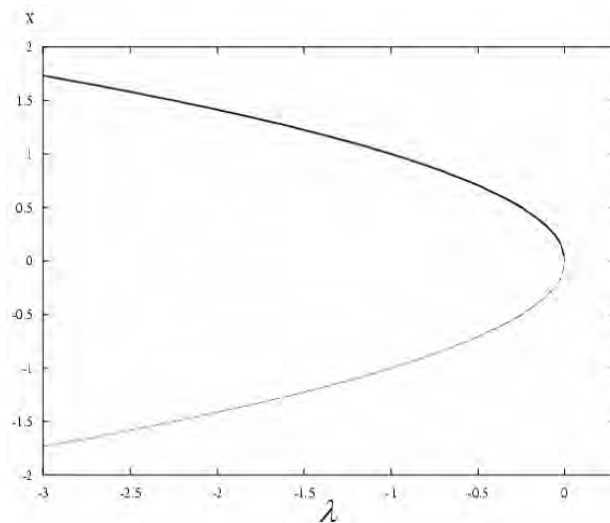


Figura 3.12 Diagrama de una bifurcación Nodo-silla

Por último, la existencia de una bifurcación Nodo-silla queda asegurada si se satisfacen las siguientes condiciones matemáticas [Yang98]:

$$\begin{aligned}
 f(x_*, p) &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_*} &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{x_*, p} &\neq 0 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_*, p} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

La primera ecuación asegura que la solución es un punto de equilibrio. La segunda ecuación implica que este punto de equilibrio es de tipo no hiperbólico. La tercera garantiza que existe una función continua diferenciable  $\lambda = h(x)$  en el punto de bifurcación  $(x_{*0}, \lambda_0)$ . En términos geométricos esto significa que el punto de equilibrio (primer condición) interseca la línea  $x = x_{*0}$  transversalmente. Por último, la cuarta ecuación implica que el punto de equilibrio permanece de manera local en un lado de la línea  $\lambda = \lambda_0$ . Estas dos últimas ecuaciones son conocidas como condiciones de transversalidad.

### 3.7.1.2 Bifurcación Hopf (HB)

Las bifurcaciones Hopf están relacionadas con sistemas de más de una dimensión. Para sistemas de más de una dimensión, la forma de perder estabilidad cuando un parámetro es variado está relacionada con los valores propios del Jacobiano. Para que el sistema sea estable existen dos posibilidades, que los valores propios sean reales y negativos o que sean complejos conjugados con parte real negativa. Por el contrario, para que el sistema sea inestable un valor propio real o dos valores propios complejos conjugados deben cruzar el eje imaginario hacia la parte derecha del plano complejo cuando el parámetro de bifurcación sea variado. El último caso, en el que los dos valores propios complejos simultáneamente cruzan este plano complejo es el origen de la bifurcación Hopf.

Las dos condiciones que se deben satisfacer en la aparición de la bifurcación Hopf son [Yang98]:

- El Jacobiano tiene un simple par de valores propios imaginarios puros en el punto de bifurcación:

$$\gamma \lambda_b = \alpha \lambda_b \pm j\omega(\lambda_b), \text{ entonces } \alpha \lambda_b = 0$$

- Condición de transversalidad

$$\frac{d \operatorname{Re} \gamma(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$$

La primera condición clasifica al punto de equilibrio como no hiperbólico. Y la segunda implica el cruce de los valores propios complejos conjugados hacia el plano derecho del plano complejo.

La característica de esta bifurcación es el nacimiento de una órbita periódica (ciclo límite) de amplitud pequeña desde un punto de equilibrio, cuando un parámetro del sistema es variado. Esta característica oscilatoria del sistema permanecerá estable o crecerá dependiendo si la bifurcación Hopf es supercrítica (**SHB**) o subcrítica (**UHB**), respectivamente [Strogatz00].

La bifurcación supercrítica (**SHB**) ocurre cuando un punto de equilibrio pierde estabilidad en el parámetro de bifurcación y se transforma en un ciclo límite estable para valores más allá del parámetro de bifurcación. El retrato de fase de esta bifurcación se muestra en la Figura 3.13, y un diagrama asociado con las ecuaciones mostradas abajo, las cuales se presentan a manera de ejemplo, se muestra en la Figura 3.14. La rama de soluciones periódicas estables en las que se transforma el punto de equilibrio se muestra en círculos negros a partir del punto de bifurcación.

$$x = \mu x - x^3 \quad (3.15)$$

$$\theta = \omega + \beta x^2$$

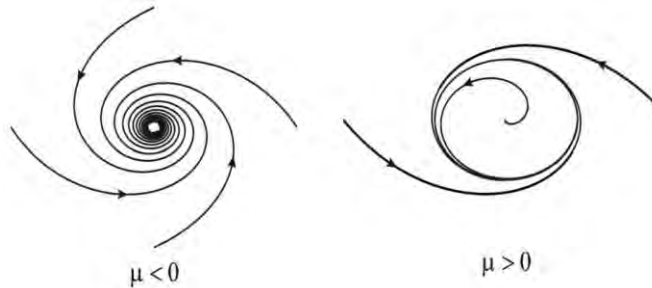


Figura 3.13 Retrato de fase de la bifurcación supercrítica

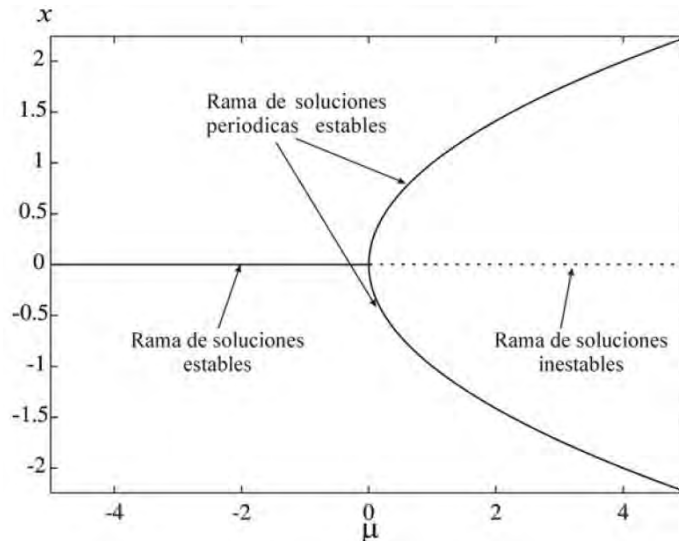


Figura 3.14 Diagrama de bifurcación de una bifurcación Hopf supercrítica

La bifurcación Hopf subcrítica (**UHB**) acontece cuando desde un punto de equilibrio estable emerge un ciclo límite inestable; es decir, una órbita periódica inestable aparece para valores de parámetros en que el punto de equilibrio es estable. El retrato de fase de esta bifurcación se muestran en la Figura 3.15. Para  $\mu > 0$ , el ciclo límite es el único atractor. Cuando  $\mu < 0$  se tienen dos atractores, el ciclo límite estable y un punto fijo en el origen. Entre ellos está un ciclo límite inestable que se muestra en línea discontinua. Conforme  $\mu$  se incrementa desaparece el punto de equilibrio estable quedando un atractor único que frecuentemente es de gran amplitud.

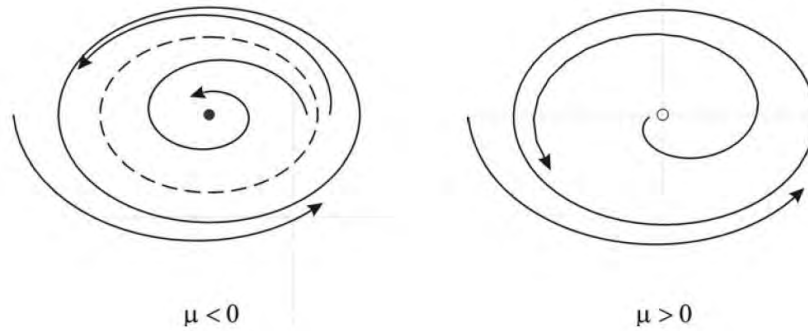


Figura 3.15 Retrato de fase de una bifurcación Hopf subcrítica

Un ejemplo de una bifurcación Hopf subcrítica es dado por la siguiente ecuación. El diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la Figura 3.16. La rama de soluciones periódicas inestables emana de la línea recta de los puntos de equilibrio estables en forma de curva.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 - x^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + \beta x^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

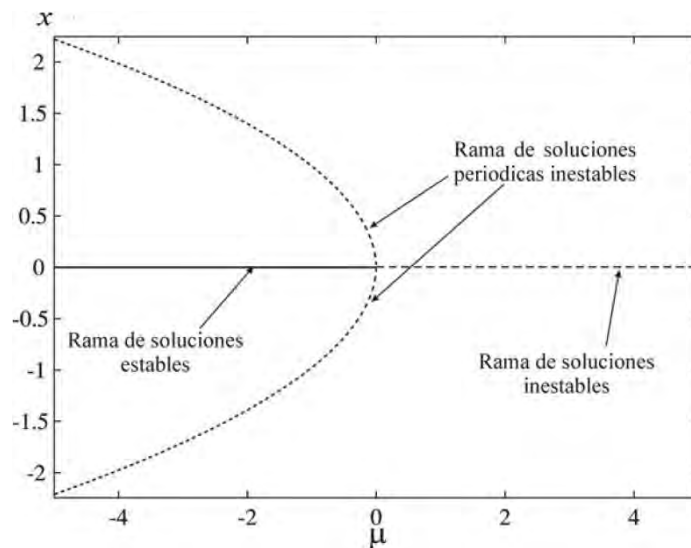


Figura 3.16 Diagrama de bifurcación de una bifurcación Hopf subcrítica

Los valores propios complejos conjugados en ambos tipos de bifurcación Hopf cruzan el eje imaginario hacia la parte derecha del plano complejo como lo muestra la Figura 3.17.

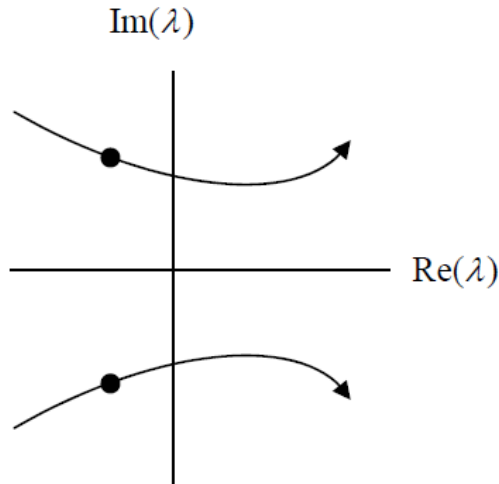


Figura 3.17 Movimiento de los valores propios complejos conjugados

Raramente se tendrá ciclos límite circulares; en general, estos son elípticos y se comienzan a distorsionar cuando el parámetro de bifurcación se varía. La manera para saber el tipo de bifurcación Hopf que acontece en el sistema es por medio del diagrama de bifurcación; esto es, si existen soluciones periódicas estables que chocan con el punto de equilibrio en el punto de bifurcación se tiene el tipo supercrítico, y si estas ramas son inestables se tiene el caso subcrítico. Existe un único punto en donde se dice que la bifurcación es degenerada, este punto es en donde nacen o chocan los dos tipos de bifurcación simultáneamente.

### 3.7.2 Bifurcaciones globales

Todas las bifurcaciones anteriores se clasifican como locales ya que tratan con la creación o destrucción de puntos de equilibrio. Las bifurcaciones que a continuación se analizan son de tipo global, en las cuales los ciclos límite son creados o destruidos. Este tipo de bifurcaciones es difícil de analizar debido a que su detección involucra el muestreo de grandes regiones del plano de fase en lugar de pequeñas regiones alrededor de los puntos de equilibrio. Debe puntualizarse que a pesar que la bifurcación Hopf está asociada con ciclos límites, no está clasificada como global. En el presente trabajo sólo se discutirán dos bifurcaciones globales: la de doblez de ciclos (**CFB**) y la de doble periodo (**PDB**).

La estabilidad de estas órbitas puede ser analizada por medio de los multiplicadores de Floquet de acuerdo a lo visto en el tema 3.6.2. Estos multiplicadores representan una generalización de los valores característicos asociados a un punto de equilibrio ya que describen la proporción en que localmente se expande o contrae el plano de fase cerca del ciclo límite bajo análisis.

### 3.7.2.1 Bifurcación de Doble de Ciclos (CFB)

En esta bifurcación lo que ocurre es la destrucción de dos ciclos límite, uno estable y el otro inestable, tal como se muestra en los retratos de fase de la Figura 3.18. A esta bifurcación también se le llama bifurcación nodo-silla de ciclos, por la analogía con la bifurcación de puntos fijos. De la Figura 3.18 se observa que, para valores del parámetro de bifurcación menores al valor crítico  $\lambda_c$ , sólo existe un punto fijo estable.

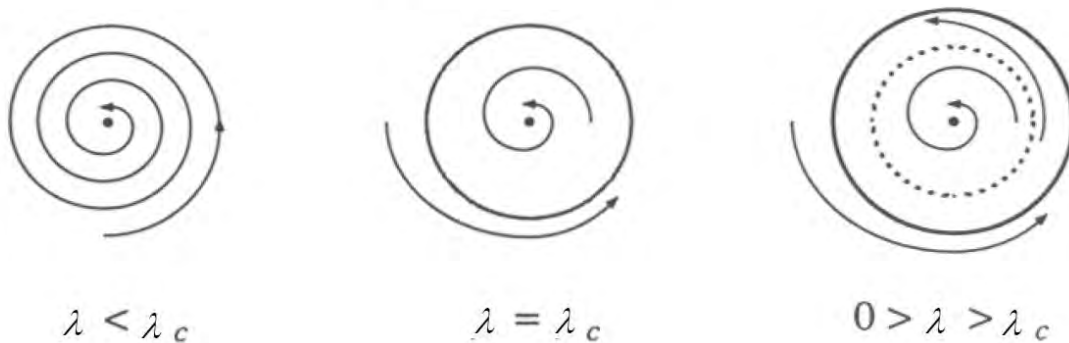


Figura 3.18 Planos de fase de la bifurcación de Doble de Ciclos

Cuando el parámetro toma el valor crítico se tiene un ciclo límite semiestable. Finalmente, para un rango de valores  $0 > \lambda > \lambda_c$ , el ciclo límite semiestable da origen a dos ciclos límite uno estable y otro inestable. Esto puede entenderse de forma más clara visto en dirección inversa, dos ciclos límite, uno estable y otro inestable, chocan y desaparecen en el punto  $\lambda_c$  cuando el parámetro de bifurcación es disminuido. El origen permanece estable y nunca participa en la bifurcación. La Figura 3.19 muestra el diagrama de este tipo de bifurcación. Los ciclos límite estables e inestables son representados en círculos rellenos y vacíos, respectivamente.

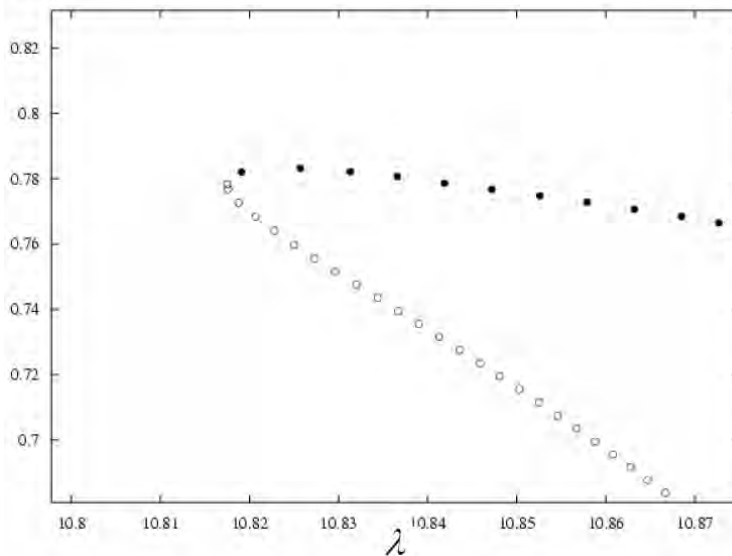


Figura 3.19 Diagrama de una bifurcación de doblez

### 3.7.2.2 Bifurcación de Doble Periodo (*PDB*)

En esta bifurcación se comienza por tener un ciclo límite estable en cierto valor del parámetro de bifurcación, este ciclo describe una órbita en un plano de fase. Cuando el parámetro es variado, las órbitas que recorren las variables de este sistema comienzan a dividirse en dos órbitas, sufriendo una bifurcación de doble periodo. Cuando un multiplicador de Floquet deja el círculo unitario a través de  $-1$ , Figura 3.10b, una bifurcación de doble periodo (*PDB*) aparece y la rama de soluciones periódicas estable que existe antes de la bifurcación continúa como una rama de soluciones periódicas inestables después de la bifurcación [Nayfhe95]. Una rama de soluciones estables de doble periodo es creada si la bifurcación es supercrítica, mientras una rama de soluciones inestables de doble periodo es destruida si la bifurcación es subcrítica [Nayfhe95]. Cuando el parámetro de bifurcación es variado, las órbitas que recorren las variables de este sistema comienzan a dividirse en dos órbitas, sufriendo una (*PDB*). El parámetro de bifurcación puede seguir variándose y el sistema puede sufrir otra bifurcación de doble periodo; esto es, de las dos órbitas creadas en la primera bifurcación, cada una se divide en dos órbitas, teniéndose un total de cuatro órbitas [Nayfhe95]. Si se continúa variando el parámetro se pueden seguir formando más órbitas o trayectorias de operación en cascada en el sistema.

En la Figura 3.20 se muestran estas características para el sistema Moon y Rand [Nayfeh95] de la ecuación:

$$\begin{aligned}x &= \mu x - y - xz \\y &= \mu y + x \\z &= -z + y^2 + x^2z\end{aligned}\tag{3.17}$$

en donde  $\mu$  se ha variado desde  $\mu = 0.2$  hasta  $\mu = 0.5$  y las condiciones iniciales son:  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = 0.5$  y  $z_0 = 0.5$ .

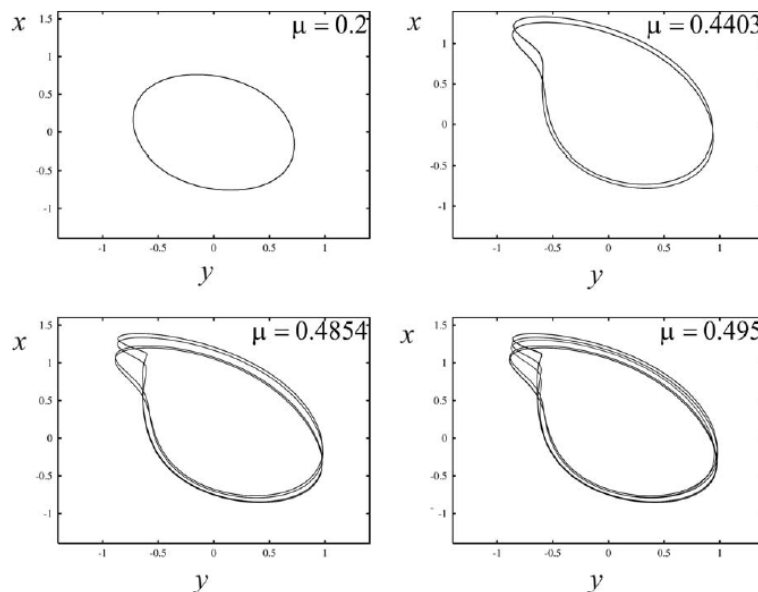


Figura 3.20 Bifurcación de Doble Periodo de Moon y Rand



## 4 Análisis de bifurcaciones en un sistema eléctrico de tres nodos sin compensar

### 4.1 Introducción

En este capítulo se estudia un pequeño sistema eléctrico de potencia de tres nodos con el objetivo de investigar el fenómeno de inestabilidad de voltaje. El sistema eléctrico de potencia es representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas las cuales han sido resueltas empleando métodos numéricos para determinar la dinámica del sistema mostrada en gráficas con respecto al tiempo y en forma de órbitas en planos de fase. Por otra parte, haciendo uso de un método de continuación se han obtenido los diagramas de bifurcación al variar un parámetro del sistema. Además, se muestran de manera gráfica las posiciones del par de valores propios complejos conjugados cuando se tienen bifurcaciones Hopf, estables e inestables y de manera numérica los valores propios del sistema cuando ocurre una bifurcación Nodo-silla.

### 4.2 Metodología de la simulación

Las simulaciones de los sistemas presentados en este trabajo se realizarán en el programa *XPPAUT*. Para poder simular los sistemas en *XPPAUT* es necesario crear un código fuente o archivo *ODE*. En dicho código se introducen las ecuaciones que describen el sistema en cuestión, condiciones iniciales y parámetros del sistema. En el Apéndice E se muestran los archivos tipo *ODE* de los modelos analizados en este trabajo; por otra parte, el Apéndice F muestra una breve descripción de las características y comandos del programa *XPPAUT*.

Para iniciar la simulación del comportamiento del sistema eléctrico de potencia conforme es variado uno de sus parámetros, es necesario obtener un punto fijo asintóticamente estable el cual será el punto de partida para la obtención del diagrama de bifurcación del sistema.

### 4.3 Software para simulación de sistemas dinámicos

*XPPAUT* es un programa que permite la simulación de sistemas dinámicos mediante la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema.

*XPPAUT* está compuesto por dos subprogramas, el primero llamado *XPP* que permite obtener el comportamiento dinámico de un sistema con base a las condiciones iniciales o puntos de equilibrio. El segundo programa llamado *AUTO* es capaz de obtener el diagrama de bifurcación y la estabilidad tanto de los puntos de equilibrio como de los ciclos límite que lo conforman, con base a un método de continuación y los multiplicadores de Floquet, respectivamente. El uso de estos programas se hace de manera conjunta pues los resultados de un programa pueden ser empleados en el otro y viceversa.

*XPP* tiene la capacidad de manejar hasta 590 ecuaciones diferenciales [Ermentrout01]. Cuenta además con 10 ventanas gráficas que son visibles simultáneamente. Por otra parte, el programa

incluye varios subprocesos, tales como histogramas, transformada rápida de Fourier, condiciones de equilibrio y estabilidad, flujos de campo, mapas de Poincaré, entre otros [Ermentrout01]. En el Apéndice F se explican brevemente las características y comandos del programa.

#### 4.4 Simulación del modelo del sistema de tres nodos sin compensar

En esta sección se presenta un estudio detallado del sistema eléctrico de potencia que se muestra en la Figura 4.1 [Dobson88]. Cabe recalcar que los resultados mostrados en la presente sección son arrojados por el simulador.

El sistema a analizar está compuesto por dos generadores; uno es considerado como nodo de referencia, y el otro como una fuente de voltaje constante; su dinámica está representada por la ecuación de oscilación de la máquina síncrona dada en el Capítulo 2.2.1. Por otra parte, las líneas de transmisión son modeladas como admitancias y la carga es modelada de la siguiente manera: un capacitor, una carga constante y una carga dinámica no lineal dependiente de la magnitud del voltaje y del ángulo en el nodo de carga. El modelo anterior es propuesto por Walve [Walve86]. El sistema puede entenderse como una pequeña área conectada a una red que es modelada como un bus infinito [García02]. El modelo matemático utilizado para realizar el estudio dinámico se muestra a continuación:

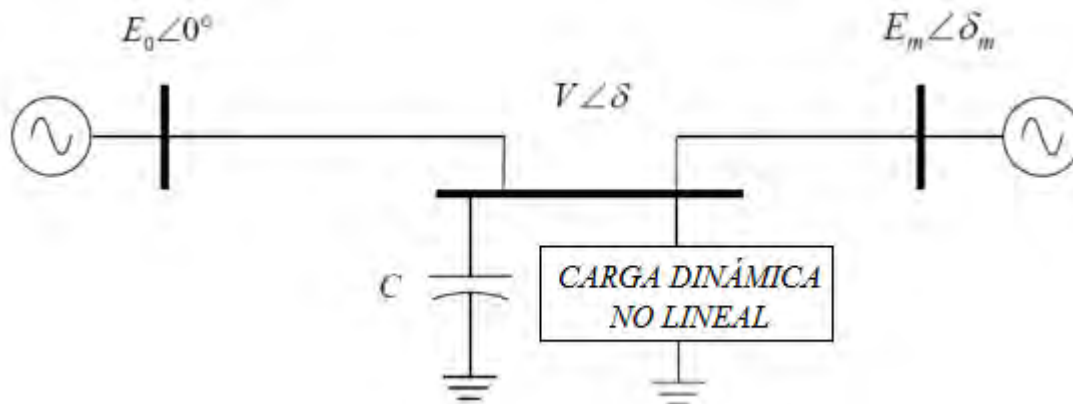


Figura 4.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos

El modelo mixto de la carga que combina a la carga dinámica con la carga constante es descrito con las siguientes ecuaciones [Walve86]:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + K_{pw}\delta + K_{pv}(V + TV) \\ Q &= Q_0 + Q_1 + K_{qw}\delta + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

en donde  $P$  y  $Q$  son las potencias que la carga dinámica demanda del sistema, y están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en las ecuaciones en forma polar:

$$P = -VE'_0Y'_0 \sen \delta + \theta'_0 - VE_mY_m \sen \delta - \delta_m + \theta_m + V^2(Y'_0 \sen \theta'_0 + Y_m \sen \theta_m) \quad (4.2)$$

$$Q = VE'_0Y'_0 \cos \delta + \theta'_0 + VE_mY_m \cos \delta - \delta_m + \theta_m - V^2(Y'_0 \cos \theta'_0 + Y_m \cos \theta_m)$$

Al establecer el balance de potencia en el nodo de carga y en el nodo de generación es posible integrar todas las ecuaciones que modelan a cada uno de los componentes del sistema eléctrico de potencia en un solo modelo; tal que el siguiente conjunto de ecuaciones describe de manera dinámica al sistema analizado. En el Apéndice A se muestra como se obtuvieron las ecuaciones de este modelo en forma polar.

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} [P_m - d_m \omega + VE_mY_m \sen \delta - \delta_m - \theta_m + E_m^2 Y_m \sen \theta_m] \quad (4.3)$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2)$$

El parámetro que se variará de manera cuasiestática (parámetro de bifurcación) es la potencia reactiva  $Q_1$  en el nodo de carga. Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos sin compensar

Parámetro de bifurcación $Q_1=0$ hasta $7.1 [p.u.]$			
$K_{pw}=0.4 [p.u.]$	$K_{pv}=0.3 [p.u.]$	$K_{qw}=-0.03 [p.u.]$	$K_{qv}=-2.8 [p.u.]$
$K_{qv2}=2.1 [p.u.]$	$T=8.5 [p.u.]$	$P_0=0.6 [p.u.]$	$Q_0=1.3 [p.u.]$
$P_1=0 [p.u.]$	$P_m=1 [p.u.]$	$E'_0=1.1755 [p.u.]$	$E_m=1 [p.u.]$
	$M=0.3 [s^2/rad]$	$d_m=0.05 [s/rad]$	
$Y'_0=17.013399 [p.u.]$	$\theta'_0=-0.102696 [rad]$	$Y_m=5 [p.u.]$	$\theta_m=-0.087266 [rad]$

En el conjunto de ecuaciones (4.3) las dos primeras ecuaciones son la ecuación de oscilación de la máquina síncrona;  $\delta_m$  es llamado el ángulo de carga y es el ángulo que existe entre el campo magnético del rotor y el campo magnético del estator. Si este ángulo es positivo, el generador suministra potencia eléctrica al sistema y si es negativo el generador consume potencia eléctrica. La variación del ángulo  $\delta_m$  con respecto al tiempo es  $\omega$  y representa la variación de la velocidad del rotor con respecto a la velocidad de sincronismo; esto es, cuando el generador se encuentra en

sincronismo, la variable  $\omega$  tiene un valor cero. Cuando  $\omega$  es mayor a cero, el rotor se encuentra girando a una velocidad mayor a la de sincronismo; por el contrario, si  $\omega$  es menor a cero, el generador se encuentra girando a una velocidad menor a la de sincronismo. En las siguientes ecuaciones de (4.3) el ángulo  $\delta$  representa al ángulo del voltaje en el nodo de carga y está medido con respecto al nodo de referencia. La variable  $V$  representa la magnitud de voltaje en el nodo de carga y está medida en [p.u.]. Los ángulos y la velocidad están expresados en radianes y radianes sobre segundo, respectivamente.

Como se había mencionado anteriormente, el estudio se inicia obteniendo el punto de equilibrio estable del sistema en  $Q_I=0$ [p.u.]. Con condiciones iniciales muy cercanas a la respuesta de estado estacionario:  $V = 1.0970$  [p.u.],  $\delta_m=0.1994$  [rad],  $\omega = 0$  [rad/s] y  $\delta = 0.0091$  [rad]. La dinámica del sistema bajo estas condiciones se muestra en la Figura 4.2.

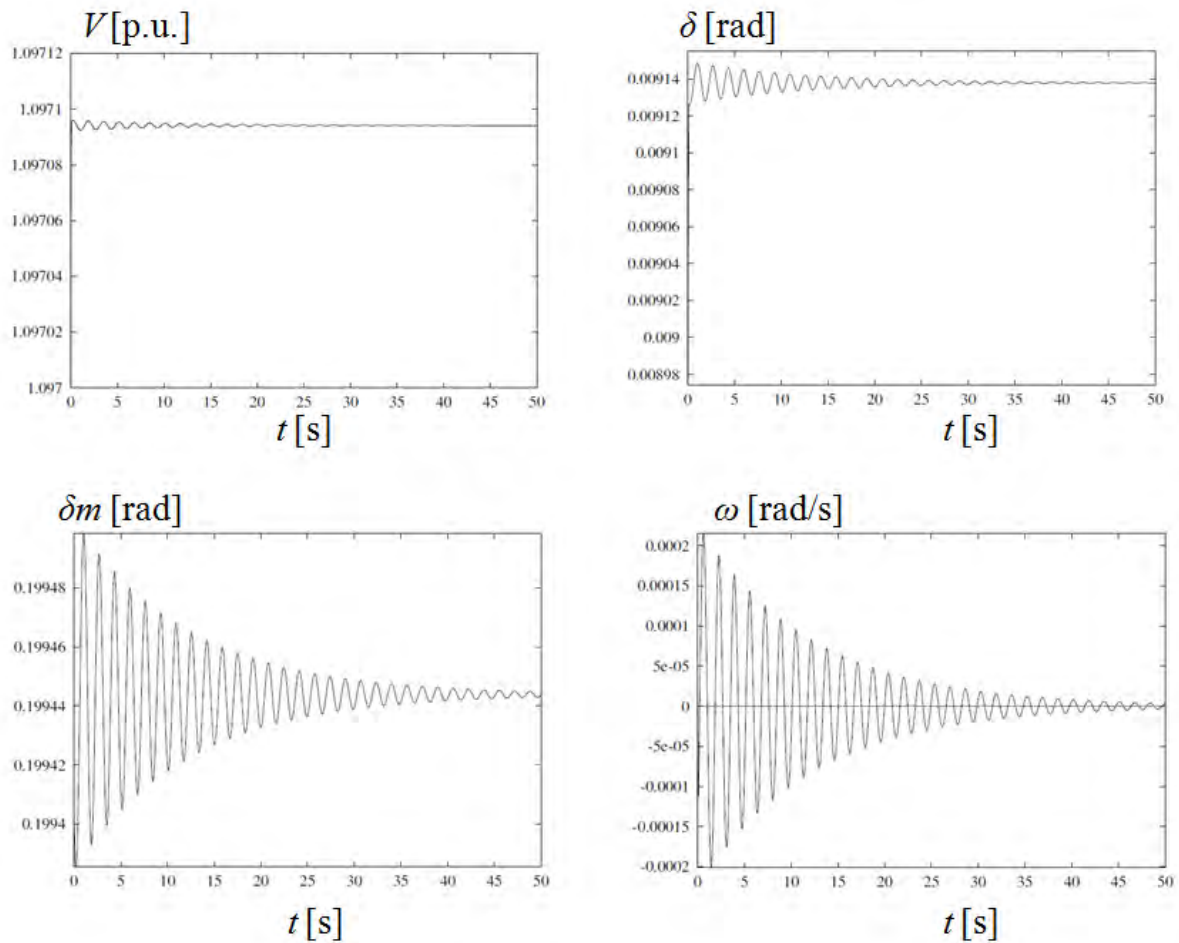


Figura 4.2 Comportamiento de las variables del sistema en  $Q_I = 0$  [p.u.]

De esta manera, este punto de operación inicial, es el primer punto del diagrama de bifurcación que se muestra en la Figura 4.3.

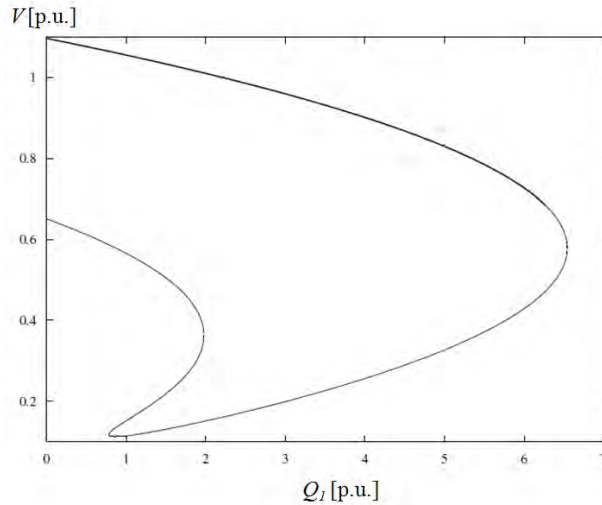


Figura 4.3 Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables

Iniciando nuestro estudio desde este punto se observa que el voltaje comienza a disminuir de forma estable cuando el parámetro de bifurcación se incrementa y se varían junto con él las condiciones iniciales de tal forma que pertenezcan a un punto cercano al punto fijo. Las soluciones correspondientes a puntos de equilibrio estables son mostradas en línea gruesa en el diagrama de bifurcación. En esta región, cualquier condición inicial de las variables de estado del sistema cerca del punto de equilibrio, tienden hacia este; como ejemplo se muestra la Figura 4.4 en la que el parámetro  $Q_l$  vale 4.00 [p.u.] y las condiciones iniciales utilizadas pertenecen a un punto muy cercano al estado estacionario:  $V = 0.90076$  [p.u.],  $\delta_m = 0.24293$  [rad],  $\omega = 0$  [rad/s] y  $\delta = 0.03005$  [rad].

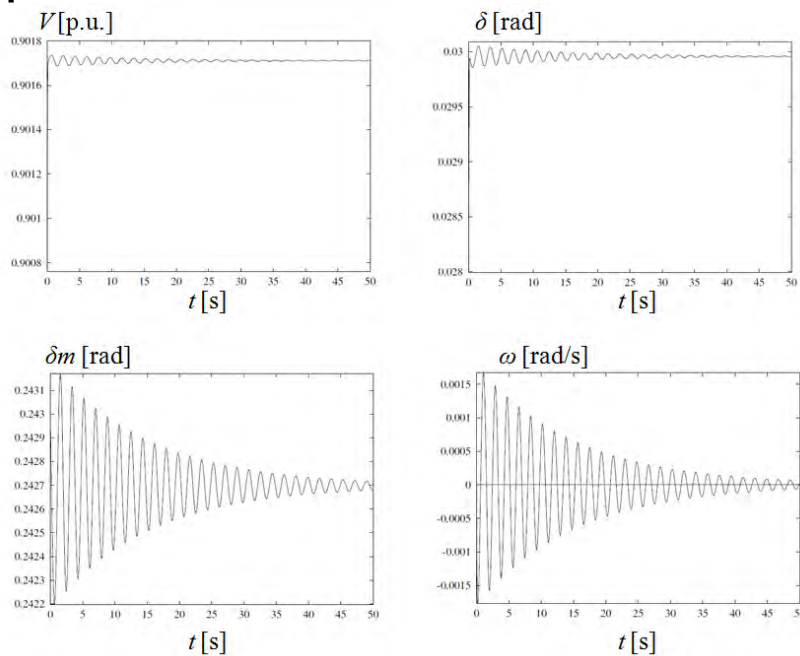


Figura 4.4 Comportamiento de las variables del sistema en  $Q_l = 4.00$  [p.u.]

A partir del valor  $Q_l = 6.27243$  [p.u.], las soluciones del sistema se hacen inestables y se representan en el diagrama de bifurcación por la línea punteada, pero cuando el parámetro toma el valor

$Q_I = 6.54161$  [p.u.] se vuelven a presentar soluciones estables, mismas que continúan hasta  $Q_I = 6.54281$  [p.u.], después de este valor el sistema no tiene puntos de equilibrio.

En las regiones marcadas como inestables, el sistema presenta soluciones periódicas como se muestra en la Figura 4.5. En este diagrama se pueden observar dos bifurcaciones Hopf, una bifurcación de doblez, una bifurcación nodo-silla y dos bifurcaciones de doble periodo.

