



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS**

EL ÍNDICE DE CONLEY EN ECUACIONES DIFERENCIALES

**MODALIDAD DE GRADUACIÓN:
EXÁMENES GENERALES Y TESINA**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS**

**PRESENTA:
NANCY LETICIA GONZÁLEZ MORALES**

**DIRECTOR DE TESINA:
DR. ERNESTO ROSALES GONZÁLEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

MÉXICO, D. F. 20 DE JUNIO DEL 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	I
1. Flujos y vecindades aislantes	1
2. Nociones básicas de topología	7
3. El índice de Conley	9
3.1. Algunos resultados sobre el índice de Conley	9
4. Ejemplos	11
4.1. Flujo de una ecuación en \mathbb{R} a un parámetro	11
4.2. Conjuntos invariantes en \mathbb{R}^2	13
4.3. Suma de Índices	15
4.4. Índice de Conley asociado a órbitas periódicas	17
5. El índice de Conley para la ecuación de Nagumo	19
5.1. Análisis de la ecuación de Nagumo	22
5.2. Construcción de bloques para la ecuación de Nagumo	29
5.2.1. Ecuación de VanDer Pol	31
bibliografía	33

Introducción

En diferentes áreas de la ciencia, tales como física, química y biología, a menudo se plantean modelos matemáticos que involucran ecuaciones para describir el comportamiento de un fenómeno. En dicho planteamiento es inevitable y a la vez necesario hacer simplificaciones sobre el problema. Es por tanto importante conocer que información se puede obtener del sistema, así como los cambios cualitativos que ocurren bajo perturbaciones en las ecuaciones.

En este sentido, el uso de la topología moderna como un recurso para estudiar sistemas dinámicos surge, en gran medida, a partir de las aportaciones de Poincaré al estudio de la Mecánica Celeste a finales del siglo diecinueve y principios del veinte. En particular, como método topológico, el concepto de índice de una función, queda definido por un número, y éste da información sobre las propiedades de la función. Tenemos por ejemplo, el índice de Poincaré-Hopf y el índice de Morse, los cuales están definidos para puntos singulares y tienen relación con la topología del espacio en el que se encuentran.

Por otro lado, se tiene la teoría del índice de Conley y sus aplicaciones, que surgió en los años setenta [CE], [Co]. A grandes rasgos, éste se define para conjuntos invariantes en términos del comportamiento de un flujo en la frontera de lo que se conoce como vecindad aislante y asigna, no un número, sino la clase de homotopía de cierto espacio topológico.

En este trabajo, introducimos las ideas y conceptos básicos sobre la teoría del índice de Conley para abordar el estudio de flujos en \mathbb{R}^n [Sm]. Para esto, presentamos ejemplos donde se calcula dicho índice para algunos conjuntos invariantes en el plano. Finalmente, como una aplicación específica del Índice de Conley, estudiamos una ecuación diferencial parcial, la ecuación de Nagumo, la cual tiene relevancia biológica pues es un modelo simplificado de la transmisión de impulsos nerviosos.

Capítulo 1

Flujos y vecindades aislantes

Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua; denotamos a $f(x, t)$ por $x \cdot t$.

Definición 1.1. La aplicación f es llamada **flujo** en \mathbb{R}^n si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$(a) \quad x \cdot 0 = x$$

$$(b) \quad (x \cdot t) \cdot s = x \cdot (t + s)$$

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ es un flujo}\}$ el espacio de flujos en \mathbb{R}^n . En este espacio usaremos la topología generada por una familia \mathcal{B} de conjuntos de la forma

$$\mathcal{N}(f, K, \epsilon) = \{g \in \mathcal{F} \mid \|f - g\|_K < \epsilon\},$$

donde $f \in \mathcal{F}$, K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y

$$\|f - g\|_K = \sup_{(x,t) \in K} \{|f(x, t) - g(x, t)|\}.$$

Lema 1.2. El conjunto definido por \mathcal{B} es un base para una topología en \mathcal{F}

Demostración. Basta ver que intersecciones finitas de elementos de \mathcal{B} se escriben como unión de elementos de \mathcal{B} , véase [Si],[Pr]. Para esto, consideremos $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(f_1, K_1, \epsilon_1)$ y $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}(f_2, K_2, \epsilon_2)$ ambos elementos de \mathcal{B} , sea $g \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$. Tomando

$$K_g = K_1 \cup K_2 \quad \text{y} \quad \epsilon_g = \min_{i=1,2} \{\epsilon_i - \max_{x \in K_i} (f(x, t) - g(x, t))\}$$

tenemos que $\mathcal{N}(g, K_g, \epsilon_g) \subset \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2$. Así, $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \cup_{g \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2} \mathcal{N}(g, K_g, \epsilon_g)$. Por inducción se concluye el lema. \square

Definición 1.3. Sean $f, g \in \mathcal{F}$. Decimos que f y g son flujos ϵ -ceranos en un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ si

$$\|f - g\|_K < \epsilon.$$

Es decir, g es un flujo ϵ -cerano a f en K , si $g \in \mathcal{N}(f, K, \epsilon)$.

Definición 1.4. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{F}$. Definimos $x \cdot \mathbb{R} := \{x \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$ y decimos que

(i) $x \cdot \mathbb{R}$ es la **órbita** de x .

(ii) x es un **punto singular** de f , si $x \cdot \mathbb{R} = x$.

(iii) x es un **punto periódico**, si existe un $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x \cdot t = x$ y x no es un punto singular. El valor t es llamado un periodo de x y a la órbita de x_0 la llamamos **órbita periódica**.

(iv) $I \subset X$ es un **conjunto invariante** bajo f , si $I \cdot \mathbb{R} = I$, y lo llamamos f -invariante.

Observación 1.5. Dado $I \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto f -invariante para algún flujo f , la cerradura de I es un conjunto f -invariante. Además, la unión e intersección de conjuntos f -invariantes son también conjuntos f -invariantes.

Para las definiciones 1.6, 1.7, 1.8 y 1.9 consideramos un flujo $f \in \mathcal{F}$ y x_0, y_0 dos puntos singulares de f .

Definición 1.6. El **conjunto estable**, $W^s(x_0)$, y el **conjunto inestable**, $W^u(x_0)$, de x_0 se definen como:

$$W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot t \rightarrow x_0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot t \rightarrow x_0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}.$$

Definición 1.7. A un punto $x \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$, le llamamos **punto homoclínico**. Una **órbita homoclínica** es la órbita de un punto homoclínico.

Definición 1.8. Decimos que la órbita de un punto $x \in W^u(x_0) \cap W^s(y_0)$ es una **curva heteroclínica** que conecta a los puntos x_0, y_0 cuando t tiende a $\pm\infty$.

En adelante usaremos la siguiente notación: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$: $\overset{\circ}{A}$, A^C , y $Cl(A)$ denotan el interior, el complemento y la cerradura, respectivamente, del conjunto A .

Definición 1.9. Sea N un conjunto compacto en \mathbb{R}^n . Decimos que:

a) N es una **vecindad aislante para f** si para todo $x \in \partial N$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot t \notin N$.

b) Un conjunto cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$, f -invariante, es un **conjunto invariante aislado** si existe alguna vecindad aislante N para f tal que I es el conjunto f -invariante máximo en $\overset{\circ}{N}$. Decimos entonces que N es **vecindad aislante para I** .

Proposición 1.10. Si N es vecindad aislante para un flujo $f \in \mathcal{F}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo flujo $g \in \mathcal{N}(f, N, \epsilon)$, N es también vecindad aislante de g .

Demostración. Sea $x \in \partial N$. Por hipótesis para f , existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot t_0 \notin N$. Además, por la continuidad del flujo f y la compacidad de N , para $\epsilon = [dist(x \cdot t_0, N)]/2$, la vecindad $V_\epsilon(x \cdot t_0)$ de radio ϵ alrededor de $x \cdot t_0$ no interseca a N . Por otra parte, si g es un flujo ϵ -cercano a f , entonces $g(x, t_0) \in V_\epsilon(x \cdot t_0)$. Por lo tanto, para el valor t_0 se tiene que $g(x, t_0) \notin N$. \square

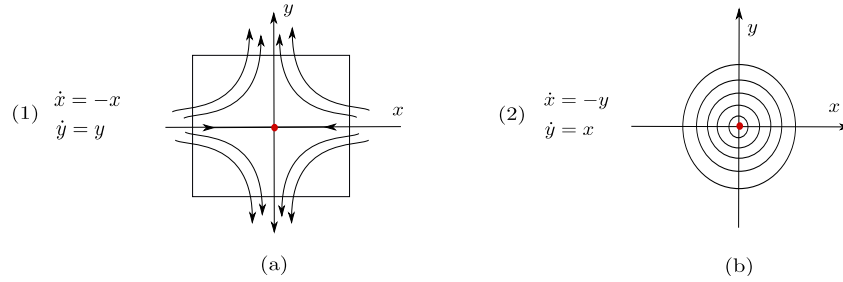


Figura 1.1: Ejemplos de flujos de ecuaciones diferenciales en el plano.

En la figura 1, observamos que el origen es un conjunto invariante (punto singular tipo silla) aislado con respecto al flujo de la ecuación (1). Una vecindad aislante para dicho punto es $N = [-1, 1] \times [-1, 1]$ pues los puntos en la frontera de N salen del bloque para algún $t \neq 0$. Por otro lado, el origen es un punto singular (tipo centro) para el flujo de la ecuación (2). Sin embargo, éste no es conjunto invariante aislado pues cualquier vecindad de dicho punto contiene una infinidad de conjuntos invariantes (órbitas periódicas).

Lema 1.11. Sean $f \in \mathcal{F}$ y $N \subset \mathbb{R}^n$ vecindad aislante de f . Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto f -invariante aislado en N , entonces para todo $x \in \overset{\circ}{N} \cap I^c$ existe t_x tal que $x \cdot t_x \notin N$.

Demostración. Si para alguna $x_0 \in \overset{\circ}{N} \cap I^c$ sucede que $x_0 \cdot \mathbb{R} \subset N$, entonces existe t_0 tal que $x_0 \cdot t_0 \in \partial N$. De lo contrario, $I_0 = x_0 \cdot \mathbb{R} \subset \overset{\circ}{N}$, lo cual es una contradicción con que I es el conjunto invariante máximo en N . Por otro lado, como N es vecindad aislante para f , existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0 \cdot t_0) \cdot t_1 \notin N$. Tomando $t_x = t_0 + t_1$ concluimos la demostración. \square

Lema 1.12. Sea f un flujo en \mathcal{F} . Sean $N_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$. Si N_i es vecindad aislante para f , para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $N = \bigcap_1^n N_i$ también es vecindad aislante para f .

Demostración del lema 1.12.

Sea $x \in \partial N = \partial(\bigcap_1^n N_i)$, para probar que existe $t_x \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot t_x \notin N$ observemos que $\partial(\bigcap_1^n N_i) \subset \bigcup_1^n (\partial N_i)$. En efecto, dado $x \in \partial(\bigcap_1^n N_i)$ y $V_\epsilon(x)$, $\epsilon > 0$ vecindad de x existen y, w , tales que

a) $y \in (\bigcap_1^n N_i)^c \cap V_\epsilon(x)$, es decir, $y \in N_{i_0}^c \cap V_\epsilon$ para algún i_0 .

b) $w \in (\bigcap_1^n N_i) \cap V_\epsilon(x)$, es decir, $w \in \overset{\circ}{N}_i \cap V_\epsilon$ para todo i . En particular, $w \in \overset{\circ}{N}_{i_0} \cap V_\epsilon$.

De a) y b) tenemos que $x \in \partial N_{i_0}$ y por tanto $x \in \bigcup_1^n (\partial N_i)$. Ahora, como N_{i_0} es vecindad aislante para f , existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot t_0 \notin N_{i_0}$. Esto implica que, $x \cdot t_0 \notin \bigcap_1^n N_i$. Por lo tanto, $N = \bigcap_1^n N_i$ es vecindad aislante de f . \square

Observación 1.13. Con las hipótesis del lema 1.12 se tiene que si cada N_i es vecindad aislante de un mismo conjunto f -invariante I , entonces $N = \bigcap_1^n N_i$ es también vecindad aislante para I , pues $I \subset \overset{\circ}{N}_i \subset \bigcap_1^n \overset{\circ}{N}_i = (\bigcap_1^n N_i)^\circ$. La maximalidad de I en N se sigue del lema 1.11.

