



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Quiebra por Contagio, un Modelo Estocástico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
ALEJANDRO GONZÁLEZ CUEVAS

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. ANA MEDA GUARDIOLA

2013





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

Introducción	1
1. La Técnica de Expansión Binomial de Moody's	2
2. El Modelo Estático	5
3. El Modelo Dinámico Discreto	15
4. Sectores	41
<b>Apéndice</b>	<b>45</b>
A. Demostración del Teorema de De Finetti . . . . .	45
B. Demostración del Teorema 3.7 . . . . .	58

## Introducción

La crisis económica global de 2008 le costó a decenas de millones de personas sus ahorros, sus trabajos y sus hogares [6]. La gran interacción económica causó que un problema hipotecario de los Estados Unidos pronto se dispersara hacia el resto del planeta [9].

La mayor parte de los problemas económicos actuales surgen de sociedades complejas y en contacto con factores externos que requieren un planteamiento sistemático [9]. Es por esto que las matemáticas tienen mucho que aportar al modelar la interacción de elementos en el sistema económico, específicamente la quiebra de ciertos elementos a causa de su dependencia con otros, es decir, la quiebra por contagio.

En este trabajo analizaré dos modelos estocásticos que describen la posible quiebra de ciertos elementos dado que existe interacción y posible contagio entre ellos. Ambos fueron publicados en la revista *Quantitative Finance*, el primero de ellos fue escrito por Mark Davis y Violet Lo, y publicado en 2001, [7]. El segundo fue escrito por Diana Dorobantu, Didier Rullière y Areski Cousin, y publicado en 2013, [3]. Éste último se trata de una extensión del modelo de Davis y Lo, por lo que ambos siguen la misma línea y los consideraremos como dos partes del mismo trabajo, la parte estática y la parte dinámica.

Estos trabajos tuvieron como objetivo formalizar y mejorar la forma en que se estudiaba el contagio en el contexto económico.

# 1. La Técnica de Expansión Binomial de Moody's

En 1996 la compañía *Moody's Investors Services* propuso, en [1], un modelo bastante simple para simular la pérdida esperada dentro de un portafolio de bonos cuando algunos de ellos entran en quiebra. A pesar de que no es un modelo de contagio explícito, considera dependencia entre bonos de la misma industria, suponiendo que lo que le suceda a uno le afectará a los otros del sector y que si uno de ellos entra en quiebra los de su grupo serán más propensos a hacerlo. A partir de este modelo se ha desarrollado gran parte de la teoría que trataré en mi trabajo.

Del portafolio inicial, con  $n$  bonos no necesariamente independientes, que se pretende modelar, Moody's toma ciertas características y considera uno equivalente, donde los bonos son idénticamente distribuidos e independientes, pero el número de elementos cambia. El *Diversity Score* ( $n'$ ) será la cantidad total de bonos en el portafolio equivalente, sobre el cual se trabajará.

Para establecer  $n'$ , Moody's supone que la dependencia se da solamente entre bonos del mismo sector, de la misma industria. La compañía establece 32 sectores y asigna  $n'$  al portafolio, dependiendo de la diversidad que tienen sus bonos dentro de estos sectores. El *Diversity Score* es bajo si los bonos se concentran en pocos sectores y se incrementa a medida que los bonos están distribuidos en más sectores,  $1 \leq n' \leq n$ .

Bonos en el mismo sector	<i>Diversity Score</i> parcial
0	0
1	1.0
2	1.5
3	2.0
4	2.3
5	2.6
6	3.0
7	3.2
8	3.5
9	3.7
10	4.0

Tabla 1: *Diversity Score*

El *Diversity Score* se obtiene a partir de la Tabla 1. Observamos la cantidad de bonos dentro de cada sector, los grupos de bonos que se forman a partir de los sectores y el valor correspondiente en la Tabla 1, dada en [7], estos valores se suman y el resultado se redondea al entero más cercano para obtener el *Diversity Score*. Hay que mencionar que la tabla no fue publicada por Moody's en [1].

Teniendo el *Diversity Score* podemos continuar construyendo el portafolio equivalente. Como mencioné, el *Diversity Score* será la cantidad de bonos en este nuevo portafolio. Un portafolio inicial de  $n$  bonos se considera equivalente a uno independiente de  $n'$  elementos con la misma probabilidad de quiebra,  $p$ , para un intervalo de tiempo determinado. Esta probabilidad se toma igual a la media de las probabilidades de quiebra de los  $n$  bonos iniciales. Moody's genera las probabilidades de quiebra de los bonos a partir de sus datos estadísticos y considerando el *rating* que tienen. Al

ser independientes y con la misma probabilidad de entrar en quiebra para un intervalo de tiempo determinado, la variable aleatoria de la cantidad de bonos en el portafolio de  $n'$  elementos que entran en quiebra ( $N$ ) tiene una distribución binomial con parámetros  $(n', p)$ , es decir,

$$P[k \text{ quiebras}] = P[N = k] = \binom{n'}{k} p^k (1-p)^{n'-k}, \text{ con } n \geq n'.$$

Aunque este resultado parezca incongruente al no poder obtener valores para  $n \geq k > n'$ , lo importante aquí es la proporción de bonos en quiebra respecto al total,  $n'$ , pues es a partir de la proporción que se definirá la función de pérdida.

El modelo supone que los inversores empiezan a perder dinero cuando se alcanza un número específico de quiebras. Una función de pérdida de este tipo es

$$L(x) = 100 \text{máx}(x - t, 0).$$

La variable  $x \in [0, 1]$  es la fracción de bonos del portafolio que está en quiebra, es decir,  $\frac{N}{n'}$ . El parámetro  $t \in [0, 1]$  es la fracción de bonos a partir de la cual el inversor empieza a perder. El factor 100 es demostrativo, debe ajustarse a los valores reales de pérdida en cada caso.

Teniendo la función de pérdida podemos calcular la pérdida esperada:

$$\begin{aligned} E[L(x)] &= \sum_{i=1}^{n'} P \left[ x = \frac{i}{n'} \right] L \left( \frac{i}{n'} \right) = \sum_{i=1}^{n'} P \left[ \frac{N}{n'} = \frac{i}{n'} \right] L \left( \frac{i}{n'} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n'} P[N = i] L \left( \frac{i}{n'} \right) = \sum_{i=1}^{n'} \binom{n'}{i} p^i (1-p)^{n'-i} L \left( \frac{i}{n'} \right). \end{aligned}$$

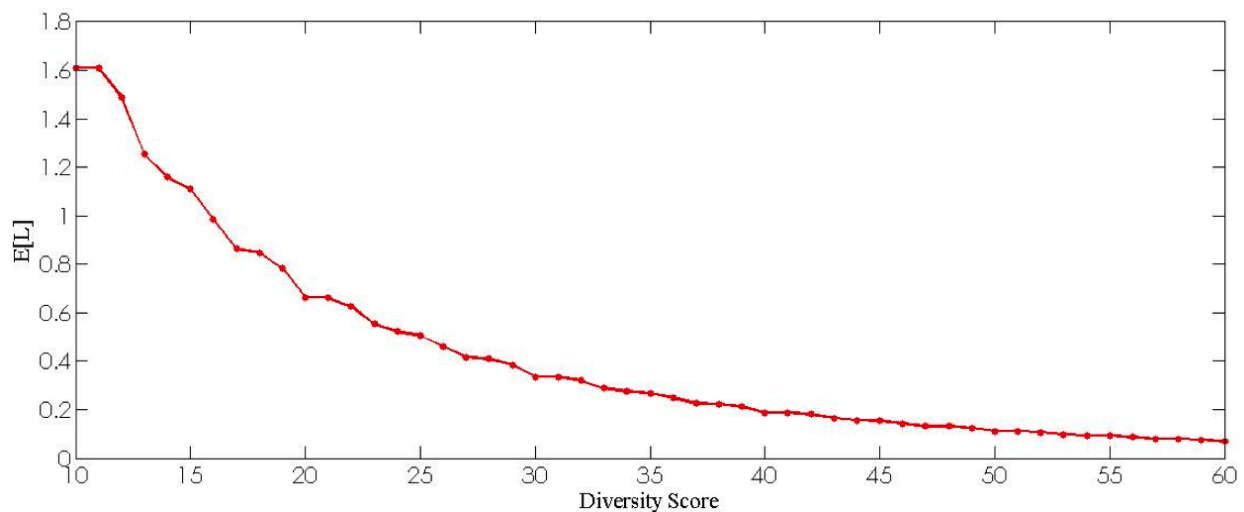


Figura 1: Efecto del *Diversity Score* en la pérdida esperada para  $p = .2$  y  $L(x) = 100 \text{máx}(x - .3, 0)$ .

En la Figura 1 observamos que a medida que hay menos diversidad en el portafolio, y el *Diversity Score* se reduce, la pérdida esperada crece. La interpretación de este resultado es que cuando los portafolios tienen muchas dependencias, hay muchos bonos en pocos sectores, estos bonos, aparte de tener probabilidad propia de entrar en quiebra, son afectados por la situación del resto de los bonos en el sector. Esta posibilidad de ser afectados por los bonos de su sector incrementa la probabilidad de entrar en quiebra que tendrían independientemente. Dependen de sí mismos y de los demás para entrar en quiebra. Esta probabilidad extra de entrar en quiebra por ser dependientes de otros bonos puede considerarse una probabilidad de contagio.

Aún en el caso en que este modelo concordara con la realidad, no conocemos la forma en que se establece el *Diversity Score*. Tampoco el desarrollo del modelo explica los factores que intervienen y cómo se reflejan en él. Utilizarlo es un acto de fe, o de confianza por el prestigio de Moody's, y no algo justificado de lo que hayamos sido convencidos.

La importancia del modelo de Moody's para este trabajo es que motivó muchos artículos que han modelado la quiebra por contagio y son sobre los que nos enfocaremos.

## 2. El Modelo Estático

A continuación presentamos un modelo explícito de quiebra por contagio. Este trabajo, publicado en 2001, en [7], modela la dependencia entre firmas a través de una probabilidad de contagio. El modelo no tiene una forma de traducir los datos de las firmas a la probabilidad de contagio. Es necesario tener las probabilidades de contagio dadas aparte, teórica o experimentalmente, e introducirlas en el modelo. Esto último no se desarrolla aquí. Cabe mencionar que una firma en quiebra no se recupera.

Consideremos  $n$  firmas. Definimos las variables aleatorias  $\{Z_i\}_{i=1}^n$  como  $Z_i = 1$ , si la firma  $i$  entra en quiebra en un periodo de tiempo dado, y  $Z_i = 0$ , si la firma  $i$  no entra en quiebra en un periodo de tiempo dado. Sea  $N$  la variable aleatoria de la cantidad total de firmas que entran en quiebra en un periodo de tiempo dado. Entonces,

$$N = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Definimos a  $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  y a  $\{Y_{ij}, j = 1, \dots, n, j \neq i\}$  como variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetros  $p$  y  $q$ , respectivamente, es decir,

$$P[X_i = 1] = p, \quad P[X_i = 0] = 1 - p,$$

$$P[Y_{ij} = 1] = q \text{ y } P[Y_{ij} = 0] = 1 - q,$$

$$\text{con } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \text{ y } j \neq i.$$

El evento  $X_i = 1$  representa la caída en quiebra de la firma  $i$  por causas propias y el evento  $Y_{ij} = 1$  denota que existe contagio de la firma  $i$  a la  $j$ .

Modelamos a  $Z_i$  como

$$Z_i = X_i + (1 - X_i) \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right).$$

A pesar de que  $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  y  $\{Y_{ij}, j = 1, \dots, n, j \neq i\}$  son independientes,  $\{Z_i, i = 1, \dots, n\}$  no son necesariamente independientes.

Observemos que, para cada  $i = 1, \dots, n$ , la firma  $i$  puede entrar en quiebra de dos maneras distintas: directamente o por contagio.

$X_i = 1$  representa la caída en quiebra de la firma  $i$  directamente, por causas propias, sin intervención externa. En este caso  $(1 - X_i) = 0$ , por lo tanto

$$Z_i = X_i = 1,$$

es decir, la firma  $i$  entra en quiebra.

Si  $X_i = 0$ ,

$$Z_i = \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right).$$



Esto significa que no hay caída en quiebra directamente pero es posible que la firma  $i$  caiga por contagio. La variable  $Y_{ji} = 1$  implica que existe contagio de la firma  $j$  a la firma  $i$ ,  $Y_{ji} = 0$  nos dice que no hay contagio de la firma  $j$  a la firma  $i$ . Si existe una firma que contagie a  $i$  y ésta entra en quiebra directamente, entonces la firma  $i$  entrará en quiebra, de lo contrario no lo hará.

En otras palabras, si existe  $k \neq i$  tal, que  $X_k = 1$  y  $Y_{ki} = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} X_k Y_{ki} &= 1, \\ (1 - X_k Y_{ki}) &= 0, \\ \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) &= 0, \\ Z_i &= 1, \end{aligned}$$

es decir, la firma  $i$  entra en quiebra.

Si para todo  $j \neq i$ ,  $X_j = 0$  ó  $Y_{ji} = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} X_j Y_{ji} &= 0, \\ (1 - X_j Y_{ji}) &= 1, \\ \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) &= 1, \\ Z_i &= 0, \end{aligned}$$

es decir, la firma  $i$  no entra en quiebra.

A continuación presentaremos y justificaremos la función de masa de la variable aleatoria  $N$ , que cuenta la cantidad de firmas que entran en quiebra. Observemos que el desarrollo del modelo está basado en tres constantes:  $n$ , la cantidad total de firmas consideradas,  $q$ , la probabilidad de contagio entre cualquier pareja de firmas, y  $p$ , la probabilidad de quiebra directa para cada firma.

Definimos a  $F$  como

$$P[k \text{ quiebras}] = P[N = k] = F(k, n, p, q).$$

Veamos ahora que

$$F(k, n, p, q) = \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1 - (1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}.$$

Comienzo la justificación de la función de masa analizando el evento ( $Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_n = 0$ ). Las primeras  $0 < k$  firmas caen en quiebra, sin especificar si directamente o por contagio, las firmas cuyo índice es mayor a  $k$  no caen en quiebra.

Supongamos que solamente las primeras  $0 < m \leq k$  firmas caen en quiebra directamente, éstas contagian las  $k - m$  firmas restantes y no contagian a ninguna cuyo índice es mayor a  $k$ , es decir, estamos describiendo el evento

$$\begin{aligned} &(X_1 = 1, \dots, X_m = 1, X_{m+1} = 0, \dots, X_n = 0) \\ \cap & \text{ (Para toda } j = m + 1, \dots, k, \text{ existe } i \in \{1, \dots, m\} : Y_{ij} = 1) \\ \cap & \text{ (Para toda } i = 1, \dots, m, \text{ existe } j = k + 1, \dots, n, Y_{ij} = 0). \end{aligned}$$

La probabilidad de que las primeras  $m$  firmas caigan en quiebra directamente es  $p^m$ . La probabilidad de que el resto de las firmas no caiga en quiebra directamente es  $(1-p)^{n-m}$ . La probabilidad de que cada una de las  $m$  firmas que entraron en quiebra directamente no tenga contagio sobre una específica es  $(1-q)^m$ . La probabilidad del complemento de este evento,  $(1-(1-q)^m)$ , es entonces la probabilidad de que por lo menos una de las primeras  $m$  tenga contagio sobre una firma dada. Por lo tanto  $(1-(1-q)^m)^{k-m}$  es la probabilidad de que cada una de las  $k-m$  firmas que deben caer por contagio sea contagiada por alguna de las firmas que entran en quiebra directamente. La probabilidad de que una firma de índice mayor a  $k$  no sea contagiada por las primeras  $m$  es  $(1-q)^m$ , por lo tanto  $(1-q)^{m(n-k)}$  representa la probabilidad de que todas las firmas de índice mayor a  $k$  no sean contagiadas por las primeras  $m$ .

Todos estos eventos son complementos e intersecciones de eventos generados por las diferentes variables Bernoulli independientes, definidas anteriormente. Por lo tanto estos eventos son independientes. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
& P[(X_1 = 1, \dots, X_m = 1, X_{m+1} = 0, \dots, X_n = 0) \\
& \quad \bigcap (\text{Para toda } j = m+1, \dots, k, \text{ existe } i = 1, \dots, m | Y_{ij} = 1) \\
& \quad \bigcap (\text{Para toda } i = 1, \dots, m, \text{ y para toda } j = k+1, \dots, n, Y_{ij} = 0)] \\
& = P[(X_1 = 1, \dots, X_m = 1, X_{m+1} = 0, \dots, X_n = 0)] \\
& \quad P[\text{Para toda } j = m+1, \dots, k, \text{ existe } i = 1, \dots, m | Y_{ij} = 1] \\
& \quad P[\text{Para toda } i = 1, \dots, m \text{ y para toda } j = k+1, \dots, n, Y_{ij} = 0] \\
& = p^m (1-p)^{n-m} (1-(1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}.
\end{aligned}$$

Observemos que esta construcción depende de la cantidad de firmas que caen en quiebra directamente pero no del orden de éstas dentro de las primeras  $k$ , que son las que entran en quiebra. El resultado sería el mismo si en lugar de tomar las primeras  $m$  firmas para caer directamente, tomáramos cualesquiera  $m$  de las primeras  $k$  y éstas contagiaran al resto sin contagiar a las de índice mayor a  $k$ , la probabilidad se desarrollaría de la misma forma. Dado que existen  $\binom{k}{m}$  formas de seleccionar a estos  $m$  elementos del grupo de  $k$ , si fijamos el número de firmas que entran en quiebra directamente,  $m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , la probabilidad de que las primeras  $k$  firmas entren en quiebra sería

$$\binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1-(1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}.$$

Observemos que al variar  $m$  de 1 a  $k$  obtenemos todas las maneras en que las  $k$  primeras firmas entren en quiebra, desde que una caiga en quiebra directamente y contagie al  $k-1$  restante hasta la situación en la que las  $k$  primeras firmas caigan en quiebra directamente. Éstos son eventos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}
& P[(Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{(k+1)} = 0, \dots, Z_n = 0)] \\
& = \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1-(1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}.
\end{aligned}$$

Observemos que esta construcción es válida para cualquier arreglo de las  $k$  variables  $Z_i = 1$  en los  $n$  elementos, no solamente cuando se trata de las primeras  $k$ , como supusimos. El desarrollo

sería el mismo tomando cualesquiera  $k$  firmas de las  $n$  totales para que éstas entren en quiebra. No fue relevante el índice, sólo la cantidad de firmas que entran en quiebra,  $k$ . Por lo tanto, fijando  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , obtenemos la misma probabilidad conjunta de  $k$  quiebras en  $n$  firmas para cualquier orden de éstas. Otra forma de ver esto es que el cambiarlos de orden es simplemente cambiar el índice de la variable  $Z_i$ , ya que  $Z_i$  tiene la misma distribución para toda  $i = 1, \dots, n$  esto no tiene efecto en la distribución. Existen  $\binom{n}{k}$  formas distintas de elegir  $k$  firmas dentro de un conjunto con  $n$  elementos. Esto da lugar a  $\binom{n}{k}$  eventos distintos donde hay  $k$  quiebras en  $n$  firmas. Como vimos, cada uno de estos eventos tiene probabilidad  $P[(Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_n = 0)]$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} P[N = k] &= \binom{n}{k} P[(Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_n = 0)] \\ &= \binom{n}{k} \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1 - (1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}. \end{aligned}$$

El sumando de la expresión anterior con  $m = 0$  sería diferente de cero sólo para  $k = 0$ , en cuyo caso sería  $(1-p)^n$ : la probabilidad de que ninguna firma caiga directamente, es decir, la probabilidad de ninguna quiebra. Por lo tanto podemos agregarlo a la suma y así obtener la expresión para  $0 \leq k$ .

Entonces, para  $0 \leq k$ ,

$$\begin{aligned} P[N = k] &= F(k, n, p, q) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1 - (1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)}. \end{aligned}$$

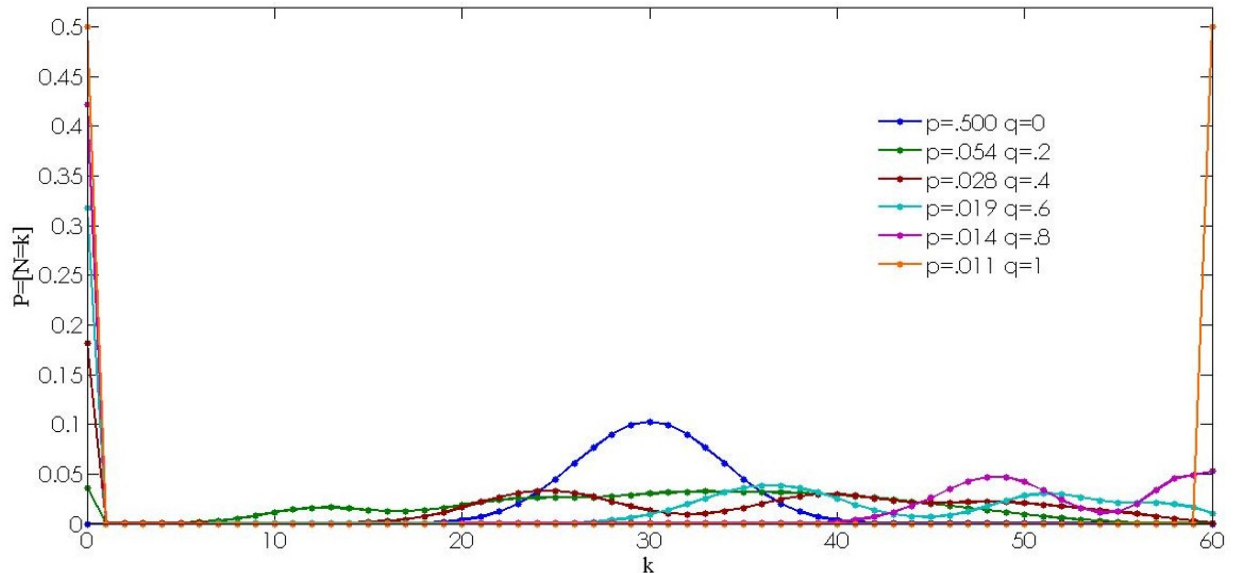


Figura 2: Distribución de  $N$  con  $n = 60$ .

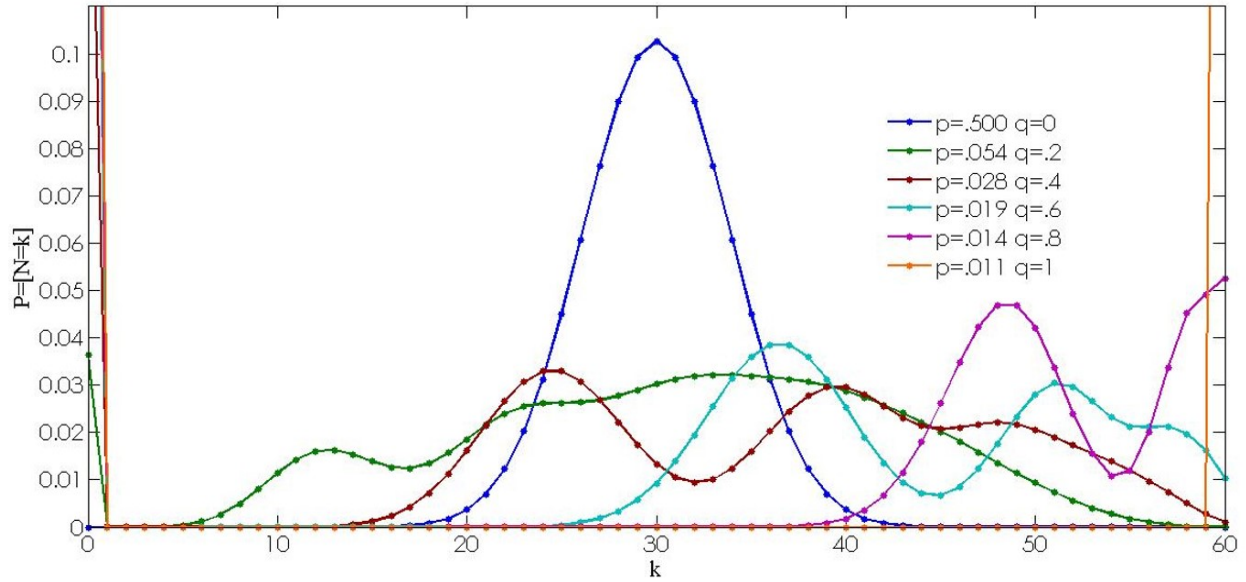


Figura 3: Acercamiento a la Distribución de  $N$  con  $n = 60$ .

Las figuras 2 y 3 muestran la distribución de  $N$  para diferentes valores de  $p$  y  $q$  que mantienen  $E[N] = 30$ .

Observemos que cuando  $q = 0$ , cuando no hay contagio y las firmas sólo pueden caer en quiebra directamente, la distribución es la de una binomial con parámetros  $(n, p)$ . Dada esta situación, en la función de masa todos los sumandos son iguales a cero excepto el de índice  $m = k$  que es igual a  $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Las  $n$  variables  $Z_i$  son independientes, al no haber contagio, y tienen probabilidad de entrar en quiebra  $p$ , lo que concuerda con una distribución binomial de  $N$ .

Cuando  $q = 1$ , la gráfica azul en la figura 3,  $N$  toma dos valores con probabilidad mayor a cero;  $N = n$ , con probabilidad  $(1 - (1-p)^n)$ , y  $N = 0$ , con probabilidad  $(1-p)^n$ . Cuando la probabilidad de contagio es 1 y alguna firma cae en quiebra directamente, infectará al resto. En esta situación sólo hay dos casos posibles; todas las firmas entran en quiebra o ninguna lo hace.

Ahora obtengamos la esperanza y la varianza de  $N$ .

Observemos que  $X_i + (1 - X_i)(1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}))$  tiene solamente multiplicaciones de variables aleatorias independientes, por lo tanto la esperanza abre las multiplicaciones, es decir, la esperanza del producto de variables es el producto de las esperanzas. Entonces

$$\begin{aligned}
 E[Z_i] &= E \left[ X_i + (1 - X_i) \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \right] \\
 &= E[X_i] + E[(1 - X_i)] E \left[ \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \right] \\
 &= p + (1 - p) [1 - (1 - pq)^{n-1}] = 1 - (1 - p)(1 - pq)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E[N] = E[Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n] = E[Z_1] + \dots + E[Z_n] = n(1 - (1 - p)(1 - pq)^{n-1}).$$

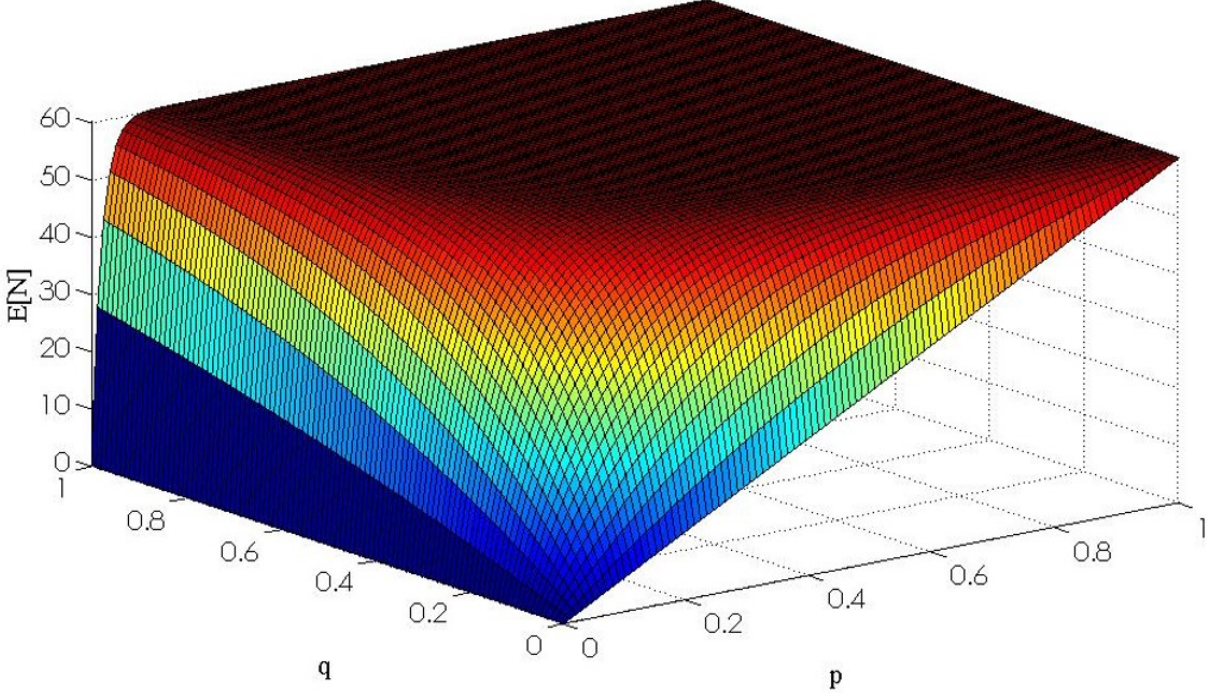


Figura 4:  $E[N]$  con  $p$  y  $q$  como parámetros para  $n = 60$ .

En la figura 4 vemos cómo la esperanza de  $N$  alcanza muy rápidamente valores cercanos a 60, el total de firmas consideradas, a medida que  $p$  y  $q$  aumentan.

Antes de obtener la varianza probaré algunos resultados.

Primero veré que para toda  $i = 1, \dots, n$  y para toda  $r = 1, \dots, n$ ,  $r \neq i$ ,  $E[Z_i Z_r]$  es constante. Sean  $i = 1, \dots, n$ ,  $r = 1, \dots, n$ ,  $r \neq i$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} E[Z_i Z_r] &= E \left[ \left( X_i + (1 - X_i) \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \right) \left( X_r + (1 - X_r) \left( 1 - \prod_{j \neq r} (1 - X_j Y_{jr}) \right) \right) \right] \\ &= E[X_i X_r + (1 - X_r) \left( 1 - \prod_{j \neq r} (1 - X_j Y_{jr}) \right) X_i + (1 - X_i) \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right) X_r \\ &\quad + (1 - X_i) (1 - X_r) \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \left( 1 - \prod_{j \neq r} (1 - X_j Y_{jr}) \right)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ X_i X_r + (1 - X_r) \left( X_i - (X_i - X_i^2 Y_{ir}) \prod_{j \neq r, j \neq i} (1 - X_j Y_{jr}) \right) \right. \\
&\quad + (1 - X_i) \left( X_r - (X_r - X_r^2 Y_{ri}) \prod_{j \neq i, j \neq r} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \\
&\quad + \left( (1 - X_r) - (1 - X_r)(1 - X_r Y_{ri}) \prod_{j \neq i, j \neq r} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \\
&\quad \left. \left( (1 - X_i) - (1 - X_i)(1 - X_i Y_{ir}) \prod_{j \neq r, j \neq i} (1 - X_j Y_{jr}) \right) \right] \\
&= E \left[ X_i X_r + (1 - X_r) \left( X_i - (X_i - X_i^2 Y_{ir}) \prod_{j \neq r, j \neq i} (1 - X_j Y_{jr}) \right) \right. \\
&\quad + (1 - X_i) \left( X_r - (X_r - X_r^2 Y_{ri}) \prod_{j \neq i, j \neq r} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \\
&\quad + (1 - X_r)(1 - X_i) - (1 - X_i)(1 - X_r - X_r Y_{ri} + X_r^2 Y_{ri}) \prod_{j \neq i, j \neq r} (1 - X_j Y_{ji}) \\
&\quad - (1 - X_r)(1 - X_i - X_i Y_{ir} + X_i^2 Y_{ir}) \prod_{j \neq r, j \neq i} (1 - X_j Y_{jr}) \\
&\quad + (1 - X_r - X_r Y_{ri} + X_r^2 Y_{ri}) \left( \prod_{j \neq i, j \neq r} (1 - X_j Y_{ji}) \right) \\
&\quad \left. (1 - X_i - X_i Y_{ir} + X_i^2 Y_{ir}) \left( \prod_{j \neq r, j \neq i} (1 - X_j Y_{jr}) \right) \right].
\end{aligned}$$

Todas las multiplicaciones de esta expresión son entre variables independientes o cuadrados de variables aleatorias Bernoulli. La esperanza abre las multiplicaciones de variables aleatorias independientes, es decir, la esperanza del producto de variables es igual al producto de las esperanzas. La esperanza del cuadrado de una variable aleatoria Bernoulli es la esperanza de esta variable. Sabemos que  $E[X_i] = p$  y  $E[Y_{ir}] = q$ , para toda  $i = 1, \dots, n$  y para toda  $r = 1, \dots, n$ ,  $r \neq i$ , entonces

$$\begin{aligned}
E[Z_i Z_r] &= p^2 + (1-p)(p - (p-pq)(1-pq)^{n-2}) \\
&\quad + (1-p)(p - (p-pq)(1-pq)^{n-2}) \\
&\quad + (1-p)(1-p) - (1-p)(1-p-pq+pq)(1-pq)^{n-2} \\
&\quad - (1-p)(1-p-pq+pq)(1-pq)^{n-2} \\
&\quad + (1-p-pq+pq)(1-pq)^{n-2} \\
&\quad + (1-p-pq+pq)(1-pq)^{n-2} \\
&= p^2 + 2p(1-p)(1 - (1-q)(1-pq)^{n-2}) \\
&\quad + (1-p)^2 \left( 1 - 2(1-pq)^{n-2} + (1-pq)^{2(n-2)} \right) \\
&:= \beta_n^{pq}.
\end{aligned}$$

Observemos que en el caso binomial ( $q = 0$ ) esta fórmula se reduce a  $p^2$ , pues en este caso  $Z_i$  y  $Z_r$  son variables aleatorias independientes con distribución bernoulli de parámetro  $p$ .

Observemos que  $Z_i$  solamente toma valores en  $\{1, 0\}$ . En ambos casos  $Z_i = Z_i^2$ , por lo tanto

$$E[Z_i] = E[Z_i^2].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E[N^2] &= E[(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)^2] \\
&= E \left[ \sum_{i=1}^n Z_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{r \neq i} Z_i Z_r \right] \\
&= \sum_{i=1}^n E[Z_i^2] + \sum_{i=1}^n \sum_{r \neq i} E[Z_i Z_r] \\
&= nE[Z_i] + n(n-1)\beta_n^{pq} \\
&= E[N] + n(n-1)\beta_n^{pq}.
\end{aligned}$$

Teniendo estos resultados podemos calcular la varianza de  $N$ .

$$\begin{aligned}
V[N] &= E[N^2] - E[N]^2 \\
&= E[N] + n(n-1)\beta_n^{pq} - E[N]^2.
\end{aligned}$$

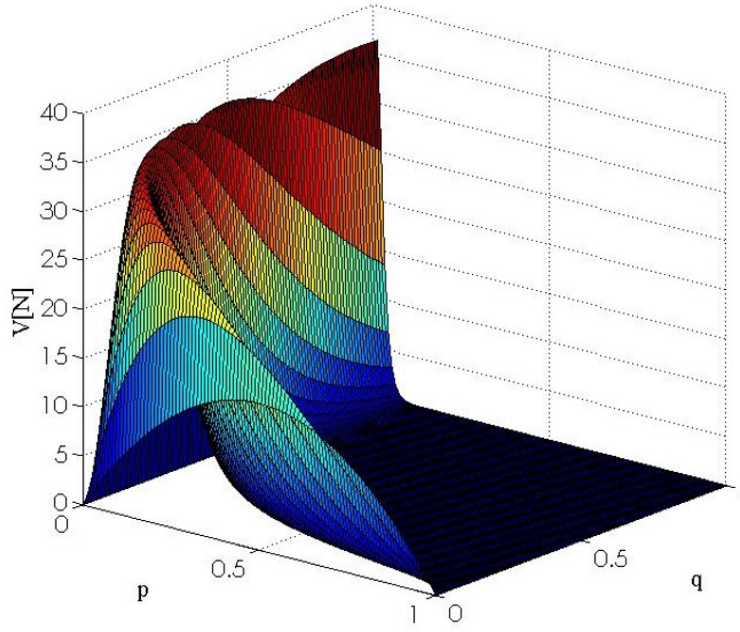


Figura 5:  $V[N]$  con  $p$  y  $q$  como parámetros para  $n = 60$ .

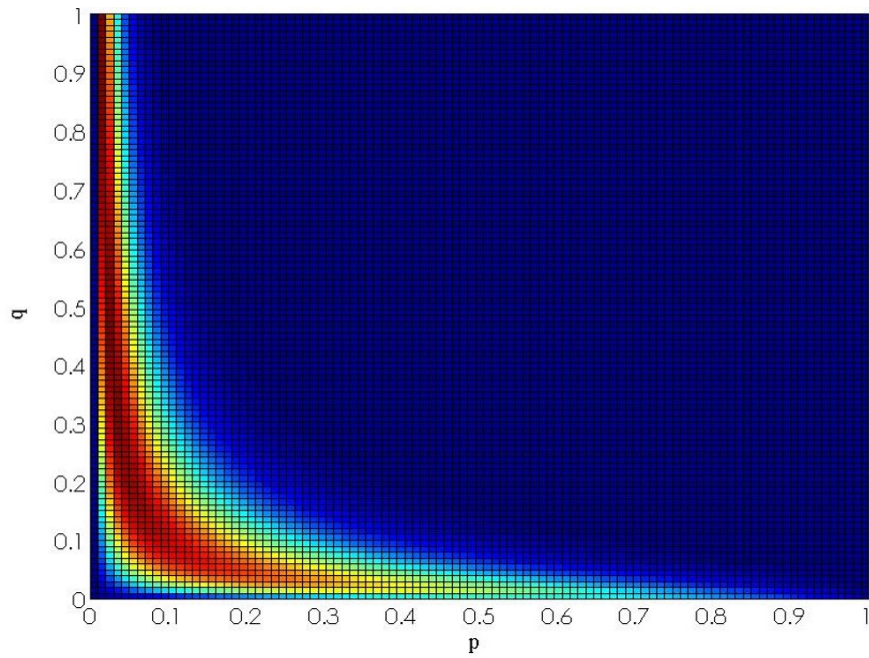


Figura 6:  $V[N]$  con  $p$  y  $q$  como parámetros para  $n = 60$ .

En las figuras 5 y 6 vemos que en la mayor parte de los posibles valores de  $p$  y de  $q$ , la región



azul, la varianza de  $N$  es cercana a cero. La región azul con valores de  $p$  cercanos a cero coincide con la esperanza cercana a cero y la de valores  $p$  y  $q$  grandes coincide con la esperanza cercana al total. La región roja y amarilla es donde se espera más variación y esto coincide con esperanzas intermedias.

Recapitulando, tenemos que

$$\begin{aligned}
 P[N = k] &= \binom{n}{k} \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{n-m} (1 - (1-q)^m)^{k-m} (1-q)^{m(n-k)} \\
 E[N] &= n(1 - (1-p)(1-pq)^{n-1}) \\
 V[N] &= E[N] + n(n-1)\beta_n^{pq} - E[N]^2.
 \end{aligned}$$

Observemos que en el ( $q = 0$ ), las expresiones anteriores se reducen a las de una binomial de parámetro  $p$ .

Este modelo de contagio muestra resultados interesantes a partir de construcciones y suposiciones sencillas e intuitivas, buscamos ahora extender este modelo.

### 3. El Modelo Dinámico Discreto

Desarrollaremos un modelo de contagio que extiende el modelo estático en varios puntos. Este modelo está basado en el trabajo de Rullière, Dorobantu y Cousin, publicado en 2013, en [3]. Este nuevo modelo:

- Lleva el modelo estático de la sección anterior, de un periodo, a uno dinámico discreto, de varios periodos. En este caso no solamente las firmas que entran en quiebra directamente pueden infectar al resto, como en el modelo estático, sino que también las firmas que fueron contagiadas pueden infectar a otros.
- Abre la posibilidad de contagio a partir de varios elementos en quiebra. En el modelo anterior era suficiente una firma para contagiar a otra. Este modelo, en cambio, permite que sean necesarias diferentes firmas que contagien juntas a alguna otra para que ésta entre en quiebra.
- Las variables aleatorias de caída en quiebra directamente ( $X_i$ ) y de contagio ( $Y_{ji}$ ) ya no son necesariamente independientes, como lo eran en el modelo anterior.

Cabe mencionar que una firma en quiebra no se recupera.

Consideremos un conjunto de  $n$  firmas y sea  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ , es decir, el conjunto de sus índices. El conjunto es observado durante un intervalo de tiempo dividido en  $T$  periodos. La variable de tiempo,  $t$ , toma valores en  $\{1, \dots, T\}$ .

Extendiendo la notación del modelo estático, definimos las variables aleatorias y los conjuntos que serán la base del modelo:

- Para toda  $i \in \Omega$  y para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $Z_t^i = 1$  indica el estado de quiebra de la firma  $i$  al tiempo  $t$  y  $Z_t^i = 0$  representa que la firma  $i$  al tiempo  $t$  no está en quiebra.
- Para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\Theta_t$  representa el conjunto de firmas en quiebra al tiempo  $t$ , es decir,  $\Theta_t = \{i \in \Omega | Z_t^i = 1\}$ .
- Para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\Gamma_t$  son las firmas que no están en quiebra al tiempo  $t$ , es decir,  $\Gamma_t = \{i \in \Omega | Z_t^i = 0\}$ . El conjunto del total de firmas es entonces  $\Omega = \Theta_t \cup \Gamma_t$ .
- Para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $N_t$  denota la cantidad de firmas en quiebra al tiempo  $t$ , es decir,  $N_t = Z_t^1 + Z_t^2 + \dots + Z_t^n = \sum_{i \in \Omega} Z_t^i$ . Nos interesa estudiar la distribución de  $N_t$ .
- Para toda  $i \in \Omega$ , para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $X_t^i = 1$  representa la entrada en quiebra por causas propias, sin contagio, de la firma  $i$  al tiempo  $t$ .  $X_t^i = 0$  denota que la firma  $i$  no entra en quiebra directamente al tiempo  $t$ .
- Definimos a  $N_t^D$  como la cantidad de firmas que entraron en quiebra directamente al tiempo  $t$ , es decir,  $N_t^D = \sum_{i \in \Gamma_{t-1}} X_t^i$ .
- Para toda  $i \in \Omega$ , para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $Y_t^{ji} = 1$  simboliza la posibilidad de infección de la firma  $j$  a la firma  $i$  en el tiempo  $t$ . A diferencia del modelo estático, no es suficiente con que  $Y_t^{ji} = 1$  y  $X_t^j = 1$  para que la firma  $i$  entre en quiebra. En este modelo buscamos extender la idea de contagio. El evento  $Y_t^{ji} = 1$  significa que la firma  $j$  afecta a la  $i$  al tiempo  $t$ , pero

dependerá del estado de la firma  $j$  y de la cantidad de infecciones que haya sobre la firma  $i$  para que ésta realmente entre en quiebra por contagio. Si  $Y_t^{ji} = 0$  no es posible una infección de la firma  $j$  a la  $i$ .

- Para toda  $i \in \Omega$ , para toda  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\varphi_t^i = 1$  representa la caída en quiebra por contagio de la firma  $i$  al tiempo  $t$ . El evento  $\varphi_t^i = 0$  denota que la firma  $i$  no entra en quiebra por contagio al tiempo  $t$ .

En el modelo anterior, de un sólo periodo, y donde una sola infección causa la quiebra,

$$\varphi_1^i = \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_1^j Y_1^{ji}) \right).$$

Ahora desarrollaremos otra construcción de esta variable.

Para introducir la idea de diferentes infecciones necesarias para un contagio,  $\varphi_t^i = 1$ , proponemos, para todo  $i \in \Omega$ , para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ , una función  $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$  y un conjunto de firmas en quiebra,  $F_t \subset \Theta_t$ , de forma que

$$\varphi_t^i = f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{ji} \right).$$

Esta construcción nos permite generalizar dos elementos,  $F_t$  y  $f$ .  $F_t$  nos dice qué firmas en quiebra son las que pueden infectar al resto y  $f$  nos dice cuántas infecciones diferentes son necesarias para que las firmas entren en quiebra por contagio. En el modelo estático era suficiente una infección para caer en quiebra por contagio,  $f(k) = \mathbb{1}_{k \geq 1}$ , y las firmas que cayeran en quiebra directamente eran las que tenían posibilidad de infectar al resto,  $F_t = \{i \in \Omega | X_1^i = 1\}$ . En este modelo para que una firma de índice  $i$  entre en quiebra por contagio al tiempo  $t$ ,  $\varphi_t^i = 1$ , se tiene que cumplir que exista cierto conjunto firmas,  $K \subset F_t \subset \Omega$ , tal, que para todo  $j \in K$ ,  $Y_t^{ji} = 1$ , y que  $f(\text{card}(K)) = 1$ .

Supondremos que la cantidad de firmas que pueden infectar al resto depende de los valores de  $N_{t-1}$  y  $N_t^D$ , es decir, la cantidad de firmas que pueden infectar al resto se establecerá a partir de cuántas están en quiebra al tiempo  $t - 1$  y cuántas caen en quiebra directamente el tiempo  $t$ . Por lo tanto  $\text{card}(F_t)$  es una función que depende de  $N_{t-1}$  y de  $N_t^D$ , es decir,  $\text{card}(F_t) = g(N_{t-1}, N_t^D)$ , con  $g : \Omega^2 \rightarrow \{0, \dots, n\}$ .

Con estas variables podemos construir la siguiente función recursiva que modela el desarrollo en el tiempo de cada firma,

$$\begin{aligned} Z_1^i &= X_1^i + (1 - X_1^i)\varphi_1^i \\ Z_t^i &= Z_{t-1}^i + (1 - Z_{t-1}^i)[X_t^i + (1 - X_t^i)\varphi_t^i], \quad \text{para toda } t \in \{2, \dots, T\}, \text{ para toda } i \in \Omega. \end{aligned}$$

Observemos que  $Z_1^i$  tiene la misma forma que en el modelo estático si tomamos la función de quiebra por contagio  $\varphi_1^i = \left( 1 - \prod_{j \neq i} (1 - X_1^j Y_1^{ji}) \right)$ . Para  $1 < t \leq T$ , la firma  $i$  tiene tres formas de estar en quiebra al tiempo  $t$ ,  $Z_t^i = 1$ : habiendo caído en quiebra para un tiempo anterior a  $t$ , entrando en quiebra al tiempo  $t$  por sí mismo y haciéndolo por contagio.

Si  $Z_{t-1}^i = 1$ , entonces  $Z_t^i = 1$ , es decir, si la firma quebró para algún tiempo anterior, lo seguirá estando al tiempo  $t$ . Si  $Z_{t-1}^i = 0$ , entonces  $Z_t^i = [X_t^i + (1 - X_t^i)\varphi_t^i]$ . Esta función toma el valor 1

si  $X_t^i = 1$  ó  $\varphi_t^i = 1$ , es decir, si la firma cae en quiebra directamente o si cae por contagio al tiempo  $t$ .

Durante el desarrollo del modelo utilizaremos las variables aleatorias intercambiables, definidas de la siguiente manera:

**Definición 3.1** (Variables Aleatorias Intercambiables). *Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias. Decimos que esta familia de variables es intercambiable si, y sólo si, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la distribución conjunta  $F$  de  $X_1, \dots, X_n$  es invariante bajo cualquier permutación finita de los índices  $\sigma_n : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , es decir,*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{\sigma_n(1)}, x_{\sigma_n(2)}, \dots, x_{\sigma_n(n)}).$$

De ahora en adelante trabajaremos bajo las siguientes suposiciones:

- Los  $T$  vectores  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$ , son independientes, pero para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $X_t^1, \dots, X_t^n$  no son necesariamente independientes. Las caídas en quiebra por causas propias son independiente respecto al tiempo, como en el modelo estático, pero es posible que exista dependencia entre las caídas directas de las firmas para un tiempo dado. Esto puede representar diferentes situaciones. Una de ellas es el efecto de la situación macroeconómica. Esto afecta a todas las firmas y por lo tanto sus caídas en quiebra directas ya no serían independientes.
- Los  $T$  vectores  $Y_t = (Y_t^{11}, Y_t^{12}, \dots, Y_t^{1n}, \dots, Y_t^{n1}, \dots, Y_t^{nn})$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$ , son independientes. Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ , los  $n^2$  componentes de cada vector,  $Y_t^{12}, \dots, Y_t^{nn}$ , no son necesariamente independientes, pero son variables aleatorias intercambiables.
- Las distribuciones conjuntas de  $(Y_t^{11}, \dots, Y_t^{nn})$  y  $(X_t^1, \dots, X_t^n)$ , para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ , son conocidas.
- Las variables aleatorias  $\{Y_t^{ji}, t \in \{1, \dots, T\}, (j, i) \in \Omega^2\}$  son independientes de  $\{X_t^i, t \in \{1, \dots, T\}, i \in \Omega\}$ .

Ahora presentamos dos resultados que utilizaremos para encontrar la distribución de  $N_t$ , la variable aleatoria que buscamos describir.

**Definición 3.2.** *Sea  $\Gamma \subset \Omega$ . Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$  definimos el coeficiente de orden  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq \text{card}(\Gamma)$ , denotado por  $\mu_{k,t}(\Gamma)$ , para el conjunto  $\{X_t^i, i \in \Gamma\}$  como*

$$\begin{aligned} \mu_{k,t}(\Gamma) &= \frac{1}{\binom{\text{card}(\Gamma)}{k}} \sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_k\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_k}} P[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_k} = 1] \quad y \\ \mu_{0,t}(\Gamma) &= 1 \quad (\text{Incluyendo } \Gamma = \emptyset). \end{aligned}$$

Observemos que  $\text{card}(s_1, \dots, s_k \in \Gamma \mid s_1 < s_2 < \dots < s_k) = \binom{\text{card}(\Gamma)}{k}$ .

Para todo  $i \in \Omega$ , si las variables  $X_t^i$  son intercambiables, entonces para todo  $\Gamma \in \Omega$ , para todo  $\{s_1, \dots, s_k\} \subset \Gamma$ ,

$$P[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_k} = 1] = P[X_t^1 = 1, \dots, X_t^k = 1],$$

por lo tanto

$$\mu_{k,t}(\Gamma) = \frac{1}{\binom{\text{card}(\Gamma)}{k}} \binom{\text{card}(\Gamma)}{k} P \left[ X_t^1 = 1, \dots, X_t^k = 1 \right] = P \left[ X_t^1 = 1, \dots, X_t^k = 1 \right] := \mu_{k,t}.$$

Si  $X_t^i$ ,  $i \in \Omega$  son variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro  $p$ , como en el modelo estático, entonces  $P \left[ X_t^1 = 1, \dots, X_t^k = 1 \right] = p^k = \mu_{k,t}$ . Con esta definición presentamos el primer resultado, la fórmula de Waring.

**Teorema 3.1.** *Fórmula de Waring.* Sea  $t \in \{1, \dots, T\}$ , sean  $\{X_t^1, \dots, X_t^n\}$ ,  $n$  variables aleatorias no necesariamente independientes con distribución Bernoulli, sea  $\Gamma \subset \Omega$  con  $\text{card}(\Gamma) = m$ . Entonces

$$P \left[ \sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k \right] = \mathbb{1}_{k \leq m} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \mu_{k+j,t}(\Gamma).$$

*Demostración.* Sea  $t \in \{1, \dots, T\}$ , sean  $\{X_t^1, \dots, X_t^n\}$ ,  $n$  variables aleatorias no necesariamente independientes con distribución Bernoulli, sea  $\Gamma \subset \Omega$  con  $\text{card}(\Gamma) = m$ . Desde ahora y hasta el fin de la prueba consideraremos únicamente firmas en el conjunto  $\Gamma$ .

Sea  $k > m = \text{card}(\Gamma)$ . Observemos que  $\sum_{i \in \Gamma} X_t^i \leq m < k$ , pues  $X_t^i$  toma valores en  $\{1, 0\}$ , por lo tanto

$$P \left[ \sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k \right] = 0 = \mathbb{1}_{k \leq m} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \mu_{k+j,t}(\Gamma).$$

Sea  $k \leq m$ . Queremos probar que

$$\begin{aligned} & P \left[ \sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k \right] \\ &= \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \frac{1}{\binom{\text{card}(\Gamma)}{k+j}} \sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_{k+j}}} P \left[ X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

La idea de la demostración es tomar un evento donde ocurran exactamente  $l \leq m$  quiebras directas al tiempo  $t$  y ver que la probabilidad de este evento se considera en la suma del lado derecho de la pasada igualdad (1) sólo si  $l = k$ , es decir, si  $\sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k$ , y en este caso, sólo se considera una vez. Es decir, este lado es la suma de las probabilidades de los eventos donde hay exactamente  $k$  quiebras directas al tiempo  $t$ ,  $P \left[ \sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k \right]$ .

Sea  $l \leq m$ , sea  $\{k_1, k_2, \dots, k_l\} \subset \Gamma$  con  $k_i \neq k_j$  para  $i \neq j$ . Consideremos el evento donde exactamente estas  $l$  firmas caen en quiebra directamente al tiempo  $t$ , es decir,

$$E = \left[ X_t^{k_1} = 1, \dots, X_t^{k_l} = 1, \{X_t^r = 0, \text{ para todo } r \notin \{k_1, \dots, k_l\}\} \right].$$

Observemos que si  $l < k$  la probabilidad del evento  $E$  no está considerada en

$$\sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_{k+j}}} P \left[ X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1 \right].$$

Es decir, si descomponemos a todos los eventos considerados en eventos donde el valor de cada variable está establecido, el evento  $E$  no aparecería. Esto se da ya que todos los eventos considerados tendrían mas de  $l$  quiebras directas al tiempo  $t$ . Entonces si  $l < k$ , en ningún momento se suma la probabilidad de algún evento que contenga a  $E$ .

Si  $l = k$ , veamos que la probabilidad de  $E$  está considerada únicamente en un elemento del lado derecho de (1). Al ser  $j = 0$  esta expresión se reduce a

$$\sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_k\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_k}} P[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_k} = 1].$$

Observemos que de estos eventos cuyas probabilidades son sumadas, el evento  $E$  está contenido únicamente en  $[X_t^{k_1} = 1, \dots, X_t^{k_l} = 1]$ , pues para cualquier otro evento de la suma habría un elemento  $s_i$  para el cual  $X_t^{s_i}$  tendría valores diferentes en  $E$  y en la suma. Por lo tanto  $E$  está considerado solamente una vez, en  $P[X_t^{k_1} = 1, \dots, X_t^{k_l} = 1]$ .

Hemos visto que si  $l < k$ , la probabilidad de cualquier evento específico con exactamente  $l$  quiebras no está considerada en la expresión derecha de (1) y si  $l = k$ , está considerada una sola vez.

Para terminar la demostración, veremos que si  $l > k$ , la probabilidad de este evento con  $l$  quiebras directas se cancela en la expresión

$$\binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \frac{1}{\binom{\text{card}(\Gamma)}{k+j}} \sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_{k+j}}} P[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1].$$

Por lo tanto las únicas probabilidades consideradas en esta expresión son las de eventos que tienen exactamente  $k$  quiebras directas al tiempo  $t$ , los de la forma de  $E$  con  $l = k$ .

Sea  $l > k$ . En esta situación el evento  $E$  tiene exactamente  $l$  quiebras directas al tiempo  $t$  en las firmas  $\{k_1, k_2, \dots, k_l\} \subset \Gamma$ ,  $E = [X_t^{k_1} = 1, \dots, X_t^{k_l} = 1, \{X_t^r = 0, \text{ para todo } r \notin \{k_1, \dots, k_l\}\}]$ . Observemos que  $E$  está contenido en los eventos de la forma  $[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1]$  donde  $\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \{k_1, k_2, \dots, k_l\} \subset \Gamma$ , y por lo tanto  $k+j \leq l$ . Existen  $\binom{l}{k+j}$  formas de acomodar estas  $k+j$  firmas en las  $l$  establecidos por  $E$ , las formas de acomodar  $\{s_1, \dots, s_{k+j}\}$  en  $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ . Por lo tanto, para cada  $j \leq l - k$ , el evento  $E$  está considerado  $\binom{l}{k+j}$  veces en

$$\sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_{k+j}}} P[X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1].$$

Entonces el número de veces que se considera a  $E$  en el lado derecho de (1) es

$$\begin{aligned}
& \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{l-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \frac{1}{\binom{m}{k+j}} \binom{l}{k+j} \\
&= \frac{m!}{(m-k)!k!} \sum_{j=0}^{l-k} (-1)^j \frac{(m-k)!}{(m-k-j)!j!} \frac{(m-k-j)!(k+j)!}{m!} \frac{l!}{(l-k-j)!(k+j)!} \\
&= \frac{l!}{k!} \sum_{j=0}^{l-k} (-1)^j \frac{1}{(l-k-j)!j!} \frac{(l-k)!}{(l-k)!} \\
&= \frac{l!}{(l-k)!k!} \sum_{j=0}^{l-k} (-1)^j \frac{(l-k)!}{(l-k-j)!j!} \\
&= \binom{l}{k} \sum_{j=0}^{l-k} (1)^{l-k-j} (-1)^j \binom{l-k}{j} \\
&= \binom{l}{k} (1-1)^{l-k}, \text{ por identidad binomial de } (1-1)^{l-k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $l > k$ ,  $E$  no está considerado en el lado derecho de (1). Entonces los únicos eventos presentes en esta expresión son los que representan exactamente  $k$  quiebras directas al tiempo  $t$ , y éstos están considerados una sola vez. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P \left[ \sum_{i \in \Gamma} X_t^i = k \right] &= \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \frac{1}{\binom{\text{card}(\Gamma)}{k+j}} \sum_{\substack{\{s_1, \dots, s_{k+j}\} \subset \Gamma \\ s_1 < s_2 < \dots < s_{k+j}}} P [X_t^{s_1} = 1, \dots, X_t^{s_{k+j}} = 1] \\
&= \mathbb{1}_{k \leq m} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-1)^j \mu_{k+j, t}(\Gamma).
\end{aligned}$$

□

La demostración anterior es una adaptación de la prueba hecha por Feller, en [4].

Ahora desarrollaremos un resultado similar a la fórmula de Waring, pero en este caso para las entradas en quiebra hechas por contagio al tiempo  $t$ , para  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$ .

Recordemos que  $g(N_{t-1}, N_t^D) = \text{card}(F_t)$  y que  $\{Y_t^{ij}, (i, j) \in \Omega^2\}$ , las variables aleatorias de la infección entre firmas, son intercambiables. Por lo tanto  $\{f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{ji} \right), i \in \Omega\}$ , las variables aleatorias de las caídas en quiebra por contagio al tiempo  $t$ , dependen del número de variables consideradas en la suma y no de cuáles son éstas específicamente. Podemos considerar entonces las de índice  $\sigma(1, 1), \dots, \sigma(1, \text{card}(F_t))$ , para cualquier permutación  $\sigma$  de  $\Omega^2$ , es decir,  $\{Y_t^{\sigma(1,1)}, \dots, Y_t^{\sigma(1, \text{card}(F_t))}\}$ . Entonces, dada la cardinalidad de  $F_t$  y  $f$ ,  $\{f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{ji} \right), i \in \Omega\}$  son intercambiables, pues dependen solamente de  $\{Y_t^{\sigma(1)}, \dots, Y_t^{\sigma(\text{card}(F_t))}\}$ . Como  $\text{card}(F_t) = g(N_{t-1}, N_t^D)$ , las variables  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$  son intercambiables dado  $\{N_{t-1}, N_t^D\}$ .

Al igual que para el Teorema 3.1, definiremos los coeficientes  $\lambda_{k,t}$  y  $\xi_{k,t}$ , elementos que nos ayudarán a analizar la distribución de  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$ .

**Definición 3.3.** Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$  y para todo  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k \leq n$ , definimos el coeficiente de orden  $k$  para el conjunto  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$ , denotado por  $\lambda_{k,t}$ , como

$$\begin{aligned}\lambda_{k,t} &= P \left[ Y_t^{\sigma(1,1)} = 1, \dots, Y_t^{\sigma(1,k)} = 1 \right] \quad y \\ \lambda_{0,t} &= 1,\end{aligned}$$

para cualquier permutación  $\sigma$  de  $\Omega^2$ .

Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$  y para todo  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k \leq n$ , definimos el coeficiente de orden  $k$  para el conjunto  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$  dado  $\{N_t, N_t^D\}$ , denotado por  $\xi_{k,t}$ , como

$$\begin{aligned}\xi_{k,t}(g(u, l)) &= P \left[ \varphi_t^1 = 1, \dots, \varphi_t^k = 1 \mid N_{t-1} = u, N_t^D = l \right] \quad y \\ \xi_{0,t}(g(u, l)) &= 1.\end{aligned}$$

Con estas definiciones analizamos la distribución de  $\{\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^k\}$  en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.** Sea

$$\xi_{k,t}(z) = P \left[ f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{j1} \right) = 1, \dots, f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{jk} \right) = 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right],$$

con  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $z \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq z \leq n - k$ .

Entonces:

- Para  $f(i) = \mathbb{1}_{i \geq 1}$ ,

$$\xi_{k,t}(z) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \sum_{\alpha=0}^{zi} \binom{zi}{\alpha} (-1)^{i+\alpha} \lambda_{\alpha,t}.$$

- Para cualquier función  $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\xi_{k,t}(z) = \sum_{\gamma=0}^{zk} \eta_{k,z}(\gamma) \sum_{j=0}^{zk-\gamma} \binom{zk-\gamma}{j} (-1)^j \lambda_{j+\gamma,t},$$

donde

$$\eta_{k,z}(\gamma) := \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{0, \dots, z\}}} f(\gamma_1) \dots f(\gamma_k) \binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k},$$

$$\eta_{k,z}(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma_1 \in \{1, \dots, z\} \\ \gamma_1 \leq \gamma}} f(\gamma_1) \binom{z}{\gamma_1} \eta_{k-1,z}(\gamma - \gamma_1),$$

$$\eta_{1,z}(x) := \mathbb{1}_{x \leq z} f(x) \binom{z}{x},$$

$$\eta_{0,z}(x) := \mathbb{1}_{x=0}.$$



*Demostración.* Probaremos primero el primer punto del teorema. Sea  $f(i) = \mathbb{1}_{i \geq 1}$ , sea  $m \in \{1, \dots, n\}$ , sea  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Observemos que

$$f\left(\sum_{j \in F_t} Y_t^{j,i}\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,i} \geq 1, \quad i \in \Omega.$$

Definimos una variación de  $\xi$ ,

$$\xi_{m,t}^{(k)}(z) = P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k} \geq 1, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+1} = 0, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right].$$

Es decir, consideramos la probabilidad con la que, dada  $\text{card}(F_t)$ , al tomar  $m$  firmas de las  $n$  totales, las primeras  $m - k$  caen en quiebra por contagio al tiempo  $t$  y las últimas  $k$  no lo hacen.

Observemos que para  $k, k' \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \neq k'$ , los eventos considerados en  $\xi_{m,t}^{(k)}(z)$  y  $\xi_{m,t}^{(k')}(z)$  son ajenos. Esto se da ya que estos eventos difieren en por lo menos un término,  $\sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k}$  o  $\sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k'}$ , si  $k < k'$  o  $k > k'$ , respectivamente. Por lo tanto, al introducir la unión de los eventos en la suma,

$$\begin{aligned} & \xi_{m,t}^{(k)}(z) + \xi_{m,t}^{(k-1)}(z) \\ &= P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k} \geq 1, \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+1} = 0 \text{ ó } \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+1} \geq 1 \right], \right. \\ & \quad \left. \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+2} = 0, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k} \geq 1 \cap \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+2} = 0, \dots, \right. \\ & \quad \left. \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k} \geq 1, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-k+1} = 0, \dots, \right. \\ & \quad \left. \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,m-1} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \xi_{m-1,t}^{(k-1)}(z). \end{aligned}$$

La tercera igualdad se da ya que, como vimos, dada  $\text{card}(F_t)$ ,  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$  son variables aleatorias intercambiables.

Tenemos entonces que

$$\xi_{m,t}^{(k)}(z) = \xi_{m-1,t}^{(k-1)}(z) - \xi_{m,t}^{(k-1)}(z).$$

Por lo tanto, para  $l, r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $r \leq l$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=r}^l \xi_{j,t}^{(r)}(z) &= \sum_{j=r}^l (\xi_{j-1,t}^{(r-1)}(z) - \xi_{j,t}^{(r-1)}(z)) \\ \sum_{j=r}^l \xi_{j,t}^{(r)}(z) &= \sum_{j=r}^l \xi_{j-1,t}^{(r-1)}(z) - \sum_{j=r}^l \xi_{j,t}^{(r-1)}(z) \\ \sum_{j=r}^l \xi_{j,t}^{(r)}(z) &= \xi_{r-1,t}^{(r-1)}(z) - \xi_{l,t}^{(r-1)}(z). \end{aligned} \quad (2)$$

Utilizaremos esta expresión en el siguiente resultado. Probaremos ahora, por inducción sobre  $k = 1, \dots, m$ , que

$$\xi_{k,t}(z) = 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \xi_{i,t}^{(i)}(z), \text{ donde } \xi_{0,t}^{(0)}(z) := 1.$$

Sea  $k = 1$ .

$$\begin{aligned} \xi_{1,t}(z) &= P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right] = 1 - P \left[ \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1 \right]^c \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= 1 - P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] = 1 - \xi_1^{(1)}(z). \end{aligned}$$

Supongamos que la ecuación se cumple para  $k$  y probemos para  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k} \geq 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k} \geq 1 \cap \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k+1} \geq 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &\cup \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \geq 1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k} \geq 1, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k+1} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right]. \end{aligned}$$

Observemos que esta unión es disjunta. Por lo tanto, al tomar probabilidades de estos eventos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \xi_{k,t}(z) &= \xi_{k+1,t}(z) + \xi_{k+1}^{(1)}(z), \\ \xi_{k+1,t}(z) &= \left( 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) \right) - \xi_{k+1,t}^{(1)}(z). \end{aligned}$$

Por (2),

$$\xi_{l,t}^{(r-1)}(z) = \xi_{r-1,t}^{(r-1)}(z) - \sum_{j=r}^l \xi_{j,t}^{(r)}(z), \text{ con } r = 2 \text{ y } l = k + 1.$$

Entonces

$$\xi_{k+1,t}(z) = \left( 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) \right) - \left( \xi_{1,t}^{(1)}(z) - \sum_{j_1=2}^{k+1} \xi_{j_1,t}^{(2)}(z) \right).$$

Al descomponer cada elemento de la suma, de nuevo por (2),

$$\begin{aligned} \xi_{k+1,t}(z) &= \left( 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) \right) \\ &\quad - \left( \xi_{1,t}^{(1)}(z) - \sum_{j_1=2}^{k+1} \left( \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \sum_{j_2=3}^{j_1} \xi_{j_2,t}^{(3)}(z) \right) \right). \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} \xi_{k+1,t}(z) &= \left( 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) \right) \\ &\quad - \left( \xi_{1,t}^{(1)}(z) - \sum_{j_1=2}^{k+1} \left( \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \sum_{j_2=3}^{j_1} \left( \xi_{3,t}^{(3)}(z) - \dots - \sum_{j_k=k+1}^{j_{k-1}} \xi_{k+1,t}^{(k+1)}(z) \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Veamos ahora que cada sumando de la forma  $\xi_{h,t}^{(h)}(z)$ , con  $h \in \{1, \dots, k+1\}$ , aparece  $\binom{k}{h-1}$  veces en esta expresión. El sumando  $\xi_{h,t}^{(h)}(z)$  aparece una vez por cada  $\{j_1, j_2, \dots, j_{h-1}\}$ , con  $k+1 \geq j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_{h-1} \geq 2$ ,  $j_i \geq i+1$ . El conjunto  $\{j_1, j_2, \dots, j_{h-1}\}$  representa los valores de cada suma en los que se considera  $\xi_{h,t}^{(h)}(z)$ . Es decir,  $\xi_{2,t}^{(2)}(z)$  aparece una vez por cada  $j_1 \in \{2, \dots, k+1\}$ , cada sumando de la primera suma.  $\xi_{3,t}^{(3)}(z)$  aparece una vez por cada  $j_2 \in \{3, \dots, j_1\}$ , para cada  $j_1 \in \{2, \dots, k+1\}$ , una vez por cada elemento posible de la segunda suma por cada elemento de la primera. Entonces el número de veces que aparece el elemento  $\xi_{h,t}^{(h)}(z)$  es el número de arreglos de tipo  $\{j_1, j_2, \dots, j_{h-1}\}$ , con  $k+1 \geq j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_{h-1} \geq 2$ ,  $j_i \geq i+1$ . Observemos que se trata de una selección de  $h-1$  elementos del conjunto  $\{h, \dots, k+1\}$ , de tamaño  $k+2-h$ , con reemplazo y sin diferenciar por el orden. Por lo tanto existen  $\binom{(k+2-h)+(h-1)-1}{h-1} = \binom{k}{h-1}$  combinaciones de este tipo. Observemos que  $\xi_{h,t}^{(h)}(z)$  tiene un factor 1 o  $-1$  alternadamente al variar  $h$ . Entonces la expresión que obtenemos es

$$\begin{aligned} \xi_{k+1,t}(z) &= 1 - \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right) \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \left( \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots \\ &\quad + (-1)^k \left( \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right) \xi_{k,t}^{(k)}(z) + (-1)^{k+1} \xi_{k+1,t}^{(k+1)}(z) \\ &= 1 - \binom{k+1}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k+1}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots \\ &\quad + (-1)^k \binom{k+1}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} \xi_{k+1,t}^{(k+1)}(z). \end{aligned}$$

Con esto terminamos la prueba por inducción.

Observemos que  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$  son variables aleatorias Bernoulli intercambiables. Por lo tanto, para  $r \in \{1, \dots, k\}$ , para  $\sigma()$ , permutación de  $\Omega^2$ ,

$$\begin{aligned}\xi_{r,t}^{(r)}(z) &= P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} = 0, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,r} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= P \left[ \sum_{j=1}^{rz} Y_t^{\sigma(j)} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right].\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 3.1, la fórmula de Waring, con  $\Gamma = \{1, \dots, rz\}$ ,

$$\begin{aligned}\xi_{r,t}^{(r)}(z) &= P \left[ \sum_{j=1}^{rz} Y_t^{\sigma(j)} = 0 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \sum_{i=0}^{rz} \binom{rz}{i} (-1)^i P \left[ Y_t^{\sigma(1,1)} = 1, \dots, Y_t^{\sigma(1,i)} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{rz} \binom{rz}{i} (-1)^i \lambda_{i,t}.\end{aligned}$$

Entonces, para  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned}\xi_{k,t}(z) &= 1 - \binom{k}{1} \xi_{1,t}^{(1)}(z) + \binom{k}{2} \xi_{2,t}^{(2)}(z) - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \xi_{k-1,t}^{(k-1)}(z) + (-1)^k \binom{k}{k} \xi_{k,t}^{(k)}(z) \\ &= \sum_{\alpha=0}^k \binom{k}{\alpha} \sum_{i=0}^{z\alpha} \binom{z\alpha}{i} (-1)^{i+\alpha} \lambda_{i,t}.\end{aligned}$$

Con esto terminamos la prueba del primer punto del teorema.

Analizamos ahora la distribución de  $\varphi_t^i = f(\sum_{j \in F_t} Y_t^{j,i})$  para cualquier  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ .

Sea  $f_z^{-1} = \{i \in \{1, \dots, n\}, i \leq z, f(i) = 1\}$ , es decir, definimos el conjunto de los posibles valores para los que  $f(i) = 1$ , considerando sólo los elementos de  $F_t$ , de  $z = \text{card}(F_t)$  elementos. Entonces

$$\begin{aligned}\xi_{k,t}(z) &:= P \left[ f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} \right) = 1, \dots, f \left( \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k} \right) = 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in f_z^{-1}} P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,1} = \gamma_1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{j,k} = \gamma_k \mid \text{card}(F_t) = z \right].\end{aligned}$$

Descomponemos  $\xi_{k,t}(z)$  en todas las distintas formas en que puede formarse.

Dado que las variables  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$  son intercambiables, para cualquier  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in f_z^{-1}$ , para cualquier  $\sigma$ , permutación de  $\Omega^2$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{P \left[ \sum_{j \in F_t} Y_t^{j1} = \gamma_1, \dots, \sum_{j \in F_t} Y_t^{jk} = \gamma_k \mid \text{card}(F_t) = z \right]}{\binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k}} \\ &= \frac{P \left[ \sum_{j=1}^{kz} Y_t^{\sigma(1,j)} = \gamma_1 + \dots + \gamma_k \mid \text{card}(F_t) = z \right]}{\binom{kz}{\gamma_1 + \dots + \gamma_k}}. \end{aligned}$$

Esto se da ya que ambos eventos denotan  $Y_t^{ij} = 1$ , para  $\gamma_1 + \dots + \gamma_k := \gamma$  elementos específicos, y  $Y_t^{ij} = 0$ , para  $kz - \gamma$  objetos específicos. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi_{k,t}(z) &= \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in f_z^{-1}} \frac{\binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k}}{\binom{kz}{\gamma}} P \left[ \sum_{j=1}^{kz} Y_t^{\sigma(j)} = \gamma \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \sum_{\gamma=0}^{kz} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{1, \dots, z\}}} f(\gamma_1) \dots f(\gamma_k) \frac{\binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k}}{\binom{kz}{\gamma}} P \left[ \sum_{j=1}^{kz} Y_t^{\sigma(j)} = \gamma \mid \text{card}(F_t) = z \right]. \end{aligned}$$

Descompusimos la suma anterior para hacer variar los posibles valores de  $\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \gamma$  de 0 a  $kz$ , el total de elementos considerados. El factor  $f(\gamma_1) \dots f(\gamma_k)$  será igual a uno si  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in f_z^{-1}$  y cero si algún  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  no está en este conjunto.

Utilizamos el Teorema 3.1, con  $\Gamma = \{1, \dots, kz\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} & P \left[ \sum_{j=1}^{kz} Y_t^{\sigma(j)} = \gamma \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \binom{kz}{\gamma} \sum_{i=0}^{kz-\gamma} \binom{kz-\gamma}{i} (-1)^i P \left[ Y_t^{\sigma(1,1)} = 1, \dots, Y_t^{\sigma(1,\gamma+i)} = 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi_{k,t}(z) &= \sum_{\gamma=0}^{kz} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \gamma \\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \{1, \dots, z\}}} f(\gamma_1) \dots f(\gamma_k) \frac{\binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k}}{\binom{kz}{\gamma}} \binom{kz}{\gamma} \sum_{i=0}^{kz-\gamma} \binom{kz-\gamma}{i} (-1)^i \\ & P \left[ Y_t^{\sigma(1,1)} = 1, \dots, Y_t^{\sigma(1,\gamma+i)} = 1 \mid \text{card}(F_t) = z \right] \\ &= \sum_{\gamma=0}^{kz} \eta_{k,z}(\gamma) \sum_{i=0}^{kz-\gamma} \binom{kz-\gamma}{j} (-1)^i \lambda_{i+\gamma,t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{k,z}(\gamma) &:= \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_k=\gamma \\ \gamma_1,\dots,\gamma_k \in \{0,\dots,z\}}} f(\gamma_1)\dots f(\gamma_k) \binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_k} \\
&= \sum_{\substack{\gamma_k \in \{0,\dots,z\} \\ \gamma_k \leq \gamma}} \sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_{k-1}=\gamma-\gamma_k \\ \gamma_1,\dots,\gamma_{k-1} \in \{0,\dots,z\}}} f(\gamma_1)\dots f(\gamma_{k-1})f(\gamma_k) \binom{z}{\gamma_1} \dots \binom{z}{\gamma_{k-1}} \binom{z}{\gamma_k} \\
&= \sum_{\substack{\gamma_k \in \{0,\dots,z\} \\ \gamma_k \leq \gamma}} f(\gamma_k) \binom{z}{\gamma_k} \eta_{k-1,z}(\gamma - \gamma_k).
\end{aligned}$$

La igualdad se da dado que partimos la suma en dos, haciendo variar  $\gamma_k$  en la primera, pero recorriendo los mismos elementos.

Concluimos así la demostración. □

La siguiente sección corresponde al análisis de la distribución de  $N_t$ . Haremos esto por partes. Primero analizaremos el caso estático, con  $T = 1$ , y posteriormente el caso dinámico, con  $T > 1$ .

Sea  $T = 1$ . Dado que en esta situación  $t = 1$ , la variable  $t$  toma sólo un valor, omitiremos los subíndices temporales en todas nuestras variables, es decir,  $N_t = N$ ,  $X_t^i = X^i$ , etc.

Al ser  $T = 1$  la ecuación recursiva para  $Z_t^i$ ,  $i \in \Omega$ , definida anteriormente, se reduce a

$$Z^i = X^i + (1 - X^i)\varphi^i.$$

Presentamos entonces el teorema sobre la distribución de  $N$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Si  $T = 1$ , entonces*

$$P[N = r] = \binom{n}{r} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \sum_{\alpha=0}^{n-r} \binom{n-r}{\alpha} (-1)^\alpha \xi_{\alpha+r-k,1}(g(0, k)) \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{j+k}(\Omega).$$

*Demostración.* Sea  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Sea  $T = 1$ . Por la ley de probabilidad total,

$$P[N = r] = \sum_{k=0}^n P[N = r | N^D = k] P[N^D = k] = \sum_{k=0}^r P[N = r | N^D = k] P[N^D = k].$$

La segunda igualdad se da dado que  $N^D$  denota la cantidad de firmas que entraron en quiebra directamente y  $N$  la de todos los que entraron en quiebra, es decir,  $N^D \leq N$ , por lo tanto  $P[N = r | N^D = k] = 0$ , para  $k > r$ .

Por definición,  $N^D = \sum_{i \in \Omega} X^i$ . Aplicando el Teorema 3.1, con  $\Gamma = \Omega$ , obtenemos que

$$P[N^D = k] = \mathbb{1}_{k \leq n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{j+k}(\Omega).$$

En este caso estático

$$N := \sum_{i=1}^n Z^i = \sum_{i=1}^n X^i + (1 - X^i)\varphi^i.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P[N = r | N^D = k] &= P \left[ \sum_{i=1}^n (X^i + (1 - X^i)\varphi^i) = r | N^D = k \right] \\
&= P \left[ k + \sum_{i \in \{j \in \Omega, X^j=0\}} \varphi^i = r | N^D = k \right] \\
&= P \left[ \sum_{i \in \{j \in \Omega, X^j=0\}} \varphi^i = r - k | N^D = k \right].
\end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema 3.1 para  $\varphi^i$ , con  $\Gamma = \{j \in \Omega, X^j = 0\}$ , de cardinalidad  $n - k$ ,

$$\begin{aligned}
&P \left[ \sum_{i \in \{j \in \Omega, X^j=0\}} \varphi^i = r - k | N^D = k \right] \\
&= \binom{n-k}{r-k} \sum_{i=0}^{(n-k)-(r-k)} \binom{n-r}{i} (-1)^i P [\varphi^1 = 1, \dots, \varphi^{i+r-k} = 1 | N^D = k] \\
&= \binom{n-k}{r-k} \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-r}{i} (-1)^i \xi_{i+r-k}(g(0, k)).
\end{aligned}$$

Supusimos que en la situación inicial no hay firmas en quiebra. Por lo tanto, para  $t = 1$ ,  $N_{t-1} = N_0 = 0$ .

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
P[N = r] &= \sum_{k=0}^r P[N = r | N^D = k] P[N^D = k] \\
&= \sum_{k=0}^r \left( \binom{n-k}{r-k} \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-r}{i} (-1)^i \xi_{i+r-k}(g(0, k)) \right) \left( \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{j+k}(\Omega) \right) \\
&= \sum_{k=0}^r \binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-r}{i} (-1)^i \xi_{i+r-k}(g(0, k)) \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{j+k}(\Omega) \\
&= \binom{n}{r} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-r}{i} (-1)^i \xi_{i+r-k}(g(0, k)) \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{j+k}(\Omega).
\end{aligned}$$

En el último paso utilizamos la igualdad  $\binom{n-k}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{r} \binom{r}{k}$ . Terminamos así la demostración.  $\square$

En el teorema anterior obtuvimos una expresión para la distribución de  $N_t$  cuando  $T = 1$ . Analizamos ahora la distribución de  $N_t$  para el caso en que  $T > 1$ , donde hay más de un periodo y  $t$  puede tomar diferentes valores.

Recordemos primero la expresión recursiva para la variable aleatoria del estado de quiebra de las firmas, planteada al inicio de la sección,

$$\begin{aligned} Z_1^i &= X_1^i + (1 - X_1^i)\varphi_1^i \\ Z_t^i &= Z_{t-1}^i + (1 - Z_{t-1}^i)[X_t^i + (1 - X_t^i)\varphi_t^i], \quad \text{para todo } t \in \{2, \dots, T\}, \quad \text{para todo } i \in \Omega. \end{aligned}$$

Recordemos que la variable  $\Theta_t \subset \Omega$  denota el conjunto de firmas en quiebra al tiempo  $t$ .

**Teorema 3.4.** *Sea  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Para todo  $T \in \mathbb{N}$ ,  $T > 1$ , para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,*

$$\begin{aligned} P[N_t = r] &= \sum_{\substack{\theta_t \subset \Omega \\ \text{card}(\theta_t)=r}} P[\Theta_t = \theta_t], \\ P[\Theta_t = \theta_t] &= \sum_{u=0}^r \sum_{\substack{\theta_{t-1} \subset \theta_t \\ \text{card}(\theta_{t-1})=u}} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] P[\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}], \\ P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] &= \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t)=m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \forall j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \xi_{j+r-u-m,t}(g(u, m)). \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $r \in \{0, \dots, n\}$ , sea  $T \in \mathbb{N}$ ,  $T > 1$ , y sea  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Podemos entonces separar el evento  $\text{card}(\Theta_t) = r$ , exactamente  $r$  quiebras, a partir de los conjuntos específicos de  $r$  elementos que contienen a todas las firmas en quiebra. Es decir,

$$[N_t = r] = [\text{card}(\Theta_t) = r] = \bigcup_{\substack{\theta_t \subset \Omega \\ \text{card}(\theta_t)=r}} [\Theta_t = \theta_t].$$

Al ser una unión disjunta,

$$P[N_t = r] = \sum_{\substack{\theta_t \subset \Omega \\ \text{card}(\theta_t)=r}} P[\Theta_t = \theta_t].$$

Usando la ley de probabilidad total para  $P[\Theta_t = \theta_t]$  en esta situación, con  $\theta_t \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_t) = r$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} P[\Theta_t = \theta_t] &= \sum_{u=0}^n \sum_{\substack{\theta_{t-1} \subset \Omega \\ \text{card}(\theta_{t-1})=u}} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] P[\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= \sum_{u=0}^r \sum_{\substack{\theta_{t-1} \subset \theta_t \\ \text{card}(\theta_{t-1})=u}} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] P[\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]. \end{aligned}$$



Observemos aquí que  $\theta_{t-1} \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_{t-1}) = u$ , con  $u \in \{1, \dots, n\}$ , son todos los posibles valores que puede tomar  $\Theta_{t-1}$ , pues esto es cualquier conjunto contenido en  $\Omega$ . Dado que no existe recuperación de las firmas en quiebra,  $\Theta_{t-1} \subset \Theta_t$ . Entonces  $P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] = 0$  para  $\theta_{t-1} \not\subset \theta_t$ , que incluye la situación  $\text{card}(\theta_t) < \text{card}(\theta_{t-1})$ , por lo que se reducen los sumandos.

Obtenemos ahora una expresión para  $P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]$  en la situación anterior, con  $\theta_{t-1} \subset \theta_t \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_{t-1}) = u \leq \text{card}(\theta_t) = r$ ,

$$\begin{aligned} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] &= P[Z_t^i = 1, Z_t^j = 0, \text{ para todo } i \in \theta_t - \theta_{t-1}, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= P[X_t^i + (1 - X_t^i)\varphi_t^i = 1, X_t^j + (1 - X_t^j)\varphi_t^j = 0, \\ &\quad \text{para todo } i \in \theta_t - \theta_{t-1}, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= P[X_t^i = 1 \text{ o } \varphi_t^i = 1, X_t^j = 0, \varphi_t^j = 0, \\ &\quad \text{para todo } i \in \theta_t - \theta_{t-1}, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]. \end{aligned}$$

Es decir, necesitamos que las firmas que faltan por entrar en quiebra para llegar a  $\Theta_t = \theta_t$ ,  $\theta_t - \theta_{t-1}$ , caigan en quiebra al tiempo  $t$  y que las que están fuera del conjunto  $\theta_t$ , es decir, en  $\Omega - \theta_t$ , no lo hagan. Ya que las firmas en estos conjuntos están fuera de  $\theta_{t-1}$ , las firmas en quiebra al tiempo  $t - 1$  son tales, que  $Z_{t-1}^i = 0$  para todas ellas. Por lo tanto, el evento  $Z_t^i = 0$  se reduce a las expresiones de la segunda igualdad de la expresión anterior.

Ya que en este resultado  $X_t^i = 1$  ó  $\varphi_t^i = 1$ , para todo  $i \in \theta_t - \theta_{t-1}$ , podemos descomponer  $P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]$  como

$$\begin{aligned} &P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= \sum_{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1}} P[X_t^i = 1, \text{ para todo } i \in M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1}, \varphi_t^\alpha = 1, \text{ para todo } \alpha \in (\theta_t - \theta_{t-1}) - M_t, \\ &\quad X_t^j = 0, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_t + (\theta_t - \theta_{t-1} - M_t), \varphi_t^\beta = 0, \text{ para todo } \beta \in \Omega - \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]. \end{aligned}$$

Observemos que en esta expresión encontramos sólo intersecciones. Ya que  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  son independientes de  $\{\varphi_t^j, j \in \Omega\}$  podemos separar los eventos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} &P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &= \sum_{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\ &\quad P[\varphi_t^i = 1, \varphi_t^j = 0, \text{ para todo } i \in \theta_t - \theta_{t-1} - M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]. \end{aligned}$$

Separamos los sumandos por cardinalidad de  $M_t$  y, dado que  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$  son intercambiables,

$$\begin{aligned}
& P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
= & \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
& P[\varphi_t^i = 1, \varphi_t^j = 0, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, r - u - m\}, \\
& \text{para todo } j \in \{r - u - m, \dots, r - u - m + (n - r) = n - u - m\} \\
& | N_{t-1} := \text{card}(\Theta_{t-1}) = u, N_t^D := \text{card}(M_t) = m] \\
= & \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
& \frac{P[\sum_{i \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t} \varphi_t^i = r - u - m | N_{t-1} = u, N_t^D = m]}{\binom{n-u-m}{r-u-m}}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se da porque al ser  $\{\varphi_t^i, i \in \Omega\}$  un conjunto de variables intercambiables, la probabilidad de  $r - u - m$  elementos con  $\varphi_t^i = 1$ , específicos, seleccionados de  $n - u - m$  objetos, es igual para cualquier selección. Al haber  $\binom{n-u-m}{r-u-m}$  formas de elegir estos elementos específicos obtenemos que la probabilidad de exactamente  $r - u - m$  elementos con cualesquiera  $\varphi_t^i = 1$  seleccionados de  $n - u - m$  objetos, entre  $\binom{n-u-m}{r-u-m}$  es igual a la probabilidad del evento específico.

Aplicando el Teorema 3.1 a  $P[\sum_{i \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t} \varphi_t^i = r - u - m | N_{t-1} = u, N_t^D = m]$ , con  $\Gamma = \Omega - u - M_t$  de cardinalidad  $\{1, \dots, n - u - m\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
& P \left[ \sum_{i \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t} \varphi_t^i = r - u - m | N_{t-1} = u, N_t^D = m \right] \\
= & \binom{n - u - m}{r - u - m} \sum_{j=0}^{(n-u-m)-(r-u-m)} \binom{(n - u - m) - (r - u - m)}{j} (-1)^j \\
& P[\varphi_t^1 = 1, \dots, \varphi_t^{j+r-u-m} = 1 | N_{t-1} = u, N_t^D = m].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
& P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
= & \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \forall i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
& \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \xi_{j+r-u-m,t}(g(u, m)).
\end{aligned}$$

Concluyendo así el teorema. □

El teorema anterior será el último que obtendremos con las suposiciones hasta ahora consideradas. Es claro que no obtuvimos una expresión sencilla para la distribución de  $N_t$ , ni se observan características claras de ésta a partir de las expresiones encontradas. A continuación aplicaremos los teoremas a casos específicos para obtener resultados concretos.

En el Teorema 3.4 obtuvimos una expresión para la distribución de la variable aleatoria  $N_t$ . Esta expresión depende de  $\xi_{k,t}$ , variable que describimos en el Teorema 3.2, que depende a su vez de  $\eta_{k,z}(\gamma)$ , descrita también en el Teorema 3.2, y de  $\lambda_{i,t}$ , que es conocida ya que una de nuestras suposiciones es que conocemos la distribución conjunta de  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$ . Para encontrar una forma explícita de la distribución de  $N_t$  podemos primero obtener  $\eta_{k,z}(\gamma)$ , para obtener  $\xi_{k,t}$ , siguiendo el Teorema 3.2, e incorporar este elemento en la fórmula de  $N_t$  del Teorema 3.4. La expresión explícita de  $N_t$  para un caso específico puede ser bastante compleja, dependiendo de los parámetros,  $f$ ,  $g$  y  $F_t$ , y de las distribuciones conjuntas de  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  y  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$ .

Analizaremos ahora la distribución de  $N_t$  en casos específicos. Haremos esto considerando ciertas suposiciones adicionales a las propuestas:

1. Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  forman parte de una sucesión de variables aleatorias intercambiables, y por lo tanto éste es un conjunto finito intercambiable.
2. Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$  forman parte de una sucesión de variables aleatorias intercambiables, y por lo tanto éste es un conjunto finito intercambiable.
3. Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ , las distribuciones conjuntas de  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  y  $\{Y_t^{i,j}, (i,j) \in \Omega^2\}$  no cambian con el tiempo, por lo tanto, tampoco lo hacen  $\xi_{k,t}(z)$ ,  $\mu_{k,t}$  y  $\lambda_{k,t}$ .

Estas tres especificaciones nos dejan con cálculos más manejables y con una complejidad teórica bastante rica, por lo que podemos aplicar algunos resultados interesantes, como lo veremos a continuación.

Encontremos primero una expresión simplificada para la distribución de  $N_t$  considerando las nuevas suposiciones.

**Teorema 3.5.** *Sea  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Consideremos las nuevas suposiciones. Para todo  $T \in \mathbb{N}$ ,  $T > 1$ , para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,*

$$P[N_t = r] = \sum_{u=0}^r P[N_{t-1} = u] \binom{n-u}{r-u} \sum_{m=0}^{r-u} \binom{r-u}{m} \sum_{\alpha=0}^{n-u-m} \binom{n-u-m}{\alpha} \mu_{m+\alpha,t} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^{j+\alpha} \xi_{j+r-u-m,t}(g(u,m)).$$

*Demostración.* Observemos que, para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  y  $\{Y_t^i, i \in \Omega\}$  son conjuntos de variables aleatorias intercambiables, por lo tanto  $\{Z_t^i, i \in \Omega\}$  son también variables aleatorias

intercambiables. Entonces

$$\begin{aligned}
P[N_t = r, N_{t-1} = u] &= \binom{n}{u} P[N_t = r, Z_{t-1}^1 = 1, \dots, Z_{t-1}^u = 1, Z_{t-1}^{u+1} = 0, \dots, Z_{t-1}^n = 0] \\
&= \binom{n}{u} \binom{n-u}{r-u} P[Z_t^1 = 1, \dots, Z_t^r = 1, Z_t^{r+1} = 0, \dots, Z_t^n = 0, \\
&\quad Z_{t-1}^1 = 1, \dots, Z_{t-1}^u = 1, Z_{t-1}^{u+1} = 0, \dots, Z_{t-1}^n = 0] \\
&= \binom{n}{u} \binom{n-u}{r-u} P[\Theta_t = \theta_t, \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}],
\end{aligned}$$

para cualesquiera  $\theta_{t-1} \subset \theta_t \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_t) = r$  y  $\text{card}(\theta_{t-1}) = u$ .

De igual forma obtenemos que

$$\begin{aligned}
P[N_{t-1} = u] &= \binom{n}{u} P[Z_{t-1}^1 = 1, \dots, Z_{t-1}^u = 1, Z_{t-1}^{u+1} = 0, \dots, Z_{t-1}^n = 0] \\
&= \binom{n}{u} P[\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}],
\end{aligned}$$

para todo  $\theta_{t-1} \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_{t-1}) = u$ .

Entonces

$$P[N_t = r | N_{t-1} = u] = \frac{\binom{n}{u} \binom{n-u}{r-u} P[\Theta_t = \theta_t, \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]}{\binom{n}{u} P[\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}]} = \binom{n-u}{r-u} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}].$$

Por otro lado

$$P[N_t = r] = \sum_{u=0}^r P[N_t = r | N_{t-1} = u] P[N_{t-1} = u].$$

Entonces

$$P[N_t = r] = \sum_{u=0}^r P[N_{t-1} = u] \binom{n-u}{r-u} P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}],$$

para cualesquiera  $\theta_{t-1} \subset \theta_t \subset \Omega$ ,  $\text{card}(\theta_{t-1}) = u$  y  $\text{card}(\theta_t) = r$ .

Por el Teorema 3.4, tenemos que

$$P[\Theta_t = \theta_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] = \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t,$$

$$\text{para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \xi_{j+r-u-m, t}(g(u, m)).$$

Ya que  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  son intercambiables,

$$\begin{aligned}
& P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
&= P[X_t^1 = 1, \dots, X_t^m = 1, X_t^{m+1} = 0, \dots, X_t^{n-u} = 0] \\
&= P[X_t^1 = 1, \dots, X_t^m = 1, [\{X_t^{m+1} = 1\} \cup \dots \cup \{X_t^{n-u} = 1\}]^c] \\
&= P[[X_t^1 = 1, \dots, X_t^m = 1] - [\{X_t^{m+1} = 1\} \cup \dots \cup \{X_t^{n-u} = 1\}]] \\
&= P[[X_t^1 = 1, \dots, X_t^m = 1] - [\{X_t^1 = 1, \dots, X_t^{m+1} = 1\} \cup \dots \cup \{X_t^1 = 1, \dots, X_t^{n-u} = 1\}]] \\
&= \sum_{\alpha=0}^{n-u-m} (-1)^\alpha \binom{n-u-m}{\alpha} P[X_t^1 = 1, \dots, X_t^{m+\alpha} = 1] \\
&= \sum_{\alpha=0}^{n-u-m} (-1)^\alpha \binom{n-u-m}{\alpha} \mu_{m+\alpha, t},
\end{aligned}$$

para todo  $M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1}$  con  $\text{card}(M_t) = m$ .

Observemos también que

$$\sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} 1 = \binom{n-u}{m}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P[N_t = r] &= \sum_{u=0}^r P[N_{t-1} = u] \binom{n-u}{r-u} \\
&\quad \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} P[X_t^i = 1, X_t^j = 0, \text{ para todo } i \in M_t, \text{ para todo } j \in \Omega - \theta_{t-1} - M_t | \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}] \\
&\quad \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \xi_{j+r-u-m, t}(g(u, m)) \\
&= \sum_{u=0}^r P[N_{t-1} = u] \binom{n-u}{r-u} \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} \sum_{\alpha=0}^{n-u-m} (-1)^\alpha \binom{n-u-m}{\alpha} \mu_{m+\alpha, t} \\
&\quad \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \xi_{j+r-u-m, t}(g(u, m)) \\
&= \sum_{u=0}^r P[N_{t-1} = u] \binom{n-u}{r-u} \sum_{m=0}^{r-u} \binom{r-u}{m} \sum_{\alpha=0}^{n-u-m} \binom{n-u-m}{\alpha} \mu_{m+\alpha, t} \\
&\quad \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^{j+\alpha} \xi_{j+r-u-m, t}(g(u, m)).
\end{aligned}$$

□

Presentamos ahora el teorema de De Finetti. Fue hecho propuesto y demostrado por Bruno De Finetti en 1931 y a continuación utilizaremos una versión del teorema para distribuciones Bernoulli. La demostración se desarrollará en el apéndice.

**Teorema 3.6.** *Teorema de De Finetti.* Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias intercambiables con distribución Bernoulli. Entonces existe una función de distribución  $F$  sobre  $[0, 1]$  tal, que

$$P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] = \int_0^1 \theta^r (1 - \theta)^{k-r} dF(\theta).$$

Utilizaremos el Teorema de De Finetti de la siguiente forma:

Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\{X_t^i, i \in \Omega\}$  son parte de una sucesión infinita de variables aleatorias intercambiables con distribución Bernoulli. Aplicando el teorema de De Finetti, para todo  $1 \leq k \leq n$ , existe  $F_{\Theta_{X_t}}$ , función de distribución sobre  $[0, 1]$  con la variable aleatoria correspondiente,  $\Theta_{X_t}$ , tal, que

$$\mu_{k,t} := P[X_t^1 = 1, \dots, X_t^k = 1] = \int_0^1 \theta^k dF_{\Theta_{X_t}}(\theta) = E[\Theta_{X_t}^k].$$

Volvemos a utilizar el Teorema de De Finetti para obtener  $\lambda$ :

Para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\{Y_t^{i,j}, (i, j) \in \Omega^2\}$  son parte de una sucesión infinita de variables aleatorias intercambiables con distribución Bernoulli. Aplicando el teorema de De Finetti, para todo  $1 \leq k \leq n$ , existe  $F_{\Theta_{Y_t}}$ , función de distribución sobre  $[0, 1]$  con la variable aleatoria correspondiente,  $\Theta_{Y_t}$ , tal, que

$$\lambda_{k,t} := P[Y_t^{\sigma(1,1)} = 1, \dots, Y_t^{\sigma(1,k)} = 1] = \int_0^1 \theta^k dF_{\Theta_{Y_t}}(\theta) = E[\Theta_{Y_t}^k],$$

con  $\sigma$ , cualquier permutación de  $\Omega^2$ .

Veamos que, por nuestra tercera suposición adicional,  $\mu_{k,t}$  y  $\lambda_{k,t}$  no cambian con el tiempo. Por lo tanto, tomando  $\Theta_X := \Theta_{X_i}$  y  $\Theta_Y := \Theta_{Y_j}$ , para algún  $(i, j) \in T^2$ , obtenemos que, para todo  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\mu_{k,t} = E[\Theta_X^k]$  y  $\lambda_{k,t} = E[\Theta_Y^k]$ , es decir, estos conjuntos se caracterizan con dos variables aleatorias.

Observemos que nuestros resultados sobre la distribución de  $N_t$  están completamente establecidos a partir de  $\Omega, T, F_t, f, \mu_{k,t}$  y  $\lambda_{k,t}$ .

Queda claro que las tres suposiciones adicionales están hechas para, las primeras dos, aplicar el teorema de De Finetti y caracterizar la distribución de  $N_t$  por variables aleatorias sobre  $[0, 1]$  y, la tercera, para que sean necesarias para esto sólo dos variables aleatorias, una para los quiebras directas,  $\Theta_X$ , y otra para los contagios,  $\Theta_Y$ .

Sea  $p := P[X_t^1 = 1] = E[\Theta_X]$  y sea  $q := P[Y_t^{\sigma(1)} = 1] = E[\Theta_Y]$ , siguiendo la notación del modelo estático de la probabilidad de entrar en quiebra directamente para cualquier firma y de un contagio cualquiera. Sea  $\sigma_X^2 = V[\Theta_X]$  y sea  $\sigma_Y^2 = V[\Theta_Y]$ .

Supondremos que la varianza y la esperanza de  $\Theta_X$  y  $\Theta_Y$  son conocidas y que estas variables aleatorias tienen distribución Beta. Hacemos esto ya que las distribuciones Beta tienen soporte  $[0, 1]$  y podemos obtener todos los momentos a partir de la varianza y esperanza, utilizando el siguiente

teorema.

