



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La Conjetura de Partición de Trayectorias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

ALAN MARCELO ARROYO GUEVARA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

2012





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Arroyo
Guevara
Alan Marcelo
55 51 72 47 92
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409010507

2. Datos del tutor

Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Mat
Ilán Abraham
Goldfeder
Ortiz

4. Datos del sinodal 2

Dra
Mucuy Kak del Carmen
Guevara
Aguirre

5. Datos del sinodal 3

Dr
Juan José
Montellano
Ballesteros

6. Datos del sinodal 4

Mat
Laura
Pastrana
Ramírez

7. Datos del trabajo escrito

La Conjetura de Partición de Trayectorias
57 p
2012

Agradecimientos

Este trabajo nos pertenece a todos.

Primero, a mis padres Emma y Marcelo, quienes han sido mis mejores maestros y su apoyo incondicional es la causa fundamental de este escrito.

A mi hermana Pau que quiero mucho.

A mis abuelos: Marcelo, Alicia, Isaías y Chichí a los que admiro y de quienes me beneficié de sus consejos.

A los que me enseñaron. Hortensia Galeana, a quien le debo gran parte de lo que sé. A mis profesores Rodolfo San Agustín, César Rincón, Isabel Puga, Francisco Struck, Carlos Álvarez, Eric Hernández, Jorge Martínez Montejano, María del Carmen Gómez Laveaga, Ángel Carrillo, Guillermo Gómez, Mika Olsen, Martín Manrique, César Hernández, Sergio Rajsbaum, Dino y Jorge Urrutia, ustedes me hicieron disfrutar mucho estos cuatro años. También es importante mencionar a los que trabajan en la casa amarilla, lugar donde nació la esencia de este trabajo. Gracias Luis, Gaby, Deborah y por supuesto Amanda, quienes siempre han sido un gran apoyo. A mis sinodales Ilán, Mucuy, Laura y Juancho a quienes les debo muchas gratitudes por su paciencia y por sus excelentes comentarios.

A los que estuvieron cerca. Pablo, Rígel, Santiago, Vicky, Lore, Olmo, Liber, S. Lastra, Sebastián, Julieta, Alex, Mario, Viri, Oswaldo, Iván, Rosa, Lucía, Jaime, Román, Daniel, Omar, Karla, Tania, Pablote, Denae, Leo, Rachel, Lalito, Paco, Ian, Irving, Daniel, Ongay, Poncho, Carlos, Andrés, Serch, Cheto, Rafa, Paez, Tomás, David, Alf, Chago, Chai, Pablin, Nando, Larissa, Jorge Lomas, Ángeles, Lilia, Luisito y Diana Luna. Con ustedes tuve grandes momentos y con ustedes viví estos años. Gracias.

En memoria de Alberto

Introducción

Este trabajo tiene su origen en una pregunta realizada tres años atrás por Hortensia Galeana en su curso de teoría de las gráficas:

¿Será cierto que toda digráfica tiene un conjunto independiente que intersecta a las trayectorias de longitud máxima?

La principal motivación de este texto fue responder a esta simple e intrigante pregunta. Como se verá a lo largo de este trabajo, la conjetura de partición de trayectorias es una proposición que de ser cierta, respondería de manera afirmativa a la pregunta y por ello ha capturado la atención de muchas personas, quienes han trabajado arduamente en obtener una respuesta.

Básicamente este escrito está guiado por dos objetivos principales, el primero es otorgar al lector una introducción histórica breve y entretenida de esta importante conjetura. Afortunadamente, la conjetura de partición de trayectorias está rodeada de problemas y resultados, algunos de carácter inesperado, que alimentan el interés y que sirven como una posible referencia para futuros trabajos. El segundo objetivo es mostrar algunos resultados nuevos obtenidos, varios de ellos generalizan resultados ya conocidos.

Este trabajo de tesis está dividido en cuatro secciones. El texto es autocontenido y pretende que cualquier persona con un conocimiento básico de teoría de los conjuntos pueda entender la totalidad del escrito. En la primer sección, se presentan las nociones necesarias para la completa comprensión del texto. Se definen conceptos elementales como *digráfica*, *camino*, *trayectoria*, *ciclo*; además se presentan algunas clases de digráficas conocidas, como son los *torneos*, las digráficas *semicompletas* y algunas otras *generalizaciones de torneos*. La tesis está escrita a modo que el lector experto pueda omitir la primer sección, ya que las definiciones menos conocidas se dan en el momento en que sean requeridas. El escrito cuenta con un índice alfabético, que agiliza la búsqueda de los términos y la notación usada.

La segunda sección tiene como objetivo motivar el estudio de la conjetura de partición de trayectorias mediante el desarrollo histórico del problema, se presentan sus orígenes y un resumen de los resultados que se tienen. Finalmente en la tercer sección se presentan nuevas condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga la conjetura de partición de trayectorias, usando estos resultados se demuestra que ciertas generalizaciones de torneos satisfacen esta conjetura. La última sección presenta el estado actual de la conjetura y problemas relacionados por resolver.

Índice general

1. Nociones previas	11
1.1. Digráficas	11
1.1.1. Caminos y trayectorias	13
1.2. Clases de digráficas	14
1.2.1. Gráficas	14
1.2.2. Torneos y digráficas semicompletas	15
1.2.3. Otras generalizaciones de torneos	16
1.2.4. Bipartitas y k -partitas	20
1.3. Coloraciones	20
2. Introducción histórica	21
2.1. El teorema de Gallai-Roy-Vitaver	22
2.2. Generalizaciones del teorema de Gallai-Roy-Vitaver	22
2.3. La conjetura de partición de trayectorias	24
2.3.1. La fallida conjetura sobre la existencia de P_{n+1} -núcleos	28
2.3.2. La versión dirigida de la conjetura de partición de trayectorias	28
3. Resultados principales	31
3.1. Digráficas con bloques hamiltonianos	31
3.1.1. Digráficas de trayectorias combinables	36
3.2. Suma de digráficas sobre una digráfica acíclica	36
3.3. Digráficas localmente semicompletas en flechas	42
3.4. Digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas	45
3.5. Digráficas localmente in-semicompletas en flechas fuertemente conexas	46
4. Conclusiones	49

Capítulo 1

Nociones previas

En esta sección definiremos las nociones necesarias para la completa comprensión de este trabajo. Asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

1.1. Digráficas

Una *digráfica* D (también llamada *gráfica dirigida*) es una pareja ordenada $D = (V(D), A(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto no vacío llamado el conjunto de *vértices* de D y $A(D)$ es un subconjunto de $V(D) \times V(D) \setminus \{(a, a) \mid a \in V(D)\}$ llamado el conjunto de *flechas* de $V(D)$. Los elementos de $V(D)$ y de $A(D)$ serán llamados *vértices* y *flechas* respectivamente. El *orden* de una digráfica D (denotado por $|D|$) es la cardinalidad del conjunto de vértices $V(D)$.

Dados u y v dos vértices de D , denotaremos por $u \rightarrow v$, \vec{uv} o simplemente uv siempre que $(u, v) \in A(D)$ y diremos que existe una flecha de u a v , o que u domina a v ¹. Diremos que u y v son *adyacentes* si sucede que $uv \in A(D)$ o $vu \in A(D)$. Lamaremos a una flecha uv *simétrica* si además sucede que $vu \in A(D)$.

Sea $u \in V(D)$, definimos la *invecindad* de u (respectivamente *exvecindad* de u) al conjunto $N^-(u) = \{v \in V(D) \mid v \rightarrow u\}$ (resp. $N^+(u) = \{v \in V(D) \mid u \rightarrow v\}$), los elementos de $N^-(u)$ (resp. $N^+(u)$) serán llamados los *invecinos* (resp. *exvecinos*) de u . El *ingrado* (resp. *exgrado*) de un vértice u está definido por $d^-(u) = |N^-(u)|$ (resp. $d^+(u) = |N^+(u)|$).

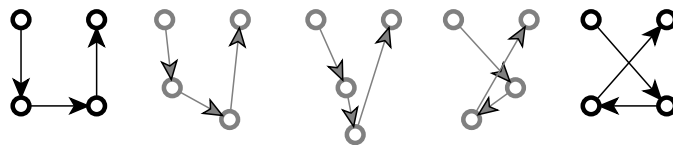


Figura 1.1: Isomorfismo de digráficas

¹Abusando un poco de la notación, escribiremos $uv \in A(D)$ o $\vec{uv} \in A(D)$, en vez de $(u, v) \in A(D)$.

Sean D y H digráficas, diremos que D y H son *isomorfas* si existe una función biyectiva $f : V(D) \rightarrow V(H)$ tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$

$$\overrightarrow{uv} \text{ si y sólo si } \overrightarrow{f(u)f(v)}.$$

Es importante siempre tener en cuenta que en este contexto dos digráficas son esencialmente la misma, si son isomorfas (véase la figura 1.1). Esto tiene como consecuencia que frecuentemente cuando uno se refiere a una digráfica en particular, en realidad, uno está pensando en alguna digráfica isomorfa a ella. Por ejemplo, consideremos una digráfica E_n con n vértices tal que no existe ninguna flecha entre sus vértices, cualquier digráfica que cumpla que no existen vértices adyacentes y que tenga orden n será isomorfa a E_n , esto nos invita a llamar a todas estas digráficas con esta propiedad, *conjunto independiente*² de orden n , que siempre denotaremos por E_n .

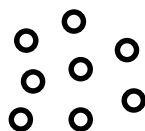


Figura 1.2: E_8

Sean D y D' digráficas, diremos que D' es *subdigráfica* de D si sucede que $V(D') \subset V(D)$ y para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D')$, sucede que

$$\text{si } uv \in A(D') \text{ entonces } uv \in A(D)$$

Consideremos $S, T \subset V(D)$, denotaremos por $D[S]$ a la subdigráfica de D , llamada la *digráfica inducida* por S , con conjunto de vértices $V(D[S]) = S$ y flechas $A(D[S]) = \{\overrightarrow{uv} \in A(D) \mid u, v \in S\}$. Usaremos $D - S$ para referirnos a la digráfica $D[V(D) - S]$. Cuando $S = \{x\}$ sea un sólo vértice, escribiremos $D - x$ en vez de $D - \{x\}$. Una ST -flecha es una flecha \overrightarrow{st} con $s \in S$ y $t \in T$; en caso de que $S = \{x\}$ es un conjunto que consta de un solo vértice, usaremos xT -flecha, en vez de $\{x\}T$ -flecha. Diremos que S domina a T (denotado por $S \mapsto T$) si $st \in A(D)$ para cualesquiera $s \in S$ y $t \in T$.

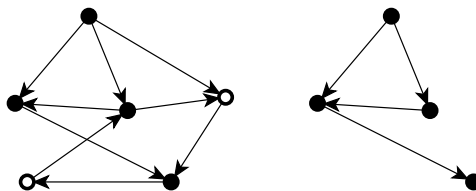


Figura 1.3: Digráfica inducida por los vértices negros

Dadas D_1, D_2 subdigráficas de una digráfica D , definiremos $D_1 \cap D_2$ como $D[V(D_1) \cap V(D_2)]$.

²También es usual llamarlo *gráfica* o *digráfica independiente*.

1.1.1. Caminos y trayectorias

Dada una digráfica D , un camino \mathcal{W} en D es una sucesión finita de vértices de D

$$\mathcal{W} = (x_1, x_2, \dots, x_k),$$

tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ sucede que $x_i x_{i+1} \in A(D)$. Usaremos $V(\mathcal{W})$ para denotar a los vértices que pertenecen al camino \mathcal{W} , al vértice x_1 se le llamará *vértice inicial* de \mathcal{W} y x_k será el *vértice final* de \mathcal{W} , ambos serán los *vértices extremos* de \mathcal{W} . Diremos que un camino es *cerrado* si tenemos que $x_1 = x_k$. Una *trayectoria* P en D es un camino tal que todos los vértices de la sucesión son distintos. Un *ciclo* C es un camino cerrado tal que todos sus vértices no extremos son distintos. Una digráfica sin ciclos también es llamada digráfica *acíclica*.

Dado un camino $\mathcal{W} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, el *orden* de \mathcal{W} es el número de vértices distintos que posee \mathcal{W} . La *longitud* de \mathcal{W} será $l = k - 1$. En particular cuando \mathcal{W} es una trayectoria, \mathcal{W} tiene orden k y longitud $k - 1$. Dados dos vértices $s, t \in V(D)$, si existe un camino \mathcal{W} (una trayectoria P) entre ellos, diremos que \mathcal{W} es un *st-camino* (respectivamente P es una *st-trayectoria*). No es difícil probar considerando el *st* camino de longitud mínima, que si existe un *st*-camino, entonces existe una *st*-trayectoria. Dados $S, T \subset V(D)$, una *ST-trayectoria* es cualquier *st*-trayectoria, con $s \in S$ y $t \in T$.

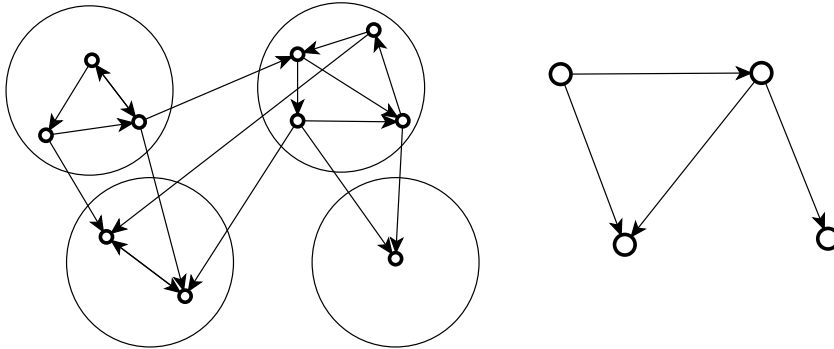


Figura 1.4: D y $SC(D)$.

Dados s, t vértices de D , denotaremos por $s \sim t$ cuando exista una *st*-trayectoria y al mismo tiempo una *ts*-trayectoria. No es difícil demostrar que \sim es una relación de equivalencia en $V(D)$, por lo que \sim induce una partición $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ de $V(D)$. A $D[S_1], \dots, D[S_r]$ las llamaremos las *componentes fuertemente conexas* de D y si $r = 1$, es decir, cuando D es la única componente fuertemente conexa de D , diremos que D es *fuertemente conexa*. Usaremos $SC(D)$ para denotar a la digráfica llamada la *condensación* de D , cuyo conjunto de vértices consiste en el conjunto de las componentes fuertemente conexas $\{D[S_1], D[S_2], \dots, D[S_r]\}$, y las flechas son $A(SC(D)) = \{D[S_i]D[S_j] \mid \overrightarrow{s_i s_j} \in A(D), \text{ para algún } s_i \in S_i \text{ y } s_j \in S_j\}$. Es fácil ver que $SC(D)$ es una digráfica sin ciclos (véase la figura 1.4).

Si $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y $Q = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ son trayectorias en D , denotaremos por $x_i P x_j$ a la subtrayectoria $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$, y si $x_m \rightarrow y_1$, denotaremos por PQ a la *concatenación* $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_l)$. En caso de que

$\mathcal{C} = (z_1, z_2, \dots, z_n = z_1)$ sea un ciclo y z_i, z_j sean vértices pertenecientes a \mathcal{C} , usaremos $z_i\mathcal{C}z_j$ para denotar a la subtrayectoria del ciclo \mathcal{C} que va de z_i a z_j .

Usaremos $\lambda(D)$ para denotar al orden máximo de las trayectorias contenidas en D^3 , si P es una trayectoria que tiene $\lambda(D)$ vértices diremos que P es una *trayectoria de orden máximo*⁴. Dado un subconjunto de vértices S , algunas veces usaremos $\lambda(S)$ en lugar de escribir $\lambda(D[S])$. Cuando una digráfica D posee un ciclo que contiene todos los vértices de la digráfica, diremos que D es *hamiltoniana*, si una digráfica posee una trayectoria que contiene todos los vértices de la digráfica, diremos que D tiene una *trayectoria hamiltoniana*.

1.2. Clases de digráficas

1.2.1. Gráficas

Una *gráfica* (también llamada *digráfica simétrica*) G es una digráfica tal que todas sus flechas son simétricas⁵. Dada una digráfica D , la *gráfica subyacente* de D es la gráfica $UG(D)$, con $V(UG(D)) = V(D)$ y $A(UG(D)) = \{xy \mid xy \in A(D) \text{ o } yx \in A(D)\}$, en otras palabras, $UG(D)$ es la gráfica que se obtiene al sustituir todas las flechas de D por flechas simétricas. Dada una digráfica D , diremos que D es *conexa*, si la subgráfica subyacente $UG(D)$ es fuertemente conexa.

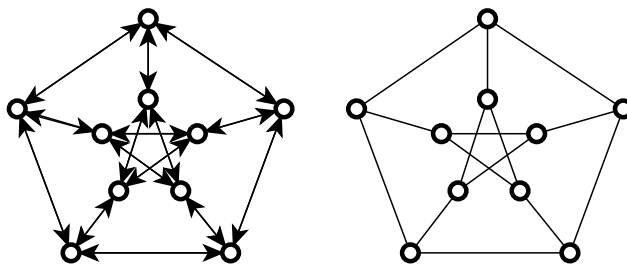


Figura 1.5: La gráfica de Petersen vista de dos maneras distintas

Dada una gráfica G conexa y $u \in V(G)$, diremos que u es un *vértice de corte* de G si $G - u$ no es conexa. Un *bloque* B de G es una subdigráfica simétrica (también llamada *subgráfica* en el contexto de gráficas) sin vértices de corte tal que

³Cuidado! Es común incurrir en el error de considerar a $\lambda(D)$ como la longitud máxima de entre todas las posibles trayectorias en D .

⁴Nótese que una trayectoria de orden máximo es una trayectoria de longitud máxima $\lambda(D) - 1$, lo que nos permitirá también llamar a P una *trayectoria de longitud máxima*.

⁵En la mayoría de la literatura, se define gráfica como una pareja ordenada $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío llamado los vértices de G y $E(G)$ es un conjunto que contiene subconjuntos de $V(G)$ de cardinal dos, llamado las aristas de $E(G)$.

La razón por la cual podemos redefinir el concepto de gráfica, sin que nos preocupe la sutil diferencia que existe entre nuestra definición y la definición encontrada en la mayoría de los textos, consiste en que para muchos fines en el estudio de las gráficas, podemos considerar cualquier arista como una flecha simétrica. Intuitivamente podemos pensar que cuando existe una arista entre dos vértices, podemos caminar de un vértice a otro sin ningún problema con respecto al sentido que elijamos, en una digráfica ocurre exactamente lo mismo cuando existe una flecha simétrica entre esos dos vértices. Esta idea sugiere que cualquier gráfica puede ser vista como una digráfica (véase la figura 1.5).

no existe una subgráfica de G sin vértices de corte que la contenga. El siguiente es un resultado elemental de un curso básico de teoría de las gráficas, su demostración puede consultarse en [13].

Teorema 1.2.1. *Sea G una gráfica. Entonces:*

- i) *cualesquiera dos bloques de G se intersectan en a lo más un vértice, este vértice es un vértice de corte,*
- ii) *todos los vértices están contenidos en algún bloque, un vértice que no es vértice de corte está contenido en exactamente un bloque,*
- iii) *cada ciclo de G está contenido en algún bloque de G .*

En una gráfica G , la *distancia* entre dos de sus vértices x, y (denotada por $d(x, y)$) es la longitud de una xy -trayectoria de orden mínimo en G (en caso de no existir alguna xy -trayectoria, simplemente diremos que $d(x, y) = \infty$). El *grado* de un vértice x , lo definimos como $d(x) := |\{y \in V(D) \mid d(x, y) = 1\}|$. Si H es una subgráfica de D , definimos $d(x, H) := \min_{y \in V(H)} \{d(x, y)\}$. Además denotaremos por $\Delta(G) := \max_{x \in V(D)} \{d(x)\}$ y $\delta(G) := \min_{x \in V(D)} \{d(x)\}$. La *excentricidad* de un vértice x será $e(x) := \max_{y \in V(G)} \{d(x, y)\}$.

Árboles

Un *árbol* T es una gráfica conexa, sin ciclos de orden mayor a dos. Un *árbol enraizado* $T(x)$ es un árbol T que tiene un vértice especial x que llamaremos *raíz*. Un teorema básico de árboles es el siguiente.

Teorema 1.2.2. *Dados dos vértices de un árbol existe una única trayectoria entre ellos.*

El teorema anterior nos permite definir una función en los vértices no raíz de un árbol enraizado $T(x)$, $p : V(T(x)) \setminus \{x\} \rightarrow V(T(x))$ tal que $p(z) = y$ si y es adyacente a z y $d(x, z) = d(x, y) + 1$, a y lo llamaremos el *padre* de z y z será un *hijo* de y . Además, si existe $w = p(p(z))$, a w lo llamaremos *abuelo* de z . Intuitivamente un árbol enraizado lo podemos pensar como una gráfica que cuelga del vértice raíz, si pensáramos a las aristas de la misma longitud, estarían definidos niveles de acuerdo que tan alejados están los vértices de la raíz. Formalmente definimos un *nivel* en $T(x)$ como $N_l = \{y \in V(T(x)) \mid d(x, y) = l\}$

1.2.2. Torneos y digráficas semicompletas

Torneos

Un *torneo* es una digráfica T tal que cualesquiera dos vértices son adyacentes y ninguna flecha es simétrica. Los torneos representan una de las clases de digráficas más estudiadas ya que a diferencia de su análogo en el mundo de las gráficas (nos referimos a las gráficas completas), para cada orden existen una gran cantidad de torneos no isomorfos. Como ejemplo, consideremos un torneo de n vértices tal que para cualesquiera tres vértices u, v, w cumpla la siguiente propiedad:

$u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ implican que $u \rightarrow w$.

Es fácil ver que todos los vértices de este torneo tienen distintos exgrados (basta observar que dados dos vértices x, y ; si x domina a y entonces los exvecinos de y son dominados por x , por lo que x tiene exgrado mayor a y). No es difícil construir para cada orden un torneo que cumpla esta singular propiedad, simplemente considere n vértices, elija alguno y tracemos todas las flechas de ese vértice hacia los demás, sucesivamente repetamos este procedimiento con los vértices restantes hasta que sean trazadas todas las flechas posibles. Los hechos anteriores nos permiten afirmar que existe, para cada orden, un único torneo, salvo isomorfismos, que cumple la propiedad requerida. Por ello nombraremos a este torneo como el *torneo transitivo de orden n* , denotado por TT_n (véase la figura 1.6).

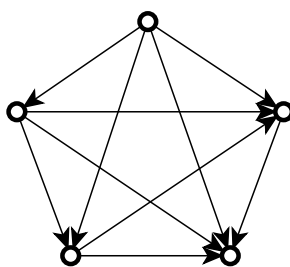


Figura 1.6: TT_5

El torneo TT_n cumple la propiedad de ser acíclico, además es el único torneo de orden n que cumple esta propiedad, ya que si T es un torneo de orden n que no es isomorfo a TT_n , posee tres vértices u, v, w tales que $u \rightarrow v$, $v \rightarrow w$ y $w \rightarrow u$, formando un ciclo de longitud 3. Si uno recorre el torneo TT_n desde el vértice con mayor exgrado, descendiendo con respecto al exgrado, hasta el vértice que tiene exgrado cero, obtenemos una trayectoria hamiltoniana. En general, se tiene el siguiente resultado que más adelante se verá que es corolario del teorema 2.1.1.

Teorema 1.2.3 (Rédei). [33] *Si T es un torneo entonces T posee una trayectoria hamiltoniana.*

Digráficas semicompletas

Una generalización muy conocida de los torneos son las digráficas *semicompletas*, éstas son digráficas tales que entre cualesquiera dos vértices existe alguna flecha (puede ser simétrica). Al notar que toda semicompleta contiene algún torneo como subdigráfica, tenemos que también las digráficas semicompletas poseen trayectorias hamiltonianas.

1.2.3. Otras generalizaciones de torneos

Hay diversos aspectos en el estudio de las digráficas que pueden resultar bastante complejos. Antes de demostrar o refutar una conjetura, usualmente se verifica la conjetura en clases conocidas y bien caracterizadas de digráficas, como son los torneos. Ante la necesidad de extender ciertos resultados sobre torneos a más clases de digráficas, surgen de manera natural nuevas clases de digráficas que son definidas

a partir de propiedades que de antemano se sabe que todo torneo satisface, a estas clases de digráficas las llamaremos *generalizaciones de torneos*.

Además de las digráficas semicompletas, existen otras generalizaciones de torneos bastante estudiadas.

Digráficas k -cuasitransitivas

Una digráfica D es *cuasitransitiva* si dados vértices $u, v, w \in V(D)$ tales que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$, sucede que u y w son adyacentes o son iguales. Existe una caracterización recursiva de las digráficas cuasitransitivas que nos permite resolver de manera eficiente⁶ los siguientes problemas:

- Decidir si D posee un ciclo o una trayectoria hamiltoniana.
- Dados $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V(D)$, decidir si existe una u_1v_1 -trayectoria P y una u_2v_2 -trayectoria Q , tales que P y Q son ajenas.

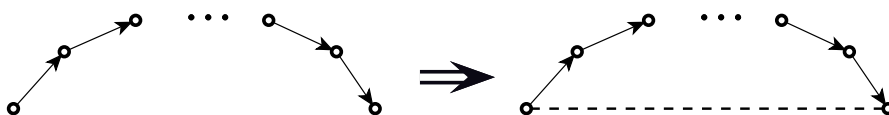


Figura 1.7: Digráficas k -cuasitransitivas

Dado un entero positivo $k \geq 2$, diremos que una digráfica D es k -cuasitransitiva, si dados u, v vértices de D tales que entre ellos existe una uv -trayectoria de longitud k , entonces sucede que u y v son adyacentes o iguales (véase figura 1.7). Nótese que una digráfica es 2-cuasitransitiva si y sólo si es cuasitransitiva. Aún no se conocen caracterizaciones completas que permitan decidir ciertas propiedades de las digráficas k -cuasitransitivas, para $k \geq 3$, lo único que se conoce es una reciente caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas (véase el teorema 3.4.2).

Digráficas de trayectorias combinables

Diremos que D es una *digráfica de trayectorias combinables* si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ y cualquier par P, Q de uv -trayectorias internamente ajenas⁷, existe entre ellos una uv -trayectoria R tal que $V(R) = V(P) \cup V(Q)$ (véase figura 1.8). El siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en [6], permite decidir en tiempo eficiente, si una digráfica es de trayectorias combinables.

⁶Un problema eficiente, en este contexto, significa que el número de pasos para resolver el problema en una digráfica fija, está acotado por un polinomio $p(n)$, donde n es el orden de la digráfica.

⁷Diremos que dos trayectorias P y Q son *internamente ajenas*, si los únicos vértices que tienen en común son sus vértices extremos.

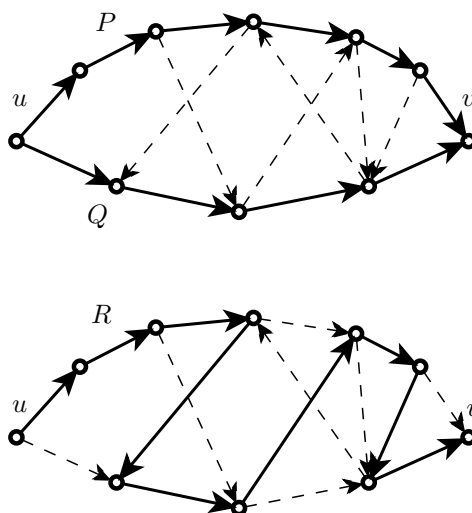


Figura 1.8: La propiedad de combinar trayectorias.

Teorema 1.2.4. Una digráfica D es de trayectorias combinables, si y sólo si para cada par de vértices $u, v \in V(D)$ y cualquier par $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_r = v)$, $Q = (u = v_0, v_1, \dots, v_s = v)$ de uv -trayectorias internamente ajenas en D , con $r, s \geq 2$, existe $i \in \{1, \dots, r\}$, tal que $u_i \rightarrow v_1$ o existe $j \in \{1, \dots, s\}$, tal que $v_j \rightarrow u_1$.

Dos condiciones necesarias bastante naturales para que una digráfica cualquiera D sea hamiltoniana son las siguientes.

- D es fuertemente conexa,
- la subgráfica subyacente $UG(D)$ no tiene vértices de corte.

Es un ejercicio interesante demostrar que estas dos condiciones también son suficientes para que una digráfica D de trayectorias combinables resulte ser hamiltoniana (véase el teorema 3.1.4).

Digráficas localmente semicompletas y torneos locales

Dada una digráfica D , diremos que D es una digráfica *localmente in-semicompleta* si sucede que para todo vértice $x \in V(D)$, $D[N^-(x)]$ es una digráfica semicompleta (en caso de que $D[N^-(x)]$ sea un torneo, diremos que D es un *localmente in-torneo*). Análogamente, si sucede que para todo vértice $x \in V(D)$, $D[N^+(x)]$ es una digráfica semicompleta, diremos que D es una digráfica *localmente ex-semicompleta* (de la misma manera, si $D[N^+(x)]$ resulta ser un torneo, diremos que D es un *localmente ex-torneo*). Las digráficas que cumplan las condiciones de ser localmente in-semicompletas y localmente ex-semicompletas las llamaremos *localmente semicompletas* y a los localmente in-torneos que a su vez sean localmente ex-torneos serán llamados *torneos locales*.

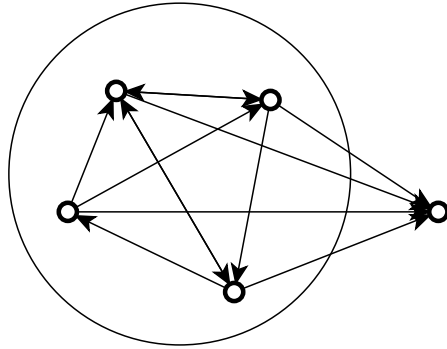


Figura 1.9: Digráficas localmente in-semicompletas.

Teorema 1.2.5. *Toda digráfica localmente in-semicompleta (ex-semicompleta) es de trayectorias combinables.*

Demostación. Sea D una digráfica localmente ex-semicompleta, consideremos dos vértices $u, v \in V(D)$ y cualquier par $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_r = v)$, $Q = (u = v_0, v_1, \dots, v_s = v)$ de uv -trayectorias internamente ajenas con $r, s \geq 2$. Como $u_1, v_1 \in N^+(u)$, tenemos que $u_1 \rightarrow v_1$ o que $v_1 \rightarrow u_1$, por lo que se satisface la condición del teorema 1.2.4 y obtenemos que D es de trayectorias combinables. Si D es localmente in-semicompleta, simplemente cambiamos el sentido de todas las flechas, obteniendo una digráfica localmente ex-semicompleta, por lo tanto de trayectorias combinables. Observemos que la propiedad de ser de trayectorias combinables se preserva bajo el cambio del sentido de todas las flechas, esto nos permite asegurar sin mayor problema que D es de trayectorias combinables.

□

Digráficas localmente semicompletas por flechas

Una digráfica localmente semicompleta es una generalización de los torneos que preserva “localmente” en cada vértice la propiedad de ser semicompleta. Existe una generalización análoga que preserva “localmente” en cada flecha la propiedad de ser semicompleta. Dada una digráfica D , diremos que D es *localmente in-semicompleta por flechas* (también llamadas *in-semicompletas en flechas*) si para cualesquiera u y v vértices de D , con $u \rightarrow v$, cumplen la siguiente condición:

- Si x es invecino de u y y es invecino de v , entonces $x = y$ o bien x y y son adyacentes.

De manera análoga una digráfica D es *localmente ex-semicompleta* si cualesquiera u y v vértices de D , con $u \rightarrow v$, cumplen la siguiente condición:

- Si x es exvecino de u y y es exvecino de v , entonces $x = y$ o bien x y y son adyacentes.

Cuando D satisfaga las dos condiciones anteriores, simplemente diremos que D es localmente semicompleta por flechas.

1.2.4. Bipartitas y k -partitas

Dado un conjunto A , una k -partición ordenada de A es una sucesión (A_1, A_2, \dots, A_k) , donde $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\cup_{i=1}^k A_i = A$. Sea D una digráfica y k un entero positivo mayor a 1, diremos que D es una digráfica k -partita si existe una k -partición de los vértices (V_1, V_2, \dots, V_k) tal que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que si $x, y \in V_i$, entonces x y y no son adyacentes. A los conjuntos V_1, \dots, V_k los llamaremos las *partes* de D . En el caso especial en que D tiene dos partes, diremos que D es una digráfica *bipartita*.

Las gráficas y digráficas bipartitas han sido ampliamente estudiadas por sus aplicaciones en distintos contextos como la asignación de tareas y la teoría de códigos. Una clase muy estudiada de digráficas bipartitas son las digráficas *bipartitas semi-completas*, estas son digráficas bipartitas tales que entre cualesquiera dos vértices de distintas partes son adyacentes, en el caso de que ninguna flecha sea simétrica, diremos que D es una digráfica *bipartita completa*. De manera análoga se definen las gráficas k -partitas *semicompletas* y k -partitas *completas*. Cabe mencionar que las gráficas k -partitas también pueden ser consideradas como una generalización de los torneos, ya que un torneo es una digráfica k -partita completa, donde las partes constan de un solo vértice.

1.3. Coloraciones

Dada una digráfica D , una k -coloración de los vértices es una función

$$c : V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\},$$

en otras palabras, es una asignación de colores a cada vértice. Una *coloración propia* es una k -coloración de los vértices tal que para cualesquiera dos vértices adyacentes x, y sucede que $c(x) \neq c(y)$. Una *clase cromática* es un conjunto formado por todos los vértices que tienen asignado un mismo color, en otras palabras, una clase cromática está formada por el conjunto $c^{-1}(i)$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Al mínimo k para el cual existe una k -coloración propia para D es llamado el *número cromático* de D y es denotado por $\chi(D)$. Las coloraciones de vértices son un tema muy estudiado en la teoría de las gráficas y aún existen grandes problemas sin respuesta.

Capítulo 2

Introducción histórica

Un gran número de los problemas más importantes de la teoría de las gráficas se encuentran de alguna manera u otra relacionados con el concepto de partición. Ya han pasado varios años desde la prueba de K. Appel y W. Haken del famoso teorema de los cuatro colores, resultado que nos permite asegurar que cualquier mapa lo podemos colorear usando únicamente cuatro colores sin que existan dos países con frontera común del mismo color.

Colorear una gráfica es dividir sus vértices en clases cromáticas. Los problemas de coloraciones de vértices son aquellos relacionados a la partición de los vértices de una gráfica, tales que las clases cromáticas cumplan cierta condición. Por ejemplo, los problemas relacionados a las coloraciones propias son aquellos que buscan la condición de que las clases cromáticas sean conjuntos independientes.

Las digráficas han sido objetos muy estudiados, su versatilidad para modelar distintos problemas como encontrar un flujo máximo en una red o una ruta óptima nos hacen pensar en la importancia que puede tener conocer en abstracto algunas de sus propiedades. No es de extrañar que muchos de los problemas estudiados en digráficas sean aquellos que involucran trayectorias dirigidas. Por ejemplo, sabemos que el algoritmo de Dijkstra, permite a una computadora resolver en "tiempo eficiente" el siguiente problema: dados dos vértices en una digráfica con peso en las flechas, encontrar una trayectoria entre esos dos vértices de peso mínimo. Se sabe que el problema opuesto, el de dados dos vértices, encontrar entre ellos la trayectoria de peso máximo (o simplemente cuando todas las aristas pesan lo mismo, la trayectoria más larga) es un problema NP completo, es decir, no se conoce un algoritmo eficiente que lo resuelva.

El ejemplo anterior nos brinda la intuición de que el universo de problemas relacionados con las trayectorias de longitud máxima de una digráfica, en general, no son fáciles de resolver ya que si existiera una "buena" caracterización de las trayectorias de longitud máxima, esta caracterización nos permitiría construir un algoritmo que encuentre dichas trayectorias; de hecho, aún para clases como son las generalizaciones de torneos existen grandes preguntas sobre trayectorias de longitud máxima sin resolver (véase [12]).

2.1. El teorema de Gallai-Roy-Vitaver

Cuando se estudia el número cromático $\chi(D)$ de una digráfica D , uno sospecharía que éste depende únicamente de la subgráfica subyacente $UG(D)$, no obstante, existe un resultado descubierto independientemente por Gallai, Roy y Vitaver que relaciona las trayectorias dirigidas de longitud máxima con el número cromático.

Teorema 2.1.1 (Gallai [25], Roy[37], Vitaver[38]). *Sea D una digráfica, entonces se cumple que*

$$\chi(D) \leq \lambda(D).$$

Demostración. Considere T una subdigráfica acíclica de D máxima por contención. Definamos la función $p : V(D) \rightarrow \{1, \dots, \lambda(D)\}$ tal que $p(x)$ es el número de vértices que tiene una trayectoria en T de orden máximo que tiene como vértice inicial x . Demostraremos que p es una coloración propia de D . Dados dos vértices $u, v \in V(D)$, tales que $p(u) = p(v)$, no puede ocurrir que $\vec{uv} \in A(T)$, de lo contrario si consideramos P una trayectoria de orden $p(v)$ en T cuyo vértice inicial es v , como T es acíclica, no es posible que la trayectoria P contenga a u , por lo que $(u)P$ es una trayectoria en T con vértice inicial u de orden $p(u) + 1$, lo que contradice la maximalidad de $p(u)$.

Ahora, si suponemos que $\vec{uv} \in A(D)$, por lo anterior, \vec{uv} no puede pertenecer a $A(T)$, si usamos esto y la maximalidad de T , tenemos que $T + \vec{uv}^1$ es una digráfica tal que tiene un ciclo C que pasa por la arista \vec{uv} . Sea Q una trayectoria de orden $p(u)$ cuyo vértice inicial es u , el único vértice que tienen en común C y Q es u pues T es una digráfica acíclica. Pero esto implica que $(v, C, u)Q$ es una trayectoria con vértice inicial v con más de $p(v)$ vértices, contradiciendo la maximalidad de $p(v)$, por lo que no existen dos vértices adyacentes tales que $p(u) = p(v)$, esto implica que p es una coloración propia de D que usa a lo más $\lambda(D)$ vértices.

□

El teorema de Gallai-Roy-Vitaver generaliza uno de los teoremas básicos sobre torneos, llamado el teorema de Rédei (teorema 1.2.3). Este resultado afirma que todo torneo posee una trayectoria hamiltoniana. Esta propiedad de los torneos es corolario del Teorema 2.1.1 gracias a que el número cromático de un torneo siempre es el número de vértices que este posee, esto acota inferiormente al orden de las trayectorias de longitud máxima, por lo que necesariamente cada trayectoria de orden máximo debe tener a todos los vértices del torneo.

2.2. Generalizaciones del teorema de Gallai-Roy-Vitaver

En 1982, J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Xuong propusieron la siguiente conjetura.

Conjetura 2.2.1 (J. M. Laborde, C. Payan, N. H. Xuong [28]). *Para toda digráfica D existe un conjunto independiente que intersecta a todas las trayectorias de longitud máxima.*

¹ $T + \vec{uv}$ denota a la digráfica con $V(T + \vec{uv}) = V(T)$ y $A(T + \vec{uv}) = A(T) \cup \{\vec{uv}\}$.

2.2. GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE GALLAI-ROY-VITAVER²³

No es difícil ver que la conjetura anterior es una generalización del teorema de Gallai-Roy-Vitaver. Supongamos que la conjetura se cumple para cualquier digráfica y sea D una digráfica. Entonces existe un conjunto de vértices independiente H_1 de D que intersecta a las trayectorias de longitud máxima, por lo tanto tenemos que $\lambda(D - H_1) < \lambda(D)$, de igual modo existirá un conjunto independiente H_2 de $D - H_1$ de tal modo que $\lambda(D - H_1 - H_2) < \lambda(D - H_1) < \lambda(D)$. Seguimos de la misma manera hasta descomponer a D en H_1, H_2, \dots, H_m conjuntos independientes, que satisfacen que

$$1 = \lambda(D - H_1 - H_2 - \dots - H_{m-1}) < \dots < \lambda(D - H_1 - H_2) < \lambda(D - H_1) < \lambda(D),$$

por lo que $m \leq \lambda(D)$. Como H_1, H_2, \dots, H_m es una descomposición de $V(D)$ en m conjuntos independientes, tenemos que D es m -coloreable, por lo que $\chi(D) \leq m$. Finalmente se tiene que $\chi(D) \leq m \leq \lambda(D)$ (véase la figura 2.1).

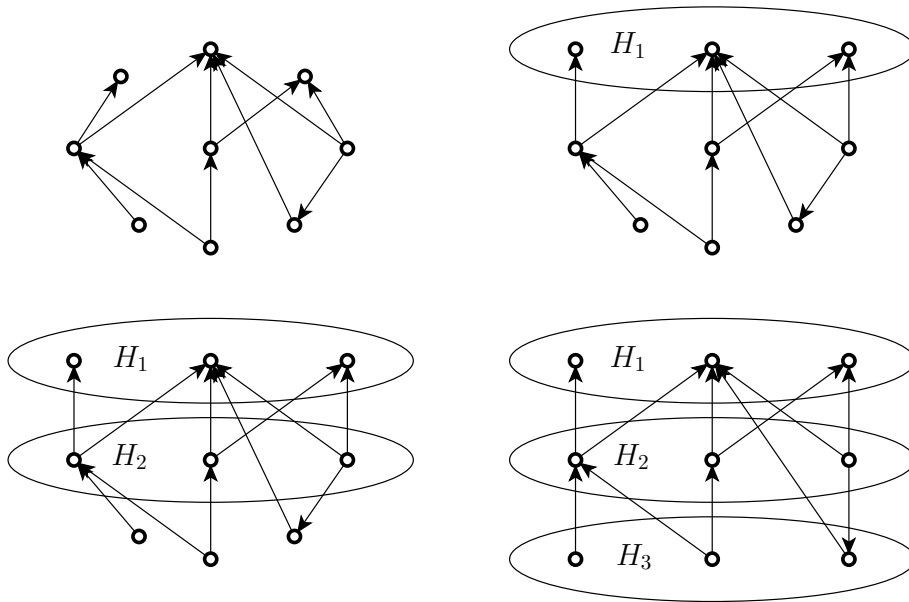


Figura 2.1: La conjetura de Laborde, C. Payan, Xuong en una digráfica D con $\lambda(D) = 3$

Se han obtenido resultados parciales sobre la conjetura 2.2.1, a continuación presentamos un listado de clases de digráficas que satisfacen la conjetura de Laborde, Payan y Xuong.

- Las digráficas simétricas².
- Las digráficas que tienen núcleo³.

²En otras palabras, la versión no orientada de la conjetura 2.2.1 ha demostrado ser cierta para todas las gráficas.

³Una digráfica D tiene un núcleo N , si N es un conjunto independiente tal que para todo $v \in V(D - N)$ existe una vN flecha.

- Las digráficas que cumplen la propiedad de que ningún par de ciclos comparten alguna flecha[3].
- Las digráficas cuyo número de independencia $\alpha(D)$ es a lo más 2^4 [27].
- Las digráficas de líneas⁵ [24].
- Las digráficas con trayectorias hamiltonianas.
- Las siguientes generalizaciones de torneos: las digráficas de trayectorias combinables, las cuasitransitivas, localmente torneos en flechas, localmente in-semicompletas, localmente ex-semicompletas, k -partitas semicompletas [24], y recientemente probada en digráficas localmente in-semicompletas en flechas, localmente ex-semicompletas en flechas y 3-cuasitransitivas [35].

Es importante mencionar que para las generalizaciones de torneos y para las digráficas de líneas se ha probado que cumplen una propiedad más fuerte, que es la de poseer un conjunto independiente que intersekte a todas trayectorias no-aumentables⁶.

2.3. La conjetura de partición de trayectorias

La historia del problema de partición de trayectorias, el cual será nuestro tema principal de estudio, tiene su origen en 1966 en uno de los primeros artículos publicados por László Lovász [29], en este artículo se presenta el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 (L. Lovász). *Sea G una gráfica y a, b enteros positivos tales que $a + b = \Delta(G) - 1$, entonces existe una partición (A, B) de $V(G)$ tal que $\Delta(G[A]) \leq a$ y $\Delta(G[B]) \leq b$.*

En [36] M. Stiebitz demostró un resultado similar que consideraba el grado mínimo δ como parámetro. La conjetura de partición de trayectorias (en inglés llamada *The Path Partition Conjecture*) es un problema semejante a los mencionados anteriormente, la versión no dirigida de esta conjetura fue discutida por primera vez por L. Lovász y P. Mihók en el año de 1981 en Szeged, Hungría; fue mencionada en las tesis de P. Hajnal [26] y J. Vronka [39] y fue presentada por primera vez en 1983 en un artículo de Laborde, Payan y Xoung.

Conjetura 2.3.2 (J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Xoung [28]). *Para toda gráfica G y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$, existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$.*

Dados λ_1, λ_2 fijos, diremos que G es (λ_1, λ_2) -particionable si existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$, por lo que la conjetura anterior se puede enunciar en nuevos términos diciendo que toda

⁴El número de independencia $\alpha(D)$ de una digráfica es el orden de la subgráfica independiente más grande.

⁵La digráfica de líneas de una digráfica D es la digráfica $L(D)$ tal que su conjunto de vértices es igual al conjunto de flechas de D y $\vec{ab} \in A(L(D))$ si y sólo si $a = (x, y)$ y $b = (y, z)$, con $x, y, z \in V(D)$.

⁶Una trayectoria $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es no-aumentable si no existe una trayectoria (y_1, \dots, y_m) en $D - P$ tal que $y_m x_1 \in A(D)$ o $x_k y_1 \in A(D)$ o sucede que $x_i y_1 \in A(D)$ y $y_m x_{i+1} \in A(D)$. Es fácil ver que una trayectoria de longitud máxima es no-aumentable.

gráfica es (λ_1, λ_2) -particionable para cualesquiera λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$.

I. Broere et al. demostraron de manera constructiva el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3 (I. Broere et al. [15]). *Sea G una gráfica G y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, si tenemos que $\lambda_2 \leq 4$, entonces G es (λ_1, λ_2) -particionable.*

No obstante, en [26, 39] se demuestra que el resultado anterior se puede mejorar hasta $\lambda_2 \leq 5$. Lo mejor que se tiene es consecuencia de un resultado más general probado en un artículo del año 2005 de L. S. Mel'nikov e I.V. Petrenko .

Teorema 2.3.4 (L. S. Mel'nikov e I.V. Petrenko [30]). *Sea G una gráfica G y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, si tenemos que $\lambda_2 \leq 8$, entonces G es (λ_1, λ_2) -particionable.*

Haciendo uso de la famosa condición de Dirac⁷ para que una gráfica sea Hamiltoniana, en [15] se demostró que si $\lambda(G) \geq |G| - 1$, entonces G satisface la conjetura 2.3.2. En el año 2005, M. Frick e I. Schiermeyer demostraron un resultado más fuerte.

Teorema 2.3.5 (M. Frick, I. Schiermeyer [21]). *Sea G una gráfica que satisface que $\lambda(G) = |G| - p$ con $p \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si λ_1, λ_2 son enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$.*

De los resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.6. *Sea G una gráfica con $\lambda(G) \leq 17$ y λ_1, λ_2 son enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$, $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Al suponer que $\lambda_2 \leq \lambda_1$, tenemos que $\lambda_2 \leq \lfloor \lambda(G)/2 \rfloor \leq 8$. Usando el teorema 2.3.4 tenemos el resultado.

□

Corolario 2.3.7 (I. Broere et al.). *Sea G una gráfica con a lo más 21 vértices y λ_1, λ_2 son enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$, $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Si $\lambda(G) \leq 17$, el resultado se obtiene usando el teorema anterior. Cuando $\lambda(G) = 18, 19, 20$ ó 21 , el resultado se obtiene usando el teorema 2.3.5.

□

También se conocen condiciones que involucran parámetros conocidos de las gráficas.

Teorema 2.3.8. *Si G es una gráfica tal que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

⁷La condición de Dirac dice que si $\delta(G) \geq |G|/2$, entonces G es Hamiltoniana

- $\Delta(G) \leq 3$ [29, teorema 1]
- $\Delta(G) \geq |V(G)| - 8$ [15, corolario 3.9] (y usando el teorema 2.3.4).
- $g(G) \geq \lceil \lambda(G)/2 \rceil - 1^8$ [19].
- $c(G) \leq \lceil \lambda(G)/2 \rceil + 2^9$ [18].

Entonces G satisface la conjetura de partición de trayectorias.

En [15, 18, 19] se prueban resultados que relacionan la (λ_1, λ_2) -particionabilidad con la existencia de ciertos ciclos. En gran parte de las clases de gráficas en las que se ha probado que satisfacen la conjetura de partición de trayectorias frecuentemente se realiza una partición *ad hoc* a la clase estudiada, esta partición depende de las estructuras específicas que poseen ciertas clases de digráficas, un ejemplo de esto se puede ver en la prueba del inciso a) del siguiente teorema.

Teorema 2.3.9. *Sea G una gráfica conexa y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y que $\lambda_1 \geq \lambda_2$.*

- a) *Si G tiene un ciclo de longitud λ_1 entonces G es (λ_1, λ_2) particionable [15].*
- b) *Si $g(G) \geq \lambda_2 - 1$, entonces G es (λ_1, λ_2) particionable¹⁰ [18].*
- c) *Si $c(G) \leq \lambda_1 + 2$, entonces G es (λ_1, λ_2) particionable [19].*

Demostración (inciso a). Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud λ_1 , consideremos los siguientes conjuntos

$$A_i = \{v \in V(G) \mid d(v, \mathcal{C}) = i\}, \text{ con } i \in \mathbb{N}.$$

En particular tenemos que $A_0 = V(\mathcal{C})$. Claramente como G es conexa, $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una partición de $V(G)$. Definamos la bipartición (A, B) del siguiente modo:

$$A := \bigcup_{i \text{ impar}} A_i, \quad B := \bigcup_{i \text{ par}} A_i.$$

No existen $A_i A_{i+2}$ aristas, de lo contrario, existirían $a_i \in V(A_i), a_{i+2} \in V(A_{i+2})$ con $a_i a_{i+2} \in E(G)$, pero como $d(a_i, \mathcal{C}) = i$, entonces existe un camino de \mathcal{C} a a_{i+2} de longitud a lo más $i + 1$, lo que implica que $d(a_{i+2}, \mathcal{C}) \leq i + 1$. Esto contradice la definición de A_{i+2} .

Por lo tanto las trayectorias de orden máximo de A y de B están contenidas en las componentes A_i , por ello basta ver cuál es el orden máximo posible de cada una de las trayectorias contenidas en cada A_i .

Como $A_0 = V(\mathcal{C})$, se tiene que $\lambda(A_0) = \lambda_1$. Si $i \neq 0$, veamos que $\lambda(A_i) \leq \lambda_2$. Sea T una trayectoria de longitud máxima en $G[A_i]$ con vértice inicial v_1 , consideremos $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ y sea $R = (x_0 = c_i, x_1, \dots, x_i = v_1)$ una $\mathcal{C}v_1$ trayectoria de

⁸ $g(G)$ denota el orden del ciclo no de orden 2 de longitud mínima en G .

⁹ $c(G)$ denota el orden del ciclo de longitud máxima en G .

¹⁰Una mejor condición más reciente probada en [40] por Wenjie He y Baoli Wang; se postula que si $g(G) \geq \frac{2}{3}(\lambda_2 + 1)$ entonces G es (λ_1, λ_2) -particionable.

longitud i . Ahora consideremos la trayectoria $S = (c_{i-1}, c_{i-2}, \dots, c_i)(x_1, R, x_{i-1})T$, entonces tenemos lo siguiente.

$$\lambda(G) \geq \lambda(S) = \lambda_1 + i + |T| \geq \lambda_1 + \lambda(A_i).$$

Esto implica que $\lambda(A_i) \leq \lambda_2$ para $i \neq 0$. De las observaciones anteriores, tenemos que $\lambda(A) \leq \lambda_1$ y $\lambda(B) \leq \lambda_2$.

□

Usando el resultado anterior se puede demostrar que las gráficas *débilmente pancíclicas*¹¹ y las *semi-pancíclicas*¹² satisfacen la conjetura 2.3.2.

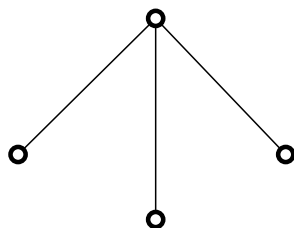


Figura 2.2: $K_{1,3}$ o también llamada garra.

Una clase importante de gráficas donde se ha probado la conjetura de partición de trayectorias es en las gráficas libres de garras¹³. La idea de la prueba es bastante interesante, en las gráficas libres de garras se puede definir una operación llamada la cerradura de Ryjáček, denotada por $cl(G)$, la cual define una nueva gráfica libre de garras que contiene como subgráfica a G . Además, la cerradura de una gráfica cumple de que $\lambda(G) = \lambda(cl(G))$. Usando esta propiedad, en [20] J. E. Dunbar y M. Frick demostraron que la cerradura de las gráficas libres de garras satisfacen la conjetura de partición de trayectorias, por lo que las gráficas libres de garras satisfacen esta conjetura.

Otras clases de gráficas en las que se ha demostrado la conjetura 2.3.2 son las siguientes.

- Las gráficas que pueden ser vistas como suma de dos gráficas¹⁴ [15].
- Aquellas gráficas tal que todos sus bloques, exceptuando los bloques que sean isomorfos a K_2 , son gráficas hamiltonianas [15].

¹¹Una gráfica G es débilmente pancíclica si existen ciclos de todos los órdenes entre $g(G)$ y $c(G)$, o si G es un árbol.

¹²Las gráficas semi-pancíclicas son aquellas que tiene ciclos no de orden 2 de todos los órdenes entre $\max\{3, \lceil \lambda(G)/2 \rceil\}$ y $c(G)$ o si G es un árbol.

¹³Las gráficas libres de garras son aquellas que no contienen como subgráfica inducida a la bipartita completa $K_{1,3}$ (véase la figura 2.2).

¹⁴Dadas dos gráficas G y H con $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ la suma G y H es la gráfica $G + H$ con $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y $A(G + H) = A(G) \cup A(H) \cup \{xy \mid (x, y) \in V(G) \times V(H) \cup V(H) \times V(G)\}$.

2.3.1. La fallida conjetura sobre la existencia de P_{n+1} -núcleos

Una forma natural de abordar de manera general la conjetura de partición de trayectorias es demostrar la existencia de estructuras que impliquen la existencia de una bipartición que satisfaga las condiciones necesarias. Es ahí donde la conjetura sobre la existencia de P_{n+1} -núcleos tiene su origen. Sea G una gráfica cualquiera, diremos que S , un subconjunto de $V(G)$, es P_{n+1} -libre en G si $\lambda(G[S]) \leq n$. Es claro que una gráfica satisface la conjetura 2.3.2 si y sólo si para todo n entero positivo menor a $\lambda(G)$, existe S P_{n+1} -libre tal que $\lambda(G - S) \leq \lambda(G) - n$. Una forma de que suceda la condición anterior es que el conjunto S cumpla lo siguiente:

- i) $\lambda(G[S]) = n$ y
- ii) cualquier vértice en $G - S$ es adyacente a un vértice extremo de una trayectoria de orden máximo.

Cuando S sea un conjunto de vértices que satisfaga las condiciones i) y ii), diremos que S es un P_{n+1} -núcleo. En [16], I. Broere, P. Hajnal y P. Mihók conjeturan que toda gráfica G posee un P_{n+1} -núcleo para toda $0 < n < \lambda(G)$. En [19], J. E. Dunbar y M. Frick demostraron que toda gráfica tiene P_n núcleo para $n \leq 7$. En [30], Mel'nikov y Petrenko demostraron que toda gráfica posee un P_n núcleo para $n \leq 9$. No obstante en [1] R.E.L. Aldred y C. Thomassen construyeron una gráfica sin P_{364} -núcleo, más tarde Katrenič y Semanišin construyeron una gráfica sin P_{155} -núcleo [32] y para cada entero $l \geq 0$, demostraron la existencia de una gráfica G sin $P_{\lambda(G)-l}$ -núcleo.

2.3.2. La versión dirigida de la conjetura de partición de trayectorias

En 1995, Bondy postuló la siguiente conjetura.

Conjetura 2.3.10 (Bondy [14]). *Para toda digráfica D y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, existe una partición (A, B) de los vértices de D tal que $\lambda(D[A]) = \lambda_1$, $\lambda(D[B]) = \lambda_2$.*

Al tomar en cuenta el hecho de que toda gráfica es una digráfica simétrica, notemos que la Conjetura 2.3.10 generaliza a la versión no dirigida de la conjetura de partición de trayectorias (Conjetura 2.3.2), además si observamos detalladamente, las hipótesis son más fuertes como consecuencia de tener la igualdad en el orden de las trayectorias de longitud máxima en cada partición. En este trabajo estudiaremos una versión débil de la conjetura anterior que generaliza de manera natural la conjetura de partición de trayectorias en gráficas, por ello y sin olvidar el contexto en el que trabajamos, ya sean gráficas o digráficas, también la llamaremos del mismo modo.

Conjetura 2.3.11 (Conjetura de partición de trayectorias). *Para toda digráfica D y λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, existe una partición (A, B) de los vértices de D tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$, $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Observemos que el caso particular cuando escogemos $\lambda_1 = \lambda(D) - 1$ y $\lambda_2 = 1$, tenemos una partición de los vértices en dos conjuntos, uno independiente, y otro conjunto cuyas trayectorias de orden máximo son menores a $\lambda(D)$, esto implica

que el conjunto independiente intersecta a las trayectorias de longitud máxima en D , como conclusión de esta observación, tenemos que la conjetura de partición de trayectorias es una generalización de la conjetura 2.2.1 que a su vez es generalización del teorema de Gallai-Roy-Vitaver.

Hasta el momento, la conjetura 2.3.11 ha mostrado ser más difícil de estudiar que su versión no dirigida. Por ejemplo, en la versión no dirigida se tiene el resultado de que si $\lambda_2 \leq 8$, es posible realizar una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(A) \leq \lambda_1$ y $\lambda(B) \leq \lambda_2$. En la versión dirigida, cuando $\lambda_2 = 1$, el problema es equivalente a resolver la conjetura de Laborde, Payan y Xoung. Tampoco se conoce un resultado similar al teorema 2.3.5 cuando D tiene una trayectoria casi hamiltoniana¹⁵.

En [3] se desarrolló un método de partición basado en la prueba del teorema de Gallai-Roy-Vitaver. Consideremos T una digráfica sin ciclos dirigidos, recordemos la función $p : V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda(D)\}$, donde $p(x)$ es el número de vértices que tiene una trayectoria en T de orden máximo que tiene como vértice inicial x . En el teorema 2.1.1 se demostró que cualesquiera dos vértices adyacentes tienen distinto color, no obstante la prueba de este hecho nos permite asegurar algo más fuerte: si $\vec{uv} \in A(T)$ entonces $p(u) < p(v)$ (véase la figura 2.3). Esta observación tiene como consecuencia que cualquier trayectoria que consideremos en T , todos sus vértices van a tener distintos colores. Inspirados en esta observación, en [3] S. van Aardt, G. Dlamini, J. Dunbar, M. Frick y O. Oellermann definieron una *coloración prismática* de una digráfica D como una coloración c de los vértices de D , tal que todas las trayectorias de D tienen vértices de distintos colores. El número prismático de una digráfica D , denotado por $\phi(D)$, es el mínimo número de colores necesarios en una coloración prismática de D . Como necesitamos al menos $\lambda(D)$ colores para colorear de distintos colores los vértices de una trayectoria de orden máximo, sucede que

$$\lambda(D) \leq \phi(D).$$

Ahora, si ocurre que $\lambda(D) = \phi(D)$ (como es en el caso de las digráficas sin ciclos dirigidos), dados λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, consideremos la siguiente partición:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\lambda_1} c^{-1}(i) \text{ y } B = \bigcup_{i=\lambda_1+1}^{\lambda(D)} c^{-1}(i).$$

Entonces, como cada trayectoria en A (respectivamente en B) tiene a lo más λ_1 colores (resp. λ_2 colores) se tiene que D satisface la conjetura de partición de trayectorias, en particular las digráficas acíclicas la satisfacen (véase el corolario 3.2.6).

¹⁵Lo mejor que se tiene es que si D es una digráfica con $\lambda(D) = |D| - 1$ y tiene una componente fuertemente conexa S con $g(S) \geq 6$, entonces D satisface la conjetura 2.3.11 [2].

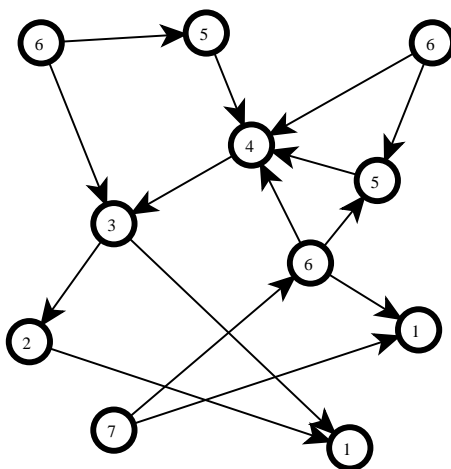


Figura 2.3: Partición del tipo Gallai-Roy-Vitaver.