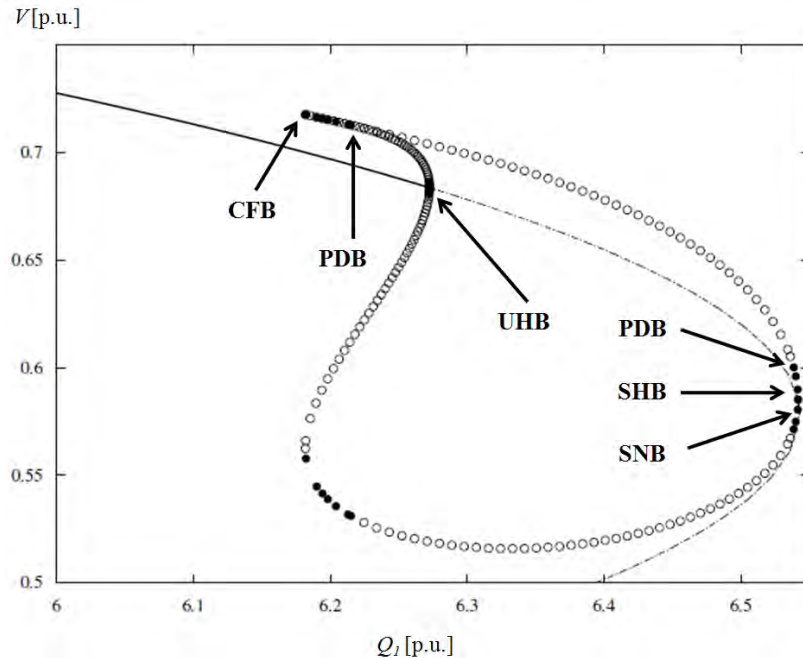


Figura 4.5 Diagrama de bifurcación del sistema de potencia

Con la finalidad de facilitar el análisis, el diagrama de bifurcación será dividido en dos partes; la parte superior izquierda en la que se analizan las bifurcaciones (*UHB*), (*CFB*) y (*PDB*); y la parte inferior derecha del diagrama de bifurcación en la que se analizan las bifurcaciones (*PDB*), (*SHB*) y (*SNB*).

#### 4.4.1 Análisis de la parte superior izquierda del diagrama de bifurcación

Cuando se varía el parámetro de bifurcación desde el punto inicial se observa que el sistema se comporta de manera estable hasta  $Q_I = 6.27243$  [p.u.]; tal como se observa en la Figura 4.5. Cuando el parámetro toma este valor se presenta una bifurcación Hopf subcrítica (*UHB*). Se puede apreciar que en el punto de bifurcación nacen dos ramas de soluciones periódicas inestables identificadas por círculos blancos; la rama ubicada en la parte de abajo es una rama de bajo voltaje, mientras que la rama que se encuentra en la parte superior es de alto voltaje. Esta rama se extiende a la izquierda y al llegar a  $Q_I = 6.18175$  [p.u.] se presenta una bifurcación Nodo-silla de soluciones periódicas, también llamada bifurcación de doblez de ciclos (*CFB*). En este punto existen soluciones periódicas estables mostradas en círculos negros que se extienden hacia la derecha hasta  $Q_I = 6.21511$  pu, en donde el sistema pierde estabilidad en una bifurcación de doble periodo (*PDB*). Esto último se muestra de manera detallada en la Figura 4.6 para la parte superior izquierda del diagrama de bifurcación.

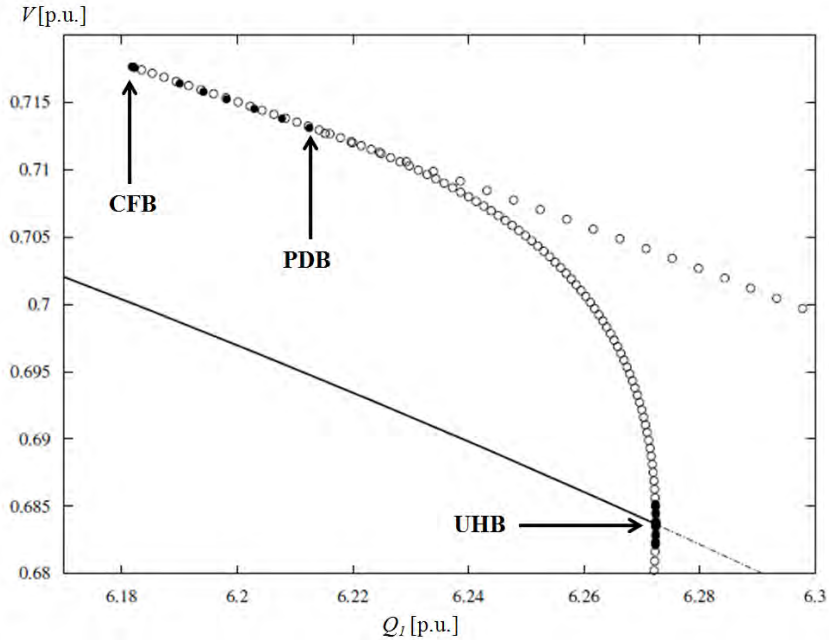


Figura 4.6 Soluciones periódicas inestables surgiendo de la bifurcación Hopf subcrítica

De acuerdo con la teoría de bifurcación cuando se presentan las bifurcaciones Hopf dos valores propios complejos conjugados cruzan el eje imaginario hacia la parte derecha del plano complejo. En la Figura 4.7 se observa dicho comportamiento y la aparición de la bifurcación Hopf subcrítica (**UHB**), al variar el parámetro de bifurcación,  $Q_I$ , tomando los siguientes valores: 6.22316, 6.24280, 6.26241, 6.27243, 6.29200, 6.31153, 6.33102 [p.u.].

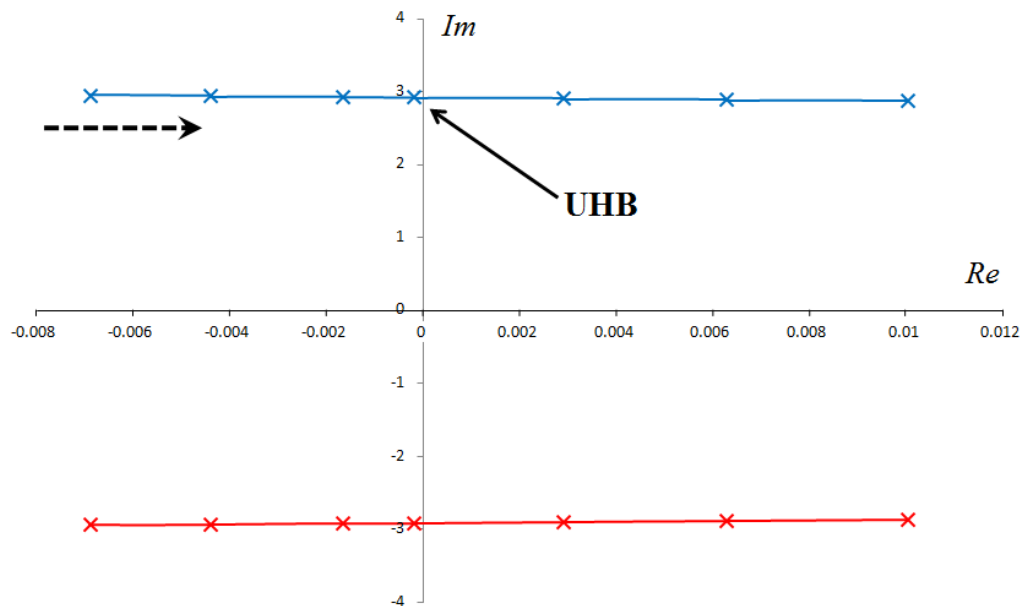


Figura 4.7 Movimiento de los valores propios complejos conjugados para la bifurcación (**UHB**)

Ahora nos situaremos en la primer región estable que da lugar a la bifurcación subcrítica (**UHB**) en el parámetro de bifurcación  $Q_I = 6.27243$  [p.u.] con la finalidad de analizar la dinámica de las variables

de estado cuando se presenta esta bifurcación. En este punto las variables del sistema ya no convergen a una respuesta estacionaria, sino que comienzan a oscilar. Para mostrar esto se consideran las siguientes condiciones iniciales, las cuales se encuentran muy cercanas al punto fijo:  $V=0.68471$  [p.u.],  $\delta_m=0.29936$  [rad],  $\omega = 0.01889$  [rad/s] y  $\delta = 0.05168$  [rad].

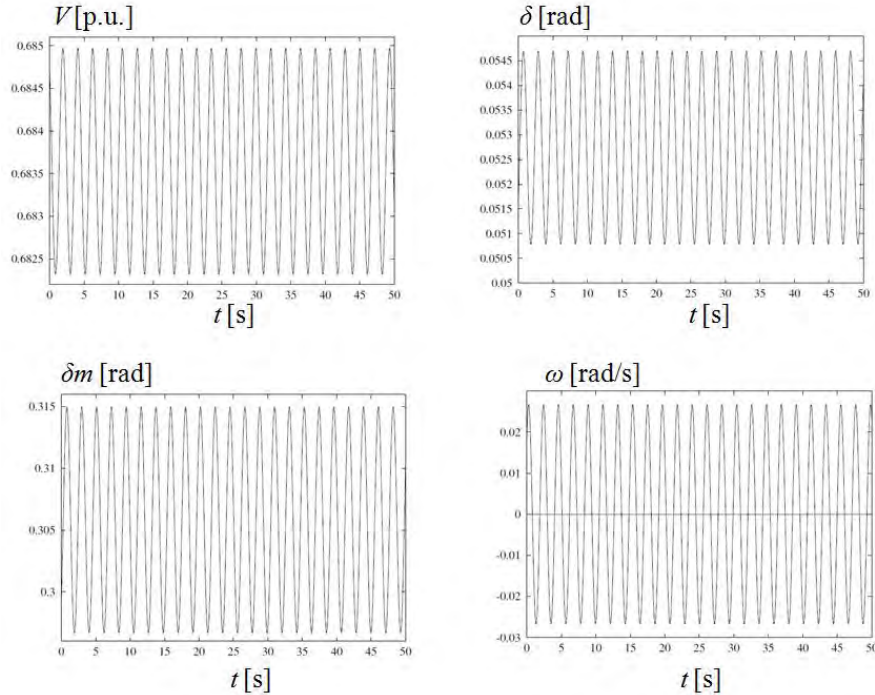


Figura 4.8 Comportamiento de las variables del sistema en  $UHB Q_I = 6.27243$  [p.u.]

Como se puede ver en la Figura 4.8 las variables de estado comienzan a oscilar en lugar de tener un valor constante. Esta oscilación se vuelve periódica cuando se alcanza un pequeño ciclo límite, como se muestra en la Figura 4.9. Este ciclo límite es una oscilación en el sistema de muy baja amplitud y frecuencia.

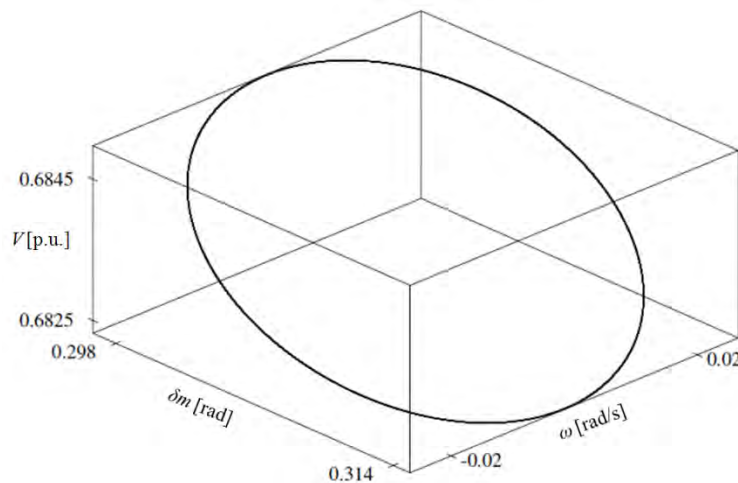


Figura 4.9 Ciclo límite creado en la bifurcación Hopf subcrítica



Una vez en este punto existen dos posibilidades; que se incremente el parámetro de continuación más allá del que surgió la bifurcación Hopf o la disminución del parámetro para continuar a través de la rama de las soluciones periódicas inestables surgidas en la bifurcación Hopf subcrítica (ver Figura 4.6).

Si se opta por la primera, el sistema comenzará a oscilar cada vez con mayor amplitud hasta llegar al colapso de voltaje. Por ejemplo, incrementando  $Q_I = 6.33$  [p.u.] con las condiciones iniciales:  $V=0.68418$  [p.u.],  $\delta_m=0.30268$  [rad],  $\omega = 0.00920$  [rad/s] y  $\delta = 0.05222$  [rad]; el voltaje se colapsará en aproximadamente  $t = 271$  [s] tal como se muestra en la Figura 4.10. Por otro lado, si el parámetro se incrementa a  $Q_I = 6.40$  [p.u.] bajo las mismas condiciones iniciales anteriores, el colapso de voltaje se presentará en menos tiempo, aproximadamente  $t = 73$  [s]. La dinámica del voltaje se muestra en la Figura 4.11.

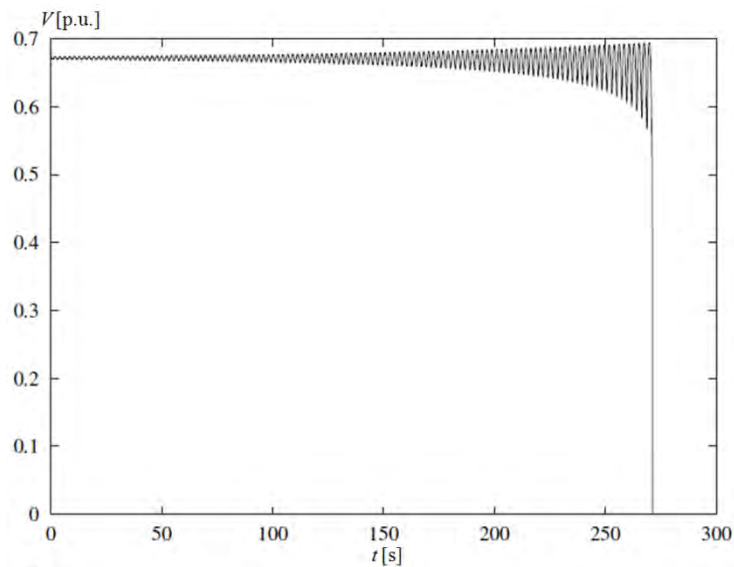


Figura 4.10 Colapso de voltaje en  $Q_I = 6.33$  [p.u.]

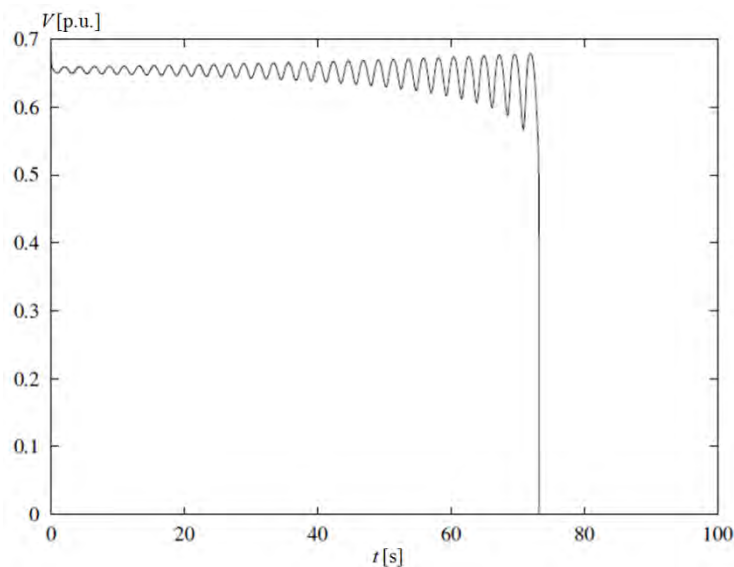


Figura 4.11 Colapso de voltaje en en  $Q_I = 6.40$  [p.u.]

Contrariamente, si el parámetro de continuación decrece a través de las soluciones periódicas inestables surgidas de la bifurcación Hopf subcrítica, lo que observaremos es que los ciclos límite crecerán en amplitud y frecuencia. Para ejemplificarlo tenemos la Figura 4.12 en la que se muestran dos ciclos límites originados en distintos puntos de la rama de soluciones inestables. En  $Q_I=6.27242$ [p.u.] con las condiciones iniciales:  $V = 0.68418$  [p.u.],  $\delta_m=0.30268$  [rad],  $\omega=0.00920$ [rad/s] y  $\delta = 0.05222$  [rad]; se genera el ciclo límite a). Por otra parte en  $Q_I=6.26299$ [p.u.] con las condiciones iniciales:  $V = 0.69059$  [p.u.],  $\delta_m=0.26143$  [rad],  $\omega = 0.13430$  [rad/s] y  $\delta=0.04520$ [rad]; se genera el ciclo límite b). Como se puede apreciar, la amplitud del ciclo límite crece conforme  $Q_I$  disminuye.

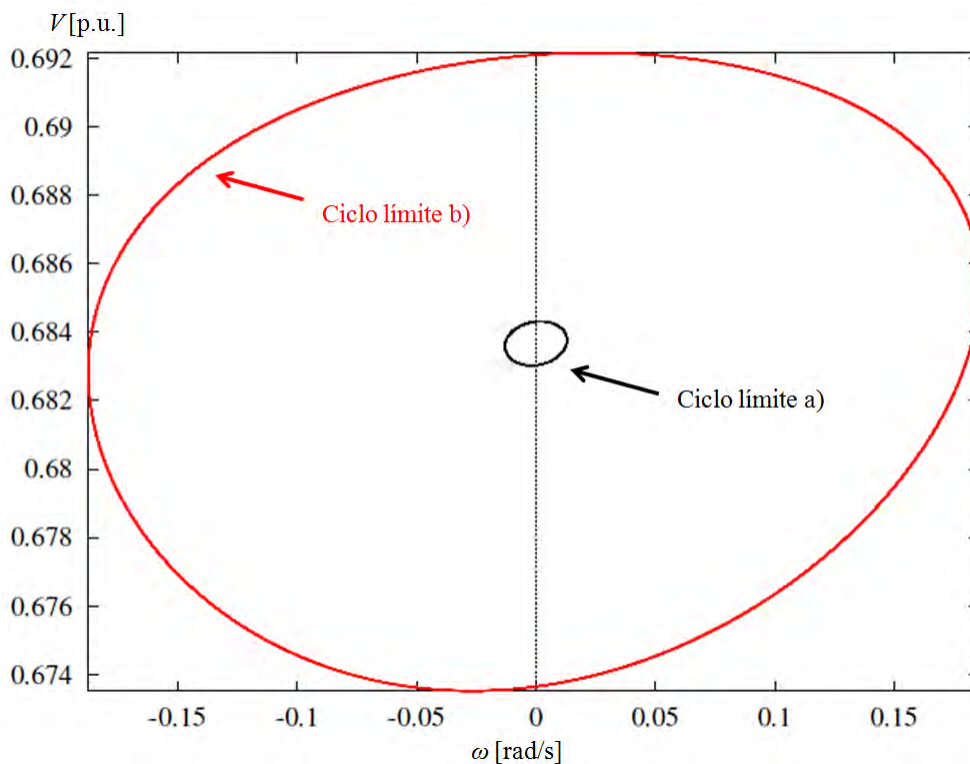


Figura 4.12 Ciclos límites a) y b) en  $Q_I = 6.27242$  [p.u.] y  $Q_I = 6.26999$  [p.u.] respectivamente

Por otro lado, existe una región de biestabilidad comprendida entre  $Q_I = 6.18175$  [p.u.] y  $Q_I = 6.21521$  [p.u.] mostrada en la Figura 4.13. La dinámica en la zona de biestabilidad se puede entender utilizando un ejemplo. Para el parámetro de continuación  $Q_I = 6.194$  [p.u.], que se encuentra dentro de la zona de biestabilidad, existen tres diferentes posibilidades de solución. La primera es que las variables del sistema se encuentren cerca del punto fijo, por lo que el sistema convergerá a este punto. Por ejemplo, dadas las siguientes condiciones iniciales:  $V = 0.69805$  [p.u.],  $\delta_m=0.30088$  [rad],  $\omega = 0$  [rad/s] y  $\delta = 0.05125$  [rad], el sistema converge al punto fijo. La dinámica del voltaje se muestra en la Figura 4.14.

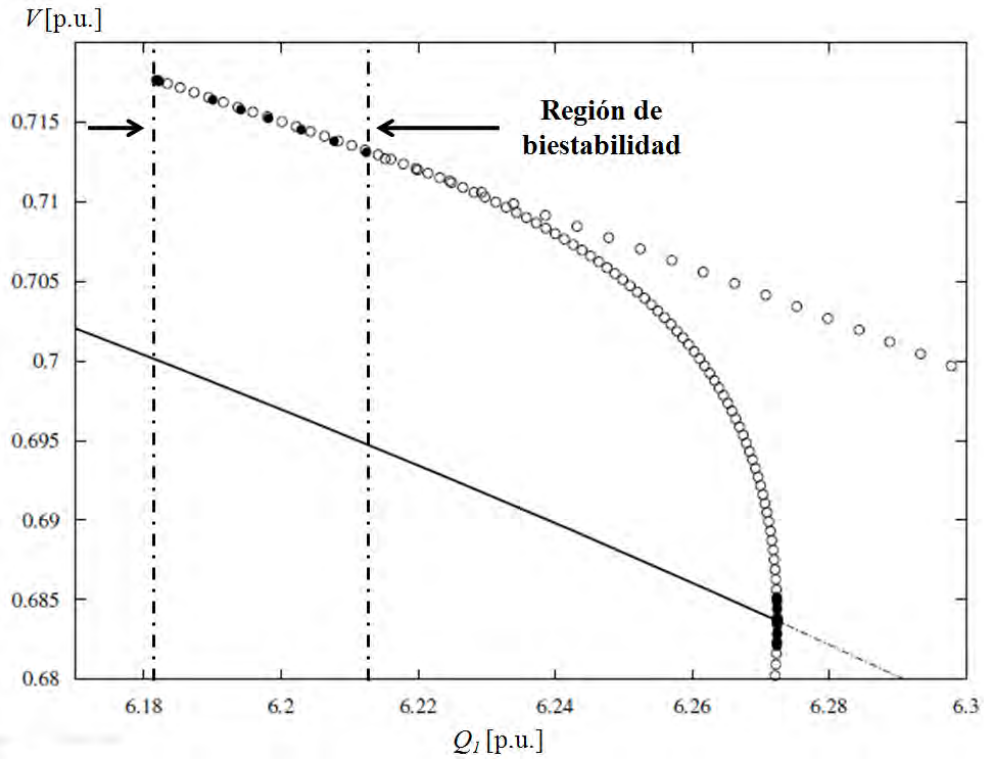


Figura 4.13 Región de biestabilidad del Sistema Eléctrico de Potencia

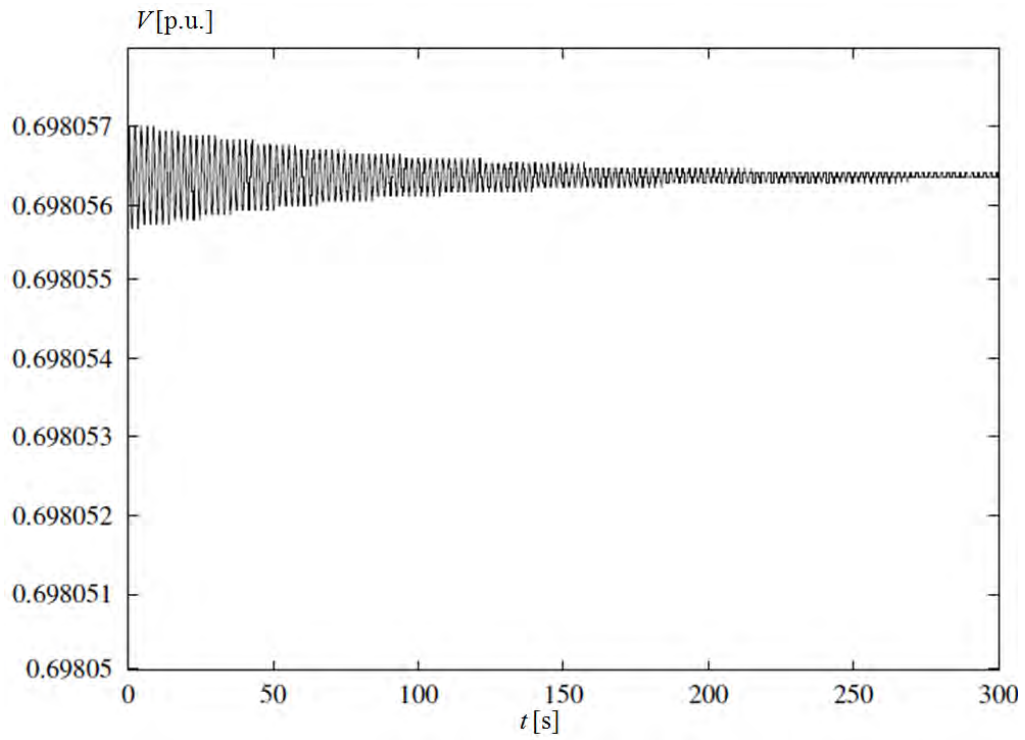


Figura 4.14 Dinámica del voltaje en  $Q_l = 6.194$  [p.u.] converge a punto fijo

Ahora, si por medio de un disturbio las variables de estado del sistema se encuentran en la vecindad de los ciclos límite, ya sea que por repulsión de los ciclos límite inestables o atracción de los estables, los valores de estas variables tienden hacia estos últimos. Por ejemplo, con las siguientes condiciones iniciales:  $V = 0.71528$  [p.u.],  $\delta_m = 0.07283$  [rad],  $\omega = 0.85031$  [rad/s] y  $\delta = 0.00328$  [rad] y el parámetro  $Q_I = 6.194$  [p.u.], la respuesta tiende a un ciclo límite estable como se muestra en la Figura 4.15. Estas oscilaciones estables del sistema pueden mantenerse al variar cuasiestáticamente el parámetro de continuación en toda la región de biestabilidad.

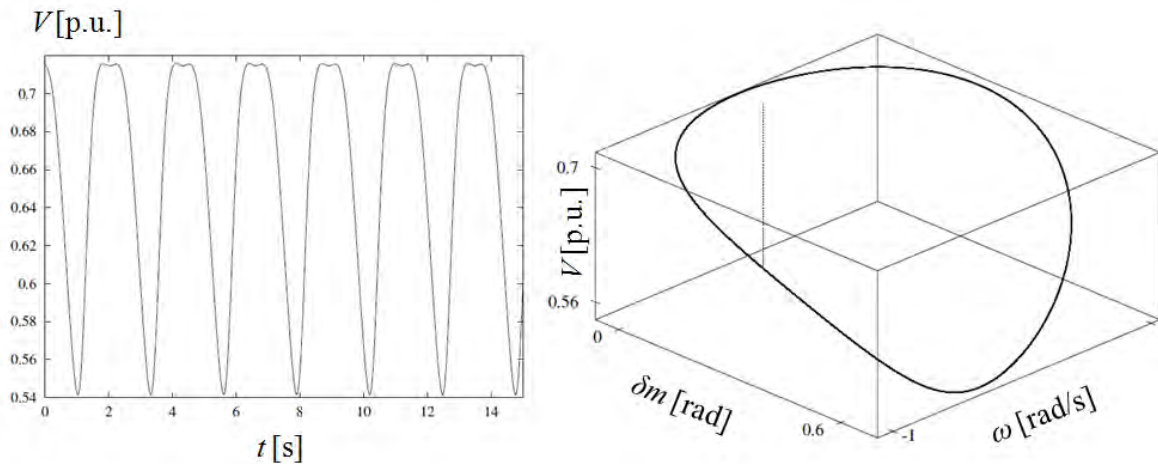


Figura 4.15 Dinámica del sistema en  $Q_I = 6.194$  [p.u.] converge a ciclo límite estable

La tercera posibilidad es que los valores de las variables caigan dentro de la región de los ciclos límites inestables. En este caso el sistema convergerá hacia el punto de equilibrio. En la Figura 4.16 se muestra el ejemplo con el parámetro  $Q_I = 6.194$  [p.u.] y las siguientes condiciones iniciales:  $V=0.71515$  [p.u.],  $\delta_m=0.08294$  [rad],  $\omega = 0.76962$  [rad/s] y  $\delta = 0.00612$  [rad]. Como se puede apreciar, el sistema oscilará de tal manera que converge al punto fijo en  $V = 0.698$  [p.u.].

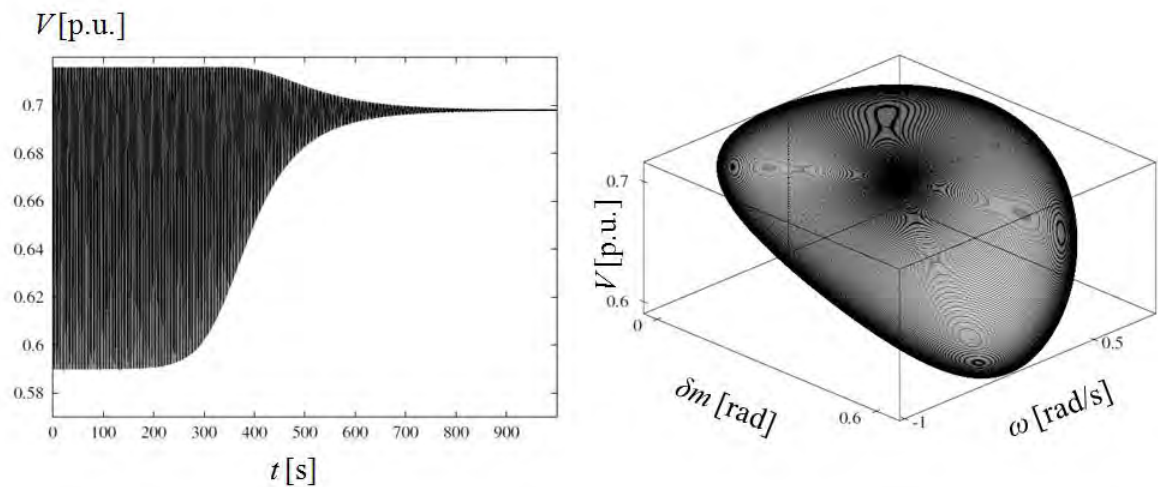


Figura 4.16 Dinámica del sistema en  $Q_I = 6.194$  [p.u.] converge a punto de equilibrio

Cuando el sistema se encuentra oscilando en un ciclo límite en  $Q_I = 6.18175$  [p.u.] situado en la parte izquierda de la región de biestabilidad, si el parámetro de continuación es decrementado a un valor  $Q_I = 6.18100$  [p.u.] con las siguientes condiciones iniciales:  $V = 0.71713$  [p.u.],  $\delta_m = 0.06786$  [rad],  $\omega = 0.84801$  [rad/s] y  $\delta = 0.00204$  [rad], se presenta la bifurcación de doblez de ciclos (**CFB**). Esta bifurcación implica que la amplitud de la oscilación comienza a disminuir hasta estabilizarse en el punto de equilibrio en  $V = 0.70022$  [p.u.], localizado en la rama de puntos fijos estables. Esto se debe a que es el único atractor en este punto de operación del sistema. En la Figura 4.17 se ha dibujado la gráfica de la dinámica del voltaje en esta bifurcación de doblez de ciclos.

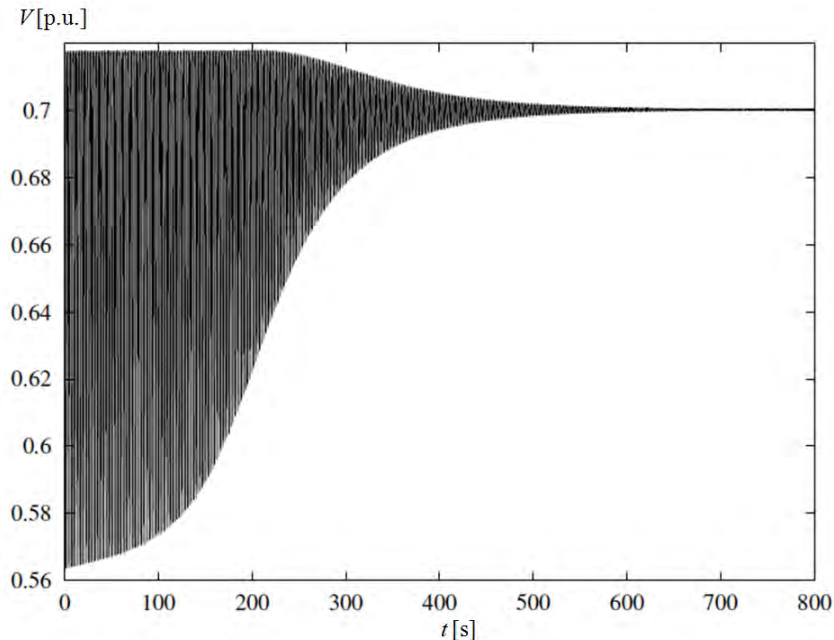


Figura 4.17 Voltaje del sistema en la bifurcación de doblez de ciclos

Nuevamente, si el sistema se encuentra oscilando en un ciclo límite estable pero ahora en la parte derecha de la región biestable en  $Q_I = 6.21521$  [p.u.], y si el parámetro se incrementa, el ciclo límite estable sufre bifurcaciones de doble periodo (**PDB**) en cascada. En la Figura 4.18 se muestra con más detalle este fenómeno de bifurcaciones en cascada. En el inciso (a), el sistema se encuentra oscilando en forma estable en  $Q_I = 6.21521$  [p.u.]. Al incrementar la potencia reactiva en  $Q_I = 6.21750$  [p.u.], la oscilación comienza a distorsionarse (b), formándose una segunda órbita. Incrementado un poco más la potencia reactiva en  $Q_I = 6.21984$  [p.u.], las órbitas que describen las oscilaciones sufren otra bifurcación de doble periodo, dando como resultado una multiplicación de estas (c). Si la potencia reactiva se incrementa aún más, por ejemplo,  $Q_I = 6.22219$  [p.u.], el sistema experimenta oscilaciones de amplitud variable de forma aperiódica (d), este comportamiento es llamado caos.

En la Figura 4.19 se muestra la dinámica del voltaje en el nodo de carga, para los mismos puntos de operación de los incisos (a)-(d). En la parte inferior de estas gráficas, se puede observar cómo se distorsiona la oscilación con las bifurcaciones de doble periodo.

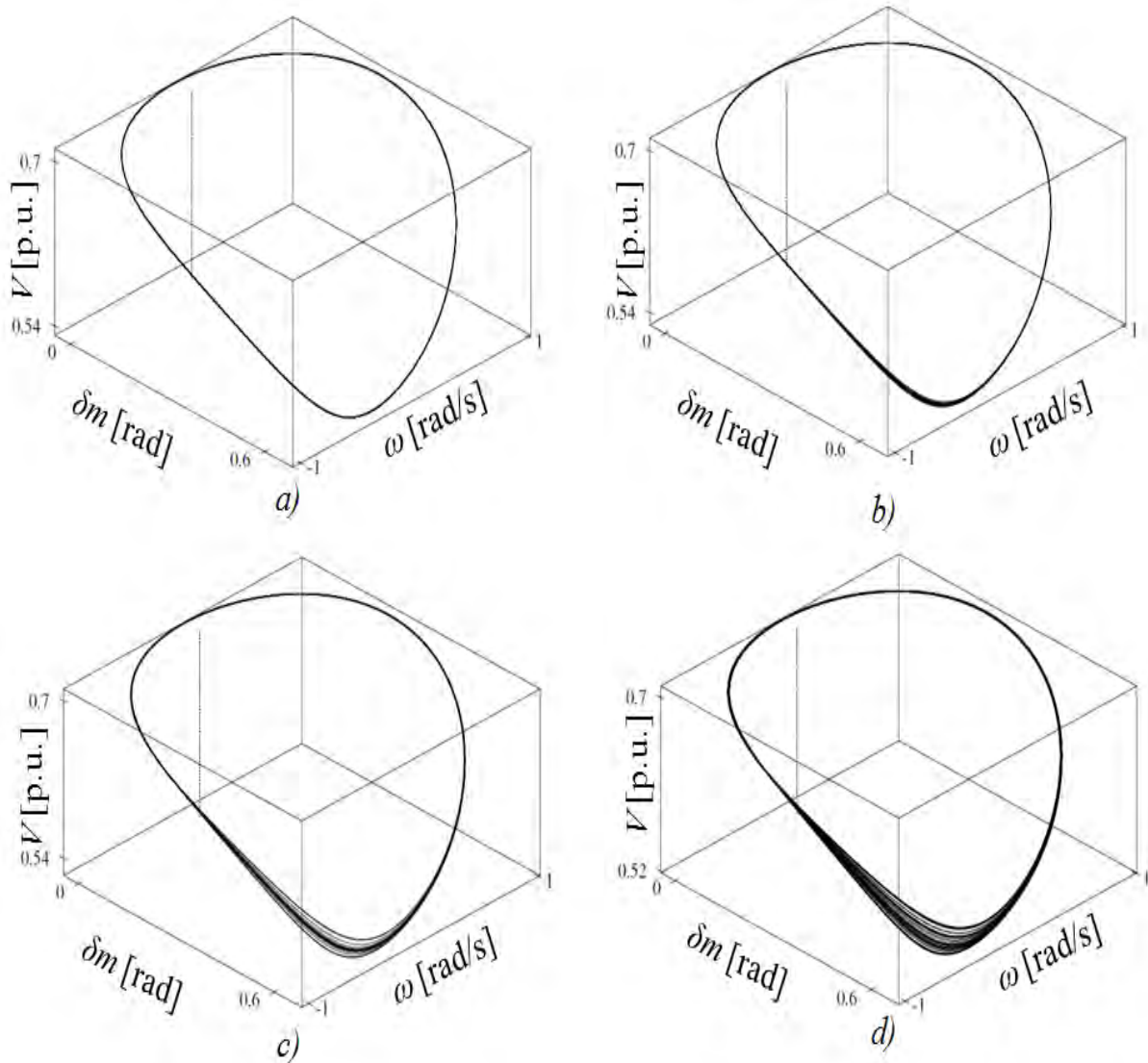


Figura 4.18 Ciclos límite en  $Q_I = 6.21521, 6.21750, 6.21984$  y  $6.22219$  [p.u.]

