Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

VISCOSIDAD Y ENTROPÍA DE UN PLASMA DESDE LA FÍSICA DE HOYOS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MARCO ANTONIO ÁLVAREZ ALVARADO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

2013

FACULTAD DE CIENCIAS
COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA
Of. No. FCIE/CAL/358/13

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio, el Comité Académico de la Licenciatura en **Física** informa a usted que el día **19 de junio de 2013**, aprobó que el alumno

MARCO ANTONIO ÁLVAREZ ALVARADO

con número de cuenta **30100735-5**, presenta el trabajo titulado

Viscosidad y Entropía de un Plasma desde la Física de Hoyos Negros

como trabajo escrito correspondiente a la opción de **Tesis.**

Asimismo, este Comité informa a usted que el tutor y los sinodales autorizados para la dirección y revisión del trabajo arriba señalado son:

Presidente	Dr. Erick Leonardo Patiño Jáidar
Vocal	Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez
Secretario (Tutor)	Dr. Alberto Güijosa Hidalgo
Suplente	Dr. José Antonio Rafael García Zenteno
Suplente	Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

En consecuencia, este Comité solicita a usted se entregue al citado alumno la papelería que conforme a la normatividad aplicable debe llenar, se proceda a la elaboración de los votos aprobatorios y se dé inicio al proceso de revisión de estudios correspondiente.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 19 de junio de 2013
COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO
DE FISICA

DRA. GABRIELA MURGUÍA ROMERO

A mis padres con cariño:
Angelica Yolanda y Angel.

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco al mejor profesor que he tenido -Alberto Güijosa- por los cursos impartidos, por sus notas que fueron indispensables, por la paciencia, por la presión ejercida que me ayudó a crecer más académicamente; además, de aprender de su gran organización, y por el apoyo durante la elaboración de esta tesis.

Mi más sincero agradecimiento a dos personas cuyo cariño es incondicional, mis padres: Angel y Angelica Yolanda, quienes fueron obviamente indispensables para lograr mi carrera profesional. A mi mamá, por su gran amor y esfuerzo, siempre tratando de hacer lo mejor para mí. A mi papá, por sus pláticas y costumbres que me ayudaron a ser como soy, por sus esfuerzos para brindarme siempre lo mejor. A ambos por darme su apoyo sin pensar recibir algo a cambio.

A Fernanda agradezco su gratificante compañia , el apoyo brindado practicamente en toda la carrera, y el haber hecho más ligeras las presiones. Por las discusiones y análisis siempre rigurosos, los cuales nos condujo muchas veces a desviarnos de la senda que uno debe llevar para obtener mejores notas en los cursos, finalmente ahora vemos los resultados. Por el apoyo al estudiar juntos la dualidad y descubrir en consecuencia cosas fundamentales en la física, esta tesis es suya también. Mi gratitud a sus padres Doña Lourdes y Don Fernando por permitirme entrar a su hogar.

Agradezco con especial cariño a los compañeros de toda mi vida por su protección, y que me guiaron en gran parte a estudiar física; por nuestros juegos, pláticas motivantes, preguntas intrigantes y discusiones que contribuyeron a mi formación: mis hermanos Jonathan y Luis Angel.

Quiero agradecer también a mis abuelitos. Rosa y Odilon, personas infatigables cuya grandeza es única, por las enseñanzas que he tenido con sólo observar lo que han logrado, admiro lo que se puede alcanzar cuando dos personas viven en sincronía. Lupe y Lorenzo, a pesar de su ausencia estuvieron siempre pesentes a través de mi mamá.

Por último agradezco a mi segundo hogar la Universidad Nacional Autónoma de México, y en especial a la Facultad de Ciencias por abrirme sus puertas. Espero seguir creciendo con ella.

Índice general

Resumen

Este trabajo inicia con una revisión breve de la teoría cuántica de campos, para mostrar que es necesario implementar un método adicional para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte en QCD, puesto que el desarrollo perturbativo es inútil para realizar cálculos relacionados con la fuerza fuerte a bajas energías. La única herramienta que hasta hace poco se tenía para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte son métodos númericos conocidos como QCD en la red. Sin embargo, este método no es aplicable para estudiar propiedades dinámicas.

Presentamos la deducción heurística de la dualidad de Maldacena. La idea es que por un lado tenemos una teoría de partículas similar a QCD, que como sabemos vive en 3+1 dimensiones, y no incluye a la gravedad. Por el otro lado, tenemos a la teoría de cuerdas que entre otras cosas tiene gravedad, y vive en un espacio con mayor dimensionalidad. La propuesta de Maldacena es que, contrario a las apariencias, estas dos teorías son de hecho completamente equivalentes, y describen una misma realidad.[1]

Existe un diccionario para traducir entre los dos lenguajes diferentes que describen el mismo sistema físico, como lo dice la dualidad de Maldacena. En esta tesis se presentan algunas entradas de este diccionario que nos ayudarán a realizar el cálculo de la densidad de entropía y el coeficiente de transporte correspondiente a la viscosidad de corte de un plasma de gluones y materia exótica. La idea de estos cálculos fue mostrar que la dualidad de Maldacena es una herramienta poderosa, ya que cálculos difíciles en campos pueden mapearse a unos cálculos más sencillos en teoría de cuerdas. El cociente entre la viscosidad de corte y densidad de entropía del plasma de MSYM es sorprendente, pues los resultados obtenidos, aplicando esta correspondencia, son muy parecidos a datos experimentales en RHIC y LHC.

Los resultados presentados aquí de la entropía y la viscosidad, primero obtenidos por Son, Starinets y Policastro, provocaron mucha actividad para realizar cálculos de otras propiedades del plasma no abeliano de MSYM, y de otras teorías holográficas.

[1] La idea de la tesis es presentar la dualidad de Maldacena de una manera entendible para un estudiante de licenciatura, pues se desarrollan los conceptos suficientes para tal objetivo, ya que la literatura que existe es muy especializada para este nivel. El trabajo es entonces una opción para quienes por primera vez quieran estudiar dicha dualidad.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En la física se busca entender cómo es el funcionamiento de la naturaleza, para ello se recurre a un conjunto de principios. Ha resultado útil entender dichos principios con base en otros más elementales. A la vez estos conceptos elementales se tratan de entender razonando a partir de conceptos más básicos, y así sucesivamente. Esta idea de concatenación de principios cada vez más fundamentales ha llevado a la física a una mayor y mejor comprensión de la naturaleza.

En la actualidad, el desarrollo de la física ha acumulado gran cantidad de información, y el conocimiento adquirido nos lleva a deducir que, en la naturaleza, existen sólo cuatro fuerzas fundamentales: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

La mecánica clásica, cuyos principios básicos fueron establecidos por Newton, marca el comienzo de la física moderna, y representa el primer paso en la búsqueda de una teoría que describa todos los fenómenos con un conjunto mínimo de postulados. La mecánica newtoniana unificó las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos celestes y de los terrestres. Posteriormente Einstein determina que la fuerza gravitatoria es un efecto geométrico de un concepto unificado denominado *espaciotiempo*, donde considera al tiempo como una dimensión de la misma manera que una espacial, es decir, el tiempo no es absoluto. En la *relatividad general* se describe, entonces, a la gravedad como un efecto de la curvatura del espaciotiempo producida por la materia y la energía; a diferencia de la idea newtoniana donde sólo se postula que la gravedad es la atracción entre dos cuerpos masivos.

Por otro lado, el electromagnetismo fue formulado por Maxwell al demostrar que la electricidad y el magnetismo son aspectos distintos de un mismo fenómeno. Es decir, así como la masa era la fuente de la interacción gravitatoria; la carga eléctrica, es fuente tanto de la electricidad y el magnetismo dando como resultado un campo electromagnético. Una propiedad interesante del electromagnetismo que aparecerá en la teoría de cuerdas, es la *simetría de dualidad*. Si en las ecuaciones de Maxwell se intercambia el campo eléctrico por el campo magnético, y simultáneamente se intercambia la carga eléctrica (e) por la magnética (q), las ecuaciones no se modifican, en esta teoría.

En 1921, Kaluza pensó que las interacciones gravitatoria y electromagnética podrían tener un origen común. Postuló que en cinco dimensiones sólo hay gravedad, no hay electromagnetismo. Al reducir a cuatro dimensiones, el resultado fue sorprendente, se producen las ecuaciones gravitatorias, además de otro conjunto de ecuaciones que resultan ser las ecuaciones del campo electromagnético. La pregunta natural es qué pasaba con la dimensión extra; posteriormente, Klein mostró que esta dimensión es muy pequeña y está enrrollada. Este proceso de enrrollar dimensiones se conoce como *compactificación*. Pero, con el descubrimiento de las interacción fuerte y débil la teoría de Kaluza-Klein perdió mucho su atractivo: una teoría unificada debería contener cuatro fuerzas, no sólo dos. ¿Las cinco dimensiones eran insuficientes?

A inicios del siglo XX, se observó que el mundo atómico no funcionaba de la manera como la mecánica clásica establecía; además, la teoría de Maxwell no era adecuada para describir la radiación del atómo, y por tanto se tuvo que establecer nuevos principios. Por ejemplo, la materia a este nivel se modela en términos de partículas identificadas por sus propiedades como energía, carga y espín tomando, en ocasiones, valores discretos.

Otra unificación fue entre mecánica cuántica y relatividad especial. La idea de esta unificación es implementar las ideas de la mecánica cuántica a campos; a partir de este punto de vista, las partículas cuánticas relativistas se entienden como manifestaciones de estos campos. Esta unificación es llamada *teoría cuántica de campos*. Tal teoría llevó a entender que la interacción entre partículas, es debido al intecambio de otras partículas; además los infinitos o divergencias se eliminaron, y las propiedades físicas resultan definidas y finitas. A este proceso de sustración de infinitos se denomina *renormalización*. Desde el punto de vista teórico, encontrar teorías que no tengan infinitos parece ser un camino apropiado para avanzar en la búsqueda de una única teoría que unifique todos los fenómenos físicos.

Por otro lado, la fuerza débil explica la transmutación de algunas partículas, al igual que la radiactividad. En la teoría de Fermi, que describía las interacciones débiles, existía un problema, no era renormalizable. Se consideró que la fuerza débil no podía actuar instantáneamente, por tanto Weinberg y Salam propusieron la existencia de los bosones $W^{\pm}$ y Z, las mensajeras de la fuerza débil. Ésto no sólo convirtió a la teoría renormalizable, sino que permitió explicar además de las interacciones débiles las electromagnéticas. La nueva teoría unificada se llamó *Electrodébil*. Nuevamente una unificación resolvía problemas, y permitía explicar más fenómenos que los contenidos en la teoría previa.

En los años '60, además de los neutrones y protones aparecieron muchas otras partículas pesadas, llamadas hadrones, en las cuales actúa la fuerza fuerte. Tal fuerza ayuda a mantener unido al núcleo, y tiene como fuente una propiedad llamada *color*. Debido al exagerado número de hadrones Gell-Mann y Zweig propusieron que estas partículas estan constituidas de elementos fundamentales, llamados quarks. Con esos ingredientes la teoría funciona muy bien, pero a pesar de los intentos fue imposible aislar a los quarks. Por tanto, esta característica fue incorporada en la teoría moderna de la interacción fuerte, la *cromodinámica cuántica*, que prohibe a los quarks quedar libres, tal proceso es denominado *confinamiento*.

El razonamiento lógico del ser humano, siempre con la idea de minimizar principios, lo llevó a mostrar que las interacciones electrodébil y fuerte se describen con una teoría cuántica de campos basada en una gran cantidad de partículas, organizadas en una estructura de simetría llamada *grupo*. De la inmensa cantidad de estructuras posibles los datos experimentales han permitido seleccionar una, que se conoce como el *Modelo Estándar*. Por tanto, la combinación de teoría y experimento condujo a tres grupos de simetría, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Siguiendo con la idea reduccionista, uno podría pensar en una teoría de *Gran Unificación*: las tres interacciones (débil, fuerte y electromagnética) se funden en una sola, a partir de una energía muy alta, y evidencian sus diferentes identidades a energías menores. La energía predicha para esta unificación es muy alta (10^{16} GeV) comparada con la escala de unificación electrodébil ($\sim GeV$). El problema aquí es por qué si las fuerzas se unifican a una escala de energía tan alta las partículas conocidas son tan livianas. Una posible solución es considerar *Supersimetría*: para cada partícula de espín entero (bosón) que existe, hay otra de espín semientero (fermión) con la misma masa, e inversamente. Lamentablemente esta simetría no se ha observado aún en la naturaleza, pero podría suceder que la naturaleza fuera supersimétrica a escalas de energía altas, y que esta simetría estuviera rota a las escalas que podemos alcanzar en los aceleradores. Por tanto, en una teoría de gran unificación al introducir supersimetría se resolvería el problema de las jeraquías: en teorías unificadas supersimétricas es natural que algunas partículas sean livianas, aunque la escala natural de energía sea muy alta.

El Modelo Estándar y la relatividad general han superado todas las pruebas a las que han sido sometidas. Sin embargo, uno quisiera seguir con la idea de unificar estas dos teorías para tener una que describa completamente a la naturaleza. Pero existen problemas, por un lado, aunque la interacción nuclear fuerte está incluida en el Modelo Estándar, aparece como algo muy diferente de la fuerza electrodébil, no como parte de una descripción unificada. Además, este Modelo contiene muchas características que no son dictadas por principios fundamentales, sino que deben ser tomadas del experimento; y no contiene a la gravedad. Por otro lado, la relatividad general funciona bien clásicamente, pero pierde su validez a energías altas. Los efectos cuánticos de la gravedad se hacen relevantes a la energía de Planck ($10^{19}\ GeV$), una energía tan grande que nos coloca frente a un nuevo problema, no podemos suponer que podrá alcanzarse experimentalmente. Además, existen obstáculos matemáticos muy fuertes para describir la gravedad en el mismo lenguaje que las otras fuerzas. Por ejemplo, se puede aplicar las ideas de teoría cuántica de campos a la relatividad general, pero el resultado es una teoría no renormalizable. Por tanto, las dos grandes teorías de la física, relatividad general y mecánica cuántica, resultan incompatibles en el contexto de las teorías de partículas. Éstos son algunos de los problemas por resolver, y para ello hubo que postular nuevos principios y desarrollar nuevas ideas, como la *Teoría de Cuerdas*.

1.1. Teoría Cuántica de Campos.

La Teoría Cuántica de Campos [1] (QFT, por sus siglas en inglés) es un lenguaje para describir el comportamiento de partículas cuánticas relativistas y sus interacciones.

Una teoría cuántica de campos es el resultado de aplicar las reglas de cuantización al sistema de una teoría clásica de campos. Ésta última describe un tipo particular de sistema, cuyas coordenadas son campos: cantidades físicas que pueden tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante de tiempo, $\phi(x) \equiv \phi(t, \vec{x})$. La reglas de cuantización dictan que cada una de estas coordenadas se promueven a un operador. Ésto nos lleva a identificar los estados cuánticos de un campo con un sistema de partículas cuánticas idénticas cuyo número no es necesariamente constante.

En una QFT, se tiene que las partículas son los cuantos del campo, que corresponden a pequeñas fluctuaciones cuánticas por encima del valor preferido del campo. El valor preferido del campo corresponde a su configuración de mínima energía, que es el estado denominado *vacío*, denotado por $|0\rangle$. Conviene separar el campo de la siguiente manera,

$$\hat{\phi}(x) = \bar{\phi}(x) + \hat{\phi}_f(x), \tag{1.1}$$

donde $\bar{\phi}(x) \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle$ es el valor de fondo seleccionado, y las fluctuaciones son alrededor de tal fondo, correspondientes al campo $\hat{\phi}_f(x)$.

Si la teoría de campos que se cuantiza es *no lineal*, las partículas que se obtienen interaccionan entre sí. En estas teorías, las ecuaciones de campo son no lineales, que provienen de un lagrangiano con términos cúbicos o más altos, acompañados de coeficientes, g, denominadas *constantes de acoplamiento* que controlan la intensidad de las interacciones; por tanto, en el caso libre $g = 0$, es decir, en la acción sólo existen términos cuadráticos. La no linealidad de las ecuaciones nos lleva al problema que en general no se pueden resolver de manera exacta. Sin embargo, si las interacciones son suficientemente débiles, $g \ll 1$, es posible *incorporar* estas interacciones a través de un *desarrollo perturbativo*, es decir, expresando cada cantidad física como una serie de Taylor en potencias de las constantes de acoplamiento.

La cantidades físicas que nos interesa calcular en una QFT son la generalización de los propagadores de mecánica cuántica, es decir, las cantidades que representan la amplitud de la probabilidad de empezar con cierto número de partículas en algunos puntos del espaciotiempo y terminar con otro número en los sitios restantes. Tales objetos son llamados *funciones de correlación,*

$$G_n(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \langle 0|T\{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)\}|0\rangle, \tag{1.2}$$

donde T especifica el orden temporal, x_i^0 aumenta de derecha a izquierda.

Como mencionamos, al incorporar interacciones es posible implementar el desarrollo perturbativo para hacer cálculos de cantidades físicas, en particular de funciones de correlación, pero sólo es un buen método para cuando la teoría está débilmente acoplada, $g \ll 1$, ya que es una buena aproximación quedarnos sólo con unos cuantos términos; a diferencia de cuando la teoría está fuertemente acoplada, $g \gg 1$, el desarrollo perturbativo se vuelve completamene inútil, es decir, perdemos nuestro método de cálculo, y de visualización (cada término, en la serie, representa un proceso en el espacio-tiempo, un diagrama de Feynman).

Vale la pena hacer una observación: aun en el caso de interacciones débiles, con nuestro método de cálculo no es posible obtener toda la información física, puesto que la serie de Taylor no converge. Por ejemplo, al considerar la teoría cuya ecuación de movimiento es

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi - m^2 \varphi + g\varphi^3 = 0,$$

una solución exacta (y estática) es

$$\varphi(x) \equiv \frac{m}{\sqrt{g}} \tanh\big(\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_c)\big).$$

Se puede mostrar que esta configuración tiene una densidad de energía (por encima de la del vacío, $V(\varphi = \pm\frac{m}{\sqrt{g}}) = 0$) localizada en $x \simeq x_c$,

$$\varepsilon(x) = \frac{m^4}{2g} \text{sech}^4\big(\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_c)\big),$$

distribuida de tal manera que la energía total es finita:

$$E \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \varepsilon(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^2}{g} \gg m$$

donde m es la masa para partículas perturbativas. Este resultado no es posible obtenerlo estableciendo un fondo trivial y trabajando con una serie de Taylor en potencias de g. Estas soluciones *no perturbativas* son ejemplos de objetos llamados *solitones*: soluciones estáticas con energía finita, es decir, excitaciones macróscopicas que se mantienen localizadas, debido a la interacción del campo consigo mismo. Los solitones nos muestran que el campo es el concepto primario, y las partículas son sólo un tipo de excitaciones de él. Para mayores detalles ver [2].

Hemos mostrado que tenemos un problema, teórico, para realizar cálculos en sistemas cuánticos en acoplamento fuerte. En las siguientes secciones veremos que existen sistemas en la naturaleza que se encuentran interaccionando fuertemente.

1.2. La Electrodinámica Cuántica

Ahora, presentaremos a la Electrodinámica Cuántica y la Cromodinámica Cuántica (QED y QCD, por sus siglas en inglés), preguntándonos si es suficiente nuestro método perturbativo en estas teorías para describir a las interacciones electromagnética y fuerte.

Se tiene que QED y QCD tienen la estructura de una teoría de norma. Las *teorías de norma* son QFT que se basan en introducir transformaciones locales pertenecientes a un grupo de simetría interna. Las teorías de norma usan lagrangianos, tales que en cada punto del espacio es posible aplicar transformaciones diferentes, y aun así el lagrangiano es invariante, en ese caso se dice que el lagrangiano presenta *invariancia local*. Es decir, un lagrangiano con simetría de norma permite escoger ciertos grados de libertad internos de una manera en una región del espacio, y de otra en una región distinta del espacio, sin afectar a la primera región. Matemáticamente, la invariancia de norma significa que el lagrangiano que describe el campo es invariante bajo la acción de un grupo de Lie, en cada punto, llamado grupo de transformaciones de norma. Ésto lleva a introducir un campo que transforma de manera particular, denominado *campo de norma*. Desde el punto de vista físico, los campos de norma se manifiestan en forma de partículas bosónicas sin masa (bosones de norma). Físicamente una transformación de norma es una transformación de algún grado de libertad que no modifica ninguna propiedad física observable. Toda la información física está contenida en cantidades invariantes de norma.

Consideremos primero QED, cuyo campo fermiónico es un campo de Dirac $\psi(x) \equiv \psi_\alpha(x)$, donde $\alpha = 1, 2, 3, 4$ es el índice espinorial (asociado al grupo de Poincaré $\equiv$ Lorentz + traslaciones espaciotemporales). Tal teoría está descrita por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

$$\text{con} \qquad D \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \quad \text{y} \quad F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu]$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac y $F_{\mu\nu}(x)$ es llamada la intensidad de campo. Notar que la derivada covariante, D, contiene la infomación del acoplamiento entre el campo de Dirac $\psi(x)$ y el campo de norma $A_\mu(x)$ (es decir, el campo de Maxwell) con constante de acoplamiento q.

El lagrangiano $\mathcal{L}_{\rm QED}$ es invariante bajo las transformaciones de norma correspondientes al grupo de Lie abeliano $U(1)$, es decir, por transformaciones $U(x) \equiv e^{iq\theta(x)}$, y es por ello que QED es una *teoría de norma abeliana*. Tenemos entonces que

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) = U(x)\psi_\alpha(x), \tag{1.4}$$

mientras que el campo de norma transforma bajo $U(1)$ como

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x). \tag{1.5}$$

Por tanto, en QED los electrones (o antielectrones), descritos por el campo de Dirac $\psi(x)$, interactúan por medio de fotones, correspondientes al campo de norma $A_\mu(x)$. Los electrones pueden también autointeractuar, y por tanto se vuelven objetos más complicados, una "nube" de particulas virtuales que aparecen y desaparecen. Es por ésto, que las características medibles (masa, carga eléctrica, etc.) del electrón físico no coinciden con los parámetros (*"desnudos"*) que aparecen en el lagrangiano de la teoría. Es aquí, donde requerimos información proveniente de mediciones experimentales, puesto que la teoría no proporciona esta información por primeros principios. Es decir, se sustituyen los parámetros desnudos del lagrangiano por los parámetros físicos provenientes del experimento, asociada a una escala energética μ, correspondiente a la escala involucrada en las mediciones de los parámetros.

Tenemos, por ejemplo, que la constante de acoplamiento g depende de la escala energética μ a la cual se está observando, es decir, $g(\mu)$. Con base en cálculos perturbativos, uno puede obtener como las constantes de acoplamiento dependen de la escala de energía μ, tal información está codificada en la denominada *función beta*:

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}; \tag{1.6}$$

por tanto, si una teoría es invariante de escala su función beta debe ser igual a cero.

En el caso de QED, la función beta es

$$\beta(\alpha) \equiv \mu\frac{d\alpha}{d\mu} \approx +\frac{2\alpha^2}{3\pi},$$

donde $\alpha \equiv \frac{q^2}{4\pi}$ es la constante de estructura fina. De aquí, uno puede obtener

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_i)}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha(\mu_i)\ln\frac{\mu}{\mu_i}}. \tag{1.7}$$

Esta ecuación es válida sólo para cuando $\mu \gg m_e$, es decir, para distancias menores que el radio de Compton del electrón (el tamaño de la nube de partículas virtuales), $r_e \equiv \frac{1}{m_e} \approx 2 \times 10^{-12}$ m. Para $\mu < m_e$, α se aproxima exponencialmente al valor familiar $\frac{1}{137}$. De esta manera, se puede establecer a $\mu_i = m_e$, y entonces $\alpha(\mu_i) \sim \frac{1}{137}$.

La fórmula dice que q aumenta logarítmicamente con la energía (equivalentemente disminuye con la distancia). Ésto es debido a que $\beta > 0$. Como se puede observar existe una energía finita,

$$\mu_{\text{div}} = \mu_i \exp\big(\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_i)}\big), \tag{1.8}$$

donde α sería divergente, para estas energías se tiene que $q(\mu) \geq 1$, y no podemos confiar en tal ecuación, pues invalida el desarrollo perturbativo, y entonces efectos de acoplamiento fuerte podrían modificar el análisis.

La conclusión que tenemos es que el análisis perturbativo en la electrodinámica cuántica es suficiente para describir el comportamiento cuántico de los electrones, puesto que la energía μ_{div} donde falla nuestro método de cálculo es del orden $\sim 10^{277}$ GeV (mucho mayor que la escala electrodébil), que no se alcanza en ningún lugar del Universo.

1.3. La Cromodinámica Cuántica.

El siguiente caso a analizar es QCD, es una teoría de norma *no abeliana*, es decir, las transformaciones de norma corresponden a un grupo de Lie no abeliano SU(3), matrices $U_{cc'}$ donde $c, c' = 1, 2, 3$ (etiquetas asociadas al color: rojo, verde y azul) unitarias y especiales, tal grupo de simetría local lleva a la existencia de un campo de norma matricial, $A^{\mu}_{cc'}(x)$, correspondiente a la partícula mensajera de la interacción fuerte, es decir, el gluón. Por tanto en QCD, el campo de Dirac tranforma bajo SU(3) como tripletes, es decir,

$$\psi_{\alpha c}(x) \to \psi'_{\alpha c'}(x) = U_{c'c}(x)\psi_{\alpha c}. \tag{1.9}$$

A partir de $A_\mu(x)$ se puede definir, para QCD, la intensidad de campo

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig_{\text{YM}}}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_{\text{YM}}[A_\mu, A_\nu], \tag{1.10}$$

donde g_{YM} corresponde a la constante de acoplamiento de la interacción fuerte. Se puede mostrar que en el caso no abeliano el término cinético que es invariante de norma es $\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]$, a partir de éste, uno puede construir la teoría invariante de norma más sencilla correspondiente a la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)], \tag{1.11}$$

tales teorías son llamadas *de Yang-Mills*. Hay que notar que esta teoría no es libre (ver $F_{\mu\nu}$), es decir, los gluones interactúan entre sí, a diferencia de los fotones.

Finalmente uno puede escribir la densidad lagangiana de la cromodinámica cuántica

$$\mathcal{L}_{QCD}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)] + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{1.12}$$

donde, de nuevo, la derivada covariante $D \equiv \partial_\mu + ig_{\mathrm{YM}}A_\mu(x)$ da lugar al acoplamiento entre el campo de Dirac $\psi_{\alpha c}(x)$ y el campo gluónico $A^\mu_{cc'}(x)$.

En general, la función beta para teorías no abelianas con grupo de norma $SU(N)$ y N_f fermiones de Dirac (sabores de quarks) es

$$\beta(\alpha) \approx -\frac{1}{3}(11N_c - 2N_f)\frac{\alpha^2}{2\pi} \tag{1.13}$$

donde $\alpha_{\mathrm{YM}} \equiv \frac{g^2_{\mathrm{YM}}}{4\pi}$. Tenemos que para el caso de QCD, $N = 3$ y $N_f = 6$, la función beta es *negativa*, es decir, la constante de acoplamiento decrece con la energía μ (aumenta con la distancia). Integrando la función beta se tiene

$$\alpha_{\mathrm{YM}}(\mu) = \frac{\alpha(\mu_i)}{1 + \frac{7}{2\pi}\alpha_{\mathrm{YM}}(\mu_i)\ln\frac{\mu}{\mu_i}}, \tag{1.14}$$

por tanto, $\alpha_{\mathrm{YM}}(\mu) \to 0$ al aumentar la energía μ (de escalamiento), fenómeno que se conoce como *libertad asintótica*. Por tanto, el método perturbativo es útil a altas energías. Pero, para energías bajas la constante de acoplamiento aumenta; de hecho se puede establecer que la energía, Λ_{QCD}, para cuando QCD se vuelve fuertemente acoplada es la energía donde α_{YM} se vuelve divergente, es decir,

$$\Lambda_{\mathrm{QCD}} \equiv \mu_i \exp\Big(-\frac{2\pi}{7\alpha_{\mathrm{YM}}(\mu_i)}\Big). \tag{1.15}$$

Experimentalmente se ha determinado que es del orden de 200 MeV (o equivalentemente, distancias de $5 \times 10^{-15}m$).

La conclusión sobre la intensidad de la interacción fuerte, a partir de la teoría, está relacionada con el hecho experimental de que a bajas energías no hemos detectado quarks ni gluones libres, sino sólo partículas compuestas, llamados *hadrones*, de los ingredientes básicos de la teoría. Los hadrones tienen la peculiaridad de tener carga de color neutra; por ejemplo *mesones* (quark-antiquark con colores opuestos) y *bariones* (tres quarks con colores distinto). Este fenómeno de la naturaleza de los quarks y gluones de armar combinaciones neutras de color se denomina *confinamiento*.

Tenemos entonces una conclusión poco alentadora sobre que *sí* es necesario implementar un método adicional para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte en QCD, puesto que el desarrollo perturbativo es inútil para realizar cálculos relacionados con fenómenos, bajo la fuerza fuerte, a bajas energías.

Por ejemplo, un protón está constituido por tres quarks dos arriba (u) y uno abajo (d) lo que suma aproximadamente 11 MeV, sin embargo la masa de un proton en reposo es aproximadamente 940 MeV, ésto significa que la masa del protón es cerca de 85 veces la de sus constituyentes, y entonces se espera entender qué forma la fracción desconocida de la masa dentro del protón (o el neutrón), con el entendimiento del régimen de acoplamiento fuerte.

La única herramienta que se tiene (o deberíamos decir que se tenía) para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte son métodos númericos conocidos como *QCD en la red* [3]. Estos cálculos utilizan un espaciotiempo discretizado y acotado con el fin de tener sólo un número finito de variables dinámicas. A partir de él, ha sido posible hacer cálculos de algunas propiedades termodinámicas, y el espectro de masas de algunos hadrones [4]. Sin embargo, este método no es aplicable para estudiar propiedades dinámicas, debido a su formulación euclidiana (puesto que se pierde la estructura causal).

1.4. El Plasma de Quarks y Gluones.

Considerando la predicción de QCD, uno esperaría que al aumentar la temperatura a un gas de hadrones, los quarks y gluones constituyentes de estos hadrones interaccionarían cada vez menos hasta el momento en que la temperatura sería suficientemente alta como para no inducir confinamiento. Ésta nueva fase de la materia, donde los quarks y los gluones no están obligados a encontrarse dentro de combinaciones neutras de color, es denominada *Plasma de Quarks y Gluones* (QGP).

A partir de 2005 tal temperatura, $T_c \sim \Lambda_{QCD}$ ($\approx 1 \times 10^{12} K$), fue alcanzada experimentalmente mediante colisiones de iones pesados relativistas, primero en el Colisionador de Iones Pesados Relativistas (RHIC) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven [5] con colisiones de núcleos de oro, y posteriormente en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN con núcleos de plomo. En estos experimentos colisionan $\sim$ 400 nucleones con una energía de $100 \frac{GeV}{nucleon}$ en RHIC y $2.76 \frac{TeV}{nucleon}$ en LHC. Las mediciones permitieron deducir que en una etapa intermedia se logran densidades de energía suficientemente altas para alcanzar el desconfinamiento ($\sim$ 5 y 15 $\frac{GeV}{fm^3}$ en RHIC y LHC respectivamente), de modo que durante un tiempo muy breve ($\sim 10^{-22}$ s), y en una región espacial muy pequeña ($\sim 10^{-14}$ m) se tiene un plasma de quarks y gluones.

A pesar de su corta duración, mediciones de la rapidez media de los hadrones indican que el sistema está en equilibrio térmico a una temperatura aproximada T_c, y por tanto algunas de sus propiedades pueden ser explicadas en términos de conceptos termodinámicos. El comportamiento hidrodinámico se puede caracterizar por *la razón entre viscosidad de corte* (η) *y la densidad de entropía* (s), que resulta ser una medida de la viscosidad por grado de libertad. Esta cantidad tiene importancia, puesto que en sistemas que interactúan débilmente (como por ejemplo un gas) esta razón es grande, mientras que en el régimen opuesto, es decir, cuando el sistema está fuertemente acoplado (por ejemplo un líquido), se espera que sea pequeña. *Los resultados experimentales indican que el plasma de quarks y gluones tiene una razón* $\frac{\eta}{s}$ *muy pequeña*. Por tanto, contrario a los que muchos esperaban, el QGP producido en RHIC y LHC *está fuertemente acoplado*. Concluimos entonces que para tener confinamiento es *necesario mas no suficiente* tener acoplamiento fuerte.

El estudio del plasma de quarks y gluones es relevante porque nos enseña más sobre el comportamiento de la materia en acoplamiento fuerte. Por ejemplo, las partículas del QGP se comportan como desconfinadas por una fracción de segundo, los fisicos esperan, a partir de estudiar el QGP comprender algo acerca de cómo funciona el confinamiento.

Además, se cree que una billonésima de segundo después del Big Bang el universo era una sopa caliente de partículas fundamentales como este plasma; y que al expandirse el universo disminuyó su tempertura, y los quarks se unieron para formar los primeros hadrones, este proceso no se sabe como ocurrió, y de igual forma se espera que estudiando el QGP se pueda comprender.

Como conclusión final tenemos que en QED nuestra herramienta teórica es suficiente para el estudio de la interacción de partículas con carga eléctrica. Por otro lado, QCD es una teoría cuya descripción perturbativa es insuficiente para describir completamente la materia bajo la fuerza fuerte, puesto que existen situaciones a bajas energías, en la naturaleza, donde la herramienta de cálculo en QCD es inútil. En estos casos los cálculos en la red son útiles para determinar propiedades estáticas (por ejemplo, el espectro de masas de los hadrones y la entropía del QGP), pero no dinámicas (como amplitudes de dispersión y la viscosidad del QGP).

En el régimen de acoplamiento fuerte es donde la teoría de cuerdas, y en específico la dualidad de Maldacena, nos proporcionan herramienta teórica para hacer cálculos. En los siguientes capítulos presentaremos la formulación de tal dualidad, a partir de la teoría de cuerdas, y mostraremos su aplicación al calcular el cociente de viscosidad y entropía de un plasma de gluones.

Capítulo 2

LA DUALIDAD DE MALDACENA.

Como se mencionó, el método perturbativo de cálculo en QCD, y métodos númericos como QCD en la red son insuficientes para entender el plasma de quarks y gluones. Sin embargo, progresos en teorías de supercuerdas han proporcionado una herramienta teórica para estudiar plasmas no abelianos calientes interactuando fuertemente, similares al plasma de QCD. Esta nueva perspectiva extrae propiedades del plasma correspondiente, a partir del estudio de hoyos negros, y por tanto podemos encontrar respuestas relacionadas al QGP, por medio de cálculos sencillos en relatividad general clásica. Tal herramienta es llamada[1] *correspondencia o dualidad de Maldacena, AdS-CFT, norma-gravedad o bulto-frontera* [6].

Dicha dualidad fue descubierta por Juan M. Maldacena en 1997 [7]. La idea de tal trabajo es que por un lado tenemos una teoría de partículas similar a QCD, que como sabemos vive en 3+1 dimensiones, y no incluye a la fuerza de gravedad. Por el otro lado, tenemos a la teoría de cuerdas que entre otras cosas tiene gravedad, y vive en un espacio con mayor dimensionalidad. La propuesta de Maldacena es que, contrario a las apariencias, estas dos teorías son de hecho completamente equivalentes, y describen una misma realidad. Tenemos entonces dos lenguajes diferentes para describir el mismo sistema físico, y existe un diccionario que nos permite traducir de una teoría a la otra. Una de las ventajas de ésto, es que cálculos que son díficiles o quizás imposibles de realizar en teorías tipo QCD se pueden hacer en teoría de

[1] Los diversos nombres tendrán sentido a través de la lectura de la tesis.

cuerdas, y utilizar esta dualidad para mapear los resultados.

Con el descubrimiento de Maldacena se abre una nueva posibilidad de interpretar el Universo. Y plantea un nuevo paradigma: la equivalencia entre sistemas con y sin gravedad.

En la siguiente sección revisaremos algunos resultados de teoría de cuerdas con el propósito de entender la deducción de la dualidad de Maldacena.

2.1. Teoría de cuerdas

En la teoría de cuerdas (ver p. ej. [8], [9]) se postula que todas y cada una de las partículas elementales de nuestro Universo son en realidad manifestaciones diferentes de un objeto más fundamental: un diminuto filamento que podemos visualizar como una liga muy pequeña y delgada a la que llamamos “cuerda” . Estas cuerdas pueden moverse como un todo, y debido a su naturaleza unidimensional pueden además vibrar de diferentes maneras. En una descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula. Con esta idea se presenta una ruptura con las teorías previas que modelaban la materia en términos de partículas puntuales.

Tenemos, entonces, que una única cuerda fundamental da lugar a un número infinito de modos de vibración que corresponden a distintos tipos de partículas. Entre estos modos existe uno cuyas propiedades son equivalentes a la partícula mensajera de la fuerza gravitatoria, el gravitón. Por tal motivo, se cree que la teoría de cuerdas es un buen candidato para ser una teoría de gravedad cuántica.

En teoría de cuerdas la dimensionalidad del espaciotiempo es una predicción, una consecuencia de la consistencia matemática. En las teorías de cuerdas más sencillas el resultado es de 26 dimensiones. Estas cuerdas, sólo tienen grados de libertad bosónicos no incluyen fermiones, y entonces no pueden explicar la materia que conocemos. Además, de los modos de vibración que aparecen hay unos que corresponden a partículas cuya masa es imaginaria, llamadas taquiones [8].

Todos estos problemas se solucionaron agregando supersimetría a la teoría, es decir incorporando compañeros fermiónicos para cada bosón. Así, se encontraron otras formulaciones que no contienen taquiones, y no requieren tantas dmensiones para el espaciotiempo. Éstas son las cinco *teorías de supercuerdas*, que viven en 10 dimensiones espaciotemporales. Tales teorías se distinguen porque contienen cuerdas cerradas y abiertas (*Tipo I*) o sólo cuerdas cerradas (*Tipo IIA, IIB*, *heterótica* $SO(32)$ y *heterótica* $E_8 \times E_8$). Las siglas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ indican el grupo de simetría, las letras A y B se refieren al tipo de supersimetría, y los números I y II la cantidad de supersimetrías.

2.2. La teoría de cuerdas IIB

Para nuestros intereses será suficiente concentrarnos en la *teoría de cuerdas tipo IIB* en 9+1 dimensiones. A nivel de hoja de mundo tenemos diez campos escalares X^μ y veinte espinores de Majorana-Weyl, diez con quiralidad derecha ψ^μ y diez con quiralidad izquierda $\bar{\psi}^\mu$. Debido a que dicha teoría consta de sólo cuerdas cerradas, la componente espacial de la hoja de mundo es un círculo. Los campos escalares satisfacen condiciones de frontera periódicas, en dicha coordenada, y los espinores tienen la opción de satisfacer condiciones de frontera periódicas o antiperiódicas, es decir,

$$\begin{aligned} \psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) &= \psi^\mu(\sigma, \tau) \qquad \forall\mu, \\ \psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) &= -\psi^\mu(\sigma, \tau) \qquad \forall\mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde τ y σ son los parámetros de la hoja de mundo: la trayectoria que describen la cuerdas por su movimiento en el espaciotiempo. El primer caso se conoce como condición de frontera tipo Ramond (R) y el segundo como Neveu-Schwarz (NS). Las mismas opciones ocurren para $\bar{\psi}^\mu$. Para una teoría de supercuerdas consistente, necesitamos considerar ambas condiciones de frontera al momento de la cuantización. Ésto tiene como consecuencia que obtenemos cuatro sectores que describen los diferentes estados de la cuerda. Los estados correspondientes a los sectores NS-NS y R-R resultan ser bosónicos, mientras que los correspondientes a los sectores NS-R y R-NS son fermiónicos.

Al cuantizar dichas cuerdas, se genera una torre infinita de estados con masas,

$$m^2 = \frac{4N}{l_c^2} \qquad N = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.2}$$

donde l_c es un parámetro de la teoría, la longitud característica de las cuerdas. A inicios de 1970 cuando la teoría de cuerdas fue formulada para ser una teoría de hadrones, la longitud de la cuerda se supuso comparable con la escala nuclear. Ahora, se piensa que la teoría de cuerdas es una teoría de las fuerzas fundamentales, y entonces la longitud de la cuerda es normalmente considerada mucho menor que la escala nuclear. Entonces, para modelos de unificación (más allá del modelo estándar) se tiene que $10^3 GeV < m_c \equiv l_c^{-1} < 10^{19} GeV$. Para aplicaciones a QCD, $m_c \equiv l_c^{-1} \sim 1GeV$.

Debido al número infinito de modos de vibración en la teoría de cuerdas consideraremos, entonces, una teoría efectiva a bajas energías ($E < m_c$), ésto quiere decir energías mucho más bajas que la escala de la cuerda $\frac{1}{l_c}$, por tanto sólo los estados de la cuerda sin masa pueden ser excitados. Los estados no masivos ($N = 0$), resultan ser idénticos a estados de partículas correspondientes a los siguientes campos:

-Sector NS-NS (Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz)
$\varphi(x^M)$ Campo del dilaton
$h_{MN}(x^L)$ Métrica
$B_{MN}(x^L)$ Campo Kalb-Ramond

-Sector R-R (Ramond-Ramond)
$C(x^M)$ Campo del Axión
$C_{MN}(x^L)$ 2-forma R-R
$C^+_{MNRP}(x^L)$ 4-forma autodual

-Sector NS-R y R-NS
$\lambda^1_{S'}$, $\lambda^2_{S'}$ 2 Dilatinos (espinores Majorana-Weyl con la misma quiralidad)
χ^1_{MS}, χ^2_{MS} 2 Gravitinos (espinores Majorana-Weyl con quiralidad opuesta a los dilatinos)

donde $M, N, L, R, P, S = 0, 1, \cdots, 9$. Los campos B_{MN}, C, C_{MN} y C^+_{MNRP} son campos de norma generalizados.

Después de mostrar el espectro de estados (no masivos) de esta teoría efectiva, por orden lógico, lo que sigue es determinar la manera en que estas fluctuaciones interactúan entre sí. Las interacciones están controladas por la constante de acoplamiento de cuerdas, g_c, que resulta estar relacionada con el valor de fondo del campo del dilatón,

$$g_c = e^{\varphi}. \tag{2.3}$$

Tenemos, entonces, una teoría efectiva constituida por campos no masivos, y su acción la expresaremos como:

$$S_{IIB,ef} = S_{\text{SUGRA}} + S_{\alpha'} \tag{2.4}$$

donde el primer término define la teoría de campos conocida como *Supergravedad (SUGRA) Tipo IIB en 9+1 dimensiones*. Y la parte expresada por $S_{\alpha'}$ está asociada a correcciones a la gravedad de Einstein.

