



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOBRE LA INMERSIÓN DE SUPERFICIES
HIPERBÓLICAS EN EL ESPACIO EUCLIDIANO DE
DIMENSIÓN TRES, EL TEOREMA DE HILBERT**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DIEGO CORRO TAPIA

**DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. FRANCISCO MANUEL BARRIOS
PANIAGUA
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sobre la inmersión de superficies hiperbólicas
en el espacio euclidiano de tres dimensiones, el
Teorema de Hilbert.

Diego Corro

© *Fecha de Borrador 29 de mayo de 2012*

29 de mayo de 2012

Índice general

Contenido	1
1. Preliminares	3
1.1. Introducción (un poco de historia)	3
1.2. Superficies diferenciables	5
1.3. Superficies riemannianas	10
2. Teorema de Hilbert	17
2.1. Enunciado y consideraciones previas	17
2.2. Primer Lema	24
2.3. Segundo Lema	32
2.4. Tercer lema	40
2.5. Cuarto Lema	44
2.6. Quinto Lema	49
2.7. Sexto Lema	50
2.8. Séptimo Lema	52
2.9. Octavo Lema	54
2.10. Prueba del Teorema de Hilbert	58
3. Conclusión	61
A. El plano de Lobatchevsky es completo	63

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción (un poco de historia)

En 1868 Eugenio Beltrami en su artículo *Saggio di Interpretazione della Geometria Non-euclidea* (*Giornale di Matematiche* VI (1868), 284-312) respondió a la pregunta: ¿Qué superficies admiten una transformación sobre el plano euclidiano que mande sus geodésicas en líneas rectas?, mostrando que sólo las superficies de curvatura constante cumplen esto. Y más que eso que las superficies de curvatura negativa bajo estos mapeos dan como resultado la geometría desarrollada de manera axiomática por Lobatchevsky y Bolyai.

En este artículo trabaja con la pseudoesfera (figura 1.1), la cual se obtiene rotando la tractriz en torno al eje Y , consciente de que ésta no puede ser interpretada como un plano al tener una curva frontera, y al no ser simplemente conexa ya que topológicamente hablando la pseudoesfera es homeomorfa a un cilindro.

Beltrami obtiene una superficie simplemente conexa considerando a la cubierta universal de la pseudoesfera. Esta superficie que cubre no es todavía un plano completo debido a que tiene una curva frontera, el horociclo que es una circunferencia con centro en el “infinito”.

Mostrando de manera implícita que la curva frontera puede ser llevada a una circunferencia arbitraria con el mismo centro al infinito se obtiene que la cubierta universal de la pseudoesfera representa a un disco horocíclico arbitrario y por lo tanto a una porción arbitrariamente grande del plano hiperbólico.

La razón por la cual Beltrami cubre a la pseudoesfera es que busca una

superficie que esté en el espacio euclidiano ordinario y tenga la forma ordinaria de medir longitud de arco, no logrando encontrarla pero sin ser esto el objetivo principal de su excelente trabajo.

Para una exposición más profunda sobre los trabajos de Beltrami se invita a leer [16].

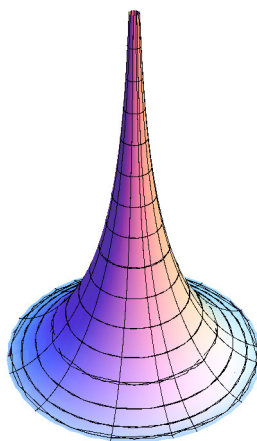


Figura 1.1: Pseudoesfera

Continuando con el trabajo de Beltrami en 1901 David Hilbert presenta el artículo *Ueber Flächen von constanter gaußscher Krümmung* [6] en el cual en la primera sección habla del trabajo de Beltrami y centra su trabajo en responder la pregunta que Beltrami dejó inconclusa: ¿Existe una superficie en el espacio euclidiano ordinario, con la forma ordinaria de medir longitud de arco, con curvatura constante negativa que cubra al plano de Lobatchevsky en el sentido definido por Beltrami?.

Cuando Hilbert habla de cubrir con una superficie al plano de Lobatchevsky se refiere a tener una transformación de la superficie en el plano euclidiano, el cual manda geodésicas en líneas rectas, obteniendo al final la geometría hiperbólica de Lobatchevsky.

En esta pregunta, al requerir que las geodésicas se comporten como líneas

rectas, básicamente se está pidiendo que se puedan extender indefinidamente (no tienen un límite o una frontera), y por ende las superficies no pueden tener frontera. Una superficie que cumpla esta propiedad se dice hoy en día que sea una superficie completa.

La geometría (ángulos, distancias, áreas, etc.) de una superficie está dada por la primera forma fundamental, la cual se puede escoger de manera arbitraria (pidiendo solamente que sea no degenerada, positiva definida y diferenciable), siendo así dos superficies el mismo objeto geométrico cuando tienen la misma estructura diferenciable y la primera forma fundamental. Cuando se mete mediante una inmersión una superficie en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 se puede comparar la compatibilidad de la geometría que tenía originalmente la superficie con la que tiene \mathbb{R}^3 , induciendo una nueva primera forma fundamental en la superficie con la métrica de \mathbb{R}^3 . Si la forma inducida coincide con la original se dice que la inmersión es isométrica.

Por ésto la pregunta formulada por Hilbert se puede reformular en términos modernos de la siguiente forma: ¿Existe una superficie con curvatura constante negativa la cual sea completa y pueda ser inmersa de forma isométrica en \mathbb{R}^3 ?

La respuesta a esta pregunta es negativa y una demostración nos la da el mismo Hilbert en el mismo artículo.

En este trabajo expongo la prueba de la respuesta a la misma pregunta en términos modernos, guiándome en una prueba dado por do Carmo en [1], la cual está basado en la prueba dada por Hilbert.

1.2. Superficies diferenciables

En esta sección se definirán los conceptos necesarios para formular y demostrar el teorema de Hilbert en el siguiente capítulo.