La trayectoria caótica que describen las variables en  $Q_I = 6.22219$  [p.u.] corresponde a un atractor extraño y se muestra en la Figura 4.20. Esta forma de operación es muy peligrosa por el comportamiento tan complejo que se presenta.

La oscilación caótica puede permanecer mientras no haya cambios en el parámetro de bifurcación, pero si se da un pequeño incremento en la potencia reactiva, este ocasiona el colapso del voltaje en  $Q_I = 6.22920$  [p.u.] en un tiempo aproximado de  $t = 34$  [s], tal como se muestra en la Figura 4.21. El voltaje  $V$  se colapsa y el ángulo de carga  $\delta$  comienza a incrementarse indefinidamente, las otras dos variables que pertenecen al generador  $\omega$  y  $\delta_m$  no presentan este fenómeno.

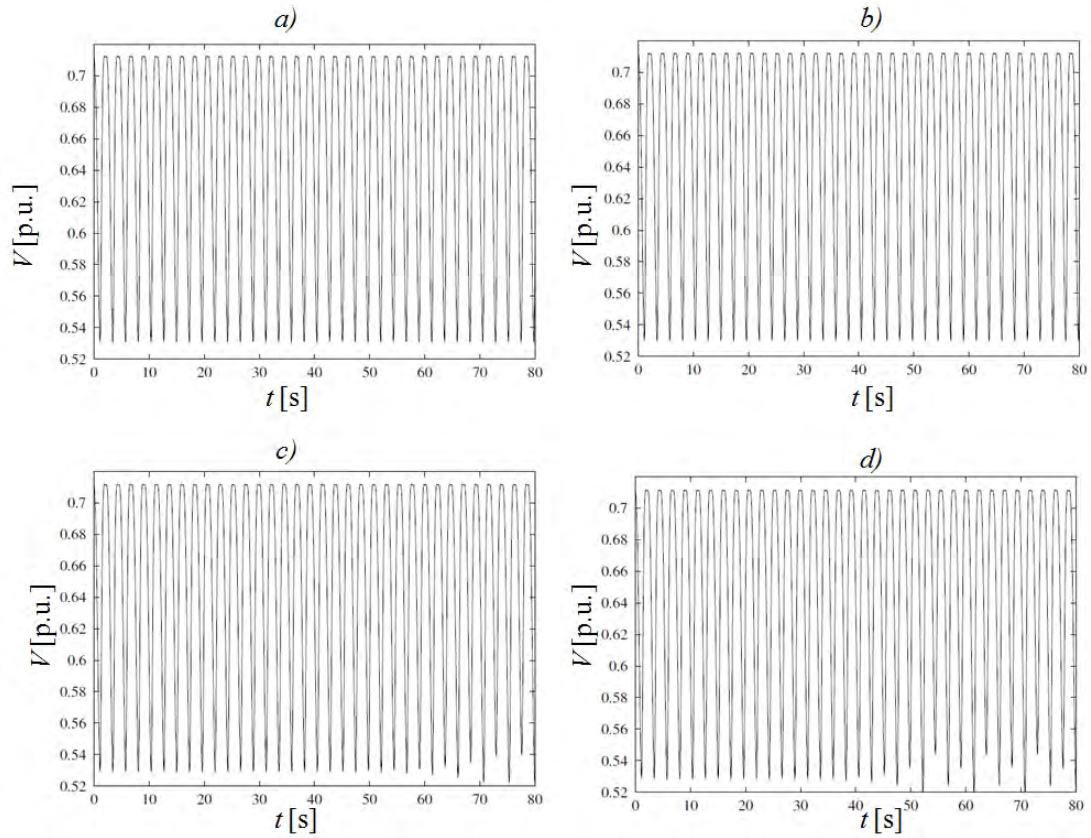


Figura 4.19 Voltaje en el nodo de carga al sufrir bifurcación de doble periodo en cascada

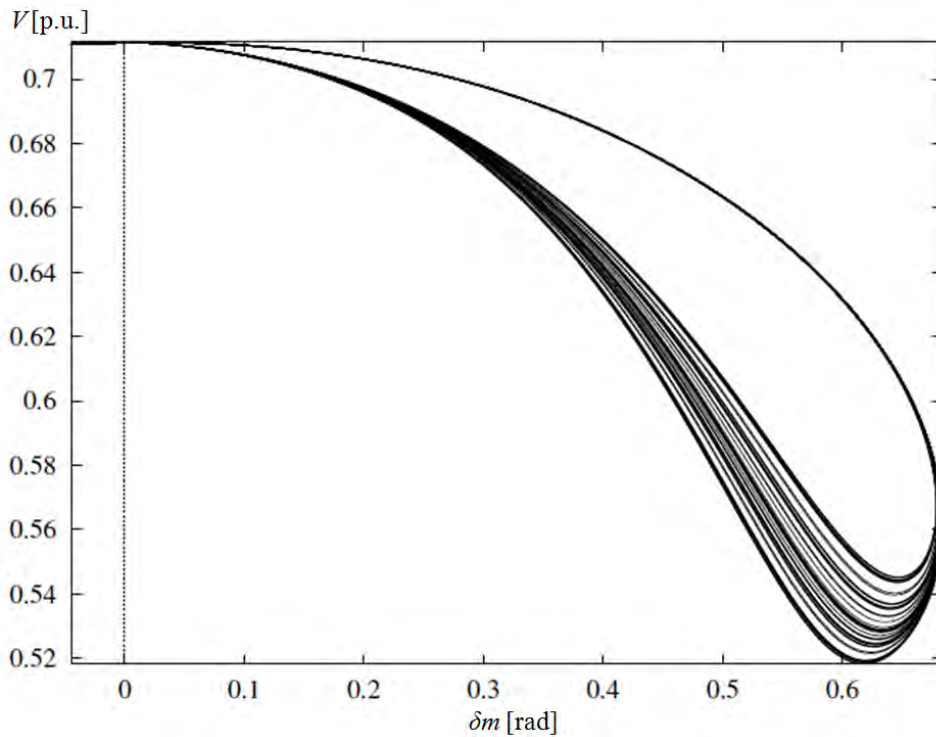


Figura 4.20 Atractor extraño generado en  $Q_I = 6.22219$  [p.u.]

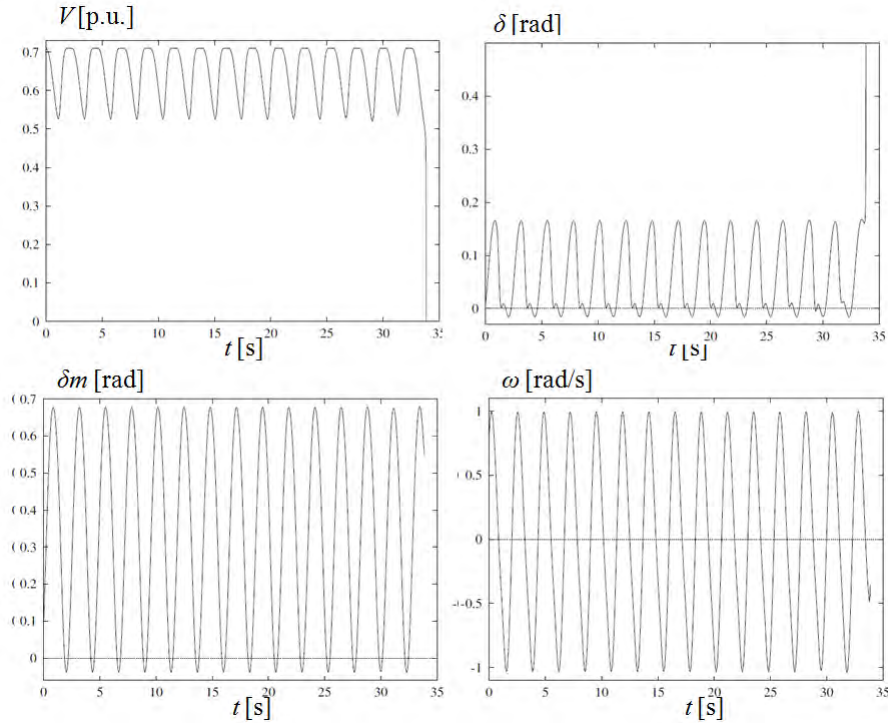


Figura 4.21 Variables del sistema durante el colapso en  $Q_I = 6.22920$  [p.u.]

#### 4.4.2 Análisis de la parte inferior derecha del diagrama de bifurcación

El parámetro de bifurcación puede ser variado desde un punto de equilibrio en la región estable antes de la bifurcación (**UHB**) hasta  $Q_I = 6.54$  [p.u.] con las siguientes condiciones iniciales:  $V=0.58505$  [p.u.],  $\delta_m=0.34408$  [rad],  $\omega = 0$  [rad/s] y  $\delta = 0.06272$  [rad]. Este punto corresponde a un punto de equilibrio inestable. Al llegar a este valor la dinámica del sistema tiende a un ciclo límite presentando oscilaciones de amplitud constante como se muestra en la Figura 4.22.

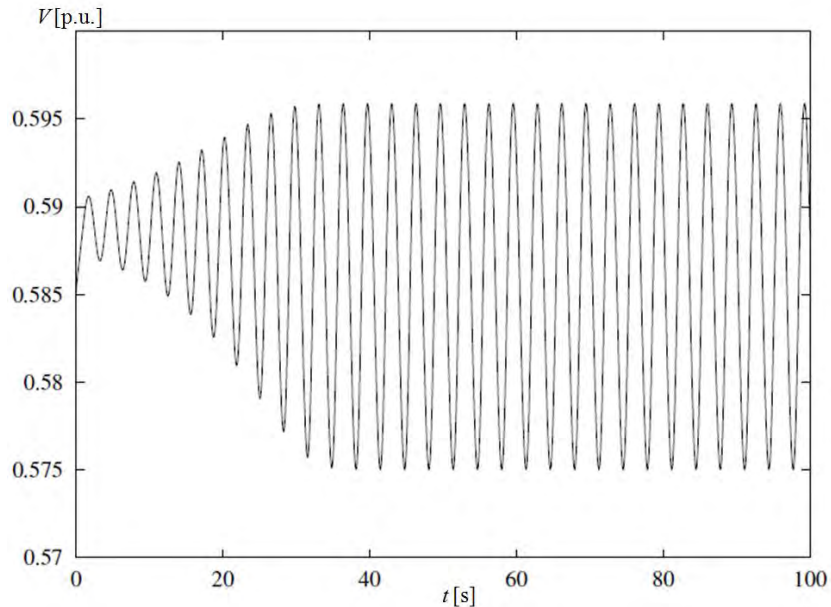


Figura 4.22 Oscilación periódica estable presentada en  $Q_I = 6.54$  [p.u.]



De hecho, la dinámica del sistema es la misma para toda la región comprendida entre  $Q_I = 6.53835$  [p.u.] y  $Q_I = 6.54166$  [p.u.], la cual está marcada con círculos negros en la Figura 4.23.

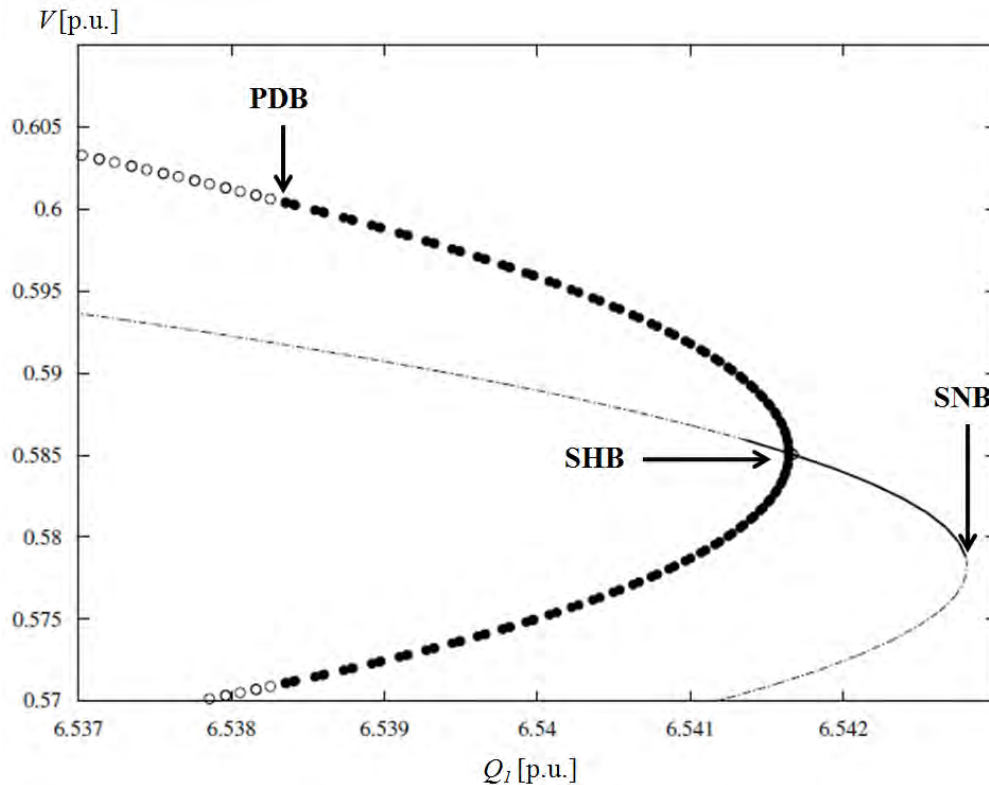


Figura 4.23 Soluciones periódicas estables surgiendo de la bifurcación Hopf supercrítica

De esta manera, cualquier condición inicial de las variables del sistema localizadas cerca de esta región, serán atraídas por estos ciclos límite estables. Una vez que el sistema se encuentra oscilando en alguno de estos ciclos límite estables, si el parámetro de bifurcación es disminuido; el sistema pierde estabilidad en una bifurcación de doble periodo en  $Q_I = 6.53835$  [p.u.], continuando este fenómeno en cascada.

En la Figura 4.24 se muestran las órbitas en diferentes valores de potencia reactiva durante el proceso de bifurcación en cascada. En el inciso (a) se comienza con una oscilación estable y al disminuir la potencia reactiva  $Q_I = 6.53835$  [p.u.] la bifurcación de doble periodo se presenta modificando la órbita estable (b). Al disminuir un poco más la potencia reactiva en  $Q_I = 6.53765$  [p.u.], el sistema nuevamente experimenta otra bifurcación de doble periodo ocasionando la generación de más órbitas (c). Disminuyendo aún más la potencia reactiva en  $Q_I = 6.53723$  [p.u.], el sistema experimenta comportamiento caótico (d).

La Figura 4.25 muestra la dinámica del voltaje en el nodo de carga para los mismos puntos de los incisos (a)-(d). En la parte inferior de estas últimas figuras, se puede observar cómo se distorsiona la oscilación con las bifurcaciones de doble periodo.

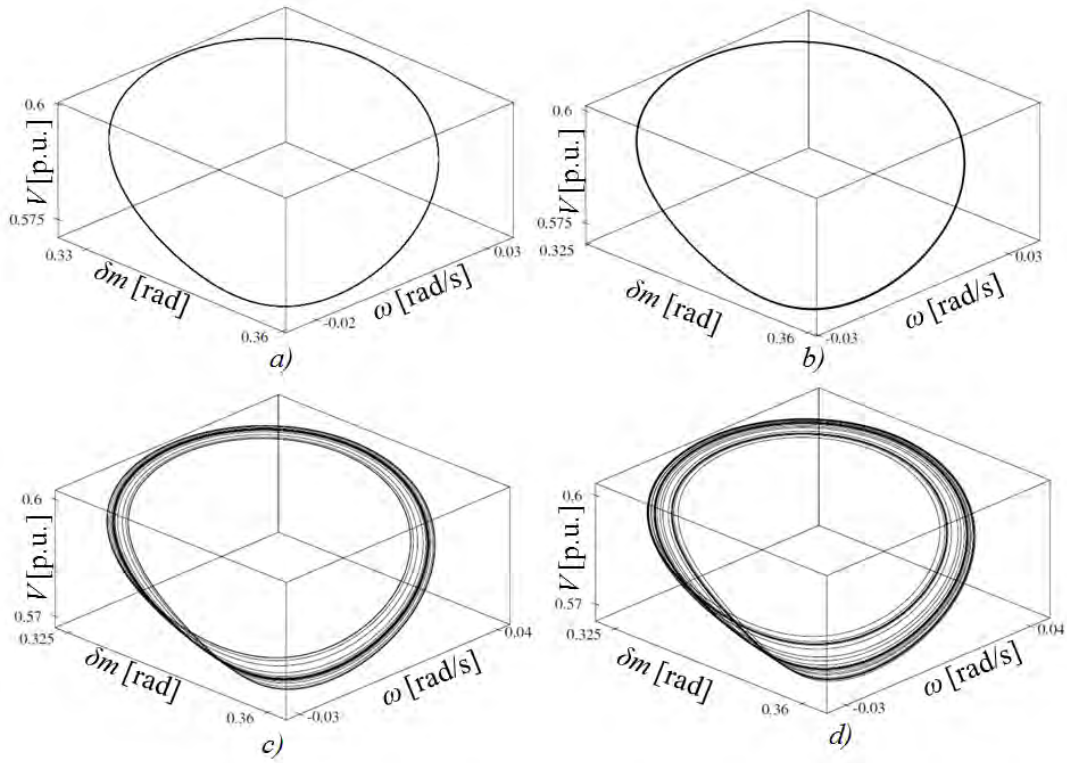


Figura 4.24 Órbitas en  $Q_I = 6.53835, 6.53805, 6.53765$  y  $6.53723$  [p.u.]

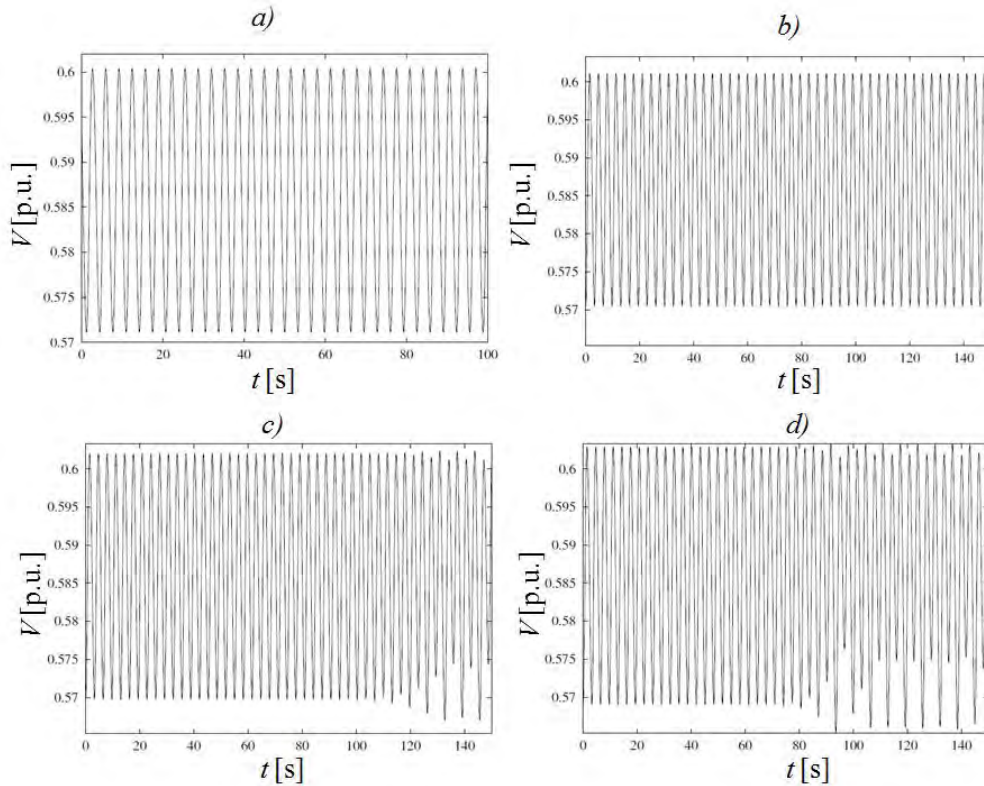


Figura 4.25 Voltaje en la carga al sufrir bifurcaciones de doble periodo en cascada

En la Figura 4.26, se presenta el atractor extraño al disminuir todavía más el parámetro de bifurcación en  $Q_I = 6.53680$  [p.u.].

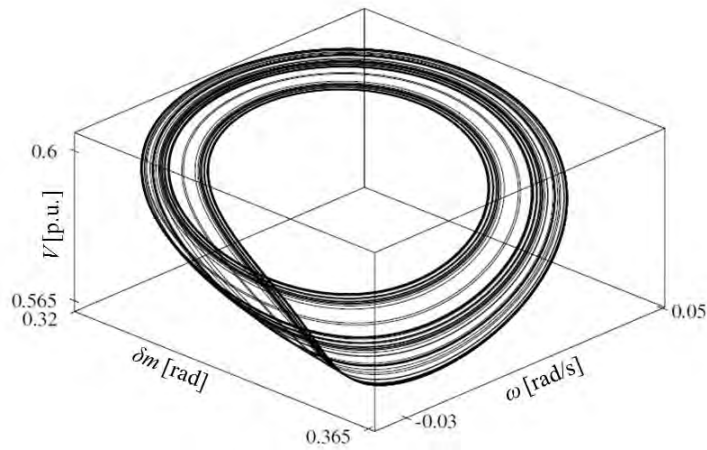


Figura 4.26 Atractor extraño generado en  $Q_I = 6.53680$  [p.u.]

El sistema puede sufrir otro colapso si se encuentra oscilando caóticamente, como se muestra en la Figura 4.26, con otra disminución de potencia reactiva en  $Q_I = 6.53600$  [p.u.]. El colapso de voltaje y, por consiguiente, el crecimiento indefinido del ángulo en el nodo de carga se presentan. La dinámica del fenómeno se muestra en la Figura 4.27. Las otras dos variables del sistema no experimentan el colapso.

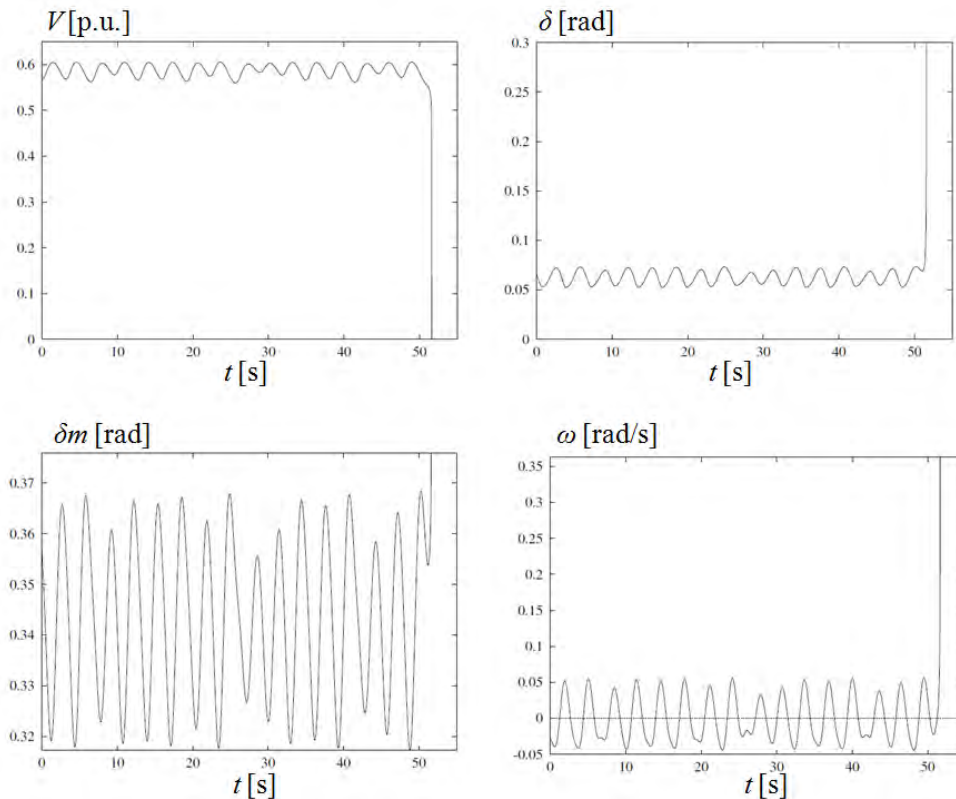


Figura 4.27 Variables del sistema durante el colapso en  $Q_I = 6.53600$  [p.u.]

Regresando a la región de ciclos límite estables de la Figura 4.23, si el sistema está operando en alguno de estos ciclos, por ejemplo en  $Q_I = 6.54145$  [p.u.] y si la potencia reactiva se incrementa hasta  $Q_I = 6.54194$  [p.u.], el sistema gana estabilidad por medio de una bifurcación Hopf supercrítica (**SHB**). Esto ocasiona que las oscilaciones estables en el sistema desaparezcan, haciendo que el voltaje se establezca en un valor fijo  $V = 0.58424$  [p.u.], el cual corresponde a un punto de equilibrio estable como lo muestra la dinámica de la Figura 4.28.

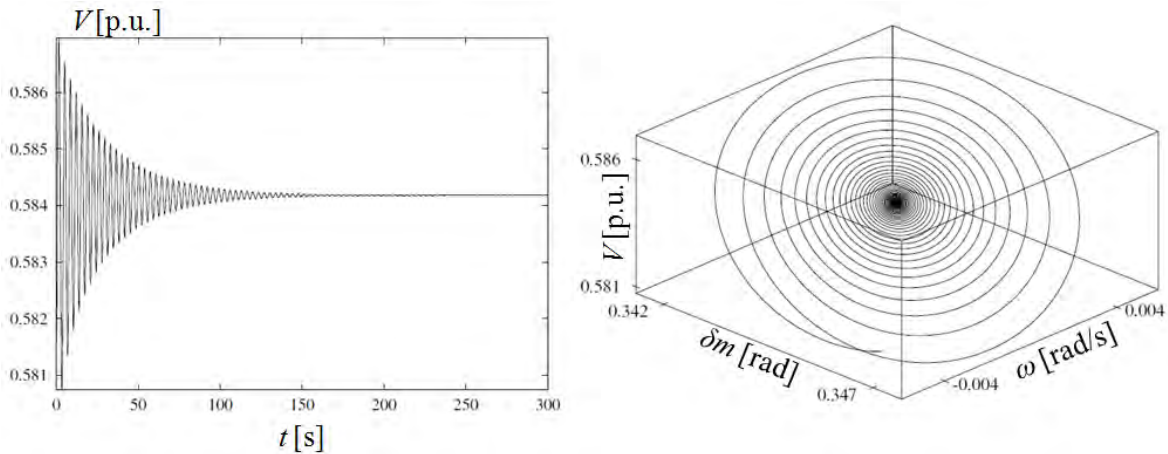


Figura 4.28 Dinámica del sistema en  $Q_I = 6.54194$  [p.u.]

Puede verse en la Figura 4.29 el comportamiento de los valores propios en la (**SHB**) al variar  $Q_I$  en los siguientes valores: 6.54101, 6.54135, 6.54161, 6.54194 y 6.54217 [p.u.].

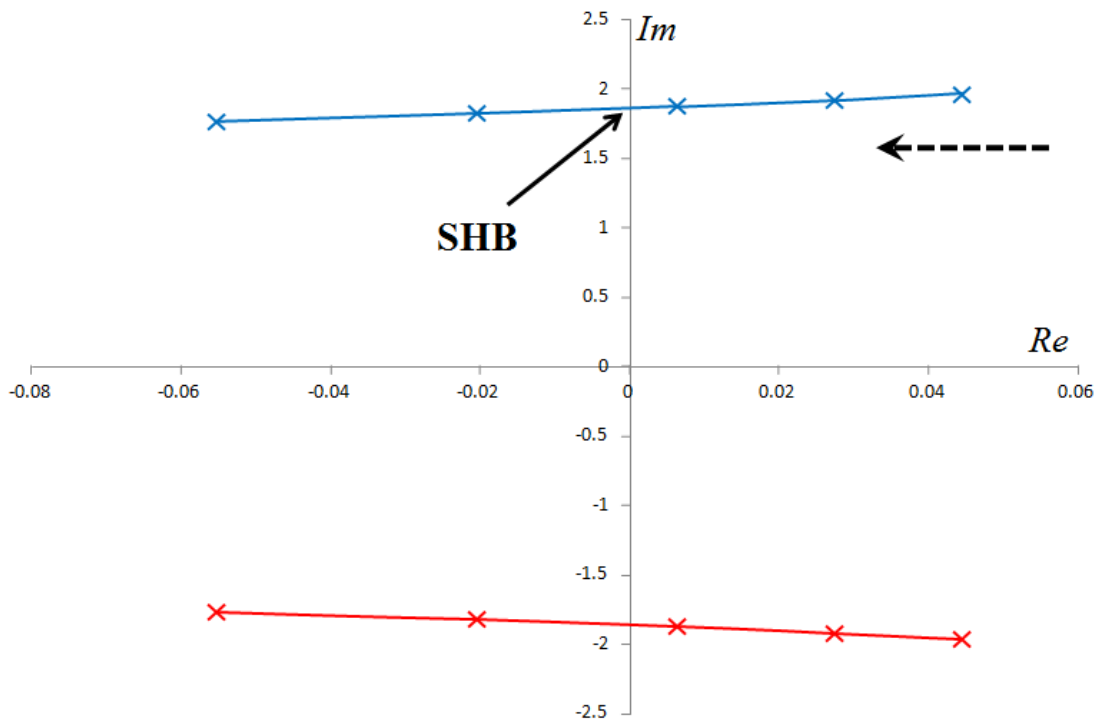


Figura 4.29 Movimiento de los valores propios complejos conjugados para la bifurcación (**SHB**)

Una vez que el sistema opera de manera estable, si la potencia reactiva se incrementa hasta  $Q_I=6.54281$  [p.u.], con condiciones iniciales  $V = 0.57820$  [p.u.],  $\delta_m=0.34709$  [rad],  $\omega = 0$  [rad/s] y  $\delta=0.06340$  [rad], el punto de equilibrio estable choca con otro punto de equilibrio pero de tipo inestable ocasionando la desaparición de estos. Por lo tanto, para valores mayores del parámetro de bifurcación no existe ningún punto de equilibrio en el que el sistema pueda operar. Esta bifurcación se conoce como bifurcación Nudo-silla (**SNB**) y es el punto de máxima cargabilidad del sistema. Por ejemplo, al incrementar la potencia reactiva en  $Q_I = 6.54282$  [p.u.], el sistema no tiene un punto de equilibrio por lo tanto el sistema se colapsa en aproximadamente  $t = 13$  [s] como se muestra en la Figura 4.30.

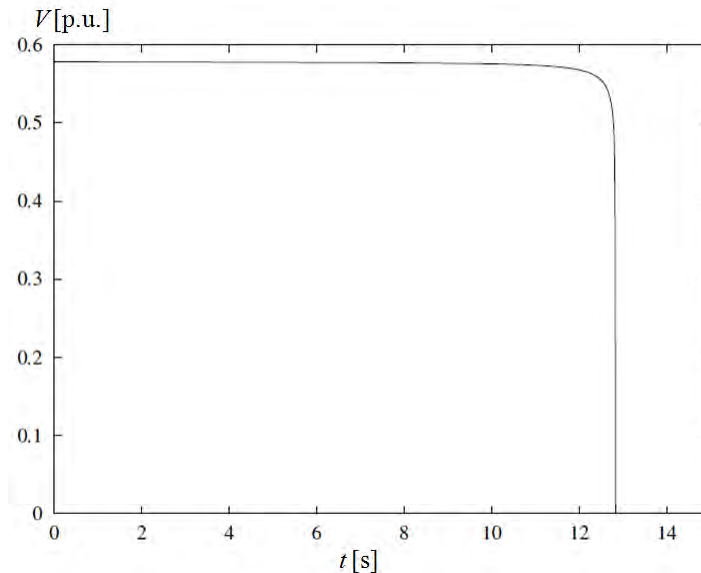


Figura 4.30 Colapso de voltaje en  $Q_I$  mayor al punto máximo de cargabilidad del sistema

En la Tabla 4.2 se muestra que un valor propio es muy cercano a cero en el punto de la bifurcación (**SNB**) lo cual puede ser nuevamente explicado apoyándose en la teoría de bifurcaciones, la cual afirma un valor propio cero se presenta en la bifurcación Nudo-silla.

Tabla 4.2 Valores propios en la **SNB**

<i>Valores propios</i>
-50.435386 + j 0.000000
<b>-0.133185 + j 0.000000</b>
-0.733851 + j 1.536407
-0.733851 - j 1.536407

## 5 Análisis del sistema de tres nodos compensado

En el presente capítulo se analizará nuevamente el sistema de tres nodos visto en el capítulo anterior pero compensando la potencia reactiva en el nodo de carga. El primer dispositivo utilizado será un compensador estático de VAR's (*CEV*) de primer orden. Posteriormente se hará uso de un *CEV* más complejo y finalmente se empleará otro dispositivo *FACTS*, el Compensador Estático Síncrono (*StatCom*).

Los resultados de cada uno de los dispositivos empleados se compararán con el sistema sin compensar; de tal manera, que se pueda apreciar la diferencia entre el sistema en su operación normal y el sistema compensado. De la misma forma, se compararán los dispositivos empleados utilizando diferentes capacidades de compensación.

### 5.1 Sistema de tres nodos sin compensar

Para analizar el resultado que se tiene sobre las bifurcaciones que dicho sistema muestra en su operación normal y poder hacer una comparación entre el sistema compensado y sin compensar, se toma nuevamente cómo parámetro de bifurcación la demanda de potencia reactiva en el nodo de carga,  $Q_1$ , y se obtiene el diagrama de bifurcación del sistema sin compensar. Este diagrama se había obtenido ya en el Capítulo 4; sin embargo, en el presente capítulo se obtendrá empleando el modelo matemático del sistema en forma rectangular [Wang94]. El desarrollo de este modelo se encuentra en el Apéndice B y corresponde al sistema diferencial algebraico compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2} V^2) \quad (5.1)$$

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2 (g_0 + g_m)$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen } \delta - b_0 \text{cos} \delta + VE_m g_m \text{sen } \delta - \delta_m - b_m \text{cos } \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m$$

Los parámetros restantes que se utilizaron en este modelo se listan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos sin compensar

Parámetro de bifurcación $Q_I=0$ hasta $7.1[p.u.]$			
$K_{pw}=0.4 [p.u.]$	$K_{pv}=0.3 [p.u.]$	$K_{qw}=-0.03 [p.u.]$	$K_{qv}=-2.8 [p.u.]$
$K_{qv2}=2.1 [p.u.]$	$T=8.5 [p.u.]$	$P_0=0.6 [p.u.]$	$Q_0=1.3 [p.u.]$
$P_1=0 [p.u.]$	$C=3 [p.u.]$	$E'_0=1.1755 [p.u.]$	$E_m=1 [p.u.]$
$P_m=1 [p.u.]$	$M=0.3 [s^2/rad]$	$d_m=0.05 [s/rad]$	
$g_0=1.744144 [p.u.]$	$b_0=-16.923762 [p.u.]$	$g_m=0.435778 [p.u.]$	$b_m=-4.9809735[p.u.]$

En la Figura 5.1 se muestra el diagrama de bifurcación obtenido para el modelo matemático, en forma rectangular, del sistema de tres nodos sin compensar.

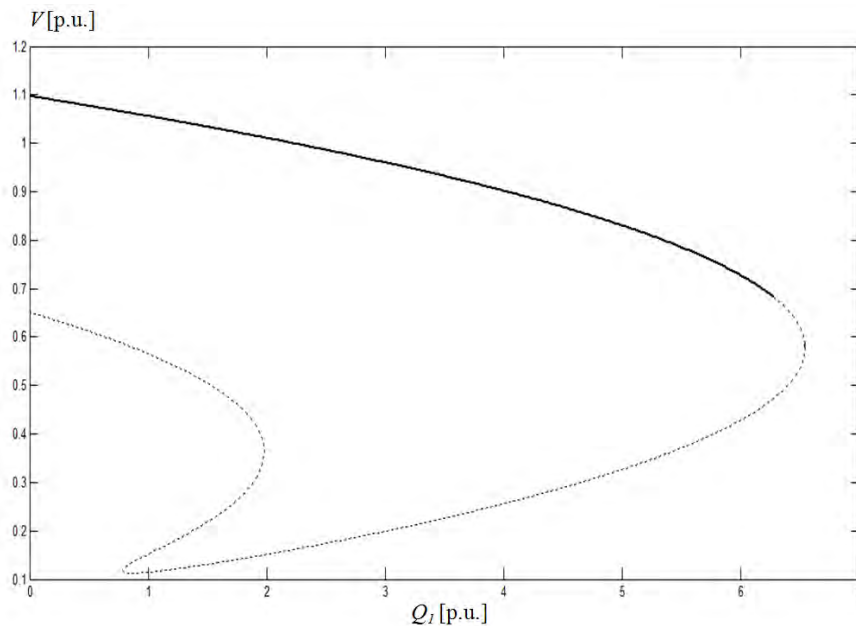


Figura 5.1 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos sin compensar

Se muestra también en la Tabla 5.2 el valor que toma el parámetro de bifurcación,  $Q_I$ , para alcanzar los diferentes tipos de bifurcaciones que se presentan en el sistema. Como se puede apreciar, este diagrama es diferente al obtenido en el capítulo anterior (ver Figura 4.3). La diferencia radica en hecho de que los valores de los parámetros utilizados en el modelo en forma rectangular son diferentes a los empleados en el modelo en forma polar. Se puede comprobar estas diferencias observando las Tablas 4.1 y 5.1 en las cuales se dan los valores de los parámetros para el modelo en forma polar y para el modelo en forma rectangular, respectivamente.

