



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ACELERACIÓN UNIFORME, CAMPOS GLUÓNICOS Y PÉRDIDA DE ENERGÍA EN
ACOPLAMIENTO FUERTE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ERIC JOSAFAT PULIDO PADILLA

TUTOR PRINCIPAL
ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL
DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Aceleración Uniforme, Campos Gluónicos y Pérdida de Energía en Acoplamiento Fuerte

Eric Josafat Pulido Padilla¹

2013

¹e-mail: ericpulido@suv.udg.mx

Resumen

En este trabajo estudiamos algunos aspectos sobre el comportamiento de cuerdas en el espacio anti-de Sitter (AdS), o equivalentemente, los “tubos de flujo” en teorías de campo conformes (CFT) fuertemente acopladas¹. Para el caso en que el “tubo de flujo” tiene como fuente un quark uniformemente acelerado (o, más en general, un quark que asintóticamente tiene aceleración uniforme en el pasado remoto), encontramos que el encaje de la cuerda dual conocida anteriormente termina de manera no física en el horizonte de la hoja de mundo, e identificamos la continuación correcta, que codifica una onda de choque gluónica.

Por otro lado, para movimientos arbitrarios del quark mostramos que, contrario a interpretaciones anteriores, el horizonte en la hoja de mundo en general *no* representa una línea divisoria entre las porciones de la cuerda que son, respectivamente, duales al quark y a la radiación gluónica emitida por el mismo.

Abstract

We study a few assorted questions about the behavior of strings on anti-de Sitter spacetime (AdS), or equivalently, ‘flux tubes’ in strongly-coupled conformal field theories (CFTs). For the case where the ‘flux tube’ is sourced by a uniformly accelerated quark (or, more generally, a quark that asymptotes to uniform acceleration in the remote past), we point out that the dual string embedding known heretofore terminates unphysically at the worldsheet horizon, and identify the correct continuation, which is found to encode a gluonic shock wave.

Also, for arbitrary quark motion we show that contrary to common understanding the worldsheet horizon does *not* in general represent a dividing line between the portions of the string respectively dual to the quark and to the gluonic radiation emitted by it.

¹Este trabajo dió lugar al artículo arXiv:1210.4175: *No Line on the Horizon: On Uniform Acceleration and Gluonic Fields at Strong Coupling*, el cual ya ha sido publicado en la revista *JHEP*.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	7
2.1. Teoría de Cuerdas	7
2.1.1. Cuantización covariante antigua	11
2.1.2. Supercuerdas	18
2.1.3. Interacciones	23
2.1.4. D-branas y Dualidad T	25
2.2. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$	30
2.3. Espacio Anti de-Sitter AdS	33
3. Dualidad AdS/CFT	36
3.1. Introducción	36
3.1.1. Antecedentes	37
3.2. La Dualidad	38
3.2.1. Argumentación	38
3.2.2. Versiones	41
3.2.3. El diccionario $AdS-CFT$	41
3.2.4. Simetrías	43
3.3. Evidencia de la Dualidad	43
3.4. Quarks y D7-branas	43
3.5. Extensión a Temperatura Finita	45
3.5.1. Potencial $q - \bar{q}$ y Apantallamiento	46
4. Pérdida de Energía	47
4.1. Antecedentes	47
4.1.1. Configuración	47
4.1.2. Pérdida de Energía en un Medio a Velocidad Constante	48

4.2.	El Quark Aislado en SYM $\mathcal{N} = 4$	48
4.3.	La cuerda en AdS puro (Mikhailov)	49
4.4.	Par Quark-Antiquark	54
5.	Cuerdas en AdS: Perfiles, Radiación y Aceleración Uniforme	56
5.1.	Azotar de la cuerda	59
5.2.	Aceleración Uniforme	61
5.3.	Flujo de Energía-Momento en la Hoja de Mundo	70
6.	Conclusiones	79

Agradecimientos

A los que esperan en esta página,
Encontrarse entre tantos otros nombres
y halagos
les debo una disculpa
y mi eterna gratitud.

Hacia otros mi deuda aumentará aun más;
a sus ojos no llegarán mis palabras de aprecio
(no por este medio).

A este extravagante gesto no lo fustiga
la ingratitud,
la cobardía,
el cinismo moderno,
la autolujuria por mi propia letra...

Ante tí tan solo está
la parálisis del éxtasis sublime
que me provoca estar entre ustedes.

Ni una palabra más
que un retribuido canto.

Capítulo 1

Introducción

Métodos no perturbativos para teorías fuertemente acopladas

El estudio de las teorías de norma resulta fundamental para nuestro entendimiento del universo y, en particular, de la materia con la que interactuamos diariamente. Durante la mayor parte del siglo XX fue posible desarrollar la tecnología para poder tratar las teorías de norma en el régimen perturbativo, el cual hoy cuenta con uno de los formalismos más poderosos de la física. Sin embargo, el estudio de estas teorías en el régimen de acoplamiento fuerte aún permanece como un problema técnicamente complicado e interesante desde el punto de vista teórico, dado que las herramientas matemáticas con las que contamos no nos permiten estudiarlas con la misma facilidad en este régimen. En particular, una de las cuatro fuerzas fundamentales, la fuerza fuerte, es descrita por la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) cuyo régimen no perturbativo es vital para describir las propiedades de la materia atómica y por tanto el mundo que nos rodea.

Prueba de la importancia de QCD para la física moderna es que dos de los proyectos experimentales más grandes de la actualidad (y en sí mismos, de la historia), son los programas de colisiones de iones pesados en RHIC y en el LHC. Estos experimentos procuran expandir nuestro conocimiento de las propiedades de QCD en los regímenes de altas temperaturas/densidades, donde presenta la fase conocida como plasma de quarks y gluones (QGP), caracterizada por la disminución de la interacción fuerte entre quarks y gluones hasta el punto donde se produce el desconfinamiento de los quarks. La evidencia experimental apunta considerablemente hacia la conclusión de que bajo las temperaturas a las que se genera el QGP en los aceleradores, el

sistema se encuentra fuertemente acoplado, lo cual imposibilita su estudio mediante métodos perturbativos.

Es posible estudiar algunas de las características de acople fuerte en QCD mediante métodos numéricos provenientes de la formulación discretizada de teorías de norma (esfuerzo conocido como QCD en la red), pero éstos resultan difíciles de aplicar en situaciones dependientes del tiempo. Sin embargo, el entendimiento de las características dinámicas del QGP resulta esencial si se quieren estudiar los procesos que se generan en las colisiones de iones pesados. Es aquí donde la teoría de cuerdas aporta una propuesta que, aunque no ataca el problema directamente, proporciona información sobre teorías fuertemente acopladas similares que puedan dar pie a mejorar nuestra comprensión cualitativa de QCD.

La correspondencia norma/gravedad (también conocida como conjetura de Maldacena o dualidad holográfica o AdS/CFT)[1, 2] es una herramienta de cuerdas que nos permite estudiar ciertas teorías de norma en el régimen de acoplamiento fuerte, y ha sido utilizada con éxito a lo largo de los últimos quince años, acumulando una enorme cantidad de evidencia a su favor a pesar de que, en términos de rigor matemático, se mantiene a nivel de conjetura. El concepto genérico de dualidad se refiere a una equivalencia entre dos teorías que a primera vista parecen muy diferentes. Como se explicará en el capítulo 3, la manera en que la dualidad norma/gravedad nos permite obtener resultados de teorías de norma es a través del estudio de fondos gravitacionales que de manera sorprendente dan una descripción equivalente pero mucho más accesible de la teoría de interés. Aunque la motivación es QCD, a la fecha no tenemos una descripción equivalente a ella a través de un fondo gravitacional que nos permita explorarla con los métodos de la dualidad norma/gravedad. Sin embargo, es posible analizar ciertas teorías no abelianas fuertemente acopladas que comparten algunas propiedades con QCD, lo cual resulta muy provechoso para desarrollar intuición sobre el régimen de acoplamiento fuerte y, en algunos pocos casos, ha conducido incluso a un acuerdo semi-cuantitativo con resultados experimentales referentes a la interacción fuerte.

A partir del tipo de fondo y condiciones en que se estudie el dual gravitacional, es posible cambiar algunas de las propiedades de la teoría de norma dual y, por ejemplo, el contenido de campos o el número de supersimetrías (entre otras cosas) dependerá mucho de esta elección de fondo.

Nosotros estudiaremos la teoría de norma conocida como super Yang-Mills con 4 supersimetrías (SYM $\mathcal{N} = 4$), una teoría no confinante cuyo

contenido describiremos con cierto detalle en el capítulo 3. El dual gravitacional correspondiente al vacío de esta teoría es conocido y resulta ser $AdS_5 \times S^5$. Cabe mencionar que también se conoce el dual gravitacional de SYM $\mathcal{N} = 4$ para temperatura finita, y corresponde a un agujero negro que es asintóticamente AdS . En este contexto es posible plantear, por ejemplo, el problema de la pérdida de energía de un quark debida a su trayecto por el QGP, el cual es de interés particular para los experimentos realizados en RHIC/LHC.

SYM $\mathcal{N} = 4$ no tiene en su contenido quarks, pero existe una receta para agregárselos al dual gravitacional: en el lenguaje dual, los quarks corresponden a cuerdas abiertas que terminan en objetos conocidos como D7-branas. Más en detalle, el quark corresponderá en la descripción dual a la punta de la cuerda, y la información sobre su campo gluónico estará codificada en el resto de la cuerda.

En el contexto de la correspondencia, estudiar la dinámica de un quark moviéndose en Minkowski se traduce a resolver y analizar las ecuaciones de movimiento de la cuerda en AdS_5 . Por esta razón, nuestro discurso se desarrollará en el contexto de la dinámica de cuerdas en este fondo, y esto se verá reinterpretado, por medio de la correspondencia, en información útil del lado de la teoría de norma (por ejemplo, sobre la pérdida de energía).

A pesar de que es difícil resolver las ecuaciones de movimiento de la cuerda a partir del movimiento general del extremo (dual al quark), este problema ha sido resuelto en [3] para el caso del quark aislado en $T = 0$. La principal lección es que el comportamiento de la cuerda en un punto dado está determinado por el movimiento del extremo en un tiempo retardado correspondiente. Tener esta solución general para el movimiento de la cuerda nos permite entonces estudiar la dinámica del quark en general y plantearnos preguntas, por ejemplo, sobre los tubos de flujo generados por el quark, o sobre el fenómeno de la radiación emitida por el mismo tras un movimiento arbitrario. Estos serán los dos problemas sobre los que se enfocará esta tesis.

Pérdida de Energía a $T = 0$

Volviendo al caso de la pérdida de energía en un medio térmico, con estos ingredientes se han hecho trabajos importantes para SYM $\mathcal{N} = 4$ (véase, por ejemplo, [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]). En este caso general, el quark pierde energía de dos maneras distintas: al moverse en el medio térmico (experimentando fricción contra el mismo), y por radiación (cuando se acelera dicha carga).

Con la finalidad de arrojar más luz sobre trabajos anteriores, y también en el espíritu del interés teórico, en esta tesis estudiaremos el caso de pérdida de energía en el vacío ($T = 0$). El estudio de la radiación emitida por una carga que se acelera es uno de los problemas centrales en cualquier teoría de norma y, como veremos, la correspondencia norma/gravedad nos permitirá enfrentarlo en el previamente inaccesible régimen de acoplamiento fuerte.

Una parte fundamental para entender la situación del lado de la teoría de norma es construir de manera correcta la traducción de la dinámica de gravedad en AdS . Dado que el cuerpo de la cuerda es dual al campo gluónico generado por el quark, es natural esperar que existan dos segmentos de la cuerda que podamos identificar geoméricamente como las contribuciones de la energía intrínseca al quark y aquella perdida debido a la radiación. Para este fin, se intuiría que alguna curva físicamente relevante, como el horizonte en la hoja de mundo o la curva del límite estacionario separa la cuerda en estas dos contribuciones. En general existe el consenso [10, 11, 12, 13, 14, 5] de que el horizonte juega este papel, al separar causalmente dos partes de la cuerda en un tiempo dado. De acuerdo con este razonamiento, la tasa de pérdida de energía de un quark a un momento dado debería de coincidir con la tasa a la que la energía de la cuerda cruza esta curva.

Por otro lado, uno de los resultados del análisis algebraico-diferencial de la cuerda discutido en [3, 4, 13, 14] es la identificación de la energía total de la misma como una suma de dos factores: la energía intrínseca del quark y la energía total radiada hasta un tiempo retardado dado (similar a la fórmula de Lienard para el electromagnetismo clásico). Esta separación es puramente algebraica y no está expresada de manera explícita en términos de la configuración geométrica de la cuerda.

Es interesante entonces entender la relación que existe entre estas dos interpretaciones de la energía total de la cuerda en relación con su dinámica, dado que en general cada una podría llevar a diferentes resultados para el cálculo de la energía radiada por el quark. De hecho uno de nuestros resultados es que, en general, *no* coinciden las tasas de pérdida de energía de estos dos métodos, y el análisis y comparación de ambos nos lleva a concluir que solo el método algebraico-diferencial descrito en [3, 4, 13, 14] da el resultado correcto para el caso general.

Como se ha mencionado, se han realizado con éxito algunos cálculos sobre la pérdida de energía por medio del método geométrico antes descrito, sin embargo, en general los resultados han sido correctos debido a particulari-

dades de los casos analizados (por ejemplo, el caso de aceleración uniforme). Para otros tipos de movimiento la tasa de energía perdida predicha por este método difiere de la esperada formula de Lienard encontrada en [3].

Esta conclusión sobre la separación de las diferentes contribuciones de la energía es útil pues permite plantear a futuro una extensión a temperatura finita o en otros fondos de manera correcta (sin basarnos en el horizonte en la hoja de mundo, el cual en sí, en general, es difícil de localizar).

Aceleración Uniforme del Quark

Por otro lado, la solución general de la cuerda en términos del movimiento retardado del extremo nos permite hacernos preguntas sobre el comportamiento de los “tubos de flujo” en la teoría de norma. Estrictamente hablando, en SYM $\mathcal{N} = 4$ no hay tubos de flujo: la teoría no confina, y las líneas de campo tienden a esparcirse de forma coulombiana. En este caso investigamos si es que existen movimientos del quark/extremo para los cuales sea posible que el tubo de flujo deje de esparcirse (aun cuando después vuelva a hacerlo). Encontramos que, en efecto, tales movimientos existen y un caso bien conocido donde ocurre esto es el del quark con aceleración uniforme en el vacío. Estudiaremos este caso en detalle.

Cabe mencionarse que la solución para una pareja quark-antiquark en aceleración uniforme ya ha sido encontrada en [5], y coincide en su forma (para partes de la cuerda debajo del horizonte) con el caso del quark aislado de [3]. Sin embargo no se debe de entender esta similitud como que la continuación del tipo quark-antiquark es la única posible para continuar la solución en el caso de quark aislado.

En este aspecto aportamos a este discurso al encontrar que la solución de [3], para el caso de aceleración uniforme, termina de manera *no* física, dado que solo se extiende hasta el horizonte de la hoja de mundo, en lugar de hacerlo hasta el horizonte de *AdS*. Esto nos lleva a buscar la continuación correcta, lo cual resulta importante pues se necesita toda la cuerda para describir de manera completa el quark y su campo gluónico desde el principio de los tiempos.

En nuestro trabajo hemos encontrado la continuación correcta para este movimiento del quark/extremo, y su forma y características codifican una onda de choque producida por la dinámica del quark en el principio de los tiempos cuando su velocidad se aproxima a la de la luz (dado que tiene aceleración uniforme).

Los resultados aquí descritos han dado lugar al artículo [15], el cual ya se ha publicado en JHEP.

Esquema de la Tesis

Este trabajo está constituido con dos objetivos en mente: presentar los resultados de nuestra labor (descritos brevemente en las dos subsecciones anteriores), y suministrar al lector los elementos mínimos para manejar el lenguaje y herramientas que se necesitan para entender los puntos principales antes descritos.

En el capítulo 2 se presenta una breve introducción a la teoría de cuerdas con la finalidad de aclarar el lenguaje y tipo de razonamientos característicos de esta teoría. En el capítulo 3 se presenta la correspondencia norma/gravedad y algunas de sus aplicaciones. En el capítulo 4 se trata con más detalle el problema de radiación en la descripción dual a super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ a temperatura cero. En el capítulo 5 se presentan nuestros resultados sobre la exploración de la cuerda dual al quark experimentando aceleración uniforme, además del análisis sobre la pérdida de energía para quarks en SYM $\mathcal{N} = 4$.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección se presentan algunos de los conceptos necesarios para discutir la dualidad AdS/CFT. Particularmente nos enfocamos en los campos de norma que surgen naturalmente en el contexto de cuerdas y la relación entre D-branas y cuerdas abiertas.

2.1. Teoría de Cuerdas

La teoría de cuerdas tiene como punto de partida la descripción cuántica y relativista de objetos extendidos en una dimensión, y la podemos concebir como una generalización natural que añade estructura adicional a las teorías cuánticas de campo convencionales. Las consecuencias de esta consideración son diversas y de importancia para la física teórica actual (particularmente la posibilidad de estudiar una teoría consistente de gravedad cuántica a nivel perturbativo); en este trabajo nos enfocaremos en el estudio de teorías de norma supersimétricas a partir de teoría de cuerdas.

La acción clásica para cuerdas es la generalización de la acción usual de la partícula relativista

$$S_{\text{particula}} = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}, \quad (2.1)$$

donde se está implementando la convención de suma de Einstein y el cálculo

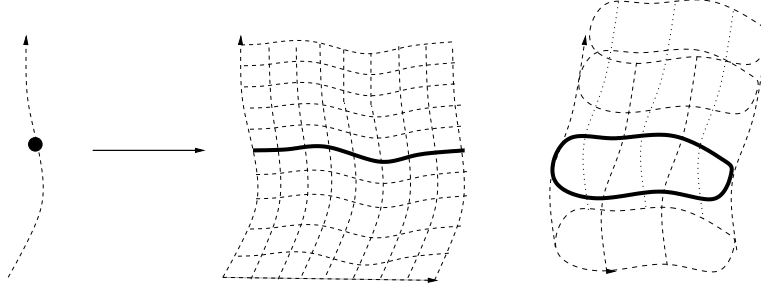


Figura 2.1: Representación gráfica de cuerdas abiertas y cerradas como extensiones de la partícula clásica

se desarrolla en el espacio-tiempo Minkowskiano D -dimensional:

$$X^\mu X_\mu = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu,$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, \dots, +).$$

Esta acción es proporcional al tiempo propio a lo largo de la línea de mundo de la partícula, por tanto es invariante de Poincaré. Se puede también verificar fácilmente que cualquier reparametrización $X'^\mu(\tau'(\tau))$ con $\tau'(\tau)$ alguna función monótonica de la parametrización original deja la acción invariante.

De manera análoga a la partícula puntual que traza una línea de mundo unidimensional, nuestra cuerda dibujará en el espacio-tiempo una superficie bidimensional a la que se le llama *hoja de mundo*, la cual denotaremos M , y necesitará dos parámetros (τ, σ) para ser descrita. Del mismo modo en que el tiempo propio es una cantidad independiente del marco en que se mida, el área de esta superficie es la misma para todos los observadores. Bajo estas observaciones, la acción de cuerdas debe ser proporcional al área de la hoja de mundo e independiente de la parametrización $X^\mu(\tau, \sigma)$ que seleccionemos. La acción más simple que cumple con estos requerimientos es la acción de Nambu-Goto:

$$S_{NG} = -T \int d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-\det h_{ab}}, \quad (2.2)$$

$$\sigma^0 = \tau \quad \sigma^1 = \sigma \quad a, b = 0, 1 \quad (2.3)$$

donde $h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu$ es la métrica inducida en la hoja

de mundo y la constante T es la tensión de la cuerda, la cual se utiliza convencionalmente para definir a α' , la llamada pendiente de Regge, mediante $T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$. De manera equivalente, se puede expresar la tensión mediante la escala de longitud de cuerdas $l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$. Esta acción cuenta con dos tipos de simetrías, las primeras siendo las isometrías del espacio-tiempo

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu \quad (2.4)$$

que pertenecen al grupo de Poincaré en D dimensiones. El otro grupo de simetrías es el de difeomorfismos en dos dimensiones,

$$\tau' = \tau'(\tau, \sigma), \quad (2.5)$$

$$\sigma' = \sigma'(\tau, \sigma), \quad (2.6)$$

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (2.7)$$

Para realizar cálculos en espacio-tiempos curvados, la acción de Nambu-Goto permite la extensión natural mediante el reemplazo en la acción de $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica $G_{\mu\nu}$ correspondiente. En general, el espectro y la dimensionalidad de la teoría se pueden ver modificados por este cambio de fondo gravitacional. Para consultar esto con más detalle véase por ejemplo [16], [17].

En la sección siguiente desarrollaremos el cálculo de la cuantización de la cuerda bosónica con el objetivo de explicar la manera en que los diferentes campos de la teoría de cuerdas surgen a partir de esta cuantización. Para esta tarea es preferible utilizar la acción de Polyakov, la cual es equivalente a la de Nambu-Goto clásicamente y se encuentra definida mediante

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.8)$$

$$\gamma = \det \gamma_{ab},$$

(Esta acción fue descubierta simultáneamente por L. Brink, P. Di Vecchia, P.S. Howe, S. Deser, y B. Zumino, por lo que también se conoce mediante esta serie de apellidos). Se puede obtener de nuevo Nambu-Goto al encontrar las ecuaciones de movimiento para γ_{ab} y sustituirlas en la acción de Polyakov. Al introducir la métrica independiente γ_{ab} en la hoja de mundo se elimina la raíz cuadrada, pasando a una descripción más simétrica, lo cual facilita el análisis de la teoría. Las simetrías de S_P son:

- Invariancia D -dimensional de Poincaré:

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \quad (2.9)$$

$$\gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = \gamma_{ab}(\tau, \sigma).$$

- Invariancia bajo difeomorfismos en la hoja de mundo

$$\begin{aligned}
\tau' &= \tau'(\tau, \sigma), \\
\sigma' &= \sigma'(\tau, \sigma), \\
X'^{\mu}(\tau', \sigma') &= X^{\mu}(\tau, \sigma) \\
\frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{ab}(\tau', \sigma') &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

- Invariancia de Weyl en la hoja de mundo

$$\begin{aligned}
X'^{\mu}(\tau, \sigma) &= X^{\mu}(\tau, \sigma), \\
\gamma'^{ab}(\tau, \sigma) &= \exp(2\omega(\tau, \sigma)) \gamma^{ab}(\tau, \sigma).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

para cualquier función $\omega(\tau, \sigma)$.

Cuando consideramos la extensión de la hoja de mundo, podemos pensar en la variable τ como la parte temporal en la hoja de mundo y σ como la parte espacial, cubriendo la región

$$-\infty < \tau < \infty \quad 0 \leq \sigma \leq \pi$$

para la cuerda abierta y

$$-\infty < \tau < \infty \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

para la cuerda cerrada.