Sea N un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n . Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{U}(N) = \{f \in \mathcal{F} \mid N \text{ es vecindad aislante para } f\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \{C \subset \mathbb{R}^n \mid C \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}.$$

Observación 1.14. $\mathcal{U}(N)$ es un subconjunto abierto de \mathcal{F} . Esto se sigue de la proposición 1.10, ya que para $f \in \mathcal{U}(N)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(f, N, \epsilon) \subset \mathcal{U}(N)$.

Definición 1.15. Definimos el conjunto $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{L} = \{(f, I) \mid I \text{ es un conjunto } f\text{-invariante aislado}\}$$

Observación 1.16. En la definición 1.15 está implícita la existencia de algún conjunto $N \subset \mathbb{R}^n$ que es vecindad asilante para f , la cual contiene como conjunto f -invariante máximo a I .

Definición 1.17. Definimos la aplicación

$$\sigma_N : \mathcal{U}(N) \rightarrow \mathcal{L}, \quad \sigma_N(f) = (f, I),$$

donde I es el conjunto f -invariante máximo en N .

Definición 1.18. Mediante la aplicación σ_N definimos la topología en \mathcal{L} como la generada por los conjuntos $\sigma_N(U)$ donde $U \subset \mathcal{U}(N)$ es un subconjunto abierto en \mathcal{F} . Es decir, intersecciones finitas de dichos conjuntos forman la base de la topología en \mathcal{L} (véase [Pr]).

Teorema 1.19. La proyección en la primera coordenada $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por $\pi(f, I) = f$ es un homeomorfismo local y $\pi \circ \sigma_N = \text{Id}$ para toda $N \subset \mathbb{R}^n$ vecindad aislante de $f \in \mathcal{F}$.

Para la demostración del Teorema 1.19 veremos que π es una aplicación continua y biyectiva localmente (lema 1.20). Posteriormente probaremos que π es también una aplicación abierta (lema 1.21), con lo cual concluiremos la demostración.

Lema 1.20. $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ es una aplicación continua y biyectiva localmente.

Demostración. Sea $s = (f, I) \in \mathcal{L}$ y consideremos una vecindad aislante N de I . Por la proposición 1.10 existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(f, N, \epsilon) \subset \mathcal{U}(N)$. Como $V := \mathcal{N}(f, N, \epsilon)$ es abierto en \mathcal{F} (de hecho es un elemento de la base de la topología en \mathcal{F}), por la definición de la topología en \mathcal{L} se tiene que $\mathcal{V}_s = \sigma_N(V)$ es abierto en \mathcal{L} . Además, $(f, I) \in \mathcal{V}_s$ y $\pi(\mathcal{V}_s) = V$, esto es, $\pi|_{\mathcal{V}_s}$ es invertible, cuya aplicación inversa es σ_N . \square

Lema 1.21. $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ es un mapeo abierto.

Demostración del lema 1.21. Para demostrar que π es un mapeo abierto requerimos de los siguientes resultados:

Sublema 1.22. Sean N_1, N_2 , donde $N_1 \subset N_2$ son vecindades aislantes para f , las cuales aislan al mismo conjunto invariante I . Entonces existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$ del flujo f , tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(N_1) \cap \mathcal{U}(N_2)$ y $\sigma_{N_1}|_{\mathcal{V}} = \sigma_{N_2}|_{\mathcal{V}}$.

Demostración del sublema 1.22. Primero observemos que para $x \in (\overset{\circ}{N_2} \setminus I)$ existe $t_x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x \cdot t_x \notin N_2$. Esto se sigue, primero, de la propiedad maximal de I en N_1 existe t_1 tal que $x \cdot t_1 \notin N_1$, y segundo, por la maximalidad de I en N_2 existe t_2 tal que $(x \cdot t_1) \cdot t_2 \notin N_2$ (lema 1.11).

Por otro lado, como $Cl(N_2 \setminus N_1)$ es compacto, sea $\epsilon_0 = \min_{x \in Cl(N_2 \setminus N_1)} \{d(x \cdot t_x, N_2)\} > 0$.

Por la proposición 1.10 existen ϵ_i , $i = 1, 2$ tales que, $\mathcal{N}(f, N_i, \epsilon_i) \subset \mathcal{U}(N_i)$, para $i = 1, 2$. Entonces, tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ y $\mathcal{V} = \mathcal{N}(f, N_1 \cup N_2, \epsilon)$, tenemos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(N_1) \cap \mathcal{U}(N_2)$. Además, dado $g \in \mathcal{V}$ y $x \in Cl(N_2 \setminus N_1)$ se tiene $g(x, t_x) \notin N_2$. Esto implica que si I_g es un conjunto invariante aislado en N_2 , entonces N_1 es también vecindad aislante para I_g . Esto es, $\sigma_{N_1}(g) = \sigma_{N_2}(g)$. \square

Sublema 1.23. Sean N_1, \dots, N_n cerraduras de subconjuntos abiertos y acotados en \mathbb{R}^n . Sean $U_1, \dots, U_n \subset \mathcal{U}(N_i)$ conjuntos abiertos, $i = 1, \dots, n$. Si $(f, I) \in \cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i)$, entonces existen un conjunto cerrado $N \subset \mathbb{R}^n$ y un conjunto abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(N)$ tales que $(f, I) \in \sigma_N(\mathcal{V}) \subset \cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i)$.

Demostración del sublema 1.23. Sean $U = \cap_1^n U_i$ y $N = \cap_1^n N_i$. La hipótesis, $(f, I) \in \cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i)$ implica que N_i es vecindad aislante de I para $i = 1, \dots, n$, de lo cual se sigue, por el lema 1.12, que N es también vecindad aislante para I . Además, como $f \in \mathcal{U}$, aplicando el lema 1.22, se tiene la existencia de $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(N_i)$, $i = 1, \dots, n$ que es vecindad de f y tal que $\sigma_N|_{\mathcal{V}} = \sigma_{N_i}|_{\mathcal{V}}$, $i = 1, \dots, n$. \square

Para concluir la demostración del lema 1.21, consideramos $U \subset \mathcal{L}$ abierto, y sea $f \in \pi(U)$. Por definición de la topología en \mathcal{L} se tiene que, $U = \cup(\cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i))$, donde $U_i \subset \mathcal{U}(N_i)$ es abierto en \mathcal{F} , $i = 1, \dots, n$. Así, $(f, I) \in (\cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i))$. Entonces, por el sublema 1.23, existen N conjunto cerrado en \mathbb{R}^n y $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(N)$ abierto en \mathcal{F} , tales que $(f, I) \in \sigma_N(\mathcal{V}) \subset \cap_1^n \sigma_{N_i}(U_i)$. Finalmente, como $\pi(U) \supset \pi(\sigma_N(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$, se concluye que $\pi(U)$ es abierto. \square

El Teorema 1.19 nos permite dar la siguiente definición:

Definición 1.24. Decimos que (f, I) y (\tilde{f}, \tilde{I}) están **relacionados por continuación** si existe N vecindad aislante común para f y \tilde{f} . Esto es, si f, \tilde{f} están en la misma componente conexa $C \subset \mathcal{U}(N)$, véase [Sm].

Observación 1.25. En particular, si f y \tilde{f} son flujos ϵ -ceranos en \mathcal{F} , entonces f y \tilde{f} están relacionados por continuación.

Por otra parte, para llegar a la definición del Índice de Conley requerimos la definición de bloque aislante, que es una generalización de vecindad aislante.

Definición 1.26. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea f un flujo en \mathcal{F} . Dado $\delta > 0$, definimos $h_\delta : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $(x, t) \rightarrow x \cdot t$. Si para algún δ , h_δ es un homeomorfismo con rango abierto en \mathbb{R}^n , entonces decimos que S es una δ -sección local.

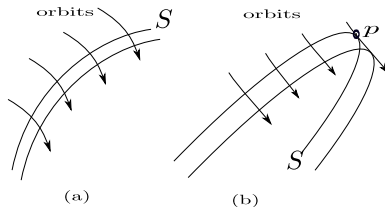


Figura 1.2: (a) S es una δ -sección local. (b) S no es una δ -sección local pues cerca del punto p no puede haber un mapeo h_δ que sea inyectivo.

Definición 1.27. Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ la cerradura de un conjunto abierto. Decimos que B es un **bloque aislante para el flujo** f , si existe un $\delta > 0$ y dos δ secciones S^+ y S^- con las siguientes propiedades:

- (i) $[cl(S^\pm) \setminus S^\pm] \cap B = \emptyset$
- (ii) $B \cap (S^+ \cdot (-\delta, \delta)) = (S^+ \cap B) \cdot (-\delta, 0]$
- (iii) $B \cap (S^- \cdot (-\delta, \delta)) = (S^- \cap B) \cdot [0, \delta)$
- (iv) Si $x \in \partial B \setminus (S^+ \cup S^-)$, existen $\epsilon_1 < 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $x \cdot [\epsilon_1, \epsilon_2] \subset \partial B$ y $x \cdot \epsilon_1 \in S^-$, $x \cdot \epsilon_2 \in S^+$.

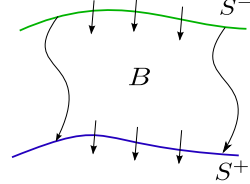


Figura 1.3: Propiedades de las secciones S^+ y S^- .

Observación 1.28. En la definición de bloque aislante observamos lo siguiente:

- Los elementos en $B \cap S^+$ salen del bloque B para $t > 0$. Esto es, $B \cap (S^+ \cdot (0, \delta)) = \emptyset$. En efecto, si $x \in B \cap (S^+ \cdot (0, \delta))$, existe $0 < t < \delta$ tal que $h_\delta(x, 0) = h(x^+, t)$ y como h_δ es el homeomorfismo asociado a la δ -sección S^+ se tiene que $x = x^+$ y $t = 0$.
- Los elementos en $B \cap S^-$ salen del bloque B para $t < 0$. Esto es, $B \cap (S^- \cdot (-\delta, 0)) = \emptyset$. El argumento es análogo al anterior

Proposición 1.29. Bloques aislantes son vecindades aislantes.

Demostración. Sea $x \in \delta B$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $x \in S^+ \cup S^-$, existe $t_0 > 0$ tal que $x \cdot t_0 \notin B$. Esto se sigue de la observación 1.28.
2. Si $x \in \partial B \setminus (S^+ \cup S^-)$, por la propiedad (iii) de la definición 1.27, existen $\epsilon_1 < 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $x \cdot [\epsilon_1, \epsilon_2] \subset \partial B$ y $x \cdot \epsilon_1 \in S^-$, $x \cdot \epsilon_2 \in S^+$. Concluimos usando el punto 1.

□

Definición 1.30. Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un bloque aislante, definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
 b &= \partial B \\
 b^+ &= B \cap S^+ \subset b \\
 b^- &= B \cap S^- \subset b \\
 \tau &= cl[b \setminus (b^+ \cup b^-)] \\
 A^+ &= \{x \in B : x \cdot R^- \subset B\} \\
 A^- &= \{x \in B : x \cdot R^+ \subset B\} \\
 I &= A^+ \cap A^- \\
 A &= A^+ \cup A^- \\
 a^+ &= A^+ \cap b \subset b^+ \\
 a^- &= A^- \cap b \subset b^-
 \end{aligned}$$

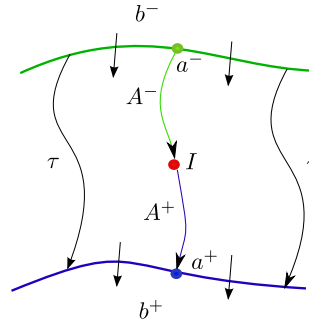


Figura 1.4: Componentes de un bloque aislante.

Capítulo 2

Nociones básicas de topología

Una pareja de espacios topológicos es un par ordenado (X, A) , donde X es un espacio topológico y A es un subconjunto cerrado de X . El producto de pares (X, A) y (Y, B) es el par $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ y lo denotamos por $(X, A) \times (Y, B)$. Si $A = \emptyset$, escribimos simplemente X . El espacio (X, x_0) , donde x_0 es un punto de X , es llamado espacio punteado, con x_0 el punto básico.

Una aplicación de (X, A) en (Y, B) es una aplicación continua $\phi : X \rightarrow Y$ tal que $\phi(A) \subset B$.

Definición 2.1. Decimos que dos aplicaciones $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son **homotópicas** y lo denotamos con $f_0 \simeq f_1$ si existe una aplicación continua $\Phi : (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$ tal que $\Phi(x, 0) = f_0(x)$ y $\Phi(x, 1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$.

