Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

FRANCISCO PÉREZ CARBAJAL

DIRECTORA DE LA TESINA: DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA

MÉXICO, D.F. Abril, 2012

1. Introducción

Gran variedad de fenómenos pueden modelarse con ecuaciones diferenciales ordinarias, el Teorema Fundamental del Cálculo es uno de sus componentes principales, éste relaciona la integral con la derivada, lo que permite calcular soluciones a estas ecuaciones. El cálculo estocástico le da significado a una ecuación diferencial ordinaria con un componente aleatorio, el lema de Itô al igual que el Teorema Fundamental del Cálculo, permite calcular soluciones a estas ecuaciones; además el cálculo estocástico tiene aplicaciones tanto en finanzas como en economía.

Uno de los resultados principales del cálculo estocástico es la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, ésta permite relacionar los momentos del supremo del valor absoluto de una martingala con los momentos de su proceso estocástico de variación cuadrática. La tesina consiste en esclarecer demostraciones de este resultado y bosquejar otros resultados similares.

2. Preliminares

En esta sección se enuncian las definiciones y resultados básicos del cálculo estocástico; estos resultados no se prueban y forman parte del curso avanzado de probabilidad (movimiento Browniano e integración estocástica); impartido en el programa de maestría de ciencias matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Se trabaja en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración donde $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$ para todo $t \geq 0$ y $\mathscr{F}_0$ es completa con respecto a $\mathbb{P}$; en consecuencia $\mathscr{F}_t$ es completa con respecto a $\mathbb{P}$ para todo $t \geq 0$. Además $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$ para todo $t \geq 0$.

Definición 1. T es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ si $T : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ y $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ para todo $t \geq 0$.

Sea T un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Para un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se define X_T en el conjunto $\{T < \infty\}$ por

$$X_T(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{si} \quad T(\omega) = t \quad \text{ó} \quad (X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

Definición 2. Se dice que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, si X_t es $\mathscr{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$; y se abrevia con $(X_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptado.

Definición 3. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivo ó progresivamente medible con respecto a $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Si el conjunto $\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$ para todo $t \geq 0$ y $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, es decir, si $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ sea medible en $\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$.

Se puede ver que para un proceso estocástico progresivo $(X_t)_{t\geq 0}$, y T un tiempo de paro, X_T es $\mathscr{F}_T$-medible en el conjunto $\{T<\infty\}$, donde $\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty \mid A\cap\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t \text{ para todo } t\geq 0\}$ y $\mathscr{F}_\infty$ es la σ-álgebra generada por $\bigcup_{t\geq 0}\mathscr{F}_t$ (ver [2, pág. 44]).

Definición 4. Sea T un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico; se define al proceso estocástico detenido en T por $X_t^T(\omega)=X_{t\wedge T}(\omega)$ y se denota por $(X_t^T)_{t\geq 0}$.

Se puede ver que para un proceso estocástico progresivo $(X_t)_{t\geq 0}$, $(X_t^T)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico progresivo con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ (ver [2, pág. 45]).

Definición 5. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se llama martingala (submartingala) si:

(i) $X_t\in L_1(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ para todo $t\geq 0$.

(ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptado.

(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]=X_s$ c.s. para todo $s\leq t$ ($\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]\geq X_s$ c.s. para todo $s\leq t$).

Definición 6. Se dice que un proceso estocástico es continuo (continuo por la derecha) si tiene trayectorias continuas (continuas por la derecha) $\mathbb{P}$-c.s., *i.e.*, para $\mathbb{P}$-casi toda $\omega\in\Omega$, $t\to X_t(\omega)$ es continua (continua por la derecha) . Una martingala **continua (continua por la derecha)** es un proceso estocástico continuo (continuo por la derecha) que a su vez es martingala.

Definición 7. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se llama martingala local continua si existe una sucesión de tiempos de paro $\{T_n\}_{n\geq 1}$, tales que:

(i) La sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=\infty$ $\mathbb{P}$-c.s. (Se abrevia con $T_n\nearrow\infty$).

(ii) Para toda $n\geq 1$, el proceso estocástico $(X_t^{T_n}\cdot\mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ es una martingala continua.

Los siguientes dos teoremas son vitales para la definición de la integral estocástica.

Teorema 1. *Si $M=(M_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua, existe un único proceso estocástico continuo creciente $\langle M,M\rangle=(\langle M,M\rangle_t)_{t\geq 0}$ con $\langle M,M\rangle_0=0$, tal que el proceso estocástico $(M_t^2-\langle M,M\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua. El proceso estocástico $(\langle M,M\rangle_t)_{t\geq 0}$ se llama proceso de variación cuadrática de M.*

Dada una martingala M y su proceso de variación cuadrática $\langle M,M\rangle$, se define $\langle M,M\rangle_\infty(\omega)=\lim_{t\to\infty}M_t(\omega)$ este límite existe $\mathbb{P}$-c.s. en $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, ya que el proceso $\langle M,M\rangle$ tiene trayectorias crecientes $\mathbb{P}$-c.s.

Teorema 2. *Si M, N son martingalas locales continuas, existe un único proceso estocástico continuo $(\langle M,\, N\rangle)_{t\geq 0}$ con trayectorias de variación acotada $\mathbb{P}$-c.s. y $\langle M,\, N\rangle_0 = 0$, tal que $(M_tN_t - \langle M,\, N\rangle_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local. El proceso estocástico $(\langle M,\, N\rangle)_{t\geq 0}$ se llama proceso estocástico cruzado de M y N.*

Demostración. Basta definir $\langle M,\, N\rangle_t = 1/4\left(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M-N, M-N\rangle_t\right)$ para todo $t \geq 0$. □

Observación 1. Se puede ver que el proceso estocástico cruzado tiene propiedades análogas a las de un producto interior, es decir, la función $(M, N) \to \langle M,\, N\rangle$ es bilineal, simétrica y $\langle M,\, M\rangle_t \geq 0$, para todo $t \geq 0$ lo que permite definir la integral estocástica vía el Teorema de Representación Riesz. Pruebas a los teoremas anteriores pueden encontrarse en [2, págs. 124-125].

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que

Proposición 1. *Si T es un tiempo se paro, entonces*

$$\langle M^T,\, N^T\rangle = \langle M,\, N^T\rangle = \langle M,\, N\rangle^T.$$

Definición 8. Se denota como H^2 al conjunto de de las martingalas continuas acotadas en L_2, es decir, al conjunto de las martingalas continuas $M = (M_t)_{t\geq 0}$ tales que

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty;$$

a H_0^2 al subconjunto de H^2 formado por las martingalas M con $M_0 = 0$.

Definición 9. Si $M \in H^2$, se denota como $\mathscr{L}_2(M)$ al espacio de procesos estocásticos progresivamente medibles K tales que $\mathbb{E}[\int_0^\infty K_s(\omega)^2 d\,\langle M,\, M\rangle_s(\omega)] < \infty$.

Note que $\int_0^\infty K_s(\omega)^2 d\,\langle M,\, M\rangle_s(\omega)$ está bien definida como integral de Riemann-Stieltjes, ya que el proceso estocástico de variación cuadrática $(\langle M,\, M\rangle)$ tiene trayectorias crecientes $\mathbb{P}$-c.s.

Observación 2. Se puede ver que si $M \in H^2$, entonces satisface los supuestos del Teorema de convergencia para martingalas (ver [2, pág. 68]) y en consecuencia existe $M_\infty \in L_2$ tal que $M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_t]$, además M_t converge $\mathbb{P}$-c.s. a M_∞ y en L_1.

