UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

EL FUNDAMENTO INDUCTIVO DE LA ARITMÉTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

P R E S E N T A :

MAURICIO TORRES VILLA

UNAM POSGRADO Filosofía de la Ciencia

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS ÁLVAREZ JIMÉNEZ

MÉXICO, D.F. 2012

A mi familia, por todo su amor y apoyo, desde los rezos de mi abuela hasta las risas de mi sobrina

A mi linda gatita, por compartir conmigo sus vidas

Agradecimientos:

A mi director de tesis, el Dr. Carlos Álvarez Jiménez, por su invaluable guía a lo largo del desarrollo de este trabajo.

A los miembros de mi comité tutorial, el Dr. Axel Barceló Aspeitia y el Dr. Max Fernández de Castro, por sus críticas y observaciones puntuales planteadas en las evaluaciones semestrales.

A mis sinodales, la Dra. Yolanda Torres Falcón y el Dr. Abel Lassalle Casanave, por su docta revisión de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por la beca otorgada de enero de 2009 a enero de 2012 para la realización de mis estudios de doctorado.

Índice

Introducción

El trabajo cuyo despliegue ahora comienza, es una investigación histórica sobre la inducción matemática. En particular, es un estudio centrado en su uso para la conformación de la aritmética dentro de algunas obras de distintos, pero no menos notables, matemáticos. Ahora indicaremos algunas de las motivaciones que impulsaron su creación, pues ellas servirán para anunciar sus límites pero sobre todo, quizás logren incentivar a su inspección para que ella prosiga hasta su final.

En primer lugar, creemos que los diversos razonamientos utilizados en las matemáticas son esenciales para comprender su desarrollo. Es decir, los métodos de descubrimiento o justificación o solución empleados a lo largo de su historia, de acuerdo a nuestra opinión, son cruciales para abordar distintas preguntas sobre las matemáticas, tales como ¿qué son? ó ¿de qué clase es su conocimiento? Por ejemplo, en determinado momento sus métodos de justificación se distinguieron por su alto grado de respaldo a sus conclusiones, nivel que incluso ha servido para elevarlos sobre el resto bajo el apelativo "deductivo". En consecuencia, estos métodos "deductivos" podrían servir para identificar a las matemáticas de otras disciplinas o para caracterizar a su conocimiento, entre otras interrogantes gracias a ellos según nosotros tratables.

Ahora bien, la inducción matemática es un método de justificación paradigmático pero ventajosamente no muy complicado, por lo que su estudio de acuerdo a nuestra creencia manifestada, podría arrojar luz sobre el desarrollo de las matemáticas. En palabras de Poincaré, uno de nuestros autores estudiados:

> La formulación del principio [de inducción matemática] es la siguiente: "Si una propiedad es verdadera para el número 1, y si establecemos que es verdadera para n+1 si lo es para n, entonces será verdadera para todos los números enteros. Aquí yo veo al razonamiento matemático por excelencia. Lo cual no quiere decir,..., que todos los razonamientos matemáticos puedan ser reducidos a la aplicación de este principio. Si examinamos estos razonamientos atentamente, entonces reconoceremos la aplicación de otros varios principios análogos que presentan las mismas características esenciales. Dentro de esta categoría de principios, la inducción [matemática]... es el más simple de todos... (Poincaré, 1905b vía 2005: 1025)

Por lo tanto, nuestro interés inicial por la inducción matemática surge de la favorable unión entre su supuesta importancia con su relativa simpleza, pues esta combinación ayudaría a comprender mejor algunos aspectos de las matemáticas. En particular, nosotros estudiaremos la utilización de este método de justificación en la edificación de algunas teorías aritméticas. Además, expondremos cómo esta regla de justificación participa activamente en la concepción misma de los números naturales dentro de estas teorías. Sin embargo, nuestro estudio se emprendió no solo por nuestro interés en la historia sino por su prometedora asistencia en diversas interrogantes filosóficas sobre la aritmética y optimistamente, acerca de las matemáticas. Por ejemplo, nuestra investigación histórica podría ayudar a la epistemología en su apartado concerniente al conocimiento aritmético y quizás a la filosofía del lenguaje e incluso a la ontología, en la cuestión sobre lo que son y significan, o lo que han sido y han significado, los números naturales.

Con respecto a las inquietudes filosóficas con presunción de ser asistidas por nuestra investigación histórica, nosotros sólo atenderemos explícitamente a un par de ellas, ambas circunscritas a la epistemología. Conforme avance nuestra investigación mostraremos algunas evidencias para tratar el problema del conocimiento y de la explicación en las matemáticas. Sin embargo a lo largo de nuestro trabajo, esperamos se hallen también pistas para clarificar otros misterios, como el de la concepción de los objetos matemáticos. Más adelante veremos algunas maneras planteadas por distintos autores para definir o construir o caracterizar a los números, por lo que de sus semejanzas, permanencias y discrepancias, quizás podamos aprender algo sobre la génesis (teórica) de los objetos matemáticos.

No obstante desde aquí recalcamos el carácter histórico de la información recabada, pues su naturaleza pudiera ser desestimada como insuficiente para responder algunas interrogantes acerca de las matemáticas, sobre todo si se asume que estas dudas rebasan los límites del espacio-tiempo. Por respeto a estas posiciones críticas, toda respuesta sugerida hemos de considerarla como acotada, v.gr. dentro de las teorías matemáticas inspeccionadas. En conciso, aquí hemos de adoptar una postura historicista aunque moderada: creemos que la historia sirve para buscar respuestas o para encontrar preguntas más precisas, sin embargo ella no basta para formular y menos para solucionar, cualquier interrogante.

En segundo lugar, creemos que los fines perseguidos por los autores de las matemáticas, son vitales para comprender a sus creaciones. Así entonces, nuestro interés por los métodos de justificación sólo es el reflejo de un objetivo buscado con frenesí por los matemáticos, el demostrar cosas. En particular, trataremos de exhibir las intenciones de nuestros autores detrás de sus obras, pues las primeras según nuestra opinión son fundamentales para entender la conformación de las segundas. Ventajosamente, la mayoría de los matemáticos estudiados no son temporalmente tan lejanos y además dejaron plasmadas por escrito algunas de sus motivaciones. Es suma, nos declaramos desde aquí pragmatistas poco moderados: los fines aunque no lo sean todo, los estimamos preponderantes para la clarificación de cualquier obra.

En tercer lugar, creemos en la pluralidad de las axiomatizaciones. A lo largo de la historia de las matemáticas han aparecido diversas obras que han sido, son o pudieran considerarse como axiomatizaciones, cuya variedad de acuerdo a nosotros no debe ser ignorada. Si bien en todas ellas de alguna manera u otra se formulan ciertas clases de principios, usados de alguna manera u otra para generar cierto desarrollo teórico, las diferencias en la ejecución de este plan, son inocultables. Por lo tanto, ellas al menos deben ser reconocidas. Es más, en concordancia con nuestra creencia manifestada en el párrafo anterior, algunas de estas discrepancias incluso pudieran ser explicadas con base en los distintos fines perseguidos por sus creadores.

Entre las metas con mayor frecuencia identificadas en las axiomatizaciones, quizás la más mentada es aquella de la fundamentación epistémica. Los primeros principios se han estimado con regularidad como los depositarios últimos de nuestro conocimiento matemático; ellos se han contemplado en reiteradas ocasiones como los fundamentos de sus teorías. Sin embargo este objetivo no es el único y quizás tampoco sea el buscado abiertamente por algunos de los autores de las axiomatizaciones. Más adelante expondremos otros fines, como el de la depuración lingüística, que han sido perseguidos por los creadores de estas construcciones teóricas. Mientras que la más famosa de las axiomatizaciones, la de la geometría dada por Euclides, tiene ciertas peculiaridades, v.gr. la formulación de primeros principios cuya lectura literal los privaría de un valor de verdad (los postulados), que complicarían la identificación de su meta como una fundamentación epistémica.

Ahora bien, nuestro interés por las axiomatizaciones y por los fundamentos, surge de nuestro objetivo de averiguar el papel desempeñado por la inducción matemática en algunas construcciones teóricas relativas a la aritmética, edificaciones cuyo plano pudiera ser considerado axiomático. Aunque los principios, medios y fines varíen en todas ellas, la formulación de alguna regla de inducción matemática es un rasgo afín. También lo es su empleo preponderante para su desarrollo, dentro del cual podemos hallar a la noción misma de los números (naturales). En suma, nuestra conjetura inicial es la de señalar a la inducción matemática como fundamento de la aritmética.

A lo largo de nuestra investigación depuraremos histórica y filosóficamente esta conjetura. Ofreceremos evidencia histórica para respaldar cierta concepción de fundamento, la cual a su vez se tratará de redondear con la ayuda de algunas ideas provenientes de la filosofía. No obstante desde aquí enfatizamos, en consonancia con nuestras creencias manifestadas, lo siguiente:

(1) Nuestra noción de fundamento estará impulsada por nuestra predilección por los razonamientos en las matemáticas. La elección de la inducción matemática como fundamento de la aritmética no fue fortuita.

(2) Nuestra noción de fundamento estará apoyada pero también acotada históricamente. En consecuencia, postulamos a la inducción matemática como un fundamento dentro de las teorías en cuestión, no como fundamento último de la aritmética.

(3) Nuestra noción de fundamento no se impondrá sobre los autores de las teorías estudiadas. En algunos de ellos sí reconoceremos en retrospectiva, metas afines a nuestra concepción de fundamento, pero tampoco afirmaremos que en todos ellos sus creaciones la obedecían.

Con respecto a la metodología, debido a nuestros particulares propósitos las fuentes principales de nuestra investigación serán sólo algunas obras de los autores estudiados. Es decir, desarrollaremos una historia interna aunque limitada: ni nos dedicaremos a develar todo factor involucrado en la creación de las obras estudiadas (v.gr. las causas sociales casi serán en su totalidad omitidas), ni tampoco haremos un extenso recorrido en toda la producción matemática o filosófica de nuestros autores revisados. Sobra decir que la presencia de la inducción matemática fue un criterio preponderante para la selección de obras, al igual que su tema aritmético. Si bien trataremos de aprovechar los valiosos trabajos hechos por algunos de los estudiosos de nuestros autores, su uso tampoco será tan intensivo por lo anunciado con antelación: la motivación primaria de nuestra investigación es la de recabar evidencia que respalde una noción de fundamento, a través de la cual postularemos a la inducción matemática como tal para algunas teorías aritméticas. Al no enfocarnos en algún personaje o en alguna escuela o en algún período de las matemáticas, las consultas de y sobre nuestros autores citados serán sucintas.

En resumen, nuestra investigación histórica auspiciará una noción de fundamento, la cual esperamos sea útil para abordar el tema del conocimiento y de la explicación en las matemáticas. En particular, nos concentraremos en presentar esta concepción para la inducción matemática dentro de algunas teorías aritméticas. Mientras que nuestra meta esperamos alcanzarla paulatinamente en una serie de capítulos, cuyo contenido a continuación con brevedad presentamos:

Capítulo 1. En nuestro primer apartado introduciremos a la inducción matemática en algunas demostraciones hechas entre François Viéte y Alexander Anderson dentro del *Tratado sobre las Secciones Angulares.* En ellas se resaltarán algunos rasgos que anticipan a esta regla de justificación en su versión débil. Luego veremos tanto a la formulación como al seguimiento válido de esta regla en el notable, en varios aspectos, *Tratado del Triángulo Aritmético,* obra cuyo autor fue Blaise Pascal.

Capítulo 2. En nuestro segundo apartado inspeccionaremos fugazmente a los *Elementos,* para apreciar cómo Euclides teorizó a la aritmética. A partir del contraste que remarcaremos entre el desarrollo de la geometría (Libro I) y de la aritmética (Libro VII) euclidianas, propondremos una caracterización mínima de lo que es una axiomatización que nos servirá como marco de estudio para el resto de nuestra investigación. Por medio de este marco, reconoceremos al *Tratado del Triángulo Aritmético* como una axiomatización y a la regla de inducción matemática allí formulada, como uno de sus principios. Es más, revelaremos la simbiosis entre esta regla y los principios constructores de los triángulos aritméticos, simbiosis que deductivamente resultó muy provechosa e históricamente nos parecerá muy llamativa.

Capítulo 3. En nuestro tercer apartado revisaremos a los *Principios de la Aritmética* de Giuseppe Peano y al *Qué son...los números* de Richard Dedekind. Sin dejar de admitir las diferencias entre este par de proyectos, reconoceremos sus concordancias a través de las cuales podemos hablar con propiedad de los principios de la aritmética de Peano-Dedekind. En particular, veremos cómo la inducción matemática es un principio protagónico en ambas construcciones teóricas de la aritmética. Más aún, este análisis comparativo nos servirá para remarcar el carácter aritmético del *Tratado del Triángulo Aritmético* y de este modo sustentaremos a esta axiomatización de Pascal, como un precedente fundamental de los principios de Peano-Dedekind. En conciso, expondremos cómo también en estos últimos se encuentran provechosamente en simbiosis sus respectivas reglas de inducción matemática con los principios constructores o caracterizadores de la clase o sistema de los números naturales.

Capítulo 4. En nuestro cuarto apartado revisaremos algunas demostraciones hechas por Leonhard Euler para el Pequeño Teorema de Fermat. Expondremos su preferencia por sus últimas demostraciones, sobre las primeras que seguían una inducción matemática. Y en el entendimiento de esta predilección, introduciremos a nuestra noción de fundamento, concepción nodal de nuestra investigación. Para presentarla lo haremos con la ayuda de algunas ideas filosóficas planteadas por Bernard Bolzano, las cuales para nuestro beneficio exegético él las mostró aplicadas en su *Demostración Puramente Analítica.* Bajo la influencia de este autor, empezaremos hablando sobre las virtudes explicativas de un fundamento, las cuales articularemos mediante las cualidades de la naturalidad y la fecundidad sobre la producción deductiva que este posibilita. Mientras que esta introducción explicativa, nos servirá para iniciar nuestra identificación de la inducción matemática como fundamento de las teorías aritméticas estudiadas, gracias a la simbiosis constructivo-justificativa en ellas detectada. Con tal de impulsar esta interpretación, finalmente indicaremos por qué la inducción matemática no es tan buena opción deductiva para ciertas proposiciones que tratan sobre conjuntos bien ordenados aunque no tan bien construidos, como el de los números primos.

Capítulo 5. En nuestro quinto apartado revisaremos a la teoría de los "números" transfinitos de Georg Cantor, centrándonos mayoritariamente en su desarrollo presentado dentro de sus *Contribuciones.* Nuestro finalidad buscada en tal inspección, será la de carear a la inducción matemática contra el buen orden para averiguar cuál de estos dos principios, es un fundamento más acoplado a la aritmética al estilo Peano-Dedekind. Si nos preocupamos por realizar tal confrontación, es porque la equivalencia entre el Principio de la Inducción Matemática y el Principio del Buen Orden es un resultado de la teoría de conjuntos ya detectable en las *Contribuciones,* que podría diezmar la candidatura del primero para el dominio de la aritmética. Concisamente, en este apartado argumentaremos que el buen orden sí es un fundamento pero lo es de la teoría de los conjuntos (transfinitos), utilizando como evidencia de esta valoración, a la fundación de esta teoría realizada por Cantor.

Al final de nuestro trabajo, aprovechando la recolección de evidencia histórica efectuada en los cinco capítulos previos, expondremos con mayor cautela filosófica, a nuestra concepción de fundamento. La perspectiva que adoptaremos para hacerlo, tal como ya lo habíamos mencionado, será epistemológica y nos enfocaremos en tratar al problema sobre el conocimiento de un fundamento. En particular, retomaremos una vieja discusión suscitada entre Poincaré y algunos defensores de la lógica, como Zermelo, sobre la fuente del conocimiento de la validez de la inducción matemática. Para el primero el origen de tal conocimiento es la intuición, mientras que algunos de los segundos, parecen ubicarlo en la lógica o en la teoría de conjuntos. Nosotros sintetizaremos tal confrontación para promover un parámetro conservativo que sirva para determinar al conocimiento de un fundamento. De este modo, propondremos que conocemos la validez de la inducción matemática gracias a que esta regla conserva a la mayoría de nuestro conocimiento aritmético previo.

Terminada nuestra introducción, esperamos haber delimitado y promovido adecuadamente a nuestra investigación, cuyo despliegue en la serie de capítulos descritos, ahora por fin empieza.

Capítulo 1: Prefiguración y consolidación de la inducción matemática

1.0 Introducción

Sin un antecedente prescrito, sin un procedente proscrito. Al seguir una regla cuando de ella se ignora su expresión, se siguen flexiblemente los contornos de la indeterminación. Para afirmar o negar que se actúa de acuerdo a una regla, se requiere de su formulación ya que de lo contrario, la arbitrariedad sería lo único incuestionable de nuestra aseveración. En conciso, parece ser una condición necesaria para decir justificadamente que se sigue una regla, poder decir qué es lo que se está siguiendo. Si además es suficiente, eso es otra (filosófica) cuestión[1].

Sin un antecedente adscrito, sin un procedente por escrito. La instauración de una regla en su expresión, suele estar precedida por una serie de acciones o resultados cuya repetición se ha amoldado en una regularidad propicia para su representación. Las reglas no suelen enunciarse por generación espontánea. En conciso, ya que usualmente es un proceso contingente la formación de una regla, determinar el contenido de su expresión puede ser un trabajo para la historia. Es decir, el reconocimiento histórico de la conformación de una regla, también puede ser útil para desembrollar qué es lo que se está siguiendo cuando se pretende afirmar con justificación el seguimiento de una regla.

En este capítulo se mostrará a la primera expresión hasta el momento conocida de la inducción matemática, así como también se exhibirán algunas demostraciones más antiguas cuyos rasgos prefiguran a esta regla deductiva. Las dos fuentes de nuestra

[1] El seguimiento de una regla fue instaurado como un problema filosófico, sobretodo para la filosofía del lenguaje, por Wittgenstein mientras que su planteamiento primigenio, puede ser revisado en alguna de sus obras como las *Investigaciones*. Ahora bien, si acotamos este problema cuando ya se posee una expresión de una regla y se desea decidir si algunas acciones, resultados,... la están o no siguiendo, entonces el ofuscamiento surge de que dependiendo cómo se interprete esa formulación, la regla puede estar en conformidad con una multiplicidad de acciones, resultados,... Cabe mencionar que desde ciertas perspectivas nomológicas, esta indeterminación no debe parecer tan sorprendente. Por ejemplo, algunas normas jurídicas o algunas reglas deportivas requieren del criterio no estandarizado de sus evaluadores para determinar su satisfacción o incumplimiento. No obstante, el problema aquí señalado es más global pues no nace de la redacción vaga o ambigua de una regla (como podría ser el caso de algunas normas jurídicas o deportivas), sino de la interpretación misma de los constructos de cualquier lenguaje. En conciso, tanto para construir las fórmulas bien formadas de cualquier lenguaje como para interpretarlas, se siguen ciertas reglas. Y el problema recursivo aludido, nace de la (in)determinación de estas reglas.

exposición procederán (directa o indirectamente) de un par matemáticos con la misma nacionalidad, la francesa. Por motivos cronológicos, primero será exhibida la solución planteada por Viète al problema geométrico de la división de un ángulo. En dicha respuesta de naturaleza analítico-geométrica, vislumbraremos algunos pasos típicos de la inducción matemática, como aquel dado para justificar un siguiente caso apoyándose en el anterior. Luego enseñaremos a la primigenia expresión de una inducción matemática creada por Blaise Pascal y también mostraremos cómo siguen esta regla algunas de las demostraciones por él hechas.

Así entonces, en el capítulo inicial de esta tesis introduciremos a la inducción matemática a través de algunas demostraciones de Viète y de Pascal. De las primeras remarcaremos sus rasgos que vaticinan a la primera expresión de esta regla. De las segundas veremos no sólo cómo ellas siguen a la regla de inducción formulada por Pascal, sino también expondremos cómo ellas participan en la instauración misma de ese método de demostración. Para lograr esto último, recurriremos a la historia para identificar en las demostraciones de Pascal revisadas, un modo de razonamiento presente también en las de Viète que nos remonta más atrás hasta Euclides, el de la generalización universal. Además, al exponer cómo procede *válidamente* este modo de razonamiento, exhibiremos cómo garantizan su seguimiento las demostraciones de Pascal hechas conforme a su regla recién acuñada de inducción matemática.

1.1 Viète à la Anderson: La ilusión mediante arcos y cuerdas hacia la inducción

Una breve relato acerca de la vida del(os) autor(es) y de la de su(s) obra(s) discutida(s) suele ofrecerse como bienvenida a los textos “históricos” y a pesar de que puede ser un inicio trillado, por cortesía al lector tal saludo aquí nunca va a ser omitido. Si bien la historia de las matemáticas no se reduce a la historia de los matemáticos, su existencia constituye una trivial condición de posibilidad para los vestigios que se desean estudiar. Más aun, la descripción del contexto (económico, cultural,…) puede socorrer a la reflexión buscada (ya sea matemática, filosófica, …) en el pasado de esta disciplina. Por lo que si el entorno o el objetivo lo ameritasen, convendría ser más meticuloso en los detalles, aunque debido a la metas de la presente investigación, aquí no lo seremos y sólo seguiremos parcamente una sana costumbre de intelectual convivencia.

François Viète (1540-1603) fue un matemático francés típicamente vanagloriado en los relatos de la historia de las matemáticas al identificarlo como uno de los mayores promotores en el occidente del álgebra. Entre las obras que dejaron su huella en el esta área podemos mencionar *In Artem Anlayticem Isagoge* (1591) y *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* (1631). Entre sus aportaciones a esta disciplina, quizás la más aplaudida sea su uso de letras del alfabeto para representar magnitudes, legándonos así una notación para las expresiones algebraicas como "$A+B$", "B^3/A" y "$A^3+BA^2 = Z^pA$". Mientras que la contribución que aquí será expuesta trata sobre el análisis de problemas geométricos mediante términos algebraicos.

Sorprendentemente, la obra elegida para andar tras los pasos de la inducción matemática ni siquiera fue escrita directamente por Viète. Fue un colega de él, Alexander Anderson (1582-1620), quien se encargó de elaborarla después de su muerte repentina. El trabajo que será reseñado es el *Tratado sobre las Secciones Angulares* (*Ad Angularium Sectionum Analyticen Theoremata)* publicado póstumamente en 1615. Dicho tratado versa someramente sobre razones entre cuerdas en relación a razones entre ángulos (arcos). En particular, esta obra enseña a dividir un ángulo en un número entero de partes iguales por medio del viejo método analítico revitalizado por Viète, i.e. suponiendo resuelta la cuestión e identificando *algebraicamente* las condiciones de su solución.

Dado que Viète dejó testimonio de su tratamiento analítico para el problema de la división angular en otras de sus obras[2], su autoría sobre los teoremas en *Ad Angularium Sectionum* no será puesta en discusión. Sin embargo, ya que Anderson se declara en ese tratado como el autor de las demostraciones allí contenidas y debido al objetivo de la

[2] Conocida es la anécdota del reto lanzado en 1593 por Adriaan van Roomen (Adrianus Romanus) acerca de una ecuación de grado 45. Dicha ecuación fue resuelta por Viète a través de la interpretación de la ecuación como la división de un ángulo en 45 partes y su solución fue publicada en 1595 bajo el nombre de *Ad Problema quod Omnibus Mathematicis Totius Orbis Construendum Proposuit Adrianus Romanus Responsum.* Por otro lado, desde su *Variorum de Rebus Mathematicis Responsurum libri Septem*, obra publicada en 1592, Viète trata de manera analítica el problema de la división del ángulo e incluso allí podemos encontrar enunciadas algunas de las proposiciones luego reproducidas en *Ad Angularium Sectionum*.

presente investigación de hacer un seguimiento histórico de la inducción matemática, tal confesión de paternidad deductiva no será ignorada por el nombre de Viète. Es decir, aunque el impacto del *Ad Angularium* en el desarrollo de las matemáticas se deba a Viète y a su modo analítico (algebraico) de atacar viejos problemas geométricos, como aquel que protagoniza a esta obra, aquí será reconocida la mano de Anderson en la elaboración de sus demostraciones. Por lo tanto, para evitar ahondar en un infructuoso pleito sobre la paternidad del tratado, salomónicamente se otorgara su coautoría a Viète y a Anderson[3].

En total son diez los teoremas encontrados en *Ad Angularium Sectionum.* De ellos escogeremos algunos en cuya demostración sea discernible retrospectivamente algún parecido con la inducción matemática. Dado que se expondrá la primera formulación de esa regla después de este apartado, la confirmación de esas semejanzas quedará en esta sección pendiente y por el momento dependerá de la confianza o del conocimiento previo de nuestro lector. Además, si nos resistimos a enunciar desde ahora a esa regla de demostración para que ya no quede en vilo el parentesco, es para evitar el vicio de la reivindicación histórica denunciado por Acerbi:

> Más aún, una revisión cuidadosa de la literatura muestra que cada estudioso propone su propia interpretación del principio de Inducción Completa y con base en su propuesta es capaz de afirmar o negar que algunas demostraciones específicas constituyen ejemplos bien formados de él[4]. (Acerbi,2000:58)

---

[3] Alvarez (2007) incluso sostiene que Viète pudo haber redactado una versión preliminar de las *Secciones Angulares*: "Viète avait déjà fait connaître la clé de la solution du problème de la section des angles dans VR,[*Variorum de Rebus*] et il est vraisembleble qu'à cette époque il avait déjà au moins une version préliminaire du texte AS [*Angularium Sectionum*]" (Alvarez, 2007:19-20). Si bien desde un punto de vista netamente histórico discernir el origen exacto del texto se presenta como una atractiva tarea, aquí no será atendida porque la atribución de coautoría no afecta en nada a nuestra investigación.

[4] Llamativamente esta queja apunta hacia el problema ya mencionado en la primera nota de pie de página sobre el seguimiento de una regla, pues aunque haya una formulación relativamente estándar de la inducción matemática (débil), "cada estudioso" de ella "propone su propia interpretación" según su conveniencia exegética. Entre los ejemplos mencionados por Acerbi tenemos a Rashed (1972-3) quien halla a la inducción en al-Karaji(1029 d.C), a Vacca (1909) quien la sitúa en Franciscus Maurolycus(1494-1575) o a Rabinovitch (1970) quien la ubica en Levi Ben Gershon (1288-1344). También podemos agregar a la lista a Yadegari (1978) quien propuso a Abū Kāmil Shujā (¿850-930?) como un seguidor de la inducción y a Fowler(1990) quien en el extremo de la interpretación defiende que "los Griegos usaron principios equivalentes a la inducción matemática y que ellos pudieron habar usado inducción matemática si la situación se hubiera presentado" (Fowler, 1990:264). Por otro lado Acerbi hace caso omiso de su denuncia y según su lectura de la regla de la inducción matemática (débil), sarcásticamente sugiere considerar "un pasaje platónico, *Parménides* 149a7-c3, como un ejemplo íntegro de una demostración por" inducción. (Acerbi, 2000:58).

En consonancia con la denuncia de Acerbi, enfatizamos que no forma parte de las metas de la presente sección localizar con novedosa precisión al origen de la inducción matemática. Consecuentemente, carecemos del interés de mostrar con meticulosidad cómo tal o cual demostración de Viète-Anderson sigue puntualmente a nuestra caracterización o la de Pascal, de tal método de demostración. Insistimos que nos conformaremos con detectar en ellas algunos pasos deductivos *parecidos* a los dados en las demostraciones hechas por inducción matemática. Y si nos interesa tal identificación, es para reafirmar lo dicho en la introducción acerca de que las reglas usualmente no se expresan por inspiración espontánea.

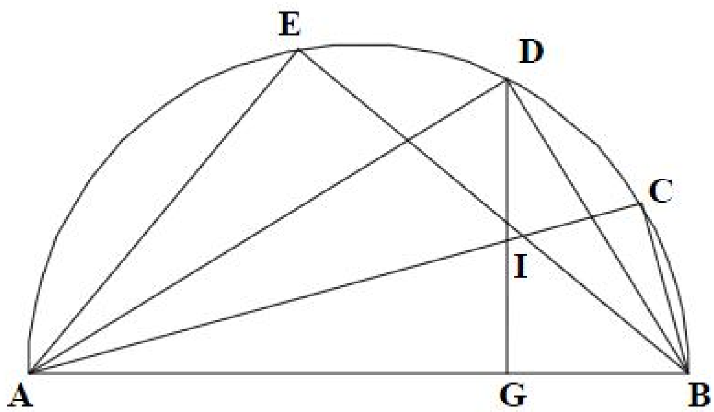
Los teoremas junto con sus demostraciones sobre los cuales se centrará nuestra atención, serán la dupla del segundo con el tercero y la pareja del cuarto con el séptimo. Esta selección en pares se debe a que el primer miembro de ellos faculta la demostración de su acompañante, mientras que en esta última es donde según nuestro entender, se pueden hallar vestigios de la inducción matemática. La primera de las proposiciones elegidas asevera lo siguiente:

Teorema II.

> Si tenemos tres triángulos rectángulos tal que el ángulo agudo del primero más el ángulo agudo del segundo es igual al ángulo agudo del tercero, los lados del tercero reciben las siguientes relaciones de semejanza:
>
> ...
>
> Su perpendicular, es semejante al rectángulo de la perpendicular del primero, por la base del segundo, más el rectángulo de la perpendicular del segundo por la base del primero.
>
> Su base, al rectángulo de la base del primero por la del segundo, menos el rectángulo de la perpendicular del primero por la del segundo. (Anderson-Viète, 1615: 10)

La demostración del Teorema II *particulariza* a la proposición y supone que los tres triángulos rectángulos están inscritos en una semicircunferencia cuyo diámetro corresponde a sus tres hipotenusas[5]. Así entonces, sea AEB el tercer triángulo, ADB el segundo, ACB el primero y sean representados mediante el siguiente diagrama:

[5] En el Scholium del Teorema I -p.9- Anderson enseña cómo recuperar la generalidad del Teorema II a pesar de la suposición hecha en su demostración sobre la igualdad de las tres hipotenusas, a saber, aprovechando



Diag. 1

Por lo que de acuerdo a la hipótesis del Teorema II, el ángulo BAC más el ángulo BAD es igual al ángulo BAE. De este modo, las semejanzas afirmadas por su consecuente se pueden indicar a través del siguiente par de igualdades entre razones[6]:

$$1)\ \frac{AB}{EB} = \frac{AB^2}{CBAD+DBAC}$$

$$2)\ \frac{AB}{AE} = \frac{AB^2}{ACAD-BCDB}$$

Ahora bien, tales igualdades son establecidas por Viète-Anderson por medio de relaciones de semejanza entre triángulos y mediante la composición de segmentos. A continuación expondremos nada más la obtención de la primera para mostrar su proceder deductivo respetuoso de la tradición deductiva de los *Elementos* de Euclides, la cual ya fue obedecida desde la particularización de lo afirmado por el Teorema II -razones (1) y (2)- para los triángulos ACB, ADB y AEB.

En primer lugar, trácese la altura DG del segundo triángulo rectángulo ADB tal como se muestra en Diag.1 (construcción auxiliar[7]). Luego el triángulo rectángulo ADG es

---

la relación de semejanza que tendrían respectivamente los triángulos de idénticas hipotenusas con los tres triángulos mencionados por la hipótesis del Teorema II.

[6] Nótese que en esta obra el "*homogenea homogeneis comparari*" exigido por el marco euclidiano del Libro V, todavía es respetado y por consiguiente, el consecuente del Teorema II se expresa mediante radios como se hace en (1) y (2): por un lado de la ecuación se tiene la razón entre lados, mientras que por el otro, entre planos. Para ratificar la deferencia de Viète hacia la homogeneidad, se puede revisar el capítulo 3 de su *In Artem Anlayticem Isagoge.*

[7] El empleo de construcciones auxiliares es tan común en las demostraciones en los *Elementos*, que incluso se ha reconocido como uno de sus rasgos característicos, v.gr. Proclo nombró *kataskeuē* a esta etapa constructiva preparadora de la demostración.

semejante al triángulo rectángulo ICB, donde I es la intersección de la perpendicular EB del tercer triángulo con la base AC del primero, porque el ángulo GDA es igual al ángulo CIB y tanto el ángulo AGD como el ángulo BCI son rectos. Por lo tanto:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{CB}{IB}$$

De donde se sigue que AGIB = ADCB ... (*)

En segundo lugar, el segundo triángulo rectángulo ADB es semejante al triángulo rectángulo AEI porque el ángulo EAI es igual a DAB y tanto el ángulo BDA como el ángulo IEA son rectos. Por lo tanto:

$$\frac{AB}{AI} = \frac{DB}{EI}$$

De donde se sigue que ABEI=AIDB, además como AB=AG+GB tenemos que

AGEI+GBEI=AIDB ... (**)

En tercer lugar, el triángulo rectángulo GDB es semejante a ICB por transitividad dado que el triángulo GDB es semejante al triángulo ADG mientras que ADG lo es de ICB como ya fue argumentado. Por lo tanto:

$$\frac{GB}{DB} = \frac{IC}{IB}$$

De donde se sigue que GBIB=ICDB ... (***)

Luego como AB=AG+GB y EB=EI+IB tenemos que

ABEB=(AG+GB)(EI+IB)=AGEI+GBEI+AGIB+GBIB

Pero por las ecuaciones (**), (*) y (***) tendríamos que:

AGEI+GBEI+AGIB+GBIB = AIDB+ADCB+ICDB

Por lo tanto, ABEB=AIDB+ADCB+ICDB=(AIDB+ICDB)+ADCB=DB(AI+IC)+ADCB=DBAC+ADCB

De la anterior cadena de igualdades se sigue que:

$$\frac{AB}{DBAC + ADCB} = \frac{1}{EB}$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros de la igualdad por AB deducimos a la igualdad entre razones deseada: 1) $\frac{AB}{EB} = \frac{AB^2}{ADCB+ACDB}$ Q.E.D.

Una vez evidenciados los medios deductivos clásicos de la demostración del Teorema II, procederemos a exponer a la llamativa justificación de la proposición que le sucede, la cual afirma lo siguiente:

Teorema III.

> Si tenemos dos triángulos rectángulos tal que el ángulo agudo del primero es un submúltiplo del ángulo agudo del segundo, los lados del segundo reciben la siguiente semejanza.
> ...
> La semejanza de los lados alrededor del ángulo recto de la hipotenusa congruente, es establecida a partir de la base y la perpendicular del primer triángulo…con sus potencias iguales [respecto a su grado] y con su producto simple homogéneo distribuido en dos partes sucesivas, por un lado primero positiva, luego negativa, y de éstas la primera será semejante a la base del segundo, la perpendicular del que queda.
> (Anderson-Viète,1615 :10)

Conforme se va desenvolviendo el resto de la enunciación del Teorema III y su posterior demostración, se va desenredado el trabalenguas previamente transcrito. En conciso, el teorema sostiene que las bases y las perpendiculares del triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a nα, pueden expresarse en función de los lados del triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a α. Y en resumen, su demostración indica cómo ir generando una secuencia de razones basadas en el Teorema II entre los lados de los triángulos rectángulos con un ángulo agudo kα y los lados del primer triángulo con ángulo α, hasta llegar a los lados del triángulo rectángulo con ángulo nα.

Para simplificar la exposición de lo demostración, denotemos mediante “z” a la hipotenusa congruente de todos los triángulos rectángulos (en Diag.1 “z” sería el diámetro de la semicircunferencia). Luego expresemos a través de “x” a la base del primer triángulo rectángulo (AC en Diag.1) y por medio de “y” a su perpendicular (BC en Diag.1). De este modo, el ángulo agudo del segundo triángulo rectángulo será 2α, el del tercero 3α y así sucesivamente hasta el ángulo nα del enésimo triángulo rectángulo (con la condición de que nα sea menor a un ángulo recto). Finalmente, represéntese mediante “B_i“ y “P_i“ a la base y a la perpendicular, respectivamente, del i-ésimo triángulo rectángulo.

Ahora bien, Anderson-Viète empieza estableciendo la semejanza para el triángulo cuyo ángulo agudo es igual al doble del ángulo agudo del triángulo rectángulo inicial, anunciándola como "la base [es semejante] a la diferencia [de los cuadrados de los lados alrededor del ángulo recto]; la perpendicular al doble del rectángulo [de esos lados]" (ibíd., p. 12). Mientras que su demostración se basa en el Teorema II. Sea cualquier triángulo rectángulo (ACB en Diag.1) con un ángulo agudo α ($\angle BAD=\alpha$ en Diag.1) y dupliquémoslo en un segundo triángulo rectángulo (el triángulo ADB es idéntico a ACB en Diag.1). Si ahora consideramos al triángulo rectángulo (AEB en Diag.1) con un ángulo agudo igual a 2α ($\angle BAE=\angle BAC+\angle BAD=2\alpha$ en Diag.1), cuya hipotenusa es congruente con z y llamamos a su base "B_2" mientras que a su perpendicular "P_2", entonces "de la demostración del teorema segundo" (íbid.,p.13) deduciríamos las razones vaticinadas:

$$\frac{z}{P_2}=\frac{AB}{EB}=\frac{AB^2}{ACCB+ACCB}=\frac{AB^2}{2ACCB}=\frac{z^2}{2xy} \quad \text{[por Teo.II.(1)]}$$

$$\frac{z}{B_2}=\frac{AB}{AE}=\frac{AB^2}{ADAC-DBBC}=\frac{z^2}{x^2-y^2} \quad \text{[por Teo.II.(2)]}$$

Y las razones previas conllevan que los lados del segundo triángulo rectángulo puedan ponerse en función de los lados del primero:

$$P_2=\frac{2xy}{z}$$

$$B_2=\frac{x^2-y^2}{z}$$

Después tanto la formulación como la demostración del Teorema III prosiguen para el triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a 3α e hipotensa igual a z. En resumen, si otra vez aplicamos el Teorema II (en el Diag.1 el tercer triángulo correspondería al triángulo AEB, el segundo a ADB y el primero a ACB) obtendríamos las siguientes razones:

$$\frac{z}{P_3}=\frac{AB}{EB}=\frac{AB^2}{ADCB+ACDB}=\frac{z^2}{B_2y+P_2x} \quad \text{[Por Teo.II.(1)]}$$

$$\frac{z}{B_3}=\frac{AB}{AE}=\frac{AB^2}{ADAC-DBBC}=\frac{z^2}{B_2x-P_2y} \quad \text{[Por Teo.II.(2)]}$$

Mientras que gracias al cómputo previo de P_2 y B_2 en función de los lados del primer triángulo rectángulo, podemos derivar a las siguientes razones:

$$\frac{z}{P_3} = \frac{z^3}{x^2y - y^3 + 2x^2y}$$

$$\frac{z}{B_3} = \frac{z^3}{x^3 - xy^2 - 2xy^2}$$

Por lo tanto, otra vez los lados del tercer triángulo rectángulo puedan ponerse en función de los lados del primero:

$$P_3 = \frac{3x^2y - y^3}{z^2}$$

$$B_3 = \frac{x^3 - 3xy^2}{z^2}$$

La demostración prosigue de la misma manera, haciendo uso del Teorema II y de las razones anteriormente halladas, hasta finalmente corroborar la última relación de semejanza allí especificada para el triángulo rectángulo con un ángulo agudo que es el quíntuple del ángulo agudo del triángulo rectángulo inicial. Mientras que la posibilidad de continuar aplicando este modo de cálculo, es aludida por Anderson-Viète para establecer la semejanza entre el enésimo y el primer triángulo rectángulo aseverada por el tercer teorema:

> Y conduciéndonos de esta manera a partir de las hipotenusas, de los lados alrededor del ángulo recto, de las razones de semejanza hasta el momento demostradas, así aparecerán hasta el infinito la de los lados de los triángulos múltiplos de los ángulos....
> Y si esto progresa hasta el infinito, hemos de dar el radio de los lados [de los triángulos] cuyos ángulos están en razón de un múltiplo, tal como fue prescrito, que es lo que había que demostrar (Anderson-Viète,1615 :13-14)

Para los fines de la presente exposición, hemos de remarcar que <u>el método enseñado en la demostración del Teorema III para alcanzar a la razón entre los lados del enésimo triángulo rectángulo y del primero, va aprovechando a sus aplicaciones anteriores para llegar a su deductiva meta. Pues si hemos calculado mediante el Teorema II a las razones entre los lados del triángulo rectángulo con ángulo agudo α y del triángulo rectángulo con ángulo $i\alpha$,</u>

entonces podemos hacerlo también con los lados del triángulo rectángulo con ángulo agudo igual a (i+1)α recurriendo otra vez a ese teorema. Basta con emplear de nuevo la configuración geométrica mostrada en la demostración del Teorema II (el Diag.1) y considerar al triángulo ACB como aquel cuyo ángulo agudo $\angle$BAC es igual a α, al ángulo $\angle$BAD del triángulo ADB igual a $i\alpha$ y finalmente al ángulo $\angle$ BAE del triángulo AEB igual a (i+1)α. De este modo, el Teorema II nos provee del siguiente par de reglas para el cómputo de las razones entre los lados de estos tres triángulos rectángulos:

$$\frac{z}{P_{i+1}} = \frac{z^2}{B_i\, y + P_i\, x} \quad \text{[por Teo.II.(1)]}$$

$$\frac{z}{B_{i+1}} = \frac{z^2}{B_i\, x - P_i\, y} \quad \text{[por Teo.II.(2)]}$$

Mientras que gracias a las aplicaciones previas del par anterior de reglas, los lados B_i, P_i del triángulo rectángulo con ángulo $i\alpha$ los podemos poner en función de los lados x,y,z del triángulo rectángulo con ángulo agudo α. Por lo que si realizamos las sustituciones correspondientes[8], entonces seremos capaces de expresar a las razones entre los lados del triángulo rectángulo con ángulo α y del triángulo rectángulo con ángulo (i+1)α, i.e. $\frac{z}{P_{i+1}}$ y $\frac{z}{B_{i+1}}$, en función de los lados x,y,z del primero de ellos. Y prosiguiendo de esta manera hasta que i+1 se igual al factor n de múltiplo deseado $n\alpha$,

---

[8]Cabe remarcar que el Teorema II nos permite expresar los lados del i-ésimo triángulo rectángulo, aquel con ángulo $i\alpha$, en función de los lados del triángulo que le antecede -(i-1)α- y del primero de ellos -α-:

$$B_i = \frac{B_{i-1}\, x \; - \; P_{i-1}\, y}{z}$$

$$P_i = \frac{B_{i-1}\, y \; + \; P_{i-1}\, x}{z}$$

Por lo que las sustituciones requeridas para asentar deductivamente al Teorema III, pueden plantearse formalmente en sentido inverso al expuesto por Viéte-Anderson. Es decir los B_{n-1}'s y P_{n-1}'s que vayan apareciendo en $\frac{z}{P_n} = \frac{z^2}{B_{n-1}\, y + P_{n-1}\, x}$ y $\frac{z}{B_n} = \frac{z^2}{B_{n-1}\, x - P_{n-1}\, y}$ pueden irse remplazando respectivamente por $\frac{B_{n-2}\, x - P_{n-2}\, y}{z}$ y $\frac{B_{n-2}\, y + P_{n-2}\, x}{z}$, para finalmente terminar esta recursión de sustituciones en la primera razón calculada en la demostración del Teorema III: $P_2 = \frac{2xy}{z}$ y $B_2 = \frac{x^2 - y^2}{z}$.

“hemos de dar el radio de los lados [de los triángulos] cuyos ángulos están en razón de un múltiplo, tal como fue prescrito, que es lo que había que demostrar”.

Recapitulando, la demostración del Teorema III es portadora de un par de rasgos deductivos que la emparentan, presumiblemente, con la inducción matemática. Uno es el establecimiento de la proposición para un primer caso: la demostración comienza indicando la razón entre los lados del triángulo rectángulo con el ángulo α y del triángulo rectángulo con el ángulo 2α. El otro, es el uso acumulativo de la razón entre los lados del triángulo con el ángulo α y del triángulo con un ángulo igual a $i\alpha$, para calcular la razón de los lados del primer triángulo con el triángulo rectángulo con el ángulo $(i+1)\alpha$. Por otro lado, en la demostración del Teorema III se hace evidente que el Teorema II subyace deductivamente a los dos rasgos identificados. Y tal como fue expuesto con antelación, su demostración junto con la del siguiente teorema al basarse sobre ella, proceden a la usanza euclidiana pues justifican sobre instancias (representadas en el Diag.1) el cumplimiento de su respectiva y “particularizada” proposición, dejando como labor al lector percatarse de su manifiesta generalización.

Por otro lado, este par de teoremas junto con sus demostraciones sirven para plantear de modo algebraico a la división de un ángulo en partes iguales, la cual es pedida en el Problema II de *Ad Angularium Sectionum*: “tal como un número es de otro número, hacer de un ángulo otro ángulo” (Anderson-Viète,1615 :42). Por ejemplo, estas herramientas deductivas pueden usarse para “cortar un ángulo dado en tres partes iguales” (Anderson-Viète,1615 :42). Si α es el ángulo (agudo) que se desea trisecar, entonces podemos apoyarnos sobre la configuración geométrica presentada en la demostración del Teorema II y ajustada en la del Teorema III, el Diag.1, para realizar dicho corte. Empecemos trazando al triángulo rectángulo AEB inscrito en una semicircunferencia con diámetro z tal que su ángulo $\angle$BAE sea igual al ángulo α dado. Supongamos resuelta la cuestión. Es decir, consideremos construido al triángulo rectángulo ACB cuyo ángulo $\angle$BAC es igual a $\alpha/3$ (consecuentemente, el ángulo $\angle$BAD del triángulo ADB sería igual a $2\alpha/3$). De este modo, el problema de la trisección de α equivaldría al cálculo de la magnitud de la base AC (designada previamente como “x”) o de la perpendicular CB (denotada como “y”) del triángulo ACB; pues al contar con cualquiera de esta par de valores, podemos trazar a este triángulo cuyo ángulo ∠BAC es la respuesta buscada. En particular, la perpendicular “y” puede extraerse de la siguiente ecuación proporcionada por el Teorema III:

$$P_3=(3x^2y-y^3)/z^2$$

Recordando nuestra notación, P_3 designa a la perpendicular EB del triángulo AEB de cuyo trazo partimos, por lo que es un valor conocido al igual que el de la hipotenusa z de los triángulos AEB, ACB (y ADB). Luego para deshacernos de la otra incógnita en la ecuación, la base x del triángulo ACB, podemos recurrir al teorema de Pitágoras: $x^2=z^2-y^2$. Finalmente si bautizamos como “r” al radio de la semicircunferencia (2r=z), entonces a la ecuación brindada por el Teorema III podemos realizarle las siguientes sustituciones y simplificaciones:

$$P_3(4r^2)=3(4r^2-y^2)y-y^3= 12r^2y-3y^3-y^3=12r^2y-4y^3$$

$$P_3r^2=3r^2y-y^3$$

Y esta última ecuación es la que nos ofrece Viète-Anderson como medio para obtener la trisección del ángulo, salvo algunas diferencias respecto a su notación[9]. En resumen, el problema geométrico de la división de un ángulo notablemente se traduce en *Ad Angularium Sectionum* al problema algebraico del cálculo de raíces de una ecuación. Suponiendo resuelta la cuestión geométrica (v.gr. en el Diag.1), en este tratado se *analizan* sus condiciones de solución para expresarlas algebraicamente (v.gr. mediante el Teorema III). Debido a que el “análisis” no es el tema de nuestra investigación, no ahondaremos más en esta atractiva cuestión y por consiguiente, no inspeccionaremos otros teoremas del tratado involucrados con el Problema II[10]. En su lugar para dar término a esta sección, expondremos que la demostración del Teorema III, en la cual identificamos un par de rasgos afines a la inducción matemática, no es una excentricidad aislada en la obra estudiada. Pues si podemos hablar en plural sobre las demostraciones en *Ad*

---

[9] Puesto el radio X, B la cuerda del ángulo por ser subdivido [$B=B_3=EB$], E la cuerda del segmento [E=y]. El cuadrado de X por tres E, menos el cubo de E, es igual al cuadrado de X por B.(Viète-Anderson,1615:42)

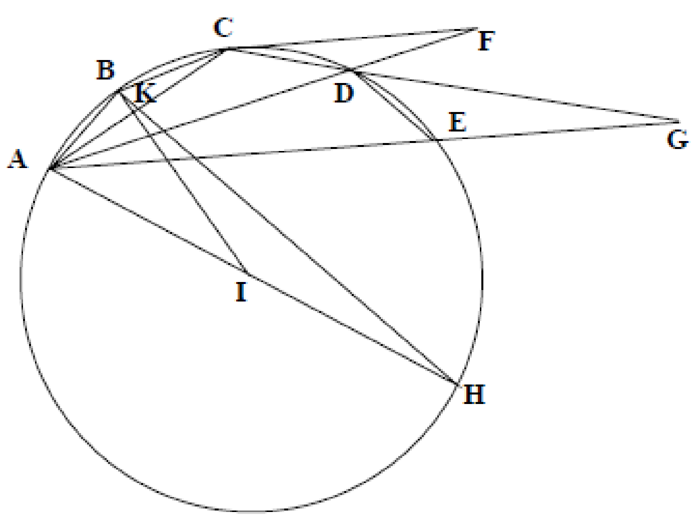
[10] Anderson- Viète cita en la solución de su Problema II, a los Teoremas III, V,VI, VIII y IX.

Angularium Sectionum con características de la inducción matemática, entonces también podemos hablar sobre la incipiente presencia en ese tratado de esa regla de inferencia.

Los teoremas IV y VII con antelación ya fueron mencionados como la otra pareja propicia para seguir los rastros de la inducción matemática en el tratado aquí revisado. El primero de ellos afirma lo siguiente:

> Teorema IIII.
> Si desde un punto en la periferia de un círculo, se toma cualquier número de segmentos iguales, y si desde el mismo punto se traza una línea recta a cada uno de los segmentos, entonces así como el más pequeño es al más cercano, así el resto lo es uno tras otro, el más pequeño a la suma de los dos más cercanos en cada lado. (Anderson-Viète,1615: 16).

Manifestando otra vez su respeto por el paradigma euclidiano, Viète-Anderson utiliza instancias para especificar y demostrar al Teorema IV. Sean A un punto en una circunferencia; AB, BC, CD, DE cuatro segmentos iguales (cuerdas) en ella y AB,AC,AD,AE las rectas trazadas desde A hasta los extremos de los segmentos iguales, tal como se muestra en el siguiente diagrama:



Diag.2

De este particular modo, el Teorema IV afirma la siguiente igualdad entre radios:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB + AD} = \frac{AD}{AC + AE}$$

Mientras que para establecer estas igualdades entre razones, la demostración del Teorema IV se apoya en las construcciones ya mencionadas junto con otras auxiliares, la prolongación de la recta AD hacia DF tal que DF=AB y la prolongación de AE hacia EG tal con EG=AC, todas ellas exhibidas en Diag.2. Y al igual que en la demostración del Teorema II, la composición de segmentos y la semejanza de triángulos son los medios deductivos primordiales para derivar a las igualdades buscadas. Por construcción tenemos que DF=AB y EG=AC, por lo que los triángulos ABC, ACF y ADG son todos semejantes (es más, todos son isósceles). Por consiguiente, de la semejanza de estos triángulos y de la composición de los segmentos, AF=AD+DF con DF=AB y AG=AE+EG con EG=AC, se deducen las igualdades entre radios aludidas por el teorema. Que estas construcciones y deducciones puedan realizarse para "cualquier número de [cualesquiera] segmentos iguales" que parten de cualquier punto en cualquier circunferencia, es una tarea de reconocimiento dejada al lector. En suma, el desenvolvimiento expositivo-justificativo del Teorema IV, es otro fidedigno representante del estilo euclidiano.

Cabe remarcar que el Teorema IV tal como lo hace el Teorema II, facilita la generación de una sucesión de radios aunque en este caso, todos ellos iguales (razón continua). Si etiquetamos con "s_1" a la primera de las rectas (AB en Diag.2) trazadas desde el punto fijo (A en Diag.2) hacia el extremo más próximo de las cuerdas iguales (B en Diag.2), con "s_2" a la segunda de ellas (AC en Diag.2) y así sucesivamente, entonces el Teorema IV afirma que:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_1 + s_3} = \frac{s_3}{s_2 + s_4} = \cdots = \frac{s_{i-1}}{s_{i-2} + s_i} = \frac{s_i}{s_{i-1} + s_{i+1}}$$

Y tal como la demostración del Teorema III aprovecha a la sucesión de radios provista para el Teorema II para fincar la razón entre los lados del triángulo con ángulo nα y del triángulo con ángulo α, el Teorema VII utiliza al Teorema IV para aseverar lo siguiente:

> Teorema VII.
> Si desde un punto de la circunferencia de un círculo se toma cualquier número de partes iguales, y si tomamos las líneas rectas que salen del mismo punto hasta los extremos de las partes iguales de la circunferencia; así se constituye una serie de líneas rectas en proporción continua... (Anderson-Viète,1615: 28)

Ahora bien, el Teorema VII añade respecto a la razón continua brindada por el Teorema IV, a la expresión de cada recta s_i en función de las dos primeras, s_1 y s_2, cuyas magnitudes en la demostración original se les asigna respectivamente el valor de Z y de B. De este modo, el Teorema VII además afirma que:

> la tercera es igual a $\frac{\text{Bq.}-\text{Zq.}}{\text{Z}}$ $[\frac{B^2-Z^2}{Z}]$, $\frac{\text{Bc.}-\text{Zq.inB2}}{\text{Zq.}}$ $[\frac{B^3-2BZ^2}{Z^2}]$ la cuarta, $\frac{\text{Bqq.}-\text{Zq.inBq.3}+\text{Zqq.}}{\text{Zc.}}$ $[\frac{B^4-3B^2Z^2+Z^4}{Z^3}]$ la quinta, ...,
>
> $\frac{\text{Bccc.}-\text{Zq.inBqqc.8}+\text{Zqq.inBqc.21.}-\text{Zcc.inBc.20}+\text{Zqcc.inB.5}}{\text{Zqcc.}}$ $[\frac{B^9-8B^7Z^2+21B^5Z^4-20B^3Z^6+5BZ^8}{Z^8}]$
>
> la décima. (Anderson-Viète,1615: 29-30)

Mientras que el método de generación de la serie s_i, ayuda a atisbar por segunda ocasión en este sección, a la inducción matemática. El método empieza fijando el par de valores base sobre los cuales se definirá el del resto de la serie: s_1=Z, s_2=B. Luego se recurre a los cálculos previos de s_i y s_{i-1}, para indicar el cómputo de s_{i+1}, despejando de la ecuación $\frac{s_1}{s_2} = \frac{s_i}{s_{i-1}+s_{i+1}}$ proporcionada por el Teorema IV a s_{i+1} :

$$s_{i+1} = \frac{s_2 s_i}{s_1} - s_{i-1} = \frac{Bs_i}{Z} - s_{i-1}$$

Por lo que de la aplicación iterativa de la regla anterior, se van deduciendo los valores s_i enumerados en el Teorema VII:

$$\text{la tercera } (s_3) \text{ es igual a } \frac{BB}{Z} - Z = \frac{B^2 - Z^2}{Z}$$

$$\text{la cuarta } (s_4) \text{ es igual a } \frac{B(B^2 - Z^2)}{ZZ} - B = \frac{B^3 - 2BZ^2}{Z^2}$$

$$\text{la quinta } (s_5) \text{ es igual a } \frac{B(B^3 - 2BZ^2)}{ZZ^2} - \frac{B^2 - Z^2}{Z} = \frac{B^4 - 3B^2Z^2 + Z^4}{Z^3}$$

...

$$\text{la décima } (s_{10}) \text{es igual a } \frac{Bs_9}{Z} - s_8 = \frac{B^9 - 8B^7Z^2 + 21B^5Z^4 - 20B^3Z^6 + 5BZ^8}{Z^8}$$

Finalmente, Anderson-Viète culmina la demostración del Teorema VII manifestando su confianza en la generalidad del método allí enseñado:

Y de la misma manera ... al infinito, se sigue lo que se ha propuesto del modo designado[11], para las líneas rectas dibujadas en el círculo producidas por los [segmentos] iguales, que es lo que había que demostrar (Viète-Anderson , 1615: 30)

Recapitulando, tanto en la demostración del Teorema III como en la del Teorema VII, hemos propuesto que se siguen un par de pasos asociables con la inducción matemática, aunque en ellas no son dados para justificar alguna propiedad, como normalmente se hace en las pruebas por inducción, sino para instaurar un procedimiento de cálculo[12] a través de:

i. El establecimiento de un caso base ($\frac{z}{P_2}$ y $\frac{z}{B_2}$ en T.III; s_1 y s_2 en T.VII) y
ii. El subsecuente empleo de casos anteriores ($\frac{z}{P_i}$ y $\frac{z}{P_2}$ en T.III; s_i y s_{i-1}en T.VII) para fincar al siguiente ($\frac{z}{P_{i+1}}$ y $\frac{z}{B_{i+1}}$ en T.III; s_{i+1} en T.VII).

Mientras que el seguimiento de este par de pasos[13], es posibilitado en ambos casos por algún teorema anterior: T.II para T.III y T.IV para T.VII. Más aún, las demostraciones

[11] No podemos dejar de mencionar la mayor especificidad del "modo designado" en el Teorema VII, pues allí incluso se señala que los números que van a ir apareciendo como coeficientes en los numeradores, van a ser los naturales con signo negativo (-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8...) para los términos B^iZ^2; los triangulares (1,3,6,10,15,21,...) para los términos B^iZ^4, los piramidales con signo negativo (-1,-4,-10,-20....) para los términos B^iZ^6 y así sucesiva (naturales, triangulares, piramidales, triángulo-triangulares,....) y alternadamente (- + - +...) para todos los términos B^iZ^{2k} (Viète-Anderson 1615: 28). Ahora bien, estas clases de números (triangulares, piramidales, ...) las expondremos posteriormente cuando abordemos en el *Tratado del Triángulo Aritmético* a su aplicación para los órdenes numéricos. Por lo que aquí nos conformaremos con reconocer a la mayor profundidad algebraica del Teorema VII respecto a lo que se expuso someramente de él en nuestro cuerpo del texto.

[12] Cuando expongamos a Peano y a Dedekind en el Capítulo 3, la diferencia entre el empleo de la inducción matemática como método de justificación y como modo de definición de un cálculo se hará más nítida. Ahora sólo nos conformaremos con proponer que en los Teoremas III y VII se despliegan procedimientos de cómputo que por Dedekind pudieron haber sido llamados "definiciones inductivas" y que actualmente los podríamos reconocer como "definiciones recursivas" (ver nota 8). Mientras que para empezar a convertir en verosímil esta sugerencia, pedimos que se comparen los procedimientos mostrados en ese par de demostraciones de *Ad Angularium,* con la definición "recursiva" formulada por Peano y por Dedekind de la multiplicación para los números naturales:

(i) $a*1= a$ [Base de la recursión]

(ii) $a*(b+1)= (a*b)+a$ [El cómputo de $a*(b+1)$ recurre al cómputo anterior $a*b$]

[13] Remarcamos que no estamos afirmando que en estas demostraciones se siguió alguna regla de inducción matemática, pues como ya había sido comentado desde el inicio, en el momento de su elaboración ni siquiera se contaba con la formulación de tal regla. No obstante, inspirados por la discusión filosófica sobre el seguimiento de reglas incitada por Wittgenstein (ver nota 1), uno pudiera estar tentado en aseverar que estas demostraciones están hechas "conforme a una regla" de inducción matemática aunque en ellas no se haya ella explícitamente seguido. Es decir, dado el problema de la indeterminación de la interpretación de reglas, como alternativa a su seguimiento se ha planteado el "actuar conforme una regla", entendida esta última opción como una práctica o un hábito sujeto quizás, a una regulación social. Por lo que la comunidad

de estas proposiciones geométricas primarias, T.II y T.IV, están visiblemente insertadas dentro de la tradición deductiva euclidiana: las dos usan casos particulares y construcciones auxiliares representables en un diagrama (Diag.1 y Diag.2) con el fin de especificar y luego justificar con base en lo mostrado sobre instancias, a sus respectivos teoremas. Finalmente estos últimos son empleados para articular un procedimiento de cómputo, en T.III y T.VII respectivamente, que no está basado sobre cualesquiera instancias, si no en (ii) la utilización de los casos particulares previos hasta llegar al (i)primero de todos ellos.

Ahora bien, el razonamiento sobre instancias también hemos de percibirlo en la siguiente obra por ser inspeccionada en donde encontraremos a la primera formulación de una inducción matemática: el *Tratado del Triángulo Aritmético*. Lo cual puede parecer llamativo, e incluso sorprendente si lo añadimos a nuestros hallazgos de vestigios en *Ad Angularium Sectionum* de la inducción matemática, dada la íntima relación existente entre esta regla y la aritmética que más adelante será expuesta por constituir su explicación uno de los objetivos primordiales de nuestra investigación. Es decir, algunos problemas (v.gr. la división de un ángulo) y modos de razonamiento (manipulación deductiva de instancias) típicamente geométricos, condujeron y ayudaron a instaurar, a una regla de inferencia cuyo dominio natural es la aritmética. Sobreponiéndonos a esta sensación de lo inesperado, ya sea ignorándola, explicándola (v.gr. el Problema II de *Ad Angularium* plantea la división de un ángulo en *un número n* de partes iguales y por otro lado, el paradigma euclidiano todavía era el ideal deductivo en el s.XVII) o inhibiéndola bajo la promesa de su futura dilucidación[14], ahora andaremos tras las huellas de la inducción matemática en el *Tratado del Triángulo Aritmético* de Pascal.

---

actual de matemáticos, quizás en retrospectiva pudiera identificar que estas demostraciones de Anderson-Viéte están hechas “conforme a una regla” de inducción matemática. No obstante por lo indicado en la nota anterior, hoy en día sería más fácil reconocer en estas demostraciones algún procedimiento de cálculo recursivo y no tanto una inducción matemática.

[14] Cuando se defiende la validez de la regla de inducción matemática enunciada por Pascal, argumentaremos que los medios de representación influyen en los modos de razonamiento y por consiguiente, no se verá tan raro en el tratado de Pascal, el empleo de instancias con fines deductivos.

1.2 Blaise Pascal: La triangulación entre la aritmética y la geometría para expresar una regla de inducción matemática

Blaise Pascal (1623-1662) fue un prolífico pensador francés del siglo XVII cuyas aportaciones a las matemáticas, aunque no tan cuantiosas sí fueron muy valiosas para el desarrollo de esa disciplina. Ocupa el primer lugar cronológico en este fugaz recuento de ellas, la incursión de Pascal en el campo de la geometría, siendo notables algunos de sus resultados obtenidos desde su temprana edad en la rama de ella conocida como proyectiva[15]. Luego, entre 1642 y 1645 inventó una de las primeras calculadoras mecánicas, la *Pascaline*, máquina optimizada para efectuar la operación aritmética de la suma[16]. En 1654 probablemente escribió su *Traité du Triangle Arithmetique* (*Tratado del Triángulo Aritmético*), obra en donde se aprecia la mayor densidad de su aporte matemático y en donde se centrará posteriormente nuestro análisis. La última contribución registrada de Pascal a las matemáticas fue su estudio sobre la curva llamada cicloide[17], realizado alrededor de 1658. Terminada la breve enumeración de sus aportes, corresponde ahora enfocarnos en su obra sobre la cual pende nuestro interés.

La creación del *Tratado del Triángulo Aritmético* fue incentivada por la interacción epistolar entre Pascal y Pierre de Fermat con el motivo de resolver algunos problemas que a la postre serían identificados como germinales para el nacimiento de la teoría de la

---

[15] En su obra *Essai pour les Coniques* publicada en 1640, se encuentran sus contribuciones (con un registro escrito sobreviviente al paso del tiempo) a la geometría ahora llamada proyectiva; rama de ella interesada en las propiedades invariantes bajo proyecciones. Tal rama fue notablemente alimentada por el trabajo de Gérard Desargues (1591 - 1661), cuya influencia en Pascal (en tal área) fue también considerable. La más famosa de las aportaciones de Pascal se hizo incluso acreedora de su apellido. El Teorema de Pascal afirma que si un hexágono está inscrito en una sección cónica y si sus lados opuestos son extendidos hasta intersecarse, entonces los tres puntos de intersección son colineales.

[16] Recurriendo a algunos algoritmos también se pueden hacer otras operaciones aritméticas en la *Pascaline* como la resta, la multiplicación o la división. Por ejemplo, la resta puede ser "convertida" en una suma a través del método de los complementos. En particular, la *Pascaline* computa las restas a través de los complementos a nueve. Ejemplo: si se desea realizar la operación 124-34, entonces primero se calcula el complemento a nueve de 34, es decir, 99-34=65; luego este complemento se le suma a 124, es decir 124+65=189; por último, al resultado obtenido se le suma un uno y se ignora el uno del dígito más significativo; es decir (1)89+1=90=124-34.

[17] Una cicloide es la curva trazada por un punto en una circunferencia cuando el círculo gira a lo largo de una línea recta. Pascal mediante las técnicas provistas por los indivisibles de Cavalieri resolvió algunos problemas relativos a tal curva, como el cálculo del área y el centro de gravedad de cualquier segmento. Por lo que el área de impacto en matemáticas de Pascal también puede incluir al Cálculo. Sus resultados los publicó con el título *Histoire de la roulette* bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville.

probabilidad. Dicho intercambio se suscitó en el año de 1654, aunque el *Traité* fue publicado hasta 1665 mientras que las cartas hasta 1679, por lo que la evidencia escrita por ser revisada se divulgó póstumamente[18]. Dado que la instauración de la inducción matemática en la expresión de una regla es el tema ahora perseguido, la delineación del contenido del tratado será muy poco detallada salvo el de las trazas deductivas elegidas con tal trama.

El *Traité* a grandes rasgos está divido en dos bloques. En el primero se presenta la teoría del triángulo aritmético mientras que en el segundo se exponen cuatro de sus aplicaciones: "Para los órdenes numéricos"[19], "Para las combinaciones", "Para la división de una apuesta entre dos jugadores que jueguen varias partidas"[20] y "Para la búsqueda de potencias de un binomio". Ahora bien, las demostraciones realizadas conforme al método de inducción planteado por Pascal están diseminadas en ambos sectores principales, así como también lo está la expresión de esa regla. Por consiguiente, para hacer más íntegro

---

[18]En Edwards (1982) se puede consultar un relato acerca del intercambio epistolar de Fermat con Pascal relativo al Problema de los Puntos (ver nota 20), cuyo final feliz es la creación del *Tratado del Triángulo Aritmético* y el determinante aporte de Pascal al nacimiento de la teoría de probabilidad. Ahora bien, algunas de las cartas traducidas al inglés se pueden revisar en Smith (1959, vol.2).

[19] Los números del primer orden son la unidad (1,1,1,1,1,1,...), mientras que el número k (k≥1) de orden n (n>1) se computa sumando los k primeros números de orden n-1. En el siguiente capítulo será expuesta esta aplicación del triángulo aritmético, por lo que por el momento no se extenderá más nuestra explicación acerca de ellos.

[20] El Problema de los Puntos o de la División de una Apuesta consiste en determinar la justa manera en que ha de repartirse entre dos jugadores el premio disputado en un juego de azar (i.e. cada jugador tiene la misma probabilidad de ganar cada ronda) cuando se interrumpe sin haberse satisfecho la condición de victoria para cualquiera de los jugadores (i.e. "triunfa el jugador que primero gana n rondas"). Tanto Fermat como Pascal propusieron que el reparto debía basarse en las expectativas de triunfo de cada jugador, calculadas bajo la suposición de que el juego se prolongara lo suficiente para garantizar que se cumpliera la condición de triunfo para alguno de los ellos. En particular para realizar tal cálculo, Pascal aprovechó la herramienta de cálculo de su triángulo aritmético. Supongamos que al jugador A le faltan n rondas para ganar mientras que al jugador B le faltan m y que está en disputa un monto s de dinero. Luego entonces, a lo sumo se requieren n+m-1 rondas para que alguno de los dos obtenga la victoria. En notación moderna la manera de obtener la respuesta al Problema de los Puntos propuesta por Pascal se expresaría de la siguiente manera:

$$\frac{C_n^{n+m-1}+C_{n+1}^{n+m-1}+C_{n+2}^{n+m-1}+\cdots+C_{n+m-2}^{n+m-1}+C_{n+m-1}^{n+m-1}}{2^{n+m-1}} \times s = \text{Parte de la apuesta para A}$$

$$\frac{C_0^{n+m-1}+C_1^{n+m-1}+C_2^{n+m-1}+\cdots+C_{n-2}^{n+m-1}+C_{n-1}^{n+m-1}}{2^{n+m-1}} \times s = \text{Parte de la apuesta para B}$$

donde C_r^k son las combinaciones de r elementos tomados de k objetos, las cuales pueden ser computadas por medio del triángulo aritmético como más adelante será expuesto en el cuerpo del texto.

a nuestro análisis incluiremos muestras deductivas de las dos secciones y en particular, de la segunda nos enfocaremos en la aplicación para las combinaciones. Puntualizados nuestros sitios de interés dentro del tratado, ahora procedemos a exponer su contenido seleccionado.

Pascal llama triángulo aritmético a "una figura con la construcción" siguiente:

> Trazo desde un punto cualquiera, G, dos líneas perpendiculares una a la otra, GB,Gζ, en cada una de las cuales tomo partes iguales y continuas, tantas como quiera; comenzando en G las nombro 1,2,3,4,.etc.; y esos números son *los exponentes* de las divisiones de la línea.
>
> A continuación uno los puntos de la primera división que están en cada una de las dos líneas con otra línea que forma un triángulo del cual es *la base*.
>
> Uno así los dos puntos de la segunda división con otra línea, que forma un segundo triángulo del cual es *la base*.
>
> Y al unir así todos los puntos de la división que tienen un mismo exponente, formo un número igual *de triángulos y de bases*.
>
> Trazo por cada uno de los puntos de la división líneas paralelas a los lados, que por sus intersecciones forman pequeños cuadrados, que llamo *células*.
>
> (Pascal, 1665 vía 1994:53)

Después de haber descrito el plano de la configuración espacial del triángulo aritmético, Pascal bautiza a sus elementos para facilitar a su identificación:

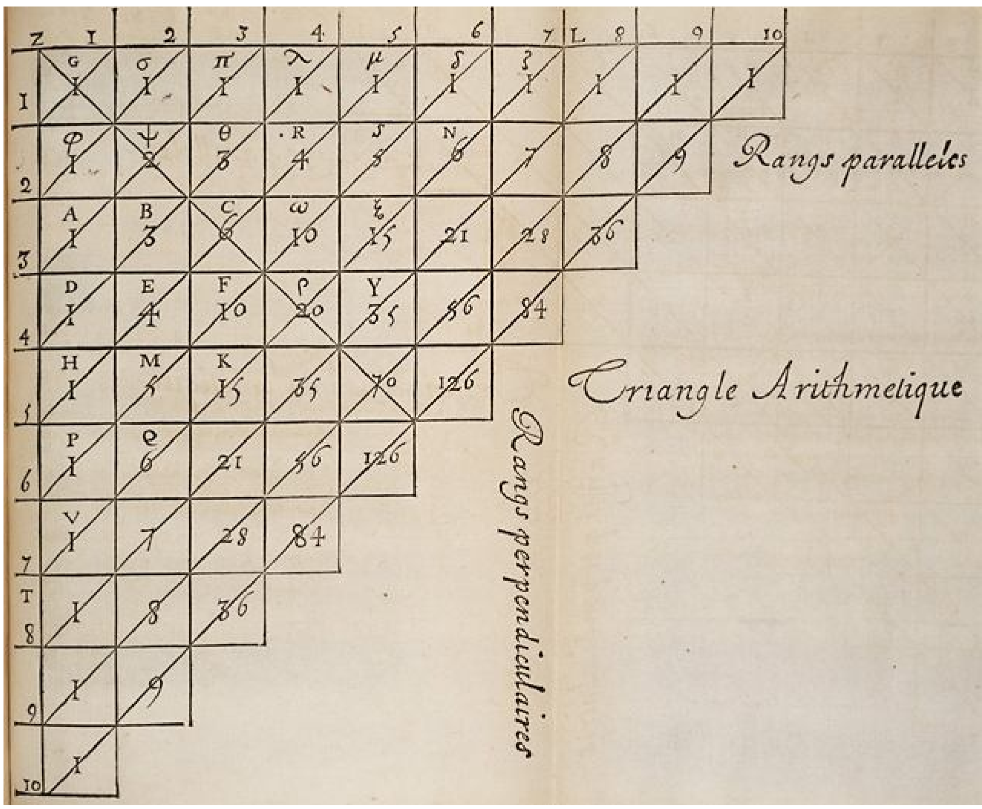
> Y las células que están entre dos paralelas que van de izquierda a derecha se llaman *células de un mismo rango paralelo,...*
>
> Y aquéllas que están entre dos líneas que van de arriba a abajo se llaman *células de un mismo rango perpendicular,....*
>
> Y aquéllas que una misma base atraviesa diagonalmente se llaman *células de una misma base, ...*
>
> Las células de una misma base igualmente distantes de sus extremidades se llaman *recíprocas*, ...porque el exponente del rango paralelo de una es el mismo que el exponente del rango perpendicular de la otra,.. (Pascal, 1665 vía 1994: 54)

Una vez especificado al molde geométrico junto con sus etiquetas, Pascal indica cómo ha de ser llenado con contenido aritmético de la siguiente manera:

> El número de la primera célula que está en el ángulo recto es arbitrario; pero habiéndose colocado éste, todos los otros están forzados; y por esta razón se llama el *generador* del triángulo. Y cada uno de los otros está especificado por esta única regla:

> El número de cada célula es igual al de la célula que la precede en su rango perpendicular, más aquél de la célula que la precede en su rango paralelo...
>
> De donde se sacan muchas consecuencias. Aquí están las principales, donde considero los triángulos cuyo generador es la unidad; pero lo que se dirá servirá para todos los demás. (Pascal, 1665 vía 1994:54-5)

Ahora bien, la representación gráfica del triángulo aritmético resulta de enorme utilidad para entender los señalamientos sobre su especificación hasta el momento transcritos, e incluso también lo será para comprender a sus propiedades y aplicaciones junto con sus respectivas demostraciones que posteriormente serán expuestas y por consiguiente, a continuación reproducimos la imagen de este objeto por Pascal provista:



Diag.3

Con asistencia de la representación gráfica del triángulo aritmético, podemos clarificar mediante la ostensión, tal como lo hace Pascal, a las instrucciones para dibujarlo, a las denominaciones y a la construcción aritmética previamente enumeradas. Por ejemplo, de acuerdo al Diag.3, las *células* del *primer rango paralelo* serían G, σ, π,...; las del *segundo* φ, ψ, θ,... y así sucesivamente. Mientras que las *células* del *primer rango perpendicular* serían G, φ, A, D,...; las del *segundo* σ, ψ, B,... y así sucesivamente. Ejemplos de *células* de una misma *base* serían D, B, θ, λ para la cuarta y A, ψ, π para la tercera. Ejemplos de *células recíprocas* serían E, R y B, θ. Por otro lado, en el Diag. 3 también se aprecia el resultado de la construcción aritmética con antelación indicada cuando el *generador* (i.e. el número en la *célula* G) es la unidad y se sigue la regla aditiva para generar los números en las siguientes *bases* de los triángulos (v.gr. $\theta=\psi+\pi=2+1=3$) Cabe mencionar que la regla aditiva se complementa con una asunción hecha en la demostración de la Consecuencia Primera, a saber que el exterior del triángulo aritmético está repleto de ceros, la cual permite afirmar que "en todo triángulo aritmético todas las células del primer rango paralelo y del primer rango perpendicular son iguales al generador"[21] (Pascal, 1665 vía 1994: 55).

La Consecuencia Primera anteriormente citada es una entre las diecinueve ubicadas en el primer bloque del *Traité*. Todas ellas establecen propiedades del triángulo aritmético, algunas de las cuales son fácilmente discernibles en su representación gráfica (Diag.3), tal como lo es la primera. De todas estas consecuencias, nos interesarán sobre todo aquellas cuya demostración se haya hecho explícita o implícitamente, mediante inducción matemática. Así entonces, nuestra atención se centrará en las demostraciones de la quinta y de la duodécima consecuencias aunque a modo de contraste deductivo,

[21] A través de un juicio demasiado estricto se podría criticar que en la especificación del triángulo aritmético, Pascal omitió señalar que el exterior del triángulo estaba repleto de ceros, ceros que permiten usar a la regla generadora de los números en las células para el cálculo de los números del primer rango perpendicular y del primer rango paralelo. Prosiguiendo con el desenvolvimiento de está rígida crítica, se puede señalar que en la "demostración" de la Consecuencia Primera se pasa injustificadamente del "les cellules du premier rang parallèle n'ont aucunes cellules qui les précedent dans leurs rangs perpendiculaires" a "Ainsi σ égale G + zéro, et π égale σ + zéro" (Pascal, 1665 via 1967 :99), pues la nada no equivale a cero a menos que se haya hecho explícita esa equiparación. Sin embargo esta observación parece más neurótica que propositiva, y peor aun, ignora un pronunciamiento hecho por Pascal dentro de su *Del espíritu geométrico y del arte del persuadir* , en el cual plantea un vínculo necesario entre el cero y la nada:

> "...por pequeño que sea un número, como la centésima o la diezmilésima parte, se puede concebir uno menor, y así al infinito, sin llegar jamás al cero o a la nada" (Pascal, 1994 :118)
>
> "Pero si se quiere tomar en los números una comparación que represente con justicia lo que consideramos a la extensión, es necesario que sea la relación del cero con los números, pues el cero no es del mismo género que los números, porque siendo multiplicado, no los puede rebasar: de manera que es un verdadero indivisible del número, como el indivisible es un verdadero cero de la extensión. Y se encontrará una similar entre el reposo y el movimiento, entre un instante y el tiempo;....Ahora habremos encontrado una correspondencia perfecta entre estas cosas; pues todas esas magnitudes son divisibles al infinito sin caer en sus indivisibles, de manera que sostienen entre el infinito y la nada".
> (Pascal, 1994: 124)

también se reproducirá la demostración de la Consecuencia Segunda, proposición que asevera lo siguiente:

> En todo Triángulo aritmético, cada célula es igual a la suma de todas las células del rango paralelo precedente, comprendidas desde su rango perpendicular incluyendo hasta la primera. (Pascal, 1665 vía 1994:56)

La demostración de esta proposición recurre al plano de la construcción numérica del contenido de las células, es decir, se basa en que (1) los números en las células del primer rango perpendicular y en las células del primer rango paralelo son iguales al generador (Consecuencia Primera aunada a la fijación del número generador) ; y en que (2) el número en la célula del rango perpendicular j y del paralelo i es igual a la suma del número en la célula del rango perpendicular j-1 y paralelo i más el número en la célula del rango perpendicular j y paralelo i-1. En notación moderna, los principios de construcción aritmética[22] sobre los cuales se fundamenta la Consecuencia Segunda y dicho sea ya desde ahora, también el resto de las consecuencias, se pueden expresar así:

(1) $c_{ij} = k$ cuando $i=1$ y $j \geq 1$ o cuando $i \geq 1$ y $j=1$

(2) $c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ cuando $i>1$ y $j>1$

Donde "c_{ij}" designa a la célula del rango paralelo i y del rango perpendicular j mientras que "k" al número generador. Ahora bien, en la demostración de la Consecuencia Segunda, Pascal llama al estrado a cualquier célula c_{ij} con $i \geq 1$ y $j>1$, para mostrar su cumplimiento. En particular él cita a la célula "ω" del Diag.3, y muestra que el cálculo de su contenido aritmético estipulado por los dos principios enunciados sirve para deducir lo afirmado en la Consecuencia Segunda:

[22] Si deseamos mantener una mayor fidelidad hacia la exposición de Pascal y decidimos considerar a la Consecuencia Primera como una proposición derivada de la construcción aritmética del triángulo y no como un elemento mismo de ella, entonces los principios constructores serían los siguientes:

(1.1) $c_{ij} = 0$ cuando $i=0$ ó $j=0$
(1.2) $c_{ij} = k$ cuando $i=1$ y $j=1$
(2) $c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ (agregar la condición "cuando $i>1$ y $j>1$" aunque ayude a la comprensión resulta redundante)

No obstante, la formulación sugerida además de ser equivalente no altera el lineamiento original de la construcción pues tampoco se tomó la molestia Pascal de explicitar la condición (1.1) -ver nota anterior- además esta reformulación facilita a la argumentación.

ω es igual a R + $\underbrace{C}$ [Principio (2)]

θ + $\underbrace{B}$ [Principio (2)]

ψ + $\underbrace{A}$ [Principio (2)]

φ [Principio (1)]

Por lo tanto ω igual a R + θ + ψ + φ. (Pascal, 1665 vía 1994: 56)

Así entonces, esta demostración es otro exponente del modo de razonamiento ya expuesto en la sección anterior dedicada a Viète: mediante una instancia (la célula ω) se enseña *cómo* se satisface la proposición en general (para cualquier célula). Ventajosamente, en la notación moderna con variables indexadas se puede expresar con mayor generalidad tanto a la instancia como al razonamiento utilizados por Pascal en su demostración de la Consecuencia Segunda. Sea c_{ij} cualquier célula del triángulo aritmético. Luego entonces:

$c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ [Principio (2)]

$= c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j-1} + c_{i(j-2)}$ [Principio (2)]

$= c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j-1} + c_{(i-1)j-2} + c_{i(j-3)}$ [Principio (2)]

$= \ldots$

$= c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j-1} + c_{(i-1)j-2} + c_{(i-1)j-3} + \ldots + c_{(i-1)2} + c_{i1}$ [Principio (2)]

$= c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j-1} + c_{(i-1)j-2} + c_{(i-1)j-3} + \ldots + c_{(i-1)2} + c_{(i-1)1}$ [Principio (1)]

A pesar de la mayor generalidad manifiesta en la traducción, su nivel de respaldo a la Consecuencia Segunda es el mismo que el ofrecido por la demostración original. Es decir, en ambas demostraciones el proceso de descomposición que va recurriendo al segundo principio constructor hasta conducirnos hacia el resultado deseado por la Consecuencia Segunda con la ayuda final del primer principio, tiene como garantía de terminación para cualquier célula, algo no hecho explícito en las dos demostraciones. En ambas podemos percatarnos de que el proceso de descomposición para cualquier célula c_{ij} (ω en la original) debe concluir en la primera célula c_{i1} (A) de su mismo rango paralelo. Sin embargo, lo sabemos no por algo mencionado en ellas, sino porque de antemano inferimos o intuimos que el índice j al correr en sentido inverso sobre los números naturales, debe detenerse en el primero de todos ellos, el número 1. Más aún, en la demostración original la representación gráfica del triángulo aritmético también asiste a nuestro conocimiento sobre la culminación de la descomposición para cualquier célula c_{ij} (ω), pues la recurrencia constructiva $c_{ij}= c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ (v.gr. ω=R+C) tiene como límites a los catetos (GP, Gδ) del triángulo aritmético cuya base es igual a i+j-1 (seis)[23].

Llamativamente, las garantías para la universalidad de las conclusiones justificadas a través de instancias en el *Traité*, se irán apuntalando con mayor fuerza y evidencia dentro de esta obra hasta alcanzar un máximo cuando por fin se enuncie y se siga explícitamente el método de demostración captor de nuestra atención, en la Consecuencia Duodécima y en la Proposición Primera para las combinaciones. Como elemento de transición, ahora citaremos a la demostración de la Consecuencia Quinta, la cual afirma que "en todo Triángulo aritmético cada célula es igual a su recíproca" (Pascal, 1665 vía 1994:57). Mientras que su demostración procede de la siguiente manera:

> ... en la segunda base $\varphi\sigma$, es evidente que las dos células recíprocas φ,σ, son iguales entre sí y a G.
>
> En la tercera A, ψ,π, es también visible que las recíprocas π, A son iguales entre sí y a G.
>
> En la cuarta, es visible que los extremos D, λ son otra vez iguales entre sí y a G.Y aquellos entre ambos, B, θ, son visiblemente iguales, pues B es igual a A + ψ, y θ es igual a ψ + π; ahora bien π + ψ son iguales a A+ψ por lo que se ha mostrado; así pues, etc.
>
> Así se mostrará en todas las otras bases que los recíprocos son iguales, porque los extremos son siempre iguales a G, y porque los otros se interpretarán siempre por medio de otros iguales en la base precedente que son recíprocos entre sí.
>
> (Pascal, 1665 vía 1994:57)

Esta demostración empieza reparando en que la Consecuencia Quinta se cumple "visiblemente" para las células recíprocas de la segunda y tercera bases, i.e. c_{12}=c_{21} y

[23] El exponente del rango perpendicular de cualquier célula que sea, sumado al exponente de su rango paralelo, sobrepasa por la unidad al exponente de su base, "lo que viene de que los dos lados del triangulo estén divididos en un mismo número de partes; pero esto es más bien entendido que demostrado" (Pascal, 1665 vía 1994 : 54-5). Es decir, si observamos el Diag.3 podemos entender que dos células c_{ij} y c_{kl} están en la misma base si i+j=k+l, a saber, en la base i+j-1.

$c_{13}=c_{31}$, donde lo evidente de su satisfacción reside en el primer principio constructor (o equivalentemente en la Consecuencia Primera). Es más, gracias a este primer principio la consecuencia se cumple para cualesquiera células recíprocas en "los extremos", i.e. $c_{k1}=c_{1k}$, tal como lo hace notar Pascal para las células recíprocas D,λ. de la cuarta base. Luego si c_{ij}, c_{ji} son cualesquiera células recíprocas (no extremas) en la base i+j-1, en la demostración se hace la observación de que si la consecuencia se cumple para las células recíprocas en la base anterior i+j-2, entonces c_{ij} también debe ser igual a c_{ji} puesto que:

$$c_{ij} = c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j} \qquad \text{[Principio (2)]}$$

$$c_{ji} = c_{j(i-1)} + c_{(j-1)i} \qquad \text{[Principio (2)]}$$

$$c_{(i-1)j}=c_{j(i-1)} \text{ y } c_{i(j-1)}= c_{(j-1)i} \qquad \text{[Hipótesis]}$$

Por consiguiente, $c_{ij} = c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j} = c_{j(i-1)} + c_{(j-1)i} = c_{ji}$

Así entonces, la demostración de la Consecuencia Quinta la podemos emparentar directamente con las demostraciones de Viète-Anderson en donde identificamos rasgos deductivos propuestos como típicos de la inducción matemática. En todas ellas primero (i)se establece un caso base, v.gr. $c_{12}=c_{21}$ en la demostración de la Consecuencia Quinta, y luego (ii) se indica cómo ligar el cumplimiento de un caso anterior al siguiente, v.gr. si se satisface la Consecuencia Quinta en la base k=i+j-2 también se presentará la igualdad entre recíprocos en la base k+1=i+j-1. En palabras de Pascal, (i)"en la segunda base φσ, es evidente que las dos células recíprocas φ,σ, son iguales entre sí " y (ii) "si los recíprocos son iguales en la base anterior entonces también lo son en la siguiente". Que el autor de la demostración de la Consecuencia Quinta haya también reconocido este par de pasos deductivos sobre los cuales la articuló, resulta verosímil puesto que los enunció como lemas y los siguió abiertamente por vez primera en la demostración de la Consecuencia Duodécima. Y al hacerlo no sólo nos brindó la expresión de una regla mediante la cual podemos agrupar con mayor precisión a todas estas demostraciones, sino además fortaleció el respaldo justificativo de las demostraciones que la siguen en el *Traité*, respecto a otras como la de la Consecuencia Segunda, en donde la generalización de la justificación sobre instancias, requiere de asunciones como la de la existencia de un primer número natural.

La Consecuencia Duodécima hace la siguiente aseveración:

> En todo Triángulo aritmético, cuando dos células contiguas están en una misma base, la superior es a la inferior como la multitud de células desde la superior hasta lo alto de la base es a la multitud de aquéllas desde la inferior incluyendo hasta la de abajo.
> (Pascal, 1665 vía 1994:60)

En notación moderna, la proposición afirma que c_{ij} / $c_{(i+1)j-1}$ = i / (j-1). Después de citar un ejemplo ("E es a C como 2 es a 3"), Pascal indica la manera mediante la cual ha de demostrar a esta consecuencia:

> Si bien esta proposición tiene una infinidad de casos, daré una demostración muy corta, suponiendo 2 lemas.
>
> El 1, que es evidente por sí mismo, que esta proporción se encuentra en la segunda base; pues es muy visible que φ es a σ como 1 a 1.
>
> El 2, que si esta proporción se encuentra en una base cualquiera, se encontrará necesariamente en la base siguiente. (Pascal, 1665 vía 1994:60)

Después de señalar el camino deductivo, Pascal remarca el por qué de su corrección:

> De donde se ve que lo es necesariamente en todas las bases: pues lo es en la segunda por el primer lema; así pues por el segundo lo es en la tercera base, así pues en la cuarta, y al infinito. (Pascal, 1665 vía 1994: 60)

Por lo que de acuerdo a lo transcrito, sólo restaría demostrar al segundo lema para asentar a la Consecuencia Duodécima. Primero ha de exhibirse con una presentación actual a la demostración de este lema en pos de facilitar a su comprensión, aunque después será reproducida la deducción original para atestiguar la fidelidad de la traducción.

Supongamos el cumplimiento de la proporción predicada en Consecuencia Duodécima para las células contiguas de una base cualquiera k y sea c_{ij} cualquier célula en la siguiente base, es decir, i+j=k+2. Entonces el Lema 2 pide demostrar que

$$c_{ij} / c_{(i-1)j+1} = j / (i-1)$$

Ahora bien, por el principio constructor (2) tenemos que $c_{ij} = c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j}$

Luego por hipótesis tenemos que $c_{i(j-1)} / c_{(i-1)j} = (j-1) / (i-1)$

De donde se sigue que

$$c_{ij} / c_{(i-1)j} = (c_{i(j-1)}+c_{(i-1)j}) / c_{(i-1)j} = c_{i(j-1)}/c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j}/c_{(i-1)j} = (j-1)/(i-1) + 1 = (j+i-2) / (i-1)$$

Por otro lado, por el principio (2) tenemos que $c_{(i-1)j+1} = c_{i-1(j)} + c_{(i-2)j+1}$

Además, por hipótesis tenemos que $c_{(i-2)j+1} / c_{i-1(j)} = (i-2) / j$

De donde se sigue que

$$c_{(i-1)j+1} / c_{(i-1)j} = (c_{i-1(j)} + c_{(i-2)j+1}) / c_{(i-1)j} = c_{i-1(j)}/c_{(i-1)j} + c_{(i-2)j+1}/c_{(i-1)j} = 1 + (i-2)/j = (j+i-2) / j$$

Por lo tanto

$$c_{ij} / c_{(i-1)j+1} = (c_{ij}/c_{(i-1)j}) / (c_{(i-1)j+1}/c_{(i-1)j}) = ((j+i-2)/(i-1)) / ((j+i-2)/j) = j / (i-1) \quad \text{...C.q.f.d}$$

Entretanto, la demostración original del Lema 2 en su conversión al castellano dice lo siguiente:

> Si esta proporción se encuentra en una base cualquiera, como en la cuarta Dλ, es decir, si D es a B como 1 a 3, y B a θ como 2 a 2, y θ es a λ como 3 a 1, etc.; digo que la misma proporción se encontrará en la base siguiente, Hμ, y que, por ejemplo, E es a C como 2 a 3.
>
> Pues D es a B como 1 a 3, por la hipótesis.
>
> Por lo tanto $\underbrace{D + B}$ es a B como $\underbrace{1 + 3}$ a 3.
> E a B como 4 a 3.
>
> Igualmente B es a θ como 2 a 2, por la hipótesis.
>
> Por lo tanto $\underbrace{B + \theta}$ es a B como $\underbrace{2 + 2}$ a 2.
> C a B, como 4 a 2.
>
> Pero B a E, como 3 a 4.
>
> Por lo tanto, por la proporción problematizada, C es a E como 3 a 2.
>
> C.q.f.d. (Pascal, 1665 vía 1994:60-1)

Cotejando a la traducción con su original, otra vez sobresale la generalidad presentada por la notación actual: parece no ser lo mismo decir que E y C son cualesquiera células adyacentes en cualquier base, a señalar a c_{ij} y $c_{(i-1)j+1}$ como cualesquiera células adyacentes en cualquier base. Sin embargo a partir de la instancia demostrada por Pascal, "E es a C como 2 a 3"[24], se puede reconocer a la generalidad de su

[24] Con un insípido rigor cabría señalar que Pascal demostró algo equivalente a lo que se quería deductivamente sustentar, pues concluyó que "C es a E como 3 a 2" en lugar de "E es a C como 2 a 3". En la

proceder argumentativo, tal como la manifestamos abiertamente en nuestra reformulación con variables. Con esta meta reivindicadora, la cuarta base se convierte en la base “k=i+j-1”; “E” torna en “c_{ij}”; “C” en “$c_{(i-1)j+1}$”; “2” en “j”; “3” en “i-1”; la proporción “2 a 3” se transformó en la fracción “j/(i-1)”; las inferencias propiciadas por una teoría de proporciones en conjunción con la hipótesis sobre el cumplimiento de la propiedad para la cuarta base como “D+B es a B como 1+3 a 3” son ahora realizadas manipulando fracciones concomitantemente con la hipótesis inductiva “$c_{ij} / c_{(i-1)j} = (c_{i(j-1)}+c_{(i-1)j}) / c_{(i-1)j} = c_{i(j-1)}/c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j}/c_{(i-1)j} = (j-1)/(i-1)+1 = (j+i-2)/(i-1)$”. Por lo tanto, aunque los medios de representación manejados por Pascal no tengan la expresividad universal de los medios algebraicos utilizados en nuestras traducciones de sus demostraciones, cumplen equivalentemente con sus objetivos justificativos, como el de apuntalar al segundo lema en la Consecuencia 12ª.

Más aún, la apariencia de lo particular también se presenta en la formulación del método de demostración usado para deducir a la Consecuencia Duodécima. Pascal en cada ocasión en donde abiertamente anuncia el seguimiento del método que identificaremos con la inducción matemática, como en las demostraciones de la consecuencia en cuestión y de la Proposición 1ª para las combinaciones, enuncia al par de lemas conforme al teorema cuya demostración así se plantea. Sin embargo, al igual que en la traducción de la demostración del Lema 2 para la Consecuencia Duodécima, se puede abstraer de cada instancia del par de lemas, al método deductivo general tal como más adelante será hecho. En suma, los medios de representación parecen desempeñar un importante papel tanto en el seguimiento como en la expresión de una regla de demostración que merece una explicación más detallada y una justificación mejor solventada, por lo que este tema será retomado después de haber concluido nuestra exposición de especímenes deductivos del *Traité*.

Ahora se exhibirá nuestra última demostración sacada del tratado, correspondiente a la aplicación del triángulo aritmético para las combinaciones. Una combinación de r en k

---

moderna traducción se respetó este retruécano, así en lugar de demostrar la igualdad afirmada por la Consecuencia Duodécima “$c_{ij} / c_{(i+1)j-1} = i / (j-1)$” se demostró su equivalente “$c_{ij} / c_{(i-1)j+1} = j / (i-1)$”.

(C_r^k) se puede interpretar como el número de distintos subconjuntos de r elementos formados a partir de un conjunto con k objetos. Y Pascal entiende por combinación algo parecido: "todas las maneras de tomar [cosas] tanto como estén permitidas entre todas las que están presentes, se llaman aquí las diferentes *Combinaciones*" (Pascal, 1665 vía 1967: 110). La principal discrepancia entre esta última noción de combinación respecto a la primera mencionada, además de su falta de terminología perteneciente a la teoría de conjuntos, es que para Pascal r y k tienen que ser números estrictamente mayores que cero. Atendiendo a la previa aclaración, la Proposición Primera de esta sección afirma lo siguiente:

> En todo Triángulo aritmético, la suma de las células de un rango paralelo cualquiera iguala a la multitud de combinaciones del exponente del rango en el exponente del Triángulo. (Pascal, 1665 vía 1967:113)

De nuevo primero se expondrá en notación moderna a la demostración de esta proposición para luego reproducir a su formulación original, aunque ahora sólo se copiarán íntegramente al par de lemas mediante los cuales se articula y sólo reseñaremos a sus respectivas demostraciones.

La Proposición Primera asegura que la combinatoria de r en k puede obtenerse con la asistencia del triángulo aritmético de base k, si nos fijamos en el rango paralelo r y realizamos la siguiente sumatoria:

$$C_r^k = \sum_{j=1}^{j \mid r+j-1=k} c_{rj}$$

Mientras que su demostración otra vez se articula mediante el establecimiento de dos lemas:

Lema 1: El primer triángulo aritmético, aquel conformado únicamente por la célula generadora G, cuando G es la unidad, nos sirve para computar la combinatoria de uno en uno (C_1^1), pues ella precisamente es igual a la unidad, satisfaciendo de este modo a la Proposición Primera. Es decir:

$$C_1^1 = \sum_{j=1}^{j \mid 1+j-1=1} c_{1j} = c_{11} = G = 1$$

Lema 2: Supongamos que la proposición es válida para el triángulo aritmético de base n, es decir, para cualquier r tal que 1≤r≤n se cumple que $C_r^n = \sum_{j=1}^{j \mid r+j-1=n} c_{rj}$. Ahora bien, escójase una r tal que 1≤r≤n con la intención de mostrar que C_r^{n+1} mediante el triángulo aritmético de base n+1 también puede calcularse por medio de la sumatoria de sus células del rango paralelo r. En conciso, corresponde ahora demostrar que:

$$C_r^{n+1} = \sum_{j=1}^{j \mid r+j-1=n+1} c_{rj}$$

Para lograr establecer esta igualdad, Pascal acude a la siguiente propiedad de las combinaciones llamada por él Lema IV:

$$C_{l+1}^{m+1} = C_l^m + C_{l+1}^m \text{ con } l+1 \leq m$$ [25]

Así entonces, de acuerdo al Lema IV tendríamos que $C_r^{n+1} = C_{r-1}^n + C_r^n$. Además, debido a la suposición de la validez de la proposición para el triángulo aritmético de base n, se sigue que:

$$C_{r-1}^n = \sum_{j=1}^{j \mid r-1+j-1=n} c_{(r-1)j}$$

y

$$C_r^n = \sum_{j=1}^{j \mid r+j-1=n} c_{rj}$$

Por otro lado, por la Consecuencia Segunda tenemos que:

[25] Mediante la fórmula $C_l^m = \frac{m!}{(m-l)!l!}$ se puede corroborar al Lema IV de Pascal, tal como a continuación se enseña:

$$C_l^m + C_{l+1}^m = \frac{m!}{(m-l)!l!} + \frac{m!}{(m-(l+1))!(l+1)!} = \frac{m!(l+1)+m!(m-l)}{(m-l)!(l+1)!} = \frac{m!l+m!+m!m-m!l}{(m-l)!(l+1)!} = \frac{m!(1+m)}{(m+1-l-1)!(l+1)!}$$
$$= \frac{(m+1)!}{(m+1-(l+1))!(l+1)!} = C_{l+1}^{m+1}$$

$$C_{r-1}^{n} = \sum_{j=1}^{j\,|\,r-1+j-1=n} c_{(r-1)j} = c_{rj'}$$

con j'=n-r+2

Por lo tanto:

$$C_{r}^{n+1} = C_{r-1}^{n} + C_{r}^{n} = \sum_{j=1}^{j\,|\,r-1+j-1=n} c_{(r-1)j} + \sum_{j=1}^{j\,|\,r+j-1=n} c_{rj} = c_{rj'} + \sum_{j=1}^{j\,|\,r+j-1=n} c_{rj}$$

$$= \sum_{j=1}^{j\,|\,r+j-1=n+1} c_{rj} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Una vez presentada en su moderno atavío a la demostración de la Proposición Primera, ahora reproducimos a la formulación original del par de lemas sobre los cuales se articula:

> El 1ero, que es evidente por sí mismo, que en el primer triángulo esta igualdad se encuentra, porque la suma de las células de su único rango, a saber G, o la unidad, iguala a la suma de las combinaciones de 1, exponente del rango, en 1, exponente del triángulo.
>
> El 2o, que si se tiene un Triángulo aritmético en donde esta proporción se encuentra, es decir, para cualquier rango que se tome, se tiene que la suma de sus células iguala a la multitud de combinaciones del exponente del rango en el exponente del triángulo: digo que el triángulo siguiente tendrá la misma propiedad.
>
> (Pascal, 1665 vía 1967: 113)

En concordancia con el plano de la demostración, Pascal se aboca a apuntalar deductivamente al Lema 2o. Para hacerlo elige a un triángulo sin nada en particular, el tercero, y supone que la igualdad propuesta allí se encuentra. En consonancia con tal asunción, la sumatoria de las células del primer rango paralelo es igual a las combinaciones de 1 en 3 y la sumatoria de las células del segundo es igual a las combinaciones de 2 en 3. Luego Pascal escoge a un rango paralelo del siguiente triángulo sin nada en particular, el segundo, para finalmente demostrar por medio del par de igualdades previas, el Lema IV y la Consecuencia Segunda, que la multitud de combinaciones de 2 en 4 es igual a la sumatoria de las células del segundo rango paralelo en el cuarto triángulo de la manera mostrada en su traducción. En suma, otra vez se emplean instancias en la demostración del Lema 2º.

Además, tal como lo hizo en la demostración de la Consecuencia Duodécima, Pascal explica la solidez de su plan de prueba:

> De donde se sigue que todos los Triángulos aritméticos tienen esta igualdad, porque ella se encuentra en el primer triángulo por el primer lema, y ella misma otra vez es evidente en el segundo; por el segundo lema, el siguiente la tendrá por lo mismo, y por consiguiente el siguiente otra vez; y así al infinito. (Pascal, 1665 vía 1967: 113)

Recapitulando, en las cuatro demostraciones exhibidas del *Traité*, la argumentación sobre instancias es una constante en todas ellas. Sin embargo, las garantías sobre la universalidad de sus conclusiones, varían entre la primera, la de la Consecuencia 2ª, y las tres últimas pues en ellas implícita (Consecuencia 5ª) o explícitamente (Consecuencia 12ª y Proposición 1ª para las combinaciones) se sigue un plan de prueba compuesto por un par de lemas. Y cada vez que aparecen esos dos lemas, también se presentan como instancias pues se especifican conforme al contenido de las proposiciones (Consecuencia 12ª, Proposición 1ª) por ser demostradas.

Ahora bien, en esas parejas de lemas afirmamos que se puede reconocer a la expresión de una regla para elaborar demostraciones en general, la cual no es otra sino una versión de la inducción matemática. Es más, presumiblemente las demostraciones en el tratado que siguen esa regla, ofrecen un respaldo más sólido a sus conclusiones en comparación con las demás que no lo hacen y que precisan de otras asunciones para su sostén. Y la razón detrás de esta mayor firmeza justificativa, se puede vislumbrar en las explicaciones ofrecidas por Pascal con antelación transcritas, sobre la universalidad de los resultados deducidos a partir de sus pares de lemas. Sin embargo por el momento nos concentraremos en respaldar la presencia en el *Traité* de la expresión de una regla de inducción matemática, postergando hasta la adopción de un enfoque axiomático en los dos capítulos posteriores, la dilucidación de ese mayor grado de apoyo. Mientras que para llevar a cabo esta defensa en lo que resta de este capítulo, apelaremos a la importancia de los medios de representación en el seguimiento y en la formulación de las reglas de demostración. En particular, señalaremos que los medios de representación utilizados por Pascal pertenecen a un contexto deductivo respecto al cual el razonamiento sobre instancias, no sólo para las demostraciones sino incluso para sus métodos, es la regla para mostrar su universalidad.

En el *Traité* no se halla concentrada en unas líneas la formulación de una regla de inducción matemática, al menos no de la manera como se especificaría hoy en día. Se pueden aducir distintas razones detrás de esta ausencia, desde la temática del tratado de Pascal, pues sus demostraciones son medios para desarrollarla y no sus protagonistas, hasta aquellas lógico-matemáticas que señalarían la falta de algunas cuestiones ahora empleadas en la formulación de esa regla de demostración. Con respecto a las últimas incluso se puede acusar a los medios lingüísticos del tratado por no propiciar una representación suficientemente universal para fabricar una expresión concisa de la inducción matemática débil. Para revelar esta precariedad lógico-matemática, a continuación se enunciará un método de demostración basado en los pares de lemas, pero restringiendo su formulación a los recursos extraíbles del tratado:

REGLA DE PASCAL PARA LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA DÉBIL: *Cuando de una infinidad de varias cosas podemos tomar una primera de ellas, mientras que cada una de las otras puede ser tomada siempre pudiendo elegir a la siguiente de la anterior, entonces se puede proponer que todas las cosas desde la primera hasta la infinidad tienen necesariamente cierta propiedad si se demuestra el siguiente par de lemas:*

Lema 1: En la primera cosa se encuentra la propiedad propuesta.

Lema 2: Si la propiedad se encuentra en cualquiera de las cosas, entonces se halla en la siguiente.

La formulación propuesta imita el comienzo de la definición de combinación de Pascal[26] y se ajusta al contenido de las dos instancias del par de lemas previamente transcritas. Más aún, en las demostraciones que siguen a estos lemas, hay indicios de *cuantificaciones de primer orden*, v.gr. en la de la Consecuencia Duodécima se concluye

[26] "Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre,..."(Pascal, 1665 vía 1967:110)

del par de lemas que "de donde se ve que lo es necesariamente en *todas las bases*". Además, en estas demostraciones se insinúa alguna *manera ordenada de elegir las cosas*, v.gr. en la de la Proposición 1ª se escogen triángulos aritméticos en sucesión, mientras que en la de la Consecuencia 12ª se seleccionan secuencialmente a sus bases. Sin embargo, el lenguaje utilizado por Pascal no permite hacer más preciso al modo de selección y a la cuantificación de las *cosas*. Por ejemplo, los signos para cuantificadores tuvieron que esperar por su explícita irrupción hasta el siglo XIX a través de las obras de algunos notables lógicos, como Frege[27].

Por otro lado, Pascal no le teme al *infinito* y lo incorpora en la secuencia apelada en el segundo de los lemas, v.gr. en la demostración de la Consecuencia 12ª "pues lo es en la segunda por el primer lema; así pues por el segundo lo es en la tercera base, así pues en la cuarta, y al *infinito*". Más aún, el resultado de la abstracción que desembocaría en la noción de *propiedad,* se revela como alcanzable al final del Lema 2º para la Proposición Iª: "digo que el triángulo siguiente tendrá la misma *propiedad*". Por otro lado, la *cuantificación sobre propiedades* de antemano pudiera pensarse ajena al marco lógico-matemático del *Traité,* si nos atuviéramos otra vez al hecho de que los sistemas lógicos de orden superior emergieron un par de siglos después de su época de publicación[28]. No obstante, la

---

[27] Por ejemplo en su *Conceptografía* (1879), Frege brinda el siguiente simbolismo para la cuantificación universal, la cual actualmente se interpretaría como todo $\mathfrak{a}$ cumple ϕ :

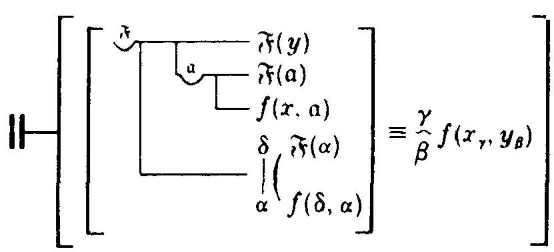
$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!- \Phi(\mathfrak{a})$$

Ahora bien, en defensa de Pascal y en honor a Frege, debemos destacar el brinco conceptual que significó la introducción de cuantificadores, pues impulsó el cambio de la "vieja" lógica de sujeto-predicado por la "nueva" lógica de predicados. Es decir, el empleo de cuantificadores incrementó el poder de representación de los sistemas lógicos, orientando su desarrollo hacia las matemáticas alejándolo así de su filosófico origen aristotélico.

[28] De nuevo podemos citar a la *Conceptografía,* para mostrar a los primeros simbolismos para una cuantificación de orden superior, por ejemplo Frege allí utiliza cuantificación de segundo orden para definir a la relación "*x* precede a *y* respecto a la serie *f*", denotada mediante " $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$" , cuantificando universalmente sobre todas las propiedades hereditarias $\mathfrak{F}$, representadas mediante " $\overset{\delta}{\underset{\alpha}{|}}\!\!\left(\begin{array}{l}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta, \alpha)\end{array}\right.$" , del siguiente modo simbólico:

cuantificación sobre propiedades aunque no se manifieste explícitamente en el tratado, sí se sugiere ostensivamente mediante la acumulación de instancias. En la demostración de la Consecuencia Duodécima la *propiedad* se materializa como una "proporción" mientras que en la de la Proposición Primera para las combinaciones como una "igualdad". Así entonces, la *cuantificación sobre propiedades* estaría insinuada a través de la recopilación de las *propiedades* particulares.

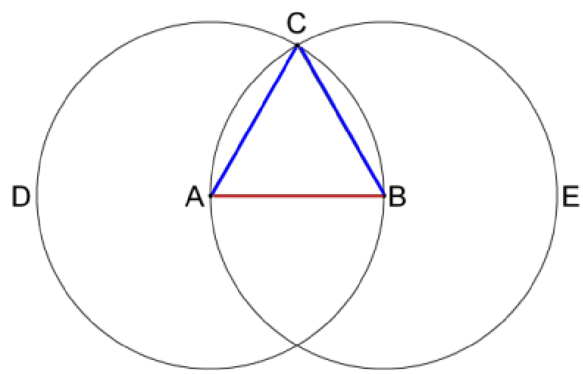
En suma, nuestra caracterización propuesta de una regla de inducción matemática en su versión dada por Pascal, respeta al marco lógico-matemático del *Traité,* en el cual predomina el uso de instancias para mostrar lo universal. Es decir, cada particularización de las parejas de lemas no sólo indica cómo ha de realizarse su respectiva demostración, sino también señala cómo pueden justificarse propiedades de cualquier colección ordenada de cosas a través del establecimiento de la versión general de esa pareja de lemas. En conciso, cada instancia del par de lemas expresan un método de prueba, de la misma manera en que las demostraciones realizadas sobre instancias típicas de la geometría clásica, muestran su validez. Para reforzar esto último a continuación expondremos con mayor amplitud este modo de razonamiento de lo particular hacia lo general, empezando por mostrarlo en su máximo exponente, Euclides, para luego retomar cómo Pascal lo emplea para seguir a la regla de inducción matemática previa y concisamente expresada.



(76). (Frege, 1972: 43)

donde $\mathfrak{F}$ es hereditaria respecto a la serie *f*, si para todo δ y $\mathfrak{a}$, se tiene que $\mathfrak{F}(\delta)$ y $f(\delta,\mathfrak{a})$ implica $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$. Cabe mencionar que las propiedades hereditarias son aquellas propicias para ser probadas por inducción matemática, tal como lo señaló Frege al decir que sobre ellas "descansa la inducción bernoulliana" (p. 45). Más aún, a partir de la relación de "precedencia" él indicó una manera de desarrollar a los números naturales, tema que será discutido en el Capítulo 3 cuando se exponga el uso de la inducción matemática para la conformación de algunas teorías aritméticas. Dado que Frege no es un autor primario de nuestra investigación, su notable desarrollo lógico de la aritmética fue irrespetuosamente compactado en la nota (53) del Capítulo 3.

La Proposición 1 del Libro I de los *Elementos*, cuya fama se debe en gran parte a su ubicación, plantea la tarea de construir un triángulo equilátero sobre *cualquier* segmento de recta dado. Mientras que Euclides muestra cómo resolver este problema, a través de la instancia “AB” de un segmento de recta, la cual para facilitar el seguimiento de la solución, se acostumbra representar como “________“. Luego por el Postulado 3, se construyen un par de círculos, etiquetados mediante “BCD” y “ACE”, con el mismo radio AB, pero cuyos centros respectivos son el punto B y el punto A. Por lo que el tercer vértice del triángulo equilátero cuya construcción se pide, es cualquiera de los puntos de intersección de las circunferencias BCD y ACE tal como se muestra en el siguiente diagrama:



Diag.4

Posteriormente Euclides acude a la Definición 15 sobre los círculos[29], para deducir que AB=AC y que BC=BA con el fin de apelar a la transitividad de la igualdad estipulada en la Noción Común Primera, para inferir que AC=AB y así concluir que el triángulo ABC es equilátero. De esta manera se puede considerar resuelto el problema, *para cualquier* segmento de recta dado.

Ahora bien, justificar a la generalidad de la construcción del triángulo equilátero indicada para la instancia de recta AB, ha sido una cuestión que ha mantenido ocupados por varios siglos a filósofos, matemáticos y demás interesados en este tema. Si tal interés se ha conservado intacto, es porque por mucho tiempo el proceder de lo particular hacia

[29] 15. Un *círculo* es una figura plana comprendida por una sola línea de tal modo que todas las líneas rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y ese punto se llama el *centro* del círculo.(Euclides versión Heath 1908 Vol.1 : 183)

lo general representado por la solución de la Proposición I.1, fue considerado un paradigma deductivo en las matemáticas[30]. Basta con recordar que las demostraciones aquí expuestas de Viète-Anderson (s. XVI) y de Pascal (s. XVII), todavía recurren a instancias para establecer sus resultados universales. Y aunque el uso de las instancias es típico de la geometría, pues en esa área ha resultado muy provechoso gracias a su representación y manipulación diagramática, tampoco es exclusivo de esa disciplina.

Por ejemplo, la célebre Proposición 20 del Libro IX de los *Elementos* asevera que hay más números primos que *cualquier* multitud asignada de ellos (ahora la expresaríamos afirmando que el conjunto de números primos es infinito). Mientras que para su demostración, Euclides particulariza a cualquier multitud de primos en aquella conformada por tres números primos denotados mediante las etiquetas “A”, “B” y “C”. Luego si “EF” designa al número obtenido de sumarle una unidad (etiquetada mediante “DF”) al mínimo común múltiplo de A, B y C (denotado mediante “ED”), entonces tendremos que EF es primo o que existe un primo G a A,B y C que mide (divide) a EF debido a la Proposición 31 del Libro VII[31] . Además, G es distinto a A, B y C pues de lo contrario si fuera igual a alguno de ellos, entonces mediría (dividiría) tanto a ED como a EF y por consiguiente, mediría a la unidad DF, lo cual es un absurdo. Así entonces, hay más números primos que la multitud integrada por A,B y C. Por lo tanto podemos concluir que hay más números primos que *cualquier* multitud asignada de ellos.

En ambos razonamientos expuestos, el de la solución de I.1 y el de la demostración de IX.20, las instancias son el material constructivo-deductivo para satisfacer universalmente a sus respectivos problema y teorema. Mientras que el vínculo de lo particular hacia lo general en ellos, frecuentemente se ha explicado a través de la carencia de propiedades poseídas por las instancias que puedan diferenciarlas del resto de

[30] En palabras del estudioso de la obra euclidiana Ian Mueller:

> Por más de dos mil años desde que se escribieron, los *Elementos* de Euclides fueron vistos como el paradigma del razonamiento matemático riguroso. Sólo hasta que se asentaron los fundamentos del moderno método axiomático a finales del siglo XIX, esta obra perdió su preeminencia al respecto. En este tiempo la gente matemáticamente sofisticada empezó a hablar con cierto aire condescendiente sobre el carácter intuitivo del razonamiento matemático de los griegos. (Mueller, 1969:289)

[31] **Proposición 31**. Cualquier número compuesto es medido por algún número primo. (Euclides vía Heath, 1908 vol. 2: 332).

los miembros de su clase (v.gr. la integrada por los segmentos de recta o la conformada por multitudes de números primos). Sin embargo esta explicación también con regularidad ha conducido a ciertas discusiones sobre el modo de representación de las instancias, concentrándose en sus representantes diagramáticos, que a pesar de su riqueza filosófica pueden desviar la atención sobre cómo se realiza la conexión entre lo particular y lo general en esta clase de razonamientos. No importa tanto que "________" en contraposición de "AB" represente a un segmento de recta por tener semejanzas estructurales con él, ni tampoco de que "A" denote a un número primo aunque no sea su viva imagen. La propensión a la generalidad de las instancias no se manifiesta en la falta de singularidad de sus representantes ("________", "A",...) e incluso tampoco en la de sus objetos representados (segmento, número primo,...) aunque se presuponga, sino en el reconocimiento de la aplicabilidad del plano de la solución o de la demostración para cualesquiera otras instancias pertinentes a ese bosquejo. Es decir, la universalidad de los resultados se basa en que el razonamiento desarrollado para las instancias, sea repetible[32].

---

[32] Esta manera de explicar la generalidad se puede ahondar en Mueller (1969) o más recientemente en Netz (1999). Por ejemplo, este último indica que :

> La misma demostración puede ser repetida para cualquier objeto siempre que sea la misma *ekthesis* [$C(a)$] la que se aplica a ese objeto. Y luego, lo repetible de la demostración de $P(a)$ bajo la asunción de $C(a)$ muestra la generalidad de $C(x)\rightarrow P(x)$. (Netz, 1999: 256-7)

Mientras que Mueller ya desde 1969 afirmaba que:

> ...[se pueden] distinguir dos maneras para interpretar oraciones generales como "Todos los triángulos isósceles tienen los ángulos de su base iguales". Bajo una de estas interpretaciones, esta oración refiere (presupone) a una totalidad definida que es, la clase de todos los triángulos isósceles y dice algo sobre cada uno de ellos. Bajo la otra interpretación no se presupone esta totalidad definida, y la oración tiene un carácter mucho más condicional -"Si un triángulo es isósceles, entonces sus dos ángulos en la base son iguales".
>
> En las matemáticas modernas, la primera manera para interpretar a las generalizaciones es la costumbre. La razón es que, en lo que respecta a un sistema de objetos, es natural y apropiado tratar a una generalización como una aseveración sobre todos los objetos del sistema... La segunda interpretación de las generalizaciones ...es...más adecuada para las matemáticas dentro de las cuales los sistemas de objetos no figuran. Dentro de ellas una demostración...puede ser vista como la indicación de un procedimiento para verificar que una aseveración dada se sostiene para cualquier caso particular que se presente. Desde esta perspectiva, la demostración de un teorema es muy parecida a la demostración de un problema que brinda un método de construcción aplicable para cualquier caso. Una razón para interpretar a las generalizaciones euclidianas de la segunda manera es el hecho de que la mayoría de los teoremas en los *Elementos* se formulan como oraciones condicionales... (Mueller, 1969: 299-300)

De este modo, la validez de la solución de la Proposición I.1 se debe a que el método de construcción enseñado para AB, es ejecutable para cualquier segmento de recta; mientras que la validez de la demostración de la Proposición IX.20, radica en que la mayor cantidad de primos con respecto a cualquier multitud de ellos, puede establecerse de la manera mostrada para la multitud formada por los primos A,B y C. Es decir, ambos razonamientos sobre instancias respaldan o responden a su proposición o problema general, pues las dos enseñan cómo aplicarse a *cualquier* instancia pertinente. Y lo mismo puede decirse de las demostraciones expuestas de Viète-Anderson y de Pascal, tal como será posteriormente remarcado para algunas demostraciones de este último que siguen la regla de inducción matemática con antelación formulada. Por lo que la moraleja justificativa aprendida de los *Elementos* de Euclides parece ser que cada individuo es un mundo siempre y cuando su pasaporte constructivo-deductivo sea mundial.

Es más, los medios de representación utilizados no sólo por Euclides sino también por Anderson-Viète y por Pascal, están sintonizados con en este modo de razonamiento pues sus representantes (sean diagramáticos o simbólicos) designan (sin importar la manera en que lo hagan) a un objeto en particular. Por ejemplo, en Euclides tenemos que “AB” y “________” refieren a determinado segmento de recta mientras que “A”, “B” y “C” a tres primos dados; en Viète-Anderson “ACB”, “ADB” y “AEB” designan a tres triángulos rectángulos inscritos en una semicircunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa de todos ellos (Diag.1); en Pascal “G”, “φ”y “σ”denotan a ciertas células mientras que “φσ” nombra a la segunda base y “Dλ” a la cuarta (Diag.3). Incluso se puede conjeturar con el apoyo de las demostraciones de la Proposición IX.20 hecha por Euclides y de aquellas basadas en el par de lemas elaboradas por Pascal, que los medios de representación dirigidos hacia algo en particular, i.e. aquellos integrados por etiquetas, nombres , “retratos” diagramáticos,..., fomentan e incluso obligan, al uso de este modo de razonamiento. Pues en todas estas demostraciones, se llega a vislumbrar o se ve con toda claridad la ejecución de otro tipo de razonamiento, el de la inducción matemática, pero debido a los medios de representación empleados por Euclides y por Pascal para elaborar a sus demostraciones, este otro tipo se subordina al modo analizado de la generalización universal.

Por ejemplo la demostración de Proposición IX.20 al escribirse en notación moderna empieza a librarse del yugo deductivo de la generalización sobre instancias. Pues para representar a cualquier multitud de números primos, ahora podemos utilizar a la *variable* "n" para expresar a *cualquier* número natural (con $n \geq 1$) y así denotar mediante la notación conjuntista "$P=\{p_1,\ldots,p_n\}$" a *cualquier* conjunto finito (con $|P| \geq 1$) de números primos. Después sólo debemos traducir la argumentación euclidiana a nuestro lenguaje simbólico para establecer desde el principio con universalidad, que hay más números primos que los agrupables en cualquier conjunto finito de ellos tal como a continuación será hecho.

Sea m el mínimo común múltiplo de todos los números primos pertenecientes a P ($m= p_1p_2\ldots p_n$). Luego debe cumplirse que m+1 sea primo o que no lo sea. Si m+1 es primo entonces al menos hay un número primo además de los pertenecientes a P, a saber el mismo m+1; si m+1 no es primo entonces existe un primo p^* tal que $p^*|m+1$ (VII.31) y $p^* \notin P$ (si $p^* \in P$ se arriba al absurdo $p^*|1$). Por lo tanto, existe otro número primo (m+1 o p^*) aparte de los pertenecientes a P y en consecuencia, hay más números primos que los comprendidos por cualquier conjunto finito de ellos.

Cabe recalcar que el uso de variables para prescindir de instancias en nuestra traducción de la demostración de IX.20, sólo hace más evidente a la generalidad alcanzada por su demostración primigenia. Es decir, aunque quizás la primera por su moderna apariencia a nosotros nos resulte más convincente que la segunda, su solidez justificativa es la misma. Pues lo que nos permite nuestra notación con variables es expresar al plano de prueba originalmente mostrado sobre instancias. Y lo mismo puede decirse de todas nuestras traducciones de las demostraciones del *Traité*, pues en ellas no modificamos si no sólo representamos a sus planos de prueba con asistencia de las variables indexadas c_{ij}. Por lo que si queremos aumentar la fuerza justificativa de la demostración de IX.20, entonces no basta con elaborar una transcripción de ella en notación moderna, sino se debe someter a una restructuración deductiva usando otro modo de razonamiento.

En particular, podríamos recurrir a otra clase de argumentación para asegurar que el número n usado para designar a cualquier conjunto finito de primos, en realidad sí sea cualquier número natural. Para hacerlo podríamos aplicar el razonamiento enseñado por Pascal en sus pares de lemas. Sin embargo la sustentación de este mayor grado de apoyo, como ya había sido desde antes anunciado, se postergará hasta la adopción de un enfoque axiomático que será realizada en los dos capítulos siguientes[33]. Por el momento sólo hemos de reafirmar que ese otro modo de razonamiento, el de la inducción matemática, debido a los medios de expresión empleados por Pascal no puede prescindir del camino deductivo-constructivo aquí analizado en Euclides, vía que parte de lo particular para intentar alcanzar lo universal.

En suma, el modo de razonamiento sobre instancias cuya meta es el establecimiento de resultados universales, se articula favorablemente a través de medios de representación enfocados hacia lo particular (etiquetas, "retratos" diagramáticas,...) y está correctamente sustentado cuando sus procedimientos constructivo-deductivos mostrados para algunas instancias, son repetibles para cualesquiera otras pertinentes. Y todo lo anteriormente resumido, ayuda a asentar a la expresión de la regla de demostración plasmada en cada formulación hecha por Pascal de su pareja de lemas. Pues esos pares de lemas indican un método para demostrar propiedades para *cualquier* colección de objetos, en la cual se pueda distinguir a un primer elemento y al que le sigue inmediatamente a cada uno de ellos.

Es más, respetando a los recursos lógico-matemático del *Traité*, hemos confirmado la enseñanza de un método de prueba proveniente de esos pares de lemas, al formular lo

[33] Lo cual no nos impide de una vez replantear la demostración de IX.20 con la regla aprendida de Pascal:
Lema 1: Si $P=\{p_1\}$ entonces existe otro número primo además de p_1, ya sea p_1+1 ó si p_1+1 es compuesto, el p^* que por VII.31 divida a p_1+1y por consiguiente sea distinto a p_1.
Lema 2: Supongamos que hay más números primos que los contenidos por cualquier conjunto finito de ellos con k elementos. Sea P cualquier conjunto conformado por k+1 números primos, i.e. $P=\{ p_{1,} p_2 ,...,p_k,p_{k+1} \}$. Consideremos ahora al subconjunto P^* de P integrado por sus primeros k elementos, i.e. $P^*= \{ p_{1,} p_2 ,...,p_k\}$. Luego por hipótesis existe un número primo p^* distinto a los contenidos en P^*. Si $p^*\neq p_{k+1}$ entonces existe otro número primo además de los pertenecientes a P. Mientras que si $p^*= p_{k+1}$, entonces consideremos al mínimo común múltiplo m de todos los primos en P ($m=p_1p_2... p_k\, p_{k+1}$). Si m+1 es primo entonces existe otro número primo a parte de los enumerados en P, si m+1 es compuesto entonces por VII.31 existe un número primo p^{**} que divide a m+1. Pero p^{**} no puede ser igual a cualquiera de los primos p_i en P pues de lo contrario, p^{**} dividiría a 1 lo cual es un absurdo (si $a|b$ y $a|b+c$ entonces $a|c$ pues $b=ma$, $b+c=qa$ y por consiguiente, $c=(q-m)a$).
Por lo tanto, para cualquier conjunto finito P de números primos, i.e. $|P|=n$, existe otro número primo no contenido en él.

aprendido en una regla, llamada inducción matemática de Pascal, a pesar de las restricciones lingüístico-epistémicas que no permiten entre otras cosas, enunciar de manera concisa la cuantificación sobre propiedades. En conclusión, en el *Tratado del Triángulo Aritmético* es donde por primera vez se encuentra, al menos de acuerdo a nuestros actuales registros históricos, la expresión de una regla de inducción matemática. Por lo que para terminar este capítulo, con todo derecho ahora sí podremos cuestionar cómo es que algunas de sus demostraciones la siguen. Dado que se trata de una regla deductiva, esta pregunta se concentrará sobre la validez de su seguimiento. Es decir, ahora explicaremos cómo es que las demostraciones realizadas de acuerdo a esta regla, respaldan a sus pasos seguidos, incluso cuando el contexto lógico-matemático en el cual están inmersas, todavía está bajo el dominio del la generalización universal sobre instancias.

Retomemos a la demostración de la Consecuencia Quinta, la cual empieza estableciendo la igualdad de los números para las células recíprocas en la *primera base* en donde se ubican un par de ellas, a recordar la segunda denotada mediante "$\varphi\sigma$". Por lo que este paso se da en conformidad con el Lema 1 de la regla de Pascal para la inducción matemática débil, ya que finca una propiedad para el primer elemento de una colección de ellos, i.e. la igualdad para las células recíprocas de la *primera base* en donde pueden ser halladas. Mientras que este paso está asegurado por el primer principio constructor, pues los números en las células del primer rango perpendicular, al cual pertenece φ, y en las células del primer rango perpendicular, al cual pertenece σ, son todos iguales al generador.

Luego la demostración de la Consecuencia Quinta prosigue justificando que si los números en las células recíprocas de la tercera base $A\pi$ son iguales, entonces también lo serán los de las células recíprocas en la base siguiente $D\lambda$. Por lo que este paso sigue al Lema 2 de la regla de Pascal para la inducción matemática débil, pues mediante instancias se enseña cómo demostrar que si la igualdad entre los números de las células recíprocas se presenta en una base cualquiera (en particular $A\pi$) , entonces también debe hacerlo en la siguiente (en particular $D\lambda$) . Mientras que el método mostrado por Pascal para deducir al Lema 2, se apoya sobre los dos principios constructores con la asistencia de la hipótesis sobre el cumplimiento de la propiedad para la base previa. El primero de los principios establece la igualdad de los números de las células recíprocas en los extremos de la base siguiente (en particular D=λ); mientras que el segundo al importar la hipótesis sobre la satisfacción de la igualdad para la base anterior, sirve para hacerlo con los números en las células intermedias (en particular B=θ) de la base siguiente (en particular B=A+ψ, θ=ψ+π por el segundo principio mientras que A=π por hipótesis, de donde se infiere que B= A+ψ=ψ+π=θ). Por lo tanto, la demostración de la Consecuencia Quinta sigue a la regla de inducción matemática débil de Pascal y lo hace válidamente ya que el método mostrado por ella, en especial el exhibido para el Lema 2, es repetible gracias los dos principios constructores del triángulo aritmético.

Por otro lado, la verificación del seguimiento de la inducción matemática de Pascal por parte de las demostraciones de la Consecuencia Duodécima y de la Proposición 1ª para las combinaciones, resulta más evidente pues ellas se elaboran explícitamente conforme a las instancias del par de lemas que constituyen a esa regla deductiva. Sin embargo cabe remarcar que la validez de su seguimiento, recae de nuevo en los principios constructores del triángulo aritmético. En primer lugar, tanto el Lema 1 para la Consecuencia 12ª ("φ es a σ como 1 a 1") como el Lema 1 para la Proposición 1ª ("en el primer triángulo, la suma de las células de su único rango, a saber G...iguala a la suma de las combinaciones de 1 en 1"), se sustentan manifiestamente en el primer principio constructor del triángulo aritmético.

En segundo lugar, el Lema 2 para la Consecuencia 12ª cuyo método de justificación se enseña en el establecimiento de que "E es a C como 2 a 3", se apuntala en el segundo principio constructor. Para corroborarlo resulta más sencillo revisar nuestra formulación con variables indexadas c_{ij} del plan de prueba aprendido de las instancias, pues en ella hacemos mención de ese principio cada vez que se utiliza para respaldar alguna inferencia de manera solitaria (v.gr. $c_{ij} = c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j}$) o con la asistencia de la hipótesis importada sobre el cumplimiento de la igualdad entre razones para las células adyacentes en la base anterior (v.gr. $c_{ij} / c_{(i-1)j} = (c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j}) / c_{(i-1)j} = (j-1)/(i-1)+1 = (j+i-2)/(i-1)$). Aunque si se desea mayor meticulosidad, también puede verificarse el papel cimentador del segundo principio en la demostración original, por ejemplo en las derivaciones correspondientes a las citadas de nuestra traducción ("D+B = E" y "E a B como 4 a 3"). Por consiguiente, una vez descargada la hipótesis del cumplimiento de la Consecuencia 12ª para la base previa, es el segundo principio quien queda como único apoyo del Lema 2. En consecuencia, el segundo principio constructor del triángulo aritmético es el responsable de que el método de justificación exhibido por Pascal para las instancias de cualquier base "Dλ", de su sucesora "Hμ" y de cualesquiera células recíprocas "E, C" en su sucesora, sea aplicable para *cualesquiera* otras instancias pertinentes y por ende, es él quien garantiza la validez del seguimiento de este paso de la regla de inducción matemática.

Análogamente, se puede identificar en la demostración mediante instancias desplegada en el *Traité* del Lema 2 para la Proposición 1ª sobre combinaciones, al segundo principio constructor como uno de los responsables de que sea repetible el método allí manifestado. Sin embargo tal como se mencionó en nuestra moderna traducción de ella, también participan en la sustentación del Lema 2 la Consecuencia Segunda del triángulo aritmético y el Lema IV de las combinaciones. Y si bien con antelación ya fue expuesto que la Consecuencia Segunda se basa en los dos principios constructores, el Lema IV, a recordar $C_{l+1}^{m+1} = C_{l}^{m} + C_{l+1}^{m}$ con $l+1 \leq m$, es justificado por Pascal mediante un argumento sobre instancias cuya tendencia hacia lo universal, pudiera atribuirse a la noción misma de combinación[34]. Por lo que en este caso, son los dos

[34] Su argumento procede de la siguiente manera. Supongamos que tenemos una colección de cuatro letras *cualesquiera*: {A, B,C ,D}. De este modo el Lema IV nos pide demostrar que el número de combinaciones de una letra tomadas de una colección de tres más el número de combinaciones de dos letras tomadas de un grupo de tres es igual al número de combinaciones de dos letras tomadas deuna colección de cuatro. Por otro lado, el número de combinaciones de dos letras tomadas de un grupo de cuatro letras es igual a seis, pues podemos contarlas con ayuda de nuestras instancias: {A,B}, {A,C}, {A,D}, {B,C}, {B,D} y {C,D}. Ahora bien, dividamos en dos grupos a nuestras combinaciones de dos letras tomadas de un grupo de cuatro con base en si aparece o no en ellas determinada letra, v.gr. la A. Así entonces, por un lado tendríamos a {A,B}, {A,C} , {A,D} y por el otro a {B,C}, {B,D}, {C,D}. Por lo que las combinaciones donde no aparece esa determinada letra (A), equivaldrían a las combinaciones de dos letras ({B,C}, {B,D}, {C,D}) tomadas de una colección de tres letras ({B,C,D}). Mientras las combinaciones en las cuales sí aparece esa determinada letra (A), al fijarnos en las otras tres letras que la acompañan en ellas (B,C,D), se pueden poner en correspondencia con las combinaciones de una letra ({B},{C} ,{D}) tomadas de un grupo de tres ({B,C ,D}). Por consiguiente, el número de combinaciones de dos en tres más el numero de combinaciones de uno en tres, es igual al número de combinaciones de dos en cuatro. En conclusión, el número de combinaciones de k en n-1 más el

principios constructores y *prima facie* el Lema IV, quienes aseguran lo repetible de la demostración original del Lema 2 para la Proposición 1ª y por consiguiente, ellos otorgan la validez al seguimiento de este paso.

En suma, las demostraciones de la Consecuencia 5ª, 12ª y de la Proposición 1ª para combinaciones, siguen a la regla de inducción matemática de Pascal. Más importante aún, la siguen válidamente gracias al par de principios constructores del triángulo aritmético, es decir establecen al par de lemas indicados por la regla sustentándose sobre ellos. Sobre todo son los pasos dados para afirmar a los segundos lemas, los que se apoyan con mayor peso en los dos principios, pues ellos les sirven para asegurar que sean repetibles sus métodos de justificación mostrados sobre algunas instancias. Sin embargo, hasta el momento sólo hemos defendido el seguimiento válido de la regla por parte de estas tres demostraciones, mas no la validez misma de la regla. Es decir, todavía no hemos señalado sobre qué se afianzan las conclusiones inferidas a través del apuntalamiento del par de lemas enunciados en la regla de inducción matemática débil de Pascal. Aunque debido al papel fundamental ya revelado del par de principios constructores para sostener a las parejas de lemas, podemos sospechar que ellos también participan activamente en la cimentación de las conclusiones obtenidas mediante la regla deductiva captora de nuestra atención. Y esta sospecha hemos de confirmarla en el próximo capítulo cuando analicemos al *Traité* desde una perspectiva axiomática.

Para terminar este capítulo conviene hacer una nota aclaratoria previa a su síntesis final. Si se ha calificado a la regla de inducción matemática de Pascal como débil, es porque se puede poner en correspondencia con nuestro método de inducción matemática

---

número de combinaciones de k-1 en n-1, es igual al número de combinaciones de k en n. La demostración original puede revisarse en la página 112 de Pascal (1665 vía 1967), mientras que lo repetible de este método enseñado, puede atribuirse a nuestra comprensión misma de lo que es una combinación, la cual es asistida por las representaciones mediante letras (A,B,C,D) planteadas por Pascal. Cabe mencionar que este entendimiento en el *Traité* también se hace más riguroso, pues allí se mencionan algunas propiedades de las combinaciones deductivamente relevantes, v.gr. la combinación {A} es la misma que {A,A} y la combinación {B,A} es la misma que {A,B}.

actualmente así llamado[35]. Ahora al Lema 1 se le acostumbra nombrar Caso Base, mientras que al Lema 2 usualmente lo conocemos como Paso Inductivo. Mientras que la inducción matemática débil hoy en día la podemos formular de la siguiente manera:

Sea X un conjunto bien ordenado. Si queremos demostrar que todos sus elementos cumplen con la propiedad P, es suficiente establecer:

1. el Caso Base, es decir el primer elemento de X según el orden dado cumple con la propiedad P; y

2. el Paso Inductivo, es decir que cada vez que un elemento de X cumpla con P, el que le sigue según el orden dado, también cumple con P.

Nuestro comentario sobre el nombre dado a la inducción matemática de Pascal fue hecho para anunciar desde ahora la falta de unicidad de esa regla. Es decir, el nombre de inducción matemática engloba a distintos métodos de demostración cuya designación puede hacerse más precisa al añadirle un adjetivo calificativo que refiera a su respectiva caracterización. Por ejemplo, posteriormente será exhibida en el Capítulo 3 a la inducción matemática "completa" formulada por Dedekind, mientras que en el Capítulo 5 será expuesta a la inducción matemática "transfinita" acuñada por Cantor. Ahora bien, los rasgos comunes para agrupar a estas reglas bajo el nombre de inducción matemática serán discernibles conforme ellas se vayan exponiendo.

En este capítulo hemos visto algunas demostraciones emparentadas con la inducción matemática débil. Las demostraciones hechas por Viète-Anderson de los Teoremas III y VII en su *Ad Angularium Sectionum,* prefiguran a esta regla pues en ambas se establece un caso base y se usan casos anteriores para fincar al siguiente. Por otro lado, las demostraciones elaboradas por Pascal de la Consecuencia 12ª y de la Proposición 1ª para las combinaciones en su *Traité*, al indicar explícita aunque particularmente la satisfacción de un caso base (Lema 1) y de un paso inductivo (Lema 2), enunciaron por vez

[35] Dado que no resulta de nuestro interés la historia de los nombres dados a los métodos de inducción matemática, sino su historia compartida con la aritmética, aquí no aclaremos quien bautizó a esta versión de la inducción como débil. Sin embargo sí anunciamos que volverá a aparecer en una presentación más formal, en los *Principios* de Peano, los cuales serán estudiados en el Capítulo 3. Si se desea revisar una historia (no muy actualizada) de los nombres dados a la inducción matemática, se puede leer a Cajori (1918).

primera a una regla de inducción matemática débil. Para sustentar lo anterior, identificamos la injerencia de un modo de razonamiento presente desde los *Elementos* que persistió en el *Ad Angularium Sectionum* y en el *Traité*, el de la generalización universal. Mientras que este reconocimiento además de ayudar a asentar a la expresión de esta regla, asistió a la aprobación del seguimiento válido de ella realizado por las demostraciones de la Consecuencia 5ª, 12ª y de la Proposición 1ª. Es más, se descubrieron a los dos principios constructores del triángulo aritmético como los principales responsables de que las demostraciones particulares de las parejas de lemas que constituyen a la regla, fueran repetibles y por ende válidas. Aunque este hallazgo no fue una afortunada casualidad, pues en el siguiente capítulo se verán a esos dos principios como los causantes de la validez misma de la regla de inducción matemática débil de Pascal.

Capítulo 2: Axiomatizaciones de la aritmética

2.0 Introducción

Después de haber presentado a la inducción matemática en el *Tratado del Triángulo Aritmético*, ahora empezaremos a dilucidar su relación con los números naturales. Y el lugar donde se realizará esta indagación, es aquel en donde se ha establecido con mayor rigor nuestro conocimiento sobre ellos, las axiomatizaciones de la aritmética. Dado que la historia de las axiomatizaciones en las matemáticas usualmente comienza con Euclides y sus *Elementos*, en este capítulo trataremos de determinar si su Libro VII también puede servir como punto de partida para su apartado aritmético.

Motivados por el análisis del Libro VII de los *Elementos*, propondremos una caracterización de lo que es una axiomatización libre de exigencias lógicas o filosóficas actuales que excluyan tanto a su pasado como a su diversidad. Por ejemplo, bajo la influencia del nombramiento exclusivo de definiciones en el Libro VII, recaerá sobre el uso y no sobre la mención la identificación de los elementos de una axiomatización. Es decir, la falta del bautizo de axiomas por Euclides en ese libro, no fungirá como criterio para rechazar de antemano su condición axiomática. De este modo, entenderemos mínimamente a una axiomatización como una formulación de principios que pueden ser *usados* para desarrollar a su teoría.

Sin embargo nuestra caracterización tampoco promoverá su satisfacción trivial, pues a pesar de su flexibilidad, ella servirá para negarle el estatus axiomático al Libro VII. Esta cancelación se debe a que ninguna de las definiciones allí enumeradas, es *usada* para respaldar a algunas de las proposiciones en ese sitio de los *Elementos* desplegadas. Específicamente será expuesta la carencia de la formulación de un sustento justificativo, en contraposición con el Libro I, para las proposiciones colocadas en la base deductiva de su estructura teórica. Además en el desarrollo de estas proposiciones aritméticas iniciales se verá la ausencia de la regla protagonista de nuestra investigación, la inducción matemática.

Finalmente retomaremos al *Tratado del Triángulo Aritmético* para mostrar cómo satisface con creces a nuestra caracterización de lo que es una axiomatización, pues sus principios por ser identificados, una regla de inducción matemática y los principios constructores del triángulo aritmético, además de ser utilizados para desarrollar a su teoría, lo hacen en una conjunción armónica. Y esta simbiosis entre sus principios será aprovechada en la defensa efectuada en el capítulo siguiente para añadirle a la condición axiomática del *Traité*, su tema aritmético. Es decir, posteriormente se argumentará que en esa obra de Pascal se empieza a asentar de manera axiomática, el papel fundamental de la inducción matemática para una concepción de los números naturales cuya actualidad contrasta con la vieja noción euclidiana en la cual esta regla no estaba presente. Y para lograr en un futuro próximo tal cometido, en el presente capítulo nos enfocaremos en explicar lo que entenderemos por axiomatización para primero poder considerar al *Traité* como una muestra de ellas.

2.1. ¿Dónde dejó Euclides a la axiomatización de la aritmética?

Euclides es un epónimo de axiomatización. Sus *Elementos*, el primer referente, si no cronológicamente sí por su relevancia histórica, de una axiomatización en las matemáticas. Mientras que la riqueza de ese conjunto de obras, se ostenta en la multiplicidad de investigaciones que incita sin agotar a la veta. Y si los *Elementos* son, al menos evocativamente, la cumbre del razonamiento deductivo, las investigaciones acerca de ellos casi irremediablemente son ejemplares, buenos o malos, de la argumentación inductiva. Al parecer cualquier hipótesis no trivial planteada en torno a ese cúmulo de libros, puede ser falseada mediante el contenido lógico-matemático o a través del contexto histórico-filológico-filosófico de esa obra encarnada en múltiples versiones[1]. En conciso, la complejidad histórico-lógico-matemático-filosófico-filológica de los *Elementos* ofrece una resistencia a las hipótesis históricas, filosóficas, filológicas e incluso lógico-

[1] Cabe mencionar que el Euclides en este texto aludido será el de la versión de Heiberg(1883-88) traducida al inglés por Sir Thomas Heath, la cual es considerada la oficial en gran medida gracias al trabajo inquisitivo y difusor de este eminente historiador inglés.

matemáticas planteadas en torno a ellos. De este irónico modo, bajo el encumbramiento deductivo de los *Elementos*, parece subyacer una indómita contingencia en su desarrollo.

En particular, la revisión de los *Elementos* en pos de la comprensión de lo que es (o fue) una axiomatización, puede generar distintas hipótesis con variables modos y niveles de apoyo. Basta con recordar que los *Elementos* no son sólo su Libro Primero para vaticinar la complejidad por enfrentarse al emprender tal labor inquisitiva, incluso si sólo se deseara indagar lo qué fue una axiomatización dentro del contexto euclidiano. Pues al ampliar el escrutinio a todos los libros de los *Elementos*, resaltará una peculiaridad del primero: es el único en donde Euclides formula tres clases de principios, a saber los postulados, las nociones comunes y las definiciones. Para el resto de las teorías pertenecientes a ese conjunto de obras, Euclides únicamente brinda definiciones al principio de sus libros. Por lo tanto cualquier investigación sobre lo que es una axiomatización euclidiana, tiene que partir desde la encrucijada de proponer al Libro I como su paradigma, lo cual es la costumbre, o de postular a otro como tal, quizás con la motivación de evidenciar que solemos hacer del error un hábito.[2]

---

[2] Por ejemplo, Abraham Seidenberg (1974-5) criticó la postulación del Libro I como la axiomatización euclidiana de la geometría por varias razones, entre las cuales mencionaremos las siguientes: (1) El método de superposición, usado por Euclides en la Proposición 4 y "validado" en su Noción Común 4, convierte en dispensable el uso justificativo de las tres primeras nociones comunes dentro de las primeras 28 proposiciones y además convierte en un teorema al Postulado 4, además, (2) dada la vinculación de ese método con la Noción Común 4, hace de esta última un principio geométrico por lo que no debería considerarse una Noción Común y por último, (3)Euclides con sus primeros principios no logra probar algunas proposiciones relevantes de la geometría plana, v.gr. que la razón entre dos circunferencias es igual a la razón entre sus diámetros. En suma, debido a que algunos de los primeros principios dados por Euclides no están bien asentados ni tampoco son deductivamente tan fértiles, Seidenberg rechaza que Euclides "haya desarrollado axiomáticamente a la geometría". Es más, en lugar del Libro I, Seidenberg propuso al Libro V como una mejor fuente de estudio, al menos una en mayor sintonía con nuestras concepciones más recientes, del método axiomático:

> En el Libro V el término *magnitud* no está explícitamente enunciado para que esté indefinido; pero... es evidente que no sólo las magnitudes geométricas, si no la magnitud en general es su tema, y este entendimiento *eo ipso* hace que el término quede indefinido. Por la misma razón, la adición entre magnitudes también estaría indefinida. Bajo estas circunstancias, la "Noción Común" que afirma que si iguales se añaden a iguales las sumas son iguales, no podría ser demostrada y es en verdad un axioma de acuerdo a nuestro sentido de tal término. El Libro V no es lo suficiente específico para determinar las intenciones de su autor de manera completamente clara, pero yo pienso que es un juicio atinado decir que el método axiomático tal como lo comprendemos ahora, fue empleado por el creador de esa teoría. (A. Seidenberg, 1974-5: 274-5)

Admitida la complejidad los *Elementos*, situémonos ahora en su Libro VII para tratar de reconocer en él lo que es una axiomatización. Lo primero que podría llamarnos la atención al revisarlo, tal como ya fue mencionado, sería la presencia dominante de definiciones. Este libro comienza con la formulación de 22 de ellas para proceder inmediatamente a desplegar a sus proposiciones junto con sus demostraciones; no hay postulados ni nuevas nociones comunes. Entre las definiciones allí enunciadas encontraremos las siguientes:

> 1. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que existen, se llama una.
> 2. Un número es una multitud compuesta de unidades.
> 3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.
> 5. El mayor número es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.
> 11. Un número primo es aquél que es medido por la unidad solamente.
> 12. Números primos entre sí son aquellos que son medidos por la unidad solamente como medida común.
> 13. Un número compuesto es aquel que es medido por algún número.
>
> (Euclides versión Heath 1908 Vol.2 : 277)

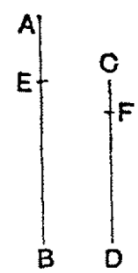
Así entonces, desde las definiciones transcritas podemos adivinar que el tema de la teoría del Libro VII está vinculado con la aritmética. Y esa predicción la corroboraríamos al inspeccionar a sus 39 proposiciones, por ejemplo, las dos primeras aseveran lo siguiente:

> PROPOSICIÓN 1
>
> Dados dos números desiguales. y el menor siendo continuamente restando por turnos del mayor, si el número que queda no mide nunca al anterior hasta que una unidad queda, los números originales serán primos entre sí.
>
> PROPOSICIÓN 2
>
> Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.
>
> (Euclides versión Heath 1908 Vol.2 : 296, 298)

En la transcripción previa, además de su contenido aritmético, ya se puede distinguir una diferencia usualmente reconocida en las proposiciones de los *Elementos*: mientras que la primera asevera el cumplimiento de algo (los números originales son primos entre sí), la segunda pide que se realice algo (hallar la medida común máxima) dadas ciertas condiciones. Así entonces, a la segunda en lugar de proposición se le ha acostumbrado clasificar como problema. Ahora bien, ambas “proposiciones” tratan sobre la máxima medida común de un par de números. Mientras que Euclides menciona desde la enunciación de la Proposición 1 y formula en la “demostración” (solución) de la

“Proposición” 2, a su célebre método para el cómputo de ella, el cual ahora es llamado algoritmo euclidiano para el cálculo del máximo común divisor de un par de números.

A continuación será reproducida la formulación original del algoritmo euclidiano, para luego ser reformulado en notación moderna con el fin de aclararlo. Y si nos interesa la exposición de ese método, es porque además de definiciones y de proposiciones (o problemas), en el Libro VII se desenvuelven, de hecho mayoritariamente, demostraciones (o soluciones). Por consiguiente, nuestro análisis del Libro VII de los *Elementos* en busca de lo que es una axiomatización, debe incluir alguna muestra de ellas como la siguiente:

> Sean *AB*, *CD* los dos números dados no primos entre ellos.
> Así entonces, se pide hallar la máxima medida común de *AB*, *CD*.
> Si CD mide a AB -ya que se mide a sí mismo- *CD* sería una medida común de *CD*, *AB*.
> Y es evidente que también sería la máxima, pues no hay un número mayor a *CD* que mida a *CD*.
> Pero, si *CD* no mide a *AB*, entonces, el menor de los números *AB*,*CD* siendo continuamente sustraído al mayor, dejaría algún número que medirá al anterior a él.
> Además una unidad no sería dejada; pues de otra manera *AB*,*CD* serían primos entre sí [VII.Def.12 y VII.Prop.1], lo cual es contrario a la hipótesis.
> Por lo tanto algún número quedará tal que medirá al anterior a él.
> Así entonces, sea *BE* medido por *CD* tal que deje a *EA*, donde *EA* es menor a *CD* y luego sea *DF* medido por *EA* tal que deje a *FC*, con *FC* menor a *EA*, y sea *AE* medido por *CF*.
>
> 
>
>
> Ahora bien, ya que *CF* mide a *AE*, y *AE* mide a *DF*, entonces *CF* medirá también a *DF*.
> Pero como también se mide a sí mismo; entonces también medirá a todo *CD*.
> Pero *CD* mide a *BE*; por lo que *CF* también mide a *BE*. Pero él también mide a *EA*; por lo que también medirá a todo *BA*. Pero él mide también a *CD*; por lo que *CF* mide a *AB.CD*.
> Por lo tanto, *CF* es la medida común de *AB, CD*.
>
> (Euclides versión Heath, 1908 Vol.2: 298)

Mientras que el procedimiento anterior, en notación moderna, se especificaría del siguiente modo:

Sean a,b un par de números. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b \leq a$. Si b divide a a, entonces b es el máximo común divisor. Si no, réstese sucesivamente de a a b hasta que se obtenga un número $b_1 \leq b$, es decir, $a\text{-k}b=b_1$. Si b_1 divide a b, entonces b_1 es un divisor común de a y b, mientras que si no lo es, entonces réstese sucesivamente de b a b_1 hasta generar un número $b_2 \leq b_1$, es decir $b\text{-k}_1 b_1=b_2$. Si b_2 divide a b_1, puesto que b_2 se divide a sí mismo entonces también divide a b ($b=b_2+\text{k}_1 b_1$) y por consiguiente, b_2 sería un divisor común de b y de a ($a = b_1 + kb$); mientras que si b_2 no divide a b_1, entonces réstese sucesivamente de b_1 a b_2 hasta generar un número $b_3 \leq b_2$, es decir $b_1 - k_2 b_2 = b_3$. Si b_3 divide a b_2, entonces... Eventualmente debe surgir una b_n ($b_n = b_{n-2} - k_{n-1} b_{n-1}$) que divida a b_{n-1} y por consiguiente, b_n sería un divisor común de b_{n-2}, b_{n-1},..., b,a.

Así entonces, *CF* sería la b_n (en particular n=2) en donde Euclides supone la terminación de su algoritmo para obtener la máxima común medida (máximo común divisor) de los números *AB* y *CD*. Por otro lado, ya que la "Proposición" 2 pide que asumamos que *AB* y *CD* son primos entre sí (ahora llamados primos relativos), entonces la b_n resultante no sería una unidad (ahora diríamos que $b_n \neq 1$) debido a la Proposición 1. Sin embargo, puesto que desde la enunciación de la Proposición 1 se presupone la validez del procedimiento descrito en la solución de la "Proposición" 2, entonces tal método de restas sucesivas actualmente lo consideraríamos aplicable para la obtención del máximo común divisor de cualquier par de números a y b.

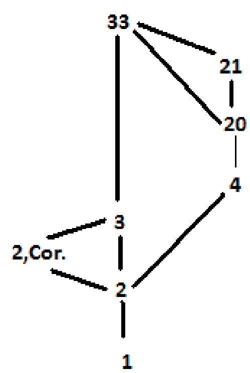
Más aún, Euclides en la solución de la "Proposición" II demuestra que la medida común generada mediante el procedimiento allí delineado es la máxima:

> Pues, si *CF* no fuera la máxima común medida de AB,CD, algún número mayor que *CF* mediría a los números *AB*, *CD*.
> Supóngase que existe ese número que los mide y sea *G* tal.
> Ahora bien, debido a que *G* mide a *CD,* mientras que *CD* mide a *BE*, *G* mide también a *BE*.
> Pero también mide al todo *BA*; por lo que también medirá al resto *AE*.
> Pero *AE* mide a *DF*; por lo que *G* también medirá a *DF*. Pero también mide al todo *DC*; por lo que también medirá al resto *CF*, es decir, el mayor medirá al menor: lo cual es imposible.
> Por lo tanto ningún número mayor a *CF* medirá a los números *AB,CD*.
> (Euclides versión Heath 1908 Vol.2: 299)

Es decir, si b_n no fuera el máximo común divisor, entonces existiría $g > b_n$ que dividiría tanto a a como a b. Además dado que $b_1 = a - kb$, entonces g debe también dividir a b_1. Luego como g divide tanto a b como a b_1, entonces g divide a b_2 puesto que $b - k_1 b_1 = b_2$. Además dado que g divide tanto a b_1 como a b_2, entonces g divide a b_3 puesto que $b_1 - k_2 b_2 = b_3$... Continuando con este argumentación, tendríamos que g dividiría tanto a b_{n-1} como a b_{n-2} y por consiguiente, g debe también dividir a b_n puesto que

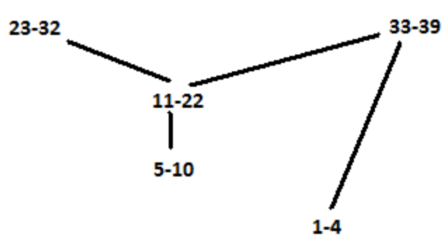
$b_{n-2} - k_{n-1}b_{n-1} = b_n$. Pero si g divide a b_n, entonces $g \leq b_n$. Contradicción. Por lo tanto, b_n es el máximo común divisor.

Expuesta ya una muestra deductiva del Libro VII, podemos aprovechar el trabajo hecho por los estudiosos de la obra euclidiana para simplificar nuestro estudio sobre su totalidad. En particular, Ian Mueller en su libro *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements* expone y explica a las dependencias justificativas de las "proposiciones" allí desplegadas. De acuerdo a este investigador, las dos primeras "proposiciones" de ese libro conforman la base de la siguiente estructura deductiva que soporta a la "Proposición" 33[3]:



(Mueller, 1981: 79)

Mientras que la estructura deductiva global del Libro VII, según Mueller, se puede representar mediante el siguiente diagrama:



(Mueller, 1981:83)

[3] **Proposición 33.** Dados tantos números como se quiera, encontrar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. (Euclides vía Heath, 1908:333)
Es decir, aquí se plantea el problema de la simplificación de la razón a_1: a_2: a_3:....: a_n., mientras que su solución radica en el cómputo de la máxima común medida de a_1, a_2, a_3,....a_n
Por otro lado, cabe mencionar que Mueller acepta que "las dependencias en VII.5-19 fueron ignoradas" (p.79), pues si revisamos la demostración de VII.P.33, podemos atestiguar el uso y mención de VII.P.16 y VII.P.19. Ahora bien, para nuestros fines argumentativos, el detalle de la estructura deductiva de VII.P.33 no importa tanto, sino el reconocimiento de la existencia ella.

Por lo que si revisamos exhaustivamente al Libro VII, veremos que la mayoría de sus "proposiciones", salvo la quinta y las dos primeras que podemos conjuntar pues en ellas se desarrolla el algoritmo euclidiano, dependen justificativamente de algunas otras que les anteceden. Por otro lado, en algunas definiciones de ese libro se puede detectar también una dependencia con respecto a otras anteriores a ellas. Por ejemplo, la segunda requiere de la primera pues indica el significado de "número" con base en el de "unidad". En suma, si en el Libro VII se halla una axiomatización, entonces parece ser que la dependencia ordenada, ya sea justificativa o semántica, es uno de los rasgos de tal clase de construcciones teóricas.

Ahora bien, el nombre mismo de "axiomatización" aunado quizás a nuestro conocimiento preliminar acerca de tales arreglos teóricos, nos conminaría no sólo a detectar a sus dependencias justificativas, sino también a indagar por el origen de todas ellas. En particular, cabe preguntar sobre qué se apoyan las "proposiciones" que ocupan los primeros lugares dentro de las cadenas justificativas del Libro VII, pues para responder a esta cuestión, presumiblemente debemos hallar a los elementos que le otorgan su nombre a estas construcciones teóricas, los *axiomas*. Por lo que a continuación emprenderemos la búsqueda por los axiomas de la aritmética euclidiana, para ser capaces de identificar a la presunta axiomatización en el Libro VII. Tras esta meta aclaratoria seguiremos la pista de cualquier cosa enunciada, cuyo uso como cimiento justificativo pueda ser reconocido para las "proposiciones" desarrolladas en ese libro. Mientras que nuestro rastreo estratégicamente será efectuado sobre un par de "demostraciones" colocadas en dos los pilares mostrados por Mueller de la teoría del Libro VII, empezando por el desarrollo del algoritmo euclidiano, mayoritariamente desplegado en la solución de la "Proposición" 2, para luego realizarlo en la demostración de su Proposición 5.

Retomemos con escepticismo a la solución de la "Proposición" 2 pues ahora deseamos discernir sobre qué se basa. Es decir, es el momento de cuestionar a las garantías ofrecidas en esa "demostración" para el método allí descrito sobre el cálculo de la máxima medida común para dos números, el algoritmo euclidiano. Cabe recordar que la solución para este problema está dividida en dos etapas: en la primera se delinea al proceso de restas sucesivas que genera una medida común de dos números (s.p.g. entre ellos no primos), mientras que en la segunda se demuestra que es la máxima. Por consiguiente, las dudas sobre la "demostración" de la "Proposición" 2 serán canalizadas a cada una de esas dos fases, iniciando por la primera.

Cuando se describe al algoritmo euclidiano en la primera parte de la solución de la "Proposición" 2, únicamente se apela a la Definición 12 y a la Proposición 1 como apoyo de tal procedimiento. En particular, ambas se utilizan para justificar que dicho método no puede terminar en alguna unidad (VII.Prop.1), debido a que el par de números sobre los cuales se aplica no son primos entre sí (VII.Def.12). Sin embargo, saber que el método no puede terminar en una unidad no garantiza que acabe del todo. Es decir, la Proposición 1 no justifica que el método siempre termine, pues ella no solventa la existencia de un número b_n tal que $b_n = b_{n-2} - k_{n-1} b_{n-1}$ y b_n divida a b_{n-1}, sino sólo respalda que b_n no sea igual a una unidad. Así entonces, una primera duda aparentemente no contestada en la solución de la "Proposición" 2 sería: ¿por qué debe existir siempre esa b_n en donde el algoritmo concluya?

La inutilidad justificativa la Proposición 1 respecto a la "Proposición" 2 no debe sorprendernos, ante nuestro aviso de que ambas podían englobarse en el desarrollo del algoritmo euclidiano. Es más, el desdoblamiento de su desarrollo acontecido en el Libro VII sirve para remarcar las diferencias entre la noción euclidiana de número y las concepciones más recientes. Tales discrepancias se manifiestan desde las dos primeras definiciones dadas en ese libro, ya que de acuerdo a ellas, el uno no es un número puesto que una unidad no es una multitud de ellas (VII.Def.2)[4]. En consecuencia, Euclides divide en dos "proposiciones" a la exhibición de su algoritmo para abarcar cuando no termina en un número (VII.Prop.1) y cuando sí lo hace (VII.Prob.2). Por lo tanto, aunque la Proposición 1 carezca de valor justificativo respecto a la "Proposición" 2, ella sí posee una utilidad histórico-semántica relativa a la concepción euclidiana de número.

[4] Curiosamente, aunque una unidad no sea una multitud de ellas, sí podría existir una multiplicidad de ellas. Pues la definición VII.1 puede ser interpretada indicando que cualquier cosa (v.gr. magnitudes geométricas) al reconocerse como *una*, puede ser considerada como una *unidad*.

Por otro lado, si revisamos a la demostración de la Proposición 1, tampoco hemos de hallar una garantía de la terminación del algoritmo euclidiano aplicado a dos números entre ellos primos. Pues como ya fue mencionado, desde la enunciación de esa proposición, se usa como hipótesis a la terminación del procedimiento de restas sucesivas para establecer como criterio de identificación de un par de números primos entre sí, cuando el método termina en una unidad. En suma, en las dos primeras demostraciones del Libro VII no se expresa una razón para que siempre termine el algoritmo euclidiano.

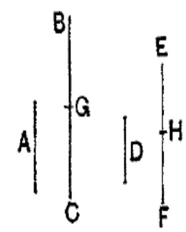
Incluso concediendo que siempre concluya el algoritmo euclidiano, podemos desconfiar de que el número generado, *CF* (b_n), sea una medida común del par de números no primos relativos sobre los cuales se aplica, *AB* (*a*) y *CD*(*b*). Nuevas inquietudes pueden nacer del siguiente paso de la demostración de Euclides: "ya que *CF* mide a *AE*, y *AE* mide a *DF,* entonces *CF* medirá también a DF. Pero como también se mide a sí mismo; entonces también medirá a todo *CD*". En conciso, las inferencias allí realizadas están asumiendo la validez de un par de propiedades de la medición, las cuales afirmarían lo siguiente: (i) cualquier número o unidad se mide a sí mismo y (ii) si *a* mide a *b* y *a* mide a *c*, entones *a* mide a *b+c.* Así entonces, ahora nuestro escepticismo nos incitaría a preguntar, ¿qué sustenta a ese par de asunciones y las convierte en propiedades incuestionables de la relación de medición?

Por último, en la segunda etapa de la solución de la "Proposición" 2 dedicada a demostrar que la medida común es la máxima, las dudas también pueden ser sembradas. En conciso, nuestras dubitaciones ahora los podemos dirigir hacia la siguiente cadena de inferencias: "debido que *G* mide a *CD,* mientras que *CD* mide a *BE*, *G* mide también a *BE*. Pero también mide al todo *BA*; por lo que también medirá al resto *AE*." De nuevo, Euclides está asumiendo algunas propiedades de la medición no estipuladas ni probadas previamente en el Libro VII: (iii) si *a* mide a *b* y *b* mide a *c*, entonces *a* mide a *c* y (iv) si *a* mide a *b* y *a* mide a *c* con *a*>*c,* entonces *a* mide a *d* donde *d*=*b*-*c.* Más aún, el absurdo arribado en esta fase supone que (v) si *a* mide a *b*, entonces no puede ser el caso que *a*>*b* ("el mayor medirá al menor: lo cual es imposible"). Por lo que otra vez podemos con una duda protestar: ¿qué sustenta a este trío de asunciones y las convierte en propiedades de la relación de medición libres de impugnación?

Recapitulando, el algoritmo euclidiano necesita para asegurar su correcto funcionamiento de varias propiedades de la relación de medición y de otra aún no reconocida, que asegure la existencia del b_n en donde termine el método de restas sucesivas, ninguna de cuales es proporcionada o establecida en el Libro VII. Por consiguiente, uno de los puntales que sostienen al desarrollo de la teoría de ese libro, parece estar justificado sobre nada formulado en ese libro. Cabe enfatizar que nuestra crítica no está dirigida hacia la validez del algoritmo euclidiano, pues la solución de la “Proposición” 2 es un buen medio para reconocerla, sino sólo señalamos que nuestro conocimiento de su correcto funcionamiento requiere de otras razones por Euclides aparentemente no brindadas.

Terminada la crítica al desarrollo deductivo del algoritmo euclidiano, ahora cuestionaremos las bases justificativas del otro pilar del Libro VII, para lo cual revisaremos a la demostración de la Proposición 5. Ella afirma que “Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro” (Euclides vía Heath, 1908 Vol.2:304). Actualmente podemos interpretar a esta proposición como la implicación de que si para los números a,b,c,d se cumple que $a = \frac{c}{n}$ y $b = \frac{d}{n}$, entonces $a+b = \frac{c+d}{n}$. Mientras que tal aseveración es demostrada por Euclides de la siguiente manera:

> Sea el número *A* parte de *BC*, y otro número *D* la misma parte de *EF* tal como *A* es a *BC*. Digo que la suma de *A* y *D* es la misma parte de la suma de *BC* y *EF*, tal como *A* es a *BC*. Dado que cualquiera parte que sea *A* de *B*, también lo es *D* de *EF*, entonces, hay tantos números iguales a *D* en *EF* como los hay en *BC* a *A*.
>
> Sea *BC* dividido en los números iguales a *A*, a saber *BG*,*GC*, y *EF* en los números iguales a *D*, a saber *EH*, *HF*, entonces la multitud *BG*,*GC* será igual a la multitud *EH*, *HF*.
>
> Y dado que *BG* es igual a *A*, y *EH* a *D*, entonces *BG*,*EH* son también iguales a *A*,*D*.
>
> Por la misma razón *GC*,*HF* es igual a *A*,*D*.



> Por lo tanto, tantos sean los números en *BC* iguales a *A*, tantos también lo serán en *BC,EF* iguales a *A,D*...Por lo tanto, la parte que sea *A* de *BC*, la misma parta también será la suma *A,D* de la suma *BC, EF*.
>
> (Euclides vía Heath, 1908 Vol.2:304)

La demostración de VII.Prop.5 primero nos ordena realizar la *descomposición* de los números *c* (*BC*) y *d* (*EF*) en sus correspondientes divisores *a* (*A*) y *b* (*D*), i.e. $c=a+a+...+a$ y $d=b+b+...+b$. Dado que *a* y *b* por hipótesis dividen a *c* y a *d* un mismo número *n* de veces, i.e. $c= na = \sum^n a$ y $d=nb=\sum^n b$, entonces a cada *a* en *c* se le puede asociar con uno y sólo un[5] *b* en *d* para formar n números (*a*+*b*). Curiosamente en la demostración original, se hace notar que los (*a*+*b*)'s entre todos ellos son iguales[6]. Por otro lado, la suma de *c* más *d* puede plantearse mediante la suma de los divisores *a* y *b* que respectivamente los *componen*, i.e. $c+d = \sum^n a + \sum^n b$. Por lo que gracias a la relación uno a uno establecida entre las *a*'s de *c* y las *b*'s de *d*, la suma de *c*+*d* se puede *recomponer* mediante los (*a*+*b*)'s del siguiente modo: $c+d = \sum^n a + \sum^n b = \sum^n (a + b)=n\,(a+b)$. Por lo tanto, si $a = \frac{c}{n}$ y $b= \frac{d}{n}$, entonces $a+b = \frac{c+d}{n}$.

Si en la solución del VII.Prob.2 al menos se invocaba a la definición VII.12 y a la proposición VII.1 para delinear al algoritmo euclidiano aplicado a un par de números que no son primos relativos, en la demostración recién reseñada ni siquiera se menciona definición o "proposición" alguna para respaldar a la Proposición 5. Por lo que la falta de una enunciación de cimientos para este otro pilar del libro séptimo, luce más evidente. Sin embargo aquí tampoco vamos a denunciar la invalidez de la demostración de VII.Prop.5, pues sólo nos conformaremos con remarcar la ausencia de razones formuladas en el Libro VII que sirvan de respaldo a esta proposición.

---

[5] No podemos dejar de remarcar que esta capacidad de relacionar uno a uno, apelada en la demostración original para poder formar las parejas *BG,EH* y *GC,HF*, será propuesta y desarrollada matemáticamente muchos siglos después por Dedekind (también por Frege) como un fundamento "lógico" de la noción de número, tal como será expuesto en nuestro capítulo tercero.

[6] Esta peculiaridad probablemente se deba a que el lenguaje empleado por Euclides para referir a los números, esté constituido por etiquetas y no por constantes. Es decir, si "A", "BG", "GC" son etiquetas de un mismo número al igual "D", "EH", "HF" lo son de otro, entonces la igualdad entre lo designado por las etiquetas "A,D", "BG,EH" y "GC,HF" pudiera no ser evidente.

En primer lugar, la *descomposición* de un número en sus partes, es una acción relegada en la definición VII.3 a la medición. Y tal como fue exhibido en la solución de VII.Prob.2, la medición en los *Elementos* es una operación primitiva con muchas propiedades escondidas cuya falta de estipulación, nos obliga a asumirlas. Por consiguiente, la *descomposición* de *c* (*BC*) y *d* (*EF*) en sus respectivas partes *a* (*A*) y *b* (*D*) indicada en la demostración de VII.Prop.5, es una petición sin una dirección estipulada en el libro séptimo. Lo cual, cabe enfatizar, no impide que la hagamos siempre y cuando de antemano sepamos lo que estamos haciendo. Y si la *descomposición* no posee garantías escritas, entonces tampoco las tiene la igualdad $c+d = \sum^n a + \sum^n b$ aludida luego en la demostración de VII.Prop.5, sin importar lo capaces que seamos de reconocerla.

En segundo lugar, la invariancia numérica de la *recomposición* de $\sum^n a + \sum^n b$ en $\sum^n (a + b)$, i.e. que $\sum^n a + \sum^n b$ sea el mismo número que $\sum^n (a + b)$, es sustentada por Euclides sobre una asociación entre los *a*'s y los *b*'s que *componen* respectivamente a *c* y *d,* la cual ahora podríamos identificar como una relación biyectiva. A pesar de que esta clase de relaciones sea correctamente usada en la demostración de VII.Prop.5, ella no está tipificada en los *Elementos.* Por consiguiente otra vez nos encontramos ante la ausencia de razones enunciadas en el Libro VII para apoyar una de las inferencias realizadas en la demostración de su Proposición 5, aquella involucrada en el establecimiento de la igualdad entre $\sum^n a + \sum^n b$ y $\sum^n (a + b)$.

En suma, la Proposición 5 del Libro VII está montada sobre nada explícitamente allí formulado. Por consiguiente al haberse erigido uno de los dos pilares del Libro VII sobre esta proposición, toda esta columna deductiva se ha quedado sin cimientos manifiestos[7]. Lo cual aunado a la falta de garantías escritas para el algoritmo euclidiano (VII.Prop.1 y VII.Prob.2), base del otro pilar de este libro, parece dejar en la orfandad axiomática a toda la teoría aritmética desarrollada en esta sección de los *Elementos*.

[7] Para hacer más evidente la inestabilidad de este pilar, cabe mencionar que VII.Prop.5 es aducida para apoyar directamente a VII.Prop.6, VII.Prop.7, VII.Prop.9 , VII.Prop.10 y VII.Prop.12., mientras que otros tantos respaldos indirectos, como en VII.Prop.8 , podrían ser citados.

En contraste, si revisamos el Libro I hemos de encontrar que las “proposiciones” en las columnas de su estructura deductiva, como su primer problema sobre la construcción de un triángulo equilátero citado en el capítulo previo, están justificativamente apuntaladas, al menos parcialmente, sobre algunos postulados, definiciones o nociones comunes allí formulados[8]. Frecuente se han llamado axiomas a todos estos cimientos justificativos, aunque por respeto a su diversidad amenazada por la también común interpretación de los axiomas como proposiciones verdaderas (autoevidentes o incuestionables o...), conviene denominarlos genéricamente como principios primeros. Ante la falta de su enunciación y de su utilización, una construcción teórica, por más ordenada que se encuentre justificativa o semánticamente, le será negada su condición axiomática. En consecuencia, a pesar de lo ordenada o incluso interesante[9] que nos pueda parecer la teoría del Libro VII, ella no está desarrollada de un modo axiomático pues allí no se formulan principios primeros que sean utilizados para sustentar a las “proposiciones” colocadas en sus bases justificativas.

Sin embargo la complejidad de la catedral euclidiana reconocida desde el comienzo, pudiera instarnos a rebatir a la denuncia hecha sobre la falta de principios primeros en el Libro VII y la consecuente cancelación de su estatus axiomático. Por ejemplo desde una perspectiva histórica, se podría argumentar que la formulación de “todas las asunciones en las que se basan los razonamientos”, en lugar de ser un requerimiento para toda axiomatización sólo indicaría “una divergencia clara entre la noción euclidiana y moderna de” ellas (Mueller, 1981:38). Es más, la formulación de algunos principios como el buen orden para asegurar la terminación del algoritmo euclidiano (VII.Prob.2) o la noción de

[8] Recordando, en la demostración de la primera “proposición” se cita y se usa a la Definición 15 de círculo, al Tercer Postulado que permite construir círculos y a la Primera Noción Común que establece una transitividad para la igualdad, para cimentar a la construcción allí propuesta del triángulo equilátero sobre cualquier segmento de recta dado.
Sin embargo, como ha sido reiteradamente señalado, la intersección entre el par de circunferencias requerida Euclides para hallar al tercer vértice del triángulo, no está sustentada en los principios previamente enumerados. Por lo cual, el apoyo de estos principios a la “Proposición” I.1, aunque sea explícito, sólo es parcial.
[9] Junto con el algoritmo euclidiano, quizás el resultado para nosotros más notable de ese libro sería una versión preliminar del teorema fundamental de la aritmética hallada en su Proposición 31, “Todo número compuesto es medido por algún número primo”

relación biyectiva para establecer la igualdad numérica (VII.Prop.5), pudieran considerarse fuera por muchos siglos[10] del rango conceptual de los *Elementos*. Por lo que nuestra denuncia sobre la falta de primeros principios para la aritmética euclidiana, pudiera desestimarse por su ignorancia histórica.

Ante la defensa histórica previa debemos resaltar al cuantificador utilizado en nuestra crítica del Libro VII. No estamos exigiendo la formulación de *todas* las asunciones detrás de *todos* los razonamientos allí seguidos, enumeración que incluso actualmente no puede ser más que un ideal para las axiomatizaciones. Por el contrario, sólo estamos señalando que para *algunas* de sus proposiciones, las cuales lamentablemente ocupan un lugar primordial dentro de la estructura deductiva del ese libro, se formula *ningún* primer principio que las justifiquen. Más aún, tampoco estamos clamando que esos primeros principios, como el buen orden, pertenezcan a nuestros modernos marcos conceptuales. Es más, el respeto por el contexto lógico-matemático de los *Elementos*, pudiera brindarnos algunas pistas sobre el paradero de los primeros principios perdidos y pedidos para la aritmética euclidiana tal como a continuación será expuesto.

Si nos obstinamos por encontrar a los primeros principios de la aritmética euclidiana, dado nuestro precedente fallo negativo sobre el estatus axiomático del Libro VII, entonces tendríamos que ampliar la extensión y la profundidad de la búsqueda dentro de los *Elementos* para aumentar nuestra probabilidad de éxito. Mientras que la compleja riqueza de esa obra puede alentarnos en nuestra empresa perseguidora de tales primeros principios. Por ejemplo, si inspeccionamos al eminente Libro X pueden llamarnos la atención sus siguientes dos componentes:

> [X.Definición] 1. Aquellas magnitudes que son medibles por la misma medida, se llaman conmensurables, e inconmensurables son las que no pueden tener cualquier medida común.

---

[10] Si bien es en el siglo XIX donde usualmente se ha ubicado la consolidación matemática de estos conceptos debida a los promotores de la lógica o la teoría de conjuntos como Dedekind y Cantor, cabe señalar que estas nociones se pueden hallar desde antes en la historia de las matemáticas. Por ejemplo, Campanus de Novara en su edición del Libro VII que data del siglo XIII, formula explícitamente como su último postulado de los cuatro por él añadidos una noción de buen orden, pues en él establece que cualquier número no se pueda disminuir al infinito: "Nullum numerum in infinitum posse diminui" (Campanus, 1482: lámina 55).

> [X] Proposición 2. Si, cuando la menor de dos magnitudes desiguales por turnos es restada continuamente a la mayor, la que queda nunca mide la anterior a ella, las magnitudes serán inconmensurables.
>
> (Euclides vía Heath, 1908 Vol.3:10,17)

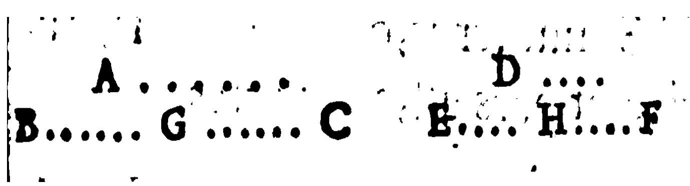
Este par de integrantes del Libro X nos parecen atractivos al sugerirnos un rastro para hallar a las bases axiomáticas del Libro VII. En conciso, *si los números fuesen magnitudes conmensurables* (X.Def.1), *entonces el algoritmo euclidiano desarrollado en* VII.Prob.2, *debe siempre concluir debido a* X.Prop.2. En sintonía con esta pista, la definición VII.2 pudiera interpretarse como la declaración de la conmensurabilidad numérica, al indicar que la medida común de todos los números sería la unidad. Por lo que la definición X.1 al ser usada en la demostración[11] de X.Prop.2, junto con la definición VII.2 de número, pudieran proponerse como los primeros principios sobre los cuales recae la terminación del algoritmo euclidiano desarrollado en VII.Prob.2.

Más aún, la definición VII.2 de número nos ofrece otras huellas deductivas para sospechar que en ella se esconde un principio de la aritmética euclidiana. En particular, el modo argumentativo de la demostración de VII.Prop.5 pudiera contemplarse como basado en la definición euclidiana de número. Recordando, en la demostración de VII.Prop.5 los números *c*,*d* se *descomponen* en sus respectivos divisores *a,b*; para luego asociar estos divisores en los números *a+b* y finalmente *recomponer* mediante estos últimos al número *c+d*. Mientras que de acuerdo a VII.Def.2 un número está *compuesto*

[11] Aunque en la demostración de X.Prop.2 de nuevo se puedan descubrir asunciones escondidas, v.gr.la (iii)transitividad de la medición: "Luego, ya que *E* mide *AB*, mientras que *AB* mide *DF*, entonces *E* también medirá a *FD*" (Euclides vía Heath, 1908 Vol.3: 17), al menos se puede reconocer en ella un *cimiento* que la sustenta: la Definición 1 del Libro X. Esta demostración es una reducción al absurdo pues parte de la suposición de que el proceso de restas continuas no termina pero también supone que el par de magnitudes sometidas a él no son inconmensurables. Luego, si son conmensurables ese par de magnitudes, entonces explícitamente por medio de X.Def.1 se puede inferir que existe una medida común de ambas, denotada en la demostración mediante "*E*". Pero si el proceso de restas continuas nunca termina, entonces podemos generar mediante este procedimiento una magnitud *AG* menor a la medida común *E*. Utilizando un argumento similar al desarrollado en la segunda parte de la "demostración" de VII.Prob.2, se concluye con el absurdo de que *E* mide a *AG,* es decir, el mayor mide al menor! Por lo tanto, X.Def.1 sí se usa y menciona en la demostración de X.Prop.2 para justificar al criterio de detección de un par dos magnitudes inconmensurables allí enunciado. Además, dado que es formulado como una definición, X.Def.1 puede contemplarse como libre de la urgencia por justificarse. En conclusión, X.Def.1 es un primer principio de la teoría desarrollada en el Libro X y por consiguiente, puede proponerse como un principio sobre el cual se apoye la teoría del Libro VII.

por unidades agrupadas (sin restringir cómo) en una multitud, por lo que tal definición pudiera interpretarse como el aval a los procesos de la *descomposición* de un número en sus unidades o en multitudes de ellas (otros números) y de la *recomposición* de una misma multitud de maneras distintas. Por ejemplo la medición bajo esta lectura (casi literal) de VII.Def.2 pudiera considerarse como una clase de *descomposición* en donde todas las multitudes (o unidades) en las que se *descompone* el número medido, corresponden a la del número (o unidad) que las mide. De este modo, la división realizada en la demostración de VII.Prop.5 de los números *c* (*BC*) y *d* (*EF*) en los números que los miden *a*(*A*) y *b*(*D*) estaría respaldada por VII.Def.2; al igual que la *recomposición* del número *c+d* mediante sus partes *a+d* (*BG,EH* y *GC,HF*).

Es más, las representaciones diagramáticas, tan importantes en algunos libros de los *Elementos* como el primero[12], pueden reforzar al apoyo ofrecido por VII.Def.2 a los procesos de *descomposición* y *recomposición* numérica usados en algunas demostraciones del Libro VII. Para tal causa fortalecedora, con fortuna tenemos a nuestra disposición a las representaciones diagramáticas propuestas por Christopher Clavius en su edición de este que data del siglo XVI. En esta versión del Libro VII se representan a los números como hileras de puntitos ("•"), lo cual ayuda a revelar con mayor claridad a la ejecución pero también algunas propiedades de este par de procedimientos. Por ejemplo, los números etiquetados como "BC" (*c*), "EF" (*d*), "A" (*a*), "D"(*b*) y la *descomposición* de los dos primeros en los dos últimos en la demostración VII.Prop.5 , son mostrados por Clavius del siguiente modo:



(Clavius, 1574: 249)

Si las multitudes de unidades, i.e. los números por VII.Def.2, son representadas tal como lo hace Clavius, mediante hileras de puntitos "•" (donde "•" designaría a cada

[12] Por ejemplo y tal como fue expuesto en el capítulo previo, se recurre a un diagrama (Diag. 4 en Cap. 1) para establecer en la intersección de un par de circunferencias, al tercer vértice requerido para la construcción del triángulo equilátero pedida por la "proposición" primera del Libro I.

unidad sobre las cuales trata VII.Def.1), entonces algunas de las asunciones sobre la medición denunciadas en nuestra crítica al estatus axiomático del Libro VII, pudieran hacerse evidentes a través de la expresión diagramática de los números. Pues bajo esta codificación, la medición del número *A* por *B* se realizaría *descomponiendo* a la cadena de "•" que represente a *A*, en hileras de "•" todas ellas representantes de *B*. De este modo la (iii)transitividad entre otras de las propiedades de la medición usadas en el Libro VII pudiera evidenciarse diagramáticamente tal como a continuación se hace[13]:

Sean los números A:= ●●●●●●●●●●●● B:= ●●●● C:= ●●

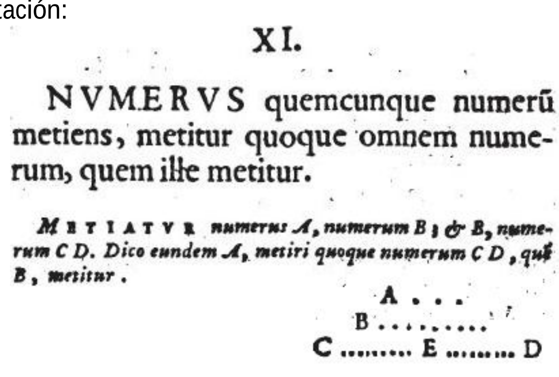
tal que B mida a A: A= ●●●● ●●●● ●●●●

y C mida a B: B= ●● ●●

∴ C mide a A pues A= ●● ●● ●● ●● ●● ●●

Recapitulando, la riqueza de la obra euclidiana puede brindarnos elementos para persistir en nuestra búsqueda por los cimientos del Libro VII. Aquí se propusieron dos líneas de investigación para intentar develar al escondite de los primeros principios de la teoría aritmética allí desarrollada. La primera consistió en interpretar a los números como magnitudes conmensurables, revelando así a X.Def.1 y a VII.Def.2 como las garantías para la terminación del algoritmo euclidiano. La segunda promovió como primer principio a la definición VII.2 al haber identificado en ella, un respaldo para los procesos de *descomposición* y *recomposición* numérica utilizados en algunas demostraciones del libro

[13] Cabe señalar que Clavius en su edición del Libro VII, le agregó explícitamente axiomas a la aritmética euclidiana. Es más, la transitividad de la medición él la formula como tal (Axioma XI) y lo acompaña con un diagrama alimentando así, nuestro deseo por la reivindicación de la importancia deductiva de estos mecanismos de representación:


XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quẽ B, metitur.

A . . .
B . . . .
C .... E .... D

(Clavius, 1574: 245)

séptimo, v.gr. en la de VII.Prop.5. Más aún, la representación diagramática de los números conformada por hileras de unidades denotadas mediante el signo "•", se propuso para asistir a dicha revaloración de VII.Def.2, pues ella facilita y afianza la ejecución de este par de procedimientos. En particular, esa representación diagramática puede servir para especificar como la *descomposición* en hileras iguales (o en unidades) a una operación/relación primitiva en ese libro bastante recurrida: la medición. Mientras que esta caracterización diagramática de la medición, además sirve para mostrar y de este modo apuntalar algunas de sus propiedades, v.gr. su (iii)transitividad, cuya falta de formulación previamente criticamos.

Independientemente de las dificultades que deben enfrentar estas dos tentativas de hallazgo de principios primeros para la teoría del Libro VII[14], no podemos dejar de señalar que ambas tratan de completar algo allí no formulado. En conciso, las dos intentan expandir la interpretación de VII.Def.2 de tal manera que en ella ahora sí sea manifiesta la presencia de un primer principio. Que los números sean una magnitud (conmensurable) es una añadidura. También lo es que de la definición de número como una multitud de unidades, se siga su respaldo a ciertos procedimientos de *composición* o *descomposición* de esas multitudes. Por lo tanto, aunque estos intentos pueden enseñarnos información valiosa sobre los *Elementos*, sobre todo acerca de la concepción euclidiana de número, ellos no pueden revocar nuestro veredicto sobre la falta de enunciación de primeros principios en su libro séptimo.

---

[14] La postulación de los números como magnitudes conmensurables acarrea varias complicaciones para lograr que embone dentro de los *Elementos.* Por ejemplo, convierte en redundante una parte de las teorías del Libro V y Libro VII al propiciar la repetición de resultados (v.gr. V.Prop.1 y V.Prop.2 y VII.Prop.5) e incluso ignora al tratamiento distinto entre las magnitudes y los números en el Libro V (v.gr. V.Prop.1 puede interpretarse como la afirmación de que la multiplicación por un número se distribuye sobre la suma de magnitudes, mientras que V.Prop.2 como la afirmación de que la multiplicación de una magnitud se distribuye sobre la suma de un par de números). Más aún, esta postulación parece violar la ley de homogeneidad entre magnitudes obedecida en los *Elemento*s, pues algo no numérico, la unidad, mide a los números. Por otro lado, la definición VII.2 es demasiado general ya que no especifica los procesos de formación de las multitudes ni tampoco señala propiedades acerca de ellas. Por ejemplo, en ella no se indica la finitud de las multitudes ni tampoco se describe su orden, cualidades que convenientemente son evidenciadas en la representación mediante hileras de puntitos ("•") en la edición de Clavius utilizada. Por lo que la sombra de lo *ad hoc* se proyecta desde la interpretación propuesta para VII.Def.2 que valida los procesos de *descomposición* y *recomposición* numérica.

En resumen, al revisar al Libro VII constatamos una construcción teórica tanto justificativa como semánticamente ordenada: sus "proposiciones" y algunas de sus definiciones se van apuntalando sobre "proposiciones" y definiciones previas. Sin embargo las "proposiciones" iniciales de las dos columnas que sostienen a esta estructura teórica, VII.Prob.2 y VII.Prop.5, resultaron estar justificadas sobre nada enunciado en ese libro. Es decir, el Libro VII carece de primeros principios y por consiguiente, se negó su condición de axiomatización. Mientras que nuestra denuncia sobre esta ausencia no se basó en el nombre dado por Euclides a los candidatos naturales a ser los primeros principios del Libro VII, sus 22 "definiciones", sino a que ninguna de ellas es utilizada para sustentar al algoritmo euclidiano descrito en VII.Prob.2, ni para respaldar la satisfacción establecida en VII.Prop.5 de la relación de "ser [la misma] parte" heredada por los sumandos a su suma.

Por lo tanto, nuestro examen del Libro VII empezó a fincar sobre el *uso* al criterio de identificación para los componentes de una axiomatización. Nuestro análisis además nos conmina a indicar con mayor precisión lo que entenderemos por primeros principios e incluso lo que consideraremos una axiomatización, con el fin de aclarar lo que se le está negando al Libro VII. Mientras que nuestro último esfuerzo canalizado en la refutación de este veredicto negativo mediante la revaloración del papel justificativo desempeñado por la definición euclidiana de número (VII.Def.2), aunque no haya logrado cumplir su cometido, sí fijó nuestra atención sobre la concepción misma de número manejada en los *Elementos*. Nótese que en las "proposiciones" y las definiciones estudiadas sobre los números euclidianos, la inducción matemática no figura.

Ahora bien, al haber dirigido nuestra concentración hacia la concepción euclidiana de número, hemos facilitado su contrastación con la noción de número que desfilará en las axiomatizaciones más adelante expuestas, en las cuales sí participa activamente la inducción matemática. Más aún, al reparar sobre esta vieja concepción numérica, desde ella podemos vislumbrar la injerencia de los modos de razonamiento en la conceptualización de los objetos sobre los cuales se aplican. Es decir, la concepción euclidiana de número parece estar ligada, aunque no sea especificado este vínculo en el

Libro VII, con los procesos de *descomposición* y *recomposición* numérica allí ejecutados para realizar algunas inferencias. Mientras que esta conexión entre concepción y medios de justificación, se hará más evidente entre la noción moderna de número y la regla protagonista de nuestra investigación, la inducción matemática, enlace que a su debido momento será explicado.

En conclusión, Euclides dejó a la axiomatización de la aritmética en vilo. Para evitar dejar en ese estado a nuestra desestimación de la condición axiomática del Libro VII, a continuación será expuesta nuestra caracterización de estas construcciones teóricas.

2.2 Axiomatizaciones: Formulaciones de Principios

Debido a que la inducción matemática es la protagonista de nuestra tesis, la incursión previa dentro de la aritmética de Euclides ha sido nada fortuita, ya que uno de sus objetivos, fue fomentar al marco de estudio para investigar a la relación entre ella y los números naturales. Pues son las axiomatizaciones de la aritmética, como más adelante será mostrado, los sitios teóricos idóneos para realizar su exégesis. Consecuentemente, la enunciación de lo que se comprenderá bajo el término "axiomatización", favorecerá a nuestra investigación al aclarar su marco de estudio. Y tal tarea, en esta sección será cumplida.

Puesto que algunas construcciones teóricas de la aritmética pertenecientes a diferentes épocas han sido y seguirán siendo analizadas, la caracterización de axiomatización por ser ofrecida mayoritariamente tenderá hacia la flexibilidad. Y tal decisión a favor de la diversidad está respaldada desde el estudio previo de los *Elementos*, pues si ese cúmulo de tratados contiene más de una axiomatización, entonces ellas no serían edificaciones homogéneas, pues al menos diferirían en que una tendría postulados mientras que las otras no. Hecha esta aclaración, a continuación será acuñada una caracterización mínima de lo que es una axiomatización con el fin de sustentar la investigación histórica por venir:

Caracterización mínima de una axiomatización: Formulación de principios a partir de los cuales se pueden desarrollar los miembros de una teoría.

Después de brindar una caracterización cuya generalidad se confunde con su vaguedad, ahora corresponde desembrollar sus aspectos centrales para otorgarle también un poco de corrección discriminatoria. Es decir, no cualquier desarrollo teórico ha de ganar su estatus de axiomatización gracias a ella, en consonancia con nuestro rechazo al respecto del Libro VII de *Los Elementos*. Así entonces, sus cuestiones nodales se explicarán siguiendo su orden de aparición en la caracterización mínima, empezando de este modo con la relativa a la "formulación".

La <u>formulación</u> conlleva la elección de lenguaje(s) para desplegar a la axiomatización, lenguaje(s) que impone(n) y provee(n) una serie de requisitos y de recursos exigidos y aprovechados tanto en la especificación de los principios como en el desarrollo de los miembros de la teoría. Cabe enfatizar que el plural no debe ser ignorado entre paréntesis, pues en las axiomatizaciones localizadas en la historia de las matemáticas y no nada más en los libros de lógica, se puede reconocer una mescolanza de lenguajes en su formulación. Por ejemplo, los *Elementos* de Euclides se despliegan en un lenguaje natural (v.gr. el griego), simbólico (v.gr. etiquetas) y gráfico (diagramas). Mientras que tal variedad lingüística, se insiste, explota las características de los medios para alcanzar distintos fines. Por ejemplo, dada la familiaridad con nuestro lenguaje natural, este medio resulta provechoso para cuestiones aclaratorias (v.gr. definiciones en los *Elementos*) mientras que el empleo de diagramas, facilita cierta clase de inferencias útiles para el desarrollo de algunas teorías (v.gr. la del Libro I).

Los <u>principios</u> formulados normalmente pertenecen a alguna de las dos siguientes clases: **(1)proposiciones/cláusulas de construcción primeras** ó **(2)métodos de inferencia**. Algunos nombres que se le han dado a las (1.1)proposiciones primeras son "axiomas", "nociones comunes", "definiciones", "postulados" mientras que a las (1.2)cláusulas de construcción le han correspondido entre otras las etiquetas de "postulados", "definiciones", "axiomas". Es decir, por el mero nombre no se distinguen las unas de las otras. Para empezar a mostrar su diferencia, podemos citar algunos ejemplos del Libro I de los Elementos: las primeras tres nociones comunes, los dos últimos postulados y la Definición 15 de círculo son instancias de (1.1)proposiciones primeras mientras que los otros postulados lo son de las (1.2)cláusulas de construcción. Por otro lado, los (2)métodos de inferencia han sido llamados entre otros nombres como "reglas de inferencia" y "métodos de prueba". Ejemplos de (1.1)métodos de inferencia lo son las reglas de introducción para las constantes lógicas, la inducción matemática, método protagonista de esta tesis, y la reducción al absurdo, la cual es empleada en la solución expuesta de VII.Prop.2 para demostrar que la medida común obtenida mediante las restas sucesivas es la máxima.

Ahora bien, un par de lineamientos que emergieron en la investigación previa sobre el Libro VII de los *Elementos*, ahora serán retomados e instaurados como moduladores de la caracterización mínima propuesta. En primer lugar, la enunciación de (1)proposiciones /cláusulas de construcción primeras o de (2)métodos de inferencia es una condición necesaria para cualquier axiomatización[15], tal como fue exigido para la construcción teórica de la aritmética euclidiana. Sin tal restricción, la petición por la formulación de principios sería tan ambigua que aumentaría en un grado no deseable la permeabilidad de la caracterización mínima ofrecida. Es decir, debido a nuestro desconocimiento de algún desarrollo teórico carente por completo de tales principios que haya sido promovido de manera consensuada como una axiomatización en algún momento dentro de la historia de las matemáticas, entonces su formulación aquí será promovida como indispensable.

---

[15] Cabe señalar que la disyunción puede ser satisfecha exclusivamente por uno de sus disyuntos. Ejemplo de una axiomatización cuyos principios formulados pertenecen únicamente a la primera clase es el primer libro de los Elementos de Euclides. Ejemplo de una axiomatización cuyos principios enunciados solamente son miembros de la segunda clase es el sistema de deducción natural para la lógica intuicionista (cálculo NJ), la cual fue expuesta por Gentzen en sus *Investigaciones sobre la Deducción Lógica* (1934).
Ahora bien, al promover al Cálculo NJ como una axiomatización, se desea remarcar la flexibilidad de la caracterización mínima propuesta, sin dejar de reconocer la diferencia entre esta clase de cálculo y los sistemas axiomáticos ortodoxos (denominados usualmente como sistemas de Hilbert), la cual fue distinguida por su mismo creador:

> Externamente, la diferencia esencial entre las "derivaciones-NJ" y las derivaciones en los sistemas de Russell, Hilbert y Heyting es la siguiente: en los últimos las fórmulas verdaderas se derivan de una secuencia de "fórmulas lógicas básicas" por medio de pocas formas de inferencia. La Deducción Natural, en contraste, no empieza en general de proposiciones lógicas básicas, si no de asunciones...sobre las cuales se aplican las deducciones lógicas. Por medio de una inferencia terminal el resultado se hace de nuevo independiente de las asunciones. (Gentzen, 1935 vía Szabo 1969: 75)

Y si a pesar de la diferencia admitida por Gentzen se desea mantener la flexibilidad en la caracterización mínima, es por el hecho que será expuesto en el cuerpo del texto de que un axioma puede ser reinterpretado como una regla de inferencia y viceversa.

Consecuentemente, las (1)proposiciones/cláusulas de construcción primeros y los (2)métodos de inferencia serán llamados **principios básicos**.

En segundo lugar, la otra directriz importada del estudio inicial sobre los *Elementos*, ya ha sido obedecida en la separación de los principios básicos en clases y subclases. Es decir, que un principio básico sea una (1.1)proposición primera o una (1.2)cláusula de construcción o (2)un método de inferencia, dependerá de su uso y no de su nombre ("definición", "axioma", etc.) otorgado en su respectiva axiomatización. Con respecto a la división de la primera clase de principios básicos, podemos citar al Postulado 1 de Euclides para mostrar cómo su catalogación aquí estará basada en su empleo. En la traducción de Heath de la edición Heiberg, tal postulado indica lo siguiente: "Trazar un línea recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera" (1908, vol.1:154). A veces, tal postulado ha sido interpretado como la aseveración de que "por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta"[16]. Mientras que si revisamos las demostraciones y soluciones del Libro I, constataremos que el Primer Postulado se utiliza para construir líneas rectas en las edificaciones geométricas allí descritas[17]. En consecuencia con tal uso, ese postulado será catalogado como una (1.2)cláusula de construcción y no como una (1.1)proposición primera, reivindicando así su primera traducción en este párrafo transcrita. De esta pragmática manera, las (1.1)proposiciones primeras asientan propiedades o relaciones mientras que las (1.2)cláusulas de construcción instauran modos de generación de sus objetos u estructuras mentadas, y todos ellos *qua* principios básicos, deben ser empleados en el desarrollo de su teoría.

---

[16] Por ejemplo, la versión castellana de los *Elementos* montada en la omnipresente web (http://www.euclides.org), enuncia al Postulado 1 de la manera transcrita en el cuerpo de texto. En general, aquellos adheridos al método axiomático más moderno (i.e. el surgido entre el siglo XIX-XX gracias a los trabajos de Pasch, Peano, Russell, Hilbert…) tenderán a interpretar a los tres primeros postulados de Euclides como aserciones existenciales sin respetar a su formulación y aplicación originales. Nótese también que la unicidad de la línea recta es un añadido del traductor y por ejemplo, Hilbert en sus *Fundamentos de la Geometría* la agrega como otro axioma. Más adelante en el cuerpo del texto se expondrá cómo la Definición 4 del Libro I puede otorgarle la unicidad a la recta aludida en el Postulado 1.

[17] Por ejemplo, se emplea desde la solución de la "Proposición" 1 con antelación varias veces citada. En la solución dada por Euclides a tal problema, luego de haber obtenido al punto G mediante de la intersección de un par de circunferencias centradas respectivamente en los extremos A,B del segmento AB dado, se nos indica "trácense hasta los puntos A,B las rectas GA y GB" por medio del Postulado 1.

Más aún, la diferencia aquí marcada entre (1)proposición primera/cláusula de construcción y (2)método de inferencia también está fincada en su uso. Los principios básicos de la primera clase establecen propiedades o relaciones o construcciones iniciales, mientras que los segundos son empleados para ir generando más de ellas. Es decir, los primeros sirven como cimientos justificativos pues sobre ellos finalmente se sustentarán los miembros de la teoría, mientras que los segundos fungen como herramientas deductivas pues gracias a ellas se produce la justificación de su membresía.

Sin embargo, cabe enfatizar que las distinciones pragmáticas propuestas son contextuales y no absolutas. Es decir, las clases y subclases de principios básicos no son categóricamente excluyentes, pues de acorde a su uso en tal o cual axiomatización (incluso en la misma), cierto principio básico puede ser considerado como una (1)proposición primera o como (1.1)una cláusula de construcción o como un (2)método de inferencia. Por ejemplo, en una axiomatización para la lógica proposicional podemos tener como proposición primera a la tautología (1.1)"$(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$", mientras que en otra podemos tener como principio básico a su regla de inferencia equivalente (2)"$A,\ A\rightarrow B \vdash A$". Sin embargo la identificación de la equivalencia entre un par de principios básicos pertenecientes a distintas clases, se efectúa externamente a las axiomatizaciones en cuestión, pues dentro de ellas, la labor desempeñada por los principios equivalentes por hipótesis es diferente.

Por otro lado, en los principios básicos de las axiomatizaciones aparecen los términos y las relaciones propias de la teoría axiomatizada. Por ejemplo, el Postulado 1 contiene a los términos teóricos "línea" y "punto". Así entonces, aunada al par de clases previas, por motivaciones semánticas se ha acostumbrado agregar una tercera, a saber, **(3)las definiciones** de los términos y relaciones teóricas. Por ejemplo, la Definición 1 del Libro I entraría dentro de esta categoría, ya que la propiedad adjudicada por ella a los "puntos" de "no tener partes", no es empleada ni para sustentar ni para generar a la teoría allí desplegada. Es decir, tal definición realiza una tarea semántica y quizás también una didáctica e incluso una filosófica, mas aparentemente no tiene un rol justificativo.

No obstante, aunque sea un precepto de las axiomatizaciones más actuales prescindir de la tercera clase de principios definiendo a los términos y relaciones primitivas *implícitamente* mediante (1)proposiciones /cláusulas de construcción primeras[18] o *directamente* a través de (2)métodos de inferencia[19], no debemos ignorar que las labores semánticas eran ejecutadas por las (3)definiciones en las axiomatizaciones más viejas. Es decir, en algunas axiomatizaciones del pasado, las (3)definiciones servían para determinar el significado de sus términos y de sus relaciones teóricas. Además en estas axiomatizaciones usualmente consideradas como más intuitivas, las fijaciones semánticas realizadas por las (3)definiciones también podían asistir en las labores justificativas de sus principios básicos. Por ejemplo, la Definición 4 del Libro 1, "Una línea recta es una línea que yace por igual respecto a los puntos en ella", puede ser interpretada de tal manera que conlleve la unicidad de la línea recta[20]. Es decir, el significado de sus componentes y/o de la definición íntegra, plausiblemente contradice la falta de unicidad de la recta entre un par de puntos[21]. Y tal unicidad, puede ser utilizada para respaldar a la controvertida demostración del primer teorema de congruencia de triángulos enunciado

---

[18] Tal como sucede con los principios básicos, en las axiomatizaciones pueden reconocerse términos y relaciones teóricas a partir de las cuales se pueden desarrollar a los demás términos y relaciones de la teoría. A esta clase de términos y relaciones se les llama primitivos.

[19] Las siguientes palabras de Hilbert escritas en la introducción a sus *Fundamentos de la Geometría* (1899), pueden ser leídas como un pronunciamiento de la definición implícita mediante la primera clase de principios básicos:

> Consideremos tres distintos sistemas de cosas. Las cosas que componen al primer sistema, las llamaremos puntos....; aquellas en el segundo, las llamaremos líneas rectas...; y aquellas en el tercer sistema, las llamaremos planos...
>
> Pensamos acerca de estos puntos, líneas rectas y planos en función de ciertas relaciones mutuas, las cuales las indicaremos mediante tales palabras como "estar en", "entre", "paralelo", "congruente", "continuo", etc. La descripción exacta y completa de estas relaciones son consecuencia de los *axiomas de la geometría*. (Hilbert, 1899 vía Townsend, 1950: 2)

Mientras que las siguientes palabras de Gentzen, promueven la definición mediante la segunda clase de principios básicos:

> A cada símbolo lógico &, $\vee,\forall,\exists,\supset,\neg$ le pertenece exactamente una figura de inferencia que "introduce" al símbolo... y una que lo "elimina". Las introducciones representan,...las "definiciones" de los sus concernientes símbolos, y sus eliminaciones no son más que,...,las consecuencias de estas definiciones. (Gentzen, 1935 vía Szabo 1969: 80)

[20] Quizás del mismo modo que el significado de "soltero" conlleva que todo hombre soltero no esté casado.

[21] Si entre un par de puntos no hubiera una sola línea recta, entonces al menos una de ellas "no yacería por igual" respecto a todos los puntos (entre los cuales se incluyen los extremos compartidos) contenidos en ella.

en I.Prop.4[22]. De este semántico modo, la Definición I.4 representaría un papel justificativo secundario mas no insignificante en el desarrollo de la teoría del Libro I.

Por último, a la formulación, acción e interacción de los principios previamente enumerados se les puede exigir el cumplimiento de estándares vigentes en el momento de la creación de sus axiomatizaciones. A su vez, tales atributos pueden ser formulados como principios, integrando así una última clase de ellos, la cual será etiquetada como **(4)parámetros metateóricos**. Como ejemplos de (4)parámetros metateóricos podemos citar algunas cualidades pedidas a los (2)métodos de inferencia, como su validez[23], o algunas regulaciones de la acción conjunta de los axiomas con las reglas de inferencia, como los criterios para la formación de pruebas[24]. Puesto que la explicitación de esta clase de principios ha cobrado mayor importancia a partir de la revitalización del método axiomático acontecida a finales del siglo XIX y principios del XX[25], entonces no se ahondará demasiado en ellos ya que las axiomatizaciones por ser estudiadas o antecedieron o

---

[22] Proposición 4. Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos comprendidos por las líneas rectas iguales, también tendrá la base igual a la base, y el triángulo será igual al triángulo, y los ángulos restantes serán iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber con aquel que subtienda los lados iguales.

(Euclides vía Heath, 1908 v.1:247)

En la demostración de esta proposición, Euclides emplea al polémico método de superposición, el cual está parcialmente respaldado por la Noción Común 4: "Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí" (155). Mientras que las cosas que coinciden en la demostración de I.P.4 son un par de puntos, extremos de las bases de los triángulos, por lo que gracias a NC4, se infiere la igualdad de las bases. Más aun, esta igualdad también estaría semánticamente apoyada por I.Def.4. , puesto que si no fueran las bases iguales, entonces entre un par de puntos habría dos líneas rectas distintas, contradiciendo así lo dicho por I.Def.4.

[23] A grandes rasgos la validez de una regla de inferencia puede considerarse como la garantía del respaldo dado por las premisas hacia su(s) conclusión(s) obtenida(s) mediante ella. Dicha garantía puede formularse mediante propiedades lógicas, v.gr. una regla de inferencia es válida si toda conclusión derivada por medio de ella es consecuencia lógica de sus premisas.

[24] Un criterio típico señalaría que una prueba es una sucesión finita de proposiciones tal que cada una de ellas o es un axioma o es obtenida a través de la aplicación de alguna regla de inferencia a algunas proposiciones que le anteceden en dicha sucesión.

[25] Lo cual no implica que en otras épocas más antiguas las cuestiones aquí denominadas como metateóricas no hayan sido estudiadas. Es más, el autor del tratado protagonista de capítulo anterior y que aquí será retomado desde el punto de vista axiomático, desarrolló tales temas en su obra titulada "*Del Espíritu Geométrico y del arte de persuadir*" . En tal obra, Pascal promueve al método axiomático y establece algunos criterios que debe cumplir, por ejemplo:

Reglas para las definiciones
1. No emprender la definición de ninguna cosa conocida por sí misma, de tal manera que uno carezca de términos más claros para explicarla. 2. No admitir, sin definición, ningún término un poco oscuro o equívoco, 3. No emplear en la definición de los términos más que palabras perfectamente conocidas o explicadas.

(Pascal, 1995: 130)

surgieron justo en el momento de tal revaloración. Una vez desglosados los principios como básicos ((1.1)proposiciones primeras, (1.2)cláusulas de construcción y (2)métodos de inferencia), algo arcaicos ((3) definiciones) y demasiado modernos((4)parámetros metateóricos), ahora procederemos a glosar al siguiente componente de nuestra caracterización mínima de una axiomatización.

El desarrollo de los miembros de una teoría en el caso ideal nos remite a su generación puntual acorde a los principios formulados en la axiomatización. La calificación de "Ideal" se debe a la constante falta de una explicitación exhaustiva de todos los factores involucrados en el desarrollo de las teorías axiomatizadas dentro de la historia de las matemáticas. Es decir, es común que no todos los principios partícipes de una axiomatización sean en ella enunciados. Y dicha naturaleza ideal se ve reflejada en la caracterización mínima de una axiomatización a través de la modulación modal del desarrollo de los miembros de la teoría allí mentado, al indicarse que puede efectuarse a partir de sus principios. Si esa posibilidad se convierte o no en un hecho, es una decisión por ser establecida caso por caso debido a la diversidad de estas construcciones teóricas cuya factibilidad incluso puede ponerse en duda[26].

Ahora bien, al desarrollo se le puede demandar ciertos atributos, por ejemplo que sea ordenado tal como el de la teoría del Libro VII de los Elementos. No obstante, el rasgo comúnmente exigido al desarrollo es que sea deductivo, cualidad que a su vez puede especificarse mediante 4)parámetros metateóricos sujetos a los estándares lógico-matemático-filosóficos de la época de la axiomatización. Aunque parezca atractivo recurrir

[26] De antemano hay buenas razones para dudar acerca de la eliminación de la modalidad, razones cuya argumentación rebasan al objetivo de este trabajo. Intuitivamente parece imposible especificar absolutamente a todos los principios involucrados en el desarrollo de una teoría axiomática, pues su explicitación debería abarcar un variado y complejo espectro conformado al menos por cuestiones lingüísticas, lógicas y epistemológicas. Mientras que el famoso argumento "escéptico" de Wittgenstein versión Kripke sobre seguir una regla (mentado también en una nota de pie de página en el capítulo anterior) puede ser usado para reforzar a nuestra escrupulosa intuición. Si la expresión de una regla no determina a los usos acordes a la regla, en particular para las reglas de inferencia (principios básicos de la segunda clase), entonces la modalidad en el "pueden desarrollarse" en nuestra caracterización de una axiomatización, quedaría por este pirrónico antecedente apuntalada.

a los criterios más actuales para discernir a lo deductivo[27], debido a la naturaleza histórica del estudio comparativo por efectuarse, no se ejercerá tal discriminación lógica. Bastará con indicar que el desarrollo de la teoría se ejecuta mediante demostraciones (sean éstas lo que hayan sido, sean y serán), para delimitar dentro de las matemáticas a este componente de nuestra caracterización mínima de una axiomatización. Hecha esta observación, ahora se procederá a la dilucidación de su último elemento.

Los miembros de una teoría más comunes en una axiomatización, son las proposiciones, ya sean (1.1)primeras o aquellas generadas a partir de los principios básicos que son llamadas teoremas. Sin embargo como ya fue mostrado en los *Elementos* mediante la revelación de la naturaleza "problemática" de algunas de sus proposiciones, también pertenecen a una teoría los métodos de cálculo (v.gr. el algoritmo euclidiano) y los procedimientos de construcción (v.gr. el del triángulo equilátero por medio de regla y compás en I.Prop.1). Sin embargo, ya que los teoremas y los métodos de cálculo/construcción logran la inclusión a su teoría a través de una justificación conseguida a partir de sus respectivos principios básicos, entonces resulta más informativo guardar ese registro y considerar a cada miembro como una dupla conformada por éste y su justificación. Por consiguiente, las demostraciones convenientemente también integrarán a los miembros de una teoría.

Resumiendo, al proponer a una axiomatización como una formulación de principios a partir de los cuales se pueden desarrollar los miembros de una teoría, se desea brindar una caracterización con la flexibilidad suficiente para efectuar el estudio comparativo de algunas axiomatizaciones de la aritmética aparecidas en la historia de las matemáticas. Mientras que a través del desglose de tal caracterización mínima, se intenta brindarle la rigidez necesaria para no aceptar a cualquier desarrollo teórico como una axiomatización.

---

[27] Por ejemplo, un desarrollo deductivo se puede postular como aquel que satisface las siguientes propiedades basadas en los trabajos de Gentzen (1935) y Tarski(1935) :
Si A es un conjunto de axiomas entonces el desarrollo teórico a partir de *A*, Teoría(A), es deductivo si:
(i) $A \subseteq$ Teoría(A)
(ii) Teoría (Teoría (A)) $\subseteq$ Teoría (A)
(iii) Si $B \subseteq A$ entonces Teoría(B) $\subseteq$ Teoría(A),

En particular, se ha exigido como indispensable en las axiomatizaciones matemáticas a la formulación de principios básicos ((1.1)proposiciones primeras, (1.2)cláusulas de construcción , (2)métodos de inferencia) que participen en el desarrollo mediante demostraciones de su teoría. Antes de anunciar las obras sobre las cuales esta caracterización fungirá como marco de estudio, ahora se tratará de robustecerlo añadiéndole un componente teleológico-pragmático.

Aunada a la caracterización mínima de una axiomatización, también formará parte de nuestro marco de estudio una cuestión pragmática relativa a las distintas finalidades que han tenido tales desarrollos teóricos. Si bien nuestra caracterización propuesta, contesta bien que mal lo que son, ella no sirve para responder el por qué de sus apariciones (o desapariciones) a lo largo de la historia de las matemáticas. Y si se desea averiguar para qué han sido creadas, es porque la revelación de sus distintas finalidades, se presume de utilidad para clarificar a su conformación misma. Por ejemplo, la diferencia entre los objetivos perseguidos por el creador (o creadores) del Libro I y el Libro VII de los *Elementos*, pueden servir para explicar por qué en el primero se enuncian postulados mientras que en el segundo no[28]. Más aún, se tratará de develar en la medida de lo posible los objetivos buscados por sus autores, para evitar cargar al marco de estudio con preconcepciones que en lugar de mejorar nuestra comprensión de las axiomatizaciones, la compriman bajo algún supuesto filosófico[29] o alguna meta lógico-matemática[30].

Especificado el marco de estudio, ahora procederemos a aplicarlo a algunas obras relativas a la aritmética realizadas por matemáticos de distintas épocas. Y a modo de conclusión de esta sección, ahora se indicarán los tratados por ser examinados bajo el supuesto de que en ellos puede ser reconocida la formulación de principios a partir de los

[28] Por ejemplo, la regulación meticulosa de las construcciones geométricas provista por los primeros tres postulados, puede interpretarse como persecutoria de la finalidad de asegurar la existencia de los objetos por medio de ellos construidos. Mientras que si la existencia de los números es asumida desde el principio, como parece ser el caso en el Libro VII, entonces el desarrollo de su teoría no tendría como finalidad las garantías existenciales y consecuentemente, no precisaría de postulados constructivos.
[29] Por ejemplo, desde una perspectiva epistemológica usualmente se ha asociado a las axiomatizaciones con la tarea de fundamentar al conocimiento matemático.
[30] Por ejemplo, desde un punto de vista lógico, la depuración lingüística ha sido uno de los objetivos comúnmente vinculado con las axiomatizaciones.

cuales se desarrollan sus respectivas teorías, suposición acompañada por la asunción de que son identificables algunas de las metas perseguidas por sus autores en la creación de tales obras.

Cuando de las axiomatizaciones de la aritmética se trata, irremediablemente los axiomas de Peano-Dedekind en tal discusión figuran. Su precisa y concisa constitución lógico-matemática, los ha convertido en el paradigma axiomático de la aritmética. Por consiguiente, las obras de ese par de matemáticos donde asientan tales axiomas, serán posteriormente analizadas. Es decir, los *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889) de Peano y el *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) de Dedekind formarán parte de nuestro estudio comparativo. Más aún, la inspección de tales tratados nos resulta imprescindible, puesto que en ellos el puesto primordial de la inducción matemática dentro de la aritmética, es donde parece consolidarse.

Ahora bien, como consecuencia de nuestro juicio negativo sobre el Libro VII, se puede llegar a creer sobre la existencia de un prolongado periodo de tiempo estéril para las axiomatizaciones de la aritmética, el cual fue interrumpido por la revitalización del método axiomático acontecida en el siglo XIX gracias, entre otros, a Peano. Es decir, dada la cancelación del estatus axiomático del Libro VII y la absorbente fama de los axiomas de Peano-Dedekind, entonces se puede pensar que en el intervalo comprendido entre tales obras, no hubo axiomatizaciones de la aritmética. Y tal creencia, aquí será refutada. Por un lado, algunos comentadores de los *Elementos*, como los ya mencionados Campanus (nota 10) y Clavius, proveyeron a la aritmética euclidiana de principios básicos afines a los formulados en su prototípico Libro I. Es decir, algunos estudiosos de Euclides suplieron a su aritmética de postulados y de axiomas[31]. Por otro lado y más importante para los fines

[31] En la nota 13 ya fue enseñado uno de los axiomas provistos por Clavius, mientras que Campanus enuncia entre otros principios a los siguientes cuatro postulados para la aritmética:

> **C** Cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales prout libet, vel multiplices. **C** Cuilibet numero aliquem quantumlibet sumere posse maiorem. **C** Seriem numerorum in infinitum posse procedere. **C** Nullum numerum in infinitum posse diminui. (Campanus, 1482: lámina 55)

Pos.1: Dado cualquier número es posible tomar otro [número] que sea igual y otros [números] (cuantos se quieran) que sean múltiplos. Pos.2: Dado cualquier número es posible tomar otro [número] que sea mayor (tanto como se quiera). Pos.3: La sucesión de números se puede continuar (extender) indefinidamente (al infinito). Pos.4: cualquier número no se pueda disminuir al infinito.

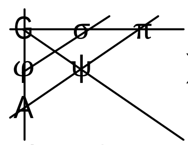
de la presente tesis, antes de Peano y Dedekind, se puede encontrar una axiomatización en donde ya se muestra a la inducción matemática ocupando su lugar fundamental dentro de la aritmética. Y el libro donde se ubica tal axiomatización, es un viejo conocido nuestro, pues no es otro si no el *Traité du triangle arithmétique* (1654) expuesto en el capítulo anterior. Por lo tanto, junto con las obras mencionadas de Peano y Dedekind, el tratado de Pascal seré el último integrante del estudio comparativo que será más adelante realizado, el cual a su vez ayudará a cumplir con el objetivo de la presente tesis de dilucidar la relación entre la inducción matemática y los números naturales.

Resumiendo, a continuación se analizarán y compararán bajo el marco de estudio en esta sección delineado, tres obras escritas respectivamente por Pascal, Dedekind y Peano. Por cuestiones cronológicas y expositivas, nuestra exégesis empezará en el *Tratado del Triángulo Aritmético* dado que ya fue introducido en el capítulo previo. Mientras que por los apremios formales de la extensión, las monografías de Peano y de Dedekind serán expuestas en un capítulo posterior.

2.3 La axiomatización en el Triángulo Aritmético de Pascal

En este apartado se mostrará que en el *Tratado del Triángulo Aritmético*, se desenvuelve una axiomatización respetuosa de la caracterización mínima propuesta. Además, al identificar esta obra de Pascal como una axiomatización, se busca presentarla de manera adecuada para su posterior estudio comparativo con los principios las de la aritmética de Peano-Dedekind y de este modo eventualmente argumentar, que el apelativo “Aritmético” en el título de esta obra de Pascal no es accidental.

Con el contenido del tratado de Pascal expuesto en el capítulo previo, se ha acumulado la cantidad suficiente de información para extraer de ella a los principios de la presunta axiomatización escrita en esa obra. Mientras que esa supuesta presencia se irá asentando cuando se retome la demostración del la Consecuencia Duodécima, pues a través de la exposición del uso de los principios reconocidos, se irá haciendo más nítida su categorización.

Así entonces, primero serán desglosados los principios detectables en el material con antelación transcrito, a saber, un conjunto de (3)definiciones agrupables por su función de especificar lo que es un triángulo aritmético, un par de (1.2)cláusulas de construcción que serán englobadas como el postulado R y un (2)método de inferencia identificado con la etiqueta “IMP”. Además se adoptará la notación de variables indexadas c_{ij} usada en el capítulo previo, para facilitar las enunciaciones y posteriores comprensiones de tales principios; sin dejar de recordar que en la formulación original de tales principios, son empleados un lenguaje natural (francés), uno simbólico (“G”,”φ”,”σ”,etc.) y uno diagramático (

); mientras que para asistir a nuestra memoria se han agregado fragmentos de su fuente como notas de pie de página.

3) Definición de triángulo aritmético. Es cualquier figura (etiquetémosla como P) formada al efectuar tales y cuales trazos [descripción del proceso para dibujarla como la ofrecida por Pascal en sus palabras reproducidas en el capítulo previo[32]]:

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}...	
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}		
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}			
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}				
c_{51}	c_{52}	c_{53}					
c_{61}	c_{62}						
c_{71}						...P	
:							

Donde:

3.1) c_{ij} es una *célula* con i,j>0

3.2) *i* es el *rango paralelo* de la célula c_{ij}

[32] Recordemos algunas de ellas:

Llamo Triángulo Aritmético a una figura con la construcción siguiente.
Trazo desde un punto cualquiera, G, dos líneas perpendiculares una a la otra, GB,Gζ, en cada una de las cuales tomo partes iguales y continuas, tantas como quiera; comenzando en G las nombro 1,2,3,4,.etc.; y esos números son los exponentes de las divisiones de la línea.
A continuación uno los puntos de la primera división que están en cada una de las dos líneas con otra línea que forma un triángulo del cual es la base.... (Pascal, 1665 vía 1994:53)

3.3) j es el *rango perpendicular* de la célula c_{ij}

3.4) La *base n* está conformada por las células c_{ij} tal que $i+j=n-1$

3.5) c_{ij} y c_{ji} son células *recíprocas.*

1.2) Postulado del triángulo aritmético[33]. El número de cada célula c_{ij} será obtenido por medio del siguiente par de reglas (llamémoslas R)

R1) $c_{ij} = k$ **si** $i=1$ **y** $j\geq 1$ **ó** $i\geq 1$ **y** $j=1$ **(donde el natural** $k>0$ **se llama generador)**

R2) $c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ **si** $i>1$ **y** $j>1$ **... R**

2) Regla de Pascal para la inducción matemática débil (IMP): Cuando de una infinidad de varias cosas podemos tomar una primera de ellas, mientras que cada una de las otras puede ser tomada siempre pudiendo elegir a la siguiente de la anterior, entonces se puede afirmar que todas las cosas desde la primera hasta la infinidad tienen necesariamente cierta propiedad si se demuestra el siguiente par de lemas:

Lema 1: En la primera cosa se encuentra la propiedad propuesta.

Lema 2: Si la propiedad se encuentra en cualquiera de las cosas, entonces se halla en la siguiente.

Luego de haber enlistado a los principios previos, se deben verificar sus funciones desempeñadas en el tratado para corroborar su enunciación como tales. Es decir, se debe analizar la manera en que participan en el desarrollo de la teoría y aplicaciones del triángulo aritmético, para confirmar las labores semánticas, constructivas y justificativas correspondientes a su catalogación. Ventajosamente, en el capítulo previo ya fueron expuestas varias demostraciones del tratado en donde tales usos ya fueron evidenciados. Por lo que ahora sólo será retomada la demostración de la Consecuencia Duodécima, para

[33] El postulado formulado en palabras de Pascal es el siguiente:

> El número de la primera célula ... habiéndose colocado éste, todos los otros están forzados; y por esta razón se llama el *generador* del triángulo. Y cada uno de los otros está especificado por esta única regla:
> El número de cada célula es igual al de la célula que la precede en su rango perpendicular, más aquél de la célula que la precede en su rango paralelo... (Pascal, 1665 vía 1994: 54-5)

sintonizar al análisis previamente hecho con la terminología aquí manejada. Para facilitar tal adecuación confirmatoria, de nuevo serán reproducidas dicha consecuencia junto con su demostración tanto en su enunciación original traducida al castellano como en su redacción más contemporánea con variables indexadas:

> Consecuencia duodécima.
>
> En todo Triángulo aritmético, cuando dos células contiguas están en una misma base, la superior es a la inferior como la multitud de células desde la superior hasta lo alto de la base es a la multitud de aquéllas desde la inferior incluyendo hasta la de abajo.
>
> Si bien esta proposición tiene una infinidad de casos, daré una demostración muy corta, suponiendo 2 lemas.
> El 1, que es evidente por sí mismo, que esta proporción se encuentra en la segunda base; pues es muy visible que φ es a σ como 1 a 1.
> El 2, que si esta proporción se encuentra en una base cualquiera, se encontrará necesariamente en la base siguiente.
> De donde se ve que lo es necesariamente en todas las bases: pues lo es en la segunda por el primer lema; así pues por el segundo lo es en la tercera base, así pues en la cuarta, y al infinito.
> Es necesario, solamente, demostrar el segundo lema de la siguiente manera. Si esta proporción se encuentra en una base cualquiera, como en la cuarta Dλ, es decir, si D es a B como 1 a 3, y B a θ como 2 a 2, y θ es a λ como 3 a 1, etc.; digo que la misma proporción se encontrará en la base siguiente, Hμ, y que, por ejemplo, E es a C como 2 a 3.
> Pues D es a B como 1 a 3, por la hipótesis.
>
> Por lo tanto $\underbrace{D + B}_{E}$ es a B como $\underbrace{1 + 3}_{4}$ a 3.
>
> E a B como 4 a 3.
>
> Igualmente B es a θ como 2 a 2, por la hipótesis.
>
> Por lo tanto $\underbrace{B + \theta}_{C}$ es a B como $\underbrace{2 + 2}_{4}$ a 2.
>
> C a B, como 4 a 2.
> Pero B a E, como 3 a 4.
> Por lo tanto, por la proporción problematizada, C es a E como 3 a 2.
>
> C.q.f.d. (Pascal, 1665 vía 1994:60-1)

Mientas que en notación moderna, dicha consecuencia junto con su demostración explícitamente generalizada se escribirían de la siguiente manera:

Consecuencia Duodécima: Para toda i>1 y j≥1 ó i≥1 y j>1, se cumple lo siguiente:

$$c_{ij} / c_{(i+1)j-1} = i / (j-1)$$

Demostración. Inducción débil sobre las bases k, donde k=(i+j)-1.

Lema 1 (Caso Base: k=2). Las células en la base 2 satisfacen a la Consecuencia 12ª, pues $c_{12} = c_{21}$ debido al postulado R1.

Lema 2 (Paso Inductivo). Supongamos que se cumple la proporción para una base cualquiera k y sea c_{ij} cualquier célula en la siguiente base, es decir, i+j=k. Entonces debemos demostrar que

$$c_{ij} / c_{(i-1)j+1} = j / (i-1)$$

Ahora bien, por el postulado R2 tenemos que $c_{ij} = c_{i(j-1)} + c_{(i-1)j}$.

Mientras que hipótesis (inductiva), se tiene que $c_{i(j-1)} / c_{(i-1)j} = (j-1) / (i-1)$.

De donde se sigue que

$$c_{ij} / c_{(i-1)j} = (c_{i(j-1)}+c_{(i-1)j}) / c_{(i-1)j} = c_{i(j-1)}/c_{(i-1)j} + c_{(i-1)j}/c_{(i-1)j} = (j-1)/(i-1) + 1 = (j+i-2) / (i-1)$$

Por otro lado, por R2 tenemos que $c_{(i-1)j+1} = c_{i-1(j)} + c_{(i-2)j+1}$

Además, por hipótesis (inductiva), $c_{(i-2)j+1} / c_{i-1(j)} = (i-2) / j$

De donde se sigue que

$$c_{(i-1)j+1} / c_{(i-1)j} = (c_{i-1(j)} + c_{(i-2)j+1}) / c_{(i-1)j} = c_{i-1(j)}/c_{(i-1)j} + c_{(i-2)j+1}/c_{(i-1)j} = 1 + (i-2)/j = (j+i-2) / j$$

Por lo tanto

$$c_{ij} / c_{(i-1)j+1} = (c_{ij}/c_{(i-1)j}) / (c_{(i-1)j+1}/c_{(i-1)j}) = ((j+i-2)/(i-1)) / ((j+i-2)/j) = j / (i-1) \quad \text{...C.q.f.d}$$

Expuestas de nuevo las demostraciones de la Consecuencia 12ª, ahora procederemos a analizarlas en pos de la confirmación de la catalogación de los tres principios con antelación enunciados. Primeramente en la demostración original del Lema 2, se puede reconocer que el par arbitrario de células (E,C) encontradas en la base siguiente a cualesquiera de ellas (Dλ), es seleccionado con ayuda de la representación del triángulo aritmético localizada en los albores del tratado, la cual fue reproducida en el capítulo anterior y fue aquí traducida en el diagrama P. Es más, no sólo en la elección inicial de ese par de células sino a lo largo de su ejecución, dicha demostración es asistida por el diagrama del triángulo aritmético, pues gracias al él se expresa la descomposición de las células pertinentes (v.gr. E) en la suma del par de células en la base previa (v.gr.

E=D+B), pareja a su vez indicada por los principios constructores (aquí traducidos en el postulado R) del contenido aritmético del triángulo de Pascal. Así entonces, el diagrama del triángulo aritmético suministra recursos lingüísticos para la articulación de la demostración de la Consecuencia 12ª. Es más, también lo hace para el resto de las demostraciones en el tratado, tal como fue parcialmente corroborado en el capítulo previo. De este modo, todos los lenguajes empleados por Pascal en la <u>formulación</u> de sus principios (natural+simbólico+diagramático), también sirven de medio semántico para el <u>desarrollo</u> de la teoría en su tratado.

Cabe señalar que el diagrama original del triángulo aritmético no sólo funciona como medio de expresión para la demostración hecha por Pascal de la Consecuencia 12ª, sino también ayuda en el establecimiento de la consecuencia misma. Por ejemplo, para afirmar que "B [es] a θ como 2 a 2" en el Lema 2, se requiere de dicha figura para contabilizar el número de células en la cuarta base que hay desde B hasta la célula en su límite inferior (D) y que hay desde θ hasta la célula en su límite superior (λ). De igual modo, se necesita al diagrama para asentar que "D es a B como 1 a 3". Es más, si revisamos otras demostraciones en el tratado, como las transcritas en el capítulo previo, también podremos constatar que el diagrama es usado para asentar algunos pasos de las pruebas[34]. Por lo tanto, el diagrama del triángulo aritmético no sólo tiene tareas semánticas en el *Triaté*, sino también cumple con algunas labores justificativas.

Ahora bien, dado que la (3)definición del triángulo aritmético sirve para delinear a su representación diagramática, entonces las funciones semánticas y justificativas adjudicadas al diagrama primigenio, finalmente recaerían en la definición *original* misma. Más aún, si se modernizara el medio de expresión de la demostración de la Consecuencia 12ª, tal como se hizo mediante la utilización de las variables indexadas c_{ij}, entonces las funciones semánticas y justificativas desempeñadas por dicho diagrama podrían ser

---

[34] Por ejemplo, en la demostración de la Consecuencia 2ª ("En todo Triángulo aritmético, cada célula es igual a la suma de todas las células del rango paralelo precedente, comprendidas desde su rango perpendicular incluyendo hasta la primera"), el diagrama del triángulo aritmético proporciona el límite (la célula A) en la descomposición de la célula elegida como instancia (ω) para mostrar la generalidad de dicha consecuencia: $\omega = R + C = R + \theta + B = R + \theta + \psi + \mathbf{A} = R + \theta + \psi + \varphi$

reasignadas e incluso canceladas: las primeras serían realizadas directamente por la (3)definición actualizada, mientras que las segundas gracias a esa definición serían anuladas.

Por una lado, las tareas semánticas del diagrama original pueden ser cabalmente absorbidas por la (3)definición del triángulo aritmético formulada en moderna notación, pues ella puede prescindir de su contraparte diagramática P. Nótese que en lugar de su ostentación diagramática, un triángulo aritmético puede definirse como una sucesión de células c_{ij} tal que $0<i,j\leq n$. Por consiguiente, los términos teóricos del tratado pueden interpretarse refiriendo a tales sucesiones sin mediación de la configuración geométrica P. Por ejemplo, las "dos células contiguas en una misma base" en la Consecuencia 12ª, de acuerdo a la renovada (3)definición, remitirían directamente a las células c_{ij} y $c_{(i+1)j-1}$. Consecuentemente, la (3)definición moderna del triángulo aritmético puede cumplir con la labor de asignación de significado a los términos teóricos haciendo caso omiso de su representación diagramática.

Por otro lado, a través de la moderna (3)definición del triángulo aritmético, su representación diagramática puede perder su trabajo justificativo. En conciso, las inferencias visuales posibilitadas por ese diagrama pueden dejar de ser requeridas por culpa de esa definición. Por ejemplo, en la demostración moderna de la Consecuencia 12ª, ya no se precisa del diagrama P para establecer a la razón allí predicada para las células contiguas en una misma base, puesto que dicho radio puede expresarse directamente mediante los índices que las ubican: $c_{ij} / c_{(i+1)j-1} = i / (j-1)$. Así entonces, debido a que las labores justificativas del diagrama primigenio del triángulo aritmético son prescindibles, entonces la catalogación de la descripción de su construcción como un principio de la tercera clase sería así revalidada: la (3)definición del triángulo aritmético es tal, puesto que su función principal, es de naturaleza semántica. Más aun, dada la costumbre de asociar a las definiciones con labores didácticas, tareas a su vez desempeñadas por el diagrama del triángulo aritmético (ya sea el original o su traducción P) al facilitar su construcción y comprensión, entonces la (3)definición del triángulo aritmético al delinear tal representación gráfica, remarcaría su estatus de principio de la tercera clase.

En segundo lugar, desde el capítulo anterior se mostraron a los principios constructores del triángulo aritmético, aquí englobados bajo el nombre de (1.2)Postulado R, como los responsables de afianzar a los pasos deductivos de las demostraciones dentro del tratado. Y ese rol justificativo otra vez ha sido remarcado en la traducción de la demostración de la Consecuencia 12ª, pues en ella están señalados los respaldos ofrecidos por R1 o R2 a sus respectivas inferencias. En particular, ya fue argumentado que la generalidad de las conclusiones (v.gr. el Lema 2) derivadas a partir de instancias (v.gr. la satisfacción de la Consecuencia 12ª en la base Dλ implica su satisfacción en la siguiente base), está fincada en el par de cláusulas de construcción aritmética aquí identificados como el (1.2)Postulado R. Por lo que bajo la terminología y metodología planteada en este capítulo, debido a su uso en el desarrollo de la teoría y aplicaciones del triángulo aritmético, el (1.2)Postulado R sería un principio básico de la primera clase.

Por último, en el capítulo previo también fue discutido que en el tratado de Pascal no sólo se sigue sino también se formula un método de inducción matemática, el cual fue aquí etiquetado como la (2)regla IMP. En particular, se argumentó que el uso de la (2)regla IMP en algunas demostraciones del *Traité* (v.gr. la de la Consecuencia 12ª), asiste a su formulación como método de inferencia dentro de esa obra. Más aún, se ofrecieron razones para respaldar la validez de la (2)regla IMP dentro del contexto lógico-epistémico del tratado, pues tal atributo (aquí considerado dentro de los (4)parámetros metatéoricos) normalmente se ha exigido en las matemáticas a los métodos de inferencia. Por lo tanto, en el capítulo anterior ya fue defendida la postulación de la (2)regla IMP como un principio básico de la segunda clase.

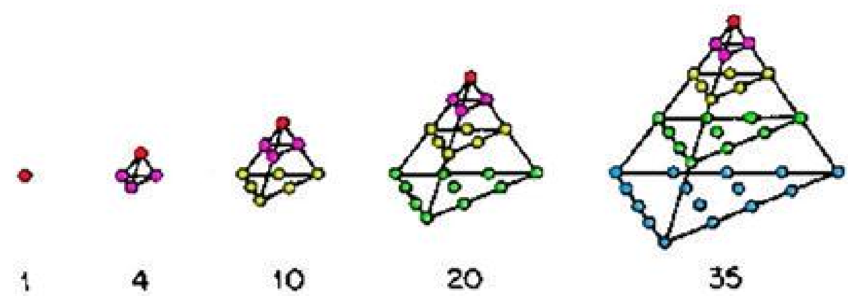
Recapitulando, desde antes de comenzar el presente capítulo, ya disponíamos de razones para poder identificar y catalogar con base en la caracterización mínima propuesta, al (1.2)postulado R y la (2)regla IMP como principios básicos de la presunta aunque cada vez más distinguible, axiomatización del Triángulo Aritmético. Por lo que hasta el momento, sólo han sido añadidas algunas líneas argumentativas para respaldar el papel de principio de tercera clase fungido por la (3)definición del triángulo aritmético. En particular, se señaló la participación semántica pero también justificativa del diagrama primigenio del triángulo aritmético, delineado en su (3)definición, en el desarrollo del contenido del *Traité*. Más aún, se mostró que dicha (3)definición cuando se presenta en moderna notación, puede cumplir cabal y exclusivamente sus funciones semánticas sin necesidad de su representación diagramática, remarcando de este modo su papel de principio de tercera clase. Así entonces, después de haber abogado a favor de la presencia y formulación de estos tres principios en el *Tratado del Triángulo Aritmético*, ahora será expuesto otro componente de la caracterización mínima presente en dicha obra de Pascal: los miembros de la teoría allí desarrollados. Más aún, al exhibir al contenido del tratado, se obtendrán nuevas razones para confirmar nuestra labor de reconocimiento previa sobre sus principios básicos.

Como ya fue mencionado, el *Traité* a grandes rasgos está divido en dos bloques. En el primero se desarrolla la teoría propia de los triángulo aritméticos, mientras que en el segundo se extiende esa teoría hacia diversas interpretaciones de los números en sus celdas, las cuales a su vez sirven para resolver algunos problemas, como el del cómputo de las combinaciones de k elementos tomados de n objetos o el del cálculo de los coeficientes en la expansión de potencias positivas de binomios. Puesto que en este momento es de nuestro interés el reconocimiento de los miembros de la teoría allí desarrollados, entonces ahora sí serán expuestas algunas de esas interpretaciones, empezando con la primera localizada en el segundo bloque del tratado.

La primera aplicación (interpretación) del triángulo aritmético expuesta por Pascal en la parte du su tratado titulada "USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES", está destinada a los órdenes numéricos. Ahora bien, los órdenes numéricos primigenios, corresponden a algunos tipos de números figurativos mientras que estos últimos, son conjuntos de números naturales agrupables mediante algún patrón geométrico sobre el cual se pueden acomodar las unidades, representadas mediante puntos ("•"), de sus miembros. A los pitagóricos se les acostumbra adjudicar la concepción de los números figurativos llamados triangulares, mientras que se les atribuye a Teón de Alejandría (aprox. 335-405) y a Nicómaco de Gerasa (aprox.60-120) alguna descripción de los piramidales[35]. En la siguiente tabla serán mostradas las sucesiones de números figurativos emparentadas con los primeros órdenes numéricos:

Unidades.........Orden 1	•	•	•	•	•	etc.
	1	1	1	1	1	etc.
Naturales........Orden 2	•	••	•••	••••	••••	etc.
	1	2	3	4	5	etc.
Triangulares...Orden 3	•	• • •	• • • • • •	• • • • • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • •	etc.
	1	3	6	10	15	etc.

Piramidales...Orden 4



Etc.

A partir de la tabla anterior se puede inferir que los números de orden k (con k>1) se integran adicionando números del orden anterior (k-1), mientas que después del cuarto orden, ya no pueden *figurar* en arreglos geométricos sencillos. Que los órdenes no tienen fin, es asegurado por Pascal pues él llama "números del sexto orden a aquellos formados

[35] El preámbulo histórico de las tres interpretaciones de los números en las células de los triángulos aritméticos, estará basada mayoritariamente en el libro *Pascal's arithmetical triangle : the story of a mathematical idea* (2002) de A.W.F. Edwards. Dado que no es nuestro objetivo emprender una investigación histórica o historiográfica sobre el triángulo aritmético, entonces la calidad o verosimilitud de la información provista por Edwards no serán cuestionadas, pues ella nos basta para admitir que cada una de las tres interpretaciones por ser expuestas del triángulo aritmético, la figurativa, la combinatoria y la binomial, además de presentarse en el *Traité* (lo cual es un hecho consumado) gozan de una rica historia propia cuya interrelación con las otras no siempre se supo (lo cual es una conjetura presumiblemente bien justificada por Edwards).

por la adición de sus precedentes: 1, 5, 15, 35, etc. Y así al infinito, 1,7,28,84, etc. 1, 8, 36, 120, etc" (Pascal, 1665 vía 1954: 109). Así entonces, el k-ésimo número con enésimo orden f_k^n, nombrado en el *Traité* como número de orden n y de raíz k, se puede calcular mediante la siguiente regla que etiquetaremos mediante la letra "F":

$$f_k^n = \sum_{i=1}^{k} f_i^{n-1} \text{ donde } f_k^1=1 \qquad \ldots F$$

Ahora bien, después de haber presentado a los órdenes numéricos, Pascal asevera que ellos pueden ser ubicados en los triángulos aritméticos, puesto que "cada célula,.., es igual a su superior sumada con todas aquellas que le preceden en su rango paralelo; como fue probado en la consecuencia 2ª" (Pascal, 1665 vía 1954: 109). Por consiguiente, la Consecuencia 2ª expuesta en el capítulo previo, concordaría con la regla F, asentando deductivamente en el tratado, la interpretación del triángulo aritmético para los órdenes numéricos. Es decir, gracias a la Consecuencia 2ª, "todo aquello que se dijo sobre los rangos y células del Triángulo aritmético" puede ser reinterpretado y predicado sobre los órdenes numéricos, pues cada orden se corresponde con un rango paralelo. Por ejemplo, la Consecuencia 5ª previamente reproducida, torna en la Proposición 5ª para los órdenes numéricos: "Dos números de diferentes órdenes son iguales entre sí, si la raíz de uno es el mismo número que el exponente del orden del otro" (Pascal, 1665 vía 1954: 131). En conciso, la Proposición 5ª afirma que f_i^j=f_k^l si i=l y j=k mientras que su demostración se basa en las igualdades c_{ij}=f_i^j y c_{ij}=c_{ji} establecidas respectivamente mediante la Consecuencia 2ª y 5ª en el primer bloque del tratado.

La segunda interpretación celular ofrecida por Pascal, se localiza en la sección del tratado dedicada al cálculo de las combinaciones $\mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k}}$, es decir al cómputo de "todas la maneras de tomar [r cosas] como estén permitidas entre todas las que esté presentes [k]" (Pascal, 1665 vía 1954: 110). Dicha aplicación se desarrolla en la parte del segundo bloque titulada "USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR LES COMBINAISONS". Ahora bien, en el capítulo anterior ya se expuso la demostración de la proposición que valida esta interpretación, la cual es la primera enunciada en esa sección y afirma que "en todo triángulo aritmético, la suma de las células de un rango paralelo cualquiera, es igual a la multitud de combinaciones del exponente del rango respecto al exponente del triángulo" (Pascal, 1665 vía 1954:113). Es decir, la Proposición 1ª afirma que $C_r^k = \sum_{j=1}^{j \mid r+j-1=k} c_{rj}$.

Sin embargo, la manera usual para especificar numéricamente a la combinación C_r^k es mediante alguna regla multiplicativa, como la ahora estandarizada $C_r^k = \frac{k!}{(k-r)!r!}$. Llamativamente, algunas versiones de esa regla multiplicativa nos pueden remontar más atrás del tiempo de Pascal, por ejemplo hasta el matemático judío Levi ben Gerson (1288-1344) o incluso hasta el hindú Bhaskara II (1114-1185). No obstante, es en la obra *Opus Novum de proportionibus* (1570) del famoso matemático italiano Gerolamo Cardano, en donde en occidente probablemente se haya propagado el conocimiento de dicha regla , la cual será bautizada con la letra C y se expresará de la siguiente manera:

$$C_r^k = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r} \qquad \ldots C$$

Ahora bien, Pascal en su tratado también asienta a la forma multiplicativa para el cómputo de las combinaciones de r en k. Y lo hace en el problema[36] con el que clausura al primer bloque de esa obra. Así entonces, los <u>miembros de la teoría</u> dentro del *Traité*, además de proposiciones (acompañadas de sus demostraciones) deben incluir problemas (seguidas de sus soluciones).

---

[36] Problema

> Dados los exponentes de los rangos perpendiculares y paralelos de una célula, encontrar el número de la célula sin utilizar el Triángulo aritmético.
>
> Sea, por ejemplo, propuesto encontrar el número de la célula ξ del quinto rango perpendicular y del tercer rango paralelo.
>
> Habiendo tomado todos los números que preceden al exponente de la perpendicular 5, a saber, 1,2,3,4, sean tonados el mismo número de números naturales, comenzando por el exponente de la paralela, 3, a saber, 3, 4,5,6.
>
> Multiplíquense los primeros uno por otro y sea el producto 24. Multiplíquese los otros uno por otro y sea el producto 360, que , dividido por el otro producto, 24, da el cociente 15. Este cociente es el número buscado. (Pascal, 1665 vía 1994, p.64-5)

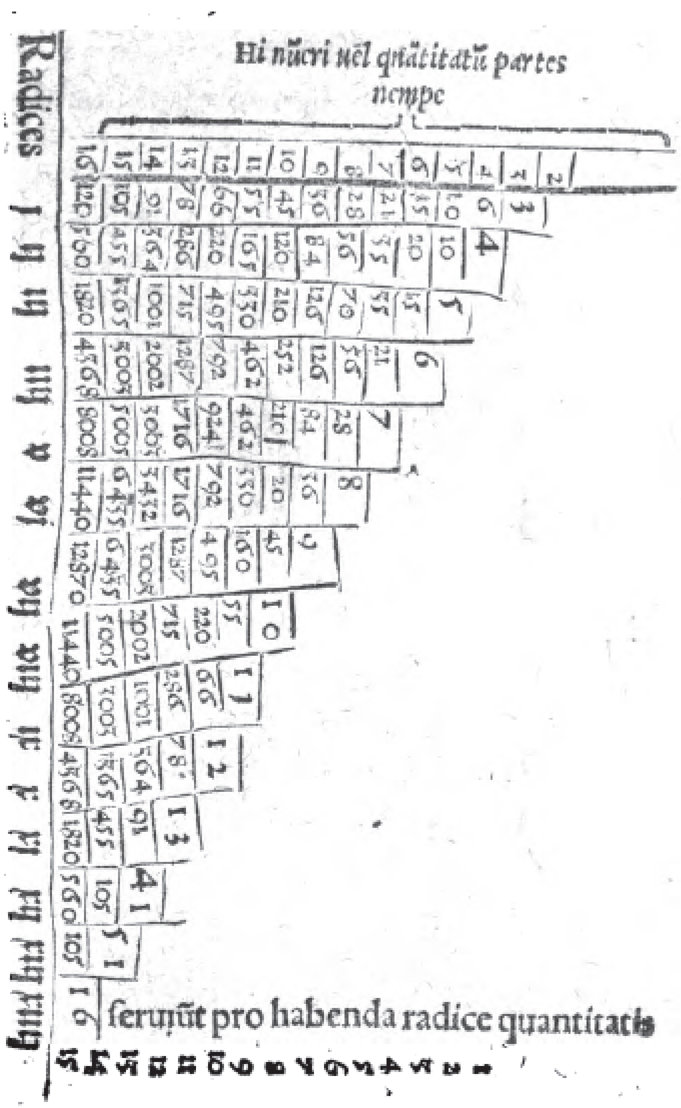
Es decir: c_{ij}=((i+j-2)*...*(i+1)*i) / (1*2*...*j-1) cuando j≥i

La última interpretación del triángulo aritmético que será aquí expuesta[37], proviene de su aplicación para el cálculo de los coeficientes en la expansión de las potencias (positivas) de los binomios, la cual es descrita en la sección del tratado titulada "USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR TROUVER LES PUISSANCES DES BINOMES ET DES APOTOMES"[38]. Ahora bien, la historia del cálculo de los coeficientes de las potencias de los binomios puede contarse desde la lejanía temporal de algún matemático chino, como Zhu Shijie (aprox. 1260-1320), aunque el relato sobre la intervención de algunos matemáticos árabes, como Al-Kashi (aprox. 1380-1429), tendría para nosotros mayor interés pues probablemente ellos sí influyeron en el desarrollo de tal tema realizado por sus contrapartes occidentales. Y con respecto a estos últimos, cabe destacar al alemán Johann Scheubel, quien en su *De Numeris Et Diversis Rationibus seu regulis computationum opusculum* (1545), fue de los primeros occidentales en presentar una tabla integrada por los coeficientes (salvo los unos) de las potencias (positivas) de binomios[39], la cual a continuación es reproducida:

[37] La otra aplicación del triángulo aritmético desarrollada por Pascal en su tratado, es justamente aquella que motivó su creación y que se encuentra en su sección titulada "USAGE DU TRAINGLE ARITHMÉTIQUE POUR DÉTERMINER LES PARTIS QU'ON DOIT FAIRE ENTRE DEUX JOUEURS QUI JOUENT EN PLUSIERS PARTIES". Sin embargo, dado que la interpretación combinatoria del triángulo aritmético puede ser usada para la solución del Problema de la División de una Apuesta, (ver nota 19 del capítulo anterior), entonces la exposición de tal aplicación fue descartada del cuerpo del texto.

[38] El término "binome" es instanciado por Pascal con expresiones algebraicas de la forma "A+k" mientras que "apotome" lo hace con expresiones de la forma "A-k", donde "A" es una variable y "k" una constante numérica como "1" o "2".

[39] La expansión de potencias de binomios a su vez fue planteada por Scheubel como herramienta para el cómputo de la enésima raíz $\sqrt[n]{x}$ .Cabe mencionar que su solución es precedida por los métodos elaborados por algunos matemáticos árabes para el cómputo de raíces de orden superior. Por ejemplo, el algoritmo para la extracción de la raíz quinta ($\sqrt[5]{x}$) de Al-Kashi expuesto en su *Llave para el Calculista*, se basa en el cómputo de los coeficientes del binomio elevado la quinta potencia (Berggren ,1986). Concordantemente y quizás como evidencia de la influencia árabe, el método de Scheubel y el de su coetáneo Stifel expuesto en su *Arithmetica Integra* (1544), también está basado en la expansión de la enésima potencia de un binomio : $(a+b)^n = a^n + (\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-2} + b^{n-1})b^n$ donde *a* es el valor de prueba para aproximar a la enésima raíz $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{(a+b)^n}$.



(Scheubel, 1545)

Mientras que el método *algebraico* del cálculo de la potencia de un binomio, fue asentado en el occidente con ayuda de un viejo conocido nuestro: François Viète. En nuestro capítulo anterior expusimos algunos procedimientos de cálculo que resemblan a la inducción matemática extraídos de su *Ad angularium sectionum analyticen theoremata*, obra escrita por su seguidor Alexander Anderson (1615). Ahora mostraremos como en la Proposición XI de su *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* (1631), se indica la expansión de la potencia (positiva) de un binomio de una manera también parecida a la regla protagonista de nuestra tesis. A continuación será transcrita dicha proposición junto con su demostración en castellano:

Proposición XI

Construir una potencia pura de una raíz binomial.

Sea la raíz binomial, *A*+*B*. Una potencia pura ha de ser construida a partir de ella.

Primero, sea el cuadrado construido. Puesto que la raíz multiplicada por sí misma constituye un cuadrado, multiplíquese *A*+*B* por *A*+*B* y reúnanse los planos individuales que resulten. Estos serán $A^2+2AB+B^2$, los cuales son, por consiguiente, iguales al cuadrado de *A*+*B*.

Segundo, sea el cubo construido. Puesto que una raíz multiplicada por su cuadrado constituye un cubo, multiplíquese *A*+*B* por el cuadrado de *A*+*B* previamente desarrollado y reúnanse los sólidos individuales que resulten. Estos serán $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ los cuales serán, por consiguiente, iguales al cubo de *A*+*B*.

Tercero, sea la cuarta potencia construida. Puesto que una raíz multiplicada por su cubo constituye una cuarta potencia, multiplíquese *A*+*B* por el cubo de *A*+*B*...Estos serán $A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$ los cuales serán, por consiguiente, iguales a la cuarta potencia de *A*+*B*.

Cuarto, sea la quinta potencia construida. Puesto que una raíz multiplicada por su cuarta potencia constituye una quinta potencia, multiplíquese *A*+*B* por la cuarta potencia de *A*+*B*...Estos serán $A^5+5A^4B+10A^3B^2+10A^2B^3+5AB^4+\mathrm{B}^5$ los cuales claramente serán iguales a la quinta potencia de *A*+*B*.

Quinto, sea la sexta potencia construida. Puesto que una raíz multiplicada por su quinta potencia constituyen una sexta potencia, multiplíquese A+B por la quinta potencia de *A*+*B* recién desarrollada y reúnanse los sólido-sólidos individuales que resulten. Estos serán $A^6+6A^5B+15A^4B^2+20A^3B^3+15A^2B^4+6AB^5+B^6$ los cuales serán iguales, en consecuencia, a la sexta potencia de *A*+*B*.

La construcción de cualquier potencia mayor no será diferente.

(Viète, 1665 vía 1983:39)

Del texto transcrito de Viète se puede abstraer la siguiente regla para expandir la potencia de un binomio que *recurre* a sus aplicaciones previas, la cual será rotulada con la letra B:

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-1} \qquad \text{...B}$$

Ahora bien, a través del seguimiento de la regla B se puede hallar al k-ésimo coeficiente de la enésima potencia de un binomio. Si denotamos a tal coeficiente como $\binom{n}{k}$, entonces $\binom{n}{k}$ puede ser obtenido directamente seleccionando al k-ésimo coeficiente del binomio $(x+y)^n$ expandido gracias a la Regla B. Sin embargo, este método de cómputo para $\binom{n}{k}$ es un poco ineficaz pues demanda varias operaciones algebraicas.

Afortunadamente, al ir expandiendo las potencias positivas de un binomio mediante la regla B, se despliega un patrón que permite extraer una regla más sencilla para el cálculo de $\binom{n}{k}$, tal como a continuación será mostrado:

$$(x+y)^1 = (x+y)(x+y)^0 = x + y$$

$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)^1 = xx + xy + yx + yy$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$
$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}=1 \quad =\binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = xx^2 + yx^2 + 2xxy + 2yxy + xy^2 + yy^2$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1} \quad \binom{2}{1}+\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}=1 \quad =\binom{3}{1}=3 \quad =\binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$

...

En el desarrollo previo de las potencias $(x+y)^i$, es reconocible un procedimiento aditivo para el cálculo del coeficiente $\binom{n}{k}$ basado en la suma de términos semejantes (v.gr. xy, yx en i=2) y en la recursión planteada por la regla B (v.gr. $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)^1$). De este modo, podemos formular una regla más sencilla para computar al coeficiente $\binom{n}{k}$ que etiquetaremos con la letra "N":

N1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para $n \geq 0$
N2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ para $0<k<n$ y $n>1$ ...N

Ahora bien, la manera en que Scheubel delinea a la construcción de su tabla de coeficientes binomiales, está en sintonía con la regla N. Pues primero nos indica que coloquemos un par de sucesiones de números naturales que empiecen y coincidan en el 2 (de la manera mostrada en la tabla), para luego señalarnos que cada número entre esas dos hileras se obtiene adicionado el par de números que estén encima y hacia la izquierda de él (Scheubel, 1545: 395).

Pascal por su parte, señala que en las bases del triángulo aritmético cuyo generador G es igual a 1, se pueden hallar los coeficientes de las potencias positivas de un binomio. Mediante el ejemplo de elevar "A+1" al "cuadrado-cuadrado", él nos enseña[40] que los números en la base enésima del triángulo aritmético, corresponden a los coeficientes de la expansión de $(A+1)^{n-1}$. Gracias a la exposición previa de la derivación de la regla N para el cómputo de los coeficientes binomiales, ya nos debe resultar poco sospechoso creer que tal uso del triángulo aritmético es correcto: basta con equiparar a los respectivos componentes de la regla N y el (1.2)postulado R, es decir N1 con R1 y N2 con R2, para hacerlo[41]. Sin embargo en esta ocasión, Pascal le cede al lector la tarea de justificar esta aplicación de su triángulo, puesto que para él "es evidente por sí misma" (Pascal, 1665 vía 1954: 129). De cualquier validadora manera, la conjunción del problema y la solución del cálculo de los coeficientes de las potencias de binomios, es un <u>miembro</u> que no puede faltar en el recuento <u>de la</u> <u>teoría</u> del triángulo de Pascal.

Recapitulando, los <u>miembros de la teoría</u> del *Tratado del Triángulo Aritmético* son algunas proposiciones en donde se asientan las propiedades de tales objetos (19 consecuencias), más algunos problemas ubicados mayoritariamente en sus aplicaciones como las tres previamente expuestas: para los órdenes numéricos, para las combinaciones y para las potencias de un binomio. Después de haber delineado a grandes rasgos a la teoría del triángulo aritmético, ahora procederemos a mostrar cómo plausiblemente

[40] Es más, también nos enseña que la sumatoria de cada base es igual a 2^{n-1}: "Si A es la unidad, y así al binomio A+1 es igual a dos, entonces [todos los coefiecientes de la expansión $(A+1)^4$]... juntos dan 16 y en efecto, el cuadrado-cuadrado de 2 es 16". (Pascal, 1665 vía 1954: 127)

[41] Las reglar R y N pueden ser empalmadas y del pareo de sus componentes se puede con cuidado intuir la igualdad de sus resultados:

R1) $c_{ij} = 1$ si $i=1$ y $j\geq 1$ ó $i\geq 1$ y $j=1$ con N1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para $n\geq 0$

R2) $c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$ si $i>1$ y $j>1$ con N2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ para $0<k<n$ y $n>1$

La cautela para establecer la equivalencia entre R y N sugeriría reasignar el inicio de los índices i,j en c_{ij} a "0" en lugar de "1", así por ejemplo R1 tornaría en $c_{ij} = 1$ si $i=0$ y $j\geq 0$ ó $i\geq 0$ y $j=0$.

puede ser desarrollada en su totalidad partir de los tres principios detectados, con tal de ratificar su clasificación como tales.

En el capítulo previo se expuso la participación del (1.2)postulado y la (3)definición del triángulo aritmético en el desarrollo de algunos miembros de su teoría, en particular se mostró su uso en las demostraciones de las Consecuencias 2ª,5ª ,12ª y de la Proposición 1ª para las *Combinaciones*. Si se extendiera la revisión hacia el resto del contenido del *Traité*, se podrían fácilmente ratificar los roles justificativo y semántico desempeñados por este par de principios en su desarrollo. En contraste, la (2)regla de inferencia IMP pareciera tener una intervención más discreta, pues explícitamente sólo es usada y mencionada en la generación de contados miembros (como la Consecuencia 12ª y la Proposición 1ª para las *Combinaciones*). Sin embargo, su función como método de demostración puede ser directamente transferida hacia las otras proposiciones y los otros problemas en el tratado, tal como a continuación será primero mostrado mediante ejemplos y luego garantizado mediante un argumento. Mientras que tal expansión del trabajo factible de dicha regla de inferencia, se reitera, tiene como objetivo respaldar la aseveración de que a partir de los tres principios identificados en el tratado, se pueden desarrollar a los miembros de la teoría del triángulo aritmético.

En primer lugar mostraremos cómo todas las aplicaciones aquí discutidas del triángulo aritmético, pueden justificarse mediante la (2)regla IMP para finalmente asentarse sobre el (1.2)postulado R. Es decir, serán demostradas mediante tal regla de inferencia el par de proposiciones que asentaría las aplicaciones del triángulo aritmético para los órdenes numéricos y para la expansión de potencias (positivas) de binomios. Por concisión y claridad, ambas justificaciones deductivas serán directamente redactadas en el lenguaje moderno mediante el cual se reformularon los tres principios de la cada vez más nítida axiomatización en el tratado de Pascal. Sólo se recuerda que si se expresaran con sus lenguajes originales, entonces el papel de la (3)definición del triángulo aritmético sería en ellas más relevante. Comencemos demostrando la primera aplicación que desfila en el *Traité*: si el j-ésimo número del i-ésimo orden (f_j^i) con i>1, de acuerdo a la regla F es igual a $\sum_{k=1}^{k=j} f_k^{i-1}$, entonces por demostrar que $f_j^i = c_{ij}$ cuando el generador del triángulo aritmético es igual a 1. Es decir, probaremos que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=j} c_{(i-1)k}$ (Consecuencia 2ª con i>1) a través de la (2)regla de inducción matemática versión Pascal, regla cuyo seguimiento exige el establecimiento del siguiente par de lemas:

Lema 1. La consecuencia es evidente para las células en la segunda base del triángulo con $i>1$, pues $c_{21} = c_{11} = \sum_{k=1}^{k=1} c_{(i-1)k}$ por el postulado R1.

Lema 2. Si la proposición se cumple para las células en la base n del triángulo con $i>1$, entonces necesariamente se cumplirá para las células de la base siguiente n+1.

Para la célula c_{r1} en la base n+1 (i.e. $r+1=n+2$) se deriva directamente $c_{r1}=c_{(r-1)1}$ gracias a R1. Por lo que sea c_{lm} cualquier célula en la base n+1 con $l,m>1$ (i.e. $l+m=n+2$). Por el segundo componente del postulado R tenemos que:

$$c_{lm} = c_{l(m-1)} + c_{(l-1)m} \qquad \text{(postulado R2)}$$

Luego ya que $c_{l(m-1)}$ pertenece a la base n, entonces por hipótesis (inductiva) tendríamos que:

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^{k=m-1} c_{(l-1)k} + c_{(l-1)m} = \sum_{k=1}^{k=m} c_{(l-1)k}$$

Por lo tanto, necesariamente para todo $i>1$ y $j\geq1$, tenemos que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=j} c_{(i-1)k}$.

C.q.f.d.

Mientras que la aplicación del triángulo aritmético para el cálculo de los coeficientes de potencias positivas de un binomio, se establecería deductivamente mediante la (2)regla de inducción matemática versión Pascal del siguiente modo:

Proposición 1 (para las potencias de binomios):

Las células de la base i+1 cuando el generador del triángulo aritmético es igual a 1, corresponden sucesivamente a los coeficientes de la expansión del binomio $(A+B)^i$. Es decir, $\binom{i}{k} = c_{r(k+1)}$ con $r+(k+1)=i+2$.

Demostración:

Lema 1. La proposición es evidente para la base 2, pues $c_{21}=c_{12}=1$ (por R1) mientras que los dos coeficientes de la expansión de $(A+B)^1$ son también iguales a 1, i.e. $(A+B)^1= 1A+1B$.

Lema 2. Si los coeficientes de la expansión de $(A+B)^n$ se presentan ordenadamente en las células de la base n+1, entonces los coeficientes de la expansión de $(A+k)^{n+1}$ necesariamente también desfilarán en las células de la base n+2.

Ahora bien, ya que $(A+B)^{n+1}=(A+B)(A+B)^n$ gracias la regla B de Viéte[42], entonces por hipótesis (inductiva) los coeficientes de $(A+B)^n$ desfilan sucesivamente en las células de base n+1. Es decir:

$$(A+B)^n=c_{m1}A^n+c_{(m-1)2}A^{n-1}B+c_{(m-2)3}A^{n-2}B^2+...+c_{3(m-2)}A^2B^{n-2}+c_{2(m-1)}AB^{n-1}+c_{1m}B^n \quad \text{con } m=n+1$$

Luego entonces:

$$(A+B)(A+B)^n = c_{m1}A^{n+1}+ (c_{m1}+c_{(m-1)2})A^nB + (c_{(m-1)2}+ c_{(m-2)3})A^{n-1}B^2+...$$
$$....+(c_{3(m-2)}+ c_{2(m-1)}) A^2B^{n-1}+(c_{2(m-1)}+ c_{1m}) AB^n+ c_{1m}B^{n+1}$$

Sin embargo, por el primer componente del postulado R tendríamos que:

$$(A+B)(A+B)^n= \boldsymbol{c_{(m+1)1}}A^{n+1}+ (c_{m1}+c_{(m-1)2})A^nB + (c_{(m-1)2}+ c_{(m-2)3})A^{n-1}B^2+...$$
$$...+(c_{3(m-2)}+ c_{2(m-1)}) A^2B^{n-1}+(c_{2(m-1)}+ c_{1m}) AB^n+ \boldsymbol{c_{1(m+1)}}k^{n+1}$$

Mientras que gracias a R2 obtendríamos que:

$$(A+B)(A+B)^n= c_{(m+1)1}A^{n+1}+ \boldsymbol{c_{m2}}A^nB + \boldsymbol{c_{(m-1)3}}A^{n-1}B^2+...+\boldsymbol{c_{3(m-1)}}A^2B^{n-1}+\boldsymbol{c_{2m}}AB^n+ c_{1(m+1)}B^{n+1}$$

donde $c_{(m+1)1}$, c_{m2}, $c_{(m-1)3}$, ..., $c_{3(m-1)}$, c_{2m}, $c_{1(m+1)}$ es la sucesión de las células de la base n+2.

---

[42] Nótese que también podría demandarse una justificación de la regla B, demostración que requeriría, la especificación de la operación potencia. Al carecer por el momento de su especificación rigurosa (la cual la obtendremos con Peano y Dedekind), nos conformaremos con justificar la validez de la regla B de una manera intuitiva. Supongamos que $(A+B)^i:=(A+B)(A+B)....(A+B)$ -con i factores (A+B)-. Luego, si apelamos a la ley de asociatividad para la multiplicación, tendríamos que $(A+B)(A+B)....(A+B) = (A+B)[(A+B)(A+B)....(A+B)] = (A+B)\,(A+B)^{i-1}$.

Por lo tanto, necesariamente los coeficientes de la expansión de $(A+B)^i$ con $i>1$, se localizan en la base i+1 del triángulo aritmético. C.q.f.d.

En lugar de continuar reelaborando cada una de las demostraciones del tratado ajustándolas a la regla de Pascal para la inducción matemática débil, tal como lo hicimos con el par previo relativas a dos aplicaciones del triángulo aritmético, argumentaremos por qué en principio todas ellas pueden acoplarse a tal método de inferencia. La defensa de esta posibilidad a su vez invocará a las aplicaciones del triángulo aritmético, pues al identificar que su *unificación* es un objetivo del *Traité*, su consecución brindará los elementos para sustentar esta factibilidad. En conciso, la *unificación* teórica de esas diversas aplicaciones se logra gracias a la conformación armoniosa del (1.2)postulado R y la (2)regla IMP, mientras que esa simbiosis de principios termina de corroborar la presencia de una axiomatización en esa obra. Es más, la sinergia de ese par de principios no sólo confirmará al *Tratado del Triángulo Aritmético* como una axiomatización, sino también lo convertirá en un paradigma de las axiomatizaciones de la aritmética como más adelante será discutido al presentar los axiomas de la aritmética de Peano-Dedekind.

Las historias previamente reseñadas sobre los números figurativos (órdenes numéricos), las combinaciones y la expansión de un binomio, aunque sean terriblemente incompletas al menos alcanzan a revelar algún grado de independencia que tuvieron sus respectivos desarrollos. Más aún, estos relatos bastan para descubrir al uso desde antes del nacimiento de Pascal, de patrones triangulares para facilitar los cálculos relativos a algunas de esas tres nociones (v.gr.la tabla de coeficientes binomiales de Scheubel). Por lo tanto, Pascal no fue el creador de los números figurativos ni de las combinaciones ni de las potencias de los binomios, así como tampoco fue el primero en proponer un esquema triangular para realizar cómputos vinculados con ellos[43].

[43] Según Edwards, Pascal aprendió acerca de estos tres temas y sus interrelaciones de Mersenne,

> ...el joven e impresionable Pascal fue introducido al círculo de los matemáticos cuando estaban saliendo de la imprenta los libros de Mersenne que contenían al "Triángulo de Pascal" y sus aplicaciones combinatorias y además, él continuó visitando a Mersenne incluso cuando vivía fuera de París...Resulta impensable que estos libros no estuvieran en la casa de Etienne [padre de Pascal] desde el momento que fueron publicados, por lo que no tenemos necesidad de seguir buscando la fuente principal del joven Pascal. (Edwards, 1987:p.57)

Si bien el Problema de la División de una Apuesta fue la chispa detrás de la creación del *Traité*, las otras tres aplicaciones allí desarrolladas develan el interés de Pascal por brindar un sustrato teórico que capturara a todas estas interpretaciones de los números en las células de sus triángulos. A partir de su especificación formulada en la (3)definición y (1.2) postulado del triángulo aritmético, Pascal se propuso la tarea de *unificar* bajo esta noción, algunos temas relativos a tres distintas ramas de las matemáticas ahora llamadas teoría de números, probabilidad y álgebra. Para lograr tal cometido, él también formuló una (2)regla de inferencia que le permitiera sustentar deductivamente algunas de estas interpretaciones (v.gr. la combinatoria). Sin embargo como ya fue expuesto, la (2)regla IMP no sólo facilita la demostración de la validez de algunas de estas aplicaciones, sino la de todas ellas[44]. Por lo tanto, Pascal no fue el autor sino el recopilador axiomático del triángulo aritmético y sus aplicaciones.

Si Pascal ya sabía de estas otras interpretaciones, entonces cabe preguntar por qué no recurrió a cualquiera de sus respectivas reglas para determinar la construcción aritmética de su triángulo, en especial aquellas cuya apariencia difiere más a la de su postulado R. Es decir, ¿por qué no propuso él a la regla C para las combinaciones o a la regla F para los órdenes numéricos como postulados de su triángulo? Una respuesta a esta interrogante, subjetiva sin dejar de ser informativa, es apelar a la facilidad para ejecutar la suma $c_{ij}=c_{(i-1)j}+c_{i(j-1)}$ pedida por R2, en contraposición de la engorrosa sumatoria

---

quien a su vez lo hizo de Cardano:

> El padre Marin Mersenne... logró aprender alrededor del año 1636 todo lo que Cardano había escrito sobre combinatoria...[por ejemplo] Mersenne presenta la forma del Triángulo Combinatorio dada por Cardano aunque la extendió en un rectángulo... (Edwards, 1987: 45)

[44] Como se puede ver en la nota 19 del capítulo anterior, la solución del Problema de la División de una Apuesta brindada por Pascal, es subsumida por la interpretación combinatoria del triángulo aritmético. Aunque cabe señalar, que el interés seminal por este problema quizás lo haya motivado para demostrar de manera independiente la validez de su solución a este problema. Es más, lo hizo de manera rigurosa por medio de su (2)regla IMP probando lo siguiente: Si al jugador A le falta triunfar en n partidas para ganar mientras que al jugador B le faltan m, entonces en la base n+m del triángulo aritmético se localizan las distintas combinaciones de gane para ambos jugadores (Proposición 1 para la División de una Apuesta). Por ejemplo, si al jugador A le hace falta imponerse en 2 partidas para ganar mientras que B requiere de 4, entonces debemos fijarnos en la sexta base del triángulo aritmético (Pδ): las dos primeras células en esa base (P,M) corresponden a las dos combinaciones de gane de A mientras que las otras cuatro (F,ω,S,δ) corresponderían a las cuatro distintas combinaciones de gane de B (Pascal, 1665 vía 1954:121). De cualquier manera, TODAS las aplicaciones del triángulo aritmético son o pueden ser demostradas, mediante la (2)regla de Pascal para la inducción matemática débil.

$\sum_{i=1}^{n} f_{k-1}^{i}$ exigida por F y de la más complicadas operaciones $\frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$ demandadas por C. Una mejor respuesta por ser más explicativa se puede obtener a través de la incorporación de la (2)regla IMP a la cuestión, ya que al hacerlo comparativamente se puede argumentar que es el postulado R y no los demás candidatos, la pareja natural de ese método de demostración y viceversa.

El argumento cuya conclusión es la naturaleza óptima de la conjunción del (1.2)postulado R y la (2)regla IMP puede resumirse de la siguiente manera: el primero con la ayuda de la (3)definición del triángulo aritmético sirve para *constituir* a ese objeto teórico, mientras que la segunda resulta útil para *justificar* a sus propiedades. Por lo que si asociamos al postulado R con el método de inferencia IMP, entonces se adquiere una potente herramienta deductiva para poder desarrollar a los miembros de la teoría del triángulo aritmético, mientras que si juntamos a la segunda con el primero, entonces se obtiene una garantía para ese desarrollo. En conclusión, juntos ganan y separados pierden.

En primer lugar, la unión del postulado del triángulo aritmético con la regla de Pascal para la inducción matemática débil, promueve la generación potencial de todo miembro de la teoría a partir de ese par de principios básicos. Pues al incorporarle al primero la segunda, se posibilita la fabricación en serie de demostraciones para las propiedades de los triángulos aritméticos. La aplicabilidad de ese molde *justificativo* se basa en que cada triángulo aritmético es una figura de ladrillos numéricos cuya construcción secuencial está especificada por el (1.2)postulado R, mientras que por otro lado, la colocación de ellos se realiza conforme a la configuración espacial P dada por la (3)definición del triángulo aritmético. Es decir, el primer triángulo se construye gracias a R1, mientras que R1 junto con R2 van indicando cómo han de irse fabricando los números en las células de cada base del siguiente triángulo aritmético a partir de los contenidos en las células de la base anterior, para finalmente todos ellos ser acomodados conforme al esquema P:

REGULACIÓN de la construcción	REPRESENTACIÓN de la construcción	
Paso 1°. Montar el generador $c_{11}=k$ por R1	$\boldsymbol{c_{11}}$	Triángulo 1°
Paso 2°. Añadir la segunda base conformada	c_{11} $\boldsymbol{c_{12}}$	
por $c_{21}=k$ y $c_{12}=k$ por R1	$\boldsymbol{c_{21}}$	Triángulo 2°
Paso 3°. Añadir la tercera base conformada	c_{11} c_{12} $\boldsymbol{c_{13}}$	
por $c_{31}=k$ por R1, $c_{22}= c_{21}+ c_{12}$ por R2	c_{21} $\boldsymbol{c_{22}}$	
y $c_{13}=k$ por R1.	$\boldsymbol{c_{31}}$	Triángulo 3°
...		
Paso n°. Añadir la enésima base conformada	c_{11} c_{12} c_{13} ... $c_{1(n-1)}$ $\boldsymbol{c_{1n}}$	
por $c_{n1}=k$ por R1,	c_{21} c_{22} ... $\boldsymbol{c_{2(n-1)}}$	
$c_{(n-1)2}= c_{(n-2)2}+ c_{(n-1)1}$ por R2,	$\vdots$	
$c_{(n-2)3}= c_{(n-3)3}+ c_{(n-2)2}$ por R2,...,	$c_{(n-2)1}$ $c_{(n-2)2}$ $\boldsymbol{c_{(n-2)3}}$	
$c_{2(n-1)}= c_{1(n-1)}+ c_{2(n-2)}$ por R2	$c_{(n-1)1}$ $\boldsymbol{c_{(n-1)2}}$	
y $c_{1n}=k$ por R1.	$\boldsymbol{c_{n1}}$	Triángulo n°

...

Ahora bien, el Lema 1 de la regla IMP clama por el cumplimiento de alguna propiedad por parte del primer elemento x_1 de una sucesión de objetos X, mientras que el Lema 2 exige que si el miembro x_n satisface dicha propiedad entonces x_{n+1} también lo haga. Por ejemplo en la demostración de la Consecuencia 12ª la sucesión de objetos X son las bases de los triángulos. Por lo que si al plano de construcción secuencial R le agregamos la regla IMP entonces se consigue una poderosa y automatizada táctica deductiva para establecer las propiedades de los triángulos aritméticos, la cual a continuación es bosquejada:

Sea T la propiedad por demostrar y X una secuencia de bases o de triángulos aritméticos cuyo inicio esté situado por el primer triángulo cuya satisfacción de T queramos sustentar. Procédase deductivamente de acuerdo a la regla IMP. En primer lugar, la demostración de $T(x_1)$ pedida por el Lema 1 usualmente se consigue *directamente gracias a R (frecuentemente basta con R1). En segundo lugar, para la demostración de $T(x_n) \rightarrow T(x_{n+1})$ solicitada por el Lema 2, se puede aprovechar al intentar probar $T(x_{n+1})$ que las células de x_{n+1} se obtienen mediante las células de x_n (debido a la construcción secuencial especificada por R), las cuales por hipótesis cumplen con la propiedad T.*

La táctica previa sirve para recalcar que la inducción matemática es una familia de métodos de justificación propicios para fincar propiedades de colecciones de objetos cuya construcción/caracterización se pueda especificar de manera secuencial[45]. Por ejemplo, cuando el siguiente elemento de algún conjunto de cosas se genera con ayuda del anterior, el paso inductivo de una inducción débil se ve significativamente favorecido ya que a través de ese vínculo constructivo se puede montar una conexión justificativa. Mientras que la justificación del caso base, usualmente es asistida por la cláusula de construcción/caracterización del primer objeto de ese conjunto. Por consiguiente, debido a que el postulado R genera secuencialmente al contenido numérico de cada triángulo aritmético, entonces resulta provechoso asociarlo con el método de inferencia IMP pues al hacerlo se obtiene una potente herramienta deductiva que presumiblemente tiene la capacidad de demostrar todas las propiedades de los triángulos aritméticos, al menos todas las afirmadas en el tratado[46]. Mejor aún, la operación de esa herramienta es relativamente sencilla pues en general basta con seguir a la táctica previamente definida.

---

[45] En el siguiente capítulo, cuando se exponga a Dedekind y Peano, lo "secuencial" de una construcción será matemáticamente aclarado. Sin embargo no podemos dejar de recordar que este calificativo puede ser usado desde el capítulo anterior, para describir los procedimientos de cálculo enseñados por Viète-Anderson.

[46] La sustentación de esta aseveración se deja como ejercicio al lector. Aquí sólo se advertirá que en la demostración de la Consecuencia Primera ($c_{1i}=c_{j1}=k$) Pascal incluye una propiedad no estipulada del triángulo aritmético en su sección inicial sobre definiciones, la cual es requerida para demostrarla utilizando su método de inducción, a saber, $c_{ij}=0$ si $i<1$ ó $j<1$. Es decir, el triángulo aritmético está rodeado por ceros. Ahora bien, en la exposición de los principios constructores R se decidió incorporar a la Consecuencia Primera en R1 para directamente corregir esta omisión de Pascal, no obstante, mediante la estipulación de la propiedad previa también puede ser arreglada esa ausencia y consecuentemente, puede ser demostrada la Consecuencia Primera mediante la regla de inducción matemática de Pascal. Basta con reformular los principios R de manera más fiel a su especificación dada por Pascal:

R'0: $c_{ij}=0$ si $i<1$ ó $j<1$;

R'1: $c_{ij}=k$;

R'2: $c_{ij} = c_{(i-1)j} + c_{i(j-1)}$.

En segundo lugar, si bien la producción en serie se celebra, la invalidez de incluso solo una de las demostraciones maquiladas normalmente es intolerable. Cualquiera regla de justificación en matemáticas para consagrarse y congraciarse con sus usuarios, debe ofrecer alguna garantía de sus resultados. Y en este caso, no se puede acudir al registro de éxitos deductivos previos dada la novedad del método de Pascal para la inducción matemática débil. Afortunadamente, se puede alegar que las conclusiones obtenidas mediante la (2)regla IMP, gozan de una constructiva generalidad. Es decir, a continuación se argumentará que la regla IMP logra establecer una conexión justificativa de manera constructiva entre el postulado R (premisa) y los miembros de la teoría (conclusiones).

Mediante la demostración del par de lemas de la (2)regla IMP al menos se confirma que algún conjunto de células, demarcadas por bases o por triángulos aritméticos, satisfacen a la propiedad en vías de probarse. El primer lema ratifica que las células del primer elemento de una sucesión de bases o de triángulos cumplen dicha propiedad, mientras que el segundo apuntala la propagación de la propiedad hacia adelante para el resto de las células de los elementos de la sucesión. En contraste, la conclusión inferida mediante los dos lemas asevera que no algunas sino todas las células a partir de determinada base o triángulo poseen dicha propiedad. Así entonces, la cuantificación universal es la que precisa de garantía.

Afortunada mas no fortuitamente, la manera secuencial de construir al contenido aritmético de los triángulos especificada por el (1.2)postulado R es afín al modo en que se propaga la propiedad mediante el segundo Lema a partir de la base o del triángulo establecido por el Lema 1; por lo que su demostración se convierte en una cuantificación universal ya que todas las células con esa propiedad gracias a R son todas las células de todos los triángulos aritméticos empezando por las establecidas mediante el Lema 1. De este modo, el postulado R le concede a la regla de inferencia IMP su cualidad más preciada: valida a sus demostraciones pues funge como una premisa que se conecta constructivamente con las conclusiones obtenidas siguiendo esa regla.

En suma, el (1.2)postulado R respalda a las conclusiones inferidas mediante la (2)regla IMP, mientras que la segunda funciona como una potente herramienta justificativa cuando se acopla al primero. Es decir, sus funciones se complementan y junto con la definición del triángulo aritmético, forman una configuración ideal de principios para el desarrollo de su teoría. Por lo tanto, los tres principios por Pascal mencionados y usados no sólo generan la apariencia de una axiomatización en su tratado, sino también ratifican su presencia pues además de favorecer al desarrollo íntegro de su teoría, también lo aseguran. Por lo que la fecundidad deductiva de la acción concomitante del postulado R y la regla IMP, es la que brinda el sustrato constructivo-justificativo a las aplicaciones del triángulo aritmético, fecundidad que reafirma el lugar ocupado por R opacando a las otras reglas (C,F) vinculadas con esas interpretaciones[47].

Recapitulando, en esta sección se mostró la presencia de una axiomatización en el *Tratado del Triángulo Aritmético* de acuerdo a nuestra caracterización mínima. Para lograrlo, además de identificar a los tres principios (dos básicos (1.2)R, (2)IMP más una (3)definición) allí presentes, se reconoció como objetivo del tratado a la *unificación* de diversos cálculos (órdenes numéricos, combinaciones, división de una apuesta, potencias de un binomio) bajo la construcción del triángulo aritmético. Para lograr tal *unificación*, Pascal ofreció una combinación óptima de principios básicos (R-IMP) que respalda a la afirmación de que <u>todos los miembros de su teoría del triángulo aritmético pueden desarrollarse a partir de sus principios formulados</u>.

Ahora bien, la compenetración entre un principio básico de la primera clase con uno de la segunda, ya se pudo vagamente detectar en el Libro VII entre la Definición 2 de "número" (si la interpretamos intrépidamente como un axioma) y el modo de razonamiento *descomposición-recomposición* allí seguido (v.gr. en la demostración de

[47] Que las interpretaciones del triángulo aritmético relativas a los órdenes numéricos, combinaciones y expansiones de un binomio puedan ser asentadas mediante el postulado R y la regla IMP, se *explica* por la generación secuencial de todas ellas. Por ejemplo, la regla N para el cómputo de los coeficientes binomiales hace explícita esta clase de generación basada en el uso de los elementos previos (coeficientes de potencias menores) para el cálculo del elemento actual. De igual manera, el Lema IV usado por Pascal en la aplicación del triángulo aritmético para las combinaciones hace explícita la naturaleza secuencial de su cálculo:

$$C_{l+1}^{m+1} = C_l^m + C_{l+1}^m \text{ con } l+1 \leq m$$

Por lo tanto, la ventaja de R sobre las reglas F y C es que abiertamente acopla a la construcción secuencial de las células del triángulo aritmético, a la versión de inducción matemática, la débil, formulada por Pascal. Por otro lado, el postulado R no está restringido a una interpretación particular como es el caso de la regla N o el Lema IV, ganando sobre ellos mayor generalidad.

VII.Prop.5) mas no formulado. En comparación, Pascal sí enuncia un principio de la segunda clase en simbiosis con otro de la primera, lo cual convierte a su axiomatización en una estructura deductiva más sólida que la de por sí titubeante del Libro VII. Sin embargo, el Libro VII en contraste con el *Tratado del Triángulo Aritmético*, sí parece tener un contenido intuitivamente más aritmético: trata sobre los números (compuestos, primos,...), algunas de sus relaciones (primos relativos, divisibilidad, proporcionalidad,...) y de sus operaciones (cómputo del máximo común divisor, multiplicación,...). Mientras que el contenido del *Traité*, o es más abstracto (propiedades de esa cosa llamada "triángulo aritmético"), o más variopinto (aplicaciones del triángulo aritmético). Por lo que si bien su calidad como axiomatización parece intachable, que sea de la aritmética luce como algo cuestionable.

Para alentar la postulación del tratado de Pascal como una axiomatización de la aritmética, en el próximo capítulo revisaremos algunas "axiomatizaciones" de esta rama de las matemáticas aparecidas a finales del siglo XIX. En particular analizaremos a sus principios mejor afianzados, aquellos aportados por Peano y Dedekind. Al reconocer que en tales principios la inducción matemática tiene un rol predominante, *al igual* que en la axiomatización de Pascal, entonces la vinculación del *Tratado del Triángulo* con la aritmética dejará de ser tan dudosa. Es más, aunque en el *Traité* todavía persistan algunos modos deductivos del paradigma axiomático euclidiano, v.gr. la generalización sobre instancias, se verá que el acoplamiento de sus principios básicos la convierten en una axiomatización más cercana al moderno paradigma enfocado más en las *estructuras* y menos en los objetos que las conforman: basta con recordar que Pascal faculta la elección de cualquier número como el generador G del triángulo aritmético para colegirlo. Mientras que los trabajos por ser inspeccionados de Peano y Dedekind, al contribuir enormemente a la instauración de este más reciente paradigma, también ayudarán a respaldar la nominación del tratado de Pascal como una axiomatización de la aritmética.

Capítulo 3: Axiomatizaciones de la aritmética (continuación)

Los Principios de Peano-Dedekind

3.0 Introducción

En el capítulo anterior se expuso a la "axiomatización" de la aritmética de Euclides, a la axiomatización de la "aritmética" de Pascal y a una caracterización mínima de lo que es una axiomatización. Si bien esta última sirvió para remarcar al entrecomillado de la primera construcción teórica citada, i.e. el Libro VII no es una axiomatización pero al menos comprendemos mejor por qué no lo es bajo nuestra caracterización, quedó pendiente valorar las comillas en la segunda, i.e. ¿el Tratado del Triángulo Aritmético es realmente aritmético? En este apartado de la tesis se contestará afirmativamente a esta última pregunta a través de la exhibición de los principios de la aritmética mejor sustentados: los de Peano-Dedekind. Independientemente de que Peano haya copiado o no de Dedekind sus célebres principios de la aritmética1, dado que su formulación se convirtió en la estándar y por ende pueden sernos más familiares, entonces ellos serán los primeros en ser aquí presentados. Después mostraremos algunos elementos teóricos enunciados por Dedekind en su respuesta a qué son los números, para finalmente señalar no sólo en qué sentido son equivalentes a los principios de Peano, sino también los rasgos de todos ellos heredados de los principios básicos que Pascal formuló en su tratado revisado.

---

[1] En el prefacio de sus *Principios*, se puede leer el siguiente agradecimiento de Peano dedicado a Dedekind: Me ha resultado bastante útil también la reciente obra : R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen,* Braunschweig, 1888, en la que se examinan perspicazmente las cuestiones concernientes a los fundamentos de los números (Peano, 1889 vía 1979: 35-V).
Y este reconocimiento de Peano aunado al paralelismo entre algunos de sus principios con la caracterización ofrecida por Dedekind del sistema (conjunto) de los números naturales como un sistema simple infinito, ha llevado a algunos estudiosos a afirmar, tal como lo hace Hao Wang, "que es bien sabido,..., que Peano tomó prestados sus principios de Dedekind" (Wang, 1957:22). No obstante, hay otros estudiosos del trabajo de Peano, como Hubert Kennedy (1963), que han intentado sustentar la independencia con respecto a Dedekind del camino recorrido por Peano hacia la formulación de sus principios de la aritmética.

3.1 Los Principios de la Aritmética de Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) fue un prominente matemático italiano mayoritariamente recordado por haber encabezado la renovación de la lógica y del método axiomático a finales del siglo XIX. Sin embargo, también realizó algunas importantes aportaciones en otras áreas matemáticas, principalmente en el análisis[2], e incluso fuera de ésta, en su lucha por la instauración de un lenguaje internacional[3]. Y aunque su *Formulario* haya sido un proyecto cuya meta era reformular lógicamente el lenguaje de las matemáticas[4], sólo es su parte aritmética, la usualmente recordada y la que le otorgó mayor fama. En particular, sus axiomas de la aritmética se convirtieron en los más célebres depositarios de su nombre. Peano publicó estos axiomas por vez primera en su *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889), obra en cuyo prefacio ya es anunciado el objetivo de esta reformulación lógica:

> Las cuestiones que atañen a los fundamentos de la matemática, si bien han sido tratadas por muchos últimamente, carecen aún de una solución adecuada. La dificultad en este punto proviene sobre todo de la ambigüedad del lenguaje....He representado mediante signos todas las ideas que aparecen en los principios de la aritmética, de modo que cualquier proposición quede enunciada exclusivamente mediante estos signos...Mediante estas notaciones cualquier proposición asume la forma y la precisión de las que gozan las ecuaciones en álgebra, y a partir de las proposiciones así escritas se deducen otras, y esto mediante procedimientos que se asemejan a la resolución de ecuaciones. Esta es la clave de todo el trabajo. (Peano,1889 vía 1979:31)

Si desde antes del inicio de los *Principios* es revelada la meta de esa axiomatización, *la depuración lingüística*, es porque desde su comienzo se proporcionan los recursos lógicos-conjuntistas para perseguirla. Peano empieza en forma a su obra describiendo al lenguaje formal mediante el cual busca acendrar al lenguaje natural. En pos de esta purificación, se introduce a la simbología para la lógica (ahora reconocida como

[2] Por ejemplo, su teorema de existencia para la solución de una ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (1886): Si f(x,y) es continua, entonces existe una solución (integral) de la ecuación $\frac{dy}{dx}$=f(x,y).

[3] Para lograr tal cometido creó al *Latino sino flexione* (latín sin gramática) y encabezó por varios años a la Academia pro Interlinguaa.

[4] Peano emprendió este proyecto junto con algunos de sus notables colaboradores (Burali-Forti, Fano,...) en 1892. En total hubo cinco ediciones del *Formulario*, la última aparecida en 1908 contenía alrededor de 4200 teoremas.
Por otro lado, si se desea ahondar dentro de la biografía y las aportaciones de Peano, se recomiendan los trabajos de H. C. Kennedy -v.gr. (1973), (1980)- , los cuales además se reconocen como la fuente primaria de este mínimo recuento sobre la existencia de este matemático italiano.

proposicional[5]) y la teoría de clases (ahora identificadas como conjuntos[6]) más adelante utilizada no sólo para representar sino también para desarrollar a las proposiciones de la aritmética. Por lo que además de delinear a la notación lógico-conjuntista empleada en su axiomatización, Peano desde el principio enumera una serie de proposiciones lógicas (proposición L1 a L43[7]) y conjuntistas (L44 a L66[8]) que servirán de apoyo justificativo para el <u>desarrollo "semejante a la resolución de ecuaciones" de su teoría</u>. Es decir, estas proposiciones auxiliares fungen como principios básicos de la primera clase (proposiciones primeras) y si fueron hechas explícitas, fue porque la "ambigüedad del lenguaje" es borrada por Peano mediante la especificidad de su sistema deductivo. Sólo después de haber terminado los preparativos lógico-conjuntistas de la axiomatización, Peano formula sus célebres principios de la aritmética antecedidos por una explicación de los términos primitivos en ellos contenidos:

> El signo N significa número (entero positivo).
> El signo 1 significa unidad.
> El signo a+1 significa el sucesor de a, o a más 1.
> El signo = significa es igual a. Consideramos este signo como nuevo, aunque tiene la misma forma que un signo de la lógica[9].
> Axiomas
> 1. 1εN. [$1\in$N]

---

[5] La simbología presentada por Peano mayoritariamente pertenece la lógica proposicional: "*a*","*b*","*c*",... representan proposiciones, "-" a la negación, "$\cup$" a la disyunción, "$\cap$" la conjunción, "Λ" al absurdo, "Ɔ" a la implicación , "=" a la doble implicación. Mayoritariamente más no completamente debido a la introducción del el símbolo "$Ɔ_{x,y,...}$" cuyo significado vaticina el brinco hacia algún orden superior que se puede reconocer (ya sea hacia al primer o al segundo orden) en la axiomatización de la aritmética de Peano, cuantificación detectable desde la sección de la obra dedicada a las clases. El significado de "$Ɔ_{x,y,...}$" ofrecido por Peano es el siguiente:

Si las proposiciones a y b contienen a los objetos indeterminados x,y,...., es decir, son condiciones entre estos objetos, entonces a $Ɔ_{x,y,...}b$ significa: para cualesquiera x,y..., de la proposición a se deduce b. (Peano,1889 vía 1979:41)

[6] Como ejemplos de signos conjuntistas introducidos por Peano podemos citar los siguientes: "ε" significa "..es..." (ahora significaría pertenencia) , "Ɔ" denomina a la relación ser subconjunto, "Λ" representa a la clase vacía,....

[7] Ejemplos: 1.aƆa. 5. a=b .=. b=a. 11.abƆa .

[8] Ejemplo: 51. $a,b\varepsilon$ K .Ɔ∴ a=b :=: $x\varepsilon$ a $.=_{x}.$ $x\varepsilon b$. (Axioma de extensión: Si a,b son clases -conjuntos- entonces a es igual a b sí y sólo si para cualquier $x\in a$ sii $x\in b$)

[9] La doble implicación también es representada por Peano mediante el signo "="; es más, la igualdad entre conjuntos también hace uso de dicho signo. Es un rasgo típico en la axiomatización de Peano que repita los signos para representar cosas distintas aunque íntimamente relacionadas. Otros ejemplo de la anterior peculiaridad: "Λ" es el signo lógico para el absurdo y también representa a la clase(conjunto) vacía ; que "$\cup$" es el signo para la disyunción pero también para la unión de clases; "Ɔ" es el signo de la implicación pero también el de contención de clases.

2. *a*εN .Ↄ. *a*=*a*.	$[\ a \in N \rightarrow a=a\ ]$
3. *a*,*b*εN .Ↄ: *a*=*b*.=.*b*=*a*.	$[\ a,b \in N \rightarrow (a=b \leftrightarrow b=a)\ ]$
4. *a*,*b*,*c*εN .Ↄ∴ *a*=*b*.*b*=*c* :Ↄ. *a*=*c*.	$[\ a,b,c \in N \rightarrow (\ (a=b \wedge b=c) \rightarrow a=c\ )\ ]$
5. *a*=*b*.*b*εN :Ↄ. *a*εN.	$[\ (a=b \wedge b \in N) \rightarrow a \in N]$
6. *a*εN .Ↄ. *a*+*1*εN.	$[\ a \in N \rightarrow a+1 \in N\ ]$
7. *a*,*b*εN .Ↄ: *a*=*b*.=.*a*+1=*b*+1.	$[\ a,b \in N \rightarrow (\ a=b \leftrightarrow a+1=b+1\ )\ ]$
8. *a*εN .Ↄ. *a*+1-=1.	$[\ a \in N \rightarrow \neg\ (a+1=1)\ ]$
9.kεK ∴ 1εk ∴ xεN.xεk :Ↄx. x+1εk ::Ↄ. NↃk.	$[(1 \in T \wedge ((x \in N \wedge x \in T) \rightarrow x+1 \in T)) \rightarrow N \subseteq T]$

(Peano,1889 vía 1979:59)

Entre corchetes se escribió una traducción de cada uno de los principios reproducidos para facilitar su comprensión ante la confusión que pueda provocar su notación original[10]. Del segundo al quinto (P2-P5) son axiomas para la igualdad. Los tres primeros establecen que la igualdad es una relación de equivalencia (P2.Reflexividad, P3. Simetría y P4.Transititividad) mientras que el quinto (P5) asienta su cerradura (las cosas iguales son de la misma clase -numérica-). Por consiguiente, P2-P5 son proposiciones primeras relativas a una relación cuya extensión sobrepasa a los números naturales (v.gr. 0.5=1/2). Es más, si la igualdad se considera una relación lógica, tal como se acostumbra hacerlo, entonces los principios P2-P5 se podrían reasignar al primer bloque de principios auxiliares. En suma, estos cuatro principios no son propios de la aritmética e incluso podrían equipararse con las Nociones Comunes formuladas en el Libro I de los *Elementos* en cuanto que abarcan más allá del dominio original de su axiomatización.

Sustraídos los axiomas de la igualdad, en los principios restantes hemos de encontrar a los endémicos de la aritmética: P1, P6, P7, P8 y P9. Mientras que en la identificación de su clase respecto a nuestra caracterización mínima de una axiomatización, otra vez será el uso de en el desarrollo de la teoría de los *Principios* el factor determinante para esa catalogación. De nuevo empezaremos reconociendo su

[10] Las agrupaciones indicadas originalmente por medio de los signos ".",":", "∴", se señalaron en la traducción con la ayuda de paréntesis. Mientras que el signo "ε" de "...es..." fue sustituido por el signo "∈", el cual ahora es utilizado para representar la relación de pertenencia. Además, en la traducción se utilizaron signos para los conectivos más actuales: la negación "-" se intercambió por "¬" , la conjunción "." se sustituyó por "∧" y la implicación "Ↄ" por "→". Además se recurrió al signo "⊆" para indicar la relación de ser subconjunto cuando el signo "Ↄ" es empleado en la formulación original con ese fin. Por último, las letras mayúsculas en la traducción sirven para denominar conjuntos, por ejemplo en el noveno principio se eliminó la condición de que k sea una clase ("kεK") por medio de la utilización de la letra mayúscula "T".

función a partir de su formulación, para luego tratar de confirmarla ofreciendo evidencia de ella en alguna demostración.

El principio P1 dice que al primer objeto de la clase de los naturales, es aquel designado mediante el signo “1”. Es decir, P1 suministra al primer número natural a partir del cual se obtendrán todos los demás. Mientras que el principio P6 menciona la manera de seguir generando a la clase N: si el objeto denominado mediante “*a*” es uno de ellos, entonces también lo será “*a*+1”. Por lo tanto, este par de principios tienen un aspecto constructivo similar al de los componentes R1 y R2 del postulado del triángulo aritmético, pues la finalidad de ambos es la producción secuencial de los elementos de la clase N. Sin embargo, el deseo de Peano por desambiguar el lenguaje también alcanzó a lo “sencuencial” de su construcción de N y a diferencia de Pascal, él sí especificó este modo de generación a través de la formulación de otro par de principios, P7 y P8, cuya función comenzará a develarse a continuación.

El principio P7 indica que el número obtenido mediante P6, *a*+1, es único. Es decir, todo número natural es *sucedido* por uno y sólo un natural. Expresado con terminología más técnica, el axioma P7 establecería la inyectividad de la función sucesor. Mientras que el principio P8 reafirma la condición del 1 de ser el generador de la clase N. Expresado técnicamente, el axioma P8 establecería la suprayectividad de la función sucesor. Por lo que en conjunto, P7 y P8 aseveran que cada número natural es sucedido por uno y sólo un natural (P7) distinto a él (P7-P8). En conciso, si $a \in N$ entonces $a \neq a+1$ gracias a estos dos axiomas[11]. En suma, ambos principios caracterizan a la *secuencia* matemática más famosa, la de la sucesión de números naturales, secuencia en la cual existe un primero elemento (P8) y en la que cada uno de sus elementos es inmediatamente sucedido por uno y sólo uno distinto a él (P7-P8). Por lo tanto, la construcción propiciada por principios P1,P6 y caracterizada por P7-P8, generaría a la más célebre de las secuencias revistiéndola con la siguiente notación: 1,1+1,(1+1)+1,((1+1)+1)+1, (((1+1)+1)+1)+1....

[11] Intuitivamente, si $a=a+1$ entonces por P7 $a-1=a$ entonces por P7 $a-2=a-1$....entonces por P7 1=1+1, lo cual es un absurdo por P8 .

El último principio, P9, ocupa un lugar especial dentro de la axiomatización de la aritmética Peano pues además de cumplir con una tarea similar a la realizada por los anteriores, también realiza las funciones de la otra clase de principios básicos. Por un lado, el consecuente de P9 asevera que N es una subclase de cualquier clase T que tenga una subclase (T$\cap$N) afín a los estatutos de construcción de N mencionados en su antecedente. Es decir, P9 expurga a la clase N de objetos no naturales pues afirma que ella es la intersección de *todas* las clases respetuosas de los postulados P1 y P6 e incluso de los axiomas P7-P8. Por ejemplo, si R fuese la clase de los números racionales mayores que cero, entonces tendríamos que (P1)$1\in$R, (P6)$a\in$R$\rightarrow a+1\in$R, (P7)$a,b\in$R $\rightarrow$ ($a=b\leftrightarrow a+1=b+1$) y (P8) $a\in$R $\rightarrow \neg$ ($a+1=1$). Sin embargo, ni ½ ni ½+1 ni (½+1)+1 ni... son números naturales. Y P9 expulsa a todos estos intrusos, dado que ellos no están en *toda* clase que satisfaga al resto de los principios de la aritmética. Por ejemplo, no están en R-{½,½+1, (½+1)+1,...}. Más adelante cuando sea Dedekind el centro de nuestra atención, veremos de nuevo formulada de manera más directa este modo de segregación.

Por otro lado, el principio P9 codifica un método de demostración ya visto en el tratado de Pascal: la inducción matemática débil. Y con el objetivo de detectar este papel representado por P9, a continuación será reproducida la primera demostración en los Principios que hace ese uso de él. Más aún, esta demostración ayudará a confirmar la catalogación de algunos de los principios previos. La proposición cuya prueba será ofrecida como evidencia a favor de este rol desempeñado por P9, será la Decimonovena de la sección primera titulada "Números y Adición". Dicha proposición afirma la cerradura de la suma, operación cuya definición está dada en la proposición Decimoctava:

18. $a,b\varepsilon$N .Ɔ. $a + (b + 1) = (a + b) + 1$. (Peano:1889,p.61)

En la definición de suma previamente transcrita, la adición de la unidad, "...+1", es la única *suma* cuyo significado se conoce, pues es el sucesor tratado por los principios P6, P7 y P8. Por lo que si se demostrara que "($a+b$)" representa también un número natural, entonces la expresión "($a+b$)+1" significaría el sucesor de $a+b$ y por consiguiente, la definición 18 lograría su cometido al indicar que la suma $a+(b+1)$ equivale al sucesor de

$a+b$[12]. Y Peano demuestra lo requerido para aclarar su definición de suma en su proposición aritmética Decimonovena:

19. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\text{Ɔ}.\, a + b \,\varepsilon\, \mathrm{N}.$

Prueba: $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}\,6 \,:\text{Ɔ}:\, a + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,:\text{Ɔ}:\, 1 \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts}.$ (1)

$a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\text{Ɔ}::\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} . b \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts} \,:\text{Ɔ}:\, a + b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}\,6 \,:\text{Ɔ}:\, (a + b) + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}\,18 \,:\text{Ɔ}:\, a + (b + 1) \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,:\text{Ɔ}:\, (b + 1) \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts}.$ (2)

$a \,\varepsilon\, \mathrm{N} . (1) . (2) \,.\text{Ɔ}::\, 1 \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts} \,.\therefore.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} . b \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts} \,:\text{Ɔ}:\, b + 1 \,\varepsilon\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts} \,.\therefore.\, ([b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts})\,[k]\,\mathrm{P}\,9 \,::\text{Ɔ}:\, \mathrm{N} \,\text{Ɔ}\, [b\,\varepsilon]\,\mathrm{Ts}.\ (\mathrm{L}\,50) \,::\text{Ɔ}:\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\text{Ɔ}\, \mathrm{Ts}.$ (3)

$(3) . (\mathrm{L}\,42) \,:\text{Ɔ}:\, a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\text{Ɔ}.$ Thesis. (Theor.).

(Peano,1889:19)

En esta deductiva urdimbre de signos, se puede reconocer en su encadenamiento su parecido, vaticinado por Peano desde el prefacio de sus Principios, con el “procedimiento de resolución de ecuaciones“. Es decir, al desembrollar los pasos de esta prueba, se puede identificar una manipulación simbólica típica del álgebra que eventualmente también se habría de estandarizar, gracias en gran medida al trabajo de Peano, en la lógica matemática. Para mostrar este proceder derivativo con mayor claridad, a continuación desembrollaremos a la prueba de original:

(1) $a \in \mathrm{N}$	Hipótesis
(1’) $\mathrm{T} = \{\, b \mid b \in \mathrm{N} \wedge a+b \in \mathrm{N} \}$	Definición del conjunto T por L57[13]
(2) $a \in \mathrm{N} \rightarrow a+1 \in \mathrm{N}$	P6
(3) $a+1 \in \mathrm{N}$	Modus Ponens (1)(2)
(4) $1 \in \mathrm{T}$	Por (1’), (3) y L59[14]
(5) $b \in \mathrm{N} \wedge b \in \mathrm{T}$	Hipótesis
(6) $a+b \in \mathrm{N}$	Por (5), L11[15], (1’) y L59
(7) $a+b \in \mathrm{N} \rightarrow (a+b)+1 \in \mathrm{N}$	P6
(8) $(a+b)+1 \in \mathrm{N}$	MP (6)(7)
(9) $a+(b+1) = (a+b)+1$	P18
(10) $(a+(b+1) = (a+b)+1 \wedge (a+b)+1 \in \mathrm{N}) \rightarrow a+(b+1) \in \mathrm{N}$	P5
(11) $a+(b+1)=(a+b)+1 \wedge (a+b)+1 \in \mathrm{N}$	Introducción $\wedge$ (9)(8)
(12) $a+(b+1) \in \mathrm{N}$	MP (10)(11)

[12] Es decir, Peano está ofreciendo una definición recursiva de suma, pues en 18. se postula que x+s(y)=s(x+y) mientras que en 19. se demuestra que $(x+y) \in \mathrm{N}$.

[13] Donde L57 es un axioma de comprensión para clases (conjuntos):

57. $a\varepsilon\, \mathrm{P} \,.\text{Ɔ}:\, [x\varepsilon]a.\varepsilon\mathrm{K}.$

Es decir, si *a* es una proposición entonces las x que satisfacen *a* (representadas por el signo “$[x\varepsilon]a$”) forman una clase (un conjunto).

[14] 59. $a\varepsilon\mathrm{P} \,.\text{Ɔ}\therefore\, x\varepsilon.[x\varepsilon]a := a.$

[15] 11. $ab \,\text{Ɔ}\, a.$

(13) $\boldsymbol{(b+1) \in T}$		Por (1'),(12) y L59
(14) $\boldsymbol{(b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T}$		Prueba Condicional (5)(13)
(15) $1\in T \wedge ((b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T)$		$I\wedge$ (4)(14)
(16) $\boldsymbol{(1\in T \wedge ((b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T)) \rightarrow N\subseteq T}$		**P9**
(17) $\boldsymbol{N\subseteq T}$		MP (15)(16)
(18) $b\in N \rightarrow a+b\in N$		Por (17) , L50[16] y L59
(19) $(a\in N \rightarrow (b\in N\rightarrow a+b\in N)) \rightarrow ((a\in N \wedge b\in N) \rightarrow a+b\in N)$		L42 con L9[17]
(20) $a\in N\rightarrow(b\in N\rightarrow a+b\in N)$		PC (1)(18)
(21) $(a\in N \wedge b\in N) \rightarrow a+b\in N$	Teorema	MP (20)(19)

Tal como acontece en el álgebra, se puede citar a ciertas reglas (v.gr. leyes de cancelación) para legitimar a las derivaciones simbólicas realizadas en la demostración de P19, aunque su seguimiento, como se hace en la prueba original, no requiere de su mención. Contrastantemente, Peano tiene mayor meticulosidad en formular a las proposiciones que explícita (P6, P18, L50,...) o implícitamente (L57, L59,...) utiliza como respaldo justificativo en su demostración. Es decir, Peano todavía no expresa con tanta precisión a los miembros de la otra clase de principios básicos de una axiomatización: los métodos de inferencia. Y esa falta de cortesía hacia ellos, también se manifiesta en el nombre dado por Peano a su principio P9. Él lo llama axioma, cuando también es, un método de inferencia. Antes de proceder a la defensa de la pertenencia de P9 a la segunda clase de principios básicos, expondremos otros miembros de ella usados en la prueba original de P19 para remarcar la falta de interés de Peano por desambiguar este aspecto de su lenguaje simbólico.

En la prueba traducida se identifican tres métodos de inferencia empleados en la de Peano: Modus Ponens -en (3),(8),(12),(17), (21)-, Introducción de la Conjunción -en (11), (15)- y Prueba Condicional -(14),(20)-. Sean α ,β, δ variables proposicionales. La regla de Modus Ponens (MP), ahora representable mediante el esquema "$\alpha, \alpha\rightarrow\beta \vdash \beta$", es insinuada por Peano como "$\alpha.\beta:Ɔ: \delta$". Por ejemplo en la prueba original de P19,

---

[16] 50. $a,b\ \varepsilon K .Ɔ\therefore\ a Ɔ b :=: x\varepsilon a .Ɔ_x. x\varepsilon b$.

[17] 42. $aƆ.bƆc :=.ab Ɔ c$.

Ahora bien, para transformar la doble implicación de L42 en la implicación que será utilizada para el MP podemos usar L9:

9. $a=b .Ɔ. aƆb$.

"$a\varepsilon$N.P6:Ɔ:a+1εN" indica que "a+1εN" se obtiene aplicándole MP a "aεN" y a "$a \in N \rightarrow a+1 \in N$". En la prueba traducida, la secuencia deductiva anterior se despliega en los pasos (1),(2) y (3).

La Introducción de la Conjunción (I∧), representable ahora mediante el esquema "$\alpha,\beta \vdash \alpha\wedge\beta$", es sugerida en la prueba original simplemente como "$\alpha.\beta$". Por ejemplo en la prueba original, "(1).(2)" señala la conjunción del par de proposiciones "1ε[bε]Ts" [18] y "$b\varepsilon$N.$b\varepsilon$[bε]Ts:Ɔ.(b+1)ε[$b\varepsilon$]Ts" requeridas para utilizar al principio P9, proposiciones a su vez extraíbles de las cadenas de implicaciones etiquetadas por Peano como (1) y (2) respectivamente. En la traducción de la prueba, la secuencia deductiva anterior se desenvuelve en los pasos (4), (14) y (15).

Por último, la Prueba Condicional (PC) que descarga la hipótesis α cuando forma parte de una deducción de β para concluir $\alpha\rightarrow\beta$, es insinuada por Peano como una cadena de implicaciones en cuyos eslabones anteriores a β figura la hipótesis descargada α. Por ejemplo en la cadena de implicaciones (2) de la prueba original, aparece en su segundo eslabón la hipótesis "$b\varepsilon$N.$b\varepsilon$[$b\varepsilon$]Ts" y ya que la conclusión final de esa cadena es "(b+1)εN" entonces mediante PC se deduce "$b\varepsilon$N.$b\varepsilon$[$b\varepsilon$]Ts:Ɔ.(b+1)εN". La anterior secuencia deductiva se muestra en los pasos (5), (13) y (14) de la traducción. Es más, el esquema general de la prueba de la proposición Decimonovena es revelado en la traducción como el de una Prueba Condicional, pues la hipótesis inicial "$a \in$N" finalmente es descargada en el paso (20) gracias a PC para luego mediante L42 y un MP deducir en (21) al teorema P19.

La función de P9 como expresión de una regla de inferencia se puede verificar en la prueba transcrita de P19, pues allí hemos de reconocer que ese principio determina a su plano deductivo. Fijémonos en la prueba expandida de P19 para facilitar nuestro análisis. A primera vista la labor de P9 desempeñada en esa prueba no parece discrepar de la del resto de las proposiciones no demostradas en la axiomatización (P1-P8, L1-L66, P18,...). El

[18] Donde Ts es la tesis que quiere ser probada, a saber el consecuente "a+$b\varepsilon$N"de la implicación "$a,b\varepsilon$NƆa+b", el cual fungirá como la propiedad que definirá al conjunto "[$b\varepsilon$]Ts" sobre el cual se aplicará el principio P9.

principio P9 es aseverado en el paso (16) para recibir junto con la proposición deducida en (15) la aplicación de un Modus Ponens mediante el cual se deriva la proposición en (17):

(15) $1\in T \wedge ((b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T)$	I$\wedge$ (4)(14)
(16) $\mathbf{(1\in T \wedge ((b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T)) \rightarrow N\subseteq T}$	**P9**
(17) $\mathbf{N\subseteq T}$	MP (15)(16)

Por lo que si nuestra revisión se quedara sólo en este nivel de observación, P9 sería catalogado dentro de la primera clase de principios básicos, la cual está conformada por (1.1)proposiciones primeras y (1.2)estatutos de construcción. Bajo este punto de vista, la tarea de P9 en la prueba no diferiría de la desempeñada por el otro principio de la aritmética allí presente, P6. Por ejemplo, P6 también es fincado en el paso (2) para ser luego utilizado junto con la hipótesis enunciada en (1) para la derivación en (3) de la proposición "$a+1\in$ N" mediante un Modus Ponens. Es decir, los principios básicos de la primera clase fungen como cimiento justificativo para el desarrollo de la teoría. Por lo que si nuestra inspección de la axiomatización de Peano prosiguiera, también seguiríamos corroborando el papel de puntal ejecutado en las demostraciones por los otros principios de la aritmética, P1[19], P7[20] y P8[21], recordando que P1,P6 lo hacen de una manera constructiva ya discutida.

Sin embargo si nuestro examen se hiciera desde una perspectiva global, es decir no nada más enfocándonos en los pasos de la prueba donde P9 aparece o es citado por una

[19] Como evidencia de la pertenencia de P1 a la primer clase de principios básicos, podemos citar los siguientes pasos de la prueba del teorema P11:

11. 2 ε N.

Prueba:

P 1 .Ɔ:	1 ε N	(1)
1 [a] (P 6) .Ɔ:	1 ε N .Ɔ. 1 + 1 ε N	(2)
(1) (2) .Ɔ:	1 + 1 ε N	(3) (Peano,1889:61)

[20] Como evidencia de la pertenencia de P7 a la clase de las proposiciones primeras, podemos citar a la prueba del teorema P17:

17. *a,bε*N .Ɔ: *a*-=b .=. *a*+1-=b+1.

Prueba: P7.L21 :Ɔ. Theor.

Donde L21 es: *a*=*b* .=. -*a*=-*b*.

[21] Como evidencia a favor de la pertenencia de P8 a la clase de las proposiciones primeras, podemos citar algunos pasos de la prueba del teorema P19 de la sección segunda "Sobre la sustracción":

19. 17. *a,bε*N .Ɔ: *a*+*b*-=*b*.

Prueba: *aε*N.P8 : Ɔ: *a*+1-=1 : Ɔ: 1*ε*[b*ε*]Ts (1)...(La prueba continúa de acuerdo al método de inducción matemática delineado en P9) regla de inferencia sino fijándonos en la prueba por completo, entonces otro rol deductivo de P9 puede identificarse. La proposición P19 es una implicación ($(a\in N \wedge b\in N)\rightarrow a+b\in N$) y las implicaciones en las matemáticas se demuestran frecuentemente a partir de la asunción de su antecedente o parte de éste. Peano así lo hace y empieza su prueba importando del antecedente de P19 a la hipótesis "$a\in N$" para usar a su consecuente en la formulación de la propiedad Ts, a saber "$Ts(b) \leftrightarrow b\in N \wedge a+b\in N$". Una vez extraída la propiedad Ts, la prueba procede de acuerdo a la siguiente trama deductiva:

i. Mediante la propiedad Ts se especifica al conjunto T en el paso de la prueba (1') por medio del axioma de comprensión L57.

ii. A través de los pasos (2),(3) se llega a la conclusión "$1\in T$" en (4).

iii. A partir de suponer "$b\in N \wedge b\in T$" en (5) los siguientes pasos de la prueba conducen a la deducción de "$(b+1) \in T$" en (13) para finalmente concluir "$(b\in N \wedge b\in T)\rightarrow (b+1)\in T$" en (14).

∴ Concluyo $N\subseteq T$ en (17)

Finalmente, en los pasos del (18) al (20) se realizan los preparativos para descargar la hipótesis inicial y concluir "$(a\in N\wedge b\in N)\rightarrow a+b\in N$" a través de la regla de la Prueba Condicional en el paso (21). De este modo, la prueba de P19 sigue una ruta deductiva que es dirigida por el principio P9: (i) es el punto de partida para llegar a (ii), paso acordado por la proposición "$1\in T$" en el antecedente de P9, y luego a (iii), paso en concordancia con "$(x\in N\wedge x\in T)\rightarrow x+1\in T)$" en el antecedente de P9. Al final, la conclusión inferida no es otra sino el consecuente del principio P9: $N\subseteq T$.

Ahora bien, para corroborar la función como regla de inferencia de P9 podemos abstraer de la prueba reproducida de P19 al siguiente método de demostración: Si se desea probar el cumplimiento de todos los números naturales de cierta propiedad Ts (Tesis), entonces:

i. Defínase al conjunto T mediante el axioma de comprensión L57 conformado por los números naturales que satisfagan Ts.

ii. Pruébese que $1\in T$.

iii. <u>Pruébese que si (x$\in$N$\wedge$x$\in$T) entonces x+1$\in$T.</u>

$\therefore$ Conclúyase que T$\subseteq$N

En el capítulo previo donde se expuso nuestra caracterización mínima de una axiomatización, se mencionó que la diferencia entre la primera y segunda clase de principios no era categórica. En los *Principios* se anuncia a P9 como un axioma de la aritmética y conforme a su función puntual en las pruebas, tal estatus deductivo se ratifica al servir de apoyo a las proposiciones inferidas en ellas. Su antecedente ("1$\in$T $\wedge$ ($b\in$N $\wedge$ $b\in$T)$\rightarrow$(b+1)$\in$T") caracteriza a los conjuntos ahora llamados inductivos, mientras que su consecuente afirma la propiedad del conjunto N de ser subconjunto de todo conjunto inductivo (N$\subseteq$T). Así entonces si centramos nuestra revisión en el nivel de lo inmediato, P9 formaría parte de los axiomas (proposiciones primeras) de la aritmética, P7 y P8, los cuales junto con los postulados P1 y P6 (estatutos de construcción), conformarían a los principios básicos de la primera clase que son propios de esta rama matemática dentro de esta axiomatización.

No obstante, aunque P9 se haya formulado y funcione como un axioma, desde una perspectiva más global se revela su uso como método de inferencia pues la inserción del axioma P9 en una prueba moldea a su plano deductivo. La utilización de este principio obliga el establecimiento del par de propiedades que caracterizan a un conjunto inductivo: ii. 1$\in$T y iii. ($b\in$N $\wedge$ $b\in$T)$\rightarrow$(b+1)$\in$T. Una vez probados ese par de atributos del conjunto T, el método de inferencia codificado en P9 las usa como premisas para concluir N$\subseteq$T y por consiguiente, todos los naturales satisfacen la propiedad Ts. Que la deducción de N$\subseteq$T se realice mediante la regla Modus Ponens, tal como sucede en la prueba de P19, es simplemente una cuestión circunstancial del aparato lógico de la axiomatización de Peano. Puesto que dicha maquinaria lógica admite un sinnúmero de distintas configuraciones y ya que Peano ni siquiera hace explícitos los engranes en torno de los cuales giran las inferencias de su axiomatización, entonces se carecen de razones terminantes para rechazar al carácter activo de P9 en la producción de conclusiones y a su subsecuente catalogación como método de inferencia.

Más aun, el plano de prueba delineado por P9 es más importante que su ejecución. El seguimiento del plano puede hacerse de un sinnúmero de distintas maneras además de la efectuada en la traducción de la prueba, en la cual se trata de interpretar correctamente las pistas sobre las reglas de inferencia halladas en la codificación de la prueba original. Por ejemplo podríamos emplear para la reelaboración de las pruebas de los *Principios* al sistema de la lógica proposicional propuesto por Mendelson, el cual consta de sólo tres axiomas y de la regla de inferencia Modus Ponens[22], en lugar de las 43 proposiciones lógicas y de las nulas reglas de inferencia explicitadas por Peano. En ese sistema lógico alternativo, en lugar de la regla de Prueba Condicional se puede apelar al Metateorema de la Deducción[23] para probar a las proposiciones cuya forma lógica es la de una implicación (v.gr. P19). En contraste, remplazar al método de inferencia cifrado en P9 sería mucho más complicado si quisiéramos conservar al resto de los postulados (P1,P6) y axiomas de la aritmética (P7,P8). Al atestiguar esa dificultad se revelará una semejanza en el entramado deductivo de los *Principios* de Peano y el *Tratado del Triángulo Aritmético* de Pascal. Antes de hacerlo, brevemente se discutirá sobre la presencia *implícita* del tercer grupo de principios en la obra de Peano estudiada: las definiciones.

Debido a que Peano llama a P18 una definición (de la operación suma), entonces dicho nombre podría insinuar la existencia de principios de la tercera clase en su *Aritmética.* Sin embargo, en esta obra se hace patente la tendencia de las axiomatizaciones más modernas de delimitar el significado de los términos en torno a la sustentación o la generación de inferencias para el desarrollo teórico. En la traducción de la prueba de P19, la “definición” P18 es usada como puntal justificativo en las

---

[22] Sistema presentado en su libro *Introducción a la Lógica Matemática*. Sus únicos tres esquemas axiomáticos son:
1.$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$
2.$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\varphi))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\varphi))$
3.$(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow((\neg\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow\beta))$

[23] El Metateorema de la Deducción faculta la importación del antecedente “α” de la implicación “$\alpha\rightarrow\beta$” para probar su consecuente “β” y a partir de esta prueba el metateorema asegura la existencia de una prueba de “$\alpha\rightarrow\beta$”. Es decir: $\alpha\vdash\beta$ si y sólo si $\vdash\alpha\rightarrow\beta$

deducciones que participa, tal como lo muestran sus pasos (9), (11) y (12)[24]. Es decir, la "definición" P18 cumple con el mismo rol en la prueba de P19 que los principios de la aritmética y las proposiciones primeras lógico-conjuntistas allí utilizadas: sirve como respaldo de las proposiciones derivadas. Es más, posteriormente se expondrá que la formulación misma de P18, al especificar el cálculo de la suma de manera *recursiva*, fomenta el uso del método de inferencia codificado en P9, la inducción matemática débil. Y si ampliáramos nuestro análisis hacia el resto de las "definiciones" dadas por Peano, también constataríamos su función de cimiento asertivo para la edificación de las pruebas. Por lo tanto, de acuerdo a nuestra caracterización mínima, las "definiciones" en los *Principios* de acuerdo a su uso en el desarrollo de la teoría, serían clasificadas como principios básicos de la primera categoría.

Cabe señalar que la utilización de los principios de la tercera clase como principios básicos (v.gr. proposiciones primeras) no es una peculiaridad de las axiomatizaciones más recientes. Recordemos que la definición euclidiana de número en VII.Def.2 puede ser leída de tal manera que ofrezca su respaldo al modo de razonamiento *descomposición-recomposición* descrito en el capítulo previo. Es más, este ejemplo euclidiano podría sugerir que en las axiomatizaciones más viejas el significado antecedía a la realización de inferencias: primero hay que comprender lo que es un número (VII.Def.2) para luego reconocer que su significado valida tanto a la *descomposición* de un número en unidades como a la *recomposición* de unidades en un número. Es decir, algunas definiciones en las axiomatizaciones antiguas al especificar el significado de sus respectivos términos teóricos, implícitamente apoyaban la ejecución de ciertos modos de razonamiento sobre los objetos definidos. Mientras que en sus contrapartes más actuales parece suceder lo contrario: ahora sólo se enuncian principios básicos que contienen a ciertos términos

---

[24] Por comodidad se reproduce de nuevo el extracto de la traducción para observar la función deductiva de P18:

(9) $a+(b+1) = (a+b)+1$	P18
(10) $(a+(b+1) = (a+b)+1 \wedge (a+b)+1 \in \mathrm{N}) \rightarrow a+(b+1) \in \mathrm{N}$	P5
(11) $a+(b+1)=(a+b)+1 \wedge (a+b)+1 \in \mathrm{N}$	Introducción $\wedge$ (9)(8)
(12) $a+(b+1) \in \mathrm{N}$	MP (10)(11)

teóricos, v.gr. "+" aparece en P6-P8 y P19, para luego reconocer que esos principios implícitamente determinan el significado de sus términos.

Recapitulando, los principios de la primera clase formulados en la axiomatización de Peano son las proposiciones lógico-conjuntistas (L1-L66, P2-P5); los axiomas (P7, P8 , "P9") y los postulados (P1,P6) de la aritmética; y las definiciones tanto de operaciones como de relaciones para los números naturales (suma -P18-, resta, menor que, mayor que,...)[25]. Todas estas proposiciones primeras (v.gr. P7, P8) y estatutos de construcción (v.gr. P1,P6, P18) sirven de respaldo justificativo para el desarrollo de los miembros de la aritmética de Peano. No obstante, las definiciones de operaciones y relaciones comúnmente no se incluyen dentro de los principios propios de la aritmética puesto que la naturaleza *recursiva* de su especificación puede ser subsumida por tales principios (en especial por P9 como más adelante será exhibido con Dedekind). Además se argumentó que el principio P9 también expresa un método de inferencia, la inducción matemática débil. Por lo que sólo resta por exponer la armonía reinante entre los principios de la aritmética pertenecientes a la primera clase con este último de la segunda, compaginación que a su vez mostrará la importancia de la inducción matemática para la aritmética misma. Ventajosamente en el capítulo previo ya se brindó el esquema argumentativo para cumplir con esta tarea cuando se analizó a la axiomatización del triángulo aritmético de Pascal, por lo que ahora sólo será retomado y ajustado a los *Principios de la Aritmética* de Peano.

En primer lugar, los postulados P1,P6 de la aritmética posibilitan la construcción de un conjunto N cuya generación *secuencial* es caracterizada por los axiomas P7,P8. Es decir, hay un primer miembro dado por P1 ("$1 \in N$") mientras que el resto se produce conforme se itera la ejecución de P6 ("$1+1 \in N$", "$(1+1)+1 \in N$", "$((1+1)+1)+1 \in N$ ",....), la cual a su vez está regulada por P7 y P8. Por lo que al agregarle a los postulados de la aritmética la regla de inducción matemática formulada en P9, la axiomatización adquiere

---

[25] 1. $a,b\ \varepsilon\ N\ .\supset:\ b - a = N[x\varepsilon](x + a = b)$. [Definición Resta]
2. $a, b\ \varepsilon\ N\ .\supset: a<b. = .b - a - = \Lambda$. [Definición relación "<"]
3. $a, b\ \varepsilon\ N\ .\supset: b>a. = .a<b$. [Definición relación ">"]

una poderosa herramienta deductiva cuya operación es facilitada por la construcción secuencial de los números naturales: para demostrar algo sobre ellos, basta con seguir los tres pasos del método de inferencia codificados en P9 que fueron previamente descritos.

Más aún, la naturaleza *recursiva* de algunas definiciones formuladas por Peano, favorece el seguimiento del método de inferencia delineado en el principio P9. Como ejemplos de este modo de especificación, además de la suma (P18) podemos citar al siguiente par:

Multiplicación

1. $a \varepsilon$ N. Ɔ. a x 1 =a.

2. $a,b \varepsilon$N .Ɔ . a x (b + 1) = a x b + a . ab = a x b. (Peano,1889 vía 1979: 71)

Potencia

1. $a \varepsilon$ N. Ɔ . $a^1 = a$.

2. $a,b \varepsilon$ N . Ɔ.$a^{b+l} = a^b a$. (Peano,1889 vía 1979: 74)

Ahora bien, el modo *recursivo* de especificación de estas operaciones, está en sintonía con el carácter *secuencial* de generación para la clase N ya discutido y para notarlo, basta con leerlo en sentido inverso. Es decir, ambos comienzan indicando lo que pasa para un primer elemento (v.gr.“1”) para luego señalar el proceder para cada próximo elemento (v.gr. “b+1”) a partir de quien le antecede (v.gr. “b”). Por lo tanto, esta clase de definiciones permiten plantear de nuevo una táctica deductiva para seguir a la inducción matemática formulada en P9, tal como la delinearemos para establecer la conmutatividad de la multiplicación (proposición P7 en la sección 4 de los *Principios*). Nuestra meta es probar para cualquier $a,b \in$N se cumple que $ab = ba$. Tras la consecución de nuestro objetivo podemos seguir los siguientes pasos:

i. Defínase respecto al número natural a la clase T={b|$b \in$N $\wedge$ ab=ba} mediante L57.

ii. Aprovéchese la base de la recursión de la multiplicación, i.e. ax1=a, para probar que 1∈T. [26]

iii. Utilícese la clausula recursiva de la definición de multiplicación, i.e. ax(b+1)=(axb)+a, para probar que axb=bxa implica ax(b+1)=(b+1)xa.

∴Infiérase gracias a P9 que N⊆T, es decir, para cualquier numero natural a se cumple que para todo b, $ab = ba$.

Por lo que gracias al carácter *secuencial* de la construcción de la clase de los naturales y de las definiciones de algunas operaciones, con la anexión del método de inferencia delineado por P9 a la axiomatización de la aritmética de Peano se obtiene una mecanizada y poderosa herramienta deductiva allí usada para probar propiedades acerca de los naturales, sus clases y sus operaciones, entre las cuales podemos mencionar a las siguientes como muestra de los miembros de la teoría en esa obra desarrollada:

Sección §1 (Suma)

23. a, b, c ε N .Ɔ. $a + (b + c) = a + b + c$.

25. a, b ε N .Ɔ. $a + b = b + a$. (Peano,1889 vía 1979: 63-4)

Sección §2 (Sustracción- relación de orden)

18. a ε N .Ɔ: a=I. ∪.a> 1.

23. a, b ε N :Ɔ: $a < b$.∪. $a = b$.∪. $a > b$. (Peano,1889 vía 1979: 67-8)

Sección §3 (Máximos-mínimos)

3. nεN. aε KN . a -=Λ . a3 >n=Λ :Ɔ. Ma ε N. (Peano,1889 vía 1979: 71) [27]

---

[26] Siendo deductivamente más cuidadosos, debemos confesar que este paso es un poco más complicado de establecer. En congruencia con el rigor por Peano enseñado, para establecer la igualdad entre ax1 y 1xa, tenemos que realizar una inducción matemática sobre a, tal como se hace en los *Principios* donde se demuestra por inducción en §4.5 que para todo número natural a, se cumple que 1xa=a.

[27] Traducción de §3.3: Si A es una subclase no vacía acotada de N, i.e. existe n∈N tal que para todo x∈A no se cumple que x>n, entonces su elemento máximo es un número natural. En resumen la prueba es una inducción matemática débil sobre n: (i) si A está acotada por n=1, entonces 1 es el máximo en A y por P1, 1∈N. Luego, supongamos se cumple la proposición para n=k y planteemos que el natural k+1 acota a A. Si k+1 es el máximo, entonces el máximo de A pertenece a N. Mientras que si m<k+1 y m es el máximo de A, entonces por hipótesis inductiva m pertenece a N.

Sección §4 (Multiplicación)

3. $a, b \ \varepsilon\ N \ .\supset.\ ab \ \varepsilon\ N.$

4. $a, b, c \ \varepsilon\ N \ .\supset.\ (a + b)c = ac + bc.$

7. $a, b \ \varepsilon\ N \ .\supset.\ ab = ba.$

15. $a, b, c \ \varepsilon\ N \ .\supset.\ a(bc) = abc.$ (Peano,1889 vía 1979: 71-5)

Sección §5 (Potencia)

3. $a,b \ \varepsilon\ N \ .\ \supset.\ a^b \ \varepsilon\ N.$ (Peano,1889 vía 1979: 75)

Sección §6 (División)

36. $a,b \ \varepsilon\ N \ .\supset.\ 3D(a,b) = 3\, D\, M3D(a,b).$ (Peano,1889 vía 1979: 79)[28]

En segundo lugar, la regla de inferencia codificada en el principio P9 obtiene la garantía de sus resultados deductivos cuando se asocia con los postulados P1 y P6. La conclusión de la regla expresada en P9, a recordar $N \subseteq T$, se asienta en la generación secuencial de la clase de los números naturales gracias a P1 y P6. Dicho respaldo constructivo puede hacerse manifiesto al poner en correspondencia a los pasos ii. y iii. de tal método de inferencia con los postulados P1 y P6. Al realizar tal cotejo podemos ver que la manera en que se transmite la propiedad Ts del primer elemento (Ts(1)) hacia sus sucesores ($Ts(x) \rightarrow Ts(x+1)$), coincide con la manera descrita por los postulados en que se va construyendo al conjunto (clase para Peano) de los números naturales. Por lo tanto, la validez del método de inferencia en P9 parece radicar en los estatutos de construcción del conjunto de los números naturales.

---

[28] Peano alude en su proposición §6.36 al problema VII.2 ya expuesto sobre el cómputo del máximo común divisor. En particular, en la proposición §6.36 se prueba tal como hizo Euclides después de haber expuesto su procedimiento de restas sucesivas, que el máximo común divisor realmente es el máximo divisor de *a* y *b*. La diferencia radica en que Peano demuestra mediante una inducción matemática débil, que todo divisor de *a*, *b* -"D(*a*,*b*)"- divide a su máximo común divisor -" M3D(*a*,*b*)"-, mientras que Euclides muestra a través de una reducción al absurdo la inexistencia de un divisor mayor al obtenido a través de su procedimiento de restas sucesivas. Y esta discrepancia muestra el carácter constructivo de la solución dada por Euclides para el cálculo del máximo común divisor, en contraste con la naturaleza asertiva en Peano quien en su teoría sólo afirma la existencia del máximo común divisor en la proposición §6.35.
Por otro lado, en los *Principios* gracias a la operación de división cuyas propiedades y relaciones son desarrolladas en su sexta sección, luego se introducen a los números racionales (§7) junto con el establecimientos de varias de sus propiedades para después a través de las clases de racionales, definir a los reales ("cantidades" salvo el cero y el infinito) como los límites superiores de ellas (§8).

Sin embargo, para ratificar la concesión de la validez al método codificado en P9 por los postulados P1 y P6 además se requeriría la posesión de alguna noción del orden típico[29] de los números naturales, puesto que el carácter *secuencial* de la generación de N aludido para basar las inferencias obtenidas a través de P9 en P1 y P6, a su vez parece montarse sobre este concepto. Es decir, para lograr embonar a P1-P6 con los pasos de P9 al menos se debe tener una concepción del orden que sostenga tanto la existencia de un primer número natural (P9.(i) ~ P1) como la de un único número natural inmediatamente mayor a cada uno de ellos (P9.(ii) ~ P6). Así entonces, un círculo vicioso parece presentarse en esta evaluación positiva de la configuración de los postulados P1,P6 con el método de inferencia en P9, ¡puesto que ella emplea un concepto (orden típico de los naturales) sujeto a la revisión !

Resulta común que a una axiomatización, v.gr. la del triángulo aritmético de Pascal o la de la aritmética de Peano, le precedan ciertos esbozos teóricos o nociones intuitivas, v.gr. las combinaciones y el orden típico de los naturales, que incluso figuran en las metas perseguidas en su elaboración misma, v.gr. su *unificación* o su representación *lingüísticamente depurada*. Por lo que si se critica la validez otorgada por P1 y P6 al método en P9 por cometer una petición de principio, entonces dicha descalificación en realidad apuntaría hacia una de las razones de ser de esta axiomatización, e incluso esta objeción también alcanzaría el origen y finalidad de varias ellas. Mientras que tal desacreditación a estas alturas del presente escrito, carece no sólo de sustentación sino también de sentido a menos que sirva para resaltar la asistencia proporcionada por otros principios de la axiomatización en la caracterización de lo pedido, tal como a continuación será insistido.

Con tal de inhibir las aprensiones sobre la viciosa circularidad señalada en nuestro reconocimiento de la validez otorgada por los postulados P1 y P6 al método de inferencia en P9, podemos recurrir a los axiomas P7 y P8 para hallar en ellos asentada una noción

[29] El calificativo de típico es usado para contrastarla con la infinidad de maneras distintas en que se puede ordenar al conjunto de los números naturales, como las dos siguientes:
$2<3<4<5<6<7< \dots <1$
$2<4<6< \dots <1<2<3< \dots$

de orden que las cancele. Por un lado, el axioma P8 al rechazar la suprayectividad de la función sucesor reafirma la condición de generador del 1 y por consiguiente, confirma su posición primera en la construcción del conjunto de los naturales. Por el otro, el axioma P7 al establecer la inyectividad de la función sucesor asevera que cada natural es sucedido por uno y sólo un natural, fincando de esta manera la infinita secuencia creciente de números naturales: 1,1+1,(1+1)+1, ((1+1)+1)+1,....Así entonces, los axiomas P7, P8 caracterizan a la función sucesor en conformidad con la noción requerida del orden típico de los naturales y por consiguiente, estos principios convalidan la evaluación satisfactoria de la asociación de los postulados P1,P6 con el método de inferencia delineado en P9.

Más aún, para corroborar la asistencia brindada por los axiomas P7,P8 a la asociación de los postulados P1,P6 con el método de inferencia expresado en P9, podemos con la ayuda de los primeros afianzar la garantía constructiva ofrecida por los segundos a los productos deductivos obtenidos mediante la regla formulada en el tercero. Es decir, la conclusión $N \subseteq T$ deducida de las premisas ii.$1 \in T$ y iii.$x \in T \wedge x \in N \rightarrow x+1 \in T$ está basada en los postulados P1, P6 mientras que ese respaldo se puede mostrar a través de los axiomas P7,P8 de la siguiente manera :

Sea $x_n \in N$ y supongamos el antecedente de P9, es decir ii.$1 \in T$ y iii.$(x \in N \wedge x \in T) \rightarrow x+1 \in T$. Para mostrar la validez de la conclusión de P9 se debe enseñar que $x_n \in N$. Luego por el proceso de generación de los naturales tenemos que $x_n=1$ por P1 o $x_n=x_{n-1}+1$ con $x_{n-1} \in N$ por P6. Ahora bien, si $x_n=1$ entonces por la premisa ii. de la inducción tenemos que $x_n \in T$; mientras que si $x_n=x_{n-1}+1$ con $x_{n-1} \in N$, entonces $x_n \in T$ ó $x_n \notin T$. Si $x_n \in T$ ya acabamos y por consiguiente supongamos que $x_n \notin T$. Debido al recíproco de la premisa iii. de la inducción, tendríamos que $x_{n-1} \notin T$ con $x_n \neq x_{n-1}$ por P7. Así entonces, si repitiéramos reiteradamente el argumento anterior siguiendo la disyuntiva $x_{n-m}+1 \notin T \rightarrow x_{n-m-1} \notin T$ entonces la sucesión decreciente $x_n > x_{n-1} > ... > x_{n-m} > x_{n-m-1} > ...$ debe terminar por P8, pues antes de 1 no existe otro natural z tal que z+1=1. Es decir, la sucesión decreciente en el peor de los casos debe acabar en 1: $x_n > x_{n-1} > ... > x_{n-m} > x_{n-m-1} > ... > 1$. Y en el fin de esta secuencia podemos invocar a la premisa i.$1 \in T$ o a la premisa ii.$x \in T \rightarrow x+1 \in T$ para manifestar el absurdo de seguir la disyuntiva de la secuencia $x_n > x_{n-1} > ... > x_{n-m} > x_{n-m-1} > ....$ Por lo tanto, $x_n \in T$ y en consecuencia $N \subseteq T$. Así entonces, la construcción del conjunto de los naturales formulada por los postulados P1,P6 y caracterizada como una construcción secuencial por los axiomas P7,P8 respalda a las conclusiones arribadas a través del método de inferencia codificado por P9[30].

En resumen, tal como aconteció en la axiomatización del triángulo aritmético, en la obra estudiada de Peano la configuración de sus postulados (P1,P6) con su método de inferencia de inducción matemática (P9) provee de un poderoso y válido medio para justificar propiedades de sus constructos. Expresado de manera cifrada, al unir los postulados (R o P1,P6) con el método de inferencia de inducción matemática (IMP o P9) la constitución (del triangulo aritmético o clase N) se justifica, mientras que al asociar el método de inducción matemática con los postulados la justificación (las pruebas obtenidas por inducción débil) se constituye. Juntos ganan y separados pierden su atractivo para la conformación de este par de axiomatizaciones. Y si en los *Principios* y en el *Tratado del Triángulo Aritmético* esta reunión resulta provechosa, precisamente es porque ambas se inspiran en mayor o menor medida en los números naturales y porque ambas desembocan con menor o mayor precisión en su concepción axiomática fincada en su aquí llamada naturaleza *secuencial*.

A continuación expondremos brevemente la respuesta ofrecida por Dedekind de *Qué son los números* para otra vez identificar semejanzas *estructurales* con la axiomatización del triángulo aritmético de Pascal. Más aún, esa obra de Dedekind nos ayudará a seguir dilucidando al modo *secuencial* de construcción reconocido en las axiomatizaciones de Pascal y Peano, pero sobretodo dado que es un objetivo de la

[30] Para dar una garantía más solida y demostrar a partir de los postulados P1,P6 la validez del método de inducción matemática delineado por P9 en lugar de sólo mostrarla, se requeriría de una caracterización más precisa de la noción intuitiva del orden típico de los naturales que la ofrecida por P7 y P8. La propiedad del orden típico de los naturales que ahora se utilizaría para realizar la demostración es la del buen orden, i.e. no sólo el conjunto N sino todo subconjunto de N tiene un primer elemento. No obstante, los postulados P1,P6 con ayuda de los axiomas P7,P8 aportan la construcción secuencial de los naturales que ofrece un firme respaldo de las inferencias realizadas de acorde a P9 con respecto al contexto lógico-epistemológico de la axiomatización de Peano.

presente tesis, nos servirá para determinar con mayor precisión la relación de los números naturales con la inducción matemática.

3.2 Qué son los números según Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) fue un matemático alemán con notables aportaciones en el álgebra, el análisis, la lógica, la teoría de números y de conjuntos. Su obra puede calificarse como consolidativa ya que principalmente ha servido para sistematizar al conocimiento en estas distintas áreas de las matemáticas. Quizás sus contribuciones conceptuales más famosas sean sus cortaduras[31] para el análisis y sus ideales[32] para el álgebra y la teoría de números. Con las primeras brindó un fundamento no geométrico para los números reales y su propiedad de continuidad, mientras que con los segundos extendió a la noción de divisibilidad montándola sobre estructuras algebraicas. En el desenvolvimiento teórico de ambos conceptos destaca el uso de la lógica y la teoría de conjuntos, el cual también sobresaldrá en la respuesta dada por Dedekind en su *¿Qué son y para qué sirven los números?* (*Was Sind und was sollen die Zahlen*?), libro cuyo análisis constituye el objetivo de este apartado.

Los números naturales ocuparon un lugar fundamental dentro del proyecto de sistematización de las matemáticas planteado por Dedekind. Por ejemplo, él basó la continuidad de los números reales sobre sus cortaduras[33], mientras que a éstas las definió

[31] La definición de una cortadura formulada por Dedekind es la siguiente:
Si ahora cualquier separación del sistema R [i.e. el conjunto de los números racionales] en dos clases A_1, A_2 es dada con la propiedad característica de que cualquier número a_1 en A_1 sea menor que todo número a_2 en A_2, entonces concisamente llamaremos a tal separación un corte [Schnitt] y la designaremos mediante (A_1, A_2). (Dedekind 1872 vía 1963: 12-3)

[32] La definición de un ideal dada por Dedekind en 1877 es la siguiente:
Nosotros llamaremos un *ideal* a cualquier sistema [ahora conjunto] $\mathfrak{m}$ de números en el dominio $\mathfrak{o}$ [ahora anillo] que satisfaga las propiedades:
I. La suma y diferencia de cualquier par de números en $\mathfrak{m}$ también está en $\mathfrak{m}$.
II. Cualquier producto de un número en el sistema $\mathfrak{m}$ por un número en el sistema $\mathfrak{o}$ es igual a un número en el sistema $\mathfrak{m}$. (Dedekind 1877 vía 1996: 96)
Intuitivamente, un ideal (principal) puede pensarse como el conjunto de todos los múltiplos de cierto número r, por lo que la propiedad I. indicaría la cerradura para la suma/resta de los múltiplos de r, mientras que II. señalaría su cerradura para la multiplicación de sus múltiplos por cualquier otro número. Mientras que una motivación detrás de su creación, puede hallarse en la extensión del teorema fundamental de la aritmética para los números enteros algebraicos, es decir números que son raíces de polinomios con coeficientes enteros cuyo coeficiente del término de mayor grado es igual a uno.

[33] Encuentro la esencia de la continuidad...en el siguiente principio:

como particiones del conjunto de números racionales. Luego cada número racional lo identificó con un par de números enteros y finalmente, a cada uno de estos últimos como un par de números naturales[34]. Por lo que afianzar a la base de esta estructura conceptual, los números naturales, era una objetivo favorable para su sistematización del análisis[35]. Y Dedekind así lo hizo en su respuesta a *¿Qué son... los números?*, obra desde cuyas primeras líneas revela sus intenciones cimentadoras:

> En la ciencia nada que se pueda probar debe ser aceptado sin una prueba. A pesar de lo razonable que parece esta demanda, todavía no puedo considerarla como satisfecha ni siquiera por los métodos más recientes para el establecimiento de los fundamentos de la ciencia más simple; es decir aquella parte de la lógica que trata sobre la teoría de números. (Dedekind, 1888 vía 1963:31)

Más aún, el objetivo perseguido por Dedekind no es sólo fundamentar la ciencia de los números, sino hacerlo exclusivamente sobre la lógica, es decir mostrar "el concepto de número" como "un resultado inmediato de las leyes del pensamiento" (Dedekind, 1888 vía 1963:31). En particular, es "la habilidad de la mente de relacionar cosas con cosas, de hacer que a una cosa corresponda otra cosa, o de representar una cosa con otras cosa, habilidad sin la cual es imposible razonar", el "único e indispensable fundamento" sobre el cual

---

"Si todos los puntos de una línea recta encajan en dos clases tales que cualquier punto de la primera esté a la izquierda de todo punto de la segunda, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, este punto cortaría a la línea recta en dos porciones". (Dedekind, 1872 vía 1963:11)

[34] Una reseña de esta secuencia de generación puede revisarse en Sieg-Schlim (2005).

[35] Algo similar también puede decirse del álgebra, pues finalmente las estructuras algebraicas por Dedekind definidas (campos, módulos, ideales,...), son abstracciones conjuntistas de los números naturales, sus operaciones (sucesor, suma, multiplicación...) y sus extensiones (enteros, racionales, enteros algebraicos...) obtenidas por estas operaciones y sus inversas (resta, división,...). En Ferrerios (2007), , se puede revisar el papel fundamental ocupado por los números naturales en la sistematización hecha por Dedekind del álgebra, sistematización de las matemáticas puras (álgebra-aritmética-análisis) cuya metodología por él es resumida de la siguiente manera:

1. La aritmética debería desarrollarse desde sí misma [Dedekind 1872, 321] evitando elementos foráneos y medios auxiliares -la noción de la magnitud en el caso de los reales, los polinomios en el caso de los ideales-.
2. Cuando se introduzcan nuevos elementos, estos deben ser definidos con base en las operaciones y fenómenos que pueden ser hallados en los "elementos aritméticos" previamente dados: la aritmética de $\mathbb{Q}$ en el caso de los reales, la aritmética de $\mathbb{C}$ en el caso de los ideales.
3. Las definiciones nuevas deben ser completamente generales, aplicándose "invariantemente" a todos los casos relevantes: uno no debería definir algunos reales como raíces, otros como logaritmos, etc. y uno no debería utilizar diferentes medios teóricos con tal de determinar los factores ideales en diferentes casos, tal como Kummer (como resultado de su enfoque y orientaciones distintas) hizo.
4. Las definiciones nuevas deben ofrecre una fundamentación sólida para la estructura deductiva de la teoría entera: ellas tienen que permitir definiciones correctas de las operaciones de los nuevos "elementos", y la demostración de todos los teoremas relevantes (véase también [Lipschitz 1986,65]).

(Ferreiros, 2007: 103)

según su "juicio debe ser toda la ciencia de los números establecida" (Dedekind, 1888 vía 1963:32). Mientras que para articular teóricamente este fundamento, él recurre al concepto de *sistema* de *cosas*, el cual es formulado de la siguiente manera:

> 1. ...una *cosa* es cualquier objeto de mi pensamiento. (Dedekind, 1888 vía 1963:44)
>
> 2. Frecuentemente sucede de que diferentes cosas *a*, *b*, *c*,…. por alguna razón pueden considerarse desde un punto de vista común, pueden asociarse en la mente y decimos que forman un *sistema S*; llamaremos a las cosas *a,b,c,... elementos* del sistema S, (Ibid.:45)

Por lo que los sistemas de Dedekind corresponden a las clases de Peano y ambas nociones, ahora las podemos identificar con los conjuntos. Y una vez aclarado lo que se entiende por *sistema*, Dedekind ya puede especificar a la habilidad lógica sobre la cual sustentará a la aritmética:

> 21. Definición. Por *transformación* [*Abbildung*] ϕ de un sistema S entendemos una ley de acuerdo a la cual para cualquier elemento determinado[36] s de S le *pertenece* una cosa determinada que es llamada el *transformado* de s y es denotada por $\phi(s)$; decimos también que $\phi(s)$ *corresponde* al elemento s, que $\phi(s)$ *resulta* o es *producido* de s por la transformación ϕ, que s es *transformado* en $\phi(s)$ por la transformación ϕ. (Dedekind, 1888 vía 1963:50)

Bajo nuestra caracterización mínima de una axiomatización, las dos primeras enunciaciones se agruparían bajo la clase de las definiciones dado que su función es clarificar el significado de los términos "cosa" y "sistema [de cosas]". Es decir, ellas no afirman ni la existencia ni propiedades de los *objetos* definidos y tampoco indican o validan a su construcción. Es más, para constatar su catalogación, este primer par de definiciones (tres si contamos "elemento de") se pueden contrastar con algunos principios de la primera clase enumerados por Dedekind concernientes a los sistemas como las siguientes:

> 2. El sistema S es igual al sistema T, en símbolos $S=T$, si todo elemento de S es también un elemento de T, y todo elemento de T es también un elemento de S. (Dedekind, 1888 vía 1963:45)
>
> 3. Definición. Un sistema A se dice *parte* del sistema S, cuando todo elemento de A es también un elemento de S...esto lo expresaremos concisamente mediante el símbolo $A \ni S$ [i.e. $A \ni S$ equivaldría a $A \subseteq S$] (Ibid.:46)

[36] Para Dedekind una "cosa está completamente determinada por todo aquello que se puede afirmar o pensar acerca de ella" (Dedekind, 1888: 44)

6. Definición. Un sistema *A* es una parte propia [*echter*] de *S*, cuando *A* es parte de *S* pero es diferente de *S*. (Ibid.:46)

8. Definición. Por el sistema *compuesto* de los sistemas *A,B,C,...* denotado mediante $\mathfrak{M}(A,B,C,...)$ nos referimos al sistema cuyos elementos están determinados por la siguiente prescripción: una cosa es considerada un elemento de $\mathfrak{M}(A,B,C,...)$ si y sólo si es elemento de uno de los sistemas *A,B,C,...*.[i.e. si *A,B,C,...* son sistemas entonces existe el sistema $\mathfrak{M}(A,B,C,...) = A \cup B \cup C...$]
(Ibid.:46-7)

17. Definición. Por la *comunidad* [*Gemeinheit*] de los sistemas *A,B,C*, ... entendemos al sistema $\mathfrak{S}(A,B,C,..)$ que consiste de todos elementos comunes *g* de *A,B,C*...[i.e. si *A,B,C,...* son sistemas entonces existe el sistema $\mathfrak{S}(A,B,C,..) = A \cap B \cap C \cap ...$]
(Ibid.:48)

Mientras que para confirmar la pertenencia de los anteriores principios a la primera clase, podemos citar a los siguientes teoremas apuntalados sobre ellos:

4. Teorema. $A \ni A$, a razón de (3).

5. Teorema. Si $A \ni B$ y $B \ni A$, entonces $A=B$.
La prueba se sigue de (3), (2).

7. Teorema. Si... $A \ni B$ y $B \ni C$, entonces *A* ¡ *C* y *A* es una parte propia de *C*, si *A* es una parte propia de *B* o *B* es una parte propia de *C*.
La prueba se sigue de (3), (6). (Dedekind, 1888 vía 1963:46)

9. Teorema. Los sistemas *A,B,C,...* son partes de $\mathfrak{M}(A,B,C,...)$. La prueba se sigue de (8), (3).

13. Teorema. Si *A* se compone de cualquiera de los sistemas *P,Q,..* entonces $A \ni \mathfrak{M}(P,Q,...)$. [esto se sigue de (8), (3)] (Ibid.:47)

18. Teorema. Cualquier parte común de *A,B,C,...* es parte de $\mathfrak{S}(A,B,C,..)$. La prueba se sigue de (17). (Ibid.:49)

Nótese que todas estas "definiciones" nombradas por Dedekind, (3), (6), (8), (17) y (21), pueden clasificarse como principios de la primera clase bajo nuestra caracterización. De las cuatro primeras ya se indicó su uso justificativo en los teoremas previamente enumerados, mientras que la definición fundamental (21) de "transformación [de un sistema]" a su vez es utilizada en el sostén de algunos otros como el par reproducido a continuación:

22. Teorema. Si $A \ni B$, entonces $A' \ni B'$ [donde $S'=\phi(S)$ [37] mientras que esta proposición se sigue de (3) y (21)] (Dedekind, 1888 vía 1963:51)

[37] Para conveniencia, ... para la transformación arbitraria ϕ del sistema arbitrario *S* , denotaremos a los transformados de los elementos *s* y de las partes *T* respectivamente mediante *s'* y *T '*. (Dedekind, 1888:50-1).

> 24. Teorema. El transformado de cada parte común de $A,B,C,...$, y por consiguiente de la comunidad $\mathfrak{G}(A,B,C,..)$ es parte de $\mathfrak{G}(A',B',C',..)$. [esta proposición se sigue de (18), (21) y (22)] (Ibid.:52)

Esta observación sobre el uso justificativo de estas definiciones se puede sostener también sobre el resto de las aparecidas en el *¿Qué son...los números*?, tal como lo mostraremos con algunas otras que son determinantes para la respuesta de Dedekind a esta interrogante. Curiosamente, todos los principios por él nombrados los llama "definiciones" mas nunca postulados ni axiomas, peculiaridad que puede rememorar al Libro VII de Euclides. Y si en ese monumento clásico en el capítulo anterior obstinadamente tratamos de reconocer principios básicos en algunas de sus definiciones, v.gr. en VII.Def.2, ahora no sólo lo hemos hecho parcialmente sino afirmamos que todas las "definiciones" explícitamente enunciadas como tales por Dedekind, tienen un uso justificativo característico de los principios de la primera clase. Independientemente de que en ambos desarrollos aritméticos algunas o todas sus definiciones desempeñen el papel de respaldo deductivo, cabría preguntar, por qué sus correspondientes autores decidieron sólo nombrar "definiciones" y no "postulados" , entendidos estos últimos a la usanza aristotélica como hipótesis de las ciencias *particulares*.

Para responder a esta ausencia de una formulación de postulados aritméticos, tentativamente se podría apelar a cierta noción de generalidad inherente a los números naturales, para tratar de explicar por qué pueden prescindir de ellos. No obstante ante la complejidad de la catedral euclidiana, por prudencia nos abstenemos de sustentar una respuesta de esta índole a este cuestionamiento. Sin embargo, si nos atreveremos a sostenerla para Dedekind puesto que, a nuestro parecer, contamos con la cantidad suficiente de evidencia para que la explicación sugerida al menos luzca verosímil.

En el pronunciamiento con el que inaugura su *¿Qué son...los números?* , Dedekind además de avisar que va a fundamentar al concepto de número sobre la habilidad lógica de la *transformación*, también lo declara "independiente de las nociones o intuiciones del espacio y el tiempo" (Ïbid.:31). Por otra parte, usualmente se ha tratado de situar el origen de los principios de la primera clase para la geometría y la aritmética en nuestras nociones o intuiciones del espacio y del tiempo, costumbre mayoritariamente inspirada en la *Estética Trascendental* de Kant. Por lo que la afirmación de independencia y la falta de nombramiento de axiomas o postulados para la aritmética realizadas por Dedekind, pueden en conjunto interpretarse como su deseo filosófico por liberar de las restricciones espacio-temporales a los números naturales asentándolos sobre nuestra razón misma[38]. A favor de esta motivación, se puede señalar que no sólo los objetos procedentes del espacio-tiempo pueden ser contados u ordenados mediante los números naturales. Es decir, el dominio de aplicación del concepto de número es más general que nuestras intuiciones espacio-temporales, mientras que su extensión dependería de los límites de nuestro pensamiento al proveernos este de todas las cosas por ser contadas u ordenadas. Y si la lógica trata sobre "las leyes del pensamiento", entonces la lógica parecería ser la responsable de delimitar a la aritmética.

Más aún, si la facultad mental de relacionar cosas con cosas, i.e. de *transformarlas,* subyace a los procesos de contar y ordenar, entonces la lógica no sólo serviría para delimitar sino también para conformar a la noción de número natural. Mientras que la otra capacidad de nuestro pensamiento mentada por Dedekind, la de *asociar* en nuestra mente cosas para constituir un sistema, nos suministraría de las multitudes por ser contadas u ordenadas. Por lo tanto, sobre este par de habilidades parecería viable fundar a la aritmética y así consumar su independencia del espacio-tiempo.

Ahora bien, Dedekind articula teóricamente este par de habilidades del pensamiento formulando una serie de principios primeros[39] para los sistemas (ahora

---

[38] De igual modo se pueden interpretar a la formulación de las cortaduras como el deseo de Dedekind de liberar de nuestras intuiciones espacio-temporales (geométricas) a la propiedad de continuidad de los números reales. Un argumento más extendido sobre el "anti-kantianismo" en el logicismo de Dedekind se puede hallar en Ferreiros (2007), lugar en donde a su vez se hace la siguiente advertencia:

Pero la misma reacción de Dedekind [vs Kant], como la de Frege, todavía pertenece al marco general kantiano. La tendencia hacia la abstracción refuta la tesis sobre lo intuitivo liberando a las matemáticas de su enlace con la intuición. Si todavía creyéramos, con Kant y Leibniz de por medio, que las matemáticas puras son a priori, sólo quedaría la posibilidad de adscribirles un origen lógico. Así entonces, se retomaría la tesis de Leibniz acerca de que las proposiciones matemáticas son "verites de raison".

(Ferreiros, 2007: 244)

[39] Anteriormente ya se reprodujeron algunos de ellos, v.gr. el ahora llamado axioma de extensión: 2. $S = T \leftrightarrow \forall x(x \in S \leftrightarrow x \in T)$. Es decir, en *Qué son los números* ya podemos hallar algunos de los principios básicos o

llamados conjuntos) sin importar que por la motivación filosófica señalada, hayan sido disfrazados como "definiciones". Lo cual puede parecer sorprendente, ya que era la lógica y no la teoría de sistemas (conjuntos) la que se perfilaba como la responsable de fundamentar a la aritmética. Sin embargo, esta cimentación de las habilidades *transformadora* y *asociativa* sobre primeros principios de sistemas, en realidad revelaría que para Dedekind, la teoría de sistemas (conjuntos) forma parte de la lógica. Recuérdese que para él los elementos de los sistemas son objetos de nuestro pensamiento y léase que "un sistema *S* como objeto de nuestro pensamiento también es una cosa" (Ibid.:45), para confirmar que para este matemático alemán, los sistemas pertenecen al campo de la ciencia encargada de estudiar a las leyes del pensamiento, la lógica.

Repantigados en nuestra ubicación histórica, sin duda le podemos reprochar a Dedekind no haber articulado con mayor precisión este par de habilidades del razonamiento sobre su teoría de sistemas (conjuntos). Por ejemplo, se le puede criticar no haber enunciado un axioma de comprensión, como sí lo hizo Peano en L57, para sustentar a la capacidad *asociativa* responsable de constituir a los sistemas a partir de las cosas. O se puede denunciar a Dedekind por haber dejado indeterminado lo que es una *transformación*, pues ahora para nosotros ella también sería un sistema (conjunto). Sin embargo, incluso en nuestra cómoda posición histórica, sería muy complicado tratar de disociar a la lógica de la teoría de conjuntos. El paralelismo entre conectivos lógicos y operadores conjuntistas (ya señalado por la repetición de símbolos en Peano, ver nota 9); el axioma de comprensión acotado a conjuntos[40] en la teoría de Zermelo-Fraenkel y la teoría de modelos entre otras razones, ahora podrían ser citadas para afianzar la comunión entre la lógica y la teoría de conjuntos.

---

las motivaciones detrás de su formulación (v.gr.el axioma del infinito) de la axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

[40] Informalmente, este axioma afirma que si x es un conjunto y φ una formula bien formada, entonces φ(x) es un conjunto que a su vez es un subconjunto de x. Esta principio normalmente es llamado axioma de subconjuntos o de separación y fue originalmente formulado por Zermelo así:

> Axioma III. Siempre que una función proposicional $\mathfrak{E}(x)$ esté definida para todos los elementos del conjunto M, M poseerá un subconjunto $M_{\mathfrak{E}}$ cuyos elementos precisamente serán los x en M para los cuales $\mathfrak{E}(x)$ sea verdadera. (Zermelo, 1908 vía 2010:195)

Por lo tanto, el desarrollo hecho por Dedekind de los números naturales y sus operaciones a partir de la formulación de principios primeros para los sistemas, aunque pueda tener ciertos huecos deductivos, no se aleja de su objetivo de mostrar “a la aritmética como parte de la lógica” y así asegurar la generalidad del concepto número natural. Es más, hoy en día resulta más difícil negar que en el siglo XIX, la íntima relación existente entre la lógica y la teoría de conjuntos. Más aún, el desvío de esta meta luce menos plausible, si consideramos el intento efectuado por este matemático alemán para demostrar sobre ciertos “preceptos” lógicos, la existencia de una clase de sistemas a partir de la cual extraerá al “sistema” de los números naturales. La clase en cuestión es la de los sistemas infinitos y para caracterizarla, Dedekind recurre a un tipo de transformaciones por él llamadas *similares* que son especificadas de la siguiente manera:

> 26. Definición. Una transformación ϕ de un sistema S es similar …, si para diferentes elementos a,b del sistema S siempre les corresponden diferentes transformados $a' = \phi(a)$, $b' = \phi(b)$ (Dedekind, 1888 vía 1963: 53)

Hoy en día a las transformaciones similares las conocemos como funciones inyectivas, mientras que su definición otra vez usada como un principio de la primera clase para deducir algunos teoremas, v.gr. “27. $A' \ni B'$ entonces $A \ni B$ “ [41](Ibid.: 53). Después de haber formulado este principio, cuyo contenido proposicional puede resumirse como “φ es similar $\leftrightarrow \forall x,y\ (x \neq y \rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y))$”, Dedekind procede a definir la relación de similitud entre sistemas, relación sobre la cual finalmente especificará la propiedad de un sistema de ser infinito:

> 32. Definición. Los sistemas R,S se dicen *similares* cuando existe una transformación similar φ de S tal que $\varphi(S)=R$. (Dedekind, 1888 vía 1963:55)
>
> 64. Definición. Un sistema se dice que es *infinito* cuando es similar una parte propia de él mismo (32); en el caso contrario S se dice que es un sistema finito. (ïbid.:63)

Dado que todo número natural es sucedido por otro distinto a él, si *asociáramos* en nuestra mente a todos ellos en un sistema, entonces este tendría que ser infinito. Consecuentemente, si queremos determinar al sistema de los números naturales,

[41] Es decir, si φ es una transformación similar y $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$, entonces $A \subseteq B$.

entonces debemos incluir su propiedad de ser infinito. Y como se expondrá más adelante, Dedekind así lo hará e incluso refinará esta propiedad acorde al tipo de infinito del sistema de los números naturales. Aunque antes de proceder a hacerlo y afín a su deseo de sustentar a la aritmética sobre la lógica, primero intentará garantizar que nuestra capacidad *asociativa* para formar sistemas, también alcanza al dominio de lo infinito. Es decir, Dedekind tratará de justificar sobre razones lógicas la existencia de sistemas que satisfacen a la definición (64). De este modo, en el Teorema (66) afirma la existencia de sistemas infinitos, mientras que su demostración es la siguiente:

> La totalidad S de todas las cosas que pueden ser objetos de mi pensamiento, es infinita. Pues si *s* es un elemento de *S*, entonces el pensamiento [la transformación] *s'* [ϕ(s)] acerca *de* que *s* puede ser un objeto de mi pensamiento, es también un elemento de S...[Luego] *S'* es una parte propia de *S*, porque hay elementos en *S* , v.gr. mi propio ego, que son diferentes de [su transformado] *s'*...Finalmente es evidente que si *a,b* son elementos diferentes *S*, entonces sus transformados *a',b'* también son diferentes...Por lo tanto *S* es infinito... (Dedekind, 1888 vía 1963:64)

Independientemente de los errores detectables en esta demostración, incuestionablemente sólo utiliza recursos lógicos para tratar de sostenerse. Dado que todos los elementos de los sistemas para Dedekind son objetos de nuestro pensamiento -(1)cosas-, entonces congruentemente él propuso al sistema *S* de todas las cosas como el ejemplo sobre el cual trataría de probar la existencia de un sistema infinito. Más aún, una habilidad de nuestro pensamiento subyacería a su transformación ϕ sugerida, nuestra capacidad de reflexión. Y en los demás pasos de su demostración, sólo se siguen principios por Dedekind formulados: el (26)para establecer que ϕ es similar, el (6)para afirmar que $\phi(S)$ es parte propia de *S*, el (32)para asentar que *S* es similar a $\phi(S)$ *y* finalmente el (64)para concluir que *S* es infinito. El hecho de que algunos pasos de esta demostración sean dudables, v.gr. en la aplicación de (26) no resulta evidente cómo distinguir un objeto mental de otro (¿ $a \neq b \rightarrow \phi(a) \neq \phi(b)$?)[42], o incluso falaces, v.gr. es una

[42] Para distinguir objetos mentales, Dedekind propone que "una cosa *a* es la misma que *b* cuando todo lo que puede ser pensado de *a* también puede ser pensado de *b* y cuando todo lo que es verdadero de *b* también...[lo es] de *a*" (Dedekind, 1888:44). Dado que es un criterio de apariencia subjetiva paro sobretodo todavía ambigua el "todo aquello que puede ser pensado sobre x", entonces sobre el otro parámetro ofrecido por Dedekind residirían nuestras esperanzas por solventar su paso "evidente" en la demostración del teorema (66): $a=b$ si toda proposición verdadera que refiera a *a,* también lo es cuando refiere a *b.* Y este otro criterio al basarse sobre condiciones de verdad, puede ser considerado como más objetivo y por ende

petición de principio asumir la existencia de *S*[43], no cancela la naturaleza lógica de este argumento afín a su deseo de asentar sobre "las leyes del pensamiento" al desarrollo de la aritmética.

El "aseguramiento" lógico de la existencia de sistemas infinitos, mitiga la aprensión sobre una referencia vacua de la definiición del sistema infinito de los números naturales. Mientras que Dedekind para caracterizar a este sistema, recurre a otra noción fundamental dentro de su teoría, la de cadena, la cual por él es así especificada:

> 37. Definición . K es una cadena [*Kette*], si $K'∍K$. Expresamente remarcamos que este nombre no se le asigna por aislado a una parte K del sistema S, y es dado con respecto a alguna transformación particular ϕ; pues con respecto a otra transformación del sistema S en sí mismo K bien pudiera no ser una cadena [i.e. K es una ϕ-cadena si para la transformación ϕ de S en S con $K \subseteq S$, se cumple $\phi(K) \subseteq K$].
>
> (Dedekind, 1888 vía 1963:56)

Del principio (37) se siguen varios teoremas, v.gr. "38. *S* es una cadena" y "43. La comunidad *G* de las cadenas *A,B,C…* es una cadena", pero nuestro interés no recaerá sobre ellos. En su lugar, nos enfocaremos en su participación en la definición de "cadena de un sistema", puesto que esta última noción además de ser un componente de la caracterización del sistema de los números naturales, también encierra a la regla de inferencia protagonista de esta investigación. Dedekind formula de la siguiente manera a esta noción acaparadora de nuestra atención:

> 44. Definición. Si A es cualquier parte de S, denotaremos mediante A_0 a la comunidad [i.e. intersección] de todas las cadenas (v.gr. S) de las cuales A forma parte; esta

luce como una mejor opción para respaldar esa "evidencia". De hecho, esto último nos recuerda que la primera demostración de esta índole sobre la existencia de conjuntos infinitos, la brindó Bolzano en sus *Paradojas del Infinito* con el conjunto de todas las proposiciones verdaderas, mientras que su equivalente función inyectiva no suprayectiva ϕ, la indicó así: "consideramos una verdad,.., la cual designaré mediante *A*, entonces encontraremos que la proposición expresada mediante las palabras 'A es verdadera' es diferente a *A*...." (Bolzano 1851 vía 2004 : 607). Si bien la diferencia entre las condiciones de verdad de A y 'A es verdadera' no parece ser tan difusa, pues por ejemplo podemos suponer que la verdad de la segunda proposición depende de la primera mientras que la de la primera depende de aquello que ella refiera, en el caso de Dedekind desgraciadamente no parece ser tan claro este modo de distinción. Pues si no se especifica lo que es un objeto mental, entonces, ¿cómo he de distinguir las condiciones de verdad entre las proposiciones que refieran a ellos?

[43] En este paso normalmente se ha detectado la falla que derrumba a la demostración del teorema 66: ya que ahora debido a nuestro reconocimiento del carácter paradójico del conjunto universal negamos su existencia, entonces la existencia del sistema *S* constituido por todas las cosas también estaría anulada.

> comunidad A_0 existe (17)porque A es ella misma una parte común de todas estas cadenas. Además ya que por (43)A_0 es una cadena, llamaremos a A_0 la *cadena del sistema A*... (Dedekind, 1888 vía 1963:57-8)

Antes de incorporar a "la cadena de un sistema" a su caracterización del sistema de los números naturales, Dedekind justifica sobre el principio (44) un método de demostración de la familia aquí estudiada. En conciso, él demuestra la validez del tipo de inducción matemática por él llamada "completa", tal como a continuación reproducimos y resumimos:

> 59. Teorema de la inducción completa. Para mostrar que la cadena A_0 es parte de cualquier sistema Σ, es suficiente mostrar,
>
> ρ. que $A \ni \Sigma$ [$A \subseteq \Sigma$], y
>
> σ. que el transformado de cada elemento común de A_0 y Σ es también un elemento de Σ [$s \in A_0 \cap \Sigma \rightarrow \phi(s) \in \Sigma$] (Dedekind, 1888 trad. 1963:60-1)

Prueba. Sea $G=A_0 \cap \Sigma$. Por la hipótesis σ y dado que A_0 es una cadena, entonces G también lo es, i.e. $\phi(G) \subseteq G$. Mientras que por la hipótesis ρ y debido a la definición (44) de A_0 como la intersección de todas las cadenas que contienen a A, se sigue que $A_0 \subseteq G$. Y puesto que $G \subseteq \Sigma$, concluimos que $A_0 \subseteq \Sigma$.

Después de haber demostrado la validez de la inducción completa, Dedekind formula sobre terreno seguro a ese método de demostración:

> 6o. ...Con tal de mostrar que todos los elementos de una cadena A_0 poseen cierta propiedad $\mathfrak{E}$ (o que un teorema $\mathcal{S}$...se cumple para todos los elementos n de una cadena A_0) basta con mostrar:
>
> ρ. que todos los elementos a del sistema A poseen la propiedad $\mathfrak{E}$ (o que $\mathcal{S}$ se cumple para todas las a's) y
>
> σ. que al transformado n' de cualquier elemento n de A_0 que posea la propiedad $\mathfrak{E}$, le pertenece la misma propiedad $\mathfrak{E}$ (o que el teorema $\mathcal{S}$ tan pronto se cumpla para un elemento n de A_0, ciertamente también debe cumplirse para el transformado n'). (Dedekind, 1888 vía 1963:61-2)

Los pasos de la inducción matemática completa los podemos equiparar con los de la inducción matemática débil: ρ correspondería al Caso Base y σ al Paso Inductivo.. Mientras que el vínculo entre el método de inferencia formulado en (60) con su validez otorgable por el Teorema (59), lo establece una habilidad del pensamiento ya reconocida en este trabajo de Dedekind: la de la *asociación* de cosas para constituir sistemas. Ahora bien, con anterioridad se le criticó por no encontrarse allí articulada esta facultad mental mediante principios, tal como sí sucede con la *transformación* -v.gr. en (21) y (26)-, ausencia que resalta al contrastarse con los *Principios* de Peano, obra en donde sí se enuncia a la *asociación* como un axioma de comprensión (L57). Sin embargo, cabe señalar que esta omisión no muestra la incapacidad de Dedekind por formular de tal modo a esta habilidad. Nótese que él asienta al método de demostración descrito en (60) indicando que basta con denotar "mediante Σ al sistema de todas las cosas que poseen la propiedad $\mathfrak{E}$ (o que satisfacen al teorema $\mathcal{S}$)", para que la validez de la inducción completa sea "inmediatamente obvia" gracias al Teorema (59) (Ibid.:62). Ahora bien, por qué Dedekind no formuló explícitamente un axioma de comprensión, dada su naturaleza paradójica luego popularizada por Russell, puede ser una interrogante digna de especulación[44]. Para dirimir esta cuestión aquí nos conformaremos con recordar que Dedekind no sólo carecía del interés por formular un axioma de comprensión, sino no tenía la intención de enunciar axioma alguno debido a los lineamientos de su programa *logicista*, programa cuya meta era mostrar a la aritmética como parte de la lógica.

Por otro lado, la demostración del Teorema (59) revela que la validez del principio de la segunda clase formulado en (60), depende de la definición de "cadena de un sistema". Pues desde la definición (44) de A_0, se establece que $A \subseteq A_0$, lo cual ofrece la razón detrás del paso $(\rho) A \subseteq \Sigma$; mientras que también en (44) se asienta que A_0 es una cadena, lo cual señalaría el porqué del paso $(\sigma) s \in A_0 \cap \Sigma \rightarrow \phi(s) \in \Sigma$. Mientras que en el sentido inverso también se podría reconocer una dependencia, dado que las definiciones de "cadena" y de "cadena de un sistema" a su vez podrían considerarse como basadas en

[44] Por ejemplo sobre este asunto, Ferreirós comenta lo siguiente:

> Dedekind parece haber evitado asociar cercanamente a los conjuntos con los conceptos. Hubiera sido más sencillo decir que un conjunto está determinado mediene la posesión común de una propiedad por sus elementos, tal como lo hizo en 1872, sin embargo Dedekind ahora prefirió dejar indeterminado al tipo de "punto de vista común" que puede determinar a un conjunto.... Uno sólo puede especular sobre las razones detrás de su decisión de evitar referir explícitamente a conceptos: pudo haber sido por sus ideas metodológicas, por su preferencia por un punto de vista abstracto...; uno incluso podría cuestionarse sobre si él tuvo conciencia de que una concepción puramente extensional (casi-combinatoria) de conjunto implica la existencia de conjuntos que no están definidos por cualquier propiedad. (Ferreiros, 2007: 227)

la inducción matemática. Más adelante retomaremos esta interdependencia entre los principios básicos involucrados ((37), (44) , (59) y (60)) cuando la enfoquemos sobre el sistema captor de nuestra atención, el de los números naturales. Este sistema, primero designado mediante un nombre común cuya conversión en propio luego será explicada, es caracterizado por medio de las cuatro condiciones a continuación transcritas:

> 71. Definición. Un sistema *N* es *simple infinito* …cuando existe una transformación ϕ de *N*... *y* tiene un elemento 1 que satisfacen las siguientes condiciones α, β, γ, δ:
>
> α. $N' \ni N$
>
> β. $N=1_0$
>
> γ. El elemento 1 no está contenido a N'.
>
> δ. La transformación ϕ es similar. (Dedekind, 1888 vía 1963:67)

Siguiendo con la ejecución de su plan lógico, Dedekind le trasmite la existencia previamente "probada" de los sistemas infinitos -Teorema (66)- a los sistemas simple infinitos -Def. (71)-, los cuales portan la sugerente etiqueta *N*:

> 72.Teorema. Cualquier sistema infinito *S* contiene como parte a un sistema simple infinito *N*. (Dedekind, 1888 vía 1963:68)

El Teorema (72) es una consecuencia inmediata de que *S* sea infinito, pues por (64) existe una transformación similar ϕ que relaciona a *S* con su parte propia *S*' y por consiguiente, existiría un elemento *a* en *S* y no en *S*' que puede desempeñar el rol del 1; por lo que este 1 junto con ϕ cumplirían con las condiciones α, β, γ y δ de (71). Por lo que de cualquier sistema infinito, se puede obtener un sistema simple infinito *N*, el cual haciendo honor a su etiqueta, tornará en el sistema de los números naturales del siguiente modo:

> 73. Definición. Si al considerar al sistema simple infinito *N* puesto en orden por la transformación ϕ desatendemos enteramente al carácter especial de sus elementos; y simplemente conservamos que sean distinguibles y tomamos en consideración sólo las relaciones entre ellos dispuestas por la transformación otorgadora de orden ϕ, entonces esos elementos son llamados *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números*, y el *elemento-base* 1 se llama el *número-base* de la *serie de números N*. (Dedekind, 1888 trad. 1963:68)

Acorde a su interés por mostrar a la aritmética como parte de la lógica, Dedekind no se conformará con pedirnos en (73) que *abstraigamos* de cualquier sistema simple infinito a la *serie de números naturales*, sino también luego demostrará, la *unicidad* de los resultados de esta extracción, i.e. posteriormente probará que todos los sistemas simple infinitos son similares entre sí. Antes de proceder a exponer este teorema, sucintamente explicaremos a la definición (71) del sistema simple infinito dada su importancia para los intereses de la presente investigación.

La condición α de la definición (71) pide que el transformado de *N* respecto a ϕ, es decir *N*', sea una parte de *N,* mientras que la cláusula γ exige que sea propia al señalar la no pertenencia de 1 a *N'*. En conciso con moderna terminología, la cláusula α del principio de la primera clase (71) afirma que $\phi(N)\subseteq N$ mientras que γ asevera que $\phi(N)\subsetneq N$ pues $1\notin\phi(N)$. Si a las dos cláusulas anteriores le agregamos la condición δ -ϕ es similiar-, entonces *N* tiene que ser un sistema infinito conforme a la definición (64). Por último, sobre la cláusula β momentáneamente se puede indicar que su inclusión en la definición (71) validaría la aplicación para el sistema *N* del método de la inducción matemática completa gracias al Teorema (59). Sin embargo, sobre esta condición β recae otra función ampliamente explicada por Dedekind en una carta dirigida a Keferstein (1890):

> Pero...estos hechos [α,γ,δ] todavía están lejos de ser adecuados para una caracterización completa de la naturaleza de la secuencia-numérica. Pues todos estos hechos también se aplican a cualquier sistema *S* el cual, además de la secuencia-numérica *N*, contenga también un sistema *T* con elementos arbitrarios *t*. Uno siempre puede definir a la transformación ϕ de tal manera preserve su carácter de ser similar haciendo que $\phi(T)=T$. ... ¿Qué debemos añadir a los hechos anteriores para expurgar al sistema *S* de estos extraños intrusos *t* que perturban cualquier vestigio de orden, y así restringirnos al sistema *N*?....Si uno parte de una asunción de conocimiento de la secuencia *N* de los números naturales permitiéndose usas terminología aritmética, entonces la cuestión es sencilla. Sólo se tiene que decir: un número *n* pertenece a la secuencia *N* si y sólo si empezando del elemento 1,...mediante un número finito de iteraciones de la transformación ϕ, eventualmente se alcanza el elemento *n*...Pero resulta bastante inútil para nuestro propósitos adoptar esta manera de distinguir a los elementos *t* que tienen que ser expelidos de *S,* y aquellos elementos *n* que deben permanecer en *S.* Tal procedimiento involucraría al más pernicioso y obvio de los círculos viciosos....Así entonces. cómo... sin asumir conocimiento aritmético, se puede determinar formalmente y sin excepción a la distinción entre los elementos *n* y *t*? Sólamente mediante la consideración de las *cadenas,* y así completamente!...En mi lenguaje técnico: *N* es la intersección 1_0 de todas las cadenas *K* (en *S*) a las cuales el elemento 1 pertenece. (Dedekind 1890 vía Wang 1957:150-1)

Por medio de la cita previa, podemos percatarnos que la otra función desempeñada por la condición β de (72) , es la misma que cumple el principio P9 [$[(1\in T\wedge((x\in N\wedge x\in T)\rightarrow x+1\in T))\rightarrow N\subseteq T$] de Peano cuando se interpreta como axioma: ambas tienen como meta expurgar al conjunto (sistema o clase) *N* de objetos no naturales. Mientras que la otra lectura de P9, como método de inferencia, fue formulada con mayor generalidad por Dedekind en (60) y validada en (59) bajo el nombre de inducción matemática completa. Más aún, él enuncia y valida en su teorema (80) al método de la inducción matemática para *N* como corolario del teorema (59), facilitando así su cotejo con el método de inferencia codificado en el principio P9 de Peano[45]. De hecho, todas las cláusulas enunciadas en la definición de un sistema simple infinito pueden correlacionarse con los principios de la aritmética de Peano, equiparación que además de explicar por qué se acostumbra añadir al nombre de estos últimos el apellido Dedekind, también puede servir para seguir clarificando a las condiciones α, γ y δ de la definición (71).

El empalme de la definición del sistema *N* de Dedekind con la construcción de la clase *N* de Peano es directamente realizable cuando se interpreta a la transformación ϕ del primero como el sucesor "+1" del segundo. De este modo, el postulado P6 [$a\in N \rightarrow a+1\in N$] se corresponde con la cláusula α [$N'\subseteq N$] de la definición (71) al los dos señalar que el sucesor de un número natural también es un número natural. Luego, el axioma P7 [$a,b\in N\rightarrow (a=b\leftrightarrow a+1=b+1)$] embona con la condición δ [ϕ es similar] al establecer ambos que el sucesor es una función uno a uno; mientras que el axioma P8 [$a\in N\rightarrow\neg(a+1=1)$] lo hace con la cláusula γ [$1\notin\phi(N)$], pues ambas indican que 1 es el sucesor de nadie. Por consiguiente, la conjunción de P6-P7-P8 al igual que la de α-δ-γ afirmaría que todo número natural es sucedido por un número natural distinto a él. Finalmente, la condición

---

[45] El método formulado en (80) todavía es más general que el codificado por P9, pues indica cómo demostrar un teorema no sólo para N, sino para cualquier cadena m_0 de números naturales:

> 80. Teorema de la inducción completa (inferencia de *n* a *n'*). Con tal de mostrar que un teorema se cumple para todos los números *n* de una cadena m_0 , basta con mostrar
>
> ρ. que se cumple para $n=m$, y
>
> σ. que de la validez del teorema para un número *n* de la cadena m_0, se sigue siempre su validez para el número *n*'.
>
> Esto resulta inmediatamente del teorema más general (59)... El caso que ocurre más frecuentemente es cuando $m=1$ y por consiguiente, m_0 es toda la serie-numérica *N*. (Dedekind, 1888 vía 1963:70)

β además de ser equiparable con el principio P9 como con antelación se hizo, por la definición (44) de cadena del sistema {1} también lo sería con el postulado P1 [$1 \in N$], pues ambos indicarían que 1 es un número natural. En suma, los principios P1-P6-P7-P8 al igual que α-β-δ-γ señalarían que *N* puede ser generado *secuencialmente* a través de la iterada y excluyente aplicación del sucesor ϕ desde el elemento 1: $N = \{ 1, \phi(1), \phi(\phi(1)), \phi(\phi(\phi(1))), \phi(\phi(\phi(\phi(1)))), ... \}$

Después de haber identificado con ayuda de Peano las funciones de las cuatro cláusulas de la definición de un sistema simple infinito *N*, ahora expondremos algunos de los miembros de su teoría desarrollados por Dedekind. Los primeros por ser enumerados tratan sobre la relación de orden "<" entre los números naturales, la cual es definida en (89) de manera conjuntista: $m<n$ sii la cadena del sistema $\{n\}$ está contenida en la cadena del sistema $\{\phi(m)\}$, es decir, si "$n_0 \ni m'_0$" (Ibid.:73). Entre las propiedades para esta relación demostradas por Dedekind, reproduciremos la de su totalidad y la de su buen orden:

> 90.Teorema. Si *m,n* son cualesquiera números, entonces uno y sólo uno de los siguientes casos λ, μ, ν siempre ocurre:
>
> λ. $m=n$,
>
> μ. $m<n$,
>
> ν. $n<m$ (Dedekind, 1888 trad. 1963:73)
>
> 96. Teorema. En cada parte *T* de *N* existe uno y sólo un número mínimo *k*, i.e., un número *k* que es menor a todos los demás números contenido en *T*. (Ibid.:74-5)

Ahora bien, si se revisaran las demostraciones de ambas propiedades, se podría corroborar que la noción de cadena (37), en particular la de cadena de un sistema (44), desempeña un preponderante papel justificativo en ellas. Por ejemplo, para probar el buen orden de *N* en (96), dado que *T* forma parte de *N*, entones a partir de la existencia de la cadena del sistema *T* (44) se puede probar la existencia del mínimo en *T*. En suma, las cadenas de un sistema proveen una estructura conjuntista sobre la cual se puede deducir el tipo de orden de la *secuencia* de los números naturales. Más adelante argumentaremos que dicha estructura a su vez está perfectamente acoplada a la inducción matemática. Por el momento exhibiremos una noción que abiertamente está basada en la inducción matemática, las definiciones por inducción. Ahora bien, si nos interesa mostrar de una vez este tipo de definiciones, es porque posibilitan al desarrollo de los últimos miembros de la teoría sobre *N* por ser aquí expuestos relativos a las operaciones entre los números naturales y a la *unicidad* del sistema *N*. Dedekind las formula como a continuación se reproduce otra vez demostrando, la existencia de lo definido:

> 126. Teorema de la definición por inducción. Dada una transformación arbitraria (similar o no) θ de un sistema Ω a él mismo, y además un elemento determinado ω en Ω, existe una y sólo una transformación ψ de la serie-numérica *N*, que satisfacen las siguientes condiciones
>
> I. $\psi(N) \ni \Omega$
>
> II. $\psi(1) = \omega$
>
> III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, donde *n* representa cualquier número. (Dedekind, 1888: 85-6)

Las definiciones por inducción ahora se conocen por *recursión* y sirven de molde no sólo para Dedekind sino también como ya se expuso para Peano, en la especificación de las operaciones entre los números naturales. Aunque el primero en contraste con el último, fiel a su programa *logicista*, demuestra la existencia de la transformación definida por las condiciones I, II y III[46] . Mientras que la prueba del Teorema (126), se ejecuta primordialmente por *inducción completa*[47], mostrando así la importancia de esta clase de método de inferencia para la aritmética. Más adelante cuando revisemos a la extensión de los números realizada por Cantor, aparecerán de nuevo esta clase de definiciones por lo que su demostración la postergamos para el caso más general. Por el momento, nos

[46] Ahora bien, Dedekind no deja de señalar que la condición I es redundante y si la enunció fue "por la claridad" de sus teoremas (125) y (126), puesto que "la condición I...es una consecuencia de II y III" (Ibid.:83)

[47] Dedekind prueba por inducción completa el teorema (125) cuyo corolario inmediato es el Teorema (126):

> 125. Teorema. Dada una transformación arbitraria (similar o no) θ de un sistema Ω a él mismo, y además un elemento determinado ω en Ω, entonces para cada número *n* existe una y sólo una transformación ψ_n asociada al sistema-numérico Z_n que satisfacen las condiciones:
>
> I. $\psi_n (Z_n) \ni \Omega$
>
> II. $\psi_n (1) = \omega$
>
> III. $\psi_n(t') = \theta\psi_n(t)$ donde $t<n$ (Dedekind 1888: 83-4)

Mientras que "Z_n" es el sistema conformado por todos los números menores o iguales a *n* (98) y "$\theta\psi_n$" es la composición (25) de las transformaciones θ y ψ_n. Por lo tanto, el teorema (126) se sigue directamente del (125), al proponer que $\psi(n)$ se igual a $\psi_n(n)$.

concentraremos en exhibir un par de sus aplicaciones: la definición de las operaciones aritméticas y la *unicidad* del sistema *N*. Entre las primeras Dedekind formula a las siguientes en su obra revisada:

> 135.Definición....la suma de los números *m*, *n* ... por (126) ...está completamente determinada por las condiciones
>
> II. $m+1 = m'$.
>
> III. $m+n' = (m + n)'$. (Dedekind 1888 vía 1963: 97)
>
> 147. Definición.... el producto de los números *m*,*n* ...por (126) está completamente determinada por las condiciones
>
> II. $m.1 = m$
>
> III. $m.n' = m.n + m$, (Ibid. :101)
>
> 155. Definición....la *potencia de la base a,* donde *n* es el exponente de la potencia de *a*.... está completamente determinada por las condiciones
>
> II. $a = a$
>
> III. $a^{n'} = a^n.a$. (Ibid. :104)

Al estar basadas las definiciones de la suma (135), la multiplicación (147) y la potencia (155) en la definición por inducción (126), ya no debe sorprendernos que las propiedades de estas operaciones aritméticas sean demostradas por inducción completa. Por ejemplo, la conmutatividad de las dos primeras operaciones se establece mediante esa regla de inferencia en los teoremas (140) y (150) respectivamente, mientras que la ley de exponentes para la potencia de una potencia ($(a^m)^n = a^{mn}$) también se prueba por medio del mismo método en (157). Análogamente a lo acontecido con las definiciones de las operaciones aritméticas en los *Principios* de Peano, la condición II. de las definiciones inductivas propicia la prueba del caso base de la inducción completa (ρ. 1 satisface al teorema S); mientras que la cláusula III. lo hace para su paso inductivo (σ. Si el teorema S se cumple para *n* entonces también se cumple para *n*'). De este recursivo modo, la predominancia de la inducción matemática en la aritmética se va consolidando. Y Dedekind remarca todavía más su relevancia, al demostrar la *unicidad* del sistema *N* por medio de las definiciones por inducción y la inducción matemática completa:

> 132. Teorema. Todos los sistemas simple infinitos son similares a la serie-numérica *N* y consecuentemente, también lo son entre ellos. (Dedekind 1888 vía 1963 : 92)

La demostración del Teorema (132) tiene el siguiente plano deductivo: Sea Ω cualquier sistema simple infinito. Entonces existe una transformación θ que satisface las condiciones de la definición (71) de sistema simple infinito para Ω, v.gr. γ. existe un ω en Ω tal que ω no pertenece a $\theta\{\Omega)$. Más aún, gracias a θ existe una transformación ψ de *N* a Ω que satisface las condiciones de una definición por inducción (126), es decir, II.$\psi(1)=\omega$ y III.$\psi(n')=\theta\psi(n)$. Por lo que sólo faltaría probar que ψ es similar. Y esto último se demuestra por inducción completa, probando que $\psi(n)<\psi(n')$, lo cual por la definición (89) de "<" , equivale a lo demostrado por Dedekind: $\psi(n)$ no pertenece a $\psi(n'_0)$. Finalmente ya que desde el Teorema (33) se estableció la transitividad de la relación de similitud entre sistemas[48], además se puede concluir que cualquier par de sistemas simple infinitos son similares entre sí al ser ambos similares a *N.*

De este inductivo modo, la unicidad en el resultado de abstracción de la serie-numérica *N* de cualquier sistema simple infinito, estaría parcialmente respaldada. Pues hasta el momento, sólo se apoyaría que "al considerar al sistema simple infinito" Ω desatendamos "enteramente al carácter especial de sus elementos" con tal de considerarlos como "*números naturales*" (Def.(73)), pues gracias al Teorema (132), el 1 de *N* se correspondería con el ω de Ω, el 2 con el $\psi(2)$ de Ω, el 3 con el $\psi(3)$ de Ω, ... Sin embargo, para garantizar que se conserven "las [mismas] relaciones entre ellos dispuestas por la transformación otorgadora de orden", θ para Ω y ϕ para *N*, se debe mostrar que cualquier transformación similar ψ que convierta a Ω en un sistema similar a *N*, recíprocamente asegure que Ω sea un sistema simple infinito ya que tales relaciones, finalmente se deducen de las cuatro condiciones estipuladas en la definición (71) de tales sistemas. Por lo que Dedekind termina de asentar la unicidad de *N* en el siguiente teorema:

> 133. Teorema. Cualquier sistema que sea similar a un sistema simple infinito y por consiguiente (132) a la serie-numérica *N*, es simple infinito. (Dedekind 1888: 93)

---

[48] 33. Teorema. Si *R*, *S* son sistemas similares, entonces cualquier sistema *Q* similar a *R* también es similar a *S.* (Dedekind, 1888:55)
La demostración de esta proposición está basada en la composición de transformaciones, la cual es definida en (25).

En la demostración de (133) se enseña que la transformación similar ψ que convierte en similar a cualquier sistema Ω con N ($\psi(N) = \Omega$) , a su vez determina una transformación θ de Ω a sí mismo, a saber $\theta(v)=\psi(\phi(\psi^{-1}(v))$, que satisface las cuatro cláusulas de un sistema simple infinito (71). Por lo tanto, los sistemas simple infinitos forman una clase de equivalencia definida por la relación de similitud entre sistemas y por consiguiente, la serie-numérica *N,* puede ser considerada como el representativo de esta clase. Por lo tanto, de acuerdo a Dedekind:

> [Ahora ya debe ser] claro que cualquier teorema relativo a los números, i.e. a los elementos *n* del sistema simple infinito *N*,...que deja enteramente fuera de consideración el carácter especial de los elementos *n* ateniéndose nada más a las nociones que emergen de su orden dado por ϕ, poseen una perfecta validez general para cualquier otro sistema simple infinito Ω..., y su transferencia de *N* a Ω,...es realizada por la transformación ψ considerada en (132), (133)....Por estos señalamientos creo, que la definición de la noción de números dada en (73) está completamente justificada. (Dedekind 1888 vía 1963: 95-6)

Recapitulando, en el *¿Qué son...los números?* se despliega una axiomatización de acuerdo a nuestra caracterización mínima, pues allí se formulan una serie de principios de la primera -v.gr. para la cadena de un sistema en (44) - , segunda -v.gr. para la inducción completa en (60)- y tercera -v.gr. para “sistema” en (2)- clases a partir de los cuales se desarrolla a la aritmética. Si Dedekind prefirió nombrar a sus principios básicos de la primera clase como definiciones, fue por su intención filosófica de mostrar a la aritmética como parte de la lógica, la cual conforme a su desarrollo teórico también incluiría a nuestra moderna teoría de conjuntos (sistemas). Mientras que esta motivación filosófica se devela cada vez que se *demuestra* por medios lógicos la existencia de lo referido por algunas definiciones fundamentales: la de los (64) sistemas infinitos en el Teorema (66), la de los (71) sistemas simple infinitos en el Teorema (72) y la de las definiciones por inducción en el Teorema (126).

Finalmente hemos atestiguado como la inducción matemática débil, enunciada de manera más general por Dedekind como la inducción completa, desempeña un rol primordial en su desarrollo lógico de la aritmética. Para este revelador fin, se expuso al acoplamiento entre este método de inferencia y las definiciones por inducción (recursivas), las cuales a su vez son el molde para las operaciones aritméticas y son un cimiento justificativo para la unicidad de la serie-numérica *N.* A manera de conclusión para este apartado, a continuación remarcaremos aún más la importancia de la inducción matemática débil dentro esta axiomatización, al reconocerla como una de las guías para su conformación misma. En particular y como fue con antelación prometido, se argumentará que la noción de cadena de un sistema, la cual es uno de los cimientos de la concepción propuesta por Dedekind de los números naturales, no valida de manera fortuita a la inducción matemática pues su formulación misma está en sintonía con este método de demostración.

Con antelación ya fue discutido que el fin perseguido por Dedekind en su axiomatización era fundamentar a la aritmética sobre la lógica, la cual para él abarca a ciertas habilidades del pensamiento como la de "relacionar cosas con cosas", la *transformación*. Y respecto a la consecución de esta meta, Dedekind le comentó en una carta a Keferstein lo siguiente:

> ¿Cuáles son las propiedades fundamentales mutuamente independientes de la secuencia *N*, i.e. las propiedades que no son deducibles entre ellas y de las cuales todas las demás siguen? ¿Cómo deberíamos despojar a estas propiedades su carácter aritmético específico de tal manera que sean subsumidas bajo conceptos más generales y habilidades de nuestro entendimiento, que sean *necesarias* para todo el pensamiento, pero al mismo tiempo *suficientes*, para asegurar la fiabilidad y completud de las demostraciones, y que permitan la construcción de conceptos y definiciones consistentes? (Dedekind 1890 vía Wang 1957: 150)

Dentro de esta exposición de motivos destaca el deseo de Dedekind por encontrar "conceptos más generales" que permitan "asegurar la fiabilidad y completud de las demostraciones", debido a lo que se ha exhibido sobre las "axiomatizaciones de la aritmética". Al inicio del capítulo anterior se argumentó que las dos primeras definiciones del Libro VII de los *Elementos* respaldan al modo de razonamiento de la *descomposición-recomposición* utilizado para demostrar algunas proposiciones, v.gr. VII.Prop.5. También allí se expuso cómo el postulado del triángulo aritmético afianzaba y facilitaba a las demostraciones elaboradas siguiendo la regla de Pascal para la inducción matemática débil. De hecho, se señaló que *todas* las propiedades del triángulo aritmético allí enunciadas, podían ser demostradas mediante esta regla de inferencia.

En el presente capítulo, fue argumentado que los principios sobre los cuales se especifica la construcción de la clase *N*, i.e. P1-P6-P7-P8, favorecen y validan a la inducción débil codificada en P9. En suma, todas las "axiomatizaciones" previamente presentadas han cumplido con el objetivo de asegurar la fiabilidad de las demostraciones obtenidas mediante algún método de inferencia, sobre algunos de sus principios de la primera clase. Y quien planteó abiertamente este objetivo, no se quedó atrás en su cumplimiento. De hecho, las razones previamente ofrecidas para revelar el acoplamiento de los principios de la primera clase P1-P6-P7-P8 con la regla de inferencia codificada P9, pueden ser reutilizadas para mostrar la sinergia entre las condiciones α-β-δ-γ en la definición (71) de *N* con el método (80) de inducción completa para *N* (ver nota 44). Lo cual no debe resultar sorprendente, dada la equivalencia ya sustentada entre los cinco principios para la clase *N* formulados por Peano con los cuatro principios enunciados por Dedekind para su sistema *N*. Sin embargo, Dedekind es más preciso que Peano en asentar esta amalgama constitutivo-justificativa[49], pues "encontró un concepto más general que permite asegurar la fiabilidad y completud de las demostraciones" hechas por inducción matemática (débil): la noción de cadena de un sistema.

Si bien ya se señaló que uno de los motivos abiertamente reconocidos por Dedekind tras la formulación de la noción de cadena de un sistema era expurgar al sistema *N* de elementos no naturales, sus palabras recién transcritas también revelan que desde el principio él buscaba un concepto capaz de asegurar la "fiabilidad y completud" de las demostraciones en la aritmética. Por otro lado, el método de inducción matemática, "la inferencia de *n* a *n'*", era ya a finales del siglo XIX una vieja pero confiable regla para elaborar demostraciones en la aritmética. Por consiguiente, la formulación misma de la noción de cadena de un sistema, puede considerarse inspirada en ese "famoso" método

[49] Cabe recordar que la función axiomática de P9, no es la de garantizar el método de inferencia en ella misma codificado, lo cual sería muy arbitrario, sino expurgar a los elementos extraños de la clase *N.* Por lo que Dedekind fue más preciso que Peano al desdoblar a la doble finalidad de P9 en un par de principios: el método de inferencia de la inducción completa formulado en (60) y a la noción de cadena de un sistema enunciada en (44) e incorporada en β a la definición (71) del sistema simple infinito *N*.

de inferencia, pues con ella respaldaba a ese "método de prueba general con la suficiencia para establecer teoremas que se cumplan para *todos* los números *n*" (Dedekind,1890: 151). Por lo tanto, la exigencia en la definición (44) de A_0 de que $A \subseteq A_0$, probablemente surgió del Caso Base de la inducción débil, mientras que la intención de que A_0 sea a su vez una cadena, i.e. $\phi(A_0) \subseteq A_0$, debió originarse en su Paso Inductivo.

Más aún, las (126)definiciones por inducción cumplen con el otro objetivo propuesto por Dedekind acerca de "permitir la construcción de conceptos y definiciones consistentes". Y como fue señalado, no sólo la especificación sino también la existencia de de esta clase de definiciones -Teorema (126)-, están basadas sobre la inducción matemática. Por lo que la formulación del concepto de cadena de un sistema, al validar a las demostraciones realizadas mediante este método de prueba, a su vez serviría para alcanzar esta otra meta. En suma, la inducción matemática (60,80) junto con la noción de cadena de un sistema (44), tal como aconteció en las axiomatizaciones de Pascal y de Peano, forman en la respuesta dada por Dedekind al *Qué son...los números,* una poderosa sinergia de principios.

Para terminar este capítulo, se aprovecharán las afinidades encontradas en las "axiomatizaciones" presentadas, para diluir al sustantivo del Tratado del Triángulo Aritmético remarcando lo aritmético de esta axiomatización.

3.3 Comparaciones, conclusiones e insinuaciones

- Los resultados a continuación enumerados han partido pero también aspiran a promover un par de principios metodológicos seguidos en nuestra investigación:
    - El primero es que los principios formulados en una axiomatización, deben ser juzgados con base en su uso y no en su mención para identificarlos como cimientos justificativos (primera clase), medios de justificación (segunda clase) o aclaraciones semánticas (tercera clase). Por ejemplo, las "definiciones" enunciadas por Dedekind al servir de sustento justificativo para su desarrollo lógico de la aritmética, pueden y han sido catalogadas como principios de la primera clase, clase cuyos elementos normalmente

son nombrados axiomas[50]. O el "axioma" P9 de Peano, al servir de guía para la elaboración de demostraciones, puede y ha sido considerado como un principio de la segunda clase cuyos elementos aquí llamamos métodos de inferencia.

- El segundo es que los fines perseguidos por los creadores de una axiomatización, influyen en la conformación misma de ella. Por ejemplo, el objetivo buscado por Dedekind de fundamentar a la aritmética sobre la lógica, explica el hecho de que él haya decidido nombrar definiciones mas no axiomas[51]. O el deseo de Peano por una depuración lingüística que propiciara la precisión gozada por la resolución de ecuaciones algebraicas, explica por qué él fue tan meticuloso para especificar al lenguaje y a los primeros principios de su axiomatización. O la meta de Pascal por unificar diversas aplicaciones teóricas, explica por qué él señaló de manera tan general a la construcción aritmética de su triángulo a través de la enunciación de su aquí traducido Postulado R.

---

[50] A partir del desarrollo del método axiomático propiciado por Hilbert, se popularizó la creencia de que los axiomas (principios de la primera clase) le otorgan significado a los objetos de la axiomatización (definición implícita). En el sentido inverso, aquí estamos proponiendo que algunas definiciones, remontándonos hasta las contenidas en los *Elementos* de Euclides, al servir como respaldo justificativo de los miembros de sus teorías , v.gr. funcionando como premisas de las conclusiones formuladas como teoremas, pueden y deben ser considerados como proposiciones primeras. En suma, la distinción entre definición y axioma, no puede determinarse por completo de modo semántico ni tampoco epistemológico. Cabe señalar que esta separación puede complementarse o quizás incluso completarse de manera ontológica, tal como Dedekind nos ha mostrado con ciertos ecos aristotélicos: las definiciones a diferencia de los axiomas-postulados, parecen carecer de compromisos existenciales.

[51] Esto conlleva aceptar que las definiciones en las matemáticas carecen de compromisos ontológicos. Por lo que la existencia de lo definido, v.gr. la serie numérica N, Dedekind la demuestra (o cree hacerlo) apelando únicamente a la lógica mientras que esta última para él, trataba también sobre nuestras habilidades de razonamiento. De allí que fuera vital para su proyecto demostrar mediante razones lógicas, v.gr. mediante la totalidad de nuestros pensamientos, la existencia de sistemas infinitos. Más aún, cabe señalar que para Dedekind al igual que Frege, la existencia tenía una importancia lógica y no sólo filosófica, pues la existencia de lo definido implicaba la consistencia de las definiciones:

> Después de haber reconocido gracias a mi análisis (71,73) a la naturaleza esencial del sistema simple infinito, cuyo tipo abstracto es la secuencia *N* de los números, surge la pregunta: ¿realmente existe tal sistema en el dominio de nuestras ideas? Sin una demostración lógica de su existencia siempre quedaría una duda, saber si el concepto de tal sistema contiene contradicciones internas. De ahí la necesidad de contar con tales demostraciones (66 y 72 de mi ensayo).
>
> (Dedekind, 1890 vía Wang 1957: 151)

I. En todas las "axiomatizaciones" de la "aritmética" expuestas, algunos de sus principios formulados pertenecientes a la primera clase están acoplados con algunos modos de razonamiento empleados para el desarrollo deductivo de la teoría. Lo cual podría insinuar que este fenómeno simbiótico ocurre frecuentemente en las axiomatizaciones de otras teorías matemáticas e incluso en otros desarrollos menos rigurosos. Es decir, los modos de razonamiento propicios para ciertos objetos u estructuras matemáticas, pudieran ser preponderantes en nuestra concepción misma de ellos[52].

II. En las axiomatizaciones de Pascal, Peano y Dedekind, este acoplamiento se presenta de manera más manifiesta ya que en ellas sí se formulan métodos de inferencia: el postulado R está en sintonía con la regla IMP; los postulados P1,P6 y los axiomas P7-P8 con la regla en P9; la definición (44) de cadena de un sistema con el método de la inducción completa formulado en (60) y validado en (59). Ahora bien, en todas estas axiomatizaciones es una versión de la inducción matemática débil, respecto a la cual se amoldan los principios primeros que determinan los objetos sobre los que trata su respectiva teoría.

III. Independientemente de que la simbiosis entre principios de la primera y segunda clase sea un rasgo dominante en las axiomatizaciones, sí lo es en aquellas sobre las cuales mejor se ha asentado a la aritmética: las de Peano y Dedekind. Es más, uno de los atributos que las ha convertido en el paradigma axiomático de la aritmética[53], es la fiabilidad y generalidad de sus resultados deductivos otorgadas

[52] Imre Lakatos (1976) remarcó un hecho similar aunque desde un punto de vista crítico del desarrollo de las matemáticas, por él llamado "enfoque heurístico", sobre la existencia de conceptos matemáticos cuya formulación está basada en ciertas demostraciones. Su ejemplo más famoso es el del concepto "poliedro", cuyas múltiples concepciones por él expuestas (Cauchy-poliedro, Gergonne-poliedro, Legendre-Poliedro ...) están basadas respectivamente en distintas demostraciones del Teorema(s) de Euler que vincula al número de vértices(V), caras (C) y aristas (A) de un poliedro, proposición cuya enunciación más conocida es la siguiente: V+C-A=2. Por lo que nuestra sugerencia sobre la predominancia de los modos de razonamiento en la concepción de los objetos teóricos en las matemáticas, pudiera considerarse como una generalización de los conceptos-basados-en-pruebas de Lakatos, la cual por otro lado no estaría comprometida con la explicación por él dada acerca de la génesis de tales conceptos derivada de *Pruebas y Refutaciones*.

[53] Los juicios sobre la determinación de lo óptimo, cuando pretender no ser abiertamente arbitrarios o incuestionablemente triviales, con frecuencia establecen comparaciones con otras opciones. Por cuestiones espacio-temporales, la alternativa a los principios de Peano-Dedekind serían las leyes de la aritmética de Gottlob Frege (1848-1925). Para evitar descalificar maliciosamente al contrincante por una falta también

precisamente por esta sinergia entre sus principios de las dos primeras clases. Como ya fue expuesto, este acoplamiento provee un poderoso pero válido método de justificación para los teoremas aritméticos basado en la constitución misma de los números naturales (clase-sistema *N*) y sus operaciones (definiciones recursivas). Lo cual incluso podría insinuar el retorno de cierta noción de

---

cometida por Peano y Dedekind, a saber la paradójica naturaleza de la extensión de conceptos (especificada por la Ley V en Frege) y de su equivalente constitución de clases-sistemas por comprensión (formulada en L57 por Peano y usada en la formulación (60) de la inducción completa por Dedekind), podemos en su lugar desestimar a su versión corregida por los neofregeanaos como Crispin Wright. Así entonces, los principios de la aritmética del resucitado Frege pueden ser formulados de la siguiente manera expuesta por Linnebo (2004):

F0. $0 = \#x{:}x \neq x$

F1. $\mathrm{Preim}(x,z) \leftrightarrow \exists F \exists w\, (F(w) \wedge x=\#y{:}(F(y) \wedge x \neq w) \wedge z=\#u{:}F(u))$ [Precedencia inmediata]

F2. $\mathbb{N}(x) \leftrightarrow \mathrm{Preim}^{<=}(0,x)$

donde $\mathrm{Preim}^{<=}(x,y) \leftrightarrow (x=y \vee \mathrm{Preim}^{<}(x,y))$ [Precedencia débil]

$\mathrm{Preim}^{<}(x,y) \leftrightarrow \forall F(\forall z\, ((F(x) \wedge \mathrm{Preim}(x,z)) \rightarrow F(z))) \rightarrow F(y)))$ [Precedencia]

F3. $\#x{:}F(x)=\#x{:}G(x) \leftrightarrow F \approx G$ [Principio de Hume]

donde $F \approx G \leftrightarrow \exists \phi\, (\forall x \exists y (F(x) \rightarrow \phi(x,y) \wedge G(y)) \wedge (\forall y \exists x\, (G(y) \rightarrow \phi(x,y) \wedge F(x)) \wedge$
$\forall x \forall y \forall z (\phi(x,y) \wedge \phi(x,z) \rightarrow y=z) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (\phi(x,z) \wedge \phi(y,z) \rightarrow x=y))$

Ahora bien, el logro deductivo con el que normalmente promocionan los neofregeanos la reconstrucción de la obra de su maestro, es el Teorema de Frege, el cual sucintamente afirma que los principios de la aritmética de Peano (enunciados en segundo orden), se deducen de F0-F3. Lo cual curiosamente sirve para remarcar que los principios de Peano-Dedekind, son el marco de referencia axiomático para la aritmética. Por otro lado algo que Dedekind reconoció abiertamente en su tiempo y sorprendentemente los neofregeanos parecen olvidar o ignorar, es que el principio F2 está sintonizado con la inducción matemática débil. En palabras de Dedekind:

> Alrededor de un año después de la publicación de mi memoria, conocí los *Grundlagen der Arithmetik* de G. Frege, los cuales ya habían aparecido desde el año 1884. A pesar de la perspectiva diferente respecto a la mía sobre la esencia del número adoptada en ese trabajo, él contiene, particularmente a partir de §79, puntos bastante cercanos a mi memoria, especialmente con mi definición (44). La concordancia admito que no es sencilla de descubrir debido a las formas distintas de expresión; **sin embargo la manera positiva de hablar por parte del autor sobre la inferencia lógica de *n* a *n*+1 (p. 93, abajo) enseña plenamente que en este punto él se planta sobre la mismas bases que yo.**
>
> (Dedekind, 1888 vía 1963: 42-3 ; énfasis nuestro)

Es más, Dedekind puntualiza que la noción de Precedencia ("$\mathrm{Preim}^{<}(x,y)$") se corresponde con su noción de cadena:

> En un breve período del último verano (1889), las obras "Begriffschrift" y "Grundlagen der Arithmetik" de Frege llegaron por vez primera, a mi posesión. Reconocí con gusto que su método de definir una relación entre un elemento y aquel que le sigue, no necesariamente inmediatamente, en una secuencia, concuerda en esencia con mi concepto de cadena (37,44). Sólo uno no debe desalentarse con su terminología algo inconveniente.
>
> (Dedekind 1890 vía Wang 1957: 151; énfasis nuestro)

En suma, F2 es la manera en que Frege y sus seguidores formularon con su "terminología inconveniente" la noción de cadena del sistema {0}. Por lo tanto en la axiomatización de la aritmética neofregeana, los números naturales también son individuados mediante su pertenencia a la serie numérica, 0,1,2,3,..., lo cual diluye a su carácter "alternativo" respecto a los principios de Peano-Dedekind.

analiticidad al estilo kantiano: si una proposición aritmética es demostrada por inducción matemática débil y puesto que esta regla sirve para indicar lo que son los números naturales, sus operaciones y sus relaciones[54], entonces lo predicado en el teorema estaría contenido en su sujeto. Si este acoplamiento entre principios de las dos primeras clases es común en otras axiomatizaciones, entonces esta noción de analiticidad podría extenderse hacia otras teorías matemáticas.

- Por lo tanto, debido a (I), (II) y (III), la axiomatización de Pascal puede considerarse también como de la aritmética borrando así su entrecomillado de nuestro listado de ellas. Es decir, ya que (III)nuestros mejores principios básicos para la aritmética son los de Peano-Dedekind y (II) el rasgo característico de ellos es su amoldamiento a la inducción matemática débil, entonces (I) la axiomatización de Pascal al presentar también ese acoplamiento, puede catalogarse como una axiomatización de la aritmética. De hecho, quizás sea la primera de ellas en donde la inducción matemática tenga este papel determinante e indisociable de la aritmética[55]. Para seguir consolidando su lugar en la historia de las axiomatizaciones de la aritmética, continuaremos aprovechando los resultados del estudio comparativo entre aquellas aquí expuestas.

IV. Peano al igual que Dedekind axiomatiza *estructuralmente* a la *secuencia* ***N*** de números naturales. Es decir, ambos estipulan las características que la clase o sistema *N* debe cumplir respecto a " las propiedades fundamentales mutuamente independientes de la secuencia ***N***, i.e. las propiedades que no son deducibles entre ellas y de las cuales todas las demás siguen". Si bien hay diferencias entre sus dos

[54] Por ejemplo como ya fue expuesto, Dedekind define a la relación de orden estricto "menor que" con base en la contención de cadenas de un sistema, mientras que Peano lo hace con base en la resta y esta a su vez la especifica mediante la suma, operación definida recursivamente en P18 (ver nota 25) .

[55] En contraste, Hao Wang en su artículo clásico ya citado sobre la "Axiomatización de la Aritmética", señala a Grassmann como el primero en aproximarse axiomáticamente a la aritmética mediante la inducción matemática:

> En 1861 Hermann Grassmann publicó su *Lehrbuch der Arithmetik*. Este fue probablemente el primer intento serio y algo exitoso de asentar a los números sobre una base más o menos axiomática. En lugar de considerar sólo a los enteros positivos, Grassmann lidió con la totalidad de los enteros, los positivos, los negativos y el cero. Más aún, gran parte de su método puede ser usado para manejar a la totalidad más pequeña de todos los positivos enteros. Él fue probablemente el primero en introducir definiciones recursivas para la adición y la multiplicación, y en demostrar sobre esa base las leyes ordinarias de la aritmética mediante inducción matemática (Wang, 1957:147)

proyectos axiomáticos, v.gr. Peano es más constructivo y menos general que Dedekind dado el mayor interés del segundo en comparación del primero por fundamentar a la aritmética sobre lógica[56], ambos fijan a la *estructura* de la secuencia ***N*** en la clase y el sistema simple infinito *N* fincándola sobre la inducción matemática débil. Ahora bien, en Dedekind resulta más claro este afianzamiento sobre la inducción pues él establece con mayor precisión a la estructura de ***N*** a través de su noción de cadena de un sistema, noción que a su vez determina a un sistema. Y para terminar de sintonizar este sistema, la cadena del sistema {1}, con las propiedades fundamentales de la secuencia ***N,*** se exige a su correspondiente transformación ϕ que sea similar y no incluya dentro de $\phi(N)$ al 1. A partir de estos ajustes al sistema $N=1_0$, "todas las demás propiedades" de la secuencia ***N*** se siguen, por ejemplo su buen orden (Teorema (96) de Dedekind y Proposición de §3.4 de Peano[57]). Por lo que la inducción matemática (débil) en los principios de Peano-Dedekind preceden deductivamente al tipo de orden de la secuencia de los números naturales, no al revés.

V. Notablemente en la axiomatización de Pascal se deja indeterminado al número generador G de los triángulos aritméticos. Por lo que todas las consecuencias demostradas en el primer bloque de su tratado, son válidas para *cualquier* triángulo aritmético sin importar cuál es su generador G. Por lo que el postulado R

---

[56]La axiomatización de Peano es más constructiva que la de Dedekind puesto que incluye un par postulados, P1 y P6, mediante los cuales se genera la clase infinita *N*. En contraste, Dedekind parte de la existencia probada de sistemas infinitos en (66) para mostrar la existencia en (72) del sistema infinito *N* caracterizado en (71). Por otro lado, la axiomatización de Dedekind es más general que la de Peano puesto que determina mediante nociones conjuntistas, por él consideradas lógicas, a los términos primitivos "1" y "+1" de los principios de Peano. De este lógico modo, el sucesor "+1" es una transformación similar del sistema *N* a una parte propia de *N*, mientras que el uno "1" es el elemento de *N* no incluido en esa transformación. Mientras que este par de discrepancias se pueden explicar por el objetivo perseguido por Dedekind de "mostrar a la aritmética como parte de la lógica". meta que excluía a las intuiciones aritméticas requeridas en el proyecto axiomático de Peano para poder considerar como acabada a la clase *N* y para interpretar a sus términos primitivos "1" y "+1".

[57] 4. $a \varepsilon KN . \ a-=\Lambda :\supset. Wa \varepsilon N.$ (Peano, 1889 vía 1979: 71)
Donde "W*a*" significa el mínimo en *a*. Ahora bien, Peano dejó sin probar esta proposición aunque sí lo hizo con la anterior mediante una inducción matemática (ver nota 27) : para toda subclase *a* de *N* que es acotada, existe en *a* un elemento máximo. Lo cual como veremos más adelante cuando expongamos a Cantor y su extensión transfinita de los números, implica a la proposición §3. 4.

con ayuda de la configuración geométrica P, construye *estructuralmente* a la secuencia de triángulos aritméticos. Es decir, el postulado R puede interpretarse constructiva pero también estructuralmente a través de los postulados P1,P6 de Peano: R1 al igual que P1 genera al primer triángulo aritmético mientras que R1-R2 tal como hace P6, señala cómo ir edificando los siguientes triángulos. Si llamamos R_p a la función sucesor para los triángulos aritméticos, la cual estaría definida por el postulado R con ayuda del esquema P, entonces la aplicación iterada de R_p iría generando a la familia (cada una identificada mediante su G) de secuencias de triángulos aritméticos:

$$
\begin{array}{ll}
R_P(\emptyset) = & G \\
 & \\
R_P(G) = & G \quad G \\
 & G \\
 & \\
R_P(R_P(G)) = & G \quad G \quad G \\
 & G \quad {\scriptstyle G+G} \\
 & G \\
 & \\
R_P(R_P(R_P(G))) = & G \quad G \quad G \quad G \\
 & G \quad {\scriptstyle G+G} \quad {\scriptstyle G+G+G} \\
 & G \quad {\scriptstyle G+G+G} \\
 & G
\end{array}
$$

...

VI. En cualquier etapa de la construcción de estas secuencias de triángulos aritméticos, el postulado R (asistido por la definición geométrica P) al indicar cómo generar al próximo de ellos a partir del anterior ($R_P(R_P(\ldots R_P(G)\ldots))$) y al señalar cómo edificar al primero de todos ellos (R1), no sólo facilita sino también valida al uso de la inducción matemática versión Pascal debido a los respectivos acoplamientos de este par de indicaciones constructivas con el Lema 2 y Lema 1 de ese método de justificación. Así entonces, que los triángulos aritméticos sean ordenables en una secuencia conforme al orden típico de los naturales, no consiente ni consolida la utilización de la regla IMP, sino son los procesos de construcción tipificados por R1 y R2 quienes hacen posible su seguro empleo. Por consiguiente, cualquier propiedad de los triángulos aritméticos demostrada mediante la regla IMP, es válida para *cualquier* triángulo aritmético sin importar cuál sea su número generador G.

- En suma, (V) la indeterminación de G y la (VI) generación de la secuencia de triángulos aritméticos regulada por el postulado R y compaginada con la regla de inducción matemática débil versión Pascal, son una evidencia de que los principios de la axiomatización de Pascal construyen estructuralmente a la secuencia de triángulos aritméticos. Lo cual aunado a que (IV)los principios de Peano-Dedekind también determinan estructuralmente mediante la inducción matemática débil a la secuencia ***N*** de números naturales, terminaría de impulsar la candidatura de Pascal a ser una axiomatización de la aritmética. Y aunque Pascal no haya sido tan preciso en delinear esa estructura afín a la secuencia ***N***, v.gr. no señala que R_p sea inyectiva, eso no cancela el carácter estructural de su axiomatización.

Conclusión:

Si a Pascal se le puede considerar el padre "legal" de la inducción matemática al haber sido el primero en dejar un registro escrito con la formulación de ese método de demostración, entonces también se le puede adjudicar la paternidad de las axiomatizaciones de la aritmética del estilo estructural consolidado por Peano-Dedekind, pues Pascal fue el primero en establecer el vínculo armónico entre sus principios de la primera clase con la inducción matemática débil.

Conclusión secundaria y anuncios primarios:

Si bien la inducción matemática (débil) no sólo se usa en la aritmética, su validez fue demostrada por Dedekind mientras que por Pascal y Peano fue insinuada como dependiente de la estructura sobre la cual se aplica. Y de acuerdo a lo expuesto, ese método de inferencia puede utilizarse válidamente en dominios que puedan estructurarse gracias a la misma inducción matemática como la secuencia ***N*** de los números naturales. Un par de capítulos adelante cuando exhibamos a la extensión transfinita de los números impulsada por Cantor, discutiremos si la estructura de ***N*** puede caracterizarse de otra manera no directamente basada sobre la inducción matemática. En particular, veremos si el buen orden puede relevar a esta regla de inferencia en la especificación de la estructura de ***N***. Mientras que en el sentido inverso, en nuestro próximo capítulo expondremos cómo un subconjunto de ***N*** que comparte su estructura bien ordenada, el de los números primos, puede no estar tan bien sintonizado con la inducción matemática (débil). En suma, en nuestros siguientes capítulos impulsaremos la postulación de la inducción matemática (débil) como fundamento de la aritmética, en contra de sus contrincantes (el buen orden) y de sus limitantes (los números primos).

Más aún, en nuestro siguiente capítulo empezaremos a ahondar sobre la noción de fundamento, la cual hemos anunciado que aplicaremos para la inducción matemática dentro de los desarrollos teóricos de ella precedidos por el *Traité* de Pascal. Y lo haremos a través del tema de la explicación dentro del contexto matemático. Para lo cual estudiaremos algunas demostraciones hechas por Euler para el Pequeño Teorema de Fermat y retomaremos algunas ideas planteadas por Bolzano, puestas en práctica en su *Demostración Puramente Analítica* sobre un teorema acerca de la existencia de soluciones para ciertas ecuaciones. Aquí sólo adelantemos que las demostraciones basadas en fundamentos (v.gr. aquellas hechas por inducción matemática dentro del *Traité*) , además de justificar a sus respectivos teoremas (v.gr. la Consecuencia 12ª) , hemos de considerarlas poseedoras de virtudes explicativas (v.gr. la naturalidad).

Concluiremos este capítulo con una irónica observación sobre el logicismo de Dedekind: el acoplamiento por él rigurosamente fomentado entre la estructura de la secuencia, las operaciones y las relaciones de los números naturales con la inducción matemática (débil), logró mostrar a esa regla de inferencia como endémica de la aritmética, en lugar de haber revelado a la aritmética como reducible a la lógica.

Capítulo 4: La explicación y la inducción matemáticas

4.0 Introducción

En el capítulo previo se reconoció la relevancia del papel desempeñado por la inducción matemática en las axiomatizaciones de la aritmética precedidas por el *Traité* de Pascal. Ahora pondremos a prueba esa importancia otorgada a la inducción matemática, en algunas demostraciones hechas por Euler de un famoso teorema acerca de la divisibilidad entre ciertos números. La proposición en cuestión es el Pequeño Teorema de Fermat y sus demostraciones por ser revisadas fueron seleccionadas para efectuar este examen de valor, debido a que su notable autor se pronunció en contra de aquellas por él mismo elaboradas con un patrón de inducción matemática. Y esta desestimación en esta etapa de nuestra investigación nos debe parecer llamativa, al insinuar que la inducción matemática pudiera resultar menos decisiva para ciertas proposiciones sobre los números naturales, a pesar de la participación determinante de ella detectada desde el *Traité* en la conformación axiomática de ellos. Por lo que la armonía constitutivo-justificativa centrada alrededor de la inducción matemática aquí apreciada dentro de las axiomatizaciones de la aritmética basadas en los principios de Pascal-Peano-Dedekind, en la práctica matemática puede ser convenientemente desatendida. En consecuencia, nuestro juicio positivo de la inducción matemática emitido en el capítulo anterior, parecería destinado a circunscribirse a las axiomatizaciones estudiadas o a promulgarse como una mera idealización.

Para enfrentar esta valoración negativa de la inducción matemática, lo haremos poniendo atención en la situación donde se presentó, es decir, reparando ante la pluralidad de las demostraciones hechas por Euler para el Pequeño Teorema de Fermat. En primer lugar, desde aquí señalaremos lo recurrente de este fenómeno dentro de la historia de las matemáticas: la producción de distintas demostraciones para un teorema no es un hecho aislado[1]. En segundo lugar y aunque parezca redundante, desde ahora remarcaremos que las demostraciones aludidas son demostraciones, es decir todas ellas son justificaciones aceptables de su conclusión conforme a los parámetros deductivos vigentes en su creación[2]. Por lo tanto, estas dos observaciones nos incitarían a prever que las razones detrás del menosprecio citado de la inducción matemática, no son dudas sobre el poder justificativo de las demostraciones seguidoras de esa regla. Euler al igual que varios más desarrolladores de las matemáticas, han perseguido otros fines además de la justificación cuando vuelven a demostrar teoremas. Y sobre esas otras metas, podemos sospechar que se origina la baja ponderación de sus demostraciones hechas por inducción matemática del Pequeño Teorema de Fermat.

Entre esos otros objetivos que incitaron a Euler a crear nuevas demostraciones del Pequeño Teorema de Fermat, nos centraremos en aquellos que interpretaremos como propósitos explicativos. De este modo, la preferencia manifestada por él respecto algunas de sus demostraciones de este teorema, en detrimento de aquellas suyas seguidoras de una inducción matemática, será por nosotros entendida en términos de ganancias explicativas. Mientras que nuestra selección de fines alternos a los justificativos, será respaldada mediante la identificación de algunas semejanzas del caso euleriano estudiado con algunas ideas de Bolzano relativas o asociables con la explicación en la ciencia.

En particular, la demostración preferida por Euler del Pequeño Teorema de Fermat en contraposición con su precedente deductivo realizado mediante inducción matemática, tiene notables similitudes con la *Demostración Puramente Analítica* de Bolzano sobre la existencia de raíces reales para ciertas ecuaciones. Más aún, ambos matemáticos declararon razones afines para tener en alta consideración a estas demostraciones.

---

[1] Otro ilustre ejemplo que también refiere a un solo pero igual de prestigioso autor, son las diferentes demostraciones hechas por Gauss a lo largo de su vida para el Teorema Fundamental del Álgebra, empezando con la aparecida en su tesis doctoral publicada en 1799.

[2] Es decir, aquí no incluiremos los casos cuando la creación de nuevas demostraciones es motivada por la insatisfacción provocada por la calidad justificativa de “demostraciones” previas. El ejemplo ofrecido en la nota antecesora, también sirve en la presente: Gauss en su tesis doctoral, critica la validez de algunas “demostraciones” anteriores del Teorema Fundamental del Álgebra, como la dada por el protagonista del presente capítulo, Euler, en su artículo “Recherches sur le racines imaginaires des equations” publicado en 1751 (esta crítica se encuentra en las páginas 8-13 de la traducción hecha por Fandreyer de su tesis doctoral).

Mientras que gracias a la vocación lógico-filosófica de Bolzano, estas razones comunes fueron por él desarrolladas en una serie de ideas que pueden ser leídas como una explicación de la explicación en matemáticas[3]. Por lo que nosotros en este capítulo aprovecharemos algunas de esas ideas, para comprender por qué la inducción matemática no siempre es la mejor opción cuando queremos establecer proposiciones en las cuales se hace mención de los números naturales.

Así entonces, para indagar cuándo una demostración satisface objetivos explicativos, nos guiaremos principalmente por la siguiente sugerencia de Bolzano: "cuando presentemos las proposiciones, deberíamos indicar no sólo que son verdaderas, sino también cómo es que ellas pertenecen a nuestra ciencia..."(Bolzano,2004: 75). Es decir, aquí se seguirá la costumbre de vincular a la explicación con un por qué, insinuando que una demostración explica a su teorema cuando ella contesta por qué él es verdadero. De este modo, una demostración al cumplir correctamente con su función justificativa, nos indicaría la verdad de su conclusión. Mientras que una demostración que además nos señala cómo es que su conclusión pertenece a determinada teoría matemática, también puede revelarnos por qué su conclusión es verdadera, si ella logra mostrar a su teorema como consecuencia de los principios básicos de su contexto teórico[4]. Sin embargo, aquí no pretendemos la validez universal de nuestra guía para detectar demostraciones explicativas, pues el objetivo del presente capítulo enunciado al final del párrafo

[3] Un estudioso contemporáneo de las matemáticas que ha ahondado dentro de esa interpretación "explicativa" de algunas ideas de Bolzano es Mancosu, por lo que su desarrollo puede ser inspeccionado en algunos de sus artículos como "Bolzano and Cournot on Mathematical Explanation" (1999).

[4] Nótese la ausencia de compromisos metafísicos (o de cierta clase de ellos) en nuestro criterio de identificación de demostraciones explicativas. En particular, sobre la verdad matemática, decimos nada. En lugar de llamar "verdadera" a una proposición que tenga una demostración correcta, bien pudimos nombrarla como proposición "guacaguaca". Es decir, tratamos en la medida de lo posible de ser neutrales respecto a ciertos asuntos filosóficos que son controversiales, ateniéndonos mayoritariamente a la práctica matemática. Por lo que de acuerdo a esta última, cuando una proposición posee una demostración correcta se considera "verdadera" (o "guacaguaca"). Mientras que en la práctica matemática una demostración usualmente es correcta, cuando ella logra vincular válidamente conforme a los estándares deductivos vigentes en su creación, a su conclusión con premisas que a su vez son "verdaderas" (o "guacacuaca"). Finalmente para evitar el descenso infinito, algunas proposiciones, los primeros principios, se consideran "verdaderas" (o "guacacuaca") sin necesidad de una demostración por conveniencia (o por otras razones más dudosas) para el desarrollo de la teoría. Dado que de los primeros principios fluye la "verdad" de todas las demás proposiciones, entonces cuando una demostración logra mostrar abiertamente el vínculo entre su teorema y los primeros principios, entonces ella mostraría por qué es "verdadera" su conclusión.

precedente es mucho más específico. No obstante dado que los principios básicos fueron un tema tratado en el par de capítulos previos, entonces sí podemos afirmar desde aquí que nuestra ruta propuesta para perseguir cualidades explicativas, nos permitirá internarnos por la vía axiomática trazada anteriormente para la aritmética.

Insistimos que no es de nuestro interés formular un criterio general para las demostraciones explicativas, por lo que sólo nos dedicaremos a recabar de Bolzano algunas ideas para articularlo en consonancia con las razones detrás de la referida predilección de Euler. Por consiguiente, seleccionaremos del primero algunos planteamientos que no sean tan comprometedores desde un punto de vista filosófico, para no provocar mayores recelos sobre nuestros parámetros para el reconocimiento de lo explicativo en una demostración. Así entonces, las ideas afines entre Euler y Bolzano que posteriormente utilizaremos en pos de nuestra meta son las siguientes: (1) la diferencia entre justificaciones brindadoras de certeza y de justificaciones que además explican; (2) la naturalidad y (3) la fecundidad como indicadores de lo explicativo en una demostración.

Finalmente, al tener a nuestra disposición un criterio para detectar lo explicativo en una demostración que a su vez nos remite a la vía axiomática, lo aprovecharemos para realzar lo explicativo en las demostraciones hechas por inducción matemática dentro de las teorías aritméticas de Pascal, Peano y Dedekind. Es decir, nuestro postulación de la inducción matemática como un fundamento para estos desarrollos teóricos no sólo se basa sobre su condición de ser un principio básico para obtener justificaciones, si no también se apoya en que allí es el modo más (2)natural y (3)fecundo para hacerlo.

Descritos brevemente las preocupaciones, los medios y los fines de este capítulo, corresponde ahora completar este bosquejo introductorio para que eventualmente podamos concluir que algunas mas no todas las demostraciones hechas por inducción matemática sobre proposiciones donde se mencionan a los números naturales, son explicativas: las demostraciones redactadas conforme a la correspondiente formulación de esta regla en los desarrollos aritméticos de Pascal, Peano y Dedekind lo son, mientras que aquellas elaboradas por Euler siguiendo a esta regla para el Pequeño Teorema de

Fermat, no lo son. Y a continuación nos dedicaremos a justificar pero también a explicar a esta conclusión.

4.1 Avatares eulerianos de una Conjetura Pequeña de Fermat

Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo demasiado prolífico. La diversidad y copiosidad de sus contribuciones a las matemáticas y a otras ciencias inhibe cualquier intento de sintetizar sus aportaciones en unas cuantas líneas. Debido a los objetivos de esta investigación, la somera revisión histórica por realizarse en este apartado estará circunscrita alrededor los escritos de Euler relativos a la Teoría de los Números. La elección de esta delimitación fue promovida por la relación entre la inducción matemática y los números naturales planteada desde la introducción de este proyecto y que se ha ido ratificando a lo largo de su desarrollo.

La cantidad y variedad de los escritos de Euler destinados a la Teoría de los Números sigue abrumando a los ánimos por resumirlos (v.gr. según el catálogo de Eneström tiene 95 artículos acerca de este tópico). Dentro de su abundante colección de trabajos sobre esa rama de las matemáticas, sólo se escogieron algunos relacionados directa o indirectamente con la inducción matemática. En particular sobre algunas demostraciones hechas por Euler del Pequeño Teorema de Fermat se volcará nuestro interés inquisitivo. Así entonces, los artículos por ser estudiados conforme al catálogo de Eneström son: E26, E54, E134, E262 y E271.

La exposición histórica será efectuada cronológicamente. Los comentarios que acompañarán a algunas de las transcripciones al castellano tienen como meta facilitar su comprensión y articular la exhibición histórica para su posterior explotación filosófica. Por ejemplo, algunas demostraciones serán traducidas a un lenguaje matemático más actual ya que la familiaridad suele asistir al entendimiento. No obstante, la presentación original gracias a su detallada estructura de antemano ayuda a su lectura, la cual quizás sólo se vea obstaculizada por la clásica lengua de su escritura. Cuando se utilice alguna traducción como apoyo para saltar al latinizado escollo, será indicada a pie de página por si el lector desea cotejarla con la fuente euleriana.

CONJETURA PEQUEÑA DE FERMAT EN E26

En el artículo titulado “Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus” podemos hallar en latín las siguientes palabras de Euler:

> Consideraré ahora a la fórmula 2^n-1, la cual cuando *n* no es un número primo, tiene divisores, y no sólo 2^n-1 sino también a^n-1 los tiene. Pero si *n* fuera un número primo, podría parecer que 2^n-1 siempre lo sería también; esto sin embargo nadie hasta donde conozco se ha atrevido a decirlo ya que es fácilmente refutable. Por ejemplo2^{11}-1, i.e. 2047, tiene como divisores a 23 y 89, y 2^{23}-1 puede ser divido entre 47. Veo que Cel. Wolff no sólo menciona esto....Él también menciona que $2^{n-1}(2^n-1)$ es un número perfecto cuando 2^n-1 es un primo, por consiguiente *n* debe ser también un número primo. Creo que es un esfuerzo valioso examinar los casos para los cuales 2^n-1 no es un número primo cuando *n* sí lo es. He descubierto también que si *n*=4*m*-1 o a 8*m*-1 son números primos, entonces 2^n-1 siempre puede ser divido entre 8*m*-1...Sin embargo no todos los demás números primos pueden ponerse en el lugar de *n*...todavía otros deben ser removidos; he observado que 2^{37}-1 puede ser dividido entre 223, ...,2^{73}-1 entre 439; sin embargo no podemos excluirlos a todos. Todavía me atrevo a ir más allá y afirmar que con excepción de los casos notados, todos los números primos menores a 50 y quizás incluso 100, producen el número $2^{n-1}(2^n-1)$ que será perfecto al sustituir por *n* los números,1,2,3,5,7,13,17,19,31,41,47, siendo 11 de ellos. He deducido estas observaciones de un Teorema no inelegante, cuya demostración no tengo, pero cuya verdad la tengo por cierta. <u>El Teorema es, a^n-b^n, siempre puede ser dividido entre *n*+1, si *n*+1 es un número primo tal que ni *a* ni *b* por él pueden ser divididos; sin embargo es difícil demostrarlo porque no es verdad a menos que *n*+1 sea un número primo.</u> De este teorema se sigue inmediatamente que 2^n-1 siempre puede ser divido entre *n*+1 si *n*+1 es un número primo,... (Euler, 1738:105-6)[5]

El texto previo funciona como preámbulo al contexto matemático sobre el cual originariamente se desenvuelve el teorema captor de nuestro interés. Al leerlo podemos identificar cuestiones sobre la relación de divisibilidad y los números primos que ahora inmediatamente se ubicarían en la teoría de números, rama de las matemáticas que nos remonta hasta Libro VII de los *Elementos* previamente examinado y cuyo desarrollo fue vigorosamente impulsado por el autor de la cita. Por ejemplo, en la transcripción se subrayó un teorema típico de esa teoría: Si *p* es primo y *p* no divide a *a* ni a *b* entonces p divide a $(a^{p-1}$-$b^{p-1})$. Y tal como lo señala Euler, esa proposición sirve para abordar el cuestionamiento inaugural del texto reproducido. Es decir, existen divisores (no triviales)

[5] La transcripciones al castellano de E26 se apoyan mayoritariamente en su traducción al inglés hecha por David Zhao, la cual se puede descargar en el sitio cibernético de estudios eulerianos llamado “The Euler Archive”.

del número representado como 2^n-1 cuando n es igual la resta de un número primo p menos uno (n=p-1), pues el teorema señala al mismo p como uno de ellos.

Además de su valor introductorio al contexto y al teorema protagonista de este apartado, el teorema subrayado también resulta atractivo por el reconocimiento hecho por Euler acerca de su dificultad para demostrarlo. Tan difícil le resultó que incluso temporalmente careció de una justificación deductiva de él. Ahora bien, el interés por esa complicación aquí tiene una faceta tanto global, i.e. con respecto a la inducción matemática por ser el eje de la tesis, como local, i.e. relativo al Teorema Pequeño de Fermat por ser el eje de este capítulo. Del primer rostro del interés podemos vaticinar que la propiedad aludida por el teorema acerca de que n+1 sea un número primo, en general puede ser una fuente de ofuscación deductiva para la inducción matemática. Mientras que del segundo podemos adelantar que la dificultad por demostrar este teorema es la misma sufrida cuando se intenta probar el teorema principal de esta sección, el cual desde E26 es enunciado de la siguiente manera:

> Teorema 1. Si n fuera un número primo, toda potencia con exponente n-1 dividida entre n dejaría como residuo cero o uno. (Euler, 1738: 107)

Ahora bien, el Teorema 1 de E26 casi es el Pequeño Teorema de Fermat. Para convertirlo en él hay que empequeñecerlo agregando la condición de que la base de la potencia no sea divisible entre n y por consiguiente, suprimiendo una opción de su consecuente para afirmar nada más que "n dejaría como residuo a uno". Presentado ya al teorema estelar del capítulo como un viejo objeto del deseo deductivo de Euler, podemos proceder hacia la exposición de su primera satisfacción por él alcanzada.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN DEL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT EN E54

El artículo *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio* tiene como único objetivo deductivo al Pequeño Teorema de Fermat, el cual allí es formulado de la siguiente manera:

> Denótese mediante *p* a un número primo, la fórmula a^{p-1}-1 siempre puede ser dividido entre *p*, a menos que *a* pueda ser dividido entre *p*. (Euler, 1741: 143)[6]

Después de enunciar a la proposición, Euler nos brinda su ingeniosa demostración que inicia con la prueba de la siguiente afirmación:

> Sea *p* cualquier número primo impar, la fórmula 2^{p-1}-1 siempre puede ser dividida entre *p*.
>
> Prueba.
>
> Si 2^{P-1}-1 puede ser divido entre el número primo p, entonces su duplo 2^p-2 también puede serlo a su vez. Y $2^p= (1+1)^p=1 + \frac{p}{1} + \frac{p\,(p-1)}{1 \quad 2} + \frac{p\,(p-1)(p-2)}{1 \quad 2 \quad 3} + \text{-------}\frac{p\,(p-1)}{1 \quad 2} + \frac{p}{1} + 1$. Pero en esta serie si truncamos al primer y al último término obtenemos $\frac{p}{1} + \frac{p\,(p-1)}{1 \quad 2} + \frac{p\,(p-1)(p-2)}{1 \quad 2 \quad 3} + \text{-------}\frac{p\,(p-1)}{1 \quad 2} + p= 2^p-2$. Ahora resulta perspicuo que cada término de esta serie es divisible entre p, si es que p es un número primo. Por cuya razón p siempre divide a 2^p-2 y a causa de esto 2^{p-1}-1 puede ser dividido entre *p*, a menos que *p*=2. Q.E.D. (Euler, 1741: 144)[7]

Con el fin de facilitar su comprensión, desde aquí se develará que en E54 se demuestra mediante una inducción matemática débil que *p* divide a (a^{p-1}-*a*) para cualesquiera número natural *a* y número primo *p,* proposición cuyo corolario es el Pequeño Teorema de Fermat. De este modo, el Caso Base y su prueba pueden ser extraídos del texto previamente transcrito de Euler, los cuales serán a continuación expresados con una notación un poco más moderna.

CASO BASE (*n*=2): *p* divide a (2^p-2).

Demostración:

---

[6] La transcripciones al castellano de E54 se apoyan mayoritariamente en su traducción al inglés hecha por David Zhao, la cual también se puede descargar en "The Euler Archive".

[7] Curiosamente la elaboración de distintas demostraciones para un teorema se presenta desde el interior de E54, pues Euler allí mismo ofrece otra demostración de que p divide a 2^{p-1}-1 aunque también está basada en la expansión de un binomio. En lugar de desarrollar $(1+1)^p$, directamente expande mediante el teorema del binomio a $2^{p-1} =(1+1)^{p-1} = 1+\binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{2}+....+\binom{p-1}{P-3} + \binom{p-1}{P-2} + 1$. Luego hace la resta $(1+1)^{p-1}$-1 y simplifica la suma de cada par de términos consecutivos aprovechando que $\binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k+1} = \binom{p}{k+1}$. Es decir $(1+1)^{p-1}-1= \binom{p}{2} + \binom{p}{3}+....+\binom{p}{P-2} + \binom{p}{P-1}$. Luego como cada término de la sumatoria es divisible entre *p*, el resultado de la sumatoria también lo es. Ahora bien, la demostración expuesta en el cuerpo de este texto, resulta más provechosa pues enseña cómo se hará la del Paso Inductivo y cómo de la proposición probada ($2|2^p$-2) se puede inferir la instancia del Pequeño Teorema de Fermat: si (2,*p*)=1 y como $2|2^p-2=2(2^{p-1}-1)$ entonces $2|(2^{p-1}-1)$.

2^p=$(1+1)^p$

= $\binom{p}{0}1^p1^0+\binom{p}{1}1^{p-1}1^1+\binom{p}{2}1^{p-2}1^2+....+\binom{p}{P-2}1^21^{P-2}+\binom{p}{P-1}1^11^{P-1}+\binom{p}{P}1^01^P$ TEOREMA DEL BINOMIO

= $1+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+....+\binom{p}{P-2}+\binom{p}{P-1}+1$

Por lo que si a 2^p le restamos dos obtendríamos:

2^p-2=$\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+....+\binom{p}{P-2}+\binom{p}{P-1}$

Como p es primo y $1 \leq k < p$, entonces p divide a cada término previo $\binom{p}{k}$ de 2^p-2.

Y como p divide a cada $\binom{p}{k}$ con $1 \leq k < p$, entonces p divide a la sumatoria de esos términos $\binom{p}{k}$ que es igual a 2^p-2. Por consiguiente, p divide a 2^p-2. Q.E.D.

Después del Caso Base se espera el apuntalamiento del Paso Inductivo para que la demostración esté erigida conforme al estilo de una inducción matemática débil. Y Euler satisface nuestras expectativas en el siguiente extracto de E54:

> Teorema
>
> Denote p a un número primo, si a^p-a puede ser dividido entre p; entonces la fórmula $(a+1)^p$-a-1 también puede ser dividida entre p.
>
> Demostración.
>
> Expándase $(1+a)^p$ de la manera usual en una serie, $(1+a)^p = 1+\frac{p}{1}a+\frac{p\,(p-1)}{1\quad 2}a^2+\frac{p\,(p-1)(p-2)}{1\quad 2\quad 3}a^3+$ -------$\frac{p}{1}a^{p-1}+a^p$,cuyos términos individuales puedan ser divididos entre p salvo el primer y el último, dado que p es primo. Por cuya razón $(1+a)^p$-a^p-1 admite la división entre p, y también la fórmula congruente con ella $(1+a)^p$-a-1-a^p+a. Y a^p-a por hipótesis puede ser dividido entre p, ergo también lo es $(1+a)^p$-a-1. Q.E.D (Euler, 1741: 146)

El teorema previo es una implicación en cuyo antecedente es reconocible la hipótesis inductiva, "a^p-a puede ser dividido entre p". Por consiguiente, para establecer al Paso Inductivo, se debe demostrar su consecuente, "p divide a $(a+1)^p$-$(a+1)$". Y Euler así lo hace en su demostración previamente reproducida tal como con una notación un poco más moderna a continuación se muestra:

PASO INDUCTIVO (n=a): Si p divide a a^p-a entonces p divide a $(a+1)^p$-$(a+1)$.

Demostración.

$(1+a)^p$

$= \binom{p}{0}1^p a^0 + \binom{p}{1}1^{p-1}a^1 + \binom{p}{2}1^{p-2}a^2 + \ldots + \binom{p}{P-2}1^2 a^{P-2} + \binom{p}{P-1}1^1 a^{P-1} + \binom{p}{P}1^0 a^P$ TEOREMA DEL BINOMIO

$= 1 + \binom{p}{1}a + \binom{p}{2}a^2 + \ldots + \binom{p}{P-2}a^{P-2} + \binom{p}{P-1}a^{P-1} + a^P$

Por consiguiente, $(1+a)^p-1-a^p = \binom{p}{1}a + \binom{p}{2}a^2 + \ldots + \binom{p}{P-2}a^{P-2} + \binom{p}{P-1}a^{P-1}$

Luego como *p* divide a cada $\binom{p}{k}$ con $1 \leq k < p$ entonces *p* divide a cada sumando $\binom{p}{k}a^k$ de la expansión de $(1+a)^p-1-a^p$. En consecuencia, *p* divide a $(1+a)^p-1-a^p$.

Además ya que $(1+a)^p-1-a^p = (1+a)^p-1-a^p-a+a = (1+a)^p-(1+a)-(a^p-a)$, entonces *p* divide a $(1+a)^p-(1+a)-(a^p-a)$, lo cual aunado a la hipótesis inductiva conlleva que *p* divida a $(1+a)^p-(1+a)$. Q.E.D. [8]

Afianzados el Caso Base y el Paso Inductivo, el método de la inducción matemática débil nos permitiría arribar directamente a la afirmación de que *p* divide a $(a^{p-1}-a)$ para cualesquiera número natural *a* y número primo *p*. No obstante con ánimos pedagógicos, Euler nos explica cómo se llega hacia esa conclusión y a su famosa consecuencia, el Pequeño Teorema de Fermat:

> Consecuentemente, ya que la suposición de que a^p-a pueda ser dividido entre el número primo *p* implica que la fórmula $(a+1)^p-a-1$ también admita la división entre *p*, también $(a+2)^p-a-2$ como $(a+3)^p-a-3$ y en general $(a+b)^p-a-b$ pueden ser divididos entre *p*. Luego si asignamos $a=2$, entonces 2^p-2, como ya fue demostrado, puede ser dividido entre p, de lo cual resulta perspicuo que la fórmula $(b+2)^p-b-2$ debe admitir también la división entre *p* para cualquier número entero que substituya a *b*. Por lo tanto *p* divide a la fórmula $a^{p-1}-1$, a menos que $a=p$ o sea a un múltiplo de *p*. Así ha sido demostrado el teorema general, prueba que me había comprometido a proveer. (Euler 1741:146)

Con ayuda de la explicación ofrecida por Euler podemos ratificar el apoyo deductivo a la conclusión ofrecida por su demostración hecha por inducción matemática. Pues sea *c* cualquier número natural mayor o igual que dos. Debido a que $c \geq 2$, entonces existe un número natural *d* tal que $c=2+d$. Por otro lado, de acuerdo a Euler del Paso Inductivo se sigue directamente su generalización: si *p* divide a a^p-a implica que *p* divida a

[8] Teorema: $u|v-w$ y $u|w$ entonces $u|v$. Prueba: Por hipótesis tenemos que $un=v-w$ y $um=w$. Así entonces, se cumple la igualdad $un=v-um$. Despejando a *v* obtendríamos que $v=un+um$. Por lo tanto $u|v$. Por lo que si $u=p$, $v=(1+a)^p-(1+a)$ y $w=(a^p-a)$, entonces por este teorema se sigue que *p* divide a $(1+a)^p-(1+a)$.

(a+1)^p-(a+1), entonces p debe dividir a $(a+b)^p-(a+b)$ para cualquier número natural b. Lo cual aunado al Caso Base, conlleva que p divida a $(2+b)^p-(2+b)$ para cualquier número natural b. Así entonces, p tiene que dividir a su instancia $(2+d)^p-(2+d)$ y por consiguiente, p divide a c^p-c. Por lo tanto, la conclusión estaría correctamente apoyada por la demostración que Euler se comprometió a proveer.

Más aún el Pequeño Teorema de Fermat es un corolario de la proposición asentada vía inducción débil. Para deducirlo basta con añadir la condición de que p no divida a c, con realizar la factorización $c^p-c=c(c^{p-1}-1)$ y con acudir al siguiente famoso teorema sobre la divisibilidad de los primos: si el número primo p divide al producto vw, entonces p divide a v ó a w[9].

Por último, nótese que la inducción matemática débil usada para demostrar que p divide a (a^p- a) para cualesquiera a y p, no se propaga sobre el exponente p sino sobre su base a. Lo cual nos recuerda la advertencia hecha en la introducción de este capítulo: los números primos no fomentan el uso de la inducción matemática aunque tengan el mismo tipo de orden de los naturales[10]. La demostración bajo la lupa puede ofrecer pistas acerca de las causas de la inoperancia de la inducción débil con los números primos. Si en lugar de realizar la inducción sobre a lo hiciéramos sobre el exponente p, entonces la inmediatez del Caso Base, *2* divide a $a^2-a=a(a-1)$ pues a es par o $a-1$ es par, podría alentarnos a proseguir por ese camino deductivo.

Desgraciadamente el paso inductivo provoca una parálisis deductiva. Si suponemos que se cumple la proposición para el enésimo número primo, ¿cómo aprovechamos a la hipótesis inductiva para probar que también su sucesor la satisface? Si bien se puede definir sin mayor problema al sucesor de un número primo, su cómputo es un verdadero problema si se desea establecer el Paso Inductivo pues no basta con los primos anteriores

[9] Teorema: Si $p|vw$ entonces $p|v$ ó $p|w$. Este Teorema es una consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética pues afirma la existencia para v y w de una descomposición única en factores primos, de donde se sigue que p es un factor primo de v ó de w. Mientras que este teorema es famoso pues ha sido usado para brindar una definición más amplia de “número primo”: p es un número primo si para todo v,w tal que $p|vw$, se tiene que $p|v$ ó $p|w$.

[10] 2,3,5,7,11,13,17,....Es decir, el conjunto de los números primos es un conjunto bien ordenado.

para *especificar* al siguiente[11] y por consiguiente, el poder deductivo de la hipótesis inductiva se debilita. Es decir, no es viable demostrar por inducción matemática sobre el exponente p que $a^{p-1}-b^{p-1}$ sea divisible entre p cuando p no divide a a ni a b. Es más, en el siguiente artículo inspeccionado se ratificará esa dificultad, pues allí otra vez Euler usará al Teorema del Binomio en conjunción con una inducción débil sobre la base (no sobre el exponente) para probar al Pequeño Teorema Fermat y como corolario de él, a la proposición cuya verdad fue profetizada en E26.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN DEL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT EN E134

En el artículo titulado "Theoremata circa divisores numerorum " Euler desarrolla una más amplia investigación con respecto a la relación de la divisibilidad y los números primos. De hecho, el Pequeño Teorema de Fermat es demostrado desde el principio de ese artículo pues es explotado para la generación de los resultados deductivos allí expuestos. Debido a la similitud de su demostración con la desenvuelta en E54, la ruta deductiva planteada en E134 hacia su justificación será en su mayoría escrita en notación moderna. El trabajo en cuestión empieza con el siguiente teorema:

Teorema 1.

> 1. Si p fuera un número primo, todo número con la forma $(a+b)^p-a^p-b^p$ será divisible entre p. (Euler, 1750:22)

Demostración:

$$(a+b)^p= a^p+\binom{p}{1}a^{p-1}b^1+\binom{p}{2}a^{p-2}b^2+\binom{p}{3}a^{p-3}b^3.... +\binom{p}{p-3}a^3b^{p-3}+\binom{p}{P-2}a^2b^{P-2}+\binom{p}{P-1}a^1b^{P-1}+b^P$$

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\binom{p}{1}a^{p-1}b^1+\binom{p}{2}a^{p-2}b^2+\binom{p}{3}a^{p-3}b^3.... +\binom{p}{p-3}a^3b^{p-3}+\binom{p}{P-2}a^2b^{P-2}+\binom{p}{P-1}a^1b^{P-1}$$

Ahora bien, como $\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p!}{(p-(p-k)!(p-k)!} = \binom{p}{p-k}$ entonces podemos realizar la siguiente factorización:

---

[11] Por ejemplo, sea p_n el enésimo número primo. Defínase p_{n+1} como el mínimo número dentro del conjunto P_{n+1}= { p_n+1, p_n+2,...., 2*3*...* p_n+1} que sea primo. Puesto que el conjunto de los primos es infinito, p_{n+1} debe existir aunque no sepamos con antelación quién es.

$(a+b)^p-a^p-b^p=\binom{p}{1}ab(a^{p-2}+b^{p-2})+\binom{p}{2}a^2b^2(a^{p-4}+b^{p-4})+\binom{p}{3}a^3b^3(a^{p-6}+b^{p-6})+\binom{p}{4}a^4b^4(a^{p-8}+b^{p-8})+\ldots$

Como cada coeficiente $\binom{p}{k}$ de la sumatoria previa es múltiplo del primo p, entonces$(a+b)^p-a^p-b^p$, es divisible entre p. Q.E.D.

Una vez probado el Teorema 1, Euler prosigue con la instauración de los elementos deductivos sobre los cuales se apoyará el Pequeño Teorema de Fermat, uno de los cuales es una consecuencia inmediata del teorema recién demostrado:

Corolario 1.

> 2. Por consiguiente si asignamos a=1 y b=1 entonces 2^p-2 siempre es divisible entre p, cuando p es un número primo. Así pues como $2^p-2=2(2^{p-1}-1)$, entonces alguno de los factores necesariamente es divisible entre p. Y si no es el caso que p=2, entonces el primer factor no es divisible entre p, de donde se sigue que $(2^{p-1}-1)$ siempre es divisible entre p cada vez que sea el caso de que p sea un número primo distinto al dos. (Euler, 1750:23)

Después del corolario previo Euler presenta como un teorema a una proposición que pudiera considerarse como otro coralario del Teorema 1, pues su dependencia deductiva se manifiesta en su demostración:

Teorema 2.

> 4. Si una y otra de las fórmulas a^p-a y b^p-b es divisible entre el número primo p, entonces también la fórmula $(a+b)^p-a-b$ es divisible entre el número primo p.
> (Euler, 1750:23)

Demostración:

Por el Teorema 1, p divide a $(a+b)^p-a^p-b^p$. Luego por hipótesis del Teorema 2, se tiene que el número primo p divide tanto a (a^p-a) como a (b^p-b). En consecuencia, p divide a la sumatoria de los tres previos términos[12], es decir p divide a $(a+b)^p-a^p-b^p + (a^p-a)+(b^p-b)= (a+b)^p-a-b=(a+b)^p-(a+b)$. Q.E.D.

El resto de los componentes de la demostración del Pequeño Teorema de Fermat debido a la inmediatez de su respaldo deductivo ofrecido por el Teorema 2, pueden ser desplegados sin interrupciones aclaratorias:

Corolario 1.

[12]Teorema: si $u|v$ y $u|w$ entonces $u|v+w$. Prueba. Por hipótesis se tiene que $un=v$ y $um=w$. Por lo que $v+w=un+um= u(n+m)$.

5. Si asignamos b=1, como 1^p-1=0 es divisible entre p, se sigue que si la fórmula a^p-a fuera divisible entre p entonces también la fórmula $(a+1)^p-a-1$ es divisible entre p.

Corolario 2.

6. Así pues si asumimos que a^p-a es divisible entre p, también la fórmula $(a+1)^p-a-1$ es divisible entre p, de modo similar de la hipótesis se sigue que la fórmula $(a+2)^p-a-2$, así como también $(a+3)^p-a-3$, etc. y en general c^p-c es divisible entre p.

Teorema 3.

7. Si p es un número primo, todo número de la forma c^p-c entre p es divisible.

Demostración.

Si en §6 asignamos a =1, como $a^p-a=0$ es divisible entre p, se sigue que también las fórmulas 2^P-2; 3^P-3:4^P-4; etc. y en general c^p-c será dividido entre p. Q.E.D.

(Euler, 1750:24)

Una vez concluida la colocación de los componentes de la demostración del Pequeño Teorema de Fermat, Euler lo formula como un simple corolario del Teorema 3:

Corolario 3.

10. Si p es un número primo, todo número de la forma $a^{p-1}-1$ es divisible entre p excepto cuando a sea divisible entre p. (Euler, 1750:25)

El Corolario 3 es una consecuencia directa del Teorema 3 una vez aprendida la factorización enseñada en E54: $c^p-c=c(c^{p-1}-c)$. De hecho, la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E134 es una paráfrasis de la expuesta en E54. Aunque en contraste con su predecesora, su demostración en E134 hace más evidente la función cimentadora del Teorema del Binomio, tal como a continuación será remarcado.

Recordando, tanto el Caso Base como el Paso Inductivo en la demostración de que p divide a a^p-a en E54, son probados gracias al Teorema del Binomio. Y si comparamos sus pruebas con la demostración ahora sometida al análisis, podemos reconocer que el Teorema 1 de E134 junto con su demostración subsumiría ambas escalas deductivas recorridas en E54. Es decir, no resulta fortuito que un binomio elevado a una potencia prima, $(a+b)^p$, sea partícipe de lo afirmado en el Teorema 1 de E134, puesto que en E54 son binomios elevados a una potencia prima, $(1+1)^p$ y $(a+1)^p$, los que permiten el empleo del Teorema del Binomio para demostrar las dos fases de la inducción matemática débil. Así entonces, en E134 se revela desde el comienzo la herramienta deductiva, el Teorema del Binomio, que permite seguir los dos pasos dados en E54: primero se prueba el esquema general de la demostración en E54 y luego a manera de corolarios se establece su Caso Base (Corolario 1 del Teorema 1) y su Paso Inductivo (Corolario 1 del Teorema 2, teorema que a su vez es un corolario del Teorema 1). En suma, es el Teorema 1 y en su demostración donde se expresa el plan de prueba del Caso Base y del Paso Inductivo de la demostración de E54.

A pesar de la importancia otorgada al Teorema 1 y por consiguiente al Teorema del Binomio, la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E134 todavía conserva el patrón de inducción matemática débil. Pues como ya fue mencionado, la demostración en E134 mantiene el recorrido deductivo planteado en E54. De este modo en E134, el Teorema 1 le brinda todo su apoyo al Caso Base de la inducción enunciado en su Corolario 1. Mientras que el Teorema 2 tiene la función de allanar el camino deductivo del paso inductivo con la diferencia de que directamente establece su generalización ya anunciada desde E54: si p divide a a^p-a entonces p divide a $(a+b)^p$-$(a+b)$ para cualquier número natural b. Es decir, en E54 primero se fincaba al Paso Inductivo para luego hacer su generalización, mientras que en E134 sucede al revés pues el Paso Inductivo es consecuencia de la generalización facultada por el Teorema 1 con ayuda de las hipótesis proporcionadas por el Teorema 2 (p divide tanto a a^p-a como a b^p-b). Sin embargo, la discrepancia detectada no disuelve en E134 al patrón de la inducción matemática débil de la demostración de E54, sino únicamente hace más patente la relevancia otorgada al Teorema 1 y por consiguiente resalta la importancia del Teorema del Binomio en esa demostración.

Más aún, en el Teorema 3 de E134 se enuncia el equivalente de la conclusión de la inducción matemática débil expuesta de E54: para todo número natural c se cumple que cualquier número primo p divide a c^p-c. Y la justificación de ese teorema justamente es brindada por el Corolario 1 del Teorema 1 (Caso Base) en concomitancia con el Corolario 2 del Teorema 2(Paso Inductivo).Por último, el Corolario 3 del Teorema 3 no es otra proposición sino la del Pequeño Teorema de Fermat. En conclusión, la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E134 es una paráfrasis de la desarrollada en E54 pues conserva su patrón de inducción matemática débil aunque enfatiza el apoyo deductivo otorgado por el Teorema del Binomio.

Después del establecimiento del Pequeño Teorema de Fermat, a lo largo de E134 se establecen más conexiones entre la divisibilidad y los primos, algunas de las cuales se logran con ayuda de ese teorema. Por ejemplo, en el teorema que le sucede al famoso Corolario 3 del Teorema 3, Euler cumple con un pendiente deductivo dejado en E26:

Teorema 4

> Si ninguno de los números a,b fueran divisibles entre el número primo p, todos los números de la forma $a^{p-1}-b^{p-1}$ serían divisibles entre p. (Euler, 1750:25)

La demostración del Teorema 4 se deriva directamente del Pequeño Teorema de Fermat, pues de él se infiere que p divide tanto a $a^{p-1}-1$ como a $b^{p-1}-1$ y por ende, p divide a $a^{p-1}-1-(b^{p-1}-1)=a^{p-1}-b^{p-1}$. Ahora bien, una inspección exhaustiva del resto del artículo nos proporcionaría una visión más completa sobre de la teoría sobre la divisibilidad y los números primos allí desenvuelta con ayuda del Pequeño Teorema. Llamativamente el mismo tema es abordado desde una diferente perspectiva en el artículo donde Euler ofrece su tercera versión deductiva de la justificación del Pequeño Teorema, la cual a continuación será expuesta.

TERCERA DEMOSTRACIÓN DEL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT EN E262

En el artículo titulado “Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta”, Euler explora a la divisibilidad entre un número primo p y una sucesión geométrica, i.e. una secuencia de potencias a^n. En particular, su teoría se adentra dentro de las potencias en progresión geométrica cuya razón a es prima relativa de p, tal como se asienta desde el primer teorema en E262:

Teorema I.

> 1. Si p es un número primo, y a es primo con p, ningún termino de la progresión geométrica $1,a,a^2,a^3; a^4, a^5,a^6$, etc. entre el número p es divisible. (Euler, 1761:49)

La demostración de este teorema es deferentemente remitida por Euler al Libro VII de los *Elementos*. En la Proposición 24 de ese libro con antelación revisado, se afirma que si a y b son primos (relativos) de otro número, entonces el producto ab también es primo (relativo) de ese número. Luego de invocar a la proposición euclidiana[13], Euler la señala como el medio para extender el cumplimiento de la relación de ser primo-relativo predicada en el primer teorema: "...por lo que si a es primo con p, sea puesto $b=a$; el cuadrado a^2 será primo con p; de ahí también a^3 al poner $b=a^2$; asimismo a^4 al poner $b=a^3$; etc." (Euler, 1761:49)[14]

Después de la reverencia hacia el pasado, Euler comienza con su novedosa preparación de los elementos teóricos que integrarán a su nueva demostración del Pequeño Teorema de Fermat, dentro de los cuales resaltarán por su reiterativo empleo el siguiente teorema junto con su demostración:

Teorema 3.

> 12.Si a es un número primo con p, al formar la progresión geométrica $1,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7$, etc. ocurren innumerables términos que al ser divididos entre p dejan residuo 1, y los exponentes de esos términos una progresión aritmética constituyen.

Demostración.

> Ya que el número de términos es infinito, pero por otro lado los residuos posibles son tantos como p-1, necesariamente muchos, en cualquier caso una infinidad, de términos producen el mismo residuo r. Siendo a^μ y a^ν dos de esos términos, que dejan el mismo residuo r, $a^\mu - a^\nu$ será divisible entre p. Pero $a^\mu - a^\nu = a^\nu (a^{\mu-\nu} - 1)$, y como el producto es divisible entre p, mientras que el factor a^ν es primo con p, necesariamente, el otro factor $a^{\mu-\nu} - 1$ por p es divisible; por ende la potencia $a^{\mu-\nu}$ dividida entre p tendrá el residuo=1. Sea $\mu - \nu = \lambda$, donde la potencia a^λ produce un residuo =1, también cada potencia $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, $a^{5\lambda}$ etc. tendrá el mismo residuo =1. Por consiguiente la unidad será el residuo de cada una de las potencias:
>
> $1;\ a^\lambda,\ a^{2\lambda};\ a^{3\lambda};\ a^{4\lambda};\ a^{5\lambda};\ a^{6\lambda}$; etc. (Euler, 1761:53-4)

[13] Curiosa o erróneamente nombrada por Euler como la Proposición 26 del Libro VII. Por lo que esta numeración podría sugerir que el Euclides leído por Euler, es el de la popular edición de Clavius. En particular, este jesuita agrego algunas proposiciones omitidas por Heiberg en el Libro VII, como la VII.[Clav].Prop.20: " Tres números son proporcionales sii el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio". (Heath, 1908 vol.2: 320) (Clavius, 1574: 262).

[14] Cabe mencionar que esta demostración nos remite a una inducción matemática débil sobre el exponente n de la sucesión geométrica de a's. Su Caso Base (n=2) se establece directamente mediante VII.Prop.24 puesto que a y a ("$b=a$") son primos relativos de p; mientras que para afianzar su Paso inductivo se iguala a b con a a^k (" $b=a^3$; etc") para importar a la hipótesis inductiva (a^k es primo relativo de p) y así otra vez recurrir a VII.Prop.24 para inferir que p es primo relativo de $a^k a = a^{k+1}$.

Una clase residual *r* de *n* es un conjunto de números que al ser divididos entre *n,* dejan como residuo a *r*. De este modo, el Teorema 3 predica algo sobre la clase residual 1 de *p* conformada por elementos de la sucesión geométrica a^n, a saber que sus miembros tienen la forma $a^{n\lambda}$ (i.e. sus exponentes integran una sucesión aritmética con razón λ). Ahora bien, esta clase residual 1 de *p* resulta de sumo interés para el Pequeño Teorema de Fermat pues él afirma que $a^{p\text{-}1}$ pertenece a dicha clase. Mientras que la demostración del Teorema 3 es muy ilustrativa en cuanto que enseña un patrón deductivo explotado al por mayor en E262: suponer que $a^m r$, $a^v k$ representan una misma clase residual por lo que *p* divide $a^m r\text{-}a^v k$; luego factorizar a $a^m r\text{-}a^v k$ en $a^v(a^{m\text{-}v}r\text{-}k)$ para finalmente inferir la pertenencia de $ra^{m\text{-}v}$ a la clase residual *k* de *p* dado que a^v no es divisible entre *p* (Teorema 1). Y como muestra inmediata de su utilidad, este paso es seguido desde el Corolario 3 del presente teorema para mostrar la existencia del λ en cuestión:

> Corolario 3.
>
> 15. A partir de la demostración queda expuesto cómo dar una potencia a^λ con residuo =1, cuyo exponente sea menor que *p*. Si la progresión geométrica hasta el término $a^{p\text{-}1}$ es continuada, porque el número de sus términos es =*p*, es necesario que al menos dos términos, sean a^μ y a^ν , tengan el mismo residuo; de donde la potencia $a^{\mu\text{ -}\nu}$ tendrá el residuo =1, como μ<p y ν<p, cierto será que $\mu\text{-}\nu<p$.(Euler, 1761:54)

Así entonces, λ es un número natural tal que: i) $1<\lambda<p$, ii) *p* divide a $a^\lambda\text{-}1$ y iii) para todo $\mu>0$ tal que *p* divide a $a^\mu\text{-}1$ se cumple que $\lambda<\mu$ (i.e. λ es mínimo)[15]. Ahora bien, la identificación de λ no es un evento fortuito ya que será el exponente protagonista de la demostración del Pequeño Teorema en E262. Más aún como ya fue mencionado, el Teorema 3 es otro de sus componentes estelares, pues que cada término de la sucesión geométrica $a^{n\lambda}$ pertenezca a la clase residual 1 de *p* será un puntal de ella[16]. El siguiente

---

[15] Cabe señalar que es en el Teorema 5 donde Euler por vez primera exige la condición iii) de λ, propiedad de ser mínimo que será también pedida y explotada en el más importante Teorema 7 el cual es expuesto en el cuerpo del texto. El Teorema 5 indica que únicamente los miembros de la subsucesión 1,*a*, a^λ , $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$,... de a^n dejan como residuo a 1 cuando se dividen entre *p*.

[16] Esta afirmación a su vez está sustentada en el Teorema 2 de E262:

> 7. Si la potencia a^μ dividida entre *p* deja como residuo *r*, y la potencia a^ν el residuo *s*, la potencia $a^{\mu+\nu}$ dejará como residuo *rs*. (Euler, 1761:51)

La demostración de esta proposición es relativamente sencilla y consecuentemente no fue expuesta en el cuerpo del texto. Basta con señalar, debido a la relevancia más adelante otorgada a la división, que se esta recurso deductivo sobresaliente para esta demostración es proporcionado por el Teorema 7:

Teorema 7.

27. Sea a^{λ} la mínima potencia de a, que dividida entre el número p, produce un residuo=1, entonces todos los residuos de los términos de la progresión geométrica 1, a^1 , a^2 , a^3 .... $a^{\lambda-1}$ continuada hacia la potencia a^{λ}, serán entre ellos no iguales.

Demostración.

Si por ejemplo, a^{μ} y a^{ν} son dos potencias, cuyos exponentes μ y ν son menores que λ que dan igual residuo, entonces su diferencia a^{μ} -a^{ν} sería divisible entre p, por esa razón la potencia $a^{\mu-\nu}$ dividida entre p dejaría un residuo =+1, por lo que sería que μ-ν<λ, contrario a la hipótesis; de donde se sigue que todas las potencias, cuyos exponentes son menores que λ presentan diferentes residuos. (Euler, 1761:59-60)

En la demostración del Teorema 7 se ratifica de nuevo lo provechoso que resulta el patrón deductivo enseñado en la demostración del Teorema 3, pues por medio de él se llega a un absurdo (λ es y no es mínimo !) si se niega al teorema cuya justificación está en progreso. Por otro lado allí se afirma que los números a^k con $0\leq k<\lambda$ pertenecen a clases residuales entre ellas distintas, lo cual será aprovechado en la demostración del Pequeño Teorema de Fermat al servir para identificar a todas las clases residuales generadas por la división de las potencias de la sucesión geométrica a^n entre el número primo p[17]. Mientras que su utilidad se manifiesta en el asentamiento del siguiente componente de su demostración en E262:

Teorema 10.

37. Si el número de diferentes residuos, que de la división de las potencias 1, a^1, a^2, a^3, a^4 ,a^5, etc. entre el número primo p surgen, es menor que p-1, entonces al menos serán tantos números que no son residuos como los que son residuos.

Demostración.

Sea a^{λ} la potencia mínima, que dividida entre p deja a la unidad, y sea $\lambda<p-1$, el número de todos los residuos diferentes será=λ, por eso menor que p-1. Ya que el número de todos los números menor que p, son =p-1, se muestra al descubierto que hay números que en los residuos no figuran. Digo por otro lado que la cantidad de esos números al menos es =λ. Para mostrarlo, expongamos los residuos mediante

---

proposición se basa sus propiedades. Pues por hipótesis del Teorema 2, tenemos que $a^{\mu} = mp + r$ y $a^{\nu}=np+s$. Por consiguiente, $a^{\mu+\nu} = a^{\mu} * a^{\nu} = mnpp + mps + npr + rs$. Q.E.D.

[17] El Teorema 2 (reproducido en la nota anterior) sirve para sustentar la afirmación de que $1,a,a^2,...,a^{\lambda-2},a^{\lambda-1}$ representan a *todas* las clases residuales de la división de las potencias a^n entre p, pues para cualquier a^n existen m, r tal que $n=m\lambda+r$ con $r<\lambda$ y por consiguiente $a^n= a^{m\lambda+r}$ debido al Teorema 2 pertenece a la clase residual de a^r.

estos términos, de los cuales surgen , 1, a^1 , a^2 , a^3 , a^4..... a^λ cuyo número=λ, estos residuos si son llevados a su forma habitual todos serán menores que *p* y entre ellos serán diferentes. Ya que $\lambda<p$-1 por hipótesis, hay un número dado que no aparece entre estos residuos. Sea *k* tal número; ahora digo que si *k* no es un residuo, ni *ak*, ni a^2k, ni a^3k, etc. ni $a^{\lambda-1}k$ ocurren entre los residuos. Pues sea $a^\mu k$ un residuo surgido de la potencia a^α, entonces será $a^\alpha=np+ a^\mu$k, ó a^α-$a^\mu k=np$, por lo que a^α-$a^\mu k= a^\mu$ ($a^{\alpha-\mu}$-k) entre *p* es divisible. Pero a^μ entre *p* no es divisible, en consecuencia $a^{\alpha-\mu}$-k entre *p* es divisible, por lo que la potencia $a^{\alpha-\mu}$ al dividirla entre *p*, deja al residuo *k*, lo cual se opone a la hipótesis. De donde se muestra que todos los números: *k*, *ak*; a^2k; a^3k; etc....... $a^{\lambda-1}k$ no son residuos. Pero estos números, cuya multitud=λ, son todos diferentes entre sí; pues sean dos, tal como $a^\mu k$ y $a^\nu k$, que coincidan en el mismo residuo reducido *r*, así sería $a^\mu k=mp+ r$ y $a^\nu k=np+ r$, ya que $a^\mu k$- $a^\nu k=(m-n)p$, entonces (a^μ- a^ν)$k=(m-n)p$ sería entre *p* divisible. Sin embargo ni es *k* divisible entre *p*, ya que *p* es un número primo y $k<p$; ni lo será a^μ- a^ν entre *p* divisible, pues al ser $a^{\mu-\nu}$ dividido entre *p*, dejaría la unidad, de lo cual en compañía de $\mu<\lambda$-1 y $\nu<\lambda$-1,se tendría que μ-$\nu<\lambda$, lo que sería absurdo. En consecuencia todos estos números *k*, *ak*, a^2k, a^3k.... $a^{\lambda-1}k$, si se reducen[18] serán entre ellos distintos y su multitud es =λ. Por consiguiente, al menos han sido dados λ números, que no tienen lugar entre los residuos, sólo si se tiene que $\lambda<p$-1.

Corolario 2.

39. Por lo tanto si a^λ fuese la mínima potencia, que dividida entre el número p dejara la unidad, si $\lambda<$ p-1 entonces cierto es, que no es $\lambda>\frac{p-1}{2}$, por consiguiente será $\lambda=\frac{p-1}{2}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{2}$. (Euler, 1761:63-65)

En el Teorema 10 junto con su demostración y en su Corolario 2, se comienza a posicionar otro puntal del Pequeño Teorema de Fermat. En específico, ellos enseñan y empiezan a fincar a la siguiente proposición condicional más adelante enunciada por Euler: si $\lambda<\frac{p-1}{n}$ entonces $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{n+1}$. Este condicional a su vez servirá para establecer que $\lambda=n$(p-1) p.a. número natural *n*, proposición que aunada al Teorema 3, sostendrán al Pequeño Teorema de Fermat en su versión demostrada en E262. Antes de proseguir con el establecimiento de la igualdad $\lambda=n(p-1)$, conviene ahondar en el texto recientemente transcrito, pues debido a lo angular de su colocación en la demostración del Pequeño Teorema, merece una más cuidadosa exposición. Por consiguiente con ánimos aclaratorios, la demostración del Teorema 10 será meticulosamente desembrollada a continuación:

[18] Es decir, la clase residual $a^n k$ se reduce a su representante *r* con $1\leq r\leq p$-1.

Sea a un número primo relativo al número primo p y consideremos a la sucesión geométrica a^n.

Por la definición de λ y por el Teorema 7 tenemos que λ es igual al número de clases residuales obtenidas mediante la división de los términos a^n entre p, las cuales pueden identificarse con cada uno de los siguientes términos: $1,a,a^2,...,a^{\lambda-1}$.

Supongamos $\lambda<p-1$. Entonces existe una clase residual k de p con $1<k<p-1$ que no figura entre las λ previas clases residuales. Considérense a las clases residuales de la división entre p expresadas mediante los siguientes términos: k, ak, a^2k,....,$a^{\lambda-1}\cdot k$.

Ahora bien, cada uno de los términos a^nk con $0\leq n\leq\lambda-1$, representa a una clase residual distinta no sólo con respecto a los otros a^nk sino también con los términos de la sucesión a^i con $0\leq i\leq\lambda-1$.

En primer lugar, si $a^\mu k$ representara a la misma clase residual de $a^\nu k$ con $\mu>\nu$ y $1\leq\mu,\nu\leq\lambda-1$, siguiendo el patrón enseñado en la demostración del Teorema 3, inferiríamos la divisibilidad de $a^{\mu-\nu}k-k$ entre p puesto que p dividiría a $a^\mu k-a^\nu k$, $a^\mu k-a^\nu k=a^\nu(a^{\mu-\nu}k-k)$ y p no divide a a^ν por el Teorema 1. Pero si p divide a $a^{\mu-\nu}k-k$ entonces p tiene que dividir a $a^{\mu-\nu}-1$ puesto que $a^{\mu-\nu}k-k=k(a^{\mu-\nu}-1)$ y p no divide a k. Por consiguiente, $a^{\mu-\nu}$ pertenecería a la clase residual 1 de p, lo cual es un absurdo dada la caracterización de λ ofrecida desde el Corolario 3 del Teorema 3, ya que $\mu-\nu<\lambda$ y consecuentemente, λ no cumpliría con la condición iii) de ser mínima.

En segundo lugar si $a^\mu k$ representara a la misma clase residual de a^α para alguna $\alpha\leq\lambda-1$, siguiendo otra vez el patrón mostrado en la demostración del Teorema 3 inferiríamos que $a^{\alpha-\mu}-k$ es divisible entre p puesto que p dividiría a $a^\alpha-a^\mu k=a^\mu(a^{\alpha-\mu}-k)$ y p no divide a a^μ por el Teorema 1. En consecuencia, k sería la clase residual de $a^{\alpha-\mu}$, lo cual contradeciría la elección de k.

En suma, los números a^i y a^ik con $0\leq i\leq\lambda-1$ representan a clases residuales distintas de p, mientras que los primeros en contraste con los segundos sí refieren a residuos en la división de las potencias de la sucesión geométrica a^n entre p. Como el número total de ambos es igual a λ, entonces al menos existen λ clases residuales de *p* que no desfilan entre los residuos obtenidos al dividir los términos a^n entre *p*. Q.E.D.

La demostración previa además de justificar a su correspondiente teorema, también asegura la satisfacción de su Corolario 2 pues gracias a ella, sabemos que el número de clases residuales del número primo *p* que no aparecen en la división de las potencias a^n entre *p*, es igual o mayor que λ. Por otro lado, el número total de clases residuales de *p* en cuestión es igual a *p*-1 pues no estamos considerando a la del residuo cero dado que *a* y *p* son primos relativos (nótese que *r* tiene que ser distinto de cero para el buen funcionamiento de la demostración del Teorema 10). En consecuencia, si λ fuera mayor que $\frac{p-1}{2}$ entonces la suma de las clases residuales de *p* que aparecen y no lo hacen en la sucesión geométrica a^n sería mayor que *p*-1, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, si λ<*p*-1 entonces $\lambda \leq \frac{p-1}{2}$.

Ahora bien, la demostración del Teorema 10 también indica cómo justificar su versión generalizada junto con su respectivo corolario: si $\lambda < \frac{p-1}{n}$ entonces existen *n* conjuntos de clases residuales que no surgen de la división de los términos a^n entre *p*, cada uno de los cuales tiene al menos λ elementos y consecuentemente, si $\lambda < \frac{p-1}{n}$ entonces $\lambda = \frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda < \frac{p-1}{n+1}$. Curiosamente Euler no se toma la molestia de demostrar esta última proposición general y se conforma con aleccionarnos mediante algunos de sus casos la manera de apuntalarla deductivamente. De este particular modo, Euler enuncia y demuestra la instancia de esta proposición para *n*=2 en el Teorema 11:

Teorema 11.

41. Si *p* fuera un número primo, y a^λ la mínima potencia de a que dividida entre *p* deja a la unidad, si fuese $\lambda < \frac{p-1}{2}$; entonces no puede ser que el exponente λ sea mayor que $\frac{p-1}{2}$; y por esa razón será el caso de que $\lambda = \frac{p-1}{3}$ ó $\lambda < \frac{p-1}{3}$. (Euler, 1761:66)

La demostración de este teorema es análoga a la de su predecesor, por lo que su versión original no será reproducida en su totalidad. En la demostración del Teorema 11 los términos 1, a, a^2, a^3, a^4,..., $a^{\lambda-1}$ otra vez son usados para representar a las distintas clases residuales generadas por la división de los términos de la sucesión geométrica a^n entre p. Ya que por hipótesis $\lambda<\frac{p-1}{2}$, entonces existe un residuo r con $1<r<p$ que no figura en las clases residuales previamente representadas. Luego gracias a ese residuo r podemos expresar las siguientes clases residuales de p: r, ar, a^2r, a^3r, a^4r,...., $a^{\lambda-1}r$. Finalmente si razonamos de manera análoga a la exhibida en la demostración anterior, i.e. recurriendo al patrón deductivo enseñado en la demostración del Teorema 3, podemos inferir que las clases residuales previas son diferentes entre todas ellas y también lo son respecto a las clases a^m con $0\leq m\leq\lambda-1$.

Más aún, dado que el número total de clases residuales de p representadas por los términos a^i y a^ir ($0\leq i\leq\lambda-1$) es igual a 2λ y $\lambda<\frac{p-1}{2}$ por hipótesis, entonces debe existir otro residuo s ($1<s<p$) de la división entre p que no está representado por ninguno de los términos previos. Y tal como se hizo anteriormente con r, empléese s para representar las siguientes clases residuales de p: s, as, a^2s, a^3s, a^4s,...., $a^{\lambda-1}s$. Por lo que siguiendo el plan de la demostración del teorema precedente, para probar al Teorema 11 basta con verificar las siguientes tres afirmaciones:

i) La clase residual a^is es distinta a la clase a^j residual para toda $0\leq i,j\leq\lambda-1$.

ii) La clase residual a^is es distinta a la clase residual a^js para toda $0\leq i,j\leq\lambda-1$.

iii) La clase residual a^is es distinta a la clase residual a^jr para toda $0\leq i,j\leq\lambda-1$.

Las dos primeras aseveraciones pueden justificarse copiando su demostración de la del Teorema 10. Por lo cual, sólo faltaría sustentar a la última afirmación y Euler así lo hace en la demostración del Teorema 11:

> Pues si fuera $a^\nu r=a^\mu s$, sería el caso de que $s=a^{\nu-\mu}r$, o $s=a^{\lambda+\nu-\mu}r$ sólo si $\mu>\nu$, por lo que s estaría contenido en la serie previa contrario a la hipótesis. (Euler, 1761:67)

Es decir, si $a^\nu r$ nombrara a la misma clase residual que $a^\mu s$, entonces recurriendo por enésima vez al patrón enseñado en la demostración del Teorema 3, tendríamos que p

divide a $a^{\nu}r$-$a^{\mu}s$ = $a^{\mu}(a^{\nu-\mu}r$-$s)$ y por consiguiente *p* dividiría a $a^{\nu-\mu}r$-s . En consecuencia, la clase residual de *p* representada por $a^{\nu-\mu}$r (s.p.g. $\nu>\mu$) sería la misma que la etiquetada por *s*, lo cual es un absurdo por la elección de *s*. Por lo tanto, $a^{\nu}r$ y $a^{\mu}s$ representan diferentes clases residuales de *p*.

En suma, los términos a^i, a^ir, a^is (con $0\leq i\leq\lambda$-1) designan a distintas clases residuales de *p* y su cantidad puede calcularse mediante la sumatoria del total de cada uno de esos tres tipos de términos: $\lambda+\lambda+\lambda=3\lambda$. En consecuencia, si λ fuese mayor que $\frac{p-1}{3}$ entonces tendríamos que $3\lambda>$p-1, lo cual es un absurdo dada la cantidad de clases residuales de la división entre *p* aquí consideradas (recordando, estamos excluyendo a la del cero). Por lo tanto, si $\lambda<\frac{p-1}{2}$ entonces $\lambda=\frac{p-1}{3}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{3}$. Q.E.D.

Recapitulando, en la demostración del Teorema 3 se muestra al patrón deductivo maestro, la suposición de que *p* divide al término $a^m r$-$a^v k$ cuya factorización $a^v(a^{m-v}r$-$k)$ permite inferir que $a^{m-v}r$ pertenece a la clase residual *k* de *p* dado que *p* no divide a a^m (Teorema 1), empleado varias veces para justificar al Teorema 10. A su vez la demostración del Teorema 10 señala cómo acudir reiteradamente a ese patrón para justificar la proposición más general: si $\lambda<\frac{p-1}{n}$ entonces $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{n+1}$. Sin embargo como ya fue mencionado, Euler no redacta íntegramente la demostración de esta implicación, sino sólo nos indica cómo hacerlo a través de sus instancias. En el Corolario 2 del Teorema 10 demuestra que si $\lambda<p$-1 entonces $\lambda\leq\frac{p-1}{2}$, mientras que en el Teorema 11 hace lo propio para establecer que si $\lambda<\frac{p-1}{2}$ entonces $\lambda\leq\frac{p-1}{3}$. Luego en el Teorema 12, demostrará su siguiente instancia: si $\lambda<\frac{p-1}{3}$ entonces $\lambda\leq\frac{p-1}{4}$; mientras que en su Corolario 1 afirmará esa implicación para n=4. Finalmente en el siguiente corolario del Teorema 12, por fin se formulará la versión general de la proposición condicional:

Coroll. 2. [del Teorema 12]

46. En general si es conocido que $\lambda<\frac{p-1}{n}$, de igual manera se demuestra que no puede ser $\lambda>\frac{p-1}{n+1}$, por lo que será $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{n+1}$. (Euler, 1761:69)

Las bases deductivas para sostener al Corolario 2 del Teorema 12, llamémoslo simplemente Proposición 46, son sugeridas desde la demostración del Teorema 10 y son expresadas en su cabalidad en la prueba del Teorema 11 a través de las tres afirmaciones de disimilitud entre clases residuales con antelación enumeradas. Basta con cuantificar universalmente a esas tres aseveraciones y con especificar la construcción de las clases residuales para respaldar deductivamente al Corolario 2. Y aunque Euler no haya cumplido con ese par de deductivos requerimientos burocráticos, él sí enseñó el modo de hacerlo como a continuación será completado.

Supóngase que $\lambda<\frac{p-1}{n}$ y defínanse los siguientes conjuntos de representantes de clases residuales de p:

$R_0=\{ a^i r_0$ tal que $r_0=1$ y $0\leq i\leq\lambda-1\}$

$R_1=\{ a^i r_1$ tal que r_1 no está representado en R_0 y $0\leq i\leq\lambda-1\}$

$R_2=\{ a^i r_2$ tal que r_2 no está representado en $R_0\cup R_1$ y $0\leq i\leq\lambda-1\}$

...

$R_n=\{ a^i r_n$ tal que r_n no está representado en $\bigcup_{j=0}^{n-1} R_j$ y $0\leq i\leq\lambda-1\}$

Luego verifíquese el cumplimiento de las siguientes tres aseveraciones:

i) Para todo $a^i r_j$ y para todo a^k con $0\leq i,k\leq\lambda-1$ y $1\leq j\leq n$, se tiene que $a^i r_j$ representa a una clase residual distinta de la clase designada por a^k.

ii) Para todo $a^i r_j$ y para todo $a^k r_j$ con $0\leq i,k\leq\lambda-1$ y $1\leq j\leq n$, se tiene que $a^i r_j$ representa a una clase residual distinta de la clase designada por $a^k r_j$.

iii) Para todo $a^i r_j$ y para todo $a^k r_h$ con $0\leq i,k\leq\lambda-1$ y $1\leq j,h\leq n$ se tiene que $a^i r_j$ representa a una clase residual distinta de la clase designada por $a^k r_h$.

Las demostraciones de las tres afirmaciones previas pueden extraerse con algunos cambios en la notación de las demostraciones de los Teoremas 10 y 11 pues tal como ya ha sido mencionado en varias ocasiones, basta con recurrir reiteradamente al patrón aprendido de la demostración del Teorema 3. De este modo, el patrón deductivo general para respaldar a cualquiera de las tres afirmaciones previas es el siguiente:

Supongamos que $a^i r_j$ representa a la misma clase residual que $a^k r_h$. Entonces p divide a $a^i r_j - a^k r_h$. Pero $a^i r_j - a^k r_h = a^k(a^{i-k} r_j - r_h)$ y como p no divide a a^k (Teorema 1), entonces p divide a $(a^{i-k} r_j - r_h)$. Por consiguiente la clase residual $a^{i-k} r_j$ es la misma que la de r_h, lo cual por las i,k,j,h en cuestión conllevaría alguna contradicción que respaldaría a su correspondiente aseveración. Por ejemplo si $j=0$, $k<i\leq\lambda-1$ y $j<h\leq n$, entonces r_h compartiría la clase residual con a^{i-k}, lo cual entraría en conflicto con la elección de r_h y para eludir a la contradicción, debe ser el caso de que i) para todo $a^i r_j$ y para todo a^k $(0\leq i,k\leq\lambda-1, 1\leq j\leq n)$ $a^i r_j$ representa a una clase residual diferente de la clase designada por a^k. En suma, el patrón enseñado en la demostración del Teorema 3 permite recorrer la vía de la reducción al absurdo para demostrar cada una de las tres afirmaciones que sostienen a la Proposición 46. Por lo tanto, si $\lambda<\frac{p-1}{n}$ entonces $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{n+1}$. Q.E.D.

Después de haber apuntalado deductivamente a la Proposición 46, la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E262 está próxima a su compleción. Pues esta proposición tiene como consecuencia inmediata al Corolario 3 del Teorema 12, ancestro justificativo muy cercano del Pequeño Teorema:

Coroll. 3.

> 47. De ahí se hace evidente que todos los números que no pueden ser residuos son $=0$, ó $=\lambda$, ó $=2\lambda$, o cualquier otro múltiplo de λ: si fueran más números de este tipo que $n\lambda$, entonces otros λ después distinguiría, de donde todos los números que produciría serían $=(n+1)\lambda$; y si todavía hay un número contenido en los no residuos, otra vez distinguiría λ que les seguirían. (Euler, 1761:69)

Es decir, el número de clases residuales de p que no figuran en la división de las potencias a^m entre p tiene que ser igual a $n\lambda$ para algún número natural n. De lo contrario, si suponemos que para todo número natural n el número de esas clases residuales es siempre mayor que $n\lambda$, entonces podemos inferir que su número superará a $p-1$. Y si recordemos nuestra omisión de la clase residual del cero, esta cálculo contradecirá al número de clases residuales de p de antemano fijado en $p-1$.

Con esa contradicción como meta, asumamos que para cierto número k el total de clases residuales no representadas por la sucesión geométrica a^m es mayor que $k\lambda$ y por ende $\lambda<\frac{p-1}{k+1}$. Gracias al proceso de generación de conjuntos de representantes de clases residuales de p descrito en nuestra demostración de la Proposición 46 (el cual fue extraído de las demostraciones del Teorema 10 y 11), podemos obtener otras λ clases residuales diferentes para así obtener un total de $(k+1)\lambda$ de ellas. Expresado de otra forma, si $\lambda<\frac{p-1}{k+1}$ entonces $\lambda\leq\frac{p-1}{k+2}$ debido a la Proposición 46. Y si seguimos creyendo que la cantidad de clases residuales de p no representadas en la sucesión geométrica a^m es mayor a $(k+1)\lambda$, de nuevo podemos construir otras λ clases residuales distintas generando así un total de $(k+2)\lambda$ de ellas. De este modo si continuamos manteniendo esta suposición, eventualmente concluiríamos que el número de clases residuales de p no designadas mediante las potencias a^m sería mayor que p-1!, pues en alguna iteración i de nuestro proceso de generación se producirían $(k+i)\lambda$ clases residuales de p con $(k+i)\lambda>p-1$. Expresado de otra forma, existe un número natural i tal que $(k+i)\lambda>p-1$ mientras que por otro lado gracias a la Proposición 46 tendríamos que $\lambda\leq\frac{p-1}{k+i}$, lo cual resulta contradictorio. Por lo tanto, el total de las clases residuales que no son residuos de la división de las potencias de la sucesión geométrica a^m entre p, es igual a $n\lambda$ para algún número natural n. Q.E.D.

Y como consecuencia inmediata del Corolario 3 del Teorema 12, Euler enuncia al antecedente justificativo del Pequeño Teorema de Fermat en E262, el Teorema 13:

Teorema 13

> 48. Si p fuese un número primo, y a^λ la mínima potencia de a, que dividida entre p deja a la unidad, el exponente λ será divisor del número p-1.
>
> El número ergo de todos los residuos de los divisores es $=\lambda$, por lo que el número del resto de los números menores a p, que no son residuos será$=p-1-\lambda$, pero por (47) ese número es múltiplo de λ, sea $n\lambda$, de esta manera se tendría que $p-1-\lambda=n\lambda$, de donde tendríamos que $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$. Por lo que perspicuo es, que el exponente λ es un divisor del número p-1,...(Euler, 1761: 69)

De acuerdo a lo anunciado, la demostración de este teorema se apoya directamente sobre la Proposición 47 (Cor.3 de Teo.12), la cual a su vez está respaldada por la demostración de la Proposición 46 (Cor.2). En conciso, puesto que el número de clases residuales de p representadas en la sucesión geométrica a^m es igual a λ (Teorema 7) y el número de clases residuales de p en cuestión que no lo son es igual a $n\lambda$ (Prop.47), entonces $\lambda+n\lambda=(1+n)\lambda=p-1$ y por consiguiente, λ divide a p-1. Q.E.D.

Una vez afianzado el Teorema 13, se han apuntalado a todos los componentes justificativos sobre los cuales Euler erige su nueva demostración del Pequeño Teorema de Fermat, el cual por fin es formulado en el siguiente teorema:

Teorema 14.

> 49. Si p fuese un número primo, y a primo con p, entonces la potencia a^{p-1} dividida entre p a la unidad dejará. (Euler, 1761: 70)

El Teorema 14 es una consecuencia directa del Teorema 13 en concomitancia con el Teorema 3 y al ser su demostración tan concisa, su transcripción será omitida. Es decir, el trabajo pesado de la exposición quedó atrás. De este breve modo, la demostración del Pequeño Teorema se articula de la siguiente manera:

En primer lugar por el Teorema 13, existe un número natural n mayor que cero tal que $n\lambda=p-1$.

En segundo lugar, $a^{n\lambda}$ pertenece a la sucesión geométrica $a^{m\lambda}$ $(1, a^{\lambda}, a^{2\lambda},\ldots,a^{n\lambda}, a^{(n+1)\lambda},\ldots)$ cuyos elementos debido al Teorema 3 forman parte de la clase residual 1 de p.

Por lo tanto, p divide a $a^{n\lambda}-1= a^{p-1}-1$. Q.E.D.

El camino deductivo de la demostración en E262 del Pequeño Teorema de Fermat es más largo si lo comparamos con el recorrido mediante inducción matemática en E54 (y E134). Sin embargo el esfuerzo por completarlo tiene la recompensa de que conduce naturalmente hacia un resultado más general fuera de la ruta inductiva previa. Y esta ventaja fue reconocida por el mismo autor de estas demostraciones tal como lo dejó plasmado en su *Scholion* del Pequeño Teorema (Teo. 14) en E262. Entender por qué Euler se decantó por su nueva demostración será la labor que nos mantendrá ocupados a continuación. Y para logarlo, tal como fue mencionado en nuestra introducción, aprovecharemos algunas ideas de Bolzano asociables con la noción de explicación.

4.2 Las afinidades explicativas entre Bolzano y Euler

Los motivos que han impulsado a los matemáticos a plantear diferentes demostraciones de un "mismo" teorema son diversos. Pueden abarcar desde razones estéticas, fines pedagógicos, cuestiones filosóficas, ganancias matemáticas o intereses económicos entre otros. Aquí han sido expuestas tres demostraciones hechas por el mismo autor, Euler, del Pequeño Teorema de Fermat. Entre la demostración en E54 y la de E134 no hay mayores discrepancias en sus patrones justificativos, salvo el orden de su colocación y el énfasis dado al Teorema del Binomio. Ambas demostraciones siguen de una manera u otra una inducción matemática sobre los exponentes de la potencia de un binomio cuya expansión es facilitada por el Teorema del Binomio. El paso del tiempo entre una y otra, el interés por obtener más proposiciones sobre la divisibilidad y los números primos, el cambio de público o el hábito de justificar padecido por los matemáticos[19], quizás provocaron la génesis de la "segunda" demostración en E134. La determinación precisa sobre su origen, al rebasar los alcances y alejarse de las metas del presente estudio, no será realizada empero.

En contraste, la demostración en E262 muestra notables diferencias con respecto a la contenida en E54 (y E134), pues en lugar de erigirse como una inducción matemática sobre las potencias de un binomio, se construye sobre las clases residuales de p. Es más, su autor remarcó su distinción pronunciándose a favor de su nueva creación justificativa en contraposición con su(s) anterior(es) demostración(es) del Pequeño Teorema. Las razones sobre su preferencia serán posteriormente reproducidas y discutidas, conformándonos por el momento con pronosticar su parecido con algunas ideas de otro notable matemático recientemente redescubierto por algunos filósofos interesados en el tema de la explicación en matemáticas, Bernard Bolzano. Así entonces, estas ideas

[19] En el Archivo de Euler (http://www.math.dartmouth.edu/~euler/) se informa que E54 oficialmente fue presentado por Euler a la Academia de San Petersburgo el 2 de Agosto de 1736 y originalmente publicado en *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae VIII* en 1741. Mientras que E134 oficialmente fue presentado a la Academia de San Petersburgo el 2 de Septiembre de 1748 y originalmente publicado en *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae I* en 1750. No obstante, allí también se señala que según el célebre matemático prusiano Carl Gustav Jacob Jacobi, el artículo E134 fue presentado por Euler en la Academia de Berlín el 23 de marzo de 1747.

comunes serán expuestas para depurar su similitud y así prepararlas para su uso en el estudio comparativo que será realizado entre las demostraciones del Pequeño Teorema en E54 y E262. Sobra decir que adentrarnos dentro del pensamiento filosófico de Bolzano y en el interior de su ejecución matemática, es una empresa que requiere más recursos de los que aquí se pueden asignar. En consecuencia, mediante su somera revisión sólo se aspira a conseguir una herramienta de análisis que nos ayude a *explicar* al fenómeno de la multiplicidad de demostraciones acontecido con Euler y el Pequeño Teorema de Fermat.

Bernard Bolzano (1781-1848) fue un filósofo-lógico-teólogo-matemático quien entre otras cosas promovió el rigor dentro de las matemáticas a través de la búsqueda de sus *fundamentos* desde una perspectiva analítica[20]. Ahora bien, su cruzada por el rigor no fue una mera lucha por la certeza tal como usualmente se preconciben las metas de las empresas fundacionales. Es decir, el estándar de rigor en Bolzano no es satisfecho nada más con la certeza, tal como lo hizo notar dentro del ámbito matemático en su distinción entre las demostraciones subjetivas (o "fabricadoras de evidencia"[21] o "certificaciones") y las objetivas (o "científicas" o "fundamentos"). Ambas confieren certeza a sus verdades justificadas, sin embargo las segundas en contraste con las primeras poseen otra cualidad exigida por su estándar de rigor, la cual está señalada en sus siguientes palabras extraídas de su ensayo titulado "Sobre el Método Matemático"[22]:

---

[20] A continuación se transcriben algunos fragmentos introductorios de su ensayo titulado "Sobre el Método Matemático", para darnos una ligera idea sobre el análisis filosófico de Bolzano:

> 5. Las ideas que son completamente simples y sólo tienen un sólo objeto las llamo *intuiciones*. En contraste, las ideas que nos intuiciones en sí mismas, ni contiene alguna intuición como componente, las llamo *conceptos.* (Bolzano, 1833 vía 2004 :51)
>
> 6. Las ideas compuestas en parte por conceptos y en parte por intuiciones las llamo ideas *mixtas*, y de hecho conforme a las circunstancias, serán *intuiciones o conceptos mixtos*, dependiendo si su parte principal es una intuición o un concepto. (Bolzano, 1833 2004 :52)
>
> En particular, aquellas proposiciones cuyos componentes son conceptos puros, las llamo *proposiciones puramente conceptuales* y si son verdaderas, *verdades puramente conceptuales*...Hay ciencias enteras en que fijamos la regla de que todos sus teoremas (incluso todas las proposiciones auxiliares requeridas para su demostración) admitidos deben ser verdades puramente conceptuales. Este es el caso, por ejemplo, de la teoría pura de números, ... (Bolzano, 1833 vía 2004 :52-3)

[21] Este nombre es usado en su "Demostración puramente analítica del teorema: entres dos valores cualesquiera que producen signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación" para menospreciar a las demostraciones que utilizan medios geométricos.

[22] Este ensayo forma parte de la introducción de una obra de Bolzano suspendida por su muerte, *Teoría de las Magnitudes* (*Grössenlehre*), mientras que su traducción al inglés hecha por P. Rusnock y R. George

> Por lo que toda enseñanza que se proclame como *rigurosamente científica*, no sólo debe asegurar la certeza de las verdades que presenta, sino también debe hacer perceptible, hasta el grado que sea posible, la *conexión objetiva* que entre ellas existe...Si somos capaces de reconocer el fundamento objetivo de una proposición a través del mismo medio que nos convence de su verdad, y si uno puede demostrar su verdad precisamente mostrando cómo surge como la consecuencia objetiva de ciertas verdades ya presentadas a nosotros, entonces uno puede unir estos dos procedimientos. Ya que estas consideraciones se refieren a una clase de *demostraciones*, uno puede llamar a estas demostraciones como demostraciones *objetivas* o también como *fundamentos* con tal de distinguirlas de aquellas que sólo cumplen con la primera de las dos cosas...Las demostraciones, por el contrario, que sólo producen convicción sin dar los fundamentos objetivos, uno podría llamarlas como meras *certificaciones* o demostraciones *subjetivas.* (Bolzano,1833 vía 2004: 71)

Así entonces, las demostraciones *rigurosas* también deben mostrar al fundamento objetivo de las verdades por ellas justificadas. Por otro lado Bolzano admite como inspiración de su distinción entre la demostraciones subjetivas y objetivas, a la separación aristotélica entre las demostraciones que muestran con certeza que algo es el caso (οτι) y aquellas que al mismo tiempo enseñan por qué es el caso (διοτι)[23]. Y esta influencia aristotélica nos puede ayudar a identificar la cualidad explicativa de las demostraciones *objetivas,* pues según este filósofo de la antigüedad ellas además de justificar a sus proposiciones también contestarían por qué son verdaderas. Sin embargo antes de abordar a esta clase de demostraciones desde el punto de vista de la explicación, conviene precisar lo que Bolzano entendía por ellas.

De acuerdo a la filosofía de Bolzano, las proposiciones objetivas son independientes de nuestras interacciones psicológicas-lingüísticas-cognitivas con ellas. Pues este filósofo no llama "a una proposición en sí misma o proposición objetiva lo que los gramáticos llaman proposición, a saber, su expresión lingüística, sino simplemente al significado de esta expresión, que exactamente debe ser uno de los dos, verdadero o falso" (Bolzano, 1833 vía 2004: 40). Por lo que la distinción de Bolzano "entre las proposiciones en sí mismas y las proposiciones pensadas (o juicios)", conlleva la separación de "las verdades en sí mismas y las verdades conocidas (o cogniciones)" (ibíd. 69). Una vez manifestada esta escisión, la diferencia para Bolzano entre conexiones *subjetivas* y *objetivas* también ha

---

(2004) es la fuente de nuestras citas en castellano. De acuerdo a estos estudiosos de Bolzano, una copia *Sobre el Método Matemático* fue hecha en 1833 para ser mandada al filósofo Franz Exner (1802-1853).

[23] La fuente aristotélica la revela Bolzano en la Nota 1 encontrada en las páginas 70-71 de la traducción (2004) de su "Sobre el Método Matemático":

sido dejada al descubierto: las primeras las realizamos entre nuestras cogniciones, i.e. algunas verdades conocidas causan nuestro conocimiento de otras verdades, mientras que las segundas de antemano existen entre las verdades en sí mismas, i.e. algunas proposiciones verdaderas en sí mismas están relacionadas justificativamente con otras. De este modo, una demostración es objetiva cuando logra que nuestro conocimiento de su conclusión se base en las proposiciones objetivamente conectadas con ella.

Ahora bien, las demostraciones objetivas no sólo justificarían con certeza a sus respectivas conclusiones, pues al mostrar los fundamentos de ellas, permitirían apelar a ellos para indicar sin nuestra intervención subjetiva, por qué sus conclusiones son verdaderas. Por lo tanto, las demostraciones objetivas podrían considerarse como portadoras de cualidades explicativas. A pesar de lo atractivo que pueda resultar esta identificación de las demostraciones explicativas con las objetivas, su carga filosófica anularía la neutralidad deseada para el marco de nuestro estudio comparativo de las demostraciones eulerianas. Pues para aceptarla, al menos se debe adoptar un realismo semántico (toda proposición matemática es verdadera o falsa con independencia de nosotros) que ya no resulta tan fácilmente admisible[24]. Así entonces, en su lugar serán utilizados algunos indicadores del poder explicativo de una demostración planteados por el mismo Bolzano, sin comprometernos con su sustrato filosófico.

En primer lugar será retomado de Bolzano su revitalización del método axiomático. En particular, este método promueve la revisión en retrospectiva de las conexiones justificativas entre las proposiciones de una teoría, hasta arribar a algunas a partir de las cuales se puede llegar deductivamente al resto de ellas, los principios básicos. En palabras de Bolzano:

[24] Irónicamente la lógica matemática impulsada por el mismo Bolzano (v.gr. su noción de consecuencia lógica -por el llamada relación de deducibilidad- precede a la de Tarski) ha promovido una relativización de la verdad que complica mas no imposibilita, la postura del realismo semántico por él enarbolada. Que la verdad de una proposición (v.gr. la conmutatividad de la multiplicación) dependa de algún modelo de interpretación (v.gr. los números transfinitos discutidos en el siguiente capítulo), corroe la imagen de independencia de la verdad promovida por el realismo semántico. Por otro lado existen otras críticas más duras al realismo semántico basadas en su apego a la ley del tercero excluido, v.gr. las proclamadas por Michael Dummett en varios de sus escritos como *The Logical Basis of Metaphysic (1991). Es decir, se puede dudar con argumentos, v.gr. epistemológicos, sobre la afirmación de que toda proposición matemática sea verdadera o falsa.*

> Pues para cada verdad que tenga aún otro fundamento de su verdad, este fundamento debería ser indicado, y si uno llega a una verdad que no tiene aún otro fundamento, sino solamente sirve como fundamento de otras verdades..., entonces debe mostrarse que ella posee esta notable propiedad y por qué la posee. (Bolzano, 1833 vía 2004: 71)

Así entonces, la búsqueda por los fundamentos de una proposición verdadera se efectuaría no por aislado sino dentro de un contexto teórico del cual ella forme parte, con la meta de hallarlos inspeccionando las conexiones justificativas allí establecidas. Ahora bien, para distinguir en ese rastreo a los fundamentos de otros principios básicos más subjetivos, Bolzano sugiere seguir la pista a continuación transcrita:

> ...es de esperarse por adelantado que el conocimiento del *fundamento* de una verdad nos pondrá en una buena posición para descubrir un número de otras verdades previamente desconocidas. (Bolzano, 1833 vía 2004:70)

De este modo, el incremento en la obtención de resultados sería un indicador de que nuestras conexiones justificativas se originarían en los fundamentos de la teoría. Ahora bien, ya que esta señal es de naturaleza global (pues sería relativa a cierto contexto teórico), podemos refinarla conforme al objeto de nuestro estudio comparativo. Al restringir ese aumento a una demostración, entonces él se manifestaría localmente en una lectura más general de la verdad enunciada en su teorema. Finalmente para Bolzano, una verdad es más *general* cuando “su idea sujeta a predicación o la idea predicada, o ambas son de mayor extensión” (Bolzano, 2004: 79).

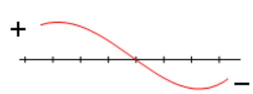
Predicando con el ejemplo, Bolzano nos enseña un aumento de generalidad en su “Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que producen signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación” (*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelleWurzel der Gleichung liege*). En el artículo con el anterior largo título, él incrementa la generalidad del teorema allí mentado a través de la identificación de sus fundamentos en contraste con algunas cogniciones geométricas que sólo nos convencen acerca de su verdad. Expresado con sus palabras, Bolzano nos presenta “una demostración verdaderamente científica, es decir el fundamento objetivo de una verdad válida para todas las magnitudes, estén o no en el espacio”, verdad que “no se puede encontrar en una verdad que solamente es válida para las magnitudes que pertenecen al espacio” (Bolzano, 1817 vía 1964: 137). Mientras que la verdad geométrica por su particularidad desdeñada es que “toda línea continua con una curvatura simple si sus ordenadas son primeramente positivas, después negativas (o al revés), debe necesariamente cortar cualquier parte del eje de las abscisas en un punto situado entre sus ordenadas”[25] (Bolzano, 1817 vía 1964: 137).

Ahora bien, el fundamento para Bolzano del teorema algebraico mentado en el título de su artículo, es la continuidad de la función polinomial (P(x)) que determina a la ecuación (P(x)=0), es decir, su fundamento “es la verdad general que toda función continua de x que es positiva para un valor de x, negativa para otro, debe ser nula para un valor intermedio de x” (Bolzano, 1817 vía 1964: 138). Más aún para que su fundamento propuesto no levante suspicacias, después de haber sido depurado conceptualmente[26], Bolzano lo define de la siguiente manera:

> Una función f(x) varía siguiendo la ley de la continuidad para todos los valores de x situados al interior o al exterior de ciertos límites, no es otra cosa que lo siguiente: si x es cualquiera de tales valores, la diferencia f(x+ω)-f(x) puede volverse más pequeña que cualquier magnitud dada, si se puede siempre tomar ω tan pequeña como se quiera... (Bolzano, 1817 vía 1964:139)

A pesar de lo instructiva que pueda ser su *Demostración Puramente Analítica*[27], no nos adentrarnos mucho en ella pues no es el tema principal de la investigación ahora en curso. El objetivo de citarla era clarificar mediante el ejemplo al aumento de la generalidad como indicativo de que una demostración ha fincado su justificación en fundamentos, por lo que bastará con evidenciar ese incremento. Como primera muestra

---

25 

26 Como la ley de la continuidad es puramente conceptual, entonces Bolzano elimina la intervención del tiempo y del espacio en su definición (p.138-9 de 1964)

27 Dicha demostración posee varias cuestiones de interés, por ejemplo en ella se expone un criterio de convergencia para series parecido a la noción actual del límite de una sucesión (Teorema 7, p.150-2 de 1964). No menos llamativo es el Teorema 12 en cuya demostración se emplea ese criterio de convergencia: “Si una propiedad M no pertenece a toda la magnitud variable x, pero pertenece a todas aquellas que son más pequeñas que cierta u, entonces existe siempre una magnitud U que es la más grande de todas aquellas sobre las que se puede afirmar que todos los valores inferiores x poseen la propiedad M” (p. 153). El Teorema 12 es atractivo no sólo porque es un pilar de la *Demostración Puramente Analítica*, sino también porque es la primera versión conocida de un importante resultado del Análisis Matemático cuyo nombre en parte reconoce la paternidad de Bolzano, a saber, el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

de este ensanchamiento podemos señalar que el dominio de validez del teorema se expande a través de la *Demostración Puramente Analítica* hacia todas las magnitudes y no nada más hasta las geométricas. Es decir, la idea del teorema sujeta a predicación, las magnitudes, tiene una mayor extensión.

Por otro lado, gracias a la *Demostración Puramente Analítica* también hay un aumento en la generalidad de lo predicado. Pues los pasos deductivos de esa demostración le permiten a Bolzano llegar a la siguiente conclusión:

> § 15
>
> *Teorema.-* Si dos funciones de x, f(x) y $\varphi(x)$ varían siguiendo la ley de continuidad ya sea para todos los valores de x o ya sea al menos para todos aquellos que están situados entre α y β; si además $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ y $f(\beta)>\varphi(\beta)$; entonces siempre existe un cierto valor intermedio de x entre α y β para el que $f(x)= \varphi(x)$.
>
> (Bolzano, 1817 vía 1964: 159)

Así entonces, el teorema acerca de la existencia de raíces reales de una ecuación es subsumido por el Teorema 15, el cual tiene como fundamento a la ley de continuidad de las funciones. Y la extensión de lo predicado por este último es mayor que la del primero pues éste es un corolario del otro. Su derivación comienza demostrando que un polinomio P(x) es una función que varía según la ley de la continuidad para todos los valores de x (Teorema 17, ibíd. p.163). Luego, el teorema algebraico afortunado de tener una nueva demostración puramente analítica, afirmaría que existe al menos una raíz real para la ecuación $P(x)=0$ cuando existen α,β tal que $P(\alpha)>0$ y $P(\beta)<0$. Si definimos al polinomio $\varphi(x)$ como la sumatoria de los términos c_ix^i de P(x) para los cuales $c_i\alpha^i>0$ y si construimos al polinomio f(x) con la resta del resto de los términos de P(x), entonces tendríamos que $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ y $f(\beta)>\varphi(\beta)$. Finalmente por el Teorema 15 debe existir una x entre α y β tal que $f(x)=\varphi(x)$. Por lo tanto, esa x sería una solución real de la ecuación $P(x)= \varphi(x)-f(x)=0$. [28]

[28] La exposición de la demostración es una simplificación de la del Bolzano, pues él reconoce dos casos distintos aunque ambos reducibles al exhibido en el cuerpo del texto. Es decir, allí se asumió tácitamente que α, β tienen el mismo signo. Bolzano hace explícita esta suposición para garantizar que $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ y $f(\beta)>\varphi(\beta)$ en el primer caso. El segundo ocurre cuando α, β tienen distintos signos. Pero ese caso es reducible al primero, pues s.p.g. sea $\alpha<0$ y $\beta>0$. Luego Bolzano nos pide que nos fijemos en el valor de P(0). Si $P(0)=0$ entonces 0 es la raíz real cuya existencia es pronosticada por el teorema. Por otro lado si $P(0)<0$ ó $P(0)>0$, entonces se presenta otra vez de dos distintas maneras el primer caso, pues si $P(0) >0$ entonces $\alpha=0$ mientras que si $P(0)<0$ entonces $\beta=0$. (ibíd. , p. 164).

En suma, el aumento de la generalidad ejemplificado por la *Demostración Puramente Analítica* además de mostrar el incremento de la extensión en la idea sujeta a la predicación y en la idea predicada, también enseña que ese crecimiento incluso puede cambiar a la teoría a la cual originalmente pertenecía su teorema. En este caso, un teorema de la teoría de ecuaciones mediante la demostración de Bolzano se convirtió en uno de la teoría de funciones continuas. O expresado con mayor grandilocuencia, un teorema algebraico tornó en un corolario de un teorema más general (Teorema 15) del análisis matemático. De hecho no podemos dejar de mencionar, que Bolzano fue uno de los más notables constructores del sustrato teórico del cálculo, siendo su *Demostración Puramente Analítica* un importante ladrillo para la edificación del análisis matemático. Por lo tanto, el aumento de la generalidad producido por una demostración será considerado como un indicativo de su poder explicativo porque ella ayuda a profundizar dentro del contenido teórico de su teorema ampliando a su extensión.

Se podría objetar en contra de la relación de proporcionalidad previamente promovida entre las ganancias deductivas (sean globales -optimización de resultados obtenidos mediante la enunciación mediante el método axiomático de fundamentos- o locales -mayor generalidad de los resultados-) y el poder explicativo, que parece una unión *ad hoc*. Pues cabe preguntar, ¿por qué se asocian las ganancias deductivas con algo supuestamente distinto a la justificación si su medición se hace también en esos términos? Es decir, las ganancias contabilizadas son más justificaciones de nuevos teoremas y más objetos bajo el influjo de ellos debido a nuevas justificaciones, no más explicaciones ni mayor profundidad de ellas.

Una réplica contra la crítica previa se puede ofrecer con un argumento de tipo abductivo: la mejoría en la comprensión de una teoría (mediante cierta axiomatización) o de un teorema (mediante cierta demostración), es la responsable del incremento de la cantidad o de la extensión de los resultados deductivos, por lo que ambas manifestaciones pueden ser utilizadas como indicador de poder explicativo. En conciso, no hay que confundir efectos (más teoremas, mayor generalidad) con causas (mayor poder explicativo). Mientras que esta réplica abductiva nos parece filosóficamente tolerable para nuestro marco de estudio pues aquí no se ha puesto en duda la existencia de demostraciones explicativas: es una asunción hecha desde la introducción de este capítulo. Más aún, la muestra euleriana extraída de E262 más adelante será expuesta como una evidencia histórica de este parámetro de poder explicativo independientemente de su plausibilidad filosófica.

Otra contestación no menos abductiva se puede plantear al retomar de la filosofía analítica de Bolzano su diferencia entre conexiones objetivas y subjetivas, es decir, las ganancias deductivas serían una evidencia del establecimiento de las primeras y por ende, del asentamiento de le explicación. No obstante, ya que esta respuesta compromete filosóficamente a nuestro marco de estudio, ella será abruptamente acallada. Por lo que nos conformaremos con la razón abductiva en el párrafo previo mencionada: la mejora en la comprensión de un teorema debida a una demostración, puede aumentar la generalidad de dicha conclusión y por consiguiente, este incremento puede ser usado como indicador del poder explicativo de una demostración. Más aún, podemos transitar de la defensa al ataque de regresar la duda, pues ¿cómo puede ser el caso de que se acepte el aumento de la generalidad de un teorema gracias a una demostración sin que ese reconocimiento conlleve una mejoría en su entendimiento? Si al menos esa demostración nos ayuda a comprender que ese teorema es una instancia de uno más general, ¿cómo negar sus poderes explicativos?

En segundo lugar, Bolzano ofreció otra clase de razones para alentar la búsqueda de fundamentos con tal de encontrar explicaciones, clase discernible en sus siguientes palabras:

> Una de las virtudes de una presentación verdaderamente científica es sin duda la circunstancia de que no meramente le indica al principiante el camino que lo llevará a la meta del conocimiento deseado, sino también le permite comprender con cada paso (tanto como sea posible) qué y cómo el camino lleva a esa meta. Para alcanzar esta meta se requiere clarificar cómo será aprovechado un concepto cuando lo definamos; y cuando presentemos las proposiciones, deberíamos indicar no sólo que son verdaderas, sino también cómo es que ellas pertenecen a nuestra ciencia...
>
> (Bolzano,2004: 75)

Por lo que además de ponderar la relación de la explicación con la generación de más conocimiento, también podemos evaluar su participación en el asentamiento y difusión de éste. Al cambiar de fase en el proceso del conocimiento, es decir al pasar de su etapa justificativa a su momento de asimilación, se liberan otras razones de tipo subjetivo para discernir lo explicativo de una axiomatización o de una demostración. Y no debemos olvidar que la explicación en muchas disciplinas de estudio, como las matemáticas, frecuentemente ha perseguido fines didácticos. En consonancia con esta meta, de acuerdo a Bolzano el establecimiento con cierto grado de meticulosidad de las conexiones de cualquier proposición hasta sus fundamentos, desplegaría a una teoría de tal manera que sería más sencillo comprender los caminos deductivos hacia sus teoremas. Por ejemplo, los saltos deductivos típicos de las demostraciones matemáticas pueden provocar ofuscación, sobre todo a los que apenas empiezan a transitar por las diversas vías teóricas de esa disciplina. Mientras que esa confusión puede ser aplanada si se traza con cierto grado de detalle a la ruta deductiva de una demostración, pues al hacerlo los saltos se descompondrían en pequeños pasos deductivos. Por lo que al menos parece plausible que una especificación minuciosa de las relaciones justificativas de una teoría a su vez posea alguna virtud explicativa de naturaleza subjetiva[29].

Por último, la línea terminal de la cita previa de Bolzano, i.e. "indicar cómo es que una proposición pertenece a nuestra ciencia", sintetiza a los parámetros explicativos previamente discutidos. Pues en consonancia con lo anteriormente expuesto, esa inquietud por el sentido de pertenencia puede orientarse hacia la búsqueda de los fundamentos. Es decir, para señalar por qué un teorema forma parte de cierta teoría matemática, podemos inspeccionar en sentido inverso sus conexiones justificativas con tal de evaluar si los enlaces detectados a su vez son elementos de ella. Y esta búsqueda retro-justificativa tentativamente se detendría en los orígenes de las conexiones, sus fundamentos, mostrando así sus virtudes explicativas. Por lo que si llegamos a los fundamentos la duda por la pertenencia quedaría resuelta, debido a que ellos por

[29] Por ejemplo, Kitcher (1981) explora la relación entre rigor y explicación con ayuda del propio Bolzano. Y Kitcher en ese artículo hace bien en advertir que el rigor argumentativo, i.e. la propensión por las inferencias simples, no siempre produce demostraciones con virtudes explicativas. Por ejemplo, la longitud de algunas demostraciones formales pueden ser un impedimento para que ellas incentiven nuestra comprensión. Por lo tanto, la exigencia por el rigor debe moderarse si se desea atribuirle también la obtención de cualidades explicativas, tal como lo intenta hacer Kitcher en su artículo aquí citado.

antonomasia son los miembros típicos de una teoría al servir como los elementos iniciales para su caracterización misma.

Sin embargo el procedimiento anterior para contestar a la pregunta sobre la pertenencia es sólo un bosquejo y no tiene el grado de compleción de un algoritmo. Pues tal como lo admitió pero también enseñó Bolzano en su *Demostración Puramente Analítica*, el rastreo retro-justificativo hacia los fundamentos se realiza "tanto como sea posible" sin que pueda delimitarse por adelantado esa posibilidad. Por ejemplo, Bolzano termina este rastreo en su ley de continuidad, fundamento de su *Demostración Puramente Analítica*, pero ahora nosotros podemos proseguirlo hacia la noción de límite[30]. Por lo que tentativamente bastará con que una demostración construya un camino deductivo hacia su teorema tal que conforme se recorra en sentido inverso aumente (o al menos se mantenga constante) la manifestación de pertenencia a una teoría de sus escalas visitadas, para que ella presuma una virtud explicativa. Qué tan profundo debe resultar ese recorrido para que en el fondo sea explicativo, es algo por averiguarse conforme se descienda por él, tal como lo haremos dentro de la demostración predilecta de Euler para el Pequeño Teorema de Fermat.

Recapitulando, Bolzano fue invocado porque su *Demostración Puramente Analítica* comparte algunas propiedades con la demostración de Euler en E262 del Pequeño Teorema de Fermat. Y si la primera es explicativa, entonces por analogía, la segunda también lo es. Consecuentemente, expusimos algunas ideas de Bolzano para preparar la explicación de por qué la demostración en E262 es explicativa. Además, ellas fueron premeditadamente seleccionadas por su parecido con las razones dadas por Euler sobre su predilección de la demostración en E262. Aunque como pasa con casi toda elección, su ejecución conllevó el abandono de otras ideas, en especial aquellas pertenecientes a su rica pero comprometedora filosofía analítica. Así entonces, las afinidades que serán

[30] Siguiendo la ruta de la objetividad proyectada por Bolzano, ahora fácilmente se podría reconocer que en su definición de continuidad subyace otro concepto, a saber, el de límite. Pues precisamente esa concepto sirve para clarificar las desigualdades en esta definición planteadas, por ejemplo, incorporando al valor absoluto ($|f(x+\omega)-f(x)|$) o centrándola en un sólo punto ($|f(x_o+\omega)-f(x_o)|$) para diferenciarla da la continuidad uniforme.

explotadas en nuestro estudio comparativo son las siguientes: 1)diferencia entre certeza justificativa y entereza explicativa; 2)la manifestación de pertenencia a una teoría (naturalidad) como virtud explicativa y 3)el aumento en la cantidad/ generalidad como indicador del poder explicativo. Adicionalmente a las tres previas concordancias, 4) su suma puesta en contraste entre una demostración explicativa y otras que no lo son, es realizada por ambos matemáticos en sus demostraciones acaparadoras de nuestra atención. Sea ahora exhibida y aprovechada la primera de estas afinidades en el análisis de la muestra euleriana.

En primer lugar, Euler al igual que Bolzano acepta la diferencia entre las demostraciones que justifican con certeza a su conclusión y aquellas que muestran algo más. Para atestiguarlo, podemos citar que desde la promoción inicial de su demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E54, Euler marca una distancia deductiva con el autor de esa conjetura:

> Muchos de los teoremas aritméticos alguna vez propuestos por Fermat pero sin demostración, si fueran verdaderos, no sólo contendrían eximias propiedades de los números, incluso a la ciencia misma de los números, que muchas veces parece exceder los límites del análisis, vehementemente promoverían...Fermat parece que elaboró muchos de sus teoremas sobre números por inducción, la cual como se ve es una vía totalmente única para descubrir propiedades de este tipo. Pero en verdad no es suficiente lo dado por la inducción en este lugar, numerosos ejemplos se pueden declarar; dentro los cuales por otro lado sólo se reportará uno del mismo Fermat que falla en poner un fundamento. Hablo ciertamente del teorema, cuya falsedad ya expuse hace no muchos años, en el cual Fermat asevera que todos los números comprendidos por la forma $2^{2^n} + 1$ son números primos. Por otro lado de la verdad de la proposición la inducción parece brindar suficiente evidencia. (Euler, 1741: 141-2)

Ahora bien, para constatar cómo Euler expuso la falsedad del teorema propuesto por Fermat sobre si son primos todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$, debemos retroceder hasta su ya citado E26. En ese artículo, Euler drásticamente muestra como un contraejemplo puede anular toda la evidencia inductiva de una conjetura recabada hasta el momento previo de su refutación:

> La verdad de este teorema reluce,...para 1,2,3,4; los cuales producen los números 5, 17, 257 y 65537, todos ellos números primos... Pero desconozco el hado por el cual, el siguiente $2^{2^5} + 1$ ciertamente cesa de ser un número primo,... puede ser dividido entre 641, tal como cualquiera tentado puede mostrarlo en seguida... De lo cual puede preverse, que el teorema en otros casos que le siguen incluso falla, y así las cosas el

problema de encontrar un número primo mayor que otro dado en el presente no está solucionado. (Euler,1738:104-5)[31]

Expuesto el contraejemplo n=5 para el fallido teorema de Fermat en E26, Euler en E54 enfatiza que a diferencia de los argumentos inductivos, las demostraciones (o refutaciones) son justificaciones que sí respaldan con certeza a sus teoremas:

> Al considerar todas las propiedades de los números de este tipo, aquellas sólo por inducción respaldadas, seguirán conservando tanta incerteza en sus testificaciones, hasta que se les provea demostraciones apodícticas o sean enteramente refutadas. (Euler,1741:142)

Y si demeritó a los argumentos inductivos en E54, Euler lo hizo para promover la certeza irradiada por las demostraciones (Caso Base, Paso Inductivo) mediante las cuales en ese artículo justifica al Pequeño Teorema de Fermat:

> Pero ahora, después de haber obtenido firmísimas demostraciones mediante mi método, su verdad no está más en duda. Para llegar a la verdad ostentada por los teoremas, que es un método por sí mismo y quizás en otras investigaciones sobre números pueda ser manejado con utilidad, pongo mis demostraciones que explico en esta disertación. (Euler, 1741: 142-3)

Donde el método aludido se delinea con mayor precisión en E134 y ya fue con antelación aquí exhibido, el cual es una aplicación del Teorema del Binomio. Por lo tanto, la certeza es una cualidad reconocida por Euler que brinda la demostración en E54 al Pequeño Teorema de Fermat. En consecuencia, no es de esperarse que la demostración en E262 haya sido por él favorecida debido a su mayor aportación de certeza a la conclusión. Y como lo revela su comentario acerca de esa nueva demostración localizado en E262, la certeza no es una de las razones por las cuales él la prefiere en comparación con la anterior:

> Scholion.
>
> 53. He aquí pues una nueva demostración del eximio teorema, engendrado antes por Fermat, que discrepa extremadamente y por completo de la mencionada en Comment. Acad. Petropol, Tomo VIII. A saber allí se invoca el desarrollo del binomio $(a+b)^n$ en una serie al modo Newtoniano, cuya consideración se aparta no moderadamente de la proposición, aquí la verdad de ese mismo teorema, se demuestra a partir de propiedades de las potencias; por lo cual esta demostración se ve más natural, además otras insignes propiedades acerca de los residuos de potencias cuando se dividen entre números primos

[31] De hecho en E134 , Euler irónicamente aprovecha el allí demostrado Teorema Pequeño de Fermat para volver a refutar a esta conjetura de Fermat en su Teorema 8 . Dicha proposición predica la existencia para el número $a^{2^m}+b^{2^m}$ de divisores con la forma $2^{m+1}n+1$ (Euler, 1750: 32-3)

> se manifiestan. Queda al descubierto que si p fuese un número primo, no sólo la fórmula a^{p-1}-1 entre p es divisible, sino también a veces la fórmula más simple a^{λ}-1 puede ser dividida entre p, y en ese caso el exponente λ es una parte alícuota del exponente p-1.
>
> (Euler, 1761: 71-2)

La transcripción previa es la fuente del interés por el tema de la explicación en la presente investigación. Y lo es debido a que Euler allí señala que su nueva demostración es mejor que la publicada en el Tomo VIII de *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, i.e. E54, porque es "más natural" y porque logra manifestar "otras insignes propiedades acerca de los residuos de potencias cuando se dividen entre números primos". Ambas razones se pueden identificar con algunas de las ideas de Bolzano previamente relacionadas con la explicación y por consiguiente, ella ha sido elegida como parámetro para medir esa reconocida mejoría de E262 con respecto a E54. Así entonces, con la asistencia de Bolzano aquí se está intentado explicar por qué la nueva demostración es explicativa en contraposición con la vieja apodíctica justificación del Pequeño Teorema de Fermat. Persiguiendo tal meta, ahora se discutirá la segunda afinidad entre los trabajos de ambos matemáticos detectada: 2)la manifestación de pertenencia a una teoría (naturalidad) como virtud explicativa.

Euler prefiere a su demostración en E262 por ser más "natural" que la de E54. Confusa o convenientemente, la propiedad de ser "natural" ha captado la atención de no pocos filósofos por lo que una inspección de la literatura especializada podría proveernos de distintas caracterizaciones/interpretaciones que podríamos usar para abordarla. No obstante, en pos de la fidelidad de la lectura de las ideas de Euler sobre ella plasmadas en su *Scholion* y articuladas en su novedosa demostración del Pequeño Teorema de Fermat, se optó por no importar más ideas para evitar mayores compromisos filosóficos (v.gr metafísicos) que pudieran distorsionar la investigación, al menos en su fase dedicada a recopilar evidencias de demostraciones explicativas.

El Pequeño Teorema de Fermat literalmente trata sobre *los residuos entre potencias cuando se dividen entre números primos*. Actualmente dicho contenido puede ser descrito mediante la relación de congruencia modular[32], según la cual *c* es congruente con *b* módulo *a* ($c \equiv b$ mod(a)) si y sólo si *a* divide a *c-b.* Es decir, $c \equiv b$ mod(a) significa que b es el residuo de la división de *a* entre c, por lo que de este modo el Pequeño Teorema asevera que $a^{p-1} \equiv 1$ mod(p) cuando *a* es primo relativo de *p*. Ahora bien, en contraste con E54 en donde sólo se demuestra al Pequeño Teorema de Fermat, en E262 se desarrolla toda una teoría sobre esa relación enfocada a un módulo primo[33] , pues allí "otras insignes propiedades" de esa relación se "manifiestan". Algunas de esas propiedades, aquellas usadas para demostrar al Pequeño Teorema, en la sección anterior ya fueron exhibidas. Con tal de ampliar la visión sobre la teoría desarrollada en E262, a continuación se enumerarán ellas junto con otras más haciendo explícito su contenido relativo a la congruencia módulo un primo:

Sea *p* cualquier número primo y *a* cualquier número natural primo relativo de *p*.

Teorema 1. Para cualquier número natural *n*, $\neg (a^n \equiv 0$ mod(p))

Teorema 2. Si $a^\mu \equiv r$ mod(p) y $a^\nu \equiv s$ mod(p) entonces $a^\mu a^\nu = a^{\mu+\nu} \equiv rs$ mod(p)

Teorema 3. Si $a^\mu \equiv r$ mod(p) y $a^\nu \equiv r$ mod(p) entonces $a^{\mu-\nu} \equiv 1$ mod(p). Además, para cualquier natural *n*, si $a^\lambda \equiv 1$ mod(p) entonces $a^{n\lambda} \equiv 1$ mod(p).

Teorema 4. Si $a^{\mu+\nu} \equiv rs$ mod(p) y $a^\mu \equiv r$ mod(p) entonces $a^\nu \equiv s$ mod(p).

Teorema 6. Si $a^{2n} \equiv 1$ mod(p) entonces $a^n \equiv 1$ mod(p) ó $a^n \equiv -1$ mod(p).

Teorema 7. Si λ es el mínimo natural mayor a 0 tal que $a^\lambda \equiv 1$ mod(p), entonces $\neg(a^i \equiv a^j$ mod(p)) si $1 \leq i,j \leq \lambda-1$ y $i \neq j$...

Teorema 13. El número total de clases residuales distintas que aparecen en la relación de congruencia módulo *p* respecto a las potencias a^n, divide a *p*-1.

Teorema 14. $a^{p-1} \equiv 1$ mod(p)... (Pequeño Teorema de Fermat)

---

[32] Aunque esa relación es casi tan vieja como los trabajos de Euler referidos, pues fue popularizada por Gauss en sus *Disquistiones arithmeticae* (1801), obra fundamental en la Teoría de Números en donde precisamente se retoman algunos de los resultados obtenidos en esa área por Euler (como el teorema protagonista de esta investigación).

[33] Algunas de hecho son propiedades de la congruencia para cualquier módulo, como el Teorema 2 más adelante en el cuerpo del texto expuesto.

Es más, no sólo en lo afirmado por los teoremas sino también en sus correspondientes demostraciones, se puede apreciar el protagonismo de la relación de congruencia en E262. Por ejemplo, la demostración del Corolario 2 (si $\lambda<\frac{p-1}{n}$ entonces $\lambda=\frac{p-1}{n+1}$ ó $\lambda<\frac{p-1}{n+1}$) del Teorema 12 y por consiguiente la del Teorema del 13 (λ divide a p-1) se fundan en esa relación. En particular, el truco algebraico enseñado en la demostración del Teorema 3, el cual es el paso deductivo recurrentemente seguido para fincar al Corolario 2, corolario cuya demostración a su vez muestra cómo probar al Teorema 13, consiste en suponer la congruencia $a^{i}r_{j}\equiv a^{k}r_{j}$ (mod p) para arribar a un absurdo con la forma $a^{i-k}r_{j}\equiv r_{h}$ mod(p) y finalmente concluir que $n\lambda=p-1$.

En suma, el contexto teórico de la demostración en E262 se desarrolla en torno a la relación de congruencia modular mientras que a través de sus propiedades (Teorema 3, Corolario 2 del Teorema 12, Teorema 13) se deduce aquella enunciada por el Pequeño Teorema de Fermat (Teorema 14). Si bien Euler no la denomina con ese nombre, si alude a ella cada vez que dice que un número (p), divide a la resta de otros dos (a^{μ}-r), o cada vez que menciona a los residuos de una división entre un número (primo). Por otro lado, la demostración en E54 se sale de ese contexto teórico al emplear al recurso algebraico del Teorema del Binomio (al igual que la de E134). Así entonces, con respecto a una lectura literal del Pequeño Teorema de Fermat como una afirmación sobre *los residuos entre potencias cuando se dividen entre números primos,* la demostración en E262 sería más "natural" que la contenida en E54.

Expresado con otras palabras, la demostración en E262 es más "natural" ya que muestra por qué el Teorema Pequeño de Fermat es un miembro de cierta teoría de congruencias, es decir, es más natural respecto a esa teoría en donde se interpreta su contenido. Ahora bien, si queremos confirmar su pertenencia a ella entonces debemos seguir en sentido inverso a su ruta justificativa expuesta en la sección previa, para determinar si cada una de sus escalas deductivas es un miembro de esa teoría. Siguiendo esta meta tendríamos que inspeccionar al siguiente camino deductivo: Teo.14→Teo.13→Cor. 2 de Teo. 12 → Cor. 1 de Teo. 12→Teo. 12→Teo.11→Cor. 2 de

Teo. 10→ Teo. 10→ Teo. 7→Cor. 3 de Teo. 3 → Teo. 3→Teo.2→Teo.1. A primera vista la pertenencia de cada una de esos eslabones la conferiría su lectura literal, ya que todas esas proposiciones aseveran propiedades de la relación de congruencia modular. Más aún, la membresía de cada una de ellas se vería ratificada por su respectiva demostración, al reconocer en ella su articulación mediante esa relación.

Si bien el viaje justificativo se puede hacer sin tantas escalas[34], al retroceder por la vía deductiva original se puede apreciar con mayor precisión cada paso de la demostración[35] y se puede distinguir con mayor amplitud a su contexto teórico. Y ambas peculiaridades del viaje dado por este camino justificativo, se convierten en ganancias explicativas al ayudar a contestar por qué el Teorema Pequeño de Fermat. pertenece a la teoría de congruencias desarrollada en E262. Parafraseando a Bolzano, Euler en ese artículo logró "construir un camino que lleva a la meta del conocimiento deseado pero que también permite comprender con cada paso (tanto como sea posible) que y cómo el camino lleva a esa meta...". Más aún, E262 nos "presenta a las proposiciones no sólo señalando cómo es que son verdaderas, sino también cómo es que ellas pertenecen a nuestra ciencia".

Ahora bien, al rastrear hacía atrás a las conexiones justificativas del Pequeño Teorema de Fermat en E262, además de reconocer su pertenencia a su contexto teórico, también podemos emprender la búsqueda hacia sus fundamentos, es decir hacia aquellos principios básicos, v.gr. axiomas o definiciones, sobre los cuales ultimadamente se basa. Con un poco de anticipación, el nombre "moderno" acuñado con antelación para designar al protagonista de la teoría desarrollada en E262, sugiere un posible primer principio de ella. Si la teoría allí desplegada versa sobre la relación de congruencia modular, entonces resulta factible que la definición de esa relación sea un fundamento de ella. Aunque el *definiendum* ($c \equiv b$ mod(a)) de esa relación no se mencione en ese artículo, su *definiens* (a divide a c-b) se utiliza al por mayor en las proposiciones y en las demostraciones de ese

[34] Por ejemplo siguiendo la siguiente ruta discutida en la nota de pie 17: Teo.14 → Cor. 2 de Teo. 12 → Teo. 3→Teo.1.
[35] Por ejemplo la justificación del Corolario 2 del Teorema 12 se llega al revés de los siguientes pasos deductivos: Cor.2 de Teo. 12→ Cor.1 de Teo.12→ Teo. 12→Teo.11→Cor. 2 de Teo. 10→ Teo. 10→ Teo. 7

trabajo. Por lo que la relación dadora del nombre a la teoría en E262, es una candidata respaldada por el contenido de ese artículo, para fungir como fundamento de ella.

Otro candidato a fundamento detectable a través de la delimitación del contexto teórico marcada por el contenido mismo del Teorema Pequeño de Fermat, es la condición de ser primo manifestada ya sea como propiedad de un número (*p*) o como relación entre un par de ellos (*a* es primo relativo de *p*). Y su candidatura es alentada desde el Teorema 1 porque esa condición desde allí participa en la determinación del rumbo deductivo de la teoría ("Si *p* es un número primo y *a* es primo de *p*,..."), alcanzando su mayor grado de influencia en el Teorema 3. En la demostración de ese teorema esa condición asiste al paso deductivo más socorrido en la demostración del Pequeño Teorema de Fermat, impulsando así su postulación a ser fundamento. En suma, sobre la relación de congruencia modular y sobre la propiedad/relación de ser primo parece fundamentarse la teoría desplegada en E262.

No obstante, la búsqueda por el origen justificativo puede no conformarse con sus primeros hallazgos. Los fundamentos a su vez pueden ser cuestionados para investigar si ellos mismos se bastan como respaldo, o si algo más les precede justificativamente. Ahora bien, ya que tanto la relación de congruencia como la relación/propiedad de ser primo se definen mediante la división, es más, debido a que Euler expresa a la congruencia sólo a través de ella (v.gr. "al ser divididos....dejan residuo..."), entonces podemos ahondar sobre la división para proseguir con nuestra indagatoria sobre los fundamentos. Es decir, en lugar de considerar a la división como un término primitivo usado para definir las relaciones de congruencia y ser primo(s), podríamos encontrar en alguna definición o en algunas propiedades de ella, a los fundamentos de la teoría en E262. Así entonces, la teoría sobre la congruencia módulo *p* desarrollada en ese artículo podría considerarse como parte de una teoría más global sobre la división.

Por lo que nuestra pulsión por la determinación del origen justificativo de la teoría en E262, puede obligarnos a profundizar dentro de la división tras la revelación de sus fundamentos. Ahora bien, la división suele definirse mediante otras operaciones aritméticas más sencillas, como la suma o la resta. Por ejemplo, en el Capítulo 2 de la presente tesis se expuso al algoritmo euclidiano, el cual a su vez sirve para determinar a la división (allí llamada medición) como una sucesión de restas[36]. Por lo que sobre estas otras operaciones aritméticas más básicas, podría situarse nuestra búsqueda por los fundamentos de la división. Es más, nuestro rastreo por los fundamentos puede continuar hasta inspeccionar los objetos mismos sobre los cuales se aplican estas operaciones aritméticas básicas, los números naturales, puesto que su definición misma puede respaldarlas. Para ratificarlo, basta con recordar dentro de las obras estudiadas de Peano/Dedekind en nuestro Capítulo 3, a la armonía presente entre su construcción/caracterización secuencial de la clase/sistema de los números naturales y sus definiciones recursivas de las operaciones aritméticas. De este modo, cada vez que nos remontamos más atrás hacia el origen justificativo, proporcionalmente se va ensanchando el contexto teórico determinado por los fundamentos recién encontrados. Por ejemplo, cuando localizamos a los fundamentos en el nivel de los números naturales, entonces la teoría acerca de ellos junto con sus operaciones bien podría considerarse una teoría de números[37], la cual englobaría a la teoría de la división y por transitividad a la teoría de congruencias módulo p desarrollada en E262.

Consecuentemente, la tendencia por retraer cada vez más atrás a los fundamentos, impulsaría la consecución de un mayor número de resultados al ir extendiendo al contexto teórico y por ende, también aumentaría el poder explicativo de las demostraciones que

---

[36] Es decir, mediante restas sucesivas se puede calcular la división entre un par de números naturales excluyendo por contado a la división entre cero. Por ejemplo, para calcular la división de 13 entre 2 podemos ir restándole sucesivamente el segundo al primero hasta arribar a un número menor que 2, el cual sería el residuo, mientras que el número de esas restas realizadas sería el cociente de la división:
13-2= 11 ... 1
11-2=9 ... 2
9-2=7 ...3
7-2=5 4
5-2=3 ...5
3-2=1 ...6
Por lo tanto, 13=6*2+1

[37] Gauss en su obra fundamental de esta rama de las matemáticas, sus *Disquisitiones Arithmeticae,* no la llama con el nombre actual de Teoría de Números, sino como Alta Aritmética para contrastarla con la aritmética elemental (cálculo de operaciones aritméticas como la suma, resta, .., conteo...) y la define como "la parte de las matemáticas que se ocupa de los enteros" (Gauss, 1801 vía 1986:xvii). Ahora bien, dado que en el desarrollo de esta rama han intervenido otras no menos importantes como el análisis o el álgebra, entonces es un sitio muy atractivo para emprender cualquier investigación histórica o filosófica de las matemáticas como la que aquí está en curso, estudio cuyo interés es la explicación.

refieran a ellos según nuestro parámetro de la ganancia deductiva. En conciso, conforme mayor sea profundidad de los principios básicos, mayor será la amplitud de la teoría por ellos englobada y por consiguiente, mayor será la potencia explicativa de ellos. Un ejemplo de esto lo brinda el *Traité* de Pascal, pues los principios constructores del triángulo aritmético y la regla de inducción matemática allí formulados, abarcan deductivamente a diversas aplicaciones como las combinaciones o la expansión de las potencias positivas de un binomio e incluso se proyectan como los fundamentos, de la aritmética misma. Por lo que las demostraciones del *Traité*, al citar a los principios básicos cuya profundidad axiomática maximiza la amplitud de su contexto teórico, hemos de considerarlas como explicativas[38].

No obstante, el descenso explicativo hacia la profundidad de los principios básicos puede chocar contra nuestras capacidades cognitivas, debido al ascenso de la complejidad de las conexiones justificativas dentro del contexto teórico que está siendo ampliado. Por lo que existe una tensión en la búsqueda de los fundamentos, entre el ímpetu por abarcar más y el deseo por comprender mejor. Y esta vicisitud está vinculada con la naturaleza tentativamente inacabada de ese rastreo con antelación mencionada cuando expusimos cómo Bolzano indicó que se hiciera “tanto como sea posible”. Es decir, carecemos de criterios de detención que de antemano siempre nos informen cuándo debemos parar sobre algún fundamento. Afortunadamente, la práctica puede relajar esta tensión. Pues el rastreo retro-justificativo de los principios básicos cuando se ejecuta no prosigue indefinidamente por diversos factores, algunos de ellos a continuación expuestos.

Cuando Bolzano probó a su teoría de la explicación en la práctica mediante la elaboración de su *Demostración Puramente Analítica*, su búsqueda retro-justificativa se

[38] No podemos dejar de admitir el parecido de este parámetro sobre las ganancias deductivas globales con la noción de explicación como *unificación* desarrollada de manera diferente por Friedman (1974) y Kitcher(1989). Ahora bien, ya que por principios básicos entendemos tanto proposiciones primeras como métodos de inferencia, entonces las leyes promovidas por el primero y los patrones argumentativos sugeridos por el segundo como medios para lograr la *unificación* teórica de diversos fenómenos, pueden considerarse integrados en el parámetro discutido. Es decir, la ganancia deductiva global basada en principios básicos (fundamentos) pudiera considerarse hasta cierto somero punto como un indicador del poder explicativo que combina los dos modos de *unificación* planteados respectivamente por Friedman y Kitcher.

detuvo en la noción de continuidad aunque ahora podríamos descender hasta el concepto de límite. Es decir, la falta de una posesión cabal del conocimiento de límite a pesar de que ese artículo haya cooperado en su adquisición[39], frenó en la continuidad su rastreo de los fundamentos. Así entonces, los recursos epistémicos disponibles al momento de buscar a los fundamentos restringen el rango de los posibles hallazgos.

Por otro lado, Euler en E262 desarrolló una teoría de la congruencia modular con el fin demostrar al Pequeño Teorema Fermat y sacar algunas consecuencias de él[40]. En ese artículo él no se propuso hilvanar una teoría más global sobre los números, a pesar de que ese artículo pueda contemplarse como una contribución a ella. Por lo que de acuerdo a los fines perseguidos por Euler en ese trabajo, asumir como primitivas algunas operaciones aritméticas junto con sus propiedades vinculadas con las congruencias modulares entre potencias y primos, es una buena opción para alcanzarlos. Entre estas operaciones primitivas debemos destacar a la multiplicación, pues ella sirve para definir a la relación fundamental de la divisibilidad representada mediante el signo "|": $a|b$ sii $\exists m$ tal que $ma=b$. Mientras que mediante la divisibilidad a su vez podemos definir a las relaciones estelares en E262 de la congruencia modular y de ser primo(s):

- $a \equiv b \bmod (c)$ sii $c|(a-b)$.
- a es primo sii $a \neq 1$ y para todo cd tal que $a|cd$, entonces $a|c$ ó $a|d$.
- a y b entre sí son primos (relativos) sii para todo n tal que $n|a$ y $n|b$, entonces $n=1$.

Más aún, la multiplicación también es útil para determinar a la operación fundamental en E262 de la potencia de un número: $a^n = aaa...a$ [n veces]. Mientras que esta definición a su vez puede aprovecharse para derivar a las leyes de las potencias

---

[39] Como fue mencionado en alguna nota anterior, en el Teorema 7 Bolzano formula un criterio de convergencia para series bastante cercano a la definición actual de límite de una sucesión: Sea $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$,.... las [sucesión de] sumas parciales de la serie $F_i(x)$, si para toda magnitud dada [δ] hay un enésimo término $F_n(x)$ [existe una n] tal que su resta [ahora el valor absoluto de esa resta] con cualquier término posterior $F_{n+r}(x)$ es menor a esa magnitud dada [δ], entonces siempre existe una *única magnitud constante* [ahora llamada límite] al cual se aproximan tanto como queramos los términos de la serie [sucesión] conforme prolonguemos esa serie [sucesión] lo suficientemente lejos (Bolzano, 1817 vía 1964: 156)

[40] Como ejemplo de una de sus consecuencias podemos citar al Teorema 17: Si $a=c^n \pm \alpha p$ y si n divide a p-1, entonces $a^{(p-1)/n} \equiv 1 \bmod (p)$

empleadas en ese artículo por Euler. Por ejemplo, gracias a ella podemos deducir que $a^n * a^m$ = *aaa...a* [*n* veces] *aaa...a* [*m* veces] = *aaa...a* [*n*+*m* veces] = a^{n+m}, i.e. mediante nuestra definición de potencia podemos obtener la siguiente ley de exponentes: $a^n * a^m = a^{n+m}$.

Ahora bien, el carácter fundamental de la divisibilidad y la potencia para el desarrollo de la teoría en E262 se hace patente desde la demostración del Teorema 1[41], aunque se consolida en la demostración del Teorema 3. Pues como ya fue expuesto, en esta última se enseña el paso argumentativo cuyas repeticiones dadas en ese artículo nos conducen hacia el Pequeño Teorema de Fermat: suponer $p|a^m r - a^v k$ para luego factorizar $a^m r - a^v k$ como $a^v(a^{m-v}r-k)$ con tal de inferir un absurdo a partir de que $p|(a^{m-v}r-k)$. Y este paso está respaldado por las definiciones de divisibilidad y potencia basadas en la multiplicación, con la ayuda de algunas propiedades de ella y con la asistencia de otras operaciones aritméticas asumidas también como primitivas. Por ejemplo, la distributividad de la multiplicación sobre la resta, $a(c-d)=ac-ad$, y la ley de exponentes para la multiplicación de potencias, $a^n a^m = a^{n+m}$, sirven para validar la factorización de $a^m r - a^v k$ como $a^v(a^{m-v}r-k)$. Mientras que la satisfacción de $p|(a^{m-v}r-k)$ inferida a partir de la suposición de que $p|\ (a^m r - a^v k) = a^v(a^{m-v}r-k)$, está asegurada por la definición de ser primo dada con antelación en términos de la relación de divisibilidad y por la afirmación establecida por el Teorema 1 de que $p \S a^m$.

Por lo tanto, la divisibilidad y la potencia numérica se perfilan como los fundamentos más plausibles de la teoría en E262, respecto a los fines perseguidos por Euler en ese artículo. Es decir, en lugar de ahondar sobre algunas operaciones aritméticas,

[41] La invocación de Euclides hecha por Euler en la demostración del Teorema 1 demanda una revisión de los *Elementos* para evaluar la función de la divisibilidad en su desarrollo deductivo. La proposición indirectamente citada por Euler es la 24 del Libro VII, la cual afirma que si para los números *A*,*B*,*C* se tiene que $(A,C)=1$ -i.e. *A,C* son entre sí primos- y $(B,C)=1$, entonces $(AB,C)=1$. Su demostración sintetizada puede bastar para corroborar el protagonismo deductivo de la división. Sea $AB=D$ y supongamos por reducción al absurdo que $(D,C)\neq 1$. Por consiguiente existe un número *E* tal que $E|D$ y $E|C$. Como $(A,C)=1$ y $E|C$, entonces $(E,A)=1$ (VII.Prop.23). Dado que $E|D$, entonces existe *F* tal que $D=FE$. Por consiguiente $AB=D= FE$, lo cual aunado a $(E,A)=1$, implicaría que $E|B$ (VII.Prop.20). En consecuencia $(B,C)\geq E>1$ y $(B,C)=1$! Por lo tanto, $(AB,C)=1$. Luego como ya fue expuesto en el cuerpo del texto, Euler aprovecha que $a^n * a = a^{n+1}$ para difundir la falta de divisibilidad provista por VII.Prop.24 para establecer lo predicado por el Teorema 1: si $p \S a$ entonces para todo *n*, $p \S\ a^n$ .En suma, el rol fundamental de la divisibilidad y la potencia, es mostrado desde la demostración del Teorema 1.

v.gr. la multiplicación, para buscar fundamentos más profundos, en E262 se asumen como primitivas con el fin de desarrollar a partir de la divisibilidad y la potencia numérica, una teoría de congruencias cuya meta es la derivación del Pequeño Teorema de Fermat y de algunas de sus consecuencias. Por lo que además de los recursos epistémicos, podemos citar algunas cuestiones intencionales para aliviar la tensión entre la compresión y comprensión de resultados ocurrida en la odisea explicativa del retorno hacia los fundamentos.

De este modo, al pararnos sobre los fundamentos de la teoría de nuestro interés, "estamos en una posición" idónea para impulsar su desarrollo. Es decir, la "naturalidad para cierta teoría" se recalca al "descubrir un número de otras verdades" de ella o al aumentar la generalidad de sus resultados ya conocidos que incluso pudieran sugerir un cambio del contexto teórico al cual ellos pertenecen. Así lo pensó Bolzano y lo mostró en su *Demostración Puramente Analítica*, al establecer el teorema algebraico sobre la existencia de raíces captor de su interés, como un corolario de un teorema más general del análisis matemático sobre el valor intermedio para ciertas funciones cuyo fundamento es la ley de continuidad que ellas siguen. Y así lo hizo también Euler en su demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E262. Expuestas las coincidencias del primero con el segundo respecto a (1)la diferencia entre certeza/explicación y (2)el sentido de pertenencia a una teoría (naturalidad) como una virtud explicativa, ahora se abordará la siguiente relativa (3)al aumento de la cantidad o de la generalidad de los resultados como indicador del poder explicativo de una demostración.

Euler en su *Scholion* además de recalcar la mayor naturalidad de su nueva demostración, también resalta la consecución de "otras insignes propiedades acerca de los residuos de potencias cuando se dividen entre números primos". Desde el principio del camino deductivo construido en E262 que desemboca en el Pequeño Teorema de Fermat, Euler finca otras propiedades de la relación de congruencia módulo un número primo p. Por consiguiente, el aumento de la cantidad de resultados sobre esa relación es directamente promocionado por Euler como otra ventaja de su demostración en dicho artículo. Por lo que según nuestro criterio inspirado por Bolzano, la demostración del

Pequeño Teorema de Fermat en E262 manifiesta su poder explicativo al favorecer la generación de otros resultados sobre la relación de congruencia módulo p.

Por otro lado, Euler en su *Scholion* también presume que "no sólo la fórmula a^{p-1}-1 entre p es divisible, pero también a veces la fórmula más simple a^{λ}-1 puede ser dividida entre p, y en ese caso el exponente λ es una parte alícuota del exponente p-1". Así entonces, su demostración en E262 también fue por él preferida debido a la mayor generalidad del Pequeño Teorema gracias a ella obtenida. Y ese aumento de generalidad promocionado, se consigue al basar esa demostración sobre la divisibilidad y la potencia numérica, pues tales fundamentos facilitan la consecución de otras propiedades de la congruencia modular requeridas para tales fines. En particular, el resultado por Euler en su apostilla promocionado es una consecuencia de las propiedades de la congruencia asentadas en el Teoremas 3 y 13 como ya fue exhibido aunque no enfatizado en la demostración del Teorema 14 (Pequeño Teorema). Recordando, debido al Teorema 13 existe un número natural n tal que $n\lambda=p-1$, por lo que si $n>1$ entonces λ es una parte alícuota de p-1. Mientras que gracias al Teorema 3 se cumple que $a^{m\lambda}\equiv 1 \bmod(p)$ para todo número natural m y en consecuencia, $a^{\lambda}\equiv 1 \bmod(p)$. Por lo tanto, para alguna parte alícuota r de p-1, cuando $r=\lambda$, se satisface que $p|a^{r}-1$. De este modo, el Pequeño Teorema de Fermat establecido en E262 es una generalización del demostrado en E54. Expresado con la terminología de Bolzano, la idea predicada por el Pequeño Teorema en el primer artículo tiene una mayor extensión que la de su correspondiente teorema en el segundo.

Más aun, la demostración en E262 sirve de guía deductiva hacia una mayor generalización, la cual es predicada por el Teorema de Euler-Fermat. Dicho teorema indica que si a es primo relativo de n, entonces $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \bmod(n)$; donde $\varphi(n)$ es una función cuyo dominio son los enteros positivos y cuyo valor es igual al número de positivos menores o iguales que n que son primos relativos de n (v.gr. $\varphi(10)=5$ pues 1,3,6,7,9 son los primos relativos de 10). En particular, si p es un número primo entonces $\varphi(p)=p-1$ y por consiguiente, el Pequeño Teorema de Fermat es un corolario del Teorema de Euler-Fermat.

Ahora bien, la mayor generalidad planteada por el Teorema de Euler-Fermat se alcanza eliminando una de las condiciones para el Pequeño Teorema, a saber ya no se limita a la relación de congruencia a un módulo primo. Al ignorar esa propiedad, el contexto del teorema se expande hacia una teoría de la congruencia módulo cualquier número natural mayor que uno. Ahora bien, es en el artículo titulado "Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata" etiquetado como E271 conforme a la clasificación de Eneström, en donde Euler arriba a tan extenso resultado. Basta con transcribir al Teorema 10 de ese artículo para detectar la injerencia de la demostración de E262 en esta nueva conexión deductiva realizada en E271:

Teorema 10.

> 51. El exponente x^{ν} de la potencia mínima, que dividida entre el número *N* primo con *x* deja a la unidad, o es igual al número de partes primas con *N* o es una parte alícuota de ese número. (Euler, 1763: 99-100)

El Teorema 10 en E271 es el equivalente del Teorema 13 en E262 pues él análogamente establece que si ν es la mínima potencia de *x* que dividida entre *N* deja como residuo a 1 (λ en E262), entonces $m\nu=\varphi(N)$ ($n\lambda=p-1$ en E262) para algún entero positivo *m*. Y el Teorema de Euler-Fermat, enunciado en el Teorema 11 de E271, es probado con ayuda del que le precede, tal como el Pequeño Teorema de Fermat, expresado por el Teorema 14 de E262, se deduce con asistencia del que le antecede:

Teorema 11.

> 55. Si *N* y *x* fueran números entre ellos primos y *n* el número de partes del primero [i.e. $\varphi(N)=n$], entonces la potencia x^n a la unidad siempre deja cuando entre *N* sea dividida. (Euler, 1763: 102)

Si se hiciera más meticulosa la comparación entre E262 y E271, se observaría con mayor nitidez cómo el camino justificativo trazado por el primero sirve para marcar el rumbo del segundo[42]. Sin embargo por más revelador que resulte ese estudio

[42] La demostración del Teorema 10 en E271 es similar a la del Teorema 13 en E262 pues es una consecuencia directa de otra proposición, el Teorema 9, en donde se aplica el truco enseñado desde la demostración del Teorema 3 en E262. Es decir, en la demostración del Teorema 9 se asume que ν , i.e. la mínima potencia mayor que uno que deja a la unidad como residuo, es menor que n donde $\varphi(N)=n$. Por consiguiente existe un residuo α que no figura entre los residuos de la división de la sucesión x^i entre N y mediante él se puede

comparativo, este no será efectuado. El objetivo simplemente era mostrar al aumento de generalidad propiciada por la demostración en E262 del Pequeño Teorema de Fermat con tal de acentuar su poder explicativo, sin importar tanto el grado de precisión de esa ponderación.

Por último, el aumento de la generalidad de un teorema debido a una nueva demostración incluso puede indicar un cambio de su contexto teórico. Por ejemplo, un teorema de la teoría de ecuaciones sobre la existencia de raíces reales mediante la *Demostración Puramente Analítica* de Bolzano fue transportado a una teoría de funciones continuas. Si bien la ruta de la demostración planteada en E262 y prolongada en E271 no cambia a la teoría de congruencia modulo *N* en donde habita la versión general del Pequeño Teorema bautizada como Teorema de Euler-Fermat, sin duda si sugiere su mudanza a otro contexto. Y a estas alturas de la investigación ya no debe ser sorpresivo que el cambio de contexto conlleve el encuentro de otros más profundos fundamentos. En conciso, la demostración en E262 del Pequeño Teorema de Fermat ofrece algunas pistas de por qué ese teorema y su formulación generalizada, comúnmente pueden ser hallados no sólo en un libro de texto sobre teoría de números, sino también en uno relativo al algebra abstracta en sus partes introductorias de la teoría de grupos o de la teoría de anillos.

Por ejemplo, fijémonos en la estructura algebraica de los anillos cuya encarnación más común son los números enteros. Un anillo *R* es una estructura integrada por un conjunto X de objetos sobre los cuales se aplican un par de operaciones binarias que poseen ciertas propiedades. Si representamos mediante los signos "+" y "*" a esas dos operaciones, entre las propiedades que deben cumplir (i.e. sus fundamentos) se enlistan a continuación por completo sólo aquellas relativas a la operación *:

- Cerradura para + y *: Si $u,v \in X$ entonces $u+v \in X$ y $u*v \in X$.
- Asociatividad para + y *: Si $u,v,w \in X$ entonces $u+(v+w)=(u+v)+w$ y $u*(v*w)=(u*v)*w$.

---

construir un conjunto con ν clases residuales que no son generables en esa división, a saber sus miembros son de la forma νr donde r es cada uno de los residuos producidos por la división de la sucesión x^i entre N. Luego sígase el argumento ya expuesto relativo al Teorema 13 de E262 para concluir que $n=m\nu$.

- Existencia de identidad para + y *: Existen $0,1 \in X$ tal que para toda $u \in X$ se cumple que $u+0=u$ y $u*1=u$.
- Leyes distributivas: Para todo $u,v,w \in X$ se cumple que $u*(v+w)=u*v+u*w$ y $(v+w)*u=v*u+w*v$.

Ahora bien, los elementos de un anillo para los cuales además existe un inverso para la operación *, se conocen como unidades. Es decir, u es una unidad de R sii existe $w \in X$ tal que $u*w=1$. Por último, si la operación * es además conmutativa (i.e. u*v=v*u) para todos los miembros de X, entonces R se denomina anillo conmutativo. Después de haber enumerado estos fundamentos de los anillos, podemos abordar con mayor familiaridad al siguiente teorema acerca de ellos:

> Teorema Anular de Euler-Fermat: Si R es un anillo conmutativo que tiene m unidades en total, entonces cada unidad u de R satisface que $u^m=1$.

El bautizo del teorema previo anuncia el cambio de contexto teórico del Teorema de Euler-Fermat y por consiguiente del Pequeño Teorema de Fermat. Es decir, ese teorema es una versión más general perteneciente a la teoría de anillos (en palabras de Bolzano, esta versión aumenta la extensión de la idea sujeta a predicación[43]). Ahora bien, para reconocer a estos últimos como sus corolarios, basta con percatarnos de que la congruencia módulo n sirve para definir a un anillo constituido por las clases residuales de la división entre n. En primer lugar, mediante la división entre n se puede construir una partición de todos los números naturales en n clases residuales, clases que a su vez constituirán al conjunto X del anillo R_n en proceso de edificación.

En segundo lugar, definamos a las operaciones etiquetadas con los signos "+" y "*", con base en las reglas de la aritmética modular para la suma y la multiplicación respetivamente. Obsérvese que la multiplicación módulo n le hereda la propiedad de ser conmutativa a la operación * de R_n y por ende, R_n es un anillo conmutativo. Por último, no es difícil corroborar que estas definiciones de las operaciones + y * satisfacen a todas las

[43] Por ejemplo, no solo es válido para los anillos conmutativos formados por números enteros sino también para aquellos integrados por polinomios con coeficientes enteros.

propiedades pedidas en la caracterización de un anillo, v.gr. podemos fácilmente verificar el cumplimiento por parte de la multiplicación módulo n de los fundamentos de la operación * enlistados con antelación.

Para ejemplificar este proceso de construcción anular, consideremos a la división entre siete para realizar una partición de todos los números naturales con respecto a sus siete posibles residuos: 0,1,2,...6. Así entonces, los números 2,9,16,23,... serían miembros de la clase residual del dos ($2,9,16,23\in[2]_7$) mientras que 5,12,19,26 estarían contenidos en la clase residual del cinco ($5,12,19,26\in[5]_7$). Así entonces, los elementos del anillo R_7 serían $[0]_7,[1]_7,[2]_7,\ldots, [6]_7$. Por otro lado, si se desea determinar qué elemento de R_7 representa a una suma o multiplicación de naturales, podemos hacerlo mediante las reglas de la aritmética modular, i.e. verificando a que clase residual pertenece su resultado. Ejemplos: 19+33=52 y dado que $52\equiv 3 \bmod (7)$ entonces $[19+33]_7=[3]_7$; 5*12=60 y dado que $60\equiv 4 \bmod (7)$ entonces $[5*12]_7=[4]_7$.

Establecido y ejemplificado el vínculo entre la congruencia módulo n y el anillo R_n, ahora es más sencillo derivar a los corolarios del Teorema Anular de Euler-Fermat de nuestro interés. Pues el total de unidades del anillo R_n justamente es igual a la cantidad de residuos de la división entre n que son primos relativos de n, es decir, es igual a $\varphi(n)$. Mientras que el conteo anterior se basa en el teorema donde se afirma que a es primo relativo de n sii $[a]_n$ es una unidad de R_n , proposición cuya ida se justifica mediante el algoritmo euclidiano exhibido en nuestro Capítulo 2[44]. En consecuencia por el Teorema Anular, si a es primo relativo de n, entonces $[a]_n^{\varphi(n)}$ = $[1]_n$. Y la conclusión previa expresada mediante la relación de congruencia no sería otra sino el Teorema de Euler-Fermat, $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \bmod (n)$, proposición cuyo corolario es el Pequeño Teorema de Fermat.

[44] Recordemos que el algoritmo euclidiano nos permite computar dos enteros k,h tal que si d es el máximo común divisor de a y b, entonces $ak+bh=d$. Por lo que si a es primo relativo de n, entonces existen k y h tal que $ak+nh=1$. Por consiguiente, $ak-1=-nh$. Por lo tanto, $ak \equiv 1 \bmod(n)$, i.e. a es una unidad de R_n. El regreso se demuestra percatándonos que si $ax\equiv 1\bmod(n)$, i.e. si a es una unidad de R_n, entonces todo número positivo d que divida tanto a a como a n debe también dividir a 1.Es decir, $ax-1=bn \rightarrow 1=ax-bn=cdx-bdf=d(cx-bf)$. Por lo tanto, a es primo relativo de n.

Más aún, en algunas demostraciones típicas del Teorema Anular de Euler-Fermat[45], se pueden detectar algunos restos deductivos de la demostración del Pequeño Teorema de E262, hallazgos que confirmarían que en ese artículo ya se insinuaba un cambio de contexto de esta última proposición. No obstante, ese descubrimiento no debería parecernos tan inesperado si recordamos que los fundamentos reconocidos en E262, la divisibilidad y la potencia numérica, están definidos por medio de la operación primitiva de la multiplicación. Mientras que el álgebra moderna se ha dedicado a caracterizar estructuras algebraicas mediante operaciones, como la de los anillos en cuya definición participa el equivalente abstracto de la multiplicación, la operación aquí designada mediante el signo "*". Atenuada la sorpresa, podemos sopesar la influencia de E262 en la siguiente demostración usual del Teorema Anular:

1. Sean u_1, u_2,...,u_m las m unidades del anillo R. Sea u cualquiera de esas unidades. Entonces análogamente a lo afirmado por el Teorema 3 en E262 (para toda n, $a^n \equiv 1 \bmod(p)$), podemos demostrar que $u*u_1$, $u*u_2$, $u*u_3$,..., $u*u_{m-1}$ y $u*u_m$ representan completamente a las unidades de R, es decir $uu_i \neq uu_j$ si $i \neq j$ y $1 \leq i,j \leq m$. Pues aplicando el truco enseñado en la demostración del Teorema 3, si suponemos que existe $u*u_i = u*u_j$ con $u_i \neq u_j$, entonces $u*u_i - u*u_j = u*(u_i - u_j) = 0$ por la ley distributiva de *. Así entonces, dado que u es una unidad entonces, $u \neq 0$ y por consiguiente $(u_i - u_j) = 0$. En consecuencia $u_i = u_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $u*u_1$, $u*u_2$, $u*u_3$,..., $u*u_m$ representan a todas las unidades de R.
2. Por el paso previo, para cada u_i existe una u_j tal que $u_i = u*u_j$. En consecuencia, $(u*u_1)*(u*u_2)*(u*u_3)*...*(u*u_m) = u_1*u_2*u_3*...*u_m$.
3. Como R es un anillo conmutativo, entonces podemos realizar las siguientes factorizaciones: $(u*u_1)*(u*u_2)*(u*u_3)*...*(u*u_m) = u^2*(u_1*u_2)*(u*u_3)*...*(u*u_m) = u^3*(u_1*u_2*u_3)*...*(u*u_m) =...= u^m *(u_1*u_2*u_3*...*u_m)$. Entonces por el paso 2, se

[45] Es decir, en una demostración localizable en un libro de texto introductorio al álgebra, como el de Ronald S. Irving titulado *Integers, Polynomials and Rings* (2004).

cumpliría que $u^m *(u_1*u_2*u_3*...*u_m)=u_1*u_2*u_3*...*u_m$. Y como cada u_i es una unidad, entones podemos ir efectuando las siguientes cancelaciones:

$$u^m *u_1*u_2*u_3*...*u_{m-1}*u_m*u^{-1}{}_m=u_1*u_2*u_3*...*u_m*u^{-1}{}_m$$

$$u^m *u_1*u_2*u_3*...*u_{m-1}*u^{-1}{}_{m-1}=u_1*u_2*u_3*...*u_{m-1}*u^{-1}{}_{m-1}$$

$$u^m *u_1*u_2*u_3*...*u_{m-2}*u^{-1}{}_{m-2}=u_1*u_2*u_3*...*u_{m-2}*u^{-1}{}_{m-2}$$

...

$$u^m *u_1*u_2*u^{-1}{}_2=u_1*u_2*u^{-1}{}_2$$

$$u^m*u_1*u^{-1}{}_1=u_1*u^{-1}{}_1$$

$$u^m=1 \qquad\qquad \text{Q.E.D.}$$

Aunque una medición precisa de la aportación de Euler en el desarrollo de la teoría de grupos[46] o de anillos hecha desde E262 y E271 no fue aquí realizada, al menos si fue mostrada la existencia de ella. Y esa exposición sirve como evidencia a favor de la afirmación de que el aumento de la generalidad posibilitado por una demostración explicativa, puede llegar a cambiar el contexto teórico, como la *Demostración Puramente Analítica*, o al menos sugerir esa mudanza, como la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E262. Respaldada esta aseveración, damos por terminada la discusión respecto al punto de intersección entre Bolzano y Euler sobre (3)el incremento de la cantidad o generalidad como indicativo del poder explicativo de una demostración.

Recapitulando, algunas ideas de Bolzano relacionables con la explicación en las matemáticas junto con su aplicación en la *Demostración Puramente Analítica* fueron expuestas para su empleo en el reconocimiento de las cualidades explicativas de la demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E262. Mientras que su selección de antemano fue propiciada por su sintonía con algunos planteamientos manifestados por Euler en E262. En particular, (2)el sentido de pertenencia a una teoría (naturalidad) y (3)el

[46] Con respecto a la teoría de grupos, su relación con E262/E271 puede ser establecida si nos percatamos de que los residuos de la división entre m que sí figuran en la división de los términos a^n entre m forman un grupo bajo la división módulo m. De este modo, la noción de clase lateral de un grupo puede ser vinculada con las demostraciones eulerianas. En particular, esa noción está ligada al procedimiento mostrado en la demostración del Teorema 10 de E262 de escoger un residuo r de la división entre p no perteneciente a las clases residuales $[k]_p$ (o clases laterales $k+n\mathbb{Z}$) que si figuran en la división de a^n entre p para generar otras $r[k]_p$ clases residuales (o laterales $rk+n\mathbb{Z}$).

aumento de generalidad/cantidad son identificables en las obras revisadas de ambos matemáticos como parámetros para determinar si una demostración es explicativa o no. Además, ambos autores reconocen que (1)la certeza brindada por una demostración no basta para que ella sea explicativa.

Por último, la analogía entre Euler y Bolzano se ve fortalecida al contemplar cómo es que (4)ambos contraponen algunas demostraciones mediante las cualidades explicativas mencionadas. Euler menosprecia a su demostración en E54 en comparación a la contenida en E262 mientras que Bolzano arremete contra el "método de demostración más corriente"[47] del teorema sobre la existencia de raíces reales probado en su *Demostración Puramente Analítica*. Ninguno de los dos niega que las demostraciones desdeñadas respalden con certeza a sus respectivos teoremas. Su desdén se centra alrededor de las proposiciones sobre las cuales se basan las demostraciones minimizadas: Bolzano explícitamente se queja de una proposición geométrica mientras que Euler implícitamente reniega del Teorema del Binomio.

Ahora bien, las razones por ellos ofrecidas para respaldar esa minusvalía coinciden en la optimización de la cantidad y generalidad de los resultados deductivos obtenidos al fincar sus demostraciones captoras de nuestra atención en otros principios, los llamados fundamentos. De este modo, la ley de la continuidad para Bolzano y la divisibilidad junto con la potencia numérica para Euler, les permite a cada uno desarrollar en un fructífero nicho teórico a los respectivos teoremas de su interés. Consecuentemente, las demostraciones apuntaladas en esos otros principios fueron reconocidas por sus autores como mejores, mientras que aquí se interpretó esa mejoría como un aumento de su calidad explicativa.

Para finalizar este capítulo, enlistaremos algunas conclusiones de nuestros estudios comparativos entre Euler y Euler, entre Euler y Bolzano, para terminar de afrontar el problema que los originaron: la depreciación de la inducción matemática a pesar de su rol constitutivo-justificativo desempeñado en las axiomatizaciones de la aritmética al estilo

[47] Bolzano indica que la frecuencia ha sido medida en las demostraciones de "Kästner, Clairault, Lacroix, Metternich, Klugel, Lagrange y muchos otros" (Bolzano, 1817 vía 1964: 136-7)

Pascal-Peano-Dedekind, causada por la baja estimación de algunas demostraciones seguidoras de esa regla para ciertos teoremas que hacen mención de los números naturales. Compensatoriamente, también indicaremos por qué las demostraciones hechas mediante su respectiva regla de inducción dentro de estos desarrollos teóricos son explicativas; lo cual nos asistirá en la postulación de esta regla como un fundamento de la aritmética.

4.3 Conclusiones y explicaciones

- La demostración del Pequeño Teorema de Fermat en E262 indica por qué él forma parte de la teoría de congruencias aludida por la misma proposición ($a^{p-1}\equiv 1$ mod(p)...). Es decir, la demostración en E262 va asentando la justificación del Pequeño Teorema sobre algunas propiedades de las congruencias modulares (v.gr. si $a^{\mu}\equiv r$ mod(p) y $a^{\nu}\equiv r$ mod(p) entonce $a^{\mu-\nu}\equiv 1$ mod(p)) hasta terminar su cimentación sobre la divisibilidad y la potencia numérica, par de fundamentos que ultimadamente determinan el contenido de dicha proposición (v.gr. $a\equiv b$ mod(c) sii $c|(a-b)$).
    - Expresado con la terminología manejada por Euler o por Bolzano, la demostración en E262 es más natural y apuntala un resultado más general que la demostración hecha por inducción matemática en E54. Es más natural no sólo porque se basa sobre propiedades de la relación protagonista de la teoría a la cual hace referencia el Pequeño Teorema, sino también porque logra conectar justificativamente a dicha proposición con el par de fundamentos de su contexto teórico, la divisibilidad y la potencia numérica. Y a su vez el reconocimiento de estos últimos como tales, se debe a la mayor generalidad gracias a ellos conseguida para el Pequeño Teorema en E262.
    - O indicado en el sentido inverso, la demostración en E54 es menos natural que la desplegada en E262. Y esta baja valoración a primera vista se puede atribuir a su empleo del Teorema del Binomio junto con su seguimiento de una inducción matemática. Pues en lugar de incorporar íntegramente a

todo lo afirmado por el Pequeño Teorema, la demostración en E54 se concentra en las potencias por esa proposición aludidas (a^n), para luego invocar al Teorema del Binomio y así poder ejecutar una inducción matemática.

- Sin embargo debido a nuestro reconocimiento de la profundidad variable de los fundamentos, esta evaluación sobre la baja naturalidad de E54 a su vez aceptaría una réplica por su aparente superficialidad. Pues se puede argumentar, con la asistencia de nuestros Capítulos 2 y 3, que la inducción matemática es la vía más natural para demostrar proposiciones sobre los números naturales y en consecuencia, la demostración en E54 no debería recibir una calificación tan mala respecto a este atributo. Es decir, podemos considerar que la demostración en E54 sitúa con mayor profundidad a los fundamentos del Pequeño Teorema, alcanzado a la caracterización misma de los números naturales y de sus operaciones, entre ellas las potencias sobre las cuales dicha justificación se centra. Para fomentar esta reivindicación, recordemos que la potencia en las axiomatizaciones de la aritmética al estilo Peano-Dedekind se define en sintonía con la inducción matemática ($a^{n+1}= aa^n$ y $a^0=1$) y que la expansión de las potencias de la suma de un par de números, se enseña justificable mediante esa regla desde el *Traité* de Pascal.
  - No obstante, la demostración del Pequeño Teorema en E262, nos ofrece otros elementos para apuntalar la ponderación negativa de su demostración hecha por inducción matemática en E54. Pues como ya fue exhibido, la demostración en E262 junto con su generalización en E271, nos sugieren ubicar a los fundamentos del Pequeño Teorema más abajo de la aritmética dentro del álgebra

moderna. Es decir, los números naturales, en específico sus clases residuales referidas por el Pequeño Teorema, sirven para ejemplificar un resultado más general sobre ciertas estructuras algebraicas, como el Teorema de Euler-Fermat para los anillos conmutativos. En consecuencia, si se buscan fundamentos más profundos que la divisibilidad y la potencia numérica para el Pequeño Teorema de Fermat, en lugar de hacerlo dentro los principios aritméticos como la inducción matemática, resulta más fructífero y por ende más natural encontrarlos en las cláusulas que caracterizan a las estructuras algebraicas de su contexto teórico más general, como las previamente enumeradas sobre los anillos conmutativos.

  - Por lo tanto, la demostración en E262 ofrece una explicación del Pequeño Teorema de Fermat, mientras que su demostración en E54 sólo brindaría una justificación de esa proposición cuya certeza no es dudada por su autor, empero.

- Inspirados en Euler y Bolzano, la naturalidad y el incremento de las ganancias deductivas (global -ampliación del contexto teórico- o local -incremento de la extensión de un teorema-) pueden postularse como parámetros interdependientes para detectar el poder explicativo de una demostración. Interdependientes puesto que por aislado, estos parámetros podrían no ser suficientes para asentar lo explicativo en una demostración. Por ejemplo, los incrementos deductivos triviales - v.gr. el aumento de la extensión de cualquier teorema $T(x)$ obtenido mediante la introducción de la disyunción $T(x)\vee\forall x(x=x)$- y las segregaciones prejuiciosas -v.gr. rechazar en la teoría de números toda intervención del álgebra o del análisis por su falta de naturalidad- al atentar cada uno de ellos en contra de la consecución misma de conocimiento matemático significativo, inhibirían al reconocimiento de su rasgo explicativo.

- Nótese que la evaluación de las cualidades explicativas de una demostración bajo este par de indicadores no se plantea realizable por aislado; i.e. su medición debe efectuarse dentro de algún contexto teórico. De lo contrario este par de criterios perderían su sentido, v.gr. ¿cómo ponderar las ganancias globales sin demarcar la teoría en expansión?
    - Obsérvese también que el contexto teórico no está de antemano permanentemente fijado por el contenido del teorema cuya demostración se examina. Pues en las demostraciones aquí mostradas como paradigmáticamente explicativas, la *Demostración Puramente Analítica* y la demostración del Pequeño Teorema en E262, ocurre o se sugiere un cambio de contexto respecto al cual se pensaba que pertenecía su correspodiente teorema. La primera muda un teorema algebraico al análisis matemático, mientras que la segunda insinúa el traslado de una proposición de la teoría de números al álgebra moderna.
        - Por lo tanto, la guía para detectar lo explicativo de una demostración mencionada desde la introducción del presente capítulo, *una demostración es explicativa si además de asegurar el cumplimiento de su teorema, también indica cómo es que él pertenece a su teoría,* no es una cuestión trivialmente contestada por el contenido mismo de su respectivo teorema. Expresado de otra manera, un teorema está vacío fuera de una teoría pero incluso dentro de alguna de ellas, su contenido puede permanecer abierto.
        - Mientras que la manera aquí propuesta para seguir dicha guía, está basada en la revitalización del método axiomático promovida aunque comprometida por algunos planteamientos metafísicos de Bolzano. Aquí nos desprendimos en la medida de lo posible del atractivo pero inquietante matiz filosófico-analítico dado por Bolzano al rastreo retro-justificativo de los fundamentos y nos conformamos con señalar al incremento de las ganancias deductivas

como indicador de su encuentro. Expresado de otra manera, para avanzar por la guía propuesta para detectar demostraciones explicativas, sugerimos aprovechar un método axiomático de carácter pragmático afín a nuestra caracterización mínima de una axiomatización presentada en el Capítulo 3, método según el cual los principios básicos (fundamentos) no son absolutos y son reconocibles más por los fines (consecuencias) que fomentan y menos por su carácter inherente (v.gr. proposiciones autoevidentes, apodícticas,...) de principios. Este punto luego lo retomaremos en la sección final de nuestra tesis.

- Ahora bien, dado que alguna inducción matemática (débil) fue reconocida como un primer principio dentro de las teorías aritméticas cuyo desarrollo fue precedido por el *Traité* de Pascal, entonces por lo escrito previamente sobre el empleo del método axiomático para la búsqueda de virtudes explicativas, resulta esperable allí hallarlas para este método de justificación. Es decir, las demostraciones dentro de estos contextos teóricos que siguen a sus respectivas formulaciones de esta regla, plausiblemente satisfacen a los parámetros de la naturalidad y del incremento de ganancias deductivas. Por consiguiente, estas demostraciones tendrían cualidades explicativas y consecuentemente, la inducción matemática (débil) podría ser considerada como un fundamento de la aritmética bajo nuestra acepción de esta noción inspirada en Bolzano.
  - Por ejemplo, las demostraciones de las proposiciones en el *Tratado del Triángulo Aritmético* que fueron maquiladas mediante la inducción matemática versión Pascal (regla IMP), como la de la Consecuencia Duodécima, satisfacen notoriamente el requisito de la naturalidad. Pues su base justificativa y su modo de conectarla a ella, son los principios básicos reconocidos en esa axiomatización: los principios constructores del contenido aritmético de los triángulos (postulados R) y la regla de inferencia IMP respectivamente. Mientras que los postulados R al propiciar

la aplicación de la regla IMP, vuelven fructíferas a las demostraciones hechas según ese método en cuanto que ellas enseñan un medio para justificar un sinnúmero de propiedades de los triángulos aritméticos. Es decir, en el Capítulo 2 vimos que no sólo la Consecuencia Duodécima sino todas las demás proposiciones teóricas en el tratado, son susceptibles de ser demostradas mediante la inducción formulada por Pascal, garantizando así la potencia de esta regla para incrementar las ganancias deductivas. Por lo tanto, tenemos el derecho de considerar a la inducción matemática como un fundamento, en el sentido explicativo orientado por algunas ideas de Bolzano, de la teoría en el *Tratado del Triángulo Aritmético.*

- En suma, las teorías aritméticas que construyen o caracterizan a los números naturales conforme a alguna regla de inducción matemática (débil), son aquellas cuyas demostraciones hechas por este método son tanto naturales como fecundas y por ende explicativas. En los *Principios de la Aritmética* de Peano y en el *Qué son los números* según Dedekind, el conjunto *N* junto con las operaciones aritméticas están determinadas de un modo acoplado con su respectiva formulación de la inducción matemática, por lo que la naturalidad de las demostraciones allí seguidoras de esa regla, provendría de la constitución misma de sus objetos teóricos. Más aún, en ese empalme constitutivo-justificativo se gestaría la fecundidad deductiva de las demostraciones allí hechas por inducción matemática, pues como vimos en los dos capítulos anteriores, dicha compaginación facilita y valida la aplicación de esta regla de justificación. Por lo tanto, la inducción matemática es un fundamento, bajo su acepción basada en Bolzano, de las teorías aritméticas precedidas por el *Traité* de Pascal.
- En conclusión, cuando se pueda reconocer en los principios básicos de una teoría un acoplamiento entre la caracterización o construcción de sus objetos y los métodos para justificar propiedades acerca de ellos, entonces allí podemos anticipar el encuentro explicativo de fundamentos, pues

podemos esperar que la naturalidad y el incremento de ganancias deductivas sean proporcionadas por ese armonioso empalme.

- Por último, la depreciación explicativa de la demostración en E54 resaltada a través de su comparación con aquella ubicada en E262, puede incluso pronosticarse analizando cuidadosamente a su articulación y al teorema que le otorga su justificación. Pues tal como ya fue señalado, la inducción matemática en E54 se sigue a lo largo de la base (n+1) y no del exponente primo (p) de los potencias $(n+1)^p$ cuando se prueba que a^p-a es divisible entre p, si a es primo relativo de p. Y esta selección del índice sobre el cual se propaga la inducción matemática, nos remite a la dificultad admitida por Euler desde E26 sobre la naturaleza prima de los exponentes. La inducción matemática (débil) no es una regla propicia para justificar proposiciones sobre los números primos puesto que la existencia del primo sucesor de otro primo, aunque esté garantizada por el buen orden de los números naturales[48], no está constructivamente especificada por el primo (o primos) anterior(es) y por ende, la ejecución del Paso Inductivo se dificulta. Sobre esta cuestión ahondaremos en nuestro próximo capítulo cuando estudiemos al Buen Orden dentro del contexto teórico donde esta noción se consolidó, la teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor. Allí confrontaremos al Buen Orden con la inducción matemática para determinar quién es quién dentro de los principios básicos de la aritmética. Por lo que a manera de conclusión aquí sólo nos concentraremos en proponer una posible causa de la baja calidad explicativa de algunas demostraciones hechas por inducción matemática:
    - Para las proposiciones que hagan mención de números primos o de los elementos de cualquier otro subconjunto de números naturales cuya

[48] En la demostración euclidiana acerca de que hay más números primos que cualquier multitud (finita) de ellos (IX.Prop.20), se enseña que para cualquier número primo p_n debe existir un primo p^* mayor que él . Pues el número 2*3*5*...*p_n +1 es primo o no lo es y por consiguiente, debido a VII.Prop.31 (todo número compuesto es medido por algún primo) existe un número primo p^* que lo mide. Ahora bien, p^* es distinto a todos los primos menores o iguales a p_n ya que de lo contrario, p^* mediría a la unidad! Por lo tanto, el conjunto de los números primos mayores que p_n no está vacío y por el Principio de Buen Orden, debe existir un número p_{n+1} que sea el sucesor inmediato de p_n. La identidad de p_{n+1} es un misterio que debe ser resuelto caso por caso, empero.

generación no está completamente especificada de manera secuencial, la inducción matemática puede ser un medio deductivo poco fructífero debido a la indeterminación constructiva de sus miembros sucesores. Además dicha regla puede guiar una demostración poco natural, cuando alguna de ellas resulte pertenecer a un contexto teórico distinto al aritmético por lo que su formulación numérica, sólo sería una instancia (o corolario) de alguna proposición de esa otra teoría. Por lo tanto según nuestro criterio propuesto, la posible baja productividad o naturalidad de las demostraciones hechas por inducción matemática para esas proposiciones donde figuran subconjuntos de números naturales constructivamente incómodos, auguraría su baja calidad explicativa.

Capítulo 5: La Inducción Matemática y el Buen Orden

5.0 Introducción

En los Capítulos 2 y 3 desfilaron algunas teorías que usaban a la inducción matemática para la construcción o caracterización de sus objetos protagónicos, así como también para el desarrollo deductivo de las propiedades de estos. Desde el *Traité* de Pascal pasando por los *Arithmetices Principia* de Peano hasta el *Was Sind die Zahlen* de Dedekind, se mostró cómo en todas estas obras se enunciaba algún método de demostración perteneciente a la familia de la inducción matemática, en particular a su descendencia débil. Además se reveló que en todas ellas la construcción o caracterización de sus objetos teóricos, estaba en sintonía con su correspondiente formulación de la inducción débil: los principios R de los triángulos aritméticos con la regla IMP; los axiomas P1,P6-P8 de la clase de los números naturales con el método codificado en P9 y las cláusulas α, β,γ, δ del sistema simple infinito con la inducción completa. Finalmente, tal armonía concertada mediante la inducción matemática dentro de esas teorías entre la constitución y la justificación, fue reconocida como endémica de las axiomatizaciones de la aritmética centradas en la estructura *ordenada* de los números naturales. Es decir, Pascal caracteriza a la secuencia de los triángulos aritméticos T_1, T_2, T_3,...; Peano construye a la clase N= {1, 1+1, (1+1)+1,.. } y Dedekind determina al sistema simple infinito N={1, $\varphi(1)$, $\varphi(\varphi(1))$,... }, en concordancia con el *orden natural* de los números naturales: $1<2<3<$...

Por otro lado, en el capítulo previo se ponderó el valor de la inducción matemática en algunas demostraciones eulerianas de una famosa proposición que hace mención de los números naturales: el Pequeño Teorema de Fermat. A partir de esa revisión asistida por algunas ideas de Bolzano, surgió una noción de explicación utilizada para comprender por qué Euler prefirió a su demostración *algebraica*, sobre otras realizadas mediante inducción matemática. De acuerdo a dicha concepción, una demostración es explicativa cuando ella muestra por qué su teorema pertenece a su respectiva teoría. Mientras que la respuesta prototípica se planteó con un matiz axiomático, pues de acuerdo a ella los principios básicos de una axiomatización son idóneos para asentar la pertenencia a una teoría, al ser ellos quienes regulan su desarrollo mismo. Es decir, si una demostración se articula mediante los principios básicos de la teoría a través de la cual se vierte el contenido a su teorema, además de una justificación ella podría considerarse como una explicación de su conclusión; sobre todo cuando estos primeros principios optimizan las ganancias deductivas logrando adquirir así, su mote de fundamentos.

En suma, en el capítulo anterior se señaló a la explicación como una de las metas que pueden ser perseguidas en la búsqueda de los primeros principios, mientras que previamente fueron expuestos algunos de sus hallazgos en el campo de la aritmética. Por lo tanto, unimos estos apartados sobre la vía axiomática mediante la siguiente afirmación: la inducción matemática es un fundamento de los números naturales. Y para terminar de establecer esa conexión, hemos de brindarle a los fundamentos una más detallada explicación. Con tal fin, aquí se continuará recopilando información histórica para realizar esa tarea filosófica. Si en el capítulo anterior se defendió a la inducción matemática de algunas proposiciones que menguan su papel de fundamento aritmético, ahora la protegeremos de otro principio que la amenaza con la usurpación de su rol.

Las axiomatizaciones de la aritmética estudiadas pueden ser englobadas bajo el apelativo "ordinal", pues todas ellas construyen o caracterizan a una estructura con el tipo de orden de los naturales. Expresado de otra forma, el buen orden de los naturales puede ser considerado como la característica estructural de la sucesión de triángulos aritméticos, de la clase N y del sistema simple infinito N. Por consiguiente, ese tipo de orden pudiera formularse como un mejor candidato que la inducción matemática, para ocupar su puesto de fundamento de la aritmética. Es más, esta posibilidad ya se ha materializado, por ejemplo en la axiomatización de la aritmética hecha por Mario Pieri (1907), quien fue un seguidor de Peano y su *Nova Methodo*[1]. Por lo tanto, el buen orden

[1] Pieri cambia al "principio de inducción completa" en su axiomatización de la aritmética, la cual está basada en la formulación hecha por Padoa (1902) de los *Principios* de Peano, por su siguiente enunciación del Buen Orden: "En cualquier clase no vacía de números existe al menos un número que no es el sucesor de cualquier número en esa clase" (Pieri, 1907 vía 2007: 310). Y él promueve este intercambio porque encuentra "más simple y claro" a este último principio. Mientras que esa predilección con apariencia subjetiva, aquí no será discutida. En su lugar, se ofrecerán en el presente capítulo razones basadas en la

es un competidor real de la inducción matemática, cuya candidatura a fungir como fundamento de la aritmética, está auspiciada por buenas razones, algunas de ellas a continuación expuestas.

Si bien el tipo de orden de los números naturales fue mostrado en las obras revisadas de Peano y Dedekind como una consecuencia de sus respectivos aunque afines principios de la aritmética, la sospecha sobre su insubordinación a la inducción matemática puede alimentarse desde las formulaciones mismas de ese método de demostración. Por ejemplo, al realizar una lectura de comprensión de la codificación de esa regla en el principio P9 de Peano, *no podemos dejar de reconocer* en su antecedente un par de propiedades del orden típico de los naturales, a saber la existencia de un primer número (“$1 \varepsilon k$”) y la de un sucesor inmediato para todos ellos (“$x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x . x+1 \varepsilon k$”). Por lo que el orden típico de los naturales parece estar inmerso en nuestro conocimiento de la inducción matemática, poniendo así en duda epistemológica su papel de fundamento aquí conjeturado.

Más aún, el rol como fundamento de la inducción matemática también puede verse diezmado por una vieja equivalencia ya señalada por Pieri, entre el Principio de Inducción Matemática y el Principio del Buen Orden[2]. Es decir, desde hace mucho tiempo se tiene conocimiento de una familia de teoremas que podría formularse como: X es un conjunto bien ordenado si y sólo si X cumple con algún Principio de Inducción Matemática[3]. Y esta doble implicación apunta hacia una dificultad lógica enfrentada en la búsqueda de los fundamentos a través de la vía axiomática, a saber, una teoría puede aceptar un sinnúmero de principios distintos. Es decir, el papel constitutivo-justificativo representado por la inducción matemática en las axiomatizaciones de la aritmética

---

concepción misma del Buen Orden, para optar por la Inducción Matemática (Débil) como fundamento de la aritmética.

[2] La ida puede atisbarse ya desde las obras de Dedekind y Peano reseñadas, mientras que el regreso explícitamente es demostrado por Pieri en su artículo mentado (1907), quien juguetona o didácticamente, le deja la ida “al lector” (Pieri, 1907 vía 2007: 311-2). Más aún, cuando expongamos al método de la inducción transfinita formulado por Cantor, veremos también cómo en su validación él enseñó cómo demostrar la ida de esta equivalencia.

[3] Por ejemplo si *X* es el conjunto *N* de los números naturales, entonces resulta equivalente afirmar que todo subconjunto *S* de *N* tiene un elemento mínimo con la aseveración de que si $0 \in S$ y $n \in S \rightarrow n+1 \in S$, entonces $N \subseteq S$.

inspeccionadas, gracias a este teorema parece circunstancial al promover al buen orden como su reemplazo. Por lo tanto, hay razones lógico-conjuntistas para tener recelos sobre la postulación de la inducción matemática como fundamento de los números naturales.

Para sortear tales dificultades, en el presente capítulo se recorrerá una ruta histórica cuyas fases iniciales pueden detectarse en los *Principios* de Peano y con mayor intensidad, en el *Qué son los números* de Dedekind. Concisamente, en esta sección de la tesis nos adentraremos en el nacimiento de la teoría de conjuntos, pues allí eclosionó la noción aquí señalada que obstaculiza a la afirmación de la inducción matemática (débil) como fundamento de la aritmética, el buen orden. En particular, se efectuará una indagación histórica para determinar si la supeditación del buen orden a la inducción matemática en la aritmética, está en concordancia con el contenido de algunas obras seminales de la teoría de conjuntos.

Debido a la riqueza de la historia (hechos y estudios) de los albores de la teoría de conjuntos, desde aquí se advierte que sólo será inspeccionada una minúscula parte emparentada con la aritmética. Es más, el espacio histórico por ser revisado será todavía más reducido al restringirse a la relación entre la inducción matemática y el buen orden, ya que su dilucidación es el objetivo de tal indagación. De este ceñido modo, la teoría en donde se disputará la lucha por los fundamentos de la aritmética, será la de los números transfinitos de Cantor, la cual fue desplegada en una serie de artículos (1883, 1895, 1897) que son usualmente considerados, el punto de partida de la teoría de conjuntos como una rama de estudios propia y provechosa de las matemáticas.

En conciso, este capítulo pretende brindar algunas razones abstraídas de la primigenia teoría de conjuntos, para reafirmar la primacía de la inducción matemática sobre el Principio del Buen Orden en la aritmética y así reforzar, su postulación como fundamento de ella.

5.1 Nacimiento aritmético de la teoría de conjuntos

Al matemático-teólogo Georg Cantor (1845-1918) se le suele atribuir la paternidad de la teoría de conjuntos e incluso, se le ha llegado a otorgar el distintivo de ser su único padre[4]. Sin embargo, una inspección *in situ* de las obras de otros matemáticos o una indirecta a través de los trabajos de algunos estudiosos de la evolución de esa teoría, revelaría la participación de otros creativos, como los aquí ya estudiados Dedekind y Bolzano, en su gestación. Develación que no ocultaría sino precisaría la importancia de Cantor en la labor de parto, empero. Cabe señalar que la presente sección no tiene como objetivo elaborar un recuento detallado de ese origen (tal historia puede ser consultada en Ferreiros (2007)). Es más, aquí ni siquiera se hará un relato exhaustivo sobre el soplo de vida emanado desde Cantor hacia esa teoría (tal historia puede ser revisada en Dauben (1990)). Solamente nos enfocaremos en la teoría de los números transfinitos de Cantor, la cual lanzó al universo matemático a la teoría de conjuntos y sobretodo nos interesará de ella, su enriquecimiento de la concepción de número. Así entonces, aquí nos situaremos en el momento histórico oficialmente inaugurado por Cantor mediante las siguientes palabras:

> La presentación de mis investigaciones hasta ahora de la teoría de conjuntos al fin ha llegado a un punto en donde cualquier continuación depende de la extensión del concepto de los números enteros existentes más allá de los límites aceptados actualmente, y, más aún, esta extensión apunta hacia una dirección según mi conocimiento a donde nadie me ha precedido. (Cantor,1883 vía 1976: 92)

La cita previa fue extraída de la obra seminal de Cantor titulada “Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre” (*Fundamentos* de una teoría de variedades), en la cual él matemáticamente introduce y filosóficamente defiende su “extensión del concepto número” hacia el dominio de lo transfinito. Y esta obra constituye una declaración de independencia en el desarrollo cantoriano de la teoría de conjuntos, el cual estuvo antes

[4] Para muestra de esta atribución se transcribe el siguiente texto de un artículo de divulgación general sobre la teoría de conjuntos, encontrado en la famosa entre los filósofos, Enciclopedia Filosófica de Stanford:

> El nacimiento de la Teoría de Conjuntos está fechado en 1873 cuando Georg Cantor demostró que la línea real es innumerable. (Uno incluso podría argumentar que la fecha exacta es el 7 de diciembre de 1873, fecha de la carta de Cantor dirigida a Dedekind en la cual le informaba este descubrimiento). Hasta entonces, nadie había previsto la posibilidad de lo que los infinitos vinieran en diferentes tamaños y más aún, los matemáticos no le daban uso al “infinito acabado”. (Jech,2011)

circunscrito a cuestiones del análisis matemático, como la unicidad de la representación de una función mediante series trigonométricas. A pesar de la notoriedad matemática y filosófica de sus *Fundamentos*, "la extensión del concepto número" será exhibida en su versión matemáticamente más refinada encontrada en "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (*Contribuciones* a la Fundación de la Teoría de los Números Transfinitos), pues nos interesa mostrar con mayor nitidez a su desarrollo.

En sus *Contribuciones*, Cantor expone de manera ordenada su teoría de los números transfinitos empezando con la presentación de su sustrato conceptual:

> Por "conjunto" (*Menge*) entenderemos cualquier colección de objetos *m* considerada como un todo M, mientras que esos objetos determinados y distintos que proceden de nuestra intuición o de nuestro pensamiento serán llamados "elementos" de M.
> (Cantor 1895 vía 1915: 85)

Si los conjuntos son el sustrato de la teoría en las *Contribuciones,* lo son puesto que el par de conceptos sobre los cuales allí se realiza "la extensión de número" empezada desde los *Fundamentos*, son dos propiedades de tales objetos. El primero de ese par de conceptos exhibido en las *Contribuciones,* es el de "potencia" o "número cardinal":

> Llamaremos con el nombre de "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general surgido de nuestra facultad activa del pensamiento, de abstraer del conjunto M tanto la naturaleza de sus varios elementos *m* como el orden en que están dados... Puesto que cada elemento *m* al ser abstraído de su naturaleza, se convierte en una "unidad", el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un conjunto determinado compuesto por unidades, y este número existe en nuestra mente como una imagen o proyección intelectual del conjunto dado M. (Cantor 1895 vía 1915: 86)

Después de desplegar una teoría para sus números cardinales (relaciones de orden, aritmética, propiedades de cardinales finitos,...), Cantor exhibe al otro concepto protagónico de su teoría:

> Todo conjunto ordenado tiene un "tipo ordinal",..., mediante el cual entenderemos el concepto general que resulta de M si abstraemos la naturaleza de sus elementos *m*, y conservamos el orden de precedencia entre ellos. Así entonces, el tipo ordinal $\overline{M}$ es en sí mismo un conjunto ordenado cuyos elementos son unidades que tienen el mismo orden de precedencia entre ellas que el de sus correspondientes elementos de M, de los cuales ellas son derivadas por abstracción. (Cantor 1895 vía 1915: 112)

En las citas transcritas podemos reconocer a la abstracción como la facultad de pensamiento clave para adentrarnos en la teoría contenida en las *Contribuciones*. Primeramente mediante una abstracción se destila al sustrato conceptual de la de la teoría, los conjuntos, pues sus elementos son *cualesquiera* “objetos determinados y distintos”[5]. Luego recurriendo de nuevo a esa facultad mental, se identifican como propiedades de los conjuntos a dos conceptos: la cardinalidad y el tipo de orden.

Sin embargo la abstracción no es un proceso ni un resultado procedente de la nada. En particular, una de las fuentes de las abstracciones cantorianas se devela por el título dado a su obra aquí reseñada: *Contribuciones a...la Teoría de los Números Transfinitos*. Es decir, desde el nombre de la monografía se puede prever que los números formen parte de la materia prima usada en los procesos de abstracción ejecutados para el desarrollo de la teoría allí contenida. Mientras que tales expectativas ya han sido confirmadas, pues a partir del par de usos más frecuentes de los números, el conteo y la ordenación, se pueden abstraer los conceptos de “potencia” y de “tipo de orden” expuestos con antelación. Es más, después de cierto avance en la construcción de la teoría de tales conceptos, Cantor declarará a la fuente numérica de la abstracción como agotada conforme a sus fines expansionistas:

> El concepto de “tipo de orden”,..., en conjunción con el de “número cardinal” o “potencia”,..., conlleva todo aquello capaz de ser numerado que pueda ser pensado y en este sentido ya no puede ser generalizado. Dicho concepto no contiene arbitrariedad alguna pues es la extensión natural del concepto de número.
>
> (Cantor, 1895 vía 1915: 117)

A pesar de la riqueza filosófica del tema de la abstracción, aquí sólo nos fijaremos en dos aspectos de ella. En primer lugar, el resultado de ese proceso normalmente difiere de los estímulos que lo activan. Es decir, si aceptamos que la abstracción procede vía simplificación en busca de una generalización, entonces su producto difiere de su materia

[5] Cabe señalar que Cantor en trabajos previos, por ejemplo en los primeros artículos de su serie titulada “Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten” donde el quinto de ellos precisamente son los *Fundamentos*, en lugar del término conjunto (*menge*) utiliza el de variedad (*mannigfaltig*) pues los conjuntos en esas obras (variedades) están restringidos a subconjuntos de $\mathbb{R}$ (variedades de puntos lineales-*Punktmannigfaltigkeiten*) o de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, en las *Contribuciones* nuestra habilidad de abstracción nos libera del dominio de los reales hacia la generalización de los elementos de los conjuntos como cualesquiera “objetos distinguibles y determinados por nuestra capacidad de pensamiento”.
Por otro lado, se requiere de cierta(s) habilidad(es) de nuestro pensamiento para poder considerar a “cualquier colección de objetos” como un “todo”. Y mayor será la exigencia cuando esas colecciones no son finitas. Ahora bien, cuando ese “todo” lo englobamos mediante comprensión, es decir, identificando alguna(s) propiedade(s) satisfecha(s) exclusivamente por los objetos de esa colección, entonces la abstracción podría ser postulada como la destreza mental requerida para constituir tales conjuntos.

prima[6]. Por ejemplo, Cantor indica que para obtener el concepto de número cardinal de un conjunto, se debe desprender la naturaleza y el orden en que figuran sus elementos. Así entonces, el resultado de esa doble abstracción para los conjuntos A={☺, π}, B={π,☺} y C={ $\varnothing$,{$\varnothing$}} debe ser el mismo, pues todos ellos tienen la misma potencia, mientras que cada uno de esos conjuntos es distinto a su número cardinal[7] y finalmente, dicho resultado es más general que su fuente puesto que a tal número cardinal le corresponden muchos otros conjuntos además de los enlistados. Por lo tanto, aunque la abstracción sea el camino hacia la "extensión del concepto número", es de esperarse que su meta, los números transfinitos, difiera de su origen, los números naturales.

En segundo lugar, incluso con las pérdidas previamente señaladas, la abstracción puede enriquecer a su fuente[8]. Es decir, cada concepto obtenido mediante abstracción

---

[6] Los pragmatistas como James o Dewey remarcaron esta peculiaridad de la abstracción, advirtiéndonos que al ignorarla podemos cometer una falacia filosófica suplantando al origen del proceso por su resultado. En palabras de William James:

> Déjenme darle el nombre de 'abstraccionismo vicioso' al uso de conceptos que puede ser descrito de la siguiente manera: Concebimos a una situación concreta identificando un rasgo sobresaliente o importante en ella de tal manera que él sirve para clasificarla; luego, en lugar añadir a sus características todas las consecuencias positivas derivadas de su nueva manera de concebirla, procedemos a usar nuestro nuevo concepto privadamente, reduciendo la riqueza fenoménica a las sugerencias desnudas de ese nombre tomado de manera abstracta, tratando este caso nada más con este concepto, y actuando como si todas las otras características a partir de las cuales el concepto se abstrajo hubieran desaparecido. (James, 1909: 247)

[7] En este punto suele indicarse una dificultad para la teoría de Cantor, pues su propuesta de que el resultado de esta abstracción sea un conjunto integrado sólo por unidades choca contra nuestra convención de la igualdad entre conjuntos. Es decir, normalmente pensamos que el conjunto {1,1} es igual al conjunto {1}, ya que asumimos un criterio de identidad extensional. De hecho se considera un objeto distinto, llamado usualmente "multiconjunto", aquél que permite la repetición de sus elementos. Sin embargo, la definición de número cardinal de Cantor puede omitirse como decorativa alegando que no interfiere definitivamente en el desarrollo de la teoría de los números transfinitos, o si se le da mucha importancia, entonces podemos remarcar lo gregario de este problema, pues no sólo Cantor, v.gr. Frege, tuvo complicaciones o incluso errores al tratar de caracterizar/construir un objeto teórico asociado al concepto "número cardinal".

[8] Esta otra característica de la abstracción también es enfatizada por los pragmatistas. En palabras de James:

> Los conceptos abstractos, tales como elasticidad, voluminosidad, disconexidad, son aspectos sobresalientes de nuestras experiencias concretas que nos resulta útil identificar. Si son útiles, es porque luego ellos nos recuerdan otras cosas que tengan los mismos aspectos; y si estos aspectos conllevan consecuencias en estas otras cosas, entonces podemos regresar a nuestras primeras cosas, esperando que las mismas consecuencias se sigan. (James, 1910: 246)

Ahora bien, aunque en matemáticas se puedan retomar las ideas pragmatistas aquí mencionadas sobre la abstracción, se debe hacer con cuidado pues las abstracciones son la materia prima de esta disciplina. Si bien algunas "experiencias concretas" pueden estimular el proceso de abstracción en las matemáticas, las mismas abstracciones allí son las fuentes mayoritarias para ejercer esa facultad del pensamiento. Por ejemplo, los números naturales quizás sean el resultado de una abstracción de sus manifestaciones empíricas, pero a su vez sobre ellos podemos repetir varias veces dicho proceso, v,gr. identificando su puede llegar a mejorar nuestra comprensión de su origen si "no contiene arbitrariedad alguna". Por citar un caso relacionado con la aprensión que sea desea liberar en este capítulo, la articulación teórica realizada por Cantor del tipo ordinal de los números naturales (más adelante expuesta), sin duda robustece a nuestro entendimiento de ellos y por consiguiente, ese concepto podría disputarle a la inducción matemática su estatus de fundamento de la aritmética.

Aquí resulta pertinente volver a mencionar que las *Contribuciones* no son un tratado filosófico sino uno matemático. La abstracción no es su tópico sino sólo es una herramienta para producir a la teoría de los números transfinitos. En consecuencia no ampliaremos la discusión acerca de ella, aunque por motivos esclarecedores si conviene señalar que en los *Fundamentos,* artículo de Cantor que sí posee vertientes filosóficas, se dicta un canon para el manejo de la abstracción en las matemáticas cuyo seguimiento puede ser reconocido en las *Contribuciones*:

> Las Matemáticas son enteramente libres en su desarrollo y sólo están atadas a la restricción autoevidente de que sus conceptos deben ser consistentes entre ellos y deben estar relacionados (mediante definiciones) determinada y ordenadamente con los conceptos que los precedan en su presentación y establecimiento.
>
> (Cantor, 1883 vía 1976:115)

A pesar de lo vagas que podamos encontrar en las *Contribuciones* a las presentaciones de los conceptos "conjunto", "tipo de orden" y "número cardinal", Cantor allí parece ser claro en el obedecimiento del canon para el manejo de la abstracción dictado en sus *Fundamentos.* Es decir, Cantor allí luce como creyente de la consistencia de todos estos conceptos pues formula ordenadamente una serie de definiciones relativas a ellos, las cuales eran matemáticamente trabajables[9] para la generación de su teoría de los números transfinitos. Ahora sabemos por nuestro conocimiento de las paradojas conjuntistas, que esa creencia sobre la consistencia era demasiado optimista mas no

---

totalidad como un conjunto. Por lo tanto en las matemáticas, las abstracciones pueden obtener su independencia y ya no remitir a su fuente para sostener su autonomía teórica. Por lo que el vicio de la abstracción denunciado por los pragmatistas, en matemáticas puede tornar en una virtud.

[9] Una crítica de Cantor a Bolzano, quien lo precedió en la gestación de la teoría de conjuntos, es que en sus *Paradojas del infinito* "el autor falló en ofrecer cualquier concepto *trabajable* de los números infinitos, o del concepto general de potencia o del concepto preciso de enumerabilidad [ordenación]". (Cantor 1883 vía 1976: 115).

completamente errada, al ser ella luego reforzada mediante las enmendaduras de la teoría de los conjuntos hechas por quienes sucedieron a Cantor, como Zermelo. No obstante, la discusión sobre esas vicisitudes paradójicas nos alejaría del objetivo perseguido en este capítulo: sustentar la supremacía de la inducción matemática sobre el buen orden en la aritmética. Por consiguiente, nos enfocaremos en la exposición del resultado teórico de la ejecución matemática del canon aludido[10], enumerando a continuación algunas de las definiciones que lo siguen. En pos de una mayor concisión, tales definiciones serán expresadas con ayuda del símbolo de pertenencia "$\in$" no usado en su formulación original. Respetando su orden, empezaremos citando a las primeras en desfilar en las *Contribuciones,* ligadas al concepto de "conjunto":

- Si M,N,P,... no comparten elementos y la unión de M,N,P,... es denotada mediante "(M,N,P,...)", entonces $(M,N,P,...)=\{ x \mid x\in M$ ó $x\in N$ ó $x\in P$ ó....$\}$.
  (1895 vía 1915, p. 85-6)
- M_1 es parte de M sii para todo $x\in M_1$ entonces $x\in M$. (p. 86)

Luego con respecto al siguiente concepto protagónico presentado en las *Contribuciones*, el de "potencia de un conjunto", allí se formula la definición de "equivalencia entre conjuntos" que favorece su conversión en una noción matemáticamente trabajable. Dicha relación signada en las *Contribuciones* mediante "~", nos debe resultar familiar al remitirnos a las "transformaciones similares" de Dedekind:

- $M\sim N$ sii existe una ley que relaciona todo elemento de cada uno de ellos con uno y sólo uno del otro. (p.86)

Ahora bien, debido a lo equívoco que ahora nos puede parecer la definición de "número cardinal" como un conjunto conformado por unidades (ver nota 7), podemos asumir como punto de partida el siguiente criterio de igualdad entre números cardinales que Cantor en sus *Contribuciones* pretendió demostrar:

[10] El canon de la consistencia, dicho sea de paso, fue consolidándose como un eje central del quehacer matemático, mientras que su defensor más famoso e influyente, David Hilbert, para poca sorpresa nuestra, fue un admirador del trabajo matemático de Cantor.

- $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$ sii $M\sim N$ (p.87-88)[11]

Además de las dos definiciones anteriores, Cantor formula otras relativas al concepto "número cardinal" con base en las previas que le permiten desarrollar una aritmética y una teoría de orden acerca de las "potencias" de los conjuntos, algunas de las cuales a continuación reproducimos:

- $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$ sii (a) no existe una "parte" de M que sea equivalente con N.
  (b) Existe una "parte" N_1 de N tal que $N_1\sim M$. (p.89)
- $\overline{\overline{M}}+\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{(M, N)}}$ (p.91)
- $M.N=\{(x,z) \mid x\in M \text{ y } z\in N\}$ (p. 92)
- $\overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M.N}}$ (p.92)
- $N|M=\{f \mid f$ es una función total y $f{:}N\to M\}$ (p.95)
- $\overline{\overline{M}}^{\overline{\overline{N}}}=\overline{\overline{N|M}}$ (p. 95)

Enumeradas las definiciones relativas al concepto "número cardinal", Cantor obedece otra vez su canon para transformar a su tercer concepto fundamental, el "tipo de orden", en una noción matemáticamente explotable mediante la formulación de ciertas definiciones. Primeramente al orden de precedencia lo identifica con una relación por él bautizada como "orden simple", caracterizada con la asistencia del signo típico para la desigualdad "<" de la siguiente manera[12]:

- M tiene un "orden simple" sii
  (a) para todo $m_1, m_2\in M$ se tiene que $m_1<m_2$ ó $m_2<m_1$
  (b) p.t. $m_1, m_2, m_3\in M$ si $m_1< m_2$ y $m_2< m_3$ entonces $m_1< m_3$. (p.110)

Aunada a la caracterización de la relación de orden simple y tal como hizo con su concepto "número cardinal", Cantor ofrece un criterio de igualdad entre tipos ordinales

---

[11] Cantor "justifica" la ida de la siguiente manera: Si $M\sim N$, entonces a cada elemento *m* de M le corresponde uno y sólo un *n* de N. "Por lo que podemos imaginar, en lugar de cada *m* de M, a su correspondiente *n* de N, y de esta manera, M se transformaría en N; dejando inalterado al número cardinal. Consecuentemente, $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$" (Cantor, 1895 vía 1915: 88). Aunque luzca como un razonamiento convincente, el significado de la igualdad entre cardinales, permanece en la oscuridad. Y esta falta de claridad emana desde la opacidad matemática de lo que son los "números cardinales". Por lo que es preferible ver a esta doble implicación, precisamente como una definición de la igualdad entre esos extraños objetos.

[12] Por comodidad aquí se conservará la ambigüedad del manejo de los símbolos de Cantor, pues varias veces utiliza un sólo signo para denotar relaciones distintas. Por ejemplo, la igualdad entre números cardinales como la de tipos ordinales será simbolizada mediante "=", mientras que la desigualdad estricta tanto para números cardinales como los elementos en un conjunto simple ordenado será representada mediante "<".

definiendo una relación entre ordenes simples llamada "similitud" (ecos del *Abbildung* de Dedekind), denotada mediante el signo "$\simeq$" y caracterizada de la siguiente forma:

- $M \simeq N$ sii hay una correspondencia biunívoca entre M y N tal que para todo $m_1, m_2 \in M$, si $m_1 < m_2$ entonces para sus correspondientes n_1, n_2 en N, se tiene que $n_1 < n_2$. (p.112)

Con base en la similitud entre órdenes, Cantor pretende demostrable la validez de su criterio para la igualdad entre tipos ordinales:

- $\overline{M} = \overline{N}$ sii $M \simeq N$ (p.113)

No obstante tal como acontece con su criterio de igualdad para números cardinales, el resultado de la doble abstracción identificado con el tipo de orden desde una perspectiva más actual, no ofrecería un sustrato tan estable para realizar la demostración de la doble implicación anterior. Es decir, que el tipo ordinal $\overline{M}$ de un conjunto M sea a su vez un conjunto conformado por unidades que respetan el orden de M, chocaría contra nuestra concepción tradicional de la igualdad entre conjuntos[13]. Ante tal complicación, se puede asumir al criterio de identidad entre tipos ordinales como un principio en lugar de como una consecuencia para conservar la estabilidad deductiva de la teoría de los números transfinitos. Superado este inconveniente, continuaremos reproduciendo algunas definiciones basadas en las previas relativas al tipo ordinal y en particular, ahora desfilarán las de la aritmética de esos números:

- $\overline{M} + \overline{N} = \overline{(M, N)}$ (p.119)
- $\overline{M} \cdot \overline{N} = \overline{M.N}$ donde para todo (m,n), $(m',n') \in M.N$ se tiene que $(m,n) < (m',n')$ sii $n < n'$ ó ($n = n'$ y $m < m'$) (p.121)[14]

---

[13] No podemos dejar de recordar que el criterio de igualdad entre conjuntos más *extendido*, x=y sii $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$, ya apareció desde nuestra reseña del *Was sind die Zahlen* cuando expusimos la formulación de la igualdad entre sistemas ((Dedekind, 1888 vía 1963, p. 45).

[14] Cantor en lugar de definir al tipo de orden resultante de la multiplicación de $\overline{M}$ por $\overline{N}$ mediante el producto cartesiano M.N, lo hace equivalentemente construyendo un conjunto S que tiene tantos elementos como n y en donde en sustitución de cada n se pone un conjunto M_n tal que M_n no comparta elementos con M pero sí tenga su mismo orden simple ($S=\{M_n\}$). Esta manera de definir al producto de tipos ordinales Cantor también la ofreció como alternativa a su definición de multiplicación de cardinales mediante el producto cartesiano. Por otro lado, que no haya sido usado el producto cartesiano para definir la multiplicación de tipos ordinales pone de manifiesto que la noción de par ordenado todavía no estaba bien determinada en la temprana etapa de la teoría de conjuntos plasmada en las *Contribuciones*.

Con el repertorio hasta ahora transcrito de definiciones bien determinadas y ordenadas se pueden extraer varias consecuencias para los números cardinales y los tipos ordinales, entre las cuales podemos enumerar las siguientes:

- $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{N}}$ son mutuamente excluyentes (p.89-90)
- Si $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{N}}<\overline{\overline{P}}$ entonces $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{P}}$ (p. 90)
- $\overline{\overline{M}}+\overline{\overline{N}}=\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{M}}$ (p.92)
- $\overline{\overline{M}}+(\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{P}}) = (\overline{\overline{M}}+\overline{\overline{N}})+\overline{\overline{P}}$ (p.92)
- $\overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}\cdot\overline{\overline{M}}$ (p.93)
- $\overline{\overline{M}}\cdot (\overline{\overline{N}}\cdot\overline{\overline{P}}) = (\overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{N}})\cdot\overline{\overline{P}}$ (p.93)
- $\overline{\overline{M}} \cdot (\overline{\overline{N}} + \overline{\overline{P}}) = \overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{P}}$ (p.93)
- $\overline{M} + (\overline{N}+\overline{P}) = (\overline{M} +\overline{N})+\overline{P}$ (p.119)
- $\overline{M}\cdot(\overline{N} \cdot\overline{P}) = (\overline{M}\cdot\overline{N}) \cdot\overline{P}$ (p.121)
- $\overline{M}\cdot(\overline{N}+\overline{P}) = \overline{M}\cdot\overline{N}+ \overline{M}\cdot\overline{P}$ (p.121)

Las proposiciones previas son el reflejo de viejas leyes conocidas de los números naturales (asociatividad, distributividad,...), por lo que difícilmente provocarán mayor revuelo. La teoría de los números transfinitos torna en sorpresiva cuando incorpora al calificativo que le da su nombre, es decir cuando a los ingredientes conceptuales previos (conjunto, tipo ordinal, cardinal) se le agrega el de la finitud y su negación. Mientras que en las *Contribuciones* se introduce ese catalizador conceptual, en el momento que se expone a la fuente primordial de sus abstracciones, los números naturales. Ellos son presentados por Cantor como "números cardinales finitos" del siguiente modo:

> A una sola cosa e_0, si la subsumimos bajo el concepto del conjunto $E_0=\{e_0\}$, le corresponde como número cardinal lo que llamamos "uno" y denotamos 1,....Ahora unamos a E_0 otra cosa e_1, y llamemos al conjunto resultado de esa unión E_1.....El número cardinal de E_1 es llamado "dos" y es denotado por 2.... Mediante la adición de nuevos elementos obtenemos la serie de conjuntos E_2, E_3,.... la cual sucesivamente, en una secuencia no limitada, nos da los así llamados "números cardinales finitos" denotados por 3,4,5,... (Cantor, 1895 vía 1915: 98)

Esta construcción nos remite a la expuesta con antelación de Peano del sistema de los números naturales y para apreciar más nítidamente su parecido, podemos expresarla concisamente de la siguiente manera enseñada por Cantor:

$\therefore$ $E_0=\{e_0\}$

- $1=\overline{\overline{E_0}}$ [P1 de Peano]

$\therefore$ $E_v=(E_{v-1}, e_v)$ con $e_v \notin E_{v-1}$

- $v+1=\overline{\overline{E_v}}$ [P6 de Peano]

Para remarcar esta semejanza, podemos abstraer a la totalidad de los números cardinales finitos como un conjunto y luego denotarlo mediante la letra usada por Peano para su clase de los naturales: $N=\{\overline{\overline{E_0}}, \overline{\overline{E_1}},..,, \overline{\overline{E_v}},....\}$. De este modo, la construcción cantoriana de los cardinales finitos especificaría mediante nociones conjuntistas a los términos primitivos de la aritmética de Peano. No obstante como ya ha sido mencionado, esta reformulación conjuntista de la aritmética no es tan precisa pues los conjuntos $\overline{\overline{E_v}}$ integrados por unidades, según nuestros parámetros extensionales no estarían tan bien determinados y por consiguiente, tampoco lo estaría el conjunto N. Aunque dicha "indeterminación" no inhibió a Cantor de extraer varias consecuencias para sus números cardinales finitos, entre las cuales se reproducen algunas que más adelante serán retomadas:

- Todo número *v* es mayor a los que le preceden y menor a los que le siguen. (§5.Teo.B ,p.99)
- No existe un número cardinal finito *v'* entre los números cardinales finitos *v* y *v*+1. (§5.Teo.C, p.99)
- Si N es un conjunto con el número cardinal finito *v* y N_1 es una parte de N, el número cardinal de N_1 es igual a algunos de los números precedentes 1,2,3,...,*v*-1. (§5.Teo.E, p.99-100)
- Si K es un conjunto de distintos números cardinales finitos, entonces hay uno, k_1, entre ellos que es el más pequeño de todos.[15] (§5.Teo.F, p.102)

Aunada a la crítica sobre la indeterminación de los números cardinales como conjuntos, el plano cantoriano de la construcción de los números cardinales tiene otra

[15] El Teorema F tiene un papel muy importante dentro de la teoría de las *Contribuciones* pues sirve de puente entre los números cardinales finitos y los números ordinales finitos, los cuales serán presentados más adelante en el cuerpo del texto. Por consiguiente, a continuación se reproduce su demostración. Sea K un conjunto integrado por números cardinales finitos. Si $1 \in K$ entonces ya acabamos por§5.Teo.B. Si no, sea J el conjunto de los números cardinales finitos tales que son menores a todos los contenidos en K. Entonces debe existir un máximo $v \in J$ tal que $v+1 \in K$, pues "de lo contrario J contendría a todos los números cardinales finitos, mientras que por suposición los números contenidos en K no están contenidos en J" (p. 103). Por lo tanto, *v*+1 es el mínimo elemento de K.

peculiaridad que puede provocar recelos. En la generación de cada E_v se requiere un objeto e_v diferente a los utilizados previamente. Por lo tanto, alguien escrupuloso podría preguntar: ¿cómo se garantiza esa provisión inacabable de objetos diferentes requerida para la construcción de los cardinales finitos?

Ahora bien, si se desea resolver al cuestionamiento anterior respetando al contenido de las *Contribuciones,* entonces se puede intentar hacerlo apelando un poco a nuestra intuición o recurriendo a algunos recursos de la teoría de conjuntos no tan ajenos a los provistos en esa obra. Si nos situamos dentro del trasfondo intuitivo de esa monografía, entonces dicha pregunta no se satisfaría mediante una solución sino se saciaría a través su disolución, rechazándola por su escasa atención al origen de la teoría allí desplegada. La materia prima primordial para el proceso de abstracción cuyos resultados conceptuales en esa obra se desarrollan matemáticamente, predispone el reconocimiento de una infinidad de objetos distintos. Es decir, de antemano se sabe que los números naturales son todos diferentes entre sí y que su sucesión no tiene fin por lo que ellos pueden figurar como los objetos e_v[16]. Por lo tanto, nuestro conocimiento previo de los números naturales podría apaciguar la duda sobre la provisión inagotable de objetos distintos.

Por otro lado, si se acepta que los conjuntos a su vez pueden ser elementos de otros conjuntos, entonces se dispone de un mecanismo para generar una infinidad de objetos distintos. Y Cantor así lo hace pues no tiene reparos en considerar a los conjuntos de los números cardinales, los cuales a su vez son conjuntos integrados por sus misteriosas unidades. De este modo, sea e_0 cualquier cosa y fórmese con ella al conjunto unitario E_0. Luego utilícese a E_0 para crear al conjunto unitario $E_1=\{E_0\}$. Y aplicando sucesivamente la

[16] Es más, en la sección §11 de las *Contribuciones* se menciona otro conjunto que puede ser un suministro todavía más grande de objetos distintos, a saber el conjunto de los números reales comprendido entre el cero y el uno, llamado continuo. Cantor al momento de escribir sus *Contribuciones* ya sabía pues lo demostró con antelación más de una vez que la cardinalidad del continuo es más grande que la del conjunto de los números naturales. Su prueba más famosa, la del argumento diagonal, apareció en el artículo titulado "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre" publicado en 1891. Más aún, en las *Contribuciones* también ofrece otro conjunto cuyo número cardinal es más grande que el del conjunto de los números naturales, el de la segunda-clase de números (transfinitos), como será expuesto más adelante en el cuerpo del texto.

regla $E_v=\{ E_{v-1} \}$, se produciría al suministro ilimitado de objetos requeridos para construir la secuencia de números cardinales finitos $v=\overline{\overline{E_{v-1}}}$. Mientras que este modo de generación reminiscente del conjunto infinito de Dedekind[17], fue propuesto explícitamente por un continuador inmediato del trabajo conjuntista de él y de Cantor, Ernest Zermelo. En su influyente "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I" publicado en 1908, artículo famoso al contener a su axiomatización de la teoría de conjuntos, Zermelo fincó esta construcción sobre el conjunto vacío[18], es decir $E_0=\emptyset$. Por consiguiente, existen recursos de la teoría de conjuntos no tan lejanos ni conceptualmente ni temporalmente a las *Contribuciones* de Cantor, para apaciguar los recelos sobre la provisión de una infinidad de objetos distintos requerida en la generación de sus números cardinales finitos.

Si bien se expusieron dos alternativas para respaldar la construcción cantoriana de los cardinales finitos, ninguna todavía lograría garantizar que los números naturales también formen parte de esa edificación. Es decir, el resultado de la generación cantoriana de los cardinales finitos sigue involucrando o no termina de delinear a la fuente de su abstracción. Por un lado, la primera manera de tranquilizar los escrúpulos del plano cantoriano asume a la infinidad de los números naturales para proveer de objetos distintos a la construcción de los cardinales finitos. Por lo que el concepto de "número cardinal finito" necesita al de "número natural" para su especificación. En consecuencia, si

[17] Recordando, la existencia de un conjunto infinito Dedekind la "demuestra" en el Teorema 66 de su *Qué son los números* así: "si *s* es un objeto de S, entonces el pensamiento s' de que s es un objeto de mi pensamiento, también es un elemento de S..." (Dedekind 1888 vía 1963 : 64) Es decir, la reflexividad constructiva ya era un principio de edificación para Dedekind, la cual a su vez ya había sido propuesta para mostrar la infinitud de proposiciones verdaderas en las *Paradojas del Infinito* de Bolzano: "si consideramos una verdad,.., la cual designaré mediante A, entonces encontraremos que la proposición expresada mediante las palabras 'A es verdadera' es diferente a A...." (Bolzano 1851 vía 2004 : 607).

[18] Es en el Axioma de la Infinitud, donde Zermelo formula su famosa construcción de la secuencia de los números naturales:

> Axioma VII. Existe en el dominio al menos un conjunto *Z* que contiene al conjunto vacío como elemento y está constituido de tal manera que a cada uno de sus elementos a le corresponda todavía un elemento de la forma $\{a\}$, en otras palabras, para cada uno de sus elementos a, este conjunto también contiene al conjunto $\{a\}$.
>
> (Axioma de Infinitud) [Axiom des Unendlichen]
>
> ... El conjunto Z_0 contiene como elementos a 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, y así en adelante, pudiéndose este llamar la "secuencia numérica", porque sus elementos pueden tomar el lugar de los numerales. Este conjunto es el ejemplo más simple de un conjunto "infinito denumerable". (Zermelo, 1908 vía 2010:201)

define a un número natural como un número cardinal finito, entonces se comete el error de que el *definiendum* forme parte del *definiens*.

Mientras que la segunda opción descrita para reforzar a la construcción cantoriana de los cardinales finitos, incluso ignorando su incorporación de algunas nociones conjuntistas no incluidas en las *Contribuciones*[19], aún no lograría sostener la equiparación de los números naturales con los números cardinales finitos. Si se quiere afirmar que un número natural es un número cardinal finito, entonces faltaría establecer lo que se entiende por "finito", ya que hasta el momento sólo se ha expuesto la clarificación matemática del concepto de "número cardinal". Sin embargo, con un optimismo irradiado por la mención de los números trans*finitos* desde el título de esa obra, quizás allí se halle la satisfacción de este pendiente. Es decir, parece prometedor indagar dentro de las *Contribuciones* con tal de encontrar una aclaración matemática del concepto de finitud, el cual nos permita aseverar sin ambigüedad que un número natural es un número cardinal finito.

Nuestra búsqueda por la definición de "finitud" en las *Contribuciones* no avanzará mucho, pues ya en la sección posterior a la dedicada a los cardinales finitos, es decir la sexta, Cantor nos presenta lo que entiende por ese concepto: "los conjuntos con números cardinales finitos serán llamados 'conjuntos finitos', todos los demás serán llamados 'conjuntos transfinitos' y sus números cardinales 'números cardinales transfinitos'" (Cantor, 1895 vía 1915: 103). Por lo que si nuestra intención era encontrar una definición de finitud que completara a la de "número cardinal" para capturar conceptualmente a los números naturales, entonces nuestra búsqueda ha hallado su circular fracaso. Es más, el "primer ejemplo de un número cardinal transfinito", por Cantor presentado como Aleph-cero ($\aleph_0$), "es la totalidad de los números cardinales finitos" (ib.: 103), por lo que nuestra decepción semántica se extendería hasta el infinito. De este frustrante modo, la finitud es establecida por Cantor como una propiedad basada en su construcción de los "números cardinales finitos"; mientras que era lo "finito" de los "números cardinales finitos" lo que

[19] Por ejemplo, en las *Contribuciones* al igual que en el *Qué son los Números* de Dedekind, el conjunto vacio está ausente. Por lo que la especificación de Zermelo de $E_0 = \varnothing$, en esa obra de Cantor no podría ser abiertamente realizada.

precisamente se deseaba clarificar. Así entonces, aunque podamos reconocer la finitud de cada conjunto E_v partícipe de la generación de los números cardinales finitos, la definición de finitud dada por Cantor nos asistiría nulamente en esa tarea. Sólo nuestra intuición o conocimiento previo de los números naturales en ello puede ayudarnos, por lo que el brillo de nuestro optimismo por hallar una definición de finitud matemática trabajable, se iría consumiendo en cada vuelta de su definición circular ubicada en la sección §6.

Sin embargo, nuestras esperanzas pueden recobrar el fulgor de los rescoldos cuando Cantor más adelante enuncia como un teorema un criterio para la finitud de aspecto familiar: "Cualquier conjunto finito E es tal que es equivalente a ninguna de sus partes" (§6.Teo.C, p.108). Así entonces, este criterio no es otro sino la definición(64) de un sistema finito formulada en el *Was sind die Zahlen*. Y aunque la demostración de dicho teorema remita a la definición criticada de "número cardinal finito" [20], al menos allí se nos enseña una manera para que la "finitud" declare su independencia de los números naturales. Puesto que no es de nuestro interés discutir lo que Cantor pudo haber hecho sino más bien lo que hizo mayoritariamente en sus *Contribuciones,* a continuación será mostrado que incluso a pesar de las dependencias y de las ambigüedades detectadas, la teoría de los números transfinitos sí contribuyó significativamente a nuestro entendimiento de los números naturales.

---

[20] Cantor señala que este teorema depende de los dos siguientes:
A. Los términos de la serie ilimitada de los números cardinales finitos son todos ellos diferentes.
E. Si N es un conjunto cuyo número cardinal finito es igual a v, y N_1 es una parte de N, entonces el número cardinal de N_1 es igual a alguno de los números que le preceden 1,2,3,...., v-1 (p.99)
Así entonces, si v es el número cardinal finito del conjunto finito E, entonces por el Teorema E cualquier parte N_1 de N tendrá un número cardinal finito v_1 menor que v . Y por el Teorema A, $v_1 \neq v$, por lo tanto N_1 no es equivalente a N. Ahora bien, el Teorema A a su vez depende del siguiente teorema:
D. Si M es un conjunto que no tiene la misma potencia que alguna de sus partes, entonces el agregado (M,e), donde e es un nuevo elemento, tiene la misma propiedad (p.99).
Si bien la prueba de D prescinde de la construcción secuencial de los cardinales finitos y está basada en las propiedades de las funciones biunívocas, funciones que sirven para establecer la igualdad entre los números cardinales, desgraciadamente la demostración del Teorema E es una inducción matemática débil sobre v, por lo que requiere del proceso criticado de generación de los cardinales finitos. Peor aún, señalarán algunos críticos, la validez de la inducción matemática débil de antemano es asumida por Cantor pues no se toma la molestia, como Dedekind, de demostrar su validez, i..e. no la sustenta sobre su construcción del conjunto de los números cardinales finitos. (p. 100-101)

Recapitulando, hasta el momento se ha exhibido el apuntalamiento matemático de tres conceptos claves para la teoría de los números transfinitos de Cantor: el de conjunto, el de número cardinal y el de tipo ordinal. Aunada a la enumeración de algunas de sus consecuencias, se mostró una cuarta aclaración conceptual relativa a la noción de número cardinal finito, brindada en las *Contribuciones* de manera constructiva. Respecto a esta última, se denunció su dependencia de una comprensión previa de los números naturales por lo que aparentemente, los números cardinales finitos no ayudarían a mejorar nuestro entendimiento aritmético. Es decir, la propiedad de la “finitud” de los conjuntos se detectó como sujeta a nuestro conocimiento o intuición de los números naturales. Por lo que todo parece indicar y confirmar que las *Contribuciones* de Cantor, en contraste con el *Qué son los números* de Dedekind, no tienen como meta caracterizar o construir a los números naturales sino “extender el concepto de número”. Y la noción que terminará de impulsar tal expansión, justamente es aquella pronosticada como problemática para los fines de la presente investigación, el buen orden. Mientras que esa extensión, será desembrollada en la siguiente sección.

5.2 La escalera del Buen Orden hacia el infinito y más allá

En esta estadía de la exposición ya es pertinente informar que las *Contribuciones* está integrada por dos artículos y que hasta el momento sólo se ha abordado al primero (1895). A pesar de las consolidaciones matemáticas expuestas sobre sus tres conceptos protagónicos y de sus avances aquí no reportados (v.gr. §9 el tipo ordinal η de los números racionales o §11 el tipo ordinal θ del continuo lineal), Cantor allí admite una limitante de su teoría que lo incita a desarrollarla desde otra perspectiva en su segundo artículo (1897). El problema es por él vaticinado tempranamente desde la sección §2 del primer artículo y empieza a señalarlo del siguiente modo:

> Hemos visto, que cada una de las tres relaciones ...[de orden entre números cardinales] excluye a las otras dos. Por el otro lado, el teorema que para cualquier par de números cardinales...una de estas tres relaciones [“=” ó “<” ó “>”] necesariamente se cumple, es de ningún modo autoevidente y difícilmente puede se demostrado en esta etapa. (Cantor, 1895 vía 1915: 90)

Después de aceptar la incapacidad momentánea de demostrar la tricotomía para los números cardinales, Cantor predice la ganancia teórica por ser obtenida desde la perspectiva que será asumida en el segundo artículo, la cual entre otros beneficios le permitirá probar a la tricotomía:

> No hasta después, cuando hayamos ganado un reconocimiento de la secuencia ascendente de los números cardinales transfinitos y una comprensión de su conexión, se obtendrá la verdad del teorema. (Cantor, 1895 vía 1915: 90)

Y precisamente, “el reconocimiento de la secuencia ascendente de los números cardinales transfinitos y la comprensión de su conexión” serán conseguidos por medio de los “conjuntos bien ordenados”, los cuales aparecen en el segundo artículo. Sin embargo, desde el primer artículo Cantor prepara el establecimiento de la nueva bien ordenada perspectiva, al empezar a desarrollar en su sección §10 al concepto “secuencia ascendente” de un conjunto ordenado M, la cual “tiene la forma $\{a_v\}$ donde $a_v < a_{v+1}$“(p. 128-129). Más importante aún, en esa sección ya introduce el concepto de elemento límite m_0 de una secuencia ascendente $\{a_v\}$ y como se verá más adelante, este concepto tendrá un papel determinante en la comprensión de la “conexión de la secuencia ascendente de los números transfinitos”.

La segunda parte de las *Contribuciones* inicia clarificando mediante una definición matemáticamente trabajable a su concepto estelar, el buen orden, especificándolo como una propiedad de los conjuntos. En palabras de Cantor, el conjunto F está “bien ordenado” si además de tener un orden simple cumple con lo siguiente:

> I. Hay en F un elemento f_1 que es el de menor rango.
>
> II. Si F’ es cualquier parte de F y si F tiene uno o varios elementos de mayor rango que todos los elementos en F’, entonces existe un elemento f’ de F tal que le sigue inmediatamente a la totalidad de F’, es decir no hay elementos en el rango entre f’ y F’ que ocurran en F. (Cantor, 1897 vía 1915: 138)

Expresado con términos más modernos:

- F es un “conjunto bien ordenado” sii existe una relación de orden en F tal que:

-II. La relación de orden es total.

-I. La relación de orden es transitiva.

I. Existe un mínimo elemento en F para esa relación de orden.

II. Si E es cualquier subconjunto propio de F que tenga cotas superiores respecto a esa relación de orden en $F \cap E^c$, entonces existe en $F \cap E^c$ una mínima cota superior de E.

Ahora bien, mediante la definición de "conjunto bien ordenado", Cantor ya es capaz de demostrar algunas consecuencias de este concepto, entre las cuales figuran la equivalencia de ella con la formulación actual del buen orden y la herencia del buen orden de un conjunto hacia sus partes:

- ❖ El conjunto F está bien ordenado sii toda parte F' de F y F tienen un elemento mínimo. (La ida es el Teorema A y la vuelta el B de §12, p. 139)
- ❖ Toda parte F' de un conjunto bien ordenado F es también un conjunto bien ordenado. (§12.Teo.C, p. 140)

Posteriormente en la sección §13 de las *Contribuciones* se define a los "segmentos" (ahora llamados iniciales) de conjuntos bien ordenados para seguir deduciendo teoremas sobre los conjuntos bien ordenados:

- Si F es un conjunto bien ordenado y *f* un elemento de éste, entonces el "segmento de F definido por el elemento *f*" es la parte A de F integrada por todos los elementos de F que preceden a *f*. (p.141)

Entre todos los teoremas facilitados por este concepto secundario al del buen orden, enumeraremos sólo dos que fueron seleccionados por razones distintas. El primero fue elegido ya que su demostración será analizada en la siguiente sección de este capítulo, mientras que el segundo fue escogido por su cooperación deductiva en la promulgación de la ley de la tricotomía pendiente para los números cardinales:

- ❖ Un conjunto bien ordenado F es similar a ninguno de sus segmentos A. (§13.Teo. B, p. 144)
- ❖ Si F y G son cualquier par de conjuntos bien ordenados, entonces:
  (a) F y G son similares entre sí, ó
  (b) existe un segmento B_1 de G al cual F es similar, ó

(c) existe un segmento A_1 de F al cual G es similar; y cada uno de estos tres casos excluyen a los otros tres. (§13.Teo.N, p. 150)

En la siguiente sección de sus *Contribuciones,* Cantor de nuevo apela a nuestra facultad de la abstracción para que "llamemos al tipo ordinal de un conjunto bien ordenado F su 'número ordinal'" (p.152). Y puesto que un "número ordinal" es un "tipo ordinal", Cantor importa en la sección §14 a la aritmética que ya había desarrollado para los tipos ordinales en su primer artículo. Más aún, recurriendo al Teorema N de la sección §13, él finca la tricotomía para los números ordinales:

❖ Para cualesquiera dos números ordinales $\overline{\overline{F}}$ y $\overline{\overline{G}}$ se cumple excluyentemente que $\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{G}}$ ó $\overline{\overline{F}} < \overline{\overline{G}}$ ó $\overline{\overline{F}} > \overline{\overline{G}}$. (p. 153)

Donde:

- $\overline{\overline{F}} < \overline{\overline{G}}$ sii existe un segmento B_1 de G tal que $F \simeq B_1$.[21]

Teniendo a la tricotomía de la relación de orden para los números ordinales a su disposición, Cantor posee una vía para intentar exportarla a los números cardinales pues desde los albores del segundo artículo él anuncia lo siguiente:

> Entre los conjuntos simplemente ordenados, los "conjuntos bien ordenados" merecen una atención especial; pues sus tipos ordinales, que llamaremos "números ordinales", constituyen la materia natural para la definición exacta de los números cardinales transfinitos más grandes, la cual está en conformidad con aquella dada para el más pequeño número cardinal transfinito Aleph-cero... (Cantor 1897 vía 1915: 137)

Es decir, la construcción de los cardinales transfinitos se avisa supeditada a la de los ordinales transfinitos en pos de su exactitud. Ahora bien, si todo número cardinal fuese su vez un número ordinal, entonces la tricotomía de los ordinales quizás podría adecuarse a la relación de orden entre potencias de conjuntos para así lograr promulgar la ley de tricotomía de los números cardinales. Ponderada la utilidad de la edificación de los

[21] En la sección §13 de las *Contribuciones* se establece la validez de esta definición mediante el teorema §13.B (ya reproducido en el cuerpo del texto) y el teorema a continuación reproducido:

❖ Si un conjunto bien ordenado G tiene al menos un segmento para el cual no exista un segmento similar a él en el conjunto bien ordenado F, entonces todo segmento A de F debe tener un segmento B similar a él en G. (§13.Teo.M, p.149) números ordinales, ahora expondremos los principios proporcionados en las *Contribuciones* para realizarla, empezando por clarificar aquello que será construido.

Aunada a la tricotomía, la relación de orden entre los números ordinales es transitiva. Es decir, para cualesquiera tres números ordinales $\overline{F}$,$\overline{G}$, $\overline{H}$ se satisface que:

- Si $\overline{F}<\overline{G}$ y $\overline{G}<\overline{H}$ entonces $\overline{F}<\overline{H}$. (p.153)

Por lo tanto, los números ordinales al irse agrupando integran un "conjunto simplemente ordenado que más tarde también se mostrará como un conjunto bien ordenado"(p.153). En consecuencia, podemos irlos acomodando en una secuencia ascendente: $\overline{F}<\overline{G}<\overline{H}$.... Y la generación de esa secuencia es la que estará sujeta a la construcción presumida por posibilitar una incursión con mayor exactitud al dominio de los números transfinitos. Ahora bien, a lo largo de las *Contribuciones* se pueden identificar tres principios generadores de esa secuencia, los cuales ya habían sido enunciados por Cantor desde sus *Fundamentos* (1883). Y puesto que en esa artículo se enuncian con mayor generalidad esos principios, entonces de esa fuente ellos serán extraídos, sin descuidar a su articulación teórica dentro de la obra primordialmente estudiada en este capítulo, empero. El primero de ellos está relacionado con la operación de suma para los tipos ordinales y a continuación será reproducido:

> ...el principio de anexar una unidad a un número ya existente; lo llamo...el primer principio de generación de números... (Cantor 1883 vía 1976: 131)

Para clarificar esa "anexión", podemos acudir a la definición dada en las *Contribuciones* de la suma de dos tipos ordinales. Recordando, el resultado de esa operación es el tipo ordinal de la unión de dos conjuntos ajenos con el respectivo tipo ordinal de los dos sumandos. Es decir, para sumar cualesquiera dos números ordinales $\overline{F}$ y $\overline{G}$, primero debemos suponer la existencia de un par de conjuntos ajenos F' y G' tal que F$\simeq$F' y G$\simeq$G', luego se tiene que realizar la operación de unión (F',G') para finalmente abstraer al tipo ordinal $\overline{(F', G')}$. Por otro lado, debido a la definición de "conjunto bien ordenado" y a la de la relación de orden entre los números ordinales, se cumple que:

- $\overline{F}+\overline{G}$ también es un número ordinal. (§14.Teo.C, p.153)

❖ $\overline{\overline{F}} < \overline{\overline{F}} + \overline{\overline{G}}$ (§14.Teo.(2), p.153)

Por consiguiente, si $\overline{\overline{F}}$ es un número ordinal y $1=\overline{\overline{E_0}}$, entonces $\overline{\overline{F}} + 1$ sería un número ordinal (cerradura por §14.Teo.C) mayor que $\overline{\overline{F}}$ ($\overline{\overline{F}}<\overline{\overline{F}}+1$ por §14.Teo.(2)) . Así entonces, el Primer Principio de Generación articulado dentro de la teoría de las *Contribuciones,* indicaría que el número ordinal sucesor de $\overline{\overline{F}}$ se obtendría sumando a $\overline{\overline{F}}$ con el primer número ordinal:

PG1. suc($\overline{\overline{F}}$)= $\overline{\overline{F}}$ + 1.

Mientras que para respaldar esa manera de computar del sucesor, se debe tener una provisión inagotable de objetos distintos para realizar la unión (F,E_0), garantizando además que $\overline{\overline{F}}$ + 1 sea el único número ordinal que le siga inmediatamente a $\overline{\overline{F}}$. Puesto que la aprehensión sobre la fuente inacabable de objetos ya fue previamente tratada, entonces tal cuestión será la primera de las dos mentadas por ser atendida.

Recordando, el problema del suministro ilimitado de objetos distintos para la construcción de los números cardinales finitos, fue resuelto de dos maneras distintas. La primera consistía en hallar en el origen del concepto "número cardinal finito", los números naturales, a la infinidad de objetos distintos necesaria para la generación de la secuencia de ellos. Desgraciadamente tal táctica ahora no puede aplicarse, puesto que mediante los principios generadores de la secuencia creciente de los números ordinales, se pretende ir más allá del tipo ordinal de los números naturales. Es decir, la invocación de la infinitud de los números naturales sólo se podría realizar para respaldar a la construcción de los números ordinales finitos, mientras que son los números transfinitos los que se quieren también producir mediante el Primer Principio Generador.

Ante la insuficiencia de la infinitud de los números naturales, entonces podemos recurrir, tal como lo pide Cantor en sus *Fundamentos*, a nuestra habilidad de abstracción para apoyar al Primer Principio identificando "su base de generación en el repetido posicionamiento de unidades fundamentales vistas siempre del mismo modo" (Cantor 1883 vía 1976: 131). Concordantemente en las *Contribuciones*, esas "unidades fundamentales" aparecen otra vez como los elementos constitutivos de los números ordinales.

Recordando, un número ordinal de acuerdo a su presentación en las *Contribuciones*, es un conjunto cuyo proceso de abstracción conserva al buen orden de precedencia de sus “unidades fundamentales”. Por lo que bajo esta concepción de número ordinal, concatenar una unidad a un número ordinal no luciría como una operación sospechosa, sobretodo, si la percibimos desde nuestras intuiciones o conocimientos aritméticos.

Como fue expuesto con antelación, desde la antigüedad (Libro VII de Euclides) se ha considerado alguna variante de la agrupación de unidades como la regla de producción típica para los números naturales, mientras que esa anexión de unidades es propicia a su rigurosa pero trabajable formulación matemática tal como lo mostró Peano en sus *Principios*. Consecuentemente, el proceso de abstracción orientado a la constitución de los números ordinales y cardinales mediante unidades, es decir un proceso para construir ciertos conjuntos, estaría respaldado por nuestros atávicos conocimientos o intuiciones sobre la conformación de los números naturales. Por lo tanto, otra vez podríamos recurrir a nuestra intuición o conocimiento aritméticos[22] para respaldar a las construcciones conjuntistas relacionadas con el Primer Principio Generador dentro de la teoría las *Contribuciones* (i.e. PG1). Sin embargo, si aceptamos esa dependencia, entonces se restaría plausibilidad a la interpretación de la teoría de los números transfinitos como una reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos.

Por otro lado y como segunda opción, podemos de nuevo utilizar algunos recursos de la teoría de conjuntos para robustecer al Primer Principio Generador de los números ordinales. Tal como se planteó en la segunda manera para reforzar la construcción de los números cardinales finitos, PG1 puede hacer uso de los conjuntos unitarios para determinar al sucesor de un número ordinal. De este modo, si $\overline{F}$ es un número ordinal, entonces su sucesor sería igual al tipo ordinal de la unión de F con el unitario de F. Es

[22] Otra manera no aritmética de interpretar a los números ordinales y cardinales de Cantor, sería asociar a la facultad de abstracción por él pregonada con la capacidad de identificar clases de equivalencia. Es decir, un número cardinal seria el conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos con la misma potencia, es decir, un número cardinal sería una clase de equivalencia respecto a la relación de equivalencia “$\sim$” . Mientras que un número ordinal, sería una clase de equivalencia con respecto a la relación de similitud “$\simeq$”. No obstante, esta interpretación además de poder tornar en paradójica, se aleja de lo escrito por Cantor respecto a lo que él entendía por número cardinal y número ordinal.

decir, $\overline{\overline{F}}+1=\overline{\overline{(F,\{F\})}}$ donde la relación de precedencia en $\overline{\overline{F}}+1$ conservaría al buen orden de F y sólo le agregaría a F como su elemento máximo. Mientras que para respetar la restricción cantoriana de sólo utilizar conjuntos ajenos en la operación de la unión, entonces se tendría que asegurar la inexistencia de conjuntos que se pertenezcan a ellos mismos, pues de lo contrario $F \cap \{F\} \neq \emptyset$. O por otro lado, se podría plantear que los elementos del número ordinal $\overline{\overline{F}}$ son los números ordinales que le preceden en lugar de las unidades fundamentales propuestas por Cantor. Cualquiera de las dos opciones previas,[23] nos aleja un poco de las *Contribuciones* por lo que no serán exploradas. Basta con haber señalado la disponibilidad de recursos teóricos al alcance de las *Contribuciones,* para delinear a PG1 y así librarlo de la preocupación por una provisión inacabable de objetos distintos.

A pesar de la inyección aritmética o conjuntista a la fuente inagotable de objetos distintos, PG1 debe cumplir otra propiedad para asegurar su funcionamiento, a saber, la inexistencia de un número ordinal entre $\overline{\overline{F}}$ y $\overline{\overline{F}}+1$. Es decir, este principio debe construir a la secuencia de números ordinales con un orden discreto pues de lo contrario, no se podría afirmar que $\overline{\overline{F}}+1$ sea el sucesor de $\overline{\overline{F}}$. Afortunadamente, Cantor sí atiende explícitamente a esta petición dentro de sus *Contribuciones* y desde su sección §5, relativa a los números cardinales finitos, establece un teorema sobre su orden discreto que fue con antelación transcrito. Más aún, esta cuestión será retomada desde una perspectiva ordinal en el apartado §15 del segundo artículo, lugar donde empezarán a desfilar los números transfinitos de la segunda clase. El argumento por él allí ofrecido sobre dicha inexistencia a continuación será reproducido con algunos ligeros cambios en la notación:

Sea γ cualquier número ordinal menor que $\overline{\overline{F}}+1$. Por la ejecución de PG1, tendríamos que $\overline{\overline{F}}+1=\overline{\overline{(F,g)}}$ para algún $g \notin F$ (v.gr. $g=\{F\}$). Ahora bien, debido a la

[23] Cabe mencionar que cualquiera de las dos rutas sugeridas temprano o temprano pasarán por John Von Neumann. Por ejemplo, en su artículo titulado "Zur Einfuhrung der transfmiten Zahlen" (1923) encontraremos la definición de número ordinal como el conjunto de los ordinales que le preceden. Mientras que en "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" (1925) hallaremos una discusión sobre cómo restringir axiomáticamente la existencia de conjuntos que se pertenezcan a sí mismos.

definición de la relación de orden entre números ordinales, entonces existe un conjunto bien ordenado G tal que $\gamma=\overline{\overline{G}}$ y G es un segmento inicial de (F,*g*). Consecuentemente, G=F ó G es un segmento inicial de F. Por consiguiente, $\gamma<\overline{\overline{F}}$ ó $\gamma=\overline{\overline{F}}$. En conclusión, $\overline{\overline{F}}+1$ es el número ordinal que le sigue inmediatamente a $\overline{\overline{F}}$ puesto que todo número ordinal γ que sea menor a $\overline{\overline{F}}+1$, es igual a $\overline{\overline{F}}$ o es menor a $\overline{\overline{F}}$. (p. 161).

Una vez solventada la articulación del Primer Principio Generador a través de su formulación en PG1, ya se pueden exponer los otros principios que nos permitirán incursionar con mayor profundidad hacia los números ordinales transfinitos presentados en la sección §15. Ahora se expondrá al segundo de ellos, principio cuya presentación por su mayor generalidad también será copiada de los *Fundamentos*:

> ...si cualquier secuencia [ascendente]de números existentes es tal que no tiene un máximo, entonces un nuevo número es creado con base en el segundo principio de generación, el cual debe ser pensado como el límite de esos números y está definido como el siguiente número mayor a todos ellos. (Cantor 1883 vía 1976: 132)

Con antelación fue mencionado que el "tipo ordinal límite" es introducido por Cantor desde el primer artículo de sus *Contribuciones.* Sin embargo, es en el segundo donde este concepto impulsa la generación de números transfinitos al vincularse con el buen orden y por consiguiente, de allí será reproducida la articulación teórica de "número ordinal límite". Ahora bien, al igual que el Primer Principio Generador, el segundo hace uso de la operación suma para su especificación, aunque en este caso mediante un número infinito pero bien ordenado de sumandos. Previsoramente, Cantor desde la sección §12 establece el siguiente teorema:

- Si G es un conjunto bien ordenado y para cada $i\in G$ se tiene que F_i también es un conjunto bien ordenado, entonces (F_1, F_2, F_3,..., F_v,....) es un conjunto bien ordenado. (§12.Teo.E p. 140-1)

Y el teorema anterior tiene como consecuencia la cerradura de la suma de un número infinito pero bien ordenado de números ordinales:

- Si β_1, β_2, β_3,... es una sucesión infinita de números ordinales, es decir para cada β_i el índice *i* pertenece a un conjunto bien ordenado F no finito, entonces existe un número ordinal β tal que $\beta=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots$. (§14.Teo.16, p. 156)

Mientras que Cantor asienta al sustrato conceptual del Segundo Principio Generador, el "número ordinal límite", mediante el siguiente teorema:

- Sea $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_v,\ldots$ una secuencia ascendente de números ordinales, es decir para toda *v* se cumple que $\alpha_{v+1} > \alpha_v$ y $v \in G$ donde G es un conjunto bien ordenado no finito, entonces existe el "número ordinal límite" β tal que:
  a) Para todo $v \in G$, se tiene que $\beta > \alpha_v$.
  b) Para cualquier número ordinal β' menor que β, existe una $v' \in G$ tal que para toda $v \in G$ y $v > v'$ se cumple que $\alpha_v > \beta'$. (p.157)

Ahora bien, Cantor justifica al teorema previo señalando que si $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=(\alpha_2 - \alpha_1)$, $\beta_3=(\alpha_3 - \alpha_2),\ldots$, entonces $\beta_1, \beta_2, \beta_3,\ldots$ sería una sucesión infinita de números ordinales y por el teorema de cerradura previo (§14.16), entonces existiría un número ordinal β tal que $\beta=\beta_1+ \beta_2+ \beta_3+\ldots$ Mientras que si δ y γ son dos números ordinales con $\delta<\gamma$, entonces "γ-δ" denota al número ordinal que satisface la ecuación $\delta+x=\gamma$[24] (p.155). Así entonces, para cualquier α_v tendríamos que$\beta_1+ \beta_2+\ldots+ \beta_v=\alpha_v$ y por consiguiente, $\alpha_v + \beta_{v+1}+\beta_{v+2} +\ldots= \beta$ (p. 157). Por lo tanto debido la desigualdad previamente enunciada para el cómputo del ordinal sucesor, tendríamos que a)$\alpha_v<\beta$. Mientras que si $\beta'<\beta$, $\beta'=\overline{\overline{F'}}$ y $\beta= \overline{\overline{(F_1, F_2, F_3, \ldots)}}$ donde $\beta_i=\overline{\overline{F_i}}$, entonces F' sería un segmento (inicial) de (F_1, F_2, F_3,…). En consecuencia, debe existir un v' en alguna F_k que determine a F' como segmento inicial de (F_1, F_2, F_3,…). Por lo tanto, F' sería un segmento de (F_1, F_2, … ,F_k) y puesto que (F_1, F_2, … ,F_k) es un segmento de (F_1, F_2, F_3,…), entonces (b) para toda $v>v'$ se cumple que $\alpha_v > \beta'$ (p.158).

Probados las propiedades a) y b) del concepto "número ordinal límite de una secuencia ascendente" (también llamada "fundamental"), Cantor luego nos ofrece una expresión para denotarlo, "$\lim_v \alpha_v$", además de una fórmula concisa para computarlo:

PG2. $\mathbf{\lim_v \alpha_v= \alpha_1 + (\alpha_2 -\alpha_1) + (\alpha_3 -\alpha_2) + \ldots + (\alpha_v -\alpha_{v-1})+\ldots}$ (p. 158)

[24] Para garantizar la existencia del número ordinal que solucione esa ecuación, Cantor recurre al concepto de "resto" que es la noción complementaria a la de "segmento". Es decir, si F es un segmento de G, entonces todos los elementos de G que no están en F integran a un "resto" de G. Por lo que si $\delta<\gamma$, $\delta=\overline{\overline{F}}$ y $\gamma=\overline{\overline{G}}$, entonces F es un segmento de G y por consiguiente, el tipo ordinal del complemento de F respecto a G sería igual al número ordinal γ-δ.

De este modo, la formulación de PG2 correspondería a la articulación teórica dentro de las *Contribuciones,* del Segundo Principio Generador de los números ordinales descrito en los *Fundamentos*. La satisfacción de la condición a) nos indicaría que todos los números ordinales α_v son menores al número ordinal $\lim_{\nu} \alpha_{\nu}$, mientras que el cumplimiento de b) además nos señalaría que $\lim_{\nu} \alpha_{\nu}$ es el "siguiente número ordinal mayor a todos ellos". Y esta última condición, equivaldría a la exigencia demanda para el Primer Principio Generador de que $\alpha + 1$ sea el número ordinal que le sigue inmediatamente a α. Teniendo a nuestra disposición al par de principios generadores PG1 y PG2, ya estamos en una posición teórica que nos permite escalar en la sucesión creciente de los números ordinales hacia lo infinito.

Recapitulando, a partir de un objeto e_0 Cantor nos pide que abstraigamos primeramente al conjunto $E_0=\{e_0\}$ y luego al tipo ordinal de ese conjunto, el cual corresponde al primer número ordinal etiquetado como "1", es decir $1=\overline{E_0}$. Luego mediante el principio PG1 podemos ir construyendo la sucesión creciente de números ordinales 1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1,..., los cuales llamaremos números ordinales finitos. Hasta el momento esta generación no diferiría del proceso de construcción de los números cardinales finitos pues como fue con antelación mencionado, Cantor desde el primer artículo demuestra que cualquier conjunto de números cardinales finitos tiene un elemento mínimo (Teorema F de §5), lo cual equivale a decir que el conjunto de los números cardinales finitos está bien ordenado (Teorema B de §12).

En el sentido inverso, a cualesquiera dos números ordinales α, β obtenidos exclusivamente mediante el principio PG1 no se les puede abstraer un mismo número cardinal finito *v*. Para demostrarlo, Cantor nos indica que asumamos sin pérdida de generalidad, la desigualdad $\alpha<\beta$. Luego por la definición de relación de orden entre números ordinales, existirían dos conjuntos bien ordenados F,G tal que $\alpha=\overline{F}$, $\beta=\overline{G}$ y F es un segmento de G. Puesto que F es un segmento de G, entonces F es una parte de G, lo cual aunado al Teorema C de la sección §6, proposición previamente discutida para precisar al concepto "finito", conllevaría que $\overline{\overline{F}}\neq\overline{\overline{G}}$. (p. 159). Por lo tanto, todo número ordinal obtenido mediante PG1 a partir del primer número ordinal, sólo se corresponde con un único número cardinal finito, mientras que por §5.Teo.F y §Teo.12, a todo número cardinal finito le corresponde únicamente un número ordinal generado por PG1 a partir del 1. En suma, "los números ordinales finitos coinciden en sus propiedades con los números cardinales finitos" (p. 159).

Sin embargo, cuando se rompe la barrera de lo finito también parece desquebrajarse la coincidencia entre lo ordinal y lo cardinal. Desde la perspectiva cardinal se debe considerar a la totalidad de los números ordinales finitos para abstraer al primer número cardinal infinito ($\aleph_0$), en contraste desde un punto de vista ordinal, se tiene que utilizar al principio PG2 para determinar al primer número ordinal infinito (ω). Es decir, ω es igual al número ordinal límite de la sucesión ascendente de todos los números ordinales finitos:

$$\therefore \quad \omega = \lim_{\nu} \nu = 1 + ((1+1)-1) + (((1+1)+1)-(1+1)) + \ldots \qquad \text{(p. 160)}$$

A parte del modo distinto de generación respecto a $\aleph_0$, la definición de ω parece portar cierta circularidad contagiada por la articulación misma del Segundo Principio Generador. Pues ω, el primer ordinal transfinito, de acuerdo a PG2 sería el resultado de la suma de números ordinales finitos β_v con $\beta_v = v-(v-1)$. Inquietantemente, todos los índices v de los sumandos β_v, son a su vez números ordinales cuyo índice v variaría dentro de un conjunto bien ordenado G con el mismo tipo ordinal que ω. En otras palabras, ω es el número ordinal limite de una secuencia ascendente de números ordinales cuya totalidad tiene el mismo tipo ordinal de ω. Es decir, el *definiendum* ω luce como integrante de su *definens*, pues $\omega = \lim_{\nu} \nu$ donde $v \in G$ y $\overline{G} = \omega$.

Afortunadamente, como una solución al problema de circularidad detectado para el principio PG2, se puede interpretar al tercer principio generador delineado por Cantor en los *Fundamentos* con las siguientes palabras:

> Si observamos que los números anteriores y aquellos que les siguen inmediatamente, satisfacen una cierta condición, entonces esta condición, si se impone como una restricción a todos los números todavía por ser formados, aparece como un tercer principio, que llamaré un principio restringente o limitante...
>
> (Cantor, 1883 vía 1976: 134)

Y dicha condición, es precisamente aquella a través de la cual se establecerá el vínculo entre los números ordinales y los números cardinales que fomentará la “comprensión de la conexión” de la secuencia ascendente de los números transfinitos. Es decir, cada enunciación de esa condición ayudará a clasificar a los números ordinales, mientras que esas clases a su vez asistirán a “la definición exacta” de los números cardinales transfinitos. Todos estos beneficios se obtendrán gracias a que el Tercer Principio Restringente, se articulará mediante la potencia de los números ordinales previamente generados. Recordadas las ganancias prometidas por Cantor, empezaremos con la enunciación de Tercer Principio Restringente para la primera clase numérica en pos de la recolección de esos beneficios.

Como ya fue señalado, si vamos aplicando el principio PG1 desde el primer número ordinal, entonces coincidente mas no casualmente iremos obteniendo a los números cardinales finitos. Por lo tanto, podemos identificar a la primera clase de números ordinales como aquella de cuyos miembros se abstraen potencias finitas. Mientras que la formulación de esta condición, primera instancia del Tercer Principio Restringente, le permite a Cantor abstraer al conjunto que la satisfaga. Es decir, sea el conjunto F={ α | α es un número ordinal para el cual existe un número cardinal finito *v* tal que si $\alpha=\overline{F_\alpha}$ entonces $v=\overline{\overline{F_\alpha}}$ }. Y debido a la equivalencia entre los números ordinales y cardinales finitos, entonces el conjunto F puede ser producido mediante el proceso de construcción de los números cardinales finitos o través del empleo reiterado del principio PG1.

Ahora bien, la constitución del conjunto F mediante el Tercer Principio Restringente, anularía al círculo vicioso denunciado en la obtención de ω mediante el principio PG2. Dicho principio nulifica la curvatura de ese círculo puesto que nos hace reparar en algunas de las características de nuestra facultad de abstracción, habilidad indispensable para recorrer la teoría de las *Contribuciones*. Tal como ya fue mencionado, el resultado de la abstracción difiere de su fuente y además, no es lo mismo el resultado que el proceso. En primer lugar, es una llana confusión acusar que F sea igual ω, puesto que en realidad $\omega=\overline{F}$. Segundo, también es un error afirmar que el resultado de la abstracción ω forma parte su proceso de abstracción codificado en el principio PG2. Por un lado es el principio PG2 el responsable de generar a ω como $\omega=\lim_{v} v$, mientras que por el otro es el Tercer Principio el encargado de construir al conjunto F para provisionar a PG2 de los índices v para las β_v (recordando $\beta_v=v-(v-1)$). Por lo tanto, sólo después de haber generado al número ordinal ω y no antes, sería válido afirmar la igualdad $\omega=\bar{F}$ y en consecuencia, no hay tal círculo vicioso.

Más aún, el Tercer Principio Restringente no sólo ayuda a definir con precisión al primer número ordinal transfinito ω, sino también asiste a la construcción de números ordinales cuya potencia sea cada vez más grande que la del conjunto de los números ordinales finitos. Y si ese principio sirve para tal fin constructivo, es porque permite una clasificación de todos los números ordinales en términos de potencias. Es decir, si la primera clase numérica fue definida mediante la condición de finitud, entonces se puede esperar que la segunda sea determinada también mediante la satisfacción de alguna condición especificada mediante números cardinales. Mientras que nuestras expectativas se ven de sobra cumplidas, cuando una versión general de esa condición es formulada por Cantor en sus *Contribuciones* de la siguiente manera:

> A cada uno de los números cardinales transfinitos a, le pertenece exclusivamente una infinidad de números ordinales que forman un sistema conectado y unitario. Llamaremos a ese sistema "la clase numérica Z(a)". (Cantor 1897 vía 1915: 159)

La condición previa puede fácilmente generalizase reformulándola de la siguiente manera: "a todo número cardinal k le corresponde una única clase Z(k) de números ordinales conformada por los números ordinales cuya potencia de sus respectivos conjuntos bien ordenados sea igual a k". Y si Cantor no prefirió esta versión más global, probablemente haya sido porque la clase de cada número cardinal finito sería unitaria y sólo contendría a su equivalente número ordinal finito. Por lo que al fijarnos sólo en los números cardinales transfinitos, la secuencia ascendente de clases de números ordinales se determinaría actualizando esta condición, i.e. el Tercer Principio Restringente, tal como a continuación se muestra:

Clase_1= {β | β es un número ordinal tal que si β=$\overline{F_\beta}$ entonces $\overline{\overline{F_\beta}}$ es igual a un número cardinal finito}

Clase_2={β | β es un número ordinal tal que si β=$\overline{F_\beta}$ entonces $\overline{\overline{F_\beta}}$=$\overline{\overline{\text{Clase}_1}}$ }

Clase_3={β | β es un número ordinal tal que si β=$\overline{F_\beta}$ entonces $\overline{\overline{F_\beta}}$=$\overline{\overline{\text{Clase}_2}}$}

....

Clase_α={β | β es un número ordinal tal que si β=$\overline{F_\beta}$ entonces $\overline{\overline{F_\beta}}$=$\overline{\overline{\text{Clase}_{\alpha-1}}}$ }

....

En suma, la secuencia de los números ordinales crecería de manera estratificada y su ascenso se lograría gracias a los tres principios expuestos. El primer elemento de la primer clase se obtendría mediante la abstracción del tipo ordinal de E_0={e}, mientras que sus demás elementos se producirían a través del Primer Principio Generador (PG1). Luego el primer elemento ω de la clase segunda se obtendría mediante el Segundo Principio Generador (PG2) restringido por el Tercero: $\omega=\lim_{v} v$ donde $v \in F$ y F por el Tercer Principio sería igual al conjunto de todos los números ordinales finitos. Mientras que los siguientes elementos de la segunda clase se obtendrían por medio de la aplicación de PG1 y PG2 a partir de ω . Y en general, el primer elemento de la Clase_α se obtendría aplicando PG2 con la restricción dada por el Tercer Principio a la secuencia ascendente de todos los números ordinales pertenecientes a la $\text{Clase}_{\alpha\text{-}1}$, puesto que ellos serían todos los números ordinales cuyos correspondientes conjuntos bien ordenados tendrían una potencia igual a $\overline{\overline{\text{Clase}_{\alpha-2}}}$. Mientras que los siguientes elementos de la Clase_α se producirían mediante la aplicación de PG1 y PG2 a partir del primer elemento de esa clase. Así entonces, el proceso de construcción estratificada de la secuencia de números ordinales se podría expresar de la siguiente escueta manera:

Clase_1= {1, suc(1), suc(suc(1)), ..., suc(...suc(1)...),...} donde 1=$\overline{E_0}$

Clase_2={ω,suc(ω), suc(suc(ω)),..., $\lim_{v}(\omega + v)$, suc($\lim_{v}(\omega + v)$), suc(suc($\lim_{v}(\omega + v)$)), ...,$\lim_{v}(\lim_{v}(\omega + v)+v)$), suc($\lim_{v}(\lim_{v}(\omega + v)+v)$)),...,$\lim_{v}$(...($\lim_{v}$(... (ω + v)+...)+v),....}

donde $\omega=\lim_{v} v$ con $v\in$ Clase$_1$

...

Clase$_\alpha$={ $\lim_{\beta}\beta$ con $\beta\in$ Clase$_{\alpha-1}$, suc($\lim_{\beta}\beta$),..., $\lim_{\gamma}(\lim_{\beta}\beta + \gamma)$ con $\gamma\in$ Clase$_\delta$ y $\delta<\alpha$,...}

....

Finalmente, la condición en términos de la potencia de la clase previa pedida por el Tercer Principio Restringente para definir a la siguiente clase de los números ordinales, a su vez es utilizada por Cantor para ir construyendo a la secuencia ascendente de números cardinales transfinitos:

$\aleph_0=\overline{\overline{\text{Clase}_1}}$

$\aleph_1=\overline{\overline{\text{Clase}_2}}$

$\aleph_2=\overline{\overline{\text{Clase}_3}}$

...

$\aleph_\alpha=\overline{\overline{\text{Clase}_{\alpha+1}}}$

...

Ahora bien, Cantor en sus *Contribuciones* sólo aborda hasta la segunda clase de los números ordinales, mientras que allí enuncia y demuestra lo previamente aseverado acerca de la construcción de ella:

- La segunda clase numérica Z($\aleph_0$) es la totalidad {α} de tipos ordinales α de conjuntos bien ordenados con un número cardinal $\aleph_0$. (p. 160)
- La segunda clase numérica tiene un número mínimo $\omega=\text{Lim}_{v} v$. (p. 160)
- Si α es un número de la segunda clase, el número α+1 le sigue como el siguiente número mayor de la misma clase. (p. 161)
- Si α_1, α_2,..., α_v,... es cualquier serie fundamental de números de la primera o segunda clase, entonces el número $\text{Lim}_{v}\alpha_v$ les sigue a ellos en orden y pertenece a la segunda clase numérica. (p.161)

- Todo número α de la segunda clase numérica ó (a)surge del siguiente número más pequeño α_{-1} mediante la adición de 1 ($\alpha=\alpha_{-1}+1$) ó (b) existe una serie fundamental $\{\alpha_v\}$ de números de la primera o segunda clase tal que $\alpha=\underset{v}{\mathrm{Lim}}\,\alpha_v$. (p.167)

Por otro lado, Cantor además de asentar deductivamente la construcción de la segunda clase de números ordinales dentro de sus *Contribuciones*, también apuntala mediante el buen orden a la generación del siguiente número cardinal transfinito:

- La potencia del la totalidad $\{\alpha\}$ de todos los números α de la segunda clase numérica no es igual a $\aleph_0$. (§16.Teo.D,p 171)

La demostración ofrecida por Cantor del Teorema §16.D será a continuación generalizada para enfatizar que es el buen orden quien nos permite aseverar que "la potencia de la totalidad de los números de la clase β es distinta a la de la clase previa". En conciso, el fundamento que sostiene la desigualdad $\aleph_\beta\neq\aleph_{\beta+1}$, es el buen orden de la clase numérica β. Supóngase que $\aleph_\beta=\aleph_{\beta+1}$, es decir $\mathrm{Clase}_\beta\sim\mathrm{Clase}_{\beta+1}$. Así entonces, la totalidad de los números γ de la $\mathrm{Clase}_{\beta+1}$ podría indexarse mediante todos los números de la Clase_β: $\gamma_{\beta_1}, \gamma_{\beta_2},..., \gamma_{\beta_{\lim_v v}},..., \gamma_{\beta_\alpha},....$ Luego, defínase la secuencia ascendente $\{\gamma_{\beta_\alpha}\}$ de todos los números de la $\mathrm{Clase}_{\beta+1}$ de la siguiente manera: el número ordinal que le sigue inmediatamente a γ_{β_α} es aquel con el índice mínimo $\beta_\delta\in\mathrm{Clase}_\beta$ que satisfaga $\gamma_{\beta_\alpha}<\gamma_{\beta_\delta}$. Cabe remarcar que la existencia de ese β_δ está respaldada por el buen orden de la Clase_β. Luego aplíquese el principio PG2 a esa secuencia ascendente $\{\gamma_{\beta_\alpha}\}$ para obtener el ordinal límite $\sigma=\lim_{\beta_\alpha}\gamma_{\beta_\alpha}$. En consecuencia, para todo γ_{β_α} se cumple que $\gamma_{\beta_\alpha}<\sigma$. Sin embargo $\sigma\in\mathrm{Clase}_{\beta+1}$ pues si F es un conjunto con el tipo ordinal σ, entonces la potencia de F es igual a la de la Clase_β, debido a que PG2 para generar a σ utilizó como índices a los ordinales de la Clase_β. Por consiguiente, debe existir $\beta_\phi\in\mathrm{Clase}_\beta$ tal que $\gamma_{\beta_\phi}=\sigma$, lo cual es un absurdo pues por la generación de σ se tiene que $\gamma_{\beta_\phi}<\sigma$. En consecuencia, $\aleph_\beta\neq\aleph_{\beta+1}$.

Junto al Teorema §16.D, Cantor establece a la siguiente proposición para precisar mejor el lugar ocupado, respecto a su relación de orden cardinal, por la potencia de la segunda clase numérica:

- ❖ Cualquier totalidad de números distintos de la segunda clase numérica, si es infinita, entonces o tiene el número cardinal $\aleph_0$ o el número cardinal de la segunda clase numérica. (§16.Teorema E, p. 172)

Cabe señalar que en la demostración del Teorema §16.E, de nuevo el buen orden de las clases numéricas sirve de puntal deductivo y otra vez sobre él directamente puede levantarse la generalización de esa proposición. Pues por el teorema §13.O ya antes enunciado, cualquier totalidad infinita F de números distintos de la bien ordenada Clase_β, es decir cualquier parte infinita F de la Clase_β, o es similar a un segmento C de esa clase o es similar a la clase misma. Es decir, ó $F \simeq C$ ó $F \simeq \text{Clase}_\beta$. Luego si $F \simeq \text{Clase}_\beta$ entonces $F \sim \text{Clase}_\beta$ por lo que el número cardinal de F seria igual a la potencia de la clase numérica β. Por otro lado[25], puesto que C es un segmento de la bien ordenada Clase_β, C a su vez sería un conjunto bien ordenado, por lo que su tipo ordinal correspondería al número ordinal $\overline{C}$. Consecuentemente, existiría γ con $1<\gamma<\beta$ tal que $\overline{C} \in \text{Clase}_\gamma$ y en concordancia con el Tercer Principio Restringente, entonces $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{\text{Clase}_{\gamma-1}}}$. Es decir, el número cardinal de F debe ser igual a la potencia de alguna clase numérica γ-1 con $\gamma>1$. En suma, cualquier totalidad infinita de números distintos de la clase numérica β, o tiene el número cardinal de la clase numérica β o tiene el número cardinal de una clase numérica anterior.

Y como consecuencia del Teorema §16.E, se deriva al Teorema §16.F, el cual termina de afianzar a la potencia de la segunda clase numérica, como el siguiente número cardinal transfinito después de Aleph-cero:

- ❖ La potencia de la segunda clase numérica es el siguiente número cardinal transfinito Aleph-uno. (§16.Teorema F, 173)

Mientras que una versión más general del teorema previo justificable mediante la formulación más general del Teorema §16.E anteriormente demostrada, aseveraría que la potencia de la clase numérica $\beta+1$ es el número cardinal transfinito $\aleph_{\beta+1}$ que le sigue

[25] Cabe confesar que a partir de aquí la demostración de la generalización del Teorema E difiere de la original, pues Cantor aprovecha que C es un segmento de la segunda clase y por consiguiente, si α_0 es el elemento que define a ese segmento, i.e. $C=\{\alpha \mid \alpha<\alpha_0 \text{ y } \alpha \in \text{Clase}_2\}$, entonces $\overline{C} = \alpha_0 - \omega$. Por lo tanto, $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ y por consiguiente dado que C es infinito, entonces $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{\omega}} = \aleph_0$. Ahora bien, en lugar de reproducir o intentar generalizar la prueba original del Teorema E, se optó por reformularla para enfatizar la dependencia en el buen orden y en los principios generadores.

inmediatamente a Aleph-beta ($\aleph_\beta$). De este modo deductivo, se confirman las ganancias pronosticadas por Cantor pues ahora ya podemos avanzar con pasos firmes en la secuencia ascendente de números cardinales transfinitos: $\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\ldots<\aleph_\beta<\ldots$

En resumen, el buen orden es el concepto clave para ir avanzando más allá de lo finito tanto en los números ordinales como en los cardinales. En primer lugar, los conjuntos bien ordenados son la "materia natural" para la abstracción de los números ordinales y a su vez estos últimos sirven para la "definición exacta" de los números cardinales. Por lo tanto, el buen orden abastece de material de construcción para la teoría de los números transfinitos.

Más aún, la formulación misma de los principios generadores de los números ordinales está en sintonía con la enunciación del concepto "buen orden" dentro de las *Contribuciones*. Recordando, en lugar de la petición ahora común sobre la existencia de un elemento mínimo para cualquier subconjunto de un conjunto bien ordenado, Cantor exige que haya una mínima cota superior para cualquier subconjunto acotado de un conjunto bien ordenado. Y esta demanda pierde su excentricidad cuando nos percatamos de que los principios generadores justamente proveen esa mínima cota superior: el primero lo hace para todo subconjunto acotado de un conjunto bien ordenado finito y el segundo lo hace para uno cuya infinidad es condicionada por el tercero. Por lo tanto, en el concepto del buen orden se codifica al plano mediante el cual se irán produciendo los números ordinales.

En segundo lugar, el buen orden es utilizado para la edificación de las demostraciones de varias proposiciones importantes en la teoría de las *Contribuciones.* Por ejemplo, fue exhibido su uso como apoyo deductivo en el establecimiento de la secuencia ascendente de los Alephs como la sucesión creciente de los números cardinales transfinitos. Ahora bien, si el buen orden también codifica un plano justificativo será algo discutido en la siguiente sección, cuando la regla de inferencia protagonista de esta tesis vuelva a ser el tema de la discusión.

Más aún, el asentamiento en el buen orden de la secuencia fundamental de los Alephs ayuda a cumplir con el pendiente que motivó nuestro adentramiento en la sucesión de los números ordinales transfinitos: la ley de tricotomía para los números cardinales. Pues si todo número cardinal es la potencia de una clase numérica de ordinales tal como lo pide el Tercer Principio Restringente, entonces todo número cardinal pertenecería a la secuencia ascendente de Alephs. Por consiguiente la relación de orden para los cardinales tornaría en total gracias a la ley de tricotomía de los números ordinales. Es decir, para cualquier par de números cardinales $\bar{\bar{F}}$, $\bar{\bar{G}}$ existirían $\aleph_\alpha, \aleph_\beta$ tal que $\bar{\bar{F}}=\aleph_\alpha$, $\bar{\bar{G}}=\aleph_\beta$ y debido a que $\overline{\aleph_\alpha}$, $\overline{\aleph_\beta}$ son números ordinales[26], su ley de tricotomía se puede transmitir a la relación de orden entre los cardinales: $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$ si $\overline{\aleph_\alpha}<\overline{\aleph_\beta}$. En suma, el buen orden sirve para justificar propiedades esenciales, al menos juzgadas así por Cantor, de los números ordinales y cardinales.

En suma, debido al papel constructivo y a la labor justificativa desempeñados por el buen orden, doble función reminiscente de la fungida por la inducción matemática en la aritmética, tal concepto puede considerarse como fundamento de la teoría de los números transfinitos. Es decir, cuando una noción participa en la constitución de sus objetos teóricos de tal manera que favorece y valida a las justificaciones de las propiedades de ellos, entonces ella se ha ido perfilando a lo largo de este trabajo como ejemplo de un fundamento de una teoría. Y si la inducción matemática y ahora el buen orden son instancias de esa clasificación, es porque su rol armónica en la justificación de

---

[26] La justificación de que $\overline{\aleph_\alpha}$, $\overline{\aleph_\beta}$ son números ordinales reside en el segundo y tercer principio generador, pues $\overline{\aleph_\alpha}$ correspondería al primer número ordinal de la clase numérica $\alpha+1$ mientras que $\overline{\aleph_\beta}$ sería el primero de la clase $\beta+1$. Sin embargo, debido a que la abstracción del tipo ordinal usual y correctamente (pues evita mayores confusiones) es propuesta por Cantor a partir de conjuntos cuyos elementos no son "unidades fundamentales", entonces otra manera de establecer la tricotomía para los números cardinales sería la siguiente: $\bar{\bar{F}}<\bar{\bar{G}}$ si $\alpha<\beta$ con $\bar{\bar{F}}=\aleph_\alpha$ y $\aleph_\beta=\bar{\bar{G}}$. Ahora bien, puesto que α,β son números ordinales, entonces su satisfacción de la ley de tricotomía se propaga hacia la relación de orden entre los Alephs y esta última a su vez se transmite hacia la relación de orden entre números cardinales. Por otro lado, al reconocer que los índices de las clases numéricas a su vez son números ordinales, entonces utilizando las enseñanzas de Cantor podemos añadir al Tercer Principio Restringente su modulación sobre cardinales no nada más relativos a la clase numérica previa, sino a una unión infinita de ellas. Por ejemplo, la clase numérica ω estaría conformada por los números ordinales cuya potencia sea igual a la unión de todas las clases numéricas finitas:

$$\text{Clase}_\omega=\{\beta \mid \beta \text{ es un número ordinal tal que si } \beta=\overline{F_\beta} \text{ entonces } \bar{\bar{F}}_\beta=\overline{\overline{\bigcup_{v\in\omega} \text{C lase}_v}}\}$$

De este modo, la escalera del buen orden desplegada por los tres principios generadores ascendería todavía mucho más lejos del infinito de la fuente de la abstracción, el tipo ordinal ω de los números naturales.

las propiedades y en la constitución de sus objetos téoricos, establece la sinergia entre la pureza y fecundidad que fue reconocida como el rasgo más marcado de un fundamento. Con tal de seguir clarificando lo que se entiende por tal, en la siguiente sección de este capítulo será analizada con mayor meticulosidad la tarea justificativa del buen orden comparándola con la del fundamento aquí identificado en la aritmética. Debido a que este apartado se ha concentrado más en la explicación de su función constitutiva mostrando cómo el buen orden participaba en la articulación teórica de los principios generadores de los números ordinales, ahora se clausurará esta sección discutiendo si sobre ese concepto también se pueden edificar a los números naturales.

En esta parte final, de nuevo la abstracción, al haber sido involucrada por Cantor en la gestación de la teoría de los números transfinitos, será un factor en la argumentación acerca de si el buen orden puede ser también un constituyente o no de los números naturales. En la sección previa fue señalado que los productos de la abstracción difieren de su fuente aunque los conceptos por ese proceso obtenidos puedan mejorar nuestra comprensión de ella. Y si ese par observaciones fueron desde entonces hechas, fue para que fueran paulatinamente remarcándose conforme avanzaba la descripción de la construcción de los números transfinitos. Por lo que una vez acabada esa delineación, se espera que el reconocimiento de ambas sea menos difuso.

En primer lugar, ahora ya debería resultar más sencillo aceptar que la meta del concepto de buen orden en las *Contribuciones*, es romper la barrera de lo finito para sus objetos protagónicos, los conjuntos. Si bien los números ordinales y cardinales son los dos componentes conceptuales juzgados por Cantor como esenciales de los números naturales, lo son en cuanto que son identificables como propiedades de conjuntos propicias a su generalización. Es decir, ambas nociones son abstraídas de la aritmética pero son transformadas en definiciones que posibilitan el desarrollo de la teoría de conjuntos. Es más, los conceptos “tipo ordinal” y “potencia” no sólo son propiedades de conjuntos, sino ellos mismos a su vez se representan en la teoría como conjuntos cuyo mayor nivel de abstracción en su generación se muestra a través de su conformación exclusiva por unidades fundamentales[27]. Y si el buen orden eventualmente ganó un mayor peso teórico que la potencia, sin dejar esta última de pesar gracias al tercer principio restringente, es porque ese concepto respalda y favorece la construcción precisa de muchos más conjuntos. De este modo, la generalización presumida por Cantor de la noción de número mediante el concepto del buen orden, en realidad aludiría a la generación masiva de objetos de la teoría de conjuntos y al asentamiento de algunas de sus propiedades. Por lo tanto, a la teoría de los números transfinitos sería más correcto llamarla como la teoría de los conjuntos transfinitos. De hecho, ese es su nombre original y si se conoce con el otro nombre, es por culpa de su primer traductor al inglés, Philip Jourdain, quien la rebautizó con base en un juicio ahora arcaico acerca de lo que debería tratar la teoría de conjuntos[28].

A primera vista, los números naturales no serían un conjunto ni tampoco una propiedad, ya sea como tipo ordinal o como potencia, de conjuntos. Lo abstraído (conjunto, número ordinal, número cardinal) no es lo mismo que su fuente, pues aunque ella misma sea abstracta, lo es en distinto grado[29]. Por consiguiente, el buen orden aunque sea el concepto clave para construir a los números ordinales y cardinales, parece

[27] Lo cual sugeriría una estratificación en el universo conjuntista de Cantor basada en su nivel de abstracción: en el nivel cero estarían los ahora llamados urielementos, en el primero los conjuntos conformados vía comprensión por ellos y en el segundo los conjuntos que son propiedades o relaciones de los conjuntos del nivel uno.

[28] El juicio de Jourdain a continuación se transcribe:

> A mí me parece que, debido a que estas memorias [las *Contribuciones* de Cantor] se dedican principalmente a la investigación de varios números cardinales y ordinales transfinitos. y no a investigar lo que usualmente se describe como "teoría de agregados" o "la teoría de conjuntos -conjuntos cuyos elementos son números complejos o reales que son imaginados como puntos geométricos en el espacio de una o más dimensiones- , el título dado a ellas en esta traducción es más adecuado. (Jourdain,1915: v)

Es decir, la teoría de conjuntos según Jourdian referiría a algunos trabajos anteriores de Cantor como los primeros cuatro artículos de su serie "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" (*Sobre variedades lineales e infinitas de puntos).* En el quinto de ellos, sus ya citados *Fundamentos,* Cantor da el giro hacia la teoría abstracta de los conjuntos desarrollada con mayor pulcritud en las *Contribuciones*. Más aún como ya fue señalado, ese giro se manifiesta en el cambio de nombre dada por Cantor sus objetos teóricos, *Menge* (conjunto) sustituye a *Mannigfaltigkeit* (variedad).

[29] Cabe confesar que caracterizar una relación de orden respecto al nivel de abstracción no es una tarea tan sencilla y aquí sólo nos limitamos a manejarla intuitivamente de manera extensional. Es decir, α es menos abstracto que β sii los objetos α tienen una *cardinalidad* menor a los objetos β. El problema inmediato de esta definición, es que la extensión de un concepto puede no estar bien determinada (v.gr. puede no ser un conjunto) y por ende tampoco lo estaría su cardinalidad.

que no lo sería para la generación de los números naturales al pertenecer a etapas diferentes en el proceso de abstracción.

Sin embargo, los conceptos abstraídos pueden articularse teóricamente de tal manera que sólo cierta clase de objetos o estructuras caigan bajo ellos (al menos dentro de nuestros límites epistémicos). Y si bien se puede realizar esa delimitación conceptual de manera trivial, v.gr. abstrayendo de las cosas rojas el concepto de "rojez", el proceso de abstracción también puede llegar a ser enriquecedor cuando a través de él se logran identificar componentes conceptuales que además de ser capaces de realizar esa demarcación, también posean ciertas virtudes epistémicas como la de ser "más entendibles" o ser "menos dependientes de la intuición" o ser "propicios a su generalización".

Por ejemplo, el sistema simple infinito de Dedekind es una conjunción de conceptos formulados en una serie de definiciones (cadena, cadena del sistema, transformación similar,....) "menos dependientes de la intuición" que hasta antes de algunos resultados en la teoría de modelos, capturaba sin mayores aprehensiones a la estructura de los números naturales. Es decir, se llegó a pensar que la noción de sistema simple infinito, era una abstracción cuya ida y regreso únicamente era la estructura de los números naturales. Sin embargo, sería un error afirmar que los números naturales son un sistema simple infinito pues son abstracciones de distinto grado, mientras que ese diferente nivel es fácilmente mostrado mediante otras instancias de los sistemas simple infinitos. Sobra decir pues ya fue expuesto con antelación, que Dedekind no cometió tal equivocación.

Ahora bien, la parte de la teoría de los números transfinitos en donde los números naturales quizás conceptualmente se pudieran englobar, sería justamente aquella todavía circunscrita a lo finito. Sin embargo como ya fue expuesto, la construcción de los números cardinales y ordinales finitos necesita reforzarse ya sea mediante nuestro conocimiento aritmético o por medio de algunos recursos de la teoría de conjuntos prematuros en las *Contribuciones*, por lo que nuestras expectativas ante el reconocimiento de ese requerimiento son de antemano bajas. Incluso si se asumiera la solidez de la construcción cantoriana para los números finitos, el buen orden en ella no participaría de manera determinante, ya que se restringiría a su presencia implícita en la generación del sucesor (Primer Principio Generador). Y tan secundario es su papel, que la articulación teórica PG1 del Primer Principio, prescinde del buen orden al basarse en la suma para los tipos ordinales. Es decir, para realizar la operación $\overline{\overline{F}} + \overline{G}$, no se recurre al buen orden si no a la unión de conjuntos ajenos (F,G) y se obedece la instrucción de que todos los elementos del sumando izquierdo (F) sean menores a los del sumando derecho (G), para finalmente abstraer al número ordinal $\overline{(F, G)}$ resultante de la suma.

En conciso, la construcción de los números naturales no necesita al buen orden ya que la especificación del cómputo para el sucesor de un número antecede a tal concepto. Es más, el sucesor plausiblemente es uno de los conceptos primitivos de la aritmética, tal como Peano lo manifestó dentro de sus *Principios* en su postulado P6 y axiomas P7,P8, principios que especifican a su cómputo sin recurrir al buen orden. La razón de la prioridad en la aritmética del sucesor sobre el buen orden está relacionada con la omnipresente (y casi omnipotente) en las *Contribuciones* facultad de la abstracción: el buen orden es una propiedad de los conjuntos, por lo que primero se debe construir al conjunto a partir del cual se extraerá esa propiedad. Incluso en el plano cantoriano de la edificación de los números ordinales finitos, cuyo material de construcción son conjuntos bien ordenados finitos, la noción de agregarle a un conjunto finito bien ordenado F un elemento distinto *e*, antecede al reconocimiento del buen orden de ese nuevo conjunto (F,*e*) y a la posterior extracción de su número ordinal $\overline{(F, e)}$. En conclusión, el buen orden desde una perspectiva constructiva, al estar precedido por otros procesos generativos, no sería un candidato viable de ocupar el puesto de fundamento de los números naturales.

A pesar de la baja valoración hacia el buen orden como concepto constitutivo de los números naturales hasta ahora asignada, intuitivamente, su estimación pareciera que debería ser menos mala, dado que el reconocimiento de la totalidad de los números naturales como un conjunto bien ordenado sí aporta algo a nuestro conocimiento acerca de ellos. Sin embargo para que el buen orden logre cobrar esas ganancias epistémicas, al menos en la teoría de las *Contribuciones*, este concepto debe cosecharlas en conjunción con su contraparte cardinal. Y esa (inter)dependencia se plasma en el Tercer Principio

Restringente: para construir al buen orden de los naturales, ω, se requiere del concepto de número cardinal para establecer la condición de finitud durante la aplicación del segundo principio PG2. Es más, los conceptos del buen orden y de la potencia cuando actúan en concomitancia, incrementarían la ponderación del primero al lograr entre ambos capturar a los números naturales como a continuación será expuesto.

La equivalencia entre números ordinales y cardinales finitos establecida por Cantor con ayuda de los teoremas §6.C y §12.B, probablemente sea el resultado de su teoría que mayormente enriquezca a nuestro conocimiento de los números naturales. Y si lo es, lo es porque nos brinda un parámetro para recuperar a la fuente de la abstracción: si el tipo ordinal de un conjunto coincide en sus propiedades con su número cardinal, entonces su tipo ordinal y su número cardinal nos remiten a un número natural. Más aún, sobre esa equivalencia se puede montar un criterio expresado más en términos del buen orden para capturar a los números naturales: si un conjunto únicamente tiene un buen orden, entonces tanto su número cardinal como su número ordinal nos remiten a un número natural. De este modo, los conceptos de potencia y de buen orden finalmente clarificarían a la noción de finitud que Cantor en su construcción de los números cardinales-ordinales finitos presupuso: un conjunto es finito sii únicamente puede ser bien ordenado de una forma.

En suma, aunque el buen orden no sea un concepto relevante para la construcción de los números naturales, en concomitancia con la potencia, sí enriquece tanto a nuestra comprensión de la totalidad de los números naturales, al servir para identificar a su tipo ordinal ω y a su número cardinal $\aleph_0$, como a nuestro entendimiento de cada uno de ellos, al establecer que su componente cardinal y ordinal "coinciden en sus propiedades". Terminada la evaluación del buen orden en su aspecto constitutivo de los números naturales, ahora procederemos a revisar su función justificativa en la teoría de los números transfinitos.

5.3 Contribuciones fundamentales a algunos métodos de demostración

Después de haber expuesto a la construcción de los objetos teóricos de las *Contribuciones,* los conjuntos, reconociendo la importancia del Buen Orden en ella, ahora nos enfocaremos en las justificaciones de las proposiciones sobre tales objetos. En particular, nos interesará investigar la participación de la inducción matemática y del buen orden en algunas de las demostraciones en esa obra desplegadas. Empezaremos exhibiendo un argumento deductivo que será postulado como prototípico del buen orden. El teorema cuya justificación será sometida a exégesis es el §13.B, proposición que afirma que un conjunto bien ordenado F es similar a ninguno de sus segmentos (iniciales) A. La demostración elaborada por Cantor, con algunos leves cambios en la notación, es la siguiente:

Supongamos que $F \simeq A$. Luego como A es un segmento de F y F es similar a A, entonces existiría un segmento A_1 de A tal que $A \simeq A_1$: si *a* es el elemento de F que define a su segmento A, entonces $A_1=\{ f^{-1}(x) | x \in F \text{ y } x<a\}$ sería ese segmento donde $f:F \rightarrow A$ es la función biunívoca que establece la similitud entre F y A. Además como A_1 es un segmento de A, entonces $A_1<A$. Ahora bien, dado que $F \simeq A$ y $A \simeq A_1$, entonces F sería similar a A_1. Y tal como se hizo para definir a A_1, se puede caracterizar un segmento A_2 de A_1 tal que $A_1 \simeq A_2$, a saber, sea $A_2=\{ f_1^{-1}(x) | x \in F \text{ y } x<a\}$ donde $f_1:F \rightarrow A_1$ es la función biunívoca que establece la similitud entre F y A_1. Y otra vez, puesto que A_2 es un segmento de A_1, entonces $A_2 \leq A_1$. De este modo podemos ir generando la infinita sucesión decreciente de segmentos de F

$A>A_1> A_2>...>A_v>A_{v+1}>...$ tal que todos ellos son similares a F.

Si denotamos mediante $a, a_1, a_2, a_3,...a_v,...$ a los elementos de F que definen correspondientemente a los segmentos previos, entonces tendríamos que $a>a_1>a_2>a_3>...a_v>...$ sería una infinita sucesión decreciente de elementos de F. Sea R el subconjunto de F integrado por tales elementos. Dado que F es un conjunto bien ordenado, entonces por el Teorema §12.A, R debe tener un elemento mínimo, lo cual por la edificación de ese subconjunto, conlleva una contradicción. Consecuentemente, el conjunto F es similar a ninguno de sus segmentos. (p.144)

Ahora bien, la demostración previa sirve para revelar un plano justificativo intrínsecamente vinculado con el buen orden. En general, dicho concepto fomenta a las demostraciones por reducción al absurdo (otro ejemplo de esta promoción sería la prueba previamente desplegada del teorema §16.D). De este absurdo modo, si se quiere demostrar alguna proposición *P* relativa a un conjunto bien ordenado F, supóngase lo contrario y trátese de generar una decreciente secuencia infinita de elementos de F; luego con esos elementos confórmese a una parte R de F para la cual no existiría un elemento mínimo. Puesto que la existencia de R contradice el buen orden de F (§12.Teo.A), entonces conclúyase la negación de la negación de *P*. Q.E.D.

Cabe señalar que el método de prueba en el párrafo anterior delineado, no es creación de Cantor sino ya formaba parte del repertorio deductivo de los matemáticos mucho antes de la aparición de las *Contribuciones*. En conciso, este método de demostración, usualmente conocido como "descenso infinito", puede ser reconocido desde la prueba de Euclides acerca de que todo número compuesto es medido por un número primo (VII.Proposición.31). Mientras que el matemático que lo bautizó con ese nombre en el siglo XVII, fue el abogado francés Pierre de Fermat[30].

A pesar de que en las *Contribuciones* no se haya originado al método del descenso infinito, en esa obra sí se ubica con precisión la fuente de su validez. Pues como fue con antelación exhibido, la inexistencia de subconjuntos sin un elemento mínimo de un conjunto bien ordenado, es consecuencia de la definición dada por Cantor de un conjunto bien ordenado (contrapuesta de §12.Teo.A). Por lo tanto, la promoción garantizada de la regla del descenso infinito otorgada por el buen orden, seguiría confirmando el papel de fundamento desempeñado por ese concepto en la teoría de los números transfinitos.

---

[30] Fermat nombró a ese método como "descente infinie ou indéfine" en un carta del año 1659 dirigida a Pierre de Carcavi titulada "Relation des nouvelles découvertes en la science des nombre", la cual se reproduce en su compilación de obras publicada en 1894, tomo 2, páginas 431-436.

Por otro lado, debido a que el descenso infinito ha sido aplicado y seguirá siéndolo en la demostración de proposiciones que involucran a los números naturales, entonces ese uso puede alimentar las aspiraciones del buen orden para ser considerado como un fundamento de la aritmética. Aunque en el capítulo previo ya fueron calmados esos ímpetus por la redención, v.gr. mostrando al buen orden como consecuencia de la inducción matemática inserta en la noción formulada por Dedekind de cadena de un sistema, ahora serán canalizados esos impulsos redentores dentro del marco teórico de las *Contribuciones* para continuar develando a la relación allí existente entre el buen orden y la inducción matemática.

Con tal de revelar el vínculo entre el buen orden y la inducción matemática presente en las *Contribuciones*, resulta pertinente investigar a la utilización de la inducción en la conformación de la teoría de los números transfinitos. Se empezará observando que Cantor a veces aplica alguna versión de la inducción matemática sin preocuparse sobre la validez de tal regla de demostración. Y ese libre uso quizás pueda inquietar a aquellos más interesados en el rigor[31] que en el crecimiento del conocimiento matemático. Sin embargo, tales aprensiones podrían considerarse excesivas debido a que algunos tipos de inducción ya eran elementos corrientes del decimonónico repertorio deductivo de los matemáticos. Por ejemplo, la demostración del teorema anteriormente enunciado sobre números cardinales finitos §5.E ($N_1 \subset N$ y $\overline{\overline{N}}=v$ ent. $\overline{\overline{N_1}} < \overline{\overline{N}}$) sigue a la clase de inducción matemática más famosa, la débil, mientras que Cantor no se toma la molestia de argumentar sobre la validez de ese método para el conjunto de los números cardinales finitos. Aunque esta omisión, dados los propósitos expansionistas manifestados por Cantor y debido a lo común de ese método de demostración, bien podría ser ignorada sin detrimento de la teoría de los números transfinitos.

No obstante, si se insiste en buscar la instauración del rigor dentro de las *Contribuciones*, entonces en la construcción de los números cardinales finitos, al resemblar a la del sistema de los números naturales de Peano, se podría intentar justificar

[31] Entre los cuales, según relata Dauben (1979), estaba Peano, quien criticó a Cantor por no haber justificado al principio de inducción (Dauben,1979:227-28).

a la ejecución de la inducción matemática débil sobre los números cardinales finitos. Sin embargo, las debilidades detectadas en ese plano generativo, a recordar, la del misterio de las unidades fundamentales y la del suministro infinito de objetos distintos, se podrían interpretar como señales negativas que incitarían a buscar otras maneras de asegurar la validez de esa versión de la inducción. Afortunadamente, Cantor ofrece una alternativa más atractiva, sobre todo para aquellos interesados por ensalzar al buen orden, cuando en lugar de utilizar el viejo método de demostración de la inducción matemática débil, usa por vez primera a la inducción matemática transfinita.

Cabe señalar que lo novedoso de la inducción matemática transfinita no es la regla en sí misma sino su dominio de aplicación. Pues tal método es la versión fuerte de la inducción matemática, aunque su recorrido ahora alcanzará a los números ordinales transfinitos. Ahora bien, la inducción fuerte (por Cantor llamada completa[32]) a diferencia de la débil, puede enunciarse en un solo paso. Su formulación para los números naturales sería la siguiente: Sea *m* cualquier número natural. Si la satisfacción de la propiedad P por parte de todo número natural $n<m$ implica su satisfacción por parte de *m*, entonces infiérase que todo número natural cumple con la propiedad P. Y como se mostrará más adelante, el esquema previo se repetirá para la inducción matemática transfinita, método que aparece por vez primera en la sección de las *Contribuciones* dedicada a desarrollar la potencia aritmética (γ^{ξ}) de los números ordinales hasta la segunda clase numérica; operación que a su vez tiene la finalidad de instaurar la forma normal para la representación de esos números[33].

---

[32] Cantor utilizar a la inducción matemática fuerte en otra sección de su *Contribuciones* aquí no discutida, la novena. Allí es empleado ese método en una parte de la demostración del teorema que afirma que cualquier conjunto M simplemente ordenado a)cuyo número cardinal es igual a $\aleph_0$, b)que no tiene un elemento máximo ni uno mínimo y c)que es denso tiene el tipo ordinal de los números racionales comprendidos en el intervalo abierto entre el cero y el uno. (p.122-127).

[33] En la sección §19 de las *Contribuciones* se apuntala dicha forma de representación de los números ordinales:

B. Todo número α de la segunda clase numérica puede ser representado de una sola manera, con la forma

$$\alpha=\omega^{\alpha_0}\kappa_0+\omega^{\alpha_1}\kappa_1+...+\omega^{\alpha_\tau}\kappa_\tau$$

donde α_0, $\alpha_{1.}$,.., α_τ son números de la primera o segunda clase tal que:

$\alpha_0 >\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_\tau\geq 0$

mientras que κ_0, κ_1,.., κ_τ,τ+1 son números de la primera clase distintos a cero.

La potencia aritmética entre números ordinales de las primeras dos clases se define a comienzos de la sección §18 mediante el siguiente teorema:

- Sea $\delta>0$ y $\gamma>1$ un par de números ordinales pertenecientes a la primera o segunda clase numérica. Entonces existe una única función *f* cuyo dominio y rango son los números ordinales de la primera y segunda clase numérica tal que:

  a) $f(0)=\delta$.

  b) Si $\xi<\xi'$ entonces $f(\xi)<f(\xi')$.

  c) Para cualquier ξ se tiene que $f(\xi+1)= f(\xi)\gamma$.

  d)Si $\{\xi_v\}$ es cualquier sucesión ascendente, entonces $f(\lim_v \xi_v)=\lim_v f(\xi_v)$.

(§18.Teo.A, p.178)[34]

En la demostración del teorema previo eclosiona la inducción matemática transfinita. Primeramente, Cantor hace la observación de que la función *f* está completamente determinada para los números de la primera clase, $f(1)=\delta<f(2)=\delta\gamma<f(3)=\delta\gamma\gamma<....$,debido a la operación de multiplicación para tipos ordinales definida en la sección §8. Luego, él formula al paso por ser probado conforme al método de la inducción matemática fuerte, aunque señalando su recorrido hasta los números ordinales de la segunda clase numérica:

> Supongamos ahora que el teorema es válido para todos los valores ξ que son menores a α, donde α es cualquier número de la segunda clase numérica, entonces también es válido para $\xi\leq\alpha$. (Cantor, 1897 vía 1915: 179).

A partir de la formulación previa, la inducción fuerte se bifurca en los dos casos típicamente probados al seguir una inducción matemática transfinita, los cuales corresponden a los dos principios generadores (PG1,PG2) de los números ordinales. Y si se divide la inducción matemática transfinita en dos casos, es porque todo número ordinal

---

La forma de los números de la segunda clase numérica aquí expuesta será llamada “forma normal”;α_0 es llamado el “grado” y α_τ el “exponente” de α. (Cantor, 1897 vía 1915: 187)

[34]No se puede dejar de mencionar que el cero aparece mágicamente como un número ordinal de la primera clase en este teorema y que Cantor no discute en sus *Contribuciones* de donde proviene esa abstracción. Es decir, ¡el conjunto vacío no es discutido en esa obra!

de la segunda clase excluyentemente se obtiene mediante PG1 o a través de PG2. De este modo exhaustivo, si suponemos que α fue obtenido como el sucesor de α-1, entonces por la condición c) tendríamos que $f(\alpha)=f(\alpha-1)\gamma$. Luego, debido a la definición de multiplicación entre tipos ordinales, si $\overline{F}=f(\alpha-1)$ y $\overline{G}=f(\alpha-1)\gamma$ entonces $\overline{F}$ sería un segmento de $\overline{G}$ y por consiguiente, $f(\alpha-1)< f(\alpha-1)\gamma$. Por lo tanto, las condiciones b), c) y d) de §18.Teo.B serían satisfechas con exclusividad por la función *f* para toda $\xi\leq\alpha$, si α es el sucesor de un número ordinal.

Por otro lado, si α es producido mediante el principio PG2, entonces existiría una secuencia ascendente $\{\alpha_v\}$ tal que $\alpha=\lim_v \alpha_v$. Entonces por la condición b) de §18.Teo.B se tendría que $\{f(\alpha_v)\}$ sería una secuencia fundamental y consecuentemente con la condición d), se cumpliría que $f(\alpha)=\lim_v f(\alpha_v)$. Más aún, si $\{\alpha'_v\}$ fuese otra secuencia ascendente cuyo ordinal límite fuera igual a α, entonces podemos afirmar que $\lim_v f(\alpha_v)= \lim_v f(\alpha'_v)$. Pues por la hipótesis inductiva, todos los términos de las secuencias $\{f(\alpha_v)\}$ y $\{ f(\alpha'_v)\}$ está completamente determinados y cumplen con la condición b). En consecuencia, para toda *v* existen λ_0 , μ_0 tal que $f(\alpha'_\lambda)>f(\alpha_v)$ si $\lambda\geq\lambda_0$ y $f(\alpha_\mu)>f(\alpha'_v)$ si $\mu\geq\mu_0$[35]. Y dado que el principio PG2 genera a un único número ordinal que le siga a una secuencia ascendente de ellos, entonces $\lim_v f(\alpha_v)= \lim_v f(\alpha'_v)$. Por lo tanto, el valor de $f(\xi)$ estaría unívocamente definido para todo $\xi\leq\alpha$ si α es un ordinal límite.

Una vez probados el par de casos de una inducción transfinita, "se sigue la validez del teorema *para todos los valores* de ξ" (Cantor, 1897 vía 1915: 179). Y a diferencia del Teorema §5.E deducido mediante una inducción débil, Cantor ahora sí argumenta a favor de la validez del método usado en la demostración del Teorema §18.A. Debido a la importancia con respecto a la presente investigación de tal justificación, ella se reproduce a continuación:

> Pues si existieran valores excepcionales ξ para los cuales no se sostuviera [el teorema §18.A], entonces,...existiría uno de ellos, al cual llamaremos α, que tendría que ser el

[35] Cuando un par de secuencias ascendentes cumplen con tal condición, Cantor las bautiza "coherentes". Y en el Teorema §15.D ya prueba que un par de secuencias fundamentales de números ordinales hasta la segunda clase numérica tienen el mismo número ordinal límite sii son coherentes. Así entonces, en la demostración del Teorema §18.A, se usa el regreso de §15.D. (p.162-163).

mínimo. Por consiguiente, el teorema sería válido para $\xi<\alpha$, pero no para $\xi\leq\alpha$, y esto sería una contradicción con lo que acaba de ser probado.

(Cantor 1897 vía 1915: 179-80)

En conciso, el buen orden es responsable de la validez del método de la inducción transfinita. Para no dejar dudas al respecto, Cantor demuestra que la unión de las dos primeras clases numéricas a su vez constituye un conjunto bien ordenado tal como lo afirma en el siguiente teorema:

- Cualquier totalidad de números diferentes de la primera o segunda clase, arreglados mediante su relación de orden [la definida para los números ordinales], forman un conjunto bien ordenado.

(§16.Teo.C, p.171)

A su vez el teorema previo es una consecuencia de otro probado en la sección anterior de las *Contribuciones*:

- Si α es cualquier número de la segunda clase numérica, la totalidad de los números de la primera y segunda clase que son menores a α, forman respecto a la relación de orden para los números ordinales, un conjunto bien ordenado cuyo tipo ordinal es α. (§15.Teo.H, p.165)

Y este último teorema, tal como lo muestra su demostración, está basado en el buen orden. Pues sea α cualquier número de la segunda clase. Debido a la definición de número ordinal, entonces existe un conjunto bien ordenado F tal que $\overline{F}=\alpha$. Luego de la definición de la relación de orden para los números ordinales, se seguiría que para todo número ordinal α' con $\alpha'<\alpha$, le correspondería un segmento F' de F y viceversa. Consecuentemente, cada una de esas α' estaría emparejada con una $f'\in F$, donde f' es el elemento de F que define al segmento F' vinculado con α'. Por consiguiente, a cualquier conjunto de números ordinales α' (con $\alpha'<\alpha$) le correspondería una parte del conjunto F. Así entonces, el buen orden de F es transmisible al conjunto de esos números ordinales α'. Por lo tanto, el conjunto de los números menores a α está bien ordenado y su tipo ordinal es α.

Una vez demostrado, gracias al buen orden, que la unión de las dos primeras clases numéricas es un conjunto bien ordenado, entonces el argumento ofrecido por Cantor para garantizar la validez de la inducción transfinita se hace más sólido. Más aun, tal razonamiento se puede adecuar para cubrir el pendiente de garantizar la validez de la inducción matemática débil para los números cardinales finitos, regla seguida sin escrúpulos rigoristas en la demostración de §5.Teo.C. En concordancia con la justificación dada por Cantor de la inducción transfinita, el apuntalamiento de la inducción matemática débil sobre el buen orden se haría del siguiente modo:

Sea F un conjunto bien ordenado cuyo tipo ordinal es igual a ω. Asúmase como establecido que el elemento mínimo f_1 de F satisface a la propiedad P (Caso Base) y que si f_v cumple con P, entonces f_{v+1} también lo hace (Paso inductivo). Si se niega que todos los elementos de F satisfacen P, entonces existiría una parte R de F no vacía conformada por los elementos de F que no cumplen con P. Puesto que F está bien ordenado, entonces existe un elemento mínimo r en R. Ya que por asunción f_1 satisface P, entonces existe r_{-1} en F tal que su sucesor es igual a r. Por lo tanto, r_{-1} cumplirá con la propiedad P pero r no lo haría, contradiciendo así al Paso Inductivo.

Ahora bien, si F es el conjunto de los números naturales, entonces el argumento previo indicaría que la validez de la inducción matemática débil provendría del buen orden de ese conjunto. Lo cual parece restarle peso al papel de fundamento aritmético de la inducción matemática débil reasignándoselo al buen orden, tal como fue pronosticado desde la introducción del presente capítulo. Sin embargo después de haber sido expuesto el desarrollo de la teoría cantoriana de los números transfinitos, ya no debe lucir tan atemorizante la competencia del buen orden en la aritmética. Y si no lo hace, es porque hemos reconocido en reiteradas ocasiones el accionar de una facultad por el mismo Cantor señalada como crucial en la conformación de su teoría: la abstracción. En conciso, gracias a este reconocimiento tenemos que admitir que la garantía ofrecida por el buen orden al método de la inducción matemática para los números naturales, no reside en la aritmética sino en la teoría de conjuntos.

Para que el buen orden ofrezca su apoyo a la inducción matemática débil en los números naturales, primero se debe abstraer a la totalidad de ellos como un conjunto y después otra vez mediante esa facultad, se tiene que reconocer al buen orden de tal conjunto. Es decir, sólo al adoptar una perspectiva conjuntista es cuando se puede apreciar el respaldo brindado por el buen orden a la inducción matemática débil. En contraste, si deseamos apuntalar desde el nivel de la aritmética a la validez de la inducción matemática débil, siguiendo las enseñanzas de Pascal o de Peano, podemos hacerlo fundiendo esa regla con el proceso de construcción de los números naturales. Y si nuestra memoria no nos traiciona, debemos recordar que el procedimiento de generación de los números cardinales (ordinales) finitos especificado por Cantor, incluso ignorando nuestras aprensiones sobre él remediadas de manera aritmética, parece obedecer también esas enseñanzas al basarse en la operación sucesor (PG1)[36]. Por lo tanto, el buen orden sólo corroboraría desde un punto de vista más abstracto, la validez de la inducción matemática para los números naturales ya otorgada desde su generación a la usanza de Pascal,Peano, Dedekind,... y también Cantor.

En suma, la información recabada hasta el momento de los trabajos estudiados de Pascal, Peano, Dedekind y ahora también de Cantor parece indicar, que la validez de la inducción matemática y quizás de cualquier regla de inferencia, como el descenso infinito o la descomposición-recomposición en la aritmética euclidiana, se puede fincar en el modo en que se caracterizan o construyen a los entes sobre los cuales se aplica. En la siguiente y última parte de esta tesis, se tratará de pulir filosóficamente a la idea previa, aunque para ello, otra vez se aprovechará la agudeza de su ejecución matemática, la cual en el ocaso de este trabajo será aportada por Ernest Zermelo y motivada por Henri Poincaré. Así entonces, en el apartado final de la tesis se discutirá desde una perspectiva más filosófica, en particular epistemológica, la noción de fundamento y la postulación de

---

[36] De hecho según refiere Dauben(1979), Cantor en una carta a Peano (fechada el 14 de septiembre de 1895), manifiesta su creencia que de su construcción de los números finitos se sigue la validez de la inducción matemática débil:

Cantor estaba ansioso por replicar la observación hecha por Peano de que quizás el principio de inducción (sobre el cual Cantor pareció basarse) era realmente un postulado indemostrable. En contra de esto, Cantor insistió que el principio de inducción "se seguía necesaria y directamente de su definición de la secuencia de los números finitos ". (Dauben, 1979: 227) la inducción matemática débil como tal en la aritmética. Para llegar a ese fin, cerraremos este capítulo enumerando algunas conclusiones por su contenido presumiblemente respaldadas.

5.4 Conclusiones

- El Buen Orden participa activamente en la construcción numérica dentro de la teoría de los números transfinitos, pues la articulación de esta noción en los principios PG1 (ordinal sucesor) y PG2 (ordinal límite) posibilita la generación en serie de los números jerarquizados en clases gracias al Tercer Principio Regulador. Es decir, el Buen Orden es la noción motora de la producción masiva de los objetos protagonistas de esa teoría de Cantor, los conjuntos transfinitos.
- El Buen Orden fomenta la justificación de proposiciones sobre los conjuntos transfinitos. Por ejemplo, este concepto le permite a Cantor establecer en el segundo artículo (1897) de las *Contribuciones* , una propiedad deseada desde el primero (1895): la totalidad de la relación de orden entre los números cardinales. Más aún, el Buen Orden promueve la aplicación de dos métodos de demostración para los conjuntos transfinitos: el descenso infinito y la inducción matemática transfinita. Y dado que los conjuntos transfinitos por sus principios de generación son conjuntos bien ordenados, estas dos reglas están validadas desde la construcción misma de los objetos cuyas propiedades gracias a ellas se justifican.

∴ Debido a las funciones constitutiva y justificativa desempeñadas por el buen orden de manera integral, esta noción puede considerarse como un fundamento, en el sentido inspirado en Bolzano, de la teoría de los números (conjuntos) transfinitos de Cantor.

- El Buen Orden no es un principio constitutivo de los números naturales ya que su reconocimiento es posterior a la generación de ellos. Es decir, primero se debe abstraer de los números naturales a su totalidad en un conjunto, para luego poder identificar en este último su propiedad de estar bien ordenado. Y Cantor respeta esta secuencia de reconocimiento, pues primero construye a los números cardinales finitos mediante un par de reglas afines a los postulados aritméticos de Peano (P1,P6), después enuncia la noción del Buen Orden por medio de la cual desarrolla a los números ordinales finitos y finalmente establece que los números cardinales finitos coinciden con los números ordinales finitos.

- El Buen Orden es una guía justificativa para los números naturales al proveer el método del descenso infinito. Sin embargo, esta noción no es la responsable dentro de la aritmética de la validez de esa regla ni tampoco lo es para la inducción matemática débil. Es decir, el Buen Orden sólo confirma desde un punto de vista teórico-conjuntista, la validez de la inducción matemática débil conferida por la construcción de los números naturales a la usanza de Pascal-Peano-Dedekind. Mientras que de tal modo de generación sintonizado con la inducción matemática débil, se deriva el buen orden de la totalidad de lo construido y por consiguiente, también de él se sigue la validez del descenso infinito para los números naturales.

$\therefore$ Debido a que las funciones constitutiva y justificativa realizables por el Bueno Orden para los números naturales se activan después de la conformación de ellos, esta noción no merece ser considerada como un fundamento de la aritmética. En conclusión, en la teoría de los números transfinitos de Cantor, la inducción matemática débil reforzó su postulación como fundamento de la aritmética adelantándose a las aspiraciones del Buen Orden.

6. Reflexiones finales

El principio está en los fines: intuición, inducción, deducción, matemáticas

6.0 Recapitulación introductoria

La inducción matemática ha sido el hilo conductor de la investigación histórica elaborada. En su inicio se analizaron algunas demostraciones extraídas del *Ad Angularium Sectionum*, cuya confección deductiva diseñada por Viete-Anderson prefiguraba a este método de prueba. Luego se mostró su consolidación teórica en el *Traité* de Pascal, obra dentro de la cual se le dio forma a esa regla pero también un fondo que validara su seguimiento. Después se expuso su rol determinante dentro de las axiomatizaciones de la aritmética al estilo de Peano-Dedekind. Sorprendentemente, reconocimos que la ejecución armónica entre justificación y constitución de ese papel, se puede anticipar desde el *Tratado del Triángulo Aritmético*. En consecuencia, agregamos el apellido de su autor a esa ilustre familia de axiomatizaciones de la aritmética y por derecho de antigüedad, incluso podemos nombrarlas como la aritmética pascaliana.

Todas las presencias o insinuaciones de la inducción matemática mencionadas en el párrafo previo, están emparentadas con su variante débil. Es decir, en todas las concernientes demostraciones revisadas se pueden detectar dos etapas deductivas, las cuales en general consisten en (i) establecer una propiedad P para algún primer objeto y (ii) probar que si algún objeto satisface P, entonces quien le siga inmediatamente también lo hace. Y este tipo de inducción se presentó también en algunas demostraciones del Pequeño Teorema de Fermat cuyo famoso autor, Euler, no tuvo en tan alta estima cuando las comparó con sus últimas demostraciones de dicha proposición. Mientras que su juicio negativo se aclaró remarcando las cualidades explicativas de las últimas en contraste con las primeras, señalando además que el paso (ii) es difícil de dar incluso ante la presencia del buen orden, cuando no se construye con precisión al elemento sucesor a partir de los objetos previos, tal como sucede con los números primos mentados en el Pequeño Teorema.

Eventualmente debutó la contraparte fuerte la inducción matemática en la teoría de los números transfinitos de Cantor, método cuyo recorrido allí iba más allá del infinito. Este tipo de inducción normalmente se formula en una sola instrucción: demostrar que el cumplimiento de la propiedad P por parte de todos los objetos que precedan a uno de ellos, implica que este último también lo haga. Mientras que esta clase de inducción, inspirada en los números ordinales límites cuya generación requiere de toda una secuencia de ordinales previos, fue validada por Cantor mediante la noción del buen orden. Es más, vimos cómo el buen orden era el motor principal para la generación de los objetos protagónicos de la teoría de Cantor, los conjuntos transfinitos. Así entonces, a esta noción se le reconoció un rol determinante para la conformación de esa seminal teoría para toda una rama de las matemáticas, debido a sus sincronizadas funciones justificativo-constitutivas.

De hecho, las amalgamas justificativo-constitutivas fueron con ahínco buscadas en nuestra investigación histórica en torno a la inducción matemática. Esta cohesión fue vagamente reconocida desde la noción euclidiana de número y el modo de razonamiento de la *descomposición-recomposición* encontrados en el Libro VII de los *Elementos*. Luego, ella fue nítidamente identificada entre los principios constructores del triángulo aritmético y la formulación de Pascal de la inducción matemática débil en el *Traité.* Posteriormente fue detectada en los principios aritméticos P1,P6-P9 y la inducción matemática débil codificada en P9 dentro de los *Aritmethices Principia* de Peano. Después esta empalmadura fue hallada en la noción de cadena de un sistema con la inducción matemática completa dentro del *Was sind die Zahlen* de Dedekind. Finalmente ella fue también descubierta entre los principios generadores de los conjuntos transfinitos y la inducción matemática transfinita junto con el descenso infinito en los *Beiträge* de Cantor.

Ahora bien, la recopilación histórica de esta amalgama constitutivo-justificativa tenía como fin asentar a la noción de fundamento, afirmando que esta cohesión es un indicador de su presencia. En particular, nuestra investigación se enfocó en promover la postulación de la inducción matemática (débil) como fundamento de algunas teorías aritméticas y por consiguiente, se extrajeron datos de las obras de Pascal, Peano y

Dedekind que materializaran históricamente esta interpretación. Mientras que la noción de fundamento también fue concebida viendo hacia el pasado, con la ayuda de algunos fragmentos de la filosofía de Bolzano realzados mediante su ejecución matemática, v.gr. en su *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes*. Bajo la influencia de Bolzano, la pureza y la fecundidad fueron propuestas como rasgos distintivos del accionar de un fundamento. Así entonces, cuando un modo de razonamiento se acopla a la concepción de los objetos sobre los cuales se aplica, se fomenta y se garantiza su ejecución para justificar proposiciones acerca de ellos. Es decir, la cohesión justificativo-constitutiva sirve para satisfacer los parámetros de la fecundidad (facilita y valida las demostraciones) y la pureza (basa las demostraciones en la concepción misma de los objetos) pedidos para los aspirantes a ser fundamentos. En consecuencia, la inducción matemática (débil) fue interpretada como un fundamento de la aritmética dentro de las teorías revisadas de Pascal, Peano y Dedekind.

Nuestra postulación histórica de la inducción matemática como fundamento de la aritmética puede estimular varios recelos filosóficos. Entre otros cuestionamientos, uno puede preguntar por qué se escogió a la inducción débil en lugar de la construcción/caracterización aquí calificada como secuencial de los números naturales. Es decir, nuestra investigación histórica sólo descubrió una amalgama entre la primera y la segunda en algunas teorías aritméticas, mientras que nuestra postulación revela una predilección de la regla de inferencia sobre su correspondiente concepción numérica. Y esta preferencia, luce sin un sustento aunque también sin una refutación históricos pues no indicamos quien fue el primero en aparecer. Si no lo hicimos y no lo haremos, es porque las indagatorias sobre quién es el huevo y quién la gallina, nos parecen meros aleteos. Más aun, nuestra preferencia de la regla sobre la concepción, está motivada por razones pragmatistas y no por cuestiones históricas.

La regla de inferencia es el medio para asentar o generar el conocimiento matemático y cuando ella está tan bien tipificada como la inducción matemática, directamente nos pronunciaremos a favor de ella aunque el hecho histórico, la amalgama constitutivo-justificativa entre una regla y una concepción, sea indiferente a nuestra elección. En contraste, ante un método de justificación no tan bien definido como el de la descomposición-recomposición numérica ubicado en la aritmética euclidiana, nuestra tendencia pragmatista orientada hacia la optimización del conocimiento matemático, tendría mayores dificultades por imponerse sobre la noción de número como "una multitud de unidades". Sin embargo, de antemano manifestamos nuestra completa falta de interés por toda concepción que no cuente con los medios para cosechar en el campo de las matemáticas, justificaciones para los objetos bajo su dominio.

Nuestra postura pragmatista desde el principio advertida y ahora discriminatoriamente asumida, puede provocar un mayor escrúpulo filosófico sobre nuestra elección de la inducción matemática débil como fundamento de la aritmética pascaliana. La predominancia de los medios para aumentar la consecución de fines, puede levantar sospechas epistemológicas sobre sus principios. Es decir, al enfocarnos en el asentamiento o generación de más conocimiento matemático para preferir a los métodos de justificación en la nominación de los fundamentos, parecemos no reparar en la justificación misma de esos métodos. En particular, la concepción numérica de naturaleza secuencial puede criticarse por estar supeditada a la inducción matemática débil, en cuanto que sólo parece ser un estímulo e inclusive un decreto de validez para esta regla de inferencia. Expresado de una manera más preocupante, la amalgama constitutivo-justificativa hallada en las teorías aritméticas de Pascal-Peano-Dedekind, le da una apariencia convencional al conocimiento aritmético obtenido mediante inducción matemática débil, pues esa regla parece moldear a la concepción numérica que convenientemente la valida. Así entonces por cuestiones epistemológicas cabe preguntar, ¿cuáles son las garantías de la inducción matemática previas a esta amalgama?

Siguiendo con el tono alarmista, advirtamos que si carecemos de razones para respaldar a nuestros medios de obtención de conocimiento, entonces podemos encender una llama de escepticismo que amenace con incinerar a todo el conocimiento mediante ellos conseguido. Es decir, si nada justifica a la inducción matemática, entonces bien podríamos rechazar todas las demostraciones hechas siguiendo esta regla. Sin embargo cuando la flama del pirronismo no ha consumido de antemano a nuestro pensamiento, podemos dejar de temerle e incluso verla con gusto pues irónicamente ella ha iluminado al desarrollo de la epistemología. Ya desde hace mucho tiempo fue enfáticamente señalado en la filosofía, que si nos obstinamos por justificar todo sin aceptar una cadena infinita de justificaciones ajena a nuestras capacidades cognoscitivas, o pararemos por diversos motivos en algunos primeros principios o acabaremos dando círculos, positivos o viciosos según se les mire. Por lo que estas dos opciones pudieran ser el destino epistemológico de la inducción matemática débil al haber sido ella promovida como fundamento de la aritmética pascaliana. Es más, con la exploración de estas dos alternativas concluiremos filosóficamente nuestra investigación histórica emprendida.

Dado nuestro apego por la historia, aprovecharemos una discusión sobre la justificación de la inducción matemática suscitada entre dos coetáneos de Cantor, Peano y Dedekind, cuya participación en el desarrollo de las matemáticas no se queda atrás a la de todos ellos. Nos referimos a Henri Poincaré y a Ernst Zermelo. En particular citaremos algunos argumentos de ese par de matemáticos en torno a la validez de esa regla de inferencia diseminados en una serie de artículos: (1894), (1905b), (1906a) y (1906b) del primero mientras que (1909) del segundo. Y si nos interesa esta inspección, es para darle un apoyo epistemológico a la postulación de la inducción matemática (débil) como fundamento de la aritmética pascaliana. Empezaremos exponiendo algunos de los argumentos de quien sembró la polémica en esa época sobre esa cuestión, el francés Poincaré.

6.1 El ataque intuitivo de Poincaré contra la lógica en la inducción matemática

Una descripción muy general del marco de la discusión incitada por Poincaré, sería delineándola como una pelea entre los defensores de la intuición en las matemáticas quienes llegaron a simpatizar con algunas ideas de Kant[1], contra los propulsores de la

[1] Entre ellos debemos nombrar al instigador de esta polémica, tal como lo revelan las siguientes palabras de un estudioso de sus escritos filosóficos:

> El término "intuición" en Poincaré no es muy preciso y, a pesar de sus tonos deliberadamente kantianos, sólo está distantemente relacionado con la *Anschauung* kantiana; ciertamente la filosófica maquinaria pesada del sistema kantiano está ausente. Sin embargo ambos pensadores concuerdan que la intuición es distinta a la sensibilidad, y que las matemáticas pertenecen al dominio de lo sintético a

lógica en las matemáticas quienes llegaron a rechazar algunos planteamientos de este filósofo alemán[2]. En palabras de Poincaré, quien cita a uno de sus enemigos localizado en su propio país[3]:

> Para M. Couturat, los nuevos trabajos, en particular aquellos de Mr. Russell y Signor Peano, finalmente han terminado de manera definitiva una controversia por tanto tiempo en disputa entre Leibniz y Kant. Ellos han mostrado que no hay tal cosa como un juicio sintético *a priori* (término utilizado por Kant para designar a los juicios que no pueden ser demostrados analíticamente, ni reducidos a la identidad, ni establecidos experimentalmente); ellos han mostrado que las matemáticas por entero son reducibles a la lógica y que la intuición no desempeña en ellas rol alguno...¿Podemos suscribirnos a tal decisiva condena? Yo pienso que no, y trataré de mostrar el porqué no. (Poincaré 1905b vía 2005: 1023)

En nuestras exposiciones de los "nuevos trabajos" de Peano y Dedekind, se develaron ciertas marcadas diferencias tanto entre su confección, v.gr. el lenguaje lógicamente más depurado del primero, como entre sus objetivos, v.gr. la meta epistemológicamente más precisa del segundo. Es más, entre los "nuevos trabajos" de

---

> priori -una doctrina abogada por Poincaré cuando defiende que el principio de inducción no puede derivarse de la lógica ni de la experiencia-. (Ewald, 2005: 973)

Con el mismo sentido crítico podemos citar a otro estudioso de su filosofía de las matemáticas:

> Poincaré inicia su ataque a la nueva lógica con la meta confesada de mostrar que los nuevos lógicos no han eliminado la necesidad de la intuición en las matemáticas. Al mostrar esto, él dice que está reivindicando a Kant. Esta confesión nos puede despistar, pues la noción de intuición de Poincaré tiene poco en común con la de Kant. La estructura kantiana que subyace a la última, está completamente ausente en la primera; por ejemplo en la primera no se hace mención de la sensibilidad ni de las categorías. (Goldfarb, 1988: 63)

[2] Entre ellos podríamos identificar a Dedekind, quien de acuerdo a Reck, un estudioso de su obra, rechaza una idea kantiana ya expuesta en nuestro Capítulo 3:

> ...él [Dedekind] explícitamente rechaza ... la afirmación kantiana sobre el papel de la intuición en la aritmética, enfatizando en su lugar la conexión entre la aritmética y la lógica. (Reck, 2003:390)

Sin embargo este mismo autor también señala una posible concordancia intelectual entre Dedekind y Kant, al brindar una sugerencia para entender el pronunciamiento del primero relativo a que los números son "creaciones libres de la mente humana":

> La sugerencia es interpretar a los señalamientos hechos por Dedekind sobre "la mente" conforme al idealismo trascendental de Kant, en el sentido de considerarlos como parte de una investigación sobre las precondiciones trascendentales de todo el pensamiento. (Reck, 2003:389)

En suma, el apego de los partícipes de esta disputa a Kant, oscilaba en ambos bandos. Lo cual puede ser explicado por la profesión de algunos de ellos: eran matemáticos y no filósofos por lo que su conocimiento de la obra de Kant, probablemente fue limitado.

[3] Louis Couturat (1868-1914) fue un académico francés quien fue un reconocido estudioso de Leibniz y consecuentemente, un divulgador y defensor de los avances en la lógica realizados por algunos de sus contemporáneos, como Peano y Russell.

otros contrincantes directamente atacados por Poincaré, como Russell y Hilbert[4], también pueden ser halladas notables discrepancias. Sin embargo en todos ellos se usa de alguna manera u otra, a la lógica para desarrollar a la aritmética. Es decir, aunque sus medios y sus fines variaran, los "nuevos trabajos" aludidos por Poincaré sitúan al campo de la disputa en la aritmética. Por consiguiente, podemos esperar que la inducción matemática sea un tema central da de la controversia dada su importancia ya detectada en los trabajos de Peano y Dedekind. Y Poincaré cumple con creces nuestras expectativas, brindando varios argumentos, para respaldar el rol de la intuición en ese método de demostración. A continuación, expondremos algunos de ellos para luego mostrar una réplica dada por otro de los propulsores de la lógica en las matemáticas, el alemán Zermelo.

El primer argumento por ser expuesto, en sentido cronológico, apareció en el artículo *Sur la nature du raisonnement mathematique* publicado en 1894. Su primera premisa es que "el razonamiento silogístico [o analítico] es incapaz de añadir nada nuevo a los datos dados, sólo los reduce a los axiomas y eso es todo lo que debemos hallar en las conclusiones" (Poincaré, 1894 vía 1905: 2). Para ejemplificar esta premisa, Poincaré cita a las definiciones numéricas de sus rivales cuyos términos primitivos son el número "1" y la operación sucesor "x+1". De este modo, el número "2" estaría definido como 2=1+1, el "3" como 3=2+1 y el "4" como 4=3+1. Recuérdese también la definición recursiva de la suma: $a+(b+1)= (a+b)+1$. Ahora bien, como ejemplo de un razonamiento analítico, Poincaré nos muestra la siguiente "verificación" de que 2+2 es igual a 4:

2+2= (2+1)+1	[Definición de suma]	
(2+1)+1=3+1	[Definición de "3"]	
3+1=4	[Definición de "4"]	
Por lo tanto, 2+2=4	Q.E.D.	(Poincaré, 1894 vía 1905:4)

[4] Entre los "nuevos trabajos" de Rusell, podemos citar aquel reseñado por el libro con mismo título de Couturat (1905) del cual Poincaré extrajo su condena a Kant y la intuición, *The Principles of Mathematics* (1903). Mientras que de Hilbert, podemos nombrar a su *Sobre los Fundamentos de la Lógica y la Aritmética* (*Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*); trabajo que fue originalmente presentado como una plática en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas efectuado en Heidelberg durante 1904.

El razonamiento analítico previo nos lleva a nada nuevo porque la conclusión, 2+2=4, se reduce a las definiciones de los números “2”,”3”, “4” y de la suma. La siguiente premisa del primer argumento es que la inducción matemática (débil), allí llamada “razonamiento por recurrencia”, “contiene, por así decirlo, en una sola fórmula una infinidad de silogismos” (Poincaré, 1894 vía 1905: 9). Es decir, demostrar algo por inducción matemática (débil), desde un punto de vista lógico, equivaldría a extender la siguiente cadena de silogismos hasta el infinito:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{P}(1) \\
\underline{\mathsf{P}(1) \rightarrow \mathsf{P}(2)} \\
\mathsf{P}(2) \\
\underline{\mathsf{P}(2) \rightarrow \mathsf{P}(3)} \\
\mathsf{P}(3) \\
\underline{\mathsf{P}(3) \rightarrow \mathsf{P}(4)} \\
\mathsf{P}(4) \\
\underline{\mathsf{P}(4) \rightarrow \mathsf{P}(5)} \\
\mathsf{P}(6) \\
\ldots
\end{array}
$$

Así entonces, continúa Poincaré:

> ...si deseamos demostrar nuestro teorema [P] para el número 6 por ejemplo, será suficiente establecer los primeros 5 silogismos de nuestra cascada. Requeriremos 9 si deseamos demostrarlo para el número 10; para un número mayor necesitaremos aún más; y sin importar qué tan grande sea el número siempre llegaremos a él... Pero sin importar que tan lejos lleguemos nunca alcanzaremos al teorema general aplicable para todos los números.... Para alcanzarlo necesitaríamos una infinidad de silogismos, y tendríamos que cruzar un abismo, que el más paciente analista, si se restringe a los recursos de la lógica, nunca podrá cruzar. (Poincaré 1894 vía 1905: 10-1)

En suma, (1) la conclusión de un silogismo no puede agregar nada nuevo a sus premisas y (2)la inducción matemática débil representa una serie de silogismos cuyas premisas para el enésimo de ellos son $\mathsf{P}(n)$, $\mathsf{P}(n)\rightarrow\mathsf{P}(n+1)$ mientras que $\mathsf{P}(n+1)$ es su conclusión. Por lo tanto, no se sigue lógicamente la conclusión $\forall n \mathrm{P}(n)$ del Caso Base y el Paso Inductivo de una inducción matemática débil. En conciso, la generalización universal $\forall n \mathrm{P}(n)$ rebasa la información contenida en las premisas de cualquiera de estos silogismos, mientras que la cadena infinita de ellos no constituye una demostración lógicamente aceptable[5]. Y cuando la vía lógica nos conduce hacia un abismo, la intuición es para Poincaré el único puente que nos permite arribar a la conclusión universal de los razonamientos por recurrencia. De este modo, la validez de la inducción matemática débil nos parece "irresistible", pues "es la afirmación del poder de nuestra mente al saberse capaz de concebir una repetición indefinida del mismo acto, cuando el acto es posible". (Poincaré, 1894 vía 1905:13).

Este argumento, es el primer intento de Poincaré por situar a la inducción matemática como un principio cuyo conocimiento de su legitimidad es adquirido por intuición para así reivindicar, el sintético *a priori* de Kant. Para constatar el desenvolvimiento de este argumento, podemos recordar la demostración por inducción matemática débil de la Consecuencia 12ª del *Traité.* En ella se utilizaban células de la cuarta base, para corroborar analíticamente que el cumplimiento de la razón allí afirmada para esa base, implicaba su satisfacción para la quinta. Luego de algún modo nos percatamos que esa verificación sobre la herencia del cumplimiento de la Consecuencia 12ª, era reproducible para cualquier base y en concordancia con esto, establecimos al Lema 2.

Ahora bien, el primer argumento de Poincaré trata de convencernos que es la intuición la responsable detrás de nuestro reconocimiento de lo repetible del método de verificación enseñado mediante instancias en la Consecuencia 12ª. Y este intento puede

[5] Cabe mencionar que las pruebas de longitud infinita fueron aceptadas tiempo después en la lógica. Como antecedente de esta aceptación, podemos mencionar la ω-regla descrita por Hilbert en 1931 como:

> [23] Si ha sido demostrado, para cualquier numeral $\mathfrak{z}$, que la fórmula
>
> $$\mathfrak{U}(\mathfrak{z})$$
>
> siempre es una fórmula numérica correcta, entonces la fórmula
>
> $$(x)\ \mathfrak{U}(x)$$
>
> puede ser establecida como una fórmula inicial. [Ausgangsformel] (Hilbert 1931a vía 2005: 1154).

Actualmente, la ω-regla podemos formularla así: $\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}(2), \ldots \vdash \forall n \mathrm{P}(n)$

agradar a todos aquellos que han buscado dilucidar por medio de la intuición, a la validez del razonamiento de la generalización universal típico de la geometría de Euclides, ya que les permitiría extender su explicación hacia la aritmética a través del razonamiento por recurrencia. Sin embargo, en el tratado de Pascal también encontramos una razón, para desestimar esta primera tentativa de revalorización de la intuición en la aritmética.

Cuando discutimos la validez del seguimiento de la regla de inducción matemática formulada por Pascal, señalamos que lo repetible de sus demostraciones enseñadas sobre instancias, se debía a los principios constructores de los triángulos aritméticos. Es decir, es la construcción de esos objetos especificada mediante los principios R y no nuestra intuición, la responsable de garantizar las conclusiones universales (para todo triángulo aritmético...) inferidas mediante esa regla enunciada por Pascal. De igual manera podemos replicar, que es la construcción/caracterización secuencial de los números naturales y no la intuición, la responsable de solventar lo universal de las conclusiones obtenidas mediante el razonamiento por recurrencia. Sin embargo al acudir a la definición secuencial de los números, surgen otros escollos para los propulsores de la lógica en la aritmética de acuerdo a Poincaré, los cuales por él fueron mostrados en algunos argumentos a continuación reproducidos.

Los dos siguientes argumentos sobre la validez intuitiva de la inducción matemática, se encuentran esparcidos en una serie de artículos titulados *Les mathématiques et la logique* (1905b), (1906a) y (1906b). Ellos dos están centrados en atacar a la participación de la inducción matemática en la construcción/caracterización secuencial de los números naturales; en particular apuntan hacia la consideración rival de que ella "no es un axioma propiamente hablando; [si no] simplemente es la definición de número entero" (Poincaré, 1905b:150). Es decir, ambos tratarán de refutar la concesión de la validez a la inducción matemática "lógicamente" dada por la definición secuencial de los números naturales. Y para lograrlo, en ellos se intenta negar que los principios de la aritmética al estilo de Peano-Dedekind, definan correctamente a los números naturales. Con esta meta refutatoria, Poincaré explica lo siguiente:

> Así entonces, si tenemos un sistema de postulados y si podemos demostrar que estos postulados no conllevan una contradicción, nosotros tendremos el derecho de considerarlos como representando a la definición de alguna de las nociones encontradas entre ellos. Si no podemos demostrar esto, entonces tenemos que admitirlo sin demostración y por consiguiente será un axioma; por lo que, buscando a la definición debajo del postulado, hallaríamos al axioma debajo de la definición.
> (Poincaré,1905b: 1026)

En conciso, un sistema de axiomas/postulados puede servir con corrección como definición, cuando él está libre de contradicciones, es decir cuando el sistema es consistente. Ahora bien, para establecer la consistencia de un sistema de acuerdo a Poincaré sólo tenemos un par de opciones: la manera directa "mediante un ejemplo" o indirectamente a través de sus consecuencias. La primera alternativa como su nombre indica, consiste en "mostrar un objeto que satisfaga" a los axiomas/postulados del sistema que presuntamente lo define. Desgraciadamente esta vía para los principios de Peano-Dedekind está clausurada, pues según Poincaré, "no podemos tomar una parte de los enteros, por ejemplo, los tres primeros, y demostrar que ellos satisfacen la definición" (íbid. 1036). Y no podemos pues el "axioma 3 [P6 en Peano: si $n \in N \rightarrow n+1 \in N$] exige además que el 4 sea un entero y así adelante", por lo que "es imposible demostrar los axiomas para ciertos enteros sin demostrarlos para todos; por lo que debemos renunciar a la demostración por ejemplo" (íbid. 1036). Es decir, un ejemplo para ser aceptable debe ser finito según Poincaré.

Por otro lado, si se desea demostrar la consistencia de los principios aritméticos de Peano-Dedekind a través de sus consecuencias, tenemos el problema que el número total de ellas no es finito, imposibilitando su exhaustiva "verificación" para detectar la falta de contradicción. Por lo que sólo nos queda demostrar, que:

> ...un nuevo razonamiento no puede introducir una contradicción, bajo el supuesto de que, en la serie de razonamientos que le preceden, no hemos encontrado todavía contradicción alguna. Si esto pudiera ser hecho, tendríamos certeza de que nunca tendríamos que temer una contradicción. Sin embargo *esto se lograría usando una inducción completa*, y precisamente el principio de la inducción completa es el que tenemos que justificar. (Poincaré, 1905b: 1036-7).

Es decir, para demostrar la falta de contradicciones en las consecuencias derivables de los principios de Peano-Dedekind, tenemos que usar una inducción matemática[6]. Por consiguiente, si se invoca a la definición de los números supuestamente otorgada por ese sistema axiomático para respaldar la validez de la inducción matemática, estaremos cometiendo una justificación circular al ser la inducción matemática, la responsable de validar a la definición que presuntamente legitima a ese método de demostración. En palabras de Poincaré, al "buscar a la definición" de los números naturales "bajo los axiomas" de Peano-Dedekind para así validar a la inducción matemática, "hemos hallado" a la inducción matemática como un "axioma bajo esa definición".

En resumen, el segundo argumento de Poincaré tiene como premisas que (1)un sistema de axiomas/postulados es una definición válida sólo si es consistente y (2) la consistencia de un sistema se demuestra mediante un ejemplo si el objeto que satisface al sistema es finito o a través sus consecuencias, verificándolas exhaustivamente si su número total es finito y cuando no lo es, "razonando por recurrencia" para mostrar la ausencia de contradicción. Por lo tanto, si los principios de Peano-Dedekind definen correctamente a los números naturales, entonces su consistencia ha sido proporcionada mediante una inducción matemática. Por consiguiente, los principios aritméticos de Peano-Dedekind justificarían de manera circular a esta regla de demostración dejando como única fuente epistemológicamente aceptable de su validez, a la intuición. Para Poincaré no hay una tercera opción entre la lógica y la intuición, aunque si tiene un tercer argumento para favorecer a la segunda sobre la primera.

El tercer y último argumento aquí expuesto de Poincaré a favor de la intuición de la inducción matemática, también critica a la definición de los números naturales supuestamente dada por los principios de Peano-Dedekind. Aunque en esta ocasión en lugar de atacar a su corrección, arremete contra los límites de esta definición:

[6] Esta táctica fue enseñada por Hilbert en su conferencia dictada en el Congreso Internacional de las Matemáticas en 1904, la cual es criticada por Poincaré en los artículos reseñados:

> Nosotros entonces podemos reconocer la consistencia de los axiomas ya sea mostrando cómo una contradicción posible tuvo que haber ocurrido en una etapa anterior en el desarrollo de la teoría o asumiendo que hay una prueba desde los axiomas que nos conduce a una cierta contradicción y luego demostrando que tal prueba no es posible, porque ella misma contendría una contradicción.
>
> (Hilbert, 1904 vía 1967:137)

> Consideremos una palabra para la cual hemos dado explícitamente una definición *A;* luego en el discurso hacemos un uso de ella que implícitamente supone otra definición *B*. Es posible que estas dos definiciones designen la misma cosa, pero si esto es el caso entonces tendríamos una nueva verdad que debe ser demostrada o admitida como una axioma independiente. (Poincaré, 1905b vía 2005: 1027)

Es decir, una definición quizás sea incapaz de capturar todas las acepciones del término que define mientras que cada una de ellas, a su vez puede ser codificada en otra definición. Finalmente la equivalencia entre estas definiciones, debe ser demostrada o de alguna manera aceptada sin la necesidad de una prueba. Y esto sucede de acuerdo a Poincaré, para la definición secuencial de los números naturales, según la cual "un número entero finito es tal que puede ser obtenido mediante adiciones sucesivas, tal que *n* no es igual a *n*-1" (Poincaré, 1906a vía 2005: 1050). Expresada de manera más rigurosa, considérense a los principios P1,P6-P8 de Peano para definir a los números naturales (i.e. úsense esos principios para determinar quiénes son los integrantes de su conjunto *N*). Por otro lado al reflexionar sobre la validez de la inducción matemática, podemos llegar a reconocer nuestro:

> ...derecho de inferir su conclusión, porque los números enteros son por definición, aquellos para los cuales este tipo de razonamiento es legitimo. Pero esto conlleva otra definición de número entero, la cual es la siguiente: *un número entero es aquel para el cual podemos razonar por recurrencia*. (Poincaré, 1906a vía 2005: 1050)

De este modo, tendríamos al menos dos definiciones distintas para los números naturales: la secuencial especificada por los principios P1,P6-P8 de Peano y la inductiva, la cual curiosa mas no fortuitamente puede interpretarse en su principio restante, P9. Ahora bien, prosigue Poincaré:

> Las dos definiciones no son idénticas; indudablemente son equivalentes, pero sólo en virtud de un juicio sintético *a priori*; no podemos pasar de una a otra mediante un procedimiento lógicamente puro. Consecuentemente no tenemos el derecho de adoptar la segunda, después de haber introducido a los números enteros de una manera que presupone a la primera. (Poincaré, 1906a vía 2005: 1050)

Así entonces, la equivalencia entre la definición secuencial y la inductiva de número natural, no puede ser establecida con pureza lógica. Para mostrarlo, Poincaré acude a la noción de definición predicativa, i.e. aquella que sí determina a un conjunto ("clase" en su formulación original). Este tipo de definiciones tiene como meta evitar las paradojas conjuntistas, como la expuesta en nuestro Capítulo 3 sobre el conjunto universal, i.e. el conjunto de todas las cosas, cuando discutimos la demostración dada por Dedekind de la existencia de los sistemas infinitos. Ahora bien, según Poincaré, “las definiciones que deben ser consideradas como no-predicativas son aquellas que contienen un círculo vicioso” (Poincaré, 1906b vía 2005: 1063)[7]. Por ejemplo, la definición de conjunto universal contiene un círculo vicioso, pues su especificación abarca a *todas* las cosas, en particular a él mismo. En consecuencia, la lógica debe excluir a toda definición que haga referencia al objeto por ella supuestamente definido, so pena de dar cabida a las paradojas.

Ahora bien, la definición inductiva de número natural no es predicativa. Pues tal como lo afirma el principio P9 de Peano, un número natural es tal que pertenece a todo conjunto (“clase”) R que contenga a 1 ($1\in R$) y a los sucesores de sus elementos ($x\in R/x+1\in R$). Es decir, el conjunto (“clase”) N de los números naturales sería la intersección de *todos* esos conjuntos R y en particular, N sería uno de ellos. Por lo tanto, la definición inductiva de los números naturales contiene un círculo vicioso y por consiguiente no es predicativa. En consecuencia, la lógica debe olvidarse de esta definición, vetando de antemano todo intento de demostrar su equivalencia con la definición secuencial de los números naturales.

En resumen, el tercer argumento de Poincaré tiene como premisas que (1)una definición puede aludir a una sola acepción de su término definido y (2) la equivalencia entre distintas definiciones, debemos demostrarla o aceptarla como un axioma. En particular tenemos un par de diferentes definiciones para los números naturales: la

---

[7] Poincaré confiesa que su caracterización de lo no-predicativo, la basa en el análisis de las paradojas conjuntistas hecho por Jules Richard (1905):

> A mí me parece que la solución [a las paradojas] está contenida en la letra de M. Richard de la cual he hablado arriba, encontrada en la *Revue generale des sciences* de junio 30, 1905. Allí después de haber planteado una antinomia, la antinomia de Richard, él brinda su explicación.
>
> Recordemos lo que ya ha sido dicho sobre esta antinomia. *E* es el conjunto de todos los números definibles mediante un número finito de palabras, *sin introducir la noción del mismo conjunto E*. De lo contrario la definición de *E,* contendría un círculo vicioso; por lo que no debemos definir *E* con el mismo conjunto *E.*
>
> Ahora hemos definido en verdad a *N* con un número finito de palabras [*N* es un número definido mediante el proceso diagonal de Cantor aplicado sobre el conjunto numerable *E,* i.e. *N* se genera cambiando el enésimo digito en la extensión decimal del enésimo número en *E*], pero con la ayuda de la noción del conjunto *E*. Y por esta razón, *N* no forma parte de *E*. (Poincaré, 1905b vía 2005: 1063)

secuencial, dada mediante la construcción de su conjunto mediante una función sucesor a partir de un primer elemento, y la inductiva, aquella en donde abiertamente se especifica la validez de la inducción matemática para los números naturales. Ahora bien, (3) su equivalencia no debe ser demostrada, pues la segunda de ellas al no ser predicativa pondría en peligro a nuestro desarrollo lógico de la aritmética. En conclusión, tenemos que aceptarla como un axioma cuyo aval es proporcionado por la intuición.

Estos dos últimos argumentos encontraron una contestación en voz (o la pluma) de Zermelo. Sin embargo, su réplica puede ser anticipada desde el *Was sind die Zahlen,* pues allí Dedekind demuestra tanto la validez de su definición del sistema simple infinito *N*, como la validez de la inducción matemática en el Teorema 59. La primera la establece mediante un ejemplo, demostrando la existencia de un sistema infinito (la totalidad de sus pensamientos), mientras que la segunda la asienta sobre la noción de cadena de un sistema. No obstante, ambos apuntalamientos de la validez podrían ser rechazados por Poincaré al involucrar cuestiones por él vedadas: el tamaño infinito del ejemplo y lo no-predicativo de la definición de cadena de un sistema. Ahora veremos si por las mismas razones pueden ser descartadas las réplicas dadas por Zermelo a sus dos últimos argumentos.

6.2 El contraataque finito de Zermelo a favor de la lógica en la inducción matemática

Desde el principio de su artículo *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète,* Zermelo acepta el reto planteado por Poincaré indicando allí cómo piensa enfrentarlo:

> ¿Es demostrable o no el principio de la inducción completa? Esta es una cuestión que en los últimos años ha preocupado a muchos espíritus. En varios artículos ... M. *Poincaré* ha defendido la tesis de que este principio es un juicio *sintético a priori*; mientras que otros autores como MM. *Couturat, Russell* y *Whitehead* han sostenido lo contrario...
>
> La cuestión depende de la manera en que uno defina al número finito. Ahora bien para mí, todo teorema que se enuncie para los números finitos no es otra cosa si no un teorema sobre los *conjuntos finitos*; así pues antes que nada se requiere definir lo que se entiende por tal. (Zermelo, 1909 vía 2010 :236)

Por lo que la validez de la inducción matemática, anuncia desde el comienzo Zermelo, depende de la noción de conjunto finito. Es decir, tal como Dedekind fincó la legitimidad de la inducción matemática sobre su definición de "cadena de un sistema", análogamente Zermelo basará la validez de esta regla en su definición de "conjunto finito". Más aún, para evitar críticas sobre lo arbitrario o lo *ad hoc* de esta definición, en este artículo también él demostrará su equivalencia con otras definiciones de "conjunto finito" dadas por otros célebres matemáticos, como el primero. De hecho, la influencia de Dedekind en Zermelo se remarca desde la definición de "conjunto finito", pues él la especifica mediante una noción no fortuitamente llamada "cadena simple":

> Llamaremos "*cadena simple*" a un conjunto M con la propiedad siguiente: Existe una correspondencia unívoca y recíproca entre, por un lado, los elementos de M, quizás salvo uno entre ellos que llamaremos el último y, por el otro lado, los elementos de una parte de M , es decir M', que no con contiene a uno de los elementos de M (el primero); además esta correspondencia no permite la división de M en partes separadas. Dos partes de M se dicen "separadas" con respecto a cierta correspondencia cuando ningún elemento de una tiene su imagen en la otra y viceversa.
>
> (Zermelo, 1909 vía 2010 :238)

Es decir, el conjunto M es una "cadena simple" si existe una función unívoca y quizás no total f tal que f:M/M', M' es subconjunto propio de M pues no contiene un elemento de M (llamado "primero"), f quizás no está definida sólo para un elemento de M (llamado "último") y para toda partición no vacía M_1,M_2 de M, existe $m_1 \in M_1$ tal que $f(m_1) \in M_2$ ó existe $m_2 \in M_2$ tal que $f(m_2) \in M_1$. Finalmente, "un conjunto es "*finito*" si todos sus elementos forman parte de una cadena simple que contiene un último elemento" (íbid.: 238).

Análogamente al Teorema 59 del *Was sind die Zahlen,* Zermelo afirma en el Teorema I de *Sur les Ensembles Finis* que:

> Si M es una cadena simple, entonces cada subconjunto de M que contenga al primer elemento e y también a todas las imágenes de sus elementos, es idéntico al mismo M. De esto se sigue que toda propiedad del primer elemento, tal que si ella es verdadera para un elemento cualquiera también es verdadera para su imagen, se extiende a todos los elementos del conjunto. (Zermelo, 1909 vía 2010: 240)

Este teorema, que afirma la validez de la inducción matemática aplicada dentro de las cadenas simples, es una consecuencia inmediata de esta última noción. Pues si suponemos que no se cumple para algún $M' \subseteq M$, i.e. $e \in M'$ y $x \in M'/f(x) \in M'$ pero $M' \neq M$, entonces podríamos separar a la cadena simple M en sus partes no vacías M' y M-M'; lo cual está en contradicción con que M sea una cadena simple. Y tal como Dedekind extiende la validez de la inducción completa para las cadenas (Teoremas 59,60) hacia la inducción matemática para los números naturales (Teorema 80), Zermelo lo hará desde sus cadenas simples hacia los conjuntos finitos. Como preparación a esa extensión, Zermelo previamente demuestra la equivalencia entre conjunto finito y conjunto doblemente bien ordenado, i.e. aquel cuyos subconjuntos además de tener un elemento mínimo tienen un elemento máximo:

> Teorema II. Todo conjunto finito *M* puede ser doblemente bien ordenado y, recíprocamente, todo conjunto doblemente bien ordenado es finito.
> (Zermelo, 1909 vía 2010: 240)

La ida del Teorema II se establece con ayuda de la función *f* dada por la definición de cadena simple (considérese $x<f(x)$) a través de la inducción avalada por el Teorema I (si $\{e,f(e),f(f(e)),...,f(x)\}$ está doblemente bien ordenado entonces $\{\{e,f(e),f(f(e)),...,f(x), f(f(x))\}$ también lo está). Mientras que el regreso se logra definiendo mediante la relación de orden del conjunto doblemente ordenado *M* a la función *f* pedida para mostrar que *M* también es una cadena simple, pues de antemano sabemos que *M* tiene un elemento último, el máximo de *M*, mientras que para toda $x\in M$, $f(x)$ sería el elemento mínimo del subconjunto M-$\{x\}$. Asentada esta equivalencia, Zermelo procede a enunciar y demostrar el teorema de nuestro mayor interés:

> Teorema III. Sea una proposición demostrada por una parte para todo conjunto que contenga solamente un elemento, y por otra parte, para un conjunto finito cualquiera cada vez que sea verdadera para ese conjunto si se le resta uno de sus elementos; entonces esa proposición es verdadera para todos los conjuntos finitos. Esto es lo que llamamos razonamiento de *n* a *n*+1. (Zermelo, 1909 vía 2010: 242)

El Teorema III afirma que la inducción matemática débil, el razonamiento por recurrencia, es una regla válida para demostrar proposiciones sobre los conjuntos finitos, tal como lo anunció Zermelo desde los albores de su artículo citado. Cumpliendo con lo anunciado, la demostración de este teorema está basada en la definición de conjunto finito. Sea *M* cualquier conjunto finito. Luego debido al Teorema II, *M* es un conjunto doblemente bien ordenado con un primer elemento *e* y con un elemento último *u.* Por hipótesis, el segmento inicial de *e,* i.e. el conjunto de todos los elementos que preceden o son iguales a *e,* cumple con la proposición aludida por el Teorema III ya que está conformado por un sólo elemento, el mismo *e*. Luego si el segmento inicial de cualquier elemento *a* de *M* satisface esa proposición, por hipótesis el segmento inicial de $f(a)$

también lo hace. Así entonces por el Teorema I, para todos los segmentos de los elementos de *M* será verdadera dicha proposición; en particular, también lo será para el segmento inicial de *u*. Pero el segmento inicial de *u* es el mismo conjunto *M* y por lo tanto, la proposición es verdadera para cualquier conjunto finito *M.*

En el siguiente teorema (IV) de *Sur les Ensembles Finis,* Zermelo demuestra la equivalencia entre su definición de conjunto finito con la definición dada por Dedekind (un conjunto es finito si no es similar a un subconjunto propio de él)[8]. Mientras que en el último teorema enunciado en ese artículo (V), se establece que todo conjunto de conjuntos finitos tiene un conjunto finito con una potencia (cardinal) mínima, es decir, todo conjunto de conjuntos finitos está bien ordenado cardinalmente. Después de contar con todos estos teoremas junto con sus demostraciones, Zermelo zanja el problema de la inducción matemática planteado por Poincaré, con otra interrogante filosófica:

> Los Teoremas I,III y V expresan al principio de inducción completa en diversas formas en las que este se puede dar, el principio se reduce así a la definición de conjuntos finitos que nosotros hemos dado o a las definiciones equivalentes. ¿Pero de esto se sigue que el principio en cuestión sea un juicio analítico? Esto depende de la naturaleza de los axiomas sobre los cuales se basa la teoría de conjuntos y que nos hemos visto obligados a utilizar en cada una de nuestras demostraciones. Si estos axiomas, que yo me propuse enunciar completamente en otro artículo, no son más que principios puramente lógicos, el principio de inducción igualmente lo será, si por el contrario ellos son intuiciones de una clase especial, podemos continuar considerando al principio de inducción como un efecto de la intuición o como un "juicio sintético a priori". En cuanto a mí, yo no me atrevo por el momento a decidir esta cuestión puramente filosófica. (Zermelo, 1909 vía 2010: 248, 250)

La conclusión filosófica de *Sur Ensembles finis* es un poco floja si se compara con la precisión de su ejecución matemática, pues diplomáticamente termina siendo ambigua.

[8] La ida es por inducción matemática (Teorema III) y de hecho, podemos encontrarla prefigurada en los ya revisados *Beiträge* de Cantor, en específico en su Teorema D de la sección §5 (aparecido en nuestra nota 19 del Capítulo 5): si el conjunto finito M-$\{x\}$ p.a. $x \in M$ no puede ser similar a una de sus partes propias, tampoco M. El regreso, hace uso del Teorema del Buen Orden (todo conjunto puede ser bien ordenado), cuyas famosas y controversiales por su empleo del Axioma de Elección primeras demostraciones (1904, 1908), fueron provistas por el mismo Zermelo. Dicho sea de paso, él aprovecha esta equivalencia para promocionar al Axioma de Elección:

> La demostración en cuestión del teorema "cualquier conjunto puede bien ordenarse" está fundada sobre el "axioma de elección arbitraria"... Este es un axioma bastante evidente que ha servido hasta los últimos tiempos sin oposición y jamás ha conducido a un resultado falso... Sin duda alguna, el principio en cuestión es *indemostrable,* pero él resulta *indispensable* para ciertas teorías matemáticas. A mí me parece, por ejemplo, imposible demostrar el teorema precedente [Teo. IV], ¡sin recurrir a este axioma explícita o implícitamente! (Zermelo, 1909:246)

Peor aún, aunque esta conclusión históricamente luzca interesante, filosóficamente incluso puede ser calificada como inapropiada. Dado que la teoría de conjuntos podría considerarse como parte de la lógica (qué tanto es una cuestión histórica[9]), hablar de la intuición como fuente de los axiomas de la teoría de conjuntos parece un equívoco filosófico si asumimos inclusive con ligereza, al marco kantiano que supuestamente es el trasfondo de esta discusión[10]. No obstante, el retador francés tampoco es demasiado respetuoso de ese marco (ver nota 1) por lo que podemos ignorar deliberadamente este equívoco. En lugar de cuestionarnos confusamente si los principios formulados por Zermelo para la teoría de conjuntos son analíticos o sintéticos[11], podemos centrarnos en su justificación de la inducción matemática sobre la noción de "conjunto finito", con el fin de dirimir si ella logra rebatir a los dos últimos argumentos de Poincaré a favor de la intuición, para este método de demostración.

El segundo argumento exigía que se estableciera la validez de una definición antes de usarla como sustento de un método de demostración. Luego, si esta validez era

[9] Recuérdese que en los *Arithmetices Principia* y en el *Was sind die Zahlen*, la lógica y la teoría de las clases-sistemas (conjuntos) desfilan juntas y su puente natural, la definición de conjuntos por comprensión, en ambos trabajos abierta o veladamente era transitado. Es más, hoy en día la interrelación entre ellas sigue siendo muy intensa, v.gr. en la teoría de modelos, como para poder hablar de una independientemente de la otra. Que Zermelo haya hablado del posible papel de la intuición en la teoría de conjuntos, quizás deba ser interpretado como el señalamiento de un momento clave dentro de la historia de las matemáticas: la consolidación de los conjuntos como objetos de estudio propios de las matemáticas.

[10] La intuición trascendental es una delimitación espacio-temporal que condiciona nuestras representaciones para nuestra facultad cognitiva de la "sensibilidad" -*Sinnlichkeit*- (A51/B75), mientras que la lógica estaría relacionada con otra facultad cognitiva, la de la "razón" -*Vernunft*- (A299-304/B355-361, A800-804/B828-832)

[11] En su segunda demostración del Teorema del Buen Orden (1908); Zermelo enlista sus famosos axiomas para la teoría de conjuntos. Entre ellos, podemos encontrar los dos siguientes:

> Axioma VI. Si T es un conjunto tal que todos sus elementos son conjuntos mutuamente ajenos distintos al 0, su unión $\mathsf{S}T$ incluye al menos un subconjunto S_1 que tiene uno y sólo un elemento en común con cada elemento de T.
>
> Axioma VII. Existe en el dominio al menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío como elemento y está constituido de tal manera que a cada uno de sus elementos a le corresponda todavía un elemento de la forma $\{a\}$, en otras palabras, para cada uno de sus elementos a, este conjunto también contiene al conjunto $\{a\}$. (Zermelo, 1908 vía 2010: 199, 201)

El Axioma VI es el famoso y controversial Axioma de Elección (*Axiom der Auswahl*), mientras que el Axioma VII es el del infinito (*Axiom des Unendlichen*), el cual ya fue reproducido en una nota del Capítulo 5. Para este último cabe maliciosamente mencionar, que se le puede atribuir un carácter aritmético al rememorar al proceso de construcción de Peano del conjunto de los números naturales ($\varnothing \in Z$ y si $a \in Z$ / $\{a\} \in Z$). Mientras que por otro lado, también se puede criticar al Axioma VII por introducir de nuevo una noción no tolerada por Poincaré, la del infinito acabado.

asentada mediante un ejemplo, este tiene que ser finito para ser aceptable de acuerdo a Poincaré. Y la validez de la definición de los números naturales dada por los principios de Peano-Dedekind, ni acepta ejemplos finitos ni puede ser demostrada sin recurrir a la misma inducción matemática según este matemático francés. En contraste, la definición sobre la cual basa Zermelo a la validez de la inducción matemática, directamente puede validarse mediante un ejemplo pues ella trata precisamente sobre lo finito de un conjunto. Más aún, esta definición es ratificada mediante la demostración de su equivalencia con otras dos definiciones formuladas por los matemáticos de esa época: la muy influyente definición enunciada por Dedekind (1888) sobre la no similitud con subconjuntos propios y aquella menos famosa del doble buen orden especificada por Paul Stäckel(1907). Por lo tanto, Zermelo logró inhibir una de las premisas del segundo argumento de Poincaré, menoscabando de este modo a su conclusión sobre la justificación circular de la inducción matemática.

El tercer argumento exigía que se estableciera la equivalencia entre definiciones distintas usando sólo medios lógicos aceptables. En particular, las definiciones lógicamente propicias para asentar las equivalencias son las predicativas, mientras que para Poincaré estas son aquellas libres de círculos viciosos. Y esto no sucede con la definición inductiva de los números naturales reconocible en el principio P9 de Peano o con la definición de "cadena de un sistema" de Dedekind. En contraste, la definición sobre la cual basa Zermelo a la validez de la inducción matemática, abiertamente es predicativa pues ella no recurre al *definiendum* en su *definiens* para indicar lo que es un conjunto finito. Más aún, la formulación de la validez de la inducción matemática en los teoremas I y III de *Sur Ensembles Finis*, tampoco parece cometer círculos viciosos. Por lo tanto, Zermelo logró inhibir una de las premisas del tercer argumento de Poincaré, menoscabando de este modo su conclusión sobre la justificación lógicamente no aceptable de la inducción matemática.

Cabe mencionar que Zermelo tenía plena consciencia de las trabas colocadas por Poincaré para la justificación de la inducción matemática, como la infinitud y la no-predicatividad, por lo que su desarticulación planteada mediante su definición de “conjunto finito” no es una casualidad. Por ejemplo, en los comentarios finales de su artículo citado, él destaca su evasión de uno de estos escollos:

> Para demostrar los teoremas enunciados, nosotros no nos hemos apoyado en la hipótesis de que existen conjuntos infinitos, ...hipótesis fundamental para *Dedekind*... Así pues la aritmética elemental, es decir la teoría de los conjuntos finitos, se puede fundamentar sobre el principio de la inducción completa sin necesidad del “infinito real”. (Zermelo, 1909 vía 2010:250)

Estas palabras terminales sintetizan puntualmente las intenciones de su creador: fundamentar a la aritmética sobre la inducción matemática, tal como lo hizo Dedekind y Peano, pero sin la intervención de lo infinito como algo acabado (el infinito real). Recuérdese que en el *Was sind die Zahlen* se parte de la existencia, presuntamente demostrada en el Teorema 66, de los sistemas infinitos, para establecer la existencia del sistema simple infinito *N*. Ahora bien, para concretar matemáticamente esta diferencia, Zermelo propone que los números naturales refieran a conjuntos finitos y apuntala al método de demostración por excelencia de la aritmética, la inducción matemática, sobre la definición de esta clase de conjuntos. Por lo tanto, aunque la inducción matemática sea un principio e incluso un fundamento de la aritmética, en *Sur Ensembles Finis* se muestra que ella es apta de recibir una justificación dentro de una teoría de conjuntos que prescinda de la existencia de los conjuntos infinitos. Así entonces, ¿el juicio negativo de Poincaré sobre la validez circular de la inducción matemática provista por la lógica, era sólo un prejuicio contra ella basado en su desconocimiento de la teoría de conjuntos? Para concluir nuestra investigación, argumentaremos que el juicio negativo de Poincaré fue más un error de apreciación: no todo círculo es vicioso.

6.3 Síntesis final: el círculo es positivo cuando es conservativo

Recapitulando, en nuestra postulación de la inducción matemática como fundamento de la aritmética de acuerdo a los principios de Pascal-Peano-Dedekind, reconocimos una inquietud epistemológica sobre la validez de ese método de justificación para nuestro conocimiento sobre los números naturales. En particular, señalamos que los principios de Pascal-Peano-Dedekind están hechos a la medida de la inducción matemática por lo que la justificación que ellos le brindan, tiene toda la apariencia de ser una convención. Ahora bien, pronosticamos que esta inquietud nos conduciría hacia las dos soluciones típicamente sugeridas para esta pregunta epistemológica: la cancelación de la exigencia de justificación por diversas razones, v.gr. por obra y gracia de la intuición, o el reconocimiento de una justificación circular, que puede ser evaluada tanto positiva (v.gr. coherencia) como negativamente (v.gr. círculo vicioso).

Luego expusimos tres argumentos sobre esta cuestión ofrecidos por Henri Poincaré. Mediante el primero se concluyó que la inducción matemática obtenía la garantía de su accionar de nuestra intuición, pues este método allí se consideró que englobaba una serie de silogismos cuya infinitud la convertía en algo lógicamente no manejable. Por medio del segundo se concluyó que la justificación lógico-conjuntista dada por los principios de Peano-Dedekind a la inducción matemática era viciosamente circular, pues la corrección de la definición enunciada por esos principios se tenía que establecer recurriendo a ese mismo método de demostración. A través del tercero se concluyó que era lógicamente inviable demostrar la validez de la inducción matemática con los principios de Peano-Dedekind, ya que ellos contienen definiciones no-predicativas, las cuales son temidas porque a veces han desembocado en antonimias. En suma, todos estos argumentos trataron de convencernos que la validez de la inducción matemática no se podía justificar por medios lógicos, promoviendo de este modo la otra alternativa epistemológica que sitúa en nuestra intuición a la fuente de la validez de esa regla de demostración.

Después se exhibió la réplica brindada por Zermelo a los últimos argumentos de Poincaré, la cual trató de restaurar la viabilidad de respaldar "lógicamente" a la inducción matemática. Es decir, su artículo citado nos enseñó que todavía podría ser muy precipitado adoptar a cualquiera de las dos soluciones epistemológicas mencionadas, ya que nuestra búsqueda por una justificación para la inducción matemática podría proseguir dentro la teoría de conjuntos. Lo cual tampoco debería sorprendernos mucho, ya que los principios de Peano-Dedekind apuntaban también a esa dirección teórica aunque con diferentes nombres (clases en el primero, sistemas en el segundo) y con distintos modos (más lógico el primero, más conjuntista el segundo). Y gracias a Zermelo se allanó esa vía justificativa, pues él quitó del camino algunos obstáculos señalizados por Poincaré, como la existencia del infinito real y las definiciones no-predicativas. No obstante, sin la necesidad de internarnos dentro la teoría de conjuntos a través de sus axiomatizaciones, en cuyo desarrollo sobra mencionar participó vigorosamente Zermelo (ver nota 11), nuestra inquietud epistemológica puede de antemano dudar de esa ruta remodelada por este matemático alemán. Y las razones detrás de estos recelos, han aparecido desde nuestro capítulo tercero.

Un par de capítulos atrás identificamos en la definición de "cadena de un sistema" de Dedekind, su acoplamiento con la inducción matemática. Es decir, mostramos que esa definición fue creada para alcanzar diversas metas, dentro de las cuales destacamos la de facilitar y respaldar a este método de demostración. Es más, recuérdese que su autor declaró este objetivo en una carta a Keferstein, cuando en ella indicó que su caracterización del sistema *N* buscaba "asegurar la fiabilidad y completud de las demostraciones". Mientras que Zermelo parece también haber tenido este propósito con su definición de "cadena simple", tal como lo sugiere el bautizo de esta noción ("cadena") junto con la confesión en una nota de pie de página acerca de que Dedekind fue su fuente de inspiración[12].

Al analizar la definición de "cadena simple", podemos reconocer que su cláusula sobre la no separabilidad, a primera vista un poco misteriosa, está destinada a garantizar la validez de la inducción matemática para esta clase de conjuntos. Es decir, si no fuera válido esté método de demostración para una cadena simple, entonces ella podría separarse en dos subconjuntos no vacíos integrados respectivamente por los elementos que satisfagan la propiedad P y aquellos que no lo hagan. Y esto premeditadamente es imposible de acuerdo a la definición de una cadena simple. Mientras que la propagación de la validez de la inducción matemática a los conjuntos finitos resulta inmediata, pues ellos solamente son cierto tipo de cadena simple. Por consiguiente, la definición sobre la cual Zermelo presume que puede basarse la validez de la inducción matemática, la de conjunto finito, está destinada en su formulación misma para hacerlo. Por lo tanto, la

[12] La nota es la siguiente:

> 3 La noción de "cadena" se la debo a *Dedekind* (l. c. 37), pero su definición de conjunto finito difiere mucho de la mía. (Zermelo, 1909:238)

naturaleza convencional otra vez parece emerger en la “justificación” teórico conjuntista de la inducción matemática por él planteada. En otras palabras, el triunfo de Zermelo sólo consistiría, en haber logrado articular dentro de la teoría de conjuntos con la evasión de algunos obstáculos filosóficos puestos por Poincaré, a la definición inductiva de los números naturales, según la cual ellos, i.e. los conjuntos finitos, son aquellos para los cuales la inducción matemática débil, i.e. la completa, es un método de demostración válido[13].

En conclusión, *Sur Ensembles Finis* de Zermelo se sumaría a los trabajos de Peano y Dedekind estudiados, al enseñarnos cómo traducir o modelar a la aritmética en un lenguaje lógico o en una estructura teórico-conjuntista, centrándose también alrededor de la inducción matemática (débil). En ninguna de estas obras se estableció la validez de ese método de demostración en la traducción, pues en todos ellas esta se presupuso para redactarla. Irónicamente, todas ellas pueden servir para mostrar cómo la aritmética impulsó al desarrollo de la lógica y de la teoría de conjuntos, sin que ninguna haya logrado

---

[13] Ante esta crítica Zermelo podría defenderse citando sus equivalencias por él demostradas entre tres distintas definiciones de “conjunto finito”. En particular, la definición de Dedekind al estar enfocada en la potencia de los conjuntos (i.e. su cardinalidad), luce ajena a la inducción matemática (débil). Recuérdese que este método de demostración se relaciona naturalmente con cuestiones de orden (la existencia de un primer elemento y la del sucesor inmediato) y no tanto con aspectos del tamaño. Por consiguiente, si a partir de la definición de “conjunto finito” dada por Dedekind se sigue transitivamente la validez de la inducción matemática, entonces la noción de conjunto finito dejaría de lucir como un artilugio diseñado para respaldar a ese método de demostración. Es decir, en lugar de haber sido utilizada para decretar nuestro conocimiento de la legitimidad de la inducción matemática a través de una definición convencional, la noción de conjunto finito serviría para convencernos, estimulando a nuestro conocimiento, que ella es la depositaria objetiva de la validez de ese método de demostración, podría replicar Zermelo.

Desgraciadamente el paso de los conjuntos finitos de Dedekind hacia los conjuntos finitos de Zermelo, es el Teorema del Buen Orden. Y ese teorema remarca que es el orden y no el tamaño el concepto naturalmente asociado con la inducción matemática. Más aún, las demostraciones del Teorema del Buen Orden de Zermelo (1904,1908) usan al Axioma de Elección, principio cuyo carácter no-constructivo entorpece el accionar de la inducción matemática. Nótese que no se emplea inducción matemática (débil) para demostrar proposiciones sobre todos los números reales, a pesar de que el Teorema del Buen Orden indique que en principio sería válido hacerlo. Mientras que para identificar las causas de esta falta de aplicabilidad preguntémonos, ¿quién sería el sucesor de cualquier número real o el primero de todos ellos? En suma, debemos tener en consideración que la validez de la inducción matemática en *Sur Ensembles Finis* no se deduce directamente de la definición de Dedekind, sino se transita por la definición de Zermelo para establecerla pero también para fomentar su aplicación. Por lo que sobre la segunda y no sobre la primera, recaería la validez de este método de demostración.

reducir a la primera en las segundas. Por lo tanto, el papel de fundamento de la aritmética desempeñado por la inducción matemática, en estos notables trabajos no puede suplantarse por algún principio lógico o teórico-conjuntista. Así entonces, la inquietud que motivó la exhibición de la pelea de Poincaré versus Zermelo se ha mantenido en pie y todavía podemos preguntar, ¿cuál es el aval epistémico del fundamento de la aritmética que es el protagonista de nuestra investigación?

Una primera alternativa, encaminada con ayuda de Poincaré hacia la primera opción epistemológica mencionada para enfrentar al descenso infinito justificativo, sería acudir a la intuición para dirimir esta cuestión. En conciso, la validez de la inducción matemática se sabría gracias a nuestra intuición. Luego el conocimiento aritmético conseguido mediante esta regla, finalmente dependería de esta fuente epistémica, de la cual según Poincaré, también fluye la certeza:

> Así entonces nosotros tenemos muchos clases de intuición; primero, aquella que recurre a los sentidos y a la imaginación; luego aquella que generaliza mediante inducción, similar por decirlo de alguna manera, a los procedimientos de las ciencias experimentales; finalmente tenemos la intuición del número puro; de donde surge el segundo de los axiomas recién enunciados [el principio de inducción débil], que es capaz de crear el verdadero razonamiento matemático. He mostrado mediante ejemplos que las dos primeras no pueden darnos certeza; pero quien dudará seriamente de la tercera, ¿quién dudará de la aritmética? (Poincaré, 1900 vía 2005: 1016)

Así entonces, esta primera alternativa abriría las puertas a lo *a priori* o a lo evidente o a ... con tal de dejar fuera a lo convencional o al escepticismo. Sin embargo, con la apertura de esta vía también entran algunos problemas no deseados. Uno de los más comunes, es la dificultad de determinar qué cosas son o deben ser conocidas mediante intuición y cuáles no (dejemos a un lado su certeza). Lo cual nos remitiría a la complicada pregunta sobre qué es la intuición, aunque por mor del argumento, aceptemos una caracterización superficial de que es algo en nuestras cabezas que nos permite el conocimiento inmediato de ciertas cosas. En las líricas palabras de Poincaré:

> En el estudio de los trabajos de los grandes o no tan grandes matemáticos, es imposible no notar y distinguir dos tendencias opuestas, o mejor dicho, dos tipos de mente enteramente diferentes. Uno de estos tipos está preocupado sobre todo con la lógica: al leer sus trabajos, uno está tentado en creer que ellos avanzan paso a paso, al estilo de un Vauban quien va presionado sus trincheras contra el lugar asediado, dejando nada a la suerte. El otro tipo es guiado por la intuición y de un primer golpe

> logra rápidas pero a veces precarias conquistas, como la caballería osada en la guardia de avanzada. (Poincaré, 1900 vía 2005: 1012)[14]

Ahora bien, el problema de la delimitación del dominio de lo intuitivo conlleva una complicación para la identificación de los primeros principios y por consiguiente la de los fundamentos. Por ejemplo, la ley de conmutatividad para la suma, ¿es más o menos evidente que la regla de inducción matemática? En conciso, ¿por qué la primera debe ser justificada recurriendo a la segunda y no emanar directamente desde nuestra intuición de los números? Es más, la primera sería menos general que la segunda y quizás por esa razón más evidente, ya que ella sólo es una propiedad particular de una operación entre los números, mientras que la segunda es un medio para establecer, un sinnúmero de propiedades acerca de ellos.

Ahora bien, nuestra orientación pragmática puede ayudar a atender a esta duda no invitada. Al interesarnos más en los fines, los métodos de demostración serían los candidatos idóneos para ser certificados mediante la intuición, porque ellos precisamente son los medios normalmente exigidos para establecer a nuestro conocimiento matemático. De este modo, si a nuestra intuición le atribuimos el conocimiento de que los números sean cierta clase de objetos (o su totalidad una determinada estructura) para la cual se pueda aplicar válidamente la inducción matemática débil, es porque esta regla fomenta el asentamiento de gran parte de nuestro conocimiento acerca de ellos[15]. En particular, el recurso de la intuición debería destinarse a la inducción matemática y no a la conmutatividad de la suma, porque la primera nos permite obtener mayores beneficios epistémicos que la segunda.

Sin embargo esta manera de atender a la duda no deseada, atenuaría al atractivo epistemológico de la primera alternativa. Es decir, para juzgar quiénes son aptos de adquirir la condonación de su justificación por parte de nuestra intuición, tendríamos que evaluar las ganancias de conocimiento ofrecidas por los candidatos a recibirla. Por

---

[14] Sébastien Le Prestre de Vauban (1633-1707). Mariscal e ingeniero militar francés.

[15] No escribimos que de *todo* el conocimiento aritmético debido al famoso Teorema de Incompletud de Gödel, precisamente establecido en la aritmética, que nos informa sobre la imposibilidad de esto. Además ya fueron expuestos en nuestro Capítulo 4, algunos límites más precisos de la inducción matemática, v.gr. las proposiciones que tratan sobre los números primos dificultan su accionar.

consiguiente, en lugar de ser un juicio inmediato o directo o *a priori* o..., tal como usualmente se supone que debería ser el caso cuando participa nuestra intuición, esta decisión sería tomada después de aquilatar las consecuencias y por ende, el veredicto dado por esta facultad cognoscitiva sería relegado. Y este decremento de la importancia de la intuición podría invitarnos a olvidar esta primera alternativa para plantear otra que abiertamente tenga el mismo sentido de nuestra orientación pragmática.

Nuestra segunda opción para otorgar el aval epistémico al fundamento de la aritmética estudiado, difuminaría la mancha subjetiva de la primera y en su extremo, se aclararía con las ideas filosóficas de un matemático cuyo trabajo ya fue citado: Bernard Bolzano. Recordemos que este teólogo checo distinguió entre las razones subjetivas y las objetivas, señalando que si bien las primeras bastaban en los procesos de justificación de nuestro conocimiento, teníamos la obligación epistémica de hallar a las segundas con tal de fundamentarlo. Mientras que una advertencia emitida por este filósofo al momento de emprender esa búsqueda, fue que no nos espantáramos ante el hallazgo de razones cuya evidencia en primera instancia nos pareciera dificultosa o incluso menor (v.gr. la ley de continuidad) que la de sus consecuencias (v.gr. la existencia de una solución real para una ecuación cuyo polinomio definitorio asuma tanto valores negativos como positivos). Expresado esto último con respecto al tema de nuestro interés: la validez de la inducción matemática débil no debe parecernos más intuitiva que las conclusiones por medio de ella adquiridas, v.gr. la ley de conmutatividad de la adición, para que ella sea un candidato epistémicamente digno, de ser un fundamento de la aritmética.

Así entonces, aquí aconsejaremos inspirados en Bolzano, abandonar toda pretensión de que lo evidente o lo sencillo o lo incuestionable o...(algo subjetivo), sea un indicio cuando lidiamos con los fundamentos, de que su conocimiento pueda asentarse sobre nuestra intuición. Sin embargo tampoco adoptaremos su posición extrema que proclamaba la existencia objetiva de las proposiciones (matemáticas) y por ende de los fundamentos, porque no se requiere tal asunción para reconocer el conocimiento de la validez de la inducción matemática. En lugar de esa postura metafísica, nosotros adoptaremos una perspectiva histórica promoviendo un parámetro conservativo que sirva para adjudicar el conocimiento a un fundamento.

La aparición de la inducción matemática (débil) junto con la definición secuencial de los números naturales, no marcó un rompimiento total con el conocimiento aritmético que le antecedía. Por ejemplo, las leyes de las operaciones aritméticas, como la conmutativa y la asociativa, no fueron abruptamente abolidas al consolidarse esta amalgama en los trabajos de Peano o Dedekind. Al contrario, estas leyes fueron ratificadas siguiendo esta regla sobre las definiciones de las operaciones también sintonizadas con ella, las “recursivas”. Es decir, la historia de las matemáticas nos sugeriría que la creación de fundamentos debe cumplir con cuotas conservativas de conocimiento. Por lo tanto, propondremos que el conocimiento de un fundamento se conceda cuando al inspeccionar la producción epistémica por él generada, se mantenga la mayoría de nuestro conocimiento previo de la(s) teoría(s) revisada(s). Mientras que la tasa de conservación se fija alta, puesto que así se ha manifestado a lo largo de la historia de las matemáticas. Es decir, es un hecho que el conocimiento matemático, a pesar de los cambios conceptuales o justificativos acontecidos a lo largo de su desarrollo, ha sido muy estable[16]. Si este hecho es contingente o necesario, sólo sería un agregado (en el mejor

[16] Para todos aquellos influenciados de alguna manera u otra por la filosofía de la ciencia de Thomas Kuhn, lo conservativo del conocimiento matemático puede ser un hecho dudoso, o incluso podría ni siquiera ser un hecho. Para bien y para mal, el pasado conforme más alejado esté del presente, se convierte en un locutor mudo de todas sus posibles interpretaciones. Más aún, lo contrario a lo conservativo, i.e. lo revolucionario, es un término también sujeto a diversas lecturas. Es más, la existencia de hechos matemáticos es algo cuestionable. Es decir, no esperamos encontrar en el mundo algo que refute o corrobore alguna proposición matemática, por lo que en el mundo no esperamos hallable una chispa o un chorro de agua que encienda o apague a una revolución teórica y nos permita o cancele hablar sobre su existencia. En suma, en los relatos sobre el desarrollo de las matemáticas, lo interpretativo parece tener pleno dominio sobre este asunto. Por lo que si uno se obstina en ver revoluciones en las matemáticas, seguramente los verá bajo una interpretación adecuada a tal fin.
Por ejemplo, en Gillies (1992) se compilan una serie de artículos destinados a discutir si en las matemáticas ocurren o no revoluciones. Sin embargo la tendencia del compilador a favor de su existencia, se puede notar a lo largo de todo este libro que irónicamente empieza y clausura al debate bidireccional, con el texto de Crowe (1975). En este artículo, su autor en solitario niega la presencia de revoluciones en las matemáticas de la siguiente manera:

> Las revoluciones nunca ocurren en las matemáticas...Esta ley depende de la estipulación mínima que una característica necesaria de una revolución es que una entidad previamente existente (sea un rey, una constitución o una teoría) sea derrocada e irrevocablemente descartada.
>
> (Crowe 1975 vía 1992: 19)

de los casos explicativo) del parámetro aquí propuesto para conferir el conocimiento de un fundamento.

En el caso aritmético, el cumplimiento de este criterio para la inducción matemática (débil) puede ser ejemplificado retrayéndonos hasta la aritmética euclidiana. Sin dejar de reconocer todos los cambios en las nociones y en los modos de justificación detectables entre la aritmética euclidiana y aquella derivable de los principios de Peano-Dedekind (Pascal pudiera pensarse como una fase intermedia por sus modos deductivos), se puede considerar que la definición secuencial de número acoplada a la inducción matemática, hace más precisa a la definición euclidiana. Recuérdese que de acuerdo a la segunda un número "es una multitud de unidades", por lo que la primera podría interpretarse como una especificación de la conformación de esa multitud, basada en la agregación de una unidad a la vez (función sucesor).

Más aún, la concepción numérica de Peano-Dedekind se acopla a un método de demostración validado y también fomentado con mayor precisión, la inducción matemática débil, en comparación con el razonamiento euclidiano de la descomposición-recomposición numérica. Por lo tanto, la continuidad detectada entre la concepción numérica euclidiana y la de los principios Peano-Dedekind, aunada al poder deductivo de la inducción matemática, nos convencería de que la teoría aritmética desarrollable a partir de los segundos, pueda conservar los resultados traducidos de la primera, sobre todo aquellos juzgados como relevantes bajo parámetros más actuales. Por ejemplo, la existencia de la máxima medida común de un par de números demostrada constructivamente mediante el algoritmo euclidiano en VII.Prob.2, es conservada en las proposiciones 35-36 de la sección §6 de los *Principios* de Peano, asegurando ellas la existencia del máximo común divisor de un par de números (ver nota 27 del Capítulo 3).

En particular, la aritmética pascaliana no derrocó ni irrevocablemente descartó a la aritmética euclidiana. Tampoco parece ser el caso para el resto de las teorías matemáticas respecto a sus predecesoras. Sin duda han cambiado los métodos de justificación y las concepciones de los objetos de estudio en las teorías matemáticas. Y algunos sensacionalistas bien informados de esta disciplina, han recalcado estos cambios para propagar la idea de que las revoluciones en las matemáticas sí han acontecido. Pues es un hecho, ni siquiera puesto en duda por ellos, que los cataclismos venden más que los eventos estables.

Sin embargo, al realizar esta evaluación podríamos estar tentados por seguir retrayendo la comparación hasta un conocimiento primigenio, uno cuyas bases justificativas, si los tuviera, estarían en ciernes o serían de dudosa procedencia. Es más, ese conocimiento primigenio pudiera contemplarse como surgido gracias a nuestra intuición. Y la aritmética al ser la más popular de todas las teorías matemáticas, es un campo propicio para localizar sus raíces dentro de esta facultad. Lo cual podría alentarnos a restaurar la importancia epistémica de la intuición, aquí desdeñada en lo que respecta al conocimiento de los fundamentos. Es decir, si las diversas etapas de nuestro conocimiento invocadas para evaluar el estatus epistémico de un fundamento, eventualmente convergieran en algún conocimiento primigenio nacido de nuestra intuición, entonces, ¿acaso ella no sería el árbitro final para dirimir esta cuestión siendo nuestra segunda opción, sólo una postergación del veredicto dado por esta facultad?

Sobre este planteamiento evitaremos afirmar algo comprometedor porque nuestro parámetro epistemológico propuesto, comparte su naturaleza histórica con la investigación aquí realizada, mientras que esta última pregunta, parece ser nativa de otras disciplinas como las ciencias cognitivas. Es decir, si nuestro conocimiento iniciático de alguna teoría matemática, como la aritmética, fuera realmente conocimiento y no sólo un grupo de creencias, el cual además fuera provisto por nuestra intuición, esto no contravendría a nuestra evaluación conservativa y sólo indicaría que esta facultad sí sería un remoto pero vital partícipe, de nuestro conocimiento de los fundamentos. En conciso, nuestro examen está diseñado para aplicarse sobre teorías con presencia histórica y no sobre posibilidades cognitivas.

Más aún, se podrían postular otras fuentes además de la intuición para los supuestos conocimientos primigenios en las matemáticas. En particular, debido a los antiquísimas aplicaciones concretas de los números, como el contar y ordenar cosas materiales, se podría considerar al razonamiento inductivo como el responsable de nuestro conocimiento iniciático de algunas proposiciones aritméticas[17]. Y si se desea ser

[17] Para reforzar la existencia del conocimiento inductivo de algunas proposiciones aritméticas, se podría invocar otra vez, quizás para su propio disgusto, a Bolzano. Si admitimos su distinción entre justificaciones

más drástico, incluso podría negársele su estatuto epistémico a los primigenios "conocimientos" matemáticos degradándolos a un grupo de creencias, luego depuradas y asentadas mediante justificaciones deductivas. Es decir, se podría apelar a la vieja distinción epistemológica entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación, para encerrar en el primero a la intuición, a la inducción y a otras fuentes de dudosa calidad epistémica como la suerte. De esta discriminatoria manera, nuestro examen sólo se aplicaría a teorías desarrolladas con demostraciones de por medio. Es más, se podría postular que la evolución del razonamiento deductivo en las matemáticas, está asociado a la presencia explícita (en las axiomatizaciones) o implícita (en los desarrollos teóricos menos rigurosos y más numerosos) de los fundamentos, pues su amalgama justificativo-constitutiva serviría para explicar el rasgo más preciado de este tipo de argumentaciones: su certeza. Sin embargo debido a nuestra preferencia por la argumentación histórica, esta hipótesis no será respaldada pues su justificación sobrepasa por mucho a los alcances de la presente investigación.

En suma, la existencia de "conocimiento" primigenio en las matemáticas, no invalidaría a nuestra evaluación conservativa para determinar el conocimiento de un fundamento. Las distintas posturas asumibles sobre este asunto, sólo afectarían cuándo pueda o deba aplicarse este examen y a lo sumo quizás, influirían en la interpretación de algunos de sus resultados (v.gr. dándole mayor o menor peso a la intuición). Y aunque sospechemos que si optamos por elaborarlo exclusivamente para conocimientos establecidos deductivamente, siempre existirán algunos fundamentos en el fondo de esta

---

subjetivas y objetivas, entonces como ejemplo de las primeras podríamos tener a los argumentos inductivos cuyas conclusiones sean algunas proposiciones aritméticas. Y si se busca discriminar a los argumentos inductivos mediante la exigencia de la certeza en el conocimiento matemático, podríamos ofrecer distintas razones para superar este odio. Por ejemplo, el conocimiento puede desplegarse en distintos niveles, sobre todo cuando queremos reconocerle algún atributo, como la certeza. De este modo, si se conoce con certeza alguna proposición aritmética, es porque primero se conoce esa proposición y luego se conoce o al menos se tiene alguna justificación, sobre la certeza de ese conocimiento aritmético. Así entonces, el conocimiento inductivo de una proposición aritmética, podría ubicarse en el primer nivel de conocimiento, mientras que su conocimiento deductivo conseguido mediante una demostración, alcanzaría al segundo pues además de justificarla, también brindaría razones sobre la certeza de su respaldo. Por lo tanto, aunque el conocimiento inductivo de algunas proposiciones aritméticas se ubique en un nivel inferior que su conocimiento deductivo, no por ello dejaría ser conocimiento.

comparación, carecemos del atrevimiento de afirmarlo, ante la falta de un mayor número de evidencias históricas.

En resumen, en esta sección terminal tratamos de redondear epistemológicamente a nuestra noción de fundamento basada en las amalgamas constitutivo-justificativas. En particular, el conocimiento de la validez de la inducción matemática débil, fundamento de la aritmética aquí estudiado, fue sometido a un riguroso escrutinio ante las sospechas de su naturaleza convencional. Para realizarlo aprovechamos los argumentos esgrimidos en una vieja lucha efectuada entre Poincaré, campeón de la intuición, contra algunos propulsores de la lógica y la teoría de conjuntos, cuyo paladín elegido fue Zermelo. En conciso, el primero mediante una serie de argumentos incorrectos, tal como lo mostró el segundo, concluyó correctamente, a pesar del segundo, que la lógica y la teoría de conjuntos, al menos en sus desarrollos sobre la aritmética creados por Peano, Dedekind y Zermelo, eran incapaces de justificar a la inducción matemática (débil) pues la justificación que ellas ofrecen, es circular.

Para resolver el problema del conocimiento de un fundamento, luego se bosquejaron dos posibles soluciones no necesariamente ajenas. La primera, inspirada en Poincaré, fue postular a la intuición como la responsable de nuestro conocimiento de los fundamentos. Entre todos los candidatos a recibir su conocimiento por parte de la intuición, propusimos a los métodos de justificación, coma la inducción matemática, como los idóneos para hacerlo, ante sus promesas de conseguir más conocimiento. Y este interés por obtener más resultados epistémicos, nos impulsó a plantear una segunda respuesta que de entrada fuera completamente pragmática.

La segunda manera descrita para otorgarle conocimiento a un fundamento, consiste en evaluar su producción epistémica para compararla con nuestros conocimientos previos. Dado que la historia de las matemáticas nos revela una alta tasa de conservación de su conocimiento, exigimos que un fundamento para ser conocido, deba ser capaz de generar, con las traducciones pertinentes, a la mayor parte de sus teorías predecesoras. En particular, la aritmética basada en los principios de Peano-Dedekind, puede mantener a los resultados de la aritmética euclidiana. Por lo tanto, la justificación circular de la inducción matemática establecida por los principios de Peano-Dedekind es positiva, puesto que estos principios son conservativos en la aritmética.

Finalmente mencionamos que la evaluación sobre el poder conservativo de un fundamento, podría remontarnos hasta un “conocimiento” primigenio cuyo sustento podría ser la intuición o la inducción o ...o incluso ninguno. Lo cual no cambiaría a nuestra segunda respuesta, sino sólo a su periodo de aplicación o a su distribución de importancia entre diversos medios cognitivos. Para terminar, insinuamos que el desarrollo del razonamiento deductivo en las matemáticas, está íntimamente relacionado con nuestra noción de fundamento como amalgama constitutivo-justificativa. Desgraciadamente, debido a las dimensiones del estudio histórico que se requiere para convertir esta sospecha en una aseveración, desistimos de hacerlo.

Hemos emprendido a lo largo de esta investigación, una búsqueda exhaustiva de empalmes constitutivo-justificativos para promoverlos como la huella característica de un “fundamento”. En la introducción de esta noción, nos centramos en sus cualidades explicativas, las cuales basamos sobre la pureza y la fertilidad deductivas provistas por estas amalgamas. Mientras que respecto a sus garantes epistémicos, los cuales deberían anteceder a las virtudes explicativas para que ellas fueran tales, pudimos haber dado la impresión de que los presupusimos o más inquietante aún, que les dimos un carácter convencional. En esta sección final tratamos de mejorar esa impresión, añadiendo a lo puro y a lo fértil de un fundamento, lo conservativo para asegurar su conocimiento. En conclusión, esperamos que nuestro planteamiento filosófico basado en estos tres atributos, aunado a nuestra evidencia histórica recolectada, haya servido para afirmar que la inducción matemática débil, es un fundamento de la aritmética pascaliana.

Referencias

Acerbi, F. (2000). "Plato: *Parmenides* 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?". *Archive for History of Exact Sciences* 55: 57–76

Álvarez, C. (2007). *François Viète et la mise en équation des problèmes solides*. Réminisciences 8. Université catholique de Louvain

Anderson, A. & Viète, F. (1615). *Ad angularium sectionum analyticen theoremata κανολίκωτερα* , París: *Oliverium de Varennes*

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. Nueva York: Springer-Verlag.

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelleWurzel der Gleichung liege.* Traducido por J. Sebestik en (1964) *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 17 (2): 136-164.

(1851). *Paradoxien Des Unendlichen.* Leipzig: Reclam

(2004). *The mathematical works of Bernard Bolzano*. (S. Russ, Trad. y Ed.) Oxford: Oxford University Press.

Cajori, F. (1918). “Origin of the Name "Mathematical Induction", *The American Mathematical Monthly* 25 (5): 197-201

Campanus de Novara. (1482). *Preclarissimus liber Elementorum Euclidis perspicacissimi : in artem Geometrie incipit…* . Venecia: Erhardus ratdolt Augnestensis impressos

Cantor, G.(1879/84).“Uber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen* 15: 1-7. 17: 355-58. 20:113-21. 21:51-58, 545-86, 23:453-88.

(1883c). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre . Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: B.

G. Teubner. Traducido por U.Parpart en (1976). *The Compaigner* 9: 69-96

(1891). “Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1: 75-78.

(1895/97) “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”. *Mathematische Annalen* 46: 481-512/ 49:282-311. Traducido en (1915*)* *Contributions to the Founding of the Theorv of Trasfinite Numbers*. (P. E, B Jourdain, trad.) Chicago: Open Court,

Clavius, C. (1574). *Euclidis Elementorum Libri XV*. Roma : Vincentium Accoltum

Crowe, M.J., 1975, "Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics", *Historia Mathematica* 2 : 161-166. Reproducido en Gillies (1992): 15-20.

Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen*? . Traducido en (1963). *Essays on the theory of numbers*. (W. Beman, Trad.) Nueva York: Dover Publications.

(1996). *Theory of algebraic numbers*. (J. Stillwell, Trad.) Cambridge: Cambridge University Press.

Dummett, M. A. (1991). *The logical basis of metaphysics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Edwards, A. W. (2002). *Pascal's arithmetical triangle: the story of a mathematical idea*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Euclides. (1908). *Los Trece Libros de los Elementos.*(T. Heath, Trad. de Heiberg). Cambridge: Cambridge University Press.

Euler, L. (1738). “Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6: 103-107.

(1741). ”Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio” *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8: 141-146

(1750). “Theoremata circa divisores numerorum”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 1: 20-48

(1751). “Recherches sur le racines imaginaires des equations”, *Memoires de l'academie des sciences de Berlin* 5: 222-288

(1761). ”Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7:49-82

(1763). ”Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8: 74-104

Ewald, W. (2005). *From Kant to Hilbert a source book in the foundations of mathematics*. Oxford: Clarendon Press

Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics* (2ª ed.). Basel, Suiza: Birkhäuser.

Fermat, P. (1894). *Oeuvres de Fermat.* (P. Tannery & C. Henry, eds.). París: Gauthier-Víllars et fils.

Fowler, D. (1994), “Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It?”, *Physis* 31: 253–265.

Frege, G. (1972). *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética*. (H. Padilla, Trad.) México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Friedman, M. (1974), “Explanation and Scientific Understanding,” *The Journal of Philosophy* 71: 5-19.

Gauss, F. (1799). *Demostratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi poss.* Helmstedt: Fleckeisen. Traducción al inglés hecha por Ernest Fandreyer, disponible en : http://libraserv1.fsc.edu/proof/gauss.htm

(1801). *Disquisitiones Arithmeticae.* traducida por Waterhouse, W. (1986), Virginia: Springer Verlag.

Gentzen, G. (1969). *The collected papers of Gerhard Gentzen* (M. E. Szabo, Ed. y Trad.). Amsterdam: North-Holland.

Gillies, D. (1992). *Revolutions in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Goldfarb, W. (1988). “Poincaré against the logicists”, *History and philosophy of modern mathematics*. (P. Kitcher & W. Aspray, Eds.) Minneapolis: University of Minnesota Press

Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel; a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press.

Hilbert, D. (1899). “Grundlagen der Geometrie”. *Festschrift zur Feier der Enthullung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*. Leipzig: Teubner. Traducido en (1950). *The foundations of geometry* (E. J. Townsend, Trad.). La Salle, Ill.: Open Court Pub. Co.

(1904). “Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik”. *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg.* Leipzig: Teubner. Traducido en Heijenoort (1967):129-138.

(1931) “Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie”. *Mathematische Annalen*, 104: 485-94. Traducido en Ewald (2005): 1148-1157

Irving, R. S. (2004). *Integers, polynomials, and rings: a course in algebra*. New York: Springer.

James, W. (1909). *The meaning of truth, a sequel to "Pragmatism*". New York: Longmans, Green, and Co..

Jech, Thomas. (2011, Inv.) "Set Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* (E. Zalta,Ed.), url= <http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/set-theory/>.

Kant, I. (1997). *Crítica a la razón pura*. (P. Ribas, Trad.) Madrid: Alfaguara

Kennedy, H.C. (1963). “The Mathematical Philosophy of Giuseppe Peano”. *Philosophy of Science* 30 (3):262-266.

(1973). “What Russell learned from Peano”. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 14 (3): 367-72

(1980). *Peano: Life and Works of Giuseppe Peano*. Dordrecht: D. Reidel Pub. Co.

Kitcher, P. (1981). “Mathematical Rigor-Who needs it?”, Noûs 15 (4): 469- 493

(1989), “Explanatory Unification and the Causal Structure of the World,” en Kitcher & Salmon (eds.), *Scientific Explanation. Minnesota Studies in the Philosophy of Science* 13: 410-505

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Linnebo, ∅ (2004). “Predicative Fragments of Frege Arithmetic”, *Bulletin of Symbolic Logic* 10(2):153-174

Mancosu, P. (1999). “Bolzano and Cournot on Mathematical Explanation”, *Revue d’Histoire des Sciences* 52 (3): 429-456

Mueller, I. (1969). “Euclid's Elements and the Axiomatic Method”. *British Journal for the Philosophy of Science* 20 (4):289-309.

(1981). *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Netz, R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics a study in cognitive history*. Cambridge: Cambridge University Press.

von Neumann, J. (1923). “Zur Einfuhrung der transfmiten Zahlen”. *ALS* 1: 199-208. Traducido en Heijenoort (1967): 347-354.

(1925). ““Eine Axiomatisierung der Mengenlehre”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* 154: 219-240. Traducido en Heijenoort (1967): 394-413

Pascal, B. (1665) *Traité du triangle arithmétique*, *avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Reproducidos en (1967). *Oeuvres Completes*. Tomo 1, París: Gallimard, Bibliothéque de la Pléiade

(1995). *Obras matemáticas: selección de textos*. (S. Ramírez, Trad.). México: UNAM, Facultad de Ciencias

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Traducido en (1979*). Los Principios de la Aritmética expuestos según un nuevo método*, (J.Velarde, Trad.) Oviedo: Pentalfa

Pieri, M. (1907). “Sopra Gli Assiomi Aritmetici”. Traducido en (2007). *The legacy of Mario Pieri in geometry and arithmetic* (Marchissotto & Smith). Boston:

Birkhäuser.

Poincaré, H. (1894). “Sur la Nature du Raisonnement mathematique”. *Revue de metaphysique et de morale* 2: 371-84. Traducido en (1905): 1-16.

(1905). *Science and Hypothesis.* (W.J.G. , Trad.) Nueva York: Walter Scott Publishing Co.

(1905b). “Les mathématiques et la logique”. *Revue de metaphysique et de morale* 13: 815-35. Traducido en Ewald (2005): 1021-1038

(1906a), “Les mathématiques et la logique”. *Revue de metaphysique et de morale* 14: 17-34. Traducido en Ewald (2005): 1038-1052

(1906b). “Les mathématiques et la logique”. *Revue de metaphysique et de morale* 14: 294-317. Traducido en Ewald (2005): 1052-1071

Reck, E. (2003). “Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense”, *Synthese* 137: 369–419

Seidenberg, A. (1974-5). “Did Euclid's *Elements*, Book I, Develop Geometry Axiomatically?". *Archive for History of Exact Sciences* 14: 263-95.

Scheubel, J. (1545). *De Numeris Et Diversis Rationibus seu regulis computationum opusculum.* Leipzig: Blum

Sieg, W.& Schlimm, D. (2005). “Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms”. *Synthese* 147 (1):121 - 170.

Smith, E. (1959). *A Source Book in Mathematics.* Vol. 2, Nueva York: Dover.

Stäckel, P.(1907). “Zu H. Webers Elementarer Mengenlehre”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16: 425-428

Stifel, M. (1544). *Arithmetica Integra.* Nuremberg: Johan Petreium

Tarski, A. (1956). *Logic, semantics, metamathematics; papers from 1923 to 1938.* (J.H. Woodger, Trad.) Oxford: Clarendon Press.

Viète, F. (2006). *The Analytic Art*. (T. R.Witmer, Trad.). Nueva York: Dover

Wang, Hao. (1957). "The Axiomatization of Arithmetic", *Journal of Symbolic Logic* 22 (2):145-158

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. (García Suárez & Moulines, Trad.) México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas

Yadegari, M. (1978). "The Use of Mathematical Induction by Abū Kāmil Shujā' Ibn Aslam (850-930)", *Isis* 69 (2): 259-262.

Zermelo, E. (1904) Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen* 59: 514–516.

(1908). "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre l" *Mathematische Annalen* 65: 261-281.

(1909). "Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète", *Acta mathematica* 32: 185–193.

(2010). *Collected works Gesammelte Werke*. (Ebbinghaus & Kanamori & Fraser, Ed.) Berlin: Springer-Verlag.