Denotamos por $[f] = \{g : (X, A) \rightarrow (Y, B) \mid g \simeq f\}$ a la clase de homotopía de la aplicación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Definición 2.2. Decimos que (X, A) y (Y, B) son parejas de espacios topológicos **homotópicamente equivalentes** y lo denotamos como $(X, A) \simeq (Y, B)$ si existen aplicaciones continuas

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad \text{y} \quad g : (Y, B) \rightarrow (X, A) \quad \text{tales que} \quad f \circ g \simeq Id_{(Y, B)} \quad \text{y} \quad g \circ f \simeq Id_{(X, A)}.$$

Definición 2.3. Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos. Sea \sim la relación de equivalencia en X definida por $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o x, y están en A . La clase de x se denota por $[x]$ y X/A es el conjunto de dichas clases de equivalencia.

Sea $\pi : X \rightarrow X/\sim$, la proyección $x \rightarrow [x]$.

Usaremos la topología cociente en X/\sim donde $U \subset X/\sim$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset X$ es abierto. Esto ocurre si y sólo si existe un conjunto V abierto en X tal que $V \cap A = \emptyset$ o $V \supset A$, y $\pi(V) = U$.

Definición 2.4. X/A es el par topológico $(X/\sim, [A])$ si $A \neq \emptyset$. Mientras que, X/A es el par topológico $(X \sqcup x_0, x_0)$ ¹, cuando $A = \emptyset$, véase [Pr]. Denotamos por $[X/A]$ a la clase de homotopía del par topológico $(X/\sim, [A])$ con la relación 2.3.

Topológicamente X/A corresponde al espacio donde los puntos de A se identifican en un punto.

¹ \sqcup denota la unión ajena de conjuntos (suma topológica).

Operación cuña de parejas de espacios topológicos

Definición 2.5. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios punteados.

1) Denotamos por \vee a la operación cuña de parejas de espacios topológicos. Ésta se define como

$$\begin{aligned} (X, x_0) \vee (Y, y_0) &= (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\} = \\ &= (((X, x_0) \sqcup (Y, y_0)) / \sim, [x_0, y_0]) \simeq \\ &\simeq ((x_0 \times Y) \cup (X \times y_0), (x_0, y_0)) \end{aligned}$$

2) El identico aditivo es el espacio singular que tiene el tipo de homotopía de un punto $\{x_0\}$.

3) Denotamos por Σ^n al espacio topológico cuyo tipo de homotopía es la n -esfera con un punto básico, esto es, (S^n, p) con $p \in S^n$.

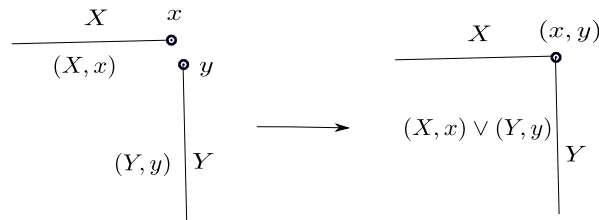


Figura 2.1: Operación \vee de pares topológicos.

Capítulo 3

El índice de Conley

Definición 3.1. Sea B un bloque aislante para el flujo f . Sea S^+ la δ -sección para la cual se satisfacen las propiedades de la definición 1.27. Consideramos el conjunto

$$b^+ = B \cap S^+ = \{x \in \partial B \mid x \cdot (0, \delta) \cap B = \emptyset\}$$

Definición 3.2. Sea I un conjunto f -invariante aislado y sea B un bloque aislante para I . El **índice de Conley** de I se define como la clase de homotopía del espacio punteado $B/b^+ = (B/\sim, b^+)$ y lo denotamos por

$$h(I) = [B/b^+] \tag{3.1}$$

Es decir, $h(I)$ es el tipo de homotopía del espacio cociente de un bloque aislante B identificando el conjunto b^+ a un punto (definición 2.3).

Notemos que el índice de Conley se define esencialmente con respecto al flujo f , pues es éste el que determina el bloque aislante B y el conjunto invariante I aislado en B (véase ejemplo 3.3).

Ejemplo 3.3. Consideremos el flujo constante definido en \mathbb{R}^2 como se muestra en la figura 3.3.

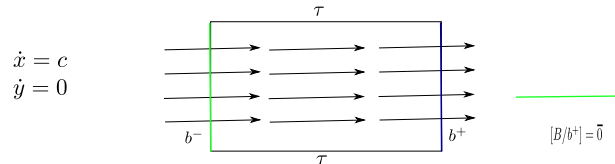


Figura 3.1: Flujo constante en el plano. En este caso se tiene que $h(I) = \bar{0}$, con $I = \emptyset$.

3.1. Algunos resultados sobre el índice de Conley

A continuación enunciamos tres resultados importantes con respecto al índice de Conley.

Teorema 3.4. Sean $f \in \mathcal{F}$ e $I \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto f -invariante aislado. Sean B_1 y B_2 bloques aislantes para I . Entonces, $B_1/b_1^+ \sim B_2/b_2^+$.

Este Teorema 3.4 implica que el índice de Conley está bien definido pues es independiente del bloque aislante.

Teorema 3.5. *Sean $f \in \mathcal{F}$ y $B \subset \mathbb{R}^n$. Si B es un bloque aislante para un conjunto f -invariante aislado I , y si $h(I) \neq \bar{0}$, entonces $I \neq \emptyset$, es decir, B contiene una órbita completa.*

Demostración. Sea B un bloque aislante para f . Si $I = \emptyset$, podemos considerar $B = \emptyset$, por lo que $b^+ = \emptyset$. Entonces, $h(\emptyset) := (B/\sim, b^+) \sim (\emptyset \cup x_0, x_0) := \bar{0}$ \square

El Teorema 3.5 da una condición necesaria para la existencia de soluciones no triviales en el interior de un bloque aislante (véase ejemplo 3.3).

Teorema 3.6 (Teorema de Continuación). *Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ flujos en \mathcal{F} . Sean I_1 y I_2 conjuntos invariantes aislados con respecto a f_1, f_2 respectivamente. Si las parejas (f_1, I_1) y (f_2, I_2) están relacionadas por continuación, entonces los conjuntos invariantes I_1, I_2 tienen el mismo índice de Conley. Esto es,*

$$h(I_1) = h(I_2).$$

Como consecuencia del Teorema de Continuación 3.6 se tiene que el índice de Conley es un invariante topológico, en el sentido de que no cambia bajo pequeñas perturbaciones en el flujo.

Las demostraciones de los Teoremas 3.4 y 3.5 son omitidas en este trabajo.¹ En cambio, presentamos varios ejemplos (capítulo 4) en los que usamos argumentos geométricos para calcular el índice de Conley y usamos los Teoremas mencionados para el estudio de una ecuación diferencial parcial, que si bien es un ejemplo particular nos brinda un panorama de las aplicaciones del índice de Conley en ecuaciones diferenciales (capítulo 5).

¹Las demostraciones se encuentran en [Sm].

Capítulo 4

Ejemplos

En esta capítulo calculamos los índices de Conley de conjuntos invariantes determinados por los flujos solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.1. Flujo de una ecuación en \mathbb{R} a un parámetro

Ejemplo 4.1. En el siguiente ejemplo consideramos una ecuación diferencial a un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. para cada valor de λ hallamos los conjuntos invariantes bajo el flujo solución de la ecuación y calculamos su respectivo índice de Conley.

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - \lambda = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Los puntos singulares de la ecuación (4.1) para cada valor de λ están dados por los ceros de f , $f(x, \lambda) = 0$. Consideramos los valores del parámetro λ , $0, \lambda_1$ y λ_2 para los cuales la ecuación (4.1) tiene tres, $\{d, 0, e\}$, dos, $\{b, c\}$, y un, $\{a\}$, puntos singulares, respectivamente (véase figura 4.1).

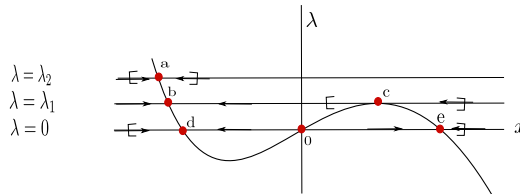


Figura 4.1: Cada la línea horizontal es el espacio fase de la ecuación $\dot{x} = f(x, \lambda_0)$ para $\lambda = 0, \lambda_1, \lambda_2$. Los intervalos marcados corresponden a vecindades aislantes, pues ningún punto en su frontera es parte de una solución de 4.1.

Por otro lado,

$$\frac{df(x, \lambda)}{dx} = 1 - 3x^2 \quad \forall \lambda; \quad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{df}{d\lambda} \quad \lambda = \lambda(x).$$

4.1. FLUJO DE UNA ECUACIÓN EN \mathbb{R} A UN PARÁMETRO

Así, podemos determinar el comportamiento de los puntos singulares de la ecuación (4.1). Esto se indica en la siguiente tabla:

Valor de λ	puntos singulares	derivada	tipo
$\lambda = \lambda_0$	$\{d = -1\}$	$\frac{df(d, \lambda_0)}{dx} = -2 < 0$	atractor
	$\{0\}$	$\frac{df(0, \lambda_0)}{dx} = 1 > 0$	repulsor
	$\{e = 1\}$	$\frac{df(d, \lambda_0)}{dx} = -2 < 0$	atractor
$\lambda = \lambda_1$	$\{b\}$	$\frac{df(b, \lambda_1)}{dx} < 0$	atractor
	$\{c\}$	$\frac{df(c, \lambda_1)}{dx} = 0$	silla-nodo
$\lambda = \lambda_2$	$\{a\}$	$\frac{df(a, \lambda_2)}{dx} < 0$	atractor

Para $\lambda = 0$ la ecuación (4.1) posee tres puntos singulares $d, 0, e$. Sin embargo, notemos que en este nivel hay doce conjuntos invariantes aislados,

$$\{d\}, \{0\}, \{e\}, \{d, 0\}, \{d, e\}, \{0, e\}, \{d, 0, e\}, [d, 0], [0, e], [d, e], \{[d, 0], e\}, \{d, [0, e]\}.$$

Para $\lambda = \lambda_1$, los conjuntos invariantes son $\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, [b, c]$. Mientras que, para $\lambda = \lambda_2$ el único conjunto invariante es $\{a\}$.

Ahora, como la ecuación (4.1) tiene tres tipos de puntos singulares, es suficiente revisar los siguientes casos:

1. Para el nivel $\lambda = \lambda_2$, consideramos $B = [\alpha, \beta]$, con $\alpha < a < \beta$. Como α es un punto de tipo atractor, $b^+ = \emptyset$. Por otra parte, el intervalo $[\alpha, \beta]$ tiene el mismo tipo de homotopía de un punto $p \in [\alpha, \beta]$. Por lo tanto, de la definición 2.4, se tiene que

$$h(a) := [B/b^+] = ([\alpha, \beta]/ \sim, \emptyset) \simeq (p \sqcup x_0, x_0) \simeq \Sigma^0.$$

2. Para $\lambda = \lambda_1$, también se tiene que $h(b) \simeq \Sigma^0$. Mientras que, un intervalo $[\alpha, \beta]$ donde $b < \alpha$ es un bloque aislante para c , como lo indica la figura (4.1). En este caso se tiene que $b^+ = \{\alpha\}$. Así,

$$h(c) := [B/b^+] = ([\alpha, \beta]/ \sim, \alpha) \simeq (\alpha, \alpha) := \bar{0}.$$

3. Finalmente para $\lambda_0 = 0$, sólo falta encontrar el índice de Conley de $x = 0$, que es un punto repulsor. En este caso, un bloque aislante de 0 es intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $d < \alpha < 0 < \beta < e$. Así, $b^+ = \{\alpha, \beta\}$ y

$$h(0) := [B/b^+] = ([\alpha, \beta]/ \sim, \{\alpha, \beta\}) \simeq \Sigma^1.$$

Para el resto de conjuntos invariantes aislados tenemos la siguiente tabla

Valor de λ	Conjunto invariante	bloque aislante B	b^+	$h(S)$
$\lambda = \lambda_0$	$[d, 0]$	$[\alpha, \beta], \alpha < d < 0 < \beta < e$	$\{\beta\}$	$\bar{0}$
	$[0, e]$	$[\alpha, \beta], \alpha < 0 < e < \beta$	$\{\alpha\}$	$\bar{0}$
	$[d, e]$	$[\alpha, \beta], \alpha < d < e < \beta$	\emptyset	Σ^0
$\lambda = \lambda_1$	$[b, c]$	$[\alpha, \beta], \alpha < b < c < \beta$	\emptyset	Σ^0

Observación 4.2. En la ecuación (4.1) podemos ver que las vecindades aislantes para los conjuntos invariantes de la ecuación (4.1) en algunos persisten como tales, para los respectivos conjuntos invariantes que resultan al variar el parámetro λ . Entonces, los correspondientes conjuntos invariantes, que comparten una vecindad aislante en común están relacionados por continuación (definición 1.24). Se puede ver que,

- (a) los conjuntos $\{[d, e]\}, \{[b, c]\}, \{a\}, \{b\}$ y $\{c\}$ están relacionados por continuación.
- (b) el intervalo $[0, e]$ está relacionado por continuación con el punto c .