Tabla 5.2 Ubicación de las bifurcaciones del sistema de tres nodos sin compensar

<b><i>UHB</i></b>	<b><i>SHB</i></b>	<b><i>SNB</i></b>
6.27243 [p.u.]	6.54161 [p.u.]	6.54281 [p.u.]

## 5.2 Sistema de tres nodos compensado con *CEV*

La Figura 5.2 muestra el diagrama del sistema de tres nodos compensado por un dispositivo *CEV*. El dispositivo consiste de un grupo de capacitores conectados en derivación y un banco de reactores con rápido control por la conmutación de tiristores. Un *CEV* puede ser considerado como una reactancia en derivación variable la cual es ajustada en respuesta a las condiciones operativas del sistema de potencia a fin de controlar parámetros específicos de la red. Dependiendo de la reactancia equivalente del *CEV*, capacitiva o inductiva, el dispositivo es capaz de extraer corriente capacitiva o inductiva del sistema eléctrico de potencia en su punto de acoplamiento. El control propio de esta reactancia equivalente permite la regulación de la magnitud de voltaje en el nodo del sistema de potencia donde el *CEV* es conectado. En este trabajo se presentan dos modelos de control reportados en la literatura de dominio público [Srivastava98], [Laufenberg97].

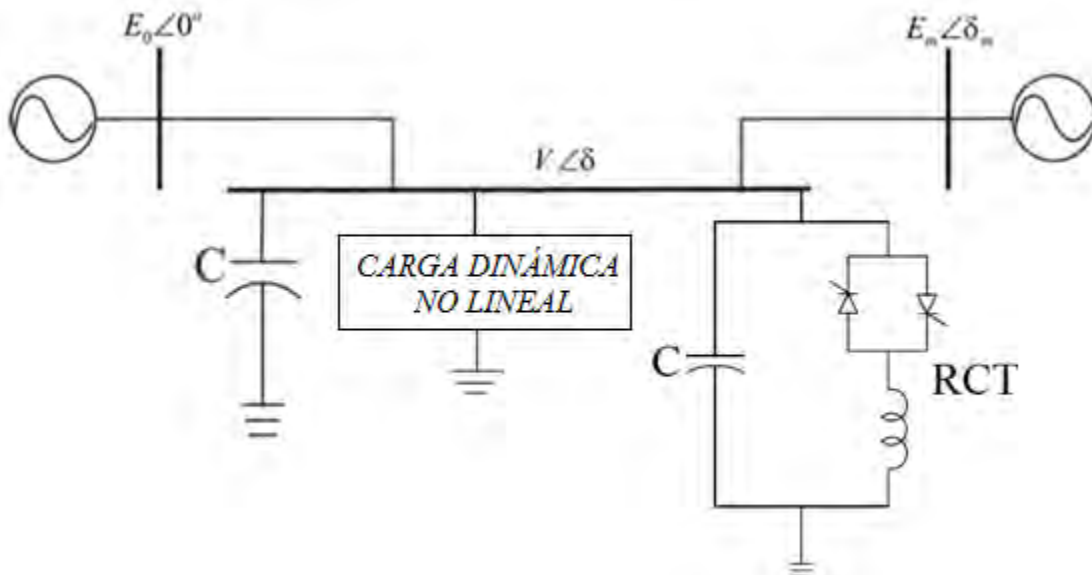


Figura 5.2 Sistema de tres nodos compensado con un *CEV*

El conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico que modela el comportamiento del sistema compensado por un *CEV* está dado por las ecuaciones que se muestran abajo. El desarrollo de este modelo se encuentra en el Apéndice C.

Se puede observar el efecto de añadir el compensador estático de VAR's al sistema, en el último término de la ecuación algebraica,  $Q$  del conjunto de ecuaciones, la cual describe la demanda de potencia reactiva del nodo de carga. Es claro que la susceptancia del *CEV*,  $B_{CEV}$ , no aparece en el conjunto de ecuaciones (5.1), correspondiente al sistema sin compensar, pues en ese modelo esta susceptancia aún no se encuentra conectada al nodo.



$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \sin \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2) \quad (5.2)$$

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \sin \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \sin \delta - \delta_m - V^2 (g_0 + g_m)$$

$$Q = VE'_0 g_0 \sin \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \sin \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m + B_{CEV}$$

### 5.2.1 Simulación del modelo de tres nodos compensado con CEV (modelo 1)

El primer modelo de CEV a considerar [Srivastava98] es un dispositivo simple que usa como señal de retroalimentación la magnitud de voltaje del nodo donde está conectado, siendo su objetivo controlar este voltaje a un valor de referencia especificado. Este modelo puede ser llamado modelo de primer orden, y su representación en diagrama de bloques se muestra en la Figura 5.3.

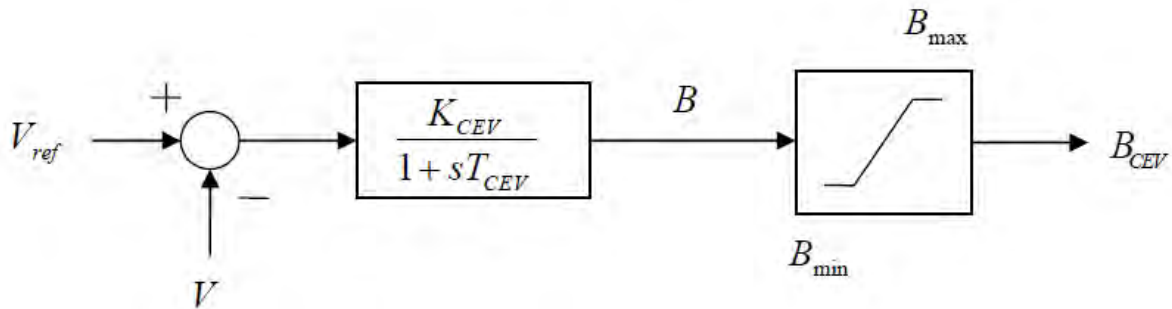


Figura 5.3 Diagrama de bloques de control del CEV1

Las ecuaciones que modelan la susceptancia del CEV1:

$$B = \frac{1}{T_{CEV}} K_{CEV} V_{ref} - V - B \quad (5.3)$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

De esta manera, las ecuaciones (5.2) más las ecuaciones (5.3) conforman el modelo del sistema de tres nodos compensado por el *CEV1*. Por otra parte, la Tabla 5.3 muestra los parámetros utilizados en la simulación.

Tabla 5.3 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos compensados por el *CEV1*

Parámetro de bifurcación $QI=0$ hasta $7.1$ [p.u.]			
$T_{CEV}=0.01$ [s]	$K_{CEV}=50$	$B_{lim}=1.5$ [p.u.]	$V_{ref}=0.95$ [p.u.]

En una primera simulación, se obtiene el diagrama de bifurcación del sistema compensado, limitando la susceptancia a 1.5 [p.u.]; en dicho diagrama se puede ver el efecto de compensar el nodo de carga. Además, se da un valor de referencia  $V_{ref} = 0.95$  [p.u.], para tratar de mantener en este valor en voltaje del nodo de carga en donde se encuentra conectado el *CEV*. La Figura 5.4 muestra la rama de alto voltaje del diagrama de bifurcación.

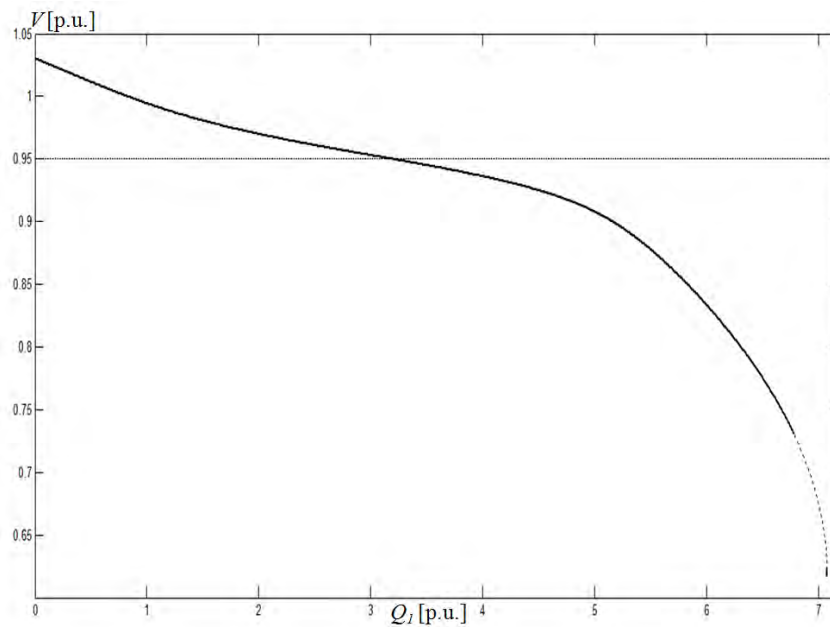


Figura 5.4 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos compensado por *CEV1*  $B_{lim}=1.5$  [p.u.]

Al comparar el diagrama de bifurcación de la Figura 5.1 con el de la Figura 5.4 se puede apreciar como se ha incrementado el punto de máxima cargabilidad del sistema así como retrasado la aparición de las bifurcaciones. Por otra parte, se sabe que la capacidad máxima y mínima del compensador es modelada con el límite de la susceptancia  $B_{lim}$ , por lo que en la Figura 5.5 se muestra el diagrama de bifurcación para diferentes valores de la susceptancia límite  $B_{lim}$ .

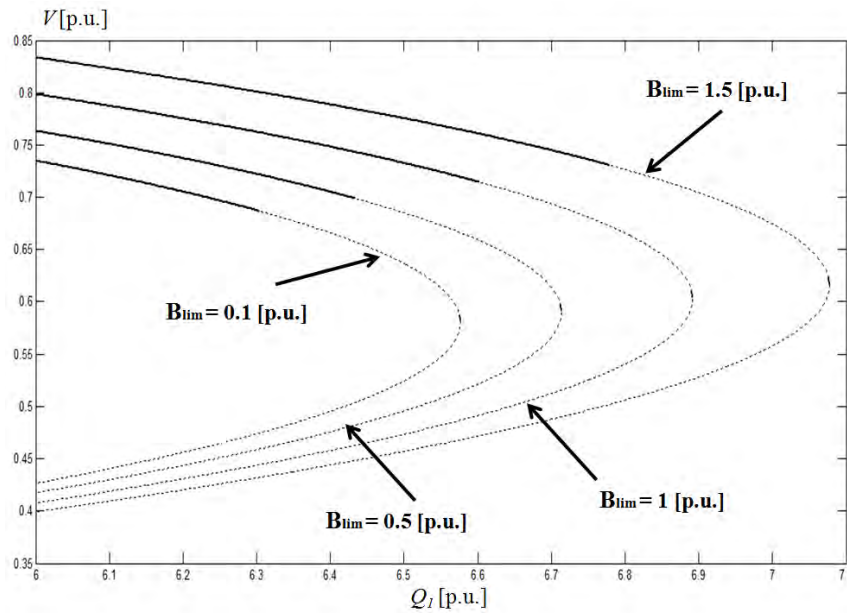


Figura 5.5 Comportamiento del sistema al compensar el nodo de carga para diferentes valores de la susceptancia límite  $B_{lim}$

En la Figura 5.5 se puede ver que al incrementar el límite de la susceptancia de  $CEV$ ,  $B_{lim}$ , también se incrementa el punto de máxima cargabilidad del sistema; pero además, se incrementa también la potencia demandada,  $Q_I$ , en la cual aparecen las bifurcaciones del sistema. El voltaje es mayor conforme la capacidad del compensador se incrementa, lo mismo sucede con la aparición de la bifurcación Hopf (**UHB**). Esto significa que el límite de cargabilidad se presenta cada vez en un valor mayor en el parámetro de bifurcación; es decir, la región de operación estable es mayor. Lo anterior se puede constatar en la Tabla 5.4 en la cual se muestra la ubicación exacta de las bifurcaciones para el sistema sin compensar y para los diferentes valores de  $B_{lim}$ . El voltaje se comporta como si sólo se utilizaran bancos de capacitores para mejorar el perfil del mismo.

Tabla 5.4 Ubicación de las bifurcaciones del sistema para cada valor de  $B_{lim}$

$B_{lim}$	<b>UHB</b>	<b>SHB</b>	<b>SNB</b>
S/C	6.27243 [p.u.]	6.54161 [p.u.]	6.54281 [p.u.]
0.1 [p.u.]	6.30423 [p.u.]	6.57520 [p.u.]	6.57637 [p.u.]
0.5 [p.u.]	6.43414 [p.u.]	6.71225 [p.u.]	6.71347 [p.u.]
1.0 [p.u.]	6.60294 [p.u.]	6.89017 [p.u.]	6.89146 [p.u.]
1.5 [p.u.]	6.77933 [p.u.]	7.07588 [p.u.]	7.07725 [p.u.]

Aunque este compensador añade cierto amortiguamiento en el sistema, la utilización de este modelo de compensador de primer orden no es del todo satisfactoria, debido a que el voltaje no se mantiene en el valor especificado. Esto último se debe a que el compensador siempre se encuentra saturado en la región capacitiva; es decir, la susceptancia necesaria para conseguir que la tensión en el nodo sea igual a la tensión de referencia ha violado el límite máximo, por ello el valor de  $B_{CEV}$  se fija en ese límite superior y se dice que el  $CEV$  se encuentra saturado.

## 5.2.2 Simulación del modelo de tres nodos compensado con CEV (modelo 2)

El segundo modelo del compensador es más completo [Laufenberg97], ya que considera explícitamente la combinación del capacitor fijo y el reactor controlado por tiristores (CF-RCT). De tal manera, la reactancia capacitiva vista por el sistema es modificada por la reactancia inductiva controlada por los tiristores.

El diagrama de control del CEV2 se muestra en la Figura 5.6:

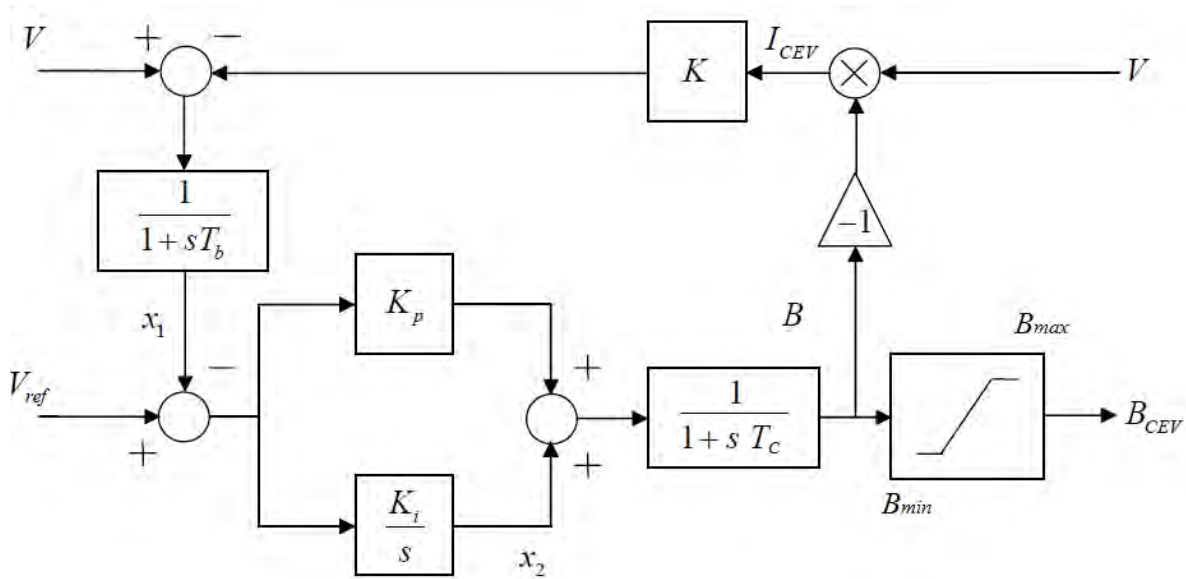


Figura 5.6 Diagrama de bloques de control del CEV2

En base al diagrama de bloques, las ecuaciones que forman el modelo matemático del CEV2 son:

$$x_1 = \frac{1}{T_b} [V - (1 + KB)x_1]$$

$$x_2 = K_i (V_{ref} - x_1)$$

$$B = \frac{1}{T_c} [x_2 + K_p (V_{ref} - x_1) - B]$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

$$Q = V^2 B_{CEV}$$

Las ecuaciones (5.2) más las ecuaciones (5.4) forman en conjunto el modelo del sistema de tres nodos compensado en el nodo de carga por el compensador estático de VAR's CEV2. La Figura 5.7 muestra el diagrama de bifurcación del sistema cuando se ha limitado la susceptancia del CEV2 en

$B_{lim}=1.5$  [p.u.] y la pendiente característica del *CEV2* se ha establecido en  $K=0.001$ . La Tabla 5.5 muestra todos los parámetros empleados en la simulación.

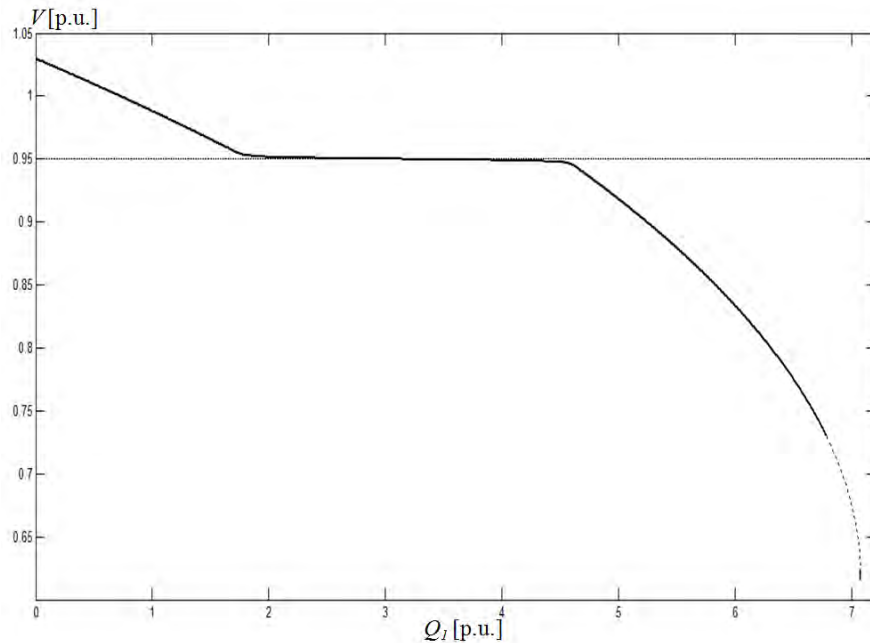


Figura 5.7 Diagrama de bifurcación del sistema de tres nodos compensado por *CEV2*  $B_{lim}=1.5$  [p.u.]  $K=0.001$

Tabla 5.5 Parámetros utilizados en el sistema de potencia de tres nodos compensados por el *CEV2*

Parámetro de bifurcación $Q_I=0$ hasta $7.1$ [p.u.]			
$T_b=0.02$	$T_c=0.02$	$K_p=0$	$K_i=100$
$V_{ref}=0.95$ [p.u.]	$B_{lim}=1.5$ [p.u.]	$K=0.001$	

En las simulaciones realizadas con el *CEV2* conectado en el nodo de carga, el voltaje se mantiene mucho más constante cuando se incrementa la demanda de potencia reactiva,  $Q_I$ , en relación al comportamiento del *CEV1*. En la Tabla 5.6 se muestra la ubicación de las bifurcaciones para el sistema sin compensar y para el sistema compensado con el *CEV2*. Se puede observar, al igual que con el *CEV1*, que se retrasa la aparición de la bifurcación hopf (**UHB**) y de la misma manera se incrementa la máxima cargabilidad del sistema. La región de operación estable es mayor y además el perfil de voltaje en el nodo de carga es mejor durante una gran parte del incremento de  $Q_I$ .

Tabla 5.6 Ubicación de las bifurcaciones del sistema de tres nodos en operación normal y compensado por el *CEV2* con  $B_{lim}=1.5$  [p.u.] y  $K=0.001$

$B_{lim}$	<b>UHB</b>	<b>SHB</b>	<b>SNB</b>
S/C	6.27243 [p.u.]	6.54161 [p.u.]	6.54281 [p.u.]
1.5 [p.u.]	6.77932 [p.u.]	7.07588 [p.u.]	7.07725 [p.u.]

Al observar la gráfica de la Figura 5.7 se puede ver claramente el comportamiento del *CEV* en función de su susceptancia equivalente. Primeramente existe una región comprendida entre  $Q_I=0$  y

$Q_I=2.130$  [p.u.] en la que el *CEV* se comporta como una reactancia inductiva saturada en el valor  $B_{min}$ ; es decir, en esta región, el valor de la susceptancia  $B_{CEV}$  es  $-1.5$  [p.u.]. Este comportamiento es entendible, pues la demanda de potencia reactiva del nodo de carga es muy pequeña, elevando el voltaje en este nodo; es decir, existe un exceso de reactivos en el sistema, por ello el *CEV* se comporta como una carga inductiva demandando reactivos al sistema. Al continuar incrementando la demanda de potencia reactiva en el nodo de carga,  $Q_I$ , se llega a la región comprendida entre  $Q_I=2.130$  [p.u.] y  $Q_I=3.096$  [p.u.] en la que el *CEV* se comporta como una reactancia inductiva que toma valores entre  $-1.5$  [p.u.] y  $0$ ; es decir, el *CEV* ya no está saturado. En esta región la demanda de potencia reactiva de la carga,  $Q_I$ , y del *CEV* son iguales a los generados por el sistema y la tensión en el nodo de carga se muestra regulada en  $V_{ref}$ . En el valor de  $Q_I=3.096$  [p.u.] la demanda de potencia reactiva es igual a la generada por el sistema,  $Q_I$ , y el *CEV* no consume ni aporta reactivos al sistema. Pasando el valor  $Q_I=3.096$  [p.u.] el *CEV* cambiará su comportamiento y ahora actuará como una reactancia capacitiva no saturada, aportando reactivos al sistema; esto es debido a que los reactivos que son generados por el sistema ya no alcanzan a cubrir la demanda de  $Q_I$  para mantener el voltaje,  $V$ , en el nivel de referencia,  $V_{ref}$ . Entonces,  $B_{CEV}$  tomará valores entre  $0$  y  $1.5$ [p.u.] esto hasta que el *CEV* se sature en  $Q_I=4.253$  [p.u.] valor de la potencia reactiva demandada a partir del cual el *CEV* se saturará nuevamente pero ahora en  $B_{max}$ ; es decir,  $B_{CEV}$  tomará el valor de  $1.5$  [p.u.]. Esta condición continuará hasta el punto de máxima cargabilidad del sistema. La Figura 5.8 muestra las áreas con los diferentes comportamientos del *CEV*2.

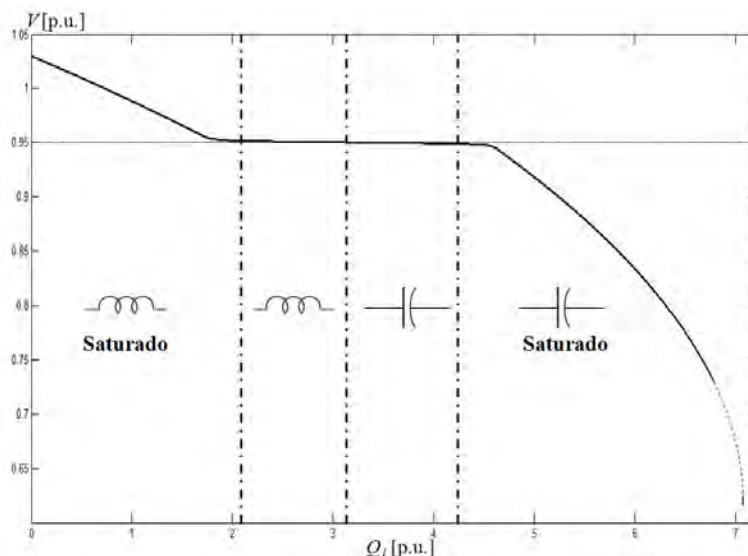


Figura 5.8 Comportamiento de  $B_{CEV}$  durante el incremento de la demanda de potencia reactiva,  $Q_I$ , en el nodo de carga

Para observar el efecto de compensar el sistema con compensadores de diferentes pendientes características,  $K$ , se simulará el sistema con tres compensadores ( $B_{lim}=1.5$  [p.u]) de las siguientes pendientes:  $K=0.1$ ,  $K=0.01$ ,  $K=0.001$ . Dicho efecto se muestra en la Figura 5.9. Se puede observar que la regulación de tensión es mucho mejor mientras más cercana a cero sea la pendiente característica del *CEV*.

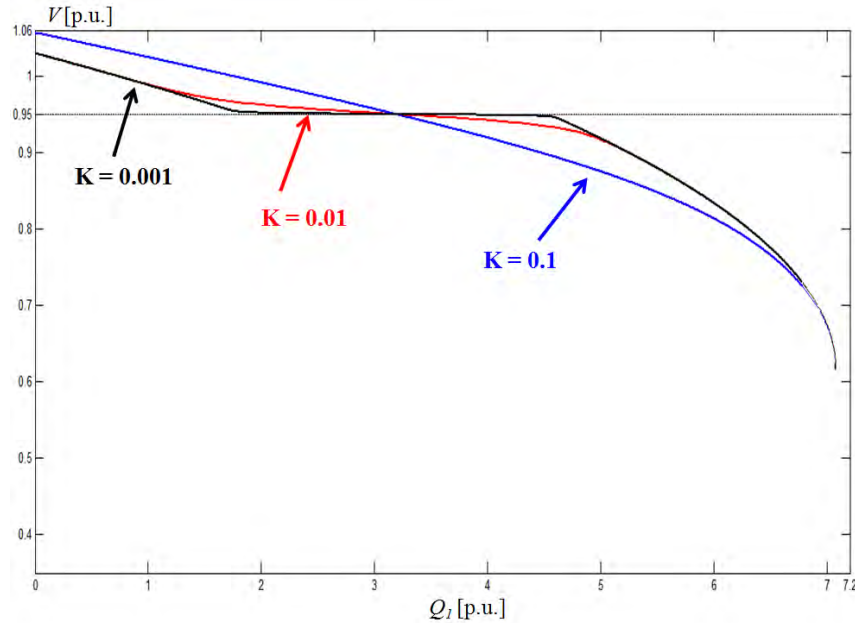


Figura 5.9 Diagramas de bifurcación para diferentes valores de pendiente característica,  $K$ , del  $CEV$

Es interesante hacer notar que a pesar de que la regulación de voltaje es diferente en los tres casos, la aparición de las bifurcaciones hopf (**UHB** y **SHB**) y la nodo-silla (**SNB**) se da en el mismo valor del parámetro  $Q_l$  y al mismo nivel de tensión en los tres casos.

### 5.2.3 Comparación de $CEV$ modelo 1 y $CEV$ modelo 2

En la presente sección se hace un pequeño comparativo entre los dos compensadores  $CEV$  simulados en esta tesis. Como ya se mencionó, el primer modelo de compensador ( $CEV1$ ) es un modelo muy simple de primer orden; y por su parte, el segundo ( $CEV2$ ) es un modelo más complejo. La primera diferencia la encontramos en el hecho de la capacidad para manipular la regulación voltaje. Mientras que en el  $CEV1$  el ajuste de la pendiente de regulación no está disponible, en el  $CEV2$  sí lo está y permite obtener mejor regulación de tensión, en el nodo al cual está conectado, mientras esta pendiente se acerca más a cero (ver Figura 5.9).

Esta capacidad de regulación de la pendiente característica del  $CEV2$  nos permite mejorar el perfil de voltaje en el nodo de carga en comparación con el del  $CEV1$ . La Figura 5.10 muestra una comparación entre ambos compensadores simulados. El límite de la susceptancia es  $B_{lim}=1.5$  [p.u.] para ambos casos y el valor de la pendiente característica de  $K=0.001$  para el  $CEV2$ .

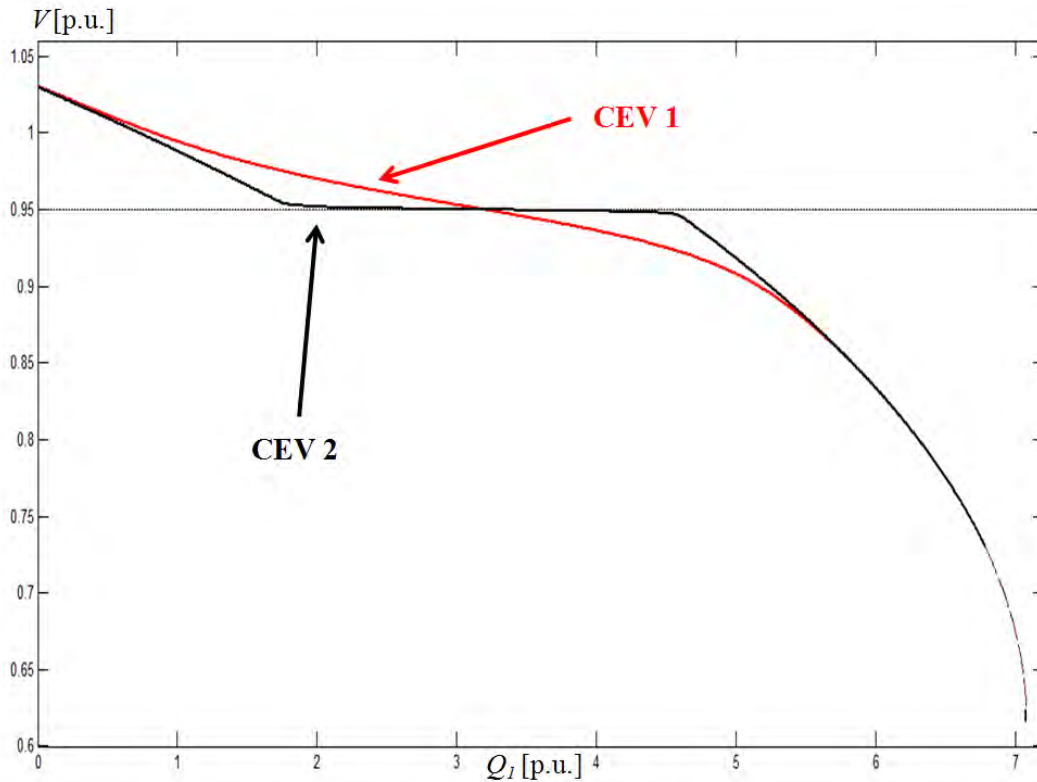


Figura 5.10 Comparación de regulación de voltaje del CEV1 y el CEV2

Finalmente comprueba que a pesar de que la regulación del CEV2 es mejor que la del CEV1, en ambos casos se logra extender la región de estabilidad del sistema comparado con el sistema sin compensar. En la Figura 5.11 se muestran los diagramas de bifurcación del sistema sin compensar y del sistema compensado por cada uno de los CEV's. Es claro que punto de máxima cargabilidad del sistema se ha ampliado y que aparición de las bifurcaciones se ha retrasado tal y como se puede constatar en la Tabla 5.7. Además se comprobó que aún cuando la regulación del voltaje es diferente en los compensadores, la aparición de las bifurcaciones se sigue dando en el mismo valor del parámetro de bifurcación  $Q_I$ .

Tabla 5.7 Ubicación exacta de las bifurcaciones del sistema sin compensar y compensado por los CEV's

<b>Compensador</b>	<b>UHB</b>	<b>SHB</b>	<b>SNB</b>
S/C	6.27243 [p.u.]	6.54161 [p.u.]	6.54281 [p.u.]
CEV1	6.77933 [p.u.]	7.07588 [p.u.]	7.07725 [p.u.]
CEV2	6.77932 [p.u.]	7.07588 [p.u.]	7.07725 [p.u.]



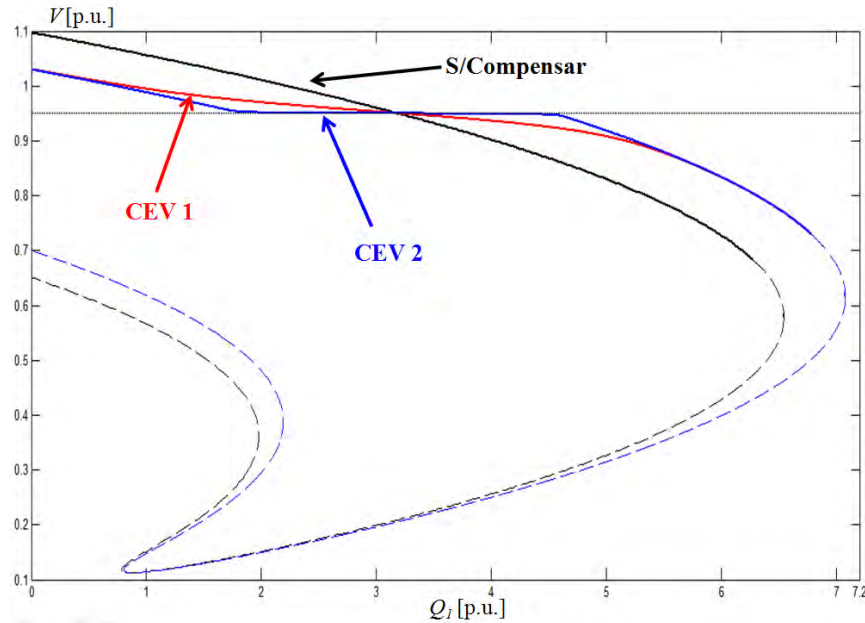


Figura 5.11 Diagramas de bifurcación del sistema sin compensar y del sistema compensado por el CEV1 y el CEV2

### 5.3 Sistema de tres nodos compensado con *StatCom*

En la presente sección se conectará un dispositivo *StatCom* al sistema de tres nodos. El modelo de *StatCom* empleado es el que se muestra en la Figura 5.12 el cual consiste en una fuente convertidora de voltaje autoconmutado para proporcionar, de forma controlable y estática, inyecciones de voltaje y corriente. El *StatCom* es análogo a una máquina síncrona ideal, el cual genera un conjunto balanceado de tres voltajes senoidales a frecuencia fundamental, con amplitud y ángulo de fase controlados. Esta máquina ideal no tiene inercia, su respuesta es prácticamente instantánea, no altera significativamente la impedancia existente del sistema, y puede generar internamente potencia reactiva (capacitiva e inductiva). [Dong]

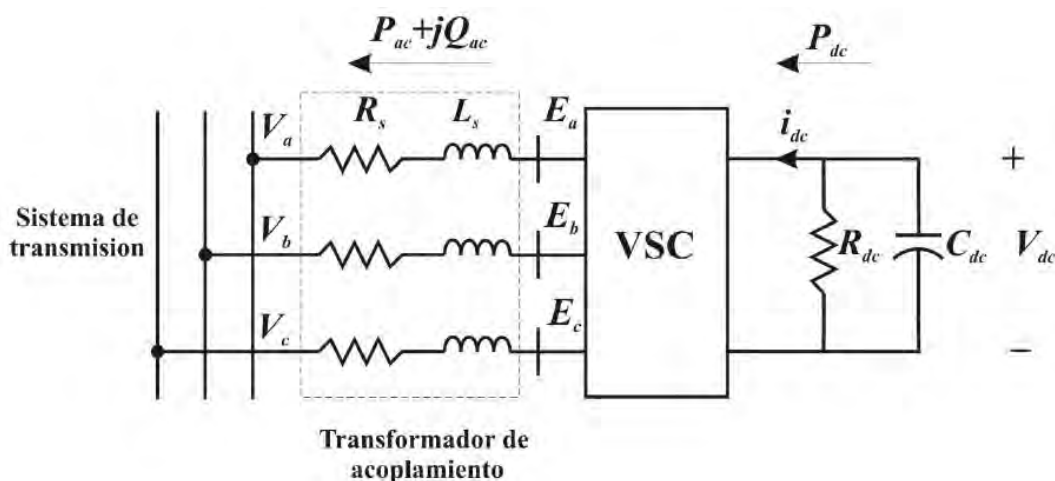


Figura 5.12 Circuito equivalente del *StatCom*

El desarrollo de las ecuaciones del *StatCom* se presenta en el Apéndice D y se muestran a continuación [Dong], [Dong04], [Lehn02], [Schauder93]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i'_d &= -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_d + \omega_e i'_q + \frac{k \omega_b}{L'} \cos \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \cos \delta \\ \frac{d}{dt} i'_q &= -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_q - \omega_e i'_d + \frac{k \omega_b}{L'} \sin \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \sin \delta \\ \frac{d}{dt} V'_{dc} &= -\frac{3}{2} k C'_{dc} \omega_b \cos \alpha + \delta i'_d + \sin \alpha + \delta i'_q - \frac{C'_{dc} \omega_b}{R'_{dc}} V'_{dc} \end{aligned} \quad (5.5)$$

### 5.3.1 Simulación del sistema de tres nodos compensado por el *StatCom*

En este caso se añade un *StatCom* al modelo clásico en el nodo de carga con la finalidad de inyectar una potencia reactiva constante para mejorar la magnitud de voltaje en ese nodo, tal como se muestra en la Figura 5.13.

