



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

**PRUEBAS PARA NORMALIDAD MULTIVARIADA
UTILIZANDO CÓMPUTO INTENSIVO**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS**

PRESENTA

MARGARITO SORIANO MONTERO

DIRECTORA DE LA TESIS:

M.C. LETICIA EUGENIA GRACIA-MEDRANO VALDELAMAR

MÉXICO, D.F.

MARZO DE 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

página en blanco

A mi esposa Rebe,
a mi hija Becky
y a mi hijo Ricky



página en blanco

Agradecimientos

A Leticia Gracia-Medrano y Federico O'Reilly por dirigir este trabajo y por la paciencia que me tuvieron

A Silvia Ruíz-Velasco, Ruth Fuentes y Raúl Rueda por sus valiosas correcciones y sugerencias

Índice general

Resumen	VII
1. Introducción	1
2. Pruebas para normalidad multivariada	5
2.1. Pruebas de Royston	6
2.2. Prueba de Doornik-Hansen	7
2.3. Prueba de Henze-Zirkler	8
2.4. Prueba de Gracia-Medrano	9
3. Resultados	15
3.1. Distribución Normal Multivariada	17
3.2. Potencia	18
3.3. Mezclas de normales multivariadas	19
3.4. Distribuciones con contorno elíptico	27
3.5. Distribuciones asimétricas	32
3.6. Distribuciones con algunas propiedades iguales que las de la distribución Normal	34
3.7. Análisis conjunto	37
3.7.1. Análisis conjunto con $\alpha = 0.05$	38

3.7.2.	Análisis conjunto con $\alpha = 0.10$	39
3.7.3.	Análisis conjunto con $\alpha = 0.01$	41
4.	Conclusiones	45
A.	Ejemplo	49
	Bibliografía	51

Índice de cuadros

3.1. Distribuciones multivariadas simuladas	16
3.2. Tamaño del error Tipo I empírico contra la distribución Normal Multivariada, $\alpha = 0.05$	18
3.3. Los tipos de mezclas	19
3.4. Características de las distribuciones Normales en la mezcla de distribuciones	20
3.5. Potencia empírica contra la distribución 1 (Cuadro 3.4), $\alpha = 0.05$	21
3.6. Potencia empírica contra la distribución 2 (Cuadro 3.4), $\alpha = 0.05$	21
3.7. Potencia empírica contra la distribución 3 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	22
3.8. Potencia empírica contra la distribución 4 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	23
3.9. Potencia empírica contra la distribución 5 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	23
3.10. Potencia empírica contra la distribución 6 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	23
3.11. Potencia empírica contra la distribución 7 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	24
3.12. Potencia empírica contra la distribución 8 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	25
3.13. Potencia empírica contra la distribución 9 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	25
3.14. Potencia empírica contra la distribución 10 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	26
3.15. Potencia empírica contra la distribución 11 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	26
3.16. Potencia empírica contra la distribución 12 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	27
3.17. Potencia empírica contra la distribución 13 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	27

3.18. Potencia empírica contra la distribución 14 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	28
3.19. Potencia empírica contra la distribución 15 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$	28
3.20. Potencia empírica contra la distribución uniforme $\alpha = 0.05$	29
3.21. Potencia empírica contra la distribución Pearson tipo II $\alpha = 0.05$	30
3.22. Potencia empírica contra la distribución Cauchy multivariada $\alpha = 0.05$. .	31
3.23. Potencia empírica contra la distribución t de Student multivariada, 10 g.l. $\alpha = 0.05$	32
3.24. Potencia empírica contra la distribución Ji cuadrada, 1 gl $\alpha = 0.05$	33
3.25. Potencia empírica contra la distribución Lognormal, $\alpha = 0.05$	33
3.26. Potencia empírica contra la distribución Khintchine $\alpha = 0.05$	35
3.27. Potencia empírica contra la distribución Lambda de Tukey $\alpha = 0.05$	35
3.28. Potencia empírica contra la distribución potencia exponencial generalizada $\alpha = 0.05$	36
3.29. Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.05$	39
3.30. Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.05$	40
3.31. Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.10$	41
3.32. Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.10$	42
3.33. Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.01$	43
3.34. Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.01$	44

A.1. Pruebas de normalidad multivariada a <i>Iris setosa</i> , $\alpha = 0.05$	49
A.2. Pruebas de normalidad multivariada a <i>Iris setosa</i> , con 5,000 simulaciones . .	50

Resumen

Muchos métodos estadísticos se basan en el supuesto de normalidad multivariada. Sin embargo, en muchas ocasiones no se verifica el cumplimiento de este supuesto. Aunque existen muchas pruebas de normalidad multivariada, en la mayoría de los estudios sobre el tamaño y potencia de las pruebas, se utilizan resultados asintóticos. En este trabajo se presenta un procedimiento de simulación para obtener el p -value exacto de las pruebas de normalidad multivariada. Se estudian siete pruebas, las tres mejores pruebas de acuerdo con el estudio de Farrell *et al.* (2007), tres pruebas propuestas por Gracia-Medrano (1989) y la prueba de Royston (1983b). Para evaluar la potencia de las pruebas se consideran 24 distribuciones: 15 mezclas de normales, cuatro distribuciones con contorno elíptico, tres distribuciones con algunas propiedades de la distribución normal y dos distribuciones asimétricas y para evaluar el tamaño, desde luego, se utilizó la distribución normal multivariada. Se simularon 10,000 muestras de la distribución normal multivariada, para cada una de ellas se calcularon las siete pruebas, para simular su distribución. Se consideraron muestras de tamaño 25 y 100, de dimensiones 2, 3 y 10. Con las 24 distribuciones alternativas, los dos tamaños de muestra y las tres dimensiones se estudiaron 144 situaciones. Para evaluar la potencia de las pruebas se simularon 10,000 observaciones de cada distribución alternativa y se calculó el p -value considerando la distribución simulada de las estadísticas de prueba.

Ninguna de las pruebas resultó mejor para todas las distribuciones alternativas. De los 144 escenarios estudiados, la prueba que resultó con mayor potencia en un mayor número de escenarios fue la prueba de Royston (1992), en segundo y tercer lugares se ubicaron las pruebas de Henze & Zirkler (1990) y Doornik & Hansen (1994). La prueba A_{nk}^2 de Gracia-Medrano (1989) se ubicó en cuarto lugar. Esta prueba resultó ser la mejor cuando la

distribución alternativa es la distribución lambda de Tukey.

En este estudio se indica cuales son las mejores pruebas para cada tipo de alternativas a la normalidad multivariada. Se sugiere emplear dos o más procedimientos a un conjunto de datos para tener mayor información sobre la elección de una acción apropiada sobre el rechazo o no de la normalidad multivariada.

Capítulo 1

Introducción

En el mundo real, muchos esquemas de recolección de datos o diseño de experimentos generan datos multivariados. En estudios tales como ensayos clínicos, análisis financieros, experimentos en sociología y psicología se obtienen como respuesta datos multivariados. Algunos procedimientos utilizados para analizar estos datos requieren el supuesto de normalidad multivariada; por ejemplo, el análisis de varianza multivariado, análisis discriminante, análisis de correlación canónica y análisis de regresión multivariada, por mencionar algunos. A pesar de que algunos de estos procedimientos son muy sensibles al supuesto de normalidad multivariada, frecuentemente no se realiza prueba alguna sobre este supuesto. Looney (1995) menciona algunas posibles razones por las cuales no se realiza la prueba de normalidad multivariada: (1) el investigador desconoce la existencia de pruebas de normalidad multivariada, (2) una prueba particular, podría no estar rápidamente disponible en algún programa de computadora para calcular la prueba y/o el *p-value*, (3) la poca información sobre el tamaño y potencia de las pruebas y (4) el investigador podría estar inseguro de qué hacer si alguna prueba detecta que no se cumple el supuesto de normalidad multivariada.

En este trabajo se discute este problema; probar la bondad de ajuste de un modelo Normal Multivariado (NMV) con parámetros desconocidos a datos observados multivariados. Las pruebas de bondad de ajuste calculan la discrepancia entre los datos observados y los datos que se obtendrían si un modelo probabilístico, el modelo NVM en este estudio, es el que realmente está presente. Si la diferencia entre lo observado y el modelo es grande

habrá evidencia de que no se tiene un buen ajuste (del modelo a los datos observados). Los procedimientos estadísticos de bondad de ajuste determinan si esa diferencia es lo suficientemente grande como para concluir que los datos observados no se comportan como lo establece el modelo probabilístico hipotetizado, y entonces buscar otro modelo.

Aquí se presenta un procedimiento que permite obtener, por medio de simulación, el *p-value* de cualquier estadística utilizada en tanto ésta sea invariante ante el grupo natural en el modelo. Una estadística t es invariante ante el grupo G si su valor no depende de si se observa x o $g(x)$, para cualquier $g \in G$; es decir, $t(x) = t(g(x))$. Si t es invariante, la distribución de $t(X)$ es la misma que la de $t(g(X))$, para todo g . Si los elementos de G están identificados con parámetros, esto significa que la distribución de T no depende de los parámetros y es, en principio, conocida. Se presentan estudios de potencia en los que se comparan los méritos de las distintas estadísticas invariantes que han aparecido en literatura; entre éstas se presentan las tres versiones de la estadística de Anderson-Darling propuestas en Gracia-Medrano (1989).

En el caso continuo univariado de bondad de ajuste, la transformación de las observaciones con su propia función de distribución (PIT), permite trabajar con observaciones en el intervalo $(0, 1)$ en el caso que los parámetros fuesen conocidos, las transformadas, bajo H_0 se comportan como una muestra independiente de uniformes. Mucho se hizo en el pasado por identificar el límite del proceso empírico asociado, en el cual se basan las estadísticas de bondad de ajuste tradicionales, las referidas en literatura como estadísticas EDF y que por el uso de la distribución asintótica del proceso empírico lleva a las distribuciones asintóticas de funcionales de dicho proceso. Para las estadísticas del tipo Cramér-von Mises y muchas otras, existen tablas de los correspondientes porcentiles asintóticos, usualmente para valores de α de 0.20, 0.10, 0.05, 0.01 y algunos otros. Existen también tablas obtenidas por simulación para diferentes valores del tamaño de muestra n que se pueden utilizar sin incurrir en la aproximación que induce el uso de la distribución asintótica o bien se pueden utilizar “correcciones” (que utilizan el valor de n) que permiten tener una mejor aproximación al usar la distribución asintótica.

Las velocidades de los procesadores en las computadoras personales permiten ahora ob-

tener el *p-value* exacto simulando en ese momento, digamos 10,000 o 100,000 muestras de tamaño n de la distribución (conocida) que se quiere probar, y calculando para todas las simulaciones el valor de la estadística elegida; calcular la proporción de valores simulados de la estadística (evidentemente bajo H_0) que exceden al valor calculado de esa estadística con la muestra original, y ese es el α al que llamamos *p-value*. Este procedimiento es tan exacto como el número de simulaciones lo permita. Una observación importante es que este segundo procedimiento (el obtener el *p-value* por simulación) no requiere que la distribución especificada por la hipótesis nula sea continua. Así, en el caso de distribuciones discretas, que prosperó con otros enfoques ya que no existe una transformación al intervalo $(0, 1)$ que nos dé uniformidad (sin recurrir a la aleatorización), sí se puede resolver calculando el *p-value* “exacto”, por simulación.

Si la distribución especificada por la hipótesis nula tiene parámetros desconocidos, esto es, la hipótesis nula especifica en realidad una familia paramétrica, el procedimiento de obtener tablas asintóticas tuvo que tomar en consideración que ahora el correspondiente proceso empírico con parámetros desconocidos y estimados, (digamos por máxima verosimilitud), converge a un límite, en general distinto al caso en que los parámetros eran conocidos. Existen muchos artículos con sus correspondientes tablas asintóticas para diferentes distribuciones en los que distinguen si es que sólo uno de los parámetros es desconocido; cuál de ellos, o si dos (o más) son desconocidos.

En ocasiones las distribuciones asintóticas, distintas del caso en que los parámetros fueran conocidos, no dependen de los valores particulares de los parámetros. En estos casos resulta suficiente el exhibir la distribución asintótica de la estadística empleada. Es el caso de todas las familias paramétricas en que los parámetros corresponden a un modelo de localización y/o escala. Por otro lado, para los casos en los que la distribución asintótica sí depende de los valores de los parámetros, suelen exhibirse un juego de tablas asintóticas, y sugerir al usuario que estime los parámetros y decida qué tabla utilizar (por ejemplo el caso de la distribución gamma de dos parámetros o el de la Gaussiana-inversa, también de dos parámetros).

La no dependencia de la distribución del proceso empírico en los valores de los parámetros en los casos de localización y/o escala es en realidad una no dependencia en los parámetros

del proceso empírico para cualquier modelo de grupo, en que el proceso empírico resulta invariante frente a ese grupo y la estadística suficiente minimal es equivariante. Casos particulares de estos modelos de grupo son los parámetros de localización y/o escala.

Para estos modelos de grupo con las condiciones mencionadas, la obtención del *p-value* es trivial, pues el valor de la estadística (invariante) calculada con la muestra observada, se compara contra el histograma de 10,000 (o 100,000) valores simulados de la estadística, obtenidos éstos con muestras simuladas de la distribución nula habiendo fijado arbitrariamente valores para los parámetros. Eso, puesto que la distribución no depende de sus valores y por ello se ponen los valores que uno quiera. Como un comentario, en estos casos el usar remuestreo (*i.e.* bootstrap), produce el *p-value* exacto.