Sin embargo, un conjunto de uno de los incisos anteriores no puede estar relacionado por continuación con algún conjunto del otro inciso, pues su índice de Conley es distinto (véase Teorema de Continuación 3.6 [Sm]).

4.2. Conjuntos invariantes en \mathbb{R}^2

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(x), \quad v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \tag{4.2}$$

Definición 4.3. Decimos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto singular **hiperbólico** de (4.2) si los valores propios $\lambda_j, j = 1, 2$ de la matriz de linealización de $v(x)$ en x_0 , tienen parte real distinta de cero.

Sea x_0 un punto singular hiperbólico de una ecuación diferencial en el plano. Sean λ_1, λ_2 , los valores propios de matriz de linealización en x_0 , de la ecuación (4.2). Decimos que x_0 es

1. un **punto singular tipo silla**, si ambos valores propios son reales y $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.
2. un **punto singular tipo nodo atractor** si $\lambda_i < 0, i = 1, 2$ y **repulsor** si $\lambda_i > 0, i = 1, 2$.
3. un **punto singular tipo foco** si $\lambda_i = a \pm ib$, con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es un foco **atractor** si $a < 0$ y **repulsor** si $a > 0$.

Observación 4.4.

Si además, la ecuación es de la forma $A(x - x_0)$, con $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Decimos que x_0 es localmente un **punto singular tipo centro** si la parte real de los dos valores propios es cero. ¹

¹El caso no lineal requiere criterios adicionales para determinar el comportamiento local

A continuación calculamos el índice de Conley de puntos singulares de una ecuación diferencial lineal, $\dot{x} = Ax$, $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, cuyo único punto singular es $x_0 = \bar{0}$.

En los siguientes ejemplos se dibujan en color verde los bloques aislantes B del punto singular correspondiente a cada ecuación. Los segmentos en azul indican los puntos en la frontera de cada bloque que salen de éste para tiempos positivos, es decir, el conjunto b^+ . Posteriormente en cada figura se indica la identificación de los puntos en b^+ y el correspondiente espacio asociado al tipo de homotopía de $[B/b^+]$. Notemos que el símbolo \sim en las figuras corresponde a \simeq para indicar que los espacios en cada caso tienen el mismo tipo de homotopía.

Ejemplo 4.5. En el caso $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, el origen es un punto singular tipo silla, cuyo índice de Conley es $h(\bar{0}) = \Sigma^1$.

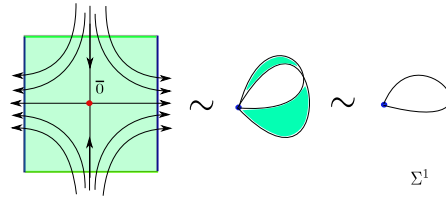


Figura 4.2: $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $b^+ = \{-1\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1]$.

Ejemplo 4.6. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, el origen es un nodo repulsor, cuyo índice de Conley es $h(\bar{0}) = \Sigma^2$.

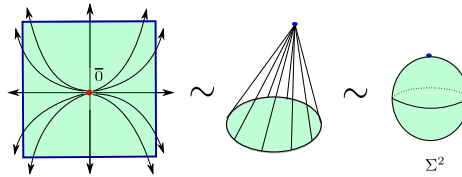


Figura 4.3: $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $b^+ = \partial B$.

Ejemplo 4.7. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, el origen es un punto silla-nodo, cuyo índice es $h(\bar{0}) = \bar{0}$.

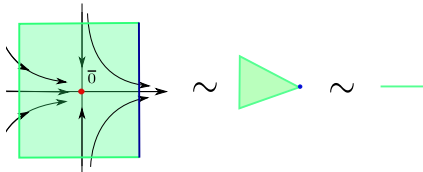


Figura 4.4: $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $b^+ = \{1\} \times [0, 1]$.

Observación 4.8. La dimensión de la esfera determinada por el índice de Conley de los puntos singulares hiperbólicos en los ejemplos (4.5) y (4.6) coincide con el número de valores propios positivos. En general, para una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = Ax$ con $A \in M(\mathbb{R})_{n \times n}$, si $\bar{0}$ es un punto singular hiperbólico, entonces $h(\bar{0}) = \Sigma^k$, la k esfera punteada, donde k es el número de valores propios de A , con parte real positiva. Dicho número k es el llamado índice de Morse del punto $\bar{0}$, el cual está definido bajo la condición de hiperbolicidad, véase [Sm]. Con respecto al índice de Poincaré-Hopf, el cual está definido para puntos singulares no degenerados de campos vectoriales, véase [M], se puede ver que en el caso hiperbólico coincide con $(-1)^{n-k}$. Sin embargo, a diferencia de los índices mencionados, el de Conley está definido para puntos no hiperbólicos (ejemplo 4.7) y para conjuntos invariantes más generales (ejemplos en las secciones 4.3 y 4.4).

4.3. Suma de Índices

Los conjuntos invariantes que presentamos en esta sección están dados por la unión de dos de tales conjuntos. Es necesario observar que dado un flujo $f \in \mathcal{F}$, la unión de conjuntos f -invariantes aislados, cuyos bloques aislantes son disjuntos, es también un conjunto f -invariante aislado pues la unión de bloques aislantes es un bloque aislante para la unión.

Definición 4.9. *Dado un flujo $f \in \mathcal{F}$, decimos que dos conjuntos f -invariantes aislados son ajenos si sus respectivos bloques aislantes son disjuntos.*

Teorema 4.10. *Sea $f \in \mathcal{F}$ un flujo. Si I_1, I_2 son conjuntos f -invariantes aislados ajenos, entonces $I = I_1 \cup I_2$ es un conjunto f -invariante aislado, y además el índice de Conley de I está dado por*

$$h(I_1 \cup I_2) = h(I_1) \vee h(I_2)$$

(Véase definición 2.5)

Demostración. Sean (B_1, b_1^+) y (B_2, b_2^+) las parejas de bloques aislantes y sus respectivos conjuntos de salida para I_1, I_2 respectivamente. Entonces, un bloque aislante para I es $B = B_1 \cup B_2$ y el conjunto $b^+ = b_1^+ \cup b_2^+$. De las definiciones de índice de Conley y la operación \vee , se tiene:

$$\begin{aligned} h(I) &:= [B/b^+] = [(B/\sim, b^+)] = \\ &= [((B_1, b_1^+) \sqcup (B_2, b_2^+), \{b_1^+, b_2^+\})] := \\ &:= [(B_1, [b_1^+]) \vee (B_2, [b_2^+])] := \\ &:= [B_1/b_1^+] \vee [B_2/b_2^+] \end{aligned}$$

□

En los siguientes ejemplos usamos el Teorema 4.10 para calcular el índice de la unión de conjuntos invariantes ajenos.²

En los ejemplos (4.11) y (4.12) consideramos el flujo de una ecuación diferencial en el plano, el cual posee dos puntos singulares $\bar{0}_1, \bar{0}_2$, ambos tipo silla, con una curva heteroclínica (definición 1.8) que los conecta, cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

²Omitimos las ecuaciones pues en estos ejemplos se puede identificar geoméricamente a los conjuntos de salida b^+ .

Ejemplo 4.11. Del ejemplo (4.5), el índice de Conley de cada punto tiene el tipo de homotopía de Σ^1 . Entonces, por el Teorema 4.10, el índice de $I = \bar{0}_1 \cup \bar{0}_2$ es el espacio topológico que corresponde a dos esferas uno-dimensionales identificadas por su punto marcado. Esto es, $h(I) = \Sigma^1 \vee \Sigma^1$.

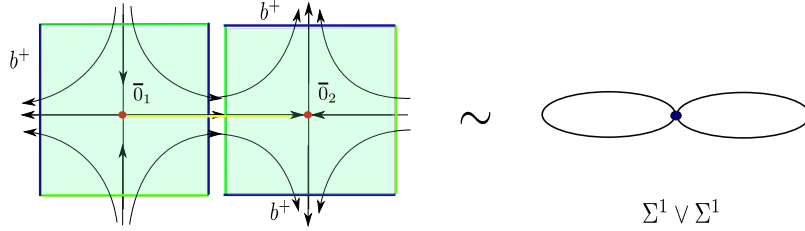


Figura 4.5: La unión de los bloques que aislan a cada punto singular es el bloque aislante de $I = \bar{0}_1 \cup \bar{0}_2$.

Ejemplo 4.12. Por otra parte, el índice de Conley del conjunto invariante S que corresponde a la cerradura de la curva heteroclínica que conecta a los puntos $\bar{0}_1$ y $\bar{0}_2$ del ejemplo 4.11 es $h(S) = \Sigma^1 \vee \Sigma^1 \vee \Sigma^1 \neq h(I)$.

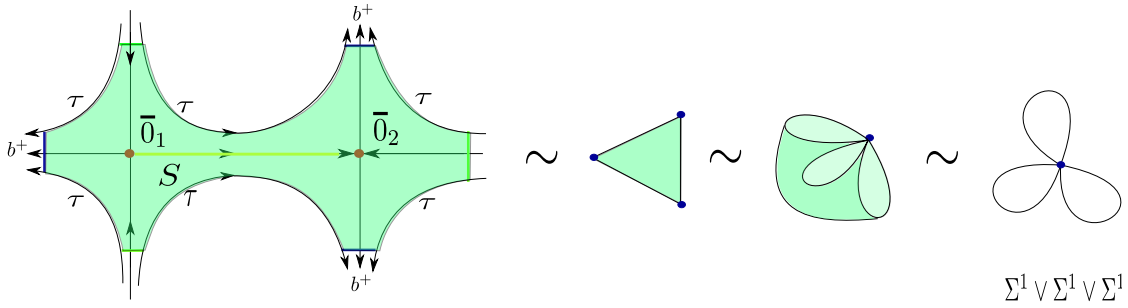


Figura 4.6: Bloque aislante de la curva invariante S y las deformaciones para obtener la clase de homotopía de B/b^+ .

Ejemplo 4.13. El índice de Conley de la unión de dos puntos singulares de tipo nodo, atractor y repulsor respectivamente, tiene el tipo de homotopía de $\Sigma^2 \vee \Sigma^0$.

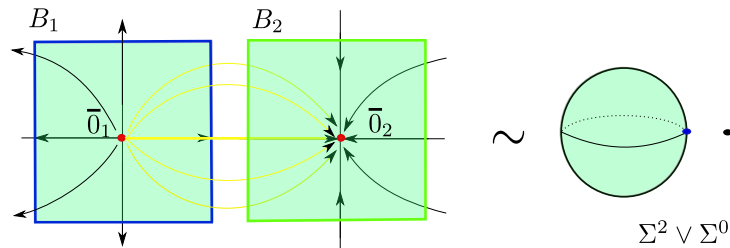
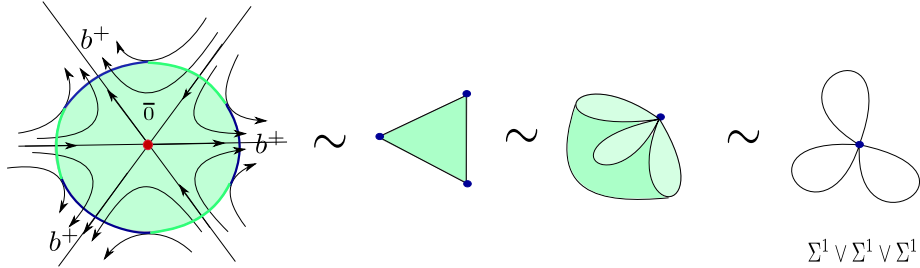


Figura 4.7: Índice de conley de la unión de dos nodos, atractor y repulsor.

En este ejemplo, hay una infinidad de conexiones entre ambos puntos, por lo cual, ninguna de éstas es conjunto invariante aislado.

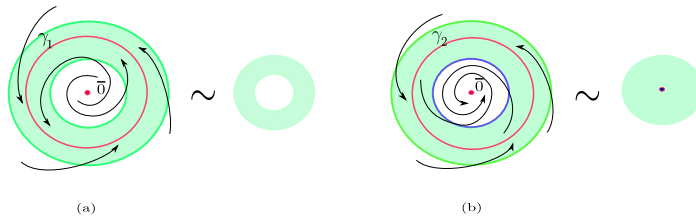
Ejemplo 4.14. El índice de Conley de un punto singular que tiene el comportamiento que se indica en la figura 4.14 coincide con el índice de la curva heteroclínica γ del ejemplo 4.12.³



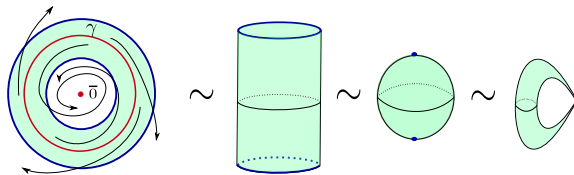
4.4. Índice de Conley asociado a órbitas periódicas

En los siguientes ejemplos, los conjuntos invariantes a considerar son ciclos límite (órbitas periódicas aisladas) y una curva homoclínica, todos en el plano. En todos los casos, los bloques aislantes son anillos alrededor de tales conjuntos. Para los ciclos límite se usan coordenadas polares (ρ, θ) .

Ejemplo 4.15. (a) El sistema $\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2)$, $\dot{\theta} = 1$ tiene un ciclo límite γ_1 estable, cuyo índice es $h(\gamma_1) = S^1 \sqcup x_0$, pues $b^+ = \emptyset$. En (b) el sistema $\dot{\rho} = -\rho(1 - \rho^2)^2$, $\dot{\theta} = 1$ tiene un ciclo límite γ_2 semi-estable y su índice es $h(\gamma_2) = \bar{0}$.



Ejemplo 4.16. γ es el ciclo inestable del sistema $\dot{\rho} = -\rho(1 - \rho^2)$, $\dot{\theta} = 1$ y su índice de Conley es la clase de homotopía del espacio que se indica en la siguiente figura:

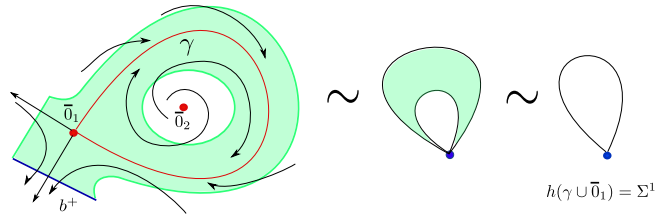


Observación 4.17. El índice de Conley es cambia de acuerdo a la estabilidad de la órbita periódica. Por otra parte, cada ciclo γ y el punto singular $\bar{0}$ son conjuntos invariantes ajenos. Sin embargo una bola que contenga a ambos conjuntos no puede ser una vecindad aislante para la unión de éstos, pues en este caso el conjunto invariante para esa vecindad es la cerradura C del conjunto encerrado por γ . Se puede ver que para el ciclo estable, $h(\gamma \cup \bar{0}) = \bar{0} \vee \Sigma^2$, mientras que $h(C) = \bar{0}$.

³En coordenadas complejas el campo es: $\dot{z} = 1/z^4$

4.4. ÍNDICE DE CONLEY ASOCIADO A ÓRBITAS PERIÓDICAS

Ejemplo 4.18. *El Índice de Conley de la cerradura de una órbita homoclínica γ asociada a un punto singular tipo silla y que rodea a un punto singular tipo foco repulsor es $h(\gamma \cup \bar{0}_1) = \Sigma^1$, como se indica en la figura:*



Capítulo 5

El índice de Conley para la ecuación de Nagumo

Sean $U(x, t), V(x, t)$ dos funciones \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$U_t = \epsilon V, \quad V_t = V_{xx} + f(V) - U \quad (5.1)$$

donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ es un parámetro y $f(V) = -(V - V_0)(V - V_1)(V - V_2)$.

Consideremos la función integral de f definida por $F(v) = \int_{v_0}^v f(s) ds$.

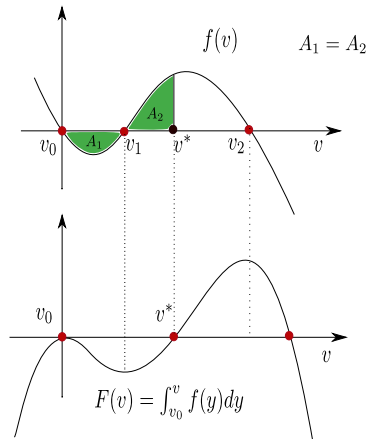


Figura 5.1: Gráfica de f y su función integral F .

Observación 5.1. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_0 = 0$ y que el área determinada por la gráfica de la función f y el eje v en el intervalo $[v_0, v_1]$ es mayor que el área correspondiente al intervalo $[v_1, v_2]$. Esto es, existe un $v^* \in (v_1, v_2)$ para el cual $F(v^*) = 0$.

La ecuación (5.1) se conoce como la ecuación de *Nagumo*¹ y es considerada un caso simplificado de las ecuaciones de Hudking-Huxley, las cuales corresponden a la transmisión de impulsos nerviosos [HH].

Problema: Dada la naturaleza de la ecuación, el problema consiste en encontrar una solución de tipo onda viajera periódica para el sistema (5.1). Una solución de este tipo corresponde a grandes rasgos al disparo periódico de una una neurona (generación de potenciales de acción [I]), véase figura 5.2 (c).

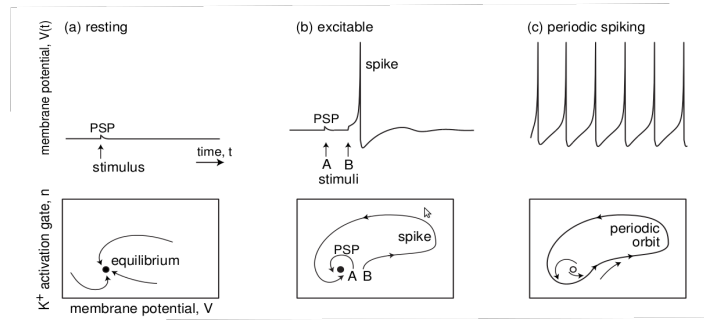


Figura 5.2: (a) La neurona permanece en reposo a pesar de variaciones en el potencial de membrana. Esto corresponde a punto singular estable, (b) Estado excitable-estable, (c) Actividad de disparo periódico (onda viajera periódica). Figura tomada de [I].

Definición 5.2. Decimos que U, V son soluciones de tipo **onda viajera** para el sistema (5.1) si existen u, v funciones \mathcal{C}^2 , llamadas perfiles de U y V , tales que

$$U(x, t) = u(x + \theta t)$$

$$V(x, t) = v(x + \theta t)$$

para algún valor θ en \mathbb{R} , el cual es llamado la velocidad de la onda.

Si además, u y v son funciones periódicas, entonces U y V son periódicas, con periodos ω y ω/θ en x y t , respectivamente. En este caso, U y V son llamadas **soluciones periódicas de tipo onda viajera periódica**.

Observación 5.3. La idea para resolver el problema consiste en transformar el sistema (5.1) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el cual consideramos, primero, el caso $\epsilon = 0$. Esto nos permite estudiar un sistema que depende de una sola variable. Para este sistema, construimos un bloque aislante, el cual persiste como tal, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Se prueba que el bloque posee índice de Conley no trivial, lo cual implica, por el Teorema 3.5, que éste contiene una órbita completa S en su interior. Finalmente, con un argumento de continuación se muestra que S es una órbita periódica, la cual corresponde a la onda viajera periódica del sistema (5.1).

Para transformar el sistema (5.1) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, usamos el siguiente resultado,

¹Travelling waves, [Sm]

Lema 5.4. Sean U, V funciones \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Entonces, U, V son soluciones de tipo onda viajera para el sistema (5.1) si y sólo si sus perfiles iniciales, u, v , satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\epsilon}{\theta}v \\ v' &= w \\ w' &= \theta w - f(v) + u \end{aligned} \tag{5.2}$$

para algún θ en \mathbb{R} .

Además, las soluciones U, V son de tipo onda viajera periódica para (5.1) si y sólo si, el sistema (5.2) posee una solución periódica.

Demostración. Sean U, V soluciones de (5.1) de tipo onda viajera, con las respectivas funciones u, v que determinan los perfiles iniciales. Sea θ la velocidad de la onda. Haciendo el cambio de variables $(x, t) \rightarrow (\xi - \theta t, t)$, tenemos $u(\xi) = U(\xi - \theta t, t)$ y $V(\xi) = V(\xi - \theta t, t)$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}u(\xi) = U_x(\xi - \theta t, t)(-\theta) + U_t(\xi - \theta t) \\ 0 &= \frac{d}{dt}v(\xi) = V_x(\xi - \theta t, t)(-\theta) + V_t(\xi - \theta t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Mientras que,

$$u'(\xi) = \frac{d}{d\xi}(U(\xi - \theta t, t)) = U_x(\xi - \theta t, t).$$

Por otro lado, sustituyendo U_t y V_t de (5.1) en las ecuaciones (5.3) obtenemos que u y v son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \theta u' &= \epsilon v \\ \theta v' &= v'' + f(v) - u, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Finalmente, introduciendo la variable w tal que $w = v'$, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado en (5.2).

Inversamente, una solución (u, v, w) del sistema (5.2), para un valor de θ , determina una solución (U, V) del sistema (5.1). Las funciones U, V están definidas por $U(x, t) = u(x + \theta t)$ y $V(x, t) = v(x + \theta t)$.

Además, los perfiles u, v son funciones periódicas de periodo θ_0 , si y sólo si el sistema (5.2) tiene una solución periódica para el valor del parámetro $\theta = \theta_0$, el cual corresponde a la velocidad de la onda de la ecuación (5.1). \square

Entonces, para resolver el problema basta mostramos que el sistema (5.2) tiene una solución periódica para algún valor θ .

5.1. Análisis de la ecuación de Nagumo

En esta sección, estudiamos el sistema (5.2) al variar los parámetros ϵ, θ . Esto nos lleva a un sistema hamiltoniano en las variables v y w^2 , en el cual u se considera como parámetro. En este caso, estudiamos el comportamiento de la familia uniparamétrica de las curvas de nivel de cada función hamiltoniana $H(v, w; u)$ al variar el parámetro u . Probamos que para cierto valor \tilde{u} el sistema hamiltoniano asociado a $H(v, w; \tilde{u})$, posee dos curvas heteroclínicas. En cambio, para cada valor de u , para el cual la función $f(v) - u$ tiene tres raíces distintas, el hamiltoniano $H(v, w; u)$ tiene una curva homoclínica. Después estudiamos el comportamiento de las soluciones del sistema (5.2) cuando $\theta > 0$, como una perturbación del caso hamiltoniano. Con esto obtenemos una curva invariante γ , a la cual le construimos un bloque aislante B . Para concluir, se muestra que el bloque B admite en su interior una única órbita periódica estable mediante una perturbación de la ecuación de Vander Pol, para la cual se tiene la existencia de un ciclo límite estable. ³

Parámetros $\epsilon = 0, \theta = 0$, caso hamiltoniano

Considerando el parámetro ϵ igual a cero en el sistema (5.2) resulta un sistema en las variables v y w . En éste, tratamos el caso $\theta = 0$. De este modo, obtenemos el sistema

$$v' = w, \quad w' = u - f(v) \quad (5.5)$$

donde u queda como parámetro.

Denotamos por $u^+ = \max_{v \in [v_0, v_2]} \{f(v)\}$ y $u^- = \min_{v \in [v_0, v_2]} \{f(v)\}$

Observación 5.5. Para cada $u \in (u^-, u^+)$, tenemos que:

1. la función $f(v) - u$ tiene tres raíces $v_0(u) < v_1(u) < v_2(u)$.
2. $\text{signo}(f'(v_i) - u) = \text{signo}(f'(v_i))$ para $i = 0, 1, 2$. Esto se sigue de que $f(v) - u$ es una traslación de $f(v)$.

Del el punto 2 de la observación 5.5, para cada $u \in (u^-, u^+)$ el conjunto de puntos singulares del sistema (5.5) es el conjunto

$$\{(v, w) \mid f(v) = u, w = 0\} = \{p_i = (v_i(u), 0)\}_{i=1}^3 \quad (5.6)$$

Para cada valor de u , denotamos por $v_i := v_i(u)$ a las raíces del polinomio $f(v) - u$ y por $p_i := (v_i, 0)$ a los puntos singulares en (5.6).

Definición 5.6. Sea $u \in [u^-, u^+]$. Sea $v_0(u)$ la raíz más pequeña de $f(v) - u$. Definimos:

1. La función integral de $f(v) - u$ como

$$F(v; u) = \int_{v_0(u)}^v (f(s) - u) ds \quad (5.7)$$

²Esto es, $\dot{v} = -H_w$ y $\dot{w} = H_v$, para alguna función $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

³Estabilidad en el sentido de que la órbita persiste bajo pequeñas perturbaciones en el sistema [GH].

2. La función $H(v, w; u)$ como

$$H(v, w; u) = \frac{w^2}{2} + F(v; u) \quad (5.8)$$

Observación 5.7. Sean $u \in (u^-, u^+)$ y $v_i(u), i = 0, 1, 2$ las raíces del polinomio $f(v) - u$. Las funciones de la definición 5.6 satisfacen las siguientes propiedades:

1. $f(v) - u \leq 0$ para $v \in [v_0, v_1]$
2. $f(v) - u \geq 0$ para $v \in [v_1, v_2]$
3. $F(v; u)$ es decreciente en la variable v , para $v \in [v_0, v_1]$. Además, $\min\{F(v; u)\} = F(v_1, u)$, es un valor mínimo local de $F(v, u)$ en $[v_0, v_2]$.
4. $F(v; u)$ es creciente en la variable v , para $v \in [v_1, v_2]$. Además, $\max\{F(v; u)\} = F(v_2, u)$, es un valor máximo local de $F(v, u)$ en $[v_0(u), v_2(u)]$.
5. La derivada de $F(v; u)$ con respecto a u es $-u(v - v_0) < 0$, si $v > v_0$. Esto implica que, la función $F(v; u)$ y por tanto la función $H(v, w; u)$, definidas en 5.6, son funciones monótonas (decrecientes) con respecto a u .

Lema 5.8. Para todo $u \in (u^-, u^+)$, el sistema (5.5) es un sistema hamiltoniano, el cual posee tres puntos singulares $p_i = (v_i, 0)$, $i = 0, 1, 2$, $v_1 < v_2 < v_3$, tales que

1. Los puntos p_0 y p_2 son puntos singulares hiperbólicos, tipo silla.
2. El punto p_1 es localmente, un punto tipo centro.

Demostración. Sean $u \in (u^-, u^+)$ y $v_i, i = 0, 1, 2$ las raíces del polinomio $f(v) - u$. La función hamiltoniana del sistema (5.5) es la función definida en (5.8).

Por otro lado, la parte lineal del sistema (5.5) en cada punto singular $p_i = (v_i, 0)$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(v_i) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

cuyos valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-f'(v_i)} \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) indica que los valores propios de la matriz de linealización del sistema (5.5), correspondientes a $p_i, i = 0, 2$, son valores reales, distintos de cero, pues $f'(v_0), f'(v_2) < 0$ (observación 5.5). Por lo cual, p_0 y p_2 son puntos hiperbólicos. Entonces, por el *Teorema de Grobmann-Hartman* [P], p_0 y p_2 son topológicamente puntos singulares tipo silla. Aún más, por el *Teorema de Chen* [Ch], el sistema 5.5 es C^1 equivalente a su parte lineal en los puntos p_0 y p_2 .

Por otro lado, para determinar el comportamiento del punto p_1 necesitamos un estudio más detallado, ya que éste punto no es hiperbólico ($Re\lambda_{1,2} = 0$).

Para esto, usamos que $\nabla_{v,w}H(v, w; u) = (f(v) - u, w)$, con $\nabla_{v,w}H(p_1; 0) = (0, 0)$ y

$$Hess H(p_1; u) = \begin{bmatrix} f'(v_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.1. ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE NAGUMO

Además, como $f'(v_1) > 0$ y p_1 es un punto no degenerado, por el *Teorema de Morse*, en una vecindad de p_1 existe un cambio de coordenadas (x, y) en las cuales la función hamiltoniana (5.5) se escribe como $H(x, y; u) = x^2 + y^2$. Es decir, p_1 es localmente, un punto singular tipo centro. \square

Lema 5.9. *Para la función $F(v; u)$ de la definición 5.6, existe un único valor $\tilde{u} \in (u^-, u^+)$, tal que, para las raíces $\tilde{v}_0 := v_0(\tilde{u})$ y $\tilde{v}_2 := v_2(\tilde{u})$ de $f(v) - \tilde{u}$, se satisface que,*

$$F(\tilde{v}_2; \tilde{u}) = \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}_2} (f(s) - \tilde{u}) ds = 0.$$

Demostración. De la observación 5.5, tenemos:

1. $F(v_2^-; u^-) = \int_{v_0^-}^{v_2^-} (f(s) - u^-) ds > 0, \quad v_i^- = v_i(u^-), i = 0, 2.$
2. $F(v_2^+; u^+) = \int_{v_0^+}^{v_2^+} (f(s) - u^+) ds < 0, \quad v_i^+ = v_i(u^+), i = 0, 2.$

Entonces, como F es continua con respecto a v y u , por el *Teorema del valor intermedio*, existe un valor $\tilde{u} \in (u^-, u^+)$, tal que $F(\tilde{v}_0; \tilde{u}) = F(\tilde{v}_2; \tilde{u}) = 0$. Esto es, las áreas delimitadas por la función $f(v) - \tilde{u}$ y el eje v en los intervalos $[\tilde{v}_0, \tilde{v}_1]$ y $[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]$, son la misma (ver figura 5.3(a)). La unicidad de \tilde{u} se sigue de que F es una función monótona (punto 5 de la observación 5.7). \square

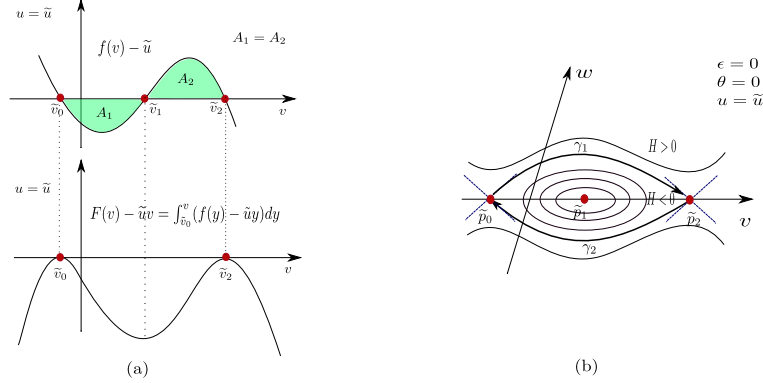


Figura 5.3: (a) Gráficas de $f(v) - \tilde{u}$ y su función integral. (b) Retrato fase del sistema (5.8) para $u = \tilde{u}$.

En adelante usaremos la notación $\tilde{v}_i := v_i(\tilde{u})$ para $i = 0, 1, 2$.

Observación 5.10. Sean $u_a, u_b \in (u^-, u^+)$ y \tilde{u} del lema 5.9. Si $u_a < \tilde{u} < u_b$, se satisfacen las siguientes desigualdades para las raíces del polinomio $f(v) - u$, $u = u_a, u_b, \tilde{u}$.

1. $v_0(u_a) > v_0(\tilde{u}) > v_0(u_b)$
2. $v_1(u_a) < v_1(\tilde{u}) < v_1(u_b)$
3. $v_2(u_a) > v_2(\tilde{u}) > v_2(u_b)$

Lema 5.11. *Para el valor \tilde{u} del lema 5.9, el sistema (5.5) posee dos curvas heteroclínicas (definición 1.8), las cuales conectan a los puntos hiperbólicos $p_0 := p_0(u)$ y $p_2 := p_2(u)$ cuando t tiende a $\pm\infty$, respectivamente.*

Demostración. La función hamiltoniana del sistema 5.5 es la función H de la definición 5.6,

$$H(v, w; u) = \frac{w^2}{2} + \int_{\tilde{v}_0}^v (f(s) - \tilde{u}) ds.$$

Para dicha función resulta que su curva de nivel en $k = 0$ intersecta al eje v en \tilde{v}_0 y \tilde{v}_2 , pues

$$\int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}_2} (f(s) - \tilde{u}) ds = 0.$$

Por simetría, esta curva de nivel corresponde a dos curvas heteroclínicas γ_1, γ_2 del sistema (5.5) para $u = \tilde{u}$, las cuales conectan a los dos puntos singulares $\tilde{p}_i = (\tilde{v}_i, 0)$, $i = 0, 2$, cuando $t \rightarrow \pm\infty$ (véase figura 5.3(b)). \square

Hamiltonianos con curvas homoclínicas

El objetivo en esta sección es probar que para cada valor de $u \in (u^-, u^+) \setminus \tilde{u}$, el sistema hamiltoniano (5.5) posee curvas homoclínicas (definición 1.7) γ_0, γ_2 asociadas a los puntos singulares $p_0(u)$, si $u < \tilde{u}$, y a $p_2(u)$, si $u > \tilde{u}$. Al considerar a tales curvas $\gamma_{0,u}, \gamma_{2,u}$ como familias uniparamétricas (con parámetro u), podemos probar que las intersecciones de dichas curvas homoclínicas con el eje v , son funciones crecientes, si $u < \tilde{u}$, y decrecientes, si $u > \tilde{u}$, con respecto a u .

Lema 5.12. *Sean \tilde{u}, \tilde{v}_0 y \tilde{v}_2 del lema 5.9. Entonces,*

1. *para todo $u \in (u^-, \tilde{u})$, existe $v_u^* \in (v_1(u), \tilde{v}_2)$ tal que*

$$F(v_u^*, u) = \int_{v_0(u)}^{v_u^*} (f(s) - u) ds = 0.$$

2. *para todo $u \in (\tilde{u}, u^+)$, existe $v_u^* \in (\tilde{v}_0, v_1(u))$ tal que*

$$\int_{v_u^*}^{v_2(u)} (f(s) - u) ds = 0.$$

Demostración. 1. Sea $u \in (u^-, \tilde{u})$. Por la observación 5.7 sabemos que

$$F(v_1, u) = \int_{v_0}^{v_1} (f(s) - u) ds < 0, \quad \text{pues } f(v) - u < 0 \quad \text{para } v \in [v_0, v_1] \quad (5.11)$$

Por otro lado, $f(v) - u > f(v) - \tilde{u}$, pues $f(v) - u$ es decreciente en u . Además, $f(v) - u > 0$ para v en el intervalo $[v_1, v_2] \supseteq [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]$. Esto implica que,

$$\int_{v_1}^{\tilde{v}_2} (f(s) - u) ds > \int_{\tilde{v}_1}^{\tilde{v}_2} (f(s) - \tilde{u}) ds = - \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}_1} (f(s) - \tilde{u}) ds. \quad (5.12)$$

Además,

$$F(\tilde{v}_1, \tilde{u}) = \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}_1} (f(s) - \tilde{u}) ds < \int_{v_0}^{v_1} (f(s) - u) ds = F(v_1, u) \quad (5.13)$$

La desigualdad (5.13) se sigue de que $F(v) - \tilde{u} < 0$ para v en el intervalo $[\tilde{v}_0, \tilde{v}_1] \supseteq [v_0, v_1]$.

De las desigualdades (5.12) y (5.13) obtenemos que

$$\int_{v_1(u)}^{\tilde{v}_2(u)} (f(s) - u) ds > - \int_{v_0(u)}^{v_1(u)} (f(s) - u) ds,$$

esto es,

$$F(\tilde{v}_2(u), u) > 0 \quad (5.14)$$

Por lo tanto, de las desigualdades (5.11) y (5.14) y la continuidad de F como función de u , por el Teorema del valor intermedio, existe $v_u^* \in (v_1(u), \tilde{v}_2)$, tal que, $F(v_u^*, u) = 0$.

2. De forma análoga al caso 1, para $u \in (\tilde{u}, \tilde{u}^+)$ se concluye que, existe $v^* \in (\tilde{v}_0, v_1(u))$, tal que, $F(v^*, u) = 0$. \square

Denotamos por v^* a la coordenada v_u^* del lema 5.12 y $p^* := (v^*, 0)$.

Lema 5.13. Sean $u \in (u^-, u^+) \setminus \{\tilde{u}\}$ y v^* del lema 5.12. Entonces,

1. Si $u \in (u^-, \tilde{u})$, el sistema (5.5) posee una órbita homoclínica $\gamma_0 := \gamma_{0,u}$, asociada al punto hiperbólico $p_0(u)$. Además, la curva γ_0 interseca al eje v en v^* , con $v_1(u) < v^* < v_2(u)$.
2. Si $u \in (\tilde{u}, u^+)$, el sistema (5.5) posee una órbita homoclínica $\gamma_2 := \gamma_{2,u}$, asociada al punto hiperbólico $p_2(u)$. Además, la curva $\gamma_2(u)$ interseca al eje v en v^* , con $v_0(u) < v^* < v_1(u)$.