En el marco de Einstein, la acción de Supergravedad tiene la forma

$$S_{\text{SUGRA}} = \int dx^{10} \underbrace{\sqrt{-g}\Big(R}_{Einstein-Hilbert} -\frac{1}{2}(\partial_M\varphi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\varphi}H_{MNP}H^{MNP} + ...\Big) \tag{2.5}$$

donde $H_{MNP} \equiv \frac{1}{3!}\partial_{[M}B_{NP]}$ (los corchetes indican antisimetrización de los índices) es la intensidad de campo de Kalb-Ramond B_{MN}.

La acción que se denotó con $S_{\alpha'}$ contiene una serie infinita de correcciones con derivadas de los campos de SUGRA. Pero, por análisis dimensional, estos términos contienen potencias de $l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ [2], con α' la llamada pendiente de Regge. Tenemos, entonces, que para $El_c \ll 1$ (o, equivalentemente, $l_c \to 0$ con E fija) la teoría de cuerdas IIB se reduce a Supergravedad IIB.

La teoría de cuerdas tiene una gran variedad de soluciones clásicas solitónicas; entre ellas existen unas equivalentes a hoyos negros, pero extendidos. Se les conoce como *branas negras*, y su descripción como soluciones a las ecuaciones puramente de supergravedad es apropiada cuando la curvatura del espacio ($\partial h_{MN} \propto \frac{1}{R}$, donde R es el radio de curvatura) sea pequeña comparada con la longitud de las cuerdas, ($l_c \ll R$), y por tanto las correcciones cuerderas son insignificantes ($S_{\alpha'} \sim 0$). Estas soluciones pueden perturbarse y entenderse desde un análisis perturbativo, a partir de cuerdas cerradas, es decir, considerando pequeñas fluctuaciones cuánticas de los valores de fondo en cuestión.

La solución que más nos va a interesar son los fondos descubiertos por Horowitz y Strominger en 1991 [10] mencionados arriba, *p-branas negras*:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}}\Big(- f(r)dt^2 + \sum_{i=1}^{p} dx^i dx^i\Big) + \sqrt{H(r)}\Big(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2_{8-p}\Big) \tag{2.6}$$

$$e^{\varphi} = g_c H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \tag{2.7}$$

[2]Estaremos utilizando unidades naturales $c = \hbar$=1

$$C_{012\cdots p} = \zeta^{-1} g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}), \tag{2.8}$$

donde

$$H(r) \equiv 1 + \zeta \Big(\frac{R}{r}\Big)^{7-p} \tag{2.9}$$

con $0 \leq \zeta \leq 1$ un parámetro llamado de "no extremalidad," y R es conocido como radio de carga,

$$R^{7-p} \equiv r_H^{7-p} \Big(\frac{\zeta}{1-\zeta^2}\Big), \tag{2.10}$$

mientras que

$$f(r) \equiv 1 - \Big(\frac{r_H}{r}\Big)^{7-p}, \tag{2.11}$$

donde r_H es el radio del horizonte de eventos. Estamos considerando coordenadas cartesianas para $x^1, ..., x^p$ y esféricas para $x^{p+1}, ..., x^9$.

Hay que notar que la solución es independiente de $t, x^1, ..., x^p$, tiene simetría esférica en la S^{8-p}, se reduce a Minkowski^{9+1} para $r \gg R, r_H$ y tiene un horizonte de eventos en $r = r_H$ con topología $R^p \times S^{8-p}$. Este fondo describe entonces a un objeto solitónico de la teoría de cuerdas, que es una versión extendida en p dimensiones de un agujero negro asintóticamente plano ($r \to \infty$ nos lleva lejos del solitón). Debido a que el campo $C_{012...p}$ está encendido, el objeto posee carga "eléctrica" Ramond-Ramond:

$$Q = \frac{(7-p)\Omega_{8-p}}{(2\pi)^{7-p} g_c} \Big(\frac{R}{l_c}\Big)^{7-p}, \qquad \text{donde} \qquad \Omega_{8-p} = \frac{2\pi^{\frac{9-p}{2}}}{\Gamma(\frac{9-p}{2})} \tag{2.12}$$

es el volumen de la esfera $(8-p)$-dimensional, que rodea a la brana negra. Y

$$R^{7-p} = c_p g_c Q l_c^{7-p}, \qquad \text{donde} \qquad c_p = (2\sqrt{\pi})^{5-p} \Gamma\bigg(\frac{7-p}{2}\bigg). \tag{2.13}$$

La masa de la brana negra es

$$M = \frac{Q}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} \bigg(\frac{r_H}{R}\bigg)^{7-p} \bigg(\frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{1}{7-p}\bigg) V_p \tag{2.14}$$

A partir del área del horizonte (relación de Bekenstein-Hawking), y la gravedad superficial se puede calcular respectivamente la entropía y temperatura de la p-brana negra:

$$S = \frac{\Omega_{8-p} V_p r_H^{8-p}}{4 G_N \sqrt{1-\zeta^2}}, \tag{2.15}$$

$$T_H = \frac{(7-p)\sqrt{1-\zeta^2}}{4\pi r_H}. \tag{2.16}$$

Además, del álgebra de supersimetría se puede deducir la siguiente desigualdad, la cual nos permite evitar tener una singularidad desnuda,

$$M \geq \frac{QV_p}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \tag{2.17}$$

Ésta es llamada una cota BPS, que nos dice que dada una carga RR implica tener una masa mínima.

La solución que satura la cota (es decir, que tiene justamente la masa mínima para la carga dada) se conoce como *p-brana negra extremal*, y se obtiene en el límite $r_H \to 0$, $\zeta \to 1$ con $R^{7-p} \equiv r_H^{7-p} \frac{\zeta}{1-\zeta^2}$ fijo:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}}\Big(- dt^2 + \sum_{i=1}^{p} dx^i dx^i\Big) + \sqrt{H(r)}\Big(dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2\Big) \tag{2.18}$$

$$e^{\varphi} = g_c H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \tag{2.19}$$

$$C_{01\cdots p} = g_c^{-1}(1 - H(r)^{-1}) \tag{2.20}$$

donde

$$H(r) \equiv 1 + \Big(\frac{R}{r}\Big)^{7-p} \tag{2.21}$$

$$R^{7-p} = c_p Q g_c l_c^{7-p}, \qquad M = \frac{QV_p}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}, \qquad S = 0 = T. \tag{2.22}$$

La brana negra genérica se llama *no extremal*, incluyendo el caso cuando Q=0 (R=0).

Otra solución de SUGRA, fue descubierta por Dabholkar y Harvey en 1989 [11]: la llamada *cuerda negra* con carga "eléctrica" bajo B_{MN}. Para el caso extremal la solución es

$$ds^2 = h(r)^{-1}\Big(- dt^2 + dx_1^2\Big) + \Big(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2\Big), \tag{2.23}$$

$$e^{\varphi} = g_c h(r)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.24}$$

$$B_{01} = \frac{1}{2}(h(r)^{-1} - 1). \tag{2.25}$$

Con carga N y masa M,

$$M = \frac{NV_1}{2\pi l_c^2} = NV_1T, \tag{2.26}$$

donde $T = \frac{1}{2\pi l_c^2}$ es la tensión de una cuerda. Esta masa es idéntica a una colección de N cuerdas estiradas a la largo de x^1 y apiladas una sobre otra. De aquí se puede inferir que la cuerda negra (NS1-brana) extremal no es otra cosa que los campos macroscópicos generados por dicha colección de cuerdas.

La teoría de cuerdas IIB también contiene una 5-brana con carga "magnética" bajo el mismo campo B_{MN}, que se conoce como *NS5-brana* (descubierta por Callan, Harvey y Strominger en 1991 [12]) con masa:

$$M = \frac{NV_5}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}, \tag{2.27}$$

notando que debido a g_c^2, ésta es más pesada que la *5-brana RR* cuando $g_c \ll 1$.

Existen muchas otras soluciones del tipo (q_{NS}, q_R)-cuerdas y $(q_{\mathrm{NS}}, q_{\mathrm{R}})$-5-branas que tienen q_{NS} unidades de carga eléctrica para las cuerdas y magnética para las branas bajo B_{MN}, y q_R unidades bajo C_{MN}. Como explicaremos ahora, todas estas branas están emparentadas entre sí a través de distintas dualidades.

La teoría IIB posee una simetría conocida como *dualidad S*, con grupo discreto $SL(2,\mathbb{Z})$, que deja invariante a la métrica h_{MN} y a la intensidad del campo C^+_{MNPQ}, mezcla el dilatón φ con el axión C y también mezcla las intensidades de los campos B_{MN} ($H_{MNP} \equiv \frac{1}{3}\partial_{[M}B_{NP]}$) y C_{MN} ($G_{MNP} \equiv \partial_M C_{NP}$). De ésto resulta que estas transformaciones convierten a la cuerda negra $\big($(1,0)-cuerda$\big)$ en cualquiera de las otras (q_{NS}, q_R)-cuerdas. Similarmente, transforman a la 5-brana RR en cualquiera de las otras (q_{NS}, q_R)5-branas.

Además, la teoría IIB posee otra simetría, conocida como *dualidad T* (que la conecta también con la teoría IIA), cuyo efecto es convertir a una p-brana RR en una $(p \pm 2)$-brana RR. Tenemos una conclusión interesante la cual es que todas las branas son igualmente importantes en la teoría, porque todas están relacionadas, y cualquiera de ellas puede entonces interpretarse con la cuerda negra reescrita en otras variables.

A partir de la dualidad T, se descubrieron otros objetos no perturbativos llamados *D-branas* [13]. Una Dp-brana es un objeto extendido en p dimensiones con grosor infinitesimal en la restantes $9-p$ dimensiones. Una Dp-brana traza un volumen de mundo $(p+1)$-dimensional. Sus excitaciones se describen a través de cuerdas abiertas cuyos extremos son libres de deslizarse a lo largo de las direcciones paralelas a la brana (obedeciendo condiciones de Neumann), pero se mantienen adheridas a la brana, en las direcciones transversales (obedeciendo condiciones de Dirichlet). Desde este punto de vista, las cuerdas abiertas sólo pueden existir en presencia de D-branas. Además, estas D-branas pueden ser consideradas como ingredientes para generar las branas negras extremales, como en el caso de la cuerda negra, la cual era producida por una colección de cuerdas fundamentales.

Ahora apliquemos las reglas de cuantización a la cuerda abierta, y por tanto a partir de tal espectro describir las excitaciones de la D-brana. Tenemos que el espectro cuántico de la cuerda abierta da lugar a una torre infinita de estados con masa,

$$m^2 = \frac{n}{l_c^2} \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.28}$$

Tales estados pueden ser interpretados como partículas, pero viviendo sobre la Dp-brana, y por tanto estos estados de partículas pueden estar asociados a campos definidos sólo sobre la brana.

El caso particular de estados no masivos ($n = 0$), están asociados a los siguientes campos sin masa:

$\Phi^i(x^\alpha)$: *Campos escalares* sobre la Dp-brana. Estos campos describen la posición de la brana en las $9-p$ direcciones transversales. Estos grados de libertad de la Dp-brana son asociados a la dinámica, debido al grupo de simetría del espaciotiempo.

$A^\alpha(x^\alpha)$: *Campo de norma* U(1) sobre la Dp-brana. Tenemos entonces estados internos, en especifico $p-1$ grados de libertad, en cada punto de la Dp-brana.

$\Psi(x^\alpha)$: *Campo espinorial* con 16 componentes reales. Estos son otros 8 grados de libertad internos de la D-brana, que resultan ser fermiónicos.

Como es natural, lo siguiente es estudiar las interacciones entre cuerdas abiertas las cuales estan controladas por $\sqrt{g_c}$. A bajas energías ($E \ll l_c^{-1}$), estas interacciones se pueden describir a través de la siguiente acción efectiva, que involucra sólo a los campos no masivos, descritos arriba,

$$S_{Dp,ef} = S_{DBI} + S_{D_{p,\alpha'}} \tag{2.29}$$

donde el primer término denota a la acción de Dirac-Born-Infeld:

$$S_{\text{DBI}} = -T_{D_p} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n \eta_{mn} + 2\pi l_c^2 F_{\alpha\beta})}, \tag{2.30}$$

$$X^\alpha \equiv \sigma^\alpha, \qquad X^i \equiv 2\pi l_c^2 \Phi^i, \qquad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

donde el primer sumando dentro de la raiz corresponde a la métrica inducida sobre la Dp-brana, $F_{\alpha\beta}$ la intensidad de campo y T_{D_p} la tensión de la Dp-brana. Esta acción S_{DBI} contiene una serie infinita de correcciones en potencias de l_c. El término S_{DBI} es la acción exacta cuando $F_{\alpha\beta}$ y $\partial_\alpha X^i$ son constantes, de otra manera la acción $S_{D_{p,\alpha'}}$ contribuirá en la acción efectiva $S_{D_p,ef}$.

La última parte que nos hace falta mencionar es la dispersión entre cuerdas abiertas y cerradas, y de esta manera determinar la manera en que las D-branas se acoplan a los modos de supergravedad (y de igual forma para los demás modos de cuerda cerrada). Se puede ver que la tensión T_{D_p} controla la manera en que la Dp-brana se acopla a la métrica, y en particular, su amplitud de probabilidad para emitir gravitones. La tensión de la Dp-brana fue deducida por Polchinski en 1994 obteniendo:

$$T_{D_p} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}. \tag{2.31}$$

Un análisis interesante, el cual nos llevará a la deducción de la dualidad de Maldacena, es el estudio de un conjunto de D-branas, cuyas excitaciones se describen nuevamente a través de cuerdas abiertas, pero ahora incluiremos cuerdas con sus extremos conectadas a las diferentes Dp-branas. Comenzaremos entonces considerando un sistema con N D-branas paralelas y coincidentes. Los distintos sectores de cuerdas abiertas pueden ahora etiquetarse con $[i, j]$ donde i y j son enteros que corren de 1 hasta N. El sector $[i, j]$ corresponde a una cuerda que empieza en la D-brana i y termina en la D-brana j. En total hay N^2 sectores. Mencionamos que al cuantizar la cuerda abierta asociada con una D-brana, existe un modo de vibración correspondiente a un campo de norma viviendo en su volumen de mundo, pero ahora en nuestro caso, tendremos un campo de norma por cada sector, constituyendo entonces una matriz $N \times N$, y de igual forma para los demás campos asociados a una D-brana. Por ejemplo, para $m = 0$ se tiene los siguientes campos:

$$\Phi^i_{IJ}(x^\alpha), \qquad A^\alpha_{IJ}(x^\alpha), \qquad \Psi_{IJ}(x^\alpha). \tag{2.32}$$

Por lo tanto, este sistema tiene un campo de norma matricial que resulta estar asociado a un grupo de norma *no abeliano*. La descripción dinámica de este conjunto de N Dp-branas es dada por una teoría de norma no abeliana, es decir, bajo un grupo de simetría local $U(N)$, pues se puede ver que las amplitudes de dispersión son invariantes bajo transformaciones $U(N)$ que mezclan a las N Dp-branas entre si. A *bajas* energías, la acción efectiva para los campos sin masa, mencionados arriba, tienen asociados una versión no abeliana de la acción de Born-Infeld. Este sistema tiene entonces N^2 campos de norma que interactúan, y en el límite de ultra-bajas energías definen una teoría de super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 2^{\frac{7-p}{2}}$ en $(p+1)$-dimensiones con grupo de norma $U(N)$ y

$$g^2_{\mathrm{YM}} = (2\pi)^{p-2} g_c l_c^{p-3}. \tag{2.33}$$

2.3. Deducción de la dualidad norma-gravedad.

Después de haber mostrado diferentes soluciones de Supergravedad ahora vislumbraremos una relación sorprendente entre una brana negra extremal con carga N bajo el campo de norma Ramond-Ramond $C_{m_1 \ldots m_{p+1}}$, y masa

$$M = \frac{N V_p}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}, \tag{2.34}$$

que de aquí en adelante llamaremos una *Rp-brana*, con una pila de N Dp-branas sin excitar. Esta equivalencia es supuesta debido a que ambas descripciones tienen la misma masa y carga [14], por tanto podemos concluir que la brana negra extremal no es otra cosa que los campos de supergravedad (gravitacional, RR, dilatónico) generados por dicha pila de D-branas.

Recordemos que al considerar bajas energías la teoría de cuerdas IIB se puede escribir en términos de una teoría efectiva la cual consistía de un término correspondiente a SUGRA, y correcciones de derivadas de los campos de SUGRA acompañados de potencias de l_c, por lo tanto, cuerdas IIB se puede describir de manera exacta con SUGRA cuando $l_c \partial h_{MN} \sim \frac{l_c}{R} \ll 1$ $(R \gg l_c)$. Por tanto, el radio de curvatura de la brana negra $R^{7-p} = c_p(g_c N) l_c^{7-p}$ implica que el régimen perturbativo es válido sólo cuando $g_c N \gg 1$.

Por otro lado, en la teoría de norma aparece un factor de N por cada lazo, de tal manera que una análisis perturbatvo es válido cuando $g_c N \ll 1$. Es decir, $g_c N$ es el parámetro que controla la expansión perturbativa de cuerdas abiertas que describen excitaciones de la pila de D-branas. Además, $g_c N$ controla la emisión de gravitones por parte de la pila de D-branas.

Tenemos entonces que no hay una equivalencia entre las descripciones perturbativas de la Rp-brana extremal y la pila de N Dp-branas en Minkowski, es decir, no existe una dualidad entre dichas descripciones, puesto que son válidas en regímenes mutuamente excluyentes. Lo que sigue es entonces conjeturar una extensión de estas dos descripciones a nivel no perturbativo, y entonces partir de una dualidad entre las dos descripciones completas. Es a partir de tal hipotética dualidad a nivel de cuerdas que resulta posible deducir la dualidad de Maldacena.

Siguiendo la idea propuesta tenemos, entonces, que la solución de la Rp-brana negra es descrita por medio de cuerdas cerradas, y está bajo control a nivel de cálculos perturbativos sólo cuando $g_c N \gg 1$, y entonces hacemos una extensión de esta descripción de cuerdas cerradas al régimen no perturbativo $g_c N \leq 1$. De igual forma, la pila de N Dp-branas en el fondo plano es descrita a través de cuerdas abiertas y cerradas a nivel de cálculos perturbativos sólo cuando $g_c N \ll 1$, y por tanto sugerimos por completez extender esta descripción al régimen no perturbatvo $g_c N \geq 1$.

Tenemos ahora una dualidad a nivel de cuerdas, puesto que ambas descripciones serían válidas simultáneamente. Como evidencia a favor de la existencia de esta dualidad, se mostró que ambas descripciones conducen al mismo resultado para las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas a bajas energías [15], y para la amplitud de absorción de cuerdas cerradas [16]. Además, se mostró que un sistema de D-branas es capaz de reproducir la tasa de radiación de Hawking [17] de la brana negra correspondiente (en el caso extremal).

Juan Maldacena [7] tomó como punto de partida esta equivalencia entre Rp-branas y Dp-branas para poder deducir su dualidad. De igual forma nosotros tomaremos este punto de vista, y daremos una deducción heurística de la corrrespondencia AdS-CFT.

Comenzaremos entonces particularizando a $p = 3$, tenemos entonces una R3-brana, donde sólo tenemos encendida la métrica y la 4-foma C_{0123}, mientras que el dilatón ϕ es constante:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}}\Big(- dt^2 + \sum_{i=1}^{3} dx^i dx^i\Big) + \sqrt{H(r)}\Big(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\Big), \qquad (2.35)$$

$$e^{\varphi} = g_c, \qquad (2.36)$$

$$C_{0123} = g_c^{-1}\big(1 - H(r)^{-1}\big) \qquad (2.37)$$

con

$$H(r) = 1 + \Big(\frac{R}{r}\Big)^4, \qquad R^4 = 4\pi g_c N l_c^4. \qquad (2.38)$$

Como mencionamos arriba, esta descripción está bajo control cuantitativo cuando $g_c N \gg 1$ (curvatura pequeña) y $g_c \ll 1$ (cuerdas débilmente acopladas). Mientras que la descripción alternativa, correspondiente al conjunto de N D3-branas, está bajo control cuantitativo cuando $g_c \ll 1$ y $g_c N \ll 1$.

Ahora consideremos el régimen de ultra-bajas energías:

$$E \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{R} \qquad (2.39)$$

Debido a que $R = \big(4\pi g_c N\big)^{\frac{1}{4}} l_c$, tenemos dos casos:

$$\text{Si} \quad g_c N \ll 1 \quad \text{entonces pedimos que} \quad E \ll \frac{1}{l_c} \ll \frac{1}{R}, \qquad (2.40)$$

$$\text{Si} \quad g_c N \gg 1 \quad \text{entonces pedimos que} \quad E \ll \frac{1}{R} \ll \frac{1}{l_c}. \qquad (2.41)$$

Así que la condición que estamos imponiendo es una sola, $E \ll \frac{1}{R}$ cuando $g_c N \gg 1$, ó $E \ll \frac{1}{l_c}$ si $g_c N \ll 1$.

Ahora veremos que en este régimen, suceden 2 cosas muy interesantes.

La primera consiste en que cada lado de la correspondencia, obtenemos dos sistemas desacoplados.

En la descripción de R3-brana negra, Igor Klebanov [16] mostró que la sección eficaz de absorción σ de modos no masivos de la brana negra es:

$$\sigma \ \propto \ E^3 R^8 \quad \Rightarrow \quad \sigma \ \propto \ \Big(\frac{R^8}{\lambda^3}\Big) \qquad (2.42)$$

Uno pensaría que la brana negra debería absorber cualquier cosa que se le arroje, pero uno puede notar a partir de las relaciones anteriores que los modos con longitud de onda $\lambda \propto \frac{1}{E} \gg R$ ($\Rightarrow \sigma \to 0$) no pueden ser absorbidos, es decir, el radio de curvatura R es el tamaño característico para poder absorber ciertos modos de los campos de SUGRA. De aquí uno puede concluir que los modos de SUGRA (modos no masivos de cuerda cerrada), en este régimen de ultra-bajas energías ($R \ll \frac{1}{E} \propto \lambda$), en el exterior de la garganta ($r > R$) esencialmente se propagan en un fondo plano, y no pueden penetrar al interior. Por otra parte, los modos en el interior de la garganta no tienen suficiente energía para vencer el potencial gravitacional y salir al exterior. Por tanto, no existe ninguna comunicación entre estas dos regiones.

En la descripción de las D-branas, Igor Klebanov [16] mostró que tienen la misma probabilidad de absorción, y entonces se obtienen de igual forma dos sistemas desacoplados, es decir, las cuerdas cerradas en el fondo plano no pueden convertirse en cuerdas abiertas, ni viceversa.

La otra propiedad interesante que se tiene en este régimen de ultra-bajas energías es que la descripción en las dos regiones desacopladas, se simplifica.

Considerando primero la pila de D-branas sobre el espacio Minkowski, tenemos que las cuerdas cerradas en el fondo plano se reducen a los modos de SUGRA IIB libres, mientras que las cuerdas abiertas sobre las D-branas se reducen a los modos no masivos, descritos por SYM $\mathcal{N} = 4$ en 3+1 dimensiones.[3]

Del lado de la R3-brana existe un corrimiento al rojo, puesto que la componente temporal de la métrica no es constante,

$$g_{tt} = -\Big(1 + \frac{R^4}{r^4}\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

Este corrimiento se ve reflejado en que un objeto con energía propia E_p (medida localmente) en un punto con coordenada radial r tiene energía

$$E_\infty = \sqrt{-g_{tt}}E_p = \Big(1 + \frac{R^4}{r^4}\Big)^{-\frac{1}{4}} E_p, \tag{2.44}$$

medida por un observador en infinito. La interpretación que esto tendría es que, debido al campo gravitacional de la R3-brana, las mediciones de energía de un objeto serían cada vez más bajas al acercarse cada vez más a $r = 0$, todo ésto desde el punto de vista de un observador en infinito. Esta energía E_∞ es sobre la que hemos impuesto la restricción, $E_\infty \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{R}$. Esto es así porque la noción de tiempo t en la R3 cuando $r \to \infty$ coincide con la que tenemos para las D3-brana.

[3]SYM $\mathcal{N} = 4$, también denominada MSYM, es una teoría norma que incorpora supersimetría. En el siguiente capítulo se incluirá una descripción de ésta.

Tomando en consideración esto último, tenemos que el observador en el infinito observa que existen dos tipos de excitaciones en este régimen, que están desacoplados: partículas sin masa propagándose en la región plana de la geometría, o cualquier tipo de excitación cerca de $r = 0$. En el primer caso, para $r \gg R$ tal condición resulta $E_\infty = E_p \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{R}$, y por tanto nos reducimos a SUGRA libre propagándose en un fondo plano. El otro caso límite es considerar la región cercana al horizonte, $r \ll R$, aquí no tenemos ninguna restricción sobre E_p (existe cualquier tipo de excitación), podemos tener energía local arbitrariamente grande, ya que $E_\infty \simeq (\frac{r}{R})E_p \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{R}$. Esta condición nos lleva a que $H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \simeq \frac{R^4}{r^4}$, y por tanto la métrica de fondo se simplifica a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{R^2}\big(- dt^2 + d\vec{x}^2\big) + \frac{R^2}{r^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ &= \underbrace{\Big(\frac{r^2}{R^2}dx_\mu dx^\mu + \frac{R^2}{r^2}dr^2\Big)}_{\text{anti-de Sitter (4+1)dim con radio R}} \quad + \quad \underbrace{R^2 d\Omega_5^2}_{\text{5-esfera con radio R}} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Tenemos que sobre este espacio, $AdS_5 \times S_5$ con N unidades de flujo RR a través de la S_5, se propagan todos los modos de la teoría de cuerdas IIB (incluyendo modos no perturbativos como Dp-branas, etc.)

Por tanto, llegamos a una conclusión impresionante: al considerar una dualidad entre el sistema de N D3-branas en un espacio de Minkowski y la brana negra extremal, y tomar límite de ultra-bajas energías obtuvimos supergravedad libre sobre un fondo plano en ambas descripciones, más una segunda teoría. Es inevitable entonces identificar las segundas teorías que aparecen en ambas descripciones, y conjeturar que *la teoría super Yang-Mills $\mathcal{N}$=4 con grupo U(N) en Minkowski 3+1 dimensional es equivalente a la teoría de cuerdas IIB sobre un espacio $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo RR a través de la S_5*

Notar que a pesar de que en la deducción se consideró $r \ll R$, en la teoría de cuerdas en AdS_5 se puede tener r arbitrario, es decir, incluso $r \gg R$, sin pensar en que regresaremos a la región plana.

Antes de seguir tenemos que hacer dos precisiones en esta dualidad. La primera es sobre el grupo de simetría interna local en SYM. Sabemos que $U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$. Del lado de la R3-brana, los modos $U(1)$, nos dan información sobre dónde colocar la garganta en el espacio plano, pero en el caso en que consideramos bajas energías, como se mostró, la garganta resulta ser $AdS_5 \times S^5$, además de que se desacopla de la parte plana. Al considerar a la teoría de cuerdas IIB definida sobre $AdS_5 \times S^5$ estamos dejando entonces fuera de la descripción a los grados de libertad $U(1)$. Por tanto, para que esta dualidad sea exacta uno debe considerar sólo el grupo $SU(N)$, del lado de SYM. La segunda precisión es que, si aceptamos esta dualidad, del lado de la teoría con gravedad tenemos todo el espectro de la teoría de cuerdas IIB, incluyendo excitaciones grandes, pero manteniendo el fondo como $AdS_5 \times S^5$ en el infinito, ya que necesitaríamos energía infinita para modificar la métrica en dicha región. De este modo, la dualidad involucra no sólo a $AdS_5 \times S^5$ sin deformar, sino a *fondos asintóticamente*[4] $AdS_5 \times S^5$.

Finalmente tenemos el enunciado más preciso de la dualidad de Maldacena:

$$\text{SYM } \mathcal{N}{=}4 \ SU(N) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{3+1} \equiv \text{Cuerdas IIB en un fondo} \quad aAdS_5 \times S^5$$

Este resultado es sorprendente, puesto que la inexistencia o existencia de la gravedad, al igual que el número de dimensiones depende del punto de vista que adoptemos. Además, si uno quiere estudiar un sistema físico,[5] hemos mostrado que existen dos posibilidades: por medio de partículas con color viviendo en un espaciotiempo plano, o cuerdas en un espaciotiempo curvo.

A pesar de que la anterior no es una deducción rigurosa, la validez de la correspondencia es apoyada por una gran cantidad de evidencia que se ha obtenido durante los últimos 16 años (periodo en el que el artículo de Maldacena ha acumulado cerca de 9 000 citas).

Durante el estudio de esta dualidad se ha ido acumulando mucha investigación, culminando en un diccionario. La construcción de dicho diccionario tiene como objetivo interpretar cualquier objeto o proceso de un lado de la dualidad a un objeto o proceso en la otra descripción. Ésto nos lleva a la posibilidad de obtener información sobre un sistema fuertemente acoplado a partir del estudio de una teoría completamente diferente, y por medio de tal diccionario interpretar dicha información. En la siguiente sección mostraremos algunas entradas de este diccionario.

---

[4]En el sig. capítulo se retomará este tema. Tales fondos serán denotados $aAdS_5 \times S^5$.

[5]Vale la pena hacer notar que ninguna de estas dos teorías describe a nuestro Universo. Se trata de dos universos imaginarios. Cierta investigación ha sido dirigida a encontrar teorías duales que describan nuestro mundo real.

Capítulo 3

DICCIONARIO DE LA DUALIDAD AdS-CFT.

En este capítulo daremos algunos resultados que se han encontrado en el estudio de la dualidad de Maldacena y que necesitaremos para mapear los cálculos realizados de un lado de la dualidad e interpretarlos en el otro lenguaje. Éste es el tipo de herramienta que la correspondencia ha implementado: realizar cálculos que son complicados o quizás imposibles de un lado de esta dualidad de manera un poco más sencilla del otro.

3.1. Espaciotiempo Anti-de Sitter.

Como sabemos, el espaciotiempo de Minkowski tiene curvatura cero, mientras que el espaciotiempo de Sitter tiene curvatura constante positiva, y la diferencia a Anti-de Sitter[1] (AdS) es que éste tiene curvatura constante negativa. Este espaciotiempo puede definirse por medio de un hiperboloide en un espacio plano con signatura $(4,2)$,

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -R^2. \tag{3.1}$$

Vamos a mostrar dos maneras de parametrizar este espaciotiempo. La primera de ellas es por medio de las llamadas *coordenadas globales*:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \Omega_i \leq 1 \quad \text{donde} \quad i = 1,2,3,4$$

[1]Nos restringiremos al caso (4+1)-dimensional, que es el caso que nos interesa; la generalización es idéntica.

$$\begin{aligned} X_{-1} &= R\cosh\rho\,\mathrm{sen}\,\tau, \\ X_0 &= R\cosh\rho\cos\tau, \\ X_i &= R\Omega_i\,\mathrm{senh}\,\rho \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\Omega_i\Omega_i = 1$, es decir, las Ω_i describen puntos en la S^3. Con estas coordenadas, la métrica sobre este hiperboloide es

$$ds^2 = R^2\big(-\cosh\rho\; d\tau^2 + d\rho^2 + \mathrm{senh}^2\,\rho d\Omega_3^2\big) \tag{3.3}$$

con $d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \mathrm{sen}\,\theta_1^2\big(d\theta_2^2 + \mathrm{sen}\,\theta_2 d\theta_3^2\big)$.

Una forma de representar esta métrica es por medio de un diagrama de Penrose. A partir de este diagrama, se puede observar que el infinito espacial es una superficie tipo tiempo, y la luz toma un tiempo finito en llegar a la frontera ($\rho = \infty$), a pesar de que se encuentra a una distancia propia infinita. Ésto implica que en anti-de Sitter no basta con dar condiciones iniciales en $\tau = 0$ para determinar por completo la evolución, sino que hace falta además especificar condiciones en la frontera.[2]

Otra manera de parametrizar el hiperboloide es con las *coordenadas de Poincaré* (u horosféricas):

$$\begin{gathered} 0 \leq r < \infty, \quad -\infty < t, x_1, x_2, x_3 < \infty \\ X_{-1} = \frac{r}{R}t \\ X_0 = \frac{R^2}{2r}\big[1 + \frac{r^2}{R^4}(R^2 + \vec{x}^2 - t^2)\big] \\ \vec{X} = \frac{r}{R}\vec{x} \\ X_4 = \frac{R^2}{2r}\big[1 + \frac{r^2}{R^4}(-R^2 + \vec{x}^2 - t^2)\big]. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Y la métrica correspondiente es

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2. \tag{3.5}$$

[2] Vale la pena tener presente ésto, ya que posteriormente en el estudio de la correspondencia de Maldacena tendrá repercusiones, de hecho va ser de vital importancia en nuestro cálculo, al final de la tesis.

A partir del cambio de variable $z = \frac{R^2}{r}$, una forma alternativa de esta métrica es:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\big(- dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\big). \tag{3.6}$$

La coordenada r o z es conocida como la coordenada radial. El límite $r \to \infty$ (o $z = 0$) es la frontera del espacio AdS. Recordemos que éstas son las coordenadas que aparecieron en la dualidad de Maldacena.

Vale la pena mencionar que a diferencia de las coordenadas globales que cubrían por completo el espaciotiempo AdS, las coordenadas de Poincaré sólo cubren una parte de dicho espaciotiempo, llamada *cuña de Poincaré*. La cuña de Poincaré está delimitada por una hipersuperficie en $r = 0$, llamada *horizonte de aceleración*; tal horizonte delimita la comunicación entre observadores que se encuentren dentro y fuera de la cuña. Si consideramos, por ejemplo, trayectorias tipo tiempo o nulas generalmente salen de esta región, cruzando el horizonte en un tiempo global (y tiempo propio) finito, pero en tiempo de Poincaré infinito.

Como notamos, el tiempo de Poincaré es el que coincide con el tiempo de MSYM; y por tanto en nuestra dualidad tendremos que agregar un matiz más en un nuestro enunciado para hacerlo más preciso, de tal forma que tenemos la siguiente equivalencia:

$$\text{MSYM } SU(N) \text{ en } \mathbb{R}^{3+1} \equiv \text{Cuerdas IIB en } aADS^5 \times S^5 \text{ Poincaré.}$$

Tenemos que recordar que la teoría de cuerdas es una teoría de gravedad, lo cual implica que la geometría es dinámica, y hay que considerar que el estado de mínima energía (el vacío) de MSYM es equivalente al fondo $AdS_5 \times S^5$ sin excitar, y fluctuaciones pequeñas o grandes de $AdS_5 \times S^5$ corresponden a otros estados de MSYM. Más en general, cualquier objeto o proceso de un lado de la dualidad corresponde a un objeto o proceso en el otro lado.

3.2. Parámetros en las teorías.

La dimensión N del grupo de norma $SU(N)$ (es decir, el número de colores o el número de D3-branas) del lado de la teoría de norma corresponde al número de unidades de flujo del campo RR a través de la S^5 (carga de la 3-brana negra) del lado de la teoría de cuerdas .

La teoría de campos tiene dos parámetros: el número de colores N y la constante de acoplamiento g_{YM}. Cuando el número de colores es grande la teoría perturbativa está controlada por la constante de acoplamiento de 't Hooft, $\lambda \equiv g_{\mathrm{YM}}^2 N \approx g_c N$. Del lado de la teoría de cuerdas, los parámetros son la constante de acoplamiento de cuerdas g_c, y la longitud de la cuerda l_c (en comparación con el radio de curvatura R del espaciotiempo donde viven las cuerdas). Se tiene que la teoría de cuerdas y la teoría de campos tiene cada una dos parámetros adimensionales que se mapean de uno a otro a través de las siguientes relaciones:

$$g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_c \equiv 4\pi e^{\varphi}\big|_{z=0} \tag{3.7}$$

$$\lambda \equiv g_{\mathrm{YM}}^2 N = \frac{R^4}{l_c^4} \tag{3.8}$$

Estas ecuaciones, desde el punto de vista de la correspondencia AdS-CFT, nos dicen que si queremos mantener la teoría de cuerdas débilmente interactuante, entonces la constante de acoplamiento de la teoría MSYM debe ser pequeña. La otra ecuación es mucho más interesante. Ésta nos dice que si la constante de acoplamiento de 't Hooft es grande, del otro lado, correspondería al límite cuando el radio de curvatura del espaciotiempo es mucho mas grande que la longitud de la cuerdas. En este límite, como vimos, uno puede desacoplar los modos masivos, y reducir la teoría de cuerdas a SUGRA. La utilidad práctica de la dualidad de Maldacena viene en gran parte de esta conclusión, es decir, por su habilidad para tratar en el límite de acoplamiento fuerte en la teoría de campo.

Vale la penar abordar un poco más sobre la idea anterior. Para visualizar este resultado, recordemos que la teoría de cuerdas está bajo control a nivel de cálculos sólo si el espaciotiempo está débilmente curvado, porque es entonces cuando la teoría en la hoja de mundo de la cuerda está débilmente acoplada . Además, la descripción perturbativa de soluciones clásicas de SUGRA (como Rp-branas), es útil cuando las cuerdas están débilmente acopladas,[3]

$$\frac{l_c^2}{R^2} \ll 1, \quad g_c \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \equiv g_{\mathrm{YM}}^2 N_c \gg 1, \quad N \gg 1, \tag{3.9}$$

es decir, cuando MSYM tiene muchos colores y *!está fuertemente acoplada!*.

[3]Notar que el parámetro $\frac{l_c}{R}$ controla la expansión perturbativa en lazos de la hoja de mundo, mientras que g_c controla la expansión en lazos de cuerda.

3.3. Super Yang-Mills $\mathcal{N}$=4.

Aquí vale la pena hacer un alto para hablar en más detalle de la teoría de campos que tenemos en el ejemplo que nos interesa de la dualidad de Maldacena, es decir, de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías (también denominada Yang-Mills máximamente supersimétrica). Primero que nada es una teoría de norma, porque tenemos un campo $A_\mu(x)$; además seis campos escalares reales sin masa $\Phi^e, e = 1, 2, ..., 6$ y cuatro espinores de Weyl izquierdos sin masa $\Psi^f, f = 1, 2, 3, 4$. Todos estos campos transformando en la representación adjunta del grupo de norma $SU(N)$. En esta teoría no hay campos que transformen en la representación fundamental, y por tanto si uno quiere estudiar quarks es necesario ponerlos a mano como fuentes externas del campo de norma. Como cualquier teoría de campos relativista tiene como simetría al grupo de Poincaré (diez generadores: 6 correspondientes a las transformaciones de Lorentz $J_{\mu\nu}$, y 4 a las traslaciones P_μ). Además, incluye otros cuatro generadores para las llamadas transformaciones conformes especiales K_μ. Por otro lado, su constante de acoplamiento no corre con la energía y, por tanto, la teoría es invariante bajo reescalamientos (con generador D). Estos quince generadores forman lo que se conoce como *álgebra conforme* que codifica la tabla de multiplicación del grupo conforme $SO(4, 2)$. El "super" en el nombre está asociado al hecho de que la teoría posee *supersimetría* (SUSY), es decir, es invariante bajo transformaciones generadas por cuatro supercargas (espinores de Weyl) $Q^l, l = 1, 2, 3, 4$ que mezclan entre sí a los campos bosónicos y fermiónicos. Adicionalmente es invariante bajo el grupo de simetría interna $SU(4) \simeq SO(6)$ que describe como se mezclan entre sí las cuatro supercargas , entonces ésto explica el nombre de SYM $\mathcal{N} = 4$. El adjetivo máximamente supersimétrica se debe a que no es posible agregar más supercargas sin involucrar a la gravedad. Cabe mencionar que en SYM $\mathcal{N} = 4$ en Minkowski 3+1 dimensional no hay confinamiento ni libertad asintótica.

Un punto importante es que, si consideramos esta misma teoría de norma, pero a temperatura finita algunas de sus características cambian radicalmente. Por ejemplo, la presencia de una escala energética asociada a la temperatura rompe la invariancia conforme, y la supersimetría. Además esta teoría de norma, la densidad de energía es proporcional a T^4. Mientras que QCD a temperaturas $T > T_c \approx 200\ MeV$ está desconfinada. Tenemos entonces una teoría que reproduce algunas de las características de QCD cuando $T > T_c$, y por tanto podemos usarla como modelo de juguete para estudiar aspectos que no entendemos de la interacción fuerte a temperatura finita.

3.4. Generalización de la dualidad.

Algo sorprendente de la dualidad entre MSYM y la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ es la concordancia entre sus simetrías globales. Por ejemplo, como mencionamos MSYM en 3+1 dimensiones es invariante conforme, y además ante el grupo de simetría interna $SU(4) \simeq SO(6)$, conocida como simetría R. Del lado de la teoría con gravedad, el grupo de isometría del espacio AdS_5 es precisamente $SO(4,2)$, mientras que la 5-esfera tiene como isometrías al grupo $SO(6)$.

A partir de resultados anteriores se puede tener una conclusión más general de la dualidad de Maldacena. En el caso particular que tuvieramos una teoría de campos conforme[4] (CFT) en 3+1 dimensiones, distinta a MSYM, por definición una de sus simetrías globales sería el grupo conforme, $SO(4,2)$. Así que, si esta teoría tuviera un dual con gravedad entonces podemos concluir que el espaciotiempo donde vive éste último deber tener un factor AdS_5, debido a que el único espacio con $SO(4,2)$ como su grupo de isometrías es AdS_5. Por otro lado, la 5-esfera en general no figurará, puesto que la presencia de $SU(4)$ como simetría global está asociada a la existencia de SUSY $\mathcal{N}=4$, que es una característica específica de MSYM.

Ésto se puede generalizar aún más en $d+1$ dimensiones, puesto que el grupo conforme $SO(d+1,2)$ coincide con el grupo de isometrías de AdS_{d+2}. Debido a ésto, la dualidad de Maldacena tiene el nombre genérico de *Dualidad AdS-CFT*,

Además al no estar hablando ya del ejemplo de MSYM, la teoría gravitacional en general no tendría por que ser específicamente cuerdas IIB. Incluso podemos plantearnos la posibilidad de que no sea una teoría de cuerdas. (aunque sí debe ser una teoría de gravedad bien definida a nivel cuántico.) Es por tal motivo que la dualidad de Maldacena puede ser llamada *Norma-Gravedad*.

Tenemos entonces que:

$$\textit{Teoría Conforme en } \mathbb{R}^{d+1} \equiv \textit{Teoría Gravitacional en } aAdS_{d+2} \times M^p$$

donde M^p es alguna variedad compacta p-dimensional asociada a las simetrías internas de la CFT.

[4]Es decir, una teoría de norma invariante bajo el grupo conforme.

3.5. Coordenadas espaciotemporales.

Otra cosa que realmente es interesante, que surge al instante del conocimiento de la dualidad norma-gravedad es la traducción entre las coordenadas espaciotemporales de las dos teorías; y por supuesto se vuelve más sorprendente por el hecho de que una de estas teorías vive en un número de mayor dimensiones.

Como se mostró en la equivalencia entre el conjunto de D3-branas y R3-brana; las coordenadas $x^{\mu} = (t, \vec{x})$ del espacio de Minkowski en 3+1 dimensiones donde vive MSYM, coinciden con las coordenadas x^{μ} en la cuña de Poincaré. Mientras que las coordenadas angulares $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$ correspondientes a la S^5 del lado de MSYM serán relacionadas con los parámetros correspondientes al espacio interno $SO(6) \simeq SU(4)$. Es por ello que en MSYM se va a trabajar con objetos con números cuánticos bien definidos bajo $SU(4)$.

La última coordenada que nos hace falta relacionar es la coordenada radial r ($z = \frac{R^2}{r}$) de AdS$_5$, este mapeo lleva a la conexión denominada UV-IR. Para entender esta entrada del diccionario recordemos que en una teoría de campos al considerar interacciones las partículas se vuelven objetos más complicados debido a que pueden interactuar consigo mismos. Ésto lleva a que las cantidades físicas que aparecen en el lagrangiano de dicha teoría deben ser renormalizados, es decir, reemplazados tomando en cuenta mediciones experimentales, y por tanto dependerán de la escala energética μ involucrada en los experimentos. Por ejemplo, si los paramétros medidos de masa y carga son $m(\mu)$, $q(\mu)$ tendremos entonces la descripción del electrón físico cuando la examinamos a una distancia $\sim \frac{1}{\mu}$ (de manera que sólo incluimos una cierta porción de la "nube" de partículas virtuales que rodea a esta partícula "vestida"). A partir del grupo de simetría $SO(4, 2)$, se puede mostrar que AdS a distinto valor de r (o z) es equivalente a la información en MSYM a distintas escalas de energía (o distancia). Finalmente tenemos que la conexión UV-IR consiste en que la coordenada radial r en AdS corresponde a una escala de energía en MSYM (en el sentido de una escala de resolución espacial). Equivalentemente, la coordenada radial z corresponde a una escala de distancia en MSYM. Ésto implica que la región cercana a la frontera en AdS, el IR (distancias grandes) de la teoría gravitacional, corresponde al UV de la teoría de norma, y viceversa.

Hay que notar que MSYM es una descripción alternativa de cuerdas IIB en AdS, y es incorrecto considerar las dos teorías simultaneamente, es decir, que la CFT vive en la frontera, $z = 0$, de AdS. MSYM contiene información sobre lo que ocurre en todos los valores de z, no solo en $z = 0$.

3.6. Objetos básicos en las teorías duales.

La siguiente entrada del diccionario hace referencia a la relación entre los objetos básicos de las dos teorías. Como se mencionó, los objetos básicos que contienen la información física en una teoría de norma son los operadores $\mathcal{O}(x^\mu)$ invariantes de norma. Del lado de la teoría de cuerdas, los objetos básicos son los campos $\phi(x^M)$, que en el límite clásico ($N \to \infty$) tienen ciertos valores específicos, y en la teoría cuántica son también operadores que pueden actuar sobre el vacío para darnos distintos estados.

Para tener una idea clara de este mapeo uno necesita considerar la relación entre la R3-brana negra y el conjunto de N D3-branas en Minkowski. En este contexto, si queremos estudiar las D3-branas tiene sentido arrojarles cuerdas cerradas, correspondientes a un modo de vibración de un campo $\phi(x^M)$, y observar la dinámica de las D3-branas. Ésto da como resultado ciertos modos de vibración de cuerdas abiertas en las D3-branas.

En límite de bajas energías, el campo $\phi(x^M)$ en la ubicación de las D3-branas se convierte en una fuente de los campos de MSYM a través de un operador $\mathcal{O}(x^\mu)$; la forma de visualizarlo es por medio de la acción de las D3-branas en el límite de Maldacena, y entonces identificar el operador $\mathcal{O}(x^\mu)$ que está acoplado al campo $\phi(x^M)$. Del lado de la R3-brana negra, vimos que la parte dual a la pila de D3-branas es la garganta, por tanto, para producir excitaciones en $AdS_5 \times S^5$ es por medio del valor del campo $\phi(x^M)$ en la frontera de AdS.

Por ejemplo, analicemos el caso del dilatón φ. Se tiene que la acción de la D3-branas es:

$$\begin{aligned} S_{D3} &= -T_{D3} \int d^4 x e^{-\varphi} Tr \Big\{ \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + 2\pi l_c^2 F_\mu \nu)} + ... \Big\} \\ &= \underbrace{\frac{1}{8\pi g_c} \int d^4 x Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + ...)}_{S_{\mathrm{MSYM}}} + \int d^4 x \varphi \underbrace{Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + ...)}_{\mathcal{O}_\varphi = \mathcal{L}_{\mathrm{MSYM}}} + ... \end{aligned} \tag{3.10}$$

es decir, el operador dual a φ es Tr$(F^2 + ...) \sim \lim_{l_c \to 0} \frac{\delta S}{\delta \varphi}\Big|_{\varphi = 0}$.

De la misma manera, el gravitón h_{MN} aparece en S$_{D3}$ dentro de la métrica $g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$ de modo que sus componentes $\mu\nu$ son duales al tensor de energía-momento de MSYM:

$$\mathcal{O}_{h_{\mu\nu}}(x) \sim \lim_{l_c \to 0} \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} \equiv T_{\mu\nu} = Tr(F_{\mu}^{\lambda} F_{\nu\lambda} + ...). \tag{3.11}$$

Recordemos que los operadores $\mathcal{O}(x^{\mu})$ en MSYM están definidos en el espaciotiempo de Minkowski 3+1 dimensional, y las coordenadas de la S^5 son los parámetros asociados a la simetría interna R, por lo tanto, estos operadores tienen números cuánticos asociados a una representación de este grupo de simetría. Estos números cuánticos especifican el número de estados internos, y cómo se mezclan ante las transformaciones asociadas a la representación correspondiente de $SU(4)$. Uno puede concluir que los operadores no deben corresponder a campos $\phi(x^M)$ localizados en 9+1 dimensiones del espaciotiempo, sino a campos $\phi(x^m) \equiv \phi(z, x^{\mu})$ en AdS_5, mezclándose bajo el grupo de isometrías de la S^5. Entonces, cada campo se descompone en modos de Kaluza-Klein sobre la S^5:

$$\phi(x^m, \theta^a) = \sum_k \phi_k(x^m) Y_k(\theta^a) \qquad \text{donde} \quad a = 1, 2, ..., 5, \tag{3.12}$$

y los armónicos esféricos $Y_k(\theta^a)$ sobre la S^5 corresponden a representaciones de $SU(4)$. Por tanto, los modos de Kaluza-Klein $\phi_k(x^m)$ sobre la S^5 (campos de Cuerdas IIB en AdS_5) son los que son duales a los operadores $\mathcal{O}(x^{\mu})$ de MSYM.

Por ejemplo, el modo del gravitón que es constante sobre la S^5 (onda s) es dual al tensor de energía-momento en MSYM,

$$h_{mn}(z, x^{\mu}) \Longrightarrow T_{\mu\nu}(x^{\rho}) = Tr(F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + ...), \tag{3.13}$$

y las ondas parciales de $h_{mn}(x^p, \theta)$ con $l \neq 0$ son duales a operadores en MSYM que son generalizaciones de $T_{\mu\nu}$ con carga R.

Vale la pena hacer notar que en cualquier teoría cuántica de campos (invariante bajo traslaciones en el espaciotiempo), el tensor energía-momento es un operador local invariante de norma, y por tanto en la teoría dual va a estar presente la gravedad.

3.7. Multipletes en las teorías.

Debido a que las simetrías globales coinciden en ambos lenguajes de la correspondencia, uno esperaría tener los mismos multipletes en las dos diferentes descripciones. La siguiente entrada del diccionario correspondería entonces a verificar que estos multipletes son iguales.

Comenzaremos primero mostrando los diferentes multipletes que existen. Del lado de MSYM, estos multipletes están conformados de operadores $\mathcal{O}(x)$, invariantes de norma. Como mencionamos, en cualquier teoría de campos conforme las transformaciones de escala o dilataciones $x^\mu \to sx^\mu$ son también una simetría, cuyo generador es D, y es por ello que nos conviene trabajar con una base de operadores (o equivalentemente los estados que generan estos operadores, $\mathcal{O}(x)|0\rangle$) que tengan un eigenvalor definido[5] Δ bajo D, conocido como su *dimensión de escalamiento*, es decir,

$$[D, \mathcal{O}(0)] = -i\Delta\mathcal{O}(0), \quad \text{equivalentemente} \quad \mathcal{O}(0) \to \mathcal{O}'(0) = s^\Delta \mathcal{O}(0). \tag{3.14}$$

Del álgebra conforme tenemos que:

$$[D, J_{\mu\nu}] = 0, \quad [D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = +iK_\mu, \tag{3.15}$$

es decir, que $J_{\mu\nu}$, P_μ y K_μ tienen dimensión $0, +1, -1$ respectivamente. Se puede inferir a partir de lo anterior que los operadores $[K_\mu, \cdot]$ y $[P_\mu, \cdot]$ son equivalentes a operadores de aniquilación (descenso) y creación (ascenso) respectivamente, en el sentido de que disminuyen o aumentan al eigenvalor Δ. Por tanto, dado un operador $\mathcal{O}(0)$, al aplicar sucesivamente el operador "K_μ" (es decir, $[K_\mu, \cdot]$) llegaremos en algún momento a un operador $\widetilde{\mathcal{O}}(0)$ que es aniquilado por K_μ,

$$[K_\mu, \widetilde{\mathcal{O}}(0)] = 0. \tag{3.16}$$

Tal operador tendrá la menor dimensión de todos los operadores en ese multiplete, lo llamaremos *operador primario conforme*. Ahora, para determinar los otros operadores (estados) del multiplete aplicaremos sucesivamente "P_μ" (es decir, $[P_\mu, \cdot]$) sobre $\widetilde{\mathcal{O}}(0)$ un número arbitrario de veces, tales operadores son conocidos como *descendientes del operador primario*.

Debido a que MSYM es superconforme, los multipletes en esta teoría serán más grandes. Es decir, si consideramos un operador primario conforme, y actuamos con las cargas conformes $S_{\alpha f}$ ó $\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}$ podremos generar un nuevo operador primario, pero, con dimensión menor por $\frac{1}{2}$, o con las supercargas Q^f_α y $\bar{Q}_{\dot{\alpha} f}$ obtendremos otros primarios conformes con dimensión mayor por $\frac{1}{2}$.

[5] En una teoría conforme, como es el caso de MSYM, P^2 ya no es un Casimir, debido a que $[D, P^2] \neq 0$.

De esta manera, estos operadores son equivalentes a dos pares de operadores de aniquilación y creación, pero ahora, fermiónicos.

Ahora si aplicamos sucesivamente $S_{\alpha f}$ (ó $\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}$) sobre un operador primario $\widetilde{\mathcal{O}}(0)$ existirá un operador $\bar{\mathcal{O}}(0)$ tal que

$$[S_{\alpha f}, \bar{\mathcal{O}}(0)]_{\pm} = 0 = [\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{O}}(0)]_{\pm} \quad \forall \alpha, \dot{\alpha}, f \tag{3.17}$$

$$(\text{además de que} \quad [K_\mu, \bar{\mathcal{O}}(0)] = 0),$$

este operador es denominado *operador primario superconforme*.

En resumen tenemos que un (super) multiplete del grupo superconforme $SU(2,2,|4)$ puede ser generado a partir de un operador primario superconforme $\bar{\mathcal{O}}$ actuando sucesivamente con los operadores Q y $\bar{Q}$, con los cuales generamos otros primarios conformes $\widetilde{\mathcal{O}}$, y con aplicaciones sucesivas de P_μ se pueden generar los operadores descendientes de cada operador primario.

Estos multipletes están caracterizados por los números cuánticos del primario conforme bajo $SO(4,2) \times SO(6) \simeq SU(2,2|4)$, es decir, su dimensión Δ, espín j y su representación bajo la simetría R ($SU(4)$).

Debido a que en MSYM los campos transforman en la representación adjunta, los operadores locales invariantes de norma son del tipo

$$\mathcal{O}(x) \sim Tr(\mathcal{M}_1(x)\mathcal{M}_2(x)...) \tag{3.18}$$

(o productos de tales trazas) donde $\mathcal{M}_i(x) \equiv F_{\mu\nu}(x), \Phi^e(x), \Psi^f(x)$ (o derivadas covariantes D_μ de estos campos básicos). Debido a esto, sus propiedades de transformación son manifiestas bajo Lorentz y $SU(4)$. Por tanto, el único dato no trivial es su dimensión de escalamiento Δ.

Como en cualquier QFT, cuando existen interacciones los parámetros en el lagrangiano no concuerdan con los medidos experimentalmente. En este caso es necesario renormailizar los campos y los operados compuestos. Pero, al remover las divergencias UV en las funciones de correlación de estos operadores renormalizados nos llevará a corregir la dimensión de los operadores, es decir,

$$\Delta \equiv \Delta^{(0)} + \gamma \tag{3.19}$$

donde $\Delta^{(0)}$ es la dimensión desnuda (dimensión sin interacciones), y γ es denominada *dimensión anómala*. La dimensión anómala γ se puede calcular de manera perturbativa ($\lambda \ll 1$), pero no cuando $\lambda \gg 1$, por tanto, no sabemos en general la dimensión para todo operador $\mathcal{O}$.

Pero, se tiene un caso especial para ciertos operadores primarios superconformes que son aniquilados por algunas supercargas Q y $\bar{Q}$, y por tanto el multiplete que generan es más corto; tales operadores son llamados *primarios superconformes quirales o BPS* [18]. Lo interesante es que uno puede mostrar, a partir del algebra superconforme, que la dimensión de un operador primario quiral (BPS) queda determinada por sus propiedades de transformación bajo Lorentz y bajo la simetría R, es decir,

$$\left[\varepsilon_{\alpha\beta}(\delta^f_{f'}D + \Sigma_A R^f_{Af'}) + \frac{1}{2}\delta^f_{f'}J_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \bar{\mathcal{O}}(0)\right] = 0. \tag{3.20}$$

La conclusión es que los operadores quirales (tanto el primario superconforme $\bar{\mathcal{O}}$ como todo el multiplete que genera) tienen, para cualquier valor de λ, dimensión de escalamiento exactamente igual a su dimensión desnuda, $\Delta = \Delta^{(0)}$.

Se puede mostrar que los únicos operadores de una traza en MSYM que son primarios quirales (BPS) son:

$$\mathcal{O}_l(x) \equiv Tr\big(\Phi^{\{e_1}(x)...\Phi^{e_l\}}(x)\big) \tag{3.21}$$

con l=2,3,4,...,N, dimensión $\Delta^{(0)} = l$ y carga R $[0, l, 0]$ (etiquetas de Dynkin para identificar una representación de R). Estos operadores tienen, por ser BPS, $\Delta = l$ para cualquier valor de λ.

Del lado de cuerdas IIB en el límite $N \to \infty$ y $\lambda \to \infty$, es decir SUGRA IIB, se puede mostrar que para cada campo sobre AdS_5 (modo de Kaluza-Klein $\phi_k(x^m)$ sobre la S^5) en coordenadas globales existe una relación entre la masa y la energía (ver p. ej. [6]) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{espín 0 ó 2:} \quad & m^2L^2 = E(E-4), \\ \text{espín } \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{3}{2}\text{:} \quad & |m| = E-2, \\ p\text{-forma:} \quad & m^2L^2 = (E-p)(E+p-4). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Los modos KK de los campos de SUGRA IIB tienen espín ≤ 2, y por tanto, deben pertenecer a multipletes cortos. Es decir, todos los modos de SUGRA IIB están en multipletes quirales (exactamente $\frac{1}{2}$BPS).

A partir de una rotación de Wick en la teoría con gravedad y la teoría conforme podemos obtener diversas versiones euclideanas de la correspondencia AdS-CFT, por ejemplo MSYM en $S^3 \times \mathbb{R}$ es dual a cuerdas IIB en

AdS_5 global. Se puede mostrar en MSYM que el generador de dilataciones D se convierte en el generador de traslaciones en el tiempo (es decir, el Hamiltoniano) para la CFT definida sobre $S^3 \times \mathbb{R}$, y considerando que dicha teoría es dual a cuerdas IIB en AdS_5 global, se puede concluir que la dimensión Δ en la CFT corresponde a la energía E asociada al tiempo global τ en AdS.

Por tanto, de la relación entre E y m que mencionamos, tenemos el siguiente mapeo entre la dimensión Δ de los operadores en la CFT y la masa m de los campos (modos KK) en AdS:

$$\begin{aligned} \text{espín 0 ó 2:} \quad & m^2L^2 = \Delta(\Delta-4) \\ \text{espín } \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{3}{2}\text{:} \quad & |m| = \Delta - 2 \\ p\text{-forma:} \quad & m^2L^2 = (\Delta-p)(\Delta+p-4). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Finalmente se tiene que, si la correspondecia AdS-CFT es correcta, por cada multiplete $\frac{1}{2}$BPS de operadores de una traza en MSYM, debemos tener un multiplete $\frac{1}{2}$BPS de campos en cuerdas IIB. Es decir, por cada operador primario superconforme del lado de MSYM

$$\mathcal{O}_l = Tr\Big(\Phi^{\{e_1}\Phi^{e_2}...\Phi^{e_l\}}\Big) \quad l\text{=2,...,N} \tag{3.24}$$

con $\Delta = l$, $s = 0$, en la represention $[0, l, 0]$ de $SU(4)$, debe existir en cuerdas IIB un multiplete $\frac{1}{2}$BPS para cada valor de $l = 2, ..., N$, basado en un campo primario superconforme con espín cero, masa $m^2L^2 = l(l-4)$ y en la rep $[0, l, 0]$ de $SU(4)$. Sorprendentemente, al hacer la comparación detallada ¡se encuentra un acuerdo perfecto!

3.8. Evolución de los estados.

Después de estudiar el espectro de estados en la dualidad, el siguiente paso, como es natural, es verificar si los estados evolucionan de la misma manera en ambos lados de la correpondencia y, si es así, mostrar cómo se traduce la información entre las teorías duales. Es decir, estudiar interacciones desde el punto de vista de la correspondencia.

Como hemos visto, toda la información física en una teoría de campos interactuante, por ejemplo MSYM, se encuentra en las funciones de correlación, en particular de operadores $\mathcal{O}(x)$ invariantes de norma. Teniendo este panorama la pregunta es cómo traducir el cálculo de correladores en MSYM a la teoría dual.

Del lado de MSYM, recordemos que para calcular correladores (de n puntos) lo podemos hacer por medio de la función de partición $\mathcal{Z}[J_j]$, de la siguiente manera

$$\langle \mathcal{O}_{j_i}(x_1)...\mathcal{O}_{j_n}(x_n)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\delta}{i\delta J_{j_1}(x_1)}...\frac{\delta}{i\delta J_{j_n}(x_n)}\mathcal{Z}[J_j]\Big|_{J_j=0}, \tag{3.25}$$

donde

$$\mathcal{Z}[J_j] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f e^{[iS_{\mathrm{MSYM}}+i\sum_j \int d^4x \mathcal{O}_j(x)J_j(x)]}. \tag{3.26}$$

Como observamos los operadores $\mathcal{O}$, invariantes de norma, se acoplan con las fuentes J_j, ésto equivale a deformar la teoría,

$$\delta S_{MSYM} = \sum_j \int d^4x \mathcal{O}_j(x)J_j(x), \tag{3.27}$$

aunque al final normalmente se apaga esta deformación.

Del lado de la teoría con gravedad vimos, al inicio del capítulo, que en AdS no bastaba con dar condiciones iniciales para determinar por completo la evolución, sino que hace falta además especificar condiciones en la frontera. Por tal motivo, la función de partición $\mathcal{Z}_{AdS}$ tiene que ir acompañada de condiciones de frontera para cada campo $\phi_l(x^m)$, es decir,

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^{(0)}] = \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn}\mathcal{D}B_l^{mn}...e^{iS_{\mathrm{CIIB}}} \tag{3.28}$$

$$\varphi_l(x^\mu, z=0) \sim \varphi_l^{(0)}(x^\mu), ..., etc.$$

Las condiciones de frontera de los campos ϕ_j están determinadas por las ecuaciones de movimiento correspondientes.