Definición 10. Sea $M \in H^2$, entonces $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ existe casi seguramente, y T un tiempo de paro, se define M_T en $\{T = \infty\}$ por $M_T = M_\infty$. Análogamente $\langle M,\, M\rangle_T$ en $\{T = \infty\}$ por $\langle M,\, M\rangle_T = \langle M,\, M\rangle_\infty$.

Una martingala local continua M que pertenece a H^2 se puede caracterizar mediante su proceso de variación cuadrática vía el siguiente resultado:

Teorema 3. *Una martingala local continua M pertenece a H^2 si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones* *(i)* $M_0 \in L_2$.

(ii) $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$

Note que si $M \in H^2$, entonces por el teorema anterior, $\langle M, M\rangle_\infty < \infty$ $\mathbb{P}$-c.s, por lo que $\langle M, M\rangle_t < \infty$ $\mathbb{P}$-c.s para todo $t \geq 0$. La prueba de este teorema se puede encontrar en [2, pág. 129].

Teorema 4 (De la existencia de la integral estocástica)**.** *Sea $M \in H^2$, para cada $K \in \mathscr{L}_2(M)$ existe una única martingala en H_0^2, denotada por $\int_0^\cdot K_s d\,M_s$ tal que:*

(i) $\langle \int_0^\cdot K_s d\,M_s,\, N\rangle = K \cdot \langle M, N\rangle$ *$\mathbb{P}$-c.s. para toda $N \in H^2$, donde*

$$(K \cdot \langle M, N\rangle)_t(\omega) = \int_0^t K_s(\omega) d\,\langle M, N\rangle_s(\omega).$$

(ii) $\langle \int_0^\cdot K_s d\,M_s,\, \int_0^\cdot K_s d\,M_s\rangle = K^2 \cdot \langle M, N\rangle$ *$\mathbb{P}$-c.s;*

a $\int_0^\cdot K_s d\,M_s$ se le llama integral estocástica de K respecto a M.

Note que la integral $\int_0^t K_s(\omega) d\,\langle M, N\rangle_s(\omega)$ está bien definida como integral de Riemann-Stieltjes, ya que el proceso estocástico cruzado de M y N tiene trayectorias de variación acotada $\mathbb{P}$-c.s. La expresión $\int_0^\infty K_s d\,M_s$ denota la variable aleatoria en L_2 tal que $\int_0^t K_s d\,M_s = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty K_s d\,M_s | \mathscr{F}_t\right]$. La prueba de este teorema se puede encontrar en [2, pág. 137].

El siguiente teorema se aplica en la primera prueba de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, su importancia en las aplicaciones del cálculo estocástico es ineludible, se puede encontrar una prueba en [2, pág. 147].

Teorema 5 (Fórmula de Itô)**.** *Sea $M = (M^1, \ldots, M^n)$ donde M^i es una martigala continua para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces $F(M)$ es una martingala continua y*

$$F(M_t) = F(M_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(M_s^i) dM_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(M_s) d\,\langle M^i,\, M^j\rangle_s.$$

Hasta aquí el resumen de resultados que se utilizan en el presente trabajo.

3. Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy

En esta sección se dan dos pruebas de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, la primera utiliza cálculo estocástico, mientras que la segunda no.

Para un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$, se denota $X^*_t = \sup_{s\leq t}|X_s|$. Antes de comenzar, note que por el Teorema 14, si una martingala continua $(M_t)_{t\geq 0}$ es acotada en L_2 entonces M^*_∞ pertenece a L_2 y $\|M^*_\infty\|_2 \leq 2\cdot \sup_{t\geq 0}\|M_t\|_2$, además por el Teorema 1

$$\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[M_t^2] \leq \mathbb{E}[(M^*_\infty)^2],$$

por lo que

$$\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] \leq \mathbb{E}[(M^*_\infty)^2] \leq 4\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty].$$

La desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy generaliza lo anterior para $0 < p < \infty$. La prueba siguiente puede encontrarse en [2, pág. 160], se comienza con varios resultados previos, éstos prueban partes de la desigualdad.

Definición 11. Se dice que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es acotado si existe $C > 0$ tal que $|X_t(\omega)| \leq C$ $\mathbb{P}$-c.s. para todo $t \geq 0$. Una martingala **acotada** es un proceso estocástico acotado que es martingala.

Proposición 2. *Para todo $p \geq 2$, existe una constante C_p tal que para toda Martingala local continua $(M_t)_{t\geq 0}$ con $M_0 = 0$,*

$$\mathbb{E}[(M^*_\infty)^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle M,\, M\rangle_\infty^{p/2}].$$

Demostración. Sea $p \geq 2$, si $\langle M,\, M\rangle_\infty \notin L_{p/2}$ o $\mathbb{E}[(M^*_\infty)^p] = 0$ la desigualdad es válida, así que se supone $\langle M,\, M\rangle_\infty \in L_{p/2}$ y $\mathbb{E}[(M^*_\infty)^p] > 0$ (por lo que existe $t_0 \geq 0$ tal que $\mathbb{E}[|M_t|^p] > 0$ por Teorema 14). Primero se realiza para una martingala acotada M, por lo que $M \in H^2$. Por el lema 5, se tiene que la función $f(x) = |x|^p$ tiene segunda derivada continua. Aplicando el Teorema 5 a f y a la martingala continua M, se tiene que:

$$|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_s)d\,M_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2}d\,\langle M,\, M\rangle_s.$$

Como $M \in H^2_0$ se tiene que el proceso estocástico $\int_0^\cdot p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_s)d\,M_s \in H^2_0$. Por lo que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_t|^p] &= \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}d\,\langle M,\, M\rangle_s\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}[(M^*_t)^{p-2}\langle M, M\rangle_t] \text{ por propiedad de la integral de R-S} \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\|(M^*_t)^{p-2}\|_{\frac{p}{p-2}}\|\langle M, M\rangle_t\|_{\frac{p}{2}} \text{ por Hölder.}
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la desigualdad de Doob, $\|M^*_t\|_p \leq [p/(p-1)]\|M_t\|_p$. Así que:

$$\begin{aligned}
\|M^*_t\|_p &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{p(p-1)}{2}\|(M^*_t)^{p-2}\|_{\frac{p}{p-2}}\|\langle M, M\rangle_t\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}. \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(\|(M^*_t)\|_p)^{\frac{p-2}{p}}\left(\|\langle M, M\rangle_t\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|M_t^*\|_p^{1-\frac{p-2}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\|\langle M,M\rangle_t\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

tomando de ambos lados de la desigualdad la potencia p, se tiene que

$$\|M_t^*\|_p^2 \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)\left(\|\langle M,M\rangle_t\|_{\frac{p}{2}}\right),$$

ahora tomando de ambos lados de la desigualdad la potencia $p/2$ se tiene que:

$$\mathbb{E}[(M_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p^2/2}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\mathbb{E}[(\langle M,M\rangle_t)^{\frac{p}{2}}].$$

Así que tomando el límite cuando t tiende a infinito en la desigualdad anterior se obtiene:

$$\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p^2/2}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\mathbb{E}[(\langle M,M\rangle_\infty)^{\frac{p}{2}}].$$

Ahora, sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala local continua, por el lema 6 existe una sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ de tiempos de paro tales que $T_n \nearrow \infty$ c.s; y para toda $n \geq 1$, el proceso estocástico $(M_t^{T_n}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ es una martingala continua y acotada. Así que aplicando el resultado obtenido a las martingalas continuas y acotadas $(M_t^{T_n}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$, obtenemos que

$$\mathbb{E}[((M^{T_n}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_\infty^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p^2/2}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\mathbb{E}[(\langle M^{T_n}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}}, M^{T_n}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}}\rangle_\infty)^{\frac{p}{2}}],$$

para toda $n \geq 1$. Por el Teorema de Convergencia Monótona se obtiene el resultado. □

Al procedimiento de obtener resultados para martingalas continuas y acotadas; y después extenderlos para martingalas locales utilizando la sucesión de tiempos de paro que proporciona el lema 6, se llama procedimiento de paro.

Proposición 3. *Para $p \geq 4$, existe una constante c_p tal que:*

$$c_p\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p].$$

Demostración. Sea $p \geq 4$, si $M_\infty^* \notin L_p$ la desigualdad es válida. Primero se supone que el proceso estocástico $\langle M,M\rangle$ es acotado y $M_\infty^* \in L_p$. Se tiene que $\langle M,M\rangle_\infty \in L_p$ para toda $p>0$, en particular en L_1, así que $M \in H_0^2$ por el teorema 3. Se sabe que $|x+y|^p \leq 2^p(|x|^p+|y|^p)$ para todo par $x,y \in \mathbb{R}$. De la igualdad $M_t^2 = 2\int_0^t M_s d\,M_s + \langle M,M\rangle_t$ válida para todo $t \geq 0$, se tiene que $\langle M,M\rangle_\infty = M_\infty^2 - 2\int_0^\infty M_s d\,M_s$. Así que:

$$\begin{aligned}\langle M,M\rangle_\infty &\leq (M_\infty^*)^2 - 2\int_0^\infty M_s d\,M_s,\\ &\leq \left|(M_\infty^*)^2 - 2\int_0^\infty M_s d\,M_s\right|.\end{aligned}$$

Elevando a la $p/2$ de ambos lados en la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
\langle M, M\rangle_\infty^{p/2} &\leq \left|(M_\infty^*)^2 - 2\int_0^\infty M_s d\, M_s\right|^{p/2} \\
&\leq 2^{p/2}\left(\left|(M_\infty^*)^2\right|^{p/2} + \left|2\int_0^\infty M_s d\, M_s\right|^{p/2}\right) \\
&= 2^{p/2}\left(|(M_\infty^*)^p| + \left|2\int_0^\infty M_s d\, M_s\right|^{p/2}\right) \\
&\leq 2^p\left(|(M_\infty^*)^p| + \left|\int_0^\infty M_s d\, M_s\right|^{p/2}\right).
\end{aligned}$$

Tomando esperanza de ambos lados,

$$\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] \leq 2^p\left(\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^\infty M_s d\, M_s\right|^{p/2}\right]\right).$$

Aplicando la desigualdad e la proposición 2 a la martingala local $\int_0^\cdot M_s d\, M_s$ y por el Teorema 4,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] &\leq 2^p\left(\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] + C_{p/2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty M_s^2 d\, \langle M, M\rangle_s\right)^{p/4}\right]\right) \\
&\leq C_p'\left(\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] + \mathbb{E}[\left((M_\infty^*)^2 \cdot \langle M, M\rangle_\infty\right)^{p/4}]\right) \\
&= C_p'\left(\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] + \mathbb{E}[(M_\infty^*)^{p/2} \cdot (\langle M, M\rangle_\infty)^{p/4}]\right) \\
&\leq C_p'\left(\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] + (\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \cdot \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}])^{1/2}\right) \quad \text{Por Cauchy-Swartz.}
\end{aligned}$$

Si se elige $x = (\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}])^{1/2}$ y $y = (\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p])^{1/2}$, se puede ver a la desigualdad anterior como $x^2 - c_p^{-1}xy - c_p^{-1}y^2 \leq 0$, para alguna constante adecuada c_p, es decir que x es menor o igual que la raíz positiva de la ecuación $x^2 - c_p^{-1}xy - c_p^{-1}y^2 = 0$, pero esta raíz es de la forma $c_p^{-1}y$.

Por último, sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala local continua, así que existe una sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ de tiempos de paro tales que $T_n \nearrow \infty$ c.s; y para toda $n \geq 1$, el proceso estocástico $(M_t^{T_n} \cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ es una martingala continua. Sean $\sigma_n = \text{ínf}\{t \geq 0 \,|\, \langle M, M\rangle_t = n\}$, entonces para toda $n \geq 1$ σ_n es tiempo de paro (ver [2, pág. 43]); por lo que $\{T_n' = T_n \wedge \sigma_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de tiempos de paro tales que $T_n' \nearrow \infty$ c.s; y para toda $n \geq 1$, el proceso estocástico $(M_t^{T_n'} \cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ es una martingala continua y $\langle M, M\rangle^{T_n'}$ es un proceso acotado. Por lo ya probado se tiene que $c_p\mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_\infty^{T_n'})^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\{(M^{T_n'})_\infty^*\}^p]$ para toda $n \geq 1$. Por el Teorema de convergencia monótona se obtiene el resultado. □

Definición 12. Un proceso estocástico X positivo, adaptado y con trayectorias continuas por la derecha ($\mathbb{P}$-c.s.) está **dominado** por un proceso estocástico creciente A, si $\mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_0] \leq \mathbb{E}[A_T|\mathscr{F}_0]$ para todo T tiempo de paro acotado.

Lema 1. *Si X está dominado por A y A es un proceso estocástico continuo, entonces*

$$\mathbb{P}(X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq y) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \wedge y],$$

para todo $x > 0$, $y > 0$; donde $X_\infty^* = \sup_s X_s$.

Demostración. Por hipótesis, en particular se tiene que $\int_F X_0 d\,\mathbb{P} \leq \int_F A_0 d\,\mathbb{P}$ para todo $F \in \mathscr{F}_0$, por lo que $A_0 \geq 0$ $\mathbb{P}$-c.s., ya que X es positivo, adaptado y F_0 es completa con respecto a $\mathbb{P}$. Sean $A = \{\omega \in \Omega \,|\, A_0(\omega) > y\}$ y $B = \{\omega \in \Omega \,|\, A_0(\omega) \leq y\}$, entonces $\Omega = A \cup B$. Ahora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq y) &\leq \mathbb{P}(A_\infty \leq y \cap A) + \mathbb{P}(A_\infty \leq y \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_\infty \leq y \cap B), \end{aligned}$$

entonces si $\mathbb{P}(B) = 0$ se da la desigualdad, ya que $(1/x)\mathbb{E}[A_\infty \wedge y] \geq 0$, así que, se asume $\mathbb{P}(B) > 0$. Además se trabaja con la medida de probabilidad $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(\cdot \,|\, B)$ bajo esta medida la relación de dominación sigue siendo válida y $\mathbb{P}'(B) = 1$. Sean $R = \text{ínf}\{t : A_t > y\}$, $S = \text{ínf}\{t : X_t > x\}$ y $R_n = R \wedge n$. Ahora como A es continuo, se tiene que $\{A_n \leq y\} = \{R_n = n\}$; y como X es continuo por la derecha, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(X_n^* > x,\, A_n \leq y) &= \mathbb{P}'(X_n^* > x,\, R_n = n) \\ &\leq \mathbb{P}'(X_S \geq x, S \leq n, R_n = n) \\ &\leq \mathbb{P}'(X_{S \wedge R_n} \geq x) \\ &\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[X_{S \wedge R_n}] \\ &\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[A_{S \wedge R_n}], \\ &\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[A_{S \wedge R}] \\ &\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[A_\infty \wedge y], \end{aligned}$$

donde la última desigualdad, se tiene que debido a la continuidad del proceso estocástico A y $P'(B) = 1$, por lo que $A_{S \wedge R} \leq A_\infty \wedge y$ c.s., por lo observado anteriormente y la relación de $\mathbb{E}$ con $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}$ obtenemos que:

$$\mathbb{P}(X_n^* > x,\, A_n \leq y) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \wedge y], \quad \forall n \geq 1.$$

Por último, por el Lema de Fatou se tiene:

$$\int \text{lím inf}\, \mathbf{1}_{\{X_n^* > x,\, A_n \leq y\}} \leq \text{lím inf} \int \mathbf{1}_{\{X_n^* > x,\, A_n \leq y\}} = \text{lím inf}\, \mathbb{P}(X_n^* > x,\, A_n \leq y) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \wedge y],$$

como $\text{lím inf}\, \mathbf{1}_{\{X_n^* > x,\, A_n \leq y\}} = \mathbf{1}_{\{X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq y\}}$, ya que X es continuo por la derecha y A es continuo, por lo tanto

$$\int \text{lím inf}\, \mathbf{1}_{\{X_n^* > x,\, A_n \leq y\}} = \int \mathbf{1}_{\{X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq y\}} = \mathbb{P}(X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq y) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \wedge y] \qquad \square$$

Proposición 4. *Si X está dominado por A y A es un proceso estocástico continuo, entonces para toda $k \in (0,1)$, se tiene que:*

$$\mathbb{E}[(X_\infty^*)^k] \leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}[A_\infty^k].$$

Demostración. Sea F una función continua creciente de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^+$ con $F(0)=0$. Por el teorema de Fubini y el lema anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{(X_\infty^*>x)} d\,F(x)\right] \\
&\leq \int_0^\infty [\mathbb{P}(X_\infty^*>x,\, A_\infty \leq x)+\mathbb{P}(A_\infty>x)]\,d\,F(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty\wedge x]+\mathbb{P}(A_\infty>x)\right)d\,F(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left(2\mathbb{P}(A_\infty>x)+\frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty\cdot \mathbf{1}_{(A_\infty\leq x)}]\right)d\,F(x) \\
&= 2\mathbb{E}[F(A_\infty)]+\mathbb{E}\left[A_\infty\int_{A\infty}^\infty \frac{d\,F(x)}{x}\right] \\
&= \mathbb{E}[\overline{F}(A_\infty)],
\end{aligned}$$

si se considera la función $\overline{F}(x)=2F(x)+x\int_x^\infty \frac{d\,F(u)}{u}$. El resultado se obtiene aplicando lo anterior a la función $F(x)=x^k$. $\square$

Observación 3. Si $k\geq 1$ y $F(x)=x^k$, entonces $\overline{F}=\infty$.

Ahora, se procede a enunciar y probar la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy.

Teorema 6. *Para todo $p\in(0,\infty)$, existen constantes positivas c_p y C_p tales que, para toda Martingala local continua $(M_t)_{t\geq 0}$ con $M_0=0$,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle M,\, M\rangle_\infty^{p/2}]\leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p]\leq C_p\mathbb{E}[\langle M,\, M\rangle_\infty^{p/2}].$$

Demostración. Las proposiciones dos y tres prueban la desigualdad del lado derecho para $p\geq 2$ y la desigualdad del lado izquierdo para $p\geq 4$, así que basta con probar la desigualdad para $0<p<2$ para el lado derecho y para $0<p<4$ para el lado izquierdo. Sea $p_0\in(0,2)$ y $k=p_0/2$ considere los procesos $(M^*)^2=\{(M_t^*)^2\}_{t\geq 0}$ y $A=(C_2\cdot\langle M,M\rangle_t)_{t\geq 0}$, donde C_2 es la constante que se obtiene de la proposición dos, entonces $(M^*)^2$ está dominado por A por el Teorema 13; por la proposición cuatro se tiene que

$$\mathbb{E}[\big((M^*)^2\big)^k]\leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}[A_\infty^k]$$

por la elección de k, se puede concluir

$$\mathbb{E}[(M^*)^{p_0}]\leq \frac{4-p_0}{2-p_0}C_2^{p_0/2}\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty^{p_0/2}],$$

lo que prueba la desigualdad del lado derecho para $0<p<\infty$. Para el lado izquierdo de la desigualdad considere los procesos $c_4\cdot\langle M,M\rangle^2=\{(c_4\cdot\langle M,M\rangle_t)^2\}_{t\geq 0}$, $A=(M^*)^4=\{(M_t^*)^4\}_{t\geq 0}$, donde c_4 es la constante que se obtiene de la proposición tres, entonces $c_4\cdot\langle M,M\rangle^2$ está dominado por A por el Teorema 13. Sea $p_0\in(0,4)$ y $k=p_0/4$, por la proposición cuatro se tiene que

$$\mathbb{E}[\big(c_4\cdot(\langle M,M\rangle_\infty)^2\big)^k]\leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}[\big((M_\infty^*)^4\big)^k]$$

por la elección de k, se puede concluir

$$c_4^{p_0/4}\frac{4-p_0}{8-p_0}\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty^{p_0/2}]\leq \mathbb{E}[(M^*)^{p_0}],$$

lo que termina la prueba □

Ahora se pasa a demostrar el Teorema 6 utilizando sólo técnicas de Probabilidad, esta prueba se encuentra en [3, pág. 333]. Primero se establece un resultado previo.

Lema 2. *Sea M una martingala continua con $M_0=0$; $\mathbb{P}(M_\infty^*>0)>0$ y se define $\tau_x=\inf\{t>0\,:\,M_t=x\}$. Entonces,*

$$\mathbb{P}(\tau_a<\tau_b\,|\,M_\infty^*>0)\leq\frac{b}{b-a}\leq\mathbb{P}(\tau_a\leq\tau_b\,|\,M_\infty^*>0),\qquad a<0<b.$$

Demostración. Se consideran los siguientes tiempos de paro τ_a, τ_b y $\tau_a\wedge\tau_b$ (ver [1, pág. 7]). Sea $\tau=\tau_a\wedge\tau_b$, por el Teorema 13 se tiene que $\mathbb{E}[M_{\tau\wedge t}]=0$ para todo $t>0$, por lo que $\mathbb{E}[M_\tau]=0$ por el teorema de convergencia dominada y $(M_t^\tau)_{t\geq 0}\in H_0^2$ ($|M_\tau|\leq b-a$). $M_{\tau_x}=x$ en $\{\tau_x<\infty\}$ porque M es un proceso continuo. Así que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_\tau] &= \mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau_a<\tau_b}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau_b<\tau_a}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau_a=\tau_b=\tau=\infty}]\\
&= \mathbb{E}[M_{\tau_a}\cdot 1_{\tau_a<\tau_b}]+\mathbb{E}[M_{\tau_b}\cdot 1_{\tau_b<\tau_a}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]\\
&= \mathbb{E}[a\cdot 1_{\tau_a<\tau_b}]+\mathbb{E}[b\cdot 1_{\tau_b<\tau_a}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]\\
&= a\cdot\mathbb{E}[1_{\tau_a<\tau_b}]+b\cdot\mathbb{E}[1_{\tau_b<\tau_a}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]\\
&= a\cdot\mathbb{P}[(\tau_a<\tau_b)]+b\cdot\mathbb{P}[(\tau_b<\tau_a)]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]\\
&= a\cdot\mathbb{P}[(\tau_a<\tau_b)]+b\cdot\mathbb{P}[(\tau_b<\tau_a,M_\infty^*>0)]+b\cdot\mathbb{P}[(\tau_b<\tau_a,M_\infty^*=0)]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]\\
&= a\cdot\mathbb{P}[(\tau_a<\tau_b)]+b\cdot\mathbb{P}[(\tau_b<\tau_a,M_\infty^*>0)]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty,M_\infty^*>0}]+\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty,M_\infty^*=0}]
\end{aligned}$$

Ahora si $\{\tau=\infty\}$, $M_t^\tau<b$ para todo $t\geq 0$, entonces $M_\infty^\tau\leq b$, por lo que

$$\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty}]=\mathbb{E}[M_\tau\cdot 1_{\tau=\infty,M_\infty^*>0}]\leq b\cdot\mathbb{P}(\tau=\infty,M_\infty^*>0),$$

además se tiene que

$$\mathbb{P}(\tau_b\leq\tau_a,\,\tau<\infty)+\mathbb{P}(\tau=\infty,\,M_\infty^*>0)=\mathbb{P}(\tau_b\leq\tau_a,\,M_\infty^*>0)$$

por probabilidad total. Así que

$$0=\mathbb{E}[M_\tau]\leq a\cdot\mathbb{P}[(\tau_a<\tau_b)]+b\cdot\mathbb{P}(\tau_b\leq\tau_a,\,M_\infty^*>0).$$

Ahora, puesto que

$$\mathbb{P}(\tau_b\leq\tau_a,\,M_\infty^*>0)=1-\mathbb{P}(\tau_a<\tau_b)-\mathbb{P}(M_\infty^*=0)=\mathbb{P}(M_\infty^*>0)-\mathbb{P}(\tau_a<\tau_b),$$

por lo tanto

$$0\leq a\cdot\mathbb{P}[(\tau_a<\tau_b)]+b\cdot[\mathbb{P}(M_\infty^*>0)-\mathbb{P}(\tau_a<\tau_b)]$$

lo cuál implica la desigualdad izquierda. La otra desigualdad se sigue tomando complementos. □

Ahora, se termina la sección enunciando y dando otra prueba de la desigualdad BDMN sin utilizar cálculo estocástico. A partir de aquí se denota $\langle M, M\rangle$ como $\langle M\rangle$.

Teorema 7 (Desigualdad de Burkholder-Millar-Gundy-Novikov)**.** *Existen constantes $c_p \in (0,\infty)$ con $p>0$, tal que para toda martingala local continua M con $M_0=0$, se tiene que*

$$c_p^{-1}\mathbb{E}[(\langle M\rangle_\infty)^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq c_p\mathbb{E}[(\langle M\rangle_\infty)^{\frac{p}{2}}].$$

Demostración. Se supone $(M_t)_{t\geq 0}$ y $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ acotados. Para $r>0$ fijo, sean $\tau = \text{ínf}\{t : M_t^2 = r\}$, $M_t' = M_t - M_t^\tau$ y $N_t = (M_t')^2 - \langle M_t'\rangle$ para todo $t\geq 0$; y $c\in(0,2^{-p})$ fijo. Se tiene que

$$\mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq 4r\right) - \mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\infty \geq cr\right) \leq \mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq 4r,\, \langle M\rangle_\infty < cr\right) \quad \text{Lema 3.}$$

Ahora si $\langle M\rangle_\infty < cr$, entonces

$$\langle M'\rangle = \langle M - M^\tau\rangle = \langle M\rangle - 2\langle M, M^\tau\rangle + \langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle - \langle M^\tau\rangle \leq \langle M\rangle \leq \langle M\rangle_\infty < cr,$$

por la proposición 1 y observación 1. Note que

$$M_t' = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau \geq t \\ \\ M_t - M_\tau & \text{si} \quad \tau < t \end{cases}$$

Si $(M_\infty^*)^2 \geq 4r$, existe$\{t_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $M_{t_n}^2 \to 4r$, se tienen cuatro posibilidades:

(i) $M_{t_n} \to 2\sqrt{r}$ y $M_{t_n\wedge\tau} \to \sqrt{r}$.

(ii) $M_{t_n} \to 2\sqrt{r}$ y $M_{t_n\wedge\tau} \to -\sqrt{r}$.

(iii) $M_{t_n} \to -2\sqrt{r}$ y $M_{t_n\wedge\tau} \to \sqrt{r}$.

(iv) $M_{t_n} \to -2\sqrt{r}$ y $M_{t_n\wedge\tau} \to -\sqrt{r}$.

Así que de (i) se obtiene,

$$M_{t_n}' = M_{t_n} - M_{t_n\wedge\tau} \to 2\sqrt{r} - \sqrt{r} = \sqrt{r},$$

y de (ii) se obtiene,

$$M_{t_n}' = M_{t_n} - M_{t_n\wedge\tau} \to 2\sqrt{r} + \sqrt{r} = 3\sqrt{r}.$$

Los casos (iii) y (iv) son similares. Por lo que

$$\sup_{t\geq 0}(M_t')^2 \geq r.$$

Por lo tanto si $\langle M\rangle_\infty < cr$ y $(M_\infty^*)^2 \geq 4r$, se tiene que

$$N_t = (M_t')^2 - \langle M'\rangle_t \geq -\langle M'\rangle_t > -cr, \quad \text{para toda } t \geq 0 \text{ y}$$

$$\sup_{t\geq 0} N_t = \sup_{t\geq 0}\{(M_t')^2 - \langle M'\rangle_t\} \geq \sup_{t\geq 0}(M_t')^2 - \langle M'\rangle_\infty.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left((M^*)^2 \geq 4r,\, \langle M\rangle_\infty < cr\right) \leq \mathbb{P}\left(N_t > -cr \text{ para todo } t \geq 0,\, \sup_{t\geq 0} N_t > r - cr\right).$$

Sea $a = r - cr$ y $b = -cr$. Si $N_t > -cr$ para todo $t > 0$ y $\sup_{t\geq 0} N_t > r - cr$, entonces $\tau_a < \tau_b$, por el lema anterior, se tiene que

$$P\left(N_t > -cr \text{ para todo } t \geq 0,\, \sup_{t\geq 0} N_t > r - cr\right) \leq \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) \leq \frac{b}{b-a}\mathbb{P}(N_\infty^* > 0) = c\mathbb{P}(N_\infty^* > 0).$$

Ahora si $(M_\infty^*)^2 < r$, entonces $-\sqrt{r} < M_t < \sqrt{r}$ para todo $t \geq 0$, en consecuencia se tiene que $\tau = \infty$, entonces $M_t' = 0$ para todo $t \geq 0$, por lo que $N_t = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto $\mathbb{P}(N_\infty^* > 0) \leq \mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq r\right)$. Así que por lo anterior, se tiene que

$$\mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq 4r\right) - \mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\infty \geq cr\right) \leq c\mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq r\right).$$

Multiplicando por $(p/2)r^{\frac{p}{2}-1}$ e integrando sobre los reales positivos, obtenemos por el lema 4,

$$\frac{1}{2^p}\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] - \frac{1}{c^{p/2}}\mathbb{E}[(\langle M\rangle_\infty)^{\frac{p}{2}}] \leq c\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p],$$

la desigualdad de la derecha se obtiene con $c_p = \frac{1}{c^{p/2}(2^{-p}-c)}$.

Para la desigualdad de la izquierda, sea N como antes con $\tau = \text{ínf}\{t : \langle M\rangle_t = r\}$, entonces para toda $r > 0$ y $c \in (0, 2^{-p/2-2})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\infty \geq 2r\right) - \mathbb{P}\left((M_\infty^*)^2 \geq cr\right) &\leq \mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\infty \geq 2r,\, (M_\infty^*)^2 < cr\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(N_t < 4cr \text{ para toda } t \geq 0,\, \inf_{t\geq 0} N_t < 4cr - r\right) \\
&\leq 4c\mathbb{P}\left(\langle M\rangle_\infty \geq r\right),
\end{aligned}$$

utilizando un razonanmiento análogo a la desigualdad de la derecha. Multiplicando por $(p/2)r^{\frac{p}{2}-1}$ e integrando sobre los reales positivos, obtenemos

$$2^{-p/2}\mathbb{E}[(\langle M\rangle_\infty)^{p/2}] - c^{-p/2}\mathbb{E}[(M^*)^p] \leq 4c\mathbb{E}[(\langle M\rangle_\infty)^{p/2}],$$

finalmente obtenemos el resultado con $c_p = c^{-p/2}/(2^{-p/2} - 4c)$. □

4. Desigualdad tipo Burkholder-Davis-Gundy

En esta sección se prueba una desigualdad parecida a la desigualdad Burkholder-Davis-Gundy y se enuncia una apliación de está desigualdad para estimar la densidad de un proceso de difusión que es la solución de una ecuación diferencial estocástica. Lo que sigue forma parte del artículo [5].

Teorema 8. *Sea* $M = \{M_t,\, t \geq 0\}$ *una martingala continua con* $M_0 = 0$. *Entonces para cada* $1 \leq p < q = p + \varepsilon$ *existe una constante universal* $C = C(p, q)$ *tal que*

$$\left\| \frac{M_t}{\langle M \rangle_t} \right\|_p \leq C \cdot \|(\langle M \rangle_t)^{-1/2}\|_q$$

Demostración. Se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\left| \frac{M_t}{\langle M \rangle_t} \right|^p \right] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(|M_t| > x\langle M \rangle_t) d\,x,$$

note que

$$\mathbb{P}(|M_t| > x\langle M \rangle_t) \leq \mathbb{P}(M_t > x\langle M \rangle_t) + \mathbb{P}(-M_t > x\langle M \rangle_t),$$

por lo que basta estimar el término

$$\int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(M_t > x\langle M \rangle_t) d\,x.$$

Se puede suponer que M está acotada, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_t > x\langle M \rangle_t\right) &\leq \mathbb{P}\left(e^{\lambda M_t - \theta\langle M \rangle_t} > e^{(\lambda x - \theta)\langle M \rangle_t}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[e^{\lambda M_t - \theta\langle M \rangle_t} \cdot e^{-(\lambda x - \theta)\langle M \rangle_t}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[e^{\alpha\lambda M_t - \alpha\theta\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\mathbb{E}\left[e^{-(\beta\lambda x - \beta\theta)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta}, \end{aligned}$$

donde $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Elija λ, α, β y θ tales que $(\lambda\alpha)^2/2 = \theta\alpha$, es decir, $\lambda^2\alpha/2 = \theta$. Con esta elección, se tiene,

$$\mathbb{P}\left(M_t > x\langle M \rangle_t\right) \leq \left(\mathbb{E}\left[e^{-\beta(\lambda x - \lambda^2\alpha/2)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta},$$

maximizando la función $\lambda x - \lambda^2\alpha/2$ con respeto a λ, se obtiene $\lambda = x/\alpha$, así que

$$\mathbb{P}\left(M_t > x\langle M \rangle_t\right) \leq \left(\mathbb{E}\left[e^{-(\beta x^2/2\alpha)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta} = \left(\mathbb{E}\left[e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta}.$$

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$ y $\delta > 1$ fijos, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left| \frac{M_t}{\langle M \rangle_t} \right|^p \right] &\leq 2\int_0^\infty p x^{p-1} \left(\mathbb{E}\left[e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta} d\,x \\ &\leq 2\varepsilon^p + 2\int_\varepsilon^\infty p x^{p-1} \left(\mathbb{E}\left[e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta} d\,x \\ &= 2\varepsilon^p + 2p\int_\varepsilon^\infty x^{-\delta} \left(\mathbb{E}\left[x^{(p-1+\delta)\beta} e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M \rangle_t}\right]\right)^{1/\beta} d\,x \\ &\leq 2\varepsilon^p + 2p\left(\int_\varepsilon^\infty x^{-\delta} d\,x\right) \cdot \left(\mathbb{E}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{x^{(p-1+\delta)\beta} e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M \rangle_t}\right\}\right]\right)^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Sea $f(x) = x^{(p-1+\delta)\beta} e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M\rangle_t}$, entonces

$$f'(x) = \left[(p-1+\delta)\beta x^{(p-1+\delta)\beta-1} - x^{(p-1+\delta)\beta+1}(\beta-1)\langle M\rangle_t\right] \cdot e^{-(\beta-1)(x^2/2)\langle M\rangle_t},$$

la función f alcanza su máximo en

$$x_0 = \sqrt{\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}}\langle M\rangle_t^{-1/2},$$

como

$$f(x_0) = \left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{((\delta+p-1)/2)\beta} \langle M\rangle_t^{-((\delta+p-1)\beta)/2} e^{-((\delta+p-1)/2)\beta},$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\frac{M_t}{\langle M\rangle_t}\right|^p\right] &\leq 2\varepsilon^p + \frac{2p}{\delta-1}\varepsilon^{1-\delta} e^{-(\delta+p-1)/2}\left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{(\delta+p-1)/2} \cdot \left(\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{-((\delta+p-1)\beta)/2}\right]\right)^{1/\beta} \\
&= 2\varepsilon^p + \varepsilon^{1-\delta}A,
\end{aligned}$$

donde

$$A = \frac{2p}{\delta-1} e^{-(\delta+p-1)/2}\left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{(\delta+p-1)/2} \cdot \left(\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{-((\delta+p-1)\beta)/2}\right]\right)^{1/\beta}.$$

Ahora sea $g(\varepsilon) = 2\varepsilon^p + \varepsilon^{1-\delta}A$, derivando se obtiene,

$$g'(\varepsilon) = 2p\varepsilon^{p-1} + A(1-\delta)\varepsilon^{-\delta},$$

se tiene que la ecuación $g'(\varepsilon) = 0$ tiene una única solución dada por

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{1}{p+\delta-1}} A^{\frac{1}{p+\delta-1}},$$

entonces ε_0 es un mínimo para g y

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon_0) &= 2\left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{p}{p+\delta-1}} A^{\frac{p}{p+\delta-1}} + \left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{1-\delta}{p+\delta-1}} A^{\frac{1-\delta}{p+\delta-1}+1} \\
&= A^{\frac{p}{p+\delta-1}}\left(2\left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{p}{p+\delta-1}} + \left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{1-\delta}{p+\delta-1}}\right) \\
&= \left(\frac{2p}{\delta-1}\right)^{\frac{p}{p+\delta-1}} e^{-p/2}\left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{p/2} \cdot \left(2\left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{p}{p+\delta-1}} + \left(\frac{\delta-1}{2p}\right)^{\frac{1-\delta}{p+\delta-1}}\right) \\
&\quad \cdot \left(\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{-((\delta+p-1)\beta)/2}\right]\right)^{\frac{p}{\beta(\delta+p-1)}} \\
&= 2e^{-p/2}\left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{p/2}\left(1+\frac{p}{\delta-1}\right)\left(\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{-((\delta+p-1)\beta)/2}\right]\right)^{\frac{p}{\beta(\delta+p-1)}}.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\left\|\frac{M_t}{\langle M\rangle_t}\right\|_p \leq 2^{1/p} e^{-1/2}\left(\frac{\beta(\delta+p-1)}{\beta-1}\right)^{1/2}\left(1+\frac{p}{\delta-1}\right)^{1/p}\left\|\langle M\rangle_t^{-1/2}\right\|_{\beta(\delta+p-1)}.$$

Tome $\delta = 2 - (1/\beta)$ y sea $p + \varepsilon = \beta(\delta + p - 1)$, entonces $\varepsilon = (\beta - 1)(p + 1)$. Así que tome la siguiente constante

$$C_{p,\varepsilon} = 2^{1/p} e^{-1/2} \left((p+1) \left(1 + \frac{p}{\varepsilon} \right) \right)^{1/2+1/p},$$

para obtener,

$$\left\| \frac{M_t}{\langle M \rangle_t} \right\|_p \leq C_{p,\varepsilon} \left\| \langle M \rangle_t^{-1/2} \right\|_{p+\varepsilon} \qquad \square$$

Antes de introducir una aplicación del teorema anterior se definen algunos conceptos. Sea $B = \{B_t,\, t \in [0,T]\}$ el movimiento Browniano estandar definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$; donde Ω es el espacio de funciones continuas en $[0,T]$ que toman el valor cero en cero, $\mathscr{F}$ es la σ-álgebra de Borel en Ω y $\mathbb{P}$ la medida de Wiener.

Se considera el proceso estocástico de difusión $X = \{X_t,\, t \in [0,T]\}$ que es solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\, B_s + \int_0^T b(s, X_s) d\, s, \quad t \in [0,T].$$

Se introduce la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1 $\sigma[s,x)$ y $b(s,x)$ tienen derivadas de segundo orden continuas con respecto a x; $|\sigma(0,x)| \leq K$; $|b(0,x)| \leq K$; $|\partial\sigma(s,x)/\partial x| \leq K$; $|\partial b(s,x)/\partial x| \leq K$ para algún $K > 0$. Además $\partial^2\sigma(s,x)/\partial x^2$ y $\partial b(s,x)/\partial x$ tienen comportamiento polinomial en x uniformemente en t.

El Teorema 8 se aplica en la prueba del siguiente teorema

Teorema 9. *Sean $\sigma(s,x)$ y $b(s,x)$ son funciones que satisfacen la Hipótesis 1; si*

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 d\, s \right|^{-p_0/2} \right] < \infty,$$

para alguna $p_0 > 2$ y para toda $t \in (0,T]$, la variable aleatoria X_t tiene una densidad continua $p_t(x)$ tal que para toda $p > 1$, se tiene que

$$p_t(x) \leq C_p \left\| \left(\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 d\, s \right)^{-1/2} \right\|_p,$$

para alguna constante $C_p > 0$.

Habitualmente se sabe que existe la solución de una ecuación diferencial estocástica, sin embargo, en varios casos no se sabe de la existencia de una densidad, por ende de una cota para una posible densidad. El resultado anterior no sólo dice que existe una densidad si no tambíen una cota para tal densidad, lo que en varios casos nos permite simular dicha densidad. La simulación estocástica es una herramienta que permite visualizar el comportamiento de una variable aleatoria, lo cual es de gran utilidad.

5. Una generalización de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy

En esta sección se generaliza la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy para $0 < p < 1$, funciones mas generales y submartingalas; se enuncia una aplicación de esta generalización para obtener desigualdades del proceso estocástico Browniano parado. Lo siguiente es parte del artículo [6].

Considere X un proceso estocástico dominado por un proceso estocástico A como en la definición 12 ; T un tiempo de paro y los tiempos de paro acotados $T_n = T \wedge n$; entonces $\mathbb{E}[X_{T_n}] \leq \mathbb{E}[A_{T_n}]$ para toda $n \geq 1$ por definición de dominado. Si además X es un proceso estocástico continuo, por el lema de Fatou, se obtiene

$$\int X_T = \int \liminf X_{T_n} \leq \liminf \int X_{T_n} \leq \liminf \int A_{T_n} = \int A_T \quad \text{ya que } T_n \nearrow T,$$

es decir, $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]$ para todo tiempo de paro T.

Definición 13. Se dice que F satisface la condición (1) si F es una función positiva continua y creciente en $[0, \infty)$ con $F(0) = 0$ y $\sup_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)} = \alpha < 1$, donde $f = F'$.

Teorema 10. *Si X esta dominado por A; X y A son continuos; y F satisface la condición (1), entonces*

$$\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha} \mathbb{E}[F(A_\infty)].$$

Demostración. Note que

$$\sup_{x>0} \frac{xf(x)}{F(x)} = \alpha < 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{F(x)} \leq \frac{\alpha}{x} \Rightarrow (\ln(F(x)))' \leq \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \ln(F(x)) \leq \alpha \ln(x) + C \Rightarrow F(x) \leq \widehat{C} x^\alpha,$$

(donde C y $\widehat{C}$ son constantes) por lo que $\lim_{x \to \infty} F(x)/x = 0$. Sea $0 < \delta \leq 1$, por el teorema de Fubini y el lema 1 se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{(X_\infty^* > x)} d\,F(x)\right] \\
&\leq \int_0^\infty \left[\mathbb{P}(X_\infty^* > x,\, A_\infty \leq \delta x) + \mathbb{P}(A_\infty > \delta x)\right] d\,F(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \wedge \delta x] + \mathbb{P}(A_\infty > \delta x)\right) d\,F(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left((1+\delta)\mathbb{P}(A_\infty > \delta x) + \frac{1}{x}\mathbb{E}[A_\infty \cdot \mathbf{1}_{(A_\infty \leq \delta x)}]\right) d\,F(x) \\
&= (1+\delta)\mathbb{E}\left[F\left(\frac{A_\infty}{\delta}\right)\right] + \mathbb{E}\left[A_\infty \int_{A_\infty/\delta}^\infty \frac{d\,F(x)}{x}\right].
\end{aligned}$$

Como F satisface la condición (1), se tiene que $\frac{F(x)}{x^2} \geq \frac{f(x)}{\alpha x}$, entonces,

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)}{\alpha x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\frac{f(x)}{x},$$

por lo que

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(\frac{F(x)}{x}\right)',$$

así que

$$x\int_{x/\delta}^{\infty} \frac{d\,F(u)}{u} = x\int_{x/\delta}^{\infty} \frac{f(u)}{u} d\,u \leq x\int_{x/\delta}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(\frac{F(u)}{u}\right)' d\,u = \frac{\alpha\delta}{1-\alpha} F(x/\delta),$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[A_\infty \int_{A_\infty/\delta}^{\infty} \frac{d\,F(x)}{x}\right] \leq \frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\mathbb{E}[F(A_\infty/\delta)].$$

Ahora para todo $t \geq 1$, se tiene que

$$\ln\left(\frac{F(tx)}{F(x)}\right) = \int_1^t \frac{x f(sx)}{F(sx)} d\,s \leq \int_1^t \frac{\alpha}{s} ds = \alpha \ln(t),$$

por lo que

$$F(tx) \leq t^\alpha F(x).$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] \leq \left(1 + \delta + \frac{\alpha\delta}{1-\alpha}\right)\mathbb{E}[F(A_\infty/\delta)] \leq \left(1 + \frac{\delta}{1-\alpha}\right)\delta^{-\alpha}\mathbb{E}[F(A_\infty)].$$

Por último, el mínimo valor de la función $f(\delta) = \left(1 + \frac{\delta}{1-\alpha}\right)\delta^{-\alpha}$ es $\frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}$ y lo alcanza en $\delta = \alpha$. $\square$

En particular si tomamos $F(x) = x^k$, $k \in (0,\,1)$ se obtiene

$$\mathbb{E}[(X_\infty^*)^k] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{E}[(A_\infty)^k].$$

Observación 4. El teorema anterior proporciona una mejor cota que la proposición 4, puesto que $\alpha^{-\alpha} < 2 - \alpha$.

La generalización es la siguiente:

Teorema 11. *Sea X una submartingala positiva continua con $X_0 = 0$. Si F satisface la condición (1), entonces*

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^{-\alpha}}\mathbb{E}[F(A_\infty)] \leq \mathbb{E}[F(X_\infty^*)] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{E}[F(A_\infty)],$$

donde A es el proceso estocástico en la descomposición de Doob-Meyer de A.

Demostración. Sea X una submartingala continua positiva, por la Descomposición de Doob-Meyer se tiene que $X = M + A$, donde M es una martingala local continua; A es un proceso estocástico creciente localmente integrable continuo y adaptado. Como $X_0 = 0$ y $A_0 = 0$, entonces $M_0 = 0$, así que, si T es un tiempo de paro acotado, se tiene que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[A_T]$ por el Teorema 13, por lo que X está dominado por A. Por lo tanto

$$\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{E}[F(A_\infty)],$$

por el Teorema anterior. Por otro lado $\mathbb{E}[A_T] = \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[\sup_{t \leq T} X_t]$ y el proceso $(Y_t = \sup_{s \leq t} X_s)_{t \geq 0}$ es continuo y creciente, así que A está dominado por Y. Por el Teorema anterior se tiene,

$$\mathbb{E}[F(A_\infty)] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{E}[F(X_\infty^*)] \qquad \square$$

Observación 5. Es un hecho conocido que si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ es una martingala local continua, entonces el proceso estocástico $X = (|M_t|^p)_{t \geq 0}$ es una submartingala local continua (desigualdad de Jensen condicional). Si M es una martingala local continua que comienza en cero, se tiene que el proceso M_t^2 es una submartingala positiva con $M_0^2 = 0$, por la Descomposición de Doob-Meyer $M_t^2 = N_t + A_t$. Por el Teorema 1, se tiene que $A_t = \langle M \rangle_t$ $\mathbb{P}$-c.s. para todo $t \geq 0$. El Teorema anterior prueba la desigualdad e Burkholder-Davis-Gundy para $0 < p < 1$. Este resultado se aplica en la prueba del siguiente teorema:

Teorema 12. *Sea T un tiempo de paro para el proceso estocástico Browniano estándar B y F una función que satisface la condición (1), entonces*

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^{-\alpha}}\mathbb{E}[F(T)] \leq \mathbb{E}[F((B_T^*)^2)] \leq \frac{\alpha^{-\alpha}}{1-\alpha}\mathbb{E}[F(T)].$$

6. Apéndice

Lema 3. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, entonces para todo par A, $B \in \mathscr{F}$ se tiene que $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B^c)$.*

Lema 4. *Para toda variable aleatoria $X \geq 0$, se tiene que:*

$$\mathbb{E}[X^p] = p\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)t^{p-1}dt = p\int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)t^{p-1}dt, \qquad p > 0.$$

Demostración. Por el teorema de Fubini y calculo se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^p] &= p\mathbb{E}\left[\int_0^X t^{p-1}dt\right] \\ &= p\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{(X>t)}t^{p-1}dt\right] \\ &= p\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)t^{p-1}dt. \end{aligned}$$

La prueba de la otra expresión es análoga. □

Lema 5. *Sea $p \geq 2$, entones la función $f(x) = |x|^p$ pertenece a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.*

Una prueba del siguiente lema puede encontrarse en [4, pág. 96].

Lema 6. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua si y sólo si:*

(i) Existe una sucesión de tiempos de paro $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que $T_n \nearrow \infty$ c.s.

(ii) Para toda $n \geq 1$, el proceso estocástico $(X_t^{T_n} \cdot \mathbf{1}_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ es una martingala continua y acotada.

Una prueba del siguiente Teorema puede encontrarse en [3, pág. 134].

Teorema 13 (Teorema de paro de Doob)**.** *Sean $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración tal que $\bigcap_{u>t} \mathscr{F}_u = \mathscr{F}_t$ para todo $t \geq 0$; σ y τ tiempos de paro con respecto a la misma filtración, con τ acotado.*

(i) Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es una submartingala continua por la derecha con respecto a $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces X_τ es integrable y

$$X_{\sigma\wedge\tau} \leq \mathbb{E}[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] \text{ c.s.}$$

El resultado sigue siendo válido para tiempos de paro no acotados τ si y sólo si X es uniformemente integrable.

(ii) Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala continua por la derecha con respecto a $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces X_τ es integrable y

$$X_{\sigma\wedge\tau} = \mathbb{E}[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] \text{ c.s.}$$

El resultado sigue siendo válido para tiempos de paro no acotados τ si y sólo si X es uniformemente integrable.

Teorema 14 (Desigualdad L_p de Doob)**.** *Sea $M = (M_t)_{t\in T}$ una martingala continua, donde T es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces*

$$\left\| \sup_{t\in T} |M_t| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in T} \|M_t\|_p. \quad \text{para todo } p > 1.$$

Una prueba del Teorema anterior puede encontrarse en [2, pág. 54].

Teorema 15 (Descomposición de Doob-Meyer)**.** *Una proceso estocástico X es una submartingala local continua si y sólo si admite la descomposición $X = M + A$, donde M es una martingala local continua y A es un proceso estocástico creciente localmente integrable continuo y adaptado a la filtración correspondiente. Además los proceso estocásticos M y A son únicos c.s.*

Una prueba del teorema anterior se puede encontrar en [3, pág. 493].

Referencias

[1] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve *Brownian motion and stochastic calculus* Second Edition, Springer, 1991.

[2] D. Revuz, Marc Yor *Continuous martingales and Brownian motion*, Third Edition, Springer, 1999.

[3] Kallenberg Olav *Foundations of Morden Probability*, Second Edition, Springer, 2001.

[4] Tudor Constantin *Procesos Estocásticos*, Tercera Edición, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[5] María Emilia Caballero, Begoña Fernández, David Nualart. Estimation of Densities and Applications. *Journal of Theoretical Probability, Vol. 11, No. 3,1998.*

[6] Huiyun Li, Junfen Mu & Zhichan Li (2011): A generalization of the Burkholder-DavisGundy inequalities, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 83:03, 233-240*