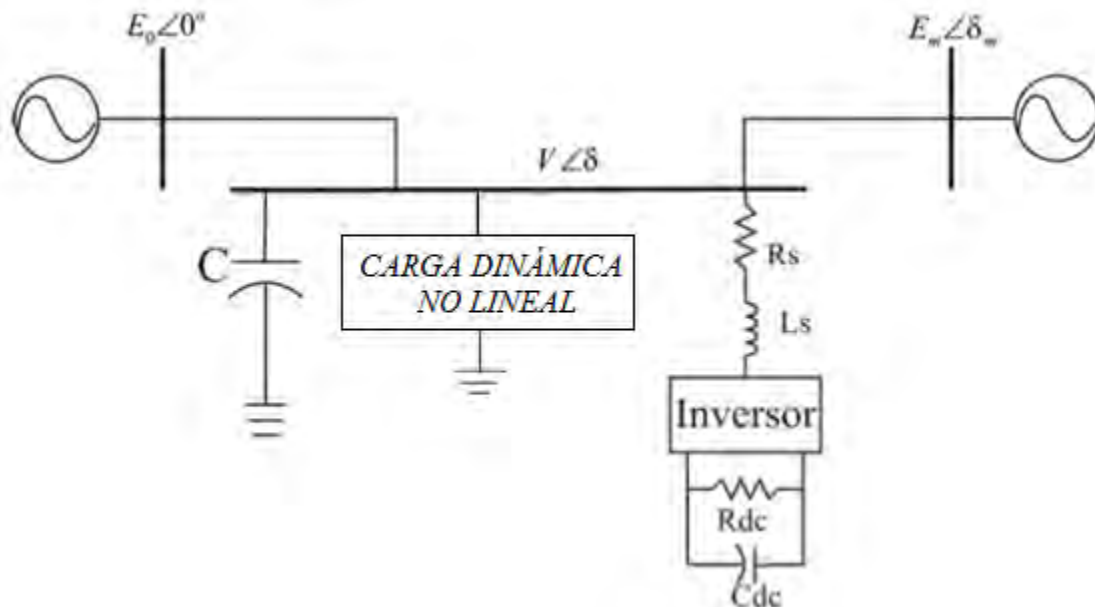


Figura 5.13 Sistema de tres nodos compensado con un *StatCom*

El sistema de tres nodos está modelado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \delta_m &= \omega \\ \omega &= \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta \\ \delta &= K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1) \\ V &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q \\ &\quad + K_{pw}K_{qv2} V^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

En donde las potencias  $P$  y  $Q$  están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia dadas en las ecuaciones que se muestran a continuación. El último término de la expresión derecha de las ecuaciones representa la potencia inyectada por el StatCom.

$$\begin{aligned} P &= VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2 g_0 + g_m \\ &\quad + V i'_d \cos \delta + i'_q \text{sen} \delta \\ Q &= VE'_0 g_0 \text{sen } \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \text{sen } \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m \\ &\quad + V^2 b_0 + b_m + V i'_d \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta \end{aligned} \tag{5.7}$$

En la Figura 5.14 se presenta el diagrama de control del StatCom por medio del cual se controlan la potencia reactiva que el StatCom inyecta al sistema,  $Q_{ac}$ , y el voltaje del capacitor  $V_{dc}$  [Dong04].

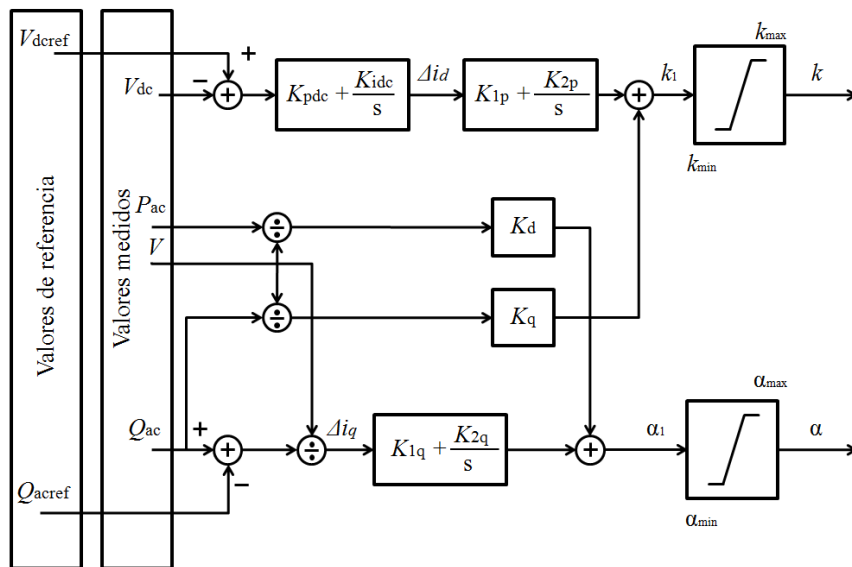


Figura 5.14 Diagrama de control del StatCom

Las ecuaciones de control derivadas del diagrama anterior son las siguientes. Las últimas dos ecuaciones son los limitadores de  $k$  y  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= K_{i_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} \\
 \Delta i_d &= K_{p_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} + x_1 \\
 x_2 &= K_{2p} \Delta i_d \\
 K_1 &= K_{1p} \Delta i_d + x_2 \\
 x_3 &= K_{2q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} \\
 \alpha_1 &= K_{1q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} + x_3 \\
 k &= k_{lim} \tanh \frac{k_1}{k_{lim}} \\
 \alpha &= \alpha_{lim} \tanh \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Así finalmente se tiene el modelo final del sistema de tres nodos compensado por un *StatCom* el cual está conformado por las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7) y (5.8). El modelo completo se presenta a continuación:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \sin \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q \\
 &\quad + K_{pw}K_{qv2} V^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \sin \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \sin \delta - \delta_m - V^2 g_0 + g_m \\
 &\quad + V i'_d \cos \delta + i'_q \sin \delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= VE'_0 g_0 \sin \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \sin \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m \\
 &\quad + V^2 b_0 + b_m + V i'_d \sin \delta - i'_q \cos \delta
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} i'_d = -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_d + \omega_e i'_q + \frac{k \omega_b}{L'} \cos \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \cos \delta$$

$$\frac{d}{dt} i'_q = -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_q - \omega_e i'_d + \frac{k \omega_b}{L'} \sin \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \sin \delta$$

$$\frac{d}{dt} V'_{dc} = -\frac{3}{2} k C'_{dc} \omega_b \cos \alpha + \delta i'_d + \sin \alpha + \delta i'_q - \frac{C'_{dc} \omega_b}{R'_{dc}} V'_{dc}$$

$$x_1 = K_{i_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc}$$

$$\Delta i_d = K_{p_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} + x_1$$

$$x_2 = K_{2p} \Delta i_d$$

$$K_1 = K_{1p} \Delta i_d + x_2$$

$$x_3 = K_{2q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V}$$

$$\alpha_1 = K_{1q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} + x_3$$

$$k = k_{lim} \tanh \frac{k_1}{k_{lim}}$$

$$\alpha = \alpha_{lim} \tanh \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}$$

El parámetro de bifurcación es la potencia reactiva demandada en el nodo de carga,  $Q_l$ . La lista completa de los parámetros utilizados en esta simulación se enlista en la Tabla 5.8

Tabla 5.8 Parámetros utilizados en el sistema de tres nodos compensado por un StatCom

Parámetro de bifurcación $Q_l=0$ hasta 7[p.u.]			
$L_s=0.15[p.u.]$	$R_s=0.01[p.u.]$	$\omega_s=377 [rad/s]$	$C_{dc}=0.88[p.u.]$
$R_{dc}=600[p.u.]$	$V_{dc_{ref}}=1.3201[p.u.]$	$K_{p_{dc}}=0.35$	$K_{i_{dc}}=0.001$
$K_{1p}=0.35$	$K_{2p}=-0.1$	$K_{1q}=1$	$K_{2q}=0.5$
$Q_{ac_{ref}}=0.001[p.u.]$	$\alpha_{lim}=1[p.u.]$	$k_{lim}=1$	

El *Statcom* tiene la capacidad de inyectar potencia reactiva dentro de su margen operativo normal. Como primer caso se obtiene el diagrama de bifurcación considerando que la potencia inyectada es nula  $Q_{acref}=0.001$  [p.u.]. El parámetro de bifurcación va desde 0 hasta  $Q_l = 7.0$  [p.u.]. Con este primer caso se pretende comprobar que el modelo simulado funciona ya que al no inyectar potencia reactiva al sistema, el diagrama de bifurcación debería ser el mismo que el del sistema sin compensar.

La Figura 5.15 muestra en la parte superior el sistema sin compensar y en la inferior el sistema compensado por el *StatCom* y con una inyección de potencia reactiva nula,  $Q_{acref}=0.001$  [p.u.]. Por otra parte, la Figura 5.16 muestra la superposición de los diagramas de bifurcación del sistema sin compensar y del sistema sin compensar con el *StatCom* conectado al nodo de carga. Se puede comprobar fácilmente que ambos diagramas son prácticamente idénticos mostrando el correcto modelado del sistema.

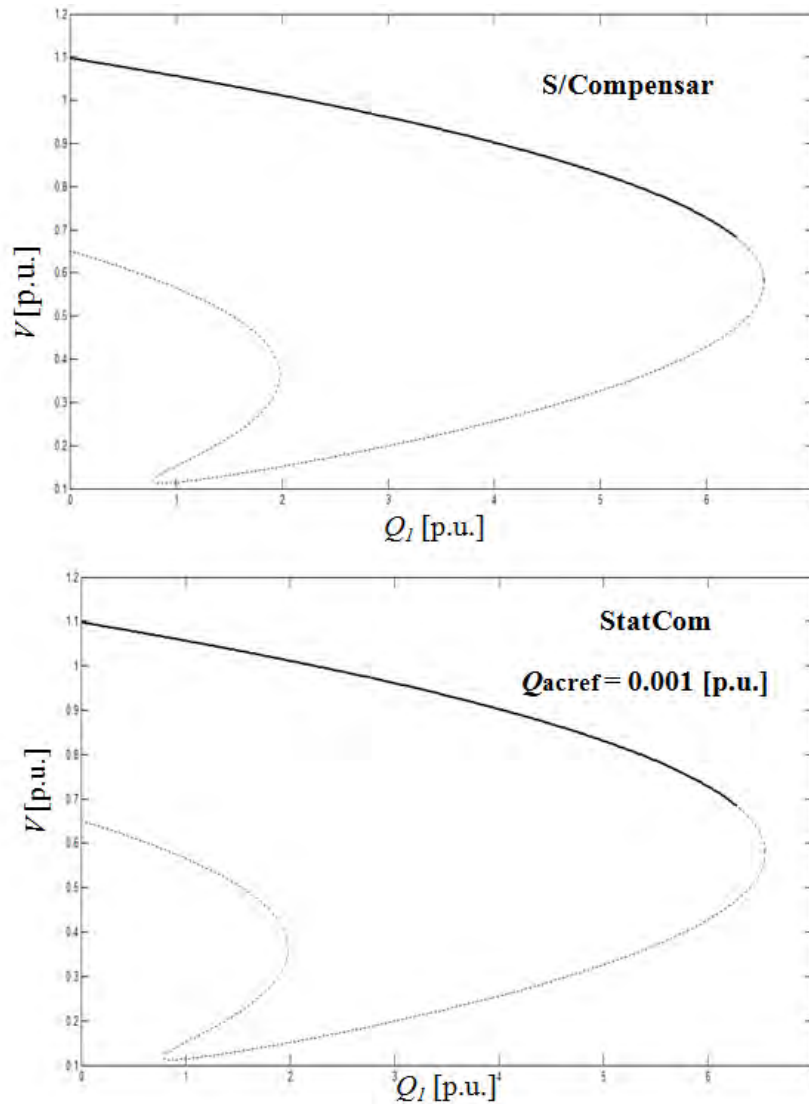


Figura 5.15 Diagramas de bifurcación del sistema sin compensar sin y con *StatCom*

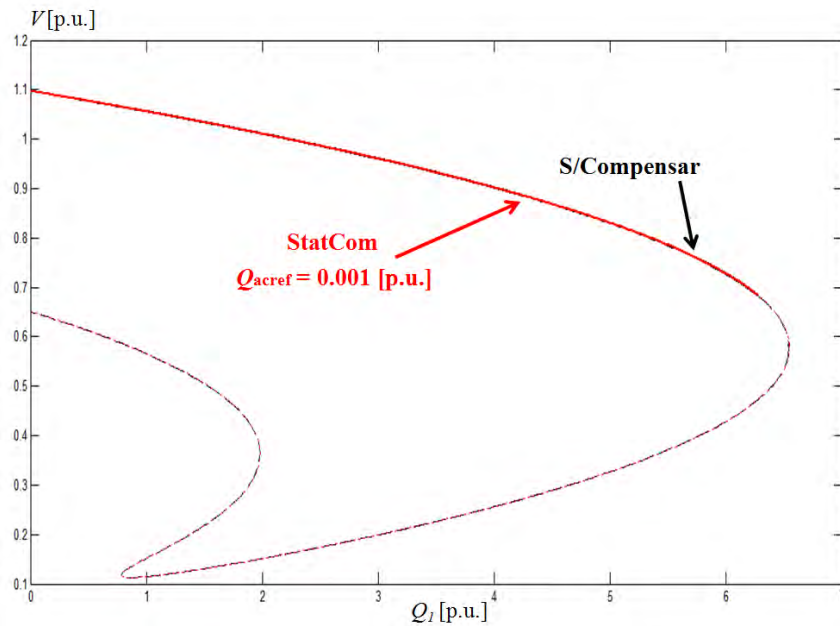


Figura 5.16 Superposición de los diagramas de bifurcación del sistema con *StatCom* conectado y desconectado

La Figura 5.17 muestra diversos diagramas de bifurcación para diferentes niveles indicados de inyección de potencia reactiva del *StatCom*.

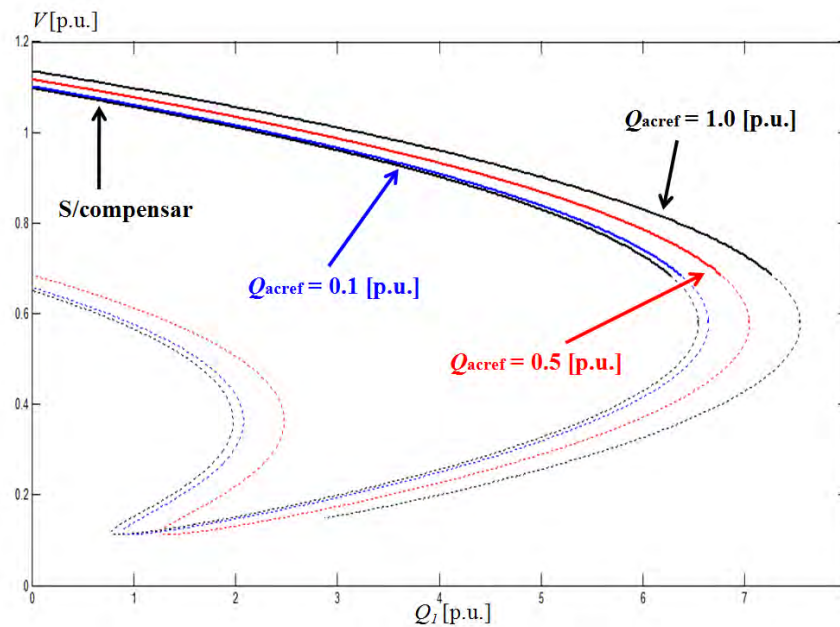


Figura 5.17 Diagramas de bifurcación para diferentes niveles de inyección de potencia reactiva,  $Q_{acref}$ , del *StatCom*

Como es de esperarse, el perfil de voltaje del nodo de carga se mejora conforme el valor de inyección de potencia reactiva se incrementa. Asimismo, el punto de bifurcación aparece a un mayor valor del parámetro  $Q_I$ . Esto indica que el límite de cargabilidad se presenta a un valor mayor del parámetro de bifurcación  $Q_I$ ; es decir, la región de operación estable es mayor. Se observa que al igual que en los casos de los *CEV's*, la utilización del *StatCom* es incapaz de eliminar algún tipo de bifurcación que aparece en el modelo clásico.

La ubicación precisa de las bifurcaciones detectadas en la trayectoria de soluciones mostrada en los diagramas de bifurcación que se muestran en la Figura 5.17 se resume en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9 Ubicación de las bifurcaciones del sistema para cada valor de  $B_{lim}$

$Q_{ac_{ref}}$	$UHB$	$SHB$	$SNB$
S/C	6.27243 [p.u.]	6.54161 [p.u.]	6.54281 [p.u.]
0.1 [p.u.]	6.37474 [p.u.]	6.64488 [p.u.]	6.64614 [p.u.]
0.5 [p.u.]	6.77280 [p.u.]	7.04455 [p.u.]	7.04585 [p.u.]
1.0 [p.u.]	7.27104 [p.u.]	7.54350 [p.u.]	7.54493 [p.u.]



## 6 Conclusiones y aportaciones

### 6.1 Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un estudio de estabilidad de los puntos de equilibrio que se presentan en un sistema eléctrico de potencia de tres nodos al variar cuasiestáticamente un parámetro del sistema. El análisis se basó en la dinámica no lineal y teoría de bifurcaciones. De esta forma, se estudiaron los puntos de equilibrio, asociados a un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico, del sistema eléctrico de potencia tratado. La estabilidad fue determinada por el cálculo de los valores propios del Jacobiano, evaluado en el punto de equilibrio bajo análisis, del sistema de ecuaciones diferencial-algebraico linealizado. Con la finalidad de cuantificar cambios en la estabilidad del sistema, estos valores propios se relacionaron con diferentes tipos de bifurcaciones; tal que, fue posible determinar la dinámica del sistema ante una perturbación pequeña de manera cualitativa. El estudio se realizó considerando el cambio cuasiestático en la demanda de potencia reactiva del sistema y con la ayuda del programa *XPPAUT*. Algunas conclusiones obtenidas de la realización de este trabajo son las siguientes:

- Los resultados observados muestran la gran complejidad del comportamiento que presentan los sistemas eléctricos de potencia aún cuando éstos sea relativamente pequeños. Sin embargo, dicho comportamiento se pudo analizar adecuadamente empleando la teoría de bifurcaciones.
- Con las simulaciones se prueba que el comportamiento dinámico es dependiente del tipo de cargas en el sistema, en el caso del presente trabajo la carga fue modelada como una combinación en paralelo del modelo de carga basado en potencia constante y de un modelo de carga dinámica representado por una carga no lineal.
- El fenómeno de colapso de voltaje no se presenta únicamente en el punto de máxima cargabilidad del sistema. En dicho punto sí existe un colapso de voltaje estático pero también tiene lugar el colapso de voltaje dinámico en otros puntos de operación del sistema.
- Es posible identificar de manera cualitativa el tipo de dinámica que se puede esperar en diferentes puntos de operación del sistema sin la necesidad de realizar una simulación en el tiempo.

- En base a los diagramas de bifurcación, es posible identificar las regiones de operación estable e inestable; así como, las soluciones correspondientes a puntos fijos y a soluciones periódicas.
- Al compensar el nodo de carga del sistema estudiado mediante un Compensador Estático de VAR's (*CEV*), se incrementa el punto de máxima cargabilidad del sistema; pero además, se incrementa también el valor del parámetro, potencia reactiva demandada, en el cual aparecen las bifurcaciones del sistema.
- El voltaje es mayor conforme la capacidad del compensador (*CEV*) es incrementada; además, con este incremento también se retrasa la aparición de la bifurcación Hopf (***UHB***). Esto significa que el límite de cargabilidad se presenta cada vez en un mayor valor del parámetro de bifurcación y del voltaje; es decir, la región de operación estable es mayor.
- Se pudo observar que además del retraso en la aparición de las bifurcaciones, el *CEV* es capaz de regular el perfil de voltaje en el nodo de carga, teniendo un mejor resultado en el caso del *CEV2* cuando la pendiente característica del *CEV* se ajustó a un valor muy cercano a cero.
- A pesar de que con la conexión del *CEV* se incrementó la región de operación estable, y se logró retrasar la aparición de las bifurcaciones, no se consiguió la eliminación de éstas.
- De la misma manera que con el *CEV*, al compensar la potencia reactiva en el nodo de carga mediante un Compensador Estático Síncrono (*StatCom*) se consiguió incrementar el punto de máxima cargabilidad del sistema y también el valor del parámetro, potencia reactiva demandada, en el cual aparecen las bifurcaciones.
- El uso del *StatCom* retrasó la aparición de las bifurcaciones; pero también, incrementó el voltaje al cual ocurren las anteriores. El límite de cargabilidad se presenta cada vez en un mayor valor del parámetro de bifurcación y del voltaje; es decir, la región de operación estable es mayor.
- A diferencia del *CEV*, el control implementado para el *StatCom*, no es capaz de regular el voltaje, en el nodo de conexión, a un valor de referencia.
- Como se mencionó, el uso del *StatCom* incrementa la región de operación estable y consigue retrasar la aparición de las bifurcaciones; sin embargo, no logra la eliminación de éstas.

## 6.2 Aportaciones

Con las simulaciones realizadas del pequeño sistema de potencia, se ayuda a entender la forma de operación de éstos y los fenómenos no lineales que muy posiblemente pueden existir. Las inestabilidades de voltaje que pueden llegar a presentarse, se han explicado de manera exitosa con la teoría de bifurcación.

Así, de manera específica se puede afirmar lo siguiente:

- Se ha presentado una manera en que pueden identificarse y controlarse inestabilidades de voltaje del sistema eléctrico por medio de los compensadores estáticos de VAR's y de los compensadores estáticos síncronos.
- Se presenta el análisis del efecto del *StatCom* sobre las bifurcaciones que aparecen en un sistema eléctrico, así como su efecto en la forma y tamaño de la región de estabilidad del sistema.

## Referencias

[Anderson77]

P. M. Anderson y A. A. Fouad, "Power system control and stability", 2nd Edition, IEEE Press Series on Power Engineering, 2003, ISBN: 0-471-23862-7

[Carvajal07]

H. R. Carvajal Pérez, "Análisis multiparamétrico de bifurcaciones en sistemas eléctricos", Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, 2007.

[Coronado01]

Coronado, P. Zúñiga y J. M. Ramírez, "FACTS: soluciones modernas para la industria eléctrica" Avance y Perspectiva vol. 20, Año 2001, pp. 235-244. Texto elaborado en CINVESTAV unidad Guadalajara y recuperado el 15 de noviembre de 2011 de:

[http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto\\_completo/cinvestav/2001/89222\\_2.pdf](http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2001/89222_2.pdf)

[Chen96]

M. Chen, "Modeling and analysis of modern power systems" Compendio de información elaborado en el Centro de Investigación de Sistemas Energéticos, Universidad de Arlington, Texas, 1996.

[Chiang90]

H. Chiang, I. Dobson, R. J. Thomas, J. S. Thorp y L. Fekih-Ahmed, "On Voltage Collapse in Electric Power Systems," IEEE Transactions on Power Systems, Volume: 5, Issue: 2 , pp: 601 -611. Mayo 1990.

[Chiang92]

H.D. Chiang, C.C. Liu, P.P. Varaiya, F.F. Wu y M.G. Lauby, "Chaos in a simple power system", IEEE Transactions on Power Systems, Volume: 8, Issue: 4, pp. 1-8, 1993.

[Dobson88]

I. Dobson, H. Chiang y J. S. Thorp, "A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems". IEEE proceedings of 27<sup>th</sup>. Conference on Decision and Control, Austin Texas, pp.2104-2109, December, 1988.

[Dobson89]

I. Dobson, H. Chiang, "Towards a theory of voltage collapse in electric power systems," Systems and Control Letters, Volume 13, pp. 253-262, 1989.

[Dong]

L. Dong. "Control, interaction mitigation and location for FACTS devices" Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical Engineering. University of Missouri-Rolla, pp 12-16, 2004.

[Dong04]

L. Dong, M. L. Crow, Z. Yang, C. Shen, L. Zhang y S. Atcitty. "A Reconfigurable FACTS System for University Laboratories". IEEE Transactions on Power System, Vol.19, No. 1 pp. 120-128 February 2004.

[Ermentrout01]

B. Ermentrout "XPPAUT5.0 the differential equations tool" Manual de uso de *XPPAUT*, enero 2001.

[García02]

R. García, "Análisis de Inestabilidades en Sistemas Eléctricos de Potencia por Medio de la Teoría de Bifurcación", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Morelia, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Programa de Graduados e Investigación en Ingeniería Eléctrica, 2002.

[Gu06]

W. Gu, F. Milano, P. Jiang y G. Tang, "Hopf bifurcations induced by SVC Controllers: A didactic example" Electric Power Systems Research, Vol. 77, pp.234-240, Mayo 2006.

[Guckenheimer83]

J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, Agosto 1983. ISBN: 978-0387908199.

[IEEE93]

IEEE Task Report, "Load Representation for Dynamic Performance Analysis", IEEE Transactions on Power Systems, Vol 8, No. 2, pp. 472-482, May 1993.

[Kundur94]

P. Kundur, "Power System Stability and Control" McGraw-Hill 1994. ISBN: 0-07-035958-X

[Kuznetsov98]

Y. A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory", 2nd Edition, Springer-Verlag, 1998. ISBN: 0-387-95001-X.

[Laufenberg97]

M. J. Laufenberg. "Dynamic sensitivity functions and the stability of power systems with FACTS controllers", Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical Engineering. University of Illinois, Urbana, Illinois, pp 50-53, 1997.

[Lehn02]

P. W. Lehn, "Exact modeling of the voltage source converter" IEEE, Transactions on Power Delivery, volume 17, Issue: 1, pp. 217-222, Enero 2002.

[Llamas04]

A. Llamas, F. Viramontes, O. Probst, R. Ruth, A. Morones y M. González, "Situación del Sector Eléctrico en México", IEEE- RVP-AI/2004, ponencia presentada en la reunión de verano de potencia, Acapulco, Gro. del 11 al 17 de julio de 2004.

[Nayfhe95]

A. H. Nayfhe, B. Balachandran, "Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods", John Wiley & Sons, Inc. 1995. ISBN: 0-471-59348-6

[Nise04]

N. S. Nise. "Control Systems Engineering" 4th Edition, Wiley 2004. ISBN 0-471-44577-0

[Schauder93]

C. Schauder y H. Mehta, "Vector analysis and control of advanced static VAR compensators" Proc. Inst. Elect. Eng., Gen. Transm. Dist., vol. 140, no. 4, pp. 299-306, Julio 1993.

[Slotine91]

E. J. Slotine y W. Li, "Applied Nonlinear Control" Prentice-Hall 1991. ISBN 0-13-040890-5

[Srivastava98]

K. N. Srivastava, S. C. Srivastava, "Elimination of dynamic bifurcation chaos in power systems using Facts devices", IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. 45 No. 1, pp. 72-78, Enero 1998.

[Strogatz00]

S. H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics And Chaos", Cambridge Massachusetts. Perseus Publishing 2000. ISBN: 0-738-20453-6.

[Uzunovic01]

E. Uzunovic, "EMTP, Transient Stability and Power Flow Models and Controls of VSC Based FACTS Controllers," PhD Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Waterloo, Ontario, Canada. 2001.

[Van Cutsem98]

T. Van Cutsem y C. Vournas, "Voltage Stability of Electric Power Systems", Power Electronics and Power System Series., Kluwer Academic Publishers, 1998. ISBN: 0-387-75535-7.

[Vidyasagar93]

M. Vidyasagar "Nonlinear system analysis" 2nd Ed. Prentice-Hall 1993. ISBN 0-89871-526-1

[Walve86]

Walve K., "Modeling of power system components at severe disturbances". CIGRÉ paper 38-18, International conference on large high voltage electric systems, Paris agosto 1986.

[Wang94]

H. O. Wang, E. H. Abed, and A. M. A. Hamdan, "Bifurcation, chaos and crisis in voltage collapse of a model power system". IEEE Transactions on circuits and systems. Vol. 41, No. 3, pp. 294-302, Marzo 1994.

[Wang96]

S. Wang, "Bifurcation Analysis of Oscillations in Electric Power Systems," PhD Thesis, Arizona State University, Arizona, EUA. 1996.

[XPPAUT11]

XPP-AUT 6.10 Software libre para resolución de problemas de continuación y bifurcaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias. Recuperado el 19 de febrero de 2011 de: <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>

[Yang98]

Z. Y. Dong "Advanced Methods for Small Signal Stability Analysis and Control in Modern Power System" PhD Thesis in Electrical and Information Engineering, The University of Sydney New South Wales 2006 Australia. Agosto 28, 1998.

## Apéndice A. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos en forma polar

El sistema eléctrico de potencia de tres nodos que se analiza en el presente trabajo fue propuesto originalmente por Ian Dobson, Hsiao Dong Chiang, James S. Thorp, en su artículo "A Model Of Voltage Collapse In Electric Power Systems", [Dobson88]. El sistema es el siguiente (Figura A.1):

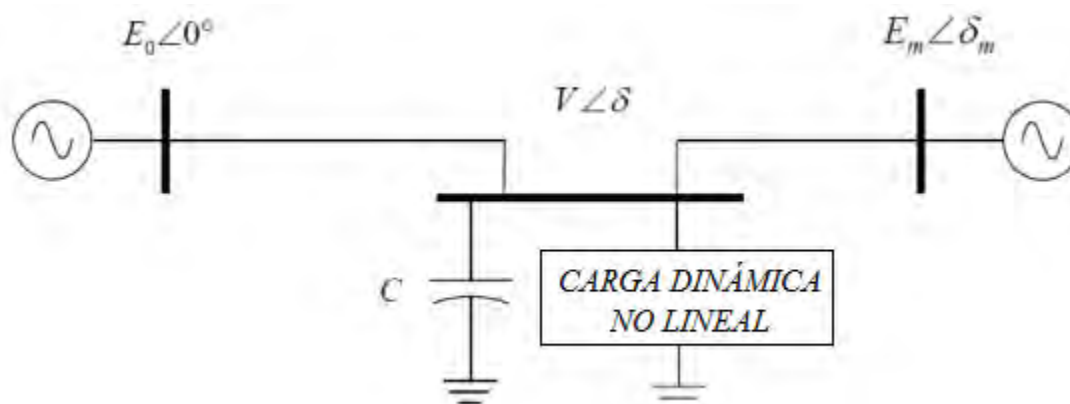


Figura A.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos con carga dinámica

El sistema está formado por dos generadores, el de la izquierda es considerado como nodo de referencia, y dos líneas de transmisión que alimentan la carga en el nodo central. La carga es una combinación de cargas de tipo estático y dinámico. La parte estática está representada por una carga de potencia constante y la dinámica por una carga no lineal. Además un capacitor se encuentra conectado en paralelo con la carga.

El sistema puede ser modelado con el diagrama de la Figura A.2:

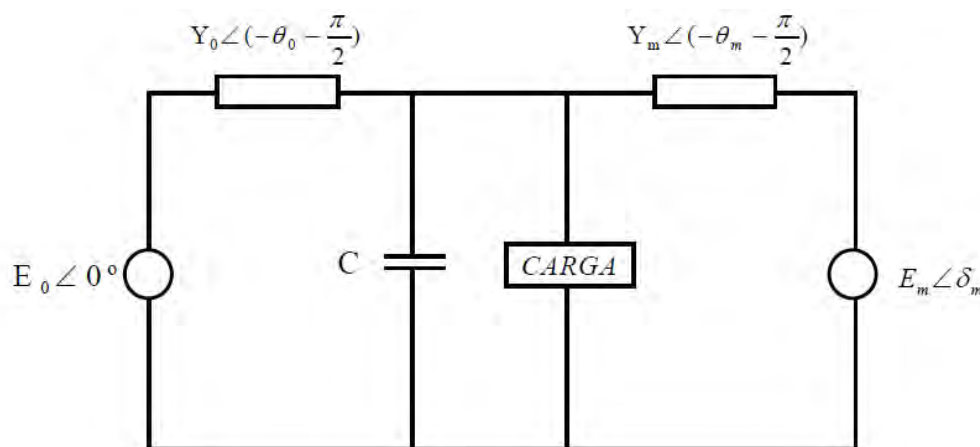


Figura A.2 Modelo del sistema de potencia de tres nodos



En este modelo, el capacitor sirve para incrementar la tensión en el nodo de carga, éste puede ser incluido en un equivalente de Thévenin con el nodo slack, para incrementar la tensión de Thévenin  $E'_0$  al incrementar  $C$ . Entonces utilizando la identidad de Euler,  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \operatorname{sen} x$ , las admitancias de las líneas de transmisión se pueden expresar de la misma forma:

$$Y_0 \angle -\theta_0 - \frac{\pi}{2} = Y_0 e^{-j(\theta_0 + \frac{\pi}{2})} = Y_0 \cos \theta_0 + \frac{\pi}{2} - j \operatorname{sen} \theta_0 + \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.1})$$

Se conocen las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 + \frac{\pi}{2} &= -\operatorname{sen}(\theta_0) \\ \operatorname{sen} \theta_0 + \frac{\pi}{2} &= \cos(\theta_0) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Entonces, las admitancias de las líneas se puede expresar de la siguiente manera:

$$Y_0 \angle -\theta_0 - \frac{\pi}{2} = Y_0 -\operatorname{sen}\theta_0 - j\cos\theta_0 = -Y_0 \operatorname{sen}\theta_0 - jY_0 \cos\theta_0 = Y_0 \quad (\text{A.3})$$

La admitancia del capacitor es la siguiente:

$$Y_C = Z_C^{-1} = j\omega C$$

Considerando a  $\omega = 1$ [p. u.] entonces se obtiene la ecuación:

$$Y_C = jC \quad (\text{A.4})$$

Tomando entonces la línea de la izquierda y el capacitor para formar el equivalente de Thévenin, la admitancia total es:

$$\begin{aligned} Y_{Th} &= Y_0 + Y_C = -Y_0 \operatorname{sen}\theta_0 - jY_0 \cos\theta_0 + jC \\ Y_{Th} &= -Y_0 \operatorname{sen}\theta_0 + jC - Y_0 \cos\theta_0 = G + jB \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Obteniendo su magnitud se llega a:

$$\begin{aligned} Y_{Th} &= \overline{G^2 + B^2} \\ Y_{Th} &= \overline{(-Y_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 + (C - Y_0 \cos\theta_0)^2} \\ Y_{Th} &= \overline{Y_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0 + C^2 - 2CY_0 \cos\theta_0 + Y_0^2 \cos^2\theta_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{Th} &= \sqrt{Y_0^2(\operatorname{sen}^2\theta_0 + \operatorname{cos}^2\theta_0) + C^2 - 2CY_0\operatorname{cos}\theta_0} \\
 Y_{Th} &= \sqrt{Y_0^2 + C^2 - 2CY_0\operatorname{cos}\theta_0} \\
 Y_{Th} &= \sqrt{Y_0^2(1 + C^2Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1}\operatorname{cos}\theta_0)} \\
 Y_{Th} &= Y_0(1 + C^2Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1}\operatorname{cos}\theta_0)^{\frac{1}{2}} \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

Obteniendo el ángulo tenemos:

$$\begin{aligned}
 \theta_{Th} &= \operatorname{angtan} \frac{B}{G} \\
 \theta_{Th} &= \operatorname{angtan} \frac{C - Y_0\operatorname{cos}\theta_0}{-Y_0\operatorname{sen}\theta_0} \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

El voltaje de Thévenin se obtiene de un divisor de voltaje de la siguiente manera:

$$E_{Th} = \frac{Z_C \cdot E_0}{Z_C + Z_0} \tag{A.8}$$

en donde:

$$Z_C = -jC^{-1}$$

$$Z_0 = Y_0^{-1}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
 E_{Th} &= \frac{-jE_0C^{-1}}{-jC^{-1} + Y_0^{-1}} \\
 E_{Th} &= \frac{-jE_0C^{-1}}{-jC^{-1} + Y_0^{-1}} \cdot \frac{j}{j} = \frac{E_0C^{-1}}{C^{-1} + jY_0^{-1}} \\
 E_{Th} &= \frac{E_0}{C(C^{-1} + jY_0^{-1})} \\
 E_{Th} &= \frac{E_0}{1 + jCY_0^{-1}}
 \end{aligned}$$

$$E_{Th} = \frac{E_0}{1 + jCY_0^{-1}} \cdot \frac{Y_0}{Y_0} = \frac{E_0 Y_0}{Y_0 + jC}$$

$$E_{Th} = \frac{E_0 Y_0}{Y'_0}$$

en donde:

$$Y'_0 = Y_0 + jC = Y_{Th}$$

entonces:

$$E_{Th} = E_{Th} = \frac{E_0 Y_0}{Y_{Th}}$$

$$E_{Th} = \frac{E_0 Y_0}{Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_{Th} = \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}}}$$

De esta manera todos los elementos del equivalente de Thévenin quedan representados por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$E_{Th} = \frac{E_0}{(1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}}}$$

(A.9)

$$Y_{Th} = Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{Th} = \text{angtan} \frac{C - Y_0 \cos \theta_0}{-Y_0 \sin \theta_0}$$

Estos elementos corresponden al diagrama de la Figura A.3:

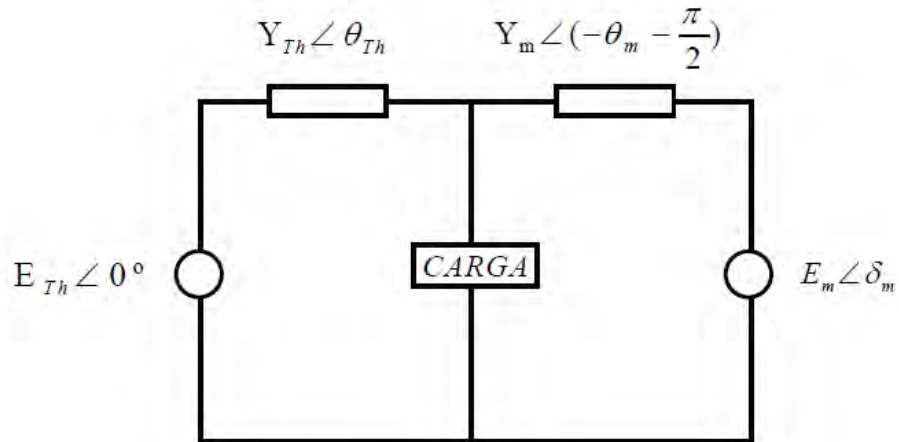


Figura A.3 Modelo del sistema con el equivalente de Thévenin en la parte izquierda