En el caso particular de un campo escalar ϕ con comportamiento asintótico $\lim_{z\to 0}\phi(z,x^\mu) = z^\Lambda \phi^{(0)}(x^\mu)$, y al considerar la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Poicaré, uno puede verficar que

$$\Lambda(\Lambda-4)\phi^{(0)} + z^2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^{(0)} - m^2R^2\phi^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda(\Lambda-4) = m^2R^2,$$

debido a que el segundo término es subdominante cuando $z \to 0$. Por tanto, tenemos dos diferentes comportamientos asintóticos correspondientes a

$$\Lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 + m^2 R^2}. \tag{3.29}$$

Podemos notar de la ec. (3.23) que Λ_+ es equivalente a la dimensión de escalamiento del operador $\mathcal{O}$ que es dual al modo de KK con masa m. Es decir, $\Lambda_+ = \Delta$ y $\Lambda_- = 4 - \Delta$.

Si definimos el producto interno, para dos soluciones cualesquiera de Klein-Gordon, como

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \equiv i \int d^3\vec{x} dz \sqrt{-g} g^{tt} (\phi_1^* \partial_t \phi_2 - \phi_2 \partial_t \phi_1^*), \tag{3.30}$$

podemos comprobar que la solución ϕ_+, asociada a Λ_+, es normalizable. Mientras que para la solución con comportamiento asintótico Λ_-, es decir ϕ_-, se tiene que

$$\langle \phi_-, \phi_- \rangle \sim \int_0 dz \Big(\frac{R}{z}\Big)^5 \Big(\frac{z}{R}\Big)^2 z^{2\Lambda_-} \propto z^{2\Lambda_- -2}\big|_{z=0} \quad \to \infty \quad \text{si} \qquad \Lambda_- < 1, \tag{3.31}$$

es decir, ϕ_- es no normalizable si $m^2 R^2 > -3$.

Ésto no es particular para un campo escalar, sino es un resultado genérico. Para cualquier campo siempre existen dos comportamientos asintóticos de manera idéntica, es decir,

$$\lim_{z \to 0} \phi(z, x^\mu) = z^{\Lambda_\pm} \phi^{(0)}(x^\mu) \tag{3.32}$$

con $\Lambda_+ = \Delta$ (normalizable) y $\Lambda_- = 4 - \Delta$ (no normalizable).

Al cuantizar el campo $\phi(x^m)$ son sólo los modos normalizables los que pueden fluctuar, mientras que los no normalizables debido a que tienen un comportamiento asintótico tan violento no pueden fluctuar, y por tanto representan un fondo fijo, es decir definen la teoría. Los modos no normalizables pueden estar encendidos o no, dependiendo de lo que especifiquemos en las condiciones de frontera de los campos.

Encender modos no normalizables, modificando las condiciones de frontera, significa cambiar de teoría de la misma manera que sucede cuando queremos calcular la función de partición de lado de MSYM. Por tanto, uno puede proponer que (ver [19], [20])

$$\mathcal{Z}_{CFT}[J_j] = \mathcal{Z}_{AdS}[J_j] \tag{3.33}$$

donde

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^{(0)}] = \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn} \mathcal{D}B_l^{mn} ... e^{[iS_{\text{CIIB}}]} \tag{3.34}$$

$$\text{con} \quad \lim_{z\to 0} \phi_j(z, x^\mu) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^\mu).$$

Es decir, el valor de frontera $\phi_j^{(0)}(x^\mu) \equiv \lim_{z\to 0} z^{\Delta_j - 4} \phi_j(z, x^\mu)$ del campo $\phi_j(z, x^\mu)$ se interpreta como la fuente $J_j(x^\mu)$ del operador dual $\mathcal{O}_j(x^\mu)$.

Hasta aquí podemos tener la primera conclusión, ésta es la manera de interpretar a los modos normalizables y no normalizables del lado de la teoría conforme. Ésto es, encender modos no normalizables de $\phi_j(z, x^\mu)$ en AdS implica cambiar la CFT por $\delta S = \int d^4x \mathcal{O}_j(x^\mu)\phi_j^{(0)}(x^\mu)$, o viceversa. Mientras que encender modos normalizables implica del lado de la CFT cambiar de estado, o de manera equivalente en dirección opuesta.

En general, no sabemos calcular la función de partición $\mathcal{Z}_{AdS}$ de lado de cuerdas, ya que no conocemos el teoría completa. Pero en el límite de $\lambda \gg 1$, podemos restringirnos a los modos de SUGRA IIB en 9+1 dimensiones,

$$S_{\text{SUGRA}} = \frac{1}{16\pi G^{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \Big(R^{(10)} - \frac{1}{2} \partial_M \varphi \partial^M \varphi + \dots \Big) \tag{3.35}$$

o después de la descomposición en modos de KK sobre la S^5,

$$S_{\text{SUGRA}} = \frac{1}{16\pi G^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \Big(R^{(5)} - \frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi + \dots \Big) \tag{3.36}$$

donde

$$\frac{1}{16\pi G^{(5)}} \equiv \frac{\text{Vol}(S^5)}{16\pi G^{(10)}} = \frac{N^2}{8\pi^2 R^3} \tag{3.37}$$

con $\text{Vol}(S^5)$ el volumen de la S^5 y G la constante gravitacional (ver (4.14) y (4.16)). Para $N \to \infty$, esta acción se vuelve muy grande, así que la función de partición puede calcularse en la aproximación de punto silla,

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^{(0)}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn} \mathcal{D}B_l^{mn} \dots e^{iS_{\text{SUGRA}}[\phi_j]} \tag{3.38}$$

$$\lim_{z\to 0} \phi_j(z, x^\mu) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^\mu)$$

$$\overset{N\to\infty}{\simeq} \; e^{iS[\phi_j^{cl}[\phi^{(0)}]]} \tag{3.39}$$

donde ϕ_j^{cl} denota la solución a las ecuaciones de movimiento de SUGRA IIB con las condiciones de frontera dadas.

Por tanto, la conclusión es que para $\lambda \gg 1$, $N \to \infty$ podemos determinar las funciones de correlación de MSYM a través de un cálculo en AdS que involucra simplemente resolver las ecuaciones clásicas de SUGRA.

Confeccionar y mejorar el diccionario de la dualidad sólo es una parte del trabajo realizado en el contexto de la correspondencia AdS-CFT. Otra dirección de gran importancia es encontrar duales geométricos a teorías de norma que cada vez se parezcan más a QCD. Como vimos, la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ y $SYM\ \mathcal{N} = 4$ es el ejemplo mejor entendido de la dualidad, pero las características de esta teoría de norma son muy diferentes a las de QCD. Otros modelos sobre espaciotiempos de fondo más complicados presentan duales gravitacionales a teorías de norma que incorporan confinamiento, menos supersimetría, etc.

En el siguiente capítulo revisaremos una aplicación concreta de la herramienta matemática de la dualidad norma-gravedad para calcular la función de correlación del tensor energía-momento, y con ello determinar la viscosidad de un plasma de MSYM, además de calcular la entropía de dicho plasma. Con esta aplicación incorporaremos todos los resultados del diccionario mostrados aquí.

Capítulo 4

APLICACIÓN DE LA DUALIDAD NORMA-GRAVEDAD.

Como mencionamos en la sección 3.3 en lugar de buscar teorías gravitacionales duales a teorías más parecidas a QCD, una alternativa para acercarnos un poco más al mundo real consiste en encender una temperatura del lado de la teoría de norma, lo cual resulta útil para estudiar sistemas análogos al plasma de quarks y gluones de QCD. Introducir una temperatura T a la teoría de norma significa añadir energía al sistema sin modificar otros números cuánticos, de forma que la teoría en sí no se modifica, pero el estado particular es diferente. Para lograr ésto utilizando la correspondencia AdS-CFT, necesitamos regresar al sistema de N D3-branas como solución solitónica a las ecuaciones de SUGRA. En la deducción original de la dualidad de Maldacena únicamente se consideró el caso de la R3-brana extremal, $M = \frac{Q}{(2\pi)^3 g_c l_c^4}$. Sin embargo, si se introduce más energía al sistema dejando fija su carga lo que obtenemos es una R3-brana *no extremal*. Al tomar el límite de ultra-bajas energías de dicho sistema deducimos que el dual gravitacional de la teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ a *temperatura finita* es la geometría $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times S^5$ Los pioneros haciendo cálculos de coeficientes hidrodinámicos en este fondo fueron Son Starinets y Policastro [25, 26] . Es decir, la métrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\Big(- f(z)dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)}\Big) + R^2 d\Omega_5^2 \tag{4.1}$$

donde

$$f(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_H}\right)^4 \qquad z_H = (\pi T)^{-1} \tag{4.2}$$

con $z = \frac{R^2}{r}$ la coordenada radial y z_H la ubicación del horizonte de eventos. El comportamiento asintótico de la métrica revela que la física de la teoría de norma en el UV no se ve afectada por la presencia de la temperatura. Sin embargo, la física en el IR se modifica drásticamente. La métrica tiene un horizonte regular con área finita y temperatura de Hawking $T = (\pi z_H)^{-1}$. Sorprendentemente esta temperatura así como las propiedades termodinámicas del agujero negro van a ser las mismas en el lado de la teoría de norma, donde lo que tenemos es un plasma fuertemente acoplado de gluones y materia en la representación adjunta. En las siguientes seccíones discutiremos evidencias que dan soporte a esta afirmación.

4.1. Densidad de entropía de un plasma.

La primera evidencia consiste en el cálculo de la densidad de entropía s del plasma de MSYM. Para ello utilizaremos la relación de Bekenstein-Hawking donde tenemos que la entropía S es proporcional al área A_H del horizonte de eventos de un hoyo negro, es decir,

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4G} \tag{4.3}$$

donde G es la constante gravitacional.

Aprovechando que la geometría (4.1) es el producto de dos espacios, nos enfocaremos primero a calcular el área del horizonte respectivo a la métrica (AdS-Schwarzchild)$_5$. El volumen d-dimensional es calculado por medio de:

$$V_d^g = \int dx^0 dx^1 dx^2 ... dx^{d-1} \sqrt{-\det h_{ab}} \tag{4.4}$$

donde h_{ab} es la métrica inducida:

$$h_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} g_{\mu\nu}(x). \tag{4.5}$$

Para calcular el volumen del horizonte de un hoyo negro se tiene que $z = z_H$, a tiempo fijo t_f, para toda $\vec{x}$, y por tanto

$$ds^2 = \frac{R^2}{z_H^2} d\vec{x}^2 \qquad z = z_H, \quad t = t_f, \quad \forall \vec{x}.$$

En este caso tenemos que $h_{ab} = g_{ab}$, y entonces

$$V^{AdS_5} = \int d^3\vec{x}\sqrt{-\det(g_{ab})} = \int d^3\vec{x}\Big(\frac{R}{z_H}\Big)^3 = \frac{R^3}{z_H^3}\int d^3\vec{x} = \frac{R^3}{z_H^3}V_{3d}$$

concluimos que

$$V^{AdS_5} = \frac{R^3}{z_H^3}V_{3d} \tag{4.6}$$

donde V es el volumen tridimensional euclideano.

Ahora, para calcular el área de la 5-esfera. Se tiene que, por análisis dimensional, el volumen de la esfera de radio r esta relacionada al volumen de una esfera de radio unitario por:

$$Vol(S^{d-1}(r)) = r^{d-1}Vol(S^{d-1}). \tag{4.7}$$

El problema se restringe entonces a encontrar el volumen de una d-esfera unitaria. Para este propósito evaluaremos la integral

$$I_d = \int_{R^d} dx_1 dx_2 ... dx_d e^{-r^2}, \tag{4.8}$$

en dos formas diferentes donde hemos considerado el espacio $\mathbb{R}^d$ en coordenadas $x_1, x_2, ..., x_d$ y coordenada radial $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_d^2$.

Primero procederemos considerando el producto de d integrales gaussianas, es decir,

$$I_d = \prod_{i=1}^{d}\int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = \prod_{i=1}^{d}(\sqrt{\pi})^i = \pi^{\frac{d}{2}}. \tag{4.9}$$

Por otro lado, consideremos capas delgadas esféricas. Puesto que el espacio de constante r es la esfera $S^{d-1}(r)$, el volumen de una capa entre r y $r + dr$ es igual al volumen de $S^{d-1}(r)$ por dr, es decir,

$$I_d = \int_0^{\infty} dr Vol(S^{d-1}(r))e^{-r^2} = Vol(S^{d-1})\int dr r^{d-1}e^{-r^2}$$

$$I_d = \frac{1}{2}Vol(S^{d-1})\int_0^{\infty} dt e^{-t}t^{d/2-1}$$

para llegar a la ultima igualdad se hizo el cambio de variable $t = r^2$. Para resolver la integral, recordemos la definición de la función gamma, es decir,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t}t^{x-1} \qquad x > 0 \tag{4.10}$$

y las siguientes propiedades:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x > 0, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z} \quad y \quad n \geq 0 \tag{4.11}$$

Tenemos que la integral en términos de esta función es

$$I_d = \frac{1}{2} Vol(S^{d-1}) \Gamma(\frac{d}{2}), \tag{4.12}$$

comparando con la evaluación anterior, obtenemos

$$Vol(S^d) = 2\pi^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\frac{d+1}{2}). \tag{4.13}$$

Se tiene entonces que

$$Vol(S^5(r)) = Vol(S^5) r^5 = 2\pi^3 \Gamma(3) r^5 = \frac{2\pi^3}{2!} r^5 = \pi^3 r^5. \tag{4.14}$$

Por supuesto, este mismo resultado se puede obtener usando (4.3) con una elección estándar de coordenadas angulares sobre la S^5.

Podemos finalmente calcular el área del horizonte de eventos con el producto directo de la 5-esfera con (AdS-Schwarzchild)$_5$, es decir,

$$A_H = \Big[V_5^{AdS}\Big] \Big[Vol(S^5(R))\Big] = \Big[\Big(\frac{R^3}{z_H^3}\Big) V_{3d}\Big] \Big[\pi^3 R^5\Big]$$

$$A_H = (\frac{\pi}{z_H})^3 R^8 V_{3d} \tag{4.15}$$

Para calcular la densidad de entropía s falta calcular la constante gravitacional $G^{(10)}$ 10-dimensional. Para ello consideremos las relaciones entre los parámetros de las teorías duales

$$g_{\rm YM}^2 = 4\pi g_c, \quad g_{\rm YM}^2 N = \frac{R^4}{l_c^4} \qquad \text{y que} \qquad \sqrt{8\pi G^{(10)}} = 8\pi^{7/2} g_c l_c^4.$$

Al combinar las dos primeras,

$$g_c l_c^4 = \frac{R^4}{4\pi N}$$

y sustituyendo

$$\sqrt{8\pi G^{(10)}} = \frac{2\pi^{5/2} R^4}{N},$$

tenemos que

$$G^{(10)} = \frac{\pi^4 R^8}{2N^2}. \tag{4.16}$$

Finalmente de la relación de Bekenstein-Hawking se tiene que

$$s = \frac{S}{V_{3d}} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi^3}{z_H^3})R^8\Big)\Big(\frac{2N^2}{\pi^4 R^8}\Big) = \frac{N^2}{2\pi z_H^3}.$$

Por tanto usando (4.2), la densidad de entropía del plasma de MSYM es

$$s = \frac{\pi^2 N^2 T^3}{2}. \tag{4.17}$$

De aquí vale la pena resaltar dos cosas. Primero, que la entropía es proporcional a N^2, lo cual es una señal de desconfinamiento. Y segundo, que el valor obtenido es $\frac{3}{4}$ del valor predicho por la ley de Stefan-Boltzmann para un gas *libre* de SYM $\mathcal{N}$=4. Éste último hecho no es un error de la correspondencia AdS-CFT; por el contrario, se interpreta como una predicción para el límite de acoplamiento fuerte. En efecto, se tiene que

$$s_{\text{SYM}} = f(\lambda) s_{SB} \tag{4.18}$$

donde $f(\lambda)$ es una función continua tal que $f(0) = 1$ y $f(\infty) = \frac{3}{4}$ [21]. Cálculos perturbativos en SYM débilmente acoplado, y correcciones del lado de teoría de cuerdas para $1 \ll \lambda < \infty$ son consistentes con este hecho [22, 23]. Resultados [24] obtenidos mediante QCD en la red estipulan que a temperaturas que se encuentran en el régimen de desconfinamiento e incluso cuando el plasma está fuertemente acoplado se tiene que $s_{QCD} \approx \frac{4}{5} s_{SB}$ (notar que $\frac{4}{5}$ se acerca más a $\frac{3}{4}$ que a 1). El resultado obtenido para SYM sugiere que el valor obtenido numéricamente para QCD es una huella de que los plasmas fuertemente acoplados exhiben propiedades similares independientemente de la teoría subyacente.

4.2. Hidrodinámica.

La hidrodinámica es una teoría efectiva, ya que describe con éxito solo fenómenos que ocurren a longitudes de onda grandes (el continuo) y a frecuencias bajas (tiempos largos) [27, 28]. Además como sabemos es normalmente formulada en el lenguaje de ecuaciones de movimiento en vez de un principio de acción.

Por otro lado, el alcance de hoy en día de la termodinámica fuera del equilibrio no cubre todos los procesos físicos. Una condición para la validez de muchos estudios en termodinámica fuera del equilibrio de la materia es la que se conoce como *equilibrio térmico local* [28]. El equlibrio térmico local de materia significa conceptualmente que, para el estudio y análisis, el sistema puede ser divido espacial y temporalmente en celdas de tamaño infinitesimal. Cuando estas celdas son definidas, se admite que la materia y energía puede pasar libremente entre dos celdas contiguas suficientemente lento para dejar las celdas en su respectivo equilibrio térmico local con respecto a sus *variables intensivas*. Y por tanto, las condiciones de equilibrio térmico en cada celda son una buena aproximación. En ocasiones se asume que las variables intensivas de la termodinámica en equilibrio son suficientes como las variables independientes para describir la dinámica. Uno puede pensar aquí en dos tiempos de relajación separados por orden de magnitud. El tiempo de relajación más largo es del orden de magnitud del tiempo que le toma a la estructura dinámica macroscópica del sistema cambiar. El tiempo mas corto es del orden de magnitud del tiempo que le toma a una celda alcanzar el equilibrio térmico local. Si estos dos tiempos de relajación no estan bien separados el concepto de equilibrio térmico local pierde su significado, y otros enfoques tienen que ser propuestos.

Las ecuaciones que rigen toda la mecánica de fluidos se obtienen por la aplicación de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen de fluido. Para el caso relativista [29], se tiene la conservación del tensor de energía-momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.19}$$

donde ∇_μ es la derivada covariante compatible con la métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ en donde el fluido vive. Estas ecuaciones no constituyen un problema de valores iniciales, en general, ya que para $d \geq 2$ tenemos mas variables que ecuaciones ($\frac{1}{2}d(d+1)$ componentes independientes del tensor energía-momento).

En el límite hidrodinámico con la suposición de equilibrio local, el estado del sistema, en un tiempo dado, es determinado por los campos de temperatura $T(x)$ y velocidad $v^\mu(x)$. Debido a que $v_\mu v^\mu = -1$, solo tres componentes de v^μ son independientes. Por consiguiente, el número de variables hidrodinámicas es cuatro, igual al número de ecuaciones.

Se tiene entonces que las ecuaciones para fluidos dinámicos no cargados son las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento y la relación de $T^{\mu\nu}$ con $T(x)$ y $v^\mu(x)$. (En el caso de fluidos con carga, se considera también la ecuación de conservación para la carga.) Siguiendo el procedimiento estándar de teorías de campo efectivas, hacemos un desarrollo en derivadas de las variables dinámicas. En general, los coeficientes pueden ser obtenidos ya sea por mediciones o por cálculos microscópicos.[1]

Para un fluido en equilibrio térmico local podemos entonces escribir una expresión para el tensor de energía-momento de un fluido d-dimensional como una función de los campos de temperatura y velocidad:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)v^{\mu}v^{\nu} + Pg^{\mu\nu} - \sigma^{\mu\nu} \tag{4.20}$$

donde ρ es la densidad de energía, P es la presión y $\sigma^{\mu\nu}$ representa la contribución de derivadas de T y v^{μ} al tensor de energía-momento. Los primeros dos términos describen el tensor del fluido ideal, mientras $\sigma^{\mu\nu}$ incorpora todos los términos disipativos:

$$\sigma^{\mu\nu} \propto \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^{\mu\nu}_{(n)} \tag{4.21}$$

donde $\sigma^{\mu\nu}_{(n)}$ es el n-ésimo orden en derivadas de los campos dinámicos del fluido.

La forma explícita de las funciones $\sigma^{\mu\nu}_{(n)}$ puede ser derivada a partir de la dinámica del sistema específico. Sin embargo, por simetría y otras consideraciones generales la relación constitutiva es reducida significativamente. A primer orden, por ejemplo, se tiene

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)} \equiv P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\left[\eta\left(\partial_{\alpha}v_{\beta} + \partial_{\beta}v_{\alpha} - \frac{2}{d-1}g_{\alpha\beta}\partial_{\lambda}v^{\lambda}\right) + \zeta g_{\alpha\beta}\partial_{\lambda}v^{\lambda}\right] \tag{4.22}$$

donde $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + v^{\mu}v^{\nu}$ es un operador de proyección sobre las direcciones perpendiculares a v^{μ}.

Los coeficientes η y ζ son funciones arbitrarias de la temperatura, referidas a la *viscosidad de corte* (shear) y *viscosidad volumétrica* (bulk), repectivamente. En el caso de una CFT el tensor de energía-momento es necesariamente sin traza; esto lleva a que $P = \frac{\rho}{d-1}$ y $\zeta = 0$, y por tanto no existe viscosidad volumétrica. A ordenes más altos obtenemos más términos, una discusion de términos permitidos en segundo orden es considerado en [36]. En general, hay funciones escalares de las variables termodinámicas multiplicando estos términos, es decir, los coeficientes de transporte.

[1] Sin embargo, veremos más adelante que el coeficiente correspondiente a la viscosidad es posible determinarlo, del lado de gravedad.

4.3. Viscosidad de un plasma de MSYM.

Un paso más adelante al cálculo anterior, consiste en perturbar la métrica y estudiar fluctuaciones para determinar propiedades hidrodinámicas de la teoría de norma, que como mencionamos no eran accesibles con las herramientas teóricas tradicionales. Los pioneros en este tipo de trabajos fueron Policastro, Son y Starinets [30], quienes calcularon coeficientes de transporte de la teoría SYM $\mathcal{N}=4$ a temperatura finita a partir de las funciones de correlación del tensor energía-momento y la fórmula de Kubo. Ésto generó una intensa actividad en torno al tema, debido a que se pudieron determinar ciertas propiedades para un conjunto amplio de teorías de norma fuertemente acopladas.

Una aplicación particular de la teoría de la respuesta lineal es el uso de la formula de Kubo para extraer coeficientes de transporte de plasmas de teorias de norma fuertemente acopladas

El cálculo que realizaremos aquí será el de la viscosidad de corte del plasma de MSYM. Para ello consideraremos la relación de Kubo [31] correspondiente a la viscosidad de corte η, es decir,

$$\eta = -\lim_{w\to 0}\frac{1}{w}\mathrm{Im}G^{R}_{xy,xy}(w,0), \tag{4.23}$$

donde $G^{R}_{xy,xy}(w,0)$ denota a la función de Green retardada de la componente xy del tensor energía-momento,

$$iG^{R}_{\mu\nu,\mu\nu}(x',x) = \theta(x'^{0}-x^{0})\langle[T_{\mu\nu}(x'),T_{\mu\nu}(x)]\rangle. \tag{4.24}$$

Recordemos además los siguientes dos enunciados del diccionario de la correspondencia (capítulo 3):

1. Para cada operador $\mathcal{O}(x^{\mu})$ invariante de norma de la teoría de campo existe un campo[2] $\phi(x^{m})$ dual en la teoría de cuerdas.

2. La receta para calcular correladores, dada por:

$$Z_{\mathrm{CFT}}[J] = e^{iS[\phi_{cl}]}, \tag{4.25}$$

[2] De manera precisa y particular se tiene que los modos de Kaluza-Klein $\phi_k(x^m)$ sobre la S^5 (Campo de Cuerdas IIB en AdS_5) son los que son duales a los operadores $\mathcal{O}(x^{\mu})$ de MSYM.

donde el lado izquierdo es la función de partición de la teoría de campo, con la fuente externa J acoplada al operador $\mathcal{O}$,

$$Z_{\mathrm{CFT}}[J] = \int DAe^{[iS+i\int d^4xJ\mathcal{O}]},$$

mientras que en el lado derecho aparece la exponencial de la acción $S[\phi_{cl}]$ de la solución clásica ϕ_{cl} de la ecuación de campo con la condición de frontera:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\phi_{cl}(z,x)}{z^{\Lambda}} = J(x) \tag{4.26}$$

donde $\Lambda = 4 - \Delta$, con Δ la dimensión del operador $\mathcal{O}$ que es dual al campo ϕ. Cuando $\Delta = 4$, como es el caso del tensor de energía-momento, tenemos

$$\phi_{cl}(z=0,x) = J(x) = \phi_0(x). \tag{4.27}$$

Tomando en cuenta estos dos enunciados y siguiendo el método habitual de teoría cuántica de campos[3], uno puede encontrar una relación para calcular correladores de dos puntos del operador $\mathcal{O}$ a partir de la correspondencia norma-gravedad:

$$G(x',x) = -i\langle T\mathcal{O}(x'),\mathcal{O}(x)\rangle = -\frac{\delta^2 S_{cl}[\phi]}{\delta J(x')\delta J(x)}\Big|_{\phi_{cl}(Z=0)=J=0}, \tag{4.28}$$

Se tiene entonces que la correspondencia AdS-CFT mapea el problema de encontrar funciónes de correlación en la teoría de campos fuertemente acoplada a un problema clásico en gravedad.

Además, queda claro que para encontrar funciones de correlación de dos puntos en QFT a partir de la correspondencia norma-gravedad, uno puede limitarse a la parte cuadrática de la acción clásica del lado de gravedad.

El caso que nos interesa es encontrar la función de correlación del tensor de energía-momento. Por tal motivo consideremos fluctuaciones h_{mn} sobre un fondo[4] de la forma

$$ds^2 = g_{zz}dz^2 + g_{\mu\nu}(z)dx^{\mu}dx^{\nu}. \tag{4.29}$$

[3]Es decir, aplicar la derivada funcional a la función de partición $Z[J]$ dos veces con respecto a $J(x)$ y finalmente apagar la fuente, $J(x) = 0$, para obtener la función de correlación de dos puntos respectiva.

[4]Es decir, $g_{mn} = \bar{g}_{mn} + \sqrt{G}h_{mn}$ donde $\bar{g}_{mn}$ es el valor de fondo del campo (por ejemplo, AdS), h_{mn} la fluctuación que se cuantiza dando lugar a partículas y G la constante de Newton.

Se tiene que la acción (Einstein-Hilbert) para la métrica es

$$S_{\text{E-H}} = \frac{1}{16\pi G^{(5)}}\int d^4xdz\sqrt{-g}R \sim \int d^4xdz\Big(\partial h\partial h + \sqrt{G^{(5)}}h\partial h\partial h + \cdots\Big), \tag{4.30}$$

Los términos proporcionales a $\sqrt{G}$ de la acción Einstein-Hilbert son descartados debido a que en nuestra receta de cálculo de correladores, a partir de la dualidad AdS-CFT, nos concentraremos en el caso cuando la CFT está acoplada fuertemente, y tiene muchos colores $N \to \infty$ y $\lambda \gg 1$, ver la ecuación (3.37).

Para calcular la viscosidad necesitamos calcular la función de correlación de dos puntos de la componente xy del tensor energía-momento T_{xy}, que es dual a la componente $h_{xy} \equiv \phi$. La acción para ϕ es:

$$S = K\int dx^4\int_{z_B}^{z_H} dz\sqrt{-g}\big[g^{zz}(\partial_z\phi)^2 + g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi\big]. \tag{4.31}$$

Siguiendo nuestra receta para calcular correladores, necesitamos encontrar la solución clásica a las ecuaciones de movimiento, que se obtienen como siempre a partir del principio de mínima acción.

La ecuación de movimiento es por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_z(\sqrt{-g}g^{zz}\partial_z\phi) + g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0 \tag{4.32}$$

Uno puede proponer una solución para esta ecuación de la siguiente manera,

$$\phi(p,z) = f_p(z)\phi_0(p), \qquad \phi(x,z) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}f_p(z)\phi_0(p)e^{ip\cdot x}, \tag{4.33}$$

con la condición de frontera:

$$\phi(p,z=0) = \phi_0(p), \qquad \phi_0(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\phi_0(p)e^{ip\cdot x}. \tag{4.34}$$

Al sustituir esta solución en la ecuación de movimiento tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot x}\phi_0(p)\partial_z\big(\sqrt{-g}g^{zz}\partial_z f_p(z)\big) + g^{\mu\nu}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}f_p(z)\phi_0(p)\partial_\mu\partial_\nu e^{ip\cdot x} = 0$$

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot x}\phi_0(p)\Big[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_z(\sqrt{-g}g^{zz}\partial_z f_p(z)) + g^{\mu\nu}f_p(z)(-p_\mu p_\nu)\Big] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_z\big(\sqrt{-g}g^{zz}\partial_z f_p(z)\big) - g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu f_p(z) = 0 \tag{4.35}$$

con condición en la frontera $f_p(z=0)=1$.

Considerando ahora el caso particular correspondiente al dual geométrico $ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2)$ tenemos:

$$\frac{z^5}{R^5}\partial_z\Big(\frac{R^5}{z^5}\frac{z^2}{R^2}\partial_z f_p\Big) - p^2\frac{z^2}{R^2}f_p = 0$$

$$\frac{z^5}{R^2}\partial_z\Big(z^{-3}\partial_z f_p\Big) - p^2\frac{z^2}{R^2}f_p = 0$$

$$\frac{z^5}{R^2}\Big(-3z^{-4}\partial_z f_p + z^{-3}\partial_z^2 f_p\Big) - p^2\frac{z^2}{R^2}f_p = 0$$

$$\frac{-3z}{R^2}\partial_z f_p + \frac{z^2}{R^2}\partial_z^2 f_p - p^2\frac{z^2}{R^2}f_p = 0$$

$$\partial_z^2 f_p(z) - \frac{3}{z}\partial_z f_p(z) - p^2 f_p(z) = 0 \tag{4.36}$$

Una propuesta de solución es dada por $f_p(z) = \frac{1}{2}(pz)^2 g(pz)$, donde g es una función por determinar,

$$\frac{p^2}{2}\Big[z^2(z^2g'' + 4zg' + 2g) - 3z(2zg + z^2g) - p^2z^4g\Big] = 0$$

$$\frac{p^2}{2}\Big[z^4g'' + 4z^3g' + 2z^2g - 6z^2g - 3z^3g' - p^2z^4g\Big] = 0$$

$$\frac{p^2}{2}\Big[z^4g'' + z^3g' - 4z^2g - p^2z^4g\Big] = 0$$

$$z^4g'' + z^3g' - 4z^2g - p^2z^4g = 0 \qquad \text{Si} \quad p^2 > 0$$

$$z^2g'' + zg' - (p^2z^2g + 2^2)g = 0.$$

Ésta última es la ecuación de Bessel modificada de grado 2, por lo tanto $g(pz) = K_2(pz)$. Tenemos entonces que

$$f_p(z) = \frac{1}{2}(pz)^2K_2(pz) = 1 - \frac{1}{4}(pz)^2 - \frac{1}{16}(pz)^4\ln(pz) + ... \tag{4.37}$$

La segunda solución es $h(pz) = (pz)^2I_2(pz)$ y es descartada porque diverge exponencialmente cuando $z \to \infty$.

Por otro lado, consideremos la siguiente derivada

$$\partial_m\big(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^m\phi_{cl}\big) = \sqrt{-g}\partial_m\phi_{cl}\partial^m\phi_{cl} + \phi\partial_m\big(\sqrt{-g}\partial^m\phi_{cl}\big),$$

y tomando en cuenta la ecuación de movimiento, $\partial_m\big(\sqrt{-g}\partial^m\phi_{cl}\big) = 0$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\partial_m\big(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^m\phi_{cl}\big) = \sqrt{-g}\partial_m\phi_{cl}\partial^m\phi_{cl}.$$

Ahora, si sustituimos en la acción tenemos

$$\begin{aligned}
S = K\int d^4x\int_0^{z_H} dz\sqrt{-g}\partial_m\phi_{cl}\partial^m\phi_{cl} = K\int d^4x\int_0^{z_H} dz\partial_m\big(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^m\phi_{cl}\big) = \\
= K\int d^4x\int_0^{z_H} dz\Big[\partial_z(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^z\phi_{cl}) + \partial_\mu(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^\mu\phi_{cl})\Big] = \\
= K\int d^4x\int_0^{z_H} dz\partial_z(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^z\phi_{cl}) + K\int_0^{z_H} dz\int d^4x\partial_\mu(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^\mu\phi_{cl}) = \\
= K\int d^4x(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^z\phi_{cl})\Big|_0^{z_H} + K\int_0^{z_H} dz(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^\mu\phi_{cl})|_{-\infty}^{\infty} = \qquad (4.38) \\
= K\int d^4x(\phi_{cl}\sqrt{-g}\partial^z\phi_{cl})\Big|_0^{z_H} = K\int d^4x(\sqrt{-g}g^{zz}\phi_{cl}\partial_z\phi_{cl})\Big|_0^{z_H}.
\end{aligned}$$

Por tanto, al sustituir la solución de la ecuación de movimiento, tenemos que

$$S = K\int d^4x(\sqrt{-g}g^{zz}\phi_{cl}\partial_z\phi_{cl})\Big|_0^{z_H} = \qquad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
= K\int d^4x\sqrt{-g}g^{zz}\Big[\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}f_{p'}(z)\phi_0(p')e^{ip'\cdot x}\Big]\partial_z\Big[\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}f_p(z)\phi_0(p)e^{ip\cdot x}\Big]\Big|_0^{z_H} \\
= K\int\sqrt{-g}g^{zz}\Big[\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{i(p'+p)\cdot x}\Big]\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d^4p'\phi_0(p)\phi_0(p')f_{p'}(z)\partial_z f_p(z)\Big|_0^{z_H} \\
= K\int d^4p'\delta^{(4)}(p'+p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\phi_0(p)\phi_0(p')\sqrt{-g}g^{zz}f_{p'}(z)\partial_z f_p(z)\Big|_0^{z_H} \\
= K\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\phi_0(-p)\phi_0(p)\sqrt{-g}g^{zz}f_{-p}(z)\partial_z f_p(z)\Big|_0^{z_H}.
\end{aligned}$$

Y tenemos la acción en términos del valor frontera $\phi_0 = \phi_{cl}(p, z = 0)$:

$$S = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\phi_0(-p)\mathcal{F}(p,z)\phi_0(p)\Big|_0^{z_H} \tag{4.40}$$

donde

$$\mathcal{F}(p,z) = K\sqrt{-g}g^{zz}f_{-p}(z)\partial_z f_p(z). \tag{4.41}$$

Antes de derivar recordemos la definición de una derivada funcional

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(x')} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\phi(x) + \varepsilon\delta^{(n)}(x-x')] - F[\phi(x)]}{\varepsilon}$$

Por ejemplo,

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[\phi(x) + \varepsilon\delta^{(n)}(x-x') - \phi(x)]}{\varepsilon} = \delta^{(n)}(x-x'),$$

$$\frac{\delta[\int dx^n f(x)g(x)]}{\delta f(x')} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int dx^n[f(x) + \varepsilon\delta^{(n)}(x-x')]g(x) - \int dx^n f(x)g(x)}{\varepsilon} =$$

$$= \int dx^n\delta^{(n)}(x-x')g(x) = g(x').$$

Siguiendo con nuestra receta para calcular correladores a partir de la correspondencia norma-gravedad, tenemos que derivar la acción con respecto al valor frontera $\phi_0(p)$, es decir,

$$\langle T_{xy}(p'), T_{xy}(p)\rangle = -\frac{\delta^2 S[g_{\mu\nu}]}{\delta\phi_0(p')\delta\phi_0(p)}.$$

Ahora considerando la dependencia de k y k' de $\mathcal{F}(k,k',z)$, correspondiente a p y $-p$ respectivamente en su definición, e introduciendo una delta de Dirac,

$$\langle T_{xy}(p'), T_{xy}(p)\rangle = -\frac{\delta^2}{\delta\phi_0(p')\delta\phi_0(p)}\int\frac{dk^4}{(2\pi)^4}dk'^4\phi_0(k')\delta^{(4)}(k'+k)\mathcal{F}(k,k',z)\phi_0(k)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\phi_0(p')}\int\frac{dk^4}{(2\pi)^4}dk'^4\Big[\frac{\partial\phi_0(k')}{\partial\phi_0(p)}\phi_0(k) + \frac{\partial\phi_0(k)}{\partial\phi_0(p)}\phi_0(k')\Big]\delta^{(4)}(k'+k)\mathcal{F}(k,k',z)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\phi_0(p')}\int\frac{dk^4}{(2\pi)^4}dk'^4\Big[\delta^{(4)}(k'-p)\phi_0(k) + \delta^{(4)}(k-p)\phi_0(k')\Big]\delta^{(4)}(k'+k)\mathcal{F}(k,k',z)$$

$$= -\int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} dk'^4 \Big[\delta^{(4)}(k'-p)\delta^{(4)}(k-p')+\delta^{(4)}(k-p)\delta^{(4)}(k'-p')\Big]\delta^{(4)}(k'+k)\mathcal{F}(k,k',z)$$

Por tanto,

$$\langle T_{xy}(p'), T_{xy}(p)\rangle = -\frac{\delta^{(4)}(p+p')}{(2\pi)^4}\Big[\mathcal{F}(p,p',z)+\mathcal{F}(p',p,z)\Big] \qquad (4.42)$$

donde

$$\mathcal{F}(p,z) = K\sqrt{-g}g^{zz}f_{-p}(z)\partial_z f_p(z). \qquad (4.43)$$

Recordemos que, hasta aquí la única suposición que se ha hecho para calcular tal correlador ha sido que la métrica sea diagonal, por tanto puede ser utilizado para cualquier teoría de campos con dual geométrico de la forma (4.24).

Para el caso en que la solución a la ecuación de movimiento sea simétrica, como es el caso para temperatura cero tenemos,

$$\langle T_{xy}, T_{xy}\rangle_p = -2\lim_{z\to 0}\mathcal{F}(p,z). \qquad (4.44)$$

Notemos que la acción $S \sim \int dz d^4x\sqrt{-g}\ldots$ será divergente en $z=0$, debido a que el volumen del espacio diverge. Por la conexión UV-IR esta divergencia IR en AdS corresponde a una divergencia UV en la CFT, como era de esperarse. El procedimiento que se sigue es regularizar truncando la integral $\int_0^\infty dz$ a $\int_\epsilon^\infty dz$ (para que las divergencias se vuelvan cantidades manejables). Por tanto, pediremos como condición de frontera:

$$\phi(z,x^\mu) \xrightarrow{z\to\epsilon} \epsilon^{4-\Delta}J(x^\mu). \qquad (4.45)$$

Ésto se puede interpretar dicendo que la fuente no está completamente localizada, sino esparcida en una regón de tamaño $\sim \epsilon$. Después de regularizar, se agregan (contra)términos locales, definidos en la superficie de corte $z=\epsilon$, en la acción regularizada $S_\epsilon[\phi]$. La acción total, $S_\epsilon + S_{ct}^\epsilon$ da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que S_ϵ, pero no tiene divergencias IR (UV en la CFT) cuando se evalúa en la capa de masa en el límite $\epsilon\to 0$. Este procedimiento es conocido como *renormalización holográfica* [32].

Siguiendo con el caso particular se tiene que $K\sqrt{-g}g^{zz} = \left(\frac{N^2}{16\pi^2R^3}\right)\left(\frac{R^5}{z^5}\right)\left(\frac{z^2}{R^2}\right) = \frac{N^2}{16\pi^2z^3}$, ya que $ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2+\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)$. Por tanto

$$\mathcal{F}(p,z) = \frac{N^2}{16\pi^2}\frac{f_{-p}(z)\partial_z f_p(z)}{z^3}.$$

Considerando nuestra solución de la ecuación de campo $f_p(z) = \frac{1}{2}(pz)K_2(pz) = 1 - \frac{1}{4}(pz)^2 - \frac{1}{16}(pz)^4 ln(pz) + ...$,y tomando en cuenta el cambio de variable $x = pz, x' = p$ tenemos

$$\langle T_{xy}, T_{xy}\rangle_p = -2 \lim_{z\to\epsilon} \mathcal{F}(p,z)$$

$$= -2 \lim_{z\to\epsilon} \frac{N^2}{16\pi^2} z^{-3}[1-\frac{1}{4}(x)^2-\frac{1}{16}(x)^4\ln(x)][-\frac{2}{4}xx'-\frac{4}{16}x^3x'\ln(x)-\frac{1}{16}x^4x^{-1}x']$$

$$= -\frac{N^2}{8\pi^2}\lim_{z\to\epsilon}\Big[-\frac{1}{2}p^2z^{-2}-\frac{1}{4}p^4\ln(pz)-\frac{1}{16}p^4+\frac{1}{8}p^4+\frac{1}{16}p^6z^2\ln(pz)+...$$

$$...+\frac{1}{64}p^6z^2+\frac{1}{32}p^6z^2\ln(pz)+-\frac{1}{64}p^8z^4\ln^2(pz)+\frac{1}{256}p^8z^4\ln(pz)\Big]$$

$$= -\frac{N^2}{8\pi^2}\Big[-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{z\to\epsilon}p^2z^{-2}}\ -\frac{1}{4}p^4\lim_{z\to\epsilon}\ln(pz)-\underbrace{\frac{1}{8}p^4}\Big]$$

$$= -\frac{N^2}{8\pi^2}\Big[-\frac{1}{4}p^4(\ln p+\underbrace{\lim_{z\to\epsilon}\ln z})\Big]$$

$$\langle T_{xy}, T_{xy}\rangle_p = \frac{N^2}{64\pi^2}p^4\ln(p^2) \qquad p^2 > 0. \tag{4.46}$$

Los términos subrayados son descartados porque son analíticos en p. Es decir al transformar al espacio de posiciones son proporcionales a derivadas de delta, $p^{2m} \to \Box^m\delta^{(4)}(x-x')$, así que estos términos sólo contribuirían al correlador en puntos coincidentes. Por esta razón, se les conoce como *términos de contacto*. Éstos son el tipo de términos que sí pueden ser eliminados por los contratérminos locales, como parte del proceso de renormalización. Tales contratérminos involucran a el campo ϕ, sus derivadas, y la métrica inducida, y es por ello que sólo pueden dar lugar a vértices que son polinomiales en los momentos.

Sin embargo, cuando $p^2 < 0$, es decir p_μ es tipo tiempo, existen dos soluciones, ninguna de las cuales puede ser descartada, pues no divergen cuando $z \to \infty$. Por tanto tenemos que, para calcular el correlador de un operador a partir de la correspondencia hay que ser más cuidadosos con la elección de la solución de la ecuación de campo.

Una manera de enfocar el problema es considerar condiciones de frontera en el horizonte a partir del punto de vista físico, es decir, tomando en cuenta que clásicamente nada puede ser emitido del horizonte de eventos de un hoyo negro. Ésto es una condición de frontera puramente entrante, donde las ondas sólo pueden viajar hacia adentro del horizonte de eventos de la brana negra, pero no pueden ser emitidas de él. Esta condición de frontera, que implementa la causalidad, es justamente la que corresponde a la función de Green retardada, mientras que la condición de frontera saliente da surgimiento a la función de Green avanzada.

Por lo tanto, considerando el valor frontera dado por $f_p(z=0)=1$ y la condición de frontera entrante uno puede determinar la solución de la ecuación de campo y calcular el correlador retardado.

Hay que notar, que hasta aquí la formulación mostrada de la correspondencia para calcular correladores fue en el espacio de Minkowski y es razonable que existieran diferentes soluciones, pues refleja la multitud de funciones de Green en tiempo real de teoría de campos a temperatura finita.

Sin embargo, a pesar de satisfacer la condición de frontera entrante en el horizonte existe aún un problema en la ecuación

$$G(k) = -\mathcal{F}(p,z)\Big|_0^{z_H} - \mathcal{F}(-p,z)\Big|_0^{z_H}. \tag{4.47}$$

Uno puede notar que esta cantidad es completamente real y por tanto no puede ser candidata para la función de Green retardada, la cual en general es compleja. Como $f_p^*(z) = f_{-p}(z)$ es también una solución a la ecuación de movimiento, y satisface la condición de frontera entrante, se puede notar que la parte imaginaria de $\mathcal{F}(p,z)$ es proporcional al flujo conservado de la corriente de Klein-Gordon,

$$Im\mathcal{F}(p,z) = \frac{K}{2i}\sqrt{-g}g^{zz}[f_p^*\partial_z f_p - f_p\partial_p f_k^*], \tag{4.48}$$

y por tanto $Im\mathcal{F}(p,z)$ es independiente de la coordenada radial, $\partial_z Im\mathcal{F}=0$. Entonces, la parte imaginaria en el horizonte z_H se cancela con la parte imaginaria en la frontera, $z=0$. Podemos evitar este problema eliminando la contribución de z_H, y manteniendo solo el término frontera en la frontera. Sin embargo, la parte imaginaria de cada uno de los términos se cancelan uno otro (debido a que $\mathcal{F}(-p,z) = \mathcal{F}^*(p,z)$). Resulta entonces que $G(p)$ es aún real, y por lo tanto no podemos obtener la función de Green retardada a partir de la teoría de gravedad.

Una solución parcial a este problema fue sugerido por Son y Starinets [33]. Ellos postularon que la función de Green retardada está relacionada con la función $\mathcal{F}(p,z)$ obtenida anteriormente, es decir,

$$G^R(p) = -2\lim_{z\to 0}\mathcal{F}(p,z) \tag{4.49}$$

donde

$$\mathcal{F}(p,z) = K\sqrt{-g}g^{zz}f_{-p}(z)\partial_z f_p(z). \tag{4.50}$$

En particular se eliminaron las contribuciones del horizonte; esta receta fue establecida más rigurosamente en [34]. Aquí aceptaremos la ecuación como un postulado y procederemos a extraer resultados físicos a partir de ella.

El caso que nos interesa calcular es el correlador de la componente xy del tensor de energía-momento T_{xy} de MSYM a temperatura finita, cuya métrica dual es (AdS-Schwarzschild)$_5 \times S^5$. Para resolver la ecuación de movimiento es útil escribir la métrica en términos de la coordenada radial $u = \frac{r_H^2}{r^2}$, es decir,

$$ds^2 = \frac{(\pi TR)^2}{u}(-f(u)dt^2 + dx^2) + \frac{R^2}{4u^2 f(u)}du^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{4.51}$$

donde $f(u) = 1 - u^2$. Por tanto, la frontera se encuentra en $u = 0$ y el horizonte en $u = 1$. En este caso

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\Big(\frac{(\pi TR)^2 f}{u}\Big)\Big(\frac{(\pi TR)^2}{u}\Big)^3\Big(\frac{R^2}{4u^2 f}\Big)} = \frac{(\pi T)^4 R^5}{2u^3}.$$

Proseguiremos entonces a encontrar la solución a la ecuación de movimiento,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u(\sqrt{-g}g^{uu}\partial_\mu f_p(u)) + g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu f_p(u) = 0, \tag{4.52}$$

donde consideraremos que

$$n = \frac{\omega}{2\pi T} \qquad q = \frac{p}{2\pi T}$$

$$\frac{2u^3}{(\pi T)^4 R^5}\partial_u\Big[\Big(\frac{(\pi T)^4 R^5}{2u^3}\Big)\Big(\frac{4u^2 f}{R^2}\Big)\partial_u f_p\Big] + \frac{u}{(\pi TR)^2 f}n^2 f_p - \frac{u}{(\pi TR)^2}\vec{p}^2 f_p$$

$$\frac{4u^3}{R^2}\partial_u(u^{-1}f\partial_u f_p) + \frac{4u}{fR^2}n^2 f_p - \frac{4u}{R^2}q^2 f_p$$

$$u^2 f\partial_u^2 f_p + \partial_u f_p(-uf - 2u^3) + \frac{u}{f}n^2 f_p - uq^2 f_p$$

$$\partial_u^2 f_p - \Big(\frac{1+u^2}{uf}\Big)\partial_u f_p + \Big(\frac{n^2 - q^2 f}{uf^2}\Big)f_p = 0. \tag{4.53}$$

Esta ecuación no puede ser resuelta exactamente para todo ω y p. Sin embargo, cuando w y p son mucho más pequeños que T, es decir, cuando $n, q << 1$, uno puede desarrollar en serie de potencias de n y q (ver [35]).

La solución que es una onda entrante en $u = 1$ y normalizada a 1 en $u = 0$ es:

$$f_p(u) = (1-u^2)^{-\frac{in}{2}} + O(n^2, q^2). \tag{4.54}$$

Ahora aplicando la ecuación propuesta por la receta dada por la ecuación (4.44), uno puede encontrar la función de Green retardada de T_{xy}. Para ello consideremos la métrica de AdS-Schwarzschild en términos de la coordenada radial $z = \frac{R^2}{r}$, es decir

$$ds^2 = -\frac{R^2 f}{z^2}dt^2 + \frac{R^2}{z^2}d\vec{x}^2 + \frac{R^2}{fz^2}dz^2 \tag{4.55}$$

donde

$$f = 1 - \frac{z^4}{z_H^4} \qquad z_H = (\pi T)^{-1}$$

De la receta de la correspondencia AdS-CFT en Minkowski se tiene:

$$G^R(p) = -2\lim_{z\to 0}\mathcal{F}(p,z) \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{F}(p,z) = K\sqrt{-g}g^{zz}f_{-p}(z)\partial_z f_p(z).$$

Con

$$K = \frac{N^2}{16\pi^2 R^3} \qquad \text{y} \qquad f_p(z) = \Big(1-\frac{z^4}{z_H^4}\Big)^{-\frac{in}{2}} = f^{-\frac{in}{2}} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= K\sqrt{\Big(\frac{R^2 f}{z^2}\Big)\Big(\frac{R^2}{z^2}\Big)^3\Big(\frac{R^2}{z^2 f}\Big)}\Big(\frac{z^2 f}{R^2}\Big)\Big(f^{-\frac{in}{2}}\Big)\frac{\partial}{\partial z}f_p = \\ &= K\Big(\frac{R^5}{z^5}\Big)\Big(\frac{z^2 f}{R^2}\Big)\Big(f^{\frac{in}{2}}\Big)\Big(-\frac{in}{2}f^{-\frac{in}{2}-1}\Big)\Big(-\frac{4z^3}{z_H^4}\Big) = \\ &= \frac{2KR^3 ni}{z_H^4} = 2\Big(\frac{N^2}{16\pi^2 R^3}\Big)R^3(\pi T)^4 ni = \\ &= \frac{\pi^2 N^2 T^4}{8}ni\end{aligned}$$

Tenemos finalmente el propagador para T_{xy}

$$G^R_{xy,xy}(\omega,\vec{p}) = -\frac{\pi^2 N^2 T^4}{4}ni. \tag{4.57}$$

Después de un largo análisis llegamos al clímax de nuestro cálculo de la viscosidad de corte del plasma de MSYM. Finalmente utilizamos la fórmula de Kubo,

$$\eta = -\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}G^R_{xy,xy}(\omega,0) = -\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\Big(-\frac{\pi^2N^2T^4}{4}\Big)\big(\frac{\omega}{2\pi T}\big)$$

y concluimos por tanto que

$$\eta = \frac{\pi N^2 T^3}{8}. \tag{4.58}$$

Entonces estos cálculos muestran que la correspondencia norma-gravedad es una herramienta poderosa, ya que cálculos difíciles en campos pueden mapearse a unos cálculos más sencillos en cuerdas. Por conclusión tenemos entonces que el cociente entre viscosidad de corte y densidad de entropía del plasma de MSYM es igual a

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}68 \tag{4.59}$$

Algo verdaderamente sorprendente está en los resultados que se han obtenido aplicando esta correspondencia, como éste caso, son muy parecidos a datos experimentales en RHIC y LHC, donde se estima que $\frac{\eta}{s} \sim 0{,}1 - 0{,}2$ [43].

Capítulo 5

CONCLUSIONES.

En esta tesis, partimos de una revisión breve de la QFT, enfatizando que es necesario implementar un método adicional para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte en QCD, puesto que el desarrollo perturbativo es inútil para realizar cálculos relacionados con fenómenos asociados a la fuerza fuerte a bajas energías. La única herramienta que se tenía para hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte son métodos númericos conocidos como *QCD en la red*. Estos cálculos utilizan un espaciotiempo discretizado y acotado con el fin de tener sólo un número finito de variables dinámicas. A partir de él, ha sido posible hacer cálculos de algunas propiedades termodinámicas, y el espectro de masas de algunos hadrones. Sin embargo, este método no es aplicable para estudiar propiedades dinámicas, debido a su formulación euclidiana (puesto que se pierde la estructura causal).

Con esta motivación presentamos a la dualidad norma-gravedad como una herramienta que nos permite hacer cálculos en el régimen de acoplamiento fuerte de algunas teorías no abelianas remotamente similares a QCD. En particular, esta dualidad nos da la posibilidad de estudiar plasmas de gluones parecidos al QGP recientemente producido en RHIC y LHC.

A partir de la dualidad norma-gravedad se mostró que la densidad de entropía de un plasma de SYM $\mathcal{N}$=4 fuertemente acoplada es $s = (\pi^2 N^2 T^3)/2$, lo cual difiere del resultado a acoplamiento cero solo por un factor de 0.75. Con el resultado obtenido se pudo aliviar el dolor de cabeza que provocaba la aparente incongruencia entre QCD en la red y los datos experimentales: los cálculos en la red parecían sugerir que el QGP podía ser modelado como un gas ideal (ya que la corrección por las interacciones era sólo por un factor de 0.8), mientras que los experimentos afirmaban que el QGP se encuentra fuertemente acoplado. Con el cálculo de la densidad de entropía por medio de la dualidad vimos que, al menos en MSYM, el efecto de $\lambda \to \infty$ es corregir a la densidad de entropía por solo un factor de 0.75, el cuál está más cerca de 0.8 que de 1, de modo que el resultado de QCD en la red puede con ello interpretarse como consistente con acoplamiento fuerte. Además este resultado sugirió que el valor obtenido númericamente para QCD es una huella de que los plasmas fuertemente acoplados exhiben propiedades similares independientemente de la teoría subyacente.

Con respecto al cálculo del coeficiente de transporte correspondiente a la viscosidad de corte se obtuvo que $\eta = (\pi N^2 T^3)/8$ para un plasma de gluones y materia exótica en MSYM, desde la perspectiva de teoría de cuerdas. Vale la pena resaltar que este cálculo no es posible hasta ahora con QCD en la red. La dependencia de este resultado con N^2 refleja que la teoría está desconfinada.

Los resultados mostrados para la entropía y la viscosidad provocaron mucha actividad para realizar cálculos de propiedades térmicas del plasma no abeliano de MSYM, y de otras teorías holográficas. En la presente tesis sólo mostramos cómo calcular la viscosidad de corte, pero ésto solo corresponde al orden más bajo en derivadas del tensor $\sigma^{\mu\nu}$ como se mostró en (4.22). En principio, existe una serie infinita de términos a ordenes más altos, cada uno caracterizado por un diferente coeficiente de transporte; se puede extender los cálculos holográficos a ordenes más altos, y descubrir el resto de los términos. Este procedimiento ha sido recientemente llevado a cabo a segundo orden en derivadas en [36]. También se han calculado coeficientes de transporte en teorías de campo no conformes con duales gravitatorios [37]. Además, se han revisado una gran variedad de cálculos holográficos como los efectos de introducir un potencial químico [38], examinar la difusión de quarks pesados [39] y el cálculo de la tasa de emsión de fotones del plasma [40], por mencionar solo algunos.

Además de la teoría MSYM existe un gran número de teorías cuyo comportamiento hidrodinámico ha sido estudiado usando la correspondencia AdS-CFT. En todos los ejemplos la razón de $\frac{\eta}{s}$ ha resultado ser $\frac{1}{4\pi}$ en el límite de acoplamiento infinito. Se probó que este valor es universal para todas las teorías de norma con dual gravitatorio, en el límite de 't Hooft [41, 42]. Reciente investigacion sobre datos experimentales en RHIC parecen indicar que $\frac{\eta}{s} \sim \frac{1}{4\pi}$ [43].

Para resumir, el reciente descubrimiento del QGP motivó mucha investigación, pues no había manera de entender tal estado de la materia. Sin embargo, casi en paralelo, con la investigación en teoría de cuerdas, se descubrió la correspondencia norma-gravedad, lo cual implicó que al día de hoy la teoría de cuerdas sirve como herramienta analítica para estudiar ciertas teorías de norma, por ejemplo MSYM. A pesar de que estas teorías de norma difieren de QCD en temperatura finita, tienen ciertas características en común. Por tanto, cálculos gravitacionales están siendo usados para tener una idea de la nueva fase de la materia, y es por ello (y otras aplicaciones similares) que las implicaciones de esta extraodinaria correspondencia siguen siendo exploradas.

Bibliografía

[1] A. Güijosa, notas del curso "Introducción a la Teoría Cuántica de Campos", http://www.nucleares.unam.mx/∼alberto/apuntes/indice.html

[2] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory" North-Holland personal library, ISSN 0925-5818.

[3] Ver, por ejemplo: C. Davies, "Lattice QCD," arXiv:hep-ph/0205181; J.B. Kogut, "An Introduction To Lattice Gauge Theory And Spin Systems," Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979).

[4] Ver, por ejemplo: C.B. Lang, "The Hadron Spectrum from Lattice QCD," arXiv:0711.3091 [nucl-th]; S. Aoki, "Hadron interactions from lattice QCD,"PoS LAT2007, 002 (2007) [arXiv:0711.2151 [hep-lat]]; P. Hagler, "Progress in hadron structure physics on the lattice," PoS LAT2007, 013 (2007) [arXiv:0711.0819 [hep-lat]].

[5] http://www.bnl.gov/rhic/

[6] O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. 323, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].

[7] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

[8] B. Zwiebach, "A first Course in String Theory," Cambridge University Press (2005).

[9] J. Polchinski, "String Theory," Cambridge University Press (1998).

[10] G. T. Horowitz and A.Strominger, "Black strings and p-branes", Nucl. Phys. B360 (1991) 197.

[11] A Dhabolhkar and J. Harvey. Physics. Rev. Lett. 63 (1989) 478.

[12] C. Callan, J. Harvey, A. Strominger, "Supersymmetric Solitons", Nucl. Phys. B 359 (1991) 611.

[13] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, Mod. Phys. Lett. A 4 (1989).

[14] J. Polchinski. "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", Phys. Rev. Lett. 75 (1995). [arXiv:hep-th/9510017]

[15] A. Hashimoto, I Klebanov. "Scattering of Strings from D-branes", Nucl.Phys.Proc.Suppl.55B:118-133, (1997); [arXiv:hep-th/9611214].

[16] I. R. Klebanov. "World-volume approach to absortion by non-dilatonic branes", Nucl.Phys. B496, 231 (1997) [hep-th/9702076].

[17] J. Maldacena, A. Strominger, "Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy", Phys.Rev. D55:861-870, (1997) [arXiv:hep-th/9609026].

[18] E. Witten, D. Olive, "Supersymmetry algebras that include topological charges" Phy. Lett. B78 (1978), 97.

[19] S.S Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov. "'Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory", Phys.Lett.B428:105-114, (1998). [arXiv:hep-th/9802109].

[20] E. Witten. "Anti-de Sitter space and holography". Advances in Theoretical and Mathematical Physics, (1998). [arXiv:hep-th/9802150].

[21] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.W. Peet, "Entropy and Temperature of Black 3-Branes", Phys. Rev. D 54 (1996) 3915, [hep-th/9602135].

[22] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.A. Tseytlin "Coupling Constant Dependence in the Thermodynamics of N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Theory", [hep-th/9805156].

[23] A. Fotopoulos, T. R. Taylor "Remarks on Two-Loop Free Energy in N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Theory at Finite Temperature", [hep-th/9811224].

[24] F. Karsch, “Laticce QCD at high temperature and density”, Lect. Notes Phys. 583, 209 (2002) [arXiv:hep-lat/0106019].

[25] G. Policastro, D.T. Son and A.O. Starinets, “From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics,” JHEP 0209, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205052].

[26] D. T. Son and A. O. Starinets, “Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory,” Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 57, 95 (2007) [arXiv:hep-th/0704.0240].

[27] L. S. García-Colín, “Los fundamentos de la hidrodinámica clásica”, Rev. Mex. Fis. 44, (2001).

[28] L. García-Colín, “Hidrodinámica, coeficientes de transporte y termodinámica, Rev. Mex. Fis. 43, (1997).

[29] V. Hubeny, S. Minwalla, M.Rangamani, “The fluid/gravity correspondence” (2011) [arXiv:hep-th/1107.5780v1].

[30] G. Policastro, D.T. Son and A.O. Starinets, “Shear Viscosity of Strongly Coupled N = 4 Supersymmetric Yang-Mills Plasma”, (2001) [arXiv:hep-th/0104066v2].

[31] M. Le Bellac. “Thermal Field Theory”, Cambridge University Press (1996).

[32] K. Skenderis. “Lecture Note on Holographic Renormalization”, Class.Quant.Grav.19:5849-5876, (2002) [arXiv:hep-th/0209067v2].

[33] Son DT, Starinets AO. “Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications.” J. High Energy Phys. 0209:042 (2002).

[34] Herzog CP, Son DT. “Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence.” J. High Energy Phys. 0303:046 (2003).

[35] G. Policastro and A Starinets. “On the Absorption by Near-Extremal Black Holes”, Nucl.Phys. B610 (2001) [arXiv:hep-th/0104065].

[36] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, "Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography," arXiv:0712.2451 [hep-th]; S. Bhattacharyya, V.E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, "Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity," [arXiv:hep-th/0712.2456].

[37] A. Buchel, S. Deakin, P. Kerner and J. T. Liu, "Thermodynamics of the $N = 2^*$ strongly coupled plasma," Nucl. Phys. B 784, 72 (2007) [arXiv:hep-th/0701142]; A. Buchel, "Bulk viscosity of gauge theory plasma at strong coupling," [arXiv:hep-th/0708.3459].

[38] Ver, por ejemplo: S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R.C. Myers and R.M. Thomson, "Holographic phase transitions at finite baryon density," JHEP 0702, 016 (2007) [arXiv:hep-th/0611099].

[39] Ver, por ejemplo: C.P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L.G. Yaffe, "Energy loss of a heavy quark moving through $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma," JHEP 0607, 013 (2006) [arXiv:hep-th/0605158].

[40] Ver, por ejemplo: Caron-Huot, P. Kovtun, G.D. Moore, A. Starinets and L.G. Yaffe, "Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma," JHEP 0612, 015 (2006) [arXiv:hep-th/0607237].

[41] P. Kovtun, D.T. Son and A.O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics," Phys. Rev. Lett. 94, 111601 (2005) [arXiv:hep-th/0405231].

[42] A. Buchel, "On universality of stress-energy tensor correlation functions in supergravity," Phys. Lett. B 609, 392 (2005) [arXiv:hep-th/0408095].

[43] P. Romatschke and U. Romatschke, "Viscosity Information from Relativistic Nuclear Collisions: How Perfect is the Fluid Observed at RHIC?," Phys. Rev. Lett. 99, 172301 (2007) [arXiv:nucl-th/0706.1522]; H. Song and U.W. Heinz, "Suppression of elliptic flow in a minimally viscous quark-gluon plasma," Phys. Lett. B 658, 279 (2008) [arXiv:nucl-th/0709.0742]]; P. Romatschke, "Fluid turbulence and eddy viscosity in relativistic heavy-ion collisions," [arXiv:nucl-th/0710.0016]; H. Song and U.W. Heinz, "Causal viscous hydrodynamics in 2+1 dimensions for relativistic heavy-ion collisions," [arXiv:nucl-th/0712.3715].