Definición 1.2.1. *Una superficie (una variedad diferenciable de dimensión 2), es un conjunto S junto con una familia de transformaciones inyectivas $\mathbb{X}_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ de abiertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ en S tales que:*

1. $\bigcup_\alpha \mathbb{X}_\alpha(U_\alpha) = S$.
2. *Para cada par α, β que cumpla $\mathbb{X}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{X}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, tenemos que $\mathbb{X}_\alpha^{-1}(W)$, $\mathbb{X}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de \mathbb{R}^2 , y $\mathbb{X}_\beta^{-1} \circ \mathbb{X}_\alpha$ es un difeomorfismo. (Fig 1.2)*

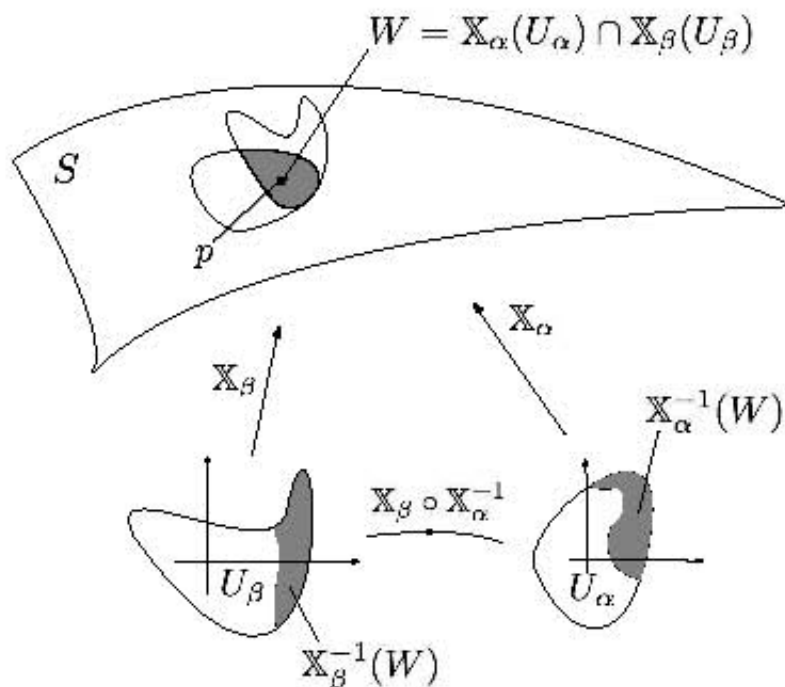


Figura 1.2: Cambio de coordenadas

El par $(U_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)$ con $p \in \mathbb{X}_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una *parametrización* de S alrededor de p y si $q = \mathbb{X}(u_\alpha, v_\alpha) \in S$ decimos que (u_α, v_α) son las *coordenadas locales* de q en este sistema coordenado. La familia $\{(U_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)\}$ es llamada una *estructura diferenciable* para S .

Observación. A veces es conveniente pedir que la estructura diferenciable sea *maximal* respecto a las condiciones 1. y 2. de la definición 1.2.1. Esto significa que cualquier otra familia que satisfaga las condiciones 1. y 2. deberá estar contenida en la familia $\{(U_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)\}$.

Definición 1.2.2. Sean S_1 y S_2 superficies. Una transformación $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ es diferenciable en $p \in S_1$ si dada una parametrización $\mathbb{Y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ alrededor de $\varphi(p)$, existe una parametrización $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ alrededor de p , tal que $\varphi(\mathbb{X}(U)) \subset \mathbb{Y}(V)$ y la transformación

$$\mathbb{Y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es diferenciable en $\mathbb{X}^{-1}(p)$. Se dice que φ es diferenciable en S_1 si es diferenciable en todo $p \in S_1$. (Fig. 1.3)

Por la condición 2. de la definición 1.2.1 la definición anterior no depende de la elección de las parametrizaciones.

Si la transformación diferenciable $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ es invertible y la función inversa φ^{-1} es diferenciable, decimos que φ es un *difeomorfismo*.

Se dice que φ es un *difeomorfismo local* en $p \in S$ si existen vecindades U de p y V de $\varphi(p)$ tales que $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

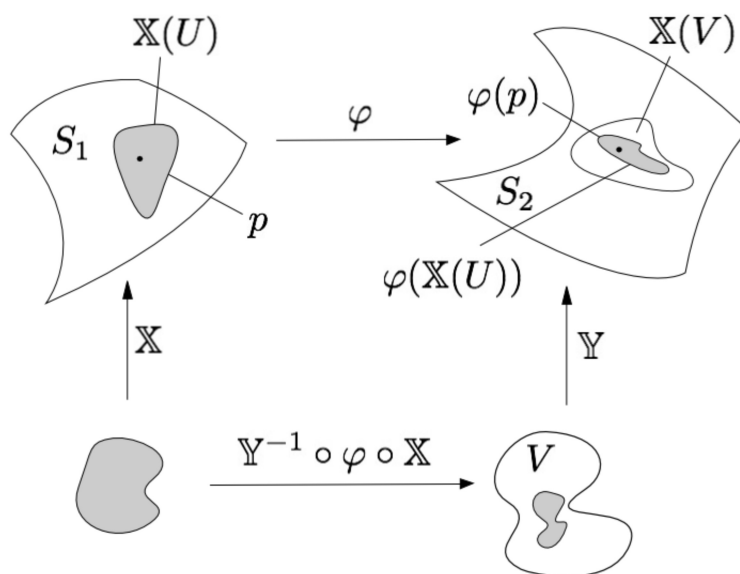


Figura 1.3: Función diferenciable entre superficies

Un ejemplo de una transformación la cual es un difeomorfismo local se obtiene a partir de la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3. *Para un punto $p \in S$ y un vector $w \in T_p(S)$, con $w \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w$.*

Observación. La geodésica γ depende del punto p y del vector w , está evaluada por un parámetro t , por la cuál la vamos a denotar de la siguiente

forma:

$$\gamma(t) = \gamma(t, w, p).$$

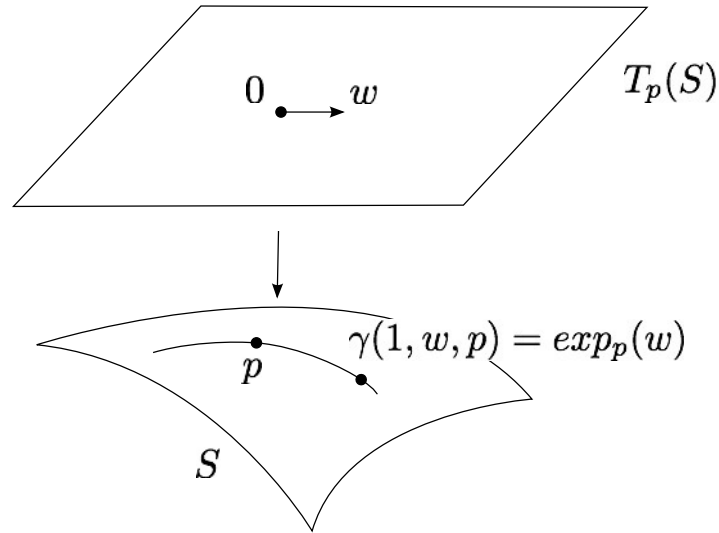


Figura 1.4: Definición de la función exponencial

Definición 1.2.4. Si para $w \in T_p(S)$ no cero, la geodésica $\gamma(t, w, p)$ está definida en $t = 1$, definimos la función exponencial $\exp_p : T_p(S) \rightarrow S$ como

$$\exp_p(w) := \gamma(1, w, p) \quad \text{y} \quad \exp_p(0) = p$$

.

