



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN**

**“SOBRE EL TEOREMA DE BORSUK-ULAM Y  
SU RELACIÓN CON ALGUNAS  
ESTRUCTURAS DISCRETAS ”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN**

**PRESENTA:  
JOSE JAIME CALLES LOPERENA**

**ASESOR: LIC. JOSÉ SEBASTIÁN BEJOS MENDOZA**

**JULIO DEL 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, el cual realicé durante mi estancia en el Laboratorio de Algoritmos para la Robótica. Quisiera comenzar agradeciendo a la FES Acatlán por la formación que me dio a lo largo de mi estancia como estudiante, al Centro de Desarrollo Tecnológico por la oportunidad de poder participar en algunos de sus proyectos, pero sobre todo al Laboratorio de Algoritmos para la Robótica y a mis compañeros del mismo por su tiempo, su apoyo incondicional y por todo lo que me enseñaron.

Muchas gracias a aquellas personas que se tomaron el tiempo para brindarme un consejo, amigos y familiares como Fernando Beltrán y Carlos Castañeda, por mencionar algunos, tuvieron un papel importante en el desarrollo de este trabajo, pues la buena vibra, las palabras de aliento y la disposición de escucharme en mis momentos de frustración hicieron posible que pudiera concluir con la elaboración del presente. Particularmente gracias a Jesús Hernández y Carlos Toscano por su tiempo, consejos y sobre todo su amistad.

Quiero agradecer también a los profesores Miguel Ángel Chávez y Manuel Valadez por los consejos, el apoyo y la motivación que me brindaron en las aulas y fuera de ellas. En especial gracias a mi asesor el Lic. Sebastián Bejos por su apoyo incondicional y a la M. en C. Adriana Escobedo, quien sin motivo alguno, me ayudo, guió y asesoró en el desarrollo de este trabajo. A ambos, muchas gracias.

Por ultimo, quiero hacer un especial agradecimiento a mis padres y a mi hermana Laura, de quienes recibí infinidad de palabras de aliento, múltiples consejos y un inmenso apoyo. Muchas gracias por su paciencia y comprensión, este trabajo es por y para ustedes.

Jose Jaime Calles Loperena  
México D.F., Julio del 2013.



# Índice general

<b>Introduccion</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Topología . . . . .	3
1.2. Análisis . . . . .	7
1.3. Geometría . . . . .	8
1.4. Teoría de Gráficas . . . . .	9
1.5. Grupos de Transformaciones . . . . .	11
1.6. Categorías . . . . .	17
<b>2. El teorema de Borsuk-Ulam.</b>	<b>19</b>
2.1. El grupo fundamental. . . . .	19
2.2. Espacios cubrientes. . . . .	31
2.3. El grupo fundamental de $S^n$ . . . . .	39
2.4. El grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	42
2.5. El teorema de Borsuk-Ulam. . . . .	48
<b>3. Triangulaciones antipodalmente simétricas.</b>	<b>53</b>
3.1. El lema de Tucker. . . . .	53
3.2. La implicación del lema de Tucker al teorema de Borsuk-Ulam. . . . .	65
<b>4. El número cromático de las gráficas de Kneser.</b>	<b>69</b>
4.1. La conjetura de Kneser. . . . .	69
4.2. El primer resultado de la combinatoria topológica. . . . .	72
<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>



# Introducción

A inicios del siglo veinte la topología combinatoria, disciplina que utiliza conceptos de combinatoria en la solución de problemas de topología, se convirtió en lo que ahora se conoce como topología algebraica. No fue sino hasta 1978 que la situación se tornó al revés, cuando métodos de la topología algebraica fueron usados para resolver problemas de combinatoria. A esta disciplina actualmente se le conoce como combinatoria topológica.

Uno de los los teoremas más importantes de la topología algebraica es el teorema de Borsuk-Ulam, el cual fue conjeturado por el matemático polaco Stanislaw Ulam y demostrado por su compatriota Karol Borsuk. Este teorema se caracteriza por sus diversas versiones, sus diferentes pruebas y sus numerosas aplicaciones en diferentes áreas de la matemática. Una de la versiones del teorema de Borsuk-Ulam, y tal vez la más fácil de recordar, dice que para toda función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $S^n$  representa la esfera unitaria de dimensión  $n$  y  $n \geq 0$ , existe un  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ . El teorema de Borsuk-Ulam es una de las herramientas mas útiles ofrecidas por la topología algebraica.

En 1955, tras trabajar en un artículo sobre formas cuadráticas, Martin Kneser formuló un problema sobre el comportamiento de particiones de familias de  $k$ -subconjuntos de un  $n$ -conjunto. Dicho problema, trasladado a lenguaje de teoría de gráficas, es justo el de encontrar el número cromático de una colección de gráficas en particular, las gráficas de Kneser. Veintitrés años después de que Kneser planteara su problema, László Lovász le dio solución haciendo uso de herramientas topológicas. Esto dio pie al desarrollo de la combinatoria topológica. En el mismo año, Imre Bárány dio otra solución al problema haciendo uso de herramientas topológica también pero de una manera más directa. Recientemente, en el año 2002, una solución aún más simplificada fue encontrada por el estudiante de matemáticas Joshua Greene. Una de las numerosas aplicaciones del teorema de Borsuk-Ulam es encontrar el número cromático de las gráficas de Kneser. (Para más detalles véase [3].)

En este trabajo se dará una prueba del teorema de Borsuk-Ulam y se mostrará la relación que tiene con estructuras discretas tales como simplejos y gráficas de Kneser, dando a notar así la importancia que tiene en las matemáticas discretas. En el primer capítulo se definen conceptos básicos y resultados necesarios para los capítulos posteriores. Conceptos que comprenden el área de geometría, análisis, álgebra y topología. En el segundo capítulo se da una introducción al grupo fundamental, espacios cubrientes y

se expone el grupo fundamental de  $S^n$  y del espacio real proyectivo de dimensión  $n$  para toda  $n \geq 1$ . Además, se presenta una prueba del teorema de Borsuk-Ulam para un caso más general que cuando  $n \leq 2$ .

Una vez demostrado el teorema de Borsuk-Ulam, hablaremos sobre un lema referente a etiquetamiento de vértices de una triangulación de la bola  $n$ -dimensional. A este importante resultado de las matemáticas discretas, dado por el matemático canadiense Albert W. Tucker, se le conoce como el lema de Tucker. En el capítulo tres se prueba el lema de Tucker y se muestra de que manera está relacionado con el teorema de Borsuk-Ulam.

Por último, en el capítulo cuatro se definen las gráficas de Kneser y se demuestra, haciendo uso del teorema de Borsuk-Ulam, el primer resultado de la combinatoria topológica, el número cromático de las gráficas de Kneser.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este trabajo supondremos que el lector está familiarizado con conceptos de topología básica, como espacio topológico, conexidad, compacidad, espacios de Hausdorff y métricos, funciones continuas, entre otros. No obstante, recordaremos algunos conceptos y resultados que aparecen con menos frecuencia en otras áreas de la matemática, o que no pertenecen a un curso estándar de licenciatura. Cabe mencionar que los conceptos y resultados que se utilizan en este capítulo se pueden encontrar en [16], [4] y [7], entre muchos otros.

En adelante  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  denotarán espacios topológicos a menos que se indique otra cosa.

### 1.1. Topología

**Definición 1.1.** Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función sobreyectiva. Se dice que  $p$  es una función cociente si  $U \subset Y$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Decimos que  $Y$  tiene la topología cociente inducida por  $p$ .

Nótese que cualquier función cociente es continua, por lo que esta condición es aún más fuerte que la continuidad, razón por la que algunos autores la llaman continuidad fuerte. Es usual referirse a la función  $p$  como una identificación.

**Definición 1.2.** Sea  $p : X \rightarrow Y$  una identificación. Entonces decimos que  $Y$  es un espacio cociente de  $X$ .

Una partición de un conjunto  $C$  es una colección  $D$  de subconjuntos no vacíos de  $C$ , ajenos a pares, y cuya unión es igual a  $C$ . A la aplicación  $q : C \rightarrow D$  que asocia a cada  $c \in C$  con el único elemento de  $D$  que lo contiene, le llamamos proyección natural asociada a la partición  $D$ . Sea  $D$  una partición del espacio topológico  $X$ . Consideremos en el conjunto  $D$  la topología  $\tau_D$  definida de la siguiente manera:  $A \in \tau_D$  si y sólo si  $\bigcup_{d \in A} d$  es un subconjunto abierto de  $X$ . A la pareja  $(D, \tau_D)$  se le conoce como espacio de particiones de  $X$ . Nótese que justo  $\tau_D$  es la topología cociente inducida por  $q$ .

Sea  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ , entonces  $\sim$  induce una partición en el espacio. Recíprocamente, si  $D$  es una partición de  $X$ , la relación  $x \sim y$  si y sólo si  $x$  y  $y$  pertenecen al mismo elemento de  $D$ , define una relación de equivalencia en  $X$ . A

cualquier partición  $D$  en  $X$  con la topología cociente inducida por  $q$ , se le acostumbra denotar por  $X/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia inducida por  $D$ .

**Definición 1.3.** *Una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $x_0 \in X$  si y sólo si para toda vecindad  $V$  de  $f(x_0)$  en  $Y$ , existe una vecindad  $U$  de  $x_0$  en  $X$  tal que  $f(U) \subset V$ . Se dice que  $f$  es continua en  $X$  si y sólo si es continua en cada  $x_0 \in X$ .*

Definamos ahora el concepto de homeomorfismo.

**Definición 1.4.** *Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo si  $f$  es biyectiva y  $f^{-1}$  es continua. En tal caso, se dice que  $X$  y  $Y$  son homeomorfos y se denota por  $X \cong Y$ .*

Un invariante topológico es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos, esto es, siempre que un espacio topológico  $X$  tenga esta propiedad, todo espacio homeomorfo a  $X$  la tiene. Tal es el caso de la conexidad y la compacidad, entre otros.

**Teorema 1.1.** *Todo espacio cociente se puede representar como un espacio de particiones.*

*Demostración.* Sea  $Y$  un espacio cociente de  $X$  para la identificación  $p$ . Definamos entonces una relación  $\sim$  tal que para cualesquiera  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $p(x_1) = p(x_2)$ . Nótese que la relación  $\sim$  es de equivalencia. Vamos a demostrar que  $Y$  es homeomorfo a  $X/\sim$ . Para ello, definamos la función  $h : Y \rightarrow X/\sim$  dada por  $h(y) = p^{-1}(y)$ . Observemos que  $h(p(x)) = p^{-1}(p(x))$  representa la clase de equivalencia del punto  $x$  con respecto a la relación que acabamos de definir. Además, como  $p$  es una función,  $p^{-1}(y_1) \neq p^{-1}(y_2)$  si  $y_1 \neq y_2$ ; es decir,  $h$  es inyectiva. La suprayectividad de  $h$  es evidente. Así pues,  $h$  es biyectiva. Tomemos ahora  $B \subset X/\sim$ . Entonces,  $h^{-1}(B) = A$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $p^{-1}(A)$  es abierto en  $X$ , pero  $p^{-1}(A) = h(A) = B$ . Esto es,  $h$  es continua y abierta. Por lo tanto  $h$  es un homeomorfismo de  $Y$  en  $X/\sim$ .  $\square$

A continuación demostraremos una serie de resultados que nos ayudaran en el transcurso de este trabajo.

**Proposición 1.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y biyectiva. Si  $X$  es compacto y  $Y$  es Hausdorff, entonces  $f$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Mostraremos que las imágenes de conjuntos cerrados de  $X$  bajo la función  $f$  son cerrados en  $Y$ ; con esto demostraremos la continuidad de  $f^{-1}$ . Sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Entonces, dado que todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto,  $A$  es compacto. De esta manera  $f(A)$  es un subconjunto compacto de  $Y$ . Además, debido a que todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado,  $f(A)$  es cerrado en  $Y$ . Así,  $f^{-1}$  es continua.  $\square$

Enunciaremos ahora un lema sobre continuidad en la unión de espacios topológicos.

**Lema 1.1.** Sea  $X = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son cerrados en  $X$ , y sean  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ . Sea también  $h : X \rightarrow Y$  una función dada por,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Entonces  $h$  es continua.

*Demostración.* Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $Y$ , entonces

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Dado que  $f$  es continua,  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $A$  y por tanto cerrado en  $X$ . De manera análoga  $g^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ . Por lo tanto su unión  $h^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ , siendo así  $h$  continua.  $\square$

El lema 1.1 es conocido como el lema del pegado.

Sea  $\{U_j\}_{j \in J}$  una familia de subconjuntos del espacio  $X$ . Decimos que  $\{U_j\}_{j \in J}$  cubre o que es una cubierta de  $X$  si cumple que  $\bigcup_{j \in J} U_j = X$ . En particular, si la cubierta esta formada por conjuntos abiertos, se dice que la cubierta es abierta. Enunciemos ahora una propiedad importante de las cubiertas abiertas de espacios métricos compactos. Para esto, definamos antes lo que es un espacio métrico.

**Definición 1.5.** Sea  $X$  un conjunto. Una distancia (o una métrica) en  $X$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ .
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todos  $x, y, z \in X$ .

A esta última desigualdad se le llama la desigualdad del triángulo. Un espacio métrico es un conjunto  $X$  con una métrica dada  $d$  y lo denotaremos por  $(X, d)$ .

**Teorema 1.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $\{U_j\}_{j \in J}$  una cubierta abierta de  $X$ . Entonces existe un número positivo  $\delta$ , el cual depende de  $\{U_j\}_{j \in J}$ , llamado número de Lebesgue, con la siguiente propiedad: Cada bola  $B(x, \delta)$  esta contenida en al menos un elemento de la cubierta.

*Demostración.* Para cada  $x \in X$ , elijamos un  $r_x > 0$  tal que  $B(x, r_x) \subset U_j$ , para algún  $U_j$  en  $\{U_j\}_{j \in J}$ . Ahora, por ser  $X$  compacto, de la cubierta abierta  $\{B(x, \frac{r_x}{2})\}_{x \in X}$  extraigamos una subcubierta finita  $\{B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . Sea

$$\lambda = \min \left[ \frac{r_{x_1}}{2}, \frac{r_{x_2}}{2}, \dots, \frac{r_{x_n}}{2} \right];$$

veamos que  $\lambda > 0$  es el número de Lebesgue. En efecto, sea  $x$  un punto en  $X$ ,  $x \in B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces, para todo  $z \in B(x, \lambda)$  se tiene lo siguiente,

$$d(z, x_i) \leq d(z, x) + d(x, x_i) < \lambda + \frac{r_{x_i}}{2} \leq r_{x_i};$$

esto es,  $B(x, \lambda) \subset B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$ . Dado que  $B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$  esta contenido en algún elemento de  $\{U_j\}_{j \in J}$ , se llega al resultado.  $\square$

Al teorema 1.1 se le conoce como el teorema de la cubierta de Lebesgue. Para el siguiente resultado conviene probar primero la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.** *Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Entonces,  $p$  es una identificación si y sólo si para cada espacio  $Z$  y cada función  $g : Y \rightarrow Z$ , la continuidad de  $g \circ p$  implica la continuidad de  $g$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ & \searrow^{g \circ p} & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

*Demostración.* Asumamos que  $p$  es una identificación y que  $g \circ p$  es continua. Entonces, para cada  $U \subset Z$  abierto,  $(g \circ p)^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ , esto es,  $p^{-1}(g^{-1}(U))$  es abierto en  $X$ . Dado que  $p$  es una identificación, el hecho de que  $p^{-1}(g^{-1}(U))$  sea un abierto en  $X$ , quiere decir que  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $Y$ , por lo tanto  $g$  es continua.

Supongamos ahora que la continuidad de  $g \circ p$  implica la continuidad de  $g$ . Sea  $Y'$  el conjunto  $Y$  con la topología cociente, entonces  $p' : X \rightarrow Y'$  es una identificación. Veamos ahora que  $Y \cong Y'$ . Sea  $i : Y \rightarrow Y'$  la función identidad. Entonces, dado que  $i \circ p = p'$  es continua, por hipótesis,  $i$  también lo es. Además, dado que  $i^{-1} \circ p' = p$  es continua y  $p'$  es una identificación, por la prueba del párrafo anterior,  $i^{-1}$  es continua. Por lo tanto  $i$  es un homeomorfismo entre  $Y$  y  $Y'$ . De esta manera  $p$  es una identificación.  $\square$

El teorema que a continuación se enuncia es conocido como el teorema de transgresión.

**Teorema 1.3.** *Sea  $p : X \rightarrow Y$  una identificación y sea  $h : X \rightarrow Z$  una función continua. Asumamos que  $h$  es constante sobre la imagen inversa de  $p(x)$  para toda  $x \in X$ . Entonces  $h \circ p^{-1} : Y \rightarrow Z$  es continua y el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ h \downarrow & \swarrow & \uparrow h \circ p^{-1} \\ Z & & \end{array}$$

*Demostración.* Dado que  $h$  es constante sobre la imagen inversa de  $p(x)$  para toda  $x \in X$ , tenemos que

$$h(x) = h(p^{-1}(p(x))) = (h \circ p^{-1}) \circ p(x),$$

esto es,  $h = (h \circ p^{-1}) \circ p$ . Dado que  $h$  es continua, por la proposición 1.2  $h \circ p^{-1}$  es continua.  $\square$

## 1.2. Análisis

Veamos que es posible definir una topología a partir de una métrica. Consideremos el espacio métrico  $(X, d)$  y las bolas abiertas de radio  $r$  con centro en  $x_0$ , para algún  $x_0 \in X$  y algún  $r > 0$ , definidas a partir de la métrica  $d$ . Entonces, la familia de abiertos de  $X$  son aquellos  $A \subset X$  tales que, para toda  $x \in A$ , existe  $B(x, r) \subset A$ . Dicha topología es llamada la topología en  $X$  inducida por la métrica  $d$  y la denotaremos como  $\tau(d)$ .

**Definición 1.6.** *Dos métricas  $d_1, d_2$  sobre un conjunto  $X$  son equivalentes si  $\tau(d_1) = \tau(d_2)$ , es decir, si  $d_1$  y  $d_2$  generan la misma topología.*

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , veamos algunos ejemplos de métricas:

- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .
- $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ .
- $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

De los ejemplos anteriores, dado que  $d_1, d_2$  y  $d_\infty$  generan los mismos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tau(d_1) = \tau(d_2) = \tau(d_\infty)$ . Esto es, podemos utilizar cualquiera de las métricas anteriores en  $\mathbb{R}^n$ . En la práctica, a  $d_\infty(x, 0)$  la denotaremos como  $\|x\|_\infty$  y la llamaremos norma infinita.

**Definición 1.7.** *En un espacio métrico  $(X, d)$  la distancia de un punto  $x_0$  a un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$  esta dada por*

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Una propiedad importante de la distancia entre un punto y un conjunto es la siguiente:

**Proposición 1.3.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Entonces, para todo  $x \in X$ ,  $d(x, A) = 0$  si y sólo si  $x$  pertenece a la cerradura de  $A$ . Por tanto  $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $x \in \overline{A}$  si y sólo si para toda  $B(x, r)$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Esto sucede si y sólo si para toda  $r > 0$  existe un  $a_r \in A$  tal que  $d(x, a_r) < r$ , lo que pasa si y sólo si  $d(x, A) = 0$ .  $\square$

Se definirá a continuación la continuidad en espacios métricos.

**Definición 1.8.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d')$  espacios métricos, una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $x \in X$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$  siempre que  $d(x, y) < \delta$ .

Veamos ahora que la distancia entre un punto y un conjunto inducen una función continua en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subset X$  y  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales con la distancia usual. Entonces, la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = d(x, A)$  es continua.

*Demostración.* Sean  $x$  y  $y$  cualesquiera dos elementos de  $X$ . Entonces, para cada  $a \in A$ , tenemos que  $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ , por lo tanto

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, a) : a \in A\} = d(x, y) + d(y, A).$$

De esta manera,  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Intercambiando los roles de  $x$  y  $y$ , tenemos que  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ , es decir,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

tomando  $\delta = \epsilon$  se tiene que  $f$  es continua. □

Sean  $(X, d_X)$  y  $(Y, d_Y)$  espacios métricos, recordemos ahora los términos de la continuidad uniforme.

**Definición 1.9.** Una función  $f : X \rightarrow Y$  es uniformemente continua si dada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  (el cual depende únicamente de  $\epsilon$ ) tal que, para cualesquiera  $x, y \in X$  si  $d_X(x, y) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Sea  $\Omega$  un subconjunto no vacío de  $X$  y  $f : \Omega \rightarrow Y$  una función continua, si  $\Omega$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua en  $\Omega$ . Véase [16].

Por último, se definen los conjuntos

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \quad y \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^{n+1}$  respectivamente. Al conjunto  $B^n$  se le conoce como bola unitaria de dimensión  $n$ , mientras que al conjunto  $S^n$  se le denomina esfera unitaria de dimensión  $n$ . Nótese que  $S^{n-1}$  es la frontera de  $B^n$ .

### 1.3. Geometría

**Definición 1.10.** Sea  $P$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Una combinación lineal de puntos en  $P$  es una suma del tipo  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ , donde  $k$  es un entero, y para toda  $i = 1, \dots, k$ ,  $\lambda_i$  es un real y  $x_i$  es un punto de  $P$ . Una combinación lineal  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  es afín si

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Al conjunto de combinaciones lineales afines de puntos en  $P$  lo llamaremos el cierre afín de  $P$ . Por ejemplo, el cierre afín de dos puntos diferentes es la recta que pasa a través de esos dos puntos, el cierre afín de tres puntos que no pertenecen a la misma recta es el plano que pasa a través de los tres puntos, etcétera. Para más detalles véase [2].

Recordemos ahora el concepto de dependencia lineal.

**Definición 1.11.** Sea  $v_1, v_2, \dots, v_n$  un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente dependientes si existen números  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  no todos iguales a 0, tal que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Si dichos números no existen, decimos que los vectores son linealmente independientes.

**Definición 1.12.** Sean  $x_0, x_1, \dots, x_k$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  son afinmente dependientes si existen números reales  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , no todos 0, tal que  $\sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = 0$  y  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ . De otra manera, decimos que  $x_0, x_1, \dots, x_k$  son afinmente independientes.

La definición anterior es equivalente a decir que  $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$  son linealmente independientes. Geométricamente esto significa, un conjunto de puntos es afinmente independiente si 3 puntos no pertenecen a la misma recta, 4 puntos no pertenecen al mismo plano y en general, si  $n$  puntos no pertenecen al mismo hiperplano de dimensión  $n - 1$ .

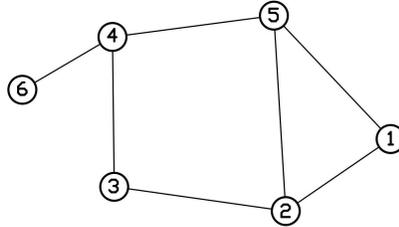
Para  $0 \leq k \leq n$ , un  $k$ -plano en  $\mathbb{R}^n$  se define como el cierre afín de  $k + 1$  puntos afinmente independientes. Por lo tanto, un 0-plano es un punto, un 1-plano es una recta, un 2-plano es un plano, y un  $(n - 1)$ -plano es un hiperplano. Nótese que sólo hay un  $n$ -plano en  $\mathbb{R}^n$ , al cual llamaremos de igual manera  $\mathbb{R}^n$ . Véase [5].

**Definición 1.13.** Un politopo es una región en un espacio  $n$ -dimensional la cual esta delimitada por un número finito de hiperplanos de dimensión  $n - 1$ , es decir, es la generalización a cualquier dimensión de un polígono bidimensional, o un poliedro tridimensional.

## 1.4. Teoría de Gráficas

Una gráfica  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  donde  $V(G)$  y  $E(G)$  son conjuntos tales que  $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ <sup>1</sup>. El conjunto  $V(G)$  es llamado el conjunto de vértices de  $G$  y el conjunto  $E(G)$  es llamado el conjunto de aristas de  $G$ . Es usual representar la estructura abstracta de una gráfica con un dibujo, el cual explica el nombre de gráfica así como el de vértice y arista. Por ejemplo, sea  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$ , es posible dibujar la gráfica  $G$  como el siguiente diagrama:

<sup>1</sup> $\binom{V(G)}{2}$  representa el conjunto de todos los subconjuntos de  $V(G)$  de cardinalidad 2.



Para simplificar la notación omitiremos las llaves en la notación para aristas y simplemente escribiremos  $uv$  en lugar de  $\{u, v\}$ . Si  $uv \in E(G)$ , decimos que  $u$  es adyacente a  $v$  en  $G$ , y que  $uv$  une a  $u$  con  $v$  en  $G$ . Llamamos puntos finales a los vértices  $u$  y  $v$  de una arista  $uv$  en  $G$ . En particular, a cualquier arista que une a un vértice  $v$  consigo mismo se le conoce como lazo. La vecindad  $N(v)$  de un vértice  $v \in V(G)$  es el conjunto de vértices que son adyacentes a  $v$  en  $G$ . El grado de un vértice  $v \in V(G)$  es el número  $|N(v)|$ .

Una gráfica  $G$  es simple si no posee lazos y si no existen 2 aristas que unan el mismo par de vértices en  $V(G)$ .

**Definición 1.14.** Una caminata en una gráfica  $G$  es una secuencia de aristas de la forma  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ . En algunas ocasiones, cuando hablamos de gráficas simples, la caminata se representa como  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ , donde a  $v_0$  se le conoce como el vértice inicial y a  $v_n$  como el vértice final. Al número ( $n$ ) de aristas se le llama la longitud de la caminata.

Una caminata en la cual todas las aristas son distintas se le llama recorrido. Si además, todos los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  son distintos, excepto posiblemente  $v_0 = v_n$ , se le llama trayectoria; una trayectoria la cual su vértice inicial y final coinciden se le conoce como ciclo. (Véase [1].)

En la gráfica de la figura 1.1,

1, 2, 4, 5, 2

2, 4, 6, 5

2, 4, 6, 5, 2

es un recorrido pero no una trayectoria;

es una trayectoria de longitud 3;

es un ciclo de longitud 4.

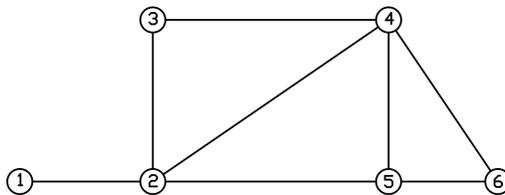


Figura 1.1

## 1.5. Grupos de Transformaciones

**Definición 1.15.** Un conjunto no vacío de elementos  $G$  se dice que forma un grupo si en  $G$  está definida una operación binaria, llamada producto y denotada por  $(*)$  tal que :

1. Si  $a, b \in G$ , entonces  $a * b \in G$ .
2. Si  $a, b, c \in G$ , entonces  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
3. Existe un elemento  $e \in G$  tal que  $a * e = e * a = a$  para todo  $a \in G$  (existencia de un elemento identidad en  $G$ ).
4. Para todo  $a \in G$  existe un elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  (existencia de inversos en  $G$ ).

Un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  se dice que es un subgrupo de  $G$  si respecto al producto en  $G$ ,  $H$  mismo forma un grupo.

Sea  $G$  un grupo con operación  $(*)$ ,  $g$  un elemento de  $G$  y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Defínase como clase lateral izquierda de  $H$  en  $G$  al conjunto de todos los elementos de la forma  $g * h$ , para toda  $h \in H$ . De igual manera, definimos como clase lateral derecha de  $H$  en  $G$  al conjunto de todos los elementos de la forma  $h * g$ , para toda  $h \in H$ . Usaremos las notaciones  $g * H$  y  $H * g$  para referirnos a una clase lateral izquierda y una clase lateral derecha respectivamente. Veamos algunas propiedades importantes de las clases laterales.

**Lema 1.2.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces las clases laterales izquierdas de  $H$  en  $G$  tienen las siguientes propiedades:

1. Todo elemento  $g \in G$  pertenece a su clase lateral izquierda  $g * H$ .
2. Para  $g_1, g_2 \in G$ , si se tiene que  $g_1 = g_2 * h'$  para algún  $h' \in H$ , entonces  $g_1 * H = g_2 * H$ .
3. Para  $g_1, g_2 \in G$ , si  $g_1 * H \cap g_2 * H$  es no vacío, entonces  $g_1 * H = g_2 * H$ .

*Demostración.* Dado que  $H$  contiene el elemento identidad, la clase lateral izquierda  $g * H$  contiene a  $g$ . Esto prueba el inciso 1.

Sean ahora  $g_1$  y  $g_2$  elementos de  $G$  tales que  $g_2 = g_1 * h'$  para algún  $h' \in H$ . Entonces, para todo  $h \in H$ , tenemos que  $g_2 * h = g_1 * (h' * h)$  y  $g_1 * h = g_2 * (h'^{-1} * h)$ . Nótese que tanto  $h' * h$  como  $h'^{-1} * h$  pertenecen al subgrupo  $H$ . De esta manera, todo elemento de  $g_1 * H$  se puede representar como un elemento de  $g_2 * H$  y viceversa, esto es,

$$g_2 * h = g_1 * (h' * h) \in g_1 * H \quad \text{y} \quad g_1 * h = g_2 * (h'^{-1} * h) \in g_2 * H.$$

Por lo tanto  $g_2 * H \subset g_1 * H$  y  $g_1 * H \subset g_2 * H$ , es decir,  $g_1 * H = g_2 * H$ . Con esto se prueba el inciso 2.

Finalmente, sean  $g_1 * H$  y  $g_2 * H$  dos clases laterales izquierdas de intersección no vacía. Sea  $u$  un elemento de la intersección, entonces  $u = g_1 * h_1 = g_2 * h_2$  para algún par de elementos  $h_1$  y  $h_2$  de  $H$ . De esta manera, se tiene que  $g_1 = g_2 * (h_2 * h_1^{-1})$ , pero dado que  $h_2 * h_1^{-1} \in H$ , por el inciso 2, se sigue que  $g_1 * H = g_2 * H$ .  $\square$

De este lema se deduce que las clases laterales constituyen una partición de  $G$ .

**Definición 1.16.** *Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Decimos que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  si para toda  $h \in H$  y toda  $g \in G$ ,  $g * h * g^{-1} \in H$ .*

Sea  $g$  un elemento de  $G$ . Denotaremos por  $g * H * g^{-1}$  al conjunto de todos los  $g * h * g^{-1}$  con  $h \in H$ . De la definición anterior, es claro que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  si y sólo si  $g * H * g^{-1} \subset H$  para todo  $g \in G$ .

**Lema 1.3.**  *$H$  es un subgrupo normal de  $G$  si y sólo si  $g * H * g^{-1} = H$  para todo  $g \in G$ .*

*Demostración.* Si  $g * H * g^{-1} = H$  para todo  $g \in G$ , es claro que  $g * H * g^{-1} \subset H$ , luego  $H$  es normal en  $G$ .

Supongamos ahora que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ . Entonces, para todo  $g \in G$ , se tiene que tanto  $g * H * g^{-1}$  como  $g^{-1} * H * g$  se quedan contenidos en  $H$ . De esta manera,

$$H = g * (g^{-1} * H * g) * g^{-1} \subset g * H * g^{-1} \subset H.$$

Por lo tanto,  $g * H * g^{-1} = H$ .  $\square$

Nótese que cuando  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ , las clases laterales derechas e izquierdas coinciden.

A partir de ahora se desarrollará el concepto de grupo de transformaciones y se harán notar algunos resultados importantes que serán de utilidad en capítulos posteriores.

**Definición 1.17.** *Sea  $G$  un grupo multiplicativo con elemento identidad  $e$ . Se dice que  $G$  actúa o bien opera (por la izquierda) en un conjunto  $X$  cuando existe una función  $\theta : G \times X \rightarrow X$ , llamada acción de  $G$  en  $X$  que satisface:*

1.  $\theta(e, x) = x$  para cada  $x \in X$ .
2.  $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 * g_2, x)$  para todo  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in X$ .

En la práctica  $\theta(g, x)$  se escribe simplemente  $g \cdot x$ ; así tenemos:

$$e \cdot x = x \quad y \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x.$$

Se dice que  $G$  actúa por la derecha en  $X$  cuando existe una función  $(x, g) \mapsto x \cdot g$  tal que para toda  $x \in X$  y toda  $g_1, g_2 \in G$

$$x \cdot e = x \quad y \quad (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 * g_2).$$

Cada acción por la derecha, determina una por la izquierda definiendo  $g \cdot x = x \cdot g^{-1}$  para todo  $g \in G$ . En efecto, se tiene que

$$e \cdot x = x = x \cdot e$$

y

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot x) &= g_1 \cdot (x \cdot g_2^{-1}) \\ &= (x \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} \\ &= x \cdot (g_2^{-1} * g_1^{-1}) \\ &= x \cdot (g_1 * g_2)^{-1} \\ &= (g_1 * g_2) \cdot x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Análogamente toda acción por la izquierda determina una acción por la derecha.

A un conjunto  $X$  con la acción de un grupo  $G$  le llamaremos un  $G$ -conjunto. En adelante usaremos siempre acciones por la izquierda salvo que se indique lo contrario.

La acción  $\theta$  de  $G$  en  $X$  induce para cada  $g \in G$  la transformación

$$\theta_g : X \rightarrow X,$$

dada por  $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ . Veamos que las propiedades (1) y (2) implican que  $\theta_g$  es biyectiva. En efecto, observemos que  $\theta_e = 1_X$  y  $\theta_{g_1 * g_2} = \theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$ . En particular  $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = 1_X = \theta_{g^{-1}} \circ \theta_g$ . Por lo tanto  $\theta_g$  es biyectiva para toda  $g \in G$ . Sea  $Biy(X)$  el grupo de las permutaciones de  $X$ , es decir, el grupo de todas las funciones biyectivas  $X \rightarrow X$  con la operación composición. Veamos que la correspondencia  $g \mapsto \theta_g$  define un homomorfismo

$$\phi : G \rightarrow Biy(X)$$

dado por  $\phi(g) = \theta_g$ . En efecto,  $\phi(g_1 * g_2) = \theta_{g_1 * g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ . Llamaremos entonces a  $\phi$  el homomorfismo inducido por  $\theta$ . Esto hace que sea usual usar el término de grupo de transformaciones para referirse a la terna  $(G, X, \theta)$ , donde  $\theta$  es una acción del grupo de  $G$  en el conjunto  $X$ .

**Definición 1.18.** Sean  $X_1$  y  $X_2$   $G$ -conjuntos, una función  $f : X_1 \rightarrow X_2$  la llamamos  $G$ -equivariante o simplemente una función entre  $G$ -conjuntos, en caso de que

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x),$$

para cualquier  $g \in G$  y  $x \in X_1$ .

Decimos que una función  $G$ -equivariante  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es un isomorfismo entre  $G$ -conjuntos, si existe otra función  $G$ -equivariante  $g : X_2 \rightarrow X_1$  tal que  $f \circ g$  es la función identidad en  $X_2$  y  $g \circ f$  es la función identidad en  $X_1$ . Esto es equivalente a decir que la función  $f$  sea biyectiva. Como es usual, a un isomorfismo de un  $G$ -conjunto en si mismo se le llama automorfismo.

**Definición 1.19.** Decimos que un  $G$ -conjunto  $X$  es homogéneo si opera transitivamente en  $X$ , es decir, si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe un elemento  $g \in G$  tal que

$$g \cdot x = y.$$

Sea  $G$  un grupo y sea  $H$  un subgrupo arbitrario de  $G$ . Denotamos como  $G/H$  al conjunto de todas las clases laterales  $g * H$ , con  $g \in G$ . Si además  $H$  es normal en  $G$ , entonces  $G/H$  también es un grupo bajo la operación  $(g_1 * H) * (g_2 * H) = (g_1 * g_2) * H$ , elemento neutro  $e * H$  y  $g^{-1} * H$  como elemento inverso de cada  $g * H$ . A dicho grupo se le conoce como grupo cociente. Al número de clases laterales que posee  $G/H$  se le conoce como el índice de  $H$  en  $G$  y esta dado por  $\frac{|G|}{|H|}$ . Es fácil ver que si operamos por la izquierda a todos los elementos de una misma clase lateral con un elemento  $g \in G$ , obtenemos como resultado que todos los elementos pertenecen a la misma clase lateral. Esto da lugar a una función  $G \times G/H \rightarrow G/H$ , para la cual es fácil verificar que las condiciones para un  $G$ -conjunto se mantienen, ya que la operación  $(*)$  es asociativa en  $G$ . Por lo tanto  $G/H$  es un  $G$ -conjunto.

**Proposición 1.4.** Cualquier  $G$ -conjunto homogéneo es isomorfo a un conjunto  $G/H$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un  $G$ -conjunto homogéneo y  $x_0 \in X$ , definimos un subgrupo  $H$  de  $G$  como

$$H = \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\}.$$

$H$  está bien definido pues  $(g_1 * g_2) \cdot x_0 = g_1 \cdot (g_2 \cdot x_0) = g_1 \cdot x_0 = x_0$ . El subgrupo  $H$  es llamado subgrupo de isotropía correspondiente al punto  $x_0$ . Consideremos ahora la función  $\eta : G \rightarrow X$  dada por  $\eta(g) = g \cdot x_0$ . Esta función es sobreyectiva debido a que  $X$  es un  $G$ -conjunto homogéneo. Sean  $g_1, g_2 \in G$ , veamos bajo qué condiciones  $g_1$  y  $g_2$  se mapean al mismo elemento de  $X$ . Tenemos que

$$g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0 \Leftrightarrow (g_2^{-1} * g_1) \cdot x_0 = x_0,$$

es decir,  $g_2^{-1} * g_1 \in H$ . Por tanto,  $g_1$  y  $g_2$  se mapean al mismo elemento de  $X$  si y sólo si pertenecen a la misma clase lateral de  $H$ .

Observemos que si  $g_1 * H$  y  $g_2 * H$  son dos clases laterales de  $H$  tales que  $g_1, g_2 \in g_1 * H$  y  $g_1, g_2 \in g_2 * H$ , entonces, dado que su intersección es no nula, ambas clases laterales coinciden. De esta manera  $\eta$  induce una función  $\eta' : G/H \rightarrow X$  la cual es biyectiva. Debido a que  $\eta'(g * g' * H) = g * g' * H \cdot x_0 = g * \eta'(g' * H)$ ,  $\eta'$  es  $G$ -equivariante. Por lo tanto,  $G/H$  y  $X$  son  $G$ -conjuntos isomorfos, como se quería ver. Nótese que el isomorfismo  $\eta'$  y el subgrupo  $H$  del argumento anterior dependen de la elección del punto  $x_0$  en  $X$ .  $\square$

Para el propósito de este trabajo necesitamos saber la estructura del grupo de automorfismos de un  $G$ -conjunto homogéneo. Para esto, en adelante consideraremos que el grupo  $G$  actúa por la derecha en  $X$  y que es homogéneo.

Sea  $\varphi : X \rightarrow X$  un automorfismo de  $X$ . Veamos que dado un punto  $x \in X$ ,  $x$  y  $\varphi(x)$  tienen el mismo subgrupo de isotropía. En efecto, sean  $H$  y  $H'$  los subgrupos de isotropía de

$x$  y  $\varphi(x)$  respectivamente. Entonces, dado que para toda  $h$  en  $H$ ,  $\varphi(x) \cdot h = \varphi(x \cdot h) = \varphi(x)$ ,  $H \subset H'$ . Sea ahora  $h' \in H'$ . Como  $\varphi(x \cdot h') = \varphi(x) \cdot h' = \varphi(x)$ , aplicando  $\varphi^{-1}$  tenemos que  $x \cdot h' = x$ . Así  $H' \subset H$  y por tanto  $H = H'$ .

Ahora supongamos que  $x$  y  $y$  son puntos en  $X$  que tienen el mismo subgrupo de isotropía y veamos que existe un automorfismo  $\varphi$  de  $X$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Definamos  $\varphi$  de la siguiente manera. Sea  $z \in X$ . Entonces, por ser  $X$  homogéneo, existe una  $g \in G$  tal que

$$z = x \cdot g.$$

Por lo tanto, debemos tener que

$$\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g = y \cdot g.$$

Por consiguiente, definiremos  $\varphi(z) = y \cdot g$ . Ya que  $x$  y  $y$  tienen el mismo subgrupo de isotropía y  $x \cdot h = x$  para todo  $h \in H$ ,  $\varphi(x) = y \cdot h = y$ . Nótese que por la manera en como definimos  $\varphi$ , ésta es  $G$ -equivariante. Además, podemos verificar que  $\varphi$  es biyectiva definiendo  $\varphi^{-1}$  de manera análoga tal que  $\varphi^{-1}(y) = x$ . Por lo tanto  $\varphi$  es un automorfismo de  $X$ .

Luego, si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son automorfismos de un  $G$ -conjunto homogéneo, y para algún  $x \in X$  se tiene que  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ , veamos que  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Esto se debe a que  $G$  opera transitivamente sobre  $X$ , por lo que

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(x \cdot g) = \varphi_1(x) \cdot g = \varphi_2(x) \cdot g = \varphi_2(x \cdot g) = \varphi_2(y).$$

Por lo tanto  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Como una consecuencia de los argumentos anteriores tenemos el siguiente lema.

**Lema 1.4.** *Un grupo  $A$  de automorfismos de un  $G$ -conjunto homogéneo  $X$  es el grupo entero de automorfismos de  $X$  si y sólo si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$ , los cuales tienen el mismo subgrupo de isotropía, existe un automorfismo  $\varphi \in A$  tal que  $\varphi(x) = y$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es el grupo entero de automorfismos de  $X$ . Dado que ya vimos que para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  con el mismo subgrupo de isotropía, existe un automorfismo  $\varphi$  de  $X$  tal que  $\varphi(x) = y$ , se cumple la primera implicación.

Veamos ahora que se cumple la implicación inversa. Supongamos que para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$ , los cuales tienen el mismo subgrupo de isotropía, existe un automorfismo  $\varphi \in A$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Sea  $\varphi'$  un automorfismo en  $A^c$ , entonces, para cualquier  $x \in X$ ,  $x$  y  $\varphi'(x) = y$  tienen el mismo subgrupo de isotropía. De esta manera tenemos un automorfismo de  $X$  fuera de  $A$  tal que  $\varphi'(x) = y$ . Pero por hipótesis existe un automorfismo  $\varphi \in A$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Como  $\varphi'(x) = y = \varphi(x)$ , entonces  $\varphi' = \varphi$ . Por lo tanto  $A$  es el conjunto entero de automorfismos.  $\square$

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , definimos el conjunto  $N(H)$  como

$$N(H) = \{g \in G : g * H * g^{-1} = H\}.$$

El conjunto  $N(H)$  es un subgrupo de  $G$  que contiene a  $H$  y es llamado el normalizador de  $H$ .  $N(H)$  es el subgrupo más grande de  $G$  que contiene a  $H$  como subgrupo normal. Así,  $N(H)/H$  es un grupo cociente. Nótese también que un subgrupo  $H$  de  $G$  es normal en  $G$  si y sólo si  $N(H) = G$ .

**Proposición 1.5.** *Sea  $X$  un  $G$ -conjunto homogéneo y  $H$  el subgrupo de isotropía de  $G$  correspondiente a  $x_0 \in X$ . Entonces el grupo de automorfismos de  $X$  es isomorfo al grupo cociente  $N(H)/H$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  el conjunto de todos los  $x \in X$  para los cuales  $H$  es su subgrupo de isotropía. Por argumentos anteriores, es claro que el grupo de automorfismos de  $X$  actúa transitivamente sobre el conjunto  $S$ , es decir, para cualesquiera  $x, y \in S$ , existe un automorfismo  $\varphi$  de  $X$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

Veamos ahora que si  $x \in S$  y  $g \in G$ , entonces  $x \cdot g \in S$  si y sólo si  $g \in N(H)$ . La condición de que  $x \cdot g \in S$  es equivalente a decir que  $H$  es el conjunto de todos los  $h \in G$  tales que  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot g$ . Pero  $x \cdot (g * h) = x \cdot g$  si y sólo si  $x \cdot (g * h * g^{-1}) = x$ , esto es, si y sólo si  $g * h * g^{-1} \in H$ , o dicho de otra manera,  $h \in g^{-1} * H * g$ . Entonces, debido a que el conjunto de todos los  $h \in G$  tales que  $h \in g^{-1} * H * g$  es  $g^{-1} * H * g$ , se tiene que  $g^{-1} * H * g = H$ . Por lo tanto  $g \in N(H)$ . De esta manera, dado que  $X$  es homogéneo, y por el argumento anterior,  $N(H)$  actúa transitivamente sobre  $S$ . Nótese además que, en vista de que los elementos de  $H$  dejan fijo a cada punto de  $S$ , el conjunto  $N(H)/H$  actúa transitivamente sobre  $S$  también.

Ahora estableceremos un isomorfismo entre el grupo de automorfismos de  $X$  y  $N(H)/H$  de la siguiente manera. Sea  $\varphi$  un automorfismo de  $X$ , entonces, dado que  $x_0$  y  $\varphi(x_0)$  tienen el mismo subgrupo de isotropía y  $N(H)/H$  opera transitivamente sobre  $S$ , existe un elemento  $\alpha \in N(H)/H$  tal que

$$x_0 \cdot \alpha = \varphi(x_0).$$

Observemos que  $\alpha$  es único. En efecto, sean  $\alpha_1 = g_1 * H$  y  $\alpha_2 = g_2 * H$  elementos de  $N(H)/H$  tales que  $x_0 \cdot \alpha_1 = \varphi(x_0) = x_0 \cdot \alpha_2$ . Entonces, dado que  $H$  deja fijo cada punto de  $S$ , la ecuación  $x_0 \cdot g_1 = x_0 \cdot g_2$  implica que  $g_1$  y  $g_2$  pertenecen a la misma clase lateral. Por lo tanto  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

De manera inversa, sea  $\alpha \in N(H)/H$ . Recordemos que  $\alpha$  es del tipo  $g * H$  para algún  $g \in N(H)$ . Entonces, como  $x_0 \cdot g \in S$  y los elementos de  $H$  dejan fijo cada punto de  $S$ , por el lema 1.4, existe un automorfismo  $\varphi$  en  $X$  tal que  $\varphi(x_0) = x_0 \cdot \alpha$ . Veamos que dicho automorfismo es único. Sea  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  automorfismos de  $X$  tales que  $\varphi_1(x_0) = x_0 \cdot \alpha = \varphi_2(x_0)$ , entonces, como vimos anteriormente,  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Por lo tanto la correspondencia entre el grupo de automorfismos de  $X$  y  $N(H)/H$  es biyectiva.

Sólo falta ver que dicha correspondencia es un homomorfismo. Sean  $\varphi$  y  $\psi$  dos automorfismos de  $X$  y  $\alpha, \beta \in N(H)/H$ , supongamos que

$$\varphi(x_0) = x_0 \cdot \alpha,$$

y

$$\psi(x_0) = x_0 \cdot \beta.$$

Entonces,

$$(\varphi \circ \psi)(x_0) = \varphi(\psi(x_0)) = \varphi(x_0 \cdot \beta) = \varphi(x_0) \cdot \beta = x_0 \cdot \alpha \cdot \beta = x_0 \cdot (\alpha * \beta).$$

Por lo tanto la correspondencia es un isomorfismo.  $\square$

Observe que el isomorfismo entre  $N(H)/H$  y el grupo de automorfismos de  $X$  depende de la elección de  $x_0 \in X$ .

## 1.6. Categorías

**Definición 1.20.** Una categoría  $\mathcal{C}$  consiste de una colección de objetos, un conjunto  $\mathcal{C}(A, B)$  de morfismos (también llamados funciones) entre cualesquiera dos objetos  $A, B \in \mathcal{C}$ , un morfismo identidad  $id_A \in \mathcal{C}(A, A)$  para cada objeto  $A$  (usualmente abreviado  $id$ ), y una regla de composición

$$\circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

para cada tripleta de objetos  $A, B, C \in \mathcal{C}$ . La composición entre los morfismos debe ser asociativa y el morfismo identidad debe comportarse como su nombre lo dicta, esto es,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad id \circ f = f, \quad y \quad f \circ id = f.$$

Algunos ejemplos de la definición 1.20 son: la categoría *Set* de conjuntos y funciones, la categoría *Top* de espacios topológicos y funciones continuas, la categoría *Gpo* de grupos y homomorfismos, entre otros.

**Definición 1.21.** Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una función entre categorías. Esta asigna un objeto  $F(A)$  de  $\mathcal{D}$  a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y un morfismo  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  de  $\mathcal{D}$  a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  de tal forma que

$$F(id_A) = id_{F(A)} \quad y \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Para más detalles véase [10].



## Capítulo 2

# El teorema de Borsuk-Ulam.

### 2.1. El grupo fundamental.

**Definición 2.1.** Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas de  $X$  en  $Y$ , decimos que  $f$  es homotópica a  $g$  ( $f \simeq g$ ) si existe una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

donde  $I = [0,1]$  es el intervalo unitario. La función  $H$  es llamada homotopía entre  $f$  y  $g$ .

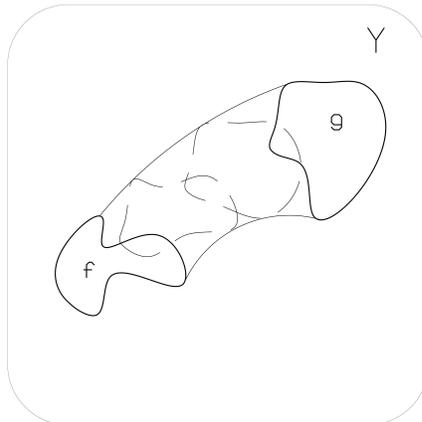


Figura 2.1:  $f \simeq g$

Se dice que  $f$  es homotópicamente nula si es homotópica a la función constante.

Sea  $Map(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es una función continua} \}$ , veamos que la homotopía  $\simeq$  define una relación de equivalencia en  $Map(X, Y)$ .

Veamos primero que  $f \simeq f$ . En efecto, sea  $H$  la homotopía definida como  $H(x, t) = f(x)$  para todo  $x \in X$  y para todo  $t \in I$ , la cual es continua dado que  $f$  lo es.

Supongamos que  $f \simeq g$ , entonces existe una homotopía  $H$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Definimos la función  $H^* : X \times I \rightarrow Y$  como  $H^*(x, t) = H(x, 1 - t)$ . Claramente  $H^*$  es continua y además  $H^*(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$  y  $H^*(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ , por lo tanto,  $g \simeq f$ .

Ahora supongamos que  $f \simeq g$  y  $g \simeq h$ , entonces existe una homotopía  $H$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ , y una homotopía  $K$  tal que  $K(x, 0) = g(x)$  y  $K(x, 1) = h(x)$  para todo  $x \in X$ . Definamos una función  $L : X \times I \rightarrow Y$  dada por

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tenemos que  $L(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$  y  $L(x, 1) = K(x, 1) = h(x)$ , por lo tanto  $L$  es la homotopía que buscamos, la cual está bien definida pues para  $t = \frac{1}{2}$   $H(x, 1) = g(x) = K(x, 0)$ .

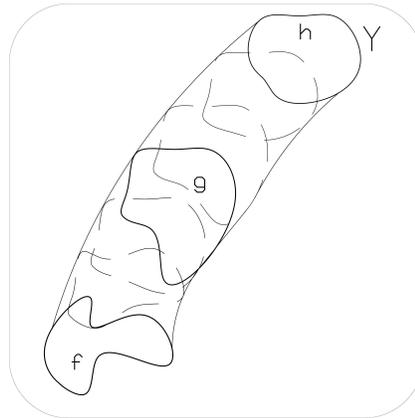
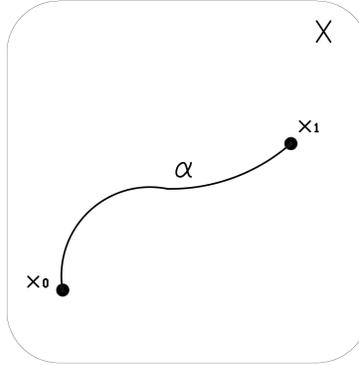


Figura 2.2:  $f \simeq g \simeq h$

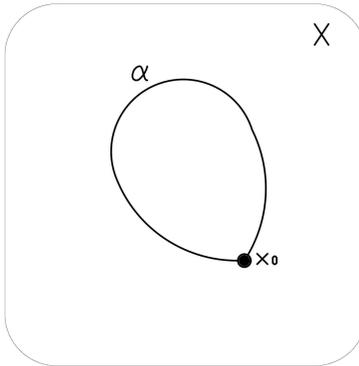
**Definición 2.2.** Sea  $A \subseteq X$  y  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f(a) = g(a)$  para toda  $a \in A$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicas relativas a  $A$  si existe una homotopía  $H$  tal que  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  para todo  $t \in I$  y para todo  $a \in A$ .

Definamos ahora el concepto de trayectoria.

**Definición 2.3.** Sean  $x_0, x_1 \in X$ , una trayectoria de  $x_0$  a  $x_1$  es una función continua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = x_1$ . Decimos que  $x_0$  y  $x_1$  son los extremos de  $\alpha$ , donde  $x_0$  es el punto inicial y  $x_1$  el punto final.

Figura 2.3: Trayectoria  $\alpha$ 

Si  $x_0 = x_1$  decimos que  $\alpha$  es una trayectoria cerrada o un lazo basado en  $x_0$ .

Figura 2.4: Trayectoria cerrada  $\alpha$ 

**Ejemplo 2.1.** Sea  $x \in X$  un punto arbitrario, a la trayectoria  $c_x : I \rightarrow X$  dada por  $c_x(s) = x$  para todo  $s \in I$  se le llama trayectoria constante.

Si  $\alpha$  es una trayectoria cerrada homotópica a la trayectoria constante  $c_x$ , decimos que  $\alpha$  es homotópicamente nula o contraíble.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $n$  un número entero, la trayectoria  $\omega_n : I \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  dada por  $\omega_n(s) = e^{2\pi n s i}$  es la trayectoria cerrada de grado  $n$  en el círculo.  $\omega_n$  envuelve a  $S^1$   $n$  veces en dirección contraria a las manecillas del reloj si  $n > 0$ , en dirección a las manecillas del reloj si  $n < 0$  y si  $n = 0$  entonces  $\omega_n = c_1$ .

Dada una trayectoria  $\alpha : I \rightarrow X$ , definimos la trayectoria inversa de  $\alpha$  como  $\bar{\alpha} : I \rightarrow X$  donde  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$  para todo  $s \in I$ .

**Definición 2.4.** Sean  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  dos trayectorias, decimos que son concatenables si  $\alpha(1) = \beta(0)$ , por lo que podemos definir el producto (concatenación) de  $\alpha$  y  $\beta$  como la trayectoria  $\alpha * \beta : I \rightarrow X$  dado por

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

donde  $\alpha * \beta(0) = \alpha$  y  $\alpha(1) * \beta = \beta$ . Observemos que  $\alpha * \beta$  es continua dado que  $\alpha$  y  $\beta$  lo son y  $\alpha(1) = \beta(0)$ .

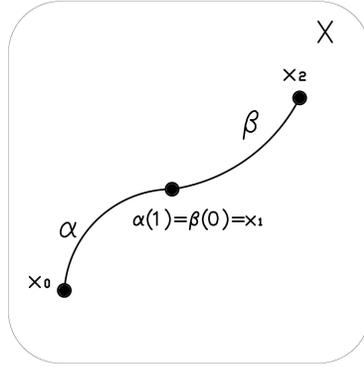


Figura 2.5:  $\alpha * \beta$

Ahora veamos como se relaciona la homotopía de trayectorias y la concatenación. En adelante, la notación  $\alpha : x_0 \triangleright x_1$  hará referencia a una trayectoria  $\alpha$  con punto inicial  $x_0$  y punto final  $x_1$ .

**Lema 2.1.** Sea  $\alpha : x_0 \triangleright x_1$ ,  $\beta : x_1 \triangleright x_2$  y  $\gamma : x_2 \triangleright x_3$  trayectorias en  $X$ , se cumple lo siguiente:

1.  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ .
2.  $c_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$  y  $\alpha * c_{x_1} \simeq \alpha$ .
3.  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0}$  y  $\bar{\alpha} * \alpha \simeq c_{x_1}$ .
4. Sea  $\omega : x_1 \simeq x_2$  una trayectoria en  $X$ , si  $\beta \simeq \omega$ , entonces  $\alpha * \beta \simeq \alpha * \omega$ .

*Demostración.* Por la definición anterior las trayectorias están bien definidas, ahora veamos que son homotópicas

1. Proponemos  $H$  como la homotopía entre  $\alpha * (\beta * \gamma)$  y  $(\alpha * \beta) * \gamma$  dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{2-t}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{2-t}{4}, \\ \beta(4s + t - 2) & \text{si } \frac{2-t}{4} \leq s \leq \frac{3-t}{4}, \\ \gamma\left(\frac{4s+t-3}{t+1}\right) & \text{si } \frac{3-t}{4} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

la cual esta bien definida pues  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son continuas y para  $s = \frac{2-t}{4}$  y  $s = \frac{3-t}{4}$ ,  $\alpha(1) = \beta(0)$  y  $\beta(1) = \gamma(0)$  respectivamente. Ahora, para  $t = 0$

$$H(s, 0) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(4s - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

a la cual, por la definición de concatenación de  $\beta * \gamma$ , podemos reescribir como

$$H(s, 0) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta * \gamma(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} = \alpha * (\beta * \gamma).$$

Análogamente, para  $t = 1$

$$H(s, 1) = \begin{cases} \alpha * \beta(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} = (\alpha * \beta) * \gamma,$$

por lo tanto  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ .

2. Veamos que las funciones  $H, K : I \times I \rightarrow X$  dadas por

$$H(s, t) = \begin{cases} c_{x_0}(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}, \\ \alpha\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ c_{x_1}(s) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

son las homotopías que buscamos.  $H$  y  $K$  están bien definidas pues  $\alpha, c_{x_0}$  y  $c_{x_1}$  son continuas y para  $s = \frac{1-t}{2}$  y  $s = \frac{1+t}{2}$ ,  $x_0 = \alpha(0)$  y  $\alpha(1) = x_1$  respectivamente. Para  $t = 0$   $H(s, 0) = c_{x_0} * \alpha(s)$  y  $K(s, 0) = \alpha * c_{x_1}(s)$ , si  $t = 1$   $H(s, 1) = \alpha(s)$  y  $K(s, 1) = \alpha(s)$ . Por lo tanto  $c_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$  y  $\alpha * c_{x_1} \simeq \alpha$ .

3. Definimos las funciones  $H, K : I \times I \rightarrow X$  como

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2(1-s)(1-t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} \alpha(2(1-s)(1-t)) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2s(1-t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$H$  y  $K$  están bien definidas pues  $\alpha$  es continua y para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha(2s(1-t)) = \alpha(2(1-s)(1-t))$ . Para  $t = 0$ ,  $H(s, 0) = \alpha * \bar{\alpha}$  y  $K(s, 0) = \bar{\alpha} * \alpha$ , si  $t = 1$ ,  $H(s, 1) = c_{x_0}$  y  $K(s, 1) = c_{x_1}$ . Por lo tanto  $H$  y  $K$  son las homotopías deseadas, es decir,  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0}$  y  $\bar{\alpha} * \alpha \simeq c_{x_1}$ .

4. Dado que  $\beta \simeq \gamma$ , existe una homotopía  $H$  entre  $\beta$  y  $\gamma$ . Sea  $F : I \times I \rightarrow X$  una función dada por

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H(2s-1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$F$  está bien definida y es continua pues  $\alpha$  y  $H$  son continuas y para  $s = \frac{1}{2}$ ,  $H(0, t) = x_1 = \alpha(1)$ . Tenemos que  $H(2s-1, 0) = \beta(2s-1)$  y  $H(2s-1, 1) = \omega(2s-1)$  para todo  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ , por lo tanto  $F(s, 0) = \alpha * \beta$  y  $F(s, 1) = \alpha * \omega$ , esto prueba que  $F$  es una homotopía entre  $\alpha * \beta$  y  $\alpha * \gamma$ .

□

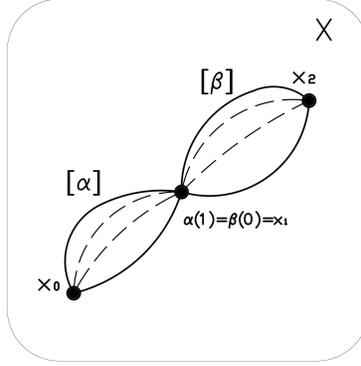
Las homotopías de trayectorias que nos van a interesar son aquellas que conservan fijos sus extremos, por lo que en adelante cada que hablemos de homotopías de trayectorias nos referiremos a homotopías de trayectorias relativas al  $\{0, 1\}$ .

Del inciso (4) del lema 2.1 se sigue que si  $\alpha$  y  $\gamma$  son dos trayectorias concatenables tales que  $\alpha \simeq \beta$  y  $\gamma \simeq \delta$ , entonces  $\alpha * \gamma \simeq \beta * \delta$  o  $\gamma * \alpha \simeq \delta * \beta$ .

Tenemos que  $\simeq$  define una relación de equivalencia en  $Map(I, X)$ . Sea  $Map(I, X) / \simeq$  el conjunto de clases de equivalencia respecto a  $\simeq$ , llamadas clases de homotopía, y sea  $\overline{Map(I, X) / \simeq} = \{[\alpha] | \alpha \in Map(I, X)\}$ , si  $[\alpha] = [\beta]$  entonces  $\alpha(0) = \beta(0)$  y  $\alpha(1) = \beta(1)$ , es decir, todas las trayectorias de la clase de homotopía tienen los mismos extremos. Sea  $[\alpha], [\beta] \in \overline{Map(I, X) / \simeq}$ , definimos

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Por el inciso (4) del lema 2.1 la operación  $(*)$  está bien definida en  $\overline{Map(I, X) / \simeq}$ .

Figura 2.6:  $[\alpha] * [\beta]$ 

**Proposición 2.1.** Sea  $\alpha : x \triangleright y$ ,  $\beta : y \triangleright z$  y  $\gamma : z \triangleright w$  trayectorias en  $X$ , se cumple lo siguiente:

1.  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ .
2.  $[c_x] * [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] * [c_y]$ .
3.  $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [c_x]$  y  $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [c_y]$ .

*Demostración.* De la definición anterior tenemos que

1.  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = [\alpha] * ([\beta * \gamma]) = [\alpha * (\beta * \gamma)]$ ,  
Por el inciso (1) del lema 2.1 esto es igual a  
 $[(\alpha * \beta) * \gamma] = ([\alpha * \beta]) * [\gamma] = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ .
2. Por el inciso (2) del lema 2.1  
 $[c_x] * [\alpha] = [c_x * \alpha] = [\alpha]$  y  
 $[\alpha] * [c_y] = [\alpha * c_y] = [\alpha]$ .
3. Por el inciso (3) del lema 2.1  
 $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [\alpha * \bar{\alpha}] = [c_x]$  y  
 $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [\bar{\alpha} * \alpha] = [c_y]$ .

□

Sea  $\alpha$  una trayectoria en  $X$  y  $a_0, a_1, \dots, a_n$  números reales tales que  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ . Entonces, para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe una única función  $p_i : [0, 1] \rightarrow [a_{i-1}, a_i]$ , de la forma  $p_i(x) = mx + k$ , que lleva 0 a  $a_{i-1}$  y 1 a  $a_i$ . A la función  $p_i$  la llamaremos función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[a_{i-1}, a_i]$ . Definamos ahora  $\alpha_i = \alpha \circ p_i$ . Así  $\alpha \simeq (\alpha_1 * (\alpha_2 * (\dots * (\alpha_{n-1} * \alpha_n) \dots)))$ , y dado que el producto entre clases de homotopía es asociativo,

$$[\alpha] = [(\alpha_1 * (\alpha_2 * (\dots * (\alpha_{n-1} * \alpha_n) \dots)))] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n].$$

En virtud de la proposición 2.1 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico basado, es decir, un espacio  $X$  con un punto base  $x_0$ . Entonces el conjunto*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\lambda] \mid \lambda \text{ es un lazo basado en } x_0\}$$

*es un grupo con operación  $[\lambda] * [\varphi] = [\lambda * \varphi]$ , elemento neutro  $1 = 1_{x_0} = [c_{x_0}]$  y  $[\bar{\lambda}]$  como elemento inverso de cada  $[\lambda]$ .*

Este grupo es llamado el grupo fundamental de  $X$  relativo al punto base  $x_0$ .

Sea  $\alpha$  una trayectoria en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Entonces  $\alpha$  induce una función

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

dada por

$$\hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha].$$

Si  $\gamma$  es un lazo basado en  $x_0$ , entonces  $\bar{\alpha} * (\gamma * \alpha)$  es un lazo basado en  $x_1$ . Por tanto,  $\hat{\alpha}$  aplica  $\pi_1(X, x_0)$  en  $\pi_1(X, x_1)$ . Ahora veamos que  $\hat{\alpha}$  está bien definida. En efecto, sean  $\gamma \simeq \beta$ , entonces

$$\hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha] = [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha] = [\bar{\alpha} * \beta * \alpha] = [\bar{\alpha}] * [\beta] * [\alpha] = \hat{\alpha}([\beta]).$$

Tenemos que  $\hat{\alpha}$  cumple que  $\hat{\alpha}([\gamma]) * \hat{\alpha}([\kappa]) = \hat{\alpha}([\gamma] * [\kappa])$ . Esto se debe a que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([\gamma]) * \hat{\alpha}([\kappa]) &= ([\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [\kappa] * [\alpha]) \\ &= ([\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\kappa] * [\alpha]) \\ &= \hat{\alpha}([\gamma] * [\kappa]). \end{aligned}$$

Es decir,  $\hat{\alpha}$  es un homomorfismo de grupos.

Sea  $\beta$  el inverso de  $\alpha$ , afirmamos que  $\hat{\beta}$  es el inverso de  $\hat{\alpha}$ , siendo así  $\hat{\alpha}$  biyectiva. Calculamos para cada elemento  $[\gamma]$  de  $\pi_1(X, x_1)$ ,

$$\hat{\beta}([\gamma]) = [\bar{\beta}] * [\gamma] * [\beta] = [\alpha] * [\gamma] * [\bar{\alpha}],$$

aplicado en  $\hat{\alpha}$  tenemos que

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([\gamma])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma].$$

Un cálculo similar muestra que  $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([\rho])) = [\rho]$  para todo  $[\rho] \in \pi_1(X, x_0)$ . Por lo tanto,  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos.

**Definición 2.5.** Un espacio  $X$  se dice que es conexo por trayectorias si cada par de puntos de  $X$  se pueden unir mediante una trayectoria en  $X$ .

En virtud de lo anterior tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.** Si  $X$  es conexo por trayectorias, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$  para cualesquiera  $x_0, x_1 \in X$ .

Si  $X$  es un espacio conexo por trayectorias, entonces no se necesita especificar el punto base del grupo fundamental, pues los grupos son isomorfos.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $\mathbb{R}^n$  el espacio euclidiano  $n$ -dimensional, veamos que  $\pi_1(\mathbb{R}^n, \bar{0}) = \{0\}$ , es decir para todo lazo  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  basado en  $\bar{0}$ , existe una homotopía  $H$  que comienza en  $\alpha$  y termina en  $c_{\bar{0}}$ . Proponemos  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $H(s, t) = (1 - t)\alpha(s)$ , claramente  $H$  es continua. En efecto  $H(s, 0) = \alpha(s)$  y  $H(s, 1) = c_{\bar{0}}$ , por lo tanto  $\pi_1(\mathbb{R}^n, \bar{0}) = \{0\}$ . De manera análoga se puede ver que  $\pi_1(B^n, \bar{0}) = \{0\}$

Observemos que  $\pi_1(\mathbb{R}^n, \bar{0}) = \{0\}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , pero  $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$  si  $n \neq m$ . De igual manera  $\pi_1(\mathbb{R}^n, \bar{0}) = \pi_1(B^n, \bar{0})$ , pero sabemos que  $\mathbb{R}^n \not\cong B^n$ .

**Definición 2.6.** Un espacio  $X$  es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y  $\pi_1(X)$  es el grupo trivial, es decir  $\pi_1(X) = \{0\}$ .

Sea  $X$  un espacio simplemente conexo y sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos trayectorias de  $x_0$  a  $x_1$ , entonces  $\alpha * \bar{\beta}$  está bien definido y es un lazo basado en  $x_0$ . Dado que  $X$  es simplemente conexo,  $\alpha * \bar{\beta}$  es homotópico al lazo constante  $c_{x_0}$ . Entonces

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [c_{x_0}] * [\beta] = [\beta]$$

y de igual manera

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [(\alpha * \bar{\beta}) * \beta] = [\alpha * (\bar{\beta} * \beta)] = [\alpha]$$

por lo tanto  $[\alpha] = [\beta]$ . Esto quiere decir que en un espacio simplemente conexo, dos caminos cualesquiera con los mismo puntos extremos son homotópicos por trayectorias.

**Lema 2.2.** Sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  trayectorias en  $X$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, se cumple lo siguiente:

1. Si  $\alpha \simeq \beta$ , entonces  $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ .
2. Si  $\alpha$  y  $\gamma$  son dos trayectorias concatenables, entonces  $f \circ (\alpha * \gamma) = (f \circ \alpha) * (f \circ \gamma)$ .

*Demostración.* 1. Dado que  $\alpha \simeq \beta$ , entonces existe una homotopía  $H$  tal que  $H(s, 0) = \alpha(s)$  y  $H(s, 1) = \beta(s)$  para todo  $s \in I$ . Sea  $F : I \times I \rightarrow X$  una función continua dada por  $F = f \circ H$ , entonces para todo  $s \in I$  se cumple que

$$F(s, 0) = f(H(s, 0)) = f(\alpha(s))$$

y

$$F(s, 1) = f(H(s, 1)) = f(\beta(s))$$

por lo tanto,  $F$  es una homotopía entre  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$ .

2. Como  $\alpha * \gamma$  es la trayectoria dado por

$$\alpha * \gamma(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

entonces

$$f \circ (\alpha * \gamma(s)) = \begin{cases} f \circ (\alpha(2s)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ f \circ (\gamma(2s - 1)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

por lo tanto  $f \circ (\alpha * \gamma) = (f \circ \alpha) * (f \circ \gamma)$ .

□

Notemos que los resultados del lema 2.2 se cumple si  $\alpha(0) \neq \beta(0)$  y  $\alpha(1) \neq \beta(1)$ .

Sea  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una función continua tal que  $f(x_0) = y_0$  y  $[\alpha]$  una clase de homotopía en  $X$ . Denotamos por  $f_*([\alpha])$  a la imagen de  $[\alpha]$  en  $Y$ , es decir  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ . Por el inciso (1) del lema 2.2,  $f_*([\alpha])$  esta bien definida.

En vista de lo anterior, decimos que  $f$  induce un homomorfismo de grupos relativo al punto base  $x_0$

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Veamos ahora que  $f_*$  es un homomorfismo de grupos. En efecto,

$$f_*([\alpha] * [\beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)]$$

por el inciso (2) del lema 2.2

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) \end{aligned}$$

**Lema 2.3.** Sean  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  funciones continuas tales que  $f(x_0) = y_0$  y  $g(y_0) = z_0$ . Entonces la siguientes condiciones se cumplen:

1. Si  $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  es la función identidad, entonces  $i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es el homomorfismo identidad.
2.  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

*Demostración.* Siguiendo la definición de homomorfismo inducido

1.  $i_*([\alpha]) = [i \circ \alpha] = [\alpha]$ .
  
2.
 
$$\begin{aligned}
 (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\
 &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\
 &= g_*([f \circ \alpha]) \\
 &= g_*(f_*([\alpha])) \\
 &= (g_* \circ f_*)([\alpha]).
 \end{aligned}$$

□

Sea  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  un homeomorfismo de  $X$  en  $Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$  y  $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  la inversa de  $f$ , entonces  $k_* \circ f_* = (k \circ f)_* = i_*$ , donde  $i$  es la identidad en  $(X, x_0)$ , y  $f_* \circ k_* = (f \circ k)_* = j_*$ , donde  $j$  es la identidad de  $(Y, y_0)$ .

Dado que  $i_*$  y  $j_*$  son los homomorfismos identidad en  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$  respectivamente,  $k_*$  es la inversa de  $f_*$ . Por lo tanto  $f_*$  es un isomorfismo de grupos.

Por el lema 2.3,  $\pi_1$  es un funtor de la categoría de espacios topológicos basados en la categoría de grupos, y debido a esto,  $\pi_1$  es un invariante topológico. Observemos que dos espacios homeomorfos tienen el mismo grupo fundamental, pero lo contrario no es necesariamente cierto como se vio en la observación que aparece después del ejemplo 2.3.

Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios topológicos basados, entonces  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_* = \text{Map}((X, x_0), (Y, y_0)) / \simeq$ , donde  $\text{Map}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f \in \text{Map}(X, Y) | f(x_0) = y_0\}$ . Dicho lo anterior podemos definir el grupo fundamental de la siguiente manera.

**Definición 2.7.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico basado, para  $n \geq 1$  definimos el  $n$ -ésimo grupo de homotopía como

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, a), (X, x_0)]_*.$$

La operación de los  $n$  grupos de homotopía es la concatenación. No probaremos este hecho, sin embargo se puede encontrar en [14]. Note que el primer grupo de homotopía es al que se conoce como grupo fundamental.

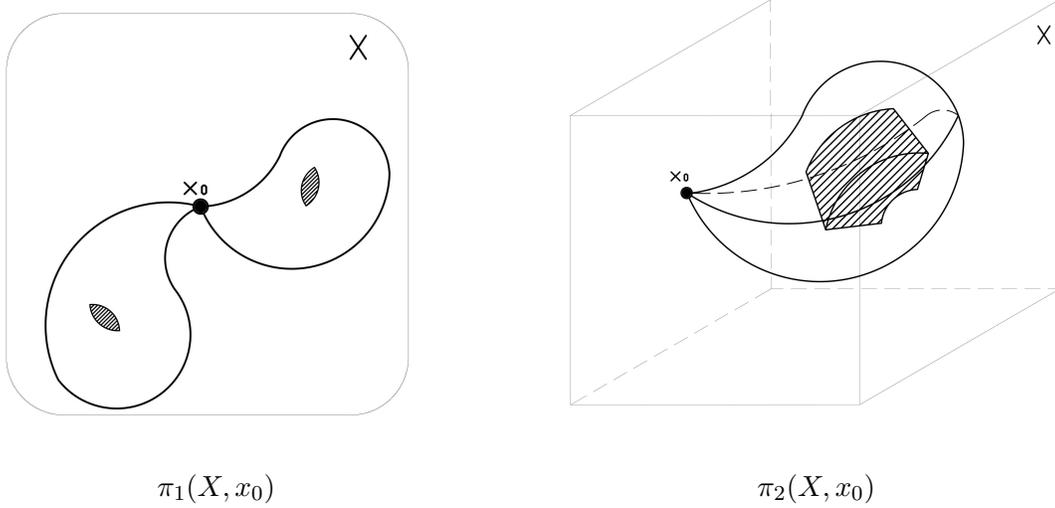


Figura 2.7: Ejemplos del primer y segundo grupo de homotopía.

Para el caso cuando  $n = 0$ ,  $\pi_0(X, x_0)$  no es un grupo, como ocurre para  $n \geq 1$ . Para verificar esto, veamos que existe una biyección entre  $\pi_0(X, x_0)$  y el conjunto de las componentes por trayectorias de  $X$ .

**Teorema 2.1.**  $\pi_0(X, x_0)$  esta en biyección con el conjunto de las componentes por trayectorias de  $X$ .

*Demostración.* Tenemos que  $S^0 = \{-1, 1\}$  y supongamos que 1 es el punto base. Sea  $X$  un espacio topológico y  $Map((S^0, 1), (X, x_0))$  el conjunto de funciones continuas de  $S^0$  en  $X$  que mandan al 1 en  $x_0$ . Notemos que toda función  $f \in Map((S^0, 1), (X, x_0))$  esta completamente determinada por  $f(-1)$ . Definamos entonces la función

$$\Upsilon : Map((S^0, 1), (X, x_0)) \rightarrow X$$

como  $\Upsilon(f) = f(-1)$ . Sea  $\hat{X}$  el conjunto de las componentes por trayectorias de  $X$ , veamos que  $\Upsilon$  induce una función

$$\hat{\Upsilon} : \pi_0(X, x_0) \rightarrow \hat{X}.$$

Definamos  $\hat{\Upsilon}([f]) = [f(-1)]$ . Verifiquemos que efectivamente  $\hat{\Upsilon}$  esta bien definida. En efecto, sean  $f, g \in Map((S^0, 1), (X, x_0))$  tales que  $f \simeq g$  y sea  $H : S^0 \times I \rightarrow X$  una homotopía entre ellas tal que  $H(-1, 0) = f(-1)$ ,  $H(-1, 1) = g(-1)$  y  $H(1, t) = x_0$  para toda  $t \in I$ . Es claro que  $H$  define una trayectoria entre  $f(-1)$  y  $g(-1)$  dada por  $H(-1, t) : I \rightarrow X$ . Por lo tanto  $\hat{\Upsilon}$  esta bien definida.

Veamos ahora que es una biyección. Supongamos que  $\hat{\Upsilon}([f]) = \hat{\Upsilon}([g])$ , por lo que  $f(-1)$  y  $g(-1)$  pertenecen a la misma componente por trayectorias, entonces existe una trayectoria  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = f(-1)$  y  $\alpha(1) = g(-1)$ . Definamos una homotopía entre  $f$  y  $g$  que dependa de  $\alpha$  de la siguiente manera:  $H : S^0 \times I \rightarrow X$ , dada por,

$H(1, t) = x_0$  y  $H(-1, t) = \alpha(t)$  para toda  $t \in I$ . Por lo tanto  $[f] = [g]$ , es decir,  $\hat{\gamma}$  es inyectiva. Falta ver que  $\hat{\gamma}$  es sobreyectiva. Sea  $[x] \in \hat{X}$ , definamos  $\alpha_x : (S^0, 1) \rightarrow (X, x_0)$  como  $\alpha_x(-1) = x$ . Tenemos que  $\hat{\gamma}([\alpha_x]) = [x]$ . Por lo tanto  $\pi_0(X, x_0)$  esta en biyección con el conjunto de las componentes por trayectorias de  $X$ .  $\square$

Por el teorema 2.1, es claro que dos espacios que no son homeomorfos pueden tener el mismo  $\pi_0$ . Entonces, debido a que no hay una manera natural de asignarle una estructura de grupo al conjunto de las componentes por trayectorias de un espacio topológico,  $\pi_0(X, x_0) : Top_* \rightarrow Set$  es un functor de la categoría de espacios topológicos basados en la categoría de conjuntos.

En general, para  $n \geq 1$ ,  $\pi_n(X, x_0) : Top_* \rightarrow Gpo$  es un functor de la categoría de espacios topológicos basados en la categoría de grupos. Esta definición se estudia más a fondo en [14].

## 2.2. Espacios cubrientes.

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función continua y sobreyectiva, y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ . Decimos que  $U$  esta totalmente cubierto por  $p$  si  $p^{-1}(U)$  es la unión ajena de conjuntos abiertos  $V_i$  en  $\tilde{X}$  tales que para cada  $i$ , la restricción de  $p$  en  $V_i$  es un homeomorfismo de  $V_i$  en  $U$ . Es fácil de ver que si  $U$  esta totalmente cubierto por  $p$  y  $A \subset U$ , entonces  $A$  también esta totalmente cubierto por  $p$ .

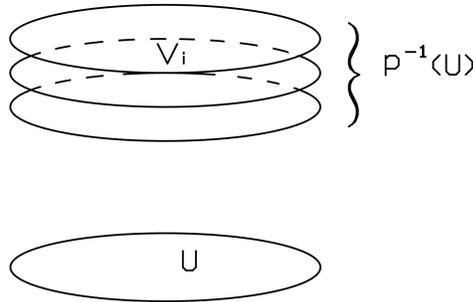


Figura 2.8: Abierto  $U$  totalmente cubierto por  $p$ .

**Definición 2.8.** *Un espacio cubriente de  $X$  es una tupla que consiste en un espacio  $\tilde{X}$  y una función  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  continua y sobreyectiva tal que se cumple la siguiente condición: Para todo  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  totalmente cubierta por  $p$ .*

En adelante nos referiremos a  $\tilde{X}$  como el espacio que cubre a  $X$  y a  $p$  la llamaremos función cubriente. Además, supondremos que todos los espacios son conexos por trayec-

torias y localmente conexos por trayectorias a menos que se indique otra cosa.

Observemos que si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es una función cubriente, entonces, para todo  $x \in X$ , el subespacio  $p^{-1}(x)$  en  $\tilde{X}$  tiene la topología discreta. Sea  $U$  una vecindad abierta de  $x$  totalmente cubierta por  $p$  y  $\{V_i\}$  la familia de abiertos ajenos homeomorfos a  $U$ , entonces cada abierto  $V_i$  interseca a  $p^{-1}(x)$  en un solo punto, el cual es abierto en  $p^{-1}(x)$ . Por lo tanto,  $p^{-1}(x)$  tiene la topología discreta.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $X$  cualquier espacio topológico e  $i : X \rightarrow X$  la función identidad, entonces el par  $(X, i)$  es un ejemplo trivial de un espacio cubriente de  $X$ . De igual manera, si  $f$  es un homeomorfismo de  $X$  en  $Y$ , entonces  $(X, f)$  es un espacio cubriente de  $Y$ .

**Ejemplo 2.5.** La función  $p : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $p(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , es una función cubriente.

Al tomar a  $x$  como un número complejo de norma 1,  $x^n$  representa al punto  $x$  dándole  $n$  vueltas a la 1-esfera. Es claro que  $p$  es continua y sobreyectiva. Entonces, dado que  $p^{-1}(x^n)$  representa el conjunto de las  $n$  raíces de  $x^n$ ,  $p$  es una función cubriente.

**Ejemplo 2.6.** Sean  $X$  y  $D$  espacios topológicos, donde  $D$  discreto. Entonces la proyección  $p : X \times D \rightarrow X$  es una función cubriente.

Como  $D$  es discreto tenemos que

$$X \times D = \bigcup_{d \in D} X \times \{d\}$$

con  $X \times \{d\}$  abierto en  $X \times D$  para toda  $d \in D$ . Además,  $d \neq d'$  implica que  $X \times \{d\}$  es ajeno a  $X \times \{d'\}$ . Finalmente  $p|_{X \times \{d\}}$  representa un homeomorfismo entre  $X \times \{d\}$  y  $X$  para toda  $d \in D$ . Por lo tanto  $(X \times D, p)$  es un espacio cubriente de  $X$ .

**Ejemplo 2.7.** Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  una función dada por

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x)).$$

Veamos que  $p$  es una función cubriente. En efecto, sea  $U \subseteq S^1$  formado de aquellos puntos para los cuales la primera coordenada es positiva. El conjunto  $p^{-1}(U)$  consiste en aquellos puntos  $x$  para los cuales  $\cos(2\pi x)$  es positivo, es decir, la unión de los intervalos

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right),$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

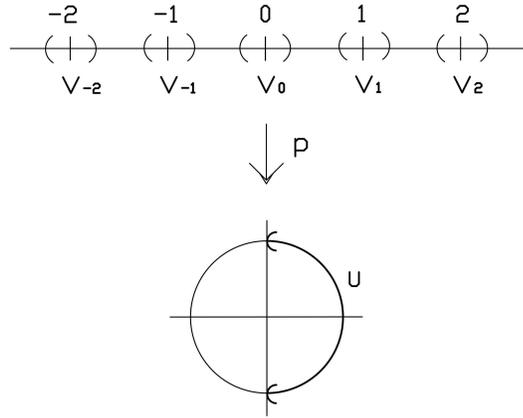


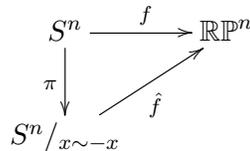
Figura 2.9: Función cubriente  $p$ .

Ahora, restringida a cualquier  $\overline{V_n}$ , la función  $p$  es inyectiva en  $\overline{U}$  dado que el  $\text{sen}(2\pi x)$  es estrictamente monótona en todo el intervalo. Además, por el teorema del valor intermedio,  $p$  aplica sobreyectivamente  $\overline{V_n}$  en  $\overline{U}$ . Entonces, dado que  $\overline{V_n}$  es compacto y  $\overline{U}$  es Hausdorff utilizando la topología usual, por el teorema 1.1,  $p|_{\overline{V_n}}$  es un homeomorfismo de  $\overline{V_n}$  en  $\overline{U}$ . En especial  $p|_{V_n}$  es un homeomorfismo de  $V_n$  en  $U$ .

Un argumento similar se aplica para la intersección de  $S^1$  con los semiplanos abiertos superior, inferior e izquierdo. Por lo tanto  $p$  es una función cubriente.

**Ejemplo 2.8.** El espacio real proyectivo  $\mathbb{R}P^n$  es el conjunto de rectas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan por  $\bar{0}$ . Sea  $l_x$  la recta en  $\mathbb{R}P^n$  que pasa por los puntos  $x$  y  $-x$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , definimos la función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  la cual manda cada  $x$  a su respectiva  $l_x$  y la proyección canónica  $\pi : S^n \rightarrow S^n / x \sim -x$ , considerando a  $S^n / x \sim -x$  con la topología cociente. Dichas funciones inducen una función continua  $\hat{f} : S^n / x \sim -x \rightarrow \mathbb{R}P^n$  dada por

$$\hat{f} = f \circ \pi^{-1}.$$



Es fácil de ver que  $\hat{f}$  es un homeomorfismo, pues  $\pi$  manda a cada clase de equivalencia a un par de puntos antipodales, los cuales pertenecen a la misma recta en  $\mathbb{R}P^n$ . Por lo tanto  $\mathbb{R}P^n \cong S^n / x \sim -x$ . Dicho lo anterior podemos definir a  $\mathbb{R}P^n$  como el espacio cociente de  $S^n$  respecto a la relación de equivalencia dada por  $x \sim y$  si y sólo si  $y = \pm x$ . Ahora

veamos que  $\mathbb{RP}$  es homeomorfo a  $S^1$ . En efecto, el homeomorfismo se ve geoméricamente de la siguiente manera. Identifiquemos primero la parte superior con la parte inferior de  $S^1$ .

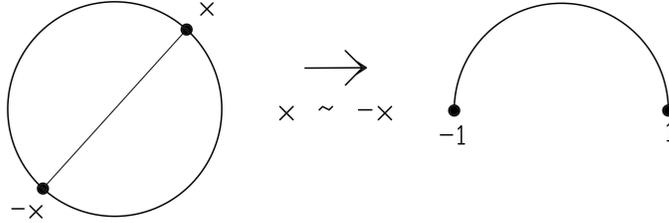


Figura 2.10: Identificación.

Identificando 1 y -1 obtenemos claramente  $S^1$ .

Haciendo uso de la proyección canónica  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ , veamos que  $\mathbb{RP}^n$  es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Efectivamente, sean  $[x]$  y  $[y]$  elementos de  $\mathbb{RP}^n$ , tomemos a  $x \in \pi^{-1}([x])$  y  $y \in \pi^{-1}([y])$  puntos en  $S^n$ . De esta manera, dado que  $S^n$  es conexo por trayectorias, existe una función continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^n$  tal que  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . Nótese que por ser  $\pi$  continua,  $\pi(\alpha)$  es una trayectoria en  $\mathbb{RP}^n$  entre  $[x]$  y  $[y]$ . Por lo tanto  $\mathbb{RP}^n$  es conexo por trayectorias.

Ahora, dado que  $\pi$  es continua, para todo  $x$  en  $S^n$  y toda vecindad  $W$  de  $\pi(x)$  en  $\mathbb{RP}^n$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$  en  $S^n$  tal que  $\pi(V) \subset W$ . Entonces, por ser  $S^n$  localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad abierta  $V' \subset V$  de  $x$  que es conexo por trayectorias. Es claro que  $\pi(V')$  es una vecindad de  $\pi(x)$  que está contenida en  $W$ . Sean entonces  $[x']$  y  $[y']$  elementos de  $\pi(V')$ , tomemos a  $x' \in \pi^{-1}([x'])$  y  $y' \in \pi^{-1}([y'])$  puntos en  $S^n$  tales que  $x', y' \in V'$ . Así, dado que  $V'$  es conexo por trayectorias, utilizando un argumento similar al anterior, llegamos a que  $\pi(V')$  es conexo por trayectorias. Por lo tanto  $\mathbb{RP}^n$  es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias como se quería ver.

Sea  $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  la proyección canónica, veamos ahora que  $p$  es una función cubriente. En efecto, sea  $[x] \in \mathbb{RP}^n$  y tomemos  $x \in p^{-1}([x])$ . Sea  $B(x, \frac{1}{2}) \cap S^n$  una vecindad de  $x$  en  $S^n$ , entonces  $U = p(B(x, \frac{1}{2}) \cap S^n)$  es una vecindad de  $[x]$  en  $\mathbb{RP}^n$ . Dado que para cada  $[x] \in \mathbb{RP}^n$ ,  $p^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ , la imagen inversa de  $U$  puede ser representada como abiertos ajenos homeomorfos a  $U$ . Por lo tanto  $p$  es una función cubriente de  $\mathbb{RP}^n$ .

**Definición 2.9.** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente. Si  $f$  es una función continua de  $Y$  en  $X$ , un levantamiento de  $f$  es una función  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

**Ejemplo 2.9.** Consideremos el cubrimiento  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  del ejemplo 2.7. La trayectoria  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$  comenzando en  $b_0 = (1, 0)$  y dada por  $\alpha(x) = (\cos(\pi x), \sin(\pi x))$  se levanta a la trayectoria  $\tilde{\alpha}(x) = \frac{x}{2}$  comenzando en 0 y acabando en  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{R} \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & S^1
 \end{array}$$

**Proposición 2.2.** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$  y sea  $Y$  un espacio conexo. Dadas cualesquiera dos funciones continuas  $f_0, f_1 : Y \rightarrow \tilde{X}$  tales que  $p \circ f_0 = p \circ f_1$ , entonces el conjunto  $\Gamma = \{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$  es  $\emptyset$  o  $Y$ .

*Demostración.* Dado que  $Y$  es conexo, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en  $Y$  son el vacío y el total. Así, basta probar que  $\Gamma$  es abierto y cerrado. Probemos que  $\Gamma$  es cerrado. Sea  $y \in \overline{\Gamma}$  y  $x = p(f_0(y)) = p(f_1(y))$ . Supongamos que  $f_0(y) \neq f_1(y)$ . Sea  $U$  una vecindad abierta de  $x$  totalmente cubierta por  $p$ , y sean  $V_0$  y  $V_1$  las componentes de  $p^{-1}(U)$  que contienen a  $f_0(y)$  y  $f_1(y)$  respectivamente. Dado que  $f_0$  y  $f_1$  son continuas, podemos encontrar una vecindad abierta  $W \subset Y$  de  $y$  tal que  $f_0(W) \subset V_0$  y  $f_1(W) \subset V_1$ , lo cual es una contradicción pues  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ . Por lo tanto  $f_0(y) = f_1(y)$  para todo  $y \in \overline{\Gamma}$ , es decir,  $\Gamma$  es cerrado.

Probaremos ahora que  $\Gamma$  es abierto también. Por contradicción supongamos que  $\Gamma$  no es abierto, entonces no existe una vecindad abierta para un punto  $y$  totalmente contenida en  $\Gamma$ . Sea  $W_y$  una vecindad abierta del punto  $y$ ,  $y'$  un punto en  $W_y$  tal que  $y' \neq y$  y  $y' \notin \Gamma$ , y  $x = p(f_0(y')) = p(f_1(y'))$ . Como  $y' \notin \Gamma$  tenemos que  $f_0(y') \neq f_1(y')$ , entonces, tomando nuevamente  $U$  como una vecindad abierta de  $x$ , totalmente cubierta por  $p$ , y a  $V_0$  y  $V_1$  como las componentes de  $p^{-1}(U)$  que contienen a  $f_0(y)$  y  $f_1(y)$  respectivamente, llegamos a una contradicción con un procedimiento similar al del párrafo anterior. Por lo tanto  $\Gamma$  es abierto y cerrado.  $\square$

Veamos ahora algunas propiedades importantes de los espacios cubrientes.

**Proposición 2.3.** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Entonces, cualquier trayectoria  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  que comienza en  $x_0$  tiene un único levantamiento a una trayectoria  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$ .

*Demostración.* Sea  $\{U_j\}_{j \in J}$  una cubierta abierta de  $X$  donde cada  $U_j$  esta totalmente cubierta por  $p$ , entonces  $\{\alpha^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$  es una cubierta abierta del espacio métrico compacto  $I$ . De esta manera, usando el teorema de la cubierta de Lebesgue, podemos encontrar una

subdivisión  $0 = s_0, s_1, \dots, s_n = 1$  de  $[0, 1]$  de tal forma que cada  $\alpha([s_i, s_{i+1}]) \subset U_j$  para algún  $j \in J$ . Definamos ahora el levantamiento  $\tilde{\alpha}$ .

Sea  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ . Entonces, suponiendo que  $p(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$  para toda  $s \in [0, s_i]$ , definamos  $\tilde{\alpha}$  en  $[s_i, s_{i+1}]$  de la siguiente manera: Sea  $\alpha([s_i, s_{i+1}]) \subset U_j$  para algún  $j \in J$  y  $\{V_k\}_{k \in K}$  la partición de  $p^{-1}(U_j)$  en abiertos ajenos homeomorfos a  $U_j$ , entonces  $\tilde{\alpha}(s_i)$  pertenece a alguno de los  $V_k$ ; supongamos que es  $V_0$ . De esta manera podemos definir  $\tilde{\alpha}(s)$  para  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  como

$$\tilde{\alpha}(s) = p^{-1}|_{V_0}(\alpha(s)),$$

la cual es continua dado que  $p|_{V_0}$  es un homeomorfismo en  $U_j$ . Observemos que para todo  $s \in [s_i, s_{i+1}]$

$$p|_{V_0}(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s).$$

De esta manera, por el lema de pegado, se puede definir a  $\tilde{\alpha}$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Por lo tanto  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ .

Ahora veamos que  $\tilde{\alpha}$  es único. Sea  $\tilde{\tilde{\alpha}}$  otro levantamiento en  $\tilde{X}$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\tilde{\alpha}}(0) = \tilde{x}_0$ . Entonces, por la proposición 2.2,  $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\tilde{\alpha}}(s)$  para todo  $s \in [0, 1]$ .  $\square$

**Proposición 2.4.** *Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Además, sea  $F : I \times I \rightarrow X$  una función continua con  $F(0, 0) = x_0$ , entonces existe un único levantamiento de  $F$  a una función continua  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ . Si  $F$  es una homotopía de trayectorias, entonces  $\tilde{F}$  es una homotopía de trayectorias.*

*Demostración.* Sea  $\{U_l\}_{l \in L}$  una cubierta de  $X$  donde cada  $U_l$  esta totalmente cubierto por  $p$ . Al igual que en la proposición 2.3, usando el teorema de la cubierta de Lebesgue, podemos encontrar una subdivisión  $0 = t_0, t_1, \dots, t_n = 1$  de  $[0, 1]$  de modo que cada  $F([t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$  este contenido en un  $U_l$  para algún  $l \in L$ . Sea  $U_0$  el elemento de la cubierta que contiene a  $F([0, t_1] \times [0, t_1])$  y  $V_0$  el abierto de la partición  $\{V_k\}_{k \in K}$  de  $p^{-1}(U_0)$  que contiene a  $\tilde{x}_0$ , entonces definimos a  $\tilde{F}$  sobre este cuadrado como

$$p^{-1}|_{V_0} \circ F.$$

Claramente,  $\tilde{F}$  definida en  $[0, t_1] \times [0, t_1]$  es continua por ser composición de funciones continuas y se cumple que  $p|_{V_0}(\tilde{F}(s, t)) = F(s, t)$  para todo  $s, t \in [0, t_1]$ . Repitamos el proceso anterior con  $[0, t_1] \times [t_1, t_2]$ . Sea  $U_1$  una vecindad abierta de  $F([0, t_1] \times [t_1, t_2])$  en la cubierta de  $X$  y  $V'_0$  un abierto de la partición de  $p^{-1}(U_1)$  que contiene a  $\tilde{F}([0, t_1] \times \{t_1\})$ . Observemos que  $V'_0$  existe dado que  $p^{-1}|_{V_0}(F([0, t_1] \times \{t_1\}))$  esta contenido en  $p^{-1}(U_1)$  y  $p^{-1}|_{V_0}(F([0, t_1] \times \{t_1\}))$  es conexo. De este modo, restringiendo  $p^{-1}$  a  $V'_0$ , obtenemos una función continua sobre  $[0, t_1] \times [t_1, t_2]$  que coincide con la función anterior, pudiendo así extender la función  $\tilde{F}$  sobre  $[0, t_1] \times I$ .

Consideremos ahora el rectángulo  $[t_1, t_2] \times [t_0, t_1]$ , y extendamos  $\tilde{F}$  mediante una función continua en ese intervalo, la cual coincida con la parte de  $\tilde{F}$  ya definida en la arista  $\{t_1\} \times [t_0, t_1]$ . De igual manera, considerando el rectángulo  $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ , podemos extender  $\tilde{F}$  mediante una función continua en ese intervalo, que coincida con la ya definida sobre las aristas  $\{t_1\} \times [t_1, t_2] \cup [t_1, t_2] \times \{t_1\}$ . Esto se debe a que  $\{t_1\} \times [t_1, t_2] \cup [t_1, t_2] \times \{t_1\}$  es conexo y su imagen en  $\tilde{F}$  se queda contenida en el mismo

abierto de la partición del correspondiente  $p^{-1}(U_l)$ . Mediante este procedimiento tenemos a  $\tilde{F}$  definida sobre  $[t_0, t_2] \times I$  y repitiendo el argumento la podemos extender a  $I \times I$ . El que  $\tilde{F}$  definida sobre  $I \times I$  sea continua se da de manera inmediata por el lema del pegado. Por lo tanto  $p \circ \tilde{F} = F$ . Un argumento similar al de la prueba de la proposición 2.3 muestra que la función  $\tilde{F}$  es única.

Supongamos ahora que  $F$  es una homotopía de trayectorias, entonces  $F$  lleva al conjunto  $0 \times I$  a un solo punto  $x_0$  de  $X$ . Como  $\tilde{F}$  es un levantamiento de  $F$ ,  $\tilde{F}(0 \times I) \subset p^{-1}(x_0)$ , pero sabemos que  $p^{-1}(x_0)$  tiene la topología discreta como subespacio de  $\tilde{X}$ . Entonces, dado que  $0 \times I$  es conexo y  $\tilde{F}$  es continua,  $\tilde{F}$  manda  $0 \times I$  a un conjunto unipuntual. Nótese que dicho punto es  $\tilde{x}_0$ . De manera análoga se puede ver que  $\tilde{F}(1 \times I)$  debe ser un conjunto unipuntual. Por lo tanto  $\tilde{F}$  es una homotopía de trayectorias.  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Sean también  $\alpha$  y  $\beta$  dos trayectorias en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ , con  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  como sus respectivos levantamientos en  $\tilde{X}$  que comienzan en  $\tilde{x}_0$ . De esta manera, si  $\alpha$  es homotópica a  $\beta$ ,  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  son homotópicas y terminan en el mismo punto.*

*Demostración.* Sea  $F$  la homotopía de trayectorias entre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $F(0, 0) = x_0$ . Sea además  $\tilde{F}$  el levantamiento de  $F$  en  $\tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ . Entonces, por la proposición 2.4,  $\tilde{F}$  es una homotopía de trayectorias, por lo que  $\tilde{F}(0 \times I) = \{\tilde{x}_0\}$  y  $\tilde{F}(1 \times I) = \{\tilde{x}_1\}$ . Observemos que la restricción  $\tilde{F}|_{I \times 0}$  es una trayectoria en  $\tilde{X}$  que comienza en  $x_0$ , la cual es levantamiento de  $F|_{I \times 0}$ . Dado que  $F(I \times 0) = \alpha$ , entonces, por la unicidad de los levantamientos de trayectorias,  $\tilde{F}|_{I \times 0} = \tilde{\alpha}$ . De manera análoga podemos observar que  $\tilde{F}|_{I \times 1} = \tilde{\beta}$ . Por lo tanto  $\tilde{\alpha}$  es homotópica a  $\tilde{\beta}$  y terminan en  $\tilde{x}_1$ .  $\square$

Como una consecuencia de los resultados anteriores en los levantamientos de trayectorias, se tiene el siguiente lema.

**Lema 2.4.** *Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$ , entonces los conjuntos  $p^{-1}(x)$  para toda  $x \in X$  tienen la misma cardinalidad.*

*Demostración.* Sean  $x_0$  y  $x_1$  cualesquiera dos puntos de  $X$ , tomemos una trayectoria  $\alpha$  de  $x_0$  a  $x_1$ . De esta manera, utilizando la trayectoria  $\alpha$ , podemos definir una función  $f : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$  de la siguiente manera. Dado cualquier punto  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ , tomemos el levantamiento de  $\alpha$  a una trayectoria  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{X}$  con punto inicial  $y_0$ . Sea  $y_1$  el punto final de  $\tilde{\alpha}$ , entonces  $f(y_0) = y_1$  es la función deseada. Usando la trayectoria inversa  $\bar{\alpha}$  dada por  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$ , podemos definir de manera análoga una función  $g : p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_0)$  dada por  $g(y_1) = y_0$ . Entonces, por la unicidad de levantamientos de trayectorias,  $f$  es la inversa de  $g$  y viceversa. Así  $f$  es biyectiva. Por lo tanto  $p^{-1}(x)$  para toda  $x \in X$  tienen la misma cardinalidad.  $\square$

La cardinalidad de los conjuntos  $p^{-1}(x)$ , para toda  $x \in X$ , se le conoce (como el número de hojas del espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$ ). Nótese que el ejemplo 2.5 representa un espacio cubriente de  $n$ -hojas, mientras que el ejemplo 2.7 representa un espacio cubriente

de una infinidad de hojas.

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente con  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ , veamos que el homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un monomorfismo. Supongamos que  $\alpha$  es cualquier lazo en  $\tilde{X}$  basado en  $\tilde{x}_0$  tal que  $p_*([\alpha])$  es el elemento neutro en  $\pi_1(X, x_0)$ . Sea  $F$  una homotopía de trayectorias entre  $p \circ \alpha$  y la trayectoria constante  $c_{x_0}$ . Si  $\tilde{F}$  es el levantamiento de  $F$  en  $\tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ , entonces  $\tilde{F}$  es una homotopía de trayectorias entre  $\alpha$  y la trayectoria constante  $c_{\tilde{x}_0}$ . Por lo tanto el homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un monomorfismo.

**Definición 2.10.** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Dado un elemento  $[\alpha]$  de  $\pi_1(X, x_0)$ , sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  a una trayectoria en  $\tilde{X}$  que comience en  $\tilde{x}_0$ . Entonces definimos la función

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

dada por  $\phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$ .

Por la proposición 2.5,  $\phi$  está bien definida y depende de la elección del punto  $\tilde{x}_0$ .

**Proposición 2.6.** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función cubriente,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Si  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias, la función de la definición 2.10

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

es sobreyectiva. Si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, entonces  $\phi$  es biyectiva.

*Demostración.* Si  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias entonces, dado un  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ , existe una trayectoria  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{X}$  de  $\tilde{x}_0$  a  $\tilde{x}_1$ . De esta manera  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$  es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$  y por definición  $\phi([\alpha]) = \tilde{x}_1$ . Por tanto  $\phi$  es sobreyectiva.

Ahora supongamos que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo. Dado que todo espacio simplemente conexo es conexo por trayectorias, basta probar que  $\phi$  es inyectiva. Sean  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  dos elementos de  $\pi_1(X, x_0)$  tales que  $\phi([\alpha]) = \phi([\beta])$ . Sean  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  los levantamientos de  $\alpha$  y  $\beta$  a trayectorias en  $\tilde{X}$  que comienzan en  $\tilde{x}_0$  y para los cuales  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ . Dado que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, existe una homotopía de trayectorias  $\tilde{F}$  en  $\tilde{X}$  entre  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ . Entonces  $p \circ \tilde{F}$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ , siendo así  $[\alpha] = [\beta]$ . Por lo tanto  $\phi$  es biyectiva.  $\square$

Estamos ahora en condiciones de calcular el grupo fundamental de  $S^1$ .

**Proposición 2.7.** El grupo fundamental de  $S^1$  es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

*Demostración.* Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la función del ejemplo 2.7 dada por  $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$  y  $p(\tilde{x}_0) = x_0 = (1, 0)$ . Entonces  $p^{-1}(x_0)$  es el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los enteros. Así, dado que  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es biyectiva. De esta forma, bastara probar que  $\phi$  es un homomorfismo. Dados  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  en  $\pi_1(S^1, x_0)$ , sean  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  los levantamientos de  $\alpha$  y  $\beta$  en  $\mathbb{R}$  que comienzan en 0. Entonces  $\tilde{\alpha}(1) = n$  y  $\tilde{\beta}(1) = m$  para algunos  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $\phi([\alpha]) = n$  y  $\phi([\beta]) = m$ .

Sea  $\tilde{\tilde{\beta}}$  la trayectoria dada por

$$\tilde{\tilde{\beta}}(s) = n + \tilde{\beta}(s)$$

en  $\mathbb{R}$ . Como para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p(n+x) = p(x)$ ,  $\tilde{\tilde{\beta}}$  es un levantamiento de  $\beta$  que comienza en  $n$ . Entonces el producto  $\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$  esta bien definido y es un levantamiento de  $\alpha * \beta$  que comienza en 0. Nótese que el punto final de  $\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$  es  $\tilde{\tilde{\beta}}(1) = n + \tilde{\beta}(1) = n + m$ . Entonces

$$\phi([\alpha] * [\beta]) = n + m = \phi([\alpha]) + \phi([\beta]).$$

Por lo tanto  $\pi_1(S^1, b_0)$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)^1$ . □

Nótese que a cada clase de homotopía en  $\pi_1(S^1, x_0)$ , le asignamos el número de vueltas que da a la circunferencia teniendo en cuenta el sentido del giro. Este resultado nos será de gran utilidad para la prueba que daremos más adelante del teorema de Borsuk-Ulam.

### 2.3. El grupo fundamental de $S^n$ .

Una vez visto el grupo fundamental de  $S^1$ , es importante saber el grupo fundamental de  $n$ -esferas de mayor dimensión. Para esto, se hara ver que toda  $n$ -esfera es simplemente conexa cuando  $n \geq 2$ . Antes de eso probemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.8.** *Supongamos que  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos de  $X$ . Supongamos también que  $U \cap V$  es conexo por trayectorias y que  $x_0 \in U \cap V$ . Sean  $i$  y  $j$  las funciones inclusión de  $U$  y  $V$  respectivamente en  $X$ . Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{y} \quad j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Demostración.* El teorema establece que dado un lazo  $\alpha$  en  $X$  basado en  $x_0$ , este es homotópico por trayectorias a un producto de la forma  $(\beta_1 * (\beta_2 * (\dots(\beta_{n-1} * \beta_n) \dots)))$ , donde cada  $\beta_i$  es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$  totalmente contenido en  $U$  o en  $V$ .

Primero elijamos una subdivisión  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  del intervalo  $[0, 1]$  tal que  $\alpha(a_i) \in U \cap V$  y  $\alpha([a_{i-1}, a_i])$  este totalmente contenido en  $U$  o en  $V$  para toda  $0 \leq i \leq n$ . En efecto, utilizando el teorema de la cubierta de Lebesgue, sea  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$  una subdivisión de  $[0, 1]$  tal que para cada  $i$ ,  $\alpha([b_{i-1}, b_i])$  este totalmente contenido en  $U$  o en  $V$ . Si  $\alpha(b_i) \in U \cap V$ , para cada  $i$ , habremos terminado. Si no es así, sea  $i$  un índice tal que  $\alpha(b_i) \notin U \cap V$ , entonces  $\alpha([b_{i-1}, b_i])$  y  $\alpha([b_i, b_{i+1}])$  deben estar en  $U$  o en  $V$

<sup>1</sup> $(\mathbb{Z}, +)$  representa el grupo de los números enteros con la operación suma

dependiendo donde se encuentre  $\alpha(b_i)$ . En cualquier caso, podemos suprimir  $b_i$ , obteniendo una nueva subdivisión  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$  que siga cumpliendo que  $\alpha([c_{i-1}, c_i])$  este totalmente contenido en  $U$  o en  $V$  para toda  $0 \leq i \leq n$ . Un número finito de repeticiones de este proceso nos permite obtener la subdivisión deseada.

Sea  $\alpha$  un lazo en  $X$  basado en  $x_0$  y  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  la subdivisión de  $[0, 1]$  construida previamente, definamos  $\alpha_i$  como la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[a_{i-1}, a_i]$  compuesta con  $\alpha$ . Entonces, como vimos anteriormente,

$$[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n].$$

Dado que  $U \cap V$  es conexo por trayectorias, para cada  $i$ , elijamos una trayectoria  $\gamma_i$  de  $x_0$  a  $\alpha(a_i)$ . Debido a que  $\alpha(a_0) = \alpha(a_n) = x_0$ , podemos suponer que  $\gamma_0$  y  $\gamma_n$  son la trayectoria constante en  $x_0$ .

Definimos ahora el lazo  $\beta_i$  en  $X$  basado en  $x_0$  como

$$\beta_i = (\gamma_{i-1} * \alpha_i) * \overline{\gamma_i}$$

para cada  $i \in [1, n]$ . Observemos que  $\beta_i$  esta totalmente contenido en  $U$  o en  $V$ . De tal forma que

$$\begin{aligned} [\beta_1] * [\beta_2] * \dots * [\beta_n] &= [(\gamma_0 * \alpha_1) * \overline{\gamma_1}] * [(\gamma_1 * \alpha_2) * \overline{\gamma_2}] * \dots * [(\gamma_{n-1} * \alpha_n) * \overline{\gamma_n}] \\ &= [(\gamma_0 * \alpha_1) * \overline{\gamma_1}] * [\gamma_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n * \overline{\gamma_n}] \\ &= [(\gamma_0 * \alpha_1) * \overline{\gamma_1} * (\gamma_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n * \overline{\gamma_n})] \\ &= [\gamma_0 * \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n * \overline{\gamma_n}] \\ &= [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n] \\ &= [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_n] \\ &= [\alpha] \end{aligned}$$

Por lo tanto  $i_*(\pi_1(U, x_0))$  y  $j_*(\pi_1(V, x_0))$  generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

□

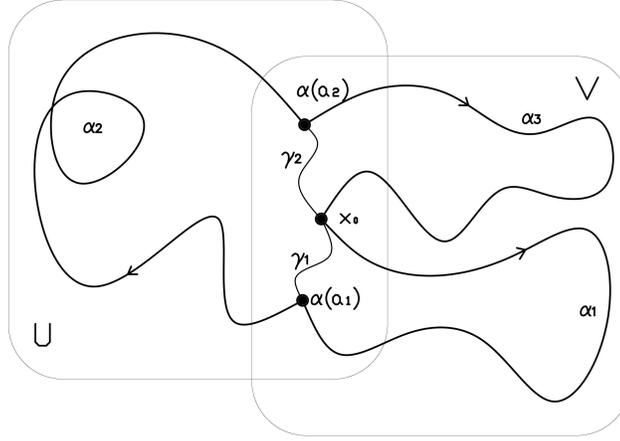


Figura 2.11: Ejemplo de la proposición 2.8.

En virtud de la proposición 2.8 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.** *Supongamos que  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos de  $X$ , y que  $U \cap V$  es conexo por trayectorias y no vacío. Si  $U$  y  $V$  son simplemente conexos entonces  $X$  es simplemente conexo.*

Dicho lo anterior, probemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.9.**  *$S^n$  es simplemente conexo para toda  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Sean  $p = (0, 0, 0, \dots, 1)$  y  $q = (0, 0, 0, \dots, -1)$  el polo norte y el polo sur de  $S^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Veamos que, para  $n \geq 1$ , la esfera agujerada  $S^n - \{p\}$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Definamos entonces  $f : (S^n - \{p\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

A la función  $f$  se le conoce como proyección estereográfica. Observemos que si tomamos la recta  $r_x$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por el polo norte  $p$  y el punto  $x$  de  $S^n - \{p\}$ , entonces  $r_x$  intersecta al  $n$ -plano  $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  en el punto  $f(x) \times 0$ . Por lo anterior es evidente que  $f$  es biyectiva. Se prueba que  $f$  es un homeomorfismo viendo que la función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (S^n - \{p\})$  dada por

$$g(\bar{x}') = g(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \left( \frac{2x'_1}{1 + \|\bar{x}'\|^2}, \dots, \frac{2x'_n}{1 + \|\bar{x}'\|^2}, \frac{\|\bar{x}'\|^2 - 1}{\|\bar{x}'\|^2 + 1} \right)$$

es la inversa de  $f$ . Observemos que la función reflexión que manda  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  a  $(x_1, x_2, \dots, x_n, -x_{n+1})$  define un homeomorfismo entre  $S^n - \{p\}$  y  $S^n - \{q\}$ , por lo que

$S^n - \{q\}$  también es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .

Probemos ahora que  $S^n$  es simplemente conexo para todo  $n \geq 2$ . En efecto, sean  $U$  y  $V$  los conjuntos abiertos  $S^n - \{p\}$  y  $S^n - \{q\}$  de  $S^n$  respectivamente. Nótese que, para  $n \geq 1$ , los abiertos  $U$  y  $V$  son simplemente conexos por ser homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Además, la intersección de  $U$  y  $V$  es igual a  $S^n - p - q$ , que es homeomorfo bajo la proyección estereográfica a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Por lo anterior,  $U \cap V$  es conexo por trayectorias para toda  $n \geq 2$ . Finalmente, aplicando el corolario 2.3 se obtiene lo deseado.  $\square$

De esta manera, dado que el grupo fundamental de todo espacio simplemente conexo es el grupo trivial,  $\pi_1(S^n) = \{0\}$  para toda  $n \geq 2$ . (Véase [11].)

## 2.4. El grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ .

Sea  $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$  la función de la definición 2.10, veamos que  $\phi$  induce una acción

$$\theta : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

de  $\pi_1(X, x_0)$  en  $p^{-1}(x_0)$  dada por  $\theta(\tilde{x}_0, [\alpha]) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$ , donde  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$  representa el punto final del levantamiento de  $\alpha$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$ . Recuerde que en la practica  $\theta(\tilde{x}_0, [\alpha])$  se escribe como  $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$ , verifiquemos que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = \tilde{x}_0 \cdot ([\alpha] * [\beta])$ .
2.  $\tilde{x}_0 \cdot [c_{x_0}] = \tilde{x}_0$ .

Probemos la primera condición. Sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$ . Entonces, dado que  $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$  y  $\beta$  es un lazo basado en  $x_0$ ,  $\beta$  tiene un levantamiento  $\tilde{\beta}$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{\alpha}(1)$ . Así,  $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$  es el levantamiento de  $\alpha * \beta$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$ . Por tanto  $\tilde{x}_0 \cdot ([\alpha] * [\beta]) = \tilde{x}_0 \cdot ([\alpha * \beta]) = (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)}(1)$ . Se prueba la igualdad de la condición 1 observando que  $(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) \cdot [\beta] = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)}(1)$ . Por otra parte, dado que el levantamiento de  $c_{x_0}$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$  es  $c_{\tilde{x}_0}$ , resulta evidente observar que el punto final de su levantamiento es  $\tilde{x}_0$ . Por lo tanto, la condición 2 también se cumple.

Por los argumentos anteriores,  $\pi_1(X, x_0)$  actúa por la derecha en  $p^{-1}(x_0)$ . Veamos ahora que el grupo  $\pi_1(X, x_0)$  opera transitivamente sobre el conjunto  $p^{-1}(x_0)$ . En efecto, sean  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ . Dado que  $\tilde{X}$  es conexo por trayectorias, existe una clase de homotopía  $[\tilde{\alpha}]$  en  $\tilde{X}$  con punto inicial  $\tilde{x}_0$  y punto final  $\tilde{x}_1$ . Sea  $[\alpha] = p_*([\tilde{\alpha}])$ , entonces  $[\alpha]$  es una clase de homotopía entre trayectorias cerradas en  $X$ , teniendo así que  $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_1$ .

Observemos que para cualquier  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , su subgrupo de isotropía es precisamente el subgrupo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  de  $\pi_1(X, x_0)$ . Por lo tanto, como un  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto sobre el que se actúa por la derecha,  $p^{-1}(x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ , y el número de hojas de  $(\tilde{X}, p)$  es igual al índice del subgrupo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  en  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Definición 2.11.** Sea  $(\tilde{X}_1, p_1)$  y  $(\tilde{X}_2, p_2)$  espacios cubrientes de  $X$ . Un homomorfismo de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  es una función continua  $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tal que  $p_2 \circ \varphi = p_1$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X}_2 \\ & \nearrow \varphi & \downarrow p_2 \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{p_1} & X \end{array}$$

Veamos que la composición de dos homomorfismos es de nuevo un homomorfismo. En efecto, sean  $\varphi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  y  $\varphi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_3$  dos homomorfismos tales que  $p_2 \circ \varphi_1 = p_1$  y  $p_3 \circ \varphi_2 = p_2$ , es decir,  $(p_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = p_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = p_1$ . Por lo tanto  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  es un homomorfismo de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_3, p_3)$ . Observemos además que, dado un espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$  de  $X$ , la función identidad  $i : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  es un homomorfismo.

Un homomorfismo  $\varphi$  de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  es un isomorfismo si existe un homomorfismo  $\psi$  de  $(\tilde{X}_2, p_2)$  en  $(\tilde{X}_1, p_1)$  tal que ambas composiciones  $\varphi \circ \psi$  y  $\psi \circ \varphi$  son la función identidad. Dos espacios cubrientes se dicen isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. Un automorfismo es un isomorfismo de un espacio cubriente en el mismo, el cual puede o no ser la función identidad. El conjunto de todos los automorfismos de un espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$  de  $X$  es un grupo bajo la composición de funciones y lo denotaremos como  $A(\tilde{X}, p)$ .

Ahora veamos algunas propiedades de los homomorfismos y automorfismos sobre espacios cubrientes.

**Lema 2.5.** Sean  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  homomorfismos de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$ . Si existe un punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$  tal que  $\varphi_0(\tilde{x}) = \varphi_1(\tilde{x})$ , entonces  $\varphi_0 = \varphi_1$ .

*Demostración.* Tenemos que  $p_2 \circ \varphi_0 = p_1$  y  $p_2 \circ \varphi_1 = p_1$ , es decir,  $p_2 \circ \varphi_0 = p_2 \circ \varphi_1$  para todo  $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$ . Entonces, por la proposición 2.2,  $\{\tilde{x} \in \tilde{X}_1 : \varphi_0(\tilde{x}) = \varphi_1(\tilde{x})\}$  es  $\emptyset$  o  $\tilde{X}_1$ . Por lo tanto, dado que existe un  $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$  tal que  $\varphi_0(\tilde{x}) = \varphi_1(\tilde{x})$ , resulta que  $\varphi_0 = \varphi_1$ .  $\square$

Se sigue del lema 2.5 que  $A(\tilde{X}, p)$  opera sin puntos fijos en  $\tilde{X}$ . Esto es, si  $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$  y  $\varphi$  no es la función identidad, entonces  $\varphi(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$  para todo  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .

En adelante, cada que hablemos de funciones entre espacios basados, daremos por hecho que la función es continua y que mapea el punto base del dominio al punto base del contradominio. Nos resultará de gran utilidad conocer acerca de la existencia y unicidad de levantamientos de funciones en general, no solo de levantamientos de homotopías. Para esto tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.10.** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$ ,  $Y$  un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias,  $y_0 \in Y$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ . Entonces, dada una función  $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ , existe un levantamiento  $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  si y sólo si  $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

*Demostración.* Supongamos que existe dicho levantamiento. Entonces, dado que toda función entre espacios basados induce un homomorfismo entre sus grupos fundamentales, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{\varphi}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Veamos que la existencia del homomorfismo  $\tilde{\varphi}_*$  es equivalente a decir que la imagen de  $\varphi_*$  está contenida en la imagen de  $p_*$ . En efecto, como  $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{\varphi}_*(\pi_1(Y, y_0)))$  y  $\tilde{\varphi}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ , por ser  $p_*$  un monomorfismo se tiene que  $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

Para el recíproco, definamos la función  $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  de la siguiente manera: Dado un punto  $y$  en  $Y$ , elijamos una trayectoria  $\alpha$  de  $y_0$  a  $y$ . Entonces  $\varphi(\alpha)$  es una trayectoria en  $X$  que comienza en  $x_0$ . Así, aplicando la proposición 2.3, existe un único levantamiento  $\gamma : I \rightarrow \tilde{X}$  de  $\varphi(\alpha)$  que comienza en  $\tilde{x}_0$  y cumple que  $p \circ \gamma = \varphi(\alpha)$ . Por tanto definimos  $\tilde{\varphi}$  como

$$\tilde{\varphi}(y) = \gamma(1).$$

Veamos que  $\tilde{\varphi}$  está bien definida independientemente de la elección de la trayectoria  $\alpha$ . En efecto, por la proposición 2.5, podemos reemplazar  $\alpha$  por una trayectoria homotópica sin alterar el resultado, es decir,  $\tilde{\varphi}(y)$  solo depende de la clase de homotopía de la trayectoria  $\alpha$ . Siendo así, supongamos ahora que  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  son dos clases de homotopía diferentes en  $Y$  que van de  $y_0$  a  $y$ . Observemos que  $[\alpha] * [\beta]$  es la clase de homotopía de un lazo basado en  $y_0$ . Entonces, como  $[\alpha] * [\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$  y  $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ,  $\varphi_*([\alpha] * [\beta]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Nótese que  $\varphi_*([\alpha] * [\beta]) = [\varphi \circ \alpha] * [\varphi \circ \beta] = \varphi_*([\alpha]) * \varphi_*([\beta])$ . Por lo tanto, existe una clase de homotopía en  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  que se proyecta sobre  $\varphi_*([\alpha]) * \varphi_*([\beta])$ , o dicho de otra manera, si levantamos  $\varphi_*([\alpha]) * \varphi_*([\beta])$  a una clase de homotopía en  $\tilde{X}$  que comience en  $\tilde{x}_0$ , el resultado es una clase de homotopía en  $\tilde{X}$  de lazos basados en  $\tilde{x}_0$ . Así, por la proposición 2.5, los levantamientos de  $\varphi_*([\alpha])$  y  $\varphi_*([\beta])$  en  $\tilde{X}$  que comienzan en  $\tilde{x}_0$  terminan en el mismo punto. Con esto verificamos que  $\tilde{\varphi}$  está bien definida. Es fácil ver que, por ser  $Y$  conexo por trayectorias,  $p(\tilde{\varphi}(y)) = \varphi(y)$  para todo  $y \in Y$ .

Ahora veamos que la función  $\tilde{\varphi}$  que acabamos de definir es continua. Sea  $y \in Y$  y  $U$  una vecindad de  $\tilde{\varphi}(y)$ , veamos que existe una vecindad  $V$  de  $y$  tal que  $\tilde{\varphi}(V) \subset U$ . En efecto, elijamos una vecindad  $U'$  de  $p(\tilde{\varphi}(y)) = \varphi(y)$  totalmente cubierta por  $p$  tal que  $U' \subset p(U)$ . Observemos que  $U'$  existe debido a que  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio cubriente de  $X$  y todo subconjunto de una vecindad totalmente cubierta conserva las mismas características. Sea  $W$  el abierto de la partición de  $p^{-1}(U')$  que contiene a  $\tilde{\varphi}(y)$ , tomemos una vecindad  $U''$  de  $\varphi(y)$  totalmente cubierta por  $p$  tal que  $U'' \subset p(U \cap W)$ . Nótese que  $U''$  existe por un argumento similar al anterior. Tomemos ahora a  $W'$  como el abierto de la partición de  $p^{-1}(U'')$  que contiene a  $\tilde{\varphi}(y)$ . Es claro que  $W' \subset U$ , pues la restricción de  $p$  en  $W'$

es un homeomorfismo de  $W'$  en  $U''$  y  $U'' \subset p(U \cap W)$ . Se sigue que, por ser  $\varphi$  continua, podemos tomar un vecindad  $V$  de  $y$  tal que  $\varphi(V) \subset U''$ . Veamos que esta vecindad es la que estamos buscando. Por ser  $Y$  localmente conexo por trayectorias, podemos escoger a  $V$  como una vecindad conexa por trayectorias de  $y$ . Definamos entonces una trayectoria  $\beta$  de  $y$  a  $y'$  para toda  $y' \in V$ . Así,  $\varphi(\beta)$  es una trayectoria en  $X$  que comienza en  $\varphi(y)$ , la cual tiene un único levantamiento  $\delta$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{\varphi}(y)$ . Nótese que, por ser  $\delta$  conexo y  $\tilde{\varphi}(y) \in W'$ ,  $\delta \subset W'$ . De esta manera,  $\tilde{\varphi}(V) \subset W' \subset U$ . Por lo tanto  $\tilde{\varphi}$  es continua y se cumple que  $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ .  $\square$

Veamos ahora un caso particular de la proposición 2.10.

**Lema 2.6.** Sean  $(\tilde{X}_1, p_1)$  y  $(\tilde{X}_2, p_2)$  espacios cubrientes de  $X$ . Sean además  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  y  $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$  puntos tales que  $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ . Entonces existe un homomorfismo  $\varphi$  de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  si y sólo si  $p_1(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_2(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ .

*Demostración.* Supongamos que existe un homomorfismo  $\varphi$  de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ , entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow p_2 \\ (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0) \end{array}$$

Como supusimos que los espacios que cubren son conexos por trayectorias y localmente conexos por trayectorias, por la proposición 2.10, tenemos que  $p_1(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_2(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ .

Supongamos ahora que  $p_1(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_2(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ , entonces, por la proposición 2.10, existe una función continua  $\varphi : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$  que hace conmutar el diagrama anterior, es decir,  $\varphi$  es un homomorfismo de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ .  $\square$

Una consecuencia del lema 2.6 es el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.** Sean  $(\tilde{X}_1, p_1)$  y  $(\tilde{X}_2, p_2)$  espacios cubrientes de  $X$ . Sean además  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  y  $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$  puntos tales que  $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ . Entonces existe un isomorfismo  $\varphi$  de  $(\tilde{X}_1, p_1)$  en  $(\tilde{X}_2, p_2)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  si y sólo si  $p_1(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_2(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ .

Más aún, dado que todo automorfismo es un isomorfismo de un espacio cubriente en si mismo, al aplicar el resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.5.** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$  y  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ , donde  $x_0 \in X$ . Entonces existe un  $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  si y sólo si  $p_1(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_2(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ .

A continuación se mostrará un resultado importante que establece una conexión entre el grupo de automorfismos de un espacio cubriente y la acción de  $\pi_1(X, x_0)$  en  $p^{-1}(x_0)$ .

**Proposición 2.11.** *Para cualquier automorfismo  $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ , cualquier  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , y cualquier  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ ,*

$$\varphi(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot [\alpha];$$

*es decir, cada automorfismo en  $A(\tilde{X}, p)$  induce un automorfismo del conjunto  $p^{-1}(x_0)$  considerado como un  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto sobre el que se actúa por la derecha.*

*Demostración.* Sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  en  $\tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$  tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ , entonces  $\tilde{x}_0 \cdot \alpha$  es el punto final de  $\tilde{\alpha}$ . Ahora consideremos la trayectoria  $\varphi(\tilde{\alpha})$  en  $\tilde{X}$  cuyos puntos extremos son  $\varphi(\tilde{x}_0)$  y  $\varphi(\tilde{x}_0 \cdot \alpha)$ . Observemos que

$$p(\varphi(\tilde{\alpha})) = (p \circ \varphi)(\tilde{\alpha}) = p(\tilde{\alpha}) = \alpha;$$

es decir,  $\varphi(\tilde{\alpha})$  es un levantamiento de  $\alpha$  que comienza en  $\varphi(\tilde{x}_0)$  y termina en  $\varphi(\tilde{x}_0) \cdot [\alpha]$ . Por lo tanto,  $\varphi(\tilde{x}_0 \cdot \alpha) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot [\alpha]$ .  $\square$

Observemos que la proposición anterior se cumple para cualquiera  $x_0$  en  $X$ . Ahora podemos determinar completamente la estructura del grupo de automorfismos  $A(\tilde{X}, p)$ .

**Proposición 2.12.** *Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$ . Entonces, el grupo de automorfismos,  $A(\tilde{X}, p)$ , es isomorfo al grupo de automorfismos del conjunto  $p^{-1}(x_0)$ , con  $x_0 \in X$ , considerado como un  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto sobre el que se actúa por la derecha.*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  un automorfismo en  $A(\tilde{X}, p)$ , entonces, en vista de la proposición 2.11, la restricción  $\varphi|_{p^{-1}(x_0)}$  es un automorfismo de  $p^{-1}(x_0)$ . Más aún, dado que  $A(\tilde{X}, p)$  opera sin puntos fijos, y por el lema 2.5, cada automorfismo  $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$  esta completamente determinado por su restricción  $\varphi|_{p^{-1}(x_0)}$ . Sean  $\varphi_1, \varphi_2 \in A(\tilde{X}, p)$ , observemos que  $(\varphi_1 \circ \varphi_2)|_{p^{-1}(x_0)} = \varphi_1|_{p^{-1}(x_0)} \circ \varphi_2|_{p^{-1}(x_0)}$ . Por lo tanto, la función  $\varphi \rightarrow \varphi|_{p^{-1}(x_0)}$  es un monomorfismo de  $A(\tilde{X}, p)$  sobre el grupo de automorfismos de  $p^{-1}(x_0)$ .

Luego, por el lema 1.4 del capítulo 1, dado que estamos tomando el conjunto entero de automorfismos de  $p^{-1}(x_0)$ , dados cualesquiera  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  en  $p^{-1}(x_0)$ , existe un automorfismo  $\varphi$  de  $p^{-1}(x_0)$  tal que  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ . Nótese que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ , ya que  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  el mismo subgrupo de isotropía. Así, por el corolario 2.5, existe un  $\gamma \in A(\tilde{X}, p)$  tal que  $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ . De esta manera  $\gamma|_{p^{-1}(x_0)}$  y  $\varphi$  son dos automorfismos del  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto homogéneo  $p^{-1}(x_0)$  tales que  $\gamma|_{p^{-1}(x_0)}(\tilde{x}_1) = \varphi(\tilde{x}_1)$ , es decir,  $\gamma|_{p^{-1}(x_0)} = \varphi$ . Esto nos dice que la función  $\varphi \rightarrow \varphi|_{p^{-1}(x_0)}$  es un epimorfismo y, por lo tanto,  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo al grupo de automorfismos del conjunto  $p^{-1}(x_0)$  considerado como un  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto sobre el que se actúa por la derecha.  $\square$

Nótese que el isomorfismo entre  $A(\tilde{X}, p)$  y el grupo de automorfismos de  $p^{-1}(x_0)$  no depende de la elección del punto  $x_0$  en  $X$ . La siguiente proposición es resultado de aplicar la proposición 1.5 del capítulo 1 a la proposición 2.12.

**Proposición 2.13.** *Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente de  $X$ . Entonces, para cualquier  $x_0 \in X$  y cualquier  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , el grupo de automorfismos  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo al grupo cociente  $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))]/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ , donde  $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))]$  es el normalizador del subgrupo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  en  $\pi_1(X, x_0)$ .*

*Demostración.* Por la proposición 2.12 tenemos que  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo al grupo de automorfismos del conjunto  $p^{-1}(x_0)$ , considerado como un  $\pi_1(X, x_0)$ -conjunto sobre el que se actúa por la derecha. Además, por la proposición 1.5,  $p^{-1}(x_0)$  es isomorfo a  $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))]/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Por lo tanto  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo a  $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))]/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .  $\square$

Una clase importante de espacios cubrientes son aquellos para los cuales  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X, x_0)$ , sin importar la elección del punto  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . A los espacios cubrientes que cumplen esta condición se les conoce como espacios cubrientes regulares. Es claro que si  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X, x_0)$ , entonces  $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))] = \pi_1(X, x_0)$ . De esta manera, al aplicar la proposición 2.13 a un espacio cubriente regular, se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.6.** *Si  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio cubriente regular de  $X$ , entonces  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo al grupo cociente  $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  para cualquier  $x_0 \in X$  y cualquier  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ .*

Decimos que un espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$  es universal si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo. Dicho lo anterior se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.14.** *Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio cubriente universal de  $X$ . Entonces,  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_0)$ , y el orden del grupo  $\pi_1(X, x_0)$  es igual al número de hojas del espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$ .*

*Demostración.* Debido a que  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio cubriente universal,  $\tilde{X}$  es simplemente conexo y por tanto  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{0\}$ . Además, dado que  $p_*$  es un monomorfismo,  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  es el elemento neutro en  $\pi_1(X, x_0)$ . Así  $(\tilde{X}, p)$  es regular. Por lo tanto  $A(\tilde{X}, p)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_1(X, x_0)$ .

Por último, dado que  $|p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))| = 1$ , el índice del subgrupo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  en  $\pi_1(X, x_0)$  es igual al orden del grupo  $\pi_1(X, x_0)$ . De esta manera, se tiene que el número de hojas del espacio cubriente  $(\tilde{X}, p)$  es igual al orden del grupo  $\pi_1(X, x_0)$ .  $\square$

Veamos ahora el resultado principal de esta sección.

**Proposición 2.15.** *Si  $n \geq 2$  entonces  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ .*

*Demostración.* Recordemos que, por la proposición 2.9,  $S^n$  es simplemente conexo para toda  $n \geq 2$ . Así, considerando la proyección  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , tenemos lo siguiente. Dado que cada elemento de  $\mathbb{R}P^n$  está compuesto por un par de puntos antipodales, solo hay dos posibles automorfismos en  $A(S^n, p)$ , la aplicación identidad y la antipodal. Entonces, por la proposición 2.14, el orden de  $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$  es 2 y por tanto  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

## 2.5. El teorema de Borsuk-Ulam.

**Definición 2.12.** Si  $x$  es un punto de  $S^n$ , entonces su antípoda es el punto  $-x$ . Además, para cualquier par de enteros positivos  $n$  y  $m$ , decimos que la función  $f : S^n \rightarrow S^m$  preserva antípodas o preserva puntos antipodales si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in S^n$ .

A continuación abordaremos el teorema principal de este capítulo, el teorema de Borsuk-Ulam. Dicho teorema dice que no existe una función continua  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ , con  $n > 0$ , que preserve puntos antipodales. La prueba de este teorema no se mostrará en este trabajo, sin embargo esta se puede ver en [18]. La prueba que veremos en este capítulo es un caso menos general y esta basada en la dada en [18].

Observación: Veamos que no existe una función continua  $f : S^1 \rightarrow S^0$  que preserve puntos antipodales. En efecto, supongamos que dicha función existe. Entonces, dado que  $S^1$  es conexo por trayectorias y  $f$  es continua,  $f(S^1)$  debería ser conexo por trayectorias, lo cual es una contradicción pues  $S^0$  es un par de puntos antipodales.

Ahora veamos que esto se cumple para un caso más general.

**Teorema 2.2** (Teorema de Borsuk-Ulam). <sup>2</sup> Para  $n > 1$  no existe una función continua  $f : S^n \rightarrow S^1$  que preserve puntos antipodales.

*Demostración.* Supongamos que existe una función continua  $f : S^n \rightarrow S^1$  que preserve puntos antipodales. Así, considerando a  $\mathbb{R}P^n$  y  $\mathbb{R}P$  como los espacios cocientes de  $S^n$  y  $S^1$  respectivamente, denotamos a  $p_n : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  y  $p_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P$  como las funciones que mandan cada elemento del dominio a su respectiva clase de equivalencia. Observemos que  $p_n$  y  $p_1$  son continuas pues  $\mathbb{R}P^n$  y  $\mathbb{R}P$  tienen la topología cociente.

Veamos ahora que  $f$  induce una función continua  $g : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P$  debido a que preserva puntos antipodales. En efecto, dado que la imagen inversa de  $p_n(x)$  es el conjunto  $\{x, -x\}$  para todo  $x \in S^n$  y  $f$  preserva puntos antipodales,  $p_1(f(-x)) = p_1(-f(x)) = p_1(f(x))$ , esto es,  $p_1 \circ f$  es constante sobre la imagen inversa de  $p_n(x)$  para todo  $x \in S^n$ . Así, debido a que  $p_n$  es una identificación y  $p_1 \circ f$  es continua, por el teorema de transgresión,  $g = (p_1 \circ f) \circ p_n^{-1}$  es continua y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p_n \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}P \end{array}$$

La función  $g$  induce un homomorfismo  $g_* : \pi_1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P)$ . Entonces, dado que  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong (\mathbb{Z}_2, *)$  y  $\pi_1(\mathbb{R}P) \cong \pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$ , veamos que  $g_*$  debe ser trivial, es decir, la imagen de todo  $\mathbb{Z}_2$  es cero. Sabemos que  $g_*(0) = 0$  y supongamos que  $g_*(1) = k$  para algún  $k > 0$ . De esta manera, por ser  $g_*$  homomorfismo,  $g_*(0) = g_*(1 * 1) = g_*(1) + g_*(1) = 2k$ ,

<sup>2</sup>Caso particular.

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $g_*$  es trivial.

Por otra parte, sea  $[\alpha]$  una clase de homotopía en  $S^n$  tal que sus puntos extremos son un par de puntos antipodales  $x$  y  $-x$ . Entonces, dado que  $f$  preserva antípodas, los puntos extremos de  $f_*([\alpha])$  son puntos antipodales en  $S^1$ . Observemos que  $p_{n*}([\alpha])$  y  $p_{1*}(f_*([\alpha]))$  son trayectorias cerradas en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  y  $\mathbb{R}\mathbb{P}$ , y por lo tanto representan elementos de los grupos fundamentales  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, [x])$  y  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}, [f(x)])$  respectivamente. Veamos que  $p_{n*}([\alpha]) \neq \{0\}$ . En efecto, considerando la acción de  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, [x])$  en el conjunto  $p_n^{-1}([x])$ ,  $\theta(x, p_{n*}([\alpha])) = \alpha_x(1) = -x$ . Así, dado que  $p_n$  induce un monomorfismo  $p_{n*} : \pi_1(S^n, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, [x])$ , y por la unicidad de los levantamientos de homotopías de trayectorias,  $p_{n*}([\alpha]) \neq \{0\}$ . De manera análoga podemos ver que  $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq \{0\}$ . De este modo, debido a que el diagrama anterior conmuta,

$$g_*(p_{n*}([\alpha])) = p_{1*}(f_*([\alpha])).$$

Así, por el argumento anterior,  $g_*$  manda a  $p_{n*}([\alpha])$  en  $p_{1*}(f_*([\alpha]))$ , contradiciendo el hecho de que  $g_*$  es trivial. Por lo tanto no existe una función continua  $f : S^n \rightarrow S^1$  que preserve puntos antipodales. □

Terminamos con algunas equivalencias del teorema de Borsuk-Ulam que nos serán de gran utilidad más adelante.

**Teorema 2.3.** *Para todo  $n > 1$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para toda función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .*
2. *Para toda función continua que preserve puntos antipodales  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = 0$ .*
3. *No existe una función continua  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  que preserve puntos antipodales.*
4. *No existe una función continua  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  antipodal en la frontera, esto es, satisface que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in S^{n-1} = \partial B^n$ .*

*Demostración.* Veamos que en efecto las afirmaciones anteriores son equivalentes.

(1  $\Rightarrow$  2). Sea  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua que preserve puntos antipodales y  $f \neq 0$ , es decir,  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x \in S^n$ . Entonces, dado que por hipótesis existe un  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ , tenemos que  $f(x) = -f(x)$ . Esto es,  $f(x) = 0$ . Por lo tanto existe un  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = 0$ .

(2  $\Rightarrow$  1). Sea  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua, definamos la función  $g(x) = f(x) - f(-x)$ , la cual preserva puntos antipodales pues

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x).$$

Dado que por hipótesis existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $g(x) = 0$ , entonces

$$f(x) - f(-x) = 0,$$

es decir,

$$f(x) = f(-x).$$

Por lo tanto, para toda función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

( $n > 1$ )

(2  $\Rightarrow$  3). Sea  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  una función continua que preserve puntos antipodales. Dado que  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , la función  $f$  puede verse como una función de  $S^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, por hipótesis, existe un  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = 0$ , pero  $S^{n-1}$  no contiene al cero. Por lo tanto no existe la función  $f$ .

(3  $\Rightarrow$  2). Supongamos que  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua que preserve puntos antipodales tal que para todo  $x \in S^n$ ,  $f(x) \neq 0$ . Definamos ahora la función  $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por

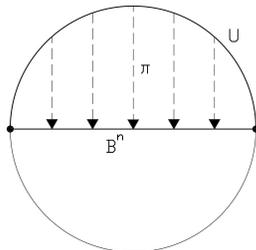
$$g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

Observemos que  $g$  es continua ya que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in S^n$ . Entonces, dado que  $f$  preserva puntos antipodales,

$$g(-x) = \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|} = \frac{-f(x)}{\|-f(x)\|} = -g(x).$$

Por lo tanto  $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$  es una función continua que preserve puntos antipodales, lo cual contradice la hipótesis.

(3  $\Rightarrow$  4). Supongamos que  $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$  es una función continua antipodal en la frontera,  $U$  el hemisferio cerrado superior o inferior de  $S^n$  y  $\pi : U \rightarrow B^n$  la proyección dada por  $\pi : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ .



Es fácil ver que  $\pi$  es un homeomorfismo de  $U$  en  $B^n$ . Definamos entonces una función  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por

$$f(x) = g(\pi(x)) \quad y \quad f(-x) = -g(\pi(x)) \quad \forall x \in U.$$

Denotaremos como  $-U$  al conjunto de todos los  $-x$  tal que  $x \in U$ . Nótese que  $-U$ , al igual que  $U$ , es cerrado y  $U \cap -U = \partial B^n$ . De esta manera, dado que  $\pi(-x) = -\pi(x)$  para toda  $x \in \partial U$  y  $g$  es antipodal en la frontera,  $f$  está bien definida en todo  $S^n$ . Además, se sigue que la función resultante  $f$  es continua pues ésta es continua en ambos hemisferios cerrados. Es claro que, por como definimos a  $f$ ,  $f(-x) = -f(x)$  para toda  $x \in S^n$ . Por lo tanto  $f$  es una función continua que preserva puntos antipodales, la cual es una contradicción.

(4  $\Rightarrow$  3). Supongamos que  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  es una función continua que preserva puntos antipodales y  $\pi : U \rightarrow B^n$  la proyección mencionada anteriormente. Dado que  $\pi$  es un homeomorfismo, podemos definir una función  $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por

$$g(x) = f(\pi^{-1}(x)),$$

la cual es continua por ser composición de funciones continuas. Observemos que un par de puntos de  $B^n$  son antipodales en la imagen de  $\pi^{-1}$  si ambos pertenecen a  $\partial B^n$ . Así, dado que  $f$  preserva antípodas,  $g$  es antipodal en la frontera, lo cual no es posible.

□



## Capítulo 3

# Triangulaciones antipodalmente simétricas.

### 3.1. El lema de Tucker.

Una configuración de puntos es una colección finita  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  de puntos en  $\mathbb{R}^n$ .

El cierre convexo de una configuración de puntos  $A$ , a lo que denotaremos por  $\text{conv}(A)$ , es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $A$ .

**Definición 3.1.** *Un simplejo de dimensión  $k$ , o un  $k$ -simplejo, es el cierre convexo de  $k + 1$  puntos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $k \leq n$ . Los  $k + 1$  puntos afinmente independientes son llamados los vértices del  $k$ -simplejo. Una cara de dimensión  $j$ , o  $j$ -cara de un  $k$ -simplejo  $S$ , es el cierre convexo de  $j + 1$  vértices de  $S$ , por lo que en particular es un  $j$ -simplejo por si mismo. Véase [2].*

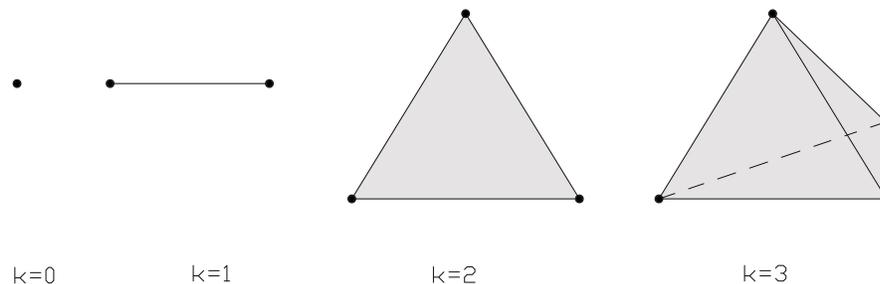


Figura 3.1: Simplejos de dimensión 0,1,2 y 3.

El interior relativo de un simplejo  $\alpha$  es la región obtenida al remover todas las caras

de dimensión menor a la de  $\alpha$ .

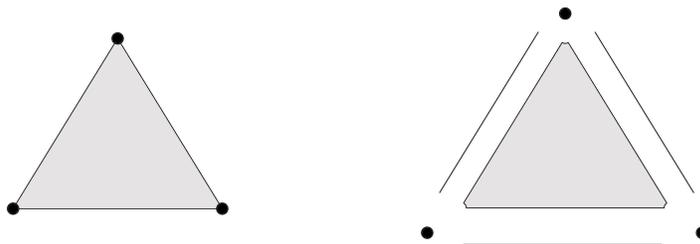


Figura 3.2: Interior relativo de un 2-simplejo.

**Definición 3.2.** Un politopo de cruce  $n$ -dimensional es el cierre convexo del conjunto de vectores de la base ortonormal estándar y sus negativos de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\text{conv}(e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n).$$

Es decir, es la bola unitaria en norma  $l_1$  dada por  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq 1\}$ . Denotaremos como  $\hat{B}^n$  al politopo de cruce  $n$ -dimensional.

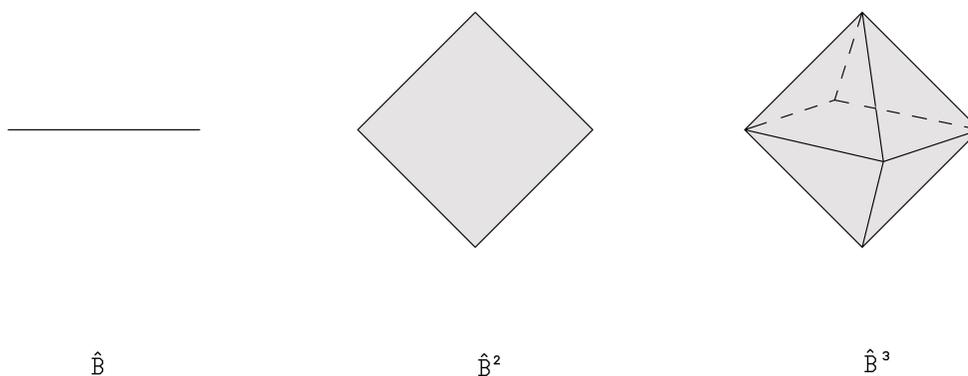


Figura 3.3: Politopos de cruce de dimensión 1,2 y 3.

**Definición 3.3.** Una familia no vacía  $\Delta$  de simplejos es un complejo simplicial si cumple las siguientes condiciones:

1. Cada cara de cualquier simplejo  $\alpha \in \Delta$  es también un simplejo en  $\Delta$ .

2. La intersección no vacía de cualesquiera dos simplejos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$  es una cara en común entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

El conjunto de vértices de  $\Delta$ , denotado por  $V(\Delta)$ , es la unión de los conjuntos de vértices de todos los simplejos en  $\Delta$ .

La unión de todos los simplejos de un complejo simplicial  $\Delta$  es el poliedro de  $\Delta$  y se denota como  $\|\Delta\|$ .

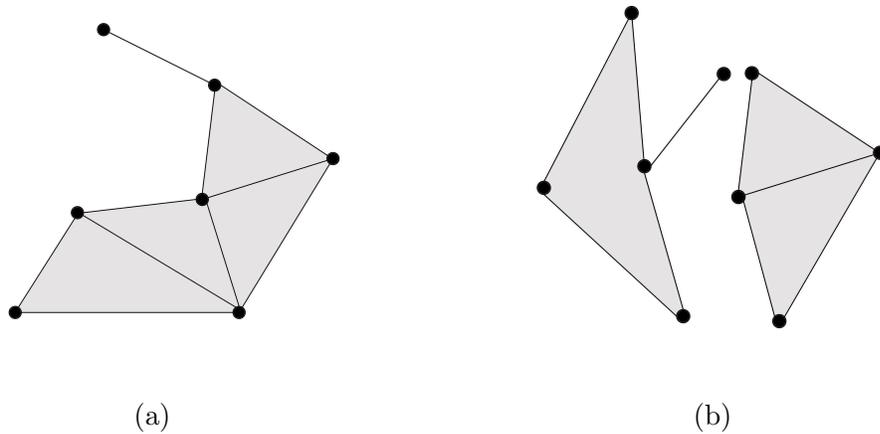


Figura 3.4: La figura (a) es un complejo simplicial, mientras que la figura (b) no lo es.

**Definición 3.4.** Sea  $X$  un espacio topológico, si existe un complejo simplicial  $\Delta$  tal que  $X \cong \|\Delta\|$ , entonces decimos que  $\Delta$  es una triangulación de  $X$ .



Figura 3.5: Complejos Simpliciales.

Sean  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  los complejos simpliciales de la figura 3.5, observemos que  $\Delta_2 \cong B^2$  pero  $\Delta_1 \not\cong B^2$ , pues  $\pi_1(\Delta_1) \neq \pi_1(B^2)$ . Por lo tanto  $\Delta_2$  es una triangulación de  $B^2$  como lo muestra la figura 3.6.

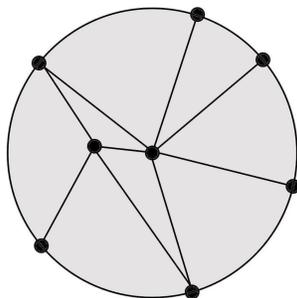


Figura 3.6: Triangulación de una 2-bola.

**Definición 3.5.** *Un complejo simplicial abstracto es una pareja  $(V, K)$ , donde  $V$  es un conjunto y  $K \subseteq 2^V$ <sup>1</sup>, tal que si  $F \in K$  y  $G \subseteq F$ , entonces  $G \in K$ . En particular  $\emptyset \in K$  siempre que  $K \neq \emptyset$ .*

Podemos asumir que  $V = \cup_{x \in K} x$ , por lo tanto es suficiente escribir  $K$  en lugar de  $(V, K)$ , donde  $V$  se entiende como  $\cup_{x \in K} x$ .

Cada complejo simplicial  $\Delta$  determina un complejo simplicial abstracto. Los elementos del complejo simplicial abstracto son la unión de los vértices de los simplejos de  $\Delta$ , es decir,  $V := V(\Delta)$  y  $K$  esta conformado por los conjuntos de vértices de los simplejos de  $\Delta$ . Por ejemplo, para el complejo simplicial de la figura 3.7

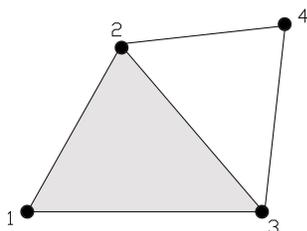


Figura 3.7

---

<sup>1</sup> $2^V$  denota el conjunto potencia de  $V$ , es decir, es el conjunto de todos los subconjuntos de  $V$ .

su correspondiente complejo simplicial abstracto es  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

**Definición 3.6.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales abstractos. Una función simplicial de  $K$  en  $L$  es una función  $f : V(K) \rightarrow V(L)$  la cual manda simplejos en simplejos; es decir, sea  $F \subset V(K)$ , entonces  $f(F) \in L$  siempre que  $F \in K$ .

**Ejemplo 3.1.** Sean

$$\begin{aligned} K &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}, \\ L &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\} \text{ y} \\ R &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\} \end{aligned}$$

complejos simpliciales abstractos. Entonces definamos las funciones  $f_1 : K \rightarrow L$  y  $f_2 : K \rightarrow R$  dadas por

$$f_1(x) = x \quad \forall x \in \bigcup K$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in \{a, d\}, \\ b & \text{si } x \in \{b, c\}. \end{cases}$$

Observemos que  $f_2$  es una función simplicial, mientras que  $f_1$  no, pues  $\{a, c\} \notin L$ .

**Definición 3.7.** Decimos que  $T$  es una triangulación antipodalmente simétrica de  $S^n$  si para todo simplejo  $\alpha \subset S^n$  de  $T$ , se tiene que  $-\alpha = \{-x \in S^n : x \in \alpha\}$  también es un simplejo de  $T$ .

**Definición 3.8.** Sea  $T$  una triangulación de la bola  $n$ -dimensional  $B^n$ , decimos que  $T$  es antipodalmente simétrica en la frontera si el conjunto de simplejos de  $T$  contenidos en  $\partial B^n = S^{n-1}$  es una triangulación antipodalmente simétrica de  $S^{n-1}$ .

Al simplejo  $-\alpha$  lo llamaremos simplejo antipodal y diremos que  $\alpha$  y  $-\alpha$  son antipodales.

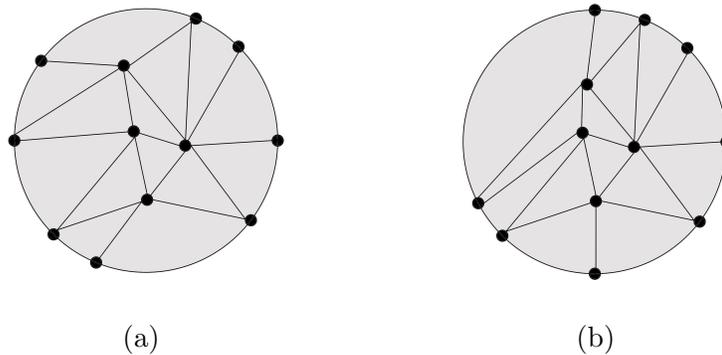


Figura 3.8: La figura (a) es una triangulación antipodalmente simétrica en la frontera, mientras que la figura (b) no lo es.

Por último, denotemos como  $\diamond^{n-1}$  al complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices  $V(\diamond^{n-1}) = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  y con simplejos  $F \subseteq V(\diamond^{n-1})$  siempre y cuando no haya un  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $F$  contenga tanto a  $i$  como a  $-i$ , es decir, se puede reconocer  $\diamond^{n-1}$  como el complejo simplicial abstracto de la frontera de un politopo de cruce  $(n - 1)$ -dimensional.

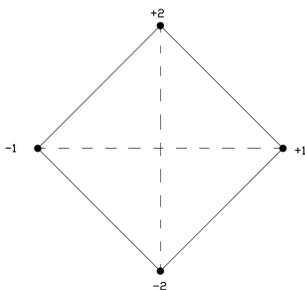


Figura 3.9: Ejemplo de  $\diamond^1$ .

La figura 3.9 muestra la frontera de un politopo de cruce de dimensión 2. Observemos que ningún simplejo de la figura 3.9 tiene los vértices  $\pm i$  para  $i = 1, 2$ .

Pasemos ahora a enunciar el teorema principal de este capítulo.

**Teorema 3.1** (Lema de Tucker). *Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  antipodalmente simétrica en la frontera y sea*

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

*una función de etiquetamiento de los vértices de  $T$  tal que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para todo vértice  $v \in \partial B^n$ , es decir,  $\lambda$  es una función antipodal en la frontera. Entonces existe un 1-simplejo en  $T$  que es complementario; esto es, las etiquetas de sus vértices son  $\pm i$  para algún  $i \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ .*

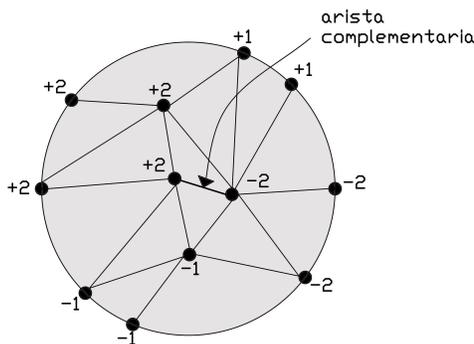


Figura 3.10: Ejemplo del teorema 3.1 para  $n = 2$ .

La figura 3.10 muestra la triangulación de una 2–bola, la cual tiene un 1–simplejo complementario con etiquetas  $\pm 2$ . El teorema 3.1 establece que para tal triangulación debe existir al menos un 1–simplejo complementario.

Al teorema 3.1 se le conoce como el Lema de Tucker. A continuación daremos una prueba constructiva de este importante resultado de las matemáticas discretas, mostrando así la existencia del 1–simplejo complementario. Esta prueba esta basada en [17].

*Demostración.* Antes de comenzar la prueba especificaremos las características de la triangulación que utilizaremos y definiremos una función que nos será de gran utilidad. Además, en la prueba reemplazaremos la bola euclidiana  $B^n$  por el politopo de cruce  $n$ –dimensional  $\hat{B}^n$ , lo cual es válido por el homeomorfismo que existe entre ambos.

Sea  $\diamond^n$  la triangulación de  $\hat{B}^n$  inducida por los hiperplanos coordenados, es decir, para todo  $\alpha \in \diamond^{n-1}$  tenemos que  $\alpha \cup \{0\} \in \diamond^n$ .

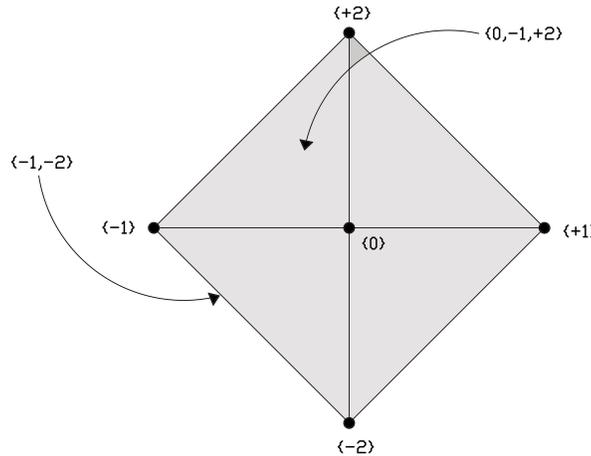


Figura 3.11: Complejo simplicial  $\diamond^2$ .

Probaremos el Lema de Tucker para triangulaciones  $T$  de  $\hat{B}^n$  antipodalmente simétricas en la frontera que refinan a  $\diamond^n$ , es decir, triangulaciones tales que para todo simplejo  $\alpha$  en  $T$  existe un simplejo  $\beta$  en  $\diamond^n$  que satisface  $\alpha \subseteq \beta$ . A dichas triangulaciones las llamaremos triangulaciones especiales de  $\hat{B}^n$ . Ahora supongamos que  $T$  es una triangulación especial de  $\hat{B}^n$  y  $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  una función de etiquetamiento antipodal en la frontera tal y como se muestra en la figura 3.12 .

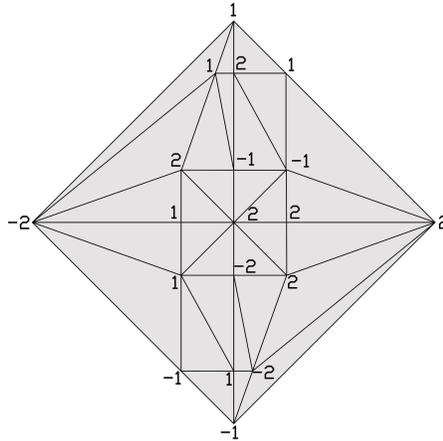


Figura 3.12: Triangulación especial de  $\hat{B}^2$  etiquetada por  $\lambda$ .

Definamos ahora la función  $sgn$ , que llamaremos función signo.

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $sgn(x) = (sgn(x_1), sgn(x_2), \dots, sgn(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ , al cual llamaremos vector de signos del punto  $x$ . Sea  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  un vector de signos de algún punto  $y \in \mathbb{R}^n$ , definimos a  $C(s)$  como el conjunto de todos los  $x \in \mathbb{R}^n$  para los cuales  $sgn(x_i) = s_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sea  $\alpha$  un simplejo de  $T$ , observemos que  $sgn(x)$  es el mismo para todo  $x$  en el interior relativo de  $\alpha$ , por lo tanto diremos que  $sgn(\alpha)$  es  $sgn(x)$ , donde  $x$  pertenece al interior relativo de  $\alpha$ .

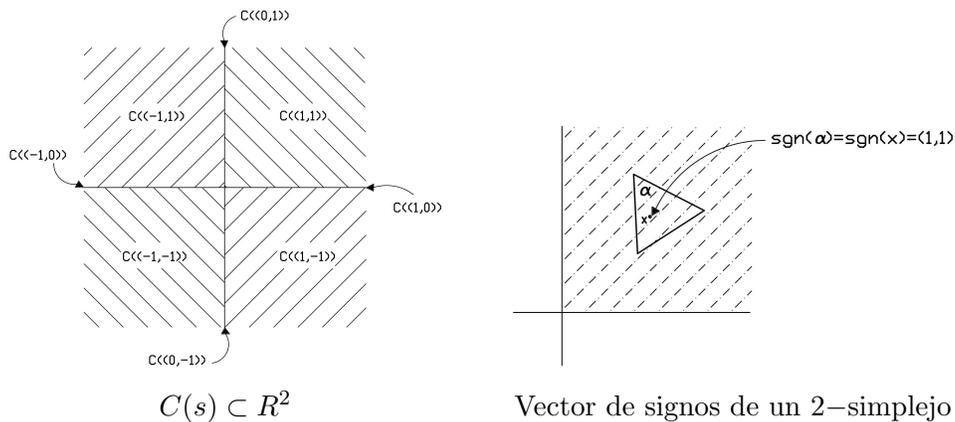


Figura 3.13

Sea  $s$  un vector de signos y  $\alpha$  un simplejo en  $T$ , decimos que  $\alpha$  está  $s$ -etiquetado si para todo  $s_i \neq 0$ ,  $s_i \cdot i$  es una etiqueta de alguno de los vértices de  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es  $sgn(\alpha)$ -etiquetado, decimos que  $\alpha$  es completamente etiquetado.

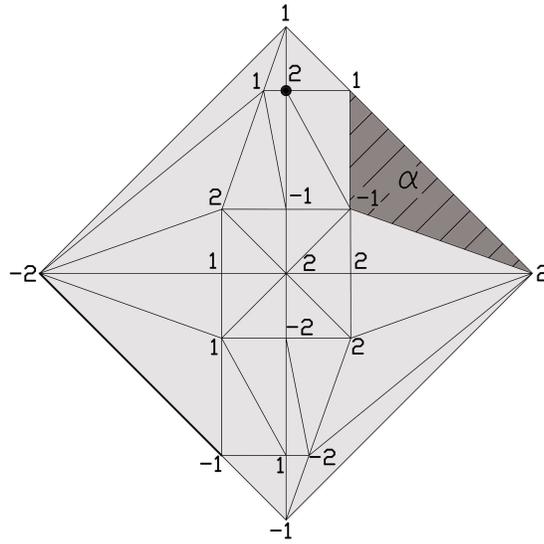


Figura 3.14: Simplejos completamente etiquetados de dimensión 0, 1 y 2.

Definamos como  $sgn(\alpha)_i$  al  $i$ -ésimo elemento de  $sgn(\alpha)$ . En la figura 3.14  $sgn(\alpha) = (1, 1)$ . Dado que  $sgn(\alpha)_1 \cdot 1 = 1$  y  $sgn(\alpha)_2 \cdot 2 = 2$  son etiquetas de  $\alpha$ , entonces  $\alpha$  es completamente etiquetado.

Decimos que el 0-simplejo  $\{0\}$  es siempre completamente etiquetado dado que su vector de signos es el vector cero. Además, debido a que en la función de etiquetamiento  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ , si  $\alpha$  es un simplejo de  $T$  completamente etiquetado tal que  $\alpha \subset \partial \hat{B}^n$ , entonces su simplejo antipodal  $-\alpha$  también lo es.

La prueba se basa en encontrar una trayectoria en una gráfica  $G$  cuyos nodos son los simplejos completamente etiquetados y existe un arista entre un par de nodos si ambos simplejos completamente etiquetados pertenecen a  $\partial \hat{B}^n$  y son antipodales, o si uno de ellos es una cara del otro y  $\alpha \cap \beta$  es  $sgn(\alpha \cup \beta)$ -etiquetado

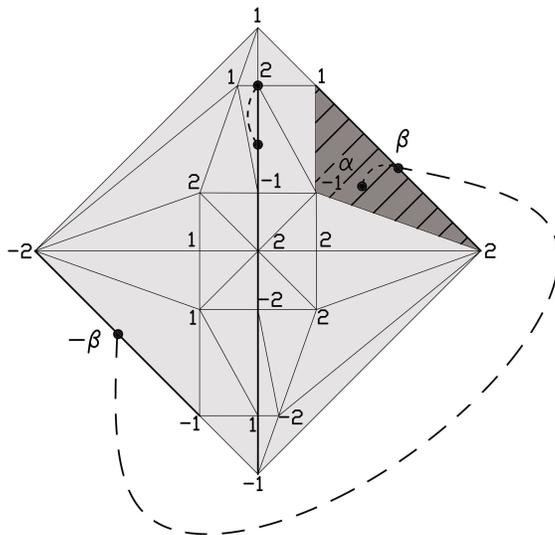


Figura 3.15: Ejemplo de simplejos completamente etiquetados adyacentes.

La figura 3.15 muestra como los 1-simplejos completamente etiquetados  $\beta$  y  $-\beta$  son adyacentes por ser antipodales. Los simplejos  $\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes pues  $\beta$  es una 1-cara de  $\alpha$  y  $\alpha \cap \beta = \beta$  es  $sgn(\alpha \cup \beta)$ -etiquetado, es decir,  $\beta$  es  $sgn(\alpha)$ -etiquetado.

En la gráfica  $G$ , el 0-simplejo  $\{0\}$ , el cual siempre es completamente etiquetado, es de grado 1. Esto se debe a que  $\{0\}$  sólo puede ser adyacente a los 1-simplejos que pertenecen a los hiperplanos coordenados, de los cuales es una cara. Además, si  $j$  es la etiqueta de  $\{0\}$ , el 1-simplejo con el cual es adyacente es el que en su vector de signos se cumple que  $s_{|j|} = \frac{j}{|j|}$ , entonces este vector es único.

Ahora mostraremos que cada simplejo completamente etiquetado que contenga un 1-simplejo complementario es de grado 1 en  $G$  y que los restantes, a excepción de  $\{0\}$ , son de grado 2 en  $G$ .

Sea  $s$  el vector de signos del simplejo completamente etiquetado  $\alpha$  y supongamos que  $s$  tiene  $k$  entradas diferentes de 0, entonces  $\alpha$  pertenece a  $C(s) \subset \mathbb{R}^k$ . Además, el conjunto de vértices de  $\alpha$  debe contener al menos  $k$  etiquetas distintas, dado que  $\alpha$  es  $s$ -etiquetado. Por lo tanto  $\alpha$  es un  $k$ -simplejo o  $(k - 1)$ -simplejo.

Supongamos que  $\alpha$  es un  $(k - 1)$ -simplejo. Si  $\alpha \not\subset \partial \hat{B}^n$ , entonces es una  $(k - 1)$ -cara de exactamente dos  $k$ -simplejos en  $C(s)$ , ambos completamente etiquetados dado que  $\alpha$  lo es. Si  $\alpha \subset \partial \hat{B}^n$ , entonces  $\alpha$  es cara de un  $k$ -simplejo completamente etiquetado en  $C(s)$  y es adyacente a su antípoda, la cual también es completamente etiquetada. En ambos casos,  $\alpha$  es de grado 2 en  $G$ .

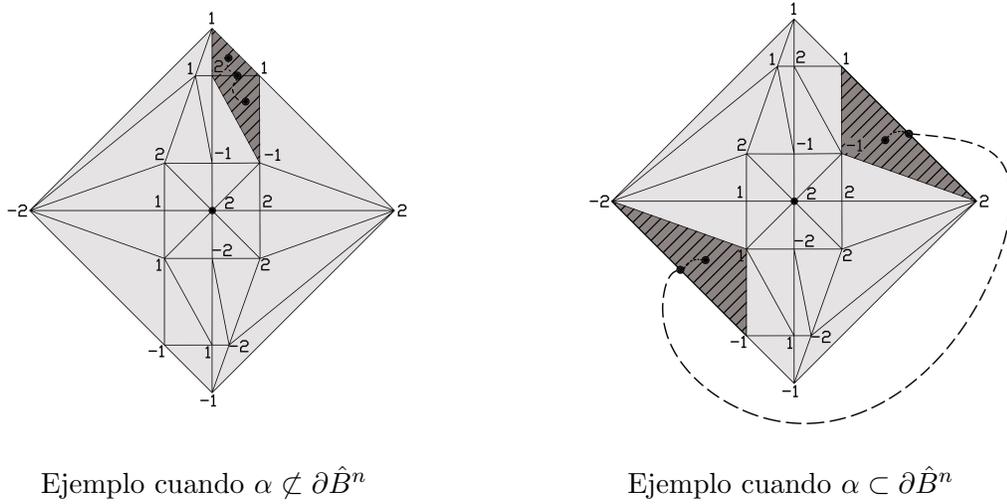


Figura 3.16

Ahora supongamos que  $\alpha$  es un  $k$ -simplejo. Entonces  $\alpha$  tiene  $k + 1$  vértices, con una etiqueta extra además de las  $k$  etiquetas distintas, esto por ser completamente etiquetado. La etiqueta extra es o un duplicado de una de las  $k$  etiquetas distintas, el complemento de una de las  $k$  etiquetas distintas o  $\pm j$  para una  $j$  tal que  $s_j = 0$ . En el primer caso  $\alpha$  tiene exactamente dos caras con las  $k$  etiquetas requeridas, por lo que son completamente etiquetadas y por lo tanto  $\alpha$  es de grado 2 en  $G$ . En el segundo caso  $\alpha$  contiene al 1-simplejo complementario y sólo tienen una cara con las  $k$  etiquetas requeridas, la cual es completamente etiquetada, siendo así de grado 1 en  $G$ . En el último caso supongamos que la etiqueta extra es  $\pm i$ . Sea  $t$  un vector de signos en  $G$  que coincide con  $s$  excepto en  $s_i$ , en donde  $t_i = \pm i$ , entonces  $\alpha$  es cara de exactamente un  $(k + 1)$ -simplejo en  $C(t)$ , el cual es completamente etiquetado, además  $\alpha$  tiene una cara con las  $k$  etiquetas requeridas, por lo tanto  $\alpha$  es de grado 2 en  $G$ .

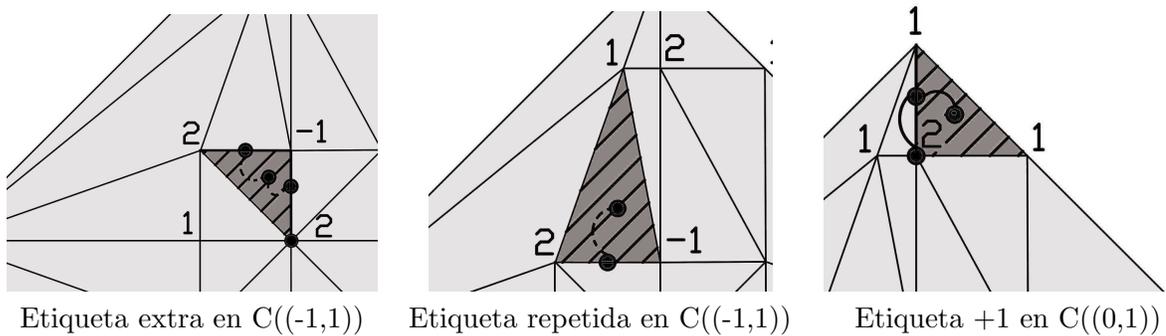


Figura 3.17

Dado que  $G$  tiene únicamente nodos de grado 1 y 2, y en toda gráfica el número de vértices con grado impar es par, tomando en cuenta que el 0-simplejo  $\{0\}$  es de grado 1, entonces existe al menos otro nodo en  $G$  con grado 1 el cual únicamente puede ser un simplejo completamente etiquetado que contenga a un 1-simplejo complementario. Más aún, tenemos que existe un número impar de simplejos completamente etiquetados que contienen un 1-simplejo complementario en  $T$ .

□

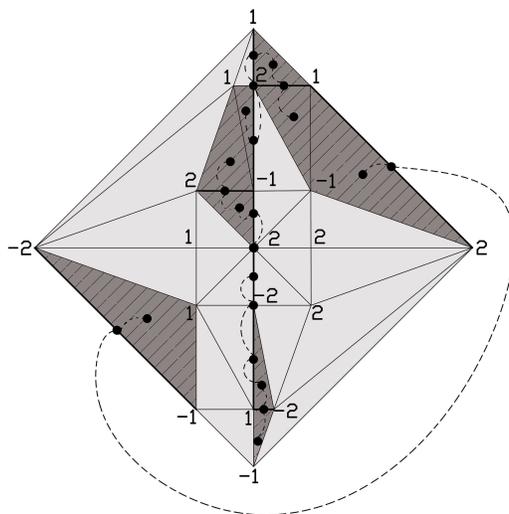


Figura 3.18: Gráfica  $G$  sobre la triangulación  $T$  en  $\hat{B}^n$

Observemos que aunque sabemos que existe un número impar de simplejos completamente etiquetados que contienen un 1-simplejo complementario en  $T$ , no es posible decir algo sobre la paridad de los 1-simplejos complementarios pues algunos están contenidos en simplejos que no son completamente etiquetados como se muestra en la figura 3.18 .

Es interesante ver que el Lema de Tucker puede ser reformulado usando funciones simpliciales sobre la frontera de un politopo de cruce  $(n - 1)$ -dimensional.

**Teorema 3.2.** *Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  que es antipodalmente simétrica en la frontera. Entonces no existe una función  $\lambda : V(T) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  la cual sea una función simplicial de  $T$  en  $\diamond^{n-1}$  y cumpla que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para todo vértice  $v \in \partial B^n$ .*

El teorema anterior es una reformulación del teorema 3.1 por lo siguiente. Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  antipodalmente simétrica en la frontera, supongamos que  $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  es una función simplicial de  $T$  en  $\diamond^{n-1}$  tal que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para todo vértice  $v \in \partial B^n$ . Entonces, por ser  $\lambda$  una función simplicial, sabemos que si  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

es un simplejo en  $T$  para alguna  $0 \leq k \leq n + 1$ ,  $\{\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_k)\}$  es un simplejo en  $\diamond^{n-1}$ . Por la manera en como definimos  $\diamond^{n-1}$ , lo anterior quiere decir que  $i, -i \notin \{\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_k)\}$  para todo simplejo  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in T$ . Por tanto no existe un 1-simplejo en  $T$  que sea complementario.

Supongamos ahora que, en una triangulación  $T$  de  $B^n$  antipodalmente simétrica en la frontera con función de etiquetamiento  $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  antipodal en la frontera, no existe un 1-simplejo en  $T$  que sea complementario. Entonces, en particular, la función  $\lambda' : V(T) \rightarrow V(\diamond^{n-1})$  dada por  $\lambda'(v) = \lambda(v)$  es una función simplicial de  $T$  en  $\diamond^{n-1}$  antipodal en la frontera.

Lo anterior prueba que los teoremas 3.1 y 3.2 son equivalentes.

### 3.2. La implicación del lema de Tucker al teorema de Borsuk-Ulam.

Una vez demostrados el teorema de Borsuk-Ulam y el lema de Tucker, en esta sección haremos ver que están relacionados. Antes de mostrar dicha relación, recordemos los teoremas que vamos a usar.

**Teorema 3.1** (Lema de Tucker). *Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  antipodalmente simétrica en la frontera y sea*

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

*una función de etiquetamiento de los vértices de  $T$  tal que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para todo vértice  $v \in \partial B^n$ , es decir,  $\lambda$  es una función antipodal en la frontera. Entonces existe un 1-simplejo en  $T$  que es complementario, esto es, las etiquetas de sus vértices son números opuestos.*

**Teorema 2.2** (Teorema de Borsuk-Ulam). *No existe función continua  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  que sea antipodal en la frontera, es decir, que satisfaga  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \partial B^n$ .*

Probaremos que el lema de Tucker implica el teorema de Borsuk-Ulam. Para esto supondremos que existe una función continua  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  antipodal en la frontera y construiremos una triangulación  $T$  antipodalmente simétrica en la frontera de  $B^n$ , así como una función de etiquetamiento  $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  antipodal en la frontera, de tal manera que no exista el 1-simplejo complementario en  $T$  que afirma el teorema 3.1. Esta prueba se encuentra en [9].

**Teorema 3.3.** *El lema de Tucker implica el teorema de Borsuk-Ulam.*

*Demostración.* Asumamos que  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  es una función continua antipodal en la frontera. Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  antipodalmente simétrica en la frontera, en la cual cada simplejo tenga un diámetro de a lo más  $\delta$  para algún  $\delta > 0$ , es decir, todo simplejo en  $T$  cabe en una bola de radio  $\frac{\delta}{2}$ .

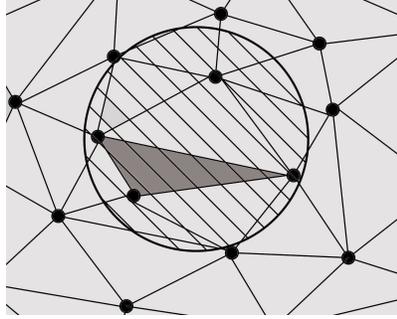


Figura 3.19: 2-simplejos contenidos en una 2-bola de radio  $\frac{\delta}{2}$ .

Para especificar dicha  $\delta$  tomaremos un número real  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$  y haremos uso de la continuidad uniforme.

Antes de especificar la  $\delta$  que utilizaremos, veamos que para todo  $y \in S^{n-1}$ ,  $\|y\|_\infty = \max\{|y_i| : i \in [1, n]\} \geq \epsilon$ . En efecto, supongamos que  $\|y\|_\infty < \epsilon$ , es decir,  $|y_i| < \frac{1}{\sqrt{n}}$  para toda  $i \in [1, n]$ . Esto nos diría que  $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 < 1$ , lo cual es una contradicción pues por definición  $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1$ . De esta manera  $\|y\|_\infty \geq \epsilon$  para toda  $y \in S^{n-1}$ .

Dado que  $B^n$  es compacto y toda función continua sobre un compacto es uniformemente continua,  $f$  es uniformemente continua. Por lo tanto existe una  $\delta' > 0$  tal que si la distancia entre un par de puntos  $x, y \in B^n$  es menor que  $\delta'$ , entonces  $\|f(x) - f(y)\|_\infty < 2\epsilon$ . La delta que utilizaremos para formar la triangulación de  $B^n$  es  $\delta'$ , la delta de la continuidad uniforme.

Demos ahora una función que nos ayudará a definir  $\lambda : V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ . Sea  $v \in B^n$  y  $f(v) = (f(v)_1, f(v)_2, \dots, f(v)_n) \in S^{n-1}$ , definamos la función  $K : B^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$K(v) = \min\{i : |f(v)_i| \geq \epsilon\}.$$

Observemos que  $K(v)$  está bien definida pues el conjunto  $\{i : |f(v)_i| \geq \epsilon\}$  es no vacío, esto debido a que  $\|y\|_\infty \geq \epsilon$  para toda  $y \in S^{n-1}$ . Por lo tanto definimos a  $\lambda$  de la siguiente manera:

$$\lambda(v) = \begin{cases} +K(v) & \text{si } f(v)_{K(v)} > 0, \\ -K(v) & \text{si } f(v)_{K(v)} < 0. \end{cases}$$

La función  $\lambda$  etiqueta los vértices de la triangulación  $T$  respecto a la posición de su imagen en  $f$ , es decir, toma el índice  $i$  que le asigna  $K$  a cada vértice de  $T$  y les da un signo, el cual depende de si la  $i$ -ésima coordenada de su imagen en  $f$  es mayor o menor a 0.

Veamos que  $\lambda$  es una función antipodal en la frontera. En efecto, dado que  $f$  es antipodal en la frontera, sea  $v \in \partial B^n$ , se cumple que  $f(-v) = -f(v)$ , es decir,  $f(-v)_i = -f(v)_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sea  $\alpha(v) = \{i : |f(v)_i| \geq \epsilon\}$ , si  $i \in \alpha(v)$ ,  $|f(v)_i| \geq \epsilon$  y  $|-f(v)_i| = |f(-v)_i| \geq \epsilon$ , de manera que  $i \in \alpha(-v)$ . Esto quiere decir que  $\alpha(v) = \alpha(-v)$  y por lo tanto  $K(v) = K(-v)$ . Ahora supongamos que  $\lambda(v) = K(v)$ , esto es,  $f(v)_{K(v)} > 0$ . Por ser  $f$  antipodal en la frontera tenemos que  $f(-v)_{K(v)} < 0$  y dado que  $K(v) = K(-v)$ ,

$f(-v)_{K(-v)} < 0$ ; esto quiere decir que  $\lambda(-v) = -K(-v) = -K(v)$ . De manera análoga podemos ver que si  $\lambda(v) = -K(v)$ , entonces  $\lambda(-v) = K(v)$ . Por lo tanto  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para toda  $v \in \partial B^n$ , es decir,  $\lambda$  es antipodal en la frontera.

Entonces, por el Lema de Tucker, existe un 1-simplejo complementario en  $T$ , al que denotaremos como  $vv'$ , para el cual  $\lambda(v) = -\lambda(v') = i$ . Dado que  $f(v)$  y  $f(v')$  pertenecen a  $S^{n-1}$ ,  $\|f(v)\|_\infty \geq \epsilon$  y  $\|f(v')\|_\infty \geq \epsilon$ , en especial  $|f(v)_i| \geq \epsilon$  y  $|f(v')_i| \geq \epsilon$ . Esto es,  $f(v)_i \geq \epsilon$  y  $-f(v')_i \geq \epsilon$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(v')\|_\infty &= \max\{|f(v)_i - f(v')_i|: i \in [1, n]\} \\ &= \max\{|f(v)_i + (-f(v')_i)|: i \in [1, n]\} \geq |\epsilon + \epsilon| = 2\epsilon, \end{aligned}$$

pero como la triangulación  $T$  fue formada a partir de  $\delta'$ , la delta de la continuidad uniforme, entonces

$$\|f(v) - f(v')\|_\infty < 2\epsilon,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe un 1-simplejo complementario en  $T$ .  $\square$

Asimismo la implicación inversa también es cierta y se encuentra en [9].

El hecho de que podamos derivar el teorema de Borsuk-Ulam a partir del lema de Tucker hace que sea común decir que el lema de Tucker es una versión discreta del teorema de Borsuk-Ulam.



## Capítulo 4

# El número cromático de las gráficas de Kneser.

### 4.1. La conjetura de Kneser.

Una gráfica  $G$  es 2-partita si para su conjunto de vértices  $V(G)$  existe una partición  $\{V_1, V_2\}$ , que consiste de dos subconjuntos o partes, tal que para toda arista  $uv \in E(G)$ ,  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ . Generalizando, una gráfica  $G$  es  $k$ -partita si su conjunto de vértices  $V(G)$  tiene una partición  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  que consiste de  $k$  partes, tal que no existe un arista con puntos finales en una misma parte. De forma equivalente, se podría pensar que los vértices son coloreados, es decir, se les asigna un color sobre un conjunto de colores, de tal forma que ninguna arista une a dos vértices con el mismo color. Lo anterior motiva la siguiente definición:

**Definición 4.1.** Una  $k$ -coloración de una gráfica  $G = (V, E)$  es una función  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , donde  $\{1, 2, \dots, k\}$  es el conjunto de colores. Una coloración  $c$  es propia si ningún par de vértices adyacentes tiene ambos vértices con un mismo color asignado (Véase la figura 4.1).

Una coloración también puede verse como una partición  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  de  $V(G)$  donde  $V_i$  denota el conjunto (posiblemente vacío) de vértices a los cuales se les asignó el color  $i$ . Los conjuntos  $V_i$  son llamados las clases cromáticas de la coloración. En este trabajo únicamente estamos interesados en lo que respecta a coloraciones propias, por lo que es conveniente para nosotros referirnos a una coloración propia simplemente como una coloración. A partir de este punto entonces, cuando hablemos de una coloración estaremos hablando de una coloración propia.

**Definición 4.2.** El número cromático de una gráfica  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios para colorear una gráfica  $G$ . (Véase la figura 4.2)

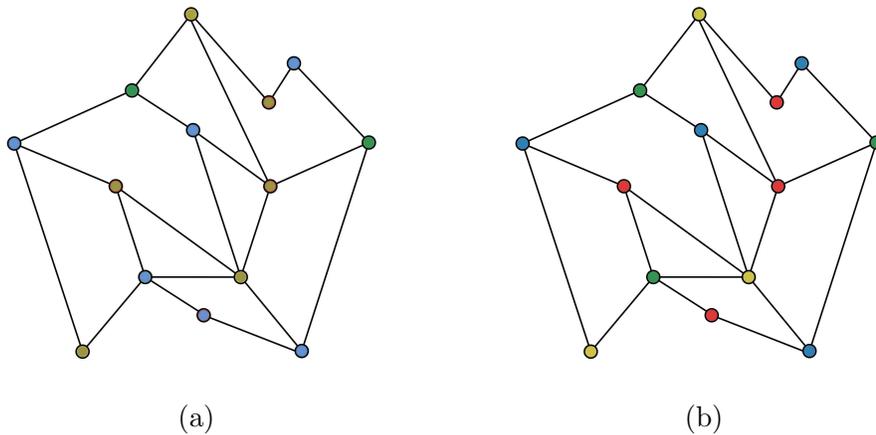


Figura 4.1: La gráfica (a) representa una coloración sobre el conjunto de colores azul, amarillo y verde, mientras que la gráfica (b) representa una coloración propia sobre el conjunto de colores azul, amarillo, verde y rojo.

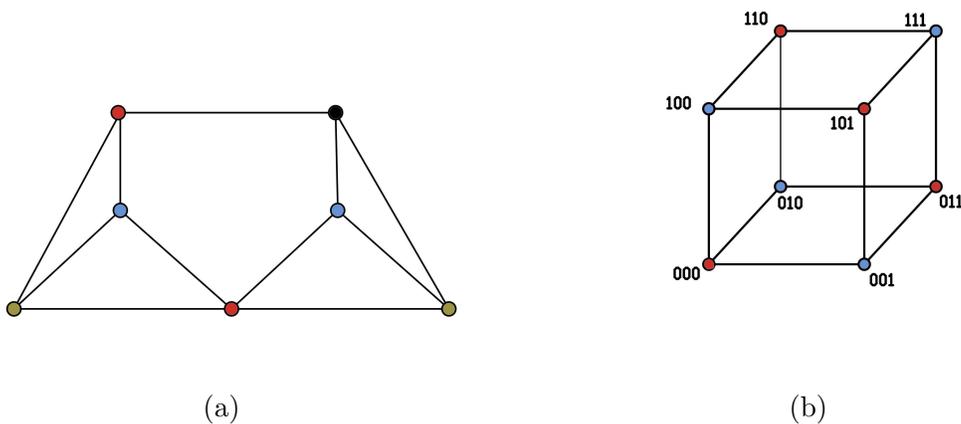


Figura 4.2: La gráfica (a) representa la gráfica de Hajos que tiene número cromático 4, mientras que la gráfica (b) representa un 3-cubo ( $Q_3$ ) bipartito y por lo tanto 2 coloreable.

Definido el número cromático de una gráfica, queda pendiente definir una gráfica de Kneser antes de empezar a preguntarnos por el número cromático de esta colección importante de gráficas.

**Definición 4.3.** Sean  $n$  y  $k$  enteros tales que  $1 \leq k \leq n$ . La gráfica de Kneser  $K(n, k)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices  $V(K(n, k))$  es la familia de  $k$ -subconjuntos del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y existe una arista entre dos  $k$ -subconjuntos  $A$  y  $B$  en  $V(K(n, k))$  si  $A \cap B = \emptyset$ .

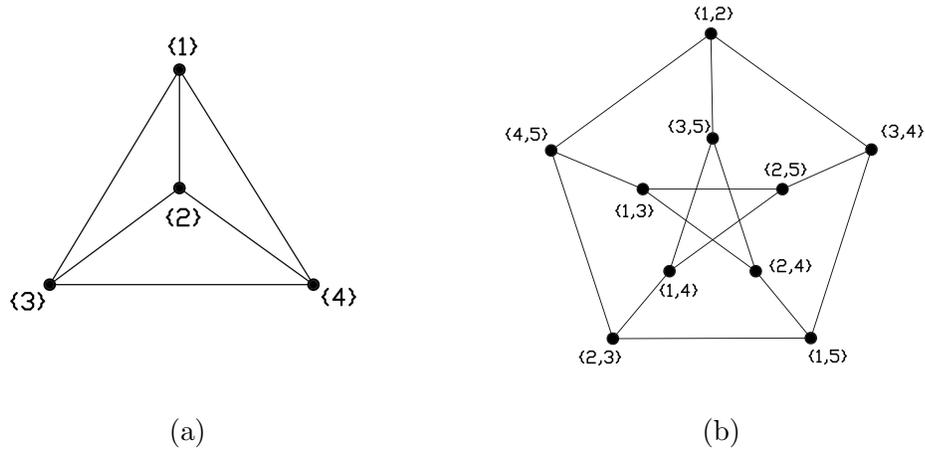


Figura 4.3: La gráfica (a) es  $K(4, 1)$ , mientras que la gráfica (b) es  $K(5, 2)$  conocida como gráfica de Petersen.

Una vez definidas las gráficas de Kneser, comenzaremos a desarrollar la solución al problema de encontrar su número cromático. Encontrar  $\chi(K(n, k))$  significa encontrar la partición mínima  $\{V_1, V_2, \dots, V_{\chi(K(n, k))}\}$ , donde  $V_i$  es una familia de  $k$ -subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tal que para cualquiera dos  $k$ -subconjuntos  $A, B \in V_i$ , se cumple que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Observemos que si  $n < 2k$  entonces cualesquiera dos  $k$ -subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  se intersecan, y la gráfica  $K(n, k)$  es una gráfica sin aristas. Por lo anterior, el número cromático de una gráfica de Kneser cuando  $n < 2k$  es 1, entonces asumiremos que  $n \geq 2k$ , y escribiremos  $n = 2k + d$  para  $k \geq 1$  y  $d \geq 0$ . En 1955 Kneser demostró el siguiente lema.

**Lema 4.1.** Para todo  $k \geq 1$  y  $d \geq 0$ ,  $\chi(K(2k + d, k)) \leq d + 2$ .

*Demostración.* Para  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$ , sea  $V_i$  la familia de todos los  $k$ -subconjuntos que contienen a  $i$  como su elemento más pequeño. Es claro que existen  $k$ -subconjuntos que no pertenecen a ningún  $V_i$ . Sea  $W$  el conjunto de todos los  $k$ -subconjuntos que no están contenidos en ninguno de los  $V_i$ , podemos ver que  $|W| \leq 2k + d - (d + 1) = 2k - 1$  dado que cada  $V_i$ , con  $1 \leq i \leq d + 1$ , contiene al menos un  $k$ -subconjunto. Entonces ningún par de elementos en  $W$  son adyacentes. Por lo tanto podemos usar  $d + 2$  colores para colorear los vértices de  $K(n, k)$ .  $\square$

El lema 4.1 representa una cota superior del número cromático de las gráficas de Kneser. Kneser conjeturó que el número cromático de  $K(2k + d, k)$  es  $d + 2$ ; a esta conjetura se le llama la conjetura de Kneser.

## 4.2. El primer resultado de la combinatoria topológica.

El problema aparentemente inofensivo planteado por Kneser se convirtió en uno de los retos más importantes en la teoría de gráficas. La conjetura de Kneser permaneció abierta 23 años y no fue hasta que László Lovász en [12] mostró que  $\chi(K(2k + d, k)) = d + 2$ . La solución presentada por Lovász utiliza el teorema de Borsuk-Ulam de la topología algebraica, lo cual fue una verdadera sorpresa en su momento. Después de la prueba de Lovász, Imre Bárány en [6], y luego Joshua Greene en [8], presentaron pruebas más cortas y elegantes de la conjetura de Kneser. En lo que resta de este capítulo desmenuzaremos la prueba de Greene.

En la prueba de la conjetura de Kneser utilizaremos principalmente dos herramientas: la primera, es una variante del teorema de Borsuk-Ulam, y la segunda, es un resultado conocido como el lema de Gale en el ámbito de la geometría combinatoria. Antes de presentar la prueba probaremos ambos resultados. La siguiente es una variante del teorema de Borsuk-Ulam, que además generaliza el teorema de Lyusternik y Shnirel'man [13].

**Teorema 4.1.** *Si la  $d$ -esfera  $S^d$  está cubierta por  $d + 1$  conjuntos,*

$$S^d = U_1 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

*tal que cada uno de los primeros  $d$  conjuntos  $U_1, \dots, U_d$  es abierto o cerrado, entonces uno de los  $d + 1$  conjuntos contiene un par de puntos antipodales  $x', -x' \in S^d$ .*

*Demostración.* Sea  $U_1 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1}$  una cubierta de  $S^d$  y asumamos que ninguno de los elementos de la cubierta tiene un par de puntos antipodales. Definamos ahora la función  $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por

$$f(x) := (d(x, U_1), d(x, U_2), \dots, d(x, U_d)).$$

$d(x, U_i)$  denota la distancia del punto  $x$  al conjunto  $U_i$ . Dado que la función distancia es continua en  $x$ , la función  $f$  es continua. Entonces, por el teorema de Borsuk-Ulam, existen un par de puntos antipodales  $x', -x' \in S^d$  tal que  $f(x') = f(-x')$ . Como por hipótesis ninguno de los elementos de la cubierta tiene un par de puntos antipodales, el conjunto  $U_{d+1}$  no contiene un par de ellos. Por lo tanto al menos  $x'$  o  $-x'$  debe estar contenido en uno de los  $U_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ ; supongamos que se encuentra en  $U_k$  con  $1 \leq k \leq d$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer también que  $x' \in U_k$ , es decir,  $d(x', U_k) = 0$ . Así, dado que  $f(x') = f(-x')$ ,  $d(-x', U_k) = 0$ .

Si  $U_k$  es cerrado,  $d(-x', U_k) = 0$  implica que  $-x' \in U_k$  y por tanto  $x', -x' \in U_k$ , lo cual es una contradicción.

Si  $U_k$  es abierto,  $d(-x', U_k) = 0$  implica que  $-x' \in \overline{U_k}$ , la cerradura de  $U_k$ . Sea  $-U_k = \{-x : x \in U_k\}$ . Entonces, por ser  $U_k$  abierto y no contener un par de puntos antipodales,  $S^d \setminus (-U_k)$  es un conjunto cerrado tal que  $U_k \subset S^d \setminus (-U_k)$ . Así, por ser  $\overline{U_k}$  el cerrado más pequeño que contiene a  $U_k$ ,  $\overline{U_k} \subset S^d \setminus (-U_k)$ . Esto significa que  $-x' \in \overline{U_k} \subset S^d \setminus (-U_k)$ ,

lo que quiere decir que  $-x' \notin -U_k$  y por tanto  $x' \notin U_k$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto alguno de los  $d + 1$  elementos de la cubierta contiene un par de puntos antipodales.  $\square$

Ahora enunciaremos algunas definiciones y resultados necesarios para la prueba del lema de Gale.

**Definición 4.4.** La curva  $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$  dada por  $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$  se conoce como la curva de momento en  $\mathbb{R}^d$ .

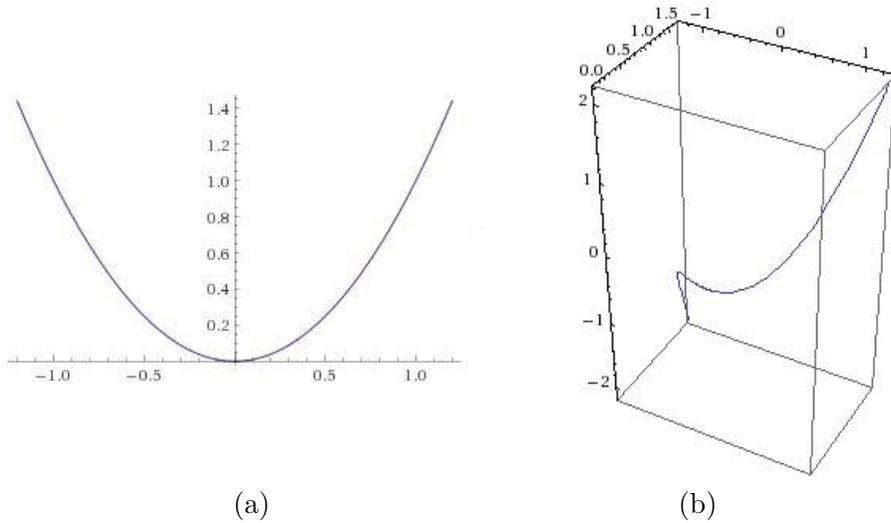


Figura 4.4: Las figuras (a) y (b) representan la curva de momento en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente.

El siguiente lema muestra una propiedad importante de la curva de momento.

**Lema 4.2.** Ningún hiperplano interseca la curva de momento  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^d$  en más de  $d$  puntos. Por consiguiente, todo conjunto de  $d + 1$  puntos distintos en  $\gamma$  son afinmente independientes. Por otra parte, si  $\gamma$  interseca un hiperplano  $h$  en  $d$  puntos distintos, entonces  $\gamma$  cruza  $h$  de un lado a otro en cada intersección.

*Demostración.* Un hiperplano  $h$  tiene una ecuación de la forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b$  con  $(a_1, a_2, \dots, a_d) \neq 0$ . Si un punto  $\gamma(t)$  pertenece a  $h$ , entonces tenemos que  $a_1t + a_2t^2 + \dots + a_dt^d = b$ . Esto significa que los valores de  $t$  correspondientes a las intersecciones con  $h$  son las raíces reales del polinomio  $p(t) = a_dt^d + \dots + a_2t^2 + a_1t - b$  de grado a lo más  $d$ . Dado que  $p(t)$  tiene a lo más  $d$  raíces reales, entonces no existen más de  $d$  intersecciones. Así, si existieran  $d$  intersecciones diferentes,  $p(t)$  tendría  $d$  raíces distintas. Por lo tanto  $p(t)$  cambia de signo en cada raíz, esto es,  $\gamma$  cruza de un semiespacio abierto definido por  $h$  al otro en cada intersección.  $\square$

El lema a continuación es conocido como el lema de Gale.

**Lema 4.3.** *Para toda  $d \geq 0$  y toda  $k \geq 1$ , existe un conjunto  $A \subset S^d$  de  $2k + d$  puntos tal que todo hemisferio abierto de  $S^d$  contiene al menos  $k$  puntos de  $A$ .*

*Demostración.* Utilizando la proyección central de  $\mathbb{R}^{d+1}$  a  $S^d$  con centro en el origen, probaremos lo siguiente: Existe un conjunto de puntos  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+d}$  en  $\mathbb{R}^{d+1}$  tal que todo semiespacio abierto, cuyo hiperplano en la frontera pase por el origen, contiene al menos  $k$  puntos de ellos. Es claro que ambas afirmaciones son equivalentes.

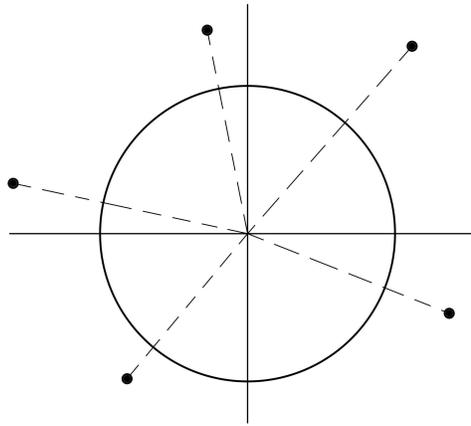


Figura 4.5: Proyección central de  $\mathbb{R}^2$  a  $S^1$  con centro en  $\bar{0}$ .

Para esto usaremos la curva de momento de la definición 4.4, pero la levantaremos una dimensión sobre el hiperplano  $x_1 = 1$ . Esto es,

$$\bar{\gamma} = \{(1, t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^{d+1} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Es claro que la propiedad del lema 4.2 se sigue conservando. Tomemos ahora cualesquiera  $2k + d$  puntos distintos en  $\bar{\gamma}$  y etiquetémoslos con  $w_1, w_2, \dots, w_{2k+d}$  en el orden en que vayan ocurriendo a lo largo de la curva. Llamaremos a los puntos  $w_2, w_4, \dots$  pares y a los puntos  $w_1, w_3, \dots$  impares. Además, definamos  $v_i = (-1)^i w_i$ .

Sea  $h$  un hiperplano que pasa por el origen, y sea  $h^\oplus$  y  $h^\ominus$  los dos semiespacios abiertos determinados por  $h$ . Nosotros queremos argumentar que  $h^\oplus$  y  $h^\ominus$  contienen al menos  $k$  puntos de entre los  $v_i$ . Veamos que esto se cumple para  $h^\oplus$ . Dado que  $v_i = w_i$  para toda  $i$  par y  $v_i = -w_i$  para todo  $i$  impar, necesitamos probar que el número de  $w_i$  pares en  $h^\oplus$  más el número de  $w_i$  impares en  $h^\ominus$  es al menos  $k$ .

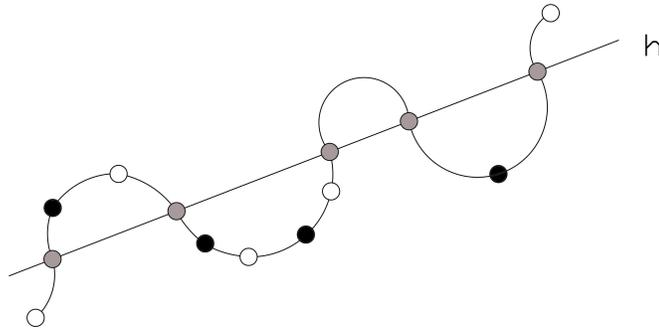
Usando el lema 4.2, tenemos que todo hiperplano  $h$  que cruza el origen, interseca a  $\bar{\gamma}$  en no más de  $d$  puntos. Más aún, si existen  $d$  intersecciones entre  $\bar{\gamma}$  y  $h$ , entonces  $\bar{\gamma}$  cruza  $h$  en cada intersección.

Entonces, dado un hiperplano arbitrario  $h$  que cruza el origen, afirmamos que podemos moverlo continuamente a una posición en la que contenga al origen y exactamente  $d$  puntos de  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{2k+d}\}$ , mientras ningún punto de  $W$  cruce al otro lado de  $h$  durante el movimiento. Veamos que esto es posible. Teniendo  $j < d$  puntos de  $W$  en  $h$ , rotemos  $h$

alrededor de un  $(d-2)$ -plano que contenga los  $j$  puntos y al 0. Repitiendo este paso una cantidad finita de veces, tenemos que podemos mover el hiperplano continuamente hasta que contenga  $d$  puntos de  $W$  y al origen.

Así, supondremos que  $h$  interseca a  $\bar{\gamma}$  en exactamente  $d$  puntos de  $W$ . Sea  $W_{on}$  el conjunto de los  $d$  puntos en  $W$  que pertenecen a  $h$  y  $W_{off} = W - W_{on}$  el resto de los  $2k$  puntos. Observemos que en cada punto de  $W_{on}$ ,  $\bar{\gamma}$  cruza  $h$  de un lado a otro.

Colorearemos a  $w_i \in W_{off}$  de negro si es par y pertenece a  $h^\oplus$  o si es impar y pertenece a  $h^\ominus$ . De otra manera, colorearemos a  $w_i$  blanco. Veamos que los puntos blancos y negros de  $W_{off}$  se alternan. En efecto, sea  $w$  y  $w'$  dos puntos consecutivos en  $W_{off}$  a lo largo de  $\bar{\gamma}$  con  $j$  puntos de  $W_{on}$  entre ellos. Si  $j$  es par,  $w$  y  $w'$  están en el mismo semiespacio, y dado que uno es par y el otro impar, uno es blanco y el otro negro. Ahora, si  $j$  es impar,  $w$  y  $w'$  están en diferentes semiespacios, pero ambos son pares o impares, por lo tanto de nuevo uno es blanco y el otro negro.



De esta manera, dado que el hiperplano  $h$  tiene a lo más  $d$  puntos de  $W$ , entonces  $\lfloor \frac{1}{2}|W_{off}| \rfloor \geq k$ . □

En virtud del lema 4.3 tenemos el siguiente corolario, el cual será el que utilizaremos en la prueba de la conjetura de Kneser.

**Corolario 4.1.** *Para toda  $d \geq 0$  y toda  $k \geq 1$ , existe un arreglo de  $2k + d$  puntos en posición general sobre  $S^{d+1}$ . Esto es, no existen  $d + 2$  puntos sobre un mismo hiperplano, el cual cruza por el centro de la  $d + 1$ -esfera.*

*Demostración.* En efecto, por el teorema de Gale, sabemos que existe un conjunto  $A \subset S^{d+1}$  de  $2k + (d + 1)$  puntos tal que todo hemisferio abierto contiene al menos  $k$  puntos de  $A$ . Esto significa que no existen  $d + 2$  puntos en la intersección de la cerradura de cualquier par de hemisferios abiertos opuestos. De esta manera, quitándole un punto al arreglo que tomamos, obtenemos  $2k + d$  puntos en posición general. □

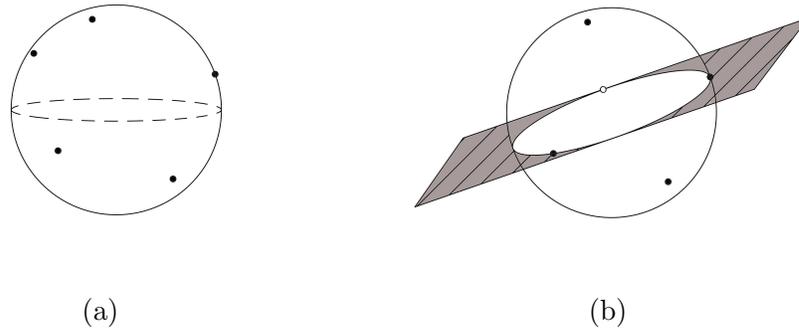


Figura 4.6: La colección de puntos de la figura (a) están en posición general mientras que los de la figura (b) no.

Demostrados el teorema 4.1 y el corolario 4.1, ahora sí daremos una prueba de lo que en su momento fue llamada la conjetura de Kneser. Para esto, es importante hacer ver que una manera de reformular la conjetura de Kneser es la siguiente. Para toda partición  $\{V_1, V_2, \dots, V_{d+1}\}$  de la familia de todos los  $k$ -subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ , existe un  $V_i$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$ , que contiene un par de  $k$ -subconjuntos  $A$  y  $B$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Esta prueba se basa en la dada en [15].

**Teorema 4.2.** *Para todo  $k \geq 1$  y  $d \geq 0$ ,  $\chi(K(2k + d, k)) = d + 2$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $V(K(2k + d, k))$  está particionado en  $d + 1$  conjuntos, es decir,  $V(K(2k + d, k)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{d+1}$  con  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$  diferentes. Veremos ahora que existe un par de  $k$ -subconjuntos  $A, B \in V_i$ , para algún  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$ , tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Tomemos  $2k + d$  puntos en posición general sobre  $S^{d+1}$ . Para toda  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$  definiremos el conjunto

$O_i = \{x \in S^{d+1} : \text{el hemisferio abierto } H_x \text{ con polo } x \text{ contiene un } k\text{-subconjunto de } V_i\}$ .

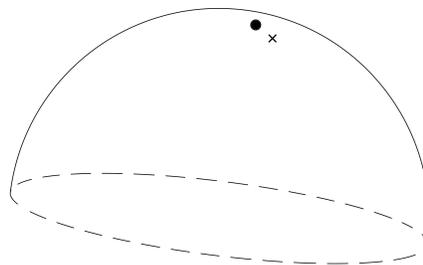


Figura 4.7: Hemisferio abierto con polo  $x$

Es claro que cada  $O_i$  es un conjunto abierto en  $S^{d+1}$ . Observemos que la familia de conjuntos  $O_i$  junto con el conjunto cerrado  $C = S^{d+1} \setminus (O_1 \cup \dots \cup O_{d+1})$  forman una cubierta de  $S^{d+1}$ . Entonces, por el teorema 4.1, uno de los elementos de la cubierta contiene un par de puntos antipodales  $x', -x' \in S^{d+1}$ . Veamos que dicho conjunto no puede ser  $C$ . Supongamos que  $x', -x' \in C$ . Por como definimos a los conjuntos  $O_i$ , los hemisferios  $H_{x'}$  y  $H_{-x'}$  no contienen ningún  $k$ -subconjunto y por tanto tienen menos de  $k$  elementos de  $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ . Entonces, dado que  $H_{x'}$  y  $H_{-x'}$  contienen a lo más  $k - 1$  elementos de  $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ , al menos  $d + 2$  puntos están contenidos en la intersección de las cerraduras de  $H_{x'}$  y  $H_{-x'}$ , lo cual es una contradicción pues los puntos están en posición general. Por lo tanto alguno de los  $O_i$  contiene un par de puntos antipodales  $x'$  y  $-x'$ , es decir, existen  $k$ -subconjuntos  $A$  y  $B$  en  $V_i$  tales que  $A \subseteq H_{x'}$  y  $B \subseteq H_{-x'}$ .

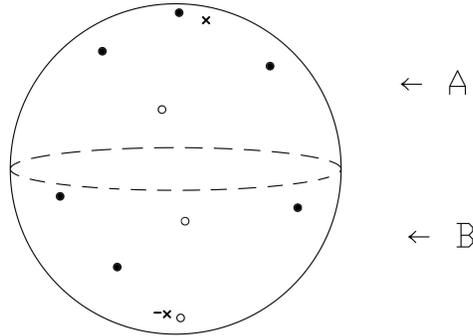


Figura 4.8: Subconjuntos ajenos  $A$  y  $B$  para  $k = 4$  y  $d = 1$ .

Dado que  $H_{x'}$  y  $H_{-x'}$  son conjuntos abiertos ajenos,  $A \cap B = \emptyset$ . Lo anterior muestra que el mínimo número de colores necesarios para colorear  $K(2k + d, k)$  es  $d + 2$ .

□

En el área que fue conocida en un principio como topología combinatoria, que después se convirtió en lo que ahora conocemos como topología algebraica, son bien conocidas las aplicaciones de la combinatoria en la topología. Antes de la prueba de Lovász, no se conocían aplicaciones de la topología en la solución de problemas combinatorios o de la matemática discreta. La prueba de la conjetura de Kneser marcó el comienzo de una nueva área de las matemáticas conocida ahora como la combinatoria topológica, que estudia la aplicación de métodos y teoremas de la topología a problemas de las matemáticas discretas.



# Conclusiones

La presente tesis tuvo como objetivo mostrar la importancia del teorema de Borsuk-Ulam dentro de las matemáticas discretas y encontrar la manera en como se relaciona con simplejos y gráficas de Kneser.

Para mostrar esto, primero se dio una prueba del teorema de Borsuk-Ulam haciendo uso de herramientas de topología algebraica. Se pudo observar como un teorema fácil de interpretar, como es el teorema de Borsuk-Ulam, puede ser más difícil de demostrar de lo que uno pudiera pensar. Así mismo se estudió la estructura discreta conocida como simplejo y con esto se probó el lema de Tucker, para después hacer notar que ambos resultados son equivalentes. Ante este escenario nos es común referirnos al lema de Tucker como la versión discreta del teorema de Borsuk-Ulam.

Por otro lado, también se definieron y estudiaron las gráficas de Kneser, la otra estructura discreta que se menciona en este trabajo. Una vez definida esta colección importante de gráficas, haciendo uso del teorema de Borsuk-Ulam, se encontró el número cromático de las gráficas de Kneser. Cabe mencionar que éste es el primer resultado de la combinatoria topológica. Con esto se mostró una de las muchas aplicaciones del teorema de Borsuk-Ulam dentro de otra área de las matemáticas y en particular una dentro de las matemáticas discretas.

Mi conclusión final es que el teorema de Borsuk-Ulam, además de ser uno de los teoremas más importantes de la topología algebraica, es una herramienta de gran utilidad en diferentes áreas de la matemática. Dentro de las matemáticas discretas vimos que el teorema de Borsuk-Ulam tiene una versión discreta, conocida como el lema de Tucker, y ayuda a la solución del problema que consiste en encontrar el número cromático de las gráficas de Kneser, entre otras cosas. Con esto, es fácil ver que el teorema de Borsuk-Ulam juega un papel importante dentro de las matemáticas discretas.



# Referencias

- [1] I. Anderson. *A First Course in Discrete Mathematics*. Springer London, Limited, 2001.
- [2] J.D. Boissonnat, M. Yvinec, and H. Bronniman. *Algorithmic Geometry*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] de Longueville M. 25 years proof of the kneser conjecture. *EMS-Newsletter*, (53):16–19, 2004.
- [4] de Neymet Urbina S. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [5] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer, 2004.
- [6] Bárány I. A short proof of kneser’s conjecture. *J. Combinatorial Theory*, Ser. B 25:325–326, 1978.
- [7] Dugundji J. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [8] Greene J. A new short proof of kneser’s conjecture. *The American Mathematical Monthly*, 109:918–920, 2002.
- [9] Matoušek J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Springer, 2003.
- [10] May J. *A Concise Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press, 1999.
- [11] Munkres J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [12] Lovász L. Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *J. Combinatorial Theory*, Ser. B 25:319–324, 1978.
- [13] Lyusternik L. and Shnirel’man S. *Topological Methods in Variational Problems (in Russian)*. Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930. (refs: pp. 23,25).
- [14] Aguilar M., Gitler S., Prieto C., and Sontz S. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer, 2002.

- [15] Aigner M. and Ziegler G. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin Heidelberg.
- [16] Clapp M. Introducción al análisis real. Notas de análisis matemático de la Universidad Nacional Autónoma de México, Enero 2012.
- [17] Freund R. and Todd M. A constructive proof of tucker's combinatorial lemma. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 30(3):321–325, 1981.
- [18] Massey W. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1991.