La admitancia de Thévenin de este nuevo modelo puede modelarse como las de la Figura A.4:

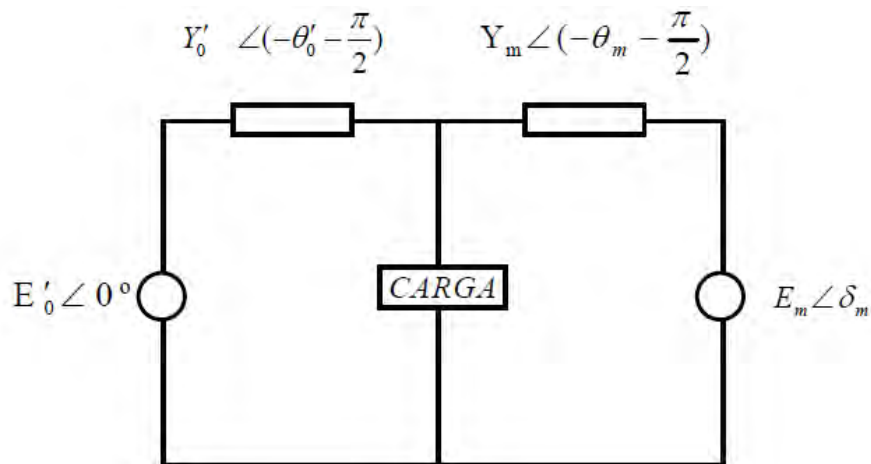


Figura A.4 Modelo del sistema con la admitancia izquierda remodelada

en donde:

$$\theta_{Th} = -\theta'_0 - \frac{\pi}{2}$$

$$\theta'_0 = -\theta_{Th} - \frac{\pi}{2}$$

Entonces, llegamos a las ecuaciones:

$$\theta'_0 = -\text{angtan} \frac{C - Y_0 \cos \theta_0}{-Y_0 \sin \theta_0} - \frac{\pi}{2}$$

(A.10)

$$E'_0 = E_{Th}$$

$$Y'_0 = Y_{Th}$$

Una vez terminada esta simplificación, se procede a establecer la ecuación dinámica del generador que no es referencia. Entonces, la siguiente muestra la ecuación de oscilación para el generador:

$$M\delta_m + d_m\omega = P_m - P_e \quad (\text{A.11})$$

En donde  $P_e$  es la potencia eléctrica inyectada en ese nodo por el generador:

$$P_e = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i - \delta_j) \quad (\text{A.12})$$

Para este caso, la potencia eléctrica de salida en terminales del generador es la ecuación:

$$P_e = VE_m Y_m \cos \left( -\theta_m - \frac{\pi}{2} - \delta_m + \delta + \pi \right) + E_m^2 Y_m \cos \left( -\theta_m - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$P_e = VE_m Y_m \cos \left( -\theta_m - \delta_m + \delta + \frac{\pi}{2} \right) + E_m^2 Y_m \cos \left( -\theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Empleando las identidades trigonométricas (ecuaciones (A.2)) se sabe que:

$$\cos \left( \delta - \delta_m - \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen} \left( \delta - \delta_m - \theta_m \right)$$

$$\cos \left( -\theta_m - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen} \theta_m$$

Por lo que (A.13) se reescribe como:

$$P_e = -VE_m Y_m \text{sen} \left( \delta - \delta_m - \theta_m \right) - E_m^2 Y_m \text{sen} \theta_m \quad (\text{A.14})$$

Entonces la ecuación de oscilación, ecuación (A.11), se puede reescribir como:

$$M\delta_m + d_m\omega = P_m + VE_m Y_m \text{sen} \left( \delta - \delta_m - \theta_m \right) + E_m^2 Y_m \text{sen} \theta_m \quad (\text{A.15})$$

Las ecuaciones de potencia  $P$  y  $Q$  que entran hacia la red en el nodo de carga son:

$$P = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos \left( \theta_{ij} - \delta_i + \delta_j \right)$$

$$Q = - \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \text{sen} \left( \theta_{ij} - \delta_i + \delta_j \right) \quad (\text{A.16})$$

Desarrollando  $P$  de las ecuaciones (A.16):

$$P = VE'_0Y'_0 \cos \left[ -\delta - \theta'_0 - \frac{\pi}{2} + \pi \right] + VE_mY_m \cos \left[ -\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi \right] - V^2 Y'_0 \text{sen} \theta'_0 + Y_m \text{sen} \theta_m$$

Aplicando las identidades ecuaciones (A.2):

$$P = -VE'_0Y'_0 \text{sen} \left[ -\delta - \theta'_0 \right] - VE_mY_m \text{sen} \left[ -\delta + \delta_m - \theta_m \right] - V^2(Y'_0 \text{sen} \theta'_0 + Y_m \text{sen} \theta_m)$$

Usando la identidad  $\text{sen} -x = -\text{sen}(x)$  se obtiene:

$$P = VE'_0Y'_0 \text{sen} \left[ \delta + \theta'_0 \right] + VE_mY_m \text{sen} \left[ \delta - \delta_m + \theta_m \right] - V^2(Y'_0 \text{sen} \theta'_0 + Y_m \text{sen} \theta_m) \quad (\text{A.17})$$

Ahora para la potencia reactiva  $Q$  de las ecuaciones (A.16):

$$Q = -VE'_0Y'_0 \text{sen} \left[ -\delta - \theta'_0 - \frac{\pi}{2} + \pi \right] - VE_mY_m \text{sen} \left[ -\delta + \delta_m - \theta_m - \frac{\pi}{2} + \pi \right] + V^2 Y'_0 \text{cos} \theta'_0 + Y_m \text{cos} \theta_m$$

Aplicando las identidades (A.2):

$$Q = -VE'_0Y'_0 \text{cos} \left[ -\delta - \theta'_0 \right] - VE_mY_m \text{cos} \left[ -\delta + \delta_m - \theta_m \right] + V^2(Y'_0 \text{cos} \theta'_0 + Y_m \text{cos} \theta_m)$$

Usando la identidad  $\text{cos} -x = \text{cos}(x)$  se obtiene:

$$Q = -VE'_0Y'_0 \text{cos} \left[ \delta + \theta'_0 \right] - VE_mY_m \text{cos} \left[ \delta - \delta_m + \theta_m \right] + V^2(Y'_0 \text{cos} \theta'_0 + Y_m \text{cos} \theta_m) \quad (\text{A.18})$$

Para nuestro modelo tomaremos el negativo de  $P$  y  $Q$  que corresponden a las potencias demandadas por la carga (ecuaciones (A.19) y (A.20)):

$$P = -VE'_0Y'_0 \text{sen} \left[ \delta + \theta'_0 \right] - VE_mY_m \text{sen} \left[ \delta - \delta_m + \theta_m \right] + V^2(Y'_0 \text{sen} \theta'_0 + Y_m \text{sen} \theta_m) \quad (\text{A.19})$$

$$Q = VE'_0Y'_0 \text{cos} \left[ \delta + \theta'_0 \right] + VE_mY_m \text{cos} \left[ \delta - \delta_m + \theta_m \right] - V^2(Y'_0 \text{cos} \theta'_0 + Y_m \text{cos} \theta_m) \quad (\text{A.20})$$

El modelo de la carga estática y dinámica propuesto por Walve [Walve86], es el siguiente:

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\delta + K_{pv}(V + TV) \quad (\text{A.21})$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\delta + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \quad (\text{A.22})$$

en donde  $P_0$  y  $Q_0$  son las constantes real y reactiva de la carga dinámica;  $P_1$  y  $Q_1$  representan a la carga modelada como potencia constante.

Despejando  $\delta$  de ecuación (A.22) se tiene:

$$\delta = K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \quad (A.23)$$

Substituyendo la ecuación (A.20) en la ecuación (A.23) se obtiene:

$$\delta = K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V - Q_0 - Q_1 + VE'_0Y'_0 \cos \delta + \theta'_0 + VE_mY_m \cos \delta - \delta_m + \theta_m - V^2(Y'_0 \cos \theta'_0 + Y_m \cos \theta_m)) \quad (A.24)$$

Despejando  $V$  de ecuación (A.21) se llega a:

$$V = \frac{1}{K_{pv}T} (P - P_0 - P_1 - K_{pw}\delta - K_{pv}V) \quad (A.25)$$

Substituyendo ecuación (A.19) en ecuación (A.25) se obtiene la siguiente ecuación:

$$V = \frac{1}{K_{pv}T} (-VE'_0Y'_0 \sin \delta + \theta'_0 - VE_mY_m \sin \delta - \delta_m + \theta_m + V^2(Y'_0 \sin \theta'_0 + Y_m \sin \theta_m)) - P_0 - P_1 - K_{pw}\delta - K_{pv}V \quad (A.26)$$

De esta forma, las ecuaciones (A.15), (A.23) y (A.25) describen en forma dinámica el comportamiento del sistema de potencia. Para efectos de simulación es necesario reescribirlas como ecuaciones de primer orden recordando que  $\delta_m = \omega$ . De esta forma se obtiene un sistema de cuatro dimensiones:

$$\delta_m = \omega \quad (A.27)$$

Substituyendo (A.27) en ecuación (A.15) y despejando  $\omega$  se llega a:

$$M\omega + d_m\omega = P_m + VE_mY_m \sin \delta - \delta_m - \theta_m + E_m^2Y_m \sin \theta_m$$

$$\omega = \frac{1}{M} [P_m - d_m\omega + VE_mY_m \sin \delta - \delta_m - \theta_m + E_m^2Y_m \sin \theta_m] \quad (A.28)$$

Substituyendo la ecuación (A.23) en la (A.25) se obtiene:

$$V = \frac{1}{K_{pv}T} (P - P_0 - P_1 - K_{pw}K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) - K_{pv}V)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} (-K_{pw} - K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1 + K_{qw} P - P_0 - P_1 - K_{pv}V)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} (-K_{qw} P_0 + P_1 - P) + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2) \quad (A.29)$$

Y finalmente el sistema analizado es descrito por las siguientes cuatro ecuaciones ecuación (A.27), (A.28), (A.23) y (A.29):

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} [P_m - d_m \omega + VE_m Y_m \text{sen } \delta - \delta_m - \theta_m + E_m^2 Y_m \text{sen} \theta_m]$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P) + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2$$

En donde P y Q son las potencias que la carga demanda del sistema y están descritas por las ecuaciones de flujos de potencia ecuaciones (A.19) y (A.20) dadas en forma polar.

$$P = -VE'_0 Y'_0 \text{sen } \delta + \theta'_0 - VE_m Y_m \text{sen } \delta - \delta_m + \theta_m + V^2 (Y'_0 \text{sen} \theta'_0 + Y_m \text{sen} \theta_m)$$

$$Q = VE'_0 Y'_0 \text{cos } \delta + \theta'_0 + VE_m Y_m \text{cos } \delta - \delta_m + \theta_m - V^2 (Y'_0 \text{cos} \theta'_0 + Y_m \text{cos} \theta_m)$$



## Apéndice B. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos en forma rectangular

En el presente apéndice se desarrollarán las ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos en forma rectangular [Wang94]. El sistema de la Figura B.1 está formado por dos generadores, el de la izquierda es considerado como nodo de referencia, y dos líneas de transmisión que alimentan la carga en el nodo central. La carga es una combinación de cargas de tipo estático y dinámico. La parte estática está representada por una carga de potencia constante y la dinámica por una carga no lineal. Además un capacitor se encuentra conectado en paralelo con la carga.

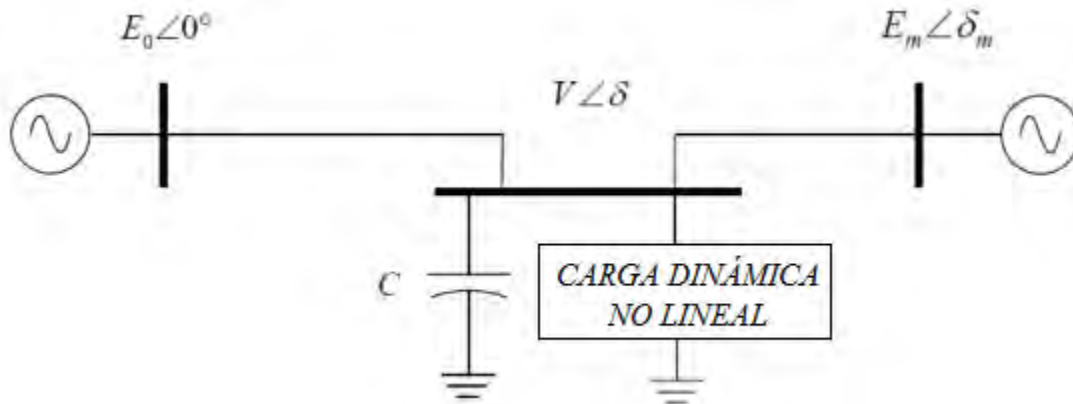


Figura B.1 Sistema eléctrico de potencia de tres nodos con carga dinámica

El sistema puede ser modelado en término de sus admitancias nodales tal como se observa en el diagrama de la Figura B.2. Este diagrama muestra en la malla izquierda el equivalente de Thévenin en el que se ha integrado el capacitor que está conectado al nodo de carga.

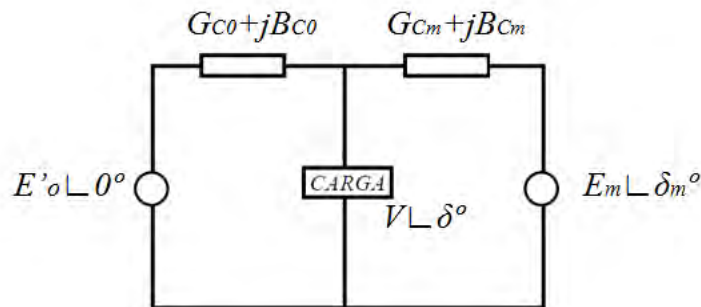


Figura B.2 Modelo del sistema de tres nodos simplificado

Las equivalencias entre las admitancias nodales y primitivas son:

$$\begin{aligned} G_{CC} &= g_{C0} + g_{Cm} ; B_{CC} = b_{C0} + b_{Cm} \\ G_{C0} &= -g_{C0} ; B_{C0} = -b_{C0} \\ G_{Cm} &= -g_{Cm} ; B_{Cm} = -b_{Cm} \end{aligned} \quad (B.1)$$

Las ecuaciones de balance de potencia están dadas por:

$$\begin{aligned} P_{gi} &= P_{ei} + P_{di} = P_{di} + \sum_{j \in \Omega} P_{ij} \\ Q_{gi} &= Q_{ei} + Q_{di} = Q_{di} + \sum_{j \in \Omega} Q_{ij} \end{aligned}$$

Para el nodo de carga:

$$\begin{aligned} P_{gi} &= Q_{gi} = 0 \\ -P_{di} &= P_{ei} = \sum_{j \in \Omega} P_{ij} \\ -Q_{di} &= Q_{ei} = \sum_{j \in \Omega} Q_{ij} \end{aligned} \quad (B.2)$$

en donde:

$\Omega$  es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$

$P_{di}$  es la potencia demandada en el nodo  $i$

$P_{ei}$  es la potencia inyectada al nodo  $i$

De acuerdo a lo visto en el Capítulo 2, se sabe que las ecuaciones de flujos de potencia (en forma rectangular) para líneas conectadas entre nodos de carga son:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= V_i^2 G_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \cos \theta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j] \\ Q_{ij} &= -V_i^2 B_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \theta_i - \theta_j] \end{aligned} \quad (B.3)$$

Y para líneas conectadas entre nodos generadores  $i$  y nodos de carga  $j$ :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= E_i^2 G_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \cos \delta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j] \\ Q_{ij} &= -E_i^2 B_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \delta_i - \theta_j] \end{aligned} \quad (B.4)$$

Por lo tanto, desarrollando las ecuaciones (B.2) y (B.4), la ecuación de balance de potencia activa en el nodo de carga queda de la siguiente manera:

$$-P_{dc} = P_{ec} = V^2 G_{CC} + VE'_0 G_{C0} \cos \theta_C - \delta_0 + B_{C0} \text{sen} \theta_C - \delta_0 + VE'_m G_{Cm} \cos \theta_C - \delta_m + B_{Cm} \text{sen} \theta_C - \delta_m$$

Tomando en cuenta las admitancias primitivas ecuaciones (B.1); haciendo dos cambios de variable  $\theta_C = \delta$  y  $P_{dc} = P$ ; y sabiendo que  $\delta_0 = 0^\circ$  se obtiene lo siguiente:

$$-P = V^2(g_{C0} + g_{Cm}) + VE'_0 (-g_{C0}) \cos \delta + (-b_{C0}) \text{sen} \delta + VE'_m (-g_{Cm}) \cos \delta - \delta_m + (-b_{Cm}) \text{sen} \delta - \delta_m$$

simplificando:

$$P = -V^2(g_{C0} + g_{Cm}) + VE'_0 g_{C0} \cos \delta + b_{C0} \text{sen} \delta + VE'_m g_{Cm} \cos \delta - \delta_m + b_{Cm} \text{sen} \delta - \delta_m \quad (\text{B.5})$$

Se tiene el siguiente cambio de variable ecuaciones (B.6):

$$g_{C0} = g_0 ; b_{C0} = b_0$$

$$g_{Cm} = g_m ; b_{Cm} = b_m \quad (\text{B.6})$$

Con el fin de simplificar la expresión aplicamos las ecuaciones (B.6) a (B.5) y obtenemos la potencia,  $P$ , demandada por la carga:

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE'_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen} \delta - \delta_m - V^2(g_0 + g_m) \quad (\text{B.7})$$

Y la potencia reactiva demandada por la carga es la que se muestra a continuación:

$$-Q_{dc} = Q_{ec} = -V^2 B_{CC} + VE'_0 -B_{C0} \cos \theta_C - \delta_0 + G_{C0} \text{sen} \theta_C - \delta_0 + VE'_m -B_{Cm} \cos \theta_C - \delta_m + G_{Cm} \text{sen} \theta_C - \delta_m$$

$$-Q = -V^2(b_{C0} + b_{Cm}) + VE'_0 -(-b_{C0}) \cos \delta + (-g_{C0}) \text{sen} \delta + VE'_m -(-b_{Cm}) \cos \delta - \delta_m + (-g_{Cm}) \text{sen} \delta - \delta_m$$

$$Q = V^2 b_{C0} + b_{Cm} + VE'_0 g_{C0} \text{sen} \delta - b_{C0} \cos \delta + VE'_m g_{Cm} \text{sen} \delta - \delta_m - b_{Cm} \cos \delta - \delta_m$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen} \delta - b_0 \cos \delta + VE'_m g_m \text{sen} \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m \quad (\text{B.8})$$

La ecuación de oscilación del generador que no es referencia:

$$M\delta_m + d_m\omega = P_m - P_e \quad (\text{B.9})$$

Se sabe de la ecuación (B.9) que, ecuación (B.10):

$$\delta_m = \omega \quad (\text{B.10})$$

y que  $\delta_m = \omega$ ; por lo que:

$$M\omega + d_m\omega = P_m - P_e \quad (\text{B.11})$$

Despejando  $\omega$  de la ecuación (B.11):

$$\omega = \frac{1}{M} (P_m - d_m\omega - P_e) \quad (\text{B.12})$$

La potencia inyectada en el nodo m por el generador es la siguiente:

$$P_e = E_m^2 G_{mm} + E_m V [G_{mc} \cos \delta_m - \delta + B_{mc} \text{sen } \delta_m - \delta] \quad (\text{B.13})$$

Y en términos de las admitancias primitivas  $G_{mm} = g_m$ ;  $G_{mc} = -g_m$ ;  $B_{mc} = -b_m$  :

$$P_e = E_m^2 g_m - E_m V [g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta] \quad (\text{B.14})$$

Por lo que al sustituir la ecuación (B.14) en la ecuación (B.12) se llega a:

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m\omega - E_m^2 g_m - E_m V [g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta] \quad (\text{B.15})$$

El modelo de la carga estática y dinámica, propuesto por Walve [Walve86], es el siguiente:

$$P = P_0 + P_1 + K_{pw}\delta + K_{pv}(V + TV) \quad (\text{B.16})$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\delta + K_{qv}V + K_{qv2}V^2 \quad (\text{B.17})$$

En donde  $P_0$  y  $Q_0$  son las constantes real y reactiva de la carga dinámica;  $P_1$  y  $Q_1$  representan a la carga modelada como potencia constante.

Despejando  $\delta$  de ecuación (B.17) se tiene:

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \quad (\text{B.18})$$

Despejando  $V$  de ecuación (B.16) se obtiene lo siguiente:

$$V = \frac{1}{K_{pv}T} (P - P_0 - P_1 - K_{pw}\delta - K_{pv}V) \quad (B.19)$$

Sustituyendo (B.18) en (B.19) se obtiene:

$$V = \frac{1}{K_{pv}T} P - P_0 - P_1 - K_{pw}K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) - K_{pv}V$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{pw} -K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1 + K_{qw} P - P_0 - P_1 - K_{pv}V$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P) + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2 \quad (B.20)$$

El sistema queda modelado por las ecuaciones diferenciales (B.10), (B.15), (B.18) y (B.20):

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m\omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1}(-K_{qv2}V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P) + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2$$

Y las ecuaciones algebraicas (B.7) y (B.8):

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2(g_0 + g_m)$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen } \delta - b_0 \text{cos} \delta + VE_m g_m \text{sen } \delta - \delta_m - b_m \text{cos } \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m$$

## Apéndice C. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos con *CEV*

En este apéndice se desarrollarán las ecuaciones del sistema de tres nodos con un *CEV* conectado al nodo de carga tal como se muestra en el diagrama de la Figura C.1

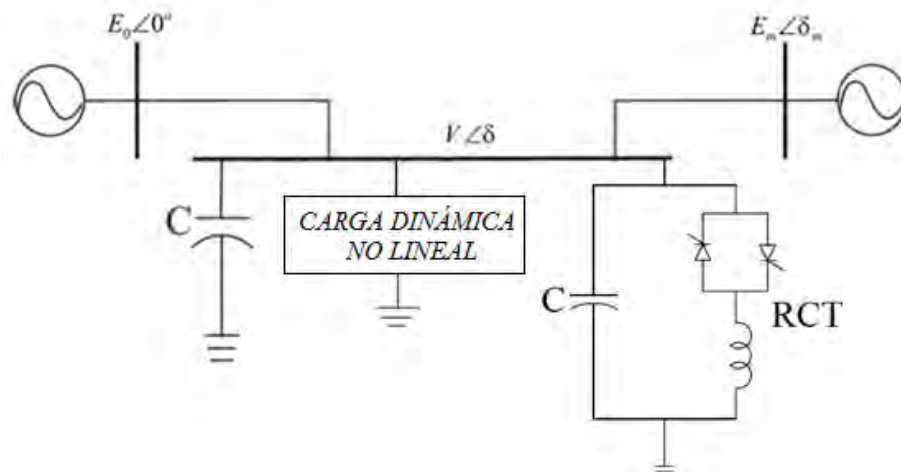


Figura C.1 Sistema de tres nodos con *CEV* en el nodo de carga

El sistema puede ser modelado en término de sus admitancias nodales tal como se observa en el diagrama de la Figura C.2. Este diagrama muestra en la malla izquierda el equivalente de Thévenin en el que se ha integrado el capacitor que está conectado al nodo de carga.

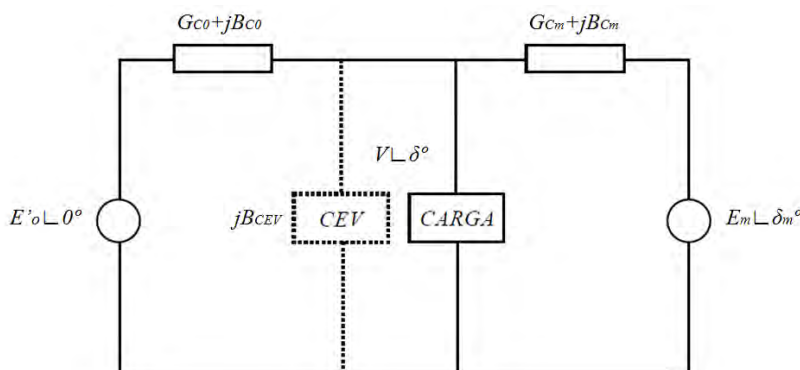


Figura C.2 Modelo simplificado del sistema de tres nodos con un *CEV* en el nodo de carga

Las equivalencias entre las admitancias nodales y primitivas están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$G_{CC} = g_{C0} + g_{Cm}; B_{CC} = b_{C0} + b_{Cm} + B_{CEV}$$

$$G_{C0} = -g_{C0}; B_{C0} = -b_{C0} \tag{C.1}$$

$$G_{Cm} = -g_{Cm}; B_{Cm} = -b_{Cm}$$

Las ecuaciones de balance de potencia son:

$$P_{gi} = P_{ei} + P_{di} = P_{di} + \sum_{j \in \Omega} P_{ij}$$

$$Q_{gi} = Q_{ei} + Q_{di} = Q_{di} + \sum_{j \in \Omega} Q_{ij}$$

Para el nodo de carga:

$$P_{gi} = Q_{gi} = 0$$

$$-P_{di} = P_{ei} = \sum_{j \in \Omega} P_{ij}$$

(C.2)

$$-Q_{di} = Q_{ei} = \sum_{j \in \Omega} Q_{ij}$$

En donde:

$\Omega$  es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$

$P_{di}$  es la potencia demandada en el nodo  $i$

$P_{ei}$  es la potencia inyectada al nodo  $i$

De acuerdo a lo visto en el Capítulo 2, se sabe que las ecuaciones de flujos de potencia (en forma rectangular) para líneas conectadas entre nodos de carga son:

$$P_{ij} = V_i^2 G_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \cos \theta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j]$$

(C.3)

$$Q_{ij} = -V_i^2 B_{ii} + V_i V_j [G_{ij} \text{sen } \theta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \theta_i - \theta_j]$$

Y para líneas conectadas entre nodos generadores  $i$  y nodos de carga  $j$ :

$$P_{ij} = E_i^2 G_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \cos \delta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j]$$

(C.4)

$$Q_{ij} = -E_i^2 B_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \text{sen } \delta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \delta_i - \theta_j]$$

Por lo tanto, desarrollando las ecuaciones (C.2) y (C.4), la ecuación de balance de potencia activa en el nodo de carga queda de la siguiente manera:

$$-P_{dc} = P_{ec} = V^2 G_{CC} + V E'_0 G_{C0} \cos \theta_C - \delta_0 + B_{C0} \text{sen } \theta_C - \delta_0 \\ + V E'_m G_{Cm} \cos \theta_C - \delta_m + B_{Cm} \text{sen } \theta_C - \delta_m$$

Tomando en cuenta las admitancias primitivas, ecuaciones (B.1); haciendo dos cambios de variable  $\theta_c = \delta$  y  $P_{dc} = P$ ; y sabiendo que  $\delta_0 = 0^\circ$  se tiene lo siguiente:

$$-P = V^2(g_{c0} + g_{cm}) + VE'_0 (-g_{c0}) \cos \delta + (-b_{c0}) \text{sen} \delta + VE_m (-g_{cm}) \cos \delta - \delta_m + (-b_{cm}) \text{sen} \delta - \delta_m$$

simplificando:

$$P = -V^2(g_{c0} + g_{cm}) + VE'_0 g_{c0} \cos \delta + b_{c0} \text{sen} \delta + VE_m g_{cm} \cos \delta - \delta_m + b_{cm} \text{sen} \delta - \delta_m \quad (\text{C.5})$$

Se tiene el siguiente cambio de variable:

$$g_{c0} = g_0 ; b_{c0} = b_0 \quad (\text{C.6})$$

$$g_{cm} = g_m ; b_{cm} = b_m$$

Con el fin de simplificar la expresión aplicamos las ecuaciones (C.6) a (C.5) y obtenemos la potencia,  $P$ , demandada por la carga:

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen} \delta - \delta_m - V^2(g_0 + g_m) \quad (\text{C.7})$$

Realizando un proceso similar al de la potencia activa; la potencia reactiva demandada por la carga es la que se muestra a continuación:

$$-Q_{dc} = Q_{ec} = -V^2 B_{cc} + VE'_0 -B_{c0} \cos \theta_c - \delta_0 + G_{c0} \text{sen} \theta_c - \delta_0 + VE_m -B_{cm} \cos \theta_c - \delta_m + G_{cm} \text{sen} \theta_c - \delta_m$$

$$-Q = -V^2(b_{c0} + b_{cm} + B_{CEV}) + VE'_0 -(-b_{c0}) \cos \delta + (-g_{c0}) \text{sen} \delta + VE_m -(-b_{cm}) \cos \delta - \delta_m + (-g_{cm}) \text{sen} \delta - \delta_m$$

$$Q = V^2 b_{c0} + b_{cm} + VE'_0 g_{c0} \text{sen} \delta - b_{c0} \cos \delta + VE_m g_{cm} \text{sen} \delta - \delta_m - b_{cm} \cos \delta - \delta_m \quad (\text{C.8})$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen} \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \text{sen} \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m + B_{CEV}$$

La obtención de las ecuaciones diferenciales del sistema de tres nodos en forma cartesiana es desarrollada en el Apéndice B; ecuaciones (B.10), (B.15), (B.18) y (B.20) se presentan a continuación [Wang94]:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen} \delta_m - \delta \quad (\text{C.9})$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2} V^2)$$



### C.1 Ecuaciones de control para el CEV modelo 1

El diagrama de control del CEV1 se muestra en la Figura C.3 [Srivastava98]:

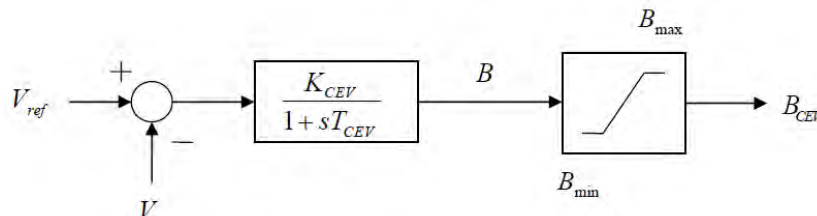


Figura C.3 Diagrama de bloques de control del CEV1

Las ecuaciones que modelan la susceptancia del CEV1:

$$B = \frac{1}{T_{CEV}} K_{CEV} V_{ref} - V - B$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}} \tag{C.10}$$

### C.2 Ecuaciones de control para el CEV modelo 2

El diagrama de control del CEV2 se muestra en la Figura C.4 [Laufenberg97]:

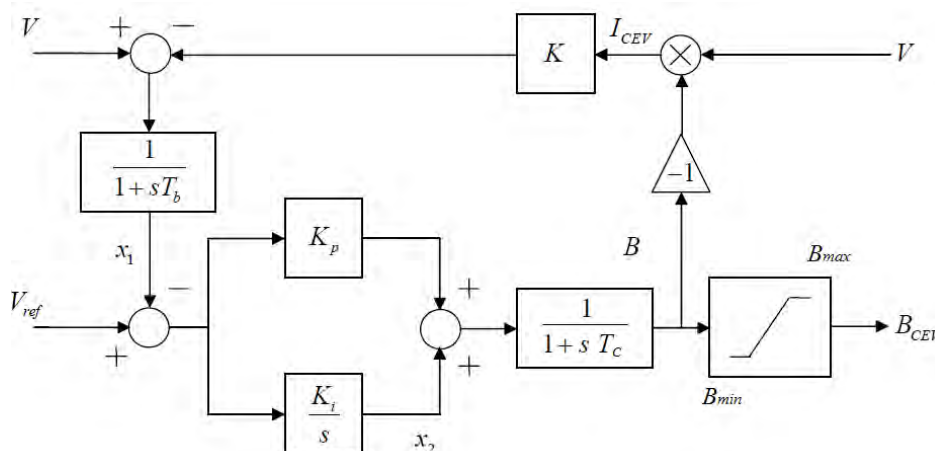


Figura C.4 Diagrama de bloques de control del CEV2

En base al diagrama de bloques, las ecuaciones que forman el modelo matemático del CEV2 son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{T_b} [V \ 1 + KB \ - x_1] \\
 x_2 &= K_i (V_{refCEV} - x_1) \\
 B &= \frac{1}{T_c} [x_2 + K_p \ V_{refCEV} - x_1 \ - B] \\
 B_{CEV} &= B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}
 \end{aligned}
 \tag{C.11}$$

$$Q = V^2 B_{CEV}$$

Así de esta manera se cuentan con un modelo matemático para cada uno de los sistemas de tres nodos con el CEV1 y CEV2 conectados respectivamente.

El modelo completo para el sistema con el CEV1 conectado al nodo de carga está integrado por las ecuaciones (C.9), (C.7), (C.8) y (C.10) las cuales se presentan a continuación a manera de resumen:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q \\
 &\quad + K_{pw}K_{qv2} V^2
 \end{aligned}$$

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2 (g_0 + g_m)$$

$$\begin{aligned}
 Q &= VE'_0 g_0 \text{sen } \delta - b_0 \text{cos} \delta + VE_m g_m \text{sen } \delta - \delta_m - b_m \text{cos } \delta - \delta_m \\
 &\quad + V^2 b_0 + b_m + B_{CEV}
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{T_{CEV}} K_{CEV} V_{ref} - V - B$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

Por su parte el sistema de tres nodos con el CEV2 conectado al nodo de carga está compuesto por las ecuaciones (C.9), (C.7), (C.8) y (C.11). Estas ecuaciones se muestran a continuación a manera de resumen:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2)$$

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2(g_0 + g_m)$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen } \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \text{sen } \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m + B_{CEV}$$

$$x_1 = \frac{1}{T_b} [V 1 + KB - x_1]$$

$$x_2 = K_i (V_{refCEV} - x_1)$$

$$B = \frac{1}{T_c} [x_2 + K_p V_{refCEV} - x_1 - B]$$

$$B_{CEV} = B_{lim} \tanh \frac{B}{B_{lim}}$$

$$Q = V^2 B_{CEV}$$

## Apéndice D. Ecuaciones matemáticas del modelo del sistema de tres nodos con *StatCom*

El modelo de *StatCom* empleado es el que se muestra en la Figura D.1 el cual consiste en una fuente convertidora de voltaje autoconmutado para proporcionar rápidamente, de forma controlable y estática, fuentes síncronas de voltaje y corriente. El *StatCom* es análogo a una máquina síncrona ideal, el cual genera un conjunto balanceado de tres voltajes senoidales a frecuencia fundamental, con amplitud y ángulo de fase controlados. Esta máquina ideal no tiene inercia, su respuesta es prácticamente instantánea, no altera significativamente la impedancia existente del sistema, y puede generar internamente potencia reactiva (capacitiva e inductiva) [Coronado01].

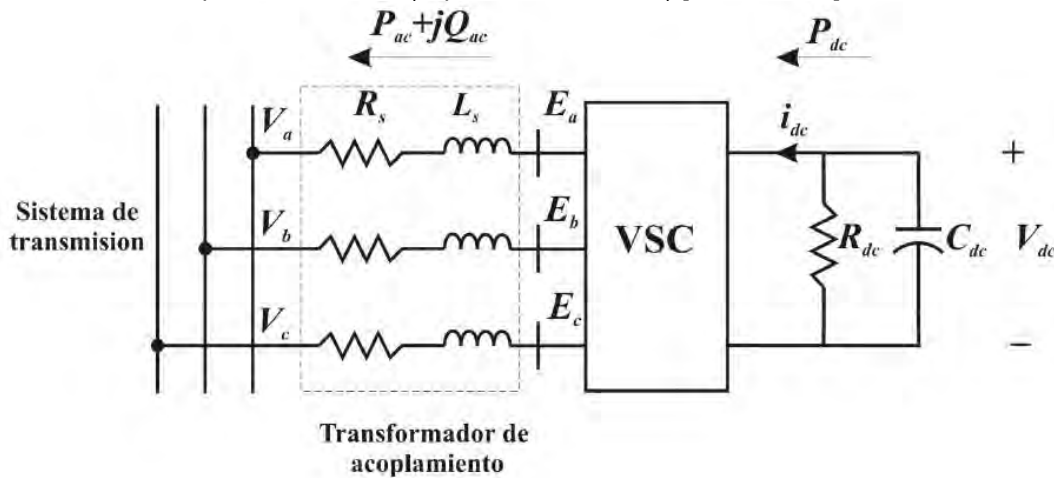


Figura D.1 Circuito equivalente del *StatCom*

### D.1 Lado de ac

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff a cada una de las fases del lado de ac, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_a - V_{L_s} - V_{R_s} - V_a &= 0 \\ E_b - V_{L_s} - V_{R_s} - V_b &= 0 \\ E_c - V_{L_s} - V_{R_s} - V_c &= 0 \end{aligned} \quad (D.1)$$

Las ecuaciones del lazo para el circuito pueden ser escritas de la siguiente forma [Dong]:

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_a + \frac{1}{L_s} (E_a - V_a) \\ \frac{di_b}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_b + \frac{1}{L_s} (E_b - V_b) \\ \frac{di_c}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_c + \frac{1}{L_s} (E_c - V_c) \end{aligned} \quad (D.2)$$

En forma matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} E_a - V_a \\ E_b - V_b \\ E_c - V_c \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

En donde  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico, la matriz  $[E_{abc}]$  contiene el voltaje de fase en el lado de ac del inversor,  $[V_{abc}]$  es la matriz con los voltajes del lado sistema de potencia, y la matriz  $[i_{abc}]$  con las corrientes de fase. El voltaje de salida del *StatCom* es:

$$E_a = kV_{dc} \cos(\omega t + \alpha + \delta) \quad (D.4)$$

En donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $k$  es el índice de modulación y  $\alpha + \delta$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado. Para definir un marco de referencia síncrono propio, el modelo dinámico se puede simplificar, para ello haremos uso de la transformación de Park. La transformación de Park o D-Q convierte las componentes 'abc' del sistema trifásico a otro sistema de referencia 'dq0'. El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos 'abc', variables senoidales en el tiempo, a valores constantes 'dq0', en régimen permanente. Las coordenadas del marco de referencia son definidas de tal forma que el eje  $d$  está desfasado un ángulo  $\delta$  del vector de voltaje instantáneo del nodo de carga, mientras que el eje  $q$  se encuentra en cuadratura con el eje  $d$ .