Geoméricamente, esta construcción corresponde a recorrer sobre S (si es posible) una longitud igual a $|w|$, sobre una geodésica que pasa por p en la dirección de w . El punto obtenido es denotado por $\exp_p(w)$ (figura 1.4).

Con esto es claro que para una vecindad, U , del $0 \in T_p(S)$ en la cuál tengamos que para todo $w \in U$ no cero, está definido $\gamma(1, w, p)$, entonces \exp_p baja de manera difeomorfa esta vecindad U a S .

Proposición 1.2.5. $\exp_p : U \subset T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo en una vecindad U del 0 en $T_p(S)$.

La prueba de esto proviene de dos proposiciones, las cuales nos desvían del tema, pero la prueba y el enunciado de estas está dada en [1, p.283].

Definición 1.2.6. Una transformación diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es llamada una curva en S . Asumamos que $\alpha(0) = p$ y denotemos por $D(p)$ a el conjunto de funciones sobre S que son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es la función $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{con } f \in D.$$

Un vector tangente en un punto $p \in S$ es el vector tangente en $t = 0$ para alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$.

Escogiendo una parametrización $\mathbb{X} : U \rightarrow S$ alrededor de $p = \mathbb{X}(0, 0)$ podemos expresar a la función f y a la curva α en términos de \mathbb{X} como $f(u, v)$ y $(u(t), v(t))$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d(f(u(t), v(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= u'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) (0) + v'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (0) \\ &= \left(u'(0) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) (0) + v'(0) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (0) \right) (f). \end{aligned}$$

Esto sugiere, dado que tenemos coordenadas (u, v) alrededor de p , que denotemos por $(\frac{\partial}{\partial u})(0)$ al vector tangente en p que mapea una función f en $(\frac{\partial f}{\partial u})(0)$; un significado similar se le asociara al símbolo $(\frac{\partial}{\partial v})(0)$.

Observación. $(\frac{\partial}{\partial u})(0)$ y $(\frac{\partial}{\partial v})(0)$ son los vectores tangentes en p de las “curvas coordenadas”

$$u \rightarrow \mathbb{X}(u, 0), \quad v \rightarrow \mathbb{X}(0, v),$$

respectivamente. (Fig. 1.5)

Por lo anterior, se sigue que el conjunto de vectores tangentes en p , con las operaciones usuales para funciones, es un espacio vectorial de dimensión dos, $T_p(S)$, que es llamado *espacio tangente* de S en p . Además la elección de una parametrización $\mathbb{X} : U \rightarrow S$ alrededor de p determina una base asociada $\{(\frac{\partial}{\partial u})(q), (\frac{\partial}{\partial v})(q)\}$ de $T_q(S)$ para cualquier $q \in \mathbb{X}(U)$.

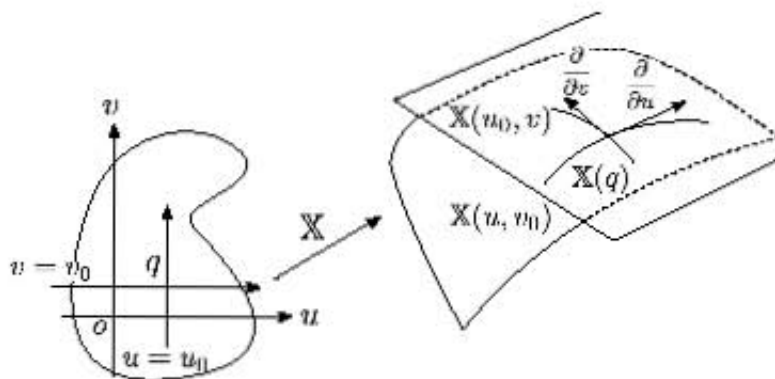


Figura 1.5: Curvas coordenadas y sus vectores tangentes

Definición 1.2.7. Sean S_1, S_2 superficies y $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ una transformación diferenciable. Para cada $p \in S_1$ y cada $w \in T_p(S)$, consideremos una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Sea $\beta := \varphi \circ \alpha$. El mapeo $D_p\varphi : T_p(S_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(S_2)$ dado por

$$D_p\varphi(w) := \beta'(0),$$

está bien definido y es llamado la diferencial de φ en p .

Definición 1.2.8. Sea S una superficie diferenciable. Una transformación diferenciable $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión si $D_p\varphi : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectivo para todo $p \in S$. Si además, φ es un homeomorfismo sobre $\varphi(S) \subset \mathbb{R}^3$, donde $\varphi(S)$ tiene la topología inducida por \mathbb{R}^3 , decimos que φ es un encaje.

1.3. Superficies riemannianas

Definición 1.3.1. Una superficie geométrica (variedad riemanniana de dimensión 2) es una superficie S junto con la elección de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en cada $T_p(S)$ y $p \in S$, el cual varía diferenciablemente respecto a p en el siguiente sentido: Para alguna parametrización $\mathbb{X} : U \rightarrow S$ alrededor de

p , tomando $q = \mathbb{X}(u, v)$, las funciones

$$\begin{aligned} E(u, v) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(q), \frac{\partial}{\partial u}(q) \right\rangle_q, \\ G(u, v) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}(q), \frac{\partial}{\partial v}(q) \right\rangle_q, \\ F(u, v) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(q), \frac{\partial}{\partial v}(q) \right\rangle_q, \end{aligned}$$

son funciones diferenciables en U generalmente conocidas como los coeficientes de la primera forma fundamental. El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es llamado muchas veces una métrica (riemanniana) sobre S .

Escribiendo dos vectores $w = (w_1, w_2)$, $w' = (w'_1, w'_2) \in T_p(S)$ en términos de la base $\{\frac{\partial}{\partial u}(p), \frac{\partial}{\partial v}(p)\}$, obtenemos la siguiente descomposición en términos de la primera forma fundamental

$$\langle w, w' \rangle_p = w_1 w'_1 E(p) + (w_1 w'_2 + w_2 w'_1) F(p) + w_2 w'_2 G(p) \quad (1.1)$$

al ser el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ bilineal.

Definición 1.3.2. La longitud de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ diferenciable está dada por

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma generada por el producto interior de la métrica.