Basado en esta idea de definir un parámetro que dependa de la longitud de las trayectorias que empiezan en un vértice, en [9], J. Bang-Jensen, M. H. Nielsen y A. Yeo definieron unos parámetros similares, cuyo dominio son las componentes fuertemente conexas¹⁶. Con este tipo de partición se demostró que las siguientes generalizaciones de torneos satisfacen la Conjetura de Partición de Trayectorias.

- Las digráficas cuasitransitivas,
- las extensiones de las digráficas semicompletas y
- las digráficas localmente in-semicompletas.

En este trabajo se demuestra que las siguientes generalizaciones de torneos no consideradas en [9], pero en las cuales ya había sido demostrada la Conjetura de Laborde, Payan y Xuong (conjetura 2.2.1) cumplen la conjetura de partición de trayectorias.

- Las digráficas de trayectorias combinables fuertemente conexas (teorema 3.1.6).
- Las digráficas localmente semicompletas por flechas (teorema 3.3.4).
- Las digráficas localmente in-semicompletas (ex-semicompletas) por flechas fuertemente conexas (teorema 3.5.3).
- Las digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas (Teorema 3.4.3).

Las digráficas de trayectorias combinables extienden a varias generalizaciones de los torneos como las digráficas localmente in-semicompletas, localmente ex-semicompletas, y localmente semicompletas. Además existen una infinidad de familias de digráficas de trayectorias combinables que no pertenecen a las clases mencionadas con anterioridad. Las digráficas localmente semicompletas por flechas, localmente in-semicompletas (ex-semicompletas) por flechas fuertemente conexas y 3-cuasitransitivas fuertemente conexas fueron introducidas por J. Bang Jensen en [10] y estudiadas por S. Wang y R. Wang en [34, 35].

¹⁶Para más detalles véase la demostración del teorema 3.2.4.

Capítulo 3

Resultados principales

El capítulo anterior nos da una noción de lo poco que se conoce sobre la conjetura 2.3.11. En la siguiente sección nos dedicaremos a presentar condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga esta difícil conjetura. Usando estas condiciones y caracterizaciones sobre algunas clases de digráficas que generalizan a los torneos, demostraremos que estas clases cumplen la conjetura de partición de trayectorias.

Como condición general todas las digráficas que consideraremos son conexas. No es difícil percatarse del siguiente hecho: resolver la conjetura 2.3.11 para las digráficas conexas, resuelve el problema en general. Esto depende de la propiedad de que las trayectorias máximas están contenidas en las componentes conexas de la digráfica. Poder realizar las biparticiones “correctas” en cada componente induce la bipartición buscada en la digráfica.

3.1. Digráficas con bloques hamiltonianos

Sea G una gráfica. Definiremos la *gráfica de bloques y de cortes* como la gráfica bipartita $BC(G)$, con vértices los bloques B_1, \dots, B_k de G , y los vértices de corte $C(G)$ tales que dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si u es un bloque y v es un vértice de corte que pertenece a u (véase la figura 3.1).

No es difícil observar que la gráfica de bloques y de cortes es un árbol, por lo que al enraizar tal gráfica en algún bloque B_i , la distancia entre los bloques y la raíz en $BC(G)$ es un número par, en otras palabras, los bloques están en los niveles pares definidos por el árbol enraizado en B_i . Otra simple observación es que dos bloques que se intersectan en G se encuentran a distancia dos en $BC(G)$.

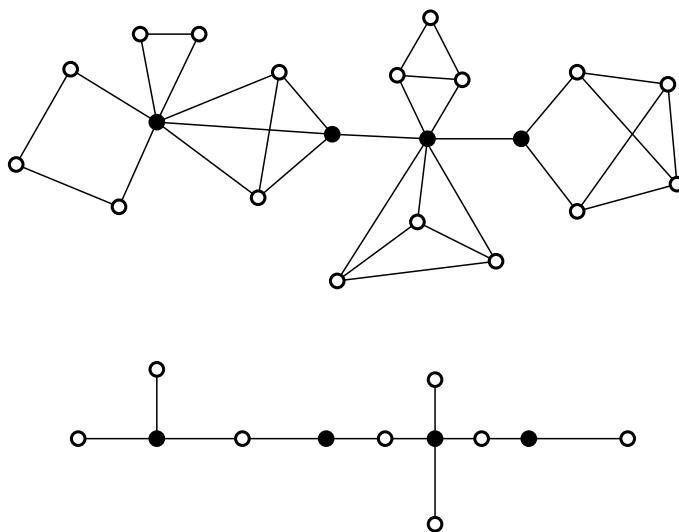


Figura 3.1: Gráfica y su gráfica de bloques y de cortes

Lema 3.1.1. Sean D una digráfica, $UG(D)$ su gráfica subyacente y B_1, B_2, \dots, B_k los bloques de $UG(D)$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Si sucede que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $D[B_i]$ es hamiltoniana y $|B_i| \leq \lambda_1$, entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.

Demostración. Consideremos la gráfica de bloques y de cortes de $UG(D)$, llamémosla \hat{B} y sea B_M el bloque de orden mayor y $\hat{B}(B_M)$ el árbol enraizado correspondiente. Daremos una 2-coloración de los vértices de D tal que las clases cromáticas cumplan las condiciones requeridas. Primero colorearemos los vértices de B_M , luego los vértices de los bloques a distancia 2 de B_M en \hat{B} , luego los vértices de los bloques a distancia 4 y así sucesivamente.

- i) Los vértices de B_M los coloreamos del color A .
- ii) Recursivamente, supongamos que ya están coloreados todos los vértices de D que están en un bloque a distancia menor que $2k$ de B_M con respecto a \hat{B} (con k un entero entre 1 y la mitad de la excentricidad del vértice B_M en la gráfica \hat{B}). Coloreemos los vértices de los bloques que están a distancia $2k$ con respecto a B_M . Sea B_j un bloque a distancia $2k$ de B_M , consideremos a B_p el abuelo de B_j (posiblemente $B_p = B_M$). Sea $x \in B_j \cap B_p$ el vértice de corte que comparten B_j y B_p . Coloreemos los vértices de $B_j - x$ de acuerdo a las siguientes reglas:

Regla 1: Si el vértice x es de color B entonces coloreamos los vértices de $B_j - x$ de color A .

Regla 2: Si el vértice x es de color A , coloreamos $\min\{\lambda_2, |B_j| - 1\}$ vértices de color B y el resto de color A .

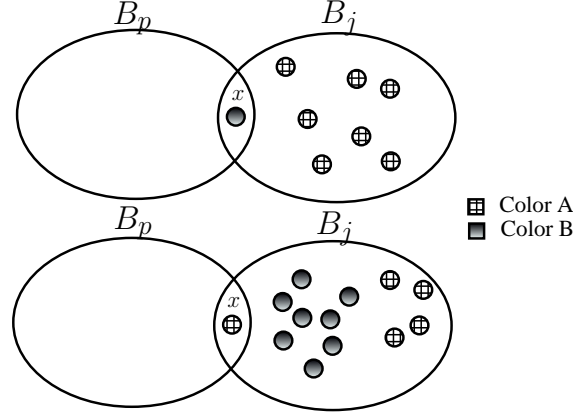


Figura 3.2: Coloración según las reglas 1 o 2

Afirmación 1. Las trayectorias de $D[B]$ están contenidas en únicamente un bloque de $UG(D)$.

Supongamos por reducción al absurdo que β es una trayectoria en $D[B]$ con la propiedad de que existen dos bloques distintos B_i, B_j con $|\beta \cap B_k| \geq 2$ para $k \in \{i, j\}$. Sin perder generalidad supondremos que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ y que x pertenece a ambos bloques, además supondremos que B_i es abuelo de B_j en el árbol enraizado $\widehat{B}(B_M)$. Como β es una trayectoria que interseca a ambos bloques, necesariamente x tiene color B , por lo que coloreamos los vértices de B_j de acuerdo a la regla 1, esto contradice el hecho de que existe otro vértice de β en B_j (ya que $|\beta \cap B_j| \geq 2$).

Afirmación 2. Las trayectorias en $D[B]$ tienen a lo más λ_2 vértices.

La afirmación anterior nos permite asegurar que si β es una trayectoria de longitud máxima en $D[B]$ entonces está contenida en un sólo bloque B_j . Si la trayectoria tiene longitud mayor que cero, los vértices de B_j no pudieron ser coloreados siguiendo la regla 1. La forma en que coloreamos los vértices de los bloques correspondientes a la regla 2 nos permite afirmar que a lo más hay λ_2 vértices B -coloreados en B_j , esto implica que $\lambda(\beta) \leq \lambda_2$.

Afirmación 3. Las trayectorias en $D[A]$ tienen a lo más λ_1 vértices.

Sea α una trayectoria de longitud máxima en $D[A]$, si α está contenida en sólo un bloque entonces α tiene a lo más λ_1 vértices (ya que nuestra hipótesis asegura que los bloques tienen a lo más λ_1 vértices). Ahora supongamos que α no está contenida en sólo un bloque. Por reducción al absurdo supongamos que $|\alpha| > \lambda_1$. Del conjunto de bloques que α interseca en al menos dos vértices, tomemos a B_j el bloque más alejado de la raíz B_M . Consideremos a B_p el abuelo de B_j con respecto a $\widehat{B}(B_M)$ y x el vértice de corte que comparten B_p y B_j . Tenemos que $x \in V(\alpha)$ pues α no está contenida en sólo un bloque, esto implica

que x es de color A y de acuerdo con la regla 2, existen λ_2 vértices de color B en B_j (no puede ocurrir que $\min\{\lambda_2, |B_j| - 1\} = |B_j| - 1$, pues esto implicaría que cualquier vértice en $B_j - x$ es de color B , contradiciendo el hecho de que B_j interseca a α en al menos 2 vértices). Sea $(x = y_1, y_2, \dots, y_s)$ un ciclo hamiltoniano en $D[B_j]$. Y sea $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_{i_1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2}, x_{i_2+1}, \dots, x_{i_r}, x_{i_r+1}, \dots, x_m)$ con

$$(x_1, x_2, \dots, x_{i_1}) \subset B_{i_0},$$

$$(x_{i_k}, x_{i_k+1}, \dots, x_{i_{(k+1)}}) \subset B_{i_k}, k \in \{1, \dots, r-1\} \text{ y}$$

$$(x_{i_r}, x_{i_r+1}, \dots, x_m) \subset B_{i_r},$$

donde $B_{i_0}, B_{i_1}, \dots, B_{i_r}$ son bloques distintos (por donde la trayectoria α pasa) con la propiedad de que $|B_{i_k} \cap \alpha| \geq 2$ para cada $k \in \{0, \dots, r\}$. Entonces tenemos que $P = (B_{i_0}, x_{i_1}, B_{i_1}, x_{i_2}, B_{i_2}, \dots, B_{i_{r-1}}, x_{i_r}, B_{i_r})$ es una trayectoria en el árbol enraizado $\widehat{B}(B_M)$, esto implica que B_{i_0} o B_{i_r} es el bloque, que interseca a α en al menos dos vértices, más alejado de la raíz B_M , por lo tanto tenemos que $B_{i_0} = B_j$ o que $B_{i_r} = B_j$, lo que implica que $x_1 \in B_j$ o que $x_m \in B_j$. Si $x_1 \in B_j$, consideremos la trayectoria dirigida $\gamma = (y_2, y_3, \dots, y_s)(x = x_{i_1}, \alpha, x_m)$. Es claro que γ contiene a los vértices de α (ya que $(x_1, x_2, \dots, x_{i_1}) \subset B_{i_0} = B_j = V(y_1, y_2, \dots, y_s)$) y a los λ_2 vértices de color B en B_j (pues $(x = y_1, y_2, \dots, y_s)$ es una trayectoria hamiltoniana en $D[B_j]$), donde obtenemos que γ es una trayectoria con más de $\lambda_1 + \lambda_2$ vértices, contradiciendo el hecho de que cualquier trayectoria en D tiene a lo más $\lambda(D)$ vértices, esto implica que α tiene a lo más λ_1 vértices. Podemos usar el mismo argumento si $x_m \in B_j$ considerando la trayectoria $\beta' = (x_1, \alpha, x = x_{i_r})(y_2, y_3, \dots, y_s)$. Por lo tanto $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$.

□

Considerando el hecho de que toda gráfica puedes ser vista como una digráfica simétrica, el siguiente resultado es una generalización de un resultado de I. Broere, M. Dorfling, J. Dunbar y M. Frick [15].

Teorema 3.1.2. *Sea D una digráfica y sean B_1, B_2, \dots, B_k los bloques de $UG(D)$ tales que cada $D[B_i]$ es hamiltoniana para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Consideremos la gráfica \widehat{B} de bloques y vértice de corte de $UG(D)$. El caso en que $|B_i| \leq \lambda_1$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ya fue analizado en el lema anterior por lo que queda estudiar el caso cuando B_M , el bloque de orden mayor en $UG(D)$, tiene más de λ_1 vértices.

Afirmación 1. $|B_j| \leq \lambda_2$ para toda $j \neq M$.

Al ser todas las digráficas inducidas por los bloques hamiltonianas y D conexa, existe una $B_M B_j$ -trayectoria P en \widehat{B} , esto nos permite construir una trayectoria dirigida que contiene a todos los vértices de B_M y de B_j y usando el hecho de que $|V(B_M) \cap V(B_j)| \leq 1$ tenemos:

$$\lambda(D) \geq \lambda(B_j) + \lambda(B_M) - 1 \geq \lambda_1 + \lambda(B_j).$$

De donde obtenemos $\lambda(B_j) \leq \lambda(D) - \lambda_1 = \lambda_2$.

Como en el lema anterior, coloreemos los vértices de los bloques de D por niveles.

- i) En B_M coloreemos λ_1 vértices de color A , y el resto de color B .
- ii) Supongamos que ya están coloreados todos los vértices de D que están en un bloque a distancia menor que $2k$ con respecto a la raíz B_M en $\widehat{B}(B_M)$ (con k un entero entre 1 y la mitad de la excentricidad del vértice B_M en la gráfica \widehat{B}). Coloreemos los vértices de los bloques que están a distancia $2k$ con respecto a B_M . Sea B_j un bloque en el nivel $2k$, consideremos a B_p el abuelo de B_j en \widehat{B} (posiblemente $B_p = B_M$). Sea $x \in B_j \cap B_p$ el vértice de corte que comparten B_j y B_p . Coloreemos los vértices de $B_j \setminus \{x\}$ de color distinto al color que ya posee x .

Afirmación 2. Las trayectorias de $D[A]$ (respectivamente en $D[B]$) están contenidas en sólo un bloque.

Esto sucede pues si B_p, B_j son dos bloques tales que B_p es abuelo de B_j y comparten el vértice de corte x , cualquier trayectoria P que tiene todos sus vértices del mismo color e intersecta a B_p y a B_j , necesariamente tiene al vértice de corte x , pero al ser los vértices de $B_j - x$ de distinto color que x , tenemos que x es el único vértice de B_j en la trayectoria. Por lo tanto la trayectoria está contenida en B_p .

Afirmación 3. Si α es una trayectoria en $D[A]$ entonces tiene a lo más λ_1 vértices.

Si α está contenida en B_M , no puede tener más de λ_1 vértices. Si α está contenida en algún bloque distinto de B_M , como cada bloque tiene a lo más $\lambda_2 \leq \lambda_1$ vértices, entonces α tiene a lo más λ_1 vértices.

Afirmación 4. Si β es una trayectoria en $D[B]$ entonces tiene a lo más λ_2 vértices.

Si β está contenido en el bloque B_M , no puede tener más de λ_2 vértices, de lo contrario, como en B_M hay al menos λ_1 vértices de color A y B_M es hamiltoniano, existiría una trayectoria de longitud mayor a $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, lo que contradice la maximalidad de $\lambda(D)$. Si β está contenida en algún bloque distinto de B_M , como cada bloque tiene a lo más λ_2 vértices, entonces β tiene a lo más λ_2 vértices.

Finalmente tenemos que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$ como queríamos. □

Corolario 3.1.3 (I. Broere, M. Dorfling, J. Dunbar y M. Frick [15]). *Sea G una gráfica tal que todos sus bloques, exceptuando los bloques que sean isomorfos a K_2 , son gráficas hamiltonianas [15]. Si λ_1, λ_2 son enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(G)$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces existe una partición (A, B) de los vértices de G tal que $\lambda(G[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(G[B]) \leq \lambda_2$.*

3.1.1. Digráficas de trayectorias combinables

Una digráfica es de *trayectorias combinables* si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ y cualquier par de uv -trayectorias internamente ajenas α, β , es decir, tales que sus únicos vértices en común son el inicial y el final, existe una uv -trayectoria γ tal que $V(\gamma) = V(\alpha) \cup V(\beta)$. Un ejemplo de una familia de digráficas que sean de trayectorias combinables son las digráficas *localmente in-semicompletas* (*localmente ex-semicompletas*) [4], recordemos que estas digráficas son aquellas en las que la invecindad de cada vértice es isomorfa a una digráfica semicompleta (respectivamente la exvecindad de cada vértice es isomorfa a una digráfica semicompleta). Las digráficas que cumplan ser tanto localmente in-semicompletas como localmente ex-semicompletas se les llama *localmente semicompletas*.

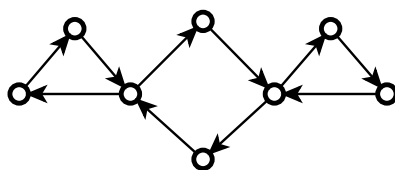


Figura 3.3: Ejemplo de una digráfica de trayectorias combinables

Teorema 3.1.4 (Bang-Jensen [4]). *Una digráfica de trayectorias combinables D de orden $n \geq 2$ es hamiltoniana si y sólo si D es fuertemente conexa y $UG(D)$ no tiene vértices de corte.*

Teorema 3.1.5 (Bang-Jensen, Huang, Prisner [8]). *Una digráfica localmente in-semicompleta de orden $n \geq 2$ es hamiltoniana si y sólo si D es fuertemente conexa.*

Teorema 3.1.6. *Sea D una digráfica de trayectorias combinables y fuertemente conexa. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces, existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Ser digráfica de trayectorias combinables es una propiedad hereditaria, es decir, se cumple que cualquier subdigráfica inducida de D es de trayectorias combinables. Con esta observación y el teorema 3.1.4 tenemos que la digráficas inducidas por los bloques de $UG(D)$ son hamiltonianas y por el teorema 3.1.2, existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.

□

Corolario 3.1.7. *Si D es una digráfica localmente in-semicompleta fuertemente conexa, satisface la conjetura de partición de trayectorias.*

3.2. Suma de digráficas sobre una digráfica acíclica

Sea H una digráfica y $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vértices. Consideremos D_1, D_2, \dots, D_n digráficas cuyos conjuntos de vértices son ajenos dos a dos. Definamos la *suma de digráficas* como la digráfica $D := H[D_1, D_2, \dots, D_n]$ con conjunto de vértices $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_n)$, donde $xy \in A(D)$ si

y sólo si $x \in V(D_i)$, $y \in V(D_j)$ y $v_i v_j \in A(H)$, o bien, $i = j$ y $xy \in A(D_i)$. Las digráficas D_1, D_2, \dots, D_n son llamados los *sumandos* de D . Cuando los sumandos de D son conjuntos independientes se dice que D es una *H-extensión* (o una *extensión de H*), si H es una trayectoria o un ciclo entonces D es también llamada extensión de una trayectoria o la extensión de un ciclo, respectivamente.

En esta sección demostraremos que la suma de digráficas que satisfacen la conjetura de partición de trayectorias sobre una digráfica sin ciclos dirigidos, satisface la conjetura de partición de trayectorias. Para ello enunciaremos una conjetura equivalente que nos permitirá simplificar la notación de la prueba.

Conjetura 3.2.1. *Para toda digráfica D y q entero positivo menor a $\lambda(D)$, existe una partición (A, B) de los vértices de D tal que $\lambda(A) \leq q$ y $\lambda(B) \leq \lambda(D) - q$.*

Lema 3.2.2. *Sea $D = T[D_1, D_2, \dots, D_n]$ tal que T no tiene ciclos dirigidos. Sea P una trayectoria con vértices inicial y final en $V(D_i)$, para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $V(P) \subset V(D_i)$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $V(P) \not\subset V(D_i)$. Sea $P = (y_1, y_2, \dots, y_{r_1}, y_{r_1+1}, \dots, y_{r_2}, \dots, y_{r_t}, \dots, y_{r_t+k})$ con

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_{r_1}) &\subset D_{l_1}, \\ (y_{r_j+1}, y_{r_j+2}, \dots, y_{r_{j+1}-1}) &\subset D_{l_j}, j \in \{2, \dots, t-1\} \text{ y} \\ (y_{r_t+1}, y_{r_t+2}, \dots, y_{r_t+k}) &\subset D_{l_t} \end{aligned}$$

es tal que $l_1 = l_t = i$. Por la definición de suma, $(v_i = v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_t} = v_i)$ es un camino cerrado dirigido de longitud mayor a igual a dos, ya que $V(P) \not\subset V(D_i)$, por lo tanto, contiene un ciclo dirigido, lo que contradice el hecho de que T no posee ciclos dirigidos. □

Lema 3.2.3. *Sea T una digráfica acíclica. Si $D = T[D_1, D_2, \dots, D_n]$ y P es una trayectoria en D entonces la intersección de P con cada D_i , con $i = 1, \dots, n$, es vacía o una trayectoria.*

Demostración. Se sigue inmediato del lema anterior. □

La prueba del siguiente teorema está basada en una técnica desarrollada por Bang-Jensen, Nielsen y Yeo en [2].

Teorema 3.2.4 (Teorema de la suma). *Sea T una digráfica acíclica tal que $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, D_1, D_2, \dots, D_n digráficas y q un entero positivo menor a $\lambda(D)$. Suponga que para cada D_i y para cada entero positivo q_i tal que $\lambda(D_i) > q_i$, existe una partición (A_i, B_i) de los vértices de D_i tal que $\lambda(A_i) \leq q_i$ y $\lambda(B_i) \leq \lambda(D_i) - q_i$. Entonces existe una partición (A, B) de los vértices de $D = T[D_1, D_2, \dots, D_n]$ tal que $\lambda(A) \leq q$ y $\lambda(B) \leq \lambda(D) - q$.*

Demostración. Consideremos los siguientes parámetros:

- p_i^{in} es el máximo número de vértices en una trayectoria contenida en $D - V(D_i)$ tal que el vértice final tiene una flecha hacia D_i .
- p_i^{end} es el máximo número de vértices en una trayectoria en D tal que el vértice final pertenece a D_i .

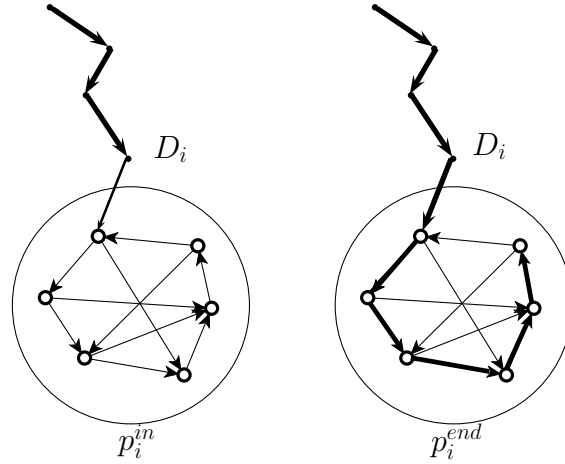


Figura 3.4: Componente y sus parámetros

De estas definiciones se sigue inmediatamente que si $v_i v_j \in A(T)$, entonces $p_i^{end} \leq p_j^{in}$. Como todas las trayectorias en $D - V(D_i)$ cuyo vértice final domina a algún vértice de D_i puede ser extendida a una trayectoria que tiene como vértice final que pertenece a D_i , tenemos que $0 \leq p_i^{in} < p_i^{end}$.

Definamos $S = \{i \mid p_i^{end} \leq q\}$ y $R = \{i \mid p_i^{in} \geq q\}$. Ahora, sean $A' = \cup_{i \in S} V(D_i)$ y $B' = \cup_{i \in R} V(D_i)$. Nótese que $A' \cap B' = \emptyset$ (si $x \in A'$ entonces $x \in V(D_i)$ tal que $p_i^{in} < p_i^{end} \leq q$, por lo tanto $x \notin B'$). Sea $J = \{i \mid p_i^{in} < q < p_i^{end}\}$, para cada $j \in J$ definamos $q_j := q - p_j^{in} > 0$ y una partición (A_j, B_j) de $V[D_j]$ tal que $\lambda(A_j) \leq q_j$ y $\lambda(B_j) \leq \lambda(D_j) - q_j$ (es posible por la hipótesis). Observemos que si $i \notin J$ se tiene que $V(D_i) \subset A'$ o $V(D_i) \subset B'$ (si $x \in A'$, $p_i^{end} \leq q$, por lo tanto $y \in A'$ para todo $y \in V(D_i)$, de igual modo, si $x \in B'$, $p_i^{in} \geq q$, por lo tanto $y \in B'$ para todo $y \in V(D_i)$).

Sean $A = A' \cup (\cup_{j \in J} A_j)$, $B = B' \cup (\cup_{j \in J} B_j)$. A y B son ajenos por ser A' y B' ajenos y por que (A_j, B_j) es una partición de $V(D_j)$ para toda $j \in J$. La unión de A y B es $V(D)$ pues cada $x \in V(D_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, si $i \in J$, entonces $x \in A_i$ o $x \in B_i$, por ser (A_i, B_i) una partición de $V(D_i)$, si $x \notin J$, como $D_i \subset A'$ o $D_i \subset B'$, implica que $x \in D_i \subset A \cup B$. Veamos que la partición (A, B) cumple con lo requerido.

Sea P una trayectoria en D . Si P intersecciona D_i entonces por el lema 3.2.3 podemos asumir que $P_{D_i} := D[V(P) \cap V(D_i)]$ es una subtrayectoria de P en D_i . Por lo tanto, si P inicia (o termina) en D_i , podemos escribir a $P = P_{D_i} Q$ (o $P = Q P_{D_i}$) donde Q es la trayectoria restante de P en $D - V(D_i)$.

Afirmación 1. $\lambda(D[A]) \leq q$.

Consideremos una trayectoria α de longitud máxima en $D[A]$. Sea $\alpha = Q\alpha_{D_i}$, para alguna D_i . Tenemos dos posibles situaciones.

Caso A.1. Si $i \notin J$.

Tenemos que $V(\alpha_{D_i}) \subset A'$ y por lo tanto $p_i^{end} \leq q$. Por lo tanto $|\alpha| \leq p_i^{end} \leq q$.

Caso A.2. Si $i \in J$.

Entonces $|\alpha| = |Q\alpha_{D_i}| = |Q| + |\alpha_{D_i}| \leq p_i^{in} + q_i = p_i^{in} + (q - p_i^{in}) = q$, pues Q es una trayectoria en $D - V(D_i)$ cuyo vértice final domina a D_i y además $V(\alpha_{D_i}) \subset A_i$ (véase la figura 3.5).

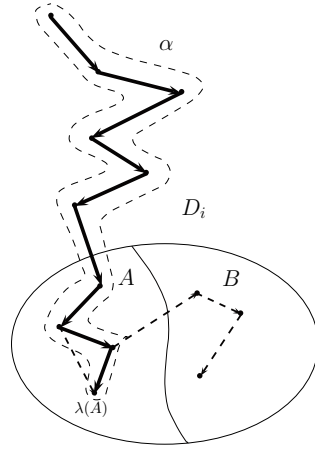


Figura 3.5: Caso A.2

Afirmación 2. $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - q$.

Consideremos β una trayectoria de longitud máxima en B cuyo vértice inicial pertenece a D_i . Sea $\beta = \beta_{D_i}Q$. Tenemos nuevamente dos casos.

Caso B.1. Si $i \notin J$.

Entonces la concatenación de cualquier trayectoria en $D - V(D_i)$ cuyo vértice final domina D_i con β tiene orden a lo más $\lambda(D)$. Por lo tanto $\lambda(D) \geq p_i^{in} + |\beta|$, despejando obtenemos $|\beta| \leq \lambda(D) - p_i^{in} \leq \lambda(D) - q$ ya que $V(\beta_{D_i}) \subset B'$ (véase la figura 3.6).

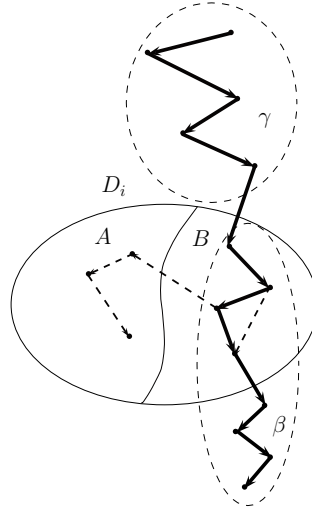


Figura 3.6: Caso B.1

Caso B.2. Si $i \in J$.

Entonces $|\beta| = |\beta_{D_i}| + |Q| \leq \lambda(B_i) + |Q| \leq \lambda(D_i) - q_i + |Q| = \lambda(D_i) - (q - p_i^{in}) + |Q| = p_i^{in} + \lambda(D_i) + |Q| - q$. Ahora, consideremos una trayectoria en $D - V(D_i)$ que posee un vértice final que domina a D_i , seguida de una trayectoria de longitud máxima en D_i , seguida de Q ; esta trayectoria tiene a lo más $\lambda(D)$ vértices. Por lo tanto $p_i^{in} + \lambda(D_i) + |Q| \leq \lambda(D)$, de donde se sigue que $|\beta| \leq \lambda(D) - q$ (véase la figura 3.7).

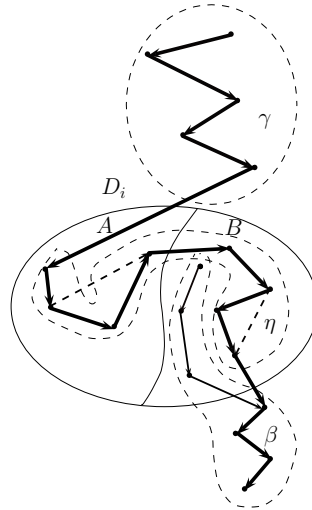


Figura 3.7: Caso B.2

□

El siguiente corolario se obtiene de observar que los conjuntos independientes satisfacen la conjetura 2.3.11.

Corolario 3.2.5. *Sea T una digráfica acíclica tal que $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Si $D := T[E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_n}]$ es una extensión de T , entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Corolario 3.2.6 (Dlamini, Dunbar, Frick, Oellerman, Van Aardt [17]). *Sea T una digráfica acíclica y $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

A continuación presentamos un teorema que será útil en la demostración de que algunas clases de digráficas satisfacen la conjetura de partición de trayectorias.

Teorema 3.2.7. *Sean $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo dirigido, $D_1 := E_{m_1}$ y $D_2 := E_{m_n}$ conjuntos independientes y D_2, \dots, D_{n-1} digráficas tales que para cada D_i y para cualquier entero positivo q_i existe una partición (A_i, B_i) de los vértices de D_i tal que $\lambda(A_i) \leq q_i$ y $\lambda(B_i) \leq \lambda(D_i) - q_i$. Entonces la composición $D = C_n[D_1 = E_{m_1}, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n = E_{m_n}]$ satisface que para todo entero positivo q tal que $q \leq \lambda(D)$, existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq q$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda(D) - q$.*

Demostración. Sea $a = v_n v_1 \in A(D)$. Consideremos la digráfica

$$D' = (C_n - a)[E_{m_1}, D_2, \dots, D_{n-1}, E_{m_n}],$$

como $C_n - a$ es acíclica, tenemos que existe una partición (A, B) de $V(D') = V(D)$ tal que $\lambda(D'[A]) \leq q$ y $\lambda(D'[B]) \leq \lambda(D') - q \leq \lambda(D) - q$.

Caso 1. $2 \leq q \leq \lambda(D') - 1$

Nótese que de acuerdo con la partición (A, B) de $V(D)$ que se dio en la prueba del teorema 3.2.4, no es difícil observar que $p_1^{end} = 1$ y que $p_n^{in} = \lambda(D') - 1$. Entonces sucede que $V(D_1) \subset A$ y $V(D_n) \subset B$. Por lo tanto ninguna $D_1 D_n$ -flecha ni ninguna $D_n D_1$ -flecha pertenecen a $D[A]$ ni a $D[B]$, por lo que $D[A] = D'[A]$ y $D[B] = D'[B]$, de donde obtenemos

$$\lambda(D[A]) = \lambda(D'[A]) \leq q, \quad \lambda(D[B]) = \lambda(D'[B]) \leq \lambda(D') - q \leq \lambda(D) - q.$$

Caso 2. $\lambda(D') \leq q \leq \lambda(D) - 1$.

Sean $A = \cup_{i=1}^{n-1} V(D_i)$ y $B = V(D_n)$. Es claro que $\lambda(D[A]) \leq \lambda(D') - 1 \leq \lambda(D) - 1$ por ser $C_n - a$ trayectoria. Como $B = V(E_{m_n})$ es un conjunto independiente, $\lambda(D[B]) = 1 \leq \lambda(D) - q$.

Caso 3. $q = 1$. Simplemente tomemos $A = V(D_1)$ y $B = \cup_{i=2}^n V(D_i)$.

□

Corolario 3.2.8. *Si D es una extensión de un ciclo y $\lambda_1 \geq \lambda_2$ son enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

En la sección anterior vimos que las digráficas localmente in-semicompletas fuertemente conexas satisfacen la conjetura de partición de trayectorias. Otra aplicación del teorema de la suma (teorema 3.2.4) es la demostración que en general cualquier digráfica localmente in-semicompleta satisface la conjetura de partición de trayectorias. Para ello, necesitamos un lema cuya sencilla prueba puede ser consultada en [6].

Lema 3.2.9. *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta. Sean H, K distintas componentes fuertemente conexas de D . Si $v \in H$ es un vértice tal que existe una vK -flecha entonces $H \mapsto K$.*

El lema anterior implica que si D es una digráfica localmente in-semicompleta en flechas, tenemos que D puede ser vista como la suma de las componentes fuertemente conexas de D sobre la condensación $SC(D)$ de D . Al ser $SC(D)$ acíclica, junto con el teorema 3.2.4, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.10 (Bang-Jensen, Nielsen, Yeo [9]). *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta. Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

3.3. Digráficas localmente semicompletas en flechas

Recordemos que una digráfica es *localmente semicompleta en flechas* si sucede que para cualesquiera dos vértices adyacentes u y v :

- si x es invecino de u y y es invecino de v , entonces $x = y$ o bien x y y son adyacentes,
- si x es un exvecino de u y y es un exvecino de v , entonces $x = y$ o bien x y y son adyacentes.



Figura 3.7: Digráficas localmente semicompletas por flechas

Las digráficas localmente semicompletas en flechas fueron introducidas por vez primera por Bang-Jensen [11]. Bang-Jensen afirmó que las únicas digráficas localmente semicompletas en flechas fuertemente conexas son las digráficas semicompletas, las digráficas bipartitas semicompletas y las extensiones de ciclos, no obstante, no es difícil comprobar que la familia de digráficas dada por la suma $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$

donde C_3^* es la digráfica con conjunto de vértices $V(C_3^*) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y conjunto de flechas $A(C_3^*) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_1v_3\}$, cumple con ser localmente semicompleta en flechas y no pertenece a ninguna de las familias descritas antes por Bang-Jensen (véase la figura 3.8).

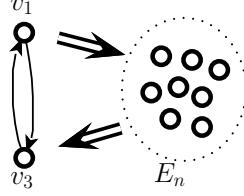


Figura 3.8: $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$.

En la tesis de licenciatura de Ilán A. Goldfeder se da una caracterización de las digráficas localmente semicompletas en flechas. Para ello es necesario definir algunos conceptos. Sea D una digráfica cualquiera con $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Consideremos $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$ digráficas k -partitas indexadas por el conjunto de vértices de D . Definiremos la digráfica k -partita $K := D[D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}]^{\mathcal{P}}$ del siguiente modo: Sea $(V_1^i, V_2^i, \dots, V_k^i)$ una k -partición ordenada de cada digráfica D_i . El conjunto de vértices de $V(K)$ es $\cup_{i=1}^k (V(D_{v_i}) \times \{i\})$, además, $(u, i)(v, j) \in A(K)$ si y sólo si

- $i = j$ y $uv \in A(D_{v_i})$ o
- $i \neq j$, $u \in V(D_p^i), v \in V(D_q^j)$ tales que $p \neq q$ y $v_i v_j \in A(D)$.

La k -partición de K está dada por $\mathcal{P} = (\cup_{i=1}^k (V_1^i \times \{i\}), \cup_{i=1}^k (V_2^i \times \{i\}), \dots, \cup_{i=1}^k (V_k^i \times \{i\}))$.

El objetivo de esta sección es demostrar que las digráficas localmente semicompletas en flechas satisfacen la conjetura de partición de trayectorias. Para ello utilizaremos la caracterización mencionada anteriormente, pero antes de proceder, necesitamos dos sencillos lemas.

Lema 3.3.1. *Sea D una digráfica bipartita y sean λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Tomemos (A, B) a la bipartición de los vértices en conjuntos independientes, entonces $\lambda(D[A]) \leq 1 \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq 1 \leq \lambda_2$.

□

Lema 3.3.2. *Sea D una digráfica semicompleta y sean λ_1, λ_2 enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$, entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema 3.2.10 y de que las digráficas semicompletas son localmente in-semicompletas.

□

Teorema 3.3.3 (H. Galeana-Sánchez, I. A. Goldfeder [22]). *Si D es una digráfica localmente semicompleta en flechas y conexa entonces es una de las siguientes:*

1. subdigráfica de una extensión de una flecha,
2. extensión de una trayectoria,
3. extensión de un ciclo,
4. subdigráfica de la digráfica completa de 3 vértices,
5. $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$,
6. $TT_3[E_1, E_n, E_1]$.
7. una subgráfica bipartita semicompleta de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_1, E_{m_2}], E_{m_3}]^P$, si $m_2 > 1$, entonces la bipartición ordenada es $(E_1, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3})$ y \vec{P}_2 denota a la trayectoria dirigida de longitud 2,
8. $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]^P \leq D \leq TT_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]^P$, donde \leq denota la relación de ser subdigráfica, D' es una digráfica bipartita semicompleta (puede carecer de flechas, en este caso la única bipartición puede ser $(\emptyset, V(D'))$ o $(V(D'), \emptyset)$),
9. $\vec{P}_2[E_1, D', E_1]$, donde D' es semicompleta,
10. es bipartita semicompleta o
11. semicompleta.

Teorema 3.3.4. *Sea D una digráfica localmente semicompleta en flechas. Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Dividiremos los casos de acuerdo al teorema 3.3.3

- Si D es una digráfica del caso (2), (6) o (9), el resultado se obtiene usando que las componentes satisfacen la conjetura de partición de trayectorias y el teorema 3.2.4.
- Si D es una digráfica del caso (3) es inmediato del corolario 3.2.8.
- Si D se encuentra dentro del caso (5). Si $\lambda_1 = 2$, tomamos $A = E_1 \cup E_3$ y $B = E_n$. Es claro que $\lambda(A) \leq 2 = \lambda_1$ y que $\lambda(B) \leq 1 = \lambda_2$ por ser E_n independiente.
- Si D es una digráfica del caso (4) hay dos opciones. Si es acíclica, el resultado se obtiene del corolario 3.2.6. Si D tiene un ciclo, el resultado se obtiene usando el teorema 3.2.7.
- Si D pertenece al caso (1), (7), (8) o (10) entonces es bipartita y el resultado se obtiene usando el lema 3.3.1.
- Finalmente si D pertenece al caso (11), usamos el lema 3.3.2.

□

3.4. Digráficas 3-cuasitranstivas fuertemente conexas

Una digráfica *cuasitranstiva* D es aquella que cumpla la propiedad de que si tomamos tres vértices u, v, w tales que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ implica que u y w son adyacentes o son iguales. Bang-Jensen, Nielsen y A. Yeo demostraron el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 (Bang-Jensen, Nielsen, A. Yeo [9]). *Sea D una digráfica cuasitranstiva. Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Siguiendo el mismo espíritu, Bang-Jensen definió las digráficas *3-cuasitranstivas* en [10] como aquellas digráficas que cumplen que si u, v, w, z son vértices de la digráfica tales que $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow z$, entonces u y z son adyacentes o iguales.

En [23] H. Galeana-Sánchez, I. A. Goldfeder e I. Urrutia caracterizaron las digráficas 3-cuasitranstivas fuertemente conexas, para ello necesitamos definir la siguiente familia de digráficas. Consideremos las digráficas C_4^- y C_4^+ como las digráficas con vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tales que $A(C_4^-) := \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_3\}$ y $A(C_4^+) := \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_3, v_2v_4\}$ (véase la figura 3.9). Definamos $F_n := C_4^-[E_1, E_n, E_1, E_1]$.

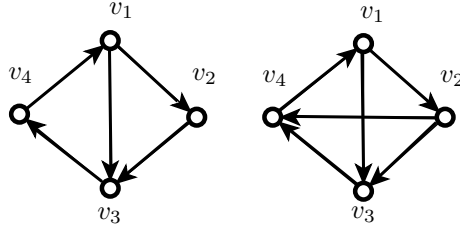


Figura 3.9: C_4^- y C_4^+

Teorema 3.4.2 (H. Galeana-Sánchez, I. A. Goldfeder, I. Urrutia [23]). *Sea D una digráfica 3-cuasitranstiva fuertemente conexa de orden n . Entonces es D semicompleta, bipartita semicompleta o F_n , para algún n .*

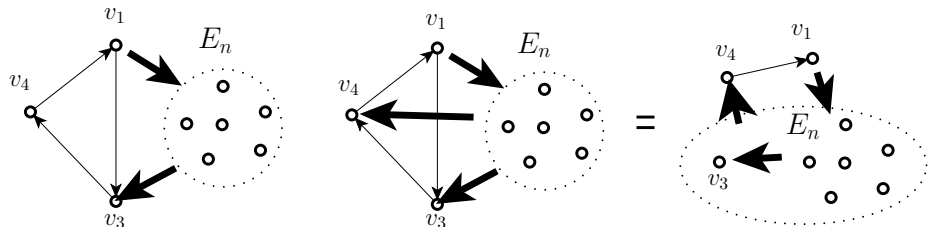


Figura 3.10: F_n y $C_4^+[E_1, E_n, E_1, E_1] = C_3[E_1, P_1[E_n, E_1], E_1]$

Teorema 3.4.3. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa. Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Si D es semicompleta o bipartita semicompleta se tiene el resultado usando los lemas 3.3.2 y 3.3.1. Si $D = F_n$ entonces $D = C_4^-[E_1, E_n, E_1, E_1]$ es subgráfica de $D' = C_4^+[E_1, E_n, E_1, E_1]$ (véase la figura 3.10), además no es difícil observar que $\lambda(D) = 4 = \lambda(D')$, por lo que bastaría demostrar que existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D'[A]) \leq \lambda_2$ y $\lambda(D'[B]) \leq \lambda_1$, esto es sencillo usando el teorema 3.2.7 y observando que $D' = C_3[E_1, P_1[E_n, E_1], E_1]$, donde C_3 es el ciclo dirigido de tres vértices y \vec{P}_1 es la trayectoria dirigida de longitud uno.

□

3.5. Digráficas localmente in-semicompletas en flechas fuertemente conexas

Así como las digráficas localmente in-semicompletas generalizan a las digráficas localmente semicompletas. Existe una generalización natural de las localmente semicompletas en flechas. Las digráficas *localmente in-semicompletas en flechas* son aquellas digráficas que si u y v son vértices de la digráfica cumplen la siguiente condición:

- si x es invecino de u y y es invecino de v , entonces $x = y$ o bien x y y son adyacentes.

Estas digráficas han sido estudiadas por Shiyang Wang y Ruixia Wang en [34] y en [35]. Una de las generalizaciones del teorema de Gallai-Roy-Vitaver fue demostrada en esta clase de digráficas.

Teorema 3.5.1 (S. Wang, R. Wang [35]). *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta en flechas. Entonces existe un conjunto independiente que interseca a cualquier trayectoria no aumentable en D .*

Además en [34] se dio una caracterización de las digráficas localmente in-semicompletas en flechas fuertemente conexas que nos servirá para demostrar que esta clase de digráficas también satisface la conjetura de partición de trayectorias. Sean $H_1 = E_{m_1}, H_3 = E_{m_3}$ conjuntos independientes, $H_2 = E_1$ la digráfica trivial, H_4 una digráfica semicompleta o posiblemente un conjunto vacío. Consideremos $H = TT_3[H_4, H_3, H_1]$, donde TT_3 es el torneo transitivo de orden 3, con flechas $\vec{v_1v_2}, \vec{v_2v_3}, \vec{v_1v_3}$. Añadamos todas las H_2H_3 -flechas posibles a H y finalmente añadamos algunas flechas entre $V(H_2)$ y $V(H_1) \cup V(H_4)$ de tal modo que nuestra digráfica resultante D sea fuertemente conexa y que el vértice de H_2 sea adyacente a cualquier vértice en $V(H_1) \cup V(H_4)$. La familia de digráficas construidas de este modo son llamadas *T-digráficas*.

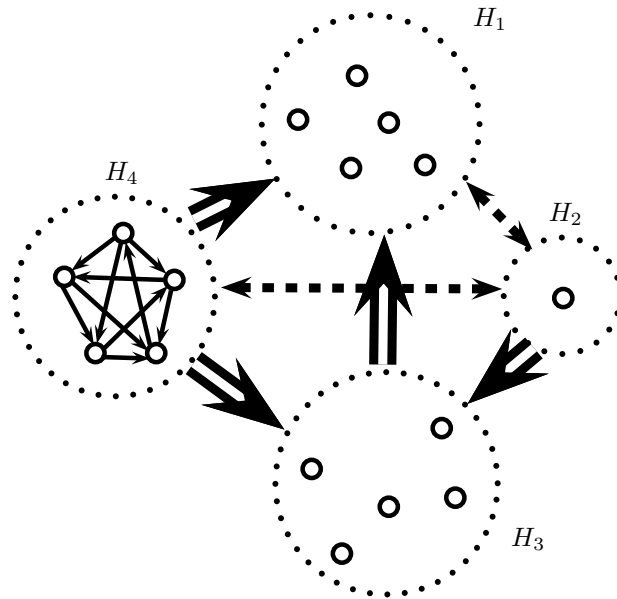


Figura 3.11: T-digráfica

Teorema 3.5.2 (Shiying Wang, Ruixia Wang). *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta por flechas fuertemente conexa, entonces D es una digráfica semicompleta, bipartita semicompleta, una extensión de ciclo o una T-digráfica.*

Teorema 3.5.3. *Sea D una digráfica localmente in-semicompleta por flechas fuertemente conexa. Consideremos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ enteros positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda(D)$. Entonces existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que $\lambda(D[A]) \leq \lambda_1$ y $\lambda(D[B]) \leq \lambda_2$.*

Demostración. Si D es semicompleta, bipartita semicompleta o una extensión de ciclo, se tiene el resultado usando los lemas 3.3.2, 3.3.1 o el corolario 3.2.8, respectivamente. Si D es una T-digráfica, no es difícil observar que D es cuasitransitiva y por el teorema 3.4.1 se satisfacen las condiciones.

□

Capítulo 4

Conclusiones

Es de notar que la conjetura de partición de trayectorias es un problema importante dentro de la teoría de las gráficas ya que además de ser una generalización del Teorema de Gallai-Roy-Vitaver, resultado con mucha profundidad en el mundo de las digráficas, es también un problema análogo a uno de los primeros resultados publicados por László Lovász, gran impulsador de esta joven área de las matemáticas. Como se ha mostrado, no existe una “técnica de partición” única la cuál demuestre la suficiencia de las distintas clases de digráficas, no obstante, resultados generales como los teoremas 3.2.4 3.1.6 nos llevaron a encontrar demostraciones simples que permitieron ampliar las clases de digráficas que conocemos que satisfacen la conjetura de partición de trayectorias.

Como consecuencia del Teorema 3.2.4, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.0.4. *Sea \mathcal{F} una familia de digráficas que satisface las siguientes condiciones.*

- *\mathcal{F} es hereditaria (si $D \in \mathcal{F}$ y D' es una subgráfica inducida de D entonces $D' \in \mathcal{F}$).*
- *Toda digráfica fuertemente conexa $D \in \mathcal{F}$ satisface la Conjetura de Partición de Trayectorias.*
- *Si S_1, S_2 son componentes fuertemente conexas de $D \in \mathcal{F}$ tal que existe alguna $S_1 S_2$ -flecha entonces $S_1 \mapsto S_2$.*

Entonces toda digráfica $D \in \mathcal{F}$ satisface la conjetura de partición de trayectorias.

Las digráficas localmente in-semicompletas son una familia de digráficas que satisfacen la tres condiciones anteriores, por lo tanto satisfacen la conjetura de partición de trayectorias. No es difícil observar que las digráficas 3-cuasitransitivas, localmente in-semicompletas por flechas y las digráficas localmente semicompletas por flechas no siempre satisfacen la tercer condición, no obstante, usando una caracterización, hemos demostrado que las digráficas localmente semicompletas por flechas satisfacen la Conjetura de Partición de Trayectorias. En las tablas 4.1 a 4.4 se muestra el estado actual de la conjetura de partición de trayectorias¹, considerando las generalizaciones de torneos descritas en [7] y [10].

¹Usaremos f.c. para abreviar fuertemente conexa

	Semicompleta	semicompleta extendida	k -partita semicompleta
f.c.	✓	✓	?
no f.c.	✓	✓	?

Cuadro 4.1: Generalizaciones de las digráficas semicompletas

	cuasitransitiva	3-cuasitransitiva	k -cuasitransitiva
f.c.	✓	✓	?
no f.c.	✓	?	?

Cuadro 4.2: Digráficas k -cuasitransitivas

	loc. semicompleta	loc. in/ex-semicompleta	trayectorias combinables
f.c.	✓	✓	✓
no f.c.	✓	✓	?

Cuadro 4.3: Digráficas de trayectorias combinables

	loc. semicompleta por flechas	loc. in/ex-semicompleta por flechas
f.c.	✓	✓
no f.c.	✓	?

Cuadro 4.4: Digráficas localmente in/ex-semicompletas

Uno de los objetivos principales de este trabajo es motivar la búsqueda de nuevas caracterizaciones necesarias para demostrar la conjetura 2.3.11 en las generalizaciones de torneos restantes.

La conjetura de partición de trayectorias ha mostrado ser un problema inmune a los primeros intentos de demostrar su veracidad o falsedad. Esto nos invita a afrontar el siguiente hecho: posiblemente es necesario el desarrollo de nuevas técnicas que permitan descubrir el estado de esta recóndita pregunta.

Índice alfabético

- $N^-(u), N^+(u)$, 11
- $SC(D)$, 13
- TT_n , 16
- $UG(D)$, 14
- $\Delta(G)$, 15
- $\alpha(D)$, 24
- $\chi(D)$, 20
- $\delta(G)$, 15
- $\lambda(D)$, 14
- $c(G)$, 26
- $d(u)$, 15
- $d(x, H)$, 15
- $d(x, y)$, 15
- $d^-(u)/d^+(u)$, 11
- $e(x)$, 15
- $g(G)$, 26
- árbol, 15
 - enraizado, 15
- 3-cuasitransitiva, 17

- abuelo, 15
- arista, 14

- bloque, 14

- camino, 13
 - st*-camino, 13
 - cerrado, 13
- ciclo, 13
- clase cromática, 20
- coloración
 - de los vértices, 20
 - propia, 20
- componentes
 - fuertemente conexas, 13
- concatenación de una trayectoria, 14
- condensación de una digráfica, 13
- conexa
 - digráfica, 14
- conjetura
 - de Partición de Trayectorias, 28
 - Laborde, Payan, Xoung, 22
- conjunto independiente, 12
- cuasitransitiva, 17

- digráfica, 11
 - k -cuasitransitiva, 17
 - acíclica, 13
 - bipartita, 20
 - bipartita completa, 20
 - bipartita semicompleta, 20
 - condensación, 13
 - conexa, 14
 - cuasitransitiva, 17
 - de trayectorias combinables, 17
 - fuertemente conexa, 13
 - hamiltoniana, 14
 - inducida, 12
 - isomorfa, 12
 - k -partita, 20
 - k -partita completa/semicompleta, 20
 - loc. in-semicompleta en flechas, 19
 - localmente in-semicompleta, 18
 - localmente semicompleta, 18
 - semicompleta, 16
 - simétrica, 14
- distancia, 15

- exgrado, 11
- extensión
 - de una digráfica, 37
- exvecindad, 11
- exvecino, 11

- flecha, 11
 - simétrica, 11
 - ST-flecha, 12
- fuertemente conexa, 13

- generalizaciones de torneos, 17
- gráfica, 14
 - de bloques y de cortes, 31

- dirigida, 11
 - subyacente, 14
- grado, 15
- hamiltoniana
 - digráfica, 14
- hijo, 15
- independencia
 - número, 24
- ingrado, 11
- invecindad, 11
- invecino, 11
- isomorfimo de digráficas, 12
- k-coloración, 20
- k-cuasitransitiva, 17
- k-partición, 20
- k-partita completa/semicompleta, 20
- loc. in/ex-semicompleta en flechas, 19
- localmente in/ex-semicompleta, 18
- localmente in/ex-torneo, 18
- localmente semicompleta, 18
- longitud
 - de un camino, 13
 - de una trayectoria, 13
- núcleo
 - P_{n+1} -núcleo, 28
 - de una digráfica, 23
- número
 - cromático, 20
 - de independencia, 24
- nivel, 15
- orden
 - de un camino, 13
 - de una digráfica, 11
 - de una trayectoria, 13
 - máximo de una trayectoria, 14
- P_{n+1} -libre
 - gráfica, 28
- P_{n+1} -núcleo, 28
- padre, 15
- raíz, 15
- semicompleta, 16
- subdigráfica, 12
- suma
 - de digráficas, 36
- sumando, 37
- torneo, 15
 - local, 18
 - transitivo, 16
- trayectoria, 13
 - ST -trayectoria, 13
 - st -trayectoria, 13
 - concatenación, 14
 - de longitud máxima, 14
 - de orden máximo, 14
 - hamiltoniana, 14, 16
 - no-aumentable, 24
- trayectorias
 - internamente ajenas, 17
- trayectorias combinables, 17
- vértice, 11
 - de corte, 14
 - extremo, 13
 - inicial/final de una trayectoria, 13
- vértices adyacentes, 11

Bibliografía

- [1] R.E.L. Aldred y C. Thomassen, Graphs with not all possible path-kernels. *Discrete Math.*, 285 (2004), 297–300.
- [2] Susan A. van Aardt, Jean E. Dunbar, Marietjie Frick y Morten H. Nielsen, Cycles in-traceable oriented graphs, *Discrete Math.*, Volume 311, Issues 18-19, 2085-2094
- [3] S. van Aardt, G. Dlamini, J. Dunbar, M. Frick y O. Oellermann, The directed path partition conjecture. *Discussiones Math. Graph Theory*, 25 3 (2005), 331–343.
- [4] J. Bang-Jensen, Digraphs with the path-merging property, *J. Graph Theory*, 20(2), 255–265, 1995.
- [5] J. Bang-Jensen, The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs, *Discrete Math.*, 283(1–3), 1–6, 2004.
- [6] J. Bang-Jensen, y G.Z. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms and applications*, Springer Verlag, 2010. 2ª edición.
- [7] J. Bang-Jensen, y G. Gutin, Generalizations of tournaments: A survey, *J. Graph Theory*, 28(4), 171–202, 1998.
- [8] J. Bang-Jensen, J. Huang, y E. Prisner, In-tournament digraphs, *J. Combin. Theory*, Ser. B, 59(2), 267–287, 1993.
- [9] J. Bang-Jensen, M.H. Nielsen, y A. Yeo, Longest path partitions in generalizations of tournaments, *Discrete Math.* 306(16), 1830–1839, 2006.
- [10] J. Bang-Jensen, The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs, *Discrete Math.* 283 (2004), 1–6.
- [11] J. Bang-Jensen, Arc-local tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments, Technical Report Preprint No. 2, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [12] Jørgen Bang-Jensen, Problems and conjectures concerning connectivity, paths, trees and cycles in tournament-like digraphs, *Discrete Mathematics*, 309(18), 5655-5667
- [13] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty, *Graph Theory*, 2008, Springer.

- [14] J.A. Bondy, Basic graph theory: paths and circuits, in: R.L. Graham, M. Grötschel y L. Lovász (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, vol. I, The MIT press, Cambridge MA, 1995, 3–110.
- [15] I. Broere, M. Dorfling, Jean E. Dunbar, y Marietjie Frick, A path(ological) partition problem, *Discuss. Math. Graph Theory*, 18, 113–125, 1998.
- [16] I. Broere, P. Hajnal y P. Mihók, Partition problems and kernels of graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 17 (1997), 311–313.
- [17] Gcina Dlamini, Jean E. Dunbar, and Marietjie Frick, Ortrud R. Oellermann y Susan A. van Aardt, The directed path partition conjecture, *Discuss. Math. Graph Theory*, 25(3), (2005) 331–343.
- [18] Dunbar, Jean E., Frick, Marietjie, y Bullock, Frank: Path Partitions and P_n -free Sets, *Electronic Notes in Discrete Math.* 11, 11, (2002) 209–217,
- [19] J.E. Dunbar y M. Frick, Path kernels and partitions, *JCMCC* 31 (1999), 137–149.
- [20] J.E. Dunbar y M. Frick, The path partition conjecture is true for claw-free graphs. *Discrete Math.*, 307 (2007), 1285–1290
- [21] Frick, Marietjie, y Schiermeyer, Ingo: An Asymptotic Result for the Path Partition Conjecture, *Electr. J. Comb.* 12, 12, 2005
- [22] H. Galeana-Sánchez y Ilan A. Goldfeder, A classification of arc-locally semi-complete digraphs, *Discrete Math.*, 312 (2012) 1883–1891.
- [23] H. Galeana-Sánchez, Ilan A. Goldfeder y Isabel Urrutia, On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs, *Discrete Math.*, 310(19), (2010) 2495–2498.
- [24] H. Galeana-Sánchez y Ricardo Gómez, Independent sets and non-augmentable paths in generalizations of tournaments, *Discrete Math.*, 308(12), (2008) 2460–2472.
- [25] T. Gallai, *On directed paths and circuits*, Colloq. Tihany, 1996, Academic Press, New York, 1968.
- [26] P. Hajnal, Graph partitions, Thesis, J.A. University, Szeged, 1984 (supervisada por L. Lovász).
- [27] F. Havet, Stable set meeting every longest path, *Discrete Math.* 289 (2004), 169–173.
- [28] J.M. Laborde, C. Payan y N.H. Xuong, *Independent sets and longest paths in digraphs*, Graphs and other combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory, Proc. Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory, 1982, 173–177.
- [29] L. Lovász, On decomposition of graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.* 1, 237–238, 1966.

- [30] L.S. Mel'nikov, I.V. Petrenko, Path kernel and cycle length in undirected graphs, in: V.N. Kasyanov (Ed.), *Modern Problems of Program Construction*, ISI SB Russian Academy of Science, Novosibirsk, 2002, 222–231.
- [31] P. Mihók, *Graphs Hypergraphs and Matroids, Problem 4*, *Graphs Hypergraphs and Matroids*, M. Borowiecki and Z. Skupien, ed., Zielona Góra, 1985, p. 86.
- [32] Peter Katrenic y Gabriel Semanisin: A note on the Path Kernel Conjecture. *Discrete Mathematics* 309(8), 2551-2554 (2009). 10.
- [33] L. Rédei. Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt. Szeged*, 7:39–43, 1934.
- [34] Shiyang Wang y Ruixia Wang, The structure of strong arc-locally in-semicomplete digraphs, *Discrete Math.*, 309(23–24), 6555–6562, 2009.
- [35] Shiyang Wang y Ruixia Wang, Independent sets and non-augmentable paths in arc-locally in-semicomplete digraphs and quasi-arc-transitive digraphs, *Discrete Math.*, 311(4), 282–288, 2011.
- [36] M. Stiebitz, Decomposing graphs under degree constraints. *J. Graph Theory* 23 (1996), 321–324.
- [37] B. Roy, Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe, *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle*, 1(5), 129–132, 1967.
- [38] L.M. Vitaver, Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of Boolean powers of the incidence matrix, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 147, 758–758, 1962.
- [39] J. Vronka, Vertex sets of graphs with prescribed properties Thesis, P.J. Safárik University, Košice, 1986 (supervisada por P. Mihók).
- [40] Wenjie He y Baoli Wang, A note on path kernels and partitions, *Discrete Math.*, Volume 310, 21, (2010) 3040-3042