Utilizando la siguiente matriz de transformación [Dong]:

$$C_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos \theta - \frac{2\pi}{3} & \cos \theta + \frac{2\pi}{3} \\ -\text{sen}(\theta) & -\text{sen} \theta - \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \theta + \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo de referencia rotativa, ejes D-Q. Ver Figura D.2

$$\theta = \int_0^t (\omega_e t) dt + \theta_0 \quad (D.6)$$

en donde:

$\omega_e$ : velocidad angular de la referencia D-Q (velocidad síncrona)

$\theta_0$ : ángulo inicial de la referencia D-Q

Como la velocidad angular  $\omega_e$  es constante, se obtiene:

$$\theta = \omega_e t + \theta_0 \quad (D.7)$$

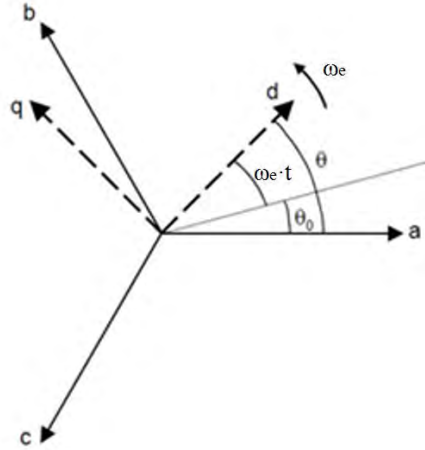


Figura D.2 Sistema de referencia trifásico y D-Q

$$C_1^{-1} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & \frac{1}{2} \\ \cos \theta - \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \theta - \frac{2\pi}{3} & \frac{1}{2} \\ \cos \theta + \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \theta + \frac{2\pi}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (D.8)$$

De la ecuación (D.8) se observa que:

$$C_1^{-1} = \frac{3}{2} C_1^T \quad (D.9)$$

Entonces, transformando del marco 'abc' al 'dq0' se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = C_1^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = C_1^{-1} \begin{bmatrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = C_1^{-1} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D.10)$$

Ahora expresando la ecuación (D.3) en forma compacta se tiene:

$$\frac{d}{dt} i_{abc} = -\frac{R_s}{L_s} i_{abc} + \frac{1}{L_s} [E_{abc}] - [V_{abc}] \quad (D.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (D.10) en (D.11) se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} C_1^{-1} i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} C_1^{-1} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} C_1^{-1} [E_{dq0}] - C_1^{-1} [V_{dq0}] \quad (D.12)$$

Pre-multiplicando (D.12) por  $C_1$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} i_{dq0} &= C_1 \left[ -\frac{R_s}{L_s} C_1^{-1} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} C_1^{-1} [E_{dq0}] - C_1^{-1} [V_{dq0}] \right] \\
 C_1 C_1^{-1} \frac{d}{dt} i_{dq0} + C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} i_{dq0} &= -\frac{R_s}{L_s} C_1 C_1^{-1} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} C_1 C_1^{-1} [E_{dq0}] - C_1 C_1^{-1} [V_{dq0}] \\
 \frac{d}{dt} i_{dq0} + C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} i_{dq0} &= -\frac{R_s}{L_s} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} [E_{dq0}] - [V_{dq0}] \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

Debido a que  $\omega_e$  es constante, se emplea la ecuación (D.7) y se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_1^{-1} &= \begin{matrix} \cos(\omega_e t + \theta_0) & -\text{sen}(\omega_e t + \theta_0) & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cos \omega_e t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \omega_e t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} & \frac{1}{2} \\ \cos \omega_e t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \omega_e t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} C_1^{-1} &= \omega_e \begin{matrix} -\text{sen}(\omega_e t + \theta_0) & -\cos(\omega_e t + \theta_0) & 0 \\ -\text{sen} \omega_e t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} & -\cos \omega_e t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3} & 0 \\ -\text{sen} \omega_e t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} & -\cos \omega_e t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3} & 0 \end{matrix} \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

Y finalmente sustituyendo en (D.15) la ecuación (D.7) se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} C_1^{-1} &= \omega_e \begin{matrix} -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen} \theta - \frac{2\pi}{3} & -\cos \theta - \frac{2\pi}{3} & 0 \\ -\text{sen} \theta + \frac{2\pi}{3} & -\cos \theta + \frac{2\pi}{3} & 0 \end{matrix} \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} \\
 & \begin{matrix} \cos(\theta) & \cos \theta - \frac{2\pi}{3} & \cos \theta + \frac{2\pi}{3} & -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ = \frac{2}{3} & -\text{sen}(\theta) & -\text{sen} \theta - \frac{2\pi}{3} & -\text{sen} \theta + \frac{2\pi}{3} & -\cos \theta - \frac{2\pi}{3} & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\text{sen} \theta + \frac{2\pi}{3} & -\cos \theta + \frac{2\pi}{3} & 0 \end{matrix} \omega_e
 \end{aligned}$$

Multiplicando y aplicando identidades trigonométricas:

$$C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} = \frac{2}{3} \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cual se puede reducir a lo siguiente:

$$C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} = \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.17)$$

Sustituyendo la ecuación (D.17) en (D.13) y reagrupando términos se tiene:

$$\frac{d}{dt} i_{dq0} + C_1 \frac{d}{dt} C_1^{-1} i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} [E_{dq0}] - [V_{dq0}]$$

$$\frac{d}{dt} i_{dq0} + \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} i_{dq0} = -\frac{R_s}{L_s} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} [E_{dq0}] - [V_{dq0}]$$

$$\frac{d}{dt} i_{dq0} = -\omega_e \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} i_{dq0} - \frac{R_s}{L_s} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} [E_{dq0}] - [V_{dq0}]$$



$$\frac{d}{dt} i_{dq0} = - \begin{bmatrix} \frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_s}{L_s} \end{bmatrix} i_{dq0} + \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} i_{dq0} + \frac{1}{L_s} [E_{dq0}] - [V_{dq0}]$$

En la Figura D.3 se muestra un diagrama de los vectores instantáneos del voltaje en terminales del *StatCom*,  $E$ , y del voltaje en el nodo de acoplamiento,  $V$ , en donde  $\omega_e$  es la velocidad síncrona,  $\delta$  es el ángulo del voltaje en el nodo de acoplamiento y  $\alpha$  es el ángulo entre  $V$  y  $E$ . Despreciando los armónicos en el voltaje, producidos por el inversor, y observando la Figura D.3, se tienen las siguientes ecuaciones para  $V_d$ ,  $V_q$ ,  $E_d$  y  $E_q$

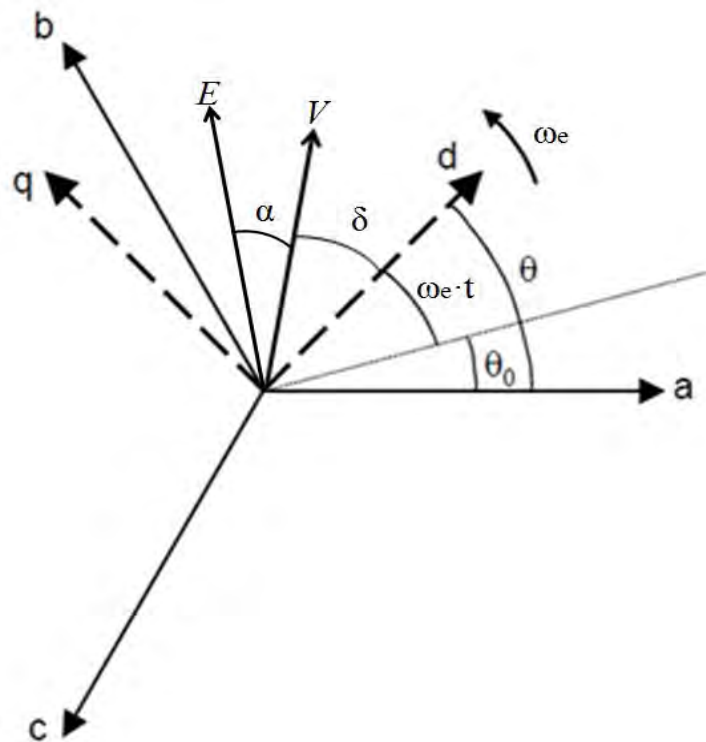


Figura D.3 Vectores instantáneos de voltaje en la carga  $V$  y en la salida del *StatCom*  $E$

$$V_d = V \cos\delta \tag{D.19}$$

$$V_q = V \sen\delta \tag{D.20}$$

$$E_d = kV_{dc} \cos(\alpha + \delta) \tag{D.21}$$

$$E_q = kV_{dc} \sen(\alpha + \delta) \tag{D.22}$$

Sustituyendo (D.19), (D.20), (D.21) y (D.22) en (D.18); se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & \omega_e & 0 \\ -\omega_e & -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} kV_{dc} \cos(\alpha + \delta) & V \cos \delta \\ kV_{dc} \sin(\alpha + \delta) & -V \sin \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.23)$$

Y desarrollando (D.23) se llega a (D.24) y (D.25)

$$\frac{d}{dt} i_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega_e i_q + \frac{k}{L_s} \cos \alpha + \delta V_{dc} - \frac{V}{L_s} \cos \delta \quad (D.24)$$

$$\frac{d}{dt} i_q = -\frac{R_s}{L_s} i_q - \omega_e i_d + \frac{k}{L_s} \sin \alpha + \delta V_{dc} - \frac{V}{L_s} \sin \delta \quad (D.25)$$

## D.2 Lado de $dc$

La potencia total instantánea en el lado de  $ac$  del inversor, en el marco ' $abc$ ', es:

$$P_{abc} = E_a i_a + E_b i_b + E_c i_c \quad (D.26)$$

En forma matricial:

$$P_{abc} = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = i_{abc}^T E_{abc} \quad (D.27)$$

De las ecuaciones (D.10) se tiene que:

$$E_{abc} = C_1^{-1} E_{dq0}$$

$$i_{abc} = C_1^{-1} i_{dq0}$$

Y además de (D.9) que:

$$C_1^{-1} = \frac{3}{2} C_1^T$$

Por lo que se puede llegar a:

$$i_{abc}^T = \frac{3}{2} i_{dq0}^T C_1 \quad (D.28)$$

Sustituyendo (D.28) y (D.10) en (D.27):

$$P_{abc} = i_{abc}^T E_{abc} = \frac{3}{2} i_{dq0}^T C_1 * C_1^{-1} E_{dq0} \quad (D.29)$$

Y reduciendo la expresión con el uso de álgebra matricial:

$$P_{abc} = \frac{3}{2} i_{dq0}^T E_{dq0} = i_d \quad i_q \quad 0 \quad \begin{matrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{matrix} = \frac{3}{2} (E_d i_d + E_q i_q)$$

Finalmente, se sabe que la potencia instantánea en las terminales de  $ac$  y  $dc$  del inversor, son iguales, por lo que se llega a la siguiente ecuación:

$$V_{dc} i_{dc} = \frac{3}{2} (E_d i_d + E_q i_q) \quad (D.30)$$

Donde la ecuación del circuito del lado de  $dc$  es:

$$\begin{aligned} i_{Cdc} + i_{dc} + i_{Rdc} &= 0 \\ -C_{dc} \frac{d}{dt} V_{dc} &= i_{dc} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \\ \frac{d}{dt} V_{dc} &= -\frac{1}{C_{dc}} i_{dc} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \end{aligned} \quad (D.31)$$

Sustituyendo (D.30) en (D.31) se tiene:

$$\frac{d}{dt} V_{dc} = -\frac{1}{C_{dc}} \frac{3}{2} \frac{(E_d i_d + E_q i_q)}{V_{dc}} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \quad (D.32)$$

Y finalmente sustituyendo (D.21) y (D.22) en (D.32):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{dc} &= -\frac{1}{C_{dc}} \frac{3}{2} \frac{(kV_{dc} \cos(\alpha + \delta) i_d + kV_{dc} \sin(\alpha + \delta) i_q)}{V_{dc}} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \\ \frac{d}{dt} V_{dc} &= -\frac{3k}{2C_{dc}} \cos \alpha + \delta i_d + \sin \alpha + \delta i_q - \frac{V_{dc}}{R_{dc} C_{dc}} \end{aligned} \quad (D.33)$$

### D.3 Sistema en por unidad

Se adoptará un sistema en por unidad de acuerdo a las siguientes definiciones [Schauder93]:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{L_s}{Z_{base}} \omega_b & C'_{dc} &= \frac{1}{\omega_b C_{dc} Z_{base}} & R'_s &= \frac{R_s}{Z_{base}} & R'_{dc} &= \frac{R_{dc}}{Z_{base}} \\ i'_x &= \frac{i_x}{i_{base}} & v'_x &= \frac{v_x}{v_{base}} & e'_x &= \frac{e_x}{v_{base}} & Z_{base} &= \frac{v_{base}}{i_{base}} \end{aligned} \quad (D.34)$$

### D.4 StatCom en por unidad

Las ecuaciones (D.24), (D.25) y (D.33), al aplicar las ecuaciones (D.34), quedan de la siguiente manera [Dong], [Dong04], [Lehn02], [Schauder93]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i'_d &= -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_d + \omega_e i'_q + \frac{k \omega_b}{L'} \cos \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \cos \delta \\ \frac{d}{dt} i'_q &= -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_q - \omega_e i'_d + \frac{k \omega_b}{L'} \sin \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \sin \delta \\ \frac{d}{dt} V'_{dc} &= -\frac{3}{2} k C'_{dc} \omega_b \cos \alpha + \delta i'_d + \sin \alpha + \delta i'_q - \frac{C'_{dc} \omega_b}{R'_{dc}} V'_{dc} \end{aligned} \tag{D.35}$$

### D.5 Control del StatCom para la regulación de potencia reactiva

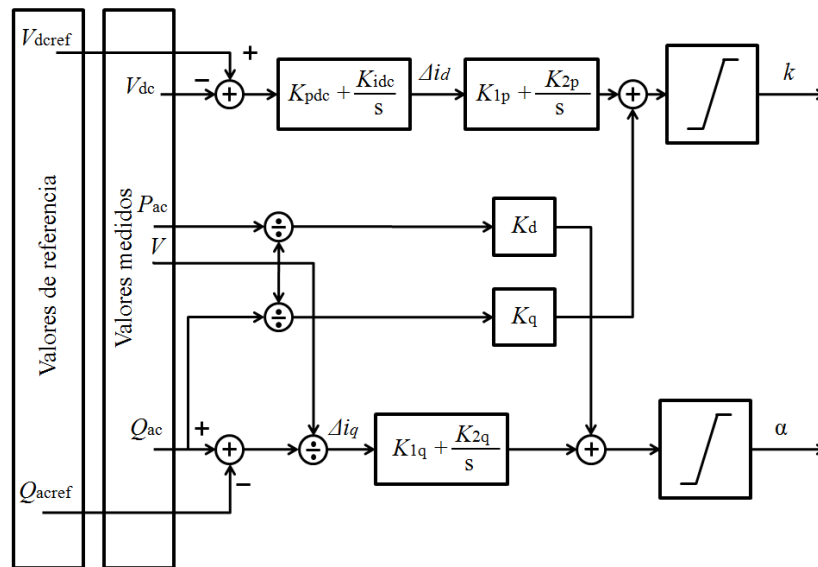


Figura D.4 Diagrama de control del StatCom

En este control, Figura D.4, las señales de entrada  $V_{dc}$  y  $Q_{ac}$  son comparadas con los valores de referencia y usadas para calcular los errores de las señales en  $i_d$  e  $i_q$ . Un control proporcional-integral (PI) es usado para producir las señales de control de  $k$  y  $\alpha$  [Dong]. El ángulo  $\alpha$  y el índice de modulación  $k$  son afectados por los cambios en  $i_d$  e  $i_q$ ; sin embargo,  $\alpha$  está más correlacionada con los cambios en  $i_d$  y  $k$  está más correlacionada con  $i_q$  [Dong]. En base a esta observación, los términos de acoplamiento pueden ser despreciados ( $K_d = K_q = 0$ ), logrando un control desacoplado.

Ecuaciones de control:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= K_{i_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} \\
 \Delta i_d &= K_{p_{dc}} V_{dc_{ref}} - V_{dc} + x_1 \\
 x_2 &= K_{2p} \Delta i_d \\
 K_1 &= K_{1p} \Delta i_d + x_2 \\
 x_3 &= K_{2q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} \\
 \alpha_1 &= K_{1q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac_{ref}}}{V} + x_3 \\
 k &= k_{lim} \tanh \frac{k_1}{k_{lim}} \\
 \alpha &= \alpha_{lim} \tanh \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}
 \end{aligned}
 \tag{D.36}$$

## D.6 Sistema de tres nodos con *StatCom* conectado al nodo de carga

Además, el sistema de tres nodos con *StatCom* (Figura D.5) está modelado por un sistema de ecuaciones diferencial-algebraicas las cuales serán obtenidas en la presente sección.

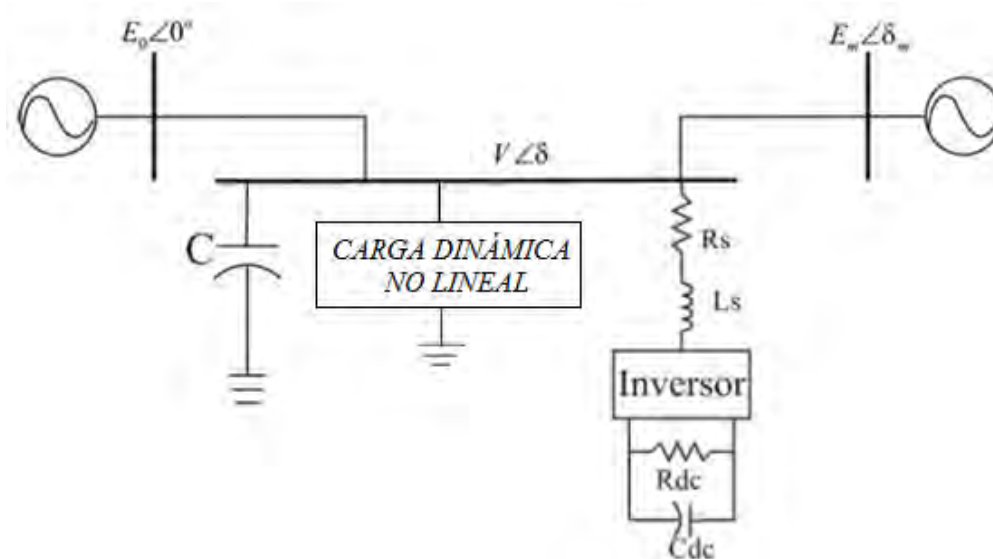


Figura D.5 Sistema de tres nodos compensado con un *StatCom*

La obtención de las ecuaciones diferenciales del sistema de tres nodos en forma cartesiana es desarrollada en el Apéndice B, ecuaciones (B.10), (B.15), (B.18) y (B.20) [Wang94]:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta \quad (\text{D.37})$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2} V^2$$

Las ecuaciones algebraicas que modelan el sistema den tres nodos con un *StatCom* conectado en el nodo de carga se obtienen de las ecuaciones de flujos de potencia y de balance de potencia. El diagrama de la Figura D.6 muestra el circuito equivalente simplificado del sistema de tres nodos con un *StatCom* conectado en el nodo de carga.

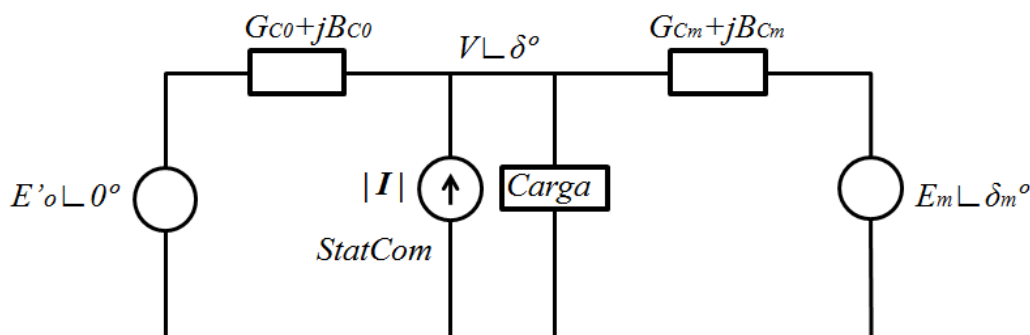


Figura D.6 Circuito equivalente simplificado del sistema de tres nodos con *StatCom*

Las ecuaciones de balance de potencia activa y reactiva en el nodo de conexión del *StatCom* están dadas por las ecuaciones:

$$-P_{di} = P_{ei} = -V_i i_d \cos \delta + i_q \text{sen} \delta + \sum_{j \in \Omega} P_{ij} \quad (\text{D.38})$$

$$-Q_{di} = Q_{ei} = -V_i i_d \text{sen} \delta - i_q \cos \delta + \sum_{j \in \Omega} Q_{ij} \quad (\text{D.39})$$

en donde el primer término del lado derecho de la igualdad indican la potencia activa y reactiva inyectada por el *StatCom* respectivamente; por otra parte, la sumatoria corresponde a las ecuaciones de flujo de potencia del sistema; además:

$\Omega$  es el conjunto de nodos conectados al nodo  $i$

$P_{di}$  es la potencia demandada en el nodo  $i$

$P_{ei}$  es la potencia inyectada al nodo  $i$

De acuerdo a lo visto en el Capítulo 2, se sabe que las ecuaciones de flujos de potencia (en forma rectangular) para líneas conectadas entre nodos generadores  $i$  y nodos de carga  $j$ :

$$P_{ij} = E_i^2 G_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \cos \delta_i - \theta_j + B_{ij} \text{sen} \delta_i - \theta_j] \quad (\text{D.40})$$

$$Q_{ij} = -E_i^2 B_{ii} + E_i V_j [G_{ij} \text{sen} \delta_i - \theta_j - B_{ij} \cos \delta_i - \theta_j] \quad (\text{D.41})$$

Por lo tanto, desarrollando la ecuación (D.38) considerando (D.40) y (D.41), la ecuación de balance de potencia activa en el nodo de carga queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -P_{ac} = P_{ec} = & V^2 G_{CC} + VE'_0 G_{C0} \cos \theta_C - \delta_0 + B_{C0} \text{sen} \theta_C - \delta_0 \\ & + VE_m G_{Cm} \cos \theta_C - \delta_m + B_{Cm} \text{sen} \theta_C - \delta_m - V i'_a \cos \delta + i'_q \text{sen} \delta \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las admitancias primitivas, ecuaciones (B.1), considerando que  $\theta_C = \delta$  y  $P_{ac} = P$ , haciendo el cambio de variable correspondiente a las ecuaciones (B.6) y sabiendo que  $\delta_0 = 0^\circ$ ; obtenemos la ecuación de la potencia  $P$ , demandada por la carga:

$$\begin{aligned} P = & VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen} \delta - \delta_m - V^2 g_0 + g_m \\ & + V i'_a \cos \delta + i'_q \text{sen} \delta \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

Siguiendo un proceso similar al de la potencia activa, la potencia reactiva demandada por la carga es la que se muestra a continuación, ecuación (D.43):

$$\begin{aligned} -Q_{ac} = Q_{ec} = & -V^2 B_{CC} + VE'_0 -B_{C0} \cos \theta_C - \delta_0 + G_{C0} \text{sen} \theta_C - \delta_0 \\ & + VE_m -B_{Cm} \cos \theta_C - \delta_m + G_{Cm} \text{sen} \theta_C - \delta_m \\ & - V i'_a \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Q = & -V^2 b_{C0} + b_{Cm} + VE'_0 - -b_{C0} \cos \delta + -g_{C0} \text{sen} \delta \\ & + VE_m - -b_{Cm} \cos \delta - \delta_m + -g_{Cm} \text{sen} \delta - \delta_m \\ & - V i'_a \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & V^2 b_{C0} + b_{Cm} + VE'_0 g_{C0} \text{sen} \delta - b_{C0} \cos \delta \\ & + VE_m g_{Cm} \text{sen} \delta - \delta_m - b_{Cm} \cos \delta - \delta_m + V i'_a \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{aligned} Q = & VE'_0 g_0 \text{sen} \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \text{sen} \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m \\ & + V^2 b_0 + b_m + V i'_a \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta \end{aligned}$$

Así finalmente tenemos el modelo completo del sistema de tres nodos compensado con un *StatCom* en el nodo de carga compuesto por las ecuaciones (D.37), (D.42), (D.43), (D.35) y (D.36); a manera de resumen se presentan todas ellas a continuación:

$$\delta_m = \omega$$

$$\omega = \frac{1}{M} P_m - d_m \omega - E_m^2 g_m - E_m V g_m \cos \delta_m - \delta + b_m \text{sen } \delta_m - \delta$$

$$\delta = K_{qw}^{-1} (-K_{qv2} V^2 - K_{qv} V + Q - Q_0 - Q_1)$$

$$V = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}} -K_{qw} P_0 + P_1 - P + V(K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv} + K_{pw} Q_0 + Q_1 - Q + K_{pw}K_{qv2}V^2)$$

$$P = VE'_0 g_0 \cos \delta + b_0 \text{sen} \delta + VE_m g_m \cos \delta - \delta_m + b_m \text{sen } \delta - \delta_m - V^2 g_0 + g_m + V i'_d \cos \delta + i'_q \text{sen} \delta$$

$$Q = VE'_0 g_0 \text{sen} \delta - b_0 \cos \delta + VE_m g_m \text{sen} \delta - \delta_m - b_m \cos \delta - \delta_m + V^2 b_0 + b_m + V i'_d \text{sen} \delta - i'_q \cos \delta$$

$$\frac{d}{dt} i'_d = -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_d + \omega_e i'_q + \frac{k \omega_b}{L'} \cos \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \cos \delta$$

$$\frac{d}{dt} i'_q = -\frac{R'_s \omega_b}{L'} i'_q - \omega_e i'_d + \frac{k \omega_b}{L'} \text{sen} \alpha + \delta V'_{dc} - \frac{\omega_b V'}{L'} \text{sen} \delta$$

$$\frac{d}{dt} V'_{dc} = -\frac{3}{2} k C'_{dc} \omega_b \cos \alpha + \delta i'_d + \text{sen} \alpha + \delta i'_q - \frac{C'_{dc} \omega_b}{R'_{dc}} V'_{dc}$$

$$x_1 = K_{i_{dc}} V_{dc \text{ref}} - V_{dc}$$

$$\Delta i_d = K_{p_{dc}} V_{dc \text{ref}} - V_{dc} + x_1$$

$$x_2 = K_{2p} \Delta i_d$$

$$K_1 = K_{1p} \Delta i_d + x_2$$

$$x_3 = K_{2q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac \text{ref}}}{V}$$

$$\alpha_1 = K_{1q} \frac{Q_{ac} - Q_{ac \text{ref}}}{V} + x_3$$

$$k = k_{lim} \tanh \frac{k_1}{k_{lim}} \quad ; \quad \alpha = \alpha_{lim} \tanh \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}}$$



## Apéndice E. Archivos *ODE* de los modelos analizados

Este apéndice contiene el listado de los archivos (\*.*ODE*) de los modelos que se han analizado en los capítulos 4 y 5. Estos archivos contienen los parámetros del modelo, ecuaciones que describen el sistema y condiciones iniciales para la simulación que el programa *XPP-AUTO* necesita.

En los listados de los archivos *ODE*, no importa si las letras son mayúsculas o minúsculas, el programa *XPP-AUTO* reconoce a los dos tipos como uno solo. Algunos parámetros o variables en los listados tienen diferente nombre o letra para no repetir las que ya han sido ocupadas. Las ecuaciones muy largas que en este listado se escriben en el siguiente renglón, en el archivo *ODE* se deben escribir en un solo renglón.

### Modelo 1:

```
#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos sin compensar empleando modelo matemático en
#forma polar
#Capítulo 4.4
```

```
#Parámetros del sistema:
```

```
param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1
```

```
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0,c=3
```

```
param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05
```

```
param yop=17.013399,top=-0.102696,ym=5,tm=-0.087266
```

```
#Ecuaciones algebraicas:
```

```
p=-v*eop*yop*sin(d+top)-v*em*ym*sin(d-dm+tm)+v^2*(yop*sin(top)+ym*sin(tm))
```

```
q=v*eop*yop*cos(d+top)+v*em*ym*cos(d-dm+tm)-v^2*(yop*cos(top)+ym*cos(tm))
```

```
#Ecuaciones diferenciales:
```

```
v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+(kpw*kqv-kqw*kpv)*v+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)
```

```
dm'= w
```

```
w'=(1/m)*(-dmm*w+pm+em*ym*v*sin(d-dm-tm)+em^2*ym*sin(tm))
```

```
d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v-qo-q1+q)
```

```
#Condiciones Iniciales:
```

```
V(0)=1.097
```

```
dm(0)=0.1994
```

```
w(0)=0
```

```
d(0)=0.0091
```

```
#Parámetros de XPPAUT
```

```
@ Total=100,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01,MAXSTOR=100000
```

```
@Nmax=2000,NPr=100,Dsmax=0.01,AUTOXMIN=6.17,AUTOXMAX=6.30,AUTOYMIN=0.68
```

```
@AUTOYMAX=0.72,PARMIN=0,PARMAX=7.1
```

```
done
```

**Modelo 2:**

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos sin compensar empleando modelo matemático en  
#forma rectangular  
#Capítulo 5.1

#Parámetros del sistema:

param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1

param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0,C=3

param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05

param go=1.744144,bo=-16.923762,gm=0.435778,bm=-4.9809735

#Ecuaciones algebraicas:

$$p=v \cdot eop \cdot (go \cdot \cos(d) + bo \cdot \sin(d)) + v \cdot em \cdot (gm \cdot \cos(d-dm) + bm \cdot \sin(d-dm)) - v^2 \cdot (go + gm)$$

$$q=v \cdot eop \cdot (go \cdot \sin(d) - bo \cdot \cos(d)) + v \cdot em \cdot (gm \cdot \sin(d-dm) - bm \cdot \cos(d-dm)) + v^2 \cdot (bo + bm)$$

#Ecuaciones diferenciales:

$$v' = (1/(t1 \cdot kqw \cdot kpv)) \cdot (-kqw \cdot (po + p1 - p) + v \cdot (kpw \cdot kqv - kqw \cdot kpv) + kpw \cdot (qo + q1 - q) + kpw \cdot kqv^2 \cdot v^2)$$

$$dm' = w$$

$$w' = (1/m) \cdot (pm - dmm \cdot w - (em^2 \cdot gm - em \cdot v \cdot (gm \cdot \cos(dm-d) + bm \cdot \sin(dm-d))))$$

$$d' = (1/kqw) \cdot (-kqv^2 \cdot v^2 - kqv \cdot v + q - qo - q1)$$

#Condiciones iniciales:

$$V(0) = 1.097$$

$$dm(0) = 0.1994$$

$$w(0) = 0$$

$$d(0) = 0.0091$$

#Parámetros de XPPAUT

@ Total=100,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01

@ Nmax=2000,NPr=100,Dsmax=0.02,AUTOXMIN=0,AUTOXMAX=7.1

@ AUTOYMIN=0.1,AUTOYMAX=1.1,PARMIN=0,PARMAX=7.1

done

**Modelo 3:**

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante el CEV1 (Blim=1.5pu, Q1=0) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
#Capítulo 5.2.1

#Parámetros del sistema:

param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1

param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0,C=3

param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05

param go=1.744144,bo=-16.923762,gm=.435778,bm=-4.9809735

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

$$p = v * eop * (go * \cos(d) + bo * \sin(d)) + v * em * (gm * \cos(d - dm) + bm * \sin(d - dm)) - v^2 * (go + gm)$$

$$q = v * eop * (go * \sin(d) - bo * \cos(d)) + v * em * (gm * \sin(d - dm) - bm * \cos(d - dm)) + v^2 * (bo + bm + BCEV)$$

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

$$v' = (1 / (t1 * kqw * kpV)) * (-kqw * (po + p1 - p) + v * (kpW * kqV - kqw * kpV) + kpW * (qo + q1 - q) + kpW * kqV^2 * v^2)$$

$$dm' = w$$

$$w' = (1/m) * (pm - dmm * w - (em^2 * gm - em * v * (gm * \cos(dm - d) + bm * \sin(dm - d))))$$

$$d' = (1/kqw) * (-kqV^2 * v^2 - kqV * v + q - qo - q1)$$

#Parámetros del CEV

param TCEV=0.01, KCEV=50, Vref=0.95, Blim=1.5

#Ecuaciones del CEV

$$B' = (1/TCEV) * (KCEV * (Vref - V) - B)$$

$$BCEV = Blim * \tanh(B/Blim)$$

$$QCEV = BCEV * V^2$$

aux BCEV=BCEV  
aux QCEV=QCEV

#Condiciones iniciales:

$$V(0) = 1.0302$$

$$dm(0) = 0.2133$$

$$w(0) = 0$$

$$d(0) = 0.0162$$

$$B(0) = -4.0134$$

#Parámetros de XPPAUT

@ Total=100, noutput=1, bounds=5000, Dt=0.01, MAXSTOR=100000  
@ Nmax=20000, NPr=300, Dsmax=0.02, AUTOXMIN=0, AUTOXMAX=7.1  
@ AUTOYMIN=0.1, AUTOYMAX=1.05, PARMIN=0, PARMAX=7.1

done

#### Modelo 4:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante el CEV1 (Blim=1pu, Q1=6pu) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
#Capítulo 5.2.1

#Parámetros del sistema:

param Q1=6, kpW=0.4, kpV=0.3, kqw=-0.03, kqV=-2.8, kqV2=2.1  
param t1=8.5, po=0.6, qo=1.3, p1=0, C=3  
param eop=1.1755, em=1, pm=1, m=0.3, dmm=0.05  
param go=1.744144, bo=-16.923762, gm=.435778, bm=-4.9809735

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

$$p=v*eo*op*(go*cos(d)+bo*sin(d))+v*em*(gm*cos(d-dm)+bm*sin(d-dm))-v^2*(go+gm)$$

$$q=v*eo*op*(go*sin(d)-bo*cos(d))+v*em*(gm*sin(d-dm)-bm*cos(d-dm))+v^2*(bo+bm+BCEV)$$

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

$$v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+v*(kpw*kqv-kqw*kpv)+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv^2*v^2)$$

$$dm'=w$$

$$w'=(1/m)*(pm-dmm*w-(em^2*gm-em*v*(gm*cos(dm-d)+bm*sin(dm-d))))$$

$$d'=(1/kqw)*(-kqv^2*v^2-kqv*v+q-qo-q1)$$

#Parámetros del CEV

$$\text{param TCEV}=0.01, \text{KCEV}=50, \text{Vref}=0.95, \text{Blim}=1$$

#Ecuaciones del CEV

$$B'=(1/TCEV)*(KCEV*(Vref-V)-B)$$

$$BCEV=Blim*\tanh(B/Blim)$$

$$QCEV=BCEV*V^2$$

$$\text{aux BCEV}=BCEV$$

$$\text{aux QCEV}=QCEV$$

#Condiciones iniciales:

$$V(0)=0.79863$$

$$dm(0)=0.26985$$

$$w(0)=0$$

$$d(0)=0.040807$$

$$B(0)=10.069$$

#Parámetros de XPPAUT

$$\text{@ Total}=100, \text{noutput}=1, \text{bounds}=5000, \text{Dt}=0.01, \text{MAXSTOR}=100000$$

$$\text{@ Nmax}=20000, \text{NPr}=300, \text{Dsmax}=0.02, \text{AUTOXMIN}=6, \text{AUTOXMAX}=7.1$$

$$\text{@ AUTOYMIN}=0.3, \text{AUTOYMAX}=1, \text{PARMIN}=6, \text{PARMAX}=7.1$$

done

### Modelo 5:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante el CEV2 ( $K=0.001$ ) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
#Capítulo 5.2.2

#Parámetros del sistema:

$$\text{param Q1}=0, \text{kpw}=0.4, \text{kpv}=0.3, \text{kqw}=-0.03, \text{kqv}=-2.8, \text{kqv2}=2.1$$

$$\text{param t1}=8.5, \text{po}=0.6, \text{qo}=1.3, \text{p1}=0, \text{C}=3$$

$$\text{param eop}=1.1755, \text{em}=1, \text{pm}=1, \text{m}=0.3, \text{dmm}=0.05$$

$$\text{param go}=1.744144, \text{bo}=-16.923762, \text{gm}=0.435778, \text{bm}=-4.9809735$$

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

$$p = v * eop * (go * \cos(d) + bo * \sin(d)) + v * em * (gm * \cos(d - dm) + bm * \sin(d - dm)) - v^2 * (go + gm)$$

$$q = v * eop * (go * \sin(d) - bo * \cos(d)) + v * em * (gm * \sin(d - dm) - bm * \cos(d - dm)) + v^2 * (bo + bm + Bsvc)$$

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

$$v' = (1 / (t1 * kqw * kpv)) * (-kqw * (po + p1 - p) + v * (kpw * kqv - kqw * kpv) + kpw * (qo + q1 - q) + kpw * kqv^2 * v^2)$$

$$dm' = w$$

$$w' = (1/m) * (pm - dmm * w - (em^2 * gm - em * v * (gm * \cos(dm - d) + bm * \sin(dm - d))))$$

$$d' = (1/kqw) * (-kqv^2 * v^2 - kqv * v + q - qo - q1)$$

#Parámetros del CEV:

$$\text{param } K=0.001, Tb=0.02, Tc=0.02, Kp=0, Ki=100, Vrefsvc=0.95, Blim=1.5$$

#Ecuaciones del CEV:

$$x1' = (1/Tb) * (V * (1 + K * Bsvs) - x1)$$

$$x2' = Ki * (Vrefsvc - x1)$$

$$Bsvs' = (1/Tc) * (x2 + Kp * (Vrefsvc - x1) - Bsvs)$$

$$Bsvc = Blim * \tanh(Bsvs / Blim)$$

$$Qsvc = Bsvc * V^2$$

$$\text{aux } Bsvc = Bsvc$$

$$\text{aux } Qsvc = Qsvc$$

#Condiciones iniciales

$$V(0) = 0.977$$

$$dm(0) = 0.2249$$

$$w(0) = 0$$

$$d(0) = 0.0219$$

$$x1(0) = 0.95$$

$$x2(0) = -2.79$$

$$Bsvs(0) = -2.79$$

#Parámetros del XPPAUT:

$$@ \text{ Total}=100, \text{ noutput}=3, \text{ bounds}=50000, \text{ Dt}=0.01$$

$$@ \text{ Nmax}=50000, \text{ NPr}=600, \text{ Dsmax}=0.1, \text{ AUTOXMIN}=0, \text{ AUTOXMAX}=7.5$$

$$@ \text{ AUTOYMIN}=0.3, \text{ AUTOYMAX}=1.05, \text{ PARMIN}=0, \text{ PARMAX}=9$$

done

### Modelo 6:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante StatCom ( $Q_{ref}=0.001 \text{ pu}$ ) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
#Capítulo 5.3.1

#Parámetros del sistema:

$$\text{param } Q1=0, kpw=0.4, kpv=0.3, kqw=-0.03, kqv=-2.8, kqv2=2.1$$

```

param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0
param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05
param gop=1.744144,bop=-16.933762,gm=0.435778,bm=-4.9809735

```

```
#Ecuaciones algebraicas del sistema:
```

```

p=v*eop*(gop*cos(d)+bop*sin(d))+v*em*(gm*cos(d-dm)+bm*sin(d-dm))-v^2*(gop+gm)
+V*(Id*cos(d)+Iq*sin(d))
q=v*eop*(gop*sin(d)-bop*cos(d))+v*em*(gm*sin(d-dm)-bm*cos(d-dm))+v^2*(bop+bm)
+V*(Id*sin(d)-Iq*cos(d))

```

```
#Ecuaciones diferenciales del sistema:
```

```

v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+v*(kpw*kqv-kqw*kpv)+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)
dm'= w
w'=(1/m)*(pm-dmm*w-(em^2*gm-em*v*(gm*cos(dm-d)+bm*sin(dm-d))))
d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v+q-qo-q1)

```

```
#Parámetros del Statcom:
```

```

param Ls=0.15,Rs=0.01,ws=377
param Cdc=0.88,Rdc=600,vdcref=1.3201, k2p=-0.1
param k2v=0.001,K2q=0.5,k1p=0.35,k1v=0.35,k1q=1,Qref=0.001,alfalim=1,klim=1

```

```
#Ecuaciones del Statcom:
```

```

Id'=-((Rs*ws/Ls)*Id+Iq*ws+(k*ws/Ls)*cos(alfa+d)*Vdc-(V*ws/Ls)*cos(d))
Iq'=-((Rs*ws/Ls)*Iq-Id*ws+(k*ws/Ls)*sin(alfa+d)*Vdc-(V*ws/Ls)*sin(d))
Vdc'=-((3/2)*k*Cdc*ws*(cos(alfa+d)*Id+sin(alfa+d)*Iq)-(Cdc*Vdc*ws/Rdc)

```

```
#Ecuaciones de control del Statcom
```

```

Pa=V*(Id*cos(d)+Iq*sin(d))
Qa=v*(Id*sin(d)-Iq*cos(d))
x1'=K2v*(Vdcref-Vdc)
Did=K1v*(Vdcref-vdc)+x1
x2'=k2p*Did
k1=k1p*Did+x2
x3'=K2q*((Qa-Qref)/V)
alfa1=K1q*((Qa-Qref)/V)+x3
k=klim*tanh(k1/klim)
alfa=alfalim*tanh(alfa1/alfalim)
aux Pa=Pa
aux Qa=Qa
aux Did=Did
aux k1=k1
aux alfa1=alfa1
aux k=k
aux alfa=alfa

```

```
#Condiciones iniciales
```

```
V(0)=1.0972
```

```

dm(0)=0.19934
w(0)=0
d(0)=0.0090368
ld(0)=-0.0017566
lq(0)=-0.00092736
Vdc(0)=1.3201
X1(0)=0
x2(0)=1.192
x3(0)=-0.00024957

```

Parámetros de XPPAUT:

```

@ Total=300,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01,MAXSTOR=100000
@ Nmax=90000,NPr=100,Dsmax=0.03,AUTOXMIN=0,AUTOXMAX=7.7
@ AUTOYMIN=0.1,AUTOYMAX=1.15,PARMIN=0,PARMAX=7.7

```

done

### Modelo 7:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante StatCom (Qref=0.1pu) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
#Capítulo 5.3.1

#Parámetros del sistema:

```

param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1
param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0
param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05
param gop=1.744144,bop=-16.933762,gm=0.435778,bm=-4.9809735

```

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

```

p=v*eop*(gop*cos(d)+bop*sin(d))+v*em*(gm*cos(d-dm)+bm*sin(d-dm))-v^2*(gop+gm)
+V*(ld*cos(d)+lq*sin(d))
q=v*eop*(gop*sin(d)-bop*cos(d))+v*em*(gm*sin(d-dm)-bm*cos(d-dm))+v^2*(bop+bm)
+V*(ld*sin(d)-lq*cos(d))

```

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

```

v'=(1/(t1*kqw*kpv))*(-kqw*(po+p1-p)+v*(kpw*kqv-kqw*kpv)+kpw*(qo+q1-q)+kpw*kqv2*v^2)
dm'= w
w'=(1/m)*(pm-dmm*w-(em^2*gm-em*v*(gm*cos(dm-d)+bm*sin(dm-d))))
d'=(1/kqw)*(-kqv2*v^2-kqv*v+q-qo-q1)

```

#Parámetros del Statcom:

```

param Ls=0.15,Rs=0.01,ws=377
param Cdc=0.88,Rdc=600,vdcref=1.3201, k2p=-0.1
param k2v=0.001,K2q=0.5,k1p=0.35,k1v=0.35,k1q=1,Qref=0.1,alfalim=1,klim=1

```

#Ecuaciones del Statcom:

$$I_d' = -(R_s \omega_s / L_s) I_d + I_q \omega_s + (k \omega_s / L_s) \cos(\alpha + d) V_{dc} - (V \omega_s / L_s) \cos(d)$$

$$I_q' = -(R_s \omega_s / L_s) I_q - I_d \omega_s + (k \omega_s / L_s) \sin(\alpha + d) V_{dc} - (V \omega_s / L_s) \sin(d)$$

$$V_{dc}' = -(3/2) k C_{dc} \omega_s (\cos(\alpha + d) I_d + \sin(\alpha + d) I_q) - (C_{dc} V_{dc} \omega_s / R_{dc})$$

#Ecuaciones de control del Statcom

$$P_a = V (I_d \cos(d) + I_q \sin(d))$$

$$Q_a = v (I_d \sin(d) - I_q \cos(d))$$

$$x_1' = K_2 v (V_{dcref} - V_{dc})$$

$$D_{id} = K_1 v (V_{dcref} - v_{dc}) + x_1$$

$$x_2' = k_2 p * D_{id}$$

$$k_1 = k_1 p * D_{id} + x_2$$

$$x_3' = K_2 q * ((Q_a - Q_{ref}) / V)$$

$$\alpha_1 = K_1 q * ((Q_a - Q_{ref}) / V) + x_3$$

$$k = k_{lim} * \tanh(k_1 / k_{lim})$$

$$\alpha = \alpha_{lim} * \tanh(\alpha_1 / \alpha_{lim})$$

$$\text{aux } P_a = P_a$$

$$\text{aux } Q_a = Q_a$$

$$\text{aux } D_{id} = D_{id}$$

$$\text{aux } k_1 = k_1$$

$$\text{aux } \alpha_1 = \alpha_1$$

$$\text{aux } k = k$$

$$\text{aux } \alpha = \alpha$$

#Condiciones iniciales

$$V(0) = 1.101$$

$$d_m(0) = 0.19855$$

$$w(0) = 0$$

$$d(0) = 0.0086175$$

$$I_d(0) = -0.0010549$$

$$I_q(0) = -0.090246$$

$$V_{dc}(0) = 1.3201$$

$$X_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 1.236$$

$$x_3(0) = -0.0010562$$

Parámetros de XPPAUT:

@ Total=300,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01,MAXSTOR=100000

@ Nmax=90000,NPr=100,Dsmax=0.03,AUTOXMIN=0,AUTOXMAX=7.7

@ AUTOYMIN=0.1,AUTOYMAX=1.15,PARMIN=0,PARMAX=7.7

done

### Modelo 8:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
#mediante StatCom ( $Q_{ref}=0.5pu$ ) y empleando modelo matemático en forma rectangular



#Capítulo 5.3.1

#Parámetros del sistema:

param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1  
 param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0  
 param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05  
 param gop=1.744144,bop=-16.933762,gm=0.435778,bm=-4.9809735

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

$p = v * eop * (gop * \cos(d) + bop * \sin(d)) + v * em * (gm * \cos(d - dm) + bm * \sin(d - dm)) - v^2 * (gop + gm) + V * (Id * \cos(d) + Iq * \sin(d))$   
 $q = v * eop * (gop * \sin(d) - bop * \cos(d)) + v * em * (gm * \sin(d - dm) - bm * \cos(d - dm)) + v^2 * (bop + bm) + V * (Id * \sin(d) - Iq * \cos(d))$

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

$v' = (1 / (t1 * kqw * kpv)) * (-kqw * (po + p1 - p) + v * (kpw * kqv - kqw * kpv) + kpw * (qo + q1 - q) + kpw * kqv2 * v^2)$   
 $dm' = w$   
 $w' = (1 / m) * (pm - dmm * w - (em^2 * gm - em * v * (gm * \cos(dm - d) + bm * \sin(dm - d))))$   
 $d' = (1 / kqw) * (-kqv2 * v^2 - kqv * v + q - qo - q1)$

#Parámetros del Statcom:

param Ls=0.15,Rs=0.01,ws=377  
 param Cdc=0.88,Rdc=600,vdcref=1.3201, k2p=-0.1  
 param k2v=0.001,K2q=0.5,k1p=0.35,k1v=0.35,k1q=1,Qref=0.5,alfalim=1,klim=1

#Ecuaciones del Statcom:

$Id' = -(Rs * ws / Ls) * Id + Iq * ws + (k * ws / Ls) * \cos(\alpha + d) * Vdc - (V * ws / Ls) * \cos(d)$   
 $Iq' = -(Rs * ws / Ls) * Iq - Id * ws + (k * ws / Ls) * \sin(\alpha + d) * Vdc - (V * ws / Ls) * \sin(d)$   
 $Vdc' = -(3/2) * k * Cdc * ws * (\cos(\alpha + d) * Id + \sin(\alpha + d) * Iq) - (Cdc * Vdc * ws / Rdc)$

#Ecuaciones de control del Statcom

$Pa = V * (Id * \cos(d) + Iq * \sin(d))$   
 $Qa = v * (Id * \sin(d) - Iq * \cos(d))$   
 $x1' = K2v * (Vdcref - Vdc)$   
 $Did = K1v * (Vdcref - vdc) + x1$   
 $x2' = k2p * Did$   
 $k1 = k1p * Did + x2$   
 $x3' = K2q * ((Qa - Qref) / V)$   
 $\alpha1 = K1q * ((Qa - Qref) / V) + x3$   
 $k = klim * \tanh(k1 / klim)$   
 $\alpha = \text{alfalim} * \tanh(\alpha1 / \text{alfalim})$   
 aux Pa=Pa  
 aux Qa=Qa  
 aux Did=Did  
 aux k1=k1  
 aux alfa1=alfa1  
 aux k=k

aux alfa=alfa

#Condiciones iniciales

V(0)=1.1165  
 dm(0)=0.19538  
 w(0)=0  
 d(0)=0.0068706  
 Id(0)=-0.00045314  
 Iq(0)=-0.44747  
 Vdc(0)=1.3201  
 X1(0)=0  
 x2(0)=1.4547  
 x3(0)=-0.0042274

Parámetros de XPPAUT:

@ Total=300,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01,MAXSTOR=100000  
 @ Nmax=90000,NPr=100,Dsmax=0.03,AUTOXMIN=0,AUTOXMAX=7.7  
 @ AUTOYMIN=0.1,AUTOYMAX=1.15,PARMIN=0,PARMAX=7.7

done

### Modelo 9:

#Sistema eléctrico de potencia de tres nodos compensando potencia reactiva en el nodo de carga  
 #mediante StatCom (Qref=1pu) y empleando modelo matemático en forma rectangular  
 #Capítulo 5.3.1

#Parámetros del sistema:

param Q1=0,kpw=0.4,kpv=0.3,kqw=-0.03,kqv=-2.8,kqv2=2.1  
 param t1=8.5,po=0.6,qo=1.3,p1=0  
 param eop=1.1755,em=1,pm=1,m=0.3,dmm=0.05  
 param gop=1.744144,bop=-16.933762,gm=0.435778,bm=-4.9809735

#Ecuaciones algebraicas del sistema:

$$p = v * eop * (gop * \cos(d) + bop * \sin(d)) + v * em * (gm * \cos(d - dm) + bm * \sin(d - dm)) - v^2 * (gop + gm) + V * (Id * \cos(d) + Iq * \sin(d))$$

$$q = v * eop * (gop * \sin(d) - bop * \cos(d)) + v * em * (gm * \sin(d - dm) - bm * \cos(d - dm)) + v^2 * (bop + bm) + V * (Id * \sin(d) - Iq * \cos(d))$$

#Ecuaciones diferenciales del sistema:

$$v' = (1 / (t1 * kqw * kpv)) * (-kqw * (po + p1 - p) + v * (kpw * kqv - kqw * kpv) + kpw * (qo + q1 - q) + kpw * kqv^2 * v^2)$$

$$dm' = w$$

$$w' = (1/m) * (pm - dmm * w - (em^2 * gm - em * v * (gm * \cos(dm - d) + bm * \sin(dm - d))))$$

$$d' = (1/kqw) * (-kqv^2 * v^2 - kqv * v + q - qo - q1)$$

#Parámetros del Statcom:

```

param Ls=0.15, Rs=0.01, ws=377
param Cdc=0.88, Rdc=600, vdcref=1.3201, k2p=-0.1
param k2v=0.001, K2q=0.5, k1p=0.35, k1v=0.35, k1q=1, Qref=1, alfalim=1, klim=1

```

```
#Ecuaciones del Statcom:
```

```

Id'=- (Rs*ws/Ls)*Id+Iq*ws+(k*ws/Ls)*cos(alfa+d)*Vdc-(V*ws/Ls)*cos(d)
Iq'=- (Rs*ws/Ls)*Iq-Id*ws+(k*ws/Ls)*sin(alfa+d)*Vdc-(V*ws/Ls)*sin(d)
Vdc'=- (3/2)*k*Cdc*ws*(cos(alfa+d)*Id+sin(alfa+d)*Iq)-(Cdc*Vdc*ws/Rdc)

```

```
#Ecuaciones de control del Statcom
```

```

Pa=V*(Id*cos(d)+Iq*sin(d))
Qa=v*(Id*sin(d)-Iq*cos(d))
x1'=K2v*(Vdcref-Vdc)
Did=K1v*(Vdcref-vdc)+x1
x2'=k2p*Did
k1=k1p*Did+x2
x3'=K2q*((Qa-Qref)/V)
alfa1=K1q*((Qa-Qref)/V)+x3
k=klim*tanh(k1/klim)
alfa=alfalim*tanh(alfa1/alfalim)
aux Pa=Pa
aux Qa=Qa
aux Did=Did
aux k1=k1
aux alfa1=alfa1
aux k=k
aux alfa=alfa

```

```
#Condiciones iniciales
```

```

V(0)=1.1355
dm(0)=0.1914
w(0)=0
d(0)=0.0045865
Id(0)=-0.0045385
Iq(0)=-0.88447
Vdc(0)=1.3201
X1(0)=0
x2(0)=1.9535
x3(0)=-0.0079916

```

```
Parámetros de XPPAUT:
```

```

@ Total=300,noutput=1,bounds=5000,Dt=0.01,MAXSTOR=100000
@ Nmax=90000,NPr=100,Dsmax=0.03,AUTOXMIN=0,AUTOXMAX=7.7
@ AUTOYMIN=0.1,AUTOYMAX=1.15,PARMIN=0,PARMAX=7.7

```

```
done
```

## Apéndice F. Manual de *XPPAUT* para el análisis dinámico de los sistemas

*XPPAUT* (*X-Windows Phase Plane Plus Auto*) es un programa que permite resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales. Por medio de este programa es posible obtener la dinámica del sistema representado por estas ecuaciones, obtener los puntos de equilibrio y su estabilidad, así como obtener diagramas de bifurcación definiendo un parámetro de bifurcación. Para lo anterior, el programa cuenta con diferentes rutinas de integración numérica para resolver las ecuaciones diferenciales y un método de continuación para obtener los puntos de equilibrio. Este programa fue desarrollado por Eusebius Doedel en el departamento de matemáticas aplicadas en el instituto tecnológico de California.

*XPPAUT* permite obtener el conjunto de ramas de soluciones asociadas a los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales dado por:

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

En este contexto, *XPPAUT* permite hacer los siguientes cálculos:

1. Calcula las ramas de soluciones periódicas estables e inestables y calcula los multiplicadores de Floquet, que determinan la estabilidad a lo largo de estas ramas.
2. Localiza las bifurcaciones Hopf, saddle node, bifurcaciones de doble periodo y bifurcación toroidal a lo largo de las ramas de soluciones periódicas.

Para simular los sistemas en *XPPAUT* es necesario crear un código fuente o archivo *ODE* como los que se muestran en el Apéndice E. En dicho código se introducen las ecuaciones que describen el sistema en cuestión, condiciones iniciales y parámetros del sistema. Un código fuente contiene varias subrutinas de FORTRAN. El propósito de estas subrutinas es obtener las ramas de soluciones mediante los siguientes pasos:

1. Especificar una condición inicial para el sistema  $(x_0, \mu_0)$ . La condición inicial no deberá ser un punto de bifurcación.
2. Resolver el sistema  $f(x, \mu) = 0$  para encontrar los puntos de equilibrio.
3. Calcular la matriz jacobiana del sistema  $Df_x = \frac{\partial f}{\partial x}$
4. Hacer un análisis de valores característicos del Jacobiano evaluado en el punto de equilibrio para determinar posibles bifurcaciones.

*XPP* contiene el código para un programa de bifurcación llamado *AUTO*, estos programas se usan de manera conjunta, ya que los valores de un programa se usan en el otro y viceversa. *XPPAUT*

tiene la capacidad de manejar más de 590 ecuaciones diferenciales [Ermentrout01]. Se cuenta además con 10 ventanas graficas visibles al mismo tiempo con una variedad de colores.

Existen otros programas disponibles para el estudio de ecuaciones diferenciales los cuales requieren que el problema sea compilado antes de usarlos, *XPP* no necesita de esto, ya que se basa en un compilador de formulas, por lo tanto las ecuaciones diferenciales, condiciones de frontera o cualquier otra fórmula debe ser escrita en notación algebraica [XPPAUT11]. Entonces, la unidad básica para *XPP* es un simple archivo ASCII llamado archivo *ODE*, el cual contiene las ecuaciones, parámetros, variables, condiciones de frontera y funciones para cierto modelo. El método de integración e incluso el paso de integración puede modificarse dentro de *XPP*. Las gráficas y subprocesos se realizan dentro de *XPPAUT* utilizando el ratón y varios menús de botones.

## F.1 Formato de un archivo *ODE*

Los archivo *ODE* consisten de un texto ASCII, el cual es utilizado por *XPP* donde se describe el problema a resolver, este tipo de archivos tiene cualquier combinación de las siguientes líneas, el orden no es muy importante [Ermentrout01].

```
# comment line - name of file, etc
options <filename>

...
d<name>/dt=<formula>
<name>'=<formula>
...
<name>(t)=<formula>
...
volt <name>=<formula>
...
<name>(t+1)=<formula>
...
markov <name> <nstates>
{t01} {t02} ... {t0k-1}
{t10} ...
...
{tk-1,0} ...
...
aux <name>=<formula>
...
<name>=<formula>
...
parameter <name1>=<value1>,<name2>=<value2>, ...
...
!<name>=<formula>
...
wiener <name1>, <name2>, ...
...
```

```

number <name1>=<value1>,<name2>=<value2>, ...
...
<name>(<x1>,<x2>,...,<xn>)=<formula>
...
table <name> <filename>
...
table <name> % <npts> <xlo> <xhi> <function(t)>
...
global sign {condition} {name1=form1;...}
...
init <name>=<value>,...
...
<name>(0)=<value> or <expr>
...
bdry <expression>
...
%[i1 .. i2]
...
%
command[i1..i2] ...
...
name[i1..i2] ...
...
0= <expression>
...
solv <name>=<expression>
...
special <name>=conv(type,npts,ncon,wgt,rootname)
fconv(type,npts,ncon,wgt,rootname,root2,function)
sparse(npts,ncon,wgt,index,rootname)
fsparse(npts,ncon,wgt,index,rootname,root2,function)
mmult(n,m,w,root)
fmmult(n,m,w,root1,root2,function)
...
# comments
...
@ <name>=<value>, ...
...
set <name> {x1=z1,x2=z2,...}
..
" More comments
" {name=val,...,name=val} active comments

done

```

## F.2 PANTALLA PRINCIPAL (XPP)

La pantalla principal contiene una línea de comandos en la parte superior, a la izquierda se tienen todos los menús, en el centro se tiene el área de gráficos y en la parte inferior se cuenta con una línea de información.

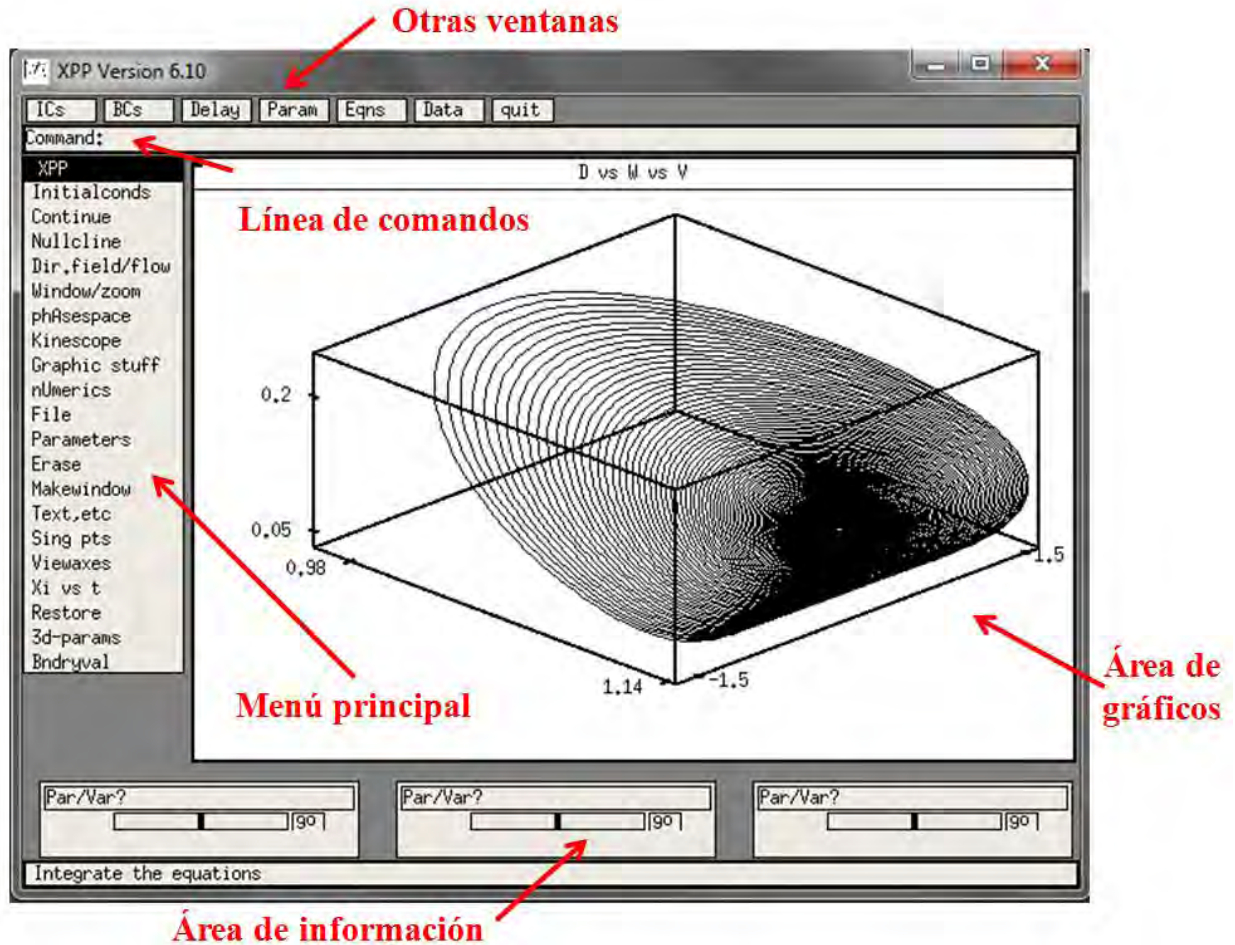


Figura F.1 Componentes de la ventana principal de XPPUT

Las siguientes pantallas son adicionales a la ventana principal:

**Ventana de condiciones iniciales:** ésta contiene nombres y valores de las condiciones iniciales, estos valores pueden ser modificados en esta pantalla o en la pantalla principal.

**Ventana condiciones frontera:** esta ventana contiene las condiciones de frontera.

**Ventana de parámetros:** en esta ventana se encuentran los nombres y valores de los parámetros los cuales se pueden modificar directamente en esta ventana o en la pantalla principal.

**Ventana de ecuaciones:** ésta contiene las ecuaciones diferenciales que describen el sistema.

**Ventana navegadora de los datos:** similar a hoja de cálculo permite examinar los números generados por la simulación.

### F.3 Comandos más importantes

Para cada elemento del menú principal así como para los submenús existe una tecla de abreviado que permite acceder al comando de manera rápida con tan sólo presionar una tecla. Entonces para realizar alguna tarea dentro del programa se puede emplear el ratón o el teclado. Las teclas de abreviado rápido se muestran entre paréntesis y con negritas. A continuación se enlistan algunos de los comandos más importantes del programa *XPP*.

**Salir de *XPP*:** salir de *XPP* sólo es posible mientras no esté realizando ningún cálculo, entonces se debe oprimir **(F)ile, (Q)uit** y contestar a la pregunta **(Y)es**, esta secuencia **FQY** es equivalente a hacer clic en el menú principal y submenús correspondientes. Si el programa está realizando algún cálculo se debe utilizar la tecla **(Esc)**.

**Integrar las ecuaciones:** oprimir **(I) (G)** para obtener la gráfica de la solución en la pantalla principal. Al oprimir **(X)** se puede seleccionar la variable "x" que será graficada contra el tiempo. Es posible que sea necesario ajustar el zoom de la gráfica para que la curva pueda observarse en su totalidad. Los comandos **(W)indow (F)it** permiten realizar lo anterior.

**Cambio de parámetros:** los valores de los parámetros pueden ser modificados directamente en la ventana de parámetros u oprimiendo **(P)** para posteriormente escribir el nombre del parámetro seguido de la tecla **(Enter)** y el nuevo valor de éste seguido de la tecla **(Enter)** u **(OK)** en la ventana. Para ver la nueva solución es necesario integrar las ecuaciones oprimiendo **(I) (G) (X)**, como se ya se mencionó.

**Zoom:** podemos usar el comando **(W)indow (F)it** para observar la curva completa, para poder ver sólo cierta parte de la ésta se puede usar **(W) (Z)** para posteriormente definir el área de interés con el ratón. Si se desea definir el área manualmente se debe usar **(W) (W)**. Para etiquetar los ejes de la grafica se teclaea **(V) (2D)**.

**Graficas:** *XPP* siempre borra los datos de la integración previa. Entonces si se desea visualizar varias gráficas simultáneamente en el área de gráficos es necesario usar los comandos **(G)raphic (F)reeze** después de obtener cada una de las curvas para congelarlas. Posteriormente se puede grabar el contenido del área de gráficos en un archivo postscript (.ps) usando **(G) (P)**.

**Cambio de condiciones iniciales:** se cambian de la misma manera que los parámetros pero en la ventana correspondiente a las condiciones iniciales. También se puede utilizar **(I) (N)** y en la línea de comandos se introducen las nuevas condiciones iniciales. Si se utiliza **(I) (G)** el programa integra las ecuaciones con las condiciones iniciales modificadas. Pero si se utiliza **(I) (L)** utiliza los valores de la respuesta final de la última integración como los iniciales de la presente. Finalmente si se elige **(C)** el proceso de integración puede continuar para un periodo de tiempo más grande.

**Resultados numéricos:** en la ventana navegadora de datos se pueden visualizar los resultados de salida usando las flechas del teclado o los botones de esa ventana. Esta ventana es muy útil si se requiere saber el valor de alguna variable en el tiempo  $t$  y viceversa, oprimiendo el botón **(Find)**.



**Estabilidad de puntos de equilibrio:** por medio de *XPP* posible conocer los valores propios de la matriz jacobiana del sistema linealizado alrededor de un punto de equilibrio al oprimir **(S) (G) (Y)**. Una nueva ventana se abrirá mostrando los valores de la respuesta final de las variables de estado. Los valores propios serán reportados en la ventana de MS-DOS que se abre al ejecutar el *XPPAUT*.

**Menú de control numérico:** en este menú se encuentran establecidos los parámetros que *XPP* necesita para llevar a cabo la integración numérica. Algunos de los más importantes son los que a continuación se mencionan junto con sus teclas de abreviado:

**Bound:** previene una sobrecarga numérica deteniendo los cálculos cuando cualquier variable o ecuación auxiliar excede este valor, **(U) (B)**.

**Total:** es el tiempo máximo de integración, **(U) (T)**.

**Dt:** es el paso de tiempo para la integración, **(U) (D)**.

**nOut:** este valor indica la frecuencia con la que se desea se grafique o se impriman los datos, **(U) (O)**.

**tRansient:** este valor indica que tan largo integrar antes de guardar y graficar la solución, **(U) (R)**.

**Start time:** indica al integrador el tiempo de inicio de integración, **(U) (S)**.

**Method:** sirve para seleccionar el método que se usará para integrar las ecuaciones, los métodos disponibles son los que se pueden encontrar en cualquier libro de métodos numéricos, además cuenta con un método muy robusto el método "Gear", el cual es utilizado cuando las ecuaciones son imposibles de integrar con métodos normales. **(U) (M)**.

**Esc:** al oprimir este comando se regresa al menú principal.

## F.4 Pantalla de *AUTO*

El programa *AUTO* es un paquete que permite realizar el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales como una función de los parámetros. Es parte de *XPPAUT* lo cual permite fácilmente exportar o importar datos de *XPP*. La ventana de *AUTO* es la que se muestra a continuación, Figura F.2:

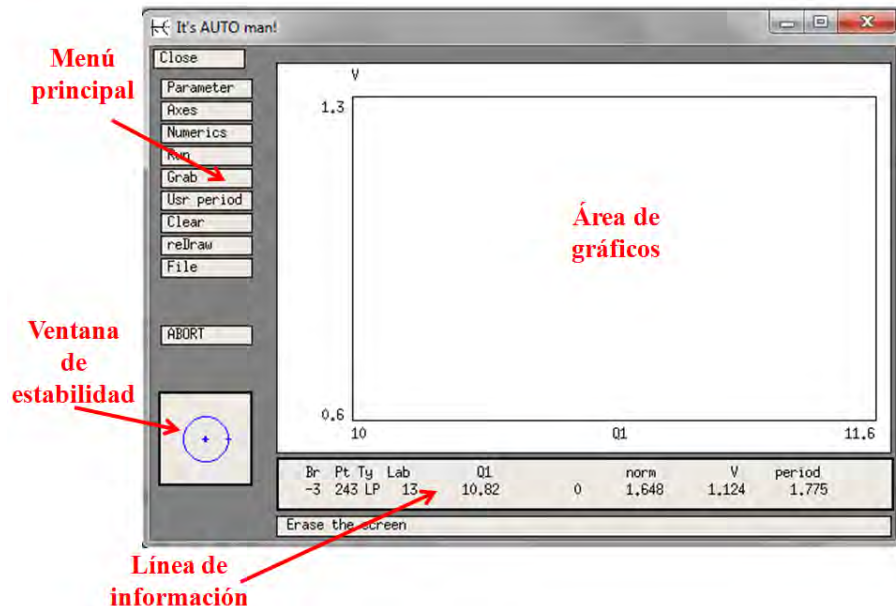


Figura F.2 Componentes de la ventana principal de *AUTO*

Esta ventana contiene un menú principal, el área de gráficos, el área donde se indica la estabilidad del sistema y una línea de información. En el menú principal se encuentran los comandos que permiten manipular este programa. Una breve descripción se presenta a continuación. La letra entre paréntesis, en mayúscula y negrita es la tecla de abreviado que se usa para acceder a este comando:

*Parameter* (**P**): en él se indican cuales parámetros se utilizarán en el análisis de bifurcación.

*Axes* (**A**): con este comando se ajustan los ejes, pueden ser de 7 formas según sea necesario, la más conveniente, si se trata de órbitas periódicas, es *hl-lo*, (**I**).

*Numerics* (**N**): contiene un sub-menú por medio del cual se controla el análisis de bifurcación; es decir, el número de puntos para el análisis, el paso inicial de bifurcación, así como el valor máximo y mínimo del parámetro de bifurcación, entre otros.

*Run* (**R**): ejecuta el análisis de bifurcación. Dependiendo del caso se puede seleccionar entre un análisis de estado estable o periódico, (**S**) o (**P**).

*Grab* (**G**): este comando sitúa el cursor en el diagrama de bifurcación. El cursor se puede mover usando la tecla (**Tab**) o las flechas del teclado. Al situarse en un punto del diagrama y dar la tecla (**enter**) se puede importar los valores de parámetros y condiciones iniciales a *XPP*. Adicionalmente, se puede leer la información del punto en línea de información de *AUTO* y también la estabilidad en la ventana correspondiente.

*File* (**F**): el uso de este comando permite importar órbitas a *XPP*, guardar y cargar los diagramas, imprimir diagramas en archivos postscript y ASCII, limpiar diagramas, y escribir toda la información de bifurcación. Además es posible exportar los datos del diagrama de bifurcación a un archivo .txt usando el comando *Write pts* (**F**) (**W**). La simulación puede ser detenida con el comando "Abort".

*Área de gráficos*: Una vez obtenido el diagrama de bifurcación se pueden observar dos tipos de líneas y dos tipos de círculos. Los puntos de equilibrio estables son representados con líneas gruesas mientras que soluciones periódicas estables con círculos negros; por otra parte, las líneas delgadas y círculos vacíos son puntos fijos inestables y soluciones periódicas inestables respectivamente. Adicionalmente se encuentran cruces con números, éstos representan puntos especiales entre los que se encuentran son los siguientes:

- **EP**: Punto final de una rama.
- **LP**: Punto límite o de vuelta de una rama (Saddle Node Bifurcation).
- **TR**: Bifurcación Toroidal de una solución periódica.
- **PD**: Bifurcación de doble periodo.
- **UZ**: función definida de usuario.
- **MX**: Falla en la convergencia.
- **BP**: Bifurcación o punto de rama.
- **HB**: Bifurcación Hopf.

*La ventana de estabilidad.* En esta ventana se muestran los valores propios del sistema para cuando se está situado en un punto fijo; de esta manera, si algún valor propio tiene parte real positiva, el sistema es inestable. Por otra parte, cuando el cursor se encuentra situado en una órbita periódica se muestran los multiplicadores de Floquet; así, los que están dentro del círculo son estables y los que están fuera de este son inestables.

## F.5 Recomendaciones para el manejo de *XPPAUT*

Durante el manejo del software se enfrentaron algunas dificultades, a continuación se mencionan algunas recomendaciones para evitarlas:

- En *XPP* cuando ya se ha obtenido la dinámica de un punto de equilibrio estable con los comandos (S)(G), la forma de pasar sus valores de la respuesta en estado estacionario a la ventana de condiciones iniciales es con los comandos (I)(L). Es recomendable realizar este proceso antes de intentar obtener el diagrama de bifurcación en el programa *AUTO*.
- Al importar la dinámica del sistema de algún punto del diagrama de bifurcación a *XPP* se puede obtener la respuesta en estado estacionario de las variables de estado trasladándolas a la ventana de condiciones iniciales, esto se realiza con los comandos (I)(G).
- En ocasiones el programa se llega a pasmar y no se puede salir de éste usando los comandos antes indicados; entonces, para finalizar el programa es necesario cerrar la pantalla de MS-DOS que se abre al ejecutar el programa.
- Al grabar un gráfica en un archivo .ps o exportar los valores a un archivo .txt, éstos quedaran guardados en la carpeta principal de *XPPAUT* la cual generalmente se encuentra en la ubicación C:
- Si no se cuenta con un programa para visualizar los archivos con extensión .ps, una posible solución es convertir los archivos a una extensión .pdf usando un convertidor, de esta manera será posible visualizar las gráficas guardadas.