**Teorema 3.7.** *Sea  $\Theta$  una variable aleatoria de distribución beta con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, su función de densidad es*

$$f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}.$$

Entonces

$$E[\Theta^k] = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}, \quad \text{donde}$$

$$\alpha = E[\Theta] \left( \frac{E[\Theta](1-E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) \quad \text{y} \quad \beta = (1-E[\Theta]) \left( \frac{E[\Theta](1-E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right),$$

con  $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$ , la función Gamma de Euler.

El Teorema 3.7 será probado en el apéndice.

Aplicando el teorema anterior podemos caracterizar a las variables aleatorias  $\Theta_X$  y  $\Theta_Y$ , con distribución beta, a partir de su varianza y esperanza, si su varianza es distinta de cero. En este caso podemos utilizar la ecuación del Teorema 3.7 para obtener los momentos de cada variable aleatoria.

- Si  $\sigma_X^2 = 0$ , entonces  $E[\Theta_X] = \Theta_X$  y  $\Theta_X^k$  es constante, por lo tanto

$$\mu_{k,t} = E[\Theta_X^k] = \Theta_X^k = E[\Theta_X]^k = p^k.$$

- Si  $\sigma_X^2 > 0$ ,

$$\mu_{k,t} = E[\Theta_X^k] = \frac{\Gamma(\alpha_X+k)}{\Gamma(\alpha_X)} \frac{\Gamma(\alpha_X+\beta_X)}{\Gamma(\alpha_X+\beta_X+k)},$$

$$\text{Con } \alpha_X = p \left( \frac{p(1-p)}{\sigma_X^2} - 1 \right) \quad \text{y} \quad \beta_X = (1-p) \left( \frac{p(1-p)}{\sigma_X^2} - 1 \right),$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy, \quad \text{la función Gamma de Euler.}$$

- Si  $\sigma_Y^2 = 0$ , entonces  $E[\Theta_Y] = \Theta_Y$  y  $\Theta_Y^k$  es constante, por lo tanto

$$\lambda_{k,t} = E[\Theta_Y^k] = \Theta_Y^k = E[\Theta_Y]^k = q^k.$$

- Si  $\sigma_Y^2 > 0$ ,

$$\lambda_{k,t} = E[\Theta_Y^k] = \frac{\Gamma(\alpha_Y+k)}{\Gamma(\alpha_Y)} \frac{\Gamma(\alpha_Y+\beta_Y)}{\Gamma(\alpha_Y+\beta_Y+k)},$$

$$\text{Con } \alpha_Y = q \left( \frac{q(1-q)}{\sigma_Y^2} - 1 \right) \quad \text{y} \quad \beta_Y = (1-q) \left( \frac{q(1-q)}{\sigma_Y^2} - 1 \right),$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy, \text{ la función Gamma de Euler.}$$

Es decir, dadas estas suposiciones, la distribución de  $N_t$  queda completamente establecida con los parámetros  $\Omega, f, g, p, q, \sigma_X^2$  y  $\sigma_Y^2$ . Hemos obtenido también las relaciones que nos llevan de estos elementos a obtener  $\mu_{k,t}, \lambda_{k,t}, \xi_{k,t}$  y, con ellos, la distribución de  $N_t$ . Podemos entonces calcular valores para casos específicos.

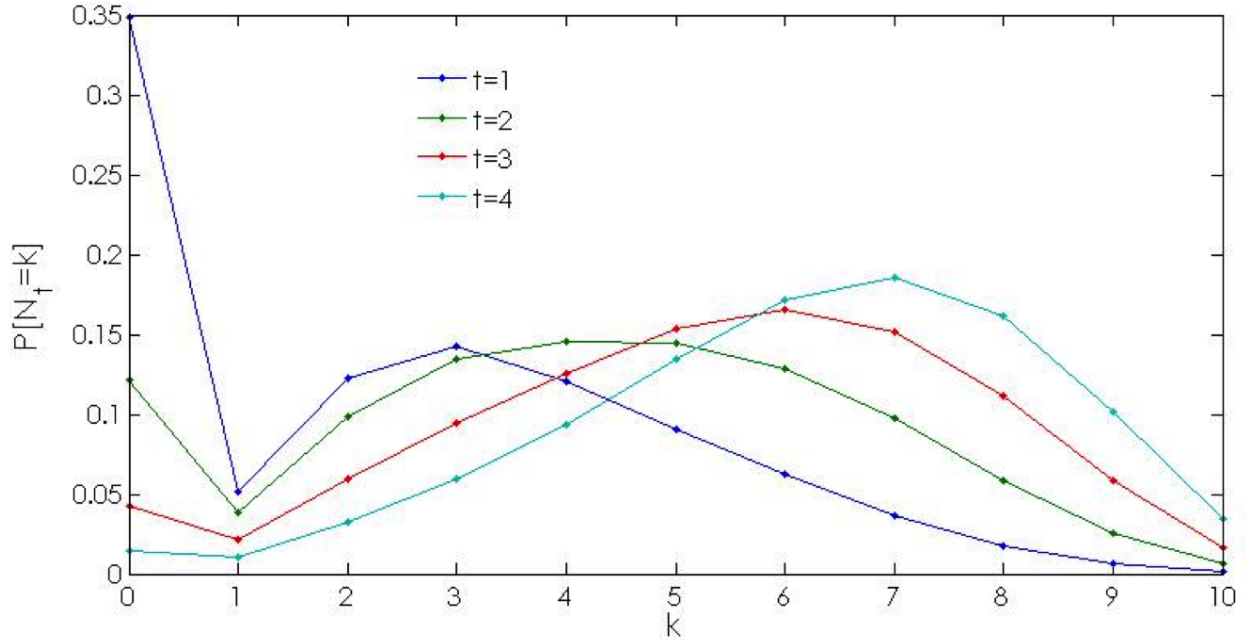


Figura 7: Distribución de  $N_t$ .

La figura 7 muestra la distribución de  $N_t$  para 10 firmas,  $n = 10$ , cuatro periodos,  $T = 4$ , considerando un contagio suficiente para quebrar,  $f(x) = \mathbb{1}_{x \geq 1}$ , de las firmas que caen directamente en ese periodo,  $g(u, m) = m$ , con  $p = .1, q = .2, \sigma_X^2 = 0$  y  $\sigma_Y^2 = 0$ , es decir, con las quiebras directas y por contagio independientes. Observemos que la distribución de  $N_t$  tiende hacia valores altos a medida que el tiempo pasa, esto se deba a que no existe recuperación.



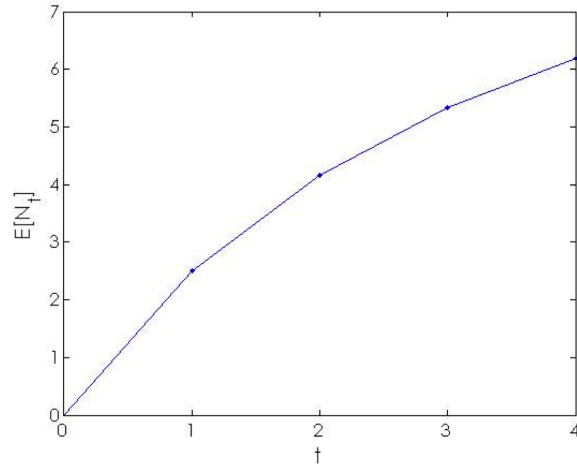


Figura 8: Esperanza de  $N_t$ .

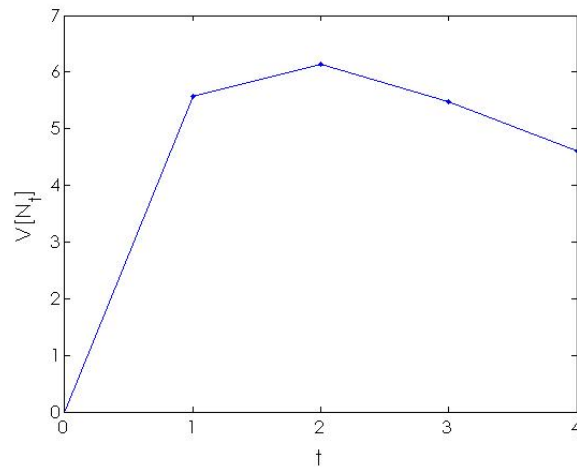


Figura 9: Varianza de  $N_t$ .

La figura 9 muestra el cambio de la varianza de  $N_t$  cuando el tiempo transcurre. La figura 8 muestra el avance de  $E[N_t]$ , el que no haya recuperación explica el incremento en la esperanza.

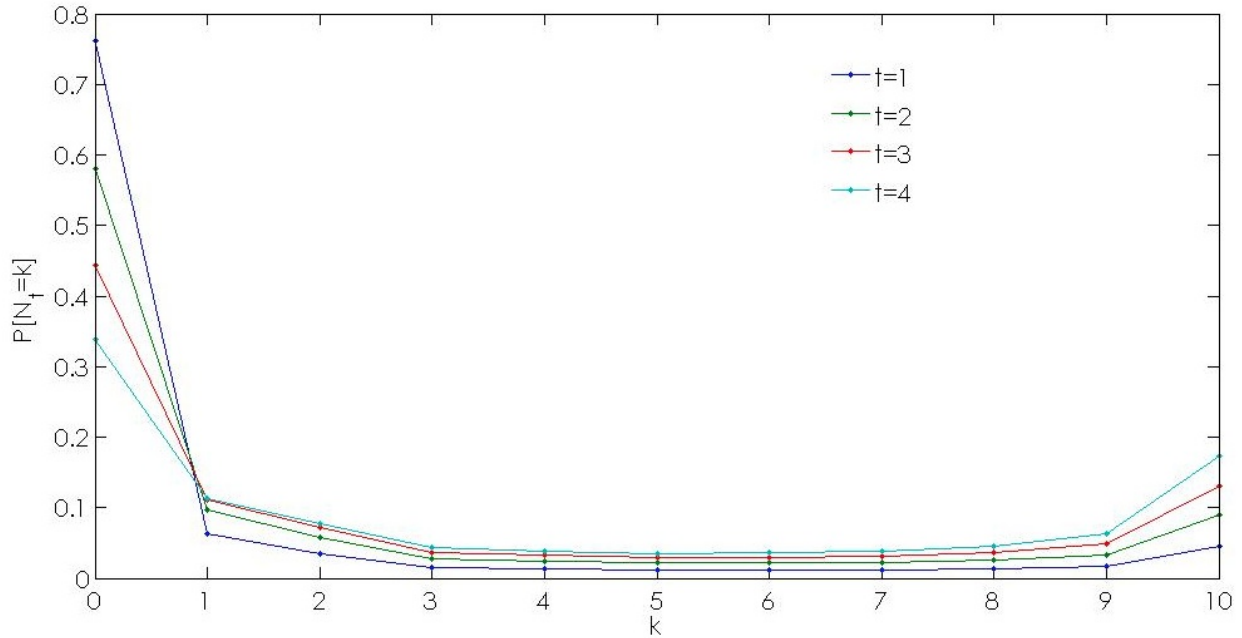


Figura 10: Distribución de  $N_t$ .

La figura 10 muestra la distribución de  $N_t$  para 10 firmas,  $n = 10$ , y cuatro periodos,  $T = 4$ , considerando tres contagios necesarios contagio para quebrar,  $f(x) = \mathbb{1}_{x \geq 3}$ , de las firmas que caen directamente en ese periodo,  $g(u, m) = m$ . Consideramos también  $p = .1$ ,  $q = .4$ ,  $\sigma_X^2 = .05$  y  $\sigma_Y^2 = .05$ . Observemos que las distribuciones para cualquier tiempo están cargadas hacia  $k = 0$  y  $k = 10$ .

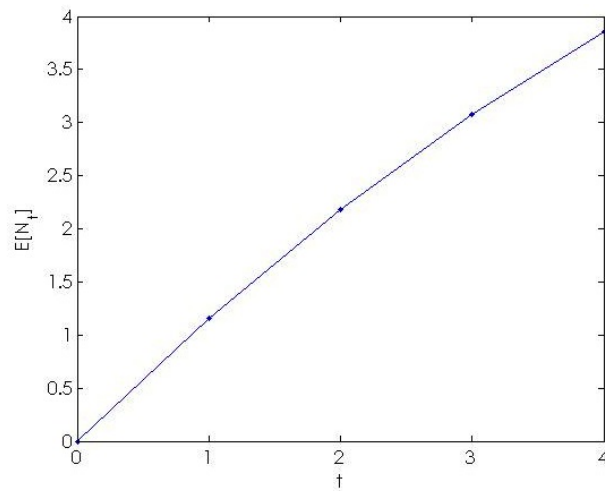


Figura 11: Esperanza de  $N_t$ .

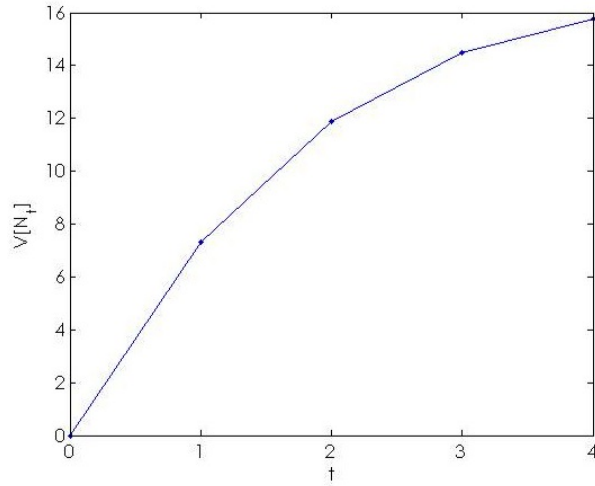


Figura 12: Varianza de  $N_t$ .

La figura 12 muestra el cambio de la varianza de  $N_t$  cuando el tiempo transcurre. La figura 11 muestra el avance de  $E[N_t]$ .

## 4. Sectores

A nuestro modelo añadiremos ahora la idea de firmas en sectores, obtenida de Davis y Lo, en [7]. Consideremos un conjunto de firmas que se divide en sectores disjuntos, las firmas son independientes respecto a las firmas fuera de su sector y no necesariamente independientes dentro de él, el contagio se da solamente dentro de los sectores. Denotemos al número total de firmas  $n$ , a la cantidad de sectores  $s$  y  $n_i$  al número de firmas en el sector  $i$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Entonces  $n = n_1 + \dots + n_s$ . Consideraremos solamente un periodo en el tiempo, de ahora en adelante  $N = N_1$ .

Dado que cada firma es independiente de las que se encuentran fuera de su sector, la cantidad de quiebras dentro de un sector también será independiente respecto a los demás sectores. Sea  $p_i$  la probabilidad de quiebra directa y  $q_i$  la de contagio para el sector  $i$ , con  $i = 1, \dots, s$ . Sea  $N^i$  la variable aleatoria de la cantidad de firmas que caen en quiebra para el sector  $i$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Entonces

$$P[N^1 = k_1, N^2 = k_2, \dots, N^s = k_s] = \prod_{i=1}^s P[N^i = k_i].$$

Recordemos que cada  $N^i$  está determinada por diferentes tamaños del sector,  $n_i$ , probabilidades de contagio,  $q_i$  y de quiebra directa,  $p_i$ . Cada sector puede verse como un conjunto de firmas con contagio general como los analizados anteriormente. Cada uno de estos sectores es independiente de los otros, dando lugar a esta función de masa conjunta para la cantidad de quiebras por sector.

La función de masa que buscamos es una general, que nos dé la distribución del total de firmas en quiebra. Observemos que, para generar esta función podemos considerar todas las formas diferentes en que se pueden formar un cierto número de quiebras  $k$ , en  $s$  sectores, y aplicar la función de masa de la variable  $N$  que obtuvimos en la sección anterior. Es decir,

$$P[k \text{ quiebras}] = P[N = k] = \sum_{a \in \mathcal{A}_s(k)} \prod_{i=1}^s P[N^i = k_i],$$

donde  $\mathcal{A}_s(k)$  denota al conjunto de todos los arreglos del tipo  $a = \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$  con  $\sum_{i=1}^s k_i = k$  y  $0 \leq k_i \leq n_i$ . El arreglo  $a$  nos da la cantidad de quiebras para cada sector donde el número total de quiebras es  $k$ . Los elementos de  $\mathcal{A}_s(k)$  son entonces todas las posibles formas en que se pueden tener  $k$  quiebras en total, todas las maneras en que podemos acomodar estas  $k$  quiebras en los  $s$  sectores, considerando la restricción de tamaño para cada sector.

El calcular  $\mathcal{A}_s(k)$  explícitamente es sencillo para pocos sectores pero se complica a medida que  $s$  crece, haciendo casi necesario pasarlo por una computadora. Presentaré ahora una construcción más formal y algunas características del conjunto  $\mathcal{A}_s(k)$ .

Observemos que

$$\mathcal{A}_s(k) = \bigcup_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \{\mathcal{A}_{s-1}(k-j), j\},$$

donde  $\{\mathcal{A}_{s-1}(k-j), j\}$  denota a todos los arreglos  $\{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}, j\}$  con  $\{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}\} \in \mathcal{A}_{s-1}(k-j)$ .

Observemos que  $\mathcal{A}_1(\alpha) = \{\alpha\}$ , para todo  $\alpha \geq 0$  y que  $\mathcal{A}_\alpha(0) = \{0, \dots, 0\}$ , para todo  $\alpha > 0$ .

Esta construcción recursiva se da pensando que para obtener los arreglos  $\mathcal{A}_s(k)$  podemos tomar todos los arreglos  $\mathcal{A}_{s-1}(k-j)$  para diferentes valores de  $j$ , con un sector y cierto número de quiebras menos, y agregarles el sector y las quiebras necesarias para llegar a  $k$  quiebras. Esta nueva entrada,

$j$ , tendrá dos restricciones, una debido a que el número de quiebras en el último sector, representado por la última entrada, no puede exceder el total de firmas en este sector  $n_s$  ni el total de quiebras en el portafolio,  $k$ , la otra restricción se da ya que el número de quiebras es los primeros  $s - 1$  sectores no puede ser mayor la cantidad de firmas en estos sectores ni  $j$  puede ser negativa, pues esto no tiene sentido en el modelo. Es por esto que

$$j_{\min} = \max\left(k - \sum_{i=1}^{s-1} n_i, 0\right)$$

$$j_{\max} = \min(k, n_s).$$

Teniendo esta fórmula podemos derivar una forma recursiva para la cardinalidad de  $\mathcal{A}_s(k)$ . Dado que, para cualquier  $j$ ,  $\{\mathcal{A}_{s-1}(k-j), j\}$  agrega un elemento a cada arreglo de  $\mathcal{A}_{s-1}(k-j)$ , estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Observemos que  $\bigcup_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \{\mathcal{A}_{s-1}(k-j), j\}$  es una unión disjunta. Por lo tanto

$$\text{card}(\mathcal{A}_s(k)) = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \text{card}(\{\mathcal{A}_{s-1}(k-j), j\}) = \text{card}(\mathcal{A}_s(k)) = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \text{card}(\mathcal{A}_{s-1}(k-j)).$$

Dado que  $\mathcal{A}_1(\alpha) = \{\alpha\}$  para todo  $\alpha \geq 0$ ,  $\text{card}(\mathcal{A}_1(\alpha)) = 1$ . Observemos también que  $\mathcal{A}_\alpha(0) = \{0, \dots, 0\}$  para todo  $\alpha > 0$ , por lo tanto  $\text{card}(\mathcal{A}_\alpha(0)) = 1$ .

Estas ecuaciones nos sirven para calcular  $\mathcal{A}_s(k)$  y con él la distribución de  $N$ .

Como ejemplo consideremos un conjunto de 10 firmas divididas en tres sectores de tamaño 1, 3 y 6. Consideremos  $q_i = q$  constante para los tres sectores.

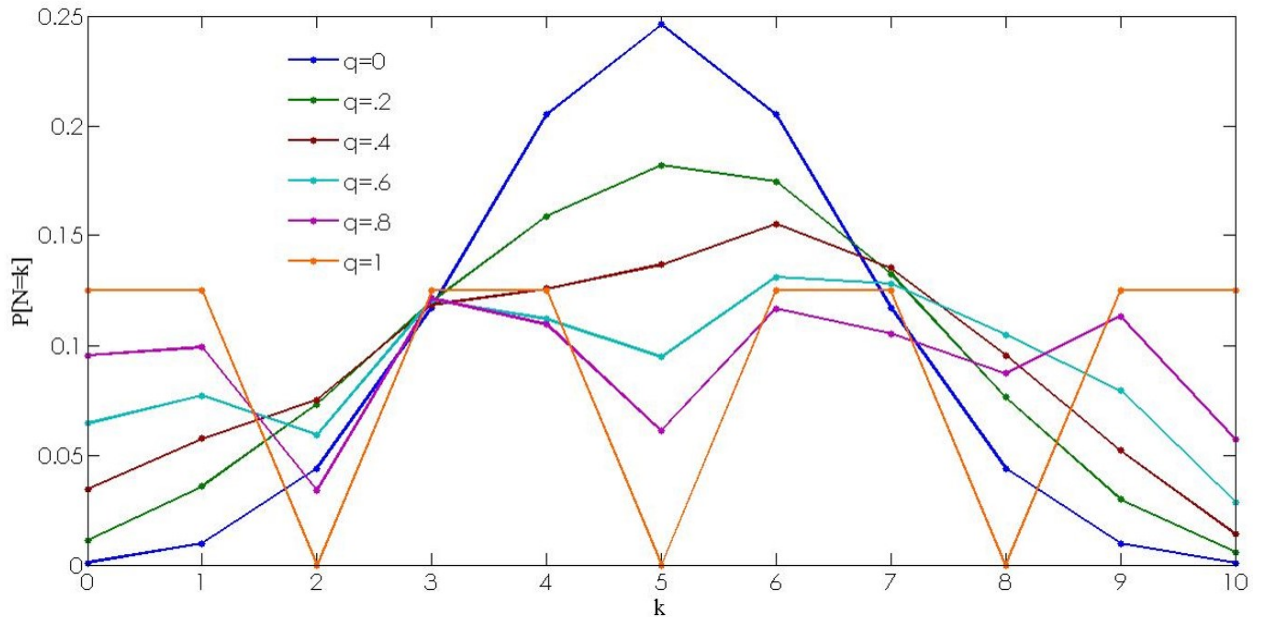


Figura 13: Distribución de  $N$  considerando tres sectores con 1, 3 y 6 elementos.

La figura 13 muestra las distribuciones de  $N$  para diferentes valores de  $q$  donde  $p_i$  fue calculado de manera que el valor esperado en cada sector es la mitad de su tamaño. Esto fue hecho para mantener el valor esperado total igual a 5.

Al considerar sectores podemos hacer una comparación con el trabajo de Moody's [1], presentado en la introducción, que motivó el desarrollo de estos modelos. Consideremos la función de pérdida  $L(x) = 100 \max(x - .3, 0)$ , donde  $x$  denota la fracción del total de firmas en quiebra.

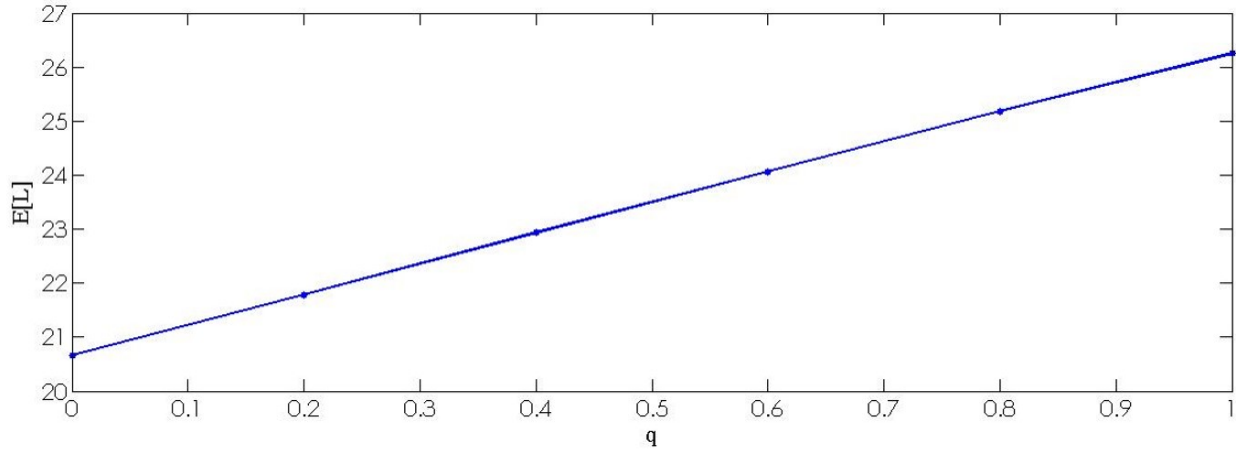


Figura 14: Efecto de la probabilidad de contagio  $q$  en la pérdida esperada.

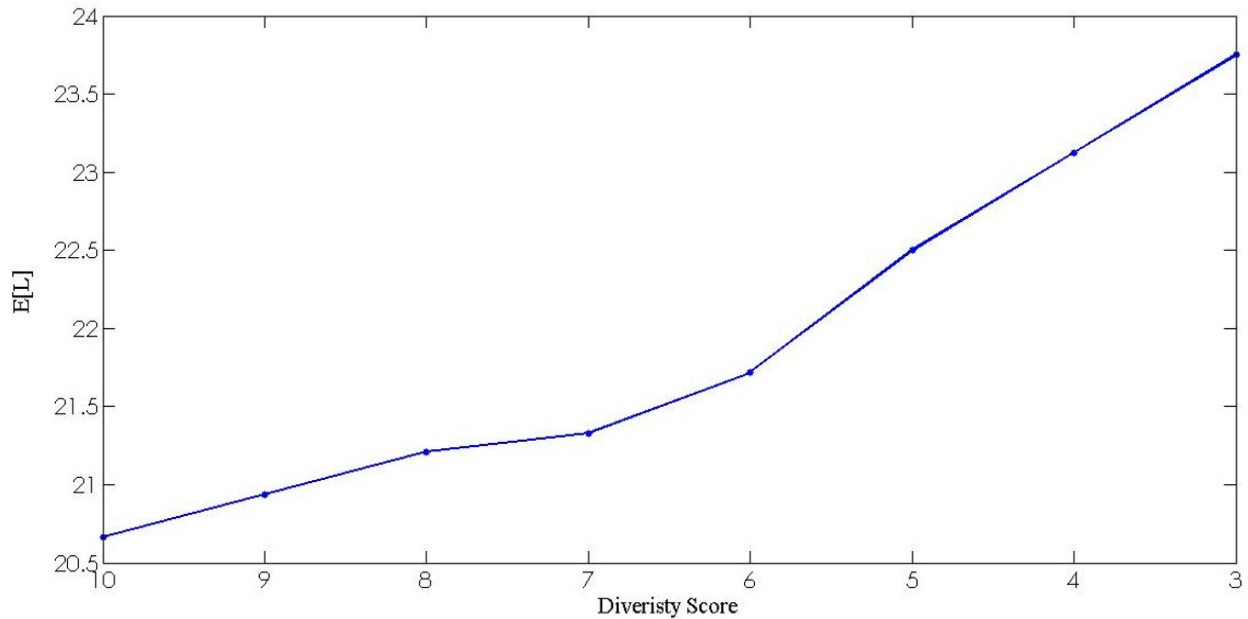


Figura 15: Efecto del *Diversity Score* en la pérdida esperada.

La figura 14 muestra la pérdida esperada obtenida utilizando el modelo de contagio explícito que hemos analizado en el desarrollo de este trabajo aplicado al ejemplo propuesto. La figura 15 muestra la pérdida obtenida utilizando la Técnica de Expansión Binomial de Moody's con  $p = .5$ .

La pérdida esperada nos sirve para comparar los modelos. Nuestro ejemplo de 10 firmas en 3 sectores tiene *Diversity Score* de 6 y pérdida esperada de 21.7, lo que equivale a una probabilidad de contagio de 0.18.

Es necesario obtener las probabilidades de quiebra directa y de contagio de datos reales así como las relaciones económicas globales para incluirlas en nuestros modelos. Sin estos datos será difícil modelar la realidad económica. Sin embargo, esta tarea implica mayor conocimiento económico y acceso a información poco difundida, por lo que no será discutido en este trabajo.

## Apéndice

### A. Demostración del Teorema de De Finetti

En este capítulo desarrollaremos la demostración del teorema publicada en 1976 por David Heath y William Sudderth, en [2], para distribuciones Bernoulli. Veamos primero dos resultados necesarios para la demostración del teorema.

**Teorema de Selección de Helly** (A partir de Feller, en [5]). *Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de funciones de distribución. Entonces existe una función,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , monótonamente creciente y continua por la derecha, y una subsucesión,  $\{F_{n_k}\}$  de  $\{F_n\}$ , tales, que  $\{F_{n_k}\}$  converge débilmente a  $F$ , es decir,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x) = F(x), \text{ para todo } x, \text{ punto de continuidad de } F.$$

*Demostración.* Veamos primero que existe una subsucesión,  $\{F_{n_k}\}$  de  $\{F_n\}$ , convergente sobre todo punto de  $\mathbb{Q}$ . Para ello utilizaremos el método diagonal de Cantor.

Enumeremos los elementos de  $\mathbb{Q}$  como  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ .

Sea  $F_n^{(0)} = F_n$ . Entonces  $\{F_n^{(0)}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada de puntos en  $\mathbb{R}$ , por lo tanto existe una subsucesión convergente,  $\{F_{n_k}^{(0)}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$  de  $\{F_n^{(0)}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ .

Sea  $F_k^{(1)} = F_{n_k}^{(0)}$ . Como  $\{F_k^{(1)}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada de puntos, existe una subsucesión convergente,  $\{F_{k_m}^{(1)}(x_2)\}_{m=1}^{\infty}$  de  $\{F_k^{(1)}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ , y por lo tanto de  $\{F_n^{(0)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ .

Sea  $F_m^{(2)} = F_{k_m}^{(1)}$ .

Siguiendo este método obtenemos  $\{\{F_n^k\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ , una sucesión de subsucesiones, tal, que  $\{F_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$  es subsucesión de  $\{F_n^{(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ , y por lo tanto de  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ , y  $\{F_n^{(k)}(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$  converge para  $1 \leq x_i \leq k$ .

Consideremos ahora la subsucesión diagonal de funciones  $\{F_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ , que toma en el lugar  $n$  la  $n$ -ésima función de la  $n$ -ésima subsucesión de funciones de  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Para todo  $j \in \mathbb{N}$  la sucesión de puntos  $\{F_n^{(n)}(x_j)\}_{n=1}^{\infty}$  converge, pues  $\{F_n^{(n)}(x_j)\}_{n=j}^{\infty}$ , los valores a partir de  $j$ , es subsucesión de  $\{F_n^{(j)}(x_j)\}_{n=1}^{\infty}$  convergente.

Por lo tanto existe una subsucesión,  $\{F_{n_k}\}$  de  $\{F_n\}$ , la diagonal que acabamos de definir, convergente en todo punto de  $\mathbb{Q}$ .

$$\text{Sea } F^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{Q}.$$

Dado que  $\{F_{n_k}\}$  son funciones de distribución,  $F^* : \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$ , es monótonamente creciente. Extendemos la definición de  $F^*$  a  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  para abarcar a  $\mathbb{R}$ ,

$$F^*(x) = \sup\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}, r < x\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Observemos que

$$0 = \inf\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}\} \leq F^*(x) \leq \sup\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}\} = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Es decir,  $F^* : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .



$F^*(x) = \sup\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}, r < x\} \geq F^*(r)$ , para todo  $r \in \mathbb{Q}$ , para todo  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $r < x$ , por definición.  
 $F^*(x) = \sup\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}, r < x\} \leq F^*(r)$ , para todo  $r \in \mathbb{Q}$ , para todo  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $r > x$ ,  
pues  $F^*$  es monótonamente creciente en  $\mathbb{Q}$ .

$F^*(x) \geq F^*(y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $x > y$ , pues  $\{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}, r < y\} \subset \{F^*(r) | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ .

Por lo tanto  $F^* : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es monótonamente creciente.

Veamos ahora que  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x) = F^*(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x$  punto de continuidad de  $F^*$ .  
Si  $x$  es un punto de continuidad de  $F^*$  y  $\epsilon > 0$ , entonces existen  $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ ,  $x_1 < x < x_2$ , tales, que

$$\begin{aligned} F^*(x_1) &\leq F^*(x) < F^*(x_1) + \epsilon \\ F^*(x_2) - \epsilon &< F^*(x) \leq F^*(x_2), \end{aligned}$$

pues  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  y  $F^*$  es monótona creciente.

Como cada  $F_n$  es monótona creciente,

$$F_{n_k}(x_1) \leq F_{n_k}(x) \leq F_{n_k}(x_2).$$

Cuando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$F^*(x) - \epsilon < F^*(x_1) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x) \leq F^*(x_2) < F^*(x) + \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Por lo tanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x)$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x) = F^*(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , punto de continuidad de  $F^*$ .

Observemos que  $F^*$  tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, pues su imagen está contenida en  $[0, 1]$  y la función es monótona creciente, es decir, las discontinuidades son saltos disjuntos de tamaño positivo.

Definamos una nueva función,  $F$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= F^*(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de } F^*, \\ F(x) &= \lim_{h \rightarrow x^+} F^*(h), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ discontinuidad de } F^*. \end{aligned}$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es entonces monótonamente creciente, continua por la derecha y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x) = F(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de } F.$$

□

El siguiente resultado es parte de una caracterización de la convergencia débil.

**Lema de Helly-Bray** (A partir de Roussas, en [8]). *Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de funciones de distribución convergente a una función de distribución  $F$  sobre todos los puntos de continuidad de  $F$ , es decir,  $\{F_n\}$  converge débilmente a  $F$ . Entonces, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \leq \beta$  tales, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) = F(\alpha)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\beta) = F(\beta)$ , y toda función,  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) = \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x).$$

*Demostración.* Dado que  $F$  es monótonamente creciente en  $[0, 1]$ , esta función tiene una cantidad numerable de discontinuidades sobre  $[\alpha, \beta]$ . Por lo tanto los puntos de continuidad de  $F$  son densos sobre  $[\alpha, \beta]$ . Consideremos la partición de  $[\alpha, \beta]$  en  $m$  intervalos,  $\alpha = x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1} = \beta$ , con  $x_j, j = 1, \dots, m + 1$ , puntos de continuidad de  $F$ . Dada esta partición definamos la función  $f_m : (\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \mathbb{1}_{(x_j, x_{j+1}]}(x), \text{ con } \xi_j \in (x_j, x_{j+1}], j = 1, \dots, m.$$

Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x) \right| \leq \left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) \right| \\ & + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right| + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x) \right| \\ & = \left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) - f_m(x) dF_n(x) \right| + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right| \\ & + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) - f(x) dF(x) \right| \\ & \leq 2 \sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in (\alpha, \beta]\} + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right|. \end{aligned}$$

Todas las integrales existen pues, para todo  $m > 0$ ,  $f_m$  tiene una cantidad finita de discontinuidades sobre  $(\alpha, \beta]$ . La última desigualdad se da, ya que la variación total de las funciones de distribución sobre  $(\alpha, \beta]$  es igual o menor a uno, pues son monótonamente crecientes y su imagen está contenida en  $[0, 1]$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) &= \sum_{j=1}^m \int_{(x_j, x_{j+1}]} f_m(x) dF(x) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [F(x_{j+1}) - F(x_j)] \text{ y} \\ \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) &= \sum_{j=1}^m \int_{(x_j, x_{j+1}]} f_m(x) dF_n(x) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right| &= \left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) [F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j) - F(x_{j+1}) + F(x_j)] \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m |f(\xi_j)| (|F_n(x_{j+1}) - F(x_{j+1})| + |F(x_j) - F_n(x_j)|). \end{aligned}$$

Los valores  $x_1, \dots, x_{m+1}$  son puntos de continuidad de  $F$ , por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_{j+1}) = F(x_{j+1}) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_j) = F(x_j).$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (|F_n(x_{j+1}) - F(x_{j+1})| + |F(x_j) - F_n(x_j)|) = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^m |f(\xi_j)| (|F_n(x_{j+1}) - F(x_{j+1})| + |F(x_j) - F_n(x_j)|) \right) = 0. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in (\alpha, \beta)\} &= \max\{\sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in (x_j, x_{j+1}]\} : j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\} \\ &= \max\{\sup\{|f(\xi_j) - f(x)| : x \in (x_j, x_{j+1}]\} : j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\} \\ &\leq \max\{\sup\{|f(\xi_j) - f(x)| : x \in [x_j, x_{j+1}]\} : j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\} \\ &= \max\{|f(\xi_j) - f(y_j)| : j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\}, \\ &\quad \text{para algún } y_j \in [x_j, x_{j+1}] \\ &= |f(\xi_k) - f(y_k)|, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m, \\ &\quad \text{para algún } y_j \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se da dado que  $f$  es continua. Entonces  $y_k \in (x_k, x_{k+1}]$  y  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1}]$  para algún  $k$ , con  $0 < k < m$ . Es posible escoger particiones de forma que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max\{|x_j - x_{j+1}| : 1 \leq j \leq m\} = 0,$$

pues los puntos de continuidad son densos en  $(\alpha, \beta]$ .

Por lo tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_k - x_{k+1}| = 0 \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_k = y_k.$$

Ya que  $f$  es continua,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(\xi_k) = f(y_k).$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in (\alpha, \beta)\} = 0.$$

Ya que

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x) \right| &\leq 2 \sup\{|f_m(x) - f(x)| : x \in (\alpha, \beta)\} \\ &\quad + \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right| \end{aligned}$$

se cumple para toda partición,

$$\left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x) \right| \leq \left| \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f_m(x) dF(x) \right|.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) - \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x) \right| = 0,$$

$$\text{esto es, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF_n(x) = \int_{(\alpha, \beta]} f(x) dF(x).$$

□

**Teorema de De Finetti.** Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión infinita de variables aleatorias intercambiables con distribución Bernoulli. Entonces existe una función de distribución  $F$  sobre  $[0, 1]$ , tal, que

$$P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] = \int_0^1 \theta^r (1 - \theta)^{k-r} dF(\theta).$$

*Demostración.* (Teorema de De Finetti) Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión intercambiable de variables aleatorias con distribución Bernoulli.

Observemos que para todo  $r, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r \leq k \leq m$ ,  $m > 0$ , por la fórmula de probabilidad total,

$$\begin{aligned} & P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] \\ &= \sum_{i=0}^m P \left[ X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0 \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] P \left[ \sum_{j=1}^m X_j = i \right]. \end{aligned}$$

Es decir, para cada  $m$  condicionamos respecto a los eventos disjuntos  $\{\sum_{j=1}^m X_j = i\}_{i=0}^m$ . Para  $i < r$ ,  $i > m - (k - r)$ ,

$$P \left[ X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0 \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] = 0,$$

pues debe haber  $r$  variables con valor uno y  $k - r$  variables con valor cero en  $\sum_{j=1}^m X_j = i$ .

Entonces

$$\begin{aligned} & P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] \\ &= \sum_{i=r}^{m-(k-r)} P \left[ X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0 \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] P \left[ \sum_{j=1}^m X_j = i \right]. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^m \\ \text{con } \sum_{j=1}^m x_j = i}} P \left[ X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] \\ &= \binom{m}{i} P \left[ X_1 = x_1, X_2 = x_1, \dots, X_m = x_m \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right], \end{aligned}$$

para todo  $(x_1, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^m$  con  $\sum_{j=1}^m x_j = i$ .

La segunda igualdad se da ya que cualquier arreglo de las  $i$  variables aleatorias intercambiables con valor uno tiene la misma probabilidad y existen  $\binom{m}{i}$  arreglos de este tipo.

Entonces

$$P \left[ X_1 = x_1, X_2 = x_1, \dots, X_m = x_m \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] = \frac{1}{\binom{m}{i}},$$

para todo  $(x_1, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^m$  con  $\sum_{j=1}^m x_j = i$ .

Por otra parte

$$\begin{aligned} & P \left[ X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0 \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] \\ &= \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^m \\ \text{con } \sum_{j=1}^m X_j = i, \\ \sum_{j=1}^r X_j = r, \sum_{j=r+1}^k X_j = 0}} P \left[ X_1 = x_1, X_2 = x_1, \dots, X_m = x_m \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] \end{aligned}$$

Entonces, ya que existen  $\binom{m-k}{i-r}$  arreglos considerados, cada unos con probabilidad  $\frac{1}{\binom{m}{i}}$ ,

$$\begin{aligned} & P \left[ X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0 \mid \sum_{j=1}^m X_j = i \right] = \frac{\binom{m-k}{i-r}}{\binom{m}{i}} \\ &= \frac{\frac{(m-k)!}{((m-k)-(i-r))!(i-r)!}}{\frac{m!}{(m-i)!i!}} = \frac{\frac{(m-i)!}{((m-i)-(k-r))!(i-r)!} \frac{i!}{(i-r)!}}{\frac{m!}{(m-k)!}} = \frac{(m-i)_{k-r}(i)_r}{(m)_k}, \end{aligned}$$

con  $(a)_b := \frac{a!}{(a-b)!}$ ,  $(a)_b = 0$  para  $b > a$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] &= \sum_{i=r}^{m-(k-r)} \frac{(m-i)_{k-r}(i)_r}{(m)_k} P \left[ \sum_{j=1}^m X_j = i \right] \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(m-i)_{k-r}(i)_r}{(m)_k} P \left[ \sum_{j=1}^m X_j = i \right]. \end{aligned}$$

Sea  $\theta = \frac{i}{m}$ . Entonces

$$\begin{aligned} & P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] \\ &= \sum_{\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}} \frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} P \left[ \frac{\sum_{j=1}^m X_j}{m} = \theta \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Sea  $F_m(\theta) = P\left[\frac{\sum_{j=1}^m X_j}{m} \leq \theta\right]$ . Observemos que esta función de distribución es escalonada con saltos en  $\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$  de tamaño  $P\left[\frac{\sum_{j=1}^m X_j}{m} = \theta\right]$ , para  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ . Extendamos la definición de  $\frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k}$  para incluir todos los valores de  $\theta \in [0, 1]$ :

Para todo  $\theta \in [0, 1]$  existe  $j_\theta \in \{0, \dots, m\}$  tal, que  $\theta \in (\frac{j_\theta-1}{m}, \frac{j_\theta}{m}]$ . Para todo  $\theta \in [0, 1]$  sea  $g_{r,k,m}(\theta) = \frac{((1-\frac{j_\theta}{m})m)_{k-r}(m\frac{j_\theta}{m})_r}{(m)_k}$ . Se trata de una función escalonada, continua por la izquierda en la que  $g_{r,k,m}(\theta) = \frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k}$ , para  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ .

Podemos reescribir la suma (3) como una integral de Riemann-Stieltjes:

$$P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] = \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Esta integral considerará solamente los valores donde existen saltos,  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ , y sumará el valor de la función por el tamaño del salto, es decir, es igual a nuestra suma original. Observemos que para todo  $r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r \leq k$ , la igualdad se cumple para todo  $m$  natural,  $m > 0$ ,  $k \leq m$ ; por lo tanto, dados  $r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r \leq k$ , también se cumple que

$$P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta).$$

Es el límite de una sucesión constante para  $m$ .

Veamos ahora que para todo  $r, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r \leq k \leq m$ ,  $m > 0$ ,  $g_{r,k,m}(\theta) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  converge uniformemente a  $\theta^r(1-\theta)^{k-r}$  cuando  $m$  tiende a infinito.

Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $\theta \in [0, 1]$ .

Por la definición de  $g_{r,k,m}(\theta)$ , basta verificar que existe  $M$  tal, que para todo  $m > M$  y para todo  $\theta$  en  $\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ ,

$$\left|g_{r,k,m}(\theta) - \theta^r(1-\theta)^{k-r}\right| < \epsilon.$$

$$\text{Para todo } \theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}, g_{r,k,m}(\theta) = \frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k}.$$

Si  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$  es tal, que  $0 \leq \theta < \frac{r}{m} \leq 1$ . Entonces, como  $\frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} = 0$ ,

$$\left|\frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r(1-\theta)^{k-r}\right| = \theta^r(1-\theta)^{k-r} < \left(\frac{r}{m}\right)^r \leq \frac{r}{m}.$$

Ya que  $r$  es fijo, existe  $m_1 \in \mathbb{N}$  tal, que para todo  $m \geq m_1$ ,  $\frac{r}{m} < \epsilon$ , por lo tanto hay convergencia:

$$\left|\frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r(1-\theta)^{k-r}\right| < \frac{r}{m} < \epsilon, \text{ para todo } m \geq m_1, \text{ para todo } \theta < \frac{r}{m}.$$

Si ahora  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ ,  $\frac{r}{m} \leq \theta \leq 1$ , como  $\theta = \frac{i}{m}$ ,  $r \leq i \leq m$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} &= \frac{(m-i)_{k-r}(i)_r}{(m)_k} = \frac{\frac{(m-i)!}{((m-i)-(k-r))!} \frac{i!}{(i-r)!}}{\frac{m!}{(m-k)!}} = \frac{(\prod_{j=0}^{k-r-1} (m-i-j))(\prod_{j=0}^{r-1} (i-j))}{\prod_{j=0}^{k-1} (m-j)} \\ &= \left(\frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \dots \frac{i-r+1}{m-r+1}\right) \left(\frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \dots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)}\right). \end{aligned}$$

En este caso calcularemos la diferencia:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{((1-\theta)m)_{k-r}(m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r(1-\theta)^{k-r} \right| \\ = & \left| \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{i}{m} \right)^r \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right|. \end{aligned}$$

Por desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} & \left| \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{i}{m} \right)^r \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \\ \leq & \left| \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{i}{m} \right)^r \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \right| \\ & + \left| \left( \frac{i}{m} \right)^r \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{i}{m} \right)^r \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \\ = & \left| \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) - \left( \frac{i}{m} \right)^r \right| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \\ & + \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \left( \frac{i}{m} \right)^r. \end{aligned}$$

Observemos que para todo  $0 \leq j < a \leq b$ ,

$$\frac{a-j}{b-j} = \frac{a}{b} \frac{a-j}{a} \frac{b}{b-j} = \frac{a}{b} \frac{ba-bj}{ba-aj} \leq \frac{a}{b}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 & \leq \left( \frac{i-r+1}{m-r+1} \right)^r \leq \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) \leq \left( \frac{i}{m} \right)^r \text{ y} \\ 0 & \leq \left( \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right)^{k-r} \leq \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \leq \left( \frac{m-i}{m-r} \right)^{k-r}. \end{aligned}$$

Utilizaremos este hecho para acotar muchos factores:

$$\begin{aligned}
& \left| \left( \frac{i}{m} \frac{i-1}{m-1} \cdots \frac{i-r+1}{m-r+1} \right) - \left( \frac{i}{m} \right)^r \right| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \\
& \leq \left( \left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m-r+1} \right)^r \right) \left( \frac{m-i}{m-r} \right)^{k-r} \leq \left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m-r+1} \right)^r \\
& \leq \left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m} \right)^r \quad (\text{pues } i \geq r) \text{ y} \\
& \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \left( \frac{i}{m} \right)^r \\
& \leq \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \quad (\text{pues } i \leq m).
\end{aligned}$$

Recapitulando, para todo  $i \in \{r, \dots, m\}$ ,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{((1-\theta)m)_{k-r} (m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r (1-\theta)^{k-r} \right| \\
& \leq \left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m} \right)^r + \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right|.
\end{aligned}$$

Observemos que, para todo  $i \in \{r, \dots, m\}$ ,

$$\begin{aligned}
\left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m} \right)^r &= \frac{i^r - i^r - ri^{r-1}(-r+1) - \dots - (-r+1)^r}{m^r} \\
&\leq \frac{ci^{r-1}}{m^r} \leq \frac{cm^{r-1}}{m^r} = \frac{c}{m}, \text{ para alguna constante } c.
\end{aligned}$$

Entonces existe  $m_2$  tal, que para todo  $m > m_2$ , para todo  $i \in \{r, \dots, m\}$ ,

$$\left( \frac{i}{m} \right)^r - \left( \frac{i-r+1}{m} \right)^r < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos los valores de  $i \in \{r, \dots, m\}$  donde

$$\left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \leq \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r},$$

después consideraremos el caso contrario. En este caso



$$\begin{aligned}
& \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \\
&= \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} - \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) \\
&\leq \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} - \left( \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right)^{k-r} \\
&\leq \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} - \left( \frac{m-i-(k-r-1)}{m} \right)^{k-r} \\
&= \frac{\left( (m-i)^{k-r} - (m-i)^{k-r} + (k-r)(m-i)^{k-r-1}(k-r-1) - \dots - (-(k-r-1))^{k-r} \right)}{m^{k-r}} \\
&\leq \frac{m^{k-r-1}c'}{m^{k-r}} \\
&= \frac{c'}{m} \text{ (con } c' \text{ , constante positiva).}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora los valores de  $i \in \{r, \dots, m\}$  donde

$$\left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) > \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r}.$$

En este caso

$$\begin{aligned}
& \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \\
&= \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \\
&\leq \left( \frac{m-i}{m-r} \right)^{k-r} - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \\
&= \frac{m^{k-r}(m-i)^{k-r} - (m-i)^{k-r}(m-r)^{k-r}}{(m-r)^{k-r}m^{k-r}} \\
&= \frac{(m-i)^{k-r}(m^{k-r} - (m-r)^{k-r})}{(m-r)^{k-r}m^{k-r}} \\
&\leq \frac{(m)^{k-r}(m^{k-r} - (m-r)^{k-r})}{(m-r)^{k-r}m^{k-r}} \\
&= \left( \frac{m}{m-r} \right)^{k-r} - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo  $i \in \{r, \dots, m\}$ ,

$$\begin{aligned}
& \left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| \\
&\leq \frac{c'}{m} + \left( \frac{m}{m-r} \right)^{k-r} - 1.
\end{aligned}$$

Entonces existe  $m_3$  tal, que para todo  $m > m_3$ , para todo  $i \in \{r, \dots, m\}$ ,

$$\left| \left( \frac{m-i}{m-r} \frac{m-i-1}{m-r-1} \cdots \frac{m-i-(k-r-1)}{m-(k-1)} \right) - \left( \frac{m-i}{m} \right)^{k-r} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, para todo  $m > \max(m_2, m_3)$ , para todo  $\theta \in \{\frac{r}{m}, \dots, 1\}$ ,

$$\left| \frac{((1-\theta)m)_{k-r} (m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r (1-\theta)^{k-r} \right| < \epsilon.$$

Así, para todo  $m > \max(m_1, m_2, m_3) = M$  y para toda  $\theta \in \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$ ,

$$\left| \frac{((1-\theta)m)_{k-r} (m\theta)_r}{(m)_k} - \theta^r (1-\theta)^{k-r} \right| < \epsilon.$$

Es decir,  $g_{r,k,m}(\theta)$  converge uniformemente a  $\theta^r (1-\theta)^{k-r}$  cuando  $m$  tiende a infinito.

Buscamos ahora probar que existe una función de distribución,  $F$ , tal, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta) = \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta).$$

Aplicando el teorema de selección de Helly visto antes en este apéndice a la sucesión  $\{F_m\}$  obtenemos una función,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , monótonamente creciente continua por la derecha y una subsucesión  $\{F_{m_j}\}$  de  $\{F_m\}$  tales, que  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_{m_j}(x) = F(x)$ , para todo  $x$  punto de continuidad de  $F$ . Observemos que la función  $F$  no es en general función de distribución, hace falta que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es monótonamente creciente, por lo tanto tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, de saltos disjuntos de tamaño positivo. Entonces los puntos de continuidad de  $F$  son densos en  $\mathbb{R}$ . Observemos que para toda  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F_m(x) = 0$ , para todo  $x < 0$  y  $F_m(x) = 1$ , para todo  $x \geq 1$ .

Entonces, al ser  $F$  monótona creciente,

$$F(x) = 0, \text{ para todo } x < 0, \text{ y } F(x) = 1, \text{ para todo } x \geq 1.$$

Es decir, encontramos que para nuestra sucesión  $\{F_m\}$  existe una función de distribución,  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , y una subsucesión,  $\{F_{m_j}\}$  de  $\{F_m\}$ , tales, que  $\{F_{m_j}\}$  converge a  $F$  en los puntos de continuidad de  $F$ , esto es,  $\{F_{m_j}\}$  converge débilmente a  $F$ .

Veamos ahora que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) = \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta).$$

Recordemos que  $g_{r,k,m}(\theta)$  converge uniformemente a  $\theta^r (1-\theta)^{k-r}$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Por desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta) - \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \right| \\ & \leq \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta) - \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF_{m_j}(\theta) \right| \\ & \quad + \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF_{m_j}(\theta) - \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \right|. \end{aligned}$$

Por la continuidad uniforme de  $g_{r,k,m}$ , sabemos que existe  $j' \in \mathbb{N}$  tal, que para todo  $j > j'$ , para todo  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\left| g_{r,k,m_j}(\theta) - \theta^r (1-\theta)^{k-r} \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF_{m_j}(\theta) - \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \right| \\ & = \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} - g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \right| \leq \int_0^1 \left| \theta^r (1-\theta)^{k-r} - g_{r,k,m_j}(\theta) \right| dF_{m_j}(\theta) \\ & < \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 1 dF_{m_j}(\theta) \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el lema de Helly-Bray visto antes en este apéndice con  $(\alpha, \beta] = (-1, 1]$  y  $\theta^r (1-\theta)^{k-r} = 0$  para  $\theta < 0$ , obtenemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta) - \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF_{m_j}(\theta) \right| = 0.$$

Es decir, existe  $j'_1$  tal, que para todo  $j > j'_1$ ,

$$\left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta) - \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF_{m_j}(\theta) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces para todo  $j > \max\{j', j'_1\}$ ,

$$\left| \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta) - \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \right| < \epsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) = \int_0^1 \theta^r (1-\theta)^{k-r} dF(\theta).$$

Recordemos que

$$P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0] = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta).$$

Ya encontramos el límite de una subsucesión, pero sabemos que la sucesión converge, por lo que los límites coinciden. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta).$$

Recapitulando,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta^r (1 - \theta)^{k-r} dF(\theta) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m_j}(\theta) dF_{m_j}(\theta) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{r,k,m}(\theta) dF_m(\theta) \\ &= P[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_r = 1, X_{r+1} = 0, \dots, X_k = 0]. \end{aligned}$$

□

## B. Demostración del Teorema 3.7

**Teorema 3.7.** Sea  $\Theta$  una variable aleatoria de distribución beta con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, su función de densidad es

$$f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}.$$

Entonces

$$E[\Theta^k] = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}, \quad \text{donde}$$

$$\alpha = E[\Theta] \left( \frac{E[\Theta](1-E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) \quad y \quad \beta = (1-E[\Theta]) \left( \frac{E[\Theta](1-E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right),$$

con  $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$ , la función Gamma de Euler.

*Demostración.* Sea  $\Theta$  una variable aleatoria de distribución beta con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, su función de densidad es

$$f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}.$$

Veamos primero que

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy.$$

Haciendo el cambio de variable  $t = \frac{x}{2s} + \frac{1}{2}$ ,  $t'(x) = \frac{1}{2s}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt &= \int_{-s}^s \left(\frac{x}{2s} + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2s}\right)^{\beta-1} \frac{1}{2s} dx \\ &= \frac{1}{2s^{\alpha+\beta-1}} \int_{-s}^s (x+s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} dx, \\ \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt (2s)^{\alpha+\beta-1} &= \int_{-s}^s (x+s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} dx. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $e^{-2s}$  e integrando respecto a  $s$  de 0 a  $A$ ,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \int_0^A e^{-2s} (2s)^{\alpha+\beta-1} ds = \int_0^A \int_{-s}^s e^{-2s} (x+s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} dx ds.$$

Hacemos ahora un cambio de variable  $s = \frac{k}{2}$ ,  $s'(k) = \frac{1}{2}$ , del lado derecho de la pasada igualdad y tomamos el límite cuando  $A$  tiende a infinito. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \int_0^{2A} e^{-k} k^{\alpha+\beta-1} \left(\frac{1}{2}\right) dk &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \int_{-s}^s e^{-2s} (x+s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} dx ds, \\ \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha+\beta) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \int_{-s}^s e^{-2s} (x+s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} dx ds. \end{aligned}$$

Hagamos un cambio de variable múltiple, ahora sobre el lado derecho de la igualdad.

$$\text{Sea } (s, x) = h(\sigma, \tau) = \left( \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma + \tau), \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma - \tau) \right).$$

Observemos que

$$(\sigma, \tau) = h^{-1}(s, x) = (x + s, s - x).$$

Por lo tanto  $h$  es inyectiva.

Veamos que

$$J_{h(\sigma, \tau)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$|\det(J_{h(\sigma, \tau)})| = \frac{1}{2},$$

$$h^{-1}(\{(s, x), 0 < s < A, -s < x < s\}) = \{(\sigma, \tau), 0 < \sigma + \tau < 2A, \sigma, \tau > 0\} := R.$$

Aplicando el teorema de cambio de variable para integrales múltiples obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \left( \frac{1}{2} \right) \Gamma(\alpha + \beta) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int \int_R e^{-(\sigma+\tau)} (\sigma)^{\alpha-1} (\tau)^{\beta-1} \left( \frac{1}{2} \right) d\tau d\sigma \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\sigma+\tau)} (\sigma)^{\alpha-1} (\tau)^{\beta-1} d\tau d\sigma \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty e^{-\sigma} (\sigma)^{\alpha-1} d\sigma \int_0^\infty e^{-\tau} (\tau)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Veamos ahora que

$$E[\Theta^k] = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)}.$$

Utilizando al resultado anterior,

$$\begin{aligned} E[\Theta^k] &:= \int_0^1 x^k x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + k + \beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)}. \end{aligned}$$

Para probar que

$$\alpha = E[\Theta] \left( \frac{E[\Theta](1 - E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) \text{ y } \beta = (1 - E[\Theta]) \left( \frac{E[\Theta](1 - E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right),$$

veamos que, al integrar por partes la definición de  $\Gamma$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &:= \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy \\ &= -e^{-y} y^{t-1} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} (t-1) y^{t-2} dy \\ &= (t-1) \int_0^\infty e^{-y} y^{t-2} dy \\ &= (t-1) \Gamma(t-1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \alpha}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta) (\alpha + \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \\ E[\Theta^2] &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + 1) (\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + 1) (\alpha + \beta + 1)} = E[\Theta] \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1}, \\ V[\Theta] &= E[\Theta^2] - E[\Theta]^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \frac{(\alpha + \beta + 1)\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left( \frac{E[\Theta](1 - E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) &= \left( \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta^2}}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}} - \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} \right) \\ &= \left( \frac{\alpha(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1) - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{\alpha\beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} \right) \\ &= \left( \frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{\alpha\beta} \right) = \left( \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \right) = (\alpha + \beta), \\ E[\Theta] \left( \frac{E[\Theta](1 - E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (\alpha + \beta) = \alpha, \\ (1 - E[\Theta]) \left( \frac{E[\Theta](1 - E[\Theta])}{V[\Theta]} - 1 \right) &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} (\alpha + \beta) = \beta. \end{aligned}$$

Con lo que concluimos esta prueba. □

## Referencias

- [1] Arturo Cifuentes y Gerard O'Connor. The Binomial Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis. *Moody's Special Report*, 1996.
- [2] David Heath y William Sudderth. De Finetti's Theorem on Exchangeable Variables. *The American Statistician*, 30(4):188–189, 1976.
- [3] Didier Rullière, Diana Dorobantu y Areski Cousin. An Extension of Davis and Lo's Contagion Model. *Quantitative Finance*, 13(3):407–420, 2013.
- [4] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. I.*, pages 106–107. Third edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [5] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. II.*, pages 267–268. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [6] Dir. Charles Ferguson. *Inside Job*. Representational Pictures and Sony Pictures Classics, 2009. Filme.
- [7] Mark Davis y Violet Lo. Infectious Defaults. *Quantitative Finance*, 1(4):382–387, 2001.
- [8] George G. Roussas. *An Introduction to Measure-Theoretic Probability*, pages 179–181. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2005.
- [9] Thomas Lux y Frank Westerhoff. Economic Crisis. *Nature Physics*, 5:2–3, 2009.