En el Capítulo 2 se hace una somera descripción de diferentes procedimientos propuestos para el caso multivariado, enfatizando aquellos procedimientos de bondad de ajuste que resultan invariantes al grupo natural asociado al Modelo Normal Multivariado. En el Capítulo 3 se describe un estudio de simulación para verificar que la obtención de tablas exactas para el tamaño de muestra, n , dado y la dimensión, k , del problema es correcta; o sea que se reproduce el nivel α pretendido para hacer la prueba de bondad de ajuste. También se presentan las potencias de las pruebas elegidas dentro de la comparación. Finalmente en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones del estudio y las recomendaciones para obtener *in situ* el *p-value* de cualquier estadística invariante que pretenda utilizarse para bondad de ajuste de la distribución Normal multivariada.

Capítulo 2

Pruebas para normalidad multivariada

En esta sección se describen las pruebas invariantes y consistentes utilizadas para evaluar la normalidad multivariada junto con procedimientos basados en bondad de ajuste y medidas basadas en la asimetría y curtosis multivariadas.

Tomando en cuenta los estudios de simulación previos, principalmente los resultados obtenidos por Farrell *et al.* (2007), se seleccionó la mejor prueba dentro de cada categoría. Se estudio una prueba basada en una revisión dada en Royston (1992) de la prueba de Royston (1983b), la extensión de la prueba de Shapiro & Wilk (1965) para normalidad univariada. En el estudio de Naczk (2004) se muestra que la prueba de Royston (1983b) no alcanza el nivel de significancia nominal considerando su distribución asintótica, este resultado se confirma en el estudio de Farrell *et al.* (2007). De las pruebas basadas en las medidas de asimetría y curtosis multivaridas, se seleccionó la estadística de Doornik & Hansen (1994). Dentro de la categoría de pruebas invariantes y consistentes, se consideró la prueba de Henze & Zirkler (1990).

Además de las cuatro pruebas anteriores se estudian tres versiones de la estadística de Anderson-Darling propuestas en Gracia-Medrano (1989)

2.1. Pruebas de Royston

Esta prueba de normalidad multivariada está basada en la prueba de normalidad univariada de Shapiro & Wilk (1965), originalmente fue propuesta para muestra de tamaño 3 hasta 50, y Royston (1982b) la extendió para muestras de tamaño $3 \leq n \leq 2000$. Un algoritmo para calcular esta extensión se da en Royston (1982a) y Royston (1983a). Royston (1983b) extendió esta prueba para el caso multivariado. Supongamos que los datos para los cuales se desea probar normalidad multivariada, de dimensión k , consisten de una muestra aleatoria de tamaño n , $\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_n^*$ con matriz de covarianzas muestral \mathbf{S} . La estadística de Royston se obtiene de la siguiente manera: para la j -ésima variable, $j = 1, \dots, k$, $\mathbf{X}_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj})'$ se calcula W_j , la correspondiente estadística de prueba univariada de Shapiro & Wilk (1965), dada por

$$W_j = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i X_{(ij)})^2}{\sum_{i=1}^n (X_{(ij)} - \bar{X}_j)^2}$$

donde $X_{(1j)} < X_{(2j)} < \dots < X_{(nj)}$ son los componentes de la j -ésima variable ordenados en forma creciente. El vector de ponderaciones $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$ tiene como componentes a los mejores coeficientes lineales insesgados normalizados de Sarhan & Greenberg (1956) cuando $n \leq 20$; mientras que para $n > 20$, \mathbf{a} se calcula como en Royston (1982b). Después, se determina $Z_j = [(1 - W_j)^\lambda - \mu^*] / \sigma$, donde λ , μ^* y σ son calculados de acuerdo a Royston (1982b). A continuación se calcula $T_j = \{\Phi^{-1}[\Phi(-Z_j)/2]\}^2$, donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución acumulada normal estándar. Si $(X_1, \dots, X_k)'$ es conjuntamente normal multivariado y sus componentes son mutuamente independientes, entonces $G = \sum_{j=1}^k T_j$ es aproximadamente Ji cuadrada con k grados de libertad. Si las X_j no son independientes, entonces $H = eG$ es aproximadamente Ji cuadrada con e grados de libertad, donde e son los grados de libertad equivalentes. Royston (1983b) sugiere una estimación para e basada en el método de momentos, $\hat{e} = p / [1 + (p - 1) \bar{c}]$, donde \bar{c} es una estimación para la correlación promedio entre las T_j . No obstante, como ya se mencionó, en este trabajo no se usará la distribución asintótica.

Naczka (2004) mostró con un estudio de simulación que la prueba de Royston (1983b) no alcanza el nivel de significancia nominal. Farrell *et al.* (2007) llegan a esta misma conclusión,

usando la distribución asintótica de la estadística de prueba.

Una variante de la prueba de Royston (1983b) se propone en Royston (1992), que incluye una revisión del procedimiento para aproximar al vector de ponderaciones \mathbf{a} . Farrell *et al.* (2007) estudian la prueba Royston (1992) por primera vez. En este trabajo se estudian ambas pruebas Royston (1983b) y Royston (1992).

2.2. Prueba de Doornik-Hansen

Doornik & Hansen (1994) propusieron una prueba simple ómnibus de normalidad multivariada basada en medidas de asimetría y curtosis, esta prueba es una extensión de la prueba univariada propuesta por Shenton & Bowman (1977). Sea $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ una matriz $k \times n$ con n observaciones de un vector de dimensión k con media muestral $\bar{\mathbf{X}} = n^{-1}(\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n)$ y covarianza $\mathbf{S} = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'$. Se calcula la matriz \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{S}^{-1/2})$$

y se forma la matriz de correlación $\mathbf{C} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{V}$. Se define la matriz $k \times n$ de observaciones transformadas

$$\mathbf{R}' = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{H}'\mathbf{V}(\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}}, \dots, \mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}})$$

donde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ es una matriz diagonal con los eigenvalores de \mathbf{C} . Las columnas de \mathbf{H} son los correspondientes eigenvectores, tales que $\mathbf{H}'\mathbf{H} = \mathbf{I}_k$ y $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{H}'\mathbf{C}\mathbf{H}$. Después se calcula la asimetría, $\sqrt{b_{1j}}$, y curtosis, b_{2j} , muestrales para los $j = 1, \dots, k$ vectores, de dimensión n , de observaciones transformadas.

Se definen \mathbf{B}'_1 y \mathbf{B}'_2 como $\mathbf{B}'_1 = (\sqrt{b_{11}}, \dots, \sqrt{b_{1k}})$ y $\mathbf{B}'_2 = (b_{21}, \dots, b_{2k})$, respectivamente. Para cada una de las k variables, la medida de asimetría, $\sqrt{b_{1j}}$ se transforma a una Normal estándar Z_{1j} como en D' Agostino (1970); y la medida de curtosis, b_{2j} se transforma de una distribución Gamma a una Ji cuadrada y entonces a una Normal estándar Z_{2j} usando

la transformación raíz cúbica de Wilson & Hilferty (1931), para $j = 1, \dots, k$. Doornik & Hansen (1994) propusieron la estadística $\mathbf{Z}'_1 \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}'_2 \mathbf{Z}_2$ donde $\mathbf{Z}_1 = (Z_{11}, \dots, Z_{1j}, \dots, Z_{1k})'$ y $\mathbf{Z}_2 = (Z_{21}, \dots, Z_{2j}, \dots, Z_{2k})'$. Esta estadística tiene una distribución asintótica Ji cuadrada con $2k$ grados de libertad cuando los datos son NMV. Doornik & Hansen (1994) comparan su método propuesto contra los métodos de Mardia (1970) y de Royston (1983b), demostrando que su prueba alcanza el nivel de significancia nominal y tiene buenas propiedades de potencia superando a las otras pruebas.

2.3. Prueba de Henze-Zirkler

Epps & Pulley (1983) propusieron una prueba de normalidad univariada que es consistente e invariante para distribuciones no normales. Se basa en la funcional no negativa

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi_n(t) - \hat{\Phi}_0(t) \right|^2 dG(t) \quad (2.1)$$

donde $\Phi_n(t)$ es la función característica empírica, $\hat{\Phi}_0(t)$ es una estimación de la función característica de la distribución Normal, y $G(t)$ es una función de ponderaciones.

Henze & Zirkler (1990) propusieron la siguiente extensión multivariada de (2.1),

$$D_{n,\beta} = \int_{\mathfrak{R}^d} \left| \Phi_n(t) - \hat{\Phi}_0(t) \right|^2 \varphi_\beta(t) dt \quad (2.2)$$

donde $\Phi_n(t)$ es la función característica empírica de las observaciones estandarizadas, $\hat{\Phi}_0(t)$ es la función característica de la distribución Normal estándar, y $\varphi_\beta(t)$ es una función kernel. Henze & Zirkler (1990) usaron la función de densidad de un vector aleatorio $N_k(\mathbf{0}, \beta^2 \mathbf{I}_k)$, $\beta \in \mathfrak{R}$ como el kernel en (2.2), ellos mostraron que la estadística de prueba tiene una distribución asintótica Lognormal.

La forma cerrada de cálculo para la estadística es:

$$D_{n,\beta} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \|Y_j - Y_k\|^2\right) \\ - 2(1 + \beta^2)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(1 + \beta^2)} \|Y_j\|^2\right) + (1 + 2\beta^2)^{-\frac{d}{2}}$$

donde $Y_j = \mathbf{S}_n^{-\frac{1}{2}} (X_j - \bar{X}_n)$, $j = 1, \dots, n$.

Henze & Zirkler (1990) realizaron un estudio de simulación para comparar su estadística con otras. Se consideraron distribuciones alternativas entre las que están aquellas con marginales independientes, mezclas de distribuciones normales y distribuciones simétricas esféricas. Henze & Zirkler (1990) demostraron que su prueba tiene buena potencia y que la elección de $\beta = 0.5$ produce una prueba potente contra distribuciones alternativas con colas pesadas.

2.4. Prueba de Gracia-Medrano

Gracia-Medrano (1989) propuso un método para probar NMV. La idea del método propuesto consiste en hacer transformaciones que conviertan a los vectores $\mathbf{X}'_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik})$, $i = 1, \dots, n$, en cantidades univariadas $U_{11}, U_{12}, \dots, U_{n1}, \dots, U_{nk}$ que bajo la hipótesis nula se distribuyen uniformemente en el intervalo unitario. Esto reduce el problema a probar uniformidad de una muestra univariada de tamaño nk .

El método de Gracia-Medrano (1989) consiste, primero, en estimar la función de distribución $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ usando la función Rao-Blackwell, obtenida por Ghurye & Olkin (1969)

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) = P[\mathbf{X} \leq \mathbf{x} | U_n] = \text{inv}t^{(k)}\left(\mathbf{S}^{-1}, \frac{n-1}{n}, n-k-1, \bar{\mathbf{X}}\right)$$

una distribución t inversa, donde

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \\ \mathbf{S}_n = \mathbf{S} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \\ \mathbf{U}_n &= (\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{S})\end{aligned}$$

Un vector \mathbf{Z} se distribuye como $inv t^{(k)}(\mathbf{P}, Q, \nu, \boldsymbol{\eta})$ si su función de densidad es la siguiente:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+k}{2}\right) |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{\nu+k-2}{2}} \left(Q - (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta})' \mathbf{P} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta})\right)^{\frac{\nu-2}{2}}}{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

cuando $Q - (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta})' \mathbf{P} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta}) > 0$ y $f(\mathbf{z}) = 0$, en otro caso. Siendo \mathbf{P} una matriz de precisión, Q un escalar, ν los grados de libertad y $\boldsymbol{\eta}$ un parámetro de localización.

Después de estimar la distribución $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, se aplica la transformación de Rosenblatt a $\tilde{F}(\mathbf{x})$. Gracia-Medrano (1989) da un resultado general para las distribuciones condicionales de $\tilde{F}(\mathbf{x})$. La distribución condicional $\tilde{F}^{j|1, \dots, (j-1)}$, de la j -ésima componente dadas las primeras $(j-1)$ componentes, es una

$$inv t^{(1)}(P_j, Q_j, \nu_j, \eta_j)$$

donde

$$\begin{aligned}P_j &= (s_{jj} - \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \boldsymbol{\xi}_j)^{-1} \\ Q_j &= \frac{n-1}{n} - (x_1 - \bar{x}_1, \dots, x_{j-1} - \bar{x}_{j-1}) \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} - \bar{x}_{j-1} \end{bmatrix} \\ \nu_j &= n - j - 1\end{aligned}$$

$$\eta_j = \bar{x}_j + \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} - \bar{x}_{j-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{j-1} & \boldsymbol{\xi}_j \\ \boldsymbol{\xi}'_j & s_{jj} \end{bmatrix}$$

para $j = 2, \dots, k$, \mathbf{S}_j es la matriz de covarianza muestral hasta la j -ésima componente (sin estar dividida por n). Después, se obtienen las \tilde{U}_{ij} aplicando $\tilde{F}^{j|1, \dots, (j-1)}$ a las X_{ij} , del siguiente modo

$$\tilde{U}_{ij} = \tilde{F}^{j|1, \dots, (j-1)}(X_{ij})$$

para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, k$. Para hacer lo anterior, se hizo uso de dos transformaciones. La primera transformación mapea a una variable $X \sim invt^{(1)}(\mathbf{P}, Q, \nu, \boldsymbol{\eta})$ en una variable $Z \sim dirt^{(1)}(\mathbf{P}, Q, \nu, \boldsymbol{\eta})$, dada por

$$\frac{Q^{\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\eta})}{\sqrt{Q - (\mathbf{X} - \boldsymbol{\eta})' \mathbf{P} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\eta})}} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Z}$$

Un vector \mathbf{Z} se distribuye como $dirt^{(k)}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \nu, \boldsymbol{\eta})$ si su función de densidad es la siguiente:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+k}{2}\right) |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{\nu}{2}} (Q + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta})' \mathbf{P} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta}))^{-\frac{\nu+k}{2}}}{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

La segunda transformación mapea a una $Z \sim dirt^{(1)}(\mathbf{P}, Q, \nu, \boldsymbol{\eta})$ en una variable $t \sim t_\nu$ (t de Student con ν grados de libertad) dada por la siguiente expresión

$$\frac{(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\eta})' \nu^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}}} = t$$

Finalmente se tiene que las observaciones \tilde{U}_{ij} son de la forma

$$G_{n-j-1} \left(\frac{(n-j-1)^{\frac{1}{2}} [X_{ij} - \bar{X}_j - \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} (\mathbf{X}_{i(j-1)} - \bar{\mathbf{X}}_{i(j-1)})]}{(s_{jj} - \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \boldsymbol{\xi}_j)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n-1}{n} - (\mathbf{X}_{i(j-1)} - \bar{\mathbf{X}}_{i(j-1)})' \mathbf{S}_{j-1}^{-1} (\mathbf{X}_{i(j-1)} - \bar{\mathbf{X}}_{i(j-1)} - M) \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

para $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$ y donde

$$\mathbf{X}_{i(j-1)} = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{i(j-1)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{i(j-1)} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_{(j-1)} \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{[X_{ij} - \bar{X}_j - \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} (\mathbf{X}_{i(j-1)} - \bar{\mathbf{X}}_{(j-1)})]^2}{s_{jj} - \boldsymbol{\xi}'_j \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \boldsymbol{\xi}'_j}$$

y G_ν es la función de distribución de una t de Student con ν grados de libertad. Es importante mencionar que al estimar la función de distribución, ya no se cuenta con la independencia entre $(\tilde{U}_{i1}, \dots, \tilde{U}_{ik})$ y $(\tilde{U}_{l1}, \dots, \tilde{U}_{lk})$, aunque \tilde{U}_{ir} y \tilde{U}_{is} si son independientes para $r \neq s$.