Observación. Escribiendo la curva α como $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, tenemos entonces que

$$\alpha'(t) = u'(t) \frac{\partial}{\partial u}(t) + v'(t) \frac{\partial}{\partial v}(t),$$

por lo cual nos queda $\|\alpha'(t)\|$ de la siguiente manera en términos de la primera forma fundamental

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (u'(t))^2 E(t) + 2u'(t)v'(t)F(t) + (v'(t))^2 G(t).$$

Tomando para dos puntos en la superficie p y q , a $L(p, q)$ como el conjunto de curvas diferenciables que unen p con q , podemos definir las geodésicas de la siguiente manera.

Definición 1.3.3. Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , con $i, j, k = 1, 2$, de una superficie S , en términos de una parametrización \mathbb{X} , se definen como soluciones de el siguiente sistema

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v. \end{cases} \quad (1.2)$$

Observación. Las ecuaciones anteriores han sido agrupadas en tres pares de ecuaciones y para cada par el determinante del sistema es $EG - F^2 \neq 0$. Por lo tanto es posible resolver el sistema anterior y computar los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Definición 1.3.4. Una curva diferenciable parametrizada $\gamma : I \rightarrow S$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si para un sistema de coordenadas (U, \mathbb{X}) alrededor de $\gamma(t_0)$, de forma que en U tenemos $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$, se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1.3)$$

Si γ es una geodésica para todo $t \in I$, decimos simplemente que γ es una geodésica. Si $[a, b] \subset I$ y $\gamma : I \rightarrow S$ es una geodésica, la restricción de γ a $[a, b]$ es llamada un segmento geodésico que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

La noción de geodésica está relacionada con el concepto de minimizar distancias. La siguiente definición y proposición nos dice que esto en efecto sucede

Definición 1.3.5. Una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es minimizante si para cada $t_1, t_2 \in [a, b]$ la longitud de α desde $\alpha(t_1)$ hasta $\alpha(t_2)$ es menor o igual que la longitud de cualquier otra curva que una $\alpha(t_1)$ con $\alpha(t_2)$.

Proposición 1.3.6. Si una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$, parametrizada por longitud de arco es minimizante, entonces α es una geodésica.

La prueba a esta proposición está dada en [13, p. 151]

Definición 1.3.7. La curvatura K en p de una superficie S está dada por

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK$$

Observación. Es fácil notar que $E \neq 0$ ya que por definición

$$E(u, v) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(q), \frac{\partial}{\partial u}(q) \right\rangle_q,$$

y al ser $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ un producto interior tenemos que $E(u, v) = 0$ si y sólo si $\frac{\partial}{\partial u}(q) = 0$, lo cual es una contradicción.

Lo siguiente nos da una forma de calcular la curvatura en términos de la primera forma fundamental cuando $F = 0$

Proposición 1.3.8. Si $F = 0$ entonces sucede

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_u}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Demostración. Como $F = 0$ entonces de (1.2) obtenemos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G},$$

por lo cual sustituyendo en la definición (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u - \left(\frac{E_u}{2G} \right)_v + \left(\frac{E_v}{2E} \right) \left(-\frac{E_u}{2G} \right) + \left(\frac{G_u}{2G} \right) \left(\frac{G_u}{2G} \right) \\ & - \left(-\frac{E_u}{2G} \right) \left(\frac{G_v}{2G} \right) - \left(\frac{E_u}{2E} \right) \left(\frac{G_u}{2G} \right) = -EK, \end{aligned}$$

obteniendo por un lado que

$$\begin{aligned} K &= \frac{-2G_{uu}GE + 2G_uG_uE - 2E_{uv}GE + 2E_uG_vE}{4E^2G^2} \\ &+ \frac{E_vE_uG - G_uG_uE - E_uG_vE + E_uuG_uG}{4E^2G^2} \\ &= \frac{-2G_{uu}EG + G_uG_uE - 2E_{uv}EG + E_uG_vE + E_vE_uG + E_uG_uG}{4E^2G^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_u}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{E_{uv}\sqrt{EG} - E_v \left(\frac{E_v G + EG_v}{2\sqrt{EG}} \right)}{EG} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u \left(\frac{E_u G + EG_u}{2\sqrt{EG}} \right)}{EG} \right) \\
&= \frac{-2E_{uv}EG + E_u E_v G + E_u G_v E - 2G_{uu}EG + G_u E_u G + G_u G_u E}{4E^2 G^2},
\end{aligned}$$

obteniendo así la igualdad deseada. \square

Definición 1.3.9. Sean S_1 y S_2 superficies geométricas. Una isometría es un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ que cumple

$$\langle u, v \rangle_p = \langle D_p f(u), D_p f(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall p \in S_1, u, v \in T_p(S_1). \quad (1.4)$$

Una transformación diferenciable $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría local en p si existe una vecindad $U \subset S_1$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo que satisface (1.4).

En particular un difeomorfismo f entre superficies S_1 y S_2 , es isometría si y sólo si se cumplen para todo punto en S_1 las siguientes tres relaciones

$$\begin{aligned}
E(p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_p = \left\langle D_p f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), D_p f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{f(p)}, \\
G(p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = \left\langle D_p f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), D_p f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)}, \\
F(p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = \left\langle D_p f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), D_p f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)},
\end{aligned}$$

al descomponerse el producto punto $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ respecto a la primera forma fundamental como indica (1.1) y ser bilineal.

Definición 1.3.10. *Un campo vectorial X sobre una superficie S es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in S$ un vector $X(p) \in T_p(S)$.*

Dada una parametrización $\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ podemos escribir

$$X(p) = a_1(p) \frac{\partial}{\partial u}(p) + a_2(p) \frac{\partial}{\partial v}(p),$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sobre U y $\{\frac{\partial}{\partial u}(p), \frac{\partial}{\partial v}(p)\}$ es la base asociada a \mathbb{X} , con $i = 1, 2$.

Definición 1.3.11. *Decimos que un campo X es diferenciable en p , si las funciones a_1 y a_2 son diferenciables en p .*

Observación. Esta última definición difiere de la que se trabaja usualmente en un curso de geometría riemanniana o un curso de topología diferencial, pero fue elegida debido en parte a su simpleza por un lado y por otro, debido a que con esta definición se logra dar una prueba sencilla del lema 2.8.1.

Por otro lado en [2, p. 25], doCarmo prueba que la definición usual y la dada en este trabajo son equivalentes.

Capítulo 2

Teorema de Hilbert

En este capítulo se enunciará y probará el teorema de Hilbert, haciendo primero consideraciones para reformularlo y facilitar la prueba. Después se descompondrá la prueba en ocho lemas, que nos permiten dar la prueba del teorema en unas cuantas líneas.