Si variamos esta acción con respecto a los campos X^{μ} , tendremos

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\pi, 2\pi} d\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta X^{\mu} \nabla^2 X_{\mu} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (-\gamma)^{1/2} \delta X^{\mu} \partial^{\sigma} X_{\mu} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi, 2\pi}
\end{aligned}$$

donde el término de borde podrá anularse si

$$\partial^{\sigma} X_{\mu}(\tau, 0) = \partial^{\sigma} X_{\mu}(\tau, \pi) \tag{2.12}$$

$$\longrightarrow n^a \partial_a X_{\mu} = 0 \quad \text{en la frontera } \partial M, \tag{2.13}$$

n^a siendo un vector normal a la curva ∂M . Estas son simplemente condiciones de frontera de Neumann, es decir, de extremo libre para una cuerda abierta. Por otro lado el término de borde también se anulará si

$$\begin{aligned} X(\tau, 0) &= X(\tau, 2\pi), \\ \partial^\sigma X_\mu(\tau, 0) &= \partial^\sigma X_\mu(\tau, 2\pi), \\ \gamma_{ab}(\tau, 0) &= \gamma_{ab}(\tau, 2\pi) \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde tendremos condiciones de borde periódicas que corresponden a la cuerda cerrada. Estas son las únicas dos condiciones que son compatibles con la invariancia de Poincaré. Es posible analizar además el caso de condiciones de borde de Dirichlet, lo cual está íntimamente relacionado con la aparición de los objetos llamados D-branas en la teoría, mas esto se explicará en la sección 2.1.4.

A partir de la métrica γ_{ab} en la hoja de mundo, el tensor de energía momento está definido como

$$\begin{aligned} T^{ab} &= -4\pi (-\gamma)^{-1/2} \frac{\partial S_p}{\partial \gamma_{ab}} \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Al variar γ_{ab} en la acción (2.8), tenemos que sus ecuaciones de movimiento nos llevarán a las constricciones clásicas

$$T_{ab} = 0. \tag{2.16}$$

2.1.1. Cuantización covariante antigua

Estaremos realizando cálculos en el espacio de Minkowski por simplicidad. La literatura utiliza principalmente tres métodos para llegar al espectro de la cuerda bosónica (o para la supercuerda): la cuantización en la norma del cono de luz, la cuantización covariante antigua y la cuantización BRST (estos métodos pueden encontrarse en [16, 17, 18]).

Debe enfatizarse que todos estos métodos corresponden a primera cuantización de la cuerda. El camino de segunda cuantización sigue siendo un área de investigación activa en lo que se conoce como *Teoría de campo de cuerdas* (véase por ejemplo [19]).

En esta sección estaremos utilizando la cuantización covariante antigua (CCA). Aunque la cuantización en la norma del cono de luz es un camino más rápido para llegar al espectro y la dimensión crítica, la CCA, como su nombre lo indica, permite hacerlo de manera covariante bajo Poincaré.

La métrica de la hoja de mundo tiene 3 componentes independientes

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{10} = \gamma_{01},$$

y la invariancia ante reparametrizaciones de τ, σ nos permite elegir dos de ellas. La componente restante la podemos fijar mediante una transformación de Weyl. De esta manera podemos elegir la norma plana

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

a la que siempre podemos llegar localmente (y globalmente si no existen obstrucciones topológicas). Con esta métrica la acción de Polyakov se reduce a

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left(\dot{X}^2 - X'^2 \right), \quad (2.18)$$

con el Hamiltoniano correspondiente

$$H = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma \left(\dot{X}^2 + X'^2 \right), \quad (2.19)$$

lo cual lleva a ecuaciones de onda para los campos X^μ

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0 \quad (2.20)$$

y la siguiente forma para el tensor de energía-momento

$$T_{01} = T_{10} = \frac{1}{\alpha'} \dot{X} \cdot X', \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{\alpha'} \left(\dot{X}^2 + X'^2 \right). \quad (2.21)$$

De aquí podemos observar que la traza del tensor energía-momento es nula: $T^a_a = 0$, lo cual es consecuencia directa de la invariancia de Weyl. Por otro lado, si elegimos las coordenadas del cono de luz en la hoja de mundo

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \quad (2.22)$$

tendremos que las derivadas y la métrica toman la forma

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}), \quad \begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

lo que traduce la ecuación de movimiento a

$$\partial_+ \partial_- X^{\mu} = 0. \quad (2.24)$$

Esta última ecuación nos indica que la solución general para los campos X^{μ} es una combinación lineal de partes “izquierdas” y “derechas”

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = X_I^{\mu}(\sigma^+) + X_D^{\mu}(\sigma^-). \quad (2.25)$$

La solución más general a la ecuación de movimiento está dada por

$$\begin{aligned} X^{\mu}(\tau, \sigma) = & x^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu} \tau + \\ & + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^{\mu} e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{\mu} e^{-in(\tau+\sigma)}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde x^{μ} , p^{μ} , definidos como las variables del centro de masa mediante

$$x^{\mu}(\tau) = \int_0^{\pi} d\sigma X^{\mu}(\tau, \sigma), \quad (2.27)$$

$$p^{\mu}(\tau) = \int_0^{\pi} d\sigma \Pi^{\mu}(\tau, \sigma), \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

son los grados de libertad de la partícula clásica, y los demás son los modos de excitación de la cuerda derechos e izquierdos. Hemos utilizado en esta última ecuación la densidad de momento canónica,

$$\Pi^{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}. \quad (2.30)$$

Esta solución general corresponde a la cuerda cerrada, y si imponemos la condición de frontera de la cuerda abierta con extremos libres tendremos

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} e^{in(\tau-\sigma)} \cos n\sigma. \quad (2.31)$$

Podemos ver que en el caso de la cuerda cerrada tenemos modos derechos e izquierdos que se mueven a lo largo de ella de manera independiente, mientras que para la cuerda abierta solo existe un tipo de modo debido a las condiciones de frontera que los relacionan entre sí. Las componentes del tensor energía momento en estas coordenadas serán

$$T_{++} = \frac{1}{\alpha'} \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0, \quad T_{--} = \frac{1}{\alpha'} \partial_- X \cdot \partial_- X = 0, \quad (2.32)$$

mientras que $T_{+-} = T_{-+} = 0$ es el enunciado de traza nula antes mencionado. Podemos desarrollar las componentes en modos de Fourier mediante las siguientes series

$$T_{++} = \sum_n L_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad T_{--} = \sum_n \tilde{L}_n e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (2.33)$$

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{-m} \cdot \alpha_{n+m} \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_{n+m}, \quad (2.34)$$

con L_n y \tilde{L}_n siendo los llamados generadores de Virasoro. En el caso de la cuerda abierta, dado que tenemos condiciones de frontera de Neumann, solo nos quedamos con un conjunto de generadores

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{-m} \cdot \alpha_{n+m}. \quad (2.35)$$

Ahora podemos seguir el proceso de cuantización estándar aplicando las siguientes reglas de conmutación

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau) \right] = -i\delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

$$\left[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau) \right] = 0, \quad (2.37)$$

$$\left[\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), \dot{X}^\nu(\sigma', \tau) \right] = 0, \quad (2.38)$$

que se traducen en términos de los modos de Fourier para la cuerda en

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = [x^\mu, x^\nu] = [p^\mu, p^\nu] = 0. \quad (2.41)$$

En analogía con el oscilador armónico cuántico reconocemos que los operadores con $n < 0$ son los operadores de creación, mientras que aquellos con

$n > 0$ serán de aniquilación. A partir de estos podemos definir el vacío para las cuerdas abiertas

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_\alpha |p\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (2.42)$$

$$p|0\rangle_\alpha |p\rangle = p|0\rangle_\alpha |p\rangle \quad (2.43)$$

y para la cuerda cerrada

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (2.44)$$

$$\tilde{\alpha}_m^\mu |0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (2.45)$$

$$p|0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle = p|0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle \quad (2.46)$$

Las relaciones de conmutación son relevantes únicamente para L_0 y \tilde{L}_0 donde se definirán utilizando el producto normal de operadores en orden normal. Para la cuerda cerrada tendremos

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n, \quad (2.47)$$

mientras que para la cuerda abierta será

$$L_0 = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.48)$$

y cumplirán con las siguientes relaciones de conmutación

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{12} m (m^2 - 1) \delta_{m+n,0}. \quad (2.49)$$

Tomando en cuenta las constricciones (2.32) para T_{++} y T_{--} , es posible identificar los estados físicos mediante las condiciones

$$L_m |\psi_{\text{fis}}\rangle = \tilde{L}_m |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0 \quad m > 0, \quad (2.50)$$

$$(L_0 - A) |\psi_{\text{fis}}\rangle = (\tilde{L}_0 - A) |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0, \quad (2.51)$$

donde la constante A surge de la ambigüedad con la que definimos el ordenamiento de los modos.

A partir de L_0 es posible obtener la relación de capa de masa en términos de los osciladores de la cuerda. Para la cuerda abierta, (2.48) y (2.51) implican que

$$\begin{aligned} M^2 \equiv -p^2 &= \equiv \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - A \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} (N - A), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde

$$N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n.$$

Para la cuerda cerrada se tiene de modo similar

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{2}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n - 2A \right) \\ &= \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2A). \end{aligned} \quad (2.53)$$

En este segundo caso, debido a que

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0, \quad (2.54)$$

tenemos la condición de empatamiento de niveles $N = \tilde{N}$, y por tanto

$$\frac{1}{4} \alpha' M^2 = N - A = \tilde{N} - A. \quad (2.55)$$

Dentro de los estados de la teoría existen estados que cumplen con las condiciones de estado físico (2.50) y (2.51) además de ser ortogonales a todos los estados físicos. Estos estados se conocen como nulos. Un estado nulo será por tanto ortogonal a sí mismo y tendrá norma cero. El valor de la dimensionalidad de la teoría y del valor de la constante A , determinarán el número de estados nulos. Dependiendo de los valores de estas constantes, los estados del espacio de Hilbert podrán o no tener norma negativa. En la frontera entre estas dos situaciones aparece un número mayor de estados nulos. Para los valores $D = 26$ y $A = 1$ tenemos que el espectro se libra

completamente de estados con norma negativa. La teoría bosónica de cuerdas con tales valores es conocida como crítica. El espectro también está libre de estados de norma negativa con $A \leq 1$ y $D \leq 26$ y a tales teorías se les conoce como no críticas. Estas teorías han sido estudiadas en la búsqueda de una teoría de cuerdas de dimensionalidad menor, lo cual ha llevado al estudio de teorías de cuerdas en 4 dimensiones (que lamentablemente no han sido del todo satisfactorias como teorías de todo) y el modelo de juguete de teoría de cuerdas en dos dimensiones [20]. De aquí en adelante se discutirá solamente la teoría bosónica crítica, pero mantendremos sin sustituir D y A para no perder de vista estas cantidades importantes.

Analícemos ahora los primeros estados de la torre de posibles estados de estas teorías. Para la cuerda abierta tendremos el siguiente estado menos masivo

$$|0\rangle_\alpha |p\rangle \quad M^2 = -\frac{A}{\alpha'}, \quad (2.56)$$

donde podemos ver que este estado escalar (no tiene índices) será un taquión dado que la constante A es positiva, lo cual manifiesta una inestabilidad en la teoría. Afortunadamente esta característica desaparecerá cuando analicemos el caso de supercuerdas y aún así nos es útil entender esta primera teoría de cuerdas. El primer estado excitado de la teoría será

$$\alpha_{-1}^\mu |0\rangle_\alpha |p\rangle \quad M^2 = \frac{1-A}{\alpha'}, \quad (2.57)$$

que, después de y tomar en cuenta los estados nulos, pertenece a una representación vectorial en $D - 2$ dimensiones (aquellas transversas a la cuerda) del grupo de rotaciones $SO(D - 2)$ en el espacio transversal. El que este estado sea no masivo empata con el discurso anterior sobre la dimensionalidad crítica y la constante $A = 1$.

Continuando con el análisis del espectro, para la cuerda cerrada de nuevo en el estado más bajo tendremos un taquión

$$|0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle \quad M^2 = -\frac{4A}{\alpha'},$$

y el primer estado excitado estará dado por

$$\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p\rangle \quad M^2 = 0. \quad (2.58)$$

Estos estados se transforman como un tensor bajo rotaciones de $SO(D - 2)$, y formarán una representación reducible donde podremos descomponer el tensor en una parte simétrica, una antisimétrica y su traza que no se mezclarán bajo dichas rotaciones. La parte simétrica podemos identificarla como el gravitón, mientras que su parte antisimétrica corresponde a una generalización al campo de norma de Maxwell. Por otro lado, la parte de la traza corresponde al campo escalar del llamado “dilatón”. Aunque a partir del discurso anterior parece prematuro declarar que hemos encontrado gravitones (apenas estamos lidiando con la teoría libre), con un poco más de trabajo es posible encontrar que estos estados de espín 2 interactúan justo como lo dictamina la acción de Einstein-Hilbert más correcciones de orden más alto en la energía, además de que estados coherentes de la cuerda cerrada en este estado de oscilación cambian la métrica del fondo del espacio-tiempo (véase por ejemplo [16]).

2.1.2. Supercuerdas

Aunque la cuerda bosónica nos permite conocer algunas de las características básicas de la teoría de cuerdas, resulta ser inadecuada para describir la naturaleza:

- Contiene el taquión en su espectro de cuerdas cerradas, y si añadimos cuerdas abiertas a la teoría, se tendrá otro taquión adicional. Los taquiones en general apuntan hacia la inestabilidad del vacío puesto que un valor negativo de M^2 indica que estamos perturbando alrededor de un máximo.
- El espectro no contiene fermiones. Si la teoría de cuerdas busca ser una teoría que describa nuestro universo, debe incluir en su espectro partículas fermiónicas.

Cabe señalar que estas consideraciones no afectan directamente los propósitos de en esta tesis pues lo que buscamos es describir teorías lo más parecidas a QCD a través de cantidades invariantes de norma, no teorías de todo. Aun así esta extensión de la cuerda bosónica es importante para entender la teoría de cuerdas de manera más justa y completa, y será también relevante para la formulación de la correspondencia norma/gravedad.

Actualmente existe un interés fenomenológico por la supersimetría debido a que podría resolver problemas teóricos del Modelo Estándar como lo es el

problema de jerarquía, de modo que el estudio de extensiones supersimétricas a cuerdas resulta ser otra herramienta teórica esclarecedora.

Por estas razones se estudia la versión supersimétrica de la cuerda bosónica (*teoría de supercuerdas*), donde se relacionan grados de libertad fermiónicos a los bosónicos de la teoría. Existen dos formalismos básicos equivalentes en el espacio de Minkowski para añadir supersimetría a la teoría de cuerdas. La primera es incluir supersimetría en el espacio-tiempo de la teoría (*superespacio*) y es conocida como el formalismo de Green-Schwarz (GS). El segundo es añadir la supersimetría en la hoja de mundo y es conocido como formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS). Esto se logra al añadir en la hoja de mundo tantos campos fermiónicos como grados bosónicos $X^\mu(\tau, \sigma)$. El que estos dos métodos sean equivalentes bajo estas condiciones insinúa una posible relación entre la supersimetría en la hoja de mundo y en el espacio-tiempo.

La ventaja del formalismo RNS es que permite realizar la cuantización de la supercuerda covariantemente. Aunque esto no es sencillo en GS, éste tiene la ventaja de mostrar explícitamente la supersimetría del espacio-tiempo. Adicionalmente, es más fácil extender el método GS a otros fondos gravitacionales debido a que utiliza la noción de *superespacio* desde el principio (véase [17]).

Existen otros formalismos que se han desarrollado para tratar diferentes vacíos de la teoría. La tercera forma más conocida de cuantizar la supercuerda es el formalismo de Berkovits, y está relacionado con el RNS mediante una redefinición de campos. Este formalismo tiene la ventaja de cuantizar de manera covariante bajo $SO(9, 1)$ (y bajo compactificaciones a 4 dimensiones, invariancia manifiesta de super-Poincaré $SO(3, 1)$). Para una introducción véase el capítulo 5 de [21].

Discutamos ahora de manera breve el método RNS y la manera en que la supersimetría en la teoría modifica el espectro y la dimensionalidad. Para generalizar la acción de la cuerda bosónica, se introducen grados de libertad fermiónicos en la hoja de mundo. Específicamente, se introducen D fermiones de Majorana en $1 + 1$ dimensiones, que pertenecen a la representación vectorial de $SO(D - 1, 1)$. Se añade a la acción bosónica la parte usual para D fermiones libres sin masa (aquí escrita por simplicidad en la norma plana)

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (2.59)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\rho^0,$$

donde ρ^α son matrices de Dirac bidimensionales

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

y los campos fermiónicos ψ^μ están construidos mediante números de Grassmann (esto es, elementos de un álgebra que contiene los números reales que anticonmutan entre sí, y conmutan con los reales) con componentes

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}.$$

Esta acción es invariante ante las transformaciones infinitesimales

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon} \psi^\mu, \quad (2.61)$$

$$\delta \psi^\mu = \rho^\alpha \partial^\alpha X^\mu \varepsilon, \quad (2.62)$$

donde ε es un espinor de Majorana infinitesimal que tiene por componentes números de Grassmann. Esta simetría es cierta hasta un término de borde que puede eliminarse dependiendo de las condiciones de frontera. Debido a que ε no depende de τ o σ , esta es una simetría global de la hoja de mundo y nos permite mezclar campos bosónicos y fermiónicos.

A partir de este punto, el procedimiento para encontrar el espectro de supercuerdas es análogo al que se realiza para la cuerda bosónica, excepto que las condiciones de frontera involucran ahora a la parte fermiónica. Para estos campos, una variación de la acción tendrá los siguientes términos de borde

$$\begin{aligned} \delta S \sim & \int d\tau (\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-)_{\sigma=\pi} \\ & - (\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-)_{\sigma=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

que pueden anularse de varias formas. Para la cuerda abierta estas dos condiciones corresponden a los dos extremos y deben anularse de manera independiente. Esto se logra si

$$\psi_+^\mu = \pm \psi_-^\mu.$$

Podemos elegir arbitrariamente un extremo como

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=0} = \psi_-^\mu|_{\sigma=0},$$

mientras que el signo del otro es relevante y tiene dos opciones: condiciones de Ramond

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = \psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}$$

y condiciones de Neveu-Schwarz

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = -\psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}.$$

Para la cuerda cerrada tenemos dos condiciones posibles para ψ_+^μ :

$$\psi_+^\mu(\sigma) = \pm\psi_+^\mu(\sigma + 2\pi),$$

y similarmente para ψ_-^μ . Es decir, es posible imponer condiciones de periodicidad (Ramond) o de antiperiodicidad (Neveu-Schwarz) a los modos izquierdos y a los derechos por separado, por lo que tenemos 4 sectores de la teoría de cuerdas cerradas: R-R, R-NS, NS-R y NS-NS. Como ocurrió con la cuerda bosónica, el número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos que la teoría contiene determina la constante de orden en las condiciones de estado físicos y por tanto la dimensionalidad de la teoría. En el caso de la supercuerda en el espacio-tiempo de Minkowski tendremos que la dimensión crítica será $D = 10$.

Utilizando métodos similares a los que se han mostrado para la cuerda bosónica, es posible llegar al espectro de supercuerdas, mas inicialmente el espectro completo contiene taquiones y no contiene emparejamiento entre todos los bosones y fermiones que se obtienen. Sin embargo, es necesario hacer un truncamiento muy preciso del espectro para obtener una teoría consistente. Esta es la llamada proyección GSO, para la cual se define el operador de G-paridad

$$G = (-1)^{F+1}, \quad (2.64)$$

donde F es el número de osciladores fermiónicos del estado. De hecho hay dos maneras de proyectar el espectro que dan lugar a teorías consistentes. Para los sectores NS, se elimina el taquión si se escoge G-paridad positiva, mientras que para los sectores R, dependiendo de la quiralidad del estado base que se elija para construir el espectro, podrá proyectarse a estados de G-paridad positiva o negativa. Una de las maneras de proyectar los sectores R es mantener en ambos la misma G-paridad (digamos positiva por definición):

$$\left((-1)^{F+1} = 1, (-1)^{\bar{F}+1} = 1 \right) : \quad (\text{NS}_+, \text{NS}_+), \quad (\text{R}_+, \text{R}_+), \quad (2.65)$$

$$(\text{R}_+, \text{NS}_+), \quad (\text{NS}_+, \text{R}_+), \quad (2.66)$$

y se le conoce como *teoría de cuerdas IIB*. La otra forma de proyectar consistentemente es

$$\begin{aligned} \left((-1)^{F+1} = 1, (-1)^{\tilde{F}+1} = 1 \right) \text{ si NS : } & \quad (\text{NS}_+, \text{NS}_+), \quad (R_+, R_-), \quad (2.67) \\ \left((-1)^{F+1} = 1, (-1)^{\tilde{F}+1} = -1 \right) \text{ si R : } & \quad (R_+, \text{NS}_+), \quad (\text{NS}_+, R_-), \end{aligned}$$

que da lugar a la teoría IIA. Los estados no masivos de estas teorías se describen a continuación.

- NS-NS: En este sector el espectro es igual para IIA y IIB. Como en el caso de la cuerda bosónica aparecen aquí un campo escalar llamado dilatón, un campo de norma descrito por una dos-forma antisimétrica y el gravitón.
- NS-R y R-NS: Cada sector contiene un gravitino de espín 3/2 y un fermión de espín 1/2 (dilatino). En IIB los 2 gravitinos tienen quiralidad idéntica, mientras que en IIA tienen quiralidad opuesta.
- R-R: Se obtienen estados bosónicos como productos tensoriales de dos espinores de Majorana-Weyl. En IIA tienen quiralidad opuesta y uno obtiene un campo de norma vectorial y un campo de norma correspondiente a una 3-forma. En el caso IIB los espinores tienen quiralidad idéntica y se obtiene un campo escalar, una 2-forma y uno correspondiente a una 4-forma con intensidad de campo autodual.

De particular importancia es que ya no encontramos el taquión en ninguna de las dos teorías y que el gravitón es común a los sectores NS-NS de ambas. Interesantemente, encontramos además que los estados de la teoría están empatados entre sí a través de transformaciones de supersimetría en el espacio-tiempo. Por ejemplo, el gravitón está acompañado en particular por 2 gravitinos. La teoría posee supersimetría $\mathcal{N} = 2$ en $D = 10$, o lo que es lo mismo, un total de 32 rotaciones supersimétricas independientes (32 supercargas). En el caso en que se incluyan cuerdas abiertas, un análisis similar indica que la teoría, conocida como Tipo I, posee supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en $D = 10$ (16 supercargas).

Cabe mencionarse que la proyección GSO no es una elección arbitraria con la finalidad de evitar los taquiones; es un requerimiento de la teoría pues es un prerequisite para tener una hoja de mundo con teoría de campo conforme consistente. Sin embargo los detalles se encuentran más allá del alcance de este documento (por ejemplo, puede verse con más detalle en cap. 4 de [17]).

2.1.3. Interacciones

Es posible estudiar las interacciones de los estados obtenidos a partir de la cuantización de las cuerdas abiertas y cerradas a través del cálculo de las amplitudes de dispersión correspondientes. Como se muestra en la figura 2.2, estudiar interacciones entre estados equivale a modificar la topología de la hoja de mundo. Esto lleva a la adición del siguiente término (renormalizable y en cumplimiento con las simetrías) a la acción de Polyakov

$$S_\chi = \frac{\varphi_0}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{\gamma} R + \frac{\varphi_0}{2\pi} \int_{\partial M} ds \kappa \quad (2.68)$$

$$= \chi = 2 - 2n_m - n_b - n_c, \quad (2.69)$$

$$ds = d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}},$$

$$\kappa = \pm t^a n_b \nabla_a t^b,$$

donde φ_0 es una constante, R es el escalar de curvatura de la geometría de la hoja de mundo, κ es la curvatura geodésica, ds es la distancia propia sobre la frontera, t^a es la tangente unitaria y n_a es la normal (hacia el exterior del volumen) unitaria. Además, equivalentemente por el teorema de Gauss-Bonnet, χ es la característica de Euler de la hoja de mundo, n_m es el número de manijas, n_b es el número de bordes y n_c es el número de agujeros donde se hace una identificación de los puntos opuestos del mismo. Esto genera en la acción S un factor multiplicativo $e^{-\varphi_0 \chi}$. Uno puede observar entonces que añadir el hueco en la hoja de mundo de la figura 2.2 a), disminuye χ en 1, por lo que la emisión de una cuerda abierta debe estar mediada por la mitad de este factor: $e^{\varphi_0}/2$. Para la cuerda cerrada (figura 2.2 b) el proceso equivalente añade una manija y por tanto reduce χ en 2, por lo que estos procesos estarán mediados por e^{φ_0} . De aquí podemos definir la constante de cuerdas cerradas y la de cuerdas abiertas como

$$g_c = g_a^2 = e^{\varphi_0}. \quad (2.70)$$

Al estudiar a la teoría de cuerdas en fondos no triviales se puede demostrar que φ_0 aquí no es un parámetro libre, sino el valor de fondo del dilatón.