Demostración. Las curvas de nivel de la función hamiltoniana de la definición 5.6 están dadas por

$$H(v, w; u) = \frac{w^2}{2} + F(v; u) = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

1. Sea $u \in (u^-, \tilde{u})$. Por el lema 5.12, $v^* \in (v_1, v_2)$ y $F(v_u^*; u) = 0$. Esto implica que la curva γ_0 correspondiente a $k = 0$, interseca al eje v en $p^* = (v^*, 0)$, con $v_1 < v^* < v_2$. Por simetría, el retrato fase de (5.5) posee una órbita homoclínica asociada al punto $p_0 = (v_0, 0)$.

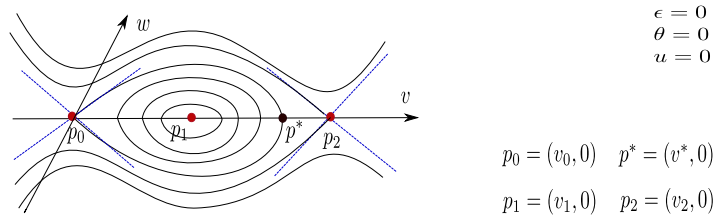


Figura 5.4: Para $u \in (u^-, \tilde{u})$ el retrato fase de (5.5) tiene tres puntos singulares p_0, p_1, p_2 con una órbita homoclínica γ_0 en p_0 , la cual interseca al eje v en p^* .

2. Sea $u \in (\tilde{u}, u^+)$. En este caso el lema 5.12, indica que $v^* \in (v_0, v_1)$ y $\int_{v^*}^{v_2(u)} (f(s) - u) ds = 0$.

Además,

$$F(v; u) = \int_{v_0(u)}^v (f(s) - u) ds = \int_{v_0(u)}^{v_2(u)} (f(s) - u) ds - \int_v^{v_2(u)} (f(s) - u) ds$$

Por lo tanto, para $k_1 = - \int_{v_0(u)}^{v_2(u)} (f(s) - u) ds$ y $v = v^*$, tenemos que:

$$H(v^*, w; u) = \frac{w^2}{2} + F(v^*, u) = 0.$$

Así, la curva γ_2 correspondiente a k_1 , intersecta al eje v en $p^* = (v^*, 0)$, con $v_1 < v^* < v_2$. Por simetría con respecto al eje v , el retrato fase de (5.5) posee una órbita homoclínica asociada al punto $p_2 = (v_2, 0)$. \square

El lema 5.13 nos permite considerar a las curvas homoclínicas asociadas a los puntos $p_0 = (v_0, 0)$ y $p_2 = (v_2, 0)$ del sistema hamiltoniano (5.5) como las familias uniparamétricas $\{\gamma_0\}_{u \in (u^-, \tilde{u})}$ y $\{\gamma_2\}_{u \in (\tilde{u}, u^+)}$, cuyo parámetro es u .

Lema 5.14. *Sea $v_u^* \in \gamma_i$, la coordenada en v de la intersección de la curva $\gamma_i, i = 0, 2$, con el eje v . Entonces,*

1. *para $u \in (u^-, \tilde{u})$, v_u^* es una función creciente en u .*
2. *para $u \in (\tilde{u}, u^+)$, v_u^* es una función decreciente en u .*

Demostración. 1. Sean $u_1, u_2 \in (u^-, \tilde{u})$, con $u_1 < u_2$. Denotamos por $v_i^* = v_{u_i}^*$, los puntos de intersección de las curvas homoclínica γ_{0, u_i} con el eje v , para $u_i, i = 1, 2$.

Por el lema 5.12, $F(v_1^*; u_1) = 0$ y $F(v_2^*; u_2) = 0$. Por otra parte, $F(v_1^*; u_1) > F(v_1^*; u_2)$, pues F es función decreciente con respecto a u (punto 5 de la observación 5.7). Además, para u fijo, $F(v; u)$ es una función creciente en $[v_1(u_2), v_2(u_2)] \subset [v_1(u_1), v_2(u_1)]$ (observación 5.5). Esto implica que $v_2^* > v_1^*$.

2. Usando una desigualdad similar a la del caso 1 se concluye el lema 5.14 para $u \in (\tilde{u}, u^+)$. \square

Parámetros $\epsilon = 0, \theta > 0$

Ahora consideremos el sistema (5.2) con $\epsilon = 0$ pero $\theta > 0$. En este caso, tenemos el sistema

$$v' = w, \quad w' = \theta w + u - f(v) \tag{5.16}$$

Sea X_θ el flujo solución del sistema (5.16). Para $u \in (u^-, u^+)$ el conjunto de puntos singulares de (5.16) es el mismo que el del sistema (5.5).

Sin embargo, la parte lineal en cada punto singular $p_i = (v_i, 0), i = 0, 1, 2$ es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(v_i) & \theta \end{bmatrix}$ y sus valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4f'(v_i)}}{2} \tag{5.17}$$

De la expresión (5.17) vemos que los puntos singulares p_0 y p_2 de (5.16) son hiperbólicos, pues sus valores propios son números reales, distintos de cero. Esto implica, por el *Teorema de Chen* [Ch] que dichos puntos son C^1 equivalentes a los puntos singulares del sistema (5.5). Además, por el *Teorema de la variedad estable* [GH], la variedad estable (inestable) de cada punto hiperbólico,

es tangente a la variedad estable (inestable) del sistema lineal correspondiente.

Por otro lado,

$$\left. \frac{dH(X_\theta(t); u)}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial H(X_\theta(0); u)}{\partial(v, w)} \right) \left(\left. \frac{dX_\theta}{dt} \right|_{t=0} \right) = DH(v, w; u) \cdot (\dot{v}, \dot{w}) = \theta w^2 \quad (5.18)$$

De la ecuación (5.18), se tiene que la función $H(\cdot, \cdot; u)$ en (5.8) de la definición 5.6, es creciente en la dirección del flujo solución X_θ del sistema (5.16), si $\theta > 0$.

Entonces, si $\theta \neq 0$, el sistema (5.16) tiene como función de Lyapunov a la función definida en (5.8). De modo que, si $\theta > 0$, el punto p_1 , que era un centro para el sistema (5.8), se convierte en un foco repulsor para (5.16). Véase figura 5.5.

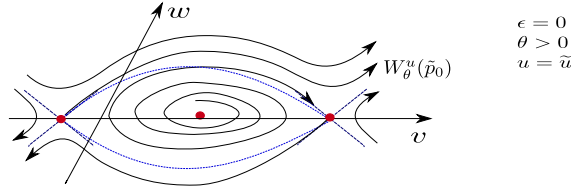


Figura 5.5: Retrato fase del sistema (5.8) para $u = \tilde{u}$. $W_\theta^u(\tilde{p}_0)$ es la variedad inestable del punto \tilde{p}_0 .

Sea $u \in (u^-, \tilde{u})$ y sean $W_\theta^s(p_i)$, $W_\theta^u(p_i)$ las variedades estable e inestable del sistema (5.16) en cada punto hiperbólico p_i , $i = 0, 2$, respectivamente. Para mostrar que existen curvas heteroclínicas en el sistema (5.16) debemos probar el siguiente resultado.

Lema 5.15. *Para cada $\theta \in (0, \delta)$, con $\delta > 0$, suficientemente pequeño, existen $\underline{u}(\theta), \bar{u}(\theta)$, con $\underline{u}(\theta) < \tilde{u} < \bar{u}(\theta)$, tales que,*

- (i) $W_\theta^u(p_0(\underline{u}(\theta))) \cap W_\theta^s(p_2(\underline{u}(\theta))) \neq \emptyset$.
- (ii) $W_\theta^u(p_2(\bar{u}(\theta))) \cap W_\theta^s(p_0(\bar{u}(\theta))) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\theta > 0$. Caso (i) Sabemos que para $u = 0$, el sistema (5.5) tiene una curva homoclínica γ_0 que corta al eje v en $v^* < v_2$. Por continuidad del flujo, para $\eta = \text{dist}(v^*, v_2)$, existe $\delta > 0$ tal que si $\theta \in (0, \delta)$, entonces, $W_\theta^u(p_0(u))$ interseca al eje v , en $v_\theta(u) < v_2(u)$. Dichas intersecciones $v_\theta(u)$ son crecientes con respecto a u . Esto se sigue del lema 5.14 y de la ecuación (5.18).

Por otro lado, para \tilde{u} , y $\theta > 0$, la variedad inestable $W_\theta^u(\tilde{p}_0)$ en el punto \tilde{p}_0 ya no interseca al eje v . Esto se sigue de la ecuación (5.18). Véase figura 5.5.

Por lo tanto, por continuidad del flujo con respecto a los parámetros θ y u , dado $\theta \in (0, \delta)$, existe $\underline{u}(\theta) < \tilde{u}$, tal que, $W_\theta^u(p_0(\underline{u}(\theta))) \cap W_\theta^s(p_2(\underline{u}(\theta))) \neq \emptyset$. Esto es, para $\underline{u}(\theta)$, el sistema (5.16) posee una curva heteroclínica que conecta el punto $p_0(\underline{u}(\theta))$ con $p_2(\underline{u}(\theta))$. El caso (ii) se argumenta de forma análoga. Véase figura 5.1. \square

Denotamos por $\underline{u} := \underline{u}(\theta)$ y $\bar{u} := \bar{u}(\theta)$.

Por el lema 5.15 consideramos la curva invariante $\gamma := \gamma(\theta)$ (diferenciable por pedazos), formada por las conexiones heteroclínicas γ_0, γ_2 (segmentos horizontales) y los arcos en la curva cúbica (segmentos verticales) correspondientes a los puntos singulares hiperbólicos $p_0(u)$ y $p_2(u)$ para $u \in (\underline{u}, \bar{u})$. Véase figura 5.1.

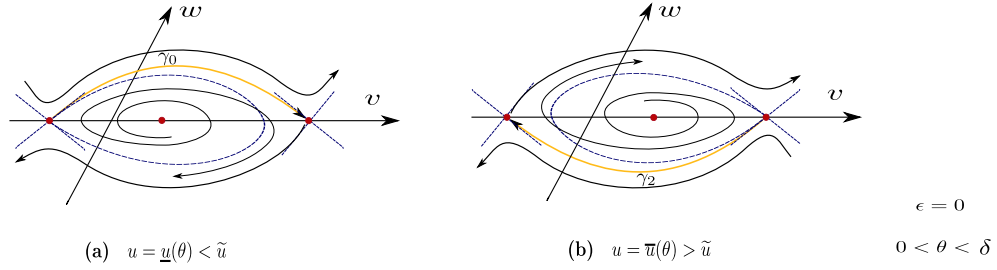


Figura 5.6: Curvas heteroclínicas γ_0, γ_2 para los valores \underline{u} y \bar{u} del lema 5.11.

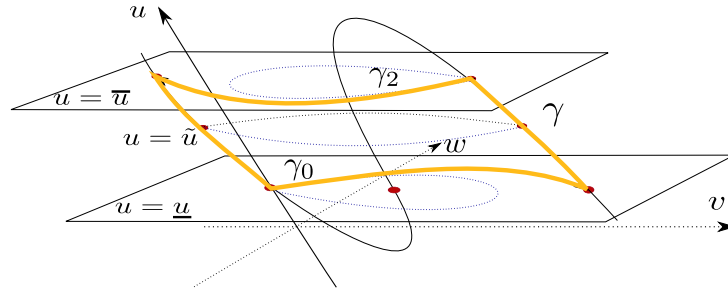


Figura 5.7: Curva γ formada por γ_1, γ_2 y los segmentos en la curva cúbica.

Sistema (5.2) con parámetro $\epsilon > 0$

Retomemos el sistema de ecuaciones (5.2)

$$\begin{aligned} u' &= \sigma v \\ v' &= w \\ w' &= \theta w + u - f(v) \end{aligned}$$

Proposición 5.16. *El sistema (5.2) tiene un bloque aislante B para la curva γ , cuyo su índice de Conley es no trivial.*

Proposición 5.17. *El bloque B de la proposición 5.16 admite en su interior una órbita periódica estable.*

5.2. Construcción de bloques para la ecuacion de Nagumo

Demostración de la proposición 5.16. Para la demostración de la proposición 5.16 construimos el bloque aislante para el flujo del sistema (5.2) en dos etapas.

En la primera etapa, consideramos $\epsilon = 0$ y construimos los bloques verticales B_0, B_2 que aislen a los segmentos verticales de la curva γ .

1. Para empezar, por la hiperbolicidad de los puntos $p_0(u), p_2(u)$. Tomando planos transversales a las variedades estable $W_\theta^s(p_i(u))$ e inestable $W_\theta^u(p_i(u))$, $i = 0, 2$, de esos puntos, construimos las caras laterales de los bloques verticales B_i , $i = 0, 2$ que aislan a los segmentos de la curva cúbica donde se encuentran los puntos $p_0(u), p_2(u)$. Etiquetamos las caras de B_0 por $1', 2', 3'$ y $4'$, y las caras de B_2 por $1, 2, 3, 4$, como lo indica la figura 5.2).

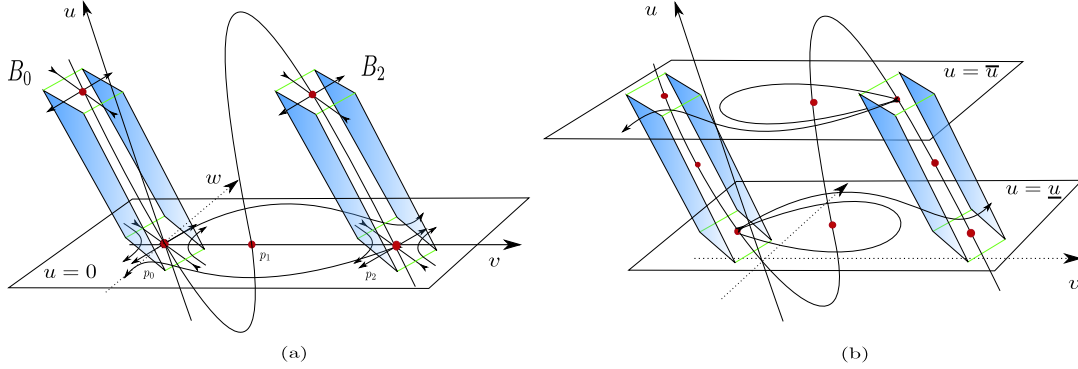


Figura 5.8: Hipérbolicidad de los puntos p_0 y p_2 en cada nivel de u . Bloques verticales B_0 y B_2 .

2. Para los tubos horizontales, recordemos que la curva heteroclínica γ_2 del flujo (5.16) se da para el valor $u = \bar{u}$. Para valores u , con $u < \bar{u}$, la variedad inestable $W_\theta^u(p_2(u))$ del sistema (5.16) en el punto $p_2(u)$ sale de B_2 por la cara 1 y entra al bloque B_0 por la cara $2'$, después sale de B_0 por la cara $1'$. Mientras que, si $u > \bar{u}$, la respectiva variedad inestable $W_\theta^u(p_2(u))$ también llega a B_0 por la cara $2'$ pero sale por la cara $3'^4$. Véase figura 5.2.

3. Tomamos u_1, u_2 tales que $u_1 < \bar{u} < u_2$. Nos fijamos en el cuadrado C_2 formado por la intersección de los planos $u = \bar{u}_i$, $i = 1, 2$ con la cara lateral de B_2 por la cual sale la curva γ_2 cuando $\epsilon = 0$ (cara 1). Denotamos por a, b, c, d a los vértices de C_2 . Sabemos que para $\epsilon = 0$, en cada nivel de u fijo, el flujo de sistema (5.16) a través de los puntos en los lados \bar{bc} y \bar{ad} llega a B_0 por la cara $2'$ pero sale por la cara $3'$, para el flujo a través de \bar{bc} , y por la cara $1'$ para los puntos en \bar{ad} . Este comportamiento se ilustra en la figura 5.2.

En la segunda etapa, consideramos $\epsilon > 0$ en el sistema 5.2 y construimos los bloques horizontales mediante el flujo de este sistema. Esto nos permite conectar los bloques verticales. En lo que sigue, nos referiremos al flujo del sistema (5.2), a menos que se especifique de otro modo.

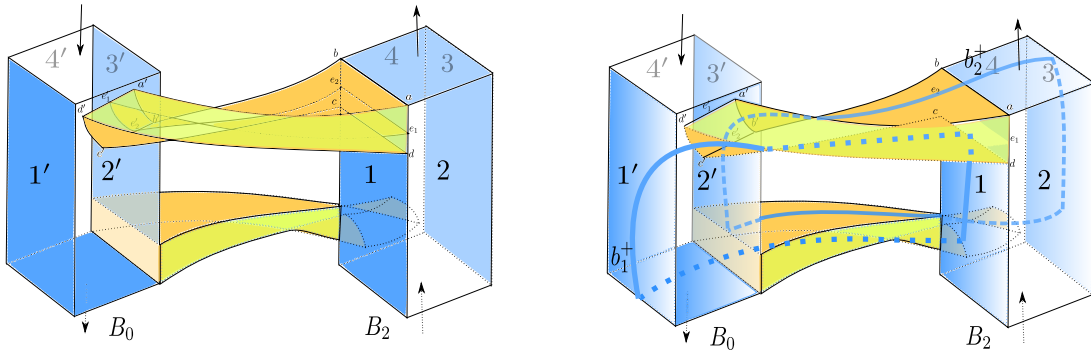


Figura 5.9: Construcción de los bloques horizontales para γ_0 y γ_2 . Las dos curvas cerradas en azul indican cómo se conectan las caras de salida de los bloques B_0 y B_2 para formar los anillos b_1^+ y b_2^+ de salida.

4. El sistema (5.2) tiene como único punto singular al origen. En este caso, el flujo entra por

⁴En ambos casos consideramos u suficientemente cercano a \bar{u}

la tapa inferior del bloque B_2 y sale por la tapa superior, ya que $v > 0$ en B_2 . Mientras que, el flujo en el bloque B_0 se mueve de arriba hacia abajo, pues $v < 0$ en B_0 .

5. Por otro lado, el efecto de considerar $\epsilon > 0$ hace que el segmento $\bar{l} = C_2 \cap \{u = \bar{u}\}$ sea llevado bajo el flujo a la cara $2'$ en B_0 de manera transversal al plano $u = \bar{u}$. Llamamos \bar{l}' al segmento que resulta de la intersección de la imagen, bajo el flujo, de \bar{l} y B_0 .

6. En lo que respecta a la imagen del cuadrado C_2 , bajo el flujo, el efecto de tomar $\epsilon > 0$ hace que sus lados se doblen al llegar a la cara $2'$ de B_0 , es decir sus respectivas imagenes son transversales a las que se tenían para el flujo del sistema 5.4 (cuando $\epsilon = 0$). De esta forma, construimos al bloque horizontal que contiene a la curva γ_2 .

7. De forma similar, se construye el bloque horizontal que contiene a la curva γ_0 .

8. Usando la construcción anterior, podemos modificar los bloques B_0 y B_2 para que sus respectivas caras de salida $1'$ y 1 , $3'$ y $3'$ se conecten mediante el flujo de (5.2). De este modo podemos deformar el bloque obtenido, para ver que el bloque completo B para el flujo (5.2) es un *toro*, en el cual, el conjunto de salida b^+ , son dos anillos disjuntos b_i^+ , $i = 1, 2$, que resultan de la identificación de las caras de salida. Véase figura 5.2.

Al realizar las respectivas identificaciones y obtener la clase de homotopía del cociente B/b^+ como se ilustra en la figura 5.2, encontramos que el índice de Conley correspondiente al conjunto invariante $S := S(B)$ aislado en B es no trivial, de hecho se tiene que

$$h[S] = \Sigma^2 \vee \Sigma^1 \neq 0$$

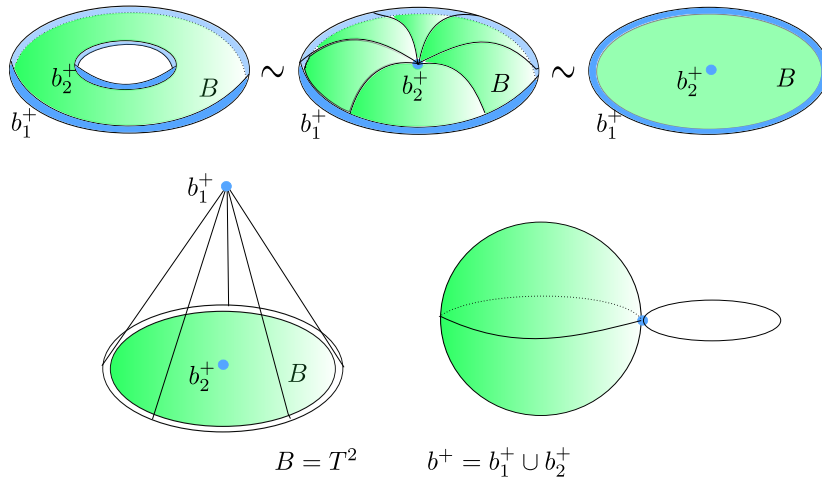


Figura 5.10: Procedimiento geométrico para obtener el Índice de Conley de S .

De lo cual se concluye que dicho conjunto invariante S es no vacío, es decir el bloque B atrapa una órbita completa S , no singular. \square

5.2.1. Ecuación de VanDer Pol

Demostración de la proposición 5.17. Debemos probar que la solución S atrapada en el bloque B es en efecto una órbita periódica.

Para esto, consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \sigma(v - v_1) \\ \dot{v} &= w \\ \dot{w} &= k(\theta w + u - f(v))\end{aligned}\tag{5.19}$$

donde $f(v) = -v(v - v_1)(v - v_2)$ como en la ecuación (5.1).

Al fijarnos en la restricción del sistema (5.19) al plano u, v , obtenemos una perturbación de la ecuación de VanDer Pol.

En efecto, haciendo $\dot{w} = 0$, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \sigma(v - v_1) \\ \dot{v} &= \frac{1}{\theta}(f(v) - u)\end{aligned}\tag{5.20}$$

La ecuación de segundo orden asociada al sistema (5.20) es

$$\ddot{v} - \frac{1}{\theta}f'(v)\dot{v} + \frac{\sigma}{\theta}(v - v_1)\tag{5.21}$$

Puesto que $f'(v) = -(3v^2 - (v_1 + v_2)v + v_1v_2)$, tiene raíces reales positivas, podemos escribir $f'(v) = -(v - \lambda_1)(v - \lambda_2)$, con $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Hacemos el cambio de coordenadas

$$v \rightarrow x + k, \quad k = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Así, la ecuación (5.21) en coordenadas x queda como

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - c^2)\dot{x} + \frac{\sigma}{\theta}(x - v_1 + k)\tag{5.22}$$

donde $c = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$, $\mu = 1/\theta$,

Haciendo $x \rightarrow cx$, se obtiene una perturbación de la ecuación de Vander Pol, la cual tiene un único ciclo limite estable ⁵. Por lo tanto, para valores pequeños de los parámetros, la ecuación (5.22) también posee una única órbita periódica estable. Además, recordemos que dicho sistema se obtuvo al proyectar el sistema (5.19) en el plano $w = 0$. Entonces, el bloque B que construimos para el sistema (5.2) se puede deformar a uno que sea bloque aislante para la órbita periódica estable de (5.21).

Observación 5.18. Recordemos que la órbita periódica de la ecuación de Vander Pol rodea al punto singular que es el origen. En nuestro caso, la ecuación (5.22) tiene como punto singular al punto $(v_1 - k, 0)$ en coordenadas (x, y) . Dicho punto singular en coordenadas (v, u) es $(v_1, 0)$. □

Finalmente, como el sistema (5.2) es una perturbación del sistema (5.21), y por la estabilidad de la órbita periódica tenemos que el bloque aislante B admite una órbita periódica estable, para valores $\epsilon > 0, \theta > 0$, suficientemente pequeños. Dicha solución corresponde a la solución de tipo onda viajera periódica del sistema (5.1).

⁵ $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1) + dx = 0$, $d = 1$ corresponde a la ecuación de Vander pol [So]. El caso general se demuestra usando el *Teorema de Lienard* [GH]

Bibliografía

- [CE] C. Conley, R. Easton *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc., **158** (1971), 35-61.
- [Co] C. Conley, *On travelling wave solutions of nonlinear diffusion equations*, Dynamical Systems. Theory and Applications Trans. Springer Lecture Notes in Physics., **38** (1975), 498-510.
- [Ch] K.T. Chen, *Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point*, Amer. Journal Math., **85**, (1963) 693-722.
- [GH] J. Guckenheimer, P. Holmes *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, **118**, (1995).
- [H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, **550**, (2002).
- [HH] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley, *J. Physiol. London* **117** 500 (1982).
- [Hi] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Verlag, 1976.
- [I] E. M. Izikievich, *Dynamical Systems in Neurosciences: The Geometry of excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 2007.
- [M] W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia Charlottesville, 1972.
- [Si] I. M. Singer, M.I.T. and J. A. Thorpe, Haverford College *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman and Company.
- [Sm] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, (1994).
- [So] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview press, 2000.
- [P] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition* Springer Press, 2001.
- [Pg] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1962.
- [Pr] C. Prieto, *Topología básica* Fondo de Cultura Económica, 2003.