2.1. Enunciado y consideraciones previas

Definición 2.1.1. *Una superficie S riemanniana es completa si para todo punto $p \in S$ y cualquier geodésica parametrizada*

$$\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S \quad \text{con} \quad \gamma(0) = p,$$

ésta puede ser extendida en una geodésica parametrizada

$$\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S,$$

definida sobre toda la recta real.

Como ejemplos de superficies completas tenemos al plano euclidiano, a la esfera, el cilindro “infinito” dado por $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y el cono “infinito”. Más adelante se caracterizarán a las superficies completas, de forma que sea fácil saber cuando una superficie es completa o no.

Una propiedad interesante de las superficies completas que se puede deducir rápidamente de la definición está dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2. *Si S es completa entonces podemos extender la transformación exp_p dada en la definición 1.2.4, de $\mathbb{B}_\varepsilon(p) \subset T_p(S)$ a todo $T_p(S)$*

Demostración. La transformación exponencial $exp_p : T_p(S) \rightarrow S$, está definido sobre una vecindad $\mathbb{B}_\varepsilon(p) = \{v \in T_p \mid \|v\| < \varepsilon\}$ para alguna $\varepsilon > 0$.

Recordando que

$$exp_p(v) := \gamma(1, v),$$

como S es completa, a γ la podemos extender a todo \mathbb{R} a través de $\bar{\gamma}$.

Sea $w \in T_p(S)$, entonces

$$\frac{\varepsilon}{2 \|w\|} w \in \mathbb{B}_\varepsilon(p).$$

Por la homogeneidad de $\bar{\gamma}$ y al estar definida sobre todo \mathbb{R} se tiene que para toda $t \in \mathbb{R}$

$$\bar{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{2 \|w\|} t, w\right) = \bar{\gamma}\left(t, \frac{\varepsilon}{2 \|w\|} w\right).$$

Sea $t_o = \frac{2 \|w\|}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que

$$exp_p(w) = \bar{\gamma}(1, w) = \bar{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{2 \|w\|} t_o, w\right) = \bar{\gamma}\left(t, \frac{\varepsilon}{2 \|w\|} w\right)$$

□

Esto da pie al teorema de Hopf-Rinow-De Rham.

Teorema 2.1.3 (Hopf-Rinow-De Rham). *S es una superficie completa si y sólo si para cualesquiera dos puntos $p, q \in S$, existe una geodésica γ que une a p con q y que cumple $\ell(\gamma) = \inf\{\ell(\alpha) \mid \alpha \text{ curva que une a } p \text{ con } q\}$, donde ℓ es la longitud de arco.*

La prueba de este teorema no está dentro de los objetivos de este trabajo, pero para el lector interesado la puede encontrar en [14, p. 342].

Superficies no completas:

Con el teorema de Hopf-Rinow-De Rham tenemos un método para poder comprobar si una superficie es completa o no.

Ejemplos de superficies completas hay varios, siendo los más sencillos de verificar vía el teorema de Hopf-Rinow-De Rham, el plano euclidiano, en el cual las geodésicas son las rectas, y la esfera con la métrica inducida por \mathbb{R}^3 , en la cual las geodésicas son las circunferencias mayores, ya que por cualesquiera dos puntos del plano o de la esfera pasa una geodésica que los une cumpliéndose así, por el teorema, que sean completas .

Una de las hipótesis del teorema de Hilbert, es que la superficie sea completa, por lo cual es bueno ver la existencia de superficies no completas, ya que si no esta hipótesis sobraría.

Para ver la existencia de superficies no completas, en la siguiente proposición se partirá de una superficie completa de las cuales conocemos algunos ejemplos.

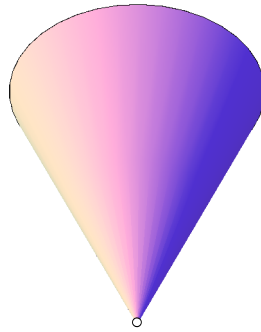


Figura 2.1: Cono Sin Vértice

Proposición 2.1.4. *Sea S superficie completa, $p \in S$. Entonces $S \setminus \{p\}$ no es completa.*

Demostración. Tomemos $q \in S$ en una vecindad abierta de $p \in S$ lo suficientemente pequeña.

Como por la proposición 1.2.5 exp_q es un difeomorfismo local, entonces existe $v \in T_q(S)$ tal que:

$$p = exp_q(v) = \gamma(1, v).$$

En otras palabras existe una geodésica γ que pasa por p y q en S , pero en $S \setminus \{p\}$ no podemos extender esta geodésica ya que tendría que pasar por p . \square

Otro ejemplo interesante es de la pseudoesfera quien tiene curvatura negativa.

Proposición 2.1.5. *La pseudoesfera tiene curvatura constante -1 y no es completa.*

Demostración. Empecemos viendo que la pseudoesfera tiene curvatura negativa. Para esto daremos la siguiente parametrización $\mathbb{X} : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida como:

$$\mathbb{X}(u, v) := \left(\frac{1}{\cosh(u)} \cos(v), \frac{1}{\cosh(u)} \sin(v), u - \tanh(u) \right).$$

De aquí calculamos $\frac{\partial}{\partial u} = \mathbb{X}_u$ y $\frac{\partial}{\partial v} = \mathbb{X}_v$, quedando que

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_u(u, v) &= \left(-\frac{\tanh(u) \cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{\tanh(u) \sin(v)}{\cosh(u)}, \tanh^2(u) \right), \\ \mathbb{X}_v &= \left(-\frac{\sin(v)}{\cosh(u)}, \frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, 0 \right), \end{aligned}$$

por lo que tenemos que la primera forma fundamental queda como

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \tanh^2(u), \\ F(u, v) &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0, \\ G(u, v) &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \frac{1}{\cosh^2(u)}. \end{aligned}$$

Por otro lado los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} e(u, v) &:= \langle N, \mathbb{X}_{uu} \rangle = -\frac{\tanh^2(u)}{\cosh(u)}, \\ f(u, v) &:= \langle N, \mathbb{X}_{uv} \rangle = 0, \\ g(u, v) &:= \langle N, \mathbb{X}_{vv} \rangle = \frac{\tanh^2(u)}{\cosh(u)}. \end{aligned}$$

Por [1, p. 155] sabemos que la curvatura está dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

por lo cual tenemos que para la pseudoesfera

$$K(u, v) = \frac{\left(-\frac{\tanh(u)}{\cosh(u)}\right) \left(\frac{\tanh(u)}{\cosh(u)}\right)}{\frac{\tanh^2(u)}{\cosh^2(u)}} = -1.$$

Para ver que no es completa, consideramos para $v \in [0, 2\pi]$ fijo la imagen de la curva $\alpha : [0, \infty) \rightarrow S$ dada por

$$\alpha(u) := \mathbb{X}(u, v).$$

La imagen corresponde a una geodésica de la pseudoesfera, al ser una tractriz, la cual es la curva generadora de la pseudoesfera, es decir es un “meridiano” de la superficie, y por [1, p. 255], sabemos que estas curvas parametrizadas por longitud de arco son geodésicas.

Pero esta curva α no se puede extender dentro de la pseudoesfera, ya que α pasa por la frontera de ésta. Así tenemos una geodésica que no se puede extender a todo \mathbb{R} .

Por lo tanto la pseudoesfera no es completa. \square

Enunciemos ahora el teorema de interés en este trabajo, el cuál justamente nos dice que no podemos “ver una superficie hiperbólica en \mathbb{R}^3 ”.

Teorema de Hilbert. *No existe una inmersión isométrica $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie completa S con curvatura constante negativa en \mathbb{R}^3 .*

Por los trabajos [7], [8] se sabe que las superficies completas de curvatura constante negativa están dadas por

$$\mathbb{H}^2/\Gamma,$$

donde Γ es un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^2 el espacio hiperbólico de dimensión dos, por lo cual se pueden construir varios ejemplos de superficies completas de curvatura constante negativa.

En este trabajo solo se mencionan explícitamente dos representaciones del espacio hiperbólico de dimensión dos, siendo uno de ellos el plano hiperbólico, \mathbb{H} , y el otro el plano de Lobatchevsky (o el modelo del semiplano hiperbólico), \mathbb{R}_+^2 , aunque existen más representaciones siendo éstas el modelo de disco de Poincaré y el modelo de disco de Klein, todas ellos estudiados a detalle en [16].

Para facilitar la demostración del *teorema de Hilbert* supondremos sin pérdida de generalidad, que la curvatura K de la superficie S es constante e igual a -1 .

Esto se logra considerando la siguiente métrica $\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle} := |K|\langle \cdot, \cdot \rangle$, y recordando de la definición 1.3.7:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

Donde Γ_{ij}^k , con $i, j, k = 1, 2$ son los símbolos de Christoffel.

Entonces de la definición de los símbolos de Cristoffel nos queda para $\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{E} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{F} = \overline{E}_u, \\ \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{F} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{G} = \overline{F}_u - \frac{1}{2} \overline{E}_v, \\ \overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{E} + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{F} = \frac{1}{2} \overline{E}_v, \\ \overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{F} + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{G} = \frac{1}{2} \overline{G}_u, \\ \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{E} + \overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{F} = \overline{F}_v - \frac{1}{2} \overline{G}_u, \\ \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{F} + \overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{G} = \frac{1}{2} \overline{G}_v. \end{cases} \quad (2.1)$$

Pero por definición sabemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{E}(u, v) &:= \overline{\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle} = |K| \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = |K|E(u, v), \\ \bar{G}(u, v) &:= \overline{\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle} = |K| \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = |K|G(u, v), \\ \bar{F}(u, v) &:= \overline{\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle} = |K| \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = |K|F(u, v),\end{aligned}$$

por lo cual el sistema (2.1) se convierte en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} |K|(\bar{\Gamma}_{11}^1 E + \bar{\Gamma}_{11}^2 F = E_u), \\ |K|(\bar{\Gamma}_{11}^1 F + \bar{\Gamma}_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v), \\ |K|(\bar{\Gamma}_{12}^1 E + \bar{\Gamma}_{12}^2 F = \frac{1}{2}E_v), \\ |K|(\bar{\Gamma}_{12}^1 F + \bar{\Gamma}_{12}^2 G = \frac{1}{2}G_u), \\ |K|(\bar{\Gamma}_{22}^1 E + \bar{\Gamma}_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2}G_u), \\ |K|(\bar{\Gamma}_{22}^1 F + \bar{\Gamma}_{22}^2 G = \frac{1}{2}G_v). \end{cases} \quad (2.2)$$

Por lo tanto las soluciones de (2.1) son:

$$\bar{\Gamma}_{i,j}^k = \Gamma_{i,j}^k, \quad \text{con } i, j, k = 1, 2.$$

Por lo cual la curvatura \bar{K} bajo la nueva métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es

$$\begin{aligned}-\bar{E}\bar{K} &= (\bar{\Gamma}_{12}^2)_u - (\bar{\Gamma}_{11}^2)_v + \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{\Gamma}_{11}^2 + \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{11}^2 \bar{\Gamma}_{22}^2 - \bar{\Gamma}_{11}^1 \bar{\Gamma}_{12}^2 \\ &= (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \\ &= -EK,\end{aligned}$$

Obteniendo así que

$$EK = \bar{E}\bar{K} = |K|E\bar{K},$$

y por tanto despejando y recordando que $K < 0$ obtenemos que

$$\bar{K} = -1.$$

Más que eso, como $exp_p : T_p(S) \rightarrow S$ es un difeomorfismo local, entonces

$$D_0(exp_p) : T_p(S) \rightarrow T_p(S),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, identificando a $T_0(T_p(S))$ simplemente con $T_p(S)$.

Con ésto podemos definir el siguiente producto interior, inducido por exp_p , para u y v en $T_p(S)$:

$$\langle u, v \rangle^* = \overline{\langle D_0(exp_p)(u), D_0(exp_p)(v) \rangle}.$$

Sean $S' := T_p(S)$ con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$, $q = exp_p(v)$, entonces por el lema de Gauss [1, p. 367] tenemos:

$$\langle u, v \rangle^* = \overline{\langle D_v(exp_p)(u), D_v(exp_p)(v) \rangle_q} = \overline{\langle u, v \rangle_p}.$$

Es decir con esta métrica tenemos que la función exp_p es una isometría y por lo tanto $K(S')$ es constante e igual a -1

Así, si tenemos una inmersión isométrica $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces

$$\psi := \Phi \circ exp_p : S' \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

también será una inmersión isométrica.

Por esto el teorema se reduce a demostrar que para S' no existe una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3

Esto se probará en lemas de la siguiente forma:

Primero veremos que S' es isométrico al plano hiperbólico, y por tanto tiene área infinita.

Después en los siguientes lemas se asumirá la existencia de la inmersión isométrica Ψ y se probará que existe una parametrización de S' bajo la cual el área de S' es menor que 2π .

2.2. Primer Lema

Empecemos viendo que S' es isométrico al plano hiperbólico \mathbb{H} , y por tanto el área de S' es infinita.

Recordemos que \mathbb{H} es \mathbb{R}^2 con coordenadas (u, v) y la siguiente métrica:

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle := 1, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle := e^{2u}, \quad F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle := 0$$

Entonces según la proposición 1.3.8 tenemos que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_u}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) = -\frac{1}{2e^u} \left(\frac{2e^{2u}}{e^u} \right)_u = -\frac{2e^u}{2e^u} = -1$$

Lema 2.2.1. S' es isométrico al plano hiperbólico \mathbb{H}

Demostración. Consideremos una base $\{X_1, X_2\}$ ortonormal de $T_q(S')$ y una función

$L : T_q(\mathbb{H}) \rightarrow T_{q'}(S')$ lineal, con:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) := X_1$$

y

$$L\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) := e^u X_2$$

Entonces al ser L lineal tenemos que

$$d(L)_w = L(v), \quad \forall w, v \in T_q(\mathbb{H}),$$

y con esto se mostrará que L es una isometría.

Para esto basta ver que

$$\begin{aligned} \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle^* &= \left\langle L \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), L \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle^* \\ &= \langle X_1, X_1 \rangle = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* &= \left\langle L \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), L \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* \\ &= e^{2u} \langle X_2, X_2 \rangle = e^{2u} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* &= \left\langle L \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), L \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* \\ &= e^u \langle X_1, X_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto L es una isometría:

$$\begin{aligned} \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle^* &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle = 1 \\ \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle = e^{2u} \\ \left\langle d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d(L)_w \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle^* &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Sea $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow S'$ definida como

$$\varphi := \exp_{q'} \circ L \circ \exp_q^{-1}.$$

Veamos que φ está bien definida, es decir es necesario probar que \exp_q^{-1} está definida para cualquier punto p en \mathbb{H} .

Esto es equivalente a probar que por cualesquiera dos puntos $p_1, q_1 \in \mathbb{H}$ pasa una única geodésica.

Para esto consideraremos a $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y\}$ junto con la siguiente métrica:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle := \frac{1}{y^2}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle := 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle := \frac{1}{y^2}.$$

Observación. Con esta métrica \mathbb{R}_+^2 se conoce como el plano de Lobatchevsky.

Del plano de Lobatchevsky sabemos lo siguiente:

Proposición 2.2.2. *Por cualesquiera dos puntos del plano de Lobatchevsky pasa una geodésica.*

La demostración de esta proposición es dada en el Apéndice A.

A continuación se probará que \mathbb{H} es isométrico a \mathbb{R}_+^2 bajo:

$$\xi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{con} \quad \xi(u, v) := (v, e^{-u}).$$

Proposición 2.2.3. \mathbb{H} es isométrico a \mathbb{R}_+^2 , bajo ξ .

Demostración. Debido a que $0 < y$, entonces $\log(y)$ está definido, por lo cual

$$\xi^{-1}(x, y) = (-\log(y), x),$$

es la función inversa de ξ , y claramente ξ y ξ^{-1} son diferenciables.

Entonces:

$$D_{(u,v)}\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-u} & 0 \end{pmatrix},$$

por lo cual identificando a $\frac{\partial}{\partial u}$ y $\frac{\partial}{\partial v}$ con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} D_{(u,v)}\xi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{-u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-u} \frac{\partial}{\partial y}, \\ D_{(u,v)}\xi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

y ya con esto tenemos que ξ es una isometría entre \mathbb{H} y \mathbb{R}_+^2 , porque:

$$\begin{aligned}
\left\langle D\xi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), D\xi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{y^2} \\
&= \frac{1}{(e^{-u})^2} = e^{2u} \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\
\left\langle D\xi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), D\xi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \right\rangle &= \left\langle -e^{-u}\frac{\partial}{\partial y}, -e^{-u}\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = e^{-2u} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\
&= \frac{e^{-2u}}{y^2} = \frac{e^{-2u}}{e^{-2u}} = 1 \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \\
\left\langle D\xi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), D\xi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, -e^u \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 0 \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ξ es una isometría de \mathbb{H} en \mathbb{R}_+^2 □

Al ser \mathbb{H} isométrico a \mathbb{R}_+^2 , como \mathbb{R}_+^2 es una superficie completa entonces \mathbb{H} también es una superficie completa y tenemos que entre cualesquiera dos puntos de \mathbb{H} pasa una geodésica.

Entonces φ está bien definida, ya que todo punto $p \in \mathbb{H}$ está unido con una geodésica a $q \in \mathbb{H}$, y bajo una reparametrización adecuada p es imagen de algún vector $v \in T_q(\mathbb{H})$ bajo exp_q , que es lo que queríamos mostrar.

Por último nos falta probar que φ es una isometría.

Para esto utilizaremos coordenadas polares en $T_q(\mathbb{H})$ y en $T_q(S')$:

Primero escogemos una dirección $w := \frac{\partial}{\partial u} \in T_q(\mathbb{H})$.

Sean:

$$\ell = \{\rho w \mid \rho > 0\} = (\rho, 0), \quad \mathcal{L} := \exp_q(\ell), \quad \ell' := L(\ell) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}' = \exp_{q'}(\ell').$$

Tomemos $p \in \mathbb{H}$ y $v := \exp_q^{-1}(p)$ es decir, tenemos que:

$$D_p(\exp_q^{-1}) = D_v(\exp_q)^{-1}.$$

Identificamos $T_v(T_q(\mathbb{H}))$ con $T_q(\mathbb{H})$ y consideramos a

$$\bar{v} := D_v(\exp_q)(v), \quad \text{y} \quad \bar{w} := D_v(\exp_q)(w)$$

Entonces

$$v = D_v(\exp_q)^{-1}(\bar{v}) \quad \text{y} \quad w = D_v(\exp_q)^{-1}(\bar{w})$$

Y por lo tanto

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_p = \langle D_v(\exp_q)(v), D_v(\exp_q)(w) \rangle_p,$$

pero por el lema de Gauss

$$\langle D_v(\exp_q)(v), D_v(\exp_q)(w) \rangle_p = \langle v, w \rangle_q.$$

Además por construcción

$$\langle v, w \rangle_q = \langle D_v(\exp_q)^{-1}(\bar{v}), D_v(\exp_q)^{-1}(\bar{w}) \rangle_q.$$

Entonces nos queda

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_p = \langle D_p(\exp_q^{-1})(\bar{v}), D_p(\exp_q^{-1})(\bar{w}) \rangle_q,$$

esto para cualquier $w \in T_p(\mathbb{H})$.

Por lo tanto al ser $p \in \mathbb{H}$ arbitrario tenemos que \exp_q^{-1} es una isometría global.

Como:

$$D_p(\varphi) = D_p(\exp_{q'} \circ L \circ \exp_q^{-1}) = D_{L(\exp_q^{-1}(p))}(\exp_{q'}) \circ L \circ D_p(\exp_q^{-1}) \quad \forall p \in \mathbb{H},$$

y la composición de isometrías es una isometría, entonces φ es una isometría. \square

Podemos aquí hacer una pausa para analizar con más detalles las geodésicas de \mathbb{R}_+^2

Recordando de [2], los símbolos de Christoffel están dados por las ecuaciones:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \quad (2.3)$$

En este caso:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y} \quad y \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{21} &= \Gamma_{11}^1 g_{11} = \Gamma_{11}^1 \left(\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x} g_{11} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right) = \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Obteniendo así: $\Gamma_{11}^1 = 0$.

De manera análoga vemos que:

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0.$$

De la definición 1.3.4 las ecuaciones geodésicas son:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad (2.4)$$

Por lo que obtenemos dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \Gamma_{22}^2 \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} &= \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

De igual manera podemos calcular los símbolos de Christoffel para \mathbb{H} . Ahora tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial v}.$$

Entonces por (2.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma^2_{11} g_{21} &= \Gamma_{11}^1 g_{11} = \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u}(1) + \frac{\partial}{\partial u}(1) - \frac{\partial}{\partial u}(1) \right) \\ &= \frac{1}{2}(0 + 0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Obteniendo: $\Gamma_{11}^1 = 0$.

De manera análoga obtenemos:

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -e^{2u} \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = 1.$$

Sustituyendo en (2.4) las ecuaciones geodésicas son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - e^{2u} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo probado en el apéndice A, las geodésicas en \mathbb{R}_+^2 se ven gráficamente así:

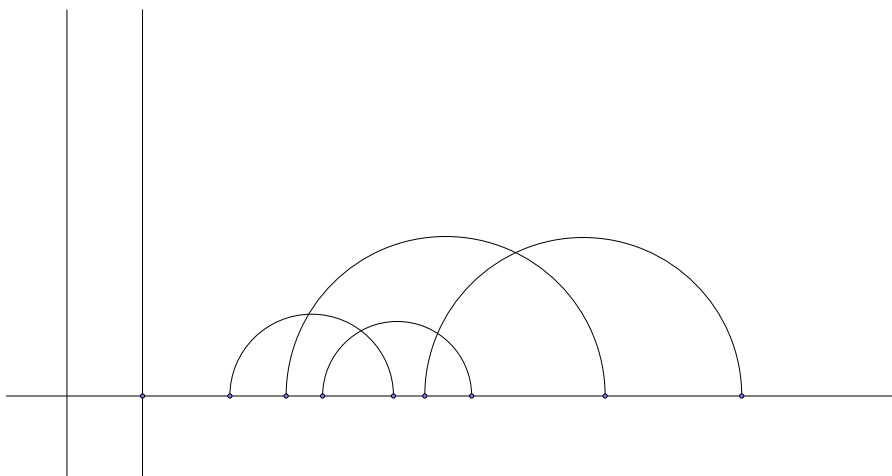


Figura 2.2: Geodésicas del Plano de Lobatchevsky

2.3. Segundo Lema

Para facilitar el trabajo de aquí en adelante supondremos que existe una inmersión isométrica

$$\psi : S' \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Es decir tenemos que $D_s(\psi)$ es inyectiva y

$$\langle D_s(\psi)(u), D_s(\psi)(v) \rangle_{\psi(s)} = \langle u, v \rangle_s \quad \forall s \in S',$$

además de que ψ es un encaje con la topología de \mathbb{R}^3 , es decir es inyectiva y considerada de la siguiente manera:

$$\psi : S' \rightarrow \psi(S'),$$

es continua, y la función inversa es continua. Puesto de otra manera ψ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Utilizaremos a ψ para inducir la geometría extrínseca de \mathbb{R}^3 en S' .

Como ψ es una inmersión entonces tenemos que para todo $s \in S'$ podemos encontrar V , una vecindad de s en S' , de forma que la restricción

$$\bar{\psi} = \psi|_V,$$

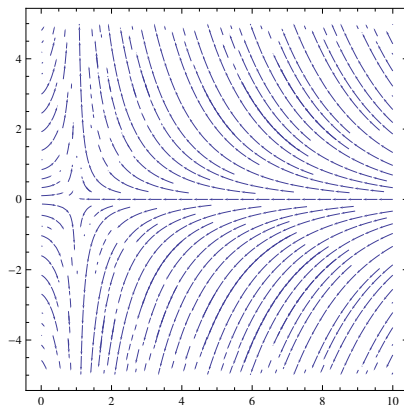


Figura 2.3: Imagen en \mathbb{H} de las geodésicas de \mathbb{R}_+^2 bajo ξ

sea un difeomorfismo.

Como $\bar{\psi}$ es una isometría, entonces tenemos que en $\bar{\psi}(V)$ la curvatura es constante e igual a menos uno ($K = -1$).

Por lo cual para todo punto p de $\bar{\psi}(V)$ podemos hablar de direcciones asintóticas en $T_p(\bar{\psi}(V))$.

Regresando estas direcciones bajo $D_p(\bar{\psi})^{-1}$ obtenemos direcciones asintóticas en $T_s(S')$.

Siguiendo este proceso podemos así hablar de cualquier concepto que tengamos de una superficie diferenciable M .

Definición 2.3.1 (Red de Tchebyshef). *Las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshef si la longitud de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.*

La siguiente proposición nos da una caracterización útil para saber cuando las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshef.

Proposición 2.3.2. *Las curvas coordenadas son una red de Tchebyshef si y sólo si:*

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 = \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Demostración. Supongamos que las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshef.

Sean:

$$\alpha_0(u) := \mathbb{X}(u, v_0), \quad \alpha_1(u) := \mathbb{X}(u, v),$$

siendo la v fija en α_1 arbitraria, entonces

$$\alpha'_0(u) = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u, v_0) = \mathbb{X}_u(u, v_0) \quad \text{y} \quad \alpha'_1(u) = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u, v) = \mathbb{X}_u(u, v),$$

sucediendo la segunda igualdad para cualquier v fija, por lo cual

$$\|\alpha'_0(u)\| = \|\mathbb{X}_u(u, v_0)\| = \sqrt{E(u, v_0)} \quad \text{y} \quad \|\alpha'_1(u)\| = \|\mathbb{X}_u(u, