



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HIDRODINÁMICA DE LA
INTERACCIÓN DE OBJETOS
COMPACTOS EN AMBIENTES
ESTELARES DENSOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

PRESENTA:

MARTHA IRENE SALADINO ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDÍN





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Saladino Rosas Martha Irene 719 28 86 099 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 408094252
2. Datos del tutor Dr. William Henry Lee Alardín
3. Datos del sinodal 1 Dr. Víctor Manuel Romero Rochín
4. Datos de sinodal 2 Dr. Miguel Alcubierre Moya
5. Datos del sinodal 3 Dr. José Antonio García Barreto
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Mirna Villavicencio Torres
7. Datos del trabajo escrito Hidrodinámica de la interacción de objetos compactos en ambientes estelares densos 111 pp. 2012

*A mis abuelos:
Efi, Matilde, Amador y Chucho.*

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a las cuatro personas que siempre han estado a mi lado, mis abuelos quienes día a día me han apoyado y motivado para seguir adelante y cuyos consejos, historias y cariño han dejado una huella importante en mi vida.

A mis padres ya que me han apoyado incondicionalmente en las decisiones académicas que he tomado. A mi hermano José Alberto pues siempre ha sido mi cómplice y aunque no conoce mucho al respecto de la carrera que elegí me ha dado el apoyo, risas y consejos que necesito para no rendirme y seguir cumpliendo mis metas.

A mis tíos Clara, Violeta, Eugenia, Víctor, Dolores, Jesús y en especial a Alberto con quien disfruté la mayor parte de mi infancia y adolescencia y cuyo cariño me ha llevado a salir adelante.

A mi mejor amigo y confidente Eric, que desde que lo conocí ha estado presente en todos los momentos importantes de mi vida y con quien he compartido momentos de alegría y tristeza.

El trabajo de tesis no hubiera sido posible sin el apoyo del Dr. William Lee, quien tuvo toda la paciencia del mundo para explicarme la infinidad de dudas que surgían y repetir la información hasta que pudiera comprenderla, su apoyo y enseñanzas fueron tan valiosos que me llevaron a tomar la decisión de continuar por los senderos de la astrofísica.

Así mismo quiero agradecer al Dr. Víctor Romero Rochín quien aparte de darme valiosos comentarios sobre el trabajo de tesis me brindó dos de las clases más exquisitas que tuve durante la carrera, las cuales influyeron de manera que no me di por vencida aún cuando sentía que la carrera se tornaba tormentosa.

Agradezco los comentarios y crítica de mi tesis de los Drs. Miguel Alcubierre Moya y José Antonio García Barreto, así como de la M. en C. Mirna Villavicencio, los cuales me permitieron una mejor redacción del trabajo; también les agradezco por sus maravillosas clases que me guiaron en mi formación como científica.

No puedo dejar de agradecer al Fís. Andrés Porta quien me ha ayudado a lo largo de la licenciatura en todos los aspectos académicos posibles, y sin el cuál nunca habría caído en manos del Dr. William Lee.

A mis amigos de semestres avanzados Mau, un ayudante preocupado por sus alumnos, amigo y confidente, a Aitor quien me motivo a terminar el trabajo de tesis en el plazo que me había propuesto y con quien he disfrutado de muchas de las mejores charlas y a Rafael Tití una persona a quien le tengo mucho cariño, pues es un gran amigo siempre dispuesto a ayudar, escuchar, hacerme reír, fue quien me llevó a los caminos de la astronomía y me impulsó a hacer planes a futuro tanto académicos como personales.

A mis compañeros de aventuras que me hicieron ver que pese a los tropiezos en la licenciatura podíamos divertirnos de manera sana: Fer, Sergio Iker, Ana, Rodrigo y José Luis.

Hay muchas personas a las que debo agradecer y podría llenar hojas con sus nombres: Iker Loic, Juan, Irene, Marevna, Isaac, Aramis, Luis, en fin, una disculpa a todos aquellos a quienes no menciono pero saben que tienen un lugar especial en mis recuerdos.

A la UNAM, ¡gracias!

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	8
1. Objetos Compactos	11
1.1. Estrellas de neutrones	13
1.1.1. Historia y Predicción	13
1.1.2. Formación	14
1.2. Agujeros Negros	22
1.2.1. Agujeros negros de Schwarzschild	23
2. Modelos Estelares	33
2.1. Ecuación Politrópica	34
2.1.1. Ecuaciones de Evolución Estelar	34
2.1.2. Relaciones Politrópicas	36
2.1.3. Ecuación de <i>Lane-Emden</i>	37
2.2. Ecuación Friedman-Pandharipande-Skyrme (FPS)	41
2.3. Ecuación Híbrida	43
3. Ambientes estelares densos: Interacciones entre objetos compactos	44
3.1. Cúmulos Globulares	44
3.2. Órbitas Estelares	48
3.3. Fuerzas de Marea	52
4. Emisión complementaria a la colisión	58
4.1. Acreción en agujeros negros	58
4.2. Ondas Gravitacionales	60
4.3. Reacciones nucleares secundarias	65

5. Método SPH	67
5.1. Métodos Euleriano y Lagrangiano	67
5.2. El método	69
5.2.1. Integral interpolante	69
5.2.2. Discretización de las ecuaciones de Euler	70
5.2.3. El kernel	71
5.2.4. Resolución espacial	71
5.2.5. Viscosidad artificial	72
5.2.6. Ecuaciones finales	73
5.2.7. Códigos de árbol	73
5.2.8. Adaptabilidad en el tiempo	74
5.2.9. Radiación gravitacional	75
6. Simulaciones, resultados y análisis	78
6.1. Método numérico	78
6.2. Condiciones iniciales de las simulaciones	79
6.3. Casos $q = 0.31$	81
6.4. Caso $q = 0.9$	90
6.5. Parámetros finales	93
Conclusiones	97
A. Ecuación Politrópica para Gas Degenerado de Electrones	99
A.1. Caso no relativista $x \ll 1$	102
A.2. Caso relativista $x \gg 1$	102
B. Solución analítica para la ecuación de Lane-Emden	103
B.1. $n = 0$	103
B.2. $n = 1$	104
B.3. Otras soluciones	105
C. Simetrización para método SPH	106
Bibliografía	109

Introducción

El estudio de la interacción de objetos compactos se ha convertido en un tema de importancia debido a los fenómenos físicos que surgen como consecuencia de esta interacción.

Aunque no se conocen sistemas binarios de estrellas de neutrones y agujeros negros, se cree que existen y se espera que haya $10^{-6} - 10^{-5}$ por galaxia por año, lo cual implica varias colisiones por año a una distancia de 1 Gpc [10]. Debido a que en los cúmulos globulares hay mayor densidad de objetos estelares que en otros lugares de la galaxia, es inevitable que muchas estrellas tengan encuentros cercanos e incluso colisiones físicas en sus vidas [14, 15].

Cuando dos objetos compactos pasan cerca uno del otro, el parámetro de impacto con el que se acercan dice bastante de la dinámica que presentan; pues dependiendo de éste se tiene una colisión o hay formación de colas de marea y para un tiempo posterior la estrella secundaria, en el caso de un sistema estrella de neutrones- agujero negro queda completamente destruída.

El acercamiento entre los dos miembros del sistema binario compacto requiere que haya una pérdida de energía orbital y momento angular. Esto se logra mediante emisión de ondas gravitacionales; las cuales como sabemos son una predicción de la teoría de la relatividad general de Einstein que, sin embargo, no ha podido comprobarse directamente. En las últimas fases de una colisión entre objetos compactos, se espera un brote poderoso de ondas gravitacionales, por lo que sistemas de este tipo son candidatos a ser las fuentes de radiación gravitacional observable por detectores como LIGO y VIRGO [10–12, 14, 21, 22, 27, 28]. El estudio de estos sistemas y su modelación permitirá entonces conocer qué tipo de ondas gravitacionales se pueden esperar y sus propiedades, tales como su amplitud y periodo.

El sistema binario compacto también puede perder energía y momento angular mediante torcas gravitacionales a través de la formación de un bulbo de marea, deformando a la estrella esférica en una barra, que puede ser rotada por la estrella primaria¹ durante el encuentro, las mareas fuertes también desencadenan oscilaciones radiales en la estrella secundaria, lo

¹Se llama estrella primaria en un sistema binario a la estrella que ejerce mayor campo gravitacional; la secundaria es la estrella menos masiva que siente los efectos de la primera.

que se observa después del paso por el periastro. Otra consecuencia es la transferencia de masa, que junto con la masa de la estrella desecha puede generar una estructura de acreción alrededor de la estrella primaria, la cual es más masiva para parámetros de impacto bajos inicialmente. Adicionalmente un poco de materia es lanzada al exterior formando colas de marea. Cada paso por el periastro alimenta el disco de acreción y forma una cola de marea [15]. El material que tiene suficiente energía puede *desligarse* del sistema.

Las estrellas de neutrones tienen densidades de materia muy altas y no se conoce con detalle su estructura; es por ello que éstos objetos estelares en sistemas binarios podrían dar oportunidad de probar su estructura, pues la dinámica de la colisión depende de la ecuación de estado a través de la cual se modela la estrella. El utilizar una ecuación de estado más realista ayuda a una mejor descripción de la dinámica de la interacción. La señal gravitacional depende de la estructura de la estrella, por lo que la observación de radiación gravitacional y su espectro de potencia puede ayudar a construir la relación masa-radio para estrellas de neutrones, pues si se conoce exactamente a qué frecuencia cesa la emisión de radiación gravitacional, se puede conocer con precisión el radio de la estrella de neutrones [15].

Por otro lado existe una gran posibilidad de que tales eventos provean eyección de material rico en neutrones al medio estelar [14, 31] lo que podría, subsecuentemente terminar en nucleosíntesis por proceso-r y contribuir a las abundancias de elementos pesados, pues no está claro que este proceso nuclear pueda producirse solamente por explosiones de supernova [10]. El decaimiento nuclear debido al proceso-r puede generar eventos electromagnéticos que se observarían a frecuencias ópticas [23]. La cantidad de materia eyectada y su velocidad depende de la ecuación de estado utilizada para la descripción de la estrella de neutrones [23].

Finalmente el proceso de acreción de la materia proveniente de la estrella destruída, da origen a grandes cantidades de energía electromagnética radiada como rayos X de muy altas energías o rayos γ (a este fenómeno se le conoce como brote de rayos gamma, GRB por sus siglas en inglés). Se cree que la acreción sobre un objeto compacto, una estrella de neutrones o un agujero negro estelar ofrece una buena perspectiva para entender SGRB's [14], que son brotes de rayos gamma de corta duración que involucran energías que pueden exceder los 10^{50} erg.

Tenemos entonces cuatro procesos físicos que pueden estudiarse y entenderse mejor a partir de la interacción entre una estrella de neutrones y un agujero negro: la estructura de la estrella de neutrones, la emisión de radiación gravitacional, la abundancia en el universo de elementos pesados y las fuentes de SGRB's.

El trabajo consistió en realizar la simulación de un sistema binario compuesto por una estrella de neutrones construida a partir de una ecuación de estado realista en equilibrio hidrostático y un agujero negro para nueve sistemas con distintos parámetros, tales como el cociente de masas, el radio de la estrella de neutrones y el parámetro de impacto de la colisión. Para su estudio se dividió en seis capítulos. En el primero se presenta un panorama de lo que son los objetos compactos y su formación como remanentes de la evolución estelar. En el segundo se estudian modelos estelares, con la finalidad de ver de qué manera se puede aproximar la estructura de las estrellas de neutrones; se describen dos modelos: el politrópico y uno más realista dado mediante cálculos nucleares, el modelo desarrollado por Friedman-Pandharipande-Skyrme. En el tercer capítulo se describe el tipo de interacciones estelares que se pueden dar en los cúmulos globulares. En el cuarto capítulo se detallan las consecuencias que traerían estas interacciones, como la liberación de energía a partir de materia acreta, la descripción de ondas gravitacionales en la aproximación cuadrupolar y la nucleosíntesis que se podría dar a partir del material eyectado durante los encuentros estelares. En el capítulo 5 se describe el método desarrollado en Fortran 77 puramente newtoniano para la realización de nueve simulaciones realizadas que ayudarán a comprender la dinámica de un sistema binario. Finalmente, en el último capítulo se muestran los resultados de las simulaciones; se obtuvo la radiación gravitacional emitida por los sistemas estudiados, así como la cantidad de materia acreta por el agujero negro o eyectada durante el encuentro.

Otro tipo de encuentros que se pueden estudiar y que sin embargo no se analizan en este trabajo son la interacción de distintos objetos compactos, tales como dos estrellas de neutrones, una estrella de neutrones y una enana blanca o una enana blanca y un agujero negro. Por otro lado hubiera sido conveniente explorar más parámetros en las simulaciones, tales como las masas, la separación inicial de los objetos, etc.

Capítulo 1

Objetos Compactos

Los objetos compactos son resultado del final de la evolución estelar; estos objetos nacen con la muerte de las estrellas, esto es, cuando éstas ya no llevan a cabo reacciones nucleares en el centro. Al menos hay tres tipos de objetos compactos que se producen en el final de la vida de las estrellas: *enanas blancas*, *estrellas de neutrones* y *agujeros negros*. Lo que determina en qué tipo de objeto se convertirán las estrellas es su masa.

Se cree que las *enanas blancas* se originan a partir de estrellas con masas $M \lesssim 8M_{\odot}$; sin embargo, ya como enanas blancas pueden tener masas máximas de $1.4 M_{\odot}$. Las estrellas progenitoras de éstas posiblemente formen una *nebulosa planetaria*¹ antes de convertirse en enanas blancas. Las enanas blancas tienen un radio muy pequeño y debido a esto tienen una temperatura efectiva muy grande. Son mucho más blancas que las estrellas normales, de allí su nombre, por ello su radiación se da en la región óptica azul. Al no tener combustible para quemar, luchan contra el colapso gravitacional mediante presión de degeneración de electrones.

Las *estrellas de neutrones* se forman a partir de estrellas con masas mayores, sin embargo dichas masas son inciertas. Este tipo de objetos puede tener masas máximas de entre $1.4M_{\odot}$ y $3 M_{\odot}$. En estas estrellas predominan los neutrones en su interior, los cuales surgen del decaimiento β inverso de electrones y protones. Forman un núcleo gigante que se mantiene unido por autogravedad. Los radios de estas estrellas son de entre 10 y 20 km. Su observación se da directamente como fuentes pulsantes de radio e indirectamente como gas acretando:

¹ Las nebulosas planetarias son grandes capas de gas que contienen polvo, las cuales se expanden muy lentamente (decenas de kilómetros por segundo). La masa de estas nubes es aproximadamente de entre $0.1 M_{\odot}$ y $0.2 M_{\odot}$. Normalmente se asocian con estrellas calientes que se están contrayendo, mientras que su envoltura se expande. El por qué de la formación de las nebulosas planetarias es todavía un tema de discusión, sin embargo, lo que sí se sabe es que las nebulosas planetarias finalmente se disipan en el medio interestelar dejando atrás únicamente los núcleos calientes de las estrellas que las formaron. [30]

fuentes periódicas de rayos X.

La masa a partir de la cual se crean los *agujeros negros* es incierta. Su origen puede deberse al colapso de una estrella súper masiva o estos se generaron en el universo temprano debido a perturbaciones en el campo homogéneo de la densidad de fondo. Son objetos con un campo de gravedad tan intenso que ni la luz ni mucho menos la materia puede escapar de ellos. Son estrellas totalmente colapsadas en radios muy pequeños.

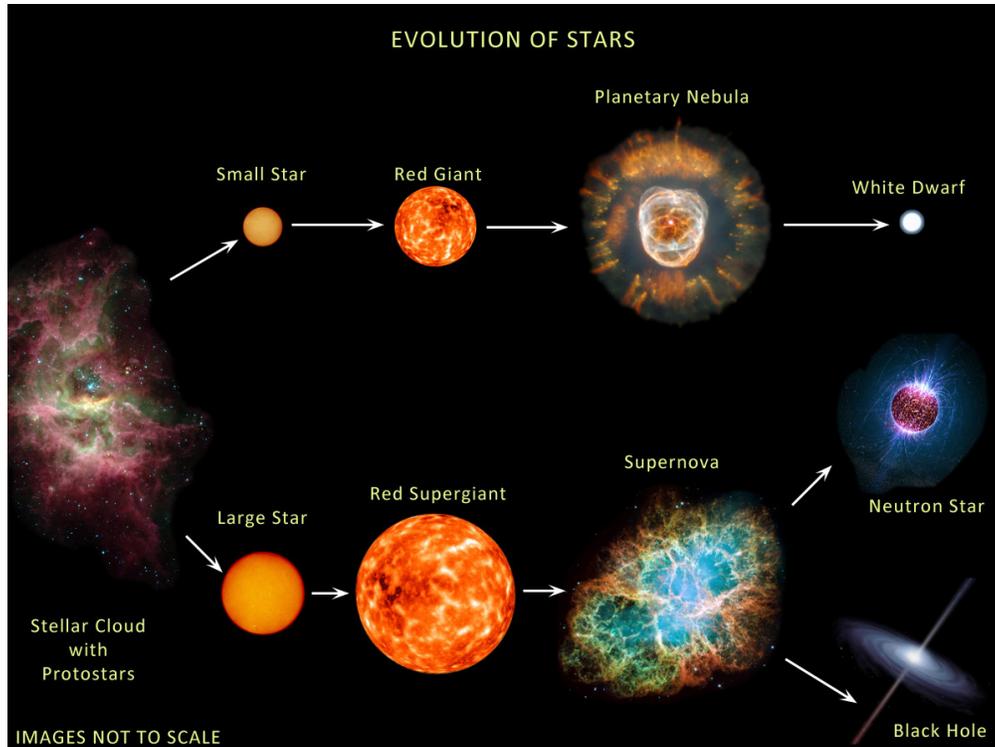


Figura 1.1: En este diagrama se muestra el proceso de evolución estelar y la formación de objetos compactos dependiendo la masa original de la estrella. Para masas $\lesssim 8M_{\odot}$, se cree que se forman enanas blancas, para estrellas con masas mayores, se forman estrellas de neutrones; finalmente los agujeros negros son producto de estrellas súper masivas.

A continuación se presenta una tabla en la que se muestran los tamaños de los objetos compactos en relación con el Sol. Tomada de [27].

Objeto	Masa	Radio	Densidad Media [g/cm ³]
Sol	M_{\odot}	R_{\odot}	1
Enana Blanca	$\lesssim M_{\odot}$	$\sim 10^{-2} R_{\odot}$	$\lesssim 10^7$
Estrella de Neutrones	$\sim 1-3 M_{\odot}$	$\sim 10^{-5} R_{\odot}$	$\lesssim 10^{15}$
Agujero Negro	muy masivo	$\frac{2GM}{c^2}$	$\lesssim \frac{M}{R^3}$

1.1. Estrellas de neutrones

1.1.1. Historia y Predicción

Las estrellas de neutrones fueron predichas teóricamente por L.D. Landau a inicios de los años 30's.

Sabemos que el equilibrio en las estrellas ordinarias se da debido a la presión generada como resultado del movimiento térmico de iones y electrones. Para poder mantener este equilibrio cuando se dé el enfriamiento de la estrella se requerirían fuentes adicionales de energía. En 1926 el físico inglés R. Fowler demostró que las enanas blancas eran objetos cuyo equilibrio se daba mediante fuerza de gravedad y presión de gas de electrones degenerados.

La presión de un gas de electrones degenerados, de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica (Principio de exclusión de Pauli) no desaparece ni siquiera en el cero absoluto. Esto lleva a la inevitable conclusión de que después de que se acaban todas sus reservas de energía interna (termonuclear), todas las estrellas se comprimen a un tamaño de algunos cientos de kilómetros y se transforman en enanas blancas.

En realidad, esto no es del todo cierto. Chandrasekhar (1931) y Landau (1932) demostraron independientemente que la masa de una enana blanca no puede ser indefinidamente grande. Solamente las estrellas que tienen masas pequeñas pueden transformarse en enanas blancas. El máximo valor para estas estrellas es llamado el *límite de Chandrasekhar*. La existencia de este límite se explica a continuación.

La presión de un gas degenerado de electrones obedece una ley de tipo politrópica² (Capítulo 2) que va como $P \propto \rho^\gamma$, donde $\gamma = 5/3$ para un gas no relativista y $\gamma = 4/3$ en el caso relativista. La relación entre la masa y el radio de la estrella va como:

$$R \sim M^{\frac{\gamma-2}{3\gamma-4}}. \quad (1.1)$$

Podemos ver que para un gas no relativista $R \propto M^{-1/3}$. Si aumenta la masa, el radio de la enana blanca decrece; esta es una característica para todas las estrellas degeneradas. Entonces conforme la masa de una enana blanca aumenta, los electrones se agrupan más densamente y sus energías aumentan de acuerdo al Principio de exclusión de Pauli. El gas de electrones se vuelve relativista y entonces $\gamma = 4/3$. En este caso, ambas fuerzas en la ecuación de equilibrio cambian idénticamente con el radio y se hacen iguales para un valor de la masa, el límite de

²En astrofísica un politropo se refiere a la solución de la ecuación de Lane-Emden en la cual la presión depende de la gravedad como $P = K\rho^\gamma$, donde $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, n es el índice politrópico, P la presión, ρ la densidad y K la constante politrópica.

Chandrasekhar. Un cálculo exacto nos dice que

$$M_{Ch} = 4\pi \left(-\frac{\omega'}{z} \right)_{z=3} z_3^3 \left(\frac{K}{\pi G} \right). \quad (1.2)$$

De la ecuación politrópica obtenemos el valor de la constante K , $K = \frac{1.24 \times 10^{15}}{\mu^{4/3}}$, y las constantes $z_3^2 \frac{d\omega}{dz} = 2.01824$ se obtienen de la solución de la ecuación de *Lane-Emden* que se discutirá en el capítulo 2. Lo cual da una masa límite:

$$M_{Ch} = \frac{5.836}{\mu_e^2} M_{\odot}, \quad (1.3)$$

donde μ_e es el número promedio de nucleones por electrón. Las enanas blancas se forman de material donde el H se quema en He, C, O entonces se espera que $\mu_e \rightarrow 2$ y por ello el límite de Chandrasekhar tiende a $1.46 M_{\odot}$.

¿Qué sucede con las estrellas que no tienen una fuente de energía interna y que exceden la masa límite de Chandrasekhar? Landau fue el primer científico que dio solución a esta pregunta.

La estrella debe colapsar hasta que los núcleos atómicos entren en contacto y un núcleo atómico gigante de densidad $\rho_c = 10^{14} - 10^{15} \text{ g/cm}^3$ y tamaño de alrededor de 10 km se forme. En 1934 los astrónomos americanos Baade y Zwicky sugirieron que las explosiones de supernova son procesos catastróficos de formación de estrellas súper densas que están hechas de neutrones. Los neutrones habían sido descubiertos dos años antes por Chadwick.

Los primeros cálculos de la estructura de una estrella de neutrones fueron realizados por los físicos norteamericanos Oppenheimer y Volkoff en 1939. Llegaron a la conclusión de que había un límite superior para la masa de las estrellas de neutrones. Sus cálculos mostraron que la estructura de las estrellas de neutrones depende significativamente de la ecuación de estado de la materia a densidades nucleares.

Sin embargo no fue hasta 1967 cuando las predicciones hechas sobre este tipo de estrellas se comprobaron, debido a que son muy difíciles de observar.

1.1.2. Formación

Aunque en la subsección anterior se desarrolló cómo se obtuvo teóricamente el concepto de estrellas de neutrones, en esta parte me enfocaré en el proceso de formación. Para ello usaré la propuesta hecha por Baade y Zwicky de que estas estrellas podrían formarse a partir de explosiones de supernova. Comenzaré con un comentario breve y descriptivo de las estrellas

supermasivas que se encuentran en secuencia principal, sus explosiones finales y el colapso de estas estrellas y finalmente describiré la reacción β que produce a las estrellas de neutrones cuando se rebasa el límite de Chandrasekhar.

Últimas etapas en la vida de una estrella masiva

Se dice que una estrella se encuentra en la secuencia principal cuando en su núcleo se llevan a cabo las reacciones nucleares que transforman hidrógeno en helio, liberando así la energía que hace que la estrella brille. Al quemarse hidrógeno y convertirse en helio se lleva a cabo una reacción exotérmica, esto es, una reacción que libera energía Q . Una estrella masiva pasa alrededor del 90% de su vida en secuencia principal; y la mayor parte del resto la pasa quemando helio. Estas fases determinarán lo que seguirá durante los estados avanzados de la combustión y la explosión.

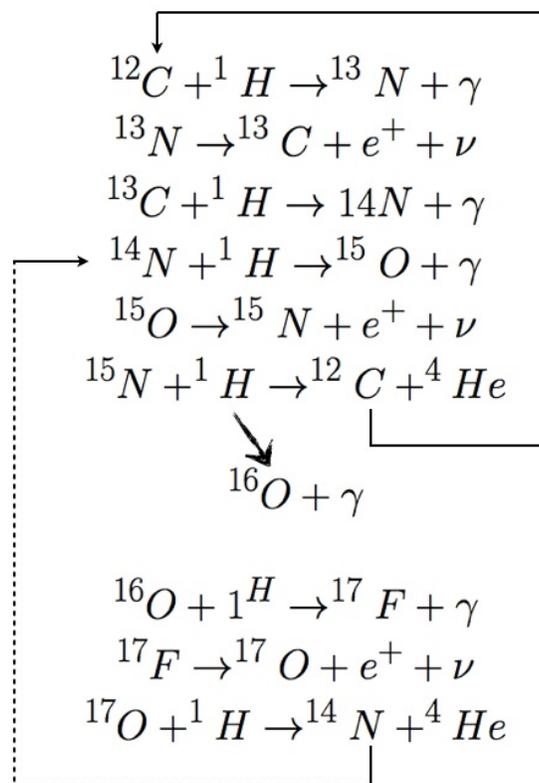


Figura 1.2: Ciclo CNO para fusión de Hidrógeno en estrellas masivas.

Las reacciones nucleares relevantes para el quemado de hidrógeno en estrellas masivas están dadas mediante el ciclo CNO (Carbono, Nitrógeno y Oxígeno). La energía liberada Q

durante la combustión depende de la composición inicial de la estrella. El ciclo CNO requiere la presencia de algunos isótopos de C, N u O. La secuencia de las reacciones se representa en la figura 1.2. Para una composición inicial de 70% de hidrógeno, la energía liberada es $Q = 26.731$ MeV por átomo de helio producido; de donde 1.71 MeV corresponden a la energía perdida por emisión de neutrinos; por lo que la energía total disponible liberada es de 24.97 MeV.

Conforme se agota el combustible (hidrógeno) la energía generada por las reacciones nucleares disminuye y la estrella empieza a contraerse.

Esta contracción hace que la temperatura aumente considerablemente en el núcleo, y que sea posible que la estrella empiece la combustión de helio (se requieren temperaturas $\gtrsim 10^8$ K debido a las barreras Coulombianas). Los dos procesos principales por los que se da el quemado de este elemento son la reacción triple alfa (3α):



y ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ (ver nota al pie³); la energía nuclear liberada por proceso 3α es $Q = 7.275$ MeV, mientras que para la segunda reacción la energía liberada es $Q = 7.162$ MeV. Al iniciarse esta combustión, se alcanza un equilibrio entre la atracción gravitacional y la presión producida por la liberación de energía en las reacciones nucleares. Dicha contracción hace que una capa alrededor del núcleo empiece a transformar hidrógeno en helio. Por lo tanto, en este momento se están llevando a cabo dos reacciones simultáneas en la estrella, pero de elementos diferentes. En el núcleo, el helio se transforma en carbono y en una capa alrededor del núcleo el hidrógeno se quema para formar helio.

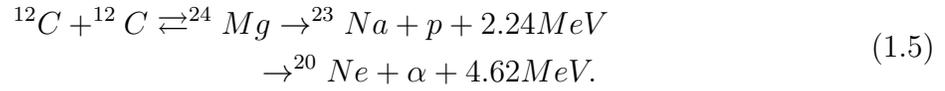
Conforme los elementos escasean en el núcleo debido a la fusión nuclear, la estrella colapsa, aumentando la temperatura y dando lugar a la formación de elementos más pesados; mientras que en las capas envolventes se produce también la combustión de elementos menos pesados que los del núcleo.

Una vez que la temperatura central excede los $\sim 5 \times 10^8$ K, la pérdida de neutrinos por aniquilación par domina la energía. La difusión radiativa y la convección siguen siendo importantes para la estructura y apariencia de la estrella, sin embargo, es la pérdida de neutrinos la que balancea la contracción gravitacional y las reacciones nucleares.

La nucleosíntesis en las últimas etapas se caracteriza por una gran variedad de reacciones nucleares que son posibles por las altas temperaturas.

³Las reacciones nucleares se pueden escribir en esta notación, donde ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O} = {}^{12}\text{C} + \alpha \rightarrow {}^{16}\text{O} + \gamma$.

La reacción nuclear principal durante la combustión de carbón es la fusión de dos núcleos de ^{12}C para producir ^{24}Mg , el cual puede decaer mediante los canales⁴:

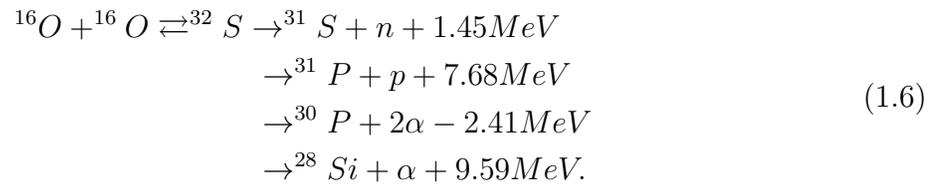


Veamos que los p y α producidos pueden reaccionar con otras partículas en la mezcla lo que provocará reacciones en cadena, tales como $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}(e^+\nu)$ $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$. Los productos finales de la combustión de carbón pueden ser ^{16}O , ^{20}Ne , ^{24}Mg y ^{28}Si .

Para la combustión de oxígeno, la barrera Coulombiana es muy alta, pero antes de que se alcance la temperatura requerida para la fusión de oxígeno, la reacción $^{20}\text{Ne}(\gamma, \alpha)^{16}\text{O}$; se vuelve energéticamente posible. Ésta libera una energía $Q = 4.73$ MeV. Otras reacciones secundarias que se pueden dar son $^{24}\text{Mg}(\alpha, \gamma)^{28}\text{Si}$, $^{25}\text{Mg}(\alpha, n)^{29}\text{Si}$, $^{26}\text{Mg}(p, n)^{26}\text{Al}$, $^{26}\text{Mg}(\alpha, \gamma)^{30}\text{Si}$, $^{27}\text{Al}(\alpha, p)^{30}\text{Si}$ y $^{30}\text{Si}(p, \gamma)^{31}\text{P}$.

La condición de equilibrio da una temperatura de combustión de neón de $1.5 \times 10^9\text{K}$ y una vida de algunos meses.

Siguiendo la combustión de neón se tienen ^{16}O , ^{24}Mg , ^{28}Si , y algunas otras trazas de las reacciones secundarias. La fusión de oxígeno se favorece debido a la *foto-desintegración*⁵ ($^{16}\text{O}(\gamma, \alpha)^{12}\text{C}$). Durante ésta reacción de fusión se produce ^{32}S que puede decaer por alguno de los siguientes canales:



Los decaimientos más frecuentes son el p , seguido por el α . De nuevo, estas partículas liberadas pueden dar lugar a reacciones secundarias ($^{35,37}\text{Cl}$, $^{36,38}\text{Ar}$, $^{39,41}\text{K}$, $^{40,42}\text{Ca}$). Al final de la reacción alrededor del 90% de los constituyentes serán ^{28}Si y ^{32}Si . Hay que mencionar que durante la combustión de oxígeno central hay un incremento sustancial de neutrones debido a la interacción débil.

La última fase que puede alcanzarse es la de la combustión de silicio en donde el ^{28}Si se convierte en ^{56}Fe . Ésta es la última reacción nuclear en la cual se libera energía. Para

⁴En realidad hay más canales mediante los cuales puede decaer, sin embargo solo listamos los canales más probables, debido a que algunos corresponden a decaimientos endotérmicos.

⁵A temperaturas cercanas a 10^{10}K la energía de los fotones excede la energía de amarre nuclear, y entonces hay desintegración.

formar elementos más pesados se necesita proveer a la estrella de energía; las reacciones nucleares se vuelven endotérmicas. Por lo tanto, al llegar al hierro las reacciones nucleares se detienen. La región central del núcleo alcanza temperaturas a las cuales las abundancias están determinadas por el equilibrio estadístico nuclear, un conjunto de Fórmulas de Saha.⁶

Supernova y remanentes

Al detenerse las reacciones nucleares la estrella empieza a contraerse nuevamente. Como ya no se están llevando a cabo reacciones nucleares, lo único que puede detener la contracción gravitacional de la estrella es la presión generada por los electrones del núcleo de la estrella. El gas de electrones domina la presión, y dado que se tienen temperaturas de alrededor de 10^9K los electrones son relativistas ($kT \sim 1.7m_e c^2$), el exponente adiabático es entonces $4/3$. En estrellas más masivas la fotodesintegración de núcleos muy pesados reduce el exponente adiabático, lo que provoca que el núcleo se vuelva inestable y como consecuencia haya un colapso. Para estrellas menos masivas los electrones relativistas son degenerados, es decir, debido a que la densidad de electrones es muy alta hay que incluir efectos cuánticos, por lo que la presión generada por ellos se deriva del Principio de Exclusión de Pauli, que nos dice que dos fermiones no pueden tener el mismo estado cuántico; las energías de Fermi para estos electrones son altas. Entonces el electrón capturado por un núcleo pesado reduce la presión y comienza el colapso.

Suponiendo que tenemos un núcleo que comienza a colapsar, con valores centrales de $\rho_c = 10^{10}\text{g cm}^{-3}$ y temperatura $T_0 \approx 10^{10}\text{K}$. Los electrones están relativísticamente degenerados.

⁶El equilibrio estadístico nuclear se da cuando la reversibilidad de los procesos implica reacciones nucleares y se producen reacciones directas e inversas. El núcleo ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, por ejemplo, siendo el más estable, juega un papel crucial en el equilibrio estadístico, éste puede desintegrarse por fotones en partículas α y neutrones:



Para determinar la proporción $\frac{n_{Fe}}{n_{\alpha}}$ consideramos las reacciones generales del tipo:



donde A es el número másico y Z el número atómico. Tomando el núcleo ${}^{56}\text{Fe}=(26,56)$ y considerando 13 reacciones de tipo 1.8 y cuatro del tipo 1.9. La proporción de abundancia es:

$$\frac{n_{\alpha}^{13} n_n^4}{n_{Fe}} = \frac{G_{\alpha}^{13} G_n^4}{G_{Fe}} \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \right)^{24} \left(\frac{m_{\alpha}^{13} m_n^4}{m_{Fe}} \right)^{3/2} e^{-Q/kT}. \quad (1.10)$$

Con $Q = (13m_{\alpha} + 4m_n - m_{Fe})c^2$ y G_i los pesos estadísticos. El valor Z/N al cual ocurre la fotodesintegración depende de procesos de interacción débil. En equilibrio a temperaturas moderadas, uno espera núcleos del grupo de hierro, lo cuales al aumentar la temperatura se desintegrarán en partículas α , protones y neutrones.

Para este caso, se tiene una ecuación de estado politrópica. Por ello el núcleo puede describirse por un índice politrópico $n = 3$. Resolviendo la ecuación de Lane-Emden, lo cual se hace de manera numérica, podemos ver que solo núcleos con masas entre $M_{Ch} \leq M_{nucleo} \leq 1.0499M_{Ch}$ pueden colapsar homogéneamente. Como vimos de la ecuación 1.3 $M_{Ch} \sim \mu_e^2$. Entonces la captura de electrones durante el colapso incrementa μ_e y reduce M_{Ch} . Por lo que el límite superior de la masa del núcleo para el colapso decrece. El colapso dura muy poco, toma tiempos que son del orden del tiempo de caída libre. Por ejemplo para el núcleo de una estrella de densidad inicial $\rho = 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$, se obtiene $t_{caidalibre} \approx (G\rho)^{-1/2} \approx 40 \text{ ms}$, y para densidades de $\rho = 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ es de 0.4 ms.

Debido al colapso, la densidad final se aproxima a la de una estrella de neutrones ($\rho = 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$). Entonces la ecuación de estado se vuelve "dura", esto es, la materia se vuelve casi incompresible. Aquí termina el colapso.

Cuando la energía de un electrón degenerado excede la diferencia de masa-energía entre el neutrón y el protón: $E_{deg} > (m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV}$, los electrones se mueven a velocidades moderadamente relativistas y se produce un decaimiento inverso- β que está dado por:



La densidad a la que este decaimiento ocurre es del orden de 10^9 g cm^{-3} . En material estelar a densidades altas, el plasma tiene núcleos pesados y no solo protones, entonces el núcleo es capaz de capturar electrones, lo cual requiere mucha energía pues los neutrones del núcleo están degenerados; esto requiere densidades altas para poder proveer a los electrones suficiente energía, así los electrones y los iones se encargan de llenar todos los estados libres de la materia y de esta manera la mantienen eléctricamente neutra. Si el núcleo se vuelve muy rico en neutrones, éste se comienza a romper liberando neutrones, este proceso se conoce como *goteo de neutrones* y se da a $\rho_{goteo} = 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Debido a la abundancia de neutrones, la presión degenerativa de éstos domina a la de los electrones. Se puede hacer el cálculo aproximado del radio que debe tener un objeto gravitatorio soportado de esta forma:

$$M \propto \frac{1}{(m_{deg}R)^3}. \quad (1.12)$$

Si $M = 1M_{\odot}$, entonces se obtiene una relación para una enana blanca y una estrella de neutrones tal que:

$$R_n \approx R_{eb} \left(\frac{m_e}{m_p} \right) \approx 10000m. \quad (1.13)$$

Con las dimensiones tan pequeñas de este radio se obtiene que la separación entre las distintas partículas está dado por $\Delta x \approx (\frac{V}{N})^{1/3} \approx (\frac{\rho}{m_p})^{-1/3} \approx 10^{-15}m$, que es la distancia típica sobre la cual actúa la fuerza nuclear fuerte (la longitud de onda de Compton del protón). Las partículas están tan cercanas unas de las otras que los núcleos se *tocan* entre sí. Por esta razón la densidad de materia en una estrella de neutrones es comparable con la densidad nuclear. El problema surge debido a que la ecuación de estado para materia densa no se conoce experimentalmente. Por lo tanto no resulta muy clara la estructura precisa de las estrellas de neutrones. La masa mínima que una estrella de neutrones puede tener es $\sim 0.1M_{\odot}$. Por debajo de esta masa los neutrones son inestables al decaimiento β [17].

Si todo el proceso fuera completamente elástico, entonces la energía cinética de la materia colapsada sería suficiente para que vuelva después de la reflexión al estado antes de que el colapso comenzara. Esta energía puede estimarse a partir de:

$$E \approx GM_{nucleo}^2 \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{eb}} \right) \approx \frac{GM_{nucleo}^2}{R_n} \approx 3 \times 10^{53} erg, \quad (1.14)$$

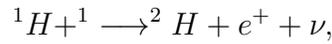
donde R_n es el radio de la estrella de neutrones y R_{eb} es el radio de la enana blanca. Si comparamos este valor con la energía necesaria para expulsar las capas envolventes E_{env} , las cuales no tienen tiempo de seguir el colapso del núcleo,

$$E_{env} = \int_{M_{eb}}^M \frac{Gmdm}{r} \ll \frac{GM^2}{R_{eb}} \approx 3 \times 10^{52} erg. \quad (1.15)$$

Las estimaciones reales dan una E_{env} por debajo de 10^{50} erg y por ello solo una pequeña cantidad de la energía involucrada en el colapso del núcleo es suficiente para expulsar el envolvente. Si una remanente de masa M_n permanece en el estado condensado, la energía de su colapso aún está disponible. La pregunta es ahora, ¿cómo se usa esta energía para acelerar el resto del material hacía afuera? La respuesta podría ser una onda de choque moviéndose hacía afuera, sin embargo hay un problema, podría imaginarse que la estrella de neutrones formada tiene masa del orden de la masa final de Chandrasekhar. El resto de la materia condensada sigue siendo principalmente de hierro. Cuando después del rebote esta región pasa por la onda de choque, casi toda su energía se usa para desintegrar el hierro en nucleones libres. Entonces solo una pequeña fracción de la energía cinética inicial permanece en la onda de choque y está disponible para lanzar el hierro.

Durante el colapso de una estrella en su última etapa de evolución, la densidad de su núcleo puede alcanzar valores similares a las densidades en los núcleos atómicos. La sección eficaz

de los neutrinos es $\sigma_\nu \simeq \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2}\right)^2 10^{-44} \text{cm}$, y el camino libre medio para materia con densidad ρ es $\ell_\nu \sim \frac{1}{\rho \sigma_{nu}}$; considerando el hecho de que los neutrinos pueden ser energéticos, muchos de ellos serán reabsorbidos por la estrella. Por ello es necesario considerar una ecuación de transporte para energía de neutrinos y evaluar la cantidad de momento que los neutrinos que interaccionan dejan en las capas de la estrella. En los interiores estelares solo los neutrinos de electrón juegan un rol, estos pueden crearse en diferentes procesos dentro de una estrella; estos procesos pueden ser: la fusión de hidrógeno (la transformación de 4 protones en un núcleo de ${}^4\text{He}$, la conservación de carga requiere dos decaimientos β^+ cada uno de los cuales está acompañado de la emisión de un neutrino con el fin de conservar el número leptónico), en las siguientes cadenas también se da emisión de neutrinos:



Otras producciones de neutrinos no están relacionadas con combustión nuclear, por ejemplo a densidades extremas la degeneración de electrones puede dar lugar a captura de electrones por protones en núcleos de carga Z y peso atómico A : $e^- + (Z, A) \longrightarrow (Z - 1, A) + \nu$. Otro proceso es el llamado *Urca*, para un núcleo adecuado (Z, A) , ocurre la captura de un electrón lo que es seguido de decaimiento β : $(Z, A) + e^- \longrightarrow (Z - 1, A) + \nu$, $(Z - 1, A) \longrightarrow (Z, A) + e^- + \bar{\nu}$. Las partículas originales se restauran y se emiten dos neutrinos. Hay algunas restricciones sobre los núcleos (Z, A) adecuados para que este proceso se realice: deben tener un núcleo isobárico $(Z - 1, A)$ de energía ligeramente más alta que es inestable al decaimiento β . Otro proceso de creación de neutrinos, ocurre sin reacciones nucleares, es un proceso puramente leptónico predicho como consecuencia de la teoría de Fermi de interacción débil, que permite un acoplamiento electrón-neutrino, tal que, si un electrón cambia su momento, pueden emitirse un par de neutrinos. Otros procesos son: aniquilación de par de neutrinos (ocurren en ambientes muy calientes $T \geq 10^9 \text{K}$: $e^- + e^+ \longrightarrow \nu + \bar{\nu}$), neutrinos Bremsstrahlung y neutrinos sincrotrón (se necesitan campos magnéticos).

Durante el colapso la producción de neutrinos por neutroionización se vuelve dominante. Conforme la densidad se aproxima a valores de 10^{12}g cm^{-3} , el decaimiento β se vuelve

más pronunciado. Durante esta neutroionización se liberan neutrinos. Se ha observado que la liberación de neutrinos está relacionada con la explosión de supernovas. La energía típica de los neutrinos liberados durante el colapso es del orden de la energía de Fermi de los electrones relativistas. $\frac{E_\nu}{m_e c^2} \approx 10^{-2} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}$; ésto hace que la liberación de energía por neutrinos sea de manera lenta, pues el material es opaco a ellos. Todos estos fenómenos descritos hacen que cuando el núcleo alcanza densidades nucleares, el núcleo rebota y la materia envolvente se lanza a velocidades del orden de 10^4 km/s . La rápida liberación de energía y su recombinación subsecuente origina un destello altamente luminoso que llega a tener una luminosidad en el óptico $\sim 10^9 L_\odot$. A este fenómeno se le conoce como *supernova* tipo II⁷.

1.2. Agujeros Negros

Los agujeros negros son objetos con alta densidad de masa y un diámetro muy pequeño. Debido al gran campo gravitacional que generan, ninguna partícula es capaz de escapar de ellos. A fines del siglo XVIII, John Michell, en el Reino Unido, y Pierre Simon de Laplace propusieron su existencia[1]. En 1793 Laplace publicó *El sistema del mundo*, en cuya primera edición hace referencia a lo que sucede con las estrellas que aparecen y después desaparecen repentinamente del cielo. Laplace notó que como consecuencia de la teoría de la gravedad propuesta por Newton y la teoría corpuscular de la luz, la luz no podría escapar de un objeto suficientemente masivo y con un radio muy pequeño; como consecuencia se tendría un cuerpo oscuro [27]. Sin embargo, fue hasta el siglo XX, con la teoría de la relatividad general, cuando se pudo estudiar formalmente este fenómeno.

En 1915 Albert Einstein publicó una serie de artículos que daban a conocer la teoría de la relatividad general; esta teoría proporciona una descripción relativista de la gravitación. Relaciona la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Meses después de su publicación, el físico alemán Karl Schwarzschild derivó la primera solución para el campo gravitacional de una masa esférica. Esta solución explica a los agujeros negros.

Posteriormente vinieron los desarrollos vistos en la sección 1.1, de Chandrasekhar y Landau para enanas blancas y la predicción de estrellas de neutrones. En 1939 Oppenheimer y Snyder calcularon el colapso de una esfera homogénea de gas en relatividad general, encontrando que la estrella eventualmente "pierde" comunicación con el resto del universo. Éste

⁷ Observacionalmente se distinguen dos tipos principales de supernovas, las supernovas Tipo I y las supernovas Tipo II. La diferencia radica en que las supernovas Tipo I no muestran líneas de hidrógeno en su análisis espectral, lo que indica que no queda hidrógeno en las capas que son expulsadas durante la explosión. Las supernovas Tipo II sí muestran líneas de hidrógeno en su espectro.

fue el primer cálculo riguroso que demostraba la formación de un agujero negro.

Hasta la década de los 60's el problema del colapso gravitacional fue ignorado. J. A. Wheeler y colaboradores comenzaron una investigación seria en esta época y fue él quien acuñó el término de agujero negro.

Otras soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein han sido desarrolladas obteniéndose agujeros negros. Sin embargo varían los parámetros respecto a la solución desarrollada por Schwarzschild, en donde se tiene un campo externo de un agujero negro eléctricamente neutro y que no rota. Por ejemplo, el agujero negro de *Kerr* describe un hoyo negro rotante, la solución de *Kerr-Newman* describe agujeros negros que rotan y tienen campos electromagnéticos. Otra solución es la dada por *Reissner-Nordstrom* donde se tiene un agujero estático pero eléctricamente cargado.

La única manera en la que se manifiestan los agujeros negros es mediante su atracción gravitacional. Ya que la materia atrapada por un agujero negro llega a liberar enormes cantidades de energía al ser acretada por dicho sistema. La energía liberada se puede manifestar en forma de rayos X. En 1962 se descubrieron fuentes de rayos X, lo cual motivó al estudio teórico de agujeros negros. Uno de los sistemas en donde se pueden estudiar mejor estos objetos compactos son los sistemas binarios de estrellas. A principios de la década de los setentas las observaciones de la fuente binaria de rayos X Cygnus X-1 proporcionó la primera evidencia plausible de la existencia de los agujeros negros.

1.2.1. Agujeros negros de Schwarzschild

Las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert⁸ que describen la gravedad, están dadas por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad \text{donde} \quad G = c = 1, \quad (1.16)$$

$T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.17)$$

con $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ el tensor de Ricci y $R = R^{\mu}_{\mu}$ su traza.

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}$ es el tensor de Riemann y $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}[\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}]$, los símbolos de Christoffel.

⁸Se les llama así porque tanto Einstein como Hilbert llegaron a éstas independientemente con unos días de diferencia.

Consideramos a continuación un campo gravitacional externo a un objeto estático y esférico⁹. La métrica del espacio-tiempo para una simetría esférica es:

$$ds^2 = g_{00}(r, t)dt^2 + 2g_{r0}(r, t)drdt + 2g_{0\theta}(r, t)d\theta dt + 2g_{0\phi}(r, t)d\phi dt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.19)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$. Si no hay rotación, entonces $g_{0\theta} = 0$ y $g_{0\phi} = 0$:

$$ds^2 = g_{00}(r, t)dt^2 + 2g_{r0}(r, t)drdt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

Usamos a continuación las ecuaciones de Einstein 1.16 para definir un sistema físico. Pensemos a la materia como un fluido perfecto, entonces el tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

donde ρ es la densidad de energía medida para observadores en reposo respecto al elemento de fluido. P es la presión medida por observadores en reposo respecto al elemento del fluido, u^μ es el cuadrivector de velocidad (velocidad en las tres coordenadas espaciales y la temporal) del elemento del fluido, pero como tenemos un fluido estático $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ y como $\bar{u} \cdot \bar{u} = -1$, entonces $u^0 = (\frac{-1}{g_{00}})^{1/2}$. A continuación definimos:

$$\begin{aligned} g_{00} &\equiv -e^{2\Phi(r)} \Rightarrow u^0 = e^{-\Phi}, \\ g_{rr} &\equiv e^{2\Lambda(r)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Reescribimos la métrica como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.22)$$

donde las componentes distintas de cero para el tensor energía-momentos son:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho e^{2\Phi}, \\ T_{rr} &= P e^{2\Lambda}, \\ T_{\theta\theta} &= r^2 P, \\ T_{\phi\phi} &= \text{sen}^2\theta T_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

El tensor de energía-momento involucra P y ρ , las cuales pueden relacionarse mediante una ecuación de estado con P como función de ρ .

Ahora, a partir de la métrica 1.22 las componentes del tensor de Einstein quedan como:

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= -\frac{1}{r^2}e^{2\Phi} \frac{d}{dr}[r(1 - e^{-2\Lambda})], \\
 G_{rr} &= -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \\
 G_{\theta\theta} &= r^2e^{-2\Lambda} \left[\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\Lambda}{dr} \right], \\
 G_{\phi\phi} &= \text{sen}^2\theta G_{\theta\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

La conservación de energía-momento es:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0;
 \tag{1.25}$$

veamos que para el caso estático $\nu = 0$ la solución es trivial, al igual que para una simetría esférica $\nu = \theta, \nu = \phi$. El único caso no trivial es $\nu = r$. Lo que implica:

$$(P + \rho) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dP}{dr}.
 \tag{1.26}$$

En relatividad, la presión contribuye a la inercia, a diferencia del caso newtoniano¹⁰. Definimos la función $m(r)$ como:

$$m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\Lambda}) \Rightarrow g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}.
 \tag{1.27}$$

De la ecuación temporal (componente 0,0) obtenemos la función de masa:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho,
 \tag{1.28}$$

que tiene la misma forma que la masa dentro de una esfera de radio r de la ecuación Newtoniana; sin embargo en relatividad no puede interpretarse como la masa de energía dentro de r . De la ecuación radial (componente r,r), tenemos que $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$, entonces

$$-\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 8\pi T_{rr}.$$

¹⁰Ver 2.14.

Sustituyendo Λ en términos de r y despejando, tenemos:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]}. \quad (1.29)$$

Las variables (m, Φ, ρ, P) pueden obtenerse de las ecuaciones 1.26, 1.28, 1.29 y la ecuación de estado.

Solución Externa ($r > R$)¹¹

Fuera de la estrella se puede considerar vacío, entonces $\rho = P = 0$. Obtenemos dos ecuaciones:

$$\frac{dm}{dr} = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)}. \quad (1.31)$$

Integrando se obtiene:

$$m(r) = M = cte, \quad (1.32)$$

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (1.33)$$

Entonces de acuerdo a la definición de g_{00} y g_{rr} , la *métrica de Schwarzschild* es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.34)$$

Suponiendo que estamos muy lejos del objeto $r \gg R$, la ecuación es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.35)$$

El teorema de Birkhoff dice que la métrica de Schwarzschild es la única solución de las ecuaciones de Einstein en vacío y con simetría esférica. Se concluye de este teorema, que no hay ondas gravitacionales emitidas de sistemas esféricos pulsantes.

Solución interior $r < R$

Dentro de la estrella $\rho \neq 0$ y $P \neq 0$. Dividiendo 1.26 entre $(\rho + P)$ y eliminando Φ de la ecuación 1.29, obtenemos la ecuación de estructura estelar Tolman-Oppenheimer-Volkov

¹¹ R es el radio de la estrella

(TOV):

$$\frac{dP}{dr} = \frac{(\rho + P)m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]}. \quad (1.36)$$

A continuación tomamos una ecuación de estado fácil, suponemos densidad constante $\rho = \rho_0$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho_0, \\ \Rightarrow m(r) &= \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3 \quad r \leq R \\ \& \quad M &= \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3 \quad r \geq R. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Para resolver usamos la ecuación TOV 1.36, donde al integrar obtenemos para una presión P_c arbitraria (la presión no puede ser constante o la estrella colapsa):

$$\frac{\rho_0 + 3P}{\rho_0 + P} = \frac{\rho_0 + 3P_c}{\rho_0 + P_c} \left(1 - 2\frac{2m}{r}\right)^{1/2}, \quad (1.38)$$

de donde:

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_0} \left[1 + \frac{(\rho_0 + P_c)^2}{(\rho_0 + 3P_c)^2}\right], \quad (1.39)$$

y la presión central es:

$$P_c = \rho_0 \left[\frac{1 - (1 - \frac{2M}{R})^{1/2}}{3(1 - \frac{2M}{R})^{1/2} - 1} \right]. \quad (1.40)$$

Notemos que la presión central tiende a infinito si $\frac{M}{R} \rightarrow \frac{4}{9}$. Entonces el radio se reduce a $R = 2.25M$. La presión necesitaría ser infinita para lograr el equilibrio, pero esto no se puede, por ello hay colapso gravitacional. El teorema de Buchdahl dice que para una ecuación de estado arbitraria ($\rho, P > 0$), una estrella estable debe tener $R > \frac{9M}{4}$. El caso de densidad constante es el que permite una compresión máxima [26].

Trayectorias Orbitales

Tomamos la métrica de Schwarzschild. En el caso en que el sistema no dependa del tiempo el momento p_0 se conserva, la energía para una partícula con masa está dada por $E = -\frac{p_0}{m}$ y para los fotones como $E = -p_0$. Mientras que el momento angular, está dado por $L = \frac{p_\phi}{m}$ y para el fotón $L = p_\phi$, cuando la métrica es independiente del ángulo ϕ . Debido a la simetría esférica, el movimiento está confinado a un solo plano, tomamos el plano ecuatorial; entonces las únicas componentes del momento distintas de cero, para una partícula con masa m y un

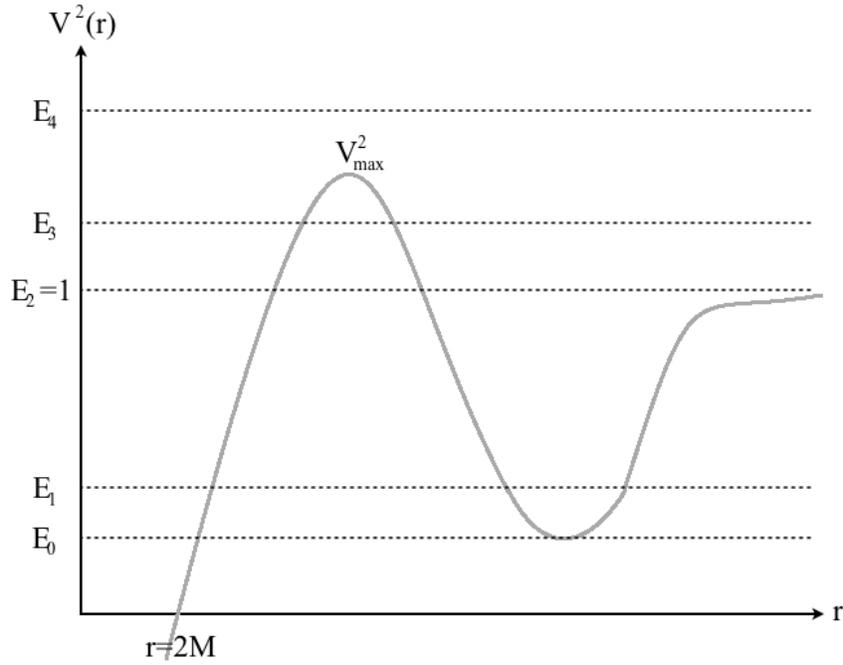


Figura 1.3: Se muestra el potencial efectivo para una partícula orbitando un agujero negro de Schwarzschild.

fotón son: p^0, p^r, p^ϕ . Usando que $\bar{p} \cdot \bar{p} = m^2$ y definiendo el parámetro afín λ y el tiempo propio τ de la partícula. Tenemos para la partícula:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (1.41)$$

Y para el fotón:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}; \quad (1.42)$$

donde por definición $p^r = \frac{dr}{d\lambda}$. A continuación definimos el potencial efectivo como:

$$V^2(r) \equiv \begin{cases} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) & m \neq 0, \\ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} & \text{fotón.} \end{cases} \quad (1.43)$$

Entonces:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V^2(r) \quad (1.44)$$

Donde $E = 1$ corresponde a una partícula en reposo en ∞ y observemos que $r = 2M$ implica $V(r) = 0$

Las trayectorias que se pueden tener son (Ver figura 1.3):

- $E = E_0$ círculo,
- $E_1 < 1$ caso ligado,
- $E_2 = 1$ caso no ligado, en infinito con $\frac{dr}{d\tau} = 0$,
- $1 < E_3 < |V_{max}|$ no ligado hiperbólico,
- $E = E_4 > |V_{max}|$ llega a $r = 0$ sin análogo Newtoniano,
- $E = |V_{max}|$ órbita circular inestable.

Solo en relatividad general se tienen órbitas de captura.

Órbitas circulares $m \neq 0$ Vimos que se tienen dos órbitas circulares, una estable y otra inestable, éstas se obtienen haciendo $\frac{d(V^2(r))}{dr} = 0$:

$$r = \frac{L^2}{2M} \left[1 \pm \left(1 - \frac{12M^2}{L^2} \right)^{1/2} \right]; \quad (1.45)$$

las dos soluciones se dan siempre y cuando $\frac{12M^2}{L^2} < 1$, de donde $L^2 > 12M^2$. Si $L^2 = 12M^2$ hay una solución; si $L^2 < 12M^2$ no hay solución. En el primer caso tenemos $r = \frac{L^2}{2M} = \frac{12M^2}{2M}$ entonces $r = 6M$, a ésta se le conoce como la *última órbita estable*. De aquí viene la idea del borde interno de los *discos de acreción*. En el caso de los fotones la órbita circular inestable se da en $r = 3M$, y es independiente de L , es decir, independiente de su frecuencia.

En el caso de trayectorias radiales ($L = 0$):

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \left(E^2 - 1 + \frac{2M}{r} \right)^{1/2}, \quad (1.46)$$

el signo positivo o negativo indica si el movimiento es hacia dentro o hacia afuera. El radio máximo de acercamiento se da cuando $\frac{dr}{d\tau} = 0$ y corresponde a $r_{max} = \frac{2M}{1-E^2}$; en este caso $E = 1$, y la caída se da desde infinito. El tiempo de caída de $r = R > 2M$ a $r = 2M$ está dado por:

$$\tau_{R \rightarrow 2M} = \frac{2}{3} \frac{1}{(2M)^{1/2}} [R^{3/2} - (2M)^{3/2}]. \quad (1.47)$$

Y ese tiempo medido por un observador lejano se obtiene resolviendo la ecuación de dilatación:

$$t = \int_{r=2M}^{r=R} \frac{(\varepsilon + 2M)^{3/2} d\varepsilon}{(2M)^{1/2} \varepsilon}, \quad (1.48)$$

donde $\varepsilon \equiv r - 2M$. Si $R - 2M \ll 1$,

$$t \sim \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Tenemos un tiempo infinito! Según el observador externo el objeto jamás llega. Algo sucede en $r = 2M$.

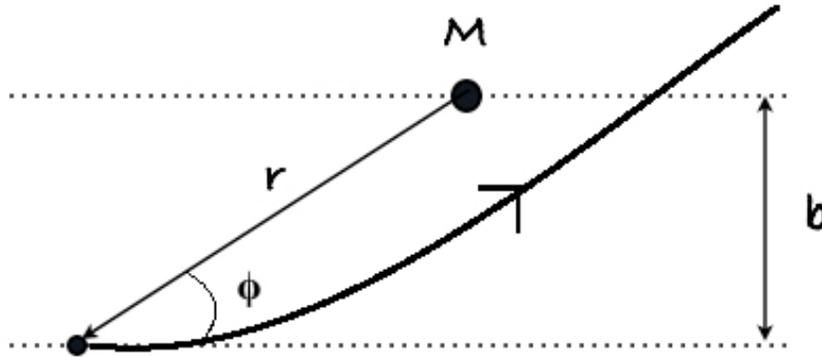


Figura 1.4: Parámetro de impacto b para una partícula con trayectoria $r = r(\phi)$ alrededor de la masa M .

Sección Eficaz La sección eficaz de captura de partículas con masa que caen de infinito está dada por

$$\sigma_{capt} = \pi b_{max}^2, \quad (1.49)$$

con b_{max} el parámetro de impacto de una partícula que se captura. De la definición de parámetro de impacto $b = \lim_{r \rightarrow \infty} r \sin \phi$ y de la ecuación 1.41 se tiene que $\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \simeq \frac{E^2 - 1}{L^2}$ y sustituyendo $\frac{1}{b^2} = \frac{E^2 - 1}{L^2}$, en términos de la velocidad en infinito $E = (1 - v_\infty^2)^{-1/2}$, para un objeto moviéndose a velocidades no relativistas y sabiendo que el objeto se captura a $L < 4M$, se tiene que:

$$b_{max} = \frac{4M}{v_\infty}, \quad (1.50)$$

lo que da una sección eficaz de captura de

$$\sigma_{capt} = \frac{4\pi(2M)^2}{v_\infty^2}. \quad (1.51)$$

En el caso de los fotones, el parámetro de impacto crítico que separa las órbitas de captura de las órbitas de escape es $b_c = 3\sqrt{3}M$, de éste parámetro depende la línea de universo. La

sección eficaz de captura para fotones:

$$\sigma_{foton} = 27\pi M^2. \quad (1.52)$$

No-singularidad del radio de Schwarzschild

Vimos que en $r = 2M$ había una singularidad, sin embargo ésta no es una singularidad física, sino una singularidad de coordenadas; es decir las coordenadas de Schwarzschild son malas en este radio. Hay distintas transformaciones de coordenadas que se pueden usar para mostrar que $r = 2M$ no es una singularidad física. Lo mostramos usando el *sistema coordinado de Kruskal-Szekeres*, el cual está definido por la transformación conforme:

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M}, \quad (1.53)$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M}, \quad (1.54)$$

con transformación inversa:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2, \quad (1.55)$$

$$\frac{t}{4M} = \frac{v}{u}. \quad (1.56)$$

La métrica tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (1.57)$$

La métrica, como se ve, es no-singular en $r = 2M$; sin embargo $r = 0$ es una singularidad todavía. Ésta sí es una singularidad física, la cual tiene campos gravitacionales infinitos. Para $r = 0$ se tiene de 1.55 que $v^2 - u^2 = 1$, o bien $v = \pm(1 + u^2)^{1/2}$, lo que implica que hay 2 singularidades. Por otro lado, la región $r \geq 2M$ es la región $u^2 \geq v^2$, por lo que dos regiones corresponden a $r \geq 2M$. Esto quiere decir que el sistema coordinado de Schwarzschild solo cubre una parte de la variedad espacio-tiempo. Veamos la figura 1.5.

En el diagrama de Kruskal-Szekeres los rayos de luz viajan a 45° en líneas rectas. La región I corresponde a nuestro universo $r > 2M$. La región II es el interior de un agujero negro $r < 2M$. La región III corresponde a un agujero blanco y la región IV corresponde a otro universo.

El diagrama de Kruskal-Szekeres muestra las dos propiedades de los agujeros negros; una vez que los objetos cruzan $r = 2M$ (horizonte de eventos) dan con la singularidad en $r = 0$;

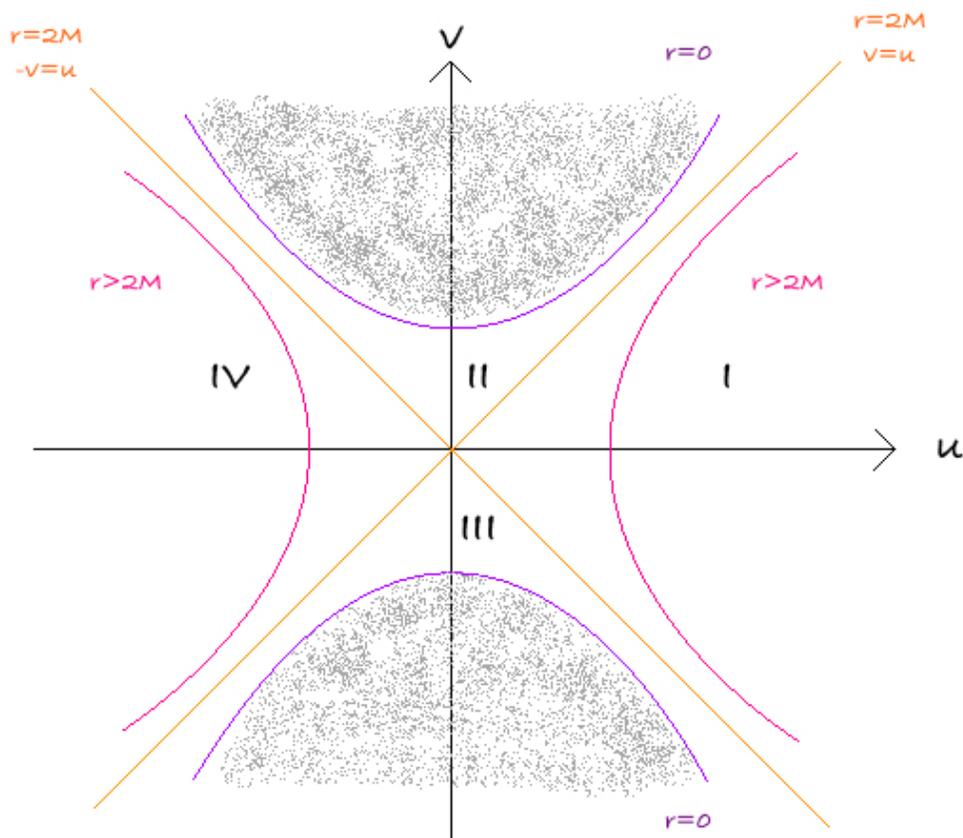


Figura 1.5: Se muestran las distintas regiones en el diagrama de Kruskal-Szekeres. La región I corresponde al exterior, nuestro universo, la región II a un agujero negro, mientras que la III a un agujero blanco. Finalmente la región IV es de otro universo.

y dentro de $r = 2M$ no pueden enviar señales de regreso a infinito.

Capítulo 2

Modelos Estelares

Las ecuaciones de estado permiten aproximar modelos de la estructura de ciertos tipos de estrellas. En nuestro caso, queremos encontrar un modelo que describa estrellas de neutrones.

En este capítulo analizamos dos modelos: el modelo politrópico y el FPS. El primero es un modelo simple que da una relación entre la presión y la densidad. Proporciona los cambios que se producen en el centro de la estrella y la superficie de esta, por lo que se asume que sus propiedades solo depende del radio o de la masa.

Los modelos para las estrellas de neutrones deben generarse en el marco de la relatividad general y necesitan una ecuación de estado para materia densa; el desarrollo de éstas se lleva a cabo en laboratorios, sin embargo, para densidades altas el desarrollo solo puede ser teórico. Existen varios modelos que permiten aproximar la estructura de las estrellas de neutrones; sus ecuaciones de estado se dividen en *suave*, *moderada* y *dura*, la diferencia para las ecuaciones duras se halla en las masas máximas posibles que las estrellas pueden tener. También se dividen las ecuaciones de estado respecto a la composición de materia. Algunas de las ecuaciones de estado desarrolladas son la ecuación de Haensel & Pichon (HP); la cual está basada en masas experimentales de núcleos ricos en neutrones, la ecuación desarrollada por Baym, Pethick y Sutherland (BPS) que describe el estado base de la materia a densidades y presiones a las cuales todos los neutrones se encuentran ligados al núcleo, o la ecuación de Friedman Pandharipande Skyrme (FPS) que es consistente con los resultados de los cálculos de muchos cuerpos de materia nuclear densa asimétrica con una interacción nucleón-nucleón realista y una fuerza de tres nucleones fenomenológica. Otra ecuación es la desarrollada por Skyrme Lyon, Chabanat (SLy) [7].

El desarrollo de la ecuación de estado para materia nuclear aún es un tema de investigación; no se cuenta con la ecuación exacta que describa los fenómenos relacionados con las

estrellas de neutrones; así que solo se pueden comparar los ajustes realizados de las ecuaciones mencionadas en el párrafo anterior con datos observados. Cada una de las ecuaciones anteriores sirve para ajustar los parámetros de las estrellas de neutrones a distintas densidades del material nuclear.

2.1. Ecuación Politrópica

Los polítropos son esferas gaseosas autogravitantes que permiten una aproximación muy sencilla a modelos estelares.

2.1.1. Ecuaciones de Evolución Estelar

Considerando una estrella gaseosa que no rota, no presenta interacción con otro cuerpo y no tiene campos magnéticos, las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de masa de ésta son la presión y la gravedad. Las ecuaciones que describen su comportamiento son:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad (2.5)$$

donde r es el radio de la estrella, m su masa, ρ es la densidad y P la presión. Por otro lado, l es la luminosidad, ϵ_n es la energía nuclear generada por unidad de masa por segundo y ϵ_ν es la energía liberada por unidad de masa por segundo del material estelar en forma de neutrinos. T es la temperatura y χ es la fracción de una unidad de masa de núcleos del tipo i ; los subíndices j y k denotan otros núcleos. La primera ecuación da la conservación de masa, la segunda la conservación de momento, la tercera es la conservación de la energía, la cuarta es la ecuación de transporte de energía y la última la ecuación de variación de la composición química en el tiempo.

En **equilibrio hidrostático**, despreciamos las derivadas temporales. En la ecuación [2.2](#)

la segunda derivada en el tiempo proporciona la escala de tiempo hidrodinámico τ_{hydr} (tiempo de caída libre). En la ecuación 2.3 la derivada en el tiempo da la escala de tiempo de Kelvin-Helmholtz τ_{HK} , y la ecuación 2.5 la escala de tiempo de quemado nuclear τ_n . Donde, en general $\tau_n \gg \tau_{HK} \gg \tau_{hydr}$.

Aquí consideramos una descripción lagrangiana; sin embargo para cambiar a la descripción euleriana usamos la relación:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Teorema del Virial

En astrofísica, este teorema conecta dos *reservorios* de una estrella y permite la predicción e interpretación de ciertas fases de su evolución.

De la ecuación 2.2 en equilibrio, tenemos que $\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$. Haciendo un tratamiento matemático sencillo, se obtiene:

$$\int_0^M \frac{Gm}{r} dm = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm, \quad (2.7)$$

donde ambos lados de la ecuación tienen unidades de energía; lo que permite definir a la energía gravitacional (energía potencial de todos los elementos de masa dentro de la estrella) como:

$$E_g := - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm. \quad (2.8)$$

Para la interpretación del segundo término de la ecuación 2.7, consideramos un gas ideal, cuya ecuación es:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} = (c_p - c_v)T = (\gamma - 1)c_v T. \quad (2.9)$$

c_v y c_p son los calores específicos por unidad de masa, y la constante adiabática está definida como $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Sabemos que para un gas monoatómico, $\gamma = 5/3$. Entonces $\frac{P}{\rho} = \frac{2}{3}u$. Y $u = c_v T$ es la energía interna por unidad de masa del gas ideal. Por lo que de la ecuación 2.7 tenemos que para un gas ideal monoatómico:

$$E_g = -2E_i,$$

donde E_i es la energía interna total de la estrella. Este es el teorema del virial para gas monoatómico.

Para una ecuación general, definimos ς como:

$$\varsigma u := 3 \frac{P}{\rho}. \quad (2.10)$$

Vemos que, para un gas ideal $\varsigma = 3(\gamma - 1)$, por lo que, si $\gamma = 5/3$ entonces $\varsigma = 2$. Otro ejemplo es un gas de fotones con ecuación $P = \frac{aT^4}{3}$, entonces $u\rho = aT^4$ y $\varsigma = 1$. Por lo tanto el teorema de virial más general queda expresado como:

$$\varsigma E_i + E_g = 0. \quad (2.11)$$

La energía total W de la configuración es:

$$W = E_i + E_g = (1 + \varsigma)E_i = \frac{\varsigma - 1}{\varsigma} E_g. \quad (2.12)$$

2.1.2. Relaciones Politrópicas

En equilibrio hidrodinámico, las ecuaciones básicas se dividen en dos: las ecuaciones de estructura (derivadas espaciales) y ecuaciones químicas (derivadas temporales). En este caso las primeras en una descripción euleriana, y considerando soluciones independientes del tiempo quedan como 2 ecuaciones ordinarias de primer orden:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.13)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \rho = -g\rho = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (2.14)$$

La ecuación de Poisson está dada por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (2.15)$$

Suponemos que existe una relación entre P y ρ de la forma:

$$P = K\rho^\gamma \equiv K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{donde} \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (2.16)$$

A la ecuación 2.16 se le conoce como relación politrópica. K, γ, n son constantes. K es la constante politrópica y n el índice politrópico.

En el caso de un gas de fermiones completamente degenerado no relativista $P \sim \rho^{5/3} \Rightarrow$

$\gamma = \frac{5}{3}, n = \frac{3}{2}$, y en el caso de un gas de fermiones completamente degenerado relativista $P \sim \rho^{4/3} \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}, n = 3$.

La constante politrópica puede ser de dos tipos: 1) puede estar fija y se calcula a partir de constantes naturales ó 2) es un parámetro libre; es constante para estrellas particulares, pero puede variar su valor de una estrella a otra.

2.1.3. Ecuación de *Lane-Emden*

Utilizando la relación politrópica 2.16 y la ecuación de equilibrio hidrostático 2.14 podemos escribir:

$$-\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K P^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (2.17)$$

En el caso $\gamma \neq 1$ integramos de manera tal que la constante de integración da $\Phi = 0$ y $\rho = 0$ en la superficie, obtenemos¹:

$$\rho = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (2.18)$$

De esta manera en el interior de nuestro modelo si $\Phi < 0$ entonces $\rho > 0$. Sustituimos en la ecuación de Poisson:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(-\frac{\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (2.19)$$

A continuación definimos las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} z &= Ar, \\ A^2 &= \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}, \\ \omega &= \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

El subíndice c indica que los parámetros se toman en el centro de la estrella. Entonces

¹Para $\gamma = 1$ se da el caso del gas ideal, pues la presión es proporcional a la densidad, con $K = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}$. En este caso se obtiene la ecuación de Lane-Emden isotérmica dada por:

$$\frac{d\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} = e^{-\omega}$$

Donde $z = Ar$, $A^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{K}$, $\Phi = K\omega$ y tiene condiciones centrales $\omega(z=0) = 0$ y $\left(\frac{d\omega}{dz}\right)_{z=0} = 0$. La solución de la ecuación de Lane-Emden isotérmica muestra que tiene radio infinito y masa infinita; como no hay estrellas así, se puede utilizar para construir modelos con núcleos isotérmicos no degenerados.

podemos escribir la ecuación de Lane-Emden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + \omega^n &= 0, \\ \frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) + \omega^n &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden necesitamos 2 condiciones a la frontera para su solución. En el centro de la estrella se tiene $z = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= 1, \\ \frac{d\omega}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La primera condición se debe a:

$$\omega(z) = \frac{\rho}{\rho_c} \Rightarrow \omega(z)_c = \left(\frac{\rho_c}{\rho_c} \right) = 1;$$

la segunda condición se obtiene debido a que cerca del centro, $m(r) \approx \frac{4\pi\rho_c r^3}{3}$. Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho_c \frac{Gm(r)}{r^2} = -\rho_c \frac{G(4\pi\rho_c r^3)}{3r^2} = \left(-\frac{\rho_c^2 4\pi r}{3} \right)_{r=0} = 0.$$

Luego:

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{dP}{dr} \propto \frac{d\omega}{dz}$$

Por lo tanto $\left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=0} = 0$.

La densidad está dada por:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_c \omega^n \\ \rho_c &= \left[\frac{-\Phi_c}{(n+1)K} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Y la presión $P(r) = P_c \omega^{n+1}$, con $P_c = K\rho_c^\gamma$.

Soluciones de la ecuación Lane-Emden

La ecuación 2.21 tiene solución analítica para 3 valores del índice politrópico $n = 0, 1, 5$. Para los demás valores de n es difícil encontrar la solución de manera analítica, por lo que se debe integrar numéricamente. Las soluciones analíticas que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
 n = 0 : \omega(z) &= 1 - \frac{1}{6}z^2, \\
 n = 1 : \omega(z) &= \frac{\text{senz}}{z}, \\
 n = 5 : \omega(z) &= \frac{1}{1 + \frac{z^2}{3}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

La primera configuración tiene frontera en $z = \sqrt{6}$ cuando $\omega_0 \rightarrow 0$. En el segundo caso, cuando $\omega_1 \rightarrow 0$, la frontera se da en $z = \pi$. Finalmente de la configuración para $n = 5$ se observa que la solución no está acotada cuando $\omega_5 \rightarrow 0$ entonces $z \in [0, \infty)$.

Resolviendo los casos para otras n se puede mostrar que para $n < 5$ el radio del modelo politrópico es finito, mientras que para $n \geq 5$ se obtienen radios infinitos.

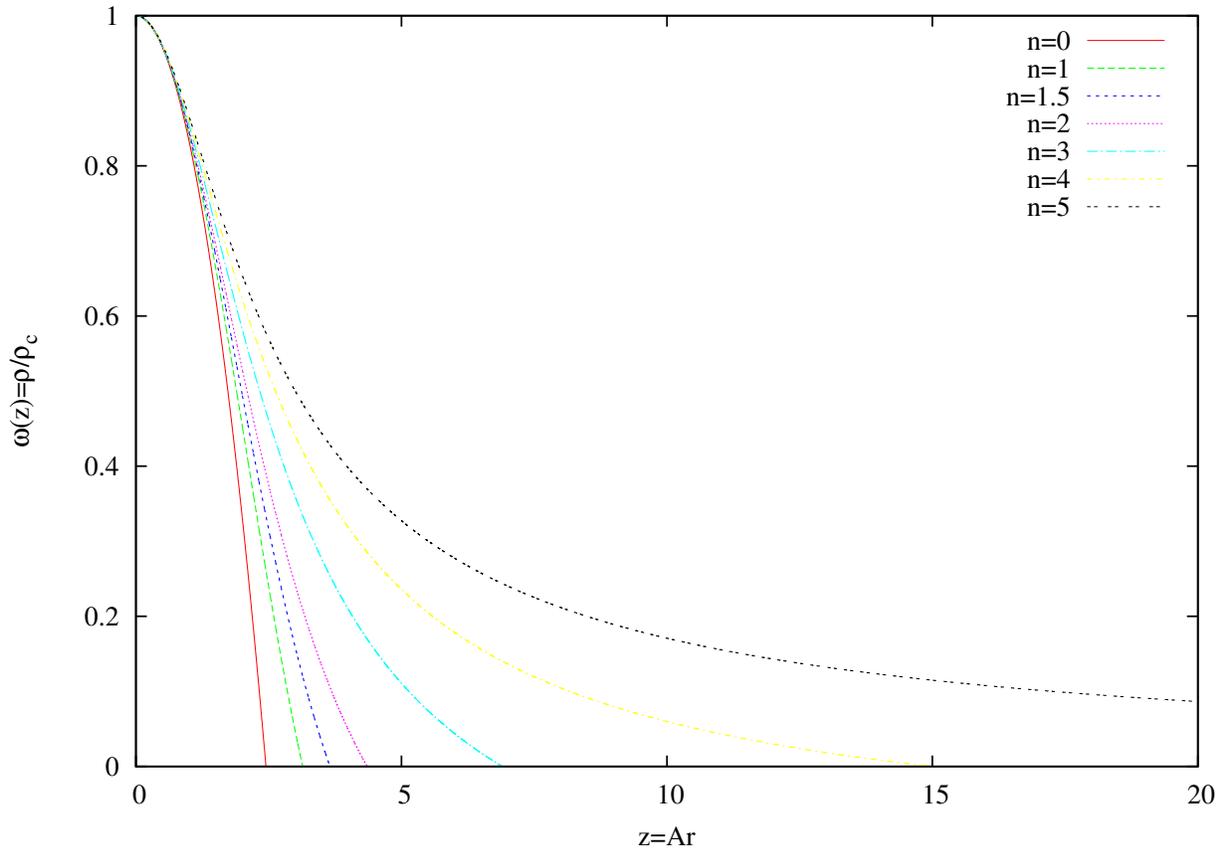


Figura 2.1: Se observa la gráfica ω vs. z para distintos índices politrópicos. Para $n \geq 5$ la función no está acotada, y por ello se tienen radios infinitos.

Energía para polítopos

A partir de la definición de energía gravitacional, dada en 2.8, al integrar por partes y usando que $m = 0$ en el centro de la estrella de tiene:

$$E_g = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} - \frac{1}{2} G \int_0^R \frac{m^2}{r^2} dr. \quad (2.25)$$

Usando la relación de la ecuación 2.14 podemos reescribir la ecuación anterior, en términos del potencial gravitacional. Integrando otra vez por partes y considerando que en el centro $m = 0$ y en la superficie $\Phi = 0$, tenemos

$$E_g = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} + \frac{1}{2} \int_0^M \Phi dm.$$

Para un polítopo:

$$\Phi = -\frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}. \quad (2.26)$$

Por lo tanto la expresión general para la energía gravitacional de un polítopo es:

$$E_g = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R} + \frac{1}{6} (n+1) E_g = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (2.27)$$

Para la energía interna E_i del polítopo, usamos el teorema del virial general, ecuación 2.11. Para el gas ideal, recordemos $\varsigma = 3(\gamma_{ad} - 1)$. Esta relación también es válida para una ecuación de estado más general, mientras ς sea constante; por ello tomamos las diferenciales totales.

$$\varsigma du = 3 \frac{dP}{\rho} - 3 \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (2.28)$$

Asumiendo que las diferenciales describen cambios adiabáticos, de la primera ley de la termodinámica, tenemos:

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (2.29)$$

Entonces con:

$$\gamma_{ad} = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} \quad (2.30)$$

tenemos:

$$\varsigma = 3 \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} - 3 = 3(\gamma_{ad} - 1). \quad (2.31)$$

Suponiendo ς constante en la estrella y usando la energía gravitacional:

$$E_i = -\frac{1}{\varsigma}E_g = \frac{3}{\varsigma(5-n)} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.32)$$

Finalmente la energía total del polítropo es:

$$W = E_i + E_g = \frac{3}{5-n} \left(\frac{1}{\varsigma} - 1 \right) \frac{GM^2}{R}. \quad (2.33)$$

2.2. Ecuación Friedman-Pandharipande-Skyrme (FPS)

La ecuación FPS es una ecuación de estado de las llamadas *frías* (materia a temperatura cero), se utiliza para estimar la estructura interna de las estrellas de neutrones. Esta ecuación ha sido desarrollada a partir del Modelo Compresible de la Gota Líquida sin capas ni efectos de paridad. Está tabulada como función de la densidad de masa bariónica en reposo. Por ello, la densidad en esta ecuación es una función suave de la presión, excepto para una vecindad estrecha de puntos gota de neutrones y la transición núcleo-envolvente.

En [7], las densidades para las cuales se trabaja la ecuación FPS son aquellas por encima de el goteo de neutrones, esto es, con $\rho > 5 \times 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$. A densidades más bajas ($10^8 \lesssim \rho < 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$) la materia de la corteza de la estrella de neutrones está descrita por la ecuación HP (1994) basada en datos experimentales, para $\rho \lesssim 10^8 \text{ g cm}^{-3}$ se toma la ecuación BPS; mientras que para $\rho < 10^5 \text{ g cm}^{-3}$, no se tiene un buen ajuste.

La aproximación de la ecuación FPS se hace mediante funciones analíticas[7]. Esta consiste de varias partes fraccional-polinómicas relacionadas con la función:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}. \quad (2.34)$$

Para estrellas que no rotan es conveniente parametrizar la presión como función de la densidad. Para ello se introducen las variables $\xi = \log(\rho/\text{g cm}^{-3})$ y $\zeta = \log(P/\text{din cm}^{-2})$. Con esta parametrización tenemos:

$$\zeta = \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} f(a_5(\xi - a_6)) + (a_7 + a_8\xi)f(a_9(a_{10} - \xi)) + (a_{11} + a_{12}\xi)f(a_{13}(a_{14} - \xi)) + (a_{15} + a_{16}\xi)f(a_{17}(a_{18} - \xi)). \quad (2.35)$$

Los parámetros a_i se muestran en la Tabla 2.1. El error máximo de ajuste que tiene la ecuación FPS es de 3.6% en $\xi = 14.22$, que es la interfaz entre el núcleo y la corteza de la

Tabla 2.1: Parámetros para el ajuste de la ecuación 2.35. Tomados de [7]

i	$a_i(\text{FPS})$	i	$a_i(\text{FPS})$
1	6.22	10	11.8421
2	6.121	11	-22.003
3	0.006004	12	1.5552
4	0.16345	13	9.3
5	6.50	14	14.19
6	11.8440	15	23.73
7	17.24	16	-1.508
8	1.065	17	1.79
9	6.54	18	15.13

Tabla 2.2: Valores de p_i para la ecuación 2.36. Tomados de [28]

i	$p_i(\text{FPS})$	i	$p_i(\text{FPS})$
1	0.15806	9	9×10^5
2	0.22	10	5
3	5956.4	11	0.75
4	1.633	12	0.00627
5	170.68	13	0.1387
6	1.1056	14	0.56
7	-0.703	15	0.308
8	2×10^4		

estrella.

Una fórmula aproximada en [28] que ajusta la energía fría para la ecuación FPS se muestra a continuación, las constantes se muestran en la Tabla 2.2

$$u(\rho) = [(1 + p_1\rho^{p_2} + p_3\rho^{p_4})(1 + p_5\rho^{p_6})^{p_7} - 1] \times f(-p_8\rho + p_{10}) + p_{12}\rho^{p_{13}} f(p_8\rho - p_{10}) \times f(-p_9\rho + p_{11}) + p_{14}\rho^{p_{15}} f(p_9\rho - p_{11}). \quad (2.36)$$

Considerando solamente las densidades $\rho \geq 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$, la presión se calcula a partir de la relación termodinámica en el límite de temperatura cero

$$P = \rho^2 \frac{du}{d\rho} \quad (2.37)$$

En [28] se compara la presión y la energía obtenida mediante relaciones de ajuste con datos numéricos tabulados, obteniendo errores relativos entre los dos métodos de $\sim 10\%$ para $\rho > 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$ y $\lesssim 2\%$ para densidades supranucleares con $\rho \gtrsim 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$.

Las estrellas de neutrones son más compactas en ecuaciones de estado realistas que en las ecuaciones politrópicas en donde $\gamma = 2$ para una masa dada. Las ecuaciones realistas son más suaves² que en $\gamma = 2$. Por otro lado el índice adiabático $\frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ para las ecuaciones de estado realistas es mucho más grande que 2 para la densidad supranuclear. [28]

2.3. Ecuación Híbrida

Una ecuación híbrida es aquella en la cual la presión y la energía están dadas en un sistema por distintos procesos. Por ejemplo, dado que la temperatura de las estrellas de neutrones es muy baja ($\lesssim 10^5$ K), esto es, la energía térmica por nucleón es mucho más pequeña que la energía de Fermi de los neutrones; se puede utilizar una ecuación de estado fría. Si consideramos una fusión o colisión entre objetos compactos, se fomarán ondas de choque, lo que hará que la energía cinética se convierta en energía térmica incrementando la temperatura. Como la presión y la energía interna asociadas con la temperatura finita no es tan grande como la de la parte fría, se puede adoptar una ecuación de estado híbrida, donde:

$$P = P_{fria} + P_{termica} \quad (2.38)$$

La energía interna del sistema es:

$$u = u_{fria} + u_{termica} \quad (2.39)$$

Aquí P_{fria} y u_{fria} son las partes que describen la materia a temperatura cero y se escriben como función de ρ . La presión fría puede ser la dada por la ecuación FPS 2.37. $P_{termica}$ y $u_{termica}$ son las partes de temperatura finita.

La parte térmica de la presión $P_{termica}$ juega un papel importante cuando se forman ondas de choque durante la fusión de objetos compactos y está relacionada con la energía térmica específica $u_{termica} \equiv u - u_{fria}$ como:

$$P_{termica} = (\gamma_{termica} - 1)\rho u_{termica} \quad (2.40)$$

donde $\gamma_{termica}$ es la constante adiabática.

La ecuación que se utiliza en las simulaciones realizadas para éste trabajo es híbrida, pues consideramos la interacción entre una estrella de neutrones y un agujero negro.

²Se les llama suaves a las ecuaciones politrópicas donde $\gamma < 2$, por lo que conforme la masa aumenta el radio disminuye, mientras que las ecuaciones duras tienen $\gamma > 2$, si la masa aumenta el radio aumenta.

Capítulo 3

Ambientes estelares densos: Interacciones entre objetos compactos

Un *sistema estelar* es un conjunto de estrellas gravitacionalmente ligadas. Estos sistemas pueden variar en masa y tamaño en más de catorce órdenes de magnitud; pueden ser desde estrellas binarias o cúmulos estelares que tienen entre 10^2 a 10^6 estrellas, hasta galaxias con $10^5 - 10^{12}$ estrellas; o bien cúmulos de galaxias, formadas por miles de ellas. El comportamiento de estos sistemas está determinado por las leyes de gravitación.

3.1. Cúmulos Globulares

Las galaxias contienen pequeños sistemas estelares, de entre 10^2 a 10^6 estrellas; a estos sistemas se les llama **cúmulos estelares**. Éstos pueden dividirse en *cúmulos abiertos* y *cúmulos globulares*.

Cúmulos abiertos: son sistemas irregulares que tienen entre 10^2 y 10^4 estrellas. Se forman continuamente en el disco galáctico y la mayoría de ellos son jóvenes; su población consiste principalmente de estrellas jóvenes, ricas en metales. El diagrama Hertzsprung-Russell¹ de un cúmulo abierto normalmente tendrá una amplia variedad de estrellas de secuencia principal

¹El diagrama Hertzsprung-Russell muestra la relación que hay entre la magnitud absoluta de una estrella y el tipo espectral, donde la magnitud absoluta es la magnitud aparente (brillo de un objeto medido por un observador) que tendría un objeto si se encontrara a una distancia de 3×10^{14} km. La clasificación espectral se da de acuerdo con la temperatura de las estrellas, se comienza con la más caliente, cuyo color convencional es el azul a la más fría, cuyo color convencional es el rojo, la clasificación es O, B, A, F, G, K, M. El sol, por ejemplo tiene una clasificación espectral G, su color convencional es el amarillo y su temperatura es de ~ 5700 K.

de todo el rango espectral, excepto para cúmulos viejos, que en su mayoría han perdido a las estrellas masivas de tipo O y B, así como a las estrellas de baja masa K y M [29].

Cúmulos globulares: son sistemas muy masivos que tienen entre $10^4 - 10^6$ estrellas en una distribución casi esférica. No contienen gas, polvo o estrellas jóvenes. El diagrama Hertzsprung-Russell de un globular tiene una forma en donde la mitad superior de la secuencia principal está prácticamente ausente, aquí es donde, las estrellas de tipo O B, A, se encuentran. La densidad estelar en el centro de un cúmulo globular es extremadamente alta y un valor típico es de $10^4 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$. La medida de su radio se estima en tres partes observando la intensidad de la luz óptica: (i) radio del núcleo, se mide hasta dónde el brillo ha caído a la mitad de su valor central, (ii) el radio medio, el radio de una esfera que contiene la mitad de toda la luz y (iii) el radio límite, donde la densidad cae a cero. Estos cúmulos son útiles para entender el problema gravitacional de $N - \text{cuerpos}$. Cuando la densidad estelar es grande, la *relajación*² gravitacional de dos cuerpos se vuelve importante en el sistema, entonces se dice que se trata de sistemas *con colisión*. Para sistemas menos densos la relajación puede ser más larga que la edad del universo, en este caso se dice que los sistemas son *sin colisión*. Para muchos propósitos se trata la fuerza gravitacional sobre una estrella como si se originara de una distribución de densidad suave en lugar de una colección de masas puntuales.

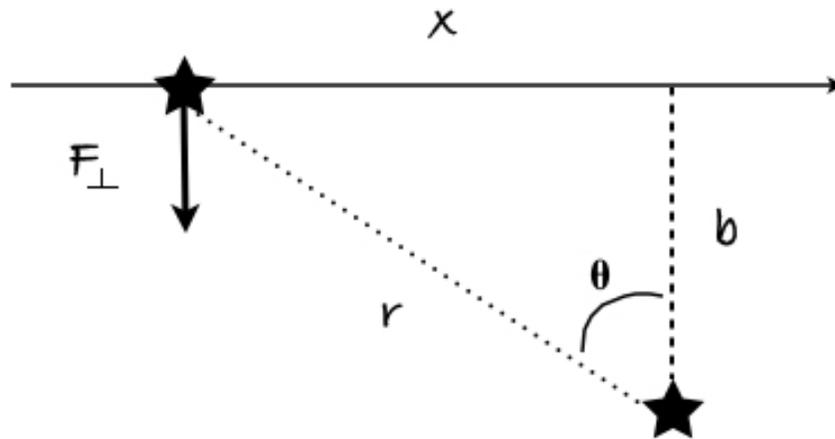


Figura 3.1: \star_1 se aproxima a \star_2 con una velocidad v y parámetro de impacto b . La trayectoria que sigue es una línea recta.

²La relajación es el regreso de un sistema perturbado al equilibrio. También se define el tiempo de relajación como la cantidad de tiempo que tarda un objeto en un sistema en ser perturbado por otros objetos en el sistema. Otra manera de definir el tiempo de relajación es como el tiempo que tardan los encuentros estelares en cambiar la energía de una estrella individual entre encuentros entre dos cuerpos.

Supongamos un sistema estelar de tamaño R que tiene N estrellas con masa promedio por estrella m . La densidad numérica de estrellas es $n \sim \frac{N}{R^3}$ y la masa total del sistema $M = Nm$. A continuación, seguimos el movimiento de una estrella individual \star_1 mientras su órbita la lleva a través del sistema. Suponemos que esta estrella pasa a una distancia b de otra estrella \star_2 . Estimaremos la cantidad $\delta\bar{v}$ mediante la cual el encuentro modifica la velocidad \bar{v} de \star_1 . Suponemos a continuación que $\frac{|\delta\bar{v}|}{\bar{v}} \ll 1$ y que \star_2 , permanece estacionaria durante el encuentro. En este caso $\delta\bar{v}$ es perpendicular a \bar{v} . Podemos calcular la magnitud del cambio de velocidad $\delta v \equiv |\delta\bar{v}|$ asumiendo que \star_1 pasa \star_2 en una trayectoria recta y la fuerza F_\perp es perpendicular a lo largo de esta trayectoria. Colocamos el tiempo inicial en el instante de máximo acercamiento entre las estrellas. De la figura 3.1 tenemos:

$$F_\perp = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gbm^2}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (3.1)$$

De las leyes de Newton:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \delta v = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{F}. \quad (3.2)$$

Sustituyendo 3.1 y haciendo un cambio de variable para resolver la integral, encontramos que:

$$\delta v = \frac{2Gm}{bv}. \quad (3.3)$$

Hay que notar que la suposición de trayectoria en línea recta falla y la ecuación 3.3 se vuelve inválida en el caso $|\delta\bar{v}| \simeq v$; lo cual ocurre cuando $b \lesssim b_{min} \equiv \frac{2Gm}{v^2}$. La densidad numérica superficial de estrellas en el sistema es del orden de $\frac{N}{\pi R^2}$. Al cruzar el sistema estelar, \star_1 sufre δn encuentros con otras estrellas, con parámetros de impacto en el rango b a $b + db$:

$$\delta n = \frac{2N\pi b db}{\pi R^2} = \frac{2N}{R^2} b db. \quad (3.4)$$

Cada uno de estos encuentros produce una perturbación $\delta\bar{v}$ a la velocidad de \star_1 . Sin embargo, debido a que dichas perturbaciones están orientadas aleatoriamente alrededor de \bar{v} , el valor promedio $\langle \delta\bar{v} \rangle$ es cero. Pero el cambio en la velocidad media cuadrática no es cero, sumándolas se tiene:

$$\sum \delta v^2 \simeq \delta v^2 \delta n = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db. \quad (3.5)$$

Integrando la ecuación anterior sobre todos los parámetros de impacto de b_{min} a b_{max} , en-

contramos el cambio en la velocidad cuadrada media por cruce:

$$\Delta v^2 \equiv \int_{b_{min}}^{b_{max}} \sum \delta v^2 \simeq \frac{8\pi G^2 m^2 n}{v} \ln \left(\frac{b_{min}}{b_{max}} \right). \quad (3.6)$$

Los encuentros entre \star_1 y las estrellas del campo del sistema estelar causan cierto tipo de difusión sobre la velocidad de \star_1 , que es distinta de la aceleración causada por toda la distribución de masa en el sistema estelar. A este proceso de difusión se le llama *relajación de dos cuerpos*. La velocidad típica v de una estrella del campo estelar es aproximadamente él de una partícula en una órbita circular en el borde del sistema estelar:

$$v^2 \approx \frac{GNm}{R}. \quad (3.7)$$

Entonces:

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx \frac{8\pi \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)}{N}. \quad (3.8)$$

Si \star_1 cruza varias veces el sistema estelar, la velocidad \bar{v} cambiará por aproximadamente Δv^2 en cada paso, el número de veces que la estrella debe cruzar la galaxia para sufrir un cambio en su velocidad del orden de la propia velocidad, viene dado por:

$$n_{relax} \simeq \frac{N}{8\pi \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)}. \quad (3.9)$$

El *tiempo de relajación* se define como $t_{relax} = n_{relax} t_{cruce}$, dónde $t_{cruce} = \frac{R}{v}$ es el *tiempo de cruce*, el tiempo necesario para que una estrella típica cruce el sistema estelar una vez. Observando que $b_{max} \sim R \sim \left(\frac{N}{n}\right)^{1/3}$, y que b_{min} = distancia entre estrellas, entonces $b_{min} \sim n^{-1/3}$, tenemos $\frac{b_{max}}{b_{min}} \sim N^{1/3}$. Por lo que,

$$t_{relax} \simeq \frac{N}{10 \ln N} t_{cruce}. \quad (3.10)$$

Después de un tiempo de relajación, la órbita de \star_1 ha cambiado significativamente, la estrella ya no sabe cuáles eran sus condiciones iniciales. Para las galaxias este tipo de encuentros estelares no son importantes, tienen $N \approx 10^{11}$ estrellas y $t_{cruce} \approx 10^8$ años, entonces el tiempo de relajación para una galaxia como la nuestra es más larga que la edad del universo ($t_{relax} \approx 10^{10}$ años), por ello son sistemas *sin colisión*. Sin embargo en los cúmulos globulares $N = 10^5$ y el tiempo de cruce $t_{cruce} \approx 10^5$ años, lo que implica que el tiempo de relajación $t_{relax} \approx 10^9$, por lo que los encuentros estelares pueden ser de importancia en la vida

del cúmulo (10^{10} años). De hecho, en el núcleo de un cúmulo globular, donde t_{cruce} es muy pequeño y $N \equiv 10^4$, los encuentros juegan un papel importante; esto los hace sistemas con *colisión*, y los encuentros de marea entre las estrellas se vuelven importantes.

3.2. Órbitas Estelares

Analizamos las órbitas de las estrellas moviéndose en un potencial que no cambia en el tiempo y es simétricamente esférico, el potencial Kepleriano. Recordemos que una fuerza central, por definición, es una fuerza que apunta radialmente y su magnitud solo depende de la distancia a la fuente:

$$\bar{F}(\bar{r}) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr}\hat{r}. \quad (3.11)$$

Las características del movimiento de una partícula, en este caso una estrella bajo la acción de una fuerza central son: 1) conservación de la energía total ($\nabla \times \bar{F} = 0$) y 2) conservación de momento angular orbital:

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{v} \times \bar{p} + \bar{r} \times \bar{F} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \bar{F} = 0, \quad (3.12)$$

pues $\bar{F} \propto \bar{r}$. Una consecuencia de la conservación del momento angular: cuando una partícula está sujeta a una fuerza central, su movimiento tiene lugar en un plano, por lo que con dos coordenadas se puede describir el movimiento. Consideremos entonces una estrella de masa m sujeta a una fuerza central descrita por el potencial $V(r)$. Sean r y θ las coordenadas polares en el plano de movimiento. El Lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \quad (3.13)$$

Al variar r y θ obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - V'(r), \\ \frac{d\bar{L}}{dt} &= \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ reescribimos $m\ddot{r} = \frac{L}{mr^3} - V'(r)$. Multiplicando por \dot{r} e integrando respecto a t :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right) = E, \quad (3.15)$$

donde E es una constante de integración que se identifica como la energía. El término $\frac{L^2}{2mr^2}$ se conoce como barrera centrífuga, su efecto es mantener a la partícula alejada del origen. Para dar solución a las ecuaciones de movimiento 3.14, la ecuación de energía 3.15 y la de momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$ hay dos maneras: 1) resolver r en términos de θ , lo cual da la información de la trayectoria, y 2) resolver r y θ en términos de t , lo que da la información en determinado tiempo.

Encontrando $r(\theta)$

Podemos eliminar el término dt de la ecuación 3.15 y de $L = mr^2\dot{\theta}$, dejando sólo el término r^2 de lado izquierdo de la ecuación 3.15, después dividiendo entre el cuadrado de $L = mr^2\dot{\theta}$ los factores dt^2 se cancelan, entonces:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}. \quad (3.16)$$

A continuación definimos $u = \frac{1}{r}$, entonces puedo escribir 3.16 como:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2mV(\frac{1}{u})}{L^2}. \quad (3.17)$$

Para órbitas cerradas, la ecuación $\frac{du}{d\theta} = 0$, ó:

$$u^2 + \frac{2m(V(\frac{1}{u}) - E)}{L^2} = 0. \quad (3.18)$$

Las soluciones son las raíces u_1 y u_2 entre las cuales la estrella oscilará radialmente mientras gire en θ . La órbita está contenida en un radio interno $r_1 = \frac{1}{u_1}$ llamado *periastro* y un radio externo $r_2 = \frac{1}{u_2}$ llamado *apoastro*.

Encontrando $r(t)$ y $r(\theta)$

El *periodo radial* $t(r)$ es el tiempo que le toma a la estrella viajar del apoastro al periaastro y de regreso. De la ecuación 3.15 tenemos:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L^2}{mr^2}}. \quad (3.19)$$

Entonces el periodo radial es:

$$t(r) = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}E - V(r) - \frac{L^2}{mr^2}}}. \quad (3.20)$$

Viajando del periastro al apoastro y de regreso, el ángulo azimutal θ crece una cantidad:

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\theta}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{mr^2} \frac{dt}{dr} dr. \quad (3.21)$$

Sustituyendo 3.19 tenemos:

$$\Delta\theta = \frac{2L}{m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m}E - V(r) - \frac{L^2}{mr^2}}}, \quad (3.22)$$

por lo que el periodo azimutal es:

$$t(\theta) = \frac{2\pi}{\Delta\theta} t(r). \quad (3.23)$$

Para encontrar $\theta(t)$ invertimos. La rapidez angular promedio de la partícula es $\frac{2\pi}{T_\theta}$. En general $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ no es un número racional, por lo tanto la órbita no es cerrada.

Potencial Kepleriano

Queremos obtener $r(\theta)$ para un potencial gravitacional. Consideramos dos masas m y M , donde $M \gg m$, y M se encuentra en el origen del sistema. El potencial Kepleriano está dado por:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = \frac{GMm}{r}. \quad (3.24)$$

Entonces, sustituyendo en 3.17 tenemos:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2m\alpha u}{L^2}. \quad (3.25)$$

Completando el cuadrado:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2, \quad (3.26)$$

y definiendo $z \equiv u - \frac{m\alpha}{L^2}$ se tiene:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \frac{2mE}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right). \quad (3.27)$$

Definiendo $B = \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right) \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ tenemos:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + B^2, \quad (3.28)$$

cuya solución es:

$$z = B \cos(\theta - \theta_0). \quad (3.29)$$

Hacemos una elección de ejes de manera que $\theta_0 = 0$. Entonces:

$$z = u - \frac{m\alpha}{L^2} = B \cos \theta = \frac{\frac{1}{r} - m\alpha}{L^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)} \cos \theta. \quad (3.30)$$

Entonces:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} (1 + \varepsilon \cos \theta), \quad (3.31)$$

donde ε es la excentricidad de la órbita:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.32)$$

Analicemos algunos límites:

$$r_{min} = \frac{L^2}{m\alpha(1 + \varepsilon)},$$

se obtiene cuando el lado derecho de la ecuación 3.31 alcanza su máximo valor.

$$r_{max} = \frac{L^2}{m\alpha(1 - \varepsilon)},$$

depende si $\varepsilon > 1$ ó $\varepsilon < 1$. Aquí el caso $\varepsilon < 1$.

$$r_{max} = \infty,$$

si $\varepsilon \geq 1$ A continuación se muestran las órbitas para distintos valores de ε .

Círculo ($\varepsilon = 0$) De acuerdo a 3.32 entonces $E = \frac{-m\alpha^2}{2L^2}$. La partícula está atrapada en un pozo de potencial, donde $r_{min} = r_{max} = \frac{L^2}{m\alpha}$.

Elipse ($0 < \varepsilon < 1$) De 3.32 se tiene $\frac{m\alpha^2}{2L^2} < E < 0$. Hay una r_{min} y una r_{max} . La partícula oscila entre ellas. Como la energía es negativa, la partícula está atrapada en un pozo de potencial.

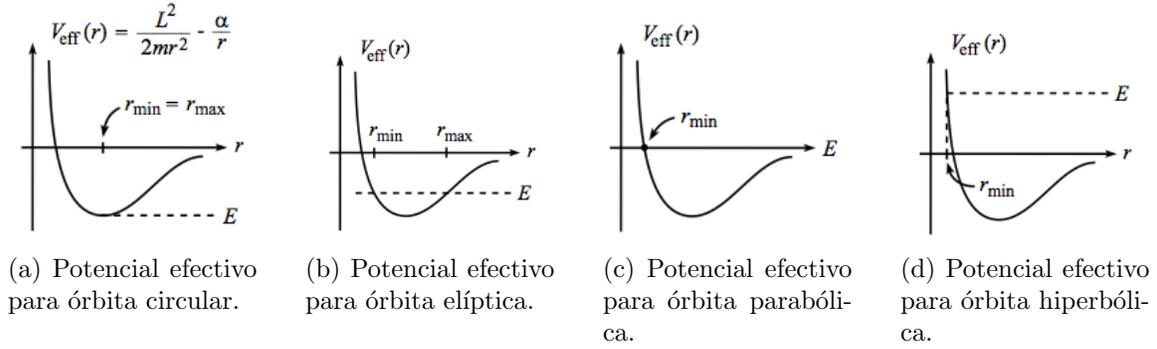


Figura 3.2: Órbitas posibles para un potencial Kepleriano.

Parábola ($\varepsilon = 1$) Haciendo referencia a 3.32 $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow E = 0$. Para partículas que cumplen este caso, su velocidad se aproxima a cero cuando $r \rightarrow \infty$, podemos entonces definir v_∞ . Entonces tenemos un caso donde $r_{min} = \frac{L^2}{2m\alpha}$ y $r_{max} = \infty$. En la gráfica de la figura 3.2c observamos que la estrella no oscila en dirección r , sino que se mueve hacia $r \rightarrow 0$, da la vuelta en r_{min} y viaja a infinito para siempre.

En el caso de un objeto compacto acercándose a otro, la velocidad que adquiere la estrella que se aproxima, debido a la aceleración gravitacional es bastante grande comparada con la velocidad estelar de dispersión de los cúmulos globulares ($\sim 10^3$ m/s). Supongamos por ejemplo una estrella de neutrones con masa $m = 1.4M_\odot$ y radio 11500m que se acerca a un agujero negro de masa $M = 4.5M_\odot$. Cuando la estrella se encuentra a una distancia de 4 veces su radio del agujero, la velocidad que tiene será del orden de 10^8 m/s. En estos casos se puede asumir que los encuentros serán parabólicos, con $E_{orbital} = 0$ en infinito.

Hipérbola ($\varepsilon > 1$) En éste caso $E > 0$, por lo que las estrellas no estarán ligadas, llegan a ∞ con energía de sobra y $r_{max} = \infty$.

3.3. Fuerzas de Marea

Los encuentros estelares (perturbaciones gravitacionales de la órbita de una estrella sobre otra) influyen en la estructura del sistema estelar de muchas maneras; por ejemplo, en sistemas muy densos, como los núcleos de los cúmulos globulares, dos estrellas pueden pasar tan cerca que parte del material de una estrella sentirá la atracción gravitacional de la otra y creará una cola de marea o sufrirán una colisión física; es decir, se pueden dar encuentros inelásticos.

En este caso, no se puede tratar a las estrellas como masas puntuales; durante estos

encuentros la disipación de energía cinética en las colisiones causa que la energía cinética total del sistema decrezca. Aunque no haya contacto físico (colisión), las mareas violentas creadas en el acercamiento en donde la separación mínima entre los centros es menor que la suma de los radios estelares, pueden disipar tanta energía que las estrellas se capturan entre sí formando un sistema binario. En otros casos las estrellas pueden colisionar en una sola estrella.

El tiempo de colisión para éste tipo de encuentros es $t_{col,\star}$ y la tasa de colisión, es decir el número promedio de colisiones físicas que una estrella sufre por unidad de tiempo, está dada por $\frac{1}{t_{col,\star}}$. Supongamos un cúmulo donde todas las estrellas tienen la misma masa m . Consideramos un encuentro con velocidad inicial relativa \bar{V}_0 y parámetro de impacto b . El momento angular por unidad de masa reducida de las partículas es $\bar{L} = b\bar{V}_0$. La distancia de máximo acercamiento es R_p y en este punto la velocidad radial es cero. Por ello el momento angular es $L = R_p V_{max}$, donde V_{max} es la velocidad relativa en R_p . La energía en el centro de masa es $E = -\frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{Gm^2}{r}$, donde $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{1}{2}m$ es la masa reducida. Igualando la energía en R_p y $R \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{4}mV_0^2 = \frac{1}{4}mV_{max}^2 - \frac{Gm^2}{R_p}. \quad (3.33)$$

Por conservación de L , podemos escribir:

$$b^2 = R_p^2 + \frac{4GmR_p}{V_0^2}. \quad (3.34)$$

Si suponemos que R_p es igual a la suma del radio de las dos estrellas, la colisión solo ocurrirá si el parámetro de impacto es menor que el valor de b determinado por la ecuación anterior. Sea $f(\bar{v}_a)d^3\bar{v}_a$ el número de estrellas por unidad de volumen con velocidades entre \bar{v}_a a $\bar{v}_a + d\bar{v}_a$. El número de encuentros por unidad de tiempo con parámetro de impacto menor que b que sufre una estrella es:

$$\int f(\bar{v}_a)\pi b^2 V_0 d^3\bar{v}_a, \quad (3.35)$$

donde $V_0 = |\bar{v} - \bar{v}_a|$ y \bar{v} es la velocidad de la estrella analizada. La ecuación 3.35 es igual a $\nu_{col,\star} = \frac{1}{t_{col,\star}}$ para una estrella con velocidad \bar{v} ; para obtener un valor promedio de $\nu_{col,\star}$, multiplicamos por $f(\bar{v}/n)$, donde $n = \int f(\bar{v})d^3\bar{v}$ es la densidad de estrellas. Entonces:

$$\frac{1}{t_{col}} = \frac{\pi}{n} \int f(\bar{v})f(\bar{v}_a)b^2|\bar{v} - \bar{v}_a|d^3\bar{v}d^3\bar{v}_a. \quad (3.36)$$

Utilizando una distribución Maxwelliana de velocidades con dispersión σ , sustituyendo b de

la ecuación 3.34, sustituyendo \bar{v}_a por $\bar{V} = \bar{v} - \bar{v}_a$, y reemplazando \bar{v} por $\bar{v}_{cm} = \bar{v} - \frac{1}{2}\bar{V}$, la velocidad del centro de masas; tenemos:

$$\frac{1}{t_{col}} = \frac{n}{8\pi^2\sigma^6} \int e^{-(v_{cm}^2+V^2/4)/\sigma^2} \left(R_p^2 V + \frac{4GmR_p}{V} \right) d^3v_{cm} d^3\bar{V}. \quad (3.37)$$

La integral sobre \bar{v}_{cm} es:

$$\int e^{-v_{cm}^2/\sigma^2} d^3v_{cm} = \pi^{3/2}\sigma^3, \quad (3.38)$$

por lo que:

$$\frac{1}{t_{col,\star}} = \frac{\pi^{1/2}n}{2\sigma^3} \int_0^\infty e^{-V^2/4\sigma^2} (V^3 R_p^2 + 4GmV R_p) dV, \quad (3.39)$$

lo cual nos deja:

$$\nu_{col,\star} = \frac{1}{t_{col,\star}} = 4\sqrt{\pi}n\sigma R_p^2 + \frac{4\sqrt{\pi}GmnR_p}{\sigma}. \quad (3.40)$$

El primer término se puede derivar de teoría cinética. El segundo término representa la corrección en la tasa de colisión por un enfoque gravitacional: la deflexión de trayectorias por la atracción gravitacional de dos estrellas.

En [15] se da la tasa de colisión para todas las estrellas del cúmulo ($\nu_{col} = N\nu_{col,\star}$) asumiendo diferentes tipos de objetos estelares i , distribuidos homogéneamente en un núcleo homogéneo de radio r_c , cada objeto tiene número fraccional $f_i \leq 1$, densidad n_c y las estrellas siguen una distribución de velocidades Maxwelliana con dispersión σ_c :

$$\nu_{col} = 2.1 \times 10^{-3} \text{Gyr}^{-1} \frac{f_1 f_2}{1 + \delta_{12}} \left(\frac{n_c}{10^6 \text{pc}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{r_c}{0.1 \text{pc}} \right)^3 \left(\frac{\sigma_c}{10 \text{kms}^{-1}} \right)^{-1} \left(\frac{M_1 + M_2}{1 M_\odot} \right) \left(\frac{R_{min}}{10 \text{km}} \right), \quad (3.41)$$

donde $\delta_{12} = 1$ si los tipos 1 y 2 son iguales, y $\delta_{12} = 0$ en otro caso. Las estrellas tienen masa M_i y su separación en el periastro es $R_{min} = R_1 + R_2$. Un encuentro entre dos estrellas en donde la mínima separación es varios radios estelares provocará mareas violentas en la superficie de cada estrella. La energía que excita las mareas es el resultado de la energía cinética y la fuerza de gravedad de las estrellas lo cual puede dejar un sistema ligado. Varios pasajes por el periastro disiparán más energía. Este mecanismo de formación binaria es llamado *captura por mareas*. El tiempo de captura por marea, para encuentros dominados por enfoque gravitacional es similar al tiempo de colisión [3, 15]. La sección eficaz para captura por marea en un cúmulo globular es [15]:

$$\Sigma_{marea} = a \left(\frac{v_\infty}{v_2} \right)^{-\beta} R_2^2, \quad (3.42)$$

donde v_∞ es la velocidad de la estrella en infinito, v_2 es la velocidad de escape en la estrella secundaria, a es la amplitud para los encuentros entre distintos tipos de estrellas y β es un parámetro que para un enfoque gravitacional tiene el valor de 2.

Como podemos observar, el tiempo de colisión en núcleos de cúmulos globulares es de importancia, por ello vale la pena hacer el estudio de la interacción de objetos compactos en ellos.

Radio de Marea

Las fuerzas de marea resultan de la diferencia en la fuerza de gravedad en diferentes puntos de un cuerpo en movimiento. Considerando dos cuerpos de masas m y M , con radios R_1 y R_2 respectivamente; la fuerza de marea que siente m debido a M a una distancia r es (Figura 3.3):

$$F = \frac{2GMmR_2}{r^3}. \quad (3.43)$$

Calculamos a continuación la distancia mínima r_{min} a la cual la estrella de masa m puede

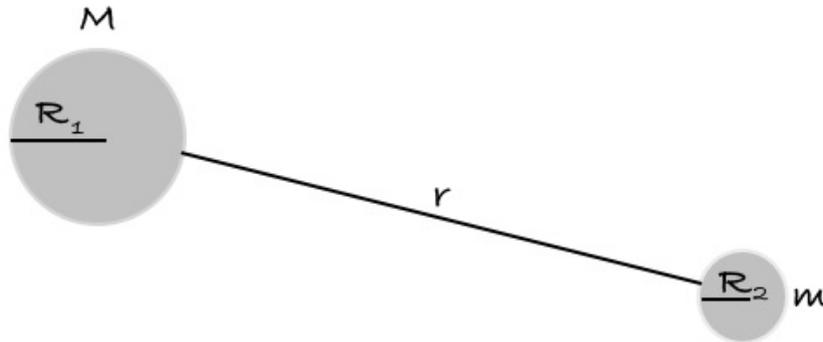


Figura 3.3: Ejemplificación de la estrella primaria M y secundaria m a una separación r .

acercarse a la estrella M sin ser destruída debido al campo de marea de esta última. De la ecuación 3.33 y de la Ley de Gravitación de Newton que mantiene unida a la estrella m , $F = \frac{Gm}{R_2^2}$, podemos escribir:

$$r_{min} = R_2 \left(2 \frac{M}{m} \right)^{1/3}. \quad (3.44)$$

Este límite se conoce como *Límite de Roche*. A continuación definimos el radio de marea haciendo de la ecuación anterior: $\rho(R_2) = \rho(r)$, donde $\rho(R_2) = \frac{3m}{4\pi R_2^3}$ y $\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r^3}$. Por lo que

el radio de marea es:

$$r_{marea} = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/3} R_2. \quad (3.45)$$

Las fuerzas de marea provocan distintos efectos sobre los objetos. La gravedad de la estrella masiva, provoca una fuerza de marea en la estrella menos masiva, lo cual rompe el equilibrio gravitacional de esta última y provoca que se forme el llamado *bulbo de marea*. La deformación de la estrella menos masiva se da en el eje sobre el cual se encuentra la estrella masiva, quedando entonces un elipsoide,³ es decir la fuerza de marea producida por la estrella masiva M sobre la estrella menos masiva m , distorsionara la forma de m de manera que esté alargada a lo largo del eje orientado hacia M , y en el eje perpendicular a la dirección de M , la dimensión de m se verá reducida. Observemos que la estrella de masa m tardará un tiempo en regresar al equilibrio. Sin embargo, si la estrella está girando, entonces el bulbo creado ya no se encontrará en dirección del eje de M . Su posición dependerá de si la frecuencia orbital es mayor que la frecuencia rotacional o viceversa. Como consecuencia de la formación de bulbos de marea, habrá una torca resultante: la cual será mayor si el periodo orbital es igual al periodo de rotación. El acoplamiento por mareas se da cuando la torca resultante logra sincronizar la rotación de m con su periodo orbital.

Se supone conservación del momento angular debido a que el momento angular inicial transferido a la rotación es muy poco debido al relativamente pequeño radio estelar de giro. Para obtener resultados más exactos de las condiciones para que se dé captura por marea, la excitación de los modos normales individuales debe considerarse, al igual que el calor producido por todos los modos. Un análisis de este efecto ha tomado el movimiento parabólico de dos estrellas en cuenta, se ha dado una aproximación válida para $R_p/R_2 \geq 3$ [15]. Este valor corresponde a $\omega_p \sim \omega_{osc}$; dónde ω_p es la frecuencia angular del encuentro que va como $\omega_p \approx 2\omega_2(R_2/R_p)^{3/2}$, con $\omega_2 = (GM_2/R_2^3)^{1/2}$ y ω_{osc} es dos o tres veces ω_2 [15].

La estrella de masa M también sentirá el acoplamiento de mareas, sin embargo éste será débil, pues el efecto gravitacional de m es pequeño. Una manera de parametrizar los encuentros es comparando la fuerza del campo producido por la estrella primaria $M = M_1$ sobre la estrella secundaria $m = M_2$:

$$\eta = \left(\frac{M_2 R_p^3}{M_1 R_2^3}\right)^{1/2}, \quad (3.46)$$

donde M_1 y M_2 son las masas de las estrellas primarias y secundarias, R_p la distancia al

³Se puede hacer un estudio de la interacción de estrellas de neutrones y agujeros negros, considerando estrellas inicialmente con forma de elipsoides; sin embargo para el presente trabajo se consideraron esferas sin perturbaciones.

periastro. Definimos $q = \frac{M_2}{M_1}$. Podemos escribir la distancia al periastro como:

$$R_p = R_2 \eta^{2/3} q^{-1/3}. \quad (3.47)$$

Con esta parametrización podemos estudiar encuentros puramente gravitacionales o que están acompañados de colisión directa. Observemos que para $\eta \simeq 1$ se dan colisiones donde la estrella secundaria se destruye completamente; mientras que para $\eta \gg 1$, se tiene un parámetro de impacto muy grande. Este parámetro también puede pensarse como el cociente entre la escala dinámica de tiempo de la estrella que va como $\tau_{Hydr} \sim (\frac{R_2^3}{GM_2})^{1/2}$ y la duración del encuentro [15].

Para estrellas compactas, el momento angular se pierde debido a la emisión de ondas gravitacionales. De igual manera debe considerarse la eyección de masa [15].

Capítulo 4

Emisión complementaria a la colisión

4.1. Acreción en agujeros negros

El proceso mediante el cual las estrellas capturan material estelar es llamado *acreción*. La extracción de energía potencial gravitacional de material acretado de un objeto compacto es un mecanismo poderoso para producir radiación de altas energías [5].

Para un cuerpo de masa M y radio R , la energía potencial gravitatoria liberada por la acumulación de una masa m en su superficie es:

$$\Delta E_{ac} = \frac{GMm}{R}; \quad (4.1)$$

veamos de esta ecuación que la energía liberada mediante acreción es bastante grande siempre y cuando el objeto sea suficientemente compacto. A mayores $\frac{M}{R}$ más grande será la eficiencia.

Para $\frac{M}{R}$ dada, la luminosidad de un sistema que acreta depende de la rapidez \dot{M} a la que la materia es acretada. A luminosidades altas, la rapidez de acreción puede controlarse por el momento transferido de la radiación al material acretado por absorción y dispersión. Ésto lleva a la existencia de una luminosidad máxima para una masa dada *luminosidad de Eddington*, esta luminosidad asociada a acreción quasi-periódica dice a qué presión de radiación se balancea la gravedad. Suponiendo que el material acretado es principalmente hidrógeno totalmente ionizado, la radiación ejerce una fuerza sobre los electrones mediante dispersión Thompson (la sección eficaz de los protones es $\sim 10^{-8}$ veces más pequeña que la de los electrones), entonces la luminosidad es:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMcm_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}, \quad (4.2)$$

con M la masa del objeto que acreta y m_p la masa del protón. A luminosidades más grandes la presión de radiación excedería la atracción gravitacional hacía dentro y la acreción se detendría. El límite de Eddington implica un límite en la tasa de acreción \dot{M} si se considera que la luminosidad de acreción es $L_{Edd} = L_{acc} = \frac{GM\dot{M}}{R}$, de donde:

$$\dot{M} = 10^{18} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right) \text{g s}^{-1} = 1.5 \times 10^{-8} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right) M_{\odot} \text{yr}^{-1}. \quad (4.3)$$

En el caso de un agujero negro, mucha de la energía acretada podría desaparecer dentro del agujero y se añadirá como masa de éste en lugar de ser radiada. Se puede añadir un parámetro a L_{acc} que mida con qué eficiencia la energía de masa en reposo del material acretado se convierte en radiación. Sin embargo, de acuerdo con [5] este parámetro comparado con el de una estrella de neutrones no es más eficiente para el agujero negro pese a su menor diámetro. Podemos hacer una estimación del rango espectral de la emisión de objetos compactos que acretan. Podemos definir el espectro característico de la radiación que emita mediante una temperatura T_{rad} , donde la energía del fotón es $E_{emitida} = h\nu$.

Para la luminosidad acretada de una fuente de radio R , definimos la temperatura T_b como la temperatura que tendría si radiara como cuerpo negro. Entonces $T_b = \left(\frac{L_{acc}}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}$. Por otro lado definimos T_{th} como la temperatura que el material acretado alcanzaría si su energía potencial gravitacional fuera convertida todo en energía térmica, entonces $T_{th} = \frac{GMm_p}{3kR}$. Cuando el flujo de acreción es ópticamente grueso, $T_{rad} \sim T_{th}$; en cambio si el material es ópticamente delgado, $T_{rad} \sim T_b$. Por lo que se esperaría que $T_b \lesssim T_{rad} \lesssim T_{th}$. De esta manera el material acretado en objetos compactos tendría energías entre $1\text{keV} \lesssim h\nu \lesssim 50\text{MeV}$; por lo que serían emisores de rayos X fuertes o posiblemente rayos γ . El límite de Eddington se esquivo si el principal agente de enfriamiento no son fotones emitidos, sino emisión de neutrinos. La sección eficaz de los neutrinos es muy pequeña, por lo que la luminosidad asociada y la tasa de acreción correspondiente serán mucho más grandes:

$$L_{Edd,\nu} = 8 \times 10^{53} \left(\frac{E_{\nu}}{50\text{MeV}} \right)^{-2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{erg s}^{-1}, \quad (4.4)$$

y

$$\dot{M}_{Edd,\nu} = 0.4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{E_{\nu}}{50\text{MeV}} \right)^{-2} M_{\odot} \text{s}^{-1}. \quad (4.5)$$

Definimos la temperatura de Eddington en este caso como la temperatura de cuerpo negro

si una luminosidad $L_{Edd,\nu}$ emergiera de una estrella de radio R , lo cual da una energía [14]:

$$kT_{Edd,\nu} \sim 45 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{E_{\nu}}{50 \text{ MeV}} \right)^{-1/2} \text{ MeV}. \quad (4.6)$$

Este cálculo fue hecho para el caso de creación de pares de neutrinos.

Los Destellos de Rayos Gamma (GRB por sus siglas en inglés) son destellos de radiación a energías bajas y altas de rayos gamma. A los brotes que duran menos de dos segundos se les ha asignado la clasificación de cortos (SGRB) y aquellos cuya duración es mayor han sido clasificados como largos, los SGRB tienen relativamente más rayos gamma de altas energías que los largos [14]. Se cree que los progenitores de ambos tipos de GRB's son distintos, las fuentes de SGRB's están asociadas a poblaciones estelares viejas. Algunos tipos de progenitores de SGRB propuestos son: binarias de estrellas de neutrones, fusiones de agujeros negros con estrellas de neutrones, fusiones de agujeros negros con enanas blancas o la colisión de enanas blancas [14]. En cúmulos globulares este tipo de encuentros podría darse. Dado que la acreción por objetos compactos (estrellas de neutrones o agujeros negros) como hemos notado, libera gran cantidad de energía durante la formación del disco de acreción a partir del material eyectado se cree que este tipo de sistemas son los progenitores de los SGRB's.

4.2. Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en el espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz, y son una predicción de la teoría de la relatividad general. Recordemos que las ecuaciones de campo de Einstein 1.16 no son lineales. Una manera de poder apreciar las propiedades de estas ecuaciones es mediante la teoría de campo débil con la cual logramos una linealización de 1.16.

En la aproximación de campo débil, consideramos que el espacio-tiempo es plano ante perturbaciones, por lo que los términos de segundo orden son insignificantes. Entonces podemos escribir a la métrica como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (4.7)$$

Dónde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica para el espacio de Minkowski (espacio-tiempo plano) y $h_{\mu\nu}$ es la perturbación del espacio-tiempo. Utilizando esta métrica podemos linealizar el tensor de Ricci haciendo uso de su definición en términos de los símbolos de Christoffel, entonces:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - h_{\mu\nu}), \quad (4.8)$$

donde $h \equiv h_\alpha^\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Después de una contracción adicional, se encuentra que las ecuaciones de Einstein $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$, se pueden escribir como:

$$h_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + h_{\nu\alpha,\mu}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - h_{,\beta}^\beta) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Al escribir $G_{\mu\nu}$ y de acuerdo a la definición del tensor de Einstein vista en el capítulo 1, se tendrán muchos términos. Sin embargo, la expresión se puede simplificar definiendo a $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Bajo esta definición, las ecuaciones de campo débil de Einstein son:

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

El primer término es el d'Alambertiano del espacio plano. Para cualquier situación física se puede elegir el gauge de manera que $\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0$. A éste se le conoce como gauge de Lorenz. De esta manera, las ecuaciones en teoría linealizada se vuelven:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Si hacemos el estudio en un espacio vacío ($T_{\mu\nu} = 0$), entonces las ecuaciones se escriben como:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.12)$$

La ecuación de onda anterior tiene como solución a la onda plana monocromática dada por:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (4.13)$$

donde $C_{\mu\nu}$ es un tensor sin traza simétrico y constante, con componentes $C_{\mu 0} = C_{0\mu} = 0$, y que contiene la polarización de la onda; como la onda plana tiene dos grados de libertad en amplitud, entonces sólo hay dos polarizaciones posibles (h_+ y h_\times). El vector de onda satisface $K_\alpha k^\alpha = 0$ y $C_{\mu\alpha}K^\alpha = 0$. La frecuencia de la onda está dada por: $\omega = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$.

Si tomamos la dirección de propagación de la onda en la dirección z , las polarizaciones de la onda sólo son funciones de $t - \frac{z}{c}$ e introduciendo los tensores de polarización e^+ y e^\times de manera que $e_{xx}^+ = -e_{yy}^+ = 1$, $-e_{xy}^\times = e_{yx}^\times = 1$ y las demás componentes sean cero, podemos escribir a la onda gravitacional como:

$$h_{jk}^{TT} = h_+e_{jk}^+ + h_\times e_{jk}^\times. \quad (4.14)$$

Para analizar la radiación gravitacional usamos la norma TT (Traceless-Transverse); las

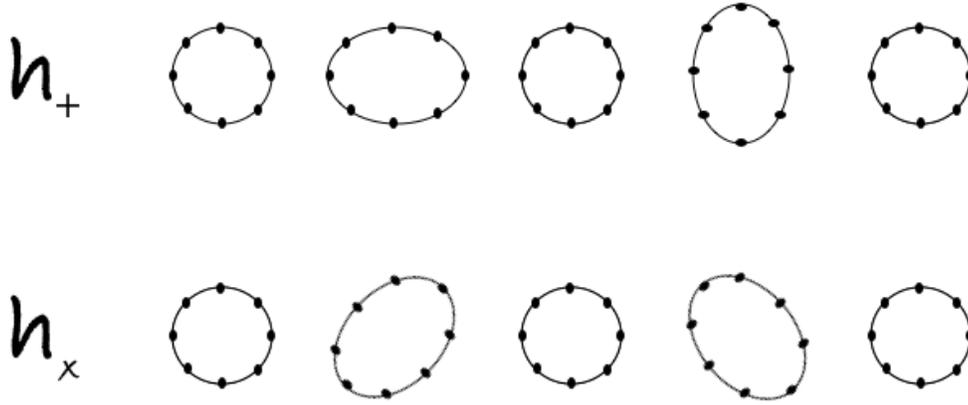


Figura 4.1: Efecto de ambas polarizaciones de las ondas gravitacionales en un anillo de partículas. La dirección de la onda es perpendicular al anillo. Se muestra el efecto de las ondas polarizadas h_+ y h_x para distintos tiempos.

características de esta norma son: 1) $h_{0\mu}^{TT} = 0$, solo sus componentes espaciales son no nulas, 2) $h_{jk,k}^{TT} = 0$ las componentes espaciales tienen divergencia cero, 3) $\square h_{jk} = 0$ y 4) la condición de traza nula. Cuando una onda gravitacional interacciona con un cuerpo con fuerzas internas, el objeto oscilará de acuerdo con sus ecuaciones de movimiento estándar, las oscilaciones se producirán por una fuerza de onda gravitacional

$$F_j = \frac{1}{2} m \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi_k \quad (4.15)$$

actuando sobre cada elemento de masa m , ξ_k es el desplazamiento del elemento de masa respecto a su centro de masa. Dado que las ondas gravitacionales son ondas transversales, el cuerpo con el que choquen se deformará en dirección de vibración de la onda, y en el plano perpendicular a éste cuando la acción del campo deje de actuar (Figura 4.1). Como las ondas gravitacionales ejercen fuerzas y realizan trabajo, deben tener energía y momento. El tensor de energía-momento para ondas propagándose en la dirección z es [27]:

$$T^{00} = \frac{T^{0z}}{c} = \frac{T^{zz}}{c^2} = \frac{1}{16\pi G} c^2 \langle (\dot{h}_+)^2 + (\dot{h}_\times)^2 \rangle. \quad (4.16)$$

T^{00} es la densidad de energía, T^{0z} el flujo de energía y T^{zz} el flujo de momento. A esta ecuación se le conoce como *tensor de Isaacson*.

A continuación queremos calcular cuánta radiación gravitacional emiten masas aisladas en un sistema casi Newtoniano cuando se mueven una alrededor de la otra. Para obtener un orden de magnitud estimado, podemos utilizar una aproximación cuadrupolar. El momento

cuadrupolar de masas I_{jk} es:

$$I_{jk} \equiv \sum_a m_a \left[x_j^a x_k^a - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x^a)^2 \right]. \quad (4.17)$$

La potencia de ondas gravitacionales liberada en términos del cuadrupolo está dada por [27]:

$$L_{OG} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{jk}, \ddot{I}_{jk} \rangle. \quad (4.18)$$

El momento angular que se pierde por ondas gravitacionales está dado por [27]:

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{G}{c^5} \epsilon - ijk \ddot{I}_{jm} \ddot{I}_{km}, \quad (4.19)$$

de donde notamos que no hay pérdida de momento si la fuente es axisimétrica. A continuación haremos una estimación de la luminosidad L de la radiación gravitacional; para ello notemos que:

$$\ddot{I}_{jk} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{Mv^3}{R}, \quad (4.20)$$

donde M, R, T y v son la masa característica, el tamaño, la escala de tiempo y la velocidad de la fuente, respectivamente. Entonces de la ecuación 4.18 tenemos:

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{M}{R} \right)^2 v^6 \sim L_0 \left(\frac{r_{Sch}}{R} \right)^6, \quad (4.21)$$

donde $L_0 \equiv \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59} \text{ erg s}^{-1}$. De la ecuación anterior se observa que la máxima luminosidad se obtiene para objetos compactos, es por ello que éstos son fuentes importantes de ondas gravitacionales. La energía gravitacional radiada por un sistema no esférico autogravitante en un tiempo dinámico T es [27]:

$$\Delta E \sim L_{OG} T \sim Mc^2 \left(\frac{r_{Sch}}{R} \right)^{7/2}. \quad (4.22)$$

La mayoría de las fuentes de ondas gravitacionales se encuentran en sistemas binarios [18], calculamos la potencia emitida en un sistema de este tipo. De acuerdo a las leyes de Kepler, dos estrellas de masas m_1 y m_2 , que se encuentran a una distancia r y que se mueven en una órbita circular en torno del centro de masas en común tienen una frecuencia angular ω :

$$\omega^2 r^3 = m_1 + m_2 \equiv M_{tot}. \quad (4.23)$$

Si r_1 y r_2 son las distancias de cada una respecto al centro de masa, entonces $m_1 r_1 = m_2 r_2 = \mu r$, donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida del sistema binario. Considerando al eje z como el eje de rotación y ϕ en ángulo azimutal del eje x a la línea que une las masas, las componentes del tensor cuadrupolar de masas están dadas por:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{1}{2} \mu r^2 \cos 2\phi + cte, \\ I_{yy} &= -\frac{1}{2} \mu r^2 \cos 2\phi + cte, \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{1}{2} \mu r^2 \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Las amplitudes retardadas de las ondas gravitacionales emitidas durante la interacción entre el sistema binario para un observador que se encuentra a una distancia r_0 a lo largo del eje donde se localizan las masas del sistema binario están dadas por [21]:

$$r_0 h_+ = \frac{1}{c^4} G (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \quad (4.25)$$

y

$$r_0 h_\times = \frac{1}{c^4} 2G \ddot{I}_{xy}. \quad (4.26)$$

Recordemos que $\phi = \omega t$, entonces sustituyendo en la ecuación 4.18 encontramos que:

$$L_{OG} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{(m_1 + m_2)(m_1 m_2)^2}{r^5}. \quad (4.27)$$

Para el caso de órbitas que inicialmente no son circulares, sino elípticas por ejemplo, hay funciones de corrección adimensionales en términos de la excentricidad que multiplican a la potencia radiada. Por ejemplo, en el caso elíptico la luminosidad está dada por $\frac{dE}{dt} = L_{OG} f(\varepsilon)$, con $f(\varepsilon) = (1 - \frac{73}{24} \varepsilon^2 + \frac{37}{96} \varepsilon^4)(1 - \varepsilon^2)^{-7/2}$ [18]. Conforme el sistema binario pierde energía por la emisión de radiación gravitacional, las estrellas comienzan a caer en espiral una respecto a la otra. Estos son los efectos de la reacción de radiación, que en éste caso estará dada como $-L_{OG} = \frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{(m_1 + m_2)(m_1 m_2)^2}{r^5}$. La radiación se emite primero en el periastro, por lo que las fuerzas de frenado de reacción de radiación actúan aquí con mayor fuerza. Este efecto utiliza parte de la energía cinética de las estrellas, en consecuencia la órbita se vuelve cada vez más circular. La pérdida de energía lleva a que la separación r del sistema binario decrezca y por ende hay un decrecimiento en el periodo orbital $2\pi/\omega$. El tiempo t_0 en el cual $r \rightarrow 0$ es:

$$t_0 = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{r^4}{(m_1 + m_2)(m_1 m_2)}. \quad (4.28)$$

La pérdida de momento angular para órbitas circulares está dada por:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Finalmente la aceleración de la reacción de radiación para cada componente del sistema binario está dada por [13]:

$$\bar{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2)} \frac{dE}{dt} \frac{\bar{v}_2}{(v_2)^2}, \quad (4.30)$$

$$\bar{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)} \frac{dE}{dt} \frac{\bar{v}_1}{(v_1)^2}, \quad (4.31)$$

donde v_1 es la velocidad de la estrella 1 y v_2 la velocidad de la estrella 2.

4.3. Reacciones nucleares secundarias

El proceso-r (rápido) es un proceso de nucleosíntesis donde se da captura de neutrones para elementos radiactivos. Éste se da para sistemas donde la temperatura es bastante alta y la densidad de neutrones es muy grande. Los núcleos creados debido a la colisión de neutrones con otros núcleos son inestables ya que un núcleo de Z fija no puede añadir neutrones indefinidamente aún en la presencia de un flujo intenso de ellos, su energía de amarre Q se volverá progresivamente débil conforme se añadan más neutrones, hasta que ésta caiga a cero. Por ello, este tipo de sistemas decaen rápidamente formando nuevos núcleos estables pero ricos en neutrones.

En la creación de núcleos pesados mediante proceso-r, las reacciones que gobiernan el decaimiento de los núcleos inestables son las reacciones (n, γ) , (γ, n) , decaimiento beta y la fisión inducida por neutrones. La ecuación general para la creación de núcleos en el proceso-r es [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dn(A, Z)}{dt} = & \lambda_n(A-1, Z)n(A-1, Z) - \lambda_n(A, Z)n(A, Z) + \lambda_\beta(A, Z-1)n(A, Z-1) - \\ & (A, Z)n(A, Z) + \lambda_\gamma(A+1, Z)n(A+1, Z) - \lambda_\gamma(A, Z)n(A, Z) + \\ & \text{términos debido a fisión para } A \gtrsim 260, \end{aligned} \quad (4.32)$$

dónde $\lambda_n = 1/\tau_n = \sigma_n v_n n_n$, $\lambda_\beta = 1/\tau_\beta = cte/W_\beta^5$ y $\lambda_\gamma = 1/\tau_\gamma = \sigma_\gamma = \sigma_\gamma c n_\gamma$ son las tasas de (n, γ) , (γ, n) y el proceso respectivamente. σ_n es la sección eficaz para (n, γ) y σ_{gamma} la sección eficaz para (γ, n) , v_n y n_n la velocidad y densidad de neutrones responsables de las

reacciones (n, γ) , n_γ es la densidad de radiación γ y W_β es la energía de decaimiento beta. Se tiene para este proceso que $\lambda_n > \lambda_\beta$.

Se han discutido varios eventos para que se dé el proceso-r. Las observaciones de abundancias en estrellas pobres en metales sugieren una asociación con estrellas masivas de primera generación, especialmente supernovas; otras sugerencias son la fusión de una estrella de neutrones con otro objeto compacto, pues cálculos recientes muestran que suficiente materia se eyecta en esta fusión [31].

Durante un encuentro entre una estrella de neutrones y un agujero negro, las torcas de marea remueven de manera violenta energía y momento angular en forma de colas de marea al final del evento de destrucción, las cuales se extienden algunos kilómetros. Como consecuencia, parte del fluido queda desligado gravitacionalmente, de esta manera se eyecta dinámicamente material rico en neutrones. Su descompresión subsecuente podrá sintetizar elementos radiactivos mediante proceso-r, y contribuir a la abundancia observada de elementos pesados en el universo. El decaimiento radiactivo consecuencia del proceso-r, podría entonces, encender radiación electromagnética, como por ejemplo un fenómeno óptico fugaz [23]. Hay que mencionar que la conversión más eficiente de energía radiactiva a radiación es suministrada por aquellos isótopos con escala de decaimiento comparable con el tiempo de difusión radiativa a través de la eyección [23]. Observemos que en un encuentro de estrella de neutrones-agujero negro, las masas eyectadas y por ende la descripción del proceso-r que conlleven, dependerá de la ecuación de estado utilizada para describir al polítropo [6].

Capítulo 5

Método SPH

Muchos de los procesos que se observan en el universo se han modelado mediante procesos de dinámica de fluidos. Para una gran cantidad de procesos astrofísicos hay que resolver las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos en campos gravitacionales intensos y en ocasiones con campos magnéticos. Para dar solución hay que resolver las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de Maxwell. Analíticamente ésto es imposible, solo las aproximaciones numéricas son factibles [24].

Dentro de los requisitos físicos que necesita un método numérico se encuentran: i) una adaptabilidad espacial, ya que generalmente hay ausencia de fronteras fijas, ii) buena modelación de lo que sucede durante y después de los choques, iii) gran firmeza del esquema numérico, dado que las cantidades físicas pueden variar muchos órdenes de magnitud entre las distintas regiones del dominio de la simulación, iv) la conservación numérica de cantidades físicas juega un papel importante en muchos problemas astrofísicos y, v) muchas preguntas astrofísicas requieren tratar distintos procesos, más allá de la dinámica del gas y la auto-gravedad. El método conocido como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) es un método numérico lagrangiano, fácil de trabajar, que permite el estudio de la evolución de los sistemas, da una buena resolución y permite la conservación de las propiedades físicas de ellos [25].

5.1. Métodos Euleriano y Lagrangiano

Para resolver un problema físico numéricamente se deben discretizar las ecuaciones. Para ello se puede hacer mediante el método Euleriano o el método Lagrangiano.

Método Euleriano. En este método las coordenadas se encuentran adaptadas en una malla fija, la cual, en general no cambia con el tiempo; sin embargo existen códigos de mallas adaptativas. El cálculo de las cantidades físicas y sus derivadas se realiza en puntos fijos. Este método no es óptimo para el estudio de sistemas que se expanden o contraen [25].

Método Lagrangiano. Las coordenadas se adaptan a las partículas, elementos del fluido o campos que se mueven. Las cantidades físicas y derivadas espaciales se calculan en distintos puntos del espacio, pero siempre sobre un elemento. Es por eso que para sistemas como el estudiado en este trabajo se utilizarán.

Suponiendo que el fluido que se analiza no tiene viscosidad, las ecuaciones que se estudian son las ecuaciones de Euler; que, desde una descripción Lagrangiana son:

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \bar{v} \quad (5.1)$$

- Ecuación de conservación de momento:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \bar{f} \quad (5.2)$$

donde \bar{f} son las fuerzas externas; si es que están presentes.

- La ecuación de energía que sale de la primera ley de la termodinámica en el caso adiabático:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \bar{v}, \quad (5.3)$$

donde u es la energía por unidad de masa. Las ecuaciones 5.1, 5.2, 5.3 deben estar relacionadas por una ecuación de estado que vincule cantidades como la presión P , o la velocidad del sonido c_s con cantidades macroscópicas del fluido como la densidad ρ o la temperatura T [25].

Una lista de los procesos físicos que pueden implementarse mediante el método SPH se dan en [19, 25]; algunos de ellos son: *gravedad* (que se puede tratar mediante códigos de árbol), *ecuaciones de estado* (dependiendo del tipo de problema puede ser tan compleja como se desee, desde ecuaciones politrópicas, o en el caso de problemas más complicados, por ejemplo estrellas de neutrones, donde se usan ecuaciones híbridas), *viscosidad física*, *conducción térmica*, *combustión nuclear* (aunque las escalas de tiempo de quemado nuclear sean pequeñas comparadas con la escala dinámica de tiempo del gas, se puede implementar en el método SPH), *campos magnéticos*, *radiación de fotones y neutrinos* (a densidades

grandes por ejemplo, los fotones se encuentran atrapados y los neutrinos se vuelven agentes de enfriamiento. Para densidades muy altas, por ejemplo estrellas de neutrones, o las regiones interiores de un disco de acreción alrededor de un agujero negro, la opacidad puede retardar el escape de los neutrinos. Para modelar por ejemplo, la fusión de objetos compactos se implementan los neutrinos en el método SPH mediante la aproximación de partículas en la malla y usando las alturas locales del disco para estimar las opacidades), etc.

5.2. El método

El método SPH es un método de interpolación que permite que cualquier función se exprese en términos de sus valores en un conjunto de puntos desordenados: *las partículas* [19]; las cuales se mueven con la velocidad local del fluido, las derivadas se calculan mediante la aproximación de un kernel. De esta manera las ecuaciones diferenciales parciales de la dinámica del fluido Lagrangiano se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias [25]. Describiremos aquí el método SPH Newtoniano.

5.2.1. Integral interpolante

La integral interpolante de cualquier función $\tilde{f}(\bar{r})$ se aproxima por:

$$\tilde{f}(\bar{r}) = \int f(\bar{r}') W(\bar{r} - \bar{r}', h) d^3 r', \quad (5.4)$$

donde la integración se hace en todo el espacio, h es el parámetro de suavizado y W es el kernel de interpolación que tiene dos propiedades: i) está normalizado $\int W(\bar{r} - \bar{r}', h) d^3 r' = 1$ y ii) $\lim_{h \rightarrow 0} W(\bar{r} - \bar{r}', h) = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$. Para el trabajo numérico, discretizamos, entonces:

$$f(\bar{r}) = \sum_b m_b \frac{f_b}{\rho_b} W(\bar{r} - \bar{r}_b, h), \quad (5.5)$$

donde el índice b es la etiqueta de la partícula, y la suma es sobre todas las partículas; la partícula b tiene densidad ρ_b , masa m_b , posición \bar{r}_b , velocidad \bar{v}_b , y el valor de la cantidad f en \bar{r}_b es f_b .

La densidad $\rho(\bar{r})$ juega un papel importante en la deducción de las ecuaciones SPH a

partir de un Lagrangiano. Ésta se escribe en forma discreta como:

$$\rho(\bar{r}) = \sum_b m_b W(\bar{r} - \bar{r}_b, h). \quad (5.6)$$

La manera de trabajar en el método SPH es mantener las masas fijas de manera que la conservación de masa sea perfecta y no haya necesidad de resolver la ecuación de continuidad. Dado que el kernel es una función que se conoce analíticamente, para calcular las derivadas, podemos usar:

$$\nabla f(\bar{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b \nabla W(\bar{r} - \bar{r}'_b, h). \quad (5.7)$$

5.2.2. Discretización de las ecuaciones de Euler

A partir de la ecuación 5.5 podemos discretizar la ecuación de momento 5.2, entonces el momento de la partícula a es:

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (5.8)$$

donde $\nabla_a W_{ab}$ denota el gradiente de $W(\bar{r}_a - \bar{r}_b, h)$ tomado respecto a las coordenadas de la partícula a . Sin embargo, se puede demostrar que esta ecuación no conserva el momento [25]. La simetrización utilizada en este trabajo para la construcción de las ecuaciones SPH de momento es la dada por [19] :

$$\nabla P = 2\sqrt{P}\nabla\sqrt{P}. \quad (5.9)$$

Por lo que la ecuación de momento es:

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{2\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (5.10)$$

La ecuación discretizada de la energía con esta simetrización queda [12]:

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left(\frac{2\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} \right) \bar{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (5.11)$$

Esta ecuación junto con la ecuación de estado y las ecuaciones 5.9, 5.6 forman el conjunto de ecuaciones SPH. La divergencia de la velocidad es:

$$(\nabla \cdot \bar{v})_a = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \bar{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (5.12)$$

5.2.3. El kernel

El kernel puede variar; un kernel basado en ajuste polinomial por intervalos ha mostrado bastantes ventajas en el desarrollo numérico, su error dominante en la integral interpolante es $O(h^2)$ y las interacciones son exactamente cero para $r > 2h$ (a esto se le conoce como soporte compacto) [19]. Este kernel está dado en tres dimensiones como:

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^3 & \text{si } 0 \leq \frac{r}{h} < 1, \\ \frac{1}{4}\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & \text{si } 1 \leq \frac{r}{h} < 2, \\ 0 & \text{si } 2 \leq \left(\frac{r}{h}\right) \end{cases} \quad (5.13)$$

el kernel es radial, depende solo de $r = |\bar{r} - \bar{r}'|$. La distribución de las partículas depende del kernel usado y la dinámica del sistema considerado. Una propiedad importante del kernel es $\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ab}$. Y la derivada temporal de éste es:

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \bar{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (5.14)$$

La conservación de las cantidades físicas se garantiza si $\nabla_a W_{ab}$ es simétrica en los parámetros de suavizado, lo cual se logra haciendo $h_{ab} = \frac{1}{2}(h_a + h_b)$, donde h_a es la resolución espacial de la partícula a y h_b la resolución espacial de la partícula b .

5.2.4. Resolución espacial

El término h determina la resolución y el número de vecinos que contribuyen a las propiedades en un punto. La eficiencia y resolución son mayores, si se elige h que dependa de la densidad de partículas local ($h \propto \frac{1}{\rho^{1/3}}$ en 3D)[19]. En el código usado, las h_b individuales se ajustan de manera que tienen un número constante de vecinos ν ; sus vecinos son aquellos donde $\frac{r_{ab}}{h_{ab}} \leq 2$. Si $h_{b,n}$ es el parámetro de suavizado para la partícula b en el paso n , el valor en el paso $n + 1$ es:

$$h_b^{n+1} = \left(\frac{h_b^n}{2}\right) \left[1 + \left(\frac{\nu}{\nu^n}\right)^{1/3}\right], \quad (5.15)$$

ν^n es el número de vecinos en el paso n . Un valor de $\nu = 64$ da una buena muestra del fluido y no requiere mucho tiempo computacional[12].

5.2.5. Viscosidad artificial

En la dinámica de gas, aún cuando se tienen condiciones iniciales suaves, se pueden producir soluciones discontinuas o choques hidrodinámicos. A escalas comparables con el camino libre medio del gas estas soluciones son suaves; sin embargo a escalas macroscópicas de una simulación pueden aparecer discontinuidades. Para tratar este problema numéricamente, se puede usar la *viscosidad artificial*¹. Con dicho tratamiento se añade una disipación artificial extra al fluido. La idea de introducir los términos artificiales disipativos a las ecuaciones es dar a las ondas un ancho comparable con el espacio de las partículas; de esta manera cuando se produce una perturbación en algún lugar del sistema, la onda que viaja no pasa de largo a las partículas que se encuentran lejos del lugar donde se produjo el choque, esto es, se puede "avisar" a las partículas alejadas lo que sucedió. Esto se da mediante una aceleración (desaceleración) de las partículas. La viscosidad artificial está dada entonces en términos del campo de velocidades. La viscosidad artificial añade un término de presión Π_{ab} a las ecuaciones de Euler, y ésta se "enciende" cuando las partículas se acercan.

$$\left(\frac{2\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b}\right) \rightarrow \left(\frac{2\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} + \Pi_{ab}\right), \quad (5.16)$$

donde Π_{ab} está dada por [10]:

$$\Pi_{ab} = \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2}\right)(-\alpha\mu_{ab} + \beta\mu_{ab}^2), \quad (5.17)$$

con:

$$\mu_{ab} = \begin{cases} \frac{\bar{v}_{ab} \cdot \bar{r}_{ab} f_a + f_b}{h_{ab}(\frac{r_{ab}^2}{h_{ab}^2} + \eta^2 2c_{ij})} & \bar{v}_{ab} \cdot \bar{r}_{ab} < 0, \\ 0 & \bar{v}_{ab} \cdot \bar{r}_{ab} > 0; \end{cases} \quad (5.18)$$

α y β son constantes, c_a es la velocidad del sonido en la posición de la partícula a , $c_{ab} = \frac{1}{2}(c_a + c_b)$ y f_a es una función para la partícula a definida como:

$$f_a = \frac{|\nabla \cdot \bar{v}|_a}{|\nabla \cdot \bar{v}|_a + |\nabla \times \bar{v}|_a + \eta' \frac{c_a}{h_a}} \quad (5.19)$$

¹Hay que mencionar que la viscosidad artificial no tiene nada que ver con la viscosidad física; sino que es un método numérico para resolver a grandes escalas los efectos que se dan en escalas pequeñas.

donde el factor η' sirve para no permitir divergencias numéricas y la divergencia y el rotacional del campo de velocidades están dados mediante:

$$(\nabla \cdot \bar{v})_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_b \bar{v}_{ba} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (5.20)$$

$$(\nabla \times \bar{v})_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \bar{v}_{ba} \times \nabla_a W_{ab}. \quad (5.21)$$

En las simulaciones realizadas para este trabajo $\alpha = \beta = 1.45$, y η es un parámetro pequeño que también evita la aparición de singularidades.

5.2.6. Ecuaciones finales

Las ecuaciones para una partícula a se pueden escribir como $\frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{v}_a$. La fuerza sobre la partícula a se divide en las contribuciones de la fuerza gravitacional y la hidrodinámica. \bar{F}_{aG} y \bar{F}_{aH} respectivamente. Entonces \bar{F}_{aH} simetrizada y con los términos de gradiente de presión y viscosidad artificial queda como:

$$\bar{F}_{bH} = - \sum_b m_a m_b \left(2 \frac{\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab}, \quad (5.22)$$

donde Π_{ab} está dada por 5.17 y W_{ab} por 5.13. El valor de la energía térmica por unidad de masa u_a es:

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left(2 \frac{\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} + \Pi_{ab} \right) \bar{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (5.23)$$

5.2.7. Códigos de árbol

Este tipo de implementación se realiza con la finalidad de calcular las fuerzas gravitacionales eficientemente. En un problema de N cuerpos, se debe calcular la interacción de cada partícula con las $N - 1$ restantes; para lograr esto se requieren N^2 operaciones, lo cual hace el trabajo bastante complicado. Un código de árbol permite realizar solo $N \log N$ operaciones, lo cual permite trabajar con simulaciones de muchas partículas sin problema. Este método se puede implementar en una subrutina, la cual proporciona simultáneamente \bar{F}_{aG} y los vecinos hidrodinámicos para cada partícula que permiten obtener F_{aH} y $\frac{du_a}{dt}$. La idea del código de árbol es crear una estructura que contenga a las partículas y permita de manera eficiente identificar a sus vecinos sin necesidad de recorrer todas las partículas. En una dimensión, se

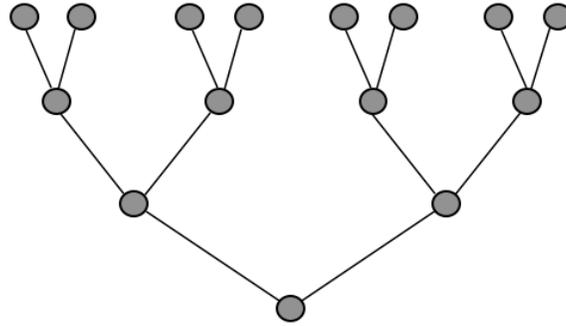


Figura 5.1: Se muestra un esquema de la construcción de un árbol binario en una dimensión con 8 partículas. Se va dando la construcción de los nodos y subnodos, hasta que se tiene sólo una partícula cuya masa es la suma de las masas de las partículas mediante las cuales fue construida. Observamos que se cumple que el número de operaciones (nodos) es del orden de $N \log N$.

ejemplifica a continuación (ver figura 5.1). Buscamos al vecino más cercano de cada partícula, a estos dos los unimos en algo que se conoce como *nodo*, el cual contiene la información de los dos vecinos más cercanos, la masa del nodo será la suma de las masas de las dos partículas consideradas; a partir de los primeros nodos se vuelven a buscar los vecinos más cercanos y se construye un nuevo nodo *subnodo*. Se sigue la construcción de subnodos entre vecinos cercanos hasta que en cada subnodo se tenga solamente una partícula. De esta manera se tiene solo cierto número de nodos que *afectan* las propiedades de la partícula a . Esta construcción se puede generalizar a 3 dimensiones.

5.2.8. Adaptabilidad en el tiempo

El paso en el tiempo se toma de manera que se satisfaga una combinación del criterio de Courant² para la estabilidad y una restricción sobre el máximo cambio permitido en la velocidad de cualquier partícula durante un paso de tiempo para conservar la precisión. Para el programa utilizado en este trabajo se utilizó el paso de tiempo [12]:

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \quad (5.24)$$

con:

$$\Delta t_1 = \min_a \left(\frac{h_a}{\dot{v}_a} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

²El criterio de Courant-Friedrichs-Levi asegura que la velocidad de propagación numérica de la información no exceda a la velocidad física. Si se quiere resolver una escala espacial Δx , el paso numérico en el tiempo debe ser $\Delta t < \frac{\Delta x}{c_s}$ (c_s es la velocidad del sonido) para asegurar estabilidad numérica. [25]

y

$$\Delta t_2 = 0.15 \min_a \left(\frac{h_a}{[c_a + 1.2\alpha c_a + 1.2\beta \max_b \mu_{ab}]} \right). \quad (5.26)$$

5.2.9. Radiación gravitacional

Aunque la simulación es puramente Newtoniana, se hace un cálculo de la radiación gravitacional en la aproximación de campo débil y variaciones lentas; para ello se da una aproximación cuadrupolar como la descrita en el capítulo 4.2 [12]. En la aproximación cuadrupolar, la amplitud de la onda en la norma h_{jk}^{TT} 4.14, puede escribirse como:

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2G}{r c^4} \ddot{I}_{jk}^{TT}(t - r). \quad (5.27)$$

Aquí estamos tomando la propagación de la onda en la dirección radial, r es la distancia entre las dos masas estudiadas, G la constante de gravitación universal y \ddot{I}_{jk}^{TT} es la parte transversal y de traza nula del momento cuadrupolar:

$$\ddot{I}_{jk}^{TT} = P_{jl} \ddot{I}_{lm} P_{km} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{lm} \ddot{I}_{lm}, \quad (5.28)$$

con $P_{lj} = \delta_{lj} - n_l n_j$ el operador de proyección sobre el plano transversal de la dirección radial $n_l = x_l/r$, entonces

$$\ddot{I}_{jk} = I_{jk} - \frac{I}{3} \delta_{jk} \quad (5.29)$$

es el momento cuadrupolar. δ_{jk} es la delta de Kronecker y

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k dx. \quad (5.30)$$

La potencia total que cruza una esfera distante de radio r a un tiempo retardado está dada por la ecuación 4.17 y el momento total que se pierde debido a la radiación es 4.19. En la base ortonormal

$$e_{\hat{r}} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.31)$$

la amplitud de la onda en la norma TT es:

$$r h^{TT} = (\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} - \ddot{I}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}) e_+ + 2\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} e_{\times}. \quad (5.32)$$

Para un fluido perfecto, las primeras dos derivadas del tensor cuadrupolar se pueden obtener [21], donde al usar la ecuación de continuidad para escribir la primera derivada de la ecuación

5.30, entonces:

$$\dot{I}_{jk} = - \int \nabla \cdot (\rho \bar{v}) x_j x_k dx = \int \rho (v_j x_k + v_k x_j) dx. \quad (5.33)$$

La segunda igualdad sale de integrar por partes. A continuación, al tomar la segunda derivada de la ecuación anterior, y usando la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento de Euler tenemos:

$$\ddot{I}_{jk} = - \int \left[\nabla \cdot (\rho \bar{v}) (v_j x_k + v_k x_j) + \rho x_k \left(\frac{1}{\rho} \partial_j P + \partial_j \Phi + v^l \partial_l v_j \right) + \rho x_j \left(\frac{1}{\rho} \partial_k P + \partial_k \Phi + v^l \partial_l v_k \right) \right] d^3x, \quad (5.34)$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano, después de integrar por partes y simplificar, tenemos:

$$\ddot{I}_{jk} = \int [2\rho v_j v_k + 2P \delta_{jk} - \rho (x_k \partial_j \Phi + x_j \partial_k \Phi)] dx. \quad (5.35)$$

Recordemos que en el método SPH reemplazamos la integración con una suma, entonces para esta simulación, \ddot{I}^{jk} está dado como:

$$\ddot{I}^{jk} = \ddot{I}_{AN}^{jk} + \ddot{I}_{fluido}^{jk}, \quad (5.36)$$

con

$$\ddot{I}_{fluido}^{jk} = \sum_a m_a \left(2v_a^j v_a^k + \frac{2P_a}{\rho_a} \delta^{jk} + x_a^k g_a^j + x_a^j g_a^k \right) \quad (5.37)$$

y

$$\ddot{I}_{AN}^{jk} = M_{AN} (2v_{AN}^j v_{AN}^k + x_{AN}^k g_{AN}^j + x_{AN}^j g_{AN}^k), \quad (5.38)$$

AN es agujero negro, la suma se hace sobre todas las partículas SPH y los superíndices indican las componentes cartesianas. La aceleración gravitacional de la partícula a en x^{jk} es \bar{g}_a . Se añaden los términos debidos a la presencia del agujero negro como un punto de masa. Veamos que con estas ecuaciones podemos calcular la amplitud de la onda directamente de las posiciones de las partículas y las velocidades sin necesidad de realizar diferenciaciones numéricas. Las únicas ecuaciones para las cuales se podría realizar una diferenciación numérica es para los casos de las ecuaciones 4.17 y 4.19. Por otro lado, se puede hacer un cálculo de estos valores considerando el caso del movimiento de un sistema binario en órbita circular, de esta manera las ecuaciones estarán dadas por 4.27 y 4.29. Este hecho no representa mucho problema y da un resultado aproximado debido a que la excentricidad de la órbita es muy pequeña en cada paso debido a la pérdida de momento angular por emisión de radiación gravitacional.

Podemos hacer un cálculo del efecto de la reacción de radiación gravitacional sobre el sistema

(ecuaciones 4.30 y 4.31). Para el caso del agujero negro, la ecuación 4.31 se simplifica, pues en la simulación es un punto de masa. En la estrella de neutrones, se puede aplicar la misma aceleración a todas las partículas SPH. Ésta es la aceleración en el centro de masa de las partículas SPH, entonces, la ecuación 4.30 para el código se lee como:

$$\bar{a}_2 = -\frac{M_1}{M_2(M_1 + M_2)} \frac{dE}{dt} \frac{\bar{v}_{cm}}{(v_{cm})^2}, \quad (5.39)$$

con M_1 masa del agujero negro y M_2 masa de la estrella de neutrones.

Capítulo 6

Simulaciones, resultados y análisis

6.1. Método numérico

Se realizaron un total de nueve simulaciones de una estrella de neutrones interactuando con un agujero negro. En cada simulación se modificaron los parámetros iniciales, mostrados en la tabla 6.1. Las simulaciones se realizaron con el código en 3D desarrollado por Lee [9], el cual está basado en el método numérico SPH descrito en el capítulo 5.

Por otro lado, para la construcción de la estrella de neutrones primero se generó un cubo, el cual constaba de $N = 157465$ partículas ($N = 6860$ para la estrella de menor resolución). A partir de esta geometría, y utilizando la ecuación de Lane-Emden con índice politrópico $n = 1$ ($\gamma = 2$), se calculó el perfil de densidad para un polítopo. La construcción de esta esfera (polítopo), al final tenía $N = 81608$ partículas ($N = 2103$ para la estrella de menor resolución). Una vez construido el polítopo, se ejecutó un programa que lo *relajaba* ya con la ecuación FPS; para ello se añadió un término lineal de amortiguamiento en la velocidad dado por $\frac{-\bar{v}}{t_{am}}$, donde $t_{am} = (\frac{R^3}{GM})^{1/2}$; de esta manera se asegura que las oscilaciones que sufre la estrella cuando se aplica la ecuación FPS 2.36 alcancen rápidamente el equilibrio.

Construida la estrella de neutrones, se utilizó un nuevo programa que modelaba la dinámica de la interacción de la estrella de neutrones con el agujero negro.

El agujero negro de Schwarzschild se modeló como una masa puntual con un potencial Newtoniano $\Phi_{AN}(r) = -\frac{GM_1}{r}$, donde M_1 es la masa del agujero negro, G la constante de gravitación universal y r la distancia entre el agujero y la masa [12]. La contribución del agujero negro a la fuerza de la partícula a en la estrella es:

$$\bar{F}_a^{AN} = -\frac{GM_1 m_a}{|\bar{r}_a - \bar{r}_{AN}|^3} (\bar{r}_a - \bar{r}_{AN}) \quad (6.1)$$

y la contribución de la partícula a a la fuerza sobre el agujero negro es:

$$\bar{F}_{AN}^a = -\frac{Gm_aM_1}{|\bar{r}_a - \bar{r}_{AN}|^3}(\bar{r}_{AN} - \bar{r}_a). \quad (6.2)$$

El horizonte de eventos se logra colocando una frontera absorbente a la distancia $r_{sch} = \frac{2GM_1}{c^2}$. Cualquier partícula que cruce esta frontera será absorbida por el agujero negro y desaparecerá de la simulación. La posición y velocidad del agujero se ajustan de manera que haya conservación de masa y momento angular. Omitimos cualquier momento angular de espín que pueda ganar el agujero durante el proceso, lo cual no presenta problemas, pues la simulación es Newtoniana [12]. Aunque la simulación es puramente Newtoniana, se incluye un término en las ecuaciones de movimiento que simula el efecto de la reacción de radiación gravitacional sobre los componentes del sistema binario. Para ello se utiliza la aproximación cuadrupolar descrita en la sección 4.2 y cuya implementación en el código se describe en la sección 5.2.9. La reacción gravitacional se enciende mientras el sistema binario permanece en contacto, es decir cuando la estrella de neutrones llega al periaastro, queda ligada y forma mareas; se puede aproximar a la estrella como una masa puntual, por lo que se apaga una vez que la estrella ha sido destruida. En el código, el *switch* se apaga cuando la separación entre el sistema binario decrece por debajo del radio de marea.

6.2. Condiciones iniciales de las simulaciones

Dado que la velocidad estelar de dispersión en los cúmulos globulares es insignificante al compararla con la velocidad adquirida debido a la aceleración gravitacional de dos objetos compactos aproximándose, se supone que los encuentros son parabólicos, por lo que $E_{orbital} = 0$ en infinito. Entonces la energía cinética es igual a menos la energía potencial y la excentricidad de la órbita inicial es $\varepsilon = 1$.

La forma de la estrella se aproxima por una simetría esférica y la separación inicial del sistema (agujero negro - estrella de neutrones) es de un tamaño comparable con el radio de la estrella de neutrones; tomaremos un valor como el descrito en la sección 3.3, de manera que el radio de separación sea un poco mayor que el radio de marea. La precisión es mayor si se tiene una separación bastante más grande que unos cuantos radios de la estrella secundaria (estrella de neutrones). Sin embargo esto implica bastantes costos computacionales [10]. Por otro lado, mientras la estrella se acerca al agujero sufre deformaciones, por lo cual puede tratarse como una simetría elipsoidal. Sin embargo dado que a separaciones muy grandes los efectos por fuerzas de marea son pequeños, el tomar a la estrella como una esfera es razonable.

La diferencia entre tomar una y otra simetría se estudia en [10] (aunque la ecuación de estado que se utiliza es politrópica a diferencia de la usada en este trabajo), donde, se observa que el tomar una simetría esférica implica una pérdida de energía orbital rápida, por lo que el tiempo de destrucción de la estrella es un poco más corto que si se toma un elipsoide triaxial. En la simetría esférica también se observan oscilaciones radiales de la estrella debido al bulbo de marea que se forma.

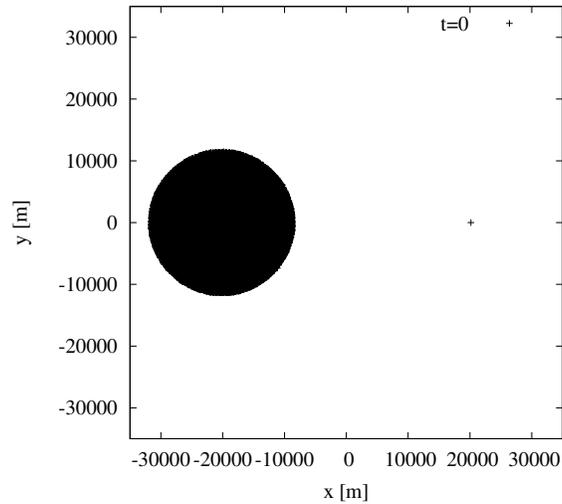


Figura 6.1: En ésta imagen mostramos el sistema S1a, la estrella de neutrones se encuentra a la izquierda y el agujero negro a una distancia de $3.7R_2$ de distancia. Las demás simulaciones en un principio se observan prácticamente igual; salvo que para la serie S3, el radio y por ende la separación se vuelven un poco más grandes, sin embargo la configuración inicial luce casi igual.

Otra condición inicial para el desarrollo de las simulaciones se encuentra dada por el parámetro η definido en la ecuación 3.46, recordemos que este valor da una comparación entre la fuerza del campo de marea producido por el agujero negro a la estrella de neutrones, por lo que entre mayor sea este valor mayor será el parámetro de impacto, dado que el momento angular está dado en términos del parámetro de impacto, η es importante para saber qué tan violenta fue la colisión.

Un último parámetro que podemos modificar es el cociente q de masas. Para ello fijamos la masa de la estrella de neutrones y cambiamos el valor de q , con esto se modifica la masa del agujero negro. Para dos casos el agujero fue suficientemente masivo que la estrella de neutrones; y en un caso, las masas de la estrella y el agujero fueron comparables. Hay que mencionar que este último caso es poco probable, pues implica tener un agujero negro con una masa dentro del intervalo de masas conocido para estrellas de neutrones; sin embargo,

lo consideramos como un caso extremo donde las componentes tienen masas parecidas.

Tabla 6.1: Condiciones iniciales para las simulaciones.

Simulación	$M_2[M_\odot]$	$q = \frac{M_2}{M_1}$	R_2 [m.]	Separación [R_2]	η	N
S1a	1.4	0.31	11500	3.7	1	81608
S1b	1.4	0.31	11500	3.7	1.5	81608
S1c	1.4	0.31	11500	3.7	2	81608
S2a	1.4	0.9	11500	3.7	1	81608
S2b	1.4	0.9	11500	3.7	1.5	81608
S2c	1.4	0.9	11500	3.7	2	2103
S3a	2	0.31	12350	3.7	1	81608
S3b	2	0.31	12350	3.7	1.5	81608
S3c	2	0.31	12350	3.7	2	81608

En la tabla 6.1, se muestran los valores para los parámetros iniciales del encuentro, M_2 es la masa de la estrella de neutrones, q es el cociente de masas, R_2 es el radio de la estrella de neutrones; la separación está dada en términos del radio de la estrella de neutrones, y N es el número de partículas que se utilizaron para las simulaciones.

6.3. Casos $q = 0.31$

En la figura 6.2 se muestra la evolución de la simulación S1a. En este caso, debido al valor de η , el choque se produjo con un parámetro de impacto muy pequeño, por lo que la estrella se destruye rápidamente. La duración de la simulación fue de .018 s; sin embargo para el tiempo $t = 2.2$ ms, la estrella estaba completamente destruida.

Podemos hacer una comparación entre las simulaciones desarrolladas en S3, y las realizadas en S1, ya que ambas tenían un cociente de masas igual, $q = 0.31$. La diferencia está en que la estrella de neutrones para la serie S3 es un poco más masiva; lo cual implica que la escala de tiempo dinámica del sistema S3 es más pequeña, y por tanto la destrucción de la estrella más masiva es un poco más rápida. Mostramos la evolución del sistema S3a (figura 6.3), para los mismos tiempos que los mostrados en el sistema S1a. Se observa que, en efecto, aunque para $t = 0.45$ ms, la estrella no presentó una deformación tan grande como en el caso S1a, para tiempos posteriores la estrella presentó una destrucción mayor.

En la figura 6.4 se muestra la gráfica de la separación entre el centro de masa del núcleo y el agujero negro vs. el tiempo. Estas figuras son bastante ilustrativas, pues aunque en este caso la simulación fue hecha de manera que el campo de marea tuviera gran intensidad,

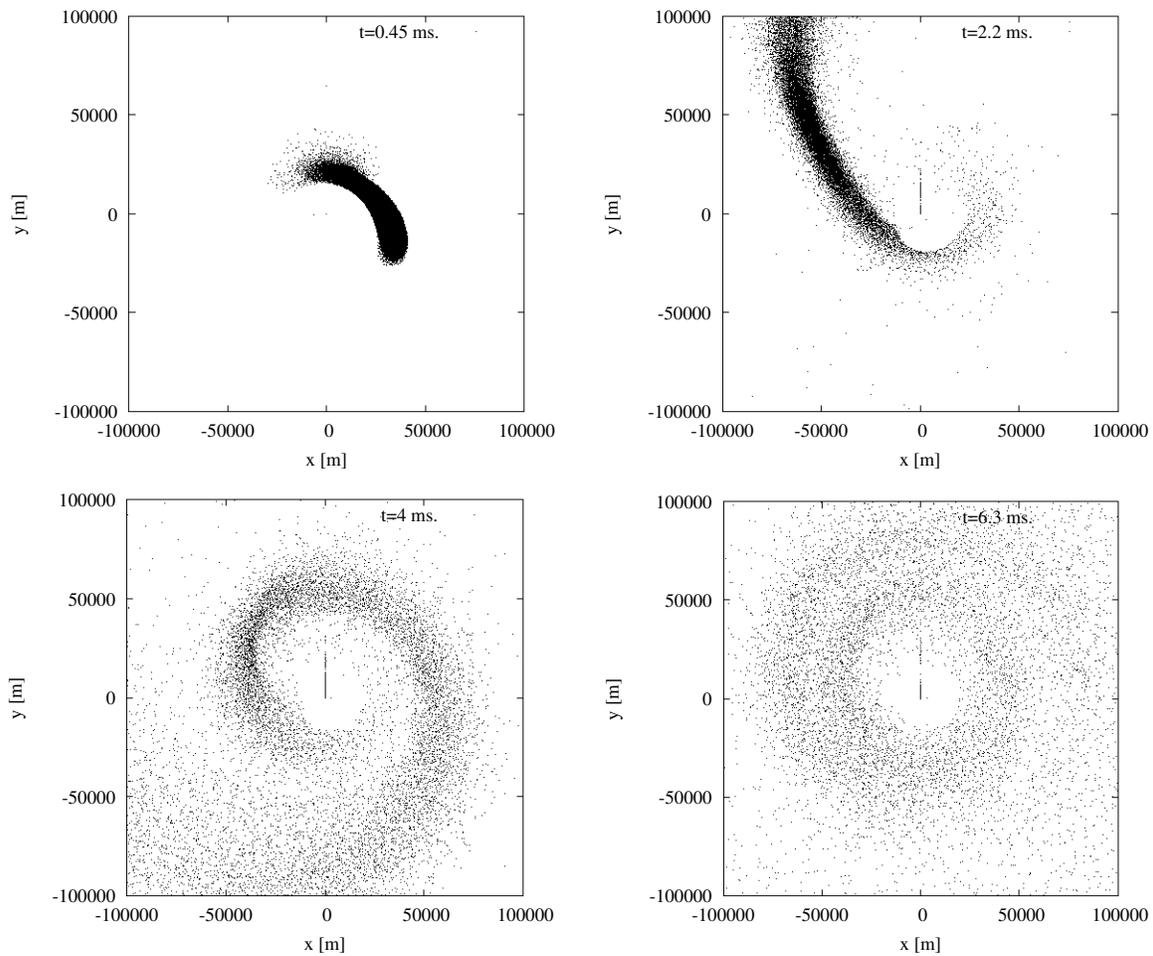


Figura 6.2: Se muestra la evolución del sistema S1a. Observamos que la estrella se destruye en un tiempo muy rápido. Para $t = 2.2$ ms ya está completamente destruida; en este momento el número de partículas es $N \sim 22000$, la pérdida de las partículas se da por eyección o porque atraviesan el horizonte de eventos del agujero negro. Para tiempos posteriores se observa la formación de un disco alrededor del agujero negro.

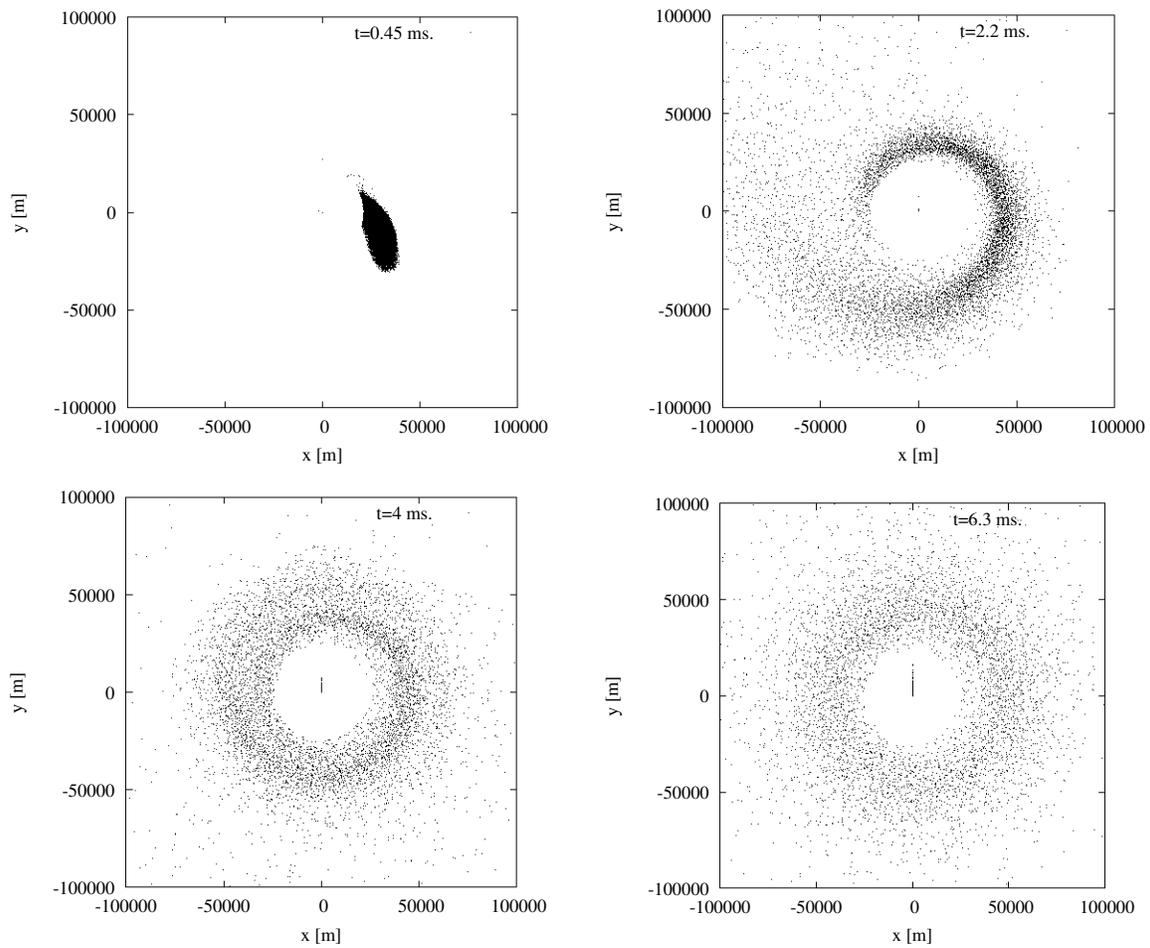


Figura 6.3: Se muestra la evolución del sistema S3a. Aunque se ve que casi no hay deformación en la estrella para la primera pasada por el periastro, se puede observar que la destrucción de la estrella se da en un tiempo más corto que para el sistema S1a; esto debido a que la escala de tiempo dinámica para una estrella en equilibrio que presenta una perturbación va como $\tau_{hyd} \sim \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$.

podemos observar que los sistemas solo pasaron una vez por el periastro y tuvieron una destrucción inmediata. Es decir, la estrella se destruyó antes de pasar una vez más a una distancia R_p . Aquí también se observa que el sistema S3a alcanza antes el periastro que el sistema S1a. De igual forma la distancia mínima de acercamiento de la estrella de neutrones al agujero para el sistema S1a es mayor que la distancia mínima alcanzada por S3a.

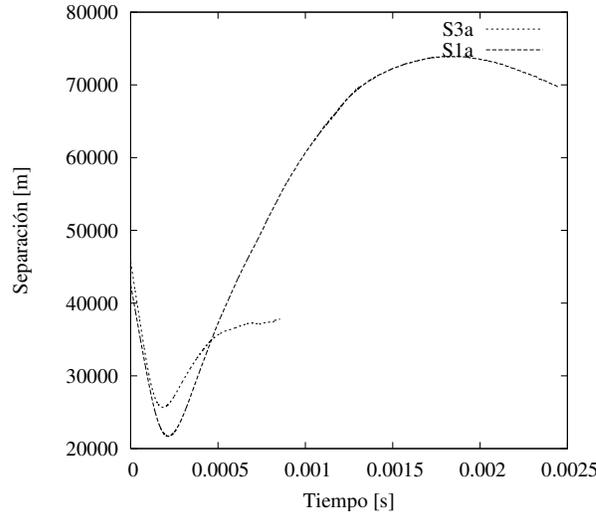


Figura 6.4: Se muestra la gráfica de separación vs tiempo para los sistemas S1a y S3a. Observamos que el sistema S3a *cae* más rápido que el sistema S1a debido a las condiciones iniciales implementadas.

La estrella de neutrones se va acercando al agujero negro debido a la pérdida de momento angular por emisión de radiación gravitacional. Hay que observar que, mientras existe el núcleo de la estrella habrá emisión de ondas gravitacionales. Una vez que éste haya sido completamente destruido, la amplitud de la radiación gravitacional se vuelve cero. En las figuras 6.5 y 6.6 se muestran las ondas producto de la radiación gravitacional de la colisión de los sistemas para dos polarizaciones en la aproximación cuadrupolar, donde podemos ver a la estrella de neutrones como una masa puntual. Cuando el núcleo está completamente destruido, la emisión de ondas gravitacionales es cero. Cabe mencionar que para el sistema S3a debido a que la destrucción de la estrella secundaria fue más rápida que para la estrella del sistema S1a, la emisión de radiación gravitacional tuvo una duración más corta. Entonces entre más tiempo sobreviva el núcleo a las fuerzas de marea inducidas por el agujero negro, mayor será el tiempo de emisión de ondas gravitacionales. Las formas de las ondas finales reflejarán el hecho de que la binaria sobreviva al encuentro después de cierto tiempo.

Un cálculo que también se realizó fue el de la luminosidad en ondas gravitacionales. Encontramos que para el sistema S1a la luminosidad máxima es de $L = 6.9 \times 10^{56}$ erg s⁻¹ y

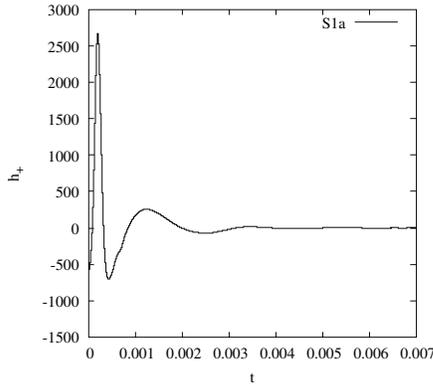
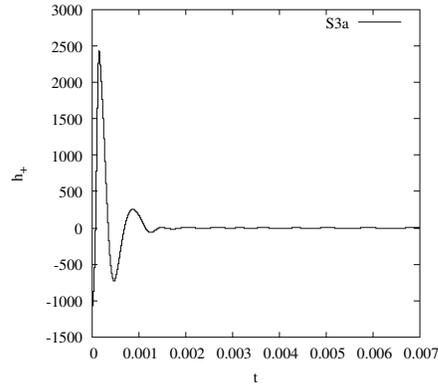

 (a) Polarización h_+ para sistema S1a.

 (b) Polarización h_+ para sistema S3a.

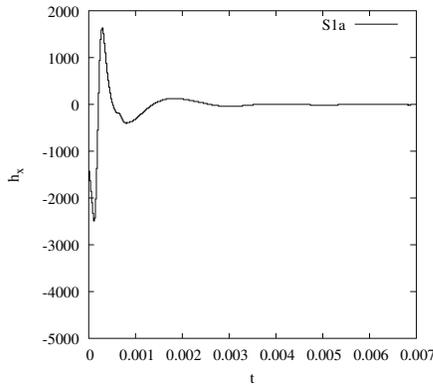
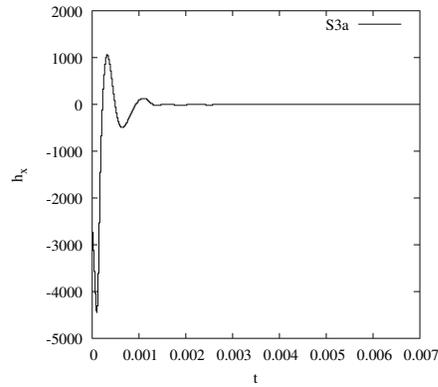
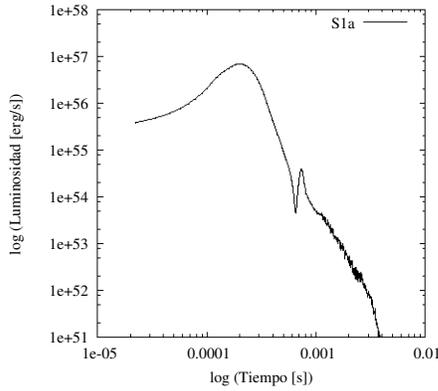
 Figura 6.5: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1a y S3a. Veamos que la emisión para el sistema S3a tuvo una duración más pequeña que para el caso S1a.

 (a) Polarización h_x para sistema S1a.

 (b) Polarización h_x para sistema S3a.

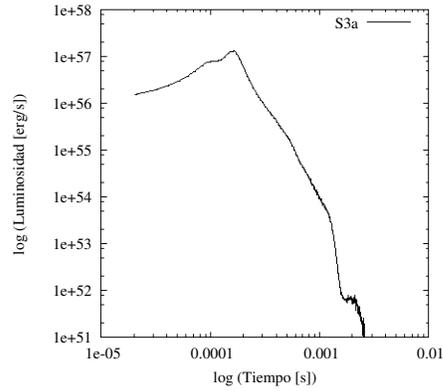
 Figura 6.6: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_x de los sistemas S1a y S3a. En esta polarización también se observa que la emisión para el sistema S3a tuvo una duración más pequeña que para el caso S1a.

la energía total radiada es 2.1×10^{53} erg, mientras que para S3a $L = 1.3 \times 10^{57}$ erg s^{-1} y la energía total radiada es 5×10^{53} erg. La gráfica 6.7 muestra los picos de luminosidad.

La diferencia entre la simulación S1a y las otras dos simulaciones de la serie S1 se encuentra en que, debido al parámetro η , en S1b y S1c, se producen más colas de marea, es decir, el parámetro de impacto es más grande, de manera que la estrella no se destruye a la primera pasada cerca del agujero, sino que pasa varias veces por el periastro hasta que logra una destrucción completa de su núcleo (lo mismo sucede para la serie S3). La gráfica de la separación entre el núcleo de la estrella y el agujero negro vs. el tiempo se muestra en la figura 6.8.



(a) Luminosidad para el sistema S1a.



(b) Luminosidad para el sistema S3a.

Figura 6.7: Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1a y S3a.

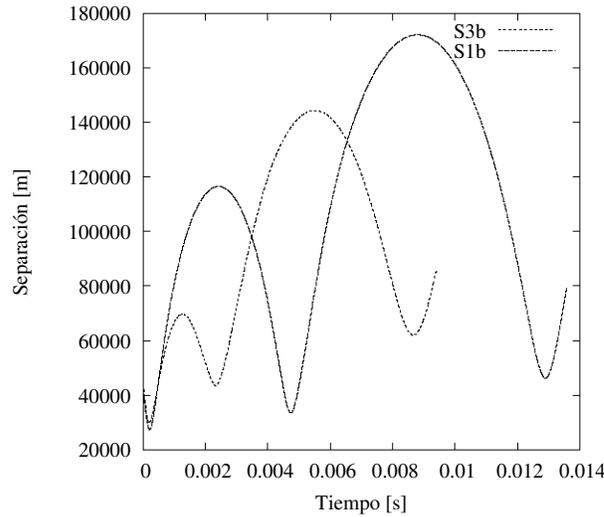


Figura 6.8: Se muestra la gráfica de separación vs tiempo para los sistemas S1b y S3b. Aquí en ambos casos la estrella pasa tres veces por el periastron antes de romperse por completo, sin embargo, debido a los parámetros iniciales de ambos sistemas, las distancias de los periastron y los apoastron para ambas configuraciones cambian; en el caso de la estrella masiva y de mayor radio, el acercamiento que tiene con el agujero negro es menor, que para el sistema S1b, y como era de esperarse el sistema S1b tarda más tiempo en destruirse que el sistema S3b de acuerdo con la ecuación para la escala de tiempo hidrodinámico.

Debido a que la estrella de neutrones del sistema S1b tiene una escala de tiempo hidrodinámica $\tau_{Hydr} \simeq \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$ más grande que el sistema S3b, es de esperarse que la emisión de radiación gravitacional de este sistema tenga mayor duración que la emitida por el sistema que tiene menor densidad. Las oscilaciones que se observan en las gráficas de las dos polarizaciones del sistema S1b, se deben a la perturbación que siente la estrella debido a la

presencia del agujero negro; son los modos normales de vibración por la acción del primer acercamiento. De acuerdo con [15] la frecuencia de estos modos es cercana a la frecuencia natural $\nu_{osc} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2}$, para la estrella de neutrones. Entonces de las figuras 6.9a y 6.14a, podemos obtener la frecuencia de los modos normales, vemos que es aproximadamente de 1400 Hz y la frecuencia natural es $\nu_{osc} \simeq 1755$ Hz. Los picos locales observados en la emisión de radiación gravitacional se deben a cada paso de la estrella por el periastro. En las figuras 6.9 y 6.10 se observa la radiación gravitacional emitida de los sistemas S1b y S3b.

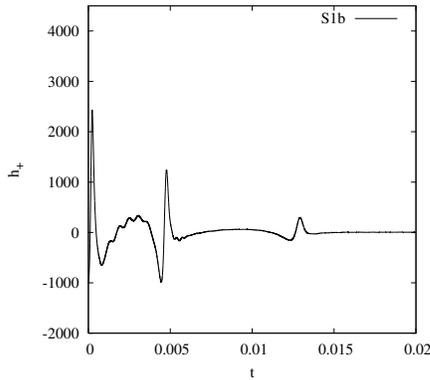
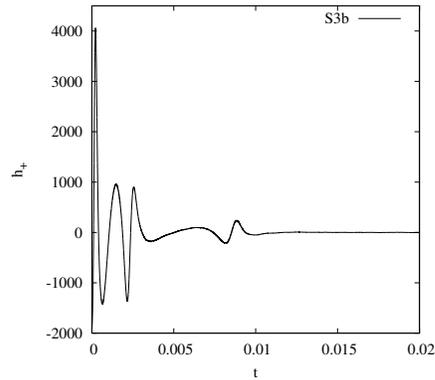

 (a) Polarización h_+ para sistema S1b.

 (b) Polarización h_+ para sistema S3b.

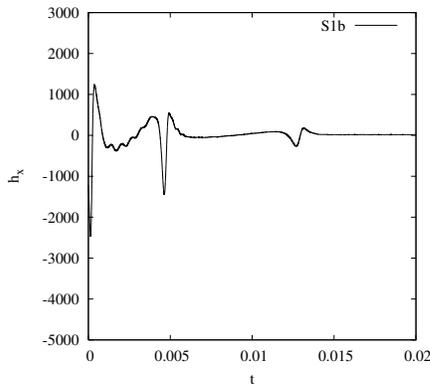
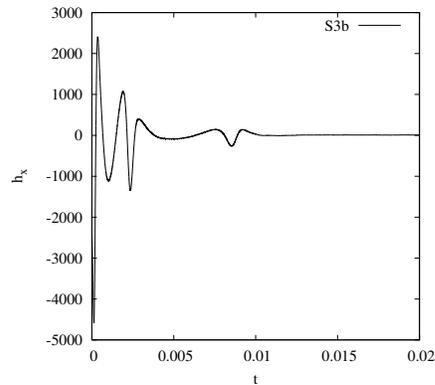
 Figura 6.9: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1b y S3b.

 (a) Polarización h_x para sistema S1b.

 (b) Polarización h_x para sistema S3b.

 Figura 6.10: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_x de los sistemas S1b y S3b.

Finalmente ilustramos la luminosidad para los sistemas S1b y S3b en la figura 6.11. Veamos que la curva de luminosidad para el sistema S1b presenta más ruido que la curva de luminosidad del sistema S3b. La luminosidad máxima alcanzada por S1b fue de $L =$

3.99×10^{56} erg s^{-1} , y la energía radiada mediante ondas gravitacionales fue de 1.6×10^{53} erg, mientras que la luminosidad máxima de S3b fue de $L = 1.2 \times 10^{57}$ erg s^{-1} y la energía radiada por ondas gravitacionales fue de 5.2×10^{53} erg.

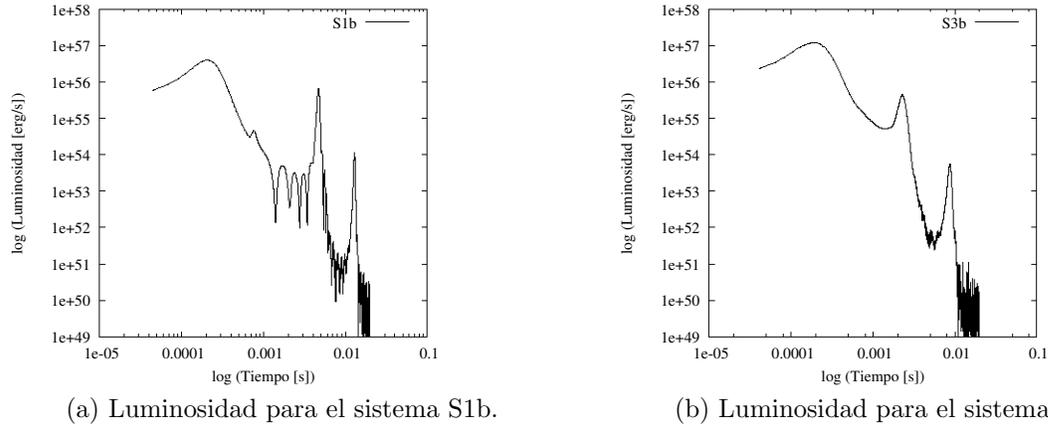


Figura 6.11: Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1b y S3b.

Los últimos sistemas que comparamos son S1c y S2c. La gráfica de separación entre el centro de masas del núcleo de la estrella de neutrones y el agujero negro como función del tiempo se muestra en la figura 6.12. Observamos que la estrella de S3c presenta una destrucción bastante rápida, pasa solo dos veces cerca del agujero y se destruye. El sistema S1c alcanza a pasar 4 veces cerca del agujero antes de romperse por completo formándose más mareas.

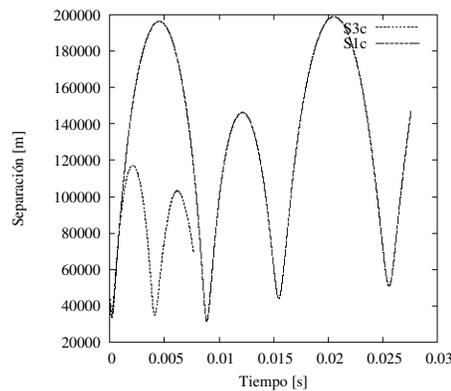


Figura 6.12: Separación vs. Tiempo para los sistemas S1c y S3c. Veamos que el núcleo de la estrella de neutrones de $2M_{\odot}$ se destruyó más rápido que para el núcleo de la estrella de $1.4M_{\odot}$. En el caso S1c pasa cuatro veces por el periastro, mientras que en el caso S3c solo pasa dos veces; así mismo el apoastro alcanzado por S1c es mucho más grande que el de S3c.

La radiación gravitacional emitida se muestra en las figuras 6.13 y 6.14. Como era de esperarse, para el sistema S1c la emisión es de mayor duración, aunque la amplitud de las ondas es menor que para el sistema S3c. Para este caso, como se forman más mareas, se aprecian mucho mejor los modos radiales de vibración por acción de la primera pasada de la estrella de neutrones.

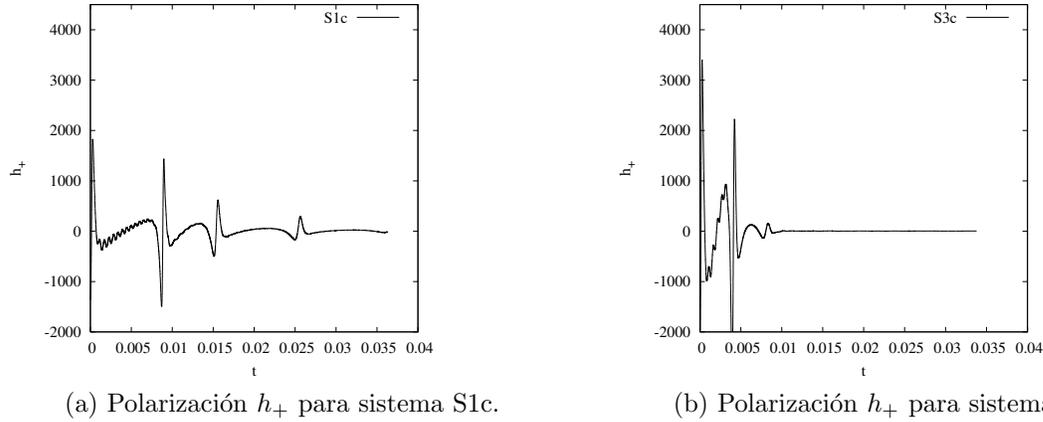


Figura 6.13: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1c y S3c. Como era de esperarse, el tiempo de emisión de radiación gravitacional del sistema S1c es mucho mayor que el sistema S3c. También se puede observar que hacia el final de la simulación el núcleo de la estrella aún sobrevivía. Los máximos en las amplitudes indican cada ocasión que la estrella alcanza la distancia mínima al agujero negro.

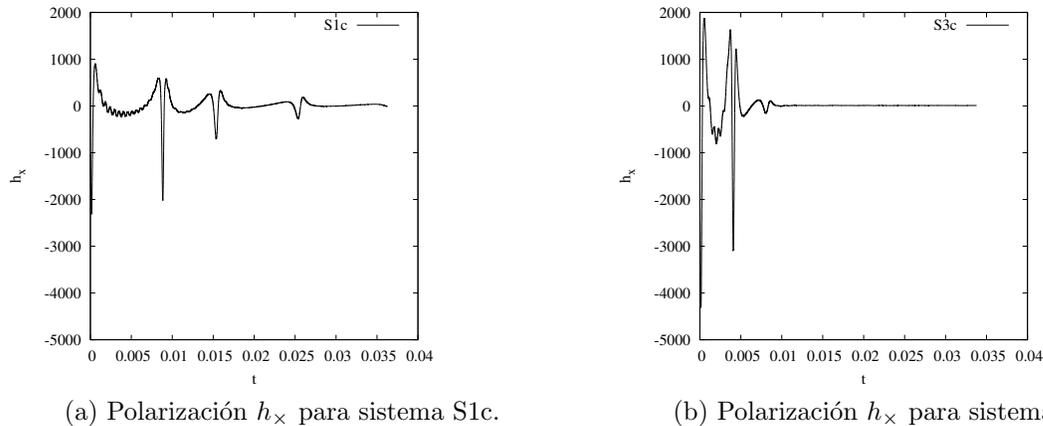


Figura 6.14: Emisión de radiación gravitacional con polarización h_x de los sistemas S1c y S3c.

Mostramos en la figura 6.15 la luminosidad para los sistemas S1c y S3c. Aquí también se observa que la señal se vuelve ruidosa entre más pasadas da la estrella por el periastro. Las luminosidades máximas para los sistemas son $L = 1.6 \times 10^{56} \text{ erg s}^{-1}$ para S1c y 6.6×10^{56}

erg s⁻¹ para S3c. Y la energía emitida en forma de radiación gravitacional es 1.5×10^{53} erg y 5.5×10^{53} erg, respectivamente.

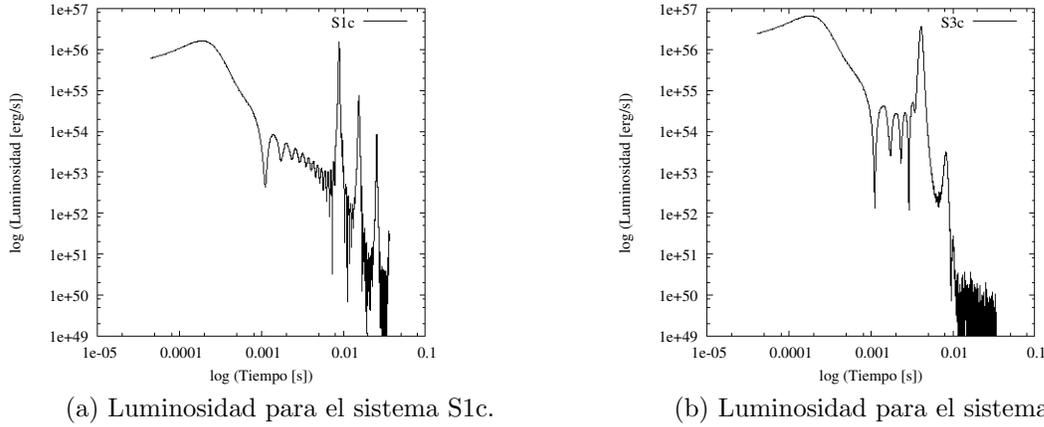


Figura 6.15: Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1c y S3c. Vemos que para el sistema S3c el pico de luminosidad fue más alto que para S1c.

6.4. Caso $q = 0.9$

La siguiente serie de simulaciones realizadas, fueron hechas para un agujero negro poco masivo; $q = 0.9$. En la simulación con poca resolución, donde η es bastante grande, la estrella no se destruye. La simulación con un parámetro $\eta = 1$ muestra que la estrella se destruye rápidamente; mientras que para $\eta = 1.5$, la estrella forma más mareas pero logra destruirse para un tiempo de $t = 0.019$ s. La figura 6.16 muestra el número de ocasiones que la estrella pasó por el periastro antes de su destrucción total.

En las figuras 6.17, 6.19 y 6.21 se muestran las ondas gravitacionales calculadas para dos polarizaciones en la aproximación cuadrupolar. Aunque los sistemas tratados en la serie S2 no son realistas, es muy interesante ver cómo para estos casos se aprecian mejor las ondas emitidas. Para S2a y S2b podemos observar muy bien los modos radiales de vibración, de los cuales obtenemos un valor ~ 1894 Hz y recordemos que la frecuencia natural de oscilación de la estrella es $\nu_{osc} \simeq 1755$ Hz. Por lo que, en efecto se aproximan bastante los valores como lo dice Lee y colaboradores [15].

En el caso de el sistema S2c, es muy interesante ver cómo al final de la simulación la estrella no se ha destruido, el sistema sigue emitiendo gran cantidad de energía gravitacional. Los seis máximos en la amplitud de las ondas emitidas corresponden a las 6 ocasiones en que

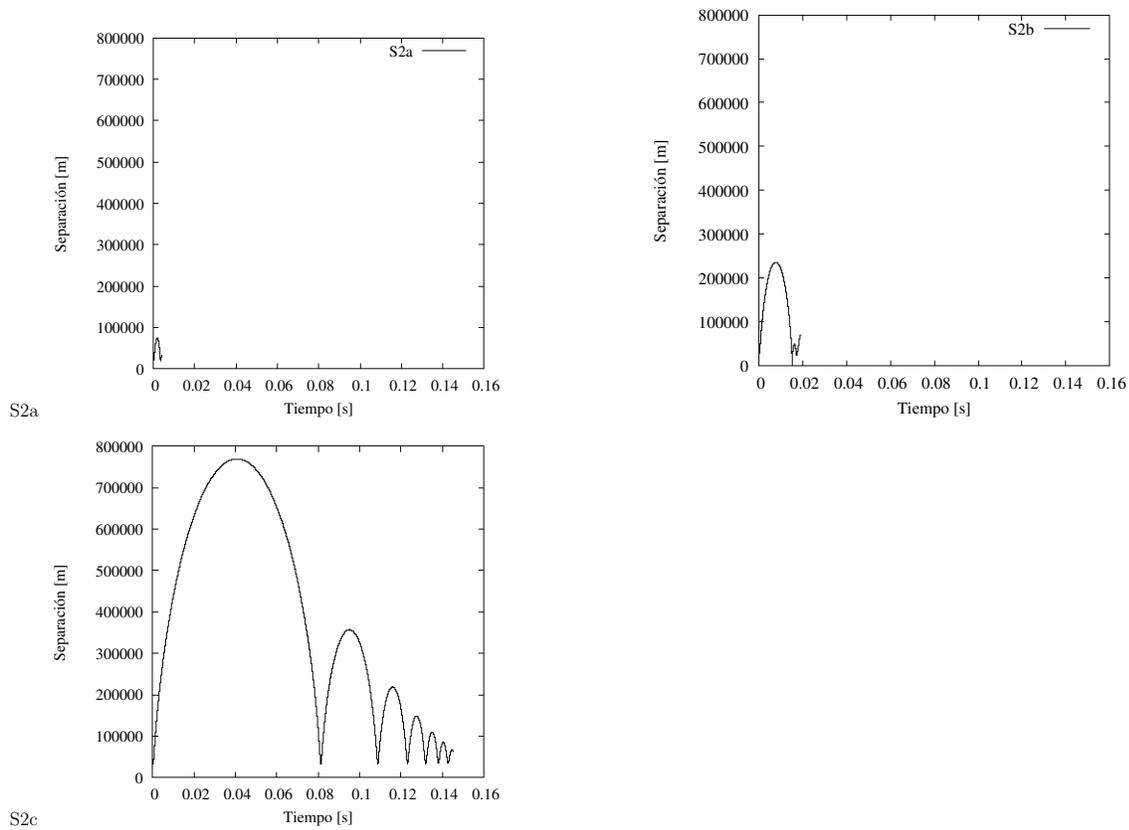


Figura 6.16: Separación vs. Tiempo de los sistemas S2a, S2b y S2c. En la simulación S2c se observa que la estrella ha pasado seis veces por el periastro y aún no se ha destruido, pese a que la resolución es muy pequeña. En el caso de S2a, apenas se alcanza a distinguir que la estrella pasó en dos ocasiones por el periastro, en S2b pasó 3 veces.

la estrella debido a la pérdida de momento angular por radiación gravitacional pasó cerca del agujero negro.

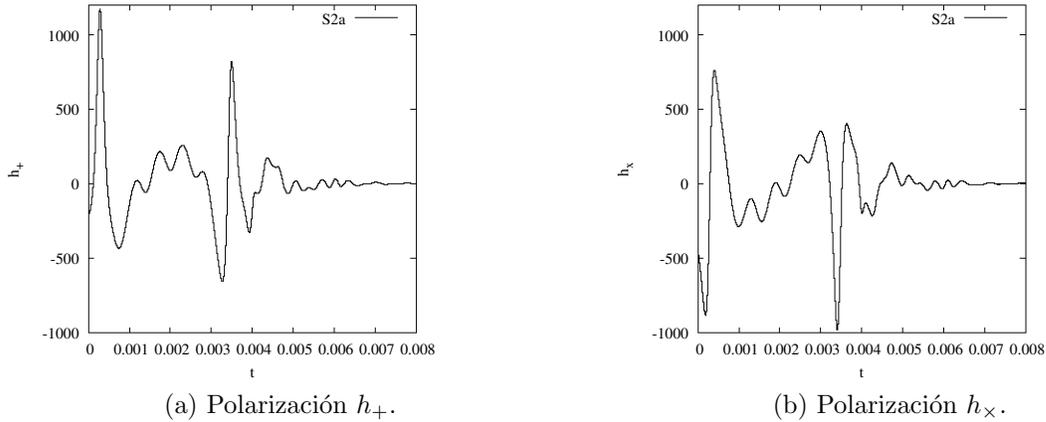


Figura 6.17: Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2a.

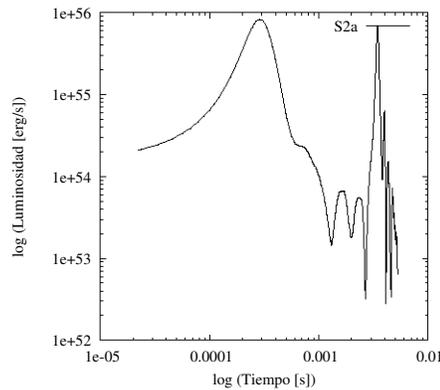


Figura 6.18: Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2a.

En la tabla 6.2 se muestran los picos de las luminosidades de la serie S2, al igual que la energía total emitida en ondas gravitacionales y la eficiencia de la emisión. Hay que observar que la gráfica para la luminosidad del sistema S2c muestra varios máximos locales de luminosidad y al final se observa bastante ruido.

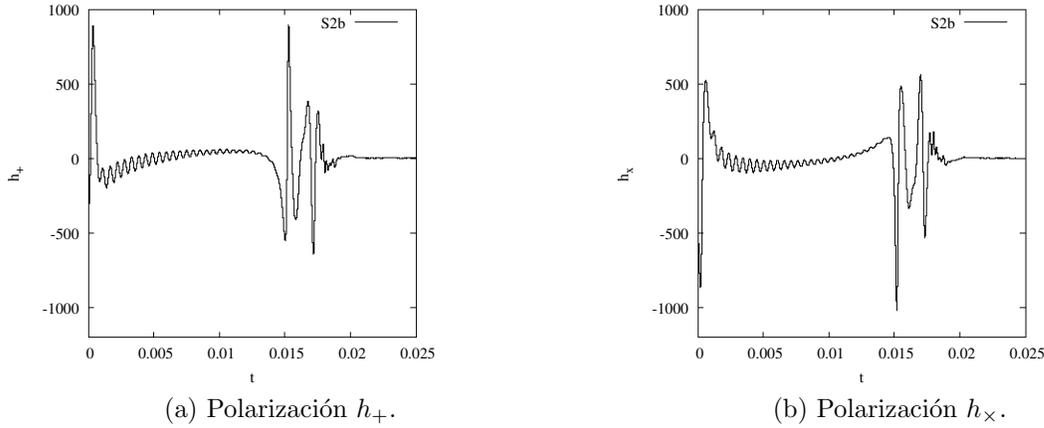


Figura 6.19: Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2b.

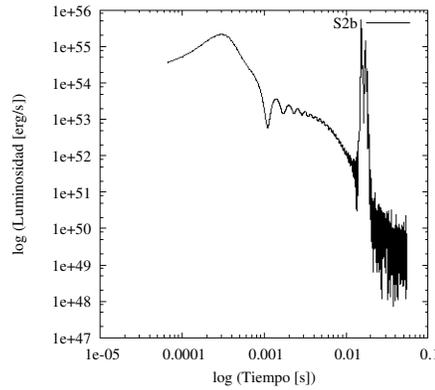


Figura 6.20: Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2b.

6.5. Parámetros finales

En la tabla¹ 6.3 se muestran los parámetros con los que terminaron las nueve simulaciones realizadas. Recordemos que en el programa implementado para las simulaciones, se pedía conservación de masa. M_1 corresponde en esta tabla a la masa con la que termina el agujero al final de cada simulación, M_2 es la masa del gas proveniente de la estrella destruida que aún se observa en la simulación. Parte de este gas fue eyectado debido a la colisión, otra parte fue atraído hacia por el agujero negro, otra parte formó un disco de acreción alrededor del agujero y otro se encuentra formando las colas de marea.

¹En todas las simulaciones M_2 se refiere a la masa del gas producto de la destrucción de la estrella de neutrones; sin embargo para el caso S2c, el gas no se encuentra distribuido por el espacio; aún se encuentra en una simetría casi esférica que es una estrella de neutrones de menor masa.

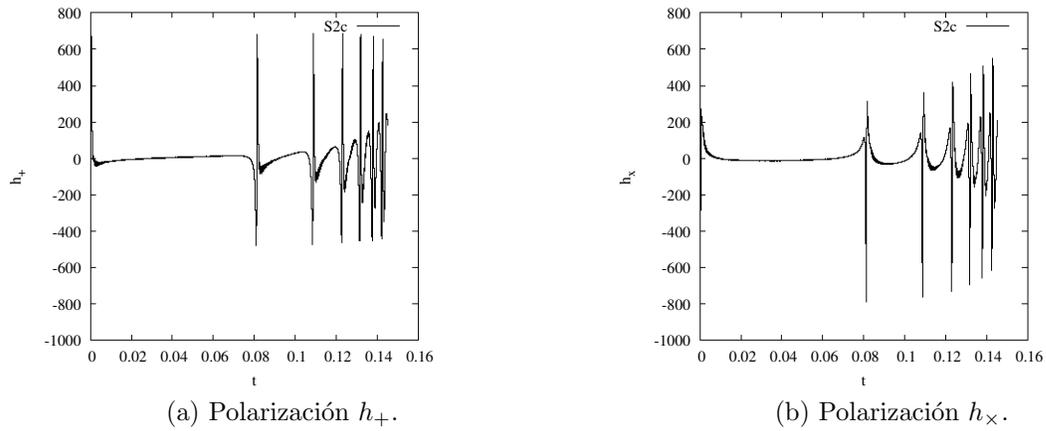


Figura 6.21: Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2c.

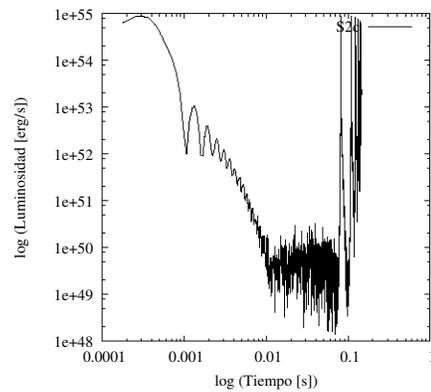


Figura 6.22: Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2c.

Tabla 6.2: Luminosidad, energía radiada y eficiencia para la serie S2.

S2	L [erg s ⁻¹]	Energía emitida [erg]	Eficiencia [$\frac{E}{Mc^2}$]
a	8.3×10^{55}	4.4×10^{52}	0.008
b	2.2×10^{55}	3.3×10^{52}	0.006
c	8.9×10^{54}	3.2×10^{52}	0.006

El cálculo del material eyectado durante la simulación se hace de una manera sencilla: se considera materia eyectada a aquellas partículas que tienen energías positivas, esto es, ya no están ligadas y por ello tienen la libertad de alejarse grandes distancias; en este caso alejarse del agujero negro. Para calcular la masa del disco buscamos la cantidad de partículas que tienen suficiente momento angular para permanecer en órbita alrededor del agujero negro.

Es importante mencionar los valores de la masa eyectada y de la masa del disco durante los encuentros debido a dos razones:

1. Se cree que la materia eyectada contribuye al material observado de proceso-r en la galaxia [10, 11, 13, 23]. De esta manera puede explicarse la abundancia de elementos con muchos neutrones y pesados. La eyección depende de la ecuación de estado que se utilice. Como en nuestras simulaciones utilizamos una ecuación realista el valor obtenido para la masa eyectada, si al menos no es correcto, puede considerarse como una aproximación o una cota al valor verdadero.
2. Cuando la estrella de neutrones se destruye debido al campo de marea generado por el agujero negro, observamos que la amplitud de las ondas gravitacionales cae a cero, esto se debe a la estructura simétrica y azimutal que se ha formado alrededor del agujero negro. La importancia de este disco tiene que ver con lo mencionado en la sección 4.1, pues en los discos de acreción se pueden observar brotes de rayos gamma (GRB's).

Observemos que para encuentros entre estrellas de neutrones menos masivas que los agujeros negros la masa eyectada es mucho mayor cuando la colisión se da con un parámetro de impacto grande; mientras que para parámetros de impacto pequeños, casi no hay material eyectado. Esto se debe a que en colisiones casi frontales, el hecho de que a la primera pasada la estrella se destruya implica que la materia es *absorbida* por el agujero negro. En el caso del agujero negro menos realista y poco masivo, es muy poco el material eyectado; mientras que el material acretado es mayor.

Tabla 6.3: Parámetros finales de las simulaciones.

Simulación	$M_1[M_\odot]$	$M_2(gas)[M_\odot]$	$M_{eyectada}[M_\odot]$	$M_{disco}[M_\odot]$
S1a	5.67	0.25	0.04	0.18
S1b	5.56	0.35	0.16	0.12
S1c	5.49	0.43	0.18	0.18
S2a	2.56	0.4	0.06	0.28
S2b	2.63	0.33	0.06	0.25
S2c	1.59	1.36	0.01	0.45
S3a	8.41	0.05	0	0.01
S3b	8.17	0.28	0.1	0.15
S3c	8.11	0.34	0.12	0.18

Conclusiones

Realizamos la simulación para nueve sistemas en donde interaccionan una estrella de neutrones y un agujero negro. La órbita inicial del encuentro era parabólica y la separación era de 3.7 veces el radio de la estrella de neutrones. La estrella de neutrones se construyó con una ecuación de estado realista en equilibrio hidrostático.

Dos de los sistemas tienen un cociente de masas $q = 0.31$, sin embargo, para uno de ellos la estrella es más masiva. En este caso encontramos que la destrucción de la estrella más masiva se da un poco más rápido debido a la escala de tiempo hidrodinámica.

Las otras simulaciones se llevaron a cabo utilizando un cociente de masa tal que, la masa de la estrella es comparable a la del agujero y aunque estos sistemas son muy poco probables, se encontraron resultados muy interesantes.

El parámetro de impacto con el que se da el encuentro, guía bastante la evolución del sistema. Para parámetros de encuentro muy pequeños, se da una destrucción rápida de la estrella. Mientras que para parámetros de impacto más grandes se forman mareas que hacen que la estrella pase varias veces por el periastro antes de su rompimiento. Sin embargo, cuando el parámetro de impacto es muy grande y el cociente de masas es grande la estrella no presenta destrucción al menos para tiempos cortos. En este caso, construimos la estrella con muy poca resolución, y aún así después de algunos milisegundos, el astro permanecía como una estructura cuasi esférica, aunque había pasado seis veces cerca del periastro.

La masa final eyectada depende tanto del parámetro de impacto utilizado, como de la ecuación de estado que describe la estrella de neutrones. Entre mayor es la formación de colas de mareas, mayor es la masa eyectada que puede contribuir a la nucleosíntesis por proceso-r en las abundancias de elementos pesados en el universo.

Por otro lado también se hace un cálculo de la cantidad de masa que forma la estructura de acreción. Si se conoce la tasa de acreción, se puede conocer de qué manera se emite la energía liberada durante este proceso. Vemos que para cocientes de masa cercanos a uno, el disco de acreción generado es más masivo que para cocientes pequeños.

En cuanto a la radiación gravitacional emitida, entre más pasos de la estrella por el periastro, esto es, para parámetros de impacto más grandes, mayor es el tiempo de emisión de ondas gravitacionales. Así mismo cada máximo en la amplitud de la onda gravitacional corresponde al paso por el punto más cercano de la estrella respecto al agujero. También observamos que para estrellas de neutrones masivas, con la ecuación de estado que utilizamos, la duración de la emisión gravitacional es más pequeña que para estrellas más masivas. Sin embargo la amplitud de la onda es mayor para estos sistemas. En las simulaciones donde la estrella pasa varias veces por el periastro, podemos observar que la frecuencia de perturbación provocada por el acercamiento es muy parecida a la frecuencia natural de la estrella. Las luminosidades obtenidas para la emisión gravitacional tienen su máximo en el momento en que se da el encuentro por primera vez.

Lo anterior da una idea de lo que se espera detectar mediante los instrumentos LIGO o VIRGO. Las simulaciones en este caso son importantes porque dan una idea de lo que se pretende detectar y para qué frecuencias se podría dar.

Finalmente queremos mencionar que a partir de los resultados obtenidos en estas simulaciones, se está realizando un estudio en colaboración con la Universidad de California, en el cual se pretende estudiar lo que sucede con el material eyectado. Como se describió, para parámetros de impacto grandes es donde se da más material con suficiente energía para dejar el sistema. Lo que se hace, es procesar los resultados para el material eyectado con un código basado en física nuclear que incluye transporte radiativo. El objetivo del trabajo es investigar cómo se podría observar el decaimiento nuclear debido a la nucleosíntesis en forma de energía electromagnética en el espectro óptico y el cercano infrarrojo.

Si este tipo de eventos se dan en regiones estelares densas como los cúmulos globulares de acuerdo con los resultados de las simulaciones la observación de ellos permitiría detectar ondas gravitacionales, así como SGRB's, y emisión electromagnética debido a decaimiento nuclear. Por otro lado, de estas observaciones se podrían comparar los resultados teóricos para dar una mejor descripción de la estructura de estrellas de neutrones.

Apéndice A

Ecuación Politrópica para Gas Degenerado de Electrones

En el gas de electrones consideramos el caso en el que $T = 0$, todos los electrones se encuentran en los estados más bajos de energía posibles. El estado en el cual no violan el Principio de Exclusión de Pauli es aquel en el que todas las celdas del espacio fase hasta el momento de Fermi p_F se encuentran ocupadas por dos electrones. Todas las celdas por arriba de éste valor se encuentran vacías. Entonces el número de electrones $f(p)$ en $[p, p + dp]$ está dado de la forma:

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{8\pi p^2}{h^3} & p \leq p_F \\ f(p) &= 0 & p > p_F \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

El número total de electrones en el volumen dV es:

$$n_e dV = dV \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 dV. \quad (\text{A.2})$$

Conociendo la densidad de electrones n_e podemos conocer el momento de Fermi p_F , ya que $p_F \sim n_e^{1/3}$. Si los electrones son no relativistas $E_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \sim n_e^{2/3}$ es la energía de Fermi. Si la densidad de electrones es suficientemente grande, p_F puede ser tan alto que las velocidades de los electrones pueden ser comparables con c entonces hay que utilizar relatividad especial:

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.3})$$

$$E_{tot} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Con m_e la masa en reposo del electrón, E_{tot} la energía total y E la energía cinética.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_{tot}}{\partial p} = \frac{p/m_e c}{[1 + p^2/(m_e^2 c^2)]^{1/2}} = \frac{v}{c}, \quad (\text{A.5})$$

$$E = E_{tot} - m_e c^2. \quad (\text{A.6})$$

Para obtener una ecuación de estado del gas de electrones necesitamos conocer la presión, flujo de momento, a través de una superficie por segundo. Para ello determinamos el número de e^- por segundo que atraviesan una superficie $d\sigma$ en un pequeño ángulo sólido $d\Omega_s$ alrededor de la dirección s . Nos restringimos a los electrones con momento entre p y $p + dp$. En el elemento de superficie hay $\frac{f(p)dpd\Omega_s}{4\pi}$ electrones por unidad de volumen y con momento positivo. Hay

$$\frac{f(p)dpd\Omega_s v(p) \cos(\theta) d\sigma}{4\pi}$$

electrones por segundo moviéndose a través del elemento de superficie dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega_s$. Para obtener el flujo total de momento en dirección \mathbf{n} integramos en todas las direcciones de \bar{s} de un hemisferio sobre los valores absolutos de p ,

$$P_e = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{f(p)v(p)p \cos^2(\theta) dp d\Omega_s}{4\pi} = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 v(p) dp. \quad (\text{A.7})$$

Hay que usar que A.1 y la integral de $\cos^2(\theta)$ sobre un hemisferio es $\frac{4\pi}{3}$. Entonces, veamos que P_e es isotrópica, pues $f(p)$ es simétricamente esférica en el espacio de momentos. Por lo que:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{p/(m_e c)}{[1 + p^2/(m_e^2 c^2)]^{1/2}} dp \\ &= \frac{8\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{(1 + \xi^2)^{1/2}} ; \quad \xi = \frac{p}{m_e c} ; \quad x = \frac{p_F}{m_e c}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La integral tiene como solución:

$$\int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{(1 + \xi^2)^{1/2}} = \frac{1}{8} [x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \operatorname{senh}^{-1} x], \quad (\text{A.9})$$

entonces, la ecuación para la presión queda como:

$$P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x), \quad (\text{A.10})$$

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \operatorname{senh}^{-1} x \equiv x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}].$$

Reescribimos A.2 como:

$$n_e = \frac{\rho}{\mu m_u} = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3 \quad ; \quad p_F = m_e^3 c^3, \quad (\text{A.11})$$

donde μ es el peso molecular medio por ion y m_u es una unidad de masa atómica. La energía interna U_e del gas degenerado de electrones por volumen es:

$$\begin{aligned} U_e &= \int_0^{p_F} f(p) E(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} E(p) p^2 dp \\ &= \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} g(x) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$g(x) = 8x^3[(x^2 + 1)^{1/2} - 1] - f(x)$$

Veamos que:

$$x = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{v_F/c}{(1 - \frac{v_F^2}{c^2})^{1/2}} \quad ; \quad \frac{v_F^2}{c^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad (\text{A.13})$$

donde v_F es la velocidad de los electrones con $p = p_F$. En el caso $x \ll 1$, entonces $v_F/c \ll 1$ y los electrones tienen energía $v \ll c$. Si $x \gg 1$, entonces $v_F/c \sim 1$ y el caso es relativista.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen el siguiente comportamiento:

$$x \rightarrow 0 : f(x) \rightarrow \frac{8}{5} x^5 \quad ; \quad g(x) \rightarrow \frac{12}{5} x^5,$$

$$x \rightarrow \infty : f(x) \rightarrow 2x^4 \quad ; \quad g(x) \rightarrow 6x^4$$

A.1. Caso no relativista $x \ll 1$

En este caso al sustituir $f(x)$ para $x \rightarrow 0$ obtenemos:

$$P_e = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{15h^3} x^5, \quad (\text{A.14})$$

y con n_e tenemos la ecuación de estado de un gas de electrones completamente degenerado no relativista:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3} \\ &= \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \\ &= 1.0036 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} [\text{cgs}]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

La energía interna U_e de los electrones por unidad de volumen y la presión de electrones están relacionadas por:

$$P_e = \frac{2}{3} U_e. \quad (\text{A.16})$$

A.2. Caso relativista $x \gg 1$

Sustituyendo el valor de $f(x)$ y $g(x)$ para $x \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$P_e = \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3h^3} x^4, \quad (\text{A.17})$$

entonces

$$\begin{aligned} P_e &= \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} n_e^{4/3} \\ &= \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} \\ &= 1.2435 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} [\text{cgs}]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Finalmente la presión en términos de la energía es:

$$P_e = \frac{1}{3} U_e. \quad (\text{A.19})$$

Apéndice B

Solución analítica para la ecuación de Lane-Emden

Aquí presento la solución de la ecuación de Lane-Emden para los índices politrópicos $n = 0$ y $n = 1$.

B.1. $n = 0$

En la ecuación 2.21 sustituimos $n = 0$ entonces obtenemos:

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) = -z^2. \quad (\text{B.1})$$

Integramos:

$$\int \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) dz = - \int z^2 dz \quad (\text{B.2})$$

$$z^2 \frac{d\omega}{dz} = -\frac{z^3}{3} + c_1$$

$$\frac{d\omega}{dz} = -\frac{z}{3} + \frac{c_1}{z^2}. \quad (\text{B.3})$$

Ahora usamos las condiciones de frontera 2.22. Entonces:

$$\left(\frac{d\omega}{dz} \right)_{z=0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dz} = -\frac{z}{3} \quad (\text{B.4})$$

Luego:

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{3} + c_2 = -\frac{1}{6} z^2 + c_2 \quad (\text{B.5})$$

En $\omega(z=0) \Rightarrow c_2 = 1$. Cuando $\omega_{n=0} \rightarrow 0$ entonces: $\omega_{n=0} = 1 - \frac{1}{6}z^2$, por tanto tiene frontera en $z = \sqrt{6}$

B.2. $n = 1$

La ecuación nos queda como:

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) = -\omega z^2. \quad (\text{B.6})$$

Hacemos un cambio de variable, sea $x \equiv \omega(z)z \Rightarrow \omega = \frac{x}{z}$. Entonces:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{x}{z} \right) = \frac{zx' - x}{z^2}, \text{ donde } x' = \frac{dx}{dz}.$$

La ecuación de Lane-Emden queda al sustituir $\frac{d\omega}{dz}$:

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{x}{z} \right) \right] = \frac{d}{dz} \left[z^2 \left(\frac{zx' - x}{z^2} \right) \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} (zx' - x) = x' + zx'' - x' = zx'' = \text{de B.6 se puede escribir } zx'' = -\omega z^2$$

$$\Rightarrow zx'' = -\frac{x}{z} z^2 \Rightarrow x'' = -x.$$

Por tanto

$$x'' + x = 0. \quad (\text{B.8})$$

Ésta es la ecuación del oscilador armónico. Sus soluciones son:

$$x(z) = A \text{sen}(z) + B \text{cos}(z). \quad (\text{B.9})$$

En términos de $\omega = \frac{x}{z}$ tenemos:

$$\omega(z) = A \frac{\text{sen}(z)}{z} + B \frac{\text{cos}(z)}{z}. \quad (\text{B.10})$$

Usando las condiciones de frontera; para $z = 0, \omega = 1$, entonces

$$1 = A \frac{\text{sen}(z)}{z} + B \frac{\text{cos}(z)}{z}.$$

Utilizando Ley de L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{z} &\Rightarrow \frac{\frac{d\cos z}{dz}}{\frac{dz}{dz}} = -\operatorname{senz} = 0 \Rightarrow B = 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \mathcal{O}(z^6) \rightarrow 1 \Rightarrow A = 1, \\ &\Rightarrow \omega(z = 0) = \frac{\operatorname{senz}}{z}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Para la segunda condición $(\frac{d\omega}{dz})_{z=0}$ usamos L'Hospital:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\cos z(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z\operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \cos z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{2} = 0.$$

Por lo que esta configuración tiene frontera en $z = \pi$ cuando $\omega_{n=1} \rightarrow 0$.

B.3. Otras soluciones

En la tabla B.1 se muestran los valores numéricos para los modelos politrópicos con índice n .

Tabla B.1: Valores numéricos para modelos politrópicos. Tomados de [8].

n	z_n	$(-z^2 \frac{d\omega}{dz})_{z=z_n}$	$\frac{\rho_c}{\rho}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
1	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2	4.35287	2.41105	11.40254
3	6.89685	2.01824	54.1825
4	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.8365	1.73780	6189.47
5	∞	1.73205	∞

Apéndice C

Simetrización para método SPH

Para mostrar la ecuación 5.10 para la partícula a , hacemos uso de la ecuación de momento 5.2, donde:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho}, \quad (\text{C.1})$$

si no hay fuerzas externas. A continuación, utilizamos la simetrización 5.9, entonces:

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} 2\sqrt{P_a} \nabla \sqrt{P}, \quad (\text{C.2})$$

ahora de la ecuación 5.7, podemos escribir el gradiente de \sqrt{P} :

$$\nabla \sqrt{P} = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \sqrt{P_b} \nabla W. \quad (\text{C.3})$$

Sustituyendo en la ecuación C.2, tenemos:

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{\nabla P}{\rho} = -\sum_b m_b \left(\frac{2\sqrt{P_a P_b}}{\rho_a \rho_b} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (\text{C.4})$$

Índice de figuras

1.1. Formación de objetos compactos. (http://essayweb.net/astromony/images/Stellar_Evolution_large.jpg)	12
1.2. Ciclo CNO	15
1.3. Potencial Efectivo para masa orbitando un agujero negro de Schwarzschild	28
1.4. Parámetro de impacto	30
1.5. Diagrama de Kruskal-Szekeres	32
2.1. Soluciones para la ecuación de Lane-Emden.	39
3.1. Estrella individual aproximandose a una estrella del campo estelar.	45
3.2. Órbitas posibles para un potencial Kepleriano. Tomadas de [20]	52
3.3. Ejemplificación de la estrella primaria y secundaria.	55
4.1. Efecto de ambas polarizaciones de las ondas gravitacionales en un anillo de partículas	62
5.1. Representación de un árbol binario	74
6.1. Sistema original	80
6.2. Evolución del sistema S1	82
6.3. Evolución del sistema S3a	83
6.4. Separación vs. Tiempo para los sistemas S1a y S3a	84
6.5. Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1a y S3a.	85
6.6. Emisión de radiación gravitacional de los sistemas S1a y S3a.	85
6.7. Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1a y S3a.	86
6.8. Separación vs. Tiempo para los sistemas S1b y S3b	86

6.9. Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1b y S3b.	87
6.10. Emisión de radiación gravitacional de los sistemas S1b y S3b.	87
6.11. Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1a y S3a.	88
6.12. Separación vs. Tiempo para los sistemas S1c y S3c	88
6.13. Emisión de radiación gravitacional con polarización h_+ de los sistemas S1c y S3c.	89
6.14. Emisión de radiación gravitacional de los sistemas S1c y S3c.	89
6.15. Luminosidad en ondas gravitacionales de los sistemas S1c y S3c.	90
6.16. Separación vs. Tiempo de los sistemas S2a, S2b y S2c	91
6.17. Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2a.	92
6.18. Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2a	92
6.19. Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2b.	93
6.20. Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2b	93
6.21. Emisión de radiación gravitacional debido a la colisión del sistema S2c.	94
6.22. Luminosidad de la radiación gravitacional para el sistema S2c	94

Bibliografía

- [1] ALCUBIERRE, M. Los agujeros negros: Lo que pasaría si viajaras a uno de estos objetos, los más extraños del cosmos. *¿Cómo ves?*, 44 (2002), 10.
- [2] BENZ, W., BOWERS, R. L., CAMERON, A. G. W., AND H., P. W. Dynamic mass exchange in doubly degenerate binaries. I. 0.9 and 1.2 M_{\odot} stars. *The Astrophysical Journal* 348 (January 1990), 647–667.
- [3] BINNEY, J., AND TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*, 3 ed. New Jersey, 1994.
- [4] BURBIDGE, M. E., BURBIDGE, G., FOWLER, W. A., AND F., H. Synthesis of the elements in stars. *Reviews of Modern Physics* 29, 4 (October 1957), 547–654.
- [5] FRANK, J., KING, A., AND RAINE, D. *Accretion Power in Astrophysics*, vol. 21 of *Cambridge Astrophysics Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [6] FREIBURGHHAUS, C., ROSSWOG, S., AND THIELEMANN, F.-K. r-Process in neutron star mergers. *The Astrophysical Journal* 525 (November 1999), L121–L124.
- [7] HAENSEL, P., POTEKHIN, A., AND YAKOVLEV, D. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*, vol. 326 of *Astrophysics and Space Science Library*. Springer, New York, 2007.
- [8] KIPPENHAHN, R., AND WEIGERT, A. *Stellar Structure and Evolution*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, 1989.
- [9] LEE, W. H. PhD thesis, University of Wisconsin, 1998.
- [10] LEE, W. H. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars. III. Irrotational binaries with a stiff equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 318 (June 2000), 606–624.

- [11] LEE, W. H. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars. IV. Irrotational binaries with a soft equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 328 (August 2001), 583–600.
- [12] LEE, W. H., AND KLÚZNIAK, W. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars. I. Tidally locked binaries with a stiff equation of state. *The Astrophysical Journal* 526 (November 1999), 178–199.
- [13] LEE, W. H., AND KLÚZNIAK, W. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars. II. Tidally locked binaries with a soft equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 308 (April 1999), 780–794.
- [14] LEE, W. H., AND RAMIREZ-RUIZ, E. The progenitors of short gamma-ray bursts. *New Journal of Physics* 9, 17 (2007).
- [15] LEE, W. H., RAMIREZ-RUIZ, E., AND VAN DE VEN, G. Short gamma-ray bursts from dynamically assembled compact binaries in globular clusters: pathways, rates, hydrodynamics, and cosmological setting. *The Astrophysical Journal* 720 (September 2010), 953–975.
- [16] LIPUNOV, V. M. *Astrophysics of Neutron Stars*. Springer-Verlag, 1992.
- [17] MENDOZA, S. Astrofísica relativista <http://www.mendoza.org/sergio/gravitacion/>, 2006.
- [18] MISNER, C. W., S., T. K., AND ARCHIBALD, W. J. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [19] MONAGHAN, J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 30 (1992), 543–574.
- [20] MORIN, D. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [21] RASIO, F. A., AND SHAPIRO, S. L. Hydrodynamical evolution of coalescing binary neutron stars. *The Astrophysical Journal* 401 (December 1992), 226–245.
- [22] RASIO, F. A., AND SHAPIRO, S. L. Hydrodynamics of binary coalescence. I. Polytropes with stiff equations of state. *The Astrophysical Journal* 432 (January 1994), 242–261.

- [23] ROBERTS, L. F., KASEN, D., LEE, W. H., AND RAMIREZ-RUIZ, E. Electromagnetic transients powered by nuclear decay in the tidal tails of coalescing compact binaries. *The Astrophysical Journal Letters* 736, L21 (July 2011), 5pp.
- [24] RODRÍGUEZ-MEZA, M., SUÁREZ-CANSINO, J., AND MATOS, T., Eds. *Métodos Numéricos en Astrofísica*. Innovación Editorial Lagares de México, S.A. de C.V, México, 2011.
- [25] ROSSWOG, S. Astrophysical smooth particle hydrodynamics. *New Astronomy Reviews* 53 (2009), 78–104.
- [26] SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*, 16 ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [27] SHAPIRO, S. L., AND TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. John Wiley and Sons, 1983.
- [28] SHIBATA, M., TANIGUCHI, K., AND URYU, K. Merger of binary neutron stars with realistic equations of state in full general relativity. *Physical Review D* 71, 8 (Abril 2005), 084021–1 a 084021–26.
- [29] URL. http://www.armandocaussade.com/astromy/open_and_globular.html#open. 18–04–2012.
- [30] URL. <http://www.astroscu.unam.mx/~wlee/OC/SSAAE/AE/Objetos%20Compactos/Estrellas%20baja%20masa.html>. 5–02–2012.
- [31] WOOSLEY, S., A., H., AND T.A., W. The evolution and explosion of massive stars. *Reviews of Modern Physics* 74 (October 2002), 1015–1071.