Cabe mencionar que al analizar el límite de bajas energías de la teoría, es posible obtener una acción efectiva que resulta ser la teoría de campo conocida como supergravedad IIA o IIB (las cuales tienen el contenido de campos descrito arriba en el espectro no masivo de la cuerda), con correcciones de derivadas suprimidas por factores de α' .

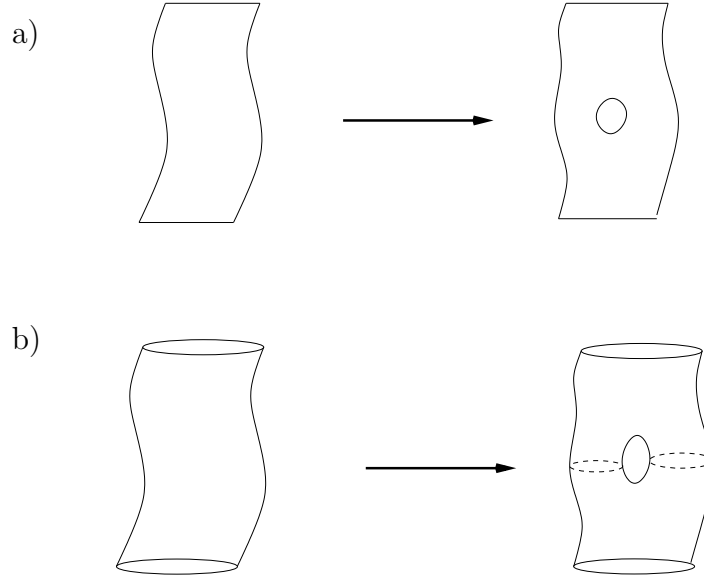


Figura 2.2: Emisión y absorción de cuerdas abiertas y cerradas.

En particular la parte bosónica de la acción de supergravedad IIB está dada por una contribución del sector NS-NS, otra del sector R-R y una tipo Chern-Simons:

$$S_{IIB} = S_{NS} + S_R + S_{CS}, \quad (2.71)$$

$$S_{NS} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\varphi} \left(R + 4\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right), \quad (2.72)$$

$$S_R = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 \right), \quad (2.73)$$

$$S_{CS} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (2.74)$$

con

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3, \quad (2.75)$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3. \quad (2.76)$$

De manera similar, si se incluyen cuerdas abiertas se obtiene supergravedad tipo I más SYM, más correcciones.

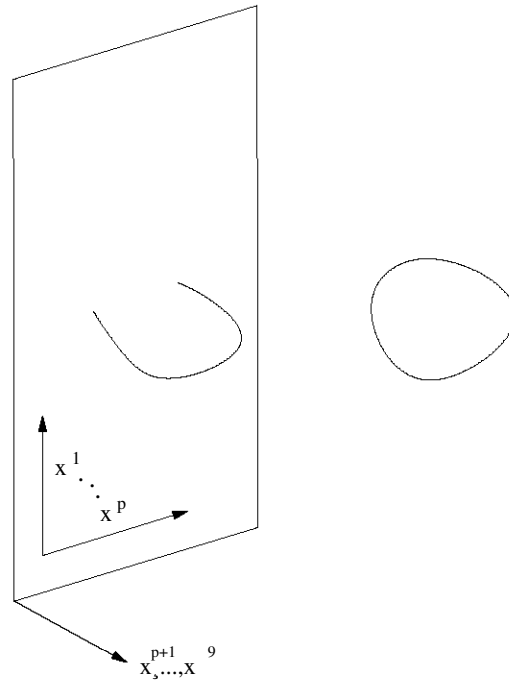


Figura 2.3: Representación gráfica de una D-brana y cuerdas abiertas y cerradas.

2.1.4. D-branas y Dualidad T

La teoría de cuerdas contiene en sí misma (además de cuerdas) objetos extendidos de varias dimensionalidades llamados branas. Las hay de distintos tipos, con propiedades que varían dependiendo de los detalles la teoría de cuerdas específica que elijamos. Nuestro interés se encontrará aquí en las llamadas D-branas, cuya propiedad esencial es que, del mismo modo como las cuerdas cerradas son excitaciones de la generalización de cuerdas del espacio-tiempo, las cuerdas abiertas serán excitaciones de las D-branas. Éstas serán entonces hipersuperficies donde las cuerdas abiertas pueden terminar. Adicionalmente y de forma más importante para nuestro trabajo, las D-branas permiten incluir en la teoría campos de norma no abelianos. La mejor manera de entender su existencia dentro de la teoría es mediante el estudio de la dualidad T, que se describirá a continuación.

Dualidad T

Dada la dimensionalidad de la teoría bosónica y de supercuerdas ($D = 26$ y $D = 10$ respectivamente), el estudio de los posibles efectos de la compactificación de las dimensiones adicionales a las que conocemos en la teoría de cuerdas es importante y ha sido explorado a lo largo de su historia. Si consideramos por ejemplo el caso más simple de la cuerda bosónica en el espacio de Minkowski de 26 dimensiones y compactificamos una de las dimensiones espaciales a un círculo de radio R , tendremos que existe una teoría de cuerdas dual, es decir, equivalente, con radio α'/R y efectos particulares en la cuerda. En este apartado se mostrará un bosquejo de esta característica.

La compactificación de una dimensión espacial afecta de manera distinta a las cuerdas abiertas y cerradas. La topología de esta dimensión permite que las cuerdas cerradas se enrolen sobre el círculo mientras que las abiertas siempre pueden ser contraídas topológicamente a un punto. Analicemos más precisamente el caso de cuerdas cerradas. En esta dimensión compacta tendremos la siguiente condición de periodicidad

$$X^{25}(\sigma + \pi, \tau) = X^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi R w \quad w \in \mathbb{Z} \quad (2.77)$$

donde w es el número de vueltas que la cuerda cerrada le da al círculo. Las 24 coordenadas espaciales perpendiculares a la compacta no sufren cambio alguno, pero la coordenada 25 se ve modificada a

$$\begin{aligned} X^{25}(\sigma, \tau) = & x^{25} + 2\alpha' p^{25} \tau + 2R w \sigma + \\ & + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^{25} e^{in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{25} e^{-in(\tau+\sigma)}). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como es usual en mecánica cuántica, el momento en la dirección compactificada estará cuantizado mediante la relación

$$p^{25} = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.79)$$

Justo como se hizo anteriormente podemos expresar la expansión como una suma de parte derecha e izquierda

$$\begin{aligned} X^{25}(\sigma, \tau) &= X_I^{25}(\sigma, \tau) + X_D^{25}(\sigma, \tau), \\ X_D^{25}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{2}(x^{25} - \tilde{x}) + \left(\alpha' \frac{n}{R} - R w\right)(\tau - \sigma) + \dots, \\ X_I^{25}(\sigma, \tau) &= \frac{1}{2}(x^{25} + \tilde{x}) + \left(\alpha' \frac{n}{R} + R w\right)(\tau + \sigma) + \dots, \end{aligned}$$

donde por ahora \tilde{x} es una constante que se anulará al sumar las partes. Los modos cero de la expansión en la dimensión compacta serán

$$\begin{aligned}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{25} &= \alpha' \frac{n}{R} - wR, \\ \sqrt{2\alpha'}\tilde{\alpha}_0^{25} &= \alpha' \frac{n}{R} + wR.\end{aligned}$$

Esto modificará la fórmula para la masa del espectro,

$$\alpha' M^2 = \alpha' \left[\left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{Rw}{\alpha'} \right)^2 \right] + 2N_I + 2N_D - 4. \quad (2.80)$$

Es aquí donde podemos ver que el espectro se mantiene invariante mediante las transformaciones

$$w \leftrightarrow n \quad (2.81)$$

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \equiv R_T, \quad (2.82)$$

simetría que se conoce como dualidad T y relaciona dos fondos de la teoría con radios R, R_T distintos. Esta dualidad de la teoría es cierta al menos perturbativamente para la cuerda bosónica con interacciones. Al aplicar dualidad T sobre los modos cero tendremos

$$\begin{aligned}\alpha_0^{25} &\leftrightarrow -\alpha_0^{25} \\ \tilde{\alpha}_0^{25} &\leftrightarrow \tilde{\alpha}_0^{25}\end{aligned}$$

y de igual manera las partes de la coordenada X^{25} se mapean de la siguiente manera

$$X_I^{25} \leftrightarrow X_I^{25} \quad (2.83)$$

$$X_D^{25} \leftrightarrow -X_D^{25} \quad (2.84)$$

$$X^{25}(\sigma, \tau) \leftrightarrow X_I^{25}(\sigma, \tau) - X_D^{25}(\sigma, \tau) \equiv X_T^{25}(\sigma, \tau)$$

En el caso de la cuerda abierta, el número de enrollamiento no tiene sentido así que es de esperarse que la dualidad T afecte las cuerdas abiertas de manera distinta. Para la cuerda abierta tenemos la siguiente solución con condiciones de borde de Neumann

$$\begin{aligned}X^\mu(\tau, \sigma) &= x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu(\sigma, \tau) &= 0 \quad \sigma = 0, \pi.\end{aligned}$$

Si aplicamos la dualidad T (2.83) y (2.84) a esta solución tendremos para la coordenada 25

$$X_T(\sigma, \tau) = \tilde{x} + p\sigma + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (2.85)$$

Analizando esta última ecuación se puede observar que la cuerda no tiene momento en la dirección compacta debido a que no hay término lineal en τ , lo cual indica que la evolución temporal de la cuerda es puramente oscilatoria. Además, podemos observar que para $\sigma = 0, \pi$, la cuerda se encuentra fija sobre la hipersuperficie $X^{25} = \tilde{x}$, por lo que esto se traduce en condiciones de borde de Dirichlet.

Esta hipersuperficie es un ejemplo de una D-brana y tiene la propiedad importante de poseer modos de oscilación dinámicos: derivados del estudio de la cuantización de cuerdas abiertas aparece un campo de norma y por cada dirección transversal un campo escalar.

D-branas y Teorías de Norma no Abelianas

Ahora que hemos señalado la existencia de las D-branas, podemos discutir cómo las teorías de norma no abelianas surgen de manera natural a partir de ellas. Cuando tenemos más de una D-brana, las cuerdas pueden comenzar y terminar en cualquiera de ellas, lo cual permite tener grados de libertad adicionales para la cuerda abierta llamadas cargas de Chan-Paton. Para el caso de N D-branas tendremos N posibles hiperplanos por cada uno de los extremos de la cuerda, llevándonos a una multiplicidad de N^2 para el espectro de la teoría. Ahora para describir un estado necesitaremos indicar mediante los índices i, j dónde termina cada extremo de la cuerda

$$|\phi, p\rangle \longrightarrow |\phi, p, ij\rangle, \quad (2.86)$$

y el estado más general se podrá escribir como la combinación lineal

$$|\phi, p, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^N \lambda_{ij} |\phi, p, ij\rangle. \quad (2.87)$$

Las matrices λ_{ij} se conocen como matrices de Chan-Paton y forman una representación de $U(N)$. En el caso de una dimensión compacta la brana estará localizada en la posición sobre el círculo θ , y al tener cuerdas que van

de la brana en la posición angular θ_i a otra que se encuentra en θ_j , el espectro de la cuerda bosónica se ve modificado a

$$M_{ij}^2 = \left(\frac{n}{R} + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N - 1). \quad (2.88)$$

De este modo los únicos estados vectoriales ($N = 1$) sin masa serán aquellos correspondientes a cuerdas que surjan y terminen en la misma posición θ . Si tenemos N branas, todas con posiciones θ_i distintas, los únicos estados vectoriales no masivos corresponderán a cuerdas que comienzan y terminan en la misma brana, lo que genera la simetría $U(1)^N$. En caso de tener las N branas coincidentes, la simetría se ensanchará a $U(N)$. Esto último permite un mecanismo de rompimiento de simetría $U(N) \rightarrow U(1)^N$ análogo al de Higgs para dar masa a estos bosones de norma al separar las branas.

Por otro lado las N D-branas coincidentes tienen una descripción efectiva a bajas energías como una teoría no abeliana que generaliza la acción de Born-Infeld [22]:

$$S_{BI} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det [G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}]}, \quad (2.89)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es la métrica, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético, $B_{\mu\nu}$ es el campo de Kalb-Ramond que aparece en el sector NS-NS del espectro de la cuerda cerrada y ϕ es el campo dilatónico.

Consideremos el caso en el que el campo dilatónico es constante y el fondo de $B_{\mu\nu}$ está apagado. De esta manera la acción será:

$$S_{BI} = -\frac{1}{(2\pi)^p g_c \alpha'^{2(p+1)}} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det [G_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}]}, \quad (2.90)$$

esto es, tomando en cuenta que el campo dilatónico y g_c están relacionados mediante $e^\phi = g_c$. Si adicionalmente analizamos el caso de la métrica de Minkowski, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, e intensidad de campo no muy grande, podemos desarrollar en potencias de $2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}$:

$$S_{BI} = -\frac{1}{(2\pi)^p g_c \alpha'^{2(p+1)}} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det [\eta_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}]} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} &\simeq -\frac{1}{(2\pi)^p g_c \alpha'^{2(p+1)}} \int d^{p+1}\xi \\ &\quad \left(1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} F^2 + (2\pi\alpha')^4 F^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Al orden más bajo, el lagrangiano corresponde al del electromagnetismo, o al de Yang-Mills en el caso no abeliano. En nuestro trabajo será importante el papel de la versión supersimétrica de una teoría Yang-Mills.

Vale la pena agregar que, como se discutió anteriormente, este conjunto de Dp -branas poseen masa, y por tanto cuando tenemos N grande, deforma el espacio. Para el caso en que tenemos un conjunto de D3-branas, la métrica que éste genera está dada por la llamada solución de 3-brana negra (extremal)

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (2.93)$$

donde

$$L^4 = 4\pi g_c N l_c^4. \quad (2.94)$$

Las D3-branas están además cargadas bajo el campo Ramond-Ramond C_{01234} , por lo que esta 3-brana negra es análoga al agujero negro de Reissner-Nordstrom. En $r \rightarrow \infty$ estamos lejos de la brana y la geometría se vuelve plana. Por otro lado cuando $r \rightarrow 0$ la métrica (2.93) se reduce al producto de un espacio anti deSitter (AdS) por una cinco esfera.

A continuación se discutirán brevemente Super Yang-Mills y AdS .

2.2. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$

Nos interesan las teorías Super Yang-Mills (SYM) como objeto de estudio y por su papel en la teoría de cuerdas. Históricamente el interés en SYM $\mathcal{N} = 4$ surge por ser finita (la función β se anula en el régimen perturbativo, y se cree también lo hace a nivel no perturbativo). A bajas energías, la acción efectiva para una pila de N D3-branas (DBI no abeliana) está dominada por la parte cuadrática en la intensidad de campo, reduciéndose a Yang-Mills en $3 + 1$ dimensiones con 16 supersimetrías. Este tipo de teoría es crucial para el ejemplo mejor entendido de la dualidad y por consiguiente para nuestro trabajo.

SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría cuántica de campo en 4 dimensiones con simetría R $SU(4)$ que rota las 4 supercargas entre sí. Nos interesa el caso asociado a D3-branas donde el grupo de norma es $U(N)$. El contenido de campos consta de un supermultiplete vectorial $\mathcal{N} = 4$ (o equivalentemente en lenguaje $\mathcal{N} = 1$, uno vectorial y 3 quirales) e incluye seis campos escalares Φ^i , $i = 1, 2, \dots, 6$, el campo vectorial A_μ y cuatro espinores λ^a izquierdos

de cuatro componentes reales, todos en la representación adjunta del grupo de norma. Bajo la simetría R los seis escalares se transforman en la representación antisimétrica de rango 2, los fermiones de Weyl transforman en la representación fundamental y A_μ es un singulete.

La densidad lagrangiana de SYM $\mathcal{N} = 4$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{Tr} \left[\right. & - \frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a \quad (2.95) \\ & - D_\mu \Phi^i D^\mu \Phi^i + g_{YM} C_i^{ab} \lambda_a [\Phi^i, \lambda_b] \\ & \left. + g_{YM} C_{iab} \bar{\lambda}^a [\Phi^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \bar{\lambda}^a [\Phi^i, \Phi^j]^2 \right], \end{aligned}$$

$F_{\mu\nu}$ siendo el tensor de intensidad del campo vectorial, $\star F_{\mu\nu}$ su dual de Hodge (es decir, la intensidad de campo dual), C_i^{ab} , C_{iab} los coeficientes de Clebsch-Gordan del grupo de simetría R y θ_I parámetros libres adimensionales. En dimensiones de energía, los campos son

$$[A] = [\Phi^i] = 1, \quad [\lambda^a] = \frac{3}{2}, \quad (2.96)$$

lo que conlleva que la acción $S = \int dx^4 \mathcal{L}$ sea invariante clásicamente ante cambios de escala, y en sí SYM $\mathcal{N} = 4$ es invariante bajo el grupo de simetrías conforme $SO(4, 2)$, es decir, transformaciones de Poincaré más reescalamientos y transformaciones conformes especiales. Estas simetrías también se encuentran a nivel cuántico en la teoría, lo que implica que la función β es idénticamente nula dado que existe invariancia de escala. Es entonces imposible tener estados asintóticos bajo la definición usual y por tanto no nos preocuparemos por calcular amplitudes de dispersión. En particular nos interesarán funciones de correlación de operadores locales invariantes de norma dado que serán los observables de nuestra teoría. También será posible estudiar mediante la dualidad los lazos de Wilson (operadores invariantes de norma no locales).

Conviene en este punto mencionar las diferencias que existen entre SYM $\mathcal{N} = 4$ y QCD dado que es nuestra intención utilizar SYM como un modelo de juguete de QCD:

- QCD presenta confinamiento, mientras que SYM no confina.
- QCD tiene condensado quiral, SYM no.

- QCD tiene un espectro discreto, mientras que el de SYM es continuo.
- QCD tiene una constante que corre con la energía, mientras que SYM tiene una constante ajustable que no corre.
- En su contenido QCD tiene quarks mientras que SYM tiene materia adjunta.
- En cuanto a supersimetría, QCD no tiene mientras que SYM es máximamente supersimétrica.
- QCD tiene tres colores, $N_c = 3$, mientras que para SYM eventualmente solo podremos calcular en el límite $N_c \rightarrow \infty$.

En este punto es claro que las dos teorías son muy distintas, pero resulta que si uno analiza el caso de SYM a temperatura finita (por verse en la sección 3.5), esta imagen cambia considerablemente:

- Ninguna de las dos confina más allá de la temperatura crítica.
- Ninguna de las dos teorías es conforme.
- QCD está fuertemente acoplada dentro del intervalo de temperatura $T_c < T < 2T_c$, relevante para RHIC, mientras que SYM tiene una constante ajustable que puede tomarse grande.
- Ambas teorías presentan apantallamiento de Debye.
- Ninguna de las teorías es supersimétrica.

En este caso las dos teorías sí son similares y por tanto las investigaciones que se hagan sobre SYM a temperatura finita en la región de acoplamiento fuerte pueden esclarecer el estudio de QCD. La discrepancia en el número de colores tampoco resulta ser un obstáculo insorteable, puesto que cálculos en la red permiten verificar que QCD con $N_c \rightarrow \infty$ es similar a $N_c = 3$ (ver, por ejemplo, [23]).

2.3. Espacio Anti de-Sitter AdS

Otra de las características antes mencionadas de las D3-branas es que en conjunto deforman el espacio de acuerdo con la métrica de brana negra (2.93), resultando en la región cercana a ellas una geometría que es el producto de una cinco-esfera con AdS_5 que a continuación se describe. El espacio n -dimensional AdS_n se define matemáticamente como una variedad Lorentziana con un escalar de curvatura negativa constante. Esta variedad también surge naturalmente como una solución máximamente simétrica del vacío de las ecuaciones de campo de la relatividad general de Einstein (y por tanto de supergravedad) si consideramos una constante cosmológica negativa,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.97)$$

donde R es el escalar de curvatura, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, Λ es la constante cosmológica.

AdS_n puede ser concebido como un encaje de una hipersuperficie en un espacio-tiempo plano con una dimensión temporal adicional. Explícitamente, queremos hacer el encaje en el espacio con métrica

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} dx_i^2 - \sum_{j=-1}^0 dt_j^2 \quad (2.98)$$

de la hipersuperficie definida por medio de la hiperboloide

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 - \sum_{j=-1}^0 X_j^2 = -L^2, \quad (2.99)$$

donde L es un radio de curvatura característico, relacionado con Λ por medio de $2\Lambda = -(n-1)(n-2)/L^2$. Podemos observar que esta “distancia” se preserva cuando se aplican las transformaciones

$$x^a \rightarrow x'^a = \Lambda^a_b y^b, \quad \Lambda^a_b \in SO(2, n-1). \quad (2.100)$$

Existen varios sistemas de coordenadas que cubren AdS_n por parches o globalmente. La parametrización global de esta hipersuperficie está dada en

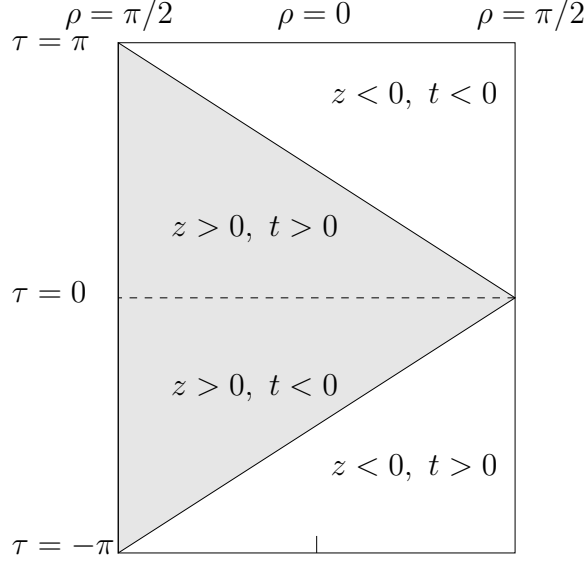


Figura 2.4: En este diagrama de Penrose se muestra la estructura causal de *AdS*; los dos parches de *AdS*-Poincaré corresponden a las partes con y sin sombreado. La frontera de *AdS* se encuentra en las líneas verticales ($z = 0$).

términos de ρ, τ, n_a , definidos mediante

$$X_{-1} = L \sec \rho \sin \tau, \quad (2.101)$$

$$X_0 = L \sec \rho \cos \tau, \quad (2.102)$$

$$X_i = L \tan \rho \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

donde τ no es el tiempo físico que nos interesa dado que es periódico (existen líneas de τ cerradas) y n_a es un vector normal a la esfera en dirección a . Para obtener el tiempo que nos interesa hace falta “abrir” el círculo para obtener el espacio de cobertura de *AdS*. En términos de estas variables la métrica será

$$ds^2 = L^2 \left(-\sec^2 \rho d\tau^2 + \sec^2 \rho d\rho^2 + \tan^2 \rho d\Omega_{n-2}^2 \right), \quad (2.103)$$

con $0 \leq \rho \leq \pi/2$ y $-\infty \leq \tau \leq \infty$ y $\tan^2 \rho d\Omega_{n-2}^2$ es la parte de la métrica perteneciente a una $n-2$ esfera. Por otro lado podemos cubrir la hipersuperficie

por parches (véase la figura 2.4) , con la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} X_\mu &= \frac{x_\mu}{z} & \mu = 0, 1, 2, \dots, n-2, \\ X_{-1} &= \frac{1 - x_\mu^2 + z^2}{2z}, \\ X_{n-1} &= \frac{1 + x_\mu^2 - z^2}{2z}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

(x_μ, z) se conocen como coordenadas de Poincaré. Esta parametrización nos lleva a la siguiente métrica

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dx_m^2 + dz^2). \quad m = 1, \dots, n-2.$$

Igualmente podemos hacer un cambio de la coordenada radial como $r = L/z$ para obtener otra forma útil de AdS ,

$$ds^2 = L^2 \left(-r^2 (dt^2 + dx_m^2) + \frac{dr^2}{r^2} \right) \quad m = 1, \dots, n-2.$$

Por supuesto, en general existen otros sistemas de coordenadas que cubren AdS_n de distintas maneras, pero estas dos son las que nos interesan por ahora.

Algunas otras propiedades relevantes para la dualidad se mencionarán con más detalle en el capítulo 3.

Capítulo 3

Dualidad AdS/CFT

3.1. Introducción

Uno de los avances más importantes en la última década ha sido la posibilidad de estudiar las teorías de norma en el régimen de acoplamiento fuerte a través de análisis holográficos.

El caso mejor entendido es la equivalencia conjeturada por Maldacena en [1] entre la teoría de supercuerdas IIB en un fondo $AdS_5 \times S^5$ y super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ en cuatro dimensiones. Más en general, la propuesta de la dualidad AdS/CFT es que una teoría de cuerdas en un fondo del tipo $AdS_{d+1} \times M$, con M una variedad de curvatura positiva, debería ser equivalente a una teoría de campo conforme que, en cierto sentido, vive en la frontera d -dimensional de AdS_{d+1} . Y aún más en general, la dualidad norma/gravedad propone una equivalencia entre teorías de gravedad en fondos no necesariamente AdS y teorías de campo no necesariamente conformes.

A pesar de estar respaldada por numerosos cálculos (casi todos en el límite cuando el número de colores de la teoría dual, N_c , grande), la dificultad de comparar resultados en ambos lados de la dualidad mantiene la propuesta a nivel de conjetura, es decir, sin una demostración rigurosa a nivel de física matemática. Aun así, se cree que esta equivalencia contiene información útil para entender la dinámica del régimen no perturbativo de teorías no abelianas.

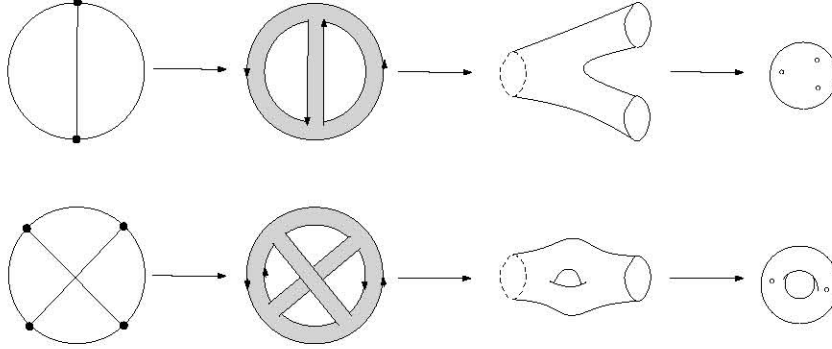


Figura 3.1: Los diagramas de Feynman se pueden traducir a diagramas de doble línea, y estos a su vez en diagramas de Feynman de cuerdas que son topológicamente equivalentes.

3.1.1. Antecedentes

Desde su concepción, la teoría de cuerdas ha tenido una relación importante con QCD. Además de en sus comienzos haber pretendido ser una descripción de la interacción fuerte, 't Hooft dio un argumento en [24] sugiriendo que en el límite de N_c grande, las teorías de norma deberán tener una descripción en términos de cuerdas.

Para llegar a esta última conclusión, analicemos el caso de una teoría con campos Φ_i^a con a el índice en la representación adjunta de $SU(N_c)$ e i alguna etiqueta del campo. Su densidad lagrangiana tendrá la forma

$$\mathcal{L} \sim Tr(d\Phi_i d\Phi_i) + g_{YM} c^{ijk} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k) + g_{YM}^2 d^{ijkl} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l) \quad (3.1)$$

o equivalentemente al reescalar $\Phi_i \rightarrow \Phi_i/g_{YM}$,

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} [Tr(d\Phi_i d\Phi_i) + c^{ijk} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k) + d^{ijkl} Tr(\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l)] \quad (3.2)$$

con $1/g_{YM}^2 \equiv N_c/\lambda$. Utilizando la notación de “doble línea” para expresar el hecho de que la representación adjunta es equivalente a la fundamental producto con la antifundamental, los propagadores de los grados de libertad básicos se escriben utilizando líneas paralelas, con flechas sobre estas líneas para indicar la dirección del flujo de los grados de libertad de color. De esta manera, cualquier diagrama de Feynman puede ser visto como una red de líneas dobles, que a su vez puede ser asociada a una superficie con

topología específica, como se muestra en la figura 3.1. De la densidad lagrangiana podemos observar que cada vértice (V) tiene un factor por delante N_c/λ , mientras que los propagadores (aristas E del diagrama) λ/N_c . Adicionalmente por cada bucle (cara F) del diagrama tendremos un factor N_c adicional que proviene de tomar la traza correspondiente. De esta manera, un diagrama dado vendrá acompañado por un coeficiente

$$N_c^{V-E+F} \lambda^{E-V} = N_c^\chi \lambda^{E-V} \quad (3.3)$$

donde χ es el número de Euler de la superficie asociada al diagrama. Como indicamos en (2.69), para superficies cerradas $\chi = 2 - 2n_m$ donde n_m es el género de la superficie (número de manijas). La expansión perturbativa para un proceso dado podrá ser descrita por una expansión de la forma

$$\sum_{n_m=0}^{\infty} N_c^{2-2n_m} f_{n_m}(\lambda) \quad (3.4)$$

donde f_{n_m} es un polinomio en λ . De esta manera podemos ver que en el límite de N_c grande, la expansión estará dominada por diagramas planares ($n_m = 0$) de orden N_c^2 , mientras que el resto de los diagramas estarán suprimidos por potencias de $1/N_c^2$. En este punto, si identificamos $1/N_c \equiv g_c$ en la última ecuación tendremos la expansión usual para la teoría de perturbaciones de cuerdas cerradas, descrita en la sección 2.1.3. De manera similar puede mostrarse que la introducción de grados de libertad en la representación fundamental – “quarks” – corresponde a incluir también cuerdas abiertas.

De esta manera es posible concebir que existe una posible relación fundamental que complementa la descripción de las teorías de norma a nivel perturbativo con la descripción perturbativa de cuerdas. A continuación se explica el argumento de Maldacena [1], que establece de manera mucho más precisa esta relación.

3.2. La Dualidad

3.2.1. Argumentación

El punto de partida para concebir la dualidad será considerar los objetos antes discutidos, D-branas. A partir del entendimiento adquirido sobre las D-branas, sabemos que éstas tienen dos descripciones alternativas igualmente

válidas. La primera es como objetos dinámicos hiperdimensionales en teoría de cuerdas cuyas excitaciones son las cuerdas abiertas. La segunda es como branas negras, es decir, soluciones solitónicas de las ecuaciones de movimiento de cuerdas (o, a bajas energías, de supergravedad). La conjetura de la dualidad surgirá a partir de la comparación de estas dos descripciones que se hará a continuación.

Enfoquemos nuestro análisis hacia el caso de D3-branas en una teoría de cuerdas tipo IIB. Esto nos conducirá al ejemplo de la dualidad más completo con el que contamos y el que es relevante para nuestros intereses. En particular consideremos N_c D3-branas paralelas y coincidentes en un fondo de Minkowski diez dimensional. Si analizamos el sistema en el régimen de bajas energías (más bajas que la escala de cuerdas $1/l_c$), solo sobrevivirán los modos no masivos de cuerdas abiertas y cerradas, que interactuarán mediante una acción efectiva de la forma:

$$S_{ef} = S_{brana} + S_{sugra} + S_{int} \quad (3.5)$$

donde (según discutimos en las secciones 2.1 y 2.2) S_{brana} corresponde a una teoría super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con correcciones de derivadas superiores que vive en la hipersuperficie 4-dimensional de la D3 brana, S_{sugra} corresponde a la acción 10-dimensional de supergravedad (escrita en 2.1.3) con correcciones de derivadas superiores, y S_{int} dicta las interacciones entre estas dos partes. Si consideramos el límite de ultra-bajas energías (más bajas que $\frac{1}{(g_{YM}^2 N_c)^{1/4} l_c}$) para S_{brana} , las correcciones de orden superior en las derivadas del tipo $l_s^2 \text{Tr}(F^4)$ desaparecerán y solo quedará super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$. Lo mismo ocurrirá con S_{sugra} y nos quedará solo supergravedad libre y sin correcciones. En este límite la parte S_{int} también se desvanece puesto que es igualmente proporcional a l_c . Esto nos deja dos sistemas desacoplados: supergravedad libre en 10 dimensiones, y la teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ en 4 dimensiones.

Por otro lado, las D-branas son fuentes de campos en supergravedad, de donde sabemos que para N_c D3-branas estarán descritas por la solución de 3-brana negra presentada en (2.93)

$$ds^2 = f^{-1/2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + f^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (3.6)$$

$$f = 1 + \frac{L^4}{r^4}, \quad (3.7)$$

$$L^4 = 4\pi g_c l_c^4 N_c. \quad (3.8)$$

Esta métrica interpola entre dos fondos máximamente supersimétricos: AdS_5 y Minkowski 4-dimensional. Debido al factor que se encuentra en la parte temporal de la métrica anterior, tendremos que un observador en una posición r percibe la energía propia E_p de un objeto corrida al rojo con respecto a un observador en infinito:

$$E_\infty = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_p. \quad (3.9)$$

Para un observador en infinito, tenemos dos clases de excitaciones a bajas energías: aquellas que son no masivas en todo el espacio y cualquier otro tipo de excitación que se encuentre suficientemente cerca de $r = 0$. Estos dos sistemas se encuentran desacoplados por dos razones: por un lado, la sección eficaz de absorción para las partículas inherentemente no masivas es $\sigma \sim \omega^3 L^8$, siendo ω la energía de la partícula, y por tanto la longitud de onda de la partícula es mucho más grande que el tamaño gravitacional de la brana (de orden L); por otro lado a las partículas masivas cerca de $r = 0$ en este límite les es cada vez más difícil escalar el potencial gravitacional para escapar a la región asintótica.

En esta región ($r \ll L$) la geometría puede aproximarse como

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2. \quad (3.10)$$

es decir (según lo que vimos en la sección 2.3), $AdS_5 \times S^5$. En esta segunda descripción del sistema tenemos entonces nuevamente dos sistemas desacoplados: supergravedad libre en Minkowski en 10 dimensiones, y la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$.

Es en este punto que podemos comparar ambas descripciones llegando entonces a la conclusión de que: *Super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ en 4 dimensiones es dual (equivalente) a una teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$.*

El argumento establece además una relación entre las constantes de acoplamiento de teoría de cuerdas y la de teoría de norma SYM, que resulta ser $4\pi g_c = g_{YM}^2$.

El límite de super-gravedad en la teoría de cuerdas sobre $AdS_5 \times S^5$ lo obtenemos cuando el radio de curvatura del fondo es mucho mayor que la longitud de cuerdas, es decir $L = l_c (g_c N_c)^{1/4} \gg l_c$, lo que implica $g_c N_c \gg 1$, o habiendo relacionado ambas constantes de acoplo, $g_{YM}^2 N_c \gg 1$. Además requerimos que las correcciones en g_c sean pequeñas, es decir $g_c \rightarrow 0$, con lo

cual necesitaremos tener $N_c \gg 1$. Por otro lado, como se mencionó en 3.1.1, en el límite de teorías de norma $SU(N_c)$ para N_c grande, la constante de acoplo efectiva (de 't Hooft), es $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$, por lo cual si queremos que la teoría de perturbaciones sea válida necesitamos estar en el régimen $\lambda \ll 1$. El que ambas teorías sean accesibles a nuestros cálculos en regímenes distintos de la constante $g_c N_c$ hace que sea difícil comprobar cabalmente la dualidad. Más allá de la posible incertidumbre sobre si la dualidad es cierta, los límites de validez de esta dualidad es algo que permanece en debate.

3.2.2. Versiones

Debido a la dificultad de comparar resultados más allá del límite de N_c grande, es incierto exactamente a qué nivel opera la dualidad. Por ello existen 3 versiones posibles que suponen distintos regímenes de validez:

- Versión Débil: La dualidad AdS/CFT solo es válida para $g_c N_c$ grande y N_c grande, lo que corresponde a la región perturbativa en teoría de cuerdas, es decir, la aproximación de supergravedad. Si nos alejamos de este régimen puede ser que no tengamos una correspondencia entre ambas teorías. Esta es la versión mejor fundamentada de las 3, y cuenta con numerosas comprobaciones de ambos lados de la dualidad.
- Versión “Intermedia”: La dualidad es válida para cualquier $g_c N_c$, pero solo si $N_c \rightarrow \infty$ (y $g_c \rightarrow 0$), lo que significaría incorporar correcciones en l_c , $\frac{l_c^2}{L^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{g_c N_c}}$, pero con la advertencia de que las correcciones en $g_c \leftrightarrow \frac{1}{N_c}$ podrían alejarnos de la correspondencia. Al día de hoy, tenemos evidencia que apoya esta versión.
- Versión Fuerte: La dualidad es válida para cualesquiera g_c, N_c , y se ve limitada únicamente por nuestra capacidad de hacer cálculos en los límites $N_c \rightarrow \infty, g_c \rightarrow 0$. En muchos casos, es posible hacer comparaciones exitosas de manera perturbativa en $1/N_c$, y en un par de casos, incluso de forma no perturbativa, por lo que se tiende a creer que esta versión de la dualidad es válida.

3.2.3. El diccionario $AdS-CFT$

Para poder hablar de una dualidad necesitamos una manera de relacionar las cantidades y cálculos en ambos lados de la correspondencia. A esto es lo

que comúnmente se le llama el diccionario de la correspondencia *AdS/CFT*, el cual ha sido trabajado desde la concepción de la correspondencia y aún ahora sigue siendo una area de investigación activa. A continuación se mencionan algunas de las identificaciones más importantes de la correspondencia [25]:

1. Existe una correspondencia uno a uno entre los operadores invariantes de norma de la teoría de campo y los campos de la teoría de gravedad (por ejemplo $\text{Tr}\langle F^2 \rangle$ está en correspondencia con el dilatón y el tensor de energía momento está en correspondencia con la métrica del espacio curvo).
2. La función de partición de la teoría de cuerdas con condiciones de frontera dadas está en correspondencia con la función generatriz de las funciones de correlación en la teoría de campo. Explícitamente [26, 27]:

$$\langle e^{\int d^4x \phi_0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{cuerdas} [\phi(\vec{x}, z)|_{z=0} = \phi_0(\vec{x})], \quad (3.11)$$

donde $\phi_0(\vec{x})$ es el valor del campo en infinito ($z = 0$), $\mathcal{Z}_{cuerdas}$ es la función de partición de la teoría de cuerdas, $\mathcal{O}(\vec{x})$ es un operador de la teoría de norma y $z \equiv \frac{L^2}{r}$.

3. Es posible calcular los lazos de Wilson en la teoría de norma mediante la siguiente identificación (válida para $g_c N_c \gg 1$):

$$\langle W(C) \rangle = e^{-S_{NG}[C]} \quad (3.12)$$

donde C es el contorno trazado por los extremos de la cuerda y S_{NG} es la acción de Nambu-Goto.

4. Las coordenadas X^μ del lado de gravedad se identifican directamente con las de la teoría de norma.
5. La así llamada conexión UV-IR [28] nos indica que la coordenada radial r del espacio *AdS* debe ser identificada con la escala energética del lado de la teoría de norma, de tal forma que valores pequeños de r (es decir, cerca del horizonte de eventos) correspondan a energías bajas del lado de la teoría de norma y valores cercanos a la frontera de *AdS* corresponderán a energías altas.
6. Las coordenadas angulares de la S^5 del lado de gravedad corresponden a direcciones asociadas a la simetría interna global $SU(N_c)$ del lado de SYM.

3.2.4. Simetrías

Las simetrías de ambas teorías juegan un papel importante en la identificación de los dos lados de la dualidad, por ello es importante mencionarlas. El grupo de isometrías de AdS_5 es $SO(4, 2)$, que corresponde al grupo de transformaciones conformes en Minkowski $3 + 1$ dimensiones. Similarmente la simetría R de la teoría de norma $SU(4) \simeq SO(6)$ corresponde a las isometrías de la esfera S^5 . Por otro lado la simetría $SU(N_c)$ no tiene equivalente del otro lado en la teoría de supergravedad debido a que es de norma (local) y solo señala redundancia en la descripción. La equivalencia entre ambas descripciones es solo a nivel de cantidades que son invariantes de norma y por tanto esta última simetría no tiene por que verse reflejada en el otro lado de la dualidad.

3.3. Evidencia de la Dualidad

A continuación se presentan algunos argumentos a favor de la dualidad a partir de las propiedades de la teoría (para mayores detalles, véase, por ejemplo [2]):

- SYM $\mathcal{N} = 4$ contiene operadores invariantes de norma exactamente con las dimensiones (protegidas por supersimetría) predichas por la dualidad a partir de las masas de los campos de supergravedad.
- Ambas teorías comparten las mismas simetrías globales, las cuales por definición no dependen en general de las constantes de acoplamiento.
- Algunas de las funciones de correlación asociadas a anomalías están protegidas de posibles correcciones cuánticas y no dependen de la constante λ . La receta (3.11) da el resultado correcto en este caso.
- El comportamiento cualitativo de la teoría al realizar deformaciones por medio de operadores relevantes o marginales no depende de la constante de acoplo y la dualidad arroja los resultados correctos.

3.4. Quarks y D7-branas

La versión más simple de la dualidad (aquella en la que solo utilizamos D3-branas) no incluye en su contenido materia fundamental dado que solo tiene

campos en la representación adjunta. Por tanto esta teoría es insuficiente si se quiere estudiar la dinámica de los quarks y para lograrlo será necesario hacer una modificación siguiendo el artículo [29]. Esto consiste en añadir al sistema N_f D7 branas, con $N_f \ll N_c$, que se denominarán branas de sabor. El arreglo espacio-temporal de las branas será el siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 D3 : & X & X & X & X & & & & & & \\
 D7 : & X & X & X & X & X & X & X & X & & ,
 \end{array}$$

donde las “X” denotan las direcciones ocupadas por cada tipo de brana. Es decir, las D7-branas llenan las mismas dimensiones que las D3-branas más 4 dimensiones adicionales. Se extienden en las 3+1 dimensiones de la D3-brana, la dimensión radial de AdS y en 3 dimensiones más que pertenecen a la cinco-esfera. En la dirección radial las D7-branas empezarán en $z = 0$ y terminarán en $z = z_m$, que es el lugar donde las tres direcciones de la S^5 que cubre la brana convergen a un punto en el polo. Esta última posición z_m será la que nos determine la longitud y por tanto la masa de las cuerdas que terminan en las D7-branas.

Esto modifica el espectro de las cuerdas dado que pueden (adicionalmente a las posibilidades anteriores que involucran solo D3-branas) empezar y terminar en las D7-branas y extenderse entre D3-branas y D7-branas. Los modos más bajos de las cuerdas que se extienden de esta última manera dan lugar a N_f hipermultipletes (con 2 campos escalares complejos más 2 espinores de Weyl cada uno) que transforman en la representación fundamental del grupo de norma $SU(N_c)$. Son a estos grados de libertad a los que llamaremos quarks, a pesar que incluyen campos con espines 1/2 y 0. Una consecuencia adicional de este arreglo es que rompe la simetría a $\mathcal{N} = 2$.

Regresando al punto de la masa, si colocamos una cuerda estática que va desde $z = 0$ hasta $z = z_m$, podemos relacionar el parámetro z_m con la masa del quark al que corresponde [29],

$$z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}. \tag{3.13}$$

Ahora, para comprobar que estamos hablando de quarks, como se muestra en [30], se calcula el valor esperado del campo gluónico alrededor del quark estático localizado en el origen (ignorando en la notación los campos escalares

y fermiónicos adicionales por simplicidad):

$$\frac{1}{4g_{YM}^2} \langle Tr F^2(x) \rangle = \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2 |\vec{x}|^4} \left[1 - \frac{1 + \frac{5}{2} \left(\frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2}{\left(1 + \left(\frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \right)^{5/2}} \right]. \quad (3.14)$$

Para $m \rightarrow \infty$, esto es justamente el campo Coulombiano esperado para una partícula puntual. Para $m < \infty$ el perfil no es singular en $x = 0$, y describe a un quark *vestido* con tamaño (longitud de onda de Compton) z_m [13, 14].

3.5. Extensión a Temperatura Finita

Por completitud se discute brevemente el caso de temperatura finita que es relevante para algunas aplicaciones fenomenológicas, pero no será directamente relevante para nuestro discurso en esta tesis. Si consideramos un fondo gravitacional donde el agujero negro de la parte *AdS* tenga temperatura, la métrica se verá modificada como

$$ds^2 = L^2 \left[r^2 (-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{dr^2}{hr^2} + d\Omega_5^2 \right], \quad (3.15)$$

$$h = 1 - \frac{r_0^4}{r^4} \quad r_0 = \pi T, \quad (3.16)$$

donde hemos hecho una identificación de la temperatura de Hawking del agujero negro y la temperatura de la teoría de norma. En este caso tendremos que el quark se moverá en una “sopa de gluones”, es decir, en presencia de los campos de SYM a temperatura finita debido a los cuales el quark perderá energía por fricción con este medio. En esta circunstancia se puede calcular la entropía del medio térmico y los cálculos indican que el resultado para acoplamiento fuerte obtenido a partir del agujero negro dual, es 3/4 de la entropía en la teoría libre. Adicionalmente se puede calcular la viscosidad de esta sopa y se cumple además que, para un medio infinitamente acoplado, su cociente por la densidad de entropía esá dado por

$$\eta/s = \frac{1}{4\pi}. \quad (3.17)$$

Esta última relación tiene al menos dos propiedades importantes. Por un lado la fórmula da un resultado finito aun en el caso de una constante de

acoplo arbitrariamente grande. Por otro lado, resulta que es válida para cualquier teoría con un dual gravitacional. Interesantemente, el resultado (3.17) está muy cerca de las estimaciones correspondientes para el plasma de quarks y gluones a partir los datos experimentales en RHIC.

3.5.1. Potencial $q - \bar{q}$ y Apantallamiento

A través de la dualidad, es posible calcular el potencial entre una pareja quark-antiquark poniendo a los extremos de la cuerda en reposo sobre la brana en las posiciones $x = -L/2$ y $x = L/2$. Más en general, de acuerdo con (3.12), los lazos de Wilson se calculan en la dualidad a partir del área de la hoja de mundo para una cuerda cuyos extremos trazan el lazo en cuestión. Al minimizar la superficie de la hoja de mundo, se obtiene que la longitud de la cuerda es

$$\frac{L}{2} = z_0 \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}. \quad (3.18)$$

Sustrayendo la energía correspondiente a dos quarks aislados (la energía de dos cuerdas rectas que parten de la brana hacia el horizonte) se obtiene la energía potencial de la configuración:

$$E = -\frac{4\pi^2(g_{YM}^2 N_c)^{1/2}}{\Gamma(1/4)^4 L}. \quad (3.19)$$

El que la energía vaya como $1/L$ lo determina el hecho de que hay invarianza conforme. Además la misma es proporcional a $(g_{YM}^2 N_c)^{1/2}$, a diferencia del resultado perturbativo que va como $g_{YM}^2 N$. En presencia de un medio térmico (utilizando en la parte dual de gravedad el fondo (3.15)) este potencial de Coulomb resulta estar apantallado y para $TL \ll 1$ tiene la forma

$$E = -\frac{2\sqrt{2}\pi^{3/2}(4\pi g_{YM}^2 N_c)^{1/2}}{\Gamma(1/4)^4 L} [1 + c(TL)^4], \quad (3.20)$$

donde c es una constante positiva y T la temperatura. Es en el análisis de este comportamiento donde se encuentra que para una distancia máxima los quarks se vuelven libres dado que la energía para una configuración de dos quarks solos es menor que la obtenida mediante este potencial [31]. En otras palabras, la presencia del medio térmico apantalla al quark y al antiquark, hecho que puede tener consecuencias fenomenológicas interesantes en RHIC y LHC (véase por ejemplo, [32, 12]).

Capítulo 4

Pérdida de Energía

4.1. Antecedentes

4.1.1. Configuración

En la dualidad, los quarks de la teoría de norma están representados en la descripción de gravedad por las puntas de la cuerda que están sobre la D7-brana. En el caso de un quark aislado, el extremo que no está sobre la brana se adentra en el bulto de AdS hasta cruzar el horizonte en $z \rightarrow \infty$ ($r = 0$), mientras que en el caso del par quark-antiquark, ambos extremos se encuentran sobre la brana y es el resto de la cuerda el que se acerca hacia el horizonte. Uno puede tratar el caso de masa finita si las D7-branas se extienden al interior de AdS , de tal modo que las cuerdas abiertas puedan terminar en una posición radial $z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} > 0$. Como se ve en (3.14), al calcular el perfil de $\langle \text{Tr} F^2(x) \rangle$ del quark, se encuentra que los quarks automáticamente tienen un perfil grueso, es decir, están cubiertos por una nube de gluones a su alrededor, cuyo tamaño es z_m . Mientras que las puntas de la cuerda corresponden en esta configuración a los quarks, el resto de la cuerda codifica la información de los campos gluónicos generados por el quark. Cabe mencionar que estos quarks son pesados y por tanto su tratamiento será clásico (o semiclásico), a diferencia de los mesones y glubolas (glueballs en inglés) que son ligeros y se describen de manera cuántica. Véase, por ejemplo, [33].

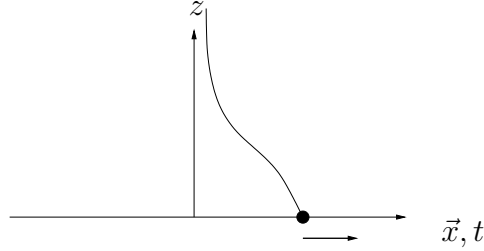


Figura 4.1: Perfil de la cuerda para caso quark solo moviéndose con una prescripción para la punta.

4.1.2. Pérdida de Energía en un Medio a Velocidad Constante

La pérdida de energía de un quark en un medio térmico ha sido estudiada en [10]. La situación analizada ha sido la correspondiente a un quark moviéndose mediante una fuerza externa en un medio térmico y la consecuente fuerza de arrastre producida por el medio. Es complicado estudiar casos generales y el cálculo original se limita al caso de velocidad constante. Se encuentra que la tasa de pérdida de momento (o, equivalentemente, la fuerza de arrastre) es

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\pi\sqrt{g_{YM}^2 N}}{2} T^2 \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.1)$$

Este precedente es importante pues, aunque nosotros no estaremos calculando pérdida de energía en un medio térmico, cualquier cálculo que se realice en esta situación tendrá dos partes: aquella correspondiente a la pérdida por arrastre en el medio térmico (si $T \neq 0$ y la otra por radiación.

4.2. El Quark Aislado en SYM $\mathcal{N} = 4$

Por medio de la dualidad, la dinámica de los quarks pesados puede ser estudiada mediante el movimiento de la cuerda clásica en un fondo curvo. Analicemos esto en detalle. Uno de los extremos de la cuerda abierta

termina en las $D7$ -branas, mientras que el otro termina en un conjunto de N_c $D3$ -branas paralelas que pueden ser reemplazadas por la geometría $(AdS\text{-Schwarzschild})_5 \times S_5$, lo cual nos dará la siguiente métrica como nuestro fondo

$$ds^2 = G_{mn}dx^m dx^n = \frac{L^2}{z^2} \left(-h dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{h} \right) + L^2 d\Omega_5, \quad (4.2)$$

$$h = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}, \quad \frac{L^4}{l_c^4} = g_{\text{YM}}^2 N_c \equiv \lambda, \quad z_h = \frac{1}{\pi T},$$

donde z_h codifica la posición del horizonte. Podemos limitar el movimiento de la cuerda a mantenerse solamente en las direcciones perpendiculares a la esfera en S_5 (de manera consistente con las ecuaciones de movimiento) y por tanto esta última no jugará un papel dinámico dentro de nuestra descripción.

Dado que estamos tratando a la cuerda en un nivel clásico, su dinámica es descrita por la acción de Nambu-Goto, la cual está definida mediante

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi l_c^2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \equiv \frac{L^2}{2\pi l_c^2} \int d^2\sigma \mathcal{L}_{\text{NG}}, \quad (4.3)$$

$$g_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n G_{mn} \quad a, b = 0, 1.$$

Las densidades canónicas de momento asociadas a esta densidad lagrangiana están dadas por

$$\Pi_\mu^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial (\partial_a X^\mu)}.$$

De manera covariante, podemos escribir las componentes de la siguiente manera

$$\Pi_\mu^z = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{(\partial_\tau X)^2 \partial_z X_\mu - (\partial_\tau X_\nu \cdot \partial_z X_\nu) \partial_\tau X_\mu}{(\partial_\tau X_\nu \cdot \partial_z X_\nu)^2 - (\partial_\tau X)^2 (1 - (\partial_z X)^2)}, \quad (4.4)$$

$$\Pi_x^z = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{(1 + (\partial_z X)^2) \partial_\tau X_\mu - (\partial_\tau X_\nu \cdot \partial_z X_\mu) \partial_z X_\mu}{(\partial_\tau X_\nu \cdot \partial_z X_\mu)^2 - (\partial_\tau X)^2 (1 - (\partial_z X)^2)}. \quad (4.5)$$

4.3. La cuerda en AdS puro (Mikhailov)

A temperatura cero, el quark se mueve en el vacío de super Yang-Mills y esperamos por tanto que no pierda energía si se desplaza a velocidad constante, pero sí lo haga al acelerarse. Mikhailov ha encontrado en [3] la prescripción para calcular la pérdida de energía de un quark infinitamente masivo

con movimiento arbitrario a temperatura cero en super Yang-Mills mediante la dinámica de una cuerda moviéndose en AdS_5 . Antes de este resultado, solamente se contaba con soluciones correspondientes a casos particulares, como fue el caso de la pérdida de energía mencionada en 4.1.2.

Mikhailov logra resolver las ecuaciones de movimiento a partir de considerar AdS_5 en la descripción global como se menciona en la sección 2. Este resultado ha sido generalizado al caso de masa finita con algunas implicaciones interesantes en las referencias [4, 13, 14]. En el caso de querer extender el estudio a temperatura finita, al romper las simetrías de AdS resultaría más complicado resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento para la cuerda clásica, pero la metodología sigue siendo la misma. Resulta ser que la no linealidad de las ondas producidas sobre la cuerda es lo que produce la física no lineal en la teoría de norma y está determinada por las condiciones iniciales en infinito.

Para describir la hoja de mundo de la cuerda necesitamos dos parámetros. Mikhailov ha demostrado que la superficie siguiente, expresada en términos de coordenadas de Poincaré y de la línea de mundo $X_\mu(\tau)$ del extremo de la cuerda, es extremal

$$X_\mu(\tau, \sigma) = \pm \sigma^{-1} \dot{x}_\mu(\tau) + x_\mu(\tau), \quad (4.6)$$

con $\sigma^{-1} = z$ y la condición $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 1$, y la elección de signo correspondiendo a ondas entrantes y salientes. Deben de existir otras soluciones (superposiciones no lineales) pero su forma no es conocida. Como fue mencionado en [4], es de mayor interés físico el caso retardado o de ondas salientes, donde las perturbaciones del campo gluónico se alejan del quark y el encaje de la cuerda es

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} + x^\mu(\tau). \quad (4.7)$$

Las componentes de la métrica inducida son entonces

$$g_{\tau\tau} = \frac{R^2}{z^2} (z^2 \dot{x}^2 - 1), \quad g_{zz} = 0, \quad g_{z\tau} = -\frac{R^2}{z^2}. \quad (4.8)$$

En la ecuación (4.7) podemos utilizar el hecho de que $d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2} dx^0$ para reescribir

$$\begin{aligned} X_0 \equiv t &= z \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_{\text{ret}}^2}} + t_{\text{ret}}, \\ \vec{X}(t_{\text{ret}}, z) &= z \frac{\vec{v}_{\text{ret}}}{\sqrt{1 - \vec{v}_{\text{ret}}^2}} + \vec{x}(t_{\text{ret}}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\vec{v}_{\text{ret}} \equiv \frac{dx(t_{\text{ret}})}{dt_{\text{ret}}}$ y se ve explícitamente que el perfil de la cuerda solo depende de lo que la punta había hecho en el tiempo anterior t_{ret} definido por (4.9). De este modo gracias a Mikhailov, conocemos la solución retardada asociada a cualquier trayectoria tipo tiempo del quark $\vec{x}(t)$.

Con este resultado es entonces posible calcular la energía total de la cuerda integrando la densidad de energía Π_t^t ,

$$E(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t \frac{dz}{z^2} \frac{1 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}} \quad (4.10)$$

que cuando la integral es expresada en términos de t_{ret} toma la forma

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} + E_q(\vec{v}(t)). \quad (4.11)$$

Análogamente, el momento total resulta tomar la forma

$$\vec{P}(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} \vec{v} + \vec{p}_q(\vec{v}(t)). \quad (4.12)$$

De manera covariante, el primer término de ambas expresiones puede expresarse como

$$\frac{dp_{\text{rad}}^\mu}{d\tau_r} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} a^2 v^\mu. \quad (4.13)$$

La primera parte de la ecuación (4.11) es precisamente la fórmula de pérdida de energía de Lienard que fue encontrada en [3], mientras que la segunda parte surge de un término de borde al hacer el cambio de coordenadas y fue encontrada en [4], donde también quedó claro su significado físico: $E_q = \gamma m$ representa la energía intrínseca del quark. Por otro lado, el momento en la ecuación (4.12) también se encuentra separado en dos partes: el primer término corresponde al momento emitido en forma de radiación cromoelectromagnética, y el segundo es $\vec{p}_q = m\gamma\vec{v}$, el momento intrínseco del quark. En otras palabras, la cuerda codifica la energía instantánea del quark y aquella radiada (y del mismo modo para el momento). Tal separación clara de los dos términos distintos en una teoría de norma no abeliana y fuertemente acoplada resulta asombrosa y ha tenido numerosas aplicaciones.

Véase por ejemplo [4, 14, 13]. Igualmente asombroso es el hecho de que la tasa de pérdida de energía y momento coincide con la del electromagnetismo clásico.

La extensión al caso de masa finita fue desarrollada en [4]. Es posible realizarla al considerar una nueva frontera para la cuerda: la brana se encuentra ahora en $z = z_m$ y la cuerda continúa hasta $z = \infty$. Se puede utilizar la solución de Mikhailov si consideramos aquella solución que pasa por esta posición radial con la trayectoria correspondiente al quark. Solo se consideran las variables evaluadas en $z = 0$ de manera auxiliar, aquí escritas con tildes (por ejemplo \tilde{x}), para poder utilizar el resultado de Mikhailov. Bajo estas consideraciones la solución física corresponde a la parte de la cuerda con $z > z_m$.

A partir de las ecuaciones (4.9) podemos obtener para el caso de movimiento unidimensional

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dz}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + dt_{\text{ret}} \left[\frac{\tilde{v}\tilde{a}z}{(1-\tilde{v}^2)^{3/2}} + 1 \right], \\ dX &= \frac{\tilde{v}dz}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + dt_{\text{ret}} \left[\frac{\tilde{v}\tilde{a}}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + \frac{\tilde{v}^2\tilde{a}z}{(1-\tilde{v}^2)^{3/2}} + \tilde{v} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se sigue entonces que las siguientes relaciones se cumplen

$$\dot{X} \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_z = \frac{\tilde{a}z + \tilde{v}(1-\tilde{v}^2)^{3/2}}{\tilde{v}\tilde{a}z + (1-\tilde{v}^2)^{3/2}}, \quad (4.15)$$

$$X' \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right)_t = -\frac{\tilde{a}z\sqrt{1-\tilde{v}^2}}{\tilde{v}\tilde{a}z + (1-\tilde{v}^2)^{3/2}}. \quad (4.16)$$

Esto lleva a las siguientes relaciones para la energía y el momento

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt \frac{F^2}{m^2} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} F v}{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} F^2} \right) + \frac{1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} F v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} F^2}} \gamma m, \\ P(t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt \frac{F^2}{m^2} \left(\frac{v - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} F}{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} F^2} \right) + \frac{v - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} F}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} F^2}} \gamma m \end{aligned} \quad (4.17)$$

En este contexto $F = \left(\sqrt{\lambda/2\pi}\right) \Pi_x^z(t, z_m)$ Es la fuerza externa que esta moviendo el quark. Del mismo modo, para el caso tridimensional las derivadas anteriores son

$$\dot{\vec{X}} \equiv \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)_z = \vec{v} + \frac{(1 - \vec{v}^2)\vec{a}z}{(\vec{v} \cdot \vec{a})z + (1 - \vec{v}^2)^{3/2}}, \quad (4.18)$$

$$\vec{X}' \equiv \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)_t = -\frac{\sqrt{1 - \vec{v}^2}\vec{a}z}{(\vec{v} \cdot \vec{a})z + (1 - \vec{v}^2)^{3/2}}. \quad (4.19)$$

Al pasar al caso de movimiento arbitrario en tres dimensiones, es posible demostrar que de esta manera se obtiene también una ecuación de Lorentz-Dirac generalizada [14, 13] para el quark que incorpora el efecto de amortiguamiento debido a la energía radiada,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{m \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}} \right) = \frac{\mathcal{F}^\mu - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} \mathcal{F}^2 \frac{dx^\mu}{d\tau}}{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{F} = \gamma(\vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F}).$$

La expresión dentro de los paréntesis representa una relación de dispersión modificada para el quark,

$$p_q^\mu = \frac{m \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}} \quad (4.21)$$

mientras que el lado derecho contiene una fórmula covariante para la tasa a la cual el quark radía cuadrivector,

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{d\tau} = \frac{\sqrt{\lambda} \mathcal{F}^2}{2\pi m^2} \left(\frac{\frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} \mathcal{F}^\mu}{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2} \right) \quad (4.22)$$

que coincide con Lienard solo en el caso donde $m \rightarrow \infty$ ($z_m = 0$).

4.4. Par Quark-Antiquark

Además de estudiar configuraciones con un quark aislado, resultan interesantes aquellas de pares quark-antiquark ($q - \bar{q}$). En el caso de movimiento de los quarks en un medio térmico, esta configuración fue estudiada en [11, 34] con la intención de dar una descripción más realista del proceso de creación de pares $q - \bar{q}$ en el QGP. Para movimiento en el vacío de la teoría, la primera solución dinámica fue encontrada por Xiao en [5] y se refiere a una pareja quark-antiquark que se mueve cada uno a aceleración propia constante A ,

$$X(t, z) = \pm \sqrt{A^{-2} + t^2 - z^2}, \quad (4.23)$$

de donde se pueden calcular los momentos conjugados

$$\begin{aligned} \Pi_t^t &= -\frac{X'^2 + 1}{z^2 \sqrt{1 - \dot{X}^2 + X'^2}} \\ &= A \frac{t^2 + A^{-2}}{z^2 \sqrt{t^2 + A^{-2} - z^2}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_t^z &= \frac{X' \dot{X}}{z^2 \sqrt{1 - \dot{X}^2 + X'^2}} \\ &= A \frac{t}{z \sqrt{t^2 + A^{-2} - z^2}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Xiao procede a demostrar que existe un horizonte en la hoja de mundo que se localiza en $z = \frac{1}{A}$, de modo que esta superficie divide la cuerda en dos trozos desconectados causalmente. Una manera fácil de ver esto es que se trata de una línea nula en la hoja de mundo que también es estática y por tanto es un horizonte.

Dado que las regiones $z > \frac{1}{A}$ y $z < \frac{1}{A}$ se encuentran desconectadas, parece natural asociarlas respectivamente al campo lejano y al campo cercano del quark. Si esto es correcto, la tasa de radiación está dada por la cantidad de energía que atraviesa esta superficie,

$$\Pi_t^z|_{z=1/A} = A \frac{t}{A^{-1} \sqrt{t^2 + A^{-2} - A^{-2}}} = A^2,$$

o diferenciando con respecto al tiempo el resultado de integrar la densidad

de energía en la parte superior de la cuerda,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{rad}} &= \int_{A^{-1}}^{\sqrt{\frac{1}{A^2}+t^2}} A \frac{t^2 + A^{-2}}{z^2 \sqrt{t^2 + A^{-2} - z^2}} dz \\
 &= \frac{t^2 + A^{-2}}{A^{-1}} \frac{\sqrt{-A^{-2} + t^2 + A^{-2}}}{(t^2 + A^{-2}) A^{-1}} = A^2 t.
 \end{aligned}$$

De ambas maneras obtenemos el mismo resultado, dado que la energía radiada es aquella que se perdió previamente y atravesó en un momento retardado el horizonte en la hoja de mundo. Para este caso, el resultado está de acuerdo con (4.11) y por tanto con la fórmula de Lienard.

Estas conclusiones se verán reevaluadas en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Cuerdas en AdS : Perfiles, Radiación y Aceleración Uniforme

Una de las partes más interesantes del diccionario de las dualidades norma/gravedad [1, 26, 27] identifica los tubos de flujo en teorías de norma fuertemente acopladas con cuerdas en la teoría de gravedad correspondiente (véase por ejemplo, [35, 36, 37, 38]). Por supuesto, esta conexión se remonta a la cuerda de QCD [39, 40, 41, 42, 43, 44], pero en el contexto de norma/gravedad, surgen varias sorpresas: la cuerda es infinitesimalmente delgada, vive en un número de dimensiones superior y existe aun en configuraciones sin confinamiento, como es el caso de las teorías de campo conformes (CFT). Por supuesto, en el último caso no tenemos, estrictamente, un *tubo* de flujo, sino un esparcimiento Coulombiano [45, 46, 47]. La correspondencia AdS/CFT nos permite estudiar el esparcimiento dependiente del tiempo del campo gluónico en una CFT con acoplamiento fuerte al examinar la dinámica de una cuerda que se mueve en el espacio AdS . Esto se ha estudiado en diferentes trabajos, comenzando por [47, 48] y continuando hasta las contribuciones recientes [49, 50, 51, 52, 8, 53, 54] (para cálculos a temperatura finita, véase por ejemplo [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 9]).

Más en detalle, una cuerda en AdS que se extiende hasta la frontera es dual a un quark infinitamente pesado en la CFT. La punta de dicha cuerda localizada en la frontera corresponde al quark propiamente dicho (entendido como la fuente “desnuda” en la representación fundamental del grupo de norma), mientras que el cuerpo de la cuerda codifica los campos cercanos y

de radiación producidos por el quark. El encaje de la cuerda asociado causalmente a *cualquier* trayectoria del quark fue encontrado en [3]. Cuando el quark se mueve a velocidad constante, la cuerda se traslada uniformemente, extendiéndose únicamente a lo largo de la dirección radial de AdS , y representa, por supuesto, un perfil Coulombiano bajo un empuje de Lorentz. Cuando el quark se acelera, la cuerda arrastra detrás del extremo y succiona energía de él, expresando el hecho de que se emite radiación gluónica en la CFT [14, 13]. En este caso, un agujero negro aparece en la hoja de mundo de la cuerda [4], el cual señala una pérdida de energía, justo como en el caso de un quark moviéndose en un plasma térmico [65, 66] (dual a una cuerda en una geometría Schwarzschild- AdS).

En este capítulo examinaremos algunas preguntas en este contexto. En la sección 5.1 mostraremos que, a pesar del hecho de que la cuerda tiene una tendencia general a caer hacia el interior de la geometría AdS (es decir, alejándose de la frontera), existen movimientos del extremo para los cuales la cuerda se voltea hacia arriba una cierta distancia antes de caer nuevamente. Por medio de la conexión UV/IR [28], esto se puede interpretar en el lenguaje de la CFT como el enunciado de que, a pesar de que el tubo de flujo producido por el quark tiene una tendencia general a esparcirse, existen movimientos del quark para los cuales el tubo de flujo se reenfoca una distancia antes de volver a esparcirse nuevamente.

Un ejemplo particularmente peculiar es el caso donde el quark experimenta aceleración uniforme [5, 67, 68]. En este caso la cuerda toma la forma de un arco de círculo, el agujero negro en la hoja de mundo es estático, y, como se muestra en la sección 5.2 (véase también [69]), el perfil de la cuerda de [3] en realidad *termina* en la ubicación del horizonte en la hoja de mundo. Esto no es un error: dicho tramo de la cuerda en verdad codifica los campos gluónicos generados por un quark uniformemente acelerado desde el principio de los tiempos. Pero por supuesto, la cuerda no puede terminar en medio de la nada.

Interesantemente, la única extensión suave es continuar la forma circular hasta regresar a la frontera, obteniendo entonces una configuración dual a un quark *y un antiquark* que se aceleran de manera uniforme espalda con espalda [5]. Si esta fuera la única continuación permitida, entonces la correspondencia AdS/CFT estaría haciendo una predicción de que es imposible tener un quark aislado experimentando aceleración uniforme, como si este tipo de movimiento fuera tan violento que el tubo de flujo que emerge del quark es forzado a reenfocarse hasta tener ancho cero, requiriendo entonces

la existencia de un antiquark. Sin embargo, encontramos que sí existe un encaje correspondiente a un quark aislado. El segmento de cuerda más allá del horizonte de la hoja de mundo es puramente radial y se mueve a la velocidad de la luz. Corresponde a una onda de choque gluónica que existe desde el principio de los tiempos y se desprende del quark, debido a que la perturbación en el campo gluónico producida por la desaceleración del quark no puede alcanzar la onda de choque. Del análisis resulta claro que esta historia es cierta no solo para la aceleración uniforme, sino también para cualquier trayectoria que asintóticamente se aproxime a una aceleración uniforme en un pasado remoto.

Debe de tenerse presente que la terminación abrupta de la cuerda dual en el horizonte es un fenómeno específico al quark uniformemente acelerado: aun cuando un horizonte aparece en la hoja de mundo en el momento que el quark/extremo se acelera de cualquier manera [4], en general el encaje de la cuerda obtenida en [3] *no* termina ahí. En otras palabras, en general el campo gluónico generado por el quark desde el principio de los tiempos está codificado no solo por el segmento de la cuerda fuera del horizonte en la hoja de mundo, sino también por el segmento dentro de él.

El hecho de que el horizonte divida la cuerda dual al quark acelerado en dos segmentos evoca el hecho de que la energía-momento total de la cuerda es la suma de dos contribuciones distintas, correspondientes a las energías intrínseca y radiada del quark, las cuales han sido separadas por medio de un análisis de la hoja de mundo en [3, 4, 14, 13] (y a nivel de espacio-tiempo en [70]). Es natural conjeturar entonces que el horizonte en la hoja de mundo debe de ser interpretado físicamente como la línea divisoria entre las partes de la cuerda que son duales respectivamente a los campos cercanos y de radiación [4, 71, 5, 6, 7, 8, 9]. En particular esto implicaría que la tasa de flujo de energía-momento a través del horizonte representa la tasa a la que el quark radía energía-momento. A partir de [3], se conoce que esta última es proporcional a la fórmula de Lienard conocida de la electrodinámica clásica¹. En consonancia con la interpretación del horizonte como la línea divisoria, en [5] se demostró que en el caso de aceleración uniforme, la tasa de flujo de energía por el horizonte de hecho reproduce correctamente la fórmula de Lienard.

¹Esto es cierto para un quark infinitamente pesado; la fórmula correspondiente para un quark de masa finita se encontró en [4, 14, 13], y se ha discutido brevemente en el capítulo 4

En la sección 5.3 investigamos esta misma cuestión para el movimiento arbitrario del quark, calculando la tasa de flujo de energía-momento a través de una curva arbitraria en la hoja de mundo. Encontramos que el acuerdo que se obtuvo en [5] se debe a las particularidades de la trayectoria considerada ahí, y en general, el flujo de energía-momento a través del horizonte en la hoja de mundo *no* reproduce la fórmula de Lienard. Más en general, mostramos que la información de los campos cercanos y de radiación del quark *no* está separada geoméricamente en la hoja de mundo a un tiempo de observación fijo t : en general se esparce a lo largo de toda la cuerda, y solo puede ser separada explícitamente por medio del método algebraico-diferencial de [3, 4, 70]. Curiosamente, si en lugar de esto consideramos la cuerda a un tiempo retardado fijo t_r , el mismo que se utiliza en la construcción de [5] (véase 4.9), entonces es posible realizar una separación geométrica, pero se encuentra que el quark corresponde a la cuerda completa, y toda la radiación se encuentra en el horizonte de Poincaré de AdS .

5.1. Azotar de la cuerda

Puede observarse a partir de (4.9) que, cuando consideramos perfiles para la cuerda a un tiempo de observación t , genéricamente ocurre que $z \rightarrow \infty$ cuando $t_r \rightarrow -\infty$, así que puntos en tiempos cada vez más retardados, por fuerza, se encuentran en valores cada vez más grandes de z . Esta es la razón por la cual la cuerda se extiende desde la frontera de AdS ($z = 0$) hasta el horizonte de Poincaré ($z \rightarrow \infty$), como se esperaría para un quark aislado; se necesita la cuerda entera para codificar el campo gluónico emitido por el quark desde el principio de los tiempos.

Para trayectorias genéricas, z aumenta monótonicamente cuando nos movemos a lo largo de la cuerda empezando desde la punta en la frontera de AdS . Esto es consistente con el hecho de que la cuerda tiene una tendencia a caer hacia z 's más grandes, debido a la curvatura de AdS . En el lenguaje de la teoría de norma, esto quiere decir simplemente que el tubo de flujo tiene una tendencia general a esparcirse.

Es interesante hacerse la pregunta de si esta difusión puede detenerse momentáneamente, o incluso revertirse durante alguna distancia. Si se utiliza ingénuamente la conexión UV-IR [28] esto se traduciría a la pregunta de si la cuerda se puede volver horizontal (es decir, paralela a la frontera) en algún punto, o incluso tener un segmento que se aproxime a, en lugar de alejarse

de, la frontera de AdS . En realidad, en situaciones dinámicas el mapeo entre la cuerda y los perfiles del tubo de flujo resulta ser más sutil y depende de la observable que se utilice para establecerlo. Si consideramos únicamente los valores esperados de operadores locales, como es el caso del tensor energía-momento o la densidad lagrangiana, entonces juega un papel importante el tiempo de propagación de regreso a la frontera del correspondiente campo del bulto generado por el segmento de cuerda en cuestión. Si se llevan a cabo los cálculos explícitos, se puede demostrar que las contribuciones de los diferentes puntos a lo largo del encaje de la cuerda (4.7) resultan ser una derivada total, por lo que el resultado neto solo depende de la posición del quark/extremo en un tiempo retardado particular [8, 72]. Si, por otro lado, sondeamos la cuerda en puntos lejos de la frontera al considerar cantidades no locales como lazos de Wilson o funciones de correlación de más puntos [73], entonces su perfil instantáneo puede ser interpretado, sin mayores complicaciones, de acuerdo con la conexión UV-IR. Es esta perspectiva la que se adoptará en la discusión siguiente.

La primera pregunta que quisieramos responder es si la cuerda puede volverse horizontal en algún punto. La manera más simple de responder esto es observando a partir de (4.9) que $z(t, t_r) = \sqrt{1 - \vec{v}^2}(t - t_r)$, y hallar el extremo al poner $(\partial z / \partial t_r)_t = 0^2$. Se puede encontrar una solución solo si $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$. Dado un punto cualquiera t_r en la trayectoria del quark/extremo donde esta condición se satisfaga (es decir, donde la aceleración se oponga al movimiento), la cuerda se volverá horizontal en un punto a lo largo de la línea de Mikhailov correspondiente que se encuentra en un tiempo posterior

$$t = t_r - \frac{1 - \vec{v}^2}{\vec{v} \cdot \vec{a}} , \quad (5.1)$$

o equivalentemente, en una profundidad radial

$$z = -\frac{(1 - \vec{v}^2)^{3/2}}{\vec{v} \cdot \vec{a}} . \quad (5.2)$$

(Puede comprobarse en (4.19) que en efecto en este punto $\vec{X}' \rightarrow \infty$.) Esto demuestra que de hecho no es para nada raro que el tubo de flujo deje de esparcirse temporalmente.

²Se omitirán a partir de este punto los subíndices de x , v y a ; su dependencia es del tiempo retardado correspondiente.

La siguiente pregunta considera la naturaleza de este extremo. Al calcular $(\partial^2 z / \partial t_r^2)_t$, se puede establecer fácilmente que el punto (5.2) en la cuerda es un máximo si el jalón $\vec{j} \equiv d\vec{a}/dt_r$ en t_r satisface

$$\vec{j} \cdot \vec{v} + \vec{a}^2 + 3 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{1 - v^2} = \vec{j} \cdot \vec{v} + \vec{a}^2 + 3 \frac{(1 - v^2)^2}{z^2} > 0 . \quad (5.3)$$

Cuando se cumple (5.3), la cuerda se voltea de regreso a la frontera de AdS , o equivalentemente, el tubo de flujo de SYM máximamente supersimétrico se reenfoca. Cuando el perfil de la cuerda a un tiempo de observación t dado da la vuelta de esta forma, genéricamente vuelve a alejarse de la frontera en un valor anterior t_r , para el cual se satisface la versión revertida de la desigualdad (5.3). Esto solo puede suceder si $\vec{j} \cdot \vec{v} < 0$, y resulta ser más complicado cuando $z \rightarrow 0$ debido a que requiere $|\vec{j}| \rightarrow \infty$. Esto significa que, si queremos dar un el latigazo a la cuerda para hacer que regrese arbitrariamente cerca de la frontera de AdS , debemos estar preparados para jalonear la punta con una fuerza arbitrariamente grande.

Nuestra conclusión general es entonces que existen situaciones demasiado elaboradas donde las trayectorias del quark/extremo provoquen un jaloneo de la cuerda de tal forma que el perfil deje de incrementar monótonicamente hacia $z \rightarrow \infty$. Bajo estas circunstancias, el tubo de flujo dual (cuando se examina con los operadores no locales discutidos anteriormente) revierte su tendencia general a esparcirse, y de hecho se reenfoca por una distancia, antes de comenzar a esparcirse nuevamente.

5.2. Aceleración Uniforme

Un caso simple donde se ilustra el comportamiento de latigazo que se menciona en la sección anterior es un quark uniformemente acelerado, con aceleración propia A ,

$$x(t_r) = \sqrt{A^{-2} + t_r^2} . \quad (5.4)$$

El tiempo propio del quark es

$$\tau_r = A^{-1} \operatorname{arcsinh}(At_r) , \quad (5.5)$$

y la solución general (4.9) toma la forma

$$\begin{aligned} t(t_r, z) &= t_r + \sqrt{1 + A^2 t_r^2} z \\ X(t_r, z) &= \sqrt{A^{-2} + t_r^2} + At_r z . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Usando (5.2) y (5.3), es fácil cotejar que, para todo $t > 0$, la línea de mundo del quark (5.4) lleva a un punto de regreso (un máximo en $z(t_r)$) en el perfil de la cuerda, localizado en $z = \sqrt{A^{-2} + t^2}$, $X = 0$.

Tras eliminar t_r , (5.6) toma la forma [68]

$$X(t, z) = \pm \sqrt{A^{-2} + t^2 - z^2}. \quad (5.7)$$

Esta solución fue encontrada independientemente en [5, 67]³. Dado que conocemos que (5.6) es un caso particular de (4.9), tenemos la seguridad de que es el encaje retardado que codifica la física de interés para nosotros. Se puede verificar que la métrica de la hoja de mundo resultante (4.8) tiene un horizonte en $z_h \equiv A^{-1}$ [5, 68].

Una propiedad muy particular de (5.6) es que el coeficiente de z en $t(t_r, z)$ diverge linealmente cuando $t_r \rightarrow -\infty$. Esto niega la conclusión a la que habíamos llegado de manera genérica al principio de este capítulo: debido a la tasa a la cual el quark/extremo se acerca asintóticamente a la velocidad de la luz, la cuerda en este caso *no* se extiende hasta $z \rightarrow \infty$. Cuando $t_r \rightarrow -\infty$, tenemos que $t \simeq t_r + A|t_r|z$, y por tanto $z \rightarrow z_h$. Esto significa que la cuerda solamente se extiende a lo largo de un arco del círculo (5.7), extendiéndose de la frontera al horizonte de la hoja de mundo.

Más aún, a diferencia de lo que sugiere (5.7), el encaje de la cuerda (5.6) *no* es simétrico bajo (5.6). El punto en $t_r \rightarrow -\infty$ ($z = A^{-1}$) sigue la trayectoria $X = -t$, es decir, siempre se mueve a la velocidad de la luz, en la dirección $-x$. Esto implica que, como se muestra en las figuras 5.1 y 5.2, para $t < 0$ la cuerda termina en el punto donde toca por primera vez el horizonte, y por tanto cubre menos de una cuarta parte del círculo; mientras que para $t > 0$, cruza el horizonte, da vuelta en $z_{\max}(t) \equiv \sqrt{A^{-2} + t^2}$, y termina en el segundo punto de intersección con el horizonte, cubriendo así más de una cuarta parte del círculo.

Es importante notar que esto no se trata de un error: por construcción el encaje (4.9) representa toda la porción de la cuerda que ha sido influen-

³ Cabe mencionar aquí que esta solución ha sido generalizada para el caso de masa finita en [13]:

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{1}{z_m^2 F^2} + (t - t_0)^2 - z_m^2}, \quad (5.8)$$

$$F = (2\pi/\sqrt{\lambda})F, \quad (5.9)$$

donde F es la fuerza externa constante.

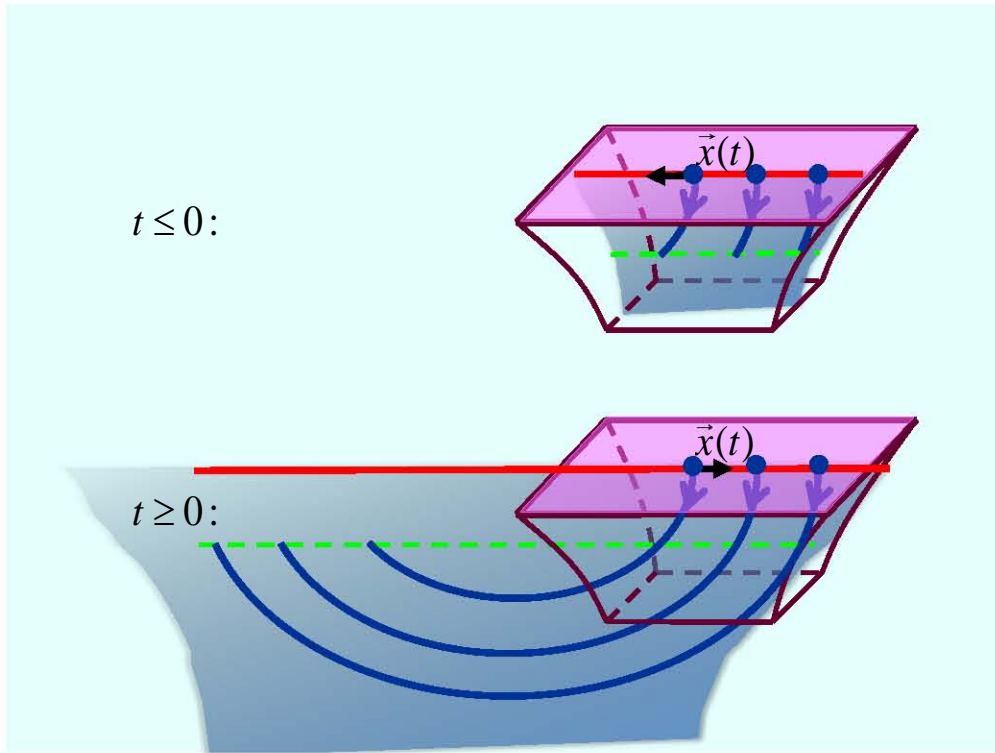


Figura 5.1: Representación esquemática de la cuerda dual al quark acelerado, a diferentes tiempos negativos (arriba) y positivos (abajo), mostrando que para cualquier instante, el encaje de Mikhailov (5.6) dual al quark que experimenta aceleración uniforme traza un arco que termina en el horizonte de la hoja de mundo (indicada por la línea verde punteada).

ciada desde $t_r \rightarrow -\infty$, y por tanto codifica la contribución completa al campo gluónico producido por el quark desde el principio de los tiempos. Esta propiedad puede ser entendida como un caso particularmente extremo del efecto de colimado descubierto en [72]. En ese trabajo se mostró que, en cualquier instante cuando la velocidad del quark/punta es relativista, la línea de Mikhailov correspondiente permanece cercana a la frontera de AdS por un tiempo prolongado, implicando que la contribución al campo gluónico que codifica se encuentra colimado. En el caso a consideración, este efecto es máximo para $t_r \rightarrow -\infty$, y la línea de Mikhailov en cuestión se encuentra cerca de la frontera de AdS aun después de haber transcurrido una cantidad de tiempo *infinito*. (Esta línea de hecho es paralela a la frontera, y coincide con el horizonte $z = A^{-1}$.) Es por esto que, para este tipo de movimiento, que $t_r \rightarrow -\infty$ no se traduce en $z \rightarrow \infty$.

Aun así, es evidente que la cuerda no puede terminar en medio de la

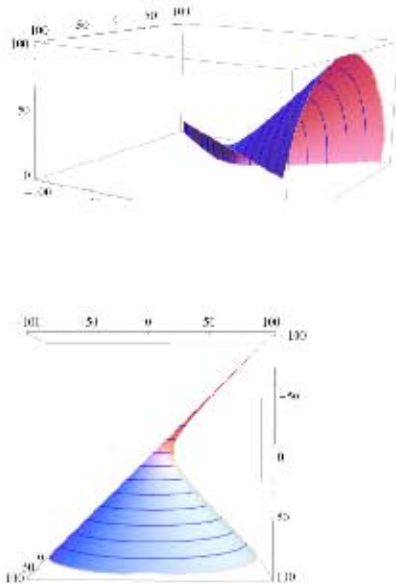


Figura 5.2: Vistas de lado y desde arriba de la hoja de mundo (5.6) dual al quark uniformemente acelerado (en unidades tales que $A = 0.05$), graficadas con Mathematica. La superficie termina abruptamente en el horizonte ($z_h = 20$, en estas unidades). La curva azul indica contornos de la cuerda a t fijo, y el eje de las z apunta hacia arriba.

nada, así que debe de existir una continuación apropiada. Si se pide que la continuación sea *suave*, entonces solo existe una posibilidad: la cuerda debe de continuar a lo largo del semicírculo (5.6), hasta regresar a la frontera. Este encaje describe un quark y un *antiquark* que experimentan una aceleración uniforme espalda con espalda (fue precisamente en esta forma que (5.7) fue encontrada en [5]).⁴

Si esta fuera la única posibilidad permitida, entonces la correspondencia *AdS/CFT* estaría prediciendo que es imposible tener un quark aislado con aceleración uniforme, como si esta clase de movimiento fuera tan violento que fuerza al tubo de flujo asociado a reenfocarse hasta tener ancho cero, implicando la existencia de un colector de color, un antiquark. Esta predicción en potencia, sin embargo, es sorprendente al punto de ser difícil de creer.

⁴El arco de la cuerda que está atado más allá del punto final en (5.6) corresponde a la versión *puramente entrante* de la onda de cuerda/gluónica de [3], obtenida al invertir los signos en los términos lineales en z . Esto explica la asimetría entre las partes de la cuerda asociadas respectivamente con el quark y el antiquark.

Desde la perspectiva de la teoría de norma, la falta de confinamiento nos deja sin razón alguna para sospechar que el quark necesariamente tiene que estar acompañado por un antiquark, y justo para esta clase particular de movimiento.

Esto nos lleva a buscar una continuación de la cuerda que no regrese a la frontera de AdS , aun si esto implica tener una pendiente discontinua en el punto de unión, $z = A^{-1}$. En esta búsqueda nos ayudan dos pistas: primero, en $t \rightarrow -\infty$ la porción conocida de la cuerda es vertical (es decir, puramente radial) y se mueve a la velocidad de la luz en la dirección $-x$; segundo, para todo t , el punto de unión se mueve a la velocidad de la luz en esa misma dirección. Por tanto es natural conjeturar que la porción faltante de la cuerda es siempre vertical y se mueve a velocidad constante. Esto significaría, en particular, que en $t \rightarrow -\infty$, la cuerda completa comienza vertical, empatando correctamente con nuestra condición inicial deseada: un quark aislado moviéndose a velocidad constante $v = -1$. Cuando el quark/extremo comienza a alentarse, se desarrolla un pliegue en $z = A^{-1}$, que se vuelve cada vez más pronunciado conforme pasa el tiempo, eventualmente transformándose en una cúspide. La evolución completa puede observarse en la figura 5.3.

Para poner esta propuesta a prueba, podemos argumentar de la siguiente manera. Como se ha mostrado arriba, la razón por la cual la cuerda (5.6) está incompleta es que la punta asintóticamente se acerca a la velocidad de la luz. Entonces, si deformamos la trayectoria del quark/punta de tal forma que este comportamiento asintótico se modifique, deberíamos obtener una cuerda que se extienda correctamente hasta $z \rightarrow \infty$. Tras remover esta deformación, para regresar al caso de la aceleración uniforme, podríamos entonces observar el comportamiento del segmento adicional de cuerda, y ver si está de acuerdo con nuestras expectativas.

El primer paso entonces es añadir a (5.4) una perturbación $\delta\vec{x}(t_r)$ de tal manera que en $t_r \rightarrow -\infty$ el quark/extremo se acerque ahora a una velocidad subluminal, o se acerque a la velocidad de la luz a una tasa que haga γ divergir menos rápidamente que linealmente en t_r . Para ser específicos, escogemos trabajar con

$$\delta x(t_r) = -\frac{\epsilon}{b} \ln(\cosh(bt_r)) , \quad (5.10)$$

donde ϵ y b son parámetros ajustables. Este cambia la velocidad del quark/extremo por una cantidad $\delta v(t_r) = -\epsilon \tanh(bt_r)$, y por tanto asegura que en el pasado remoto la velocidad neta se acerque asintóticamente a $-1 + \epsilon$ en lugar de -1 (y en el futuro remoto, se acerque asintóticamente a $1 - \epsilon$ en lugar de 1).

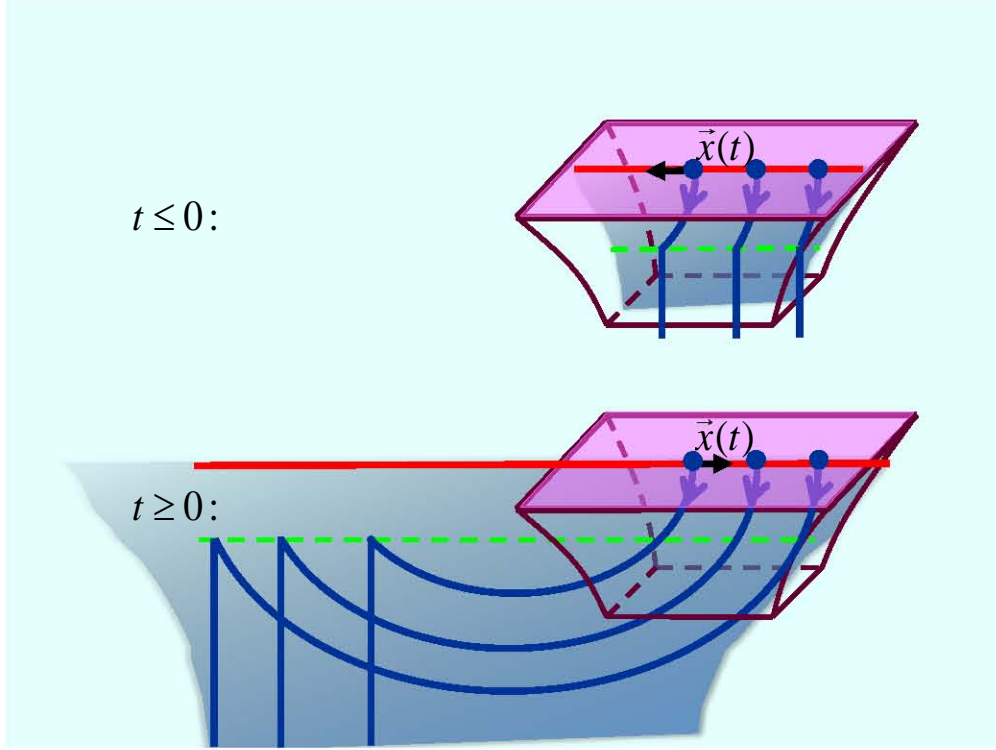


Figura 5.3: Instantáneas a tiempos sucesivos del encaje de la cuerda *completa* dual al quark uniformemente acelerado, para varios tiempos negativos (arriba) y positivos (abajo). En cualquier instante, el arco (5.6) continúa con un segmento vertical que se extiende hacia abajo desde el horizonte, y se mueve hacia la izquierda a la velocidad de la luz.

El encaje no linealizado y exacto de la cuerda (4.9) toma la forma

$$t(t_r, z) = t_r + \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{t_r}{\sqrt{A^{-2} + t_r^2}} - \epsilon \tanh(bt_r) \right)^2}}, \quad (5.11)$$

$$X(t_r, z) = \sqrt{A^{-2} + t_r^2} - \frac{\epsilon}{b} \ln(\cosh(bt_r)) + \frac{\left(\frac{t_r}{\sqrt{A^{-2} + t_r^2}} - \epsilon \tanh(bt_r) \right) z}{\sqrt{1 - \left(\frac{t_r}{\sqrt{A^{-2} + t_r^2}} - \epsilon \tanh(bt_r) \right)^2}}.$$

De esta solución, es fácil ver que en la región definida por las 3 condiciones $t_r < 0$, $-At_r \gg 1$ (de tal manera que casi estemos en la asíntota de la trayectoria hiperbólica (5.4)) y $-bt_r \gg 1$ (de tal manera que el cambio en la

velocidad sea esencialmente independiente del tiempo), la cuerda a un t fijo está casi completamente vertical y se mueve con una velocidad aproximadamente constante, ⁵ $X(t, z) = -(1 - \epsilon)t + \mathcal{O}(1/A^2 t_r^2) + \mathcal{O}(1/bt_r)$. Adicionalmente, tras resolver para z en la primera relación en (5.11), encontramos que cuando $0 < \epsilon < 1$ este segmento vertical de la cuerda se extiende completamente hacia abajo, a $z \rightarrow \infty$, debido al comportamiento del quark/extremo en la región $-At_r \gg 1/\sqrt{\epsilon}$.

Para ϵ arbitrariamente pequeño, esto confirma que la cuerda se continúa con el segmento vertical moviéndose a velocidad constante. Si $\epsilon \rightarrow 0$, la coyuntura entre esta continuación y la porción de la cuerda conectada con la frontera se acerca a $z = A^{-1}$, y el rango de tiempos retardados que trazan el segmento vertical se alejan a $t_r \rightarrow -\infty$, lo que explica por qué esta continuación no se encuentra en el encaje no perturbado (5.6). Todos los enunciados anteriores se pueden confirmar visualmente en las gráficas de Mathematica de la figura 5.4.

La conclusión es que la situación es como se muestra en la figura 5.3. La cuerda se encuentra inicialmente completamente vertical y se mueve a la velocidad de la luz, con el segmento en $z > A^{-1}$ describiendo la parte exterior de un campo de Coulomb infinitamente empujado, que se toma como condición inicial en $t_r \rightarrow -\infty$ (dispuesto por el comportamiento del quark/extremo *antes* del principio de los tiempos). Cuando el quark se desacelera, existe una perturbación que corre hacia abajo a lo largo de la cuerda, y hacia afuera en el campo gluónico de la configuración dual, pero esta perturbación nunca logra alcanzar el segmento $z > A^{-1}$, que, por tanto, continúa sin cambios. Esta es la razón por la cual se desarrolla la cúspide.⁶ En pocas palabras, *el segmento vertical de la cuerda en $z > A^{-1}$ codifica una onda de choque que pierde contacto con el quark y es por consiguiente emitida por él.*

Seamos más precisos sobre este último punto. Aunque es evidente que el segmento vertical complementario de la cuerda, que se extiende desde

⁵Este enunciado se sostiene independientemente del valor de ϵ , y de la relación entre A y b .

⁶Por supuesto, físicamente no tiene nada de malo asumir, como en [5], que a $t \rightarrow -\infty$, adicionalmente a la cuerda vertical $X(t, z) = -t$ correspondiente a un quark viajando en la dirección $-x$ a la velocidad de la luz, uno tenga una segunda cuerda vertical $X(t, z) = t$, dual al *antiquark* viajando en la dirección $+x$ a la velocidad de la luz. Si ambas puntas de la cuerda viajan con aceleración uniforme, entonces el encaje completo de la cuerda trazará el semicírculo completo (5.7). Nuestro punto es simplemente que esta condición inicial diferente *no* describe un quark aislado que experimenta una aceleración uniforme.

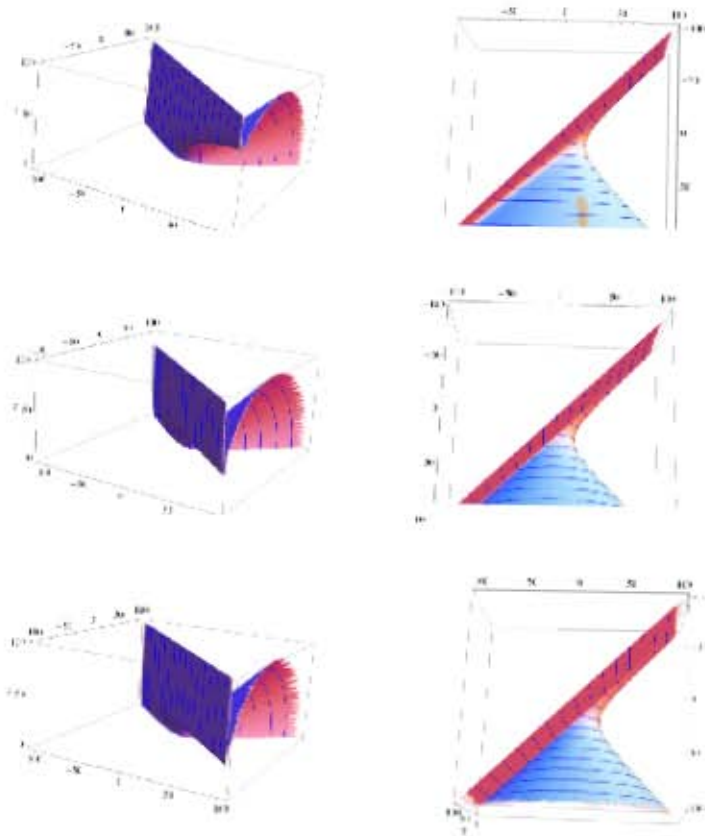


Figura 5.4: Vistas de lado y desde arriba de la hoja de mundo (5.11) dual al quark acelerado uniformemente y perturbado por (5.10), en unidades tales que $A = 0.05$. La curva (azul) indica contornos de la cuerda a t fijo, y el eje de las z apunta hacia arriba. En todos los casos $b = 1$, y, empezando desde arriba, las filas corresponden a $\epsilon = 0.05, 0.001, 0.0001$. Cuando nos acercamos al encaje no perturbado, se mantiene el muro vertical que se extiende desde el horizonte ($z_h = 20$), y que faltaba en la figura 5.2.

$z = A^{-1}$ y se mueve a la velocidad de la luz (de acuerdo con $X(t, z) = -t$), describe la porción IR de una onda de choque en el campo gluónico, el campo gluónico total en cualquier punto se obtiene al combinar esta contribución con la porción del arco que se obtiene de la solución de Mikhailov (5.6). Al nivel de funciones de un punto, este caso está cubierto por los cálculos realizados en [8, 53] para una trayectoria arbitraria del quark, usando el encaje (4.7). Como se mencionó en la sección 5.1, se encontró ahí que el resultado surge

del término de borde que resulta estar evaluado solo en $z = 0$. Sin embargo, los autores de esos trabajos no tomaron en cuenta que para el caso especial de aceleración uniforme el encaje de Mikhailov se encuentra incompleto, y por tanto, si se utiliza (5.6) por sí sola, existiría un término de superficie que surge de $z = A^{-1}$.

En los trabajos [8, 53] falta esta contribución en el horizonte, pero de hecho resulta ser que se *cancela* completamente para la onda de choque asociada con el complemento vertical del encaje. Esto es claro en el hecho de que cuando nuestros encajes deformados (5.11) (que se extienden correctamente hasta $z \rightarrow \infty$) son utilizados en [8, 53], no existe una contribución neta de algún punto intermedio de la cuerda, así que cuando tomamos $\epsilon \rightarrow 0$ para acercarnos al caso de aceleración uniforme, lo mismo debe de ser cierto por continuidad. También puede verificarse al evaluar directamente los resultados de [53, 8] para el caso de aceleración uniforme, notando que para tiempos asintóticamente tempranos, $t \rightarrow -\infty$, las expresiones evaluadas ahí describen correctamente el perfil empujado *completo* de Coulomb asociado con el quark moviéndose a velocidad constante $v \rightarrow 1$, que es obviamente dual a la cuerda vertical *completa*. El punto es entonces que para aceleración uniforme, el procedimiento de [8, 53] omite 2 contribuciones que, cuando son consideradas apropiadamente, se cancelan una a la otra.

Quizás parezca peculiar que el segmento vertical de la cuerda, que en la descripción *AdS* se aleja notablemente del quark/extremo cuando $t \rightarrow \infty$, es invisible en los perfiles del campo gluónico determinados [8, 53]. Sin embargo este es un ejemplo concreto del hecho de que los observables locales *no* son sensibles al perfil instantáneo de la cuerda, debido al retraso asociado a la propagación del campo hacia la frontera de *AdS*. Esto implica que la interpretación directa de la cuerda completa como un quark que pierde una onda de choque, y que se sugiere de la figura 5.3, solo puede realizarse en términos de un conjunto apropiado de sondas no locales del campo gluónico [73], cuya importancia ya hemos enfatizado en la sección 5.1.

Antes de terminar esta sección, nos gustaria señalar que, dado que la terminación del encaje (5.6) depende únicamente del comportamiento del quark en el pasado remoto, los enunciados principales que hemos hecho aquí aplican no solo para el caso de aceleración uniforme, sino también para cualquier movimiento que asintóticamente se aproxime a una aceleración uniforme cuando $t_r \rightarrow -\infty$ (y por tanto tenga $v \rightarrow 1$ a una tasa tal que $\gamma \propto -t_r$). Para todas estas trayectorias (4.9) dará un encaje (en general no circular) incompleto, que deberá ser continuado mediante un segmento de cuerda vertical viajando

a la velocidad de la luz.

5.3. Flujo de Energía-Momento en la Hoja de Mundo

Como se ha mencionado en la sección 4.4, para el caso de un quark con aceleración uniforme se tiene un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda dual. Más en general, para todo movimiento del quark/extremo donde exista aceleración se desarrollará un horizonte [4], el cual se ha interpretado usualmente como la curva que separa la parte de la cuerda correspondiente al quark (y su campo cercano) en sí mismo de la porción que corresponde al campo radiado [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Esto está ilustrado esquemáticamente en la figura 5.5. En apoyo a esta interpretación, se demostró en [5] que, para el caso particular de aceleración constante, la tasa a la cual la energía cruza el horizonte coincide con la tasa de radiación que se conoce de [3, 4], i.e., la fórmula de Lienard (4.13). Es natural entonces preguntarse si lo mismo es cierto, para el horizonte o alguna otra curva, cuando consideramos movimientos más generales del quark/extremo.

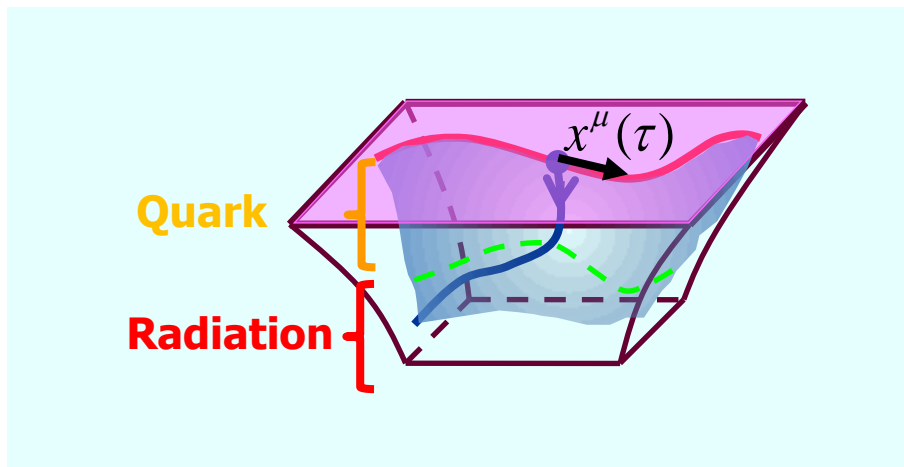


Figura 5.5: Como se explica en el cuerpo del texto, es natural tratar de interpretar la porción de la cuerda fuera del horizonte (la línea verde punteada) como el quark, y la porción dentro como la radiación emitida anteriormente por el quark.

Antes de proceder, resulta útil expresar claramente los criterios que nos llevarían a identificar alguna curva en la hoja de mundo de la cuerda como la línea divisoria propuesta anteriormente. En una parametrización arbitraria, denotemos la curva divisoria como $\sigma_d(\tau)$. Para ser concretos, asumamos que $\sigma = 0$ denota la punta de la cuerda en la frontera de AdS ($z = 0$). Esta curva debe ser tal que el segmento de cuerda *fuera* de ella, $\sigma < \sigma_d(\tau)$ (i.e., el pedazo de cuerda más cercano a la frontera de AdS , correspondiente a la región UV de la teoría de norma), puede ser interpretado directamente como el dual del quark; mientras que el segmento *dentro* de ella, $\sigma > \sigma_d(\tau)$ (que se extiende hasta $z \rightarrow \infty$, correspondiente a la región IR de la teoría de norma), codifica toda la radiación gluónica emitida previamente por el quark.

Dado que sabemos que la densidad y la tasa de flujo de la energía-momento espacio-temporal están dados por las densidades de momento canónico Π_μ^τ y Π_μ^σ (obtenidas de (4.4)), entonces requerimos que $\sigma_d(\tau)$ satisfaga

$$\int_0^{\sigma_d(\tau)} d\sigma \Pi_\mu^\tau(\tau, \sigma) = mv_\mu(\tau_q), \quad (5.12)$$

$$\left(\Pi_\mu^\sigma - \Pi_\mu^\tau \frac{d\sigma_d}{d\tau} \right) \Big|_{\sigma_d(\tau)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} a^2(\tau_q) v_\mu(\tau_q) \frac{d\tau_q}{d\tau}.$$

La primera de estas condiciones pide que el cuádrimomento total del segmento exterior de la cuerda a un tiempo τ reproduzca correctamente el cuádrimomento (con una masa del quark divergente debida a (3.13) con $z_m \rightarrow 0$). La segunda condición requiere que la tasa neta de cuádrimomento que fluye por la curva divisoria (tomando en cuenta el flujo intrínseco a lo largo de la cuerda en ese lugar, y la densidad de cuádrimomento que atraviesa la curva en virtud de su movimiento) sea igual a la tasa de Lienard expresada por medio de (4.13).

A primera vista, pareciera natural evaluar el cuádrimomento y cuadriaceleración del quark que aparecen en el lado derecho de (5.12) en $\tau_q = \tau$, queriendo decir que empatan con el cuádrimomento y la tasa de radiación en el mismo instante τ cuando el perfil de la cuerda está siendo examinado. Sin embargo, sabemos del capítulo 4 que la información de la quark/punta se propaga a lo largo de líneas de Mikhailov de τ_r fijo en la hoja de mundo, así que el punto en la cuerda en $(\tau, \sigma_d(\tau))$ solo posee información sobre lo que el quark/punta estaba haciendo en el tiempo retardado correspondiente τ_r . Las densidades de momento canónicas dependen solamente de esta

información local. Por tanto, a menos que la curva $\sigma_d(\tau)$ misma contenga información *global* sobre la línea de mundo, entonces, por causalidad, lo mejor que podemos esperar es aplicar (5.12) con las cantidades correspondientes al quark evaluado en $\tau_q = \tau_r$. Se incluye entonces la derivada $d\tau_q/d\tau$ en la segunda condición para convertir la tasa por unidad de τ_q dada la fórmula de Lienard para una tasa por unidad de τ (que es lo que se tiene en el lado izquierdo).

Podemos ahora determinar, en cualquier parametrización, si estas dos condiciones se satisfacen para alguna curva candidata (por ejemplo el horizonte en la hoja de mundo). Es natural considerar primero la norma covariante en la cual la solución de Mikhailov (4.7) está construida: $\tau = \tau_r, \sigma = z$. El horizonte se puede encontrar al notar de (4.8) que las curvas nulas en la hoja de mundo satisfacen $(z^2 a^2 - 1)d\tau_r^2 - 2dzd\tau_r = 0$. Una clase de soluciones corresponde a $d\tau_r = 0$, y describen líneas de Mikhailov que son tangentes a los conos de luz que apuntan hacia *adentro*, es decir, aquellos que apuntan hacia z mayores. El horizonte en la hoja de mundo $z_h(\tau_r)$ está en la otra clase de soluciones, aquellas que describen conos de luz que apuntan hacia *afuera*, es decir, aquellos que normalmente apuntan hacia la frontera de *AdS*. Por tanto satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dz_h}{d\tau_r} = \frac{1}{2}(z_h^2 a^2 - 1), \quad (5.13)$$

donde la condición final se tiene que escoger para que refleje la región asintótica en la cuerda a la cual las fluctuaciones pueden escapar. Por ejemplo, si el quark se acelera por un periodo de tiempo y luego se suelta para todo $\tau_r > \tau_{\text{soltar}}$, entonces debemos tener $z_h \rightarrow \infty$ en $\tau_r = \tau_{\text{soltar}}$ ([4]). Para el caso específico de aceleración constante, $a^2 = A^2$, la ecuación (5.13) tiene la solución $z_h = 1/A$, confirmando la presencia de un horizonte en este lugar radial, justo como se mencionó en la sección anterior.

En estas coordenadas, las densidades canónicas de momento asociadas a (4.3) toman la forma

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu}^{\tau_r} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tau_r} X^{\mu})} & (5.14) \\
&= \frac{\sqrt{\lambda} (1 + (\partial_z X)^2) \partial_{\tau_r} X_{\mu} - (\partial_{\tau_r} X \cdot \partial_z X) \partial_z X_{\mu}}{2\pi z^2 \sqrt{(\partial_{\tau_r} X \cdot \partial_z X)^2 - (\partial_{\tau_r} X)^2 (1 + (\partial_z X)^2)}} , \\
\Pi_{\mu}^z &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z X^{\mu})} \\
&= \frac{\sqrt{\lambda} (\partial_{\tau_r} X)^2 \partial_z X_{\mu} - (\partial_{\tau_r} X \cdot \partial_z X) \partial_{\tau_r} X_{\mu}}{2\pi z^2 \sqrt{(\partial_{\tau_r} X \cdot \partial_z X)^2 - (\partial_{\tau_r} X)^2 (1 + (\partial_z X)^2)}} .
\end{aligned}$$

Usando la forma explícita de (4.7), las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu}^{\tau_r} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi z^2} v_{\mu} , & (5.15) \\
\Pi_{\mu}^z &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{a_{\mu}}{z} + a^2 v_{\mu} \right) ,
\end{aligned}$$

con la expresión del lado derecho evaluada, como siempre, en el tiempo retardado apropiado τ_r . De la primera expresión en (5.15), y usando (3.13) con $z_m \rightarrow 0$ podemos ver que cuando consideramos una “fotografía” de la cuerda para un valor de τ_r (es decir, una línea de Mikhailov), el cuadrimomento total de la porción de la cuerda fuera de $z_d(\tau_r)$ es $mv_{\mu} - \sqrt{\lambda}/2\pi z_d$, por lo que nuestra condición (5.12) se satisface solo si $z_d \rightarrow \infty$. Resulta interesante que con esta elección, la expresión para Π_{μ}^z en (5.15) se reduce directamente a la fórmula de Lienard, por lo que nuestra segunda condición en (5.12) también se satisface. Aprendemos entonces que, *cuando hacemos secciones de la hoja de mundo a τ_r fijo, la cuerda entera es dual al quark (+ campo cercano), y la radiación se localiza en el horizonte de Poincaré $z \rightarrow \infty$.*⁷ Esto significa en particular que, en la parametrización de Mikhailov, la línea divisora en general *no* coincide con el horizonte (5.13).

Nótese que de acuerdo con (4.9), llevar $z \rightarrow \infty$ manteniendo τ_r fijo implica observar la teoría de norma un tiempo $t \rightarrow \infty$, razón por la cual en la norma

⁷No diremos que la radiación se encuentra en la región de AdS global más allá de la caña de Poincaré porque, en sentido estricto, la CFT en Minkowski solo puede describir la acumulación de energía-momento en $z \rightarrow \infty$ como la ve un observador de Poincaré, y no el cruce en sí.

(τ_r, z) la radiación se encuentra en el extremo IR. La conjetura de que el horizonte juega el papel de la curva divisoria tendría una mejor oportunidad de ser cierta en la norma estática $\tau = t$, $\sigma = z$, donde la hoja de mundo está parametrizada en coordenadas que son más directamente relevantes para la teoría de norma. El trabajo [5] estudia la tasa de flujo de energía por unidad de tiempo t observado en la CFT, y no por unidad de tiempo propio retardado del quark τ_r . Y aun la separación (4.11) lograda en [3, 4] entre energía intrínseca y radiada surgió del análisis de la cuerda a t fijo, en lugar de τ_r fijo.

Para cambiar la parametrización de la hoja de mundo de $(\tau = \tau_r, \sigma = z)$ a $(\bar{\tau} = t, \bar{\sigma} = z)$, primero deducimos de (4.9) y $d\tau_r = dt_r/\gamma$ que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\tau_r}{\partial t}\right)_z &= \frac{1}{\gamma + \gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a}z}, & \left(\frac{\partial\tau_r}{\partial z}\right)_t &= -\frac{1}{1 + \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}z}, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_z &= 0, & \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)_t &= 1, \end{aligned} \quad (5.16)$$

y entonces al usar esto en la ley de transformación para las densidades de momento (véase, por ejemplo, [12]) se puede inferir que ⁸

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_\mu^t &= \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)_t \Pi_\mu^{\tau_r} - \left(\frac{\partial\tau_r}{\partial z}\right)_t \Pi_\mu^z \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left[\frac{v_\mu}{z^2} + \frac{1}{1 + \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}z} \left(\frac{a_\mu}{z} + a^2 v_\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_\mu^z &= \left(\frac{\partial\tau_r}{\partial t}\right)_z \Pi_\mu^z - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_t \Pi_\mu^{\tau_r} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{\gamma + \gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a}z} \left(\frac{a_\mu}{z} + a^2 v_\mu \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para aceleración uniforme, es fácil comprobar que la tasa de flujo de energía por unidad de t en el horizonte $z_h = A^{-1}$ de (5.18) en efecto empata con el resultado de [5],

$$\bar{\Pi}_t^z|_{z=A^{-1}} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} A^2, \quad (5.19)$$

⁸Para evitar confusiones, debemos de enfatizar primero que en estas expresiones \vec{a} se refiere a la 3-aceleración, y es por tanto distinta a las componentes espaciales de la cuadiaceleración $a_\mu = \gamma^4(-\vec{v} \cdot \vec{a}, \vec{v} \cdot \vec{a} \vec{v} + \gamma^{-2} \vec{a})$, cuya norma al cuadrado se denota por $a^2 \equiv a_\mu a^\mu$. Del mismo modo, \vec{v} difiere de las componentes espaciales de $v_\mu = \gamma(-1, \vec{v})$.

que es esencialmente el resultado (no-covariante) de Lienard, excepto por dos características que se describirán en breve. Por otra parte, la forma de (5.18) insinúa que no hay empate en el horizonte (5.13) asociado con el movimiento del quark/extremo, aunque en este momento es difícil hacer un enunciado definitivo a partir de esto, dado que el horizonte está determinado por la estructura causal global de la hoja de mundo, en lugar del comportamiento local del quark/extremo en un tiempo retardado determinado.

Para avanzar, empecemos a partir de la observación de que lo que es especial en el caso de aceleración constante es que la geometría de la hoja de mundo es estática, y por ello, el horizonte coincide con la curva del límite estacionario $z_{\text{ergo}}(\tau_r)$ definida por la condición $g_{\tau_r\tau_r} = 0$, a partir de la cual es z y no τ_r la que juega el papel de la coordenada temporal. De (4.8) se puede observar que esta curva, donde el cono de luz saliente se vuelve horizontal, está localizado en

$$z_{\text{ergo}} = \frac{1}{\sqrt{a^2}} , \quad (5.20)$$

lo cual muestra que, a diferencia del horizonte, está determinada únicamente por la información local del quark/extremo. Para $a \neq 0$, (5.20) coincide con el horizonte (5.13) solo si $a \cdot j = 0$, o equivalentemente, si $dz_h/d\tau_r = 0$, lo cual ocurre para el caso de aceleración constante. Generalmente hay una parte de la curva del límite estacionario fuera del horizonte, $z_{\text{ergo}} < z_h$, y la región entre estas dos curvas es el análogo unidimensional de la ergoesfera [4] (concepto cuya relevancia se mencionó primero, en el contexto de *AdS/CFT* para $T > 0$, en [74]).

Después de un poco de álgebra, la expresión general para la tasa de flujo de energía (5.18) en z_{ergo} toma la forma

$$\bar{\Pi}_t^z|_{z=1/\sqrt{a^2}} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} a^2 . \quad (5.21)$$

Esta es, evidentemente, la generalización de (5.19) para el caso de movimiento arbitrario. Hemos aprendido entonces que, para movimiento genérico del quark/extremo, el contacto establecido en [5] entre el flujo de energía (por unidad de t) en la cuerda y la tasa de emisión de energía de Lienard ocurre en la curva del límite estacionario en la hoja de mundo de la cuerda y no en el horizonte.⁹

⁹Dada la manera en la que el análisis de [4, 14, 13] utiliza la información auxiliar en la frontera de *AdS*, automáticamente se sigue entonces que $\bar{\Pi}_t^z$ en la curva del límite esta-

Nótese que el lado derecho de (5.21) está evaluado en el tiempo retardado t_r (o τ_r) que corresponde, a partir de (4.9), a los valores dados de t y z . Esto significa que, cuando consideramos la cuerda a un tiempo t y determinamos la tasa instantánea de energía a través del punto de la cuerda localizada en la curva del límite estacionario, el resultado refleja la tasa de energía radiada por el quark no en t , sino en un tiempo retardado t_r . Como se ha señalado arriba, por causalidad, no podría ser de otro modo: la información en la hoja de mundo se propaga a lo largo de las líneas de Mikhailov, así que el comportamiento de un punto dado (t, z) está determinado por el comportamiento quark/punta en un tiempo anterior t_r obtenido al seguir la línea de Mikhailov correspondiente hasta la frontera de AdS . Estas consideraciones no fueron necesarias en [5], pero eso se debe a que en ese caso la tasa (5.19) es independiente del tiempo.

La forma de (5.21) parece dar una esperanza de que z_{ergo} podría ser la curva divisoria que estamos buscando, pero desafortunadamente, al examinar con cuidado esta situación, desaparece toda esperanza por varias razones. Primero, a pesar de las apariencias, la expresión en el lado derecho de (5.21) no está de acuerdo del todo con la fórmula de Lienard (4.13). Esta daría la tasa de energía radiada por unidad de tiempo retardado t_r , pero el lado izquierdo de la ecuación es, por definición la tasa por unidad de t . En otras palabras, a la fórmula le falta un factor de dt_r/dt que corresponde al $d\tau_q/d\tau$ en (5.12). Segundo, (5.21) no incorpora la energía barrida por la línea en cuestión mientras esta se mueve, y por tanto no cumple con la segunda condición en (5.12). Tercero, para movimientos del quark que se aproximan a velocidad constante en $t \rightarrow \pm\infty$, la curva del límite estacionario z_{ergo} genéricamente corta la cuerda en dos puntos (correspondiendo a 2 tiempos retardados distintos), y delimita una región finita [4], así que uno necesitaría modificar (5.12) y tomar en cuenta el flujo de energía en los dos bordes. (El punto físico aquí es que la cuerda está vertical tanto cerca como lejos de la frontera, codificando un perfil de Coulomb, sin radiación.) Cuarto, aun cuando ignoremos los 3 problemas anteriores, el signo en (5.21) es incorrecto: indica un flujo positivo de energía hacia la región que se identifica con el quark, $z < z_{\text{ergo}}$, a pesar del hecho de que el quark está perdiendo energía al radiar a lo largo de toda su trayectoria. Quinto, a diferencia de la energía, la tasa de flujo de momento espacial $\bar{\Pi}_i^z$ en z_{ergo} no está de acuerdo en absoluto con la fórmula

estacionario también reproduce el flujo de energía dado por la fórmula de Lienard modificada para el caso de masa finita.

de Lienard correspondiente.¹⁰

Es claro que la curva del límite estacionario no puede hacer el papel de la línea divisoria para un movimiento arbitrario del quark, así que debemos de regresar a la conjetura original de que el horizonte es la curva divisoria. El hecho de que el horizonte está determinado a partir de la información global acerca de la trayectoria del quark hace que sea difícil localizar su posición, pero también abre la puerta a la posibilidad de que el horizonte pueda satisfacer las condiciones (5.12) evaluadas en un tiempo t en lugar de t_r , que es la percepción de la mayor parte de los autores. La manera más simple de poner esto a prueba es examinar el ejemplo donde sí conocemos la ubicación del horizonte: el caso de aceleración constante. Usando (5.7), podemos encontrar las densidades relevantes directamente en términos de t . Las componentes $\mu = 0$ resultan ser

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_t^t &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1 + A^2 t^2}{z^2 \sqrt{1 + A^2 t^2 - A^2 z^2}}, \\ \bar{\Pi}_t^z &= \mp \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{A^2 t}{z \sqrt{1 + A^2 t^2 - A^2 z^2}}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Con esto, es fácil checar que nuestra primera condición en (5.12) no se satisface, por lo que la porción de la cuerda fuera del horizonte no puede ser identificada con el quark. Adicionalmente, dado que $z_{\text{ergo}} = z_h$ para este caso, los problemas cuarto y quinto que acabamos de discutir para el caso de la curva del límite estacionario también se presentan aquí.

El contraejemplo del párrafo anterior es suficiente para refutar la conjetura de que el horizonte toma el papel de la línea divisoria en la cuerda a un t dado. Pero podemos señalar otro problema con esta propuesta para trayectorias genéricas del quark que asintóticamente llegan a tener una velocidad constante en $t \rightarrow -\infty$: debido a su naturaleza global, el horizonte desciende de $z \rightarrow \infty$ *antes* de que el quark comience a radiar [4], contradiciendo la idea de que la tasa flujo de cuadrimento por el horizonte debe representar la radiación emitida por el quark en el mismo tiempo t . Podríamos resolver este problema al eliminar el término dz_d/dt de la segunda condición en (5.12), pero fue este término el que nos daba la única esperanza de que el horizonte

¹⁰A pesar de esto, no existe contradicción con la invariancia de Lorentz, dado que la densidad de momento canónico $\bar{\Pi}_\mu^z$ no se transforma como un vector dual bajo transformaciones de Lorentz: hay una contribución adicional debido al cambio de la norma estática de t a t' (véase, por ejemplo, [12]).

funcionara como la línea divisoria a t fijo. Si nos enfocáramos únicamente en $\bar{\Pi}_t^z$ por sí sola, entonces (5.18) y la causalidad refutan la conjetura para líneas de mundo arbitrarias. De hecho, no existe una elección de $z_d(t)$ que haga empatar $\bar{\Pi}_t^z$ con la fórmula de Lienard (4.13) (evaluada en t o t_r) para trayectorias genéricas.

La conclusión general de esta sección es que, *cuando examinamos la cuerda a t fijo, la separación entre campos cercanos y de radiación del quark no se ve reflejada geoméricamente en la hoja de mundo (con un segmento de la cuerda correspondiendo directamente a cada contribución), y puede ser vista solo mediante el procedimiento algebraico-diferencial de [3, 4].*¹¹

¹¹Una alternativa es realizar el cálculo explícito del perfil del campo gluónico, como se ha hecho en [8, 53, 71]. En este procedimiento, la información en un tiempo de observación t_{obs} en la teoría de norma se determina al sumar las contribuciones de todos los puntos de la cuerda en tiempos anteriores t , asociados a t_r aun más tempranos.

Capítulo 6

Conclusiones

Como se ha mostrado en los ejemplos de los capítulos 4 y 5, la dualidad es una herramienta de valor indiscutible para explorar las teorías de norma fuertemente acopladas por medio de técnicas relativamente sencillas de teoría de cuerdas en el régimen clásico (es decir, en supergravedad). En este trabajo estudiamos el problema de pérdida de energía a temperatura cero para entender los casos que mejor se pueden manejar matemáticamente, y obtener así intuiciones sobre casos más complejos. Para ello, nos basamos, principalmente, en el trabajo de Mikhailov [3] donde (a partir de encontrar la solución general para la cuerda) se deduce que para este tipo de teorías la pérdida de energía de un quark en el vacío coincide con la del electromagnetismo clásico (aunque cuando se pasa al caso del quark con masa finita se tienen modificaciones).

La solución encontrada por Mikhailov nos permite entonces investigar el comportamiento de la cuerda y de la hoja de mundo, con las respectivas implicaciones para el quark dual.

Por un lado determinamos que sí existen circunstancias donde las trayectorias del quark/extremo provocan un jaloneo de la cuerda de tal forma que el perfil deja de descender monotónicamente hacia $z \rightarrow \infty$. Bajo estas circunstancias, se puede observar que el tubo de flujo dual (cuando se examina con los operadores no locales apropiados) revierte su tendencia general a expandirse, y de hecho se reenfoca por una distancia, antes de comenzar a expandirse nuevamente.

Para el caso de aceleración uniforme del quark aislado, descubrimos que la solución retardada que proporciona [3] solo la describe entre $0 < z < A^{-1}$. Con esto en mente encontramos la continuación correcta para $z > A^{-1}$, la

cual codifica una onda de choque que se desconecta causalmente del quark y es por consiguiente perdida por él. Por otro lado, mostramos que la solución general de Mikhailov [3], construida originalmente para quarks aislados, es capaz de describir también parejas $q - \bar{q}$, al menos para el caso de aceleración propia constante. Esto implica que la solución de la cuerda encontrada en [5], a pesar de estar descrita en la norma estática, se encuentra en cada punto de la cuerda determinada por la dinámica del quark/extremo en un tiempo retardado.

Finalmente, discutimos con detalle el papel del horizonte y la curva del límite estacionario en la hoja de mundo. Contrario a lo que hasta ahora se había supuesto en la literatura, concluimos que cuando examinamos la cuerda a un t fijo, la separación entre campos cercanos y de radiación del quark no se ve reflejada geoméricamente en la hoja de mundo (con un segmento de la cuerda correspondiendo directamente a cada contribución), y puede ser vista solo mediante el procedimiento algebraico-diferencial de [3, 4]. Aun así es importante señalar que cuando hacemos secciones de la hoja de mundo a tiempo retardado τ_r fijo, la cuerda entera es dual al quark (+ campo cercano), y la radiación se localiza en el horizonte de Poincaré $z \rightarrow \infty$.

Bibliografía

- [1] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 2:231–252, 1998, hep-th/9711200.
- [2] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys.Rept.*, 323:183–386, 2000, hep-th/9905111.
- [3] Andrei Mikhailov. Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence. 2003, hep-th/0305196.
- [4] Mariano Chernicoff and Alberto Güijosa. Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly- Coupled Gauge Theories. *JHEP*, 06:005, 2008, 0803.3070.
- [5] Bo-Wen Xiao. On the exact solution of the accelerating string in AdS(5) space. *Phys.Lett.*, B665:173–177, 2008, 0804.1343.
- [6] Guillaume Beuf, Cyrille Marquet, and Bo-Wen Xiao. Heavy-quark energy loss and thermalization in a strongly coupled SYM plasma. *Phys.Rev.*, D80:085001, 2009, 0812.1051.
- [7] Veronika E. Hubeny and Mukund Rangamani. A Holographic view on physics out of equilibrium. *Adv.High Energy Phys.*, 2010:297916, 2010, 1006.3675.
- [8] Y. Hatta, E. Iancu, A.H. Mueller, and D.N. Triantafyllopoulos. Radiation by a heavy quark in N=4 SYM at strong coupling. *Nucl.Phys.*, B850:31–52, 2011, 1102.0232.

- [9] Paul M. Chesler, Ying-Yu Ho, and Krishna Rajagopal. Shining a Gluon Beam Through Quark-Gluon Plasma. *Phys.Rev.*, D85:126006, 2012, 1111.1691.
- [10] Steven S. Gubser. Drag force in AdS/CFT. *Phys.Rev.*, D74:126005, 2006, hep-th/0605182.
- [11] C.P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz, and L.G. Yaffe. Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *JHEP*, 0607:013, 2006, hep-th/0605158.
- [12] Mariano Chernicoff, J. Antonio Garcia, and Alberto Güijosa. The energy of a moving quark-antiquark pair in an N = 4 SYM plasma. *JHEP*, 09:068, 2006, hep-th/0607089.
- [13] Mariano Chernicoff, J. Antonio Garcia, and Alberto Güijosa. A Tail of a Quark in N=4 SYM. *JHEP*, 0909:080, 2009, 0906.1592.
- [14] Mariano Chernicoff, J. Antonio Garcia, and Alberto Güijosa. Generalized Lorentz-Dirac Equation for a Strongly-Coupled Gauge Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 102:241601, 2009, 0903.2047.
- [15] J. Antonio Garcia, Alberto Güijosa, and Eric J. Pulido. No Line on the Horizon: On Uniform Acceleration and Gluonic Fields at Strong Coupling. 2012, 1210.4175.
- [16] Joseph Polchinski. *String Theory, Vol. 1*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] John Schwarz Katrin Becker, Melanie Becker. *String Theory and M-theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [18] M. B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*. Cambridge University Press, 1988.
- [19] Warren Siegel. Introduction to string field theory. 1988, hep-th/0107094.
- [20] Emil J. Martinec. Matrix models and 2D string theory. pages 403–457, 2004, hep-th/0410136.
- [21] Nathan Berkovits. A new description of the superstring. 1996, hep-th/9604123.

- [22] Arkady A. Tseytlin. On non-abelian generalisation of the Born-Infeld action in string theory. *Nucl. Phys.*, B501:41–52, 1997, hep-th/9701125.
- [23] Biagio Lucini and Marco Panero. SU(N) gauge theories at large N. 2012, 1210.4997.
- [24] G. 't Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, 72:461, 1974.
- [25] Ioannis Papadimitriou and Kostas Skenderis. AdS / CFT correspondence and geometry. 2004, hep-th/0404176.
- [26] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998, hep-th/9802109.
- [27] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998, hep-th/9802150.
- [28] Leonard Susskind and Edward Witten. The holographic bound in anti-de Sitter space. 1998, hep-th/9805114.
- [29] Andreas Karch and Emanuel Katz. Adding flavor to AdS/CFT. *JHEP*, 06:043, 2002, hep-th/0205236.
- [30] D. Mateos R. C. Myers D. J. Winters J. L. Hovdebo, M. Kruczenski. Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality. *Int. J. Mod. Phys. A*, 20:3428, 2005.
- [31] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein, and S. Yankielowicz. Wilson loops in the large N limit at finite temperature. *Phys.Lett.*, B434:36–40, 1998, hep-th/9803137.
- [32] Hong Liu, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann. An AdS/CFT calculation of screening in a hot wind. *Phys. Rev. Lett.*, 98:182301, 2007, hep-ph/0607062.
- [33] Elena Caceres. Glueball spectrum and Regge trajectory from supergravity. *Int.J.Mod.Phys.*, A20:4518–4524, 2005, hep-ph/0410076.
- [34] Laurence G. Yaffe. Dynamics of hot gauge theories. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 106:117–124, 2002, hep-th/0111058.

- [35] Andreas Brandhuber, Nissan Itzhaki, Jacob Sonnenschein, and Shimon Yankielowicz. Wilson loops, confinement, and phase transitions in large N gauge theories from supergravity. *JHEP*, 9806:001, 1998, hep-th/9803263.
- [36] David J. Gross and Hiroshi Ooguri. Aspects of large N gauge theory dynamics as seen by string theory. *Phys.Rev.*, D58:106002, 1998, hep-th/9805129.
- [37] Curtis G. Callan, Jr., Alberto Güijosa, Konstantin G. Savvidy, and Oyvind Tafjord. Baryons and flux tubes in confining gauge theories from brane actions. *Nucl.Phys.*, B555:183–200, 1999, hep-th/9902197.
- [38] Igor R. Klebanov, Juan Martin Maldacena, and III Thorn, Charles B. Dynamics of flux tubes in large N gauge theories. *JHEP*, 0604:024, 2006, hep-th/0602255.
- [39] Gerard 't Hooft. A Two-Dimensional Model for Mesons. *Nucl.Phys.*, B75:461, 1974.
- [40] C. Rebbi. Dual models and relativistic quantum strings. *Phys.Rept.*, 12:1–73, 1974.
- [41] Joel Scherk. An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings. *Rev.Mod.Phys.*, 47:123–164, 1975.
- [42] Y Nambu. QCD an the String Model. *Phys.Lett.B*, 80:123–164, 1979.
- [43] Alexander M. Polyakov. Gauge Fields as Rings of Glue. *Nucl.Phys.*, B164:171–188, 1980.
- [44] M. Luscher, K. Symanzik, and P. Weisz. Anomalies of the Free Loop Wave Equation in the WKB Approximation. *Nucl.Phys.*, B173:365, 1980.
- [45] Juan Martin Maldacena. Wilson loops in large N field theories. *Phys.Rev.Lett.*, 80:4859–4862, 1998, hep-th/9803002.
- [46] Soo-Jong Rey and Jung-Tay Yee. Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity. *Eur.Phys.J.*, C22:379–394, 2001, hep-th/9803001.

- [47] Ulf H. Danielsson, Esko Keski-Vakkuri, and Martin Kruczenski. Vacua, propagators, and holographic probes in AdS / CFT. *JHEP*, 9901:002, 1999, hep-th/9812007.
- [48] Curtis G. Callan, Jr. and Alberto Güijosa. Undulating strings and gauge theory waves. *Nucl.Phys.*, B565:157–175, 2000, hep-th/9906153.
- [49] Christiana Athanasiou, Paul M. Chesler, Hong Liu, Dominik Nickel, and Krishna Rajagopal. Synchrotron radiation in strongly coupled conformal field theories. *Phys.Rev.*, D81:126001, 2010, 1001.3880.
- [50] Veronika E. Hubeny. Relativistic Beaming in AdS/CFT. 2010, 1011.1270.
- [51] Veronika E. Hubeny. Holographic dual of collimated radiation. *New J.Phys.*, 13:035006, 2011, 1012.3561.
- [52] Y. Hatta, E. Iancu, A.H. Mueller, and D.N. Triantafyllopoulos. Aspects of the UV/IR correspondence : energy broadening and string fluctuations. *JHEP*, 1102:065, 2011, 1011.3763.
- [53] Mariano Chernicoff, Alberto Güijosa, and Juan F. Pedraza. The Gluonic Field of a Heavy Quark in Conformal Field Theories at Strong Coupling. *JHEP*, 1110:041, 2011, 1106.4059.
- [54] Y. Hatta, E. Iancu, A.H. Mueller, and D.N. Triantafyllopoulos. Jet evolution from weak to strong coupling. 2012, 1210.1534.
- [55] Joshua J. Friess, Steven S. Gubser, Georgios Michalogiorgakis, and Silviu S. Pufu. The Stress tensor of a quark moving through N=4 thermal plasma. *Phys.Rev.*, D75:106003, 2007, hep-th/0607022.
- [56] Steven S. Gubser and Silviu S. Pufu. Master field treatment of metric perturbations sourced by the trailing string. *Nucl.Phys.*, B790:42–71, 2008, hep-th/0703090.
- [57] Amos Yarom. On the energy deposited by a quark moving in an N=4 SYM plasma. *Phys.Rev.*, D75:105023, 2007, hep-th/0703095.
- [58] Steven S. Gubser, Silviu S. Pufu, and Amos Yarom. Energy disturbances due to a moving quark from gauge-string duality. *JHEP*, 0709:108, 2007, 0706.0213.

- [59] Paul M. Chesler and Laurence G. Yaffe. The Wake of a quark moving through a strongly-coupled plasma. *Phys.Rev.Lett.*, 99:152001, 2007, 0706.0368.
- [60] Steven S. Gubser, Silviu S. Pufu, and Amos Yarom. Sonic booms and diffusion wakes generated by a heavy quark in thermal AdS/CFT. *Phys.Rev.Lett.*, 100:012301, 2008, 0706.4307.
- [61] Steven S. Gubser and Amos Yarom. Universality of the diffusion wake in the gauge-string duality. *Phys.Rev.*, D77:066007, 2008, 0709.1089.
- [62] Steven S. Gubser, Silviu S. Pufu, and Amos Yarom. Shock waves from heavy-quark mesons in AdS/CFT. *JHEP*, 0807:108, 2008, 0711.1415.
- [63] Paul M. Chesler and Laurence G. Yaffe. The Stress-energy tensor of a quark moving through a strongly-coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma: Comparing hydrodynamics and AdS/CFT. *Phys.Rev.*, D78:045013, 2008, 0712.0050.
- [64] Jorge Noronha, Giorgio Torrieri, and Miklos Gyulassy. Near Zone Navier-Stokes Analysis of Heavy Quark Jet Quenching in an N=4 SYM Plasma. *Phys.Rev.*, C78:024903, 2008, 0712.1053.
- [65] Steven S. Gubser. Momentum fluctuations of heavy quarks in the gauge-string duality. *Nucl.Phys.*, B790:175–199, 2008, hep-th/0612143.
- [66] Jorge Casalderrey-Solana and Derek Teaney. Transverse Momentum Broadening of a Fast Quark in a N=4 Yang Mills Plasma. *JHEP*, 0704:039, 2007, hep-th/0701123.
- [67] Angel Paredes, Kasper Peeters, and Marija Zamaklar. Temperature versus acceleration: The Unruh effect for holographic models. *JHEP*, 0904:015, 2009, 0812.0981.
- [68] Elena Cáceres, Mariano Chernicoff, Alberto Güijosa, and Juan F. Pedraza. Quantum Fluctuations and the Unruh Effect in Strongly-Coupled Conformal Field Theories. *JHEP*, 1006:078, 2010, 1003.5332.
- [69] V. E. Hubeny y G. W. Semenoff. En preparación.
- [70] A. Güijosa C. A. Agón and J. F. Pedraza. En preparación.

- [71] Fabio Dominguez, C. Marquet, A. H. Mueller, Bin Wu, and Bo-Wen Xiao. Comparing energy loss and p_{\perp} -broadening in perturbative QCD with strong coupling $\mathcal{N} = 4$ SYM theory. *Nucl. Phys.*, A811:197–222, 2008, 0803.3234.
- [72] Cesar A. Agón, Alberto Güijosa, and Bryan O. Larios. On the Beaming of Gluonic Fields at Strong Coupling. 2012, 1206.5005.
- [73] Joseph Polchinski, Leonard Susskind, and Nicolaos Toumbas. Negative energy, superluminality and holography. *Phys.Rev.*, D60:084006, 1999, hep-th/9903228.
- [74] Philip C. Argyres, Mohammad Edalati, and Justin F. Vazquez-Poritz. Spacelike strings and jet quenching from a Wilson loop. *JHEP*, 0704:049, 2007, hep-th/0612157.