Después se calculan las tres estadísticas de prueba propuestas. Para calcular la primera estadística, denotada como \tilde{A}_{nk}^2 , se ordenan las \tilde{U}_{ij} como $\tilde{U}_{(1)}, \tilde{U}_{(2)}, \dots, \tilde{U}_{(nk)}$, con ellas se calcula \tilde{A}_{nk}^2 del siguiente modo

$$\tilde{A}_{nk}^2 = -nk - \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{nk} (2i - 1) \left[\ln(\tilde{U}_{(i)}) + \ln(1 - \tilde{U}_{(nk+1-i)}) \right]$$

Por otro lado, para cada vector $[U_{i1} \dots U_{in}]$, $i = 1, \dots, k$ se calcula \tilde{A}_i^2 , siguiendo la definición de \tilde{A}_{nk}^2 . Con los \tilde{A}_i^2 , se calculan las estadísticas

$$\tilde{A}_{sum}^2 = \sum_{i=1}^k \tilde{A}_i^2$$

y

$$\tilde{A}_{\text{máx}}^2 = \max_{i=1,\dots,k} \{ \tilde{A}_i^2 \}$$

Una vez hecho esto ya se tienen las tres estadísticas. Las distribuciones de \tilde{A}_{nk}^2 , \tilde{A}_{sum}^2 y $\tilde{A}_{\text{máx}}^2$ se desconocen. Para poder llevar a cabo las pruebas es necesario simular las distribuciones de estas estadísticas bajo la hipótesis nula.

Capítulo 3

Resultados

Se realizó un estudio de simulación, usando el lenguaje R¹, para comparar el tamaño y potencia de las pruebas de normalidad multivariada de Royston (1992), Royston (1983b), Doornik & Hansen (1994), Henze & Zirkler (1990) (R92, R83, DH94 y HZ, respectivamente) y tres versiones de la estadística de Anderson-Darling propuestas por Gracia-Medrano (1989) (A_{nk}^2 , A_{sum}^2 y $A_{máx}^2$). El código R usado para generar los datos de las distribuciones Pearson tipo II, t de Student, potencia exponencial generalizada y Khintchine; y para calcular las estadísticas de prueba R83, R92, DH y HZ estuvieron basados en el código disponible en <http://www.stat.ubc.ca/~matias/MVN/>. El código R de las 7 pruebas se pueden descargar de <http://www.dpye.iimas.unam.mx/lety/pruebasnormalmultivariada/>

Se usó simulación Monte Carlo para determinar el *p-value* exacto para las siete pruebas. Se generaron 10,000 conjuntos de datos con combinaciones de tamaños de muestra $n = 25, 100$ y dimensiones $k = 2, 3, 10$ de 25 diferentes distribuciones multivariadas (ver Tabla 3.1), cubriendo un rango amplio de distribuciones que van desde la distribución Normal Multivariada hasta distribuciones con desviación severa de la normalidad. Es decir, se simularon un total de 150 situaciones.

Las pruebas estadísticas se calcularon para los 10,000 conjuntos de datos de cada situación y se compararon con el valor crítico apropiado, para obtener la estimación de la proporción de rechazos de normalidad multivariada para cada prueba en cada situación. Se

¹<http://cran.r-project.org/>

usó el nivel de significancia estándar de $\alpha = 0.05$, también se consideraron los niveles 0.01 y 0.10; sin embargo, el análisis detallado se realiza para $\alpha = 0.05$. El valor crítico se calculó a partir de la distribución empírica de cada prueba, la cual se obtuvo simulando 10,000 conjuntos de datos de la distribución Normal multivariada, para las seis diferentes combinaciones de n y k y calculando las estadísticas de prueba para todas las muestras simuladas.

Distribución Multivariada	Comentarios
Normal	Hipótesis nula. Distribución simétrica y mesocúrtica
Mezcla de dos normales	Se consideraron 15 diferentes mezclas, con 3 niveles de mezclado y 5 configuraciones de medias y varianzas. Mezcla nivel 1 (90%/10%), contaminación leve, asimétrica y leptocúrtica. Mezcla nivel 2 (78.8675%/21.1325%), contaminación moderada, asimétrica y mesocúrtica. Mezcla nivel 3 (50%/50%), contaminación severa, simétrica y platicúrtica
t de Student 10 gl	Simétrica y moderadamente leptocúrtica
Cauchy	Simétrica y platicúrtica
Pearson Tipo II ($m = 10$)	Una distribución con desviación moderada de la distribución Normal
Uniforme	Simétrica pero altamente platicúrtica
Ji cuadrada 1 gl	Altamente asimétrica
Lognormal	Altamente asimétrica
Knitchnine	Una distribución con marginales normales pero distribución conjunta no normal
Lambda de Tukey	Distribución severamente truncada, de colas pesadas y cortas, pero sus valores de asimetría y curtosis son iguales a los de la distribución Normal
Potencia exponencial generalizada	Una distribución no normal pero los valores de asimetría y curtosis son iguales a los de la distribución Normal

Cuadro 3.1: Distribuciones multivariadas simuladas

3.1. Distribución Normal Multivariada

La primera distribución que se simuló fue la distribución Normal Multivariada. En este caso la hipótesis nula de que la muestra aleatoria tiene distribución normal multivariada es verdadera se espera que cada prueba rechace la hipótesis nula aproximadamente a un nivel del 5 %. Las otras 24 distribuciones representan desviaciones de la normalidad multivariada a diferentes grados, para estas distribuciones la hipótesis debe ser rechazada. Una prueba ϕ es insesgada si la función potencia $\beta_\phi(\theta)$ satisface

$$\begin{aligned}\beta_\phi(\theta) &\leq \alpha & \text{si } \theta \in \Omega_{H_0} \\ \beta_\phi(\theta) &\geq \alpha & \text{si } \theta \in \Omega_{H_1}\end{aligned}$$

donde H_0 es la hipótesis a probar (hipótesis nula) y H_1 la hipótesis alternativa. En este estudio, si una prueba es insesgada entonces la potencia será menor o igual que el nivel $\alpha = 0.05$, cuando se considera la distribución normal multivariada. Para las otras 24 distribuciones, la potencia será mayor o igual que el nivel α .

El comportamiento de las siete pruebas con la distribución Normal Multivariada se determinó simulando 10,000 conjuntos de datos normales multivariados. Para cada conjunto de datos se calcularon las estadísticas R92, R83, DH94, HZ, A^2 , A^2_{sum} y $A^2_{m\acute{a}x}$. Con esta distribución el número de rechazos debe ser bajo, alrededor del 5 %, cuando se usa $\alpha = 0.05$.

Para un nivel de significancia de 0.05, el tamaño del error tipo I se muestra en el Cuadro 3.2. Para todas las pruebas el error tipo I está alrededor de 0.05. La prueba A^2_{sum} es la que presenta mayor rango de variación en la potencia observada, de 0.043 a 0.056. La prueba con menor rango fue R83, 0.0509 a 0.0547; este resultado contrasta con el obtenido por Farrell *et al.* (2007), quienes encontraron que R83 no alcanza el nivel de significancia nominal usando la distribución asintótica de la estadística de prueba, razón por la cual la descartaron para el análisis de potencia, y coinciden con los resultados de Mecklin (2000) y Mecklin & Mundfrom (2005) quienes obtuvieron que el tamaño del error tipo I para R83 estaba entre 0.047 y 0.053. Como se mencionó antes, en este estudio se calculó el *p-value* exacto, en lugar de usar distribuciones asintóticas para las pruebas.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0551	0.0536	0.0470	0.0497	0.0516	0.0494
A_{sum}^2	0.0506	0.0512	0.0492	0.0544	0.0560	0.0430
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0527	0.0555	0.0470	0.0521	0.0515	0.0490
DH	0.0516	0.0535	0.0520	0.0495	0.0545	0.0523
HZ	0.0511	0.0519	0.0500	0.0504	0.0471	0.0457
R83	0.0547	0.0509	0.0515	0.0532	0.0519	0.0511
R92	0.0536	0.0465	0.0469	0.0514	0.0513	0.0514

Cuadro 3.2: Tamaño del error Tipo I empírico contra la distribución Normal Multivariada, $\alpha = 0.05$

3.2. Potencia

Para la comparación de la potencia de las pruebas R92, R83, DH94, HZ, A^2 , A_{sum}^2 y $A_{m\acute{a}x}^2$, se eligieron las distribuciones alternativas de acuerdo a Mecklin (2000) y Farrell *et al.* (2007). Se estudiaron 15 diferentes mezclas de dos normales multivariadas, cuatro distribuciones simétricas multivariadas (las distribuciones Cauchy, t_{10} , uniforme y Pearson tipo II). También se consideraron tres distribuciones no normales con algunas características idénticas a las de la distribución Normal Multivariada: la distribución Knitchnine (marginales normales, pero distribución conjunta no normal), la distribución Lambda de Tukey con $\lambda = 5.2$ (tiene los primeros cuatro momentos iguales que una distribución Normal; esta distribución no fue considerada por Mecklin (2000) ni Farrell *et al.* (2007)) y la distribución potencia exponencial generalizada (misma curtosis y asimetría que la distribución Normal). Asimismo se estudiaron dos distribuciones multivariadas fuertemente asimétricas: la distribución Ji-cuadrada y la distribución Lognormal.

Para evaluar la potencia de las siete pruebas R92, R83, DH94, HZ, A^2 , A_{sum}^2 y $A_{m\acute{a}x}^2$, contra cada distribución alternativa (Cuadro 3.1), se generaron 10,000 muestras de cada distribución para diferentes valores de n y p ; después se calcularon las estadísticas de las pruebas; es decir, para cada una de las distribuciones alternativas se calcularon 10,000 estadísticas de cada una de las siete pruebas. Para cada combinación de n y p se estimó la potencia de la prueba como la proporción de muestras para las cuales la estadística resultó mayor que el valor crítico correspondiente, se consideró el nivel de significancia de

Cuadro 3.3: Tipos de mezclas de normales ^a

Tipo	Medias		Componente 1		Componente 2	
	iguales	iguales	Media	Varianza	Media	Varianza
1	Si	No	μ_1 ^b	Σ_1 ^d	μ_1	Σ_2 ^e
2	No	Si	μ_1	Σ_1	μ_2 ^c	Σ_1
3	No	Si	μ_1	Σ_2	μ_2	Σ_2
4	No	No	μ_1	Σ_2	μ_2	Σ_2
5	No	No	μ_1	Σ_2	μ_2	Σ_1

^a Los 5 tipos de mezclas de normales son simulados en las proporciones 90%/10%, 78.8675%/21.1325% y 50%/50%

^b μ_1 es un vector de medias de ceros

^c μ_2 es un vector de medias de unos

^d Σ_1 es una matriz de correlación con todos sus elementos fuera de la diagonal iguales con $\rho = 0.2$

^e Σ_2 es una matriz de correlación con todos sus elementos fuera de la diagonal iguales con $\rho = 0.5$

0.05.

3.3. Mezclas de normales multivariadas

Para estudiar el comportamiento de las pruebas cuando la distribución alternativa es un modelo de mezclas de dos Normales Multivariadas se consideraron 15 diferentes mezclas, las mismas que estudió Mecklin (2000). Se consideraron cinco diferentes tipos de mezclas, en términos de la estructura del vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas, y dentro de estos cinco tipos se usaron tres diferentes valores para la ponderación ($p = 0.9$, 0.788675 y 0.05). Los diferentes valores de p generan tres diferentes niveles de contaminación. En el Cuadro 3.4 se muestran las propiedades de las mezclas de normales que se estudian en este trabajo.

Para todas las pruebas, la potencia estimada para detectar mezclas de dos normales multivariadas está entre 0.04 y 0.1392 (esta última potencia corresponde a la prueba DH con $n = 100$ y $k = 10$ para una mezcla con contaminación moderada, asimétrica y mesocúrtica,

$0.788675N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2) + 0.211325N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1)$). Los valores de $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\Sigma}_1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_2$ se describen en el Cuadro 3.3. Estos resultados están de acuerdo con los de Farrell *et al.* (2007), quienes encontraron que para mezclas de normales multivariadas, la mayoría de las pruebas tienen potencias estimadas por debajo de 0.10, aún para n y k grandes.

Distribución	Tipo	Componente 1			Componente 2		
		p	Media	Varianza	$1 - p$	Media	Varianza
1	1	0.9	μ_1	Σ_1	0.1	μ_1	Σ_2
2	1	0.788675	μ_1	Σ_1	0.211325	μ_1	Σ_2
3	1	0.5	μ_1	Σ_1	0.5	μ_1	Σ_2
4	2	0.9	μ_1	Σ_1	0.2	μ_2	Σ_1
5	2	0.788675	μ_1	Σ_1	0.211325	μ_2	Σ_1
6	2	0.5	μ_1	Σ_1	0.5	μ_2	Σ_1
7	3	0.9	μ_1	Σ_2	0.1	μ_2	Σ_2
8	3	0.788675	μ_1	Σ_2	0.211325	μ_2	Σ_2
9	3	0.5	μ_1	Σ_2	0.5	μ_2	Σ_2
10	4	0.9	μ_1	Σ_1	0.1	μ_2	Σ_2
11	4	0.788675	μ_1	Σ_1	0.211325	μ_2	Σ_2
12	4	0.5	μ_1	Σ_1	0.5	μ_2	Σ_2
13	5	0.9	μ_1	Σ_2	0.1	μ_2	Σ_1
14	5	0.788675	μ_1	Σ_2	0.211325	μ_2	Σ_1
15	5	0.5	μ_1	Σ_2	0.5	μ_2	Σ_1

Cuadro 3.4: Características de las distribuciones Normales en la mezcla de distribuciones

Las distribuciones clasificadas como mezclas tipo 1 tienen el mismo vector de medias pero diferente matriz de varianzas y covarianzas, se denotan por $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2)$. Los resultados se muestran en los Cuadros 3.5, 3.6 y 3.7. Las potencias de las siete pruebas están entre 0.0456 y 0.1077, sin considerar el valor de n y k .

Para esta distribución alternativa no hay una prueba que se caracterice como la mejor. Considerando los tres valores de p , los dos valores de n y los tres valores de k , se tienen 18 situaciones para las mezclas tipo 1. De estos 18 escenarios, en 5 las pruebas R92 y HZ resultaron con mayor potencia.

Las pruebas A_{sum} , DH y HZ son insesgadas para las mezclas con $p = 0.9$. A_{nk} , $A_{m\acute{a}x}$, R83 y R92 resultan ligeramente sesgadas cuando $n = 25$ e insesgadas para $n = 100$. Con $p = 0.788675$ (distribuciones con contaminación moderada, asimétricas y mesocúrticas) sólo las pruebas A_{sum} y R92 resultan insesgadas. Las otras 5 pruebas son sesgadas cuando

$n = 25$, HZ es la única que presenta sesgo para $n = 100$.

Cuando p aumenta la potencia se incrementa ligeramente para $k = 2, 3$. Cuando $k = 10$ la potencia de las pruebas en general decrece.

La mayoría de las pruebas tienen potencias alrededor del 0.05. DH es la prueba que tiene relativamente mayor potencia, 0.0465 a 0.1077, le sigue HZ (0.0491 a 0.0912). Al aumentar k se observa, en general, un ligero incremento de la potencia. Al incrementarse el tamaño de la muestra, n , el aumento de la potencia es más notorio.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0533	0.0529	0.0479	0.0529	0.0543	0.0518
A_{sum}^2	0.0509	0.0554	0.0533	0.0570	0.0565	0.0504
$A_{máx}^2$	0.0498	0.0545	0.0507	0.0534	0.0537	0.0500
DH	0.0503	0.0522	0.0516	0.0516	0.0535	0.0576
HZ	0.0525	0.0549	0.0543	0.0537	0.0509	0.0522
R83	0.0526	0.0499	0.0520	0.0568	0.0589	0.0620
R92	0.0506	0.0497	0.0648	0.0551	0.0601	0.0638

Cuadro 3.5: Potencia empírica contra la distribución 1 (Cuadro 3.4), $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0555	0.0526	0.0483	0.0580	0.0508	0.0516
A_{sum}^2	0.0512	0.0558	0.0556	0.0622	0.0551	0.0570
$A_{máx}^2$	0.0498	0.0541	0.0551	0.0566	0.0521	0.0578
DH	0.0479	0.0498	0.0537	0.0480	0.0495	0.0694
HZ	0.0491	0.0596	0.0541	0.0620	0.0626	0.0612
R83	0.0555	0.0487	0.0538	0.0598	0.0522	0.0606
R92	0.0552	0.0516	0.0666	0.0573	0.0539	0.0624

Cuadro 3.6: Potencia empírica contra la distribución 2 (Cuadro 3.4), $\alpha = 0.05$

Las mezclas tipo 2, tienen vector de medias diferentes pero la misma matriz de varianzas y covarianzas, se denotan por $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1)$. Los resultados se muestran en los Cuadros 3.8, 3.9 y 3.10.

En lo que se refiere al sesgo de las pruebas, para las distribuciones con contaminación leve, asimétrica y leptocúrtica, $p = 0.9$, las pruebas HZ y R92 resultaron insesgadas, las otras

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0542	0.0505	0.0495	0.0524	0.0547	0.0657
A_{sum}^2	0.0461	0.0491	0.0512	0.0501	0.0587	0.0593
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0487	0.0478	0.0511	0.0493	0.0560	0.0621
DH	0.0465	0.0542	0.0573	0.0512	0.0638	0.1077
HZ	0.0501	0.0579	0.0574	0.0595	0.0770	0.0912
R83	0.0484	0.0461	0.0514	0.0493	0.0472	0.0536
R92	0.0456	0.0472	0.0715	0.0481	0.0489	0.0621

Cuadro 3.7: Potencia empírica contra la distribución 3 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

pruebas presentan sesgo para alguna combinación de n y k (Cuadro 3.8). En el Cuadro 3.9 aparecen los resultados para las distribuciones con contaminación moderada, asimétricas y mesocúrticas, se observa que 4 pruebas presentan un ligero sesgo cuando $k = 10$ y $n = 25$ (A_{nk}^2 , A_{sum}^2 , $A_{m\acute{a}x}^2$, HZ), y 3 pruebas presentan sesgo marginal cuando $k = 3$ y $n = 25$ (DH, R83 y R92); para las otras combinaciones de n y k , las pruebas son insesgadas. De las distribuciones con contaminación severa, simétricas y platicúrticas, solamente A_{nk}^2 no presenta sesgo. El resto de las pruebas presentan sesgo para diferentes combinaciones de n y k , en particular, R83 resulta sesgada para todas las combinaciones de n y k (Cuadro 3.10).

Cuando p aumenta las potencias, en general, se incrementan para todas las combinaciones de k y n , las menores potencias se registran cuando $p = 0.5$. Al igual que las mezclas tipo 1, las potencias de las pruebas están alrededor del 0.05. R83 y R92 son las pruebas que alcanzan las mayores potencias, 0.0753 y 0.0814, cuando $n = 100$ y $k = 10$, respectivamente. En general, las pruebas aumentan su potencia cuando k aumenta de 2 a 3 a 10. La potencia de las pruebas aumenta ligeramente cuando aumenta el tamaño de la muestra, $n = 25$ a $n = 100$.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0532	0.0551	0.0471	0.0541	0.0558	0.0526
A_{sum}^2	0.0501	0.0559	0.0512	0.0524	0.0614	0.0483
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0533	0.0532	0.0487	0.0526	0.0546	0.0566
DH	0.0507	0.0557	0.0521	0.0563	0.0586	0.0486
HZ	0.0502	0.0567	0.0501	0.0548	0.0572	0.0541
R83	0.0561	0.0499	0.0596	0.0608	0.0616	0.0753
R92	0.0551	0.0528	0.0707	0.0616	0.0643	0.0814

Cuadro 3.8: Potencia empírica contra la distribución 4 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0532	0.0520	0.0439	0.0576	0.0532	0.0534
A_{sum}^2	0.0529	0.0517	0.0480	0.0610	0.0540	0.0545
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0524	0.0531	0.0466	0.0565	0.0543	0.0531
DH	0.0525	0.0499	0.0521	0.0550	0.0513	0.0536
HZ	0.0516	0.0565	0.0480	0.0619	0.0575	0.0535
R83	0.0577	0.0452	0.0545	0.0585	0.0611	0.0730
R92	0.0559	0.0487	0.0694	0.0585	0.0638	0.0804

Cuadro 3.9: Potencia empírica contra la distribución 5 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0519	0.0501	0.0503	0.0515	0.0505	0.0501
A_{sum}^2	0.0475	0.0485	0.0505	0.0500	0.0507	0.0474
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0468	0.0505	0.0534	0.0484	0.0480	0.0470
DH	0.0460	0.0497	0.0539	0.0429	0.0437	0.0493
HZ	0.0458	0.0485	0.0502	0.0487	0.0538	0.0462
R83	0.0489	0.0426	0.0455	0.0453	0.0403	0.0402
R92	0.0461	0.0452	0.0565	0.0446	0.0436	0.0456

Cuadro 3.10: Potencia empírica contra la distribución 6 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

Las mezclas tipo 3 son similares a las mezclas tipo 2 en que la matriz de varianzas y covarianzas de los componentes son iguales y diferente vector de medias, pero difieren en que estas últimas tienen una mayor correlación entre las variables. La notación para este tipo de mezclas es $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$. Los resultados para esta distribución son tabulados en los Cuadros 3.11, 3.12 y 3.13.

Para este tipo de mezclas, las pruebas DH, R83 y R92 son insesgadas para las 6 combinaciones de n y k cuando las distribuciones presentan contaminación leve, $p = 0.9$. Las otras 4 pruebas si presentan sesgo, para al menos una combinación de n y k . Para las distribuciones con contaminación moderada $p = 0.788675$, la prueba A_{nk}^2 es la única que resulta insesgada para todo n y k . Para las distribuciones con contaminación severa, $p = 0.5$ ninguna prueba resultó insesgada, hay sesgo en una mayor cantidad de combinaciones de n y k , la mayoría cuando $n = 100$.

Para este grupo de alternativas, la prueba que alcanza mayores potencias es R92 (potencia máxima de 0.0816, para $n = 100$, $k = 10$), le siguen R83 (potencia máxima de 0.0770) y A_{sum}^2 (0.0607). Al aumentar p y n las potencias aumentan, se tiene el mismo comportamiento cuando se aumenta k , para $n = 25$. Cuando $n = 100$ las potencias en general disminuyen al aumentar la dimensión k .

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0489	0.0573	0.0459	0.0547	0.0491	0.0487
A_{sum}^2	0.0453	0.0524	0.0485	0.0570	0.0562	0.0472
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0471	0.0532	0.0510	0.0541	0.0532	0.0505
DH	0.0531	0.0521	0.0525	0.0515	0.0589	0.0501
HZ	0.0488	0.0558	0.0508	0.0512	0.0527	0.0482
R83	0.0568	0.0518	0.0538	0.0604	0.0587	0.0707
R92	0.0569	0.0552	0.0782	0.0603	0.0603	0.0816

Cuadro 3.11: Potencia empírica contra la distribución 7 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

Las mezclas tipo 4 tiene vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas diferentes, se denotan por $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$, los resultados se muestran en los Cuadros 3.14, 3.15 y 3.16.

Para las distribuciones tipo 4 con $p = 0.9$ ninguna prueba resulta insesgada; para todas las

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0526	0.0542	0.0500	0.0550	0.0559	0.0520
A_{sum}^2	0.0494	0.0530	0.0539	0.0589	0.0607	0.0465
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0474	0.0548	0.0496	0.0575	0.0544	0.0526
DH	0.0523	0.0569	0.0511	0.0533	0.0534	0.0486
HZ	0.0466	0.0526	0.0503	0.0513	0.0539	0.0473
R83	0.0537	0.0465	0.0568	0.0585	0.0559	0.0624
R92	0.0526	0.0498	0.0728	0.0565	0.0577	0.0745

Cuadro 3.12: Potencia empírica contra la distribución 8 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0508	0.0503	0.0466	0.0493	0.0467	0.0492
A_{sum}^2	0.0479	0.0488	0.0489	0.0507	0.0486	0.0494
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0458	0.0509	0.0467	0.0481	0.0443	0.0540
DH	0.0461	0.0488	0.0500	0.0439	0.0450	0.0495
HZ	0.0492	0.0539	0.0540	0.0489	0.0497	0.0478
R83	0.0518	0.0488	0.0462	0.0439	0.0421	0.0557
R92	0.0512	0.0543	0.0708	0.0454	0.0458	0.0669

Cuadro 3.13: Potencia empírica contra la distribución 9 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

combinaciones de n y k , al menos en una combinación n, k las pruebas presentan sesgo. Para $p = 0.788675$ las pruebas A_{sum}^2 , HZ, R83 y R92 son insesgadas. Las otras pruebas presentan sesgo en al menos una combinación de n y k . Mientras que para $p = 0.5$, solamente las pruebas $A_{m\acute{a}x}^2$ y HZ resultan insesgadas.

Para esta distribución al pasar de $p = 0.5$ a 0.9 se observa un aumento en la potencia. Para $p = 0.9$ y 0.788675 R92 alcanza la mayor potencia y DH la menor. Al aumentar k y n la potencia aumenta.

Las mezclas tipo 5, al igual que las mezclas tipo 4, tienen vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas desiguales. La notación para este tipo de mezclas es $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1)$. Los resultados para este grupo de distribuciones están en los Cuadros 3.17, 3.18 y 3.19.

Para este grupo de distribuciones, cuando $p = 0.9$ y $p = 0.788675$ solamente las pruebas

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0530	0.0530	0.0487	0.0490	0.0474	0.0515
A_{sum}^2	0.0508	0.0519	0.0497	0.0570	0.0578	0.0511
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0482	0.0549	0.0511	0.0543	0.0529	0.0517
DH	0.0467	0.0483	0.0508	0.0450	0.0501	0.0559
HZ	0.0527	0.0543	0.0492	0.0525	0.0561	0.0559
R83	0.0519	0.0487	0.0541	0.0566	0.0547	0.0608
R92	0.0512	0.0481	0.0631	0.0546	0.0570	0.0622

Cuadro 3.14: Potencia empírica contra la distribución 10 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0550	0.0528	0.0484	0.0569	0.0539	0.0584
A_{sum}^2	0.0502	0.0512	0.0526	0.0636	0.0566	0.0577
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0494	0.0539	0.0513	0.0612	0.0542	0.0557
DH	0.0460	0.0509	0.0563	0.0458	0.0476	0.0674
HZ	0.0580	0.0547	0.0538	0.0622	0.0567	0.0612
R83	0.0513	0.0515	0.0535	0.0584	0.0555	0.0597
R92	0.0544	0.0521	0.0674	0.0557	0.0543	0.0636

Cuadro 3.15: Potencia empírica contra la distribución 11 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

A_{nk}^2 y R83 resultan sesgadas. A_{nk}^2 resulta sesgada cuando $n = 25$ y $k = 10$; R83, para $n = 25$ y $k = 3$. Para $p = 0.5$, las 7 pruebas resultan sesgadas, para $n = 25$ y $k = 2$. La prueba R83 es la única que es insesgada para todas las combinaciones n y k .

Todas las pruebas tienen potencias entre 0.0410 y 0.1392. Cuando $n = 100$ y $n = 25$, $k = 2, 3$ la mejor prueba es DH. La prueba R92 resulta ser la mejor para $n = 25$, $k = 10$.

Al igual con las mezclas tipo 4, la potencia de las pruebas aumenta al aumentar p .

Los resultados obtenidos para mezclas son congruentes con los que obtuvieron Farrell *et al.* (2007). Ellos encontraron que para mezclas la mejor prueba es R92, y las potencias son menores que 0.10. En nuestro estudio, la mejor prueba resulta ser también R92 y, en general, las potencias son menores que 0.14. De los 90 escenarios estudiados dentro del grupo de mezclas de distribuciones, en 29 de ellos la prueba R92 resultó con mayor potencia, le siguen las pruebas HZ y DH que resultaron con mayor potencia en 18 y 16 escenarios,

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0547	0.0530	0.0470	0.0508	0.0547	0.0618
A_{sum}^2	0.0499	0.0561	0.0552	0.0533	0.0559	0.0590
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0501	0.0558	0.0551	0.0540	0.0516	0.0595
DH	0.0478	0.0573	0.0591	0.0460	0.0630	0.1024
HZ	0.0548	0.0597	0.0590	0.0611	0.0709	0.0916
R83	0.0490	0.0477	0.0480	0.0493	0.0474	0.0541
R92	0.0475	0.0497	0.0666	0.0484	0.0471	0.0634

Cuadro 3.16: Potencia empírica contra la distribución 12 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0561	0.0595	0.0480	0.0581	0.0623	0.0623
A_{sum}^2	0.0536	0.0621	0.0507	0.0590	0.0637	0.0569
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0537	0.0607	0.0512	0.0534	0.0578	0.0582
DH	0.0601	0.0705	0.0623	0.0725	0.0920	0.1041
HZ	0.0531	0.0607	0.0539	0.0529	0.0620	0.0581
R83	0.0591	0.0543	0.0594	0.0621	0.0656	0.0840
R92	0.0576	0.0562	0.0797	0.0614	0.0706	0.0994

Cuadro 3.17: Potencia empírica contra la distribución 13 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

respectivamente. Mecklin (2000) también obtiene resultados similares para la prueba HZ, potencias menores que 0.10 para los 5 tipos de mezclas, frecuentemente incluso obtiene potencias menores que 0.05 para las mezclas tipo 1, 4 y 5.

3.4. Distribuciones con contorno elíptico

Son distribuciones simétricas, y representan una desviación moderada de la normalidad, dentro de este grupo de distribuciones están la distribución Pearson tipo II, Uniforme, Cauchy y t de Student multivariada. La distribución Pearson tipo II está indexada por un parámetro $m > -1$. Cuando $m = 0$ se tiene la distribución uniforme multivariada. Al aumentar m la distribución se parece más a la distribución Normal Multivariada. En este estudio se tomó $m = 0$ y $m = 10$.

La distribución uniforme multivariada es una distribución altamente platicúrtica. Los

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0548	0.0588	0.0498	0.0712	0.0796	0.0852
A_{sum}^2	0.0517	0.0561	0.0531	0.0709	0.0739	0.0739
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0507	0.0580	0.0537	0.0670	0.0692	0.0648
DH	0.0624	0.0711	0.0647	0.0824	0.1057	0.1392
HZ	0.0519	0.0596	0.0564	0.0607	0.0667	0.0754
R83	0.0527	0.0483	0.0519	0.0654	0.0592	0.0784
R92	0.0541	0.0518	0.0753	0.0658	0.0655	0.0980

Cuadro 3.18: Potencia empírica contra la distribución 14 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0499	0.0567	0.0518	0.0598	0.0711	0.1010
A_{sum}^2	0.0476	0.0531	0.0559	0.0662	0.0729	0.0719
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0466	0.0559	0.0498	0.0608	0.0652	0.0685
DH	0.0486	0.0580	0.0633	0.0523	0.0702	0.1248
HZ	0.0485	0.0552	0.0678	0.0598	0.0707	0.1093
R83	0.0470	0.0443	0.0410	0.0441	0.0417	0.0479
R92	0.0430	0.0448	0.0638	0.0454	0.0445	0.0574

Cuadro 3.19: Potencia empírica contra la distribución 15 (Cuadro 3.4) $\alpha = 0.05$

resultados se muestran en el Cuadro 3.20.

Para $n = 25$ se observan potencias bajas, la mayor es 0.2091 (HZ) con $k = 2$ y la menor es 0.0169 (DH) cuando $k = 3$. Las pruebas que resultaron mejores son HZ y A_{nk}^2 .

Para $n = 100$, con $k = 2$ y $k = 3$ todas las pruebas tienen potencias que van de 0.35 hasta 0.99. La mejor prueba es HZ cuyas potencias varían entre 0.9684 y 0.9891, le sigue A_{nk}^2 (de 0.3586 a 0.9258). R92 tiene potencias que varían de 0.0233 a 0.9767. Cuando $n = 100$, la mejor prueba es HZ (potencia de 0.9684) seguida de A_{nk}^2 (0.3586), las otras pruebas tienen potencias menores que 0.09.

En este estudio se obtiene que, para la distribución uniforme, la prueba HZ se comporta de manera similar a los resultados de Farrell *et al.* (2007), quienes encontraron que para $n = 25$, las potencias de HZ, R92 y DH son menores que 0.20; además, las potencias disminuyen al aumentar k . Para $n = 100$, nuestros resultados también son parecidos a los resultados de

Farrell *et al.* (2007), obtienen que la prueba HZ tiene potencia cercana a 1; también obtienen que para $k = 2$, las potencias de las pruebas DH y R92 están cercanas al 1, y para $k = 10$ potencias menores que 0.10. A diferencia de Mecklin (2000), quién obtiene potencias del 1 para la prueba HZ; resultados similares obtiene para R83.

Las potencias se incrementan al aumentar el tamaño de muestra de $n = 25$ a $n = 100$. Comparando las pruebas para diferentes valores de n , tienen mayor potencia cuando $n = 100$.

La mejor prueba es HZ seguida de A_{nk}^2 , excepto para la combinación $n = 100$ y $k = 2$, en este último caso el segundo lugar lo ocupa la prueba R92, y A_{nk}^2 se ubica en cuarto lugar. Es importante mencionar que HZ y A_{nk}^2 son las únicas pruebas que resultan insesgadas para las 6 combinaciones de n y k .

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.1899	0.1491	0.0770	0.9258	0.8618	0.3586
A_{sum}^2	0.1136	0.0706	0.0393	0.8259	0.5916	0.0707
$A_{máx}^2$	0.0908	0.0527	0.0372	0.6670	0.3552	0.0544
DH	0.0413	0.0169	0.0189	0.8323	0.5504	0.0088
HZ	0.2091	0.1787	0.0570	0.9767	0.9841	0.9684
R83	0.1066	0.0438	0.0182	0.9516	0.6979	0.0432
R92	0.1406	0.0715	0.0233	0.9767	0.8395	0.0867

Cuadro 3.20: Potencia empírica contra la distribución uniforme $\alpha = 0.05$

Los resultados para la distribución Pearson tipo II se muestran en el Cuadro 3.21. Para esta distribución todas las pruebas tienen potencias por debajo del 0.10; y solamente las pruebas HZ y A_{nk}^2 tienen potencias mayores que 0.05. Cuando $n = 25$, la mayor potencia es 0.055 (A_{nk}^2 , $k = 2$). En general, para $k = 25$, la mejor prueba es A_{nk}^2 .

Cuando $n = 100$, la prueba HZ registra las potencias más altas, le sigue A_{nk}^2 , ambas con potencias mayores que 0.05, pero menores de 0.10. Por el contrario, DH es la prueba con potencias más bajas, entre 0.0124 y 0.0381. Cuando $n = 100$, se alcanza la potencia más alta. Al pasar de $n = 25$ a $n = 100$ la potencia mejora ligeramente. Al aumentar k no se observa un aumento o disminución significativo de la potencia.

Los resultados obtenidos, coinciden con los de Farrell *et al.* (2007), para las pruebas HZ,

DH y R92. Obtiene que para $n = 25$ las tres pruebas tienen potencia menor del 0.05. Para $n = 100$, las potencias que obtienen son menores que 0.10. En contraste, Mecklin (2000) obtiene potencias mayores que 0.97; más específicamente, en la mayoría de los escenarios la potencia fue del 1. En general, para las distribuciones uniforme y Pearson tipo II, la prueba DH es la que registra la menor potencia, en tanto que HZ resulta ser la mejor, seguida de A_{nk}^2 . Las potencias para la distribución Pearson tipo II con $m = 10$ son menores con respecto a las potencias para la distribución uniforme, $m = 0$, esto es lógico dado que para $m = 10$ el parecido entre las distribuciones Pearson tipo II y Normal Multivariada es mayor, por lo que se espera una disminución de la potencias. Farrell *et al.* (2007) encontraron este mismo comportamiento en la potencias.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.0550	0.0484	0.0521	0.0551	0.0587	0.0754
A_{sum}^2	0.0417	0.0412	0.0499	0.0485	0.0492	0.0416
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0413	0.0437	0.0467	0.0454	0.0464	0.0422
DH	0.0289	0.0311	0.0381	0.0184	0.0184	0.0124
HZ	0.0439	0.0432	0.0460	0.0573	0.0619	0.0913
R83	0.0351	0.0341	0.0324	0.0344	0.0329	0.0252
R92	0.0380	0.0343	0.0311	0.0343	0.0369	0.0298

Cuadro 3.21: Potencia empírica contra la distribución Pearson tipo II $\alpha = 0.05$

Los resultados para las distribuciones t de Student y Cauchy aparecen en los Cuadros 3.23 y 3.22

Para la distribución Cauchy multivariada, todas las pruebas alcanzaron una potencia de 1 para $n = 100$, indistintamente del valor de k . Para $n = 25$ la potencia de las pruebas van de 0.9692 a 0.9997, excepto para la prueba *DH* (con $n = 10$, $k = 25$, potencia: 0.8060).

Para la distribución Cauchy, Farrell *et al.* (2007) encontraron que cuando $n = 25$ las potencias de las pruebas van de 0.9750 a 0.9990, nuestros resultados coinciden. Ellos encontraron que para $n \geq 50$ las potencias son iguales al 1, indistintamente del valor de k , con HZ registrando mayores potencias que las otras pruebas. Nuestros resultados contrastan con los de Mecklin (2000), que obtiene potencias de HZ y R83 entre 0.03 y 0.051. Mecklin (2000) no consideró los casos $n = 25$, $k = 10$ y $n = 100$, $k = 10$, tampoco estudió las pruebas DH y

R92.

Para la distribución t_{10} , con $\alpha = 0.05$, las potencias van de 0.061 a 0.7329, para todas las pruebas y para todas las combinaciones de n y k (Cuadro 3.23). Para $n = 25$ y $k = 2$ las potencias oscilan entre 0.1021 y 0.1523, la prueba DH alcanza la mayor potencia. Para $k = 3$ ($n = 25$) el comportamiento de las potencias es similar (de 0.1024 a 0.1738), nuevamente DH resulta la mejor prueba. Para $n = 100$ las potencias varían de 0.2032 a 0.7329. Para $k = 2, 3$ la prueba DH es la que alcanza mayor potencia, mientras que para $k = 10$ se ubica en segundo lugar, por debajo de la prueba HZ. Los tres métodos de Gracia-Medrano (1989) registraron las menores potencias dentro de cada combinación de n y k , excepto para $n = 100$ y $k = 2$ en la cual A_{sum}^2 y A_{nk}^2 superan a la prueba HZ.

Farrell *et al.* (2007) obtuvo que las potencias de las pruebas R83, R92 y HZ van de 0.15 a 0.46 para $n = 25$, en el presente trabajo, las pruebas registraron potencias entre 0.11 y 0.25. Para $n = 100$, las potencias de las pruebas van de 0.20 y 0.80, que son similares a las que obtuvimos nosotros, 0.20 a 0.74. Mecklin (2000) obtiene potencias menores al 0.06, para $n = 25$ y $n = 100$.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.9735	0.9831	0.9692	1.0000	1.0000	1.0000
A_{sum}^2	0.9776	0.9865	0.9940	1.0000	1.0000	1.0000
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.9705	0.9785	0.9777	1.0000	1.0000	1.0000
DH	0.9743	0.9850	0.8070	1.0000	1.0000	1.0000
HZ	0.9889	0.9963	0.9995	1.0000	1.0000	1.0000
R83	0.9758	0.9884	0.9985	1.0000	1.0000	1.0000
R92	0.9785	0.9922	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 3.22: Potencia empírica contra la distribución Cauchy multivariada $\alpha = 0.05$

Con respecto a estas distribuciones simétricas, tenemos que, la prueba A_{nk}^2 resulta insesgada para las cuatro distribuciones. Las estadísticas A_{sum}^2 , $A_{m\acute{a}x}^2$, HZ, R83 y R92 son sesgadas para la distribución Pearson tipo II, para las otras tres distribuciones las pruebas son insesgadas. La prueba DH es sesgada para las distribuciones uniforme y Pearson tipo II.

En general, para las distribuciones Cauchy y uniforme la mejor prueba es HZ. Para la distribución Pearson tipo II la prueba con mayor potencia es A_{nk}^2 y para la distribución t de

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.1021	0.1024	0.0605	0.2297	0.2921	0.5467
A_{sum}^2	0.1080	0.1168	0.1077	0.2266	0.2735	0.3799
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.1041	0.1139	0.0956	0.2032	0.2245	0.2468
DH	0.1523	0.1738	0.1112	0.4065	0.5017	0.7186
HZ	0.1130	0.1397	0.1373	0.2149	0.3046	0.7329
R83	0.1411	0.1628	0.2417	0.3238	0.3921	0.6883
R92	0.1390	0.1608	0.2524	0.3267	0.4030	0.7110

Cuadro 3.23: Potencia empírica contra la distribución t de Student multivariada, 10 g.l. $\alpha = 0.05$

Student, es DH.

3.5. Distribuciones asimétricas

Las distribuciones asimétricas que se estudian son la distribución Ji cuadrada y la distribución Lognormal. Ambas distribuciones son desviaciones drásticas de la normalidad. Se espera que todas las pruebas tengan una alta tasa de rechazo en este escenario. Los resultados se dan en los Cuadros 3.24 y 3.25.

Para las distribuciones asimétricas, las siete pruebas tienen potencia alta, con $\alpha = 0.05$. Para la distribución Lognormal multivariada, las potencias de seis de las siete pruebas van de 0.99 a 1 para todas las combinaciones de n y k , excepto para la prueba HZ con $n = 25$ y $k = 10$ que registró una potencia de 0.9781, que de cualquier forma es muy buena. Las potencias aumentan al pasar de $n = 25$ a $n = 100$.

Para la distribución Ji cuadrada multivariada, la potencia de las siete pruebas presenta un comportamiento similar al de la distribución Lognormal, seis pruebas alcanzaron una potencia mayor o igual a 0.9974, excepto para la prueba HZ, $n = 25$, $k = 10$ con una potencia ligeramente menor 0.9720. Las pruebas R83 y R92 tiene potencias del 1 para todo n y k .

Cuando $n = 100$ todas las pruebas tienen potencias del 1. Al pasar de $n = 25$ a $n = 100$ las pruebas aumentan su potencia.

Para las distribuciones Ji cuadrada y Lognormal, las 7 pruebas son insesgadas, y tienen potencias muy cercanas al 1. La prueba con menor potencia para la distribución Ji cuadrada es HZ, 0.9974 y para la distribución Lognormal es $A_{\text{máx}}^2$, 0.9922.

Para ambas distribuciones, Farrell *et al.* (2007) encontraron que las pruebas HZ, DH y R92 alcanzan potencias del 1 para la mayoría de las combinaciones de n y k a excepción de algunos casos cuando $n = 25$, donde la potencia fue cercana al 1. La prueba HZ para $n = 25$ y $k = 10$ alcanza la menor potencia, 0.9528. Mecklin (2000) obtiene que las pruebas HZ y R83 alcanzan potencias del 1 para $n = 100$, en tanto que para $n = 25$, las potencias son mayores que 0.99.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
A_{sum}^2	0.9996	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$A_{\text{máx}}^2$	0.9992	0.9993	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
DH	0.9994	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
HZ	0.9974	0.9992	0.9720	1.0000	1.0000	1.0000
R83	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
R92	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 3.24: Potencia empírica contra la distribución Ji cuadrada, 1 gl $\alpha = 0.05$

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.9979	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
A_{sum}^2	0.9964	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
$A_{\text{máx}}^2$	0.9922	0.9979	0.9995	1.0000	1.0000	1.0000
DH	0.9973	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
HZ	0.9924	0.9966	0.9781	1.0000	1.0000	1.0000
R83	0.9981	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
R92	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 3.25: Potencia empírica contra la distribución Lognormal, $\alpha = 0.05$

3.6. Distribuciones con algunas propiedades iguales que las de la distribución Normal

Como ya se mencionó anteriormente, también se consideraron tres distribuciones que poseen algunas propiedades iguales que la distribución Normal Multivariada: la distribución Khintchine, la distribución Lambda de Tukey y la distribución “potencia exponencial generalizada” (PEG).

La distribución Khintchine tiene la propiedad de tener marginales normales univariadas sin tener distribución Normal Multivariada conjunta. Los resultados se muestran en el Cuadro 3.26

En general las potencias son bajas, entre 0.3 % y 12 % a excepción de la prueba HZ que registra potencias que van de 10.29 % hasta 100 %. Para la distribución Khintchine la prueba HZ es la mejor, le sigue A_{nk}^2 . Comparando las potencias de HZ para $n = 25$ y $n = 100$, se obtuvo que para $k = 2$ la potencia de HZ se incrementa de 10.29 % a 25.27 %; para $k = 3$ de 20.94 % a 67.65 % y para $k = 10$ de 66.76 % a 100 %. Esta prueba aumenta su potencia al aumentar la dimensión k y el tamaño de muestra n . Aunque la distribución A_{nk}^2 ocupa el segundo lugar, sus potencias son menores que las potencias de HZ, van de 2.91 % a 11.77 %. El resto de las pruebas tienen potencias menores que 6.7 % para todas las combinaciones de n y k .

Para la distribución Khintchine, la prueba DH resulta sesgada para toda combinación n y k ; R83 para $n = 25$ y $k = 2, 3$ y $n = 100$ con $k = 3$. A_{nk}^2 y $A_{m\acute{a}x}^2$ resultan sesgadas para $n = 25$ con $k = 10$ y $k = 2$, respectivamente. Las otras tres pruebas son insesgadas.

Mecklin (2000) obtuvo que la prueba HZ alcanza potencias del 12.7 % y 10.5 % para $n = 25$, para $n = 100$ la potencia es de 94.8 %. En tanto que la prueba R83 registra potencias del 20.0 % y 15.6 % para $n = 25$ y 100 % para $n = 100$. Por otro lado Farrell *et al.* (2007) obtienen que HZ es la mejor prueba, sus potencias aumentan con n y k , de 51.81 % hasta 100 % para n y k grandes. Las potencias para R92 están alrededor del 5 % y para DH aún menores.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
$A2_{nk}$	0.0596	0.0577	0.0291	0.0606	0.0716	0.1177
$A2_{sum}$	0.0508	0.0513	0.0522	0.0551	0.0554	0.0564
$A2_{max}$	0.0492	0.0540	0.0500	0.0513	0.0503	0.0548
DH	0.0402	0.0331	0.0037	0.0468	0.0425	0.0122
HZ	0.1029	0.2094	0.6676	0.2527	0.6765	1.0000
R83	0.0497	0.0499	0.0510	0.0532	0.0478	0.0587
R92	0.0506	0.0504	0.0532	0.0517	0.0518	0.0667

Cuadro 3.26: Potencia empírica contra la distribución Khintchine $\alpha = 0.05$

La distribución Lambda de Tukey multivariada, con $\lambda = 5.2$ tiene curtosis igual a la curtosis de las distribución Normal. Los resultados de la simulación están en el Cuadro 3.27.

Para $n = 25$ se registran potencias entre 6.44 % y 25.51 %. Para $n = 100$ las potencias se incrementan para todas las pruebas excepto para DH cuyas potencias disminuyen hasta niveles menores del 1 %. Las otras 6 pruebas tienen potencias mayores al 16 %.

Para la distribución Lambda de Tukey con $\lambda = 5.2$, la mejor prueba es A_{nk}^2 , para cualquiera de combinaciones estudiadas de n y k , excepto para $n = 25$ y $k = 10$ en la cual esta prueba aparece en tercer lugar por debajo de A_{sum}^2 y R92. Para esta distribución la prueba DH es la que tiene menor potencia junto con la prueba HZ y R83.

En general al aumentar n se incrementa la potencia de las pruebas, el mismo comportamiento se tiene cuando se aumenta k . La única distribución que presenta sesgo es DH para $n = 100$.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.2267	0.2571	0.1560	0.9011	0.9796	1.0000
A_{sum}^2	0.2004	0.2276	0.2321	0.8403	0.9274	0.9932
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.1762	0.1872	0.1487	0.7443	0.7895	0.8148
DH	0.0676	0.0722	0.0644	0.0062	0.0042	0.0008
HZ	0.1275	0.1247	0.0728	0.6562	0.6110	0.1653
R83	0.1054	0.1033	0.1080	0.6204	0.7294	0.9835
R92	0.1185	0.1286	0.2126	0.7005	0.8494	0.9995

Cuadro 3.27: Potencia empírica contra la distribución Lambda de Tukey $\alpha = 0.05$

La distribución potencia exponencial generalizada (PEG) tiene la misma asimetría y curtosis que la distribución Normal Multivariada. Los resultados aparecen en el Cuadro 3.28. Para esta distribución las mayoría de las potencias de las pruebas están por arriba del 50 % para $n = 25$; para $n = 100$, las potencias son mayores o iguales a 99 % excepto la prueba A_{nk}^2 , con $k = 2$, que registra una potencia de 86.88 %.

Cuando $n = 25$ hay mayor variabilidad en las potencias. La prueba R92 es la que alcanza las potencias más grandes, mayores que 90 %, le sigue R83 cuyas potencias están entre 82 % y 98 %, DH (72 % a 94 %) y A_{sum}^2 (77 % a 92 %). Por el contrario, las pruebas con menores potencias son A_{nk}^2 (38 % a 50 %) y HZ (21 % a 65 %). Estos resultados son congruentes con los obtenidos por Farrell *et al.* (2007), quienes encontraron que la mejor prueba es R92, ellos no consideran R83 en la evaluación de potencia.

Para la distribución potencia exponencial generalizada Mecklin (2000) obtiene que para $n = 25$ las potencias de HZ son de 4.7 % para $k = 2$ y 3.5 % para $k = 3$. Para $k = 100$, son de 7.8 % y 6.9 %, respectivamente. La prueba R83 tiene potencias alrededor del 5.5 %.

Farrell *et al.* (2007) obtienen que para la distribución PEG, R92 tiene las mejores potencias estimadas para $n = 25$, de 92.12 % a 100 %, para $k = 2$ a $k = 5$. Le sigue DH con potencias estimadas que van de 71.67 % a 94.07 %, finalmente está la prueba HZ, cuya potencia máxima es de 61.75 % para $k = 2$. Para $n = 100$ las potencias para las tres pruebas alcanzan el 100 %.

	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
A_{nk}^2	0.5020	0.4746	0.3800	0.8688	0.9919	0.9998
A_{sum}^2	0.7669	0.8506	0.9219	1.0000	1.0000	1.0000
$A_{máx}^2$	0.6655	0.7027	0.6251	1.0000	1.0000	1.0000
DH	0.7244	0.8357	0.9448	1.0000	1.0000	1.0000
HZ	0.6470	0.6504	0.2111	1.0000	1.0000	0.9928
R83	0.8193	0.8764	0.9804	1.0000	1.0000	1.0000
R92	0.9023	0.9713	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 3.28: Potencia empírica contra la distribución potencia exponencial generalizada $\alpha = 0.05$

Con respecto al sesgo, las pruebas $A_{máx}^2$, DH, R83 son sesgadas para la distribución

Khintchine. Para las distribuciones Potencia exponencial generalizada y Lambda de Tukey las 7 pruebas son insesgadas.

3.7. Análisis conjunto

El estudio se realizó para tres niveles de α , (0.05, 0.10 y 0.01). A continuación se analizan de manera conjunta los resultados obtenidos, posteriormente se hace un análisis más detallado para cada nivel de α .

Para los tres niveles de α , la prueba R92 resulta ser la mejor, la prueba HZ se ubica en segundo lugar. En tercer y cuarto lugares están DH y A_{nk}^2 .

Si consideramos las dos pruebas con mayor potencia en cada uno de los 144 casos estudiados, la mejor prueba es R92 para los tres niveles de α , en segundo lugar está HZ para $\alpha = 0.05, 0.10$, mientras que cuando $\alpha = 0.01$ la prueba que aparece en segundo lugar es A_{nk}^2 . En tercer lugar se ubica A_{nk}^2 ($\alpha = 0.05, 0.10$) o HZ ($\alpha = 0.01$).

Cuando la distribución alternativa es una mezcla de dos normales la mejor prueba es R92, para los tres niveles de α . En segundo lugar aparecen las pruebas HZ ($\alpha = 0.05, 0.10$) y A_{nk}^2 ($\alpha = 0.01$). En tercer lugar está la prueba DH. Ahora si la alternativa es una distribución simétrica entonces la mejor prueba es HZ, en segundo y tercer lugares están A_{nk}^2 y R92, indistintamente del valor de α . Cuando las alternativas son distribuciones asimétricas, entonces las tres mejores pruebas son R92, R83 y A_{nk}^2 , este comportamiento se tiene para los tres niveles de α . Finalmente, para las distribuciones que tienen algunas características de la distribución Normal, la mejor prueba es A_{nk}^2 para $\alpha = 0.05, 0.10$. Cuando $\alpha = 0.01$ la mejor prueba es A_{sum}^2 . En segundo lugar aparecen las pruebas R92 ($\alpha = 0.05, 0.10$) y A_{sum}^2 ($\alpha = 0.10$). Cabe mencionar que las menores potencias se registran cuando la alternativa es la distribución Khintchine.

3.7.1. Análisis conjunto con $\alpha = 0.05$

En el Cuadro 3.29 se muestra un panorama general del comportamiento de las 7 pruebas, para cada combinación de n , k y para cada distribución alternativa. Aparecen las pruebas con mayor potencia para cada combinación de n y k , considerando las 24 distribuciones alternativas. En cuadro se observa que si la distribución alternativa es Lambda de Tukey ó el tamaño de muestra es $n = 25$ y la distribución alternativa es Pearson tipo II la prueba con mayor potencia es A_{nk}^2 . Cuando la alternativa es una mezcla multivariada de dimensión $k = 10$ y el tamaño de muestra es $n = 25$ la mejor prueba es R92. Para la distribución alternativa Khintchine la mejor prueba es HZ , indistintamente del tamaño de la muestra, n , y la dimensión, k . Para las alternativas Cauchy, Ji cuadrada y Lognormal cualquier prueba es adecuada porque en la mayoría de los casos la potencia es igual a 100 %.

De las 144 situaciones estudiadas (24 distribuciones alternativas, 2 valores de n y 3 valores de k) en 35 situaciones la prueba R92 tuvo una potencia mayor que la potencia de las otras pruebas; en 34 situaciones, la prueba HZ ; en 21 situaciones, la prueba DH y en 17 situaciones, la prueba A_{nk}^2 ; las frecuencias de las 7 pruebas aparecen en el Cuadro 3.30. Hay situaciones en las que hay dos o más pruebas con la misma potencia más grande.

Ahora si se consideran las dos mayores potencias para las 144 situaciones, la mejor prueba resultó ser R92, en segundo y tercer lugar están HZ y A_{nk}^2 , respectivamente. Si consideramos sólo la mezcla de normales multivariadas, entonces las tres mejores pruebas son R92, HZ y DH . Dentro de este grupo de alternativas las potencias de R92 están entre 1.01 % y 9.94 %; HZ , entre 0.79 % y 10.93 %; y DH , 0.90 % – 13.92 %. Cuando las alternativas son distribuciones simétricas, las mejores pruebas son HZ , A_{nk}^2 y R92. El rango de las potencias para estas pruebas son: 4.32 % – 100 %, 4.84 % – 100 % y 2.33 % – 100 %, respectivamente. Si las distribuciones alternativas son distribuciones asimétricas, todas las pruebas registran potencias cercanas al 100 % (la menor potencia es 97.20 %), por lo tanto cualquiera de las siete pruebas sería razonablemente adecuada para realizar pruebas de normalidad multivariada.

Finalmente, para el grupo de distribuciones con algunas propiedades similares a las de la distribución Normal, las mejores pruebas son A_{nk}^2 , R92 y A_{sum}^2 . Para la distribución Khintchine se obtienen las menores potencias; para las distribuciones Lambda de Tukey y PEG

Distribución	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
Multivariada						
Normal	DH	DH	R92	DH	DH	DH
Mezcla tipo 1, $p = 0.9$	A_{nk}^2	A_{sum}^2	R92	A_{sum}^2	R92	R92
Mezcla tipo 1, $p = 0.788675$		HZ	R92	A_{sum}^2	HZ	DH
Mezcla tipo 1, $p = 0.5$	A_{nk}^2	HZ	R92	HZ	HZ	DH
Mezcla tipo 2, $p = 0.9$	R83	HZ	R92	R92	R92	R92
Mezcla tipo 2, $p = 0.788675$	R83	HZ	R92	HZ	R92	R92
Mezcla tipo 2, $p = 0.5$	A_{nk}^2	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92	A_{nk}^2	HZ	A_{nk}^2
Mezcla tipo 3, $p = 0.9$	R92	A_{nk}^2	R92	R83	R92	R92
Mezcla tipo 3, $p = 0.788675$	R83	DH	R92	A_{sum}^2	A_{sum}^2	R92
Mezcla tipo 3, $p = 0.5$	R83	R92	R92	A_{sum}^2	HZ	R92
Mezcla tipo 4, $p = 0.9$	A_{nk}^2	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92	A_{sum}^2	A_{sum}^2	R92
Mezcla tipo 4, $p = 0.788675$	HZ	HZ	R92	A_{sum}^2	HZ	DH
Mezcla tipo 4, $p = 0.5$	HZ	HZ	R92	HZ	HZ	DH
Mezcla tipo 5, $p = 0.9$	DH	DH	R92	DH	DH	DH
Mezcla tipo 5, $p = 0.788675$	DH	DH	R92	DH	DH	DH
Mezcla tipo 5, $p = 0.5$	A_{nk}^2	DH	HZ	A_{sum}^2	A_{sum}^2	DH
Uniforme	HZ	HZ	A_{nk}^2		HZ	HZ
Pearson Tipo II ($m = 10$)	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	HZ	HZ	HZ
t de Student 10 gl	DH	DH	R92	DH	DH	HZ
Cauchy	HZ	HZ	R92			
Ji cuadrada 1 gl						
Lognormal	R92	R92				
Khintchine	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ
Lambda de Tukey	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{sum}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2
PEG	R92	R92	R92			

Cuadro 3.29: Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.05$

las potencias son mayores que 11.80 % hasta 100 %.

3.7.2. Análisis conjunto con $\alpha = 0.10$

En el Cuadro 3.31 aparecen las pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa y para las diferentes combinaciones de n y k .

De este cuadro se observan algunas situaciones que es importante mencionar. Para la distribución Lambda de Tukey la prueba con mayor potencia es A_{nk}^2 . Se tiene la misma situación cuando la distribución alternativa es Pearson tipo II y el tamaño de muestra es

Prueba	Frecuencia	Porcentaje
R92	35	24.31
HZ	34	23.61
DH	21	14.58
A_{nk}^2	17	11.81
A_{sum}^2	12	8.33
R83	5	3.47
$A_{m\acute{a}x}^2$	2	1.39

Cuadro 3.30: Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.05$

$n = 25$. Cuando la alternativa es una mezcla de normales y $n = 25$ y $k = 10$ la mejor prueba es R92. Si la alternativa es Khintchine o Pearson tipo 2, $n = 100$, la prueba con mayor potencia es HZ. De las 144 situaciones estudiadas en 35 situaciones la prueba R92 tuvo la potencia más grande; en 32 situaciones, la prueba HZ; en 24 situaciones, la prueba DH y en 22 situaciones, la prueba A_{nk}^2 ; las frecuencias de las 7 pruebas aparecen en el Cuadro 3.30.

Si consideramos las dos pruebas con mayor potencia las mejores pruebas son R92 (en 74 de los 144 escenarios la potencia de esta prueba se ubica en primer o segundo lugar), HZ (en 69 escenarios aparece en primer o segundo lugar) y A_{nk}^2 (en 58 escenarios esta prueba está en primero o segundo lugar). Después están las pruebas DH, R83, A_{sum}^2 y $A_{m\acute{a}x}^2$.

Cuando la distribución alternativa es una mezcla de distribuciones normales las pruebas R92, HZ y DH alcanzan las mayores potencias, estos resultados coinciden con los que se obtuvieron cuando $\alpha = 0.05$. Las potencias de R92 están entre 8.92 % y 16.58 %; HZ entre 9.12 % y 18.33 %; y DH entre 8.80 % y 23.51 %

Para las distribuciones alternativas simétricas las mejores pruebas son HZ (potencias entre 8.94 % y 100 %, para la distribución Cauchy las potencias son mayores que 99 %), A_{nk}^2 (potencias entre 9.65 % y 100 %) y R92 (potencias entre 5.87 % y 100 %).

Cuando las distribuciones alternativas son asimétricas las pruebas registran potencias cercanas a 100 %, la potencia mínima es 98.43 %. Por lo tanto, cualquiera de las 7 pruebas sería adecuada para realizar pruebas de Normalidad Multivariada.

Para las distribuciones alternativas que pertenecen al grupo de distribuciones con algunas

Distribución Multivariada	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
Normal	DH	DH	R92	DH	DH	DH
mezcla tipo 1, p=0.9	A_{nk}^2	A_{nk}^2	R92	R83	R83	R92
mezcla tipo 1, p=0.788675	A_{nk}^2	HZ	R92	HZ	HZ	DH
mezcla tipo 1, p=0.5	A_{nk}^2	HZ	R92	HZ	HZ	DH
mezcla tipo 2, p=0.9	R92	A_{nk}^2	R92	R92	R92	R83
mezcla tipo 2, p=0.788675	R92	HZ	R92	R83	HZ	R92
mezcla tipo 2, p=0.5	A_{nk}^2	A_{nk}^2	R92	A_{nk}^2	HZ	A_{nk}^2
mezcla tipo 3, p=0.9	R92	R92	R92	A_{sum}^2	DH	R92
mezcla tipo 3, p=0.788675	R92	A_{nk}^2	R92	A_{sum}^2	DH	R92
mezcla tipo 3, p=0.5	R92		R92	A_{sum}^2	HZ	R92
mezcla tipo 4, p=0.9	R92	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92	A_{sum}^2	HZ	R83
mezcla tipo 4, p=0.788675	A_{nk}^2	HZ	R92	A_{sum}^2	HZ	DH
mezcla tipo 4, p=0.5	A_{nk}^2	HZ	R92	HZ	HZ	DH
mezcla tipo 5, p=0.9	DH	DH	R92	DH	DH	DH
mezcla tipo 5, p=0.788675	DH	DH	R92	DH	DH	DH
mezcla tipo 5, p=0.5	A_{nk}^2	DH	HZ	A_{sum}^2	DH	DH
Uniforme	HZ	HZ	A_{nk}^2	R92	HZ	HZ
Pearson Tipo II ($m = 10$)	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	HZ	HZ	HZ
t de Student 10 gl	DH	DH	R92	DH	DH	DH
Cauchy	HZ	HZ				
Ji cuadrada 1 gl						
Lognormal	R92					
Khintchine	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ
Lambda de Tukey	A_{nk}^2	A_{nk}^2	R92	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2
PEG	R92	R92	R92			

Cuadro 3.31: Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.10$

características iguales a las de la distribución Normal la mejor prueba es A_{nk}^2 , en segundo lugar están A_{sum}^2 HZ y R92.

3.7.3. Análisis conjunto con $\alpha = 0.01$

En el Cuadro 3.33 se muestran las pruebas con mayor potencia para cada escenario. Del Cuadro se pueden observar algunas situaciones interesantes. Cuando la distribución alternativa es Lambda de Tukey o cuando es Pearson tipo II, excepto para $n = 100$ y $k = 10$, la mejor prueba es A_{nk}^2 . Cuando la alternativa es Khintchine la mejor prueba es HZ.

Prueba	Frecuencia	Porcentaje
R92	35	24.31
HZ	32	22.22
DH	24	16.67
A_{nk}^2	22	15.28
A_{sum}^2	6	4.17
R83	5	3.47
$A_{m\acute{a}x}^2$	1	0.69

Cuadro 3.32: Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.10$

Para $n = 25$ y $k = 10$ y la distribución alternativa una mezcla de normales la mejor prueba es R92.

De los 144 escenarios en 44 de ellos la prueba R92 resultó con mayor potencia; en segundo lugar esta la prueba HZ, 31 escenarios y en tercer lugar la prueba A_{nk}^2 , en 22 escenarios tiene la mayor potencia, ver Cuadro 3.34.

Si consideramos las dos pruebas con mayor potencia las mejores pruebas son R92 (en 79 de los 144 escenarios la potencia de esta prueba se ubica en primero o segundo lugar), A_{nk}^2 (en 64 escenarios esta prueba está en primero o segundo lugar) y HZ (en 51 escenarios aparece en primer o segundo lugar). Después están las pruebas DH, A_{sum}^2 , R83 y $A_{m\acute{a}x}^2$.

Si consideramos la mezcla de distribuciones, las pruebas que alcanzan mayores potencias en un mayor número de escenarios son R92, A_{nk}^2 y DH. Las potencias de R92 están entre 0.72 % y 3.02 %; A_{nk}^2 entre 0.80 % y 2.67 %; y DH entre 0.68 % y 3.90 %

Para el grupo de distribuciones alternativas simétricas las mejores pruebas son HZ, (potencias entre 0.73 % y 100 %, las distribuciones Pearson tipo II y t de Student presentan mayor variación en la potencia; para la distribución Cauchy las potencias son mayores que 63.13 %), A_{nk}^2 (potencias entre 0.80 % y 100 % y R92 (potencias entre 0.28 % y 100 %).

Si la distribución alternativa es asimétrica, las pruebas alcanzan potencias cercanas a 100 %, la menor potencia es 92.19 %. Por lo tanto, cualquiera de las 7 pruebas puede utilizarse para realizar pruebas de normalidad multivariada.

Si las distribuciones alternativas pertenecen al grupo de distribuciones con algunas carac-

Distribución Multivariada	$n = 25$			$n = 100$		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 10$
mvn	DH	DH	R92	DH	DH	DH
mezcla tipo 1, p=0.9	R92	A_{sum}^2	R92	R83	R92	HZ
mezcla tipo 1, p=0.788675	R92	A_{sum}^2	R92	R83	HZ	HZ
mezcla tipo 1, p=0.5	R92	DH	R92	HZ	HZ	HZ
mezcla tipo 2, p=0.9	R92	HZ	R92	DH	R92	R83
mezcla tipo 2, p=0.788675	DH	A_{nk}^2	R92	HZ	R92	R92
mezcla tipo 2, p=0.5	DH	A_{nk}^2	R92	HZ	$A_{m\acute{a}x}^2$	HZ
mezcla tipo 3, p=0.9	R92		R92	R83	R92	R92
mezcla tipo 3, p=0.788675	R92	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92	R83	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92
mezcla tipo 3, p=0.5	R92	R92	R92	A_{nk}^2	A_{nk}^2	R92
mezcla tipo 4, p=0.9	R92	A_{nk}^2	R92	HZ	R92	R92
mezcla tipo 4, p=0.788675	A_{nk}^2	$A_{m\acute{a}x}^2$	R92	HZ	$A_{m\acute{a}x}^2$	HZ
mezcla tipo 4, p=0.5	R92	A_{nk}^2	R92	HZ	HZ	HZ
mezcla tipo 5, p=0.9	R92	DH	R92	DH	DH	R92
mezcla tipo 5, p=0.788675	DH	DH	R92	DH	DH	DH
mezcla tipo 5, p=0.5	A_{sum}^2	DH	R92	A_{nk}^2	A_{nk}^2	HZ
Uniforme	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	HZ	HZ	HZ
Pearson Tipo II ($m = 10$)	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	HZ
t de Student 10 gl	DH	R83	R92	DH	DH	HZ
Cauchy	HZ	HZ	HZ			
Ji cuadrada 1 gl	R92					
Lognormal	R92	R92				
Khintchine	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ	HZ
Lambda de Tukey	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{sum}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2	A_{nk}^2
PEG	R92	R92	R92			

Cuadro 3.33: Pruebas con mayor potencia para cada distribución alternativa, tamaño de muestra y dimensión, $\alpha = 0.01$

terísticas de la distribución Normal Multivariada las mejores pruebas son A_{sum}^2 y R92, en segundo y tercer lugares están A_{nk}^2 y HZ.

Prueba	Frecuencia	Porcentaje
R92	44	30.56
HZ	31	21.53
A_{nk}^2	22	15.28
DH	16	11.11
R83	6	4.17
$A_{\text{máx}}^2$	5	3.47
A_{sum}^2	4	2.78

Cuadro 3.34: Frecuencia en la cual cada pruebas resultó con mayor potencia, de las 144 situaciones estudiadas, $\alpha = 0.01$

Capítulo 4

Conclusiones

Este trabajo se realizó con el propósito de comparar la potencia de varias pruebas de normalidad multivariada en una amplia variedad de situaciones. Se consideraron las pruebas que en estudios previos resultaron ser las mejores dentro de su categoría. De las pruebas basadas en bondad de ajuste se estudió el procedimiento de Royston (1992). De las pruebas basadas en las medidas de asimetría y curtosis multivaridas, la prueba de Doornik & Hansen (1994). Dentro de la categoría de pruebas invariantes y consistentes, se consideró la prueba de Henze & Zirkler (1990). Además, de estas pruebas, se presentan las tres versiones de la estadística de Anderson-Darling propuestas en Gracia-Medrano (1989) y la estadística de Royston (1983b).

Para realizar el estudio se usó un procedimiento de simulación que permite obtener el *p-value* exacto de las estadísticas de prueba. Al igual que en estudios sobre normalidad multivariada previos no hay una prueba única que sea la más potente en todas las situaciones estudiadas.

Una prueba es inaceptable para su uso si su correspondiente error tipo I está muy por encima de 5%. En el presente estudio las tasas del error tipo I de las siete pruebas estuvieron alrededor del 5%, la prueba R83 fue la que registró tasas ligeramente por encima del 5% (de 5.09% a 5.47%), el resto de las pruebas estuvieron alrededor del 5%. Mecklin encontró que la prueba HZ tuvo un error tipo I menor que 5%, entre 2.2% y 4.6%. Por otro lado, la prueba de R92 tuvo la potencia con el menor rango, de 4.7% a 5.3%, indistintamente del

tamaño de muestra y dimensión.

En general, se encontró que la potencia de todas las pruebas es baja contra mezclas de normales, los resultados más altos se obtuvieron para las pruebas DH y R92 y cuando la mezcla tenía medias y varianzas distintas, específicamente para las mezclas del tipo $pN_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2) + (1 - p)N_k(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1)$. Una de las razones de la baja potencia es que las mezclas representan una desviación moderada de la normalidad, los vectores de medias están cercanos. Si los vectores de medias estuvieran más distantes, seguramente la potencia se incrementará, esta es una tarea pendiente por realizar.

Para determinar que procedimientos fueron efectivos para detectar normalidad multivariada contra distribuciones con contorno elíptico se consideraron las distribuciones uniforme, Pearson tipo II, t de Student y Cauchy. En general, todas las pruebas fueron incapaces de detectar la desviación de la normalidad cuando la alternativa es Pearson tipo II, todas las potencias estuvieron por debajo de 10%. Cuando la alternativa es Cauchy, todas las pruebas tienen potencias mayores al 96%, incluso para $n = 100$ todas las pruebas alcanzan una potencia del 100%. Este resultado contrasta con los resultados de Mecklin (2000), para la alternativa Cauchy obtuvo potencias entre 3% y 6%. Mecklin (2000) también obtuvo potencias bajas para la distribución alternativa t de Student; sin embargo, en este estudio, las pruebas registraron potencias mayores que 10%.

Con respecto a la potencia contra distribuciones asimétricas, cualquier distribución que no rechace a una tasa cercana al 100% no es muy útil. Las distribuciones estudiadas dentro de esta categoría fueron la distribución Ji cuadrada y la distribución Lognormal. Todos los procedimientos tuvieron alta potencia como se esperaba, especialmente cuando n y k aumentan. Las pruebas tienen potencias de al menos 97% en todas las combinaciones de tamaño de muestra y dimensión.

Las pruebas de normalidad multivariada son de gran importancia para distribuciones como la distribución Knintchine. Esta distribución tiene la propiedad de que las marginales univariadas tienen distribución normal, mientras que la distribución conjunta no es normal. Para esta alternativa las pruebas tienen potencias que son generalmente bajas, menores de 10%. Sólo la prueba HZ registra potencias mayores que 20% hasta 100%.

La distribución de potencia exponencial generalizada tiene la propiedad de ser simétrica y mesocúrtica, pero no es normal. Todas las pruebas registran potencias, en general, mayores que 50 % bajo esta condición. Más específicamente, las pruebas A_{sum}^2 , R83 y R92 alcanzan potencias mayores del 75 %. En todos los casos se observa un aumento de la potencia al aumentar el tamaño de la muestra y dimensión.

La distribución Lambda de Tukey no fue considerada dentro del conjunto de alternativas de los estudios de Mecklin (2000) y Farrell *et al.* (2007). Cuando la alternativa es Lambda de Tukey las potencias de todas las pruebas, a excepción de la prueba DH, con mayores del 7 % hasta 100 %. El procedimiento que presenta mejor desempeño es A_{nk}^2 , con potencias mayores que 15 %. Para $n = 100$, las potencias son mayores que 90 %. Otras dos pruebas que también presentan un desempeño son A_{sum}^2 y R92.

Esta bien considerar una variedad de técnicas con diferente sensibilidad a diferentes tipos de desviaciones de la normalidad multivariada. Es adecuado emplear dos o más procedimientos a un conjunto de datos que ofrezcan una guía en la elección de una acción apropiada sobre el rechazo o no de normalidad multivariada.

Apéndice A

Ejemplo

En esta sección se analiza la normalidad multivariada del conjunto de datos *Iris setosa* originalmente considerado por Fisher (1936). Se realiza la prueba de normalidad multivariada con cada una de las pruebas consideradas en este trabajo, A_{nk}^2 , A_{sum}^2 , $A_{máx}^2$, R92, R83, DH94 y HZ. Mecklin & Mundfrom (2003) aplicaron ocho procedimientos a este conjunto de datos para probar la normalidad multivariada, los resultados se muestran en el Cuadro A.1.

Prueba	<i>Iris setosa</i>
Asimetría de Mardia	No se rechaza
Kurtosis de Mardia	No se rechaza
Mardia-Foster	Se rechaza
Royston	Se rechaza
Henze-Zirkler	No se rechaza
Mardia-Kent	No se rechaza
Romeu-Ozturk	Se rechaza
Mudholkar-Srivastava-Lin	No se rechaza

Cuadro A.1: Pruebas de normalidad multivariada a *Iris setosa*, $\alpha = 0.05$

Las pruebas se realizan con 5,000 simulaciones para obtener el *p-value* para cada una de ellas. Los resultados se muestran en el Cuadro A.2. Considerando un nivel de significancia de 0.05, todas las pruebas, excepto A_{nk}^2 , rechazan la hipótesis de normalidad multivariada para el conjunto de datos de *Iris setosa*. El resultado de la prueba R83 coincide con el resultado de Mecklin & Mundfrom (2003). En ese mismo estudio, con la prueba HZ, no se rechaza

hipótesis de normalidad multivariada de los datos contrastando con nuestro resultado. Las otras pruebas no son comparables porque no se consideraron en uno u otro estudio.

Prueba	<i>p-value</i>	Tiempo de cálculo
A_{nk}^2	0.0892	33 min
A_{sum}^2	0.0278	33 min
$A_{m\acute{a}x}^2$	0.0198	33 min
DH	0.0048	17 seg
HZ	0.0406	1.5 min
R83	0	12 seg
R92	0	13 seg

Cuadro A.2: Pruebas de normalidad multivariada a *Iris setosa*, con 5,000 simulaciones

En la última columna del Cuadro A.2 aparece el tiempo de ejecución de cada prueba con las 5,000 simulaciones en una computadora personal con procesador AMD Athlon 64 X2 Dual Core 3 GHz, con 2 GB de memoria RAM y sistema operativo Windows 7 de 64 bits. Es importante aclarar que las pruebas A_{nk}^2 , A_{sum}^2 y $A_{m\acute{a}x}^2$ se realizan simultáneamente. Realizar estas pruebas por separado no reduciría significativamente el tiempo de ejecución.

Bibliografía

- D' Agostino, R. B. 1970. Transformation to Normality of the Null Distribution of g_1 . *Biometrika*, **57**, 679–681.
- Doornik, J.A., & Hansen, D. 1994. *An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality*. Nuffield College, Oxford.
- Epps, T. W., & Pulley, L. B. 1983. A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika*, **70**, 723–726.
- Farrell, P., Salibian-Barrera, M., & Naczk, K. 2007. On Tests for Multivariate Normality and Associated Simulation Studies. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **77**(12), 1065–1080.
- Fisher, R.A. 1936. The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems. *Annals of Eugenics*, **7**, 179–188.
- Ghurye, S. G., & Olkin, I. 1969. Unbiased Estimation of some Multivariate Probability Densities and Related Functions. *Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 1261–1271.
- Gracia-Medrano, L. 1989. *Estudio Comparativo de Pruebas de Bondad de Ajuste Para la Distribucion Normal Multivariada*. M.Phil. thesis, UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades, Unidad Academica de los Ciclos Profesional y de Posgrado, Mexico, D.F.
- Henze, N., & Zirkler, B. 1990. A Class of Invariant Consistent Tests for Multivariate Normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **19**, 3595–3617.

- Looney, S.W. 1995. How to use tests for univariate normality to assess multivariate normality. *American Statistician*, **49**, 64–70.
- Mardia, K. 1970. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**, 519 – 530.
- Mecklin, C. J., & Mundfrom, D. J. 2003. On Using Asymptotic Critical Values in Testing for Multivariate Normality. *InterStat*, disponible online en <http://interstat.stat.vt.edu/InterStat/ARTICLES/2003/articles/J03001.pdf>.
- Mecklin, C. J., & Mundfrom, D. J. 2005. A Monte Carlo comparison of the Type I and Type II error rates of tests of multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**, 93–107.
- Mecklin, C.J. 2000. *A comparison of the power of classical and newer tests of multivariate normality*. Ph.D. thesis, University of Northern Colorado.
- Naczk, K. 2004. *Assessing Tests for Multivariate Normality*. M.Phil. thesis, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario.
- Royston, J. P. 1982a. Algorithm AS 181: The W tests for normality. *Applied Statistics*, **31**, 176–180.
- Royston, J. P. 1982b. An extension of Shapiro-Wilk’s W tests for normality to large samples. *Applied Statistics*, **31**, 115–124.
- Royston, J. P. 1983a. Correction: Algorithm AS 181: The W test for normality. *Applied Statistics*, **32**, 224.
- Royston, J.P. 1983b. Some Techniques for Assessing Multivariate Normality Based on the Shapiro-Wilk W . *Applied Statistics*, **32**, 121–133.
- Royston, J.P. 1992. Approximating the Shapiro-Wilk W -Test for Non-Normality. *Statistics and Computing*, **2**(3), 117–119.

- Sarhan, A. E., & Greenberg, B. G. 1956. Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly double censored samples. *Annals of Mathematical Statistics*, **27**, 427–451.
- Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. 1965. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, **52**, 591–611.
- Shenton, L.R., & Bowman, K.O. 1977. A Bivariate Model for the Distribution of $\sqrt{b_1}$ and b_2 . *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 206–211.
- Wilson, E. B., & Hilferty, M. M. 1931. The distribution of chi-square. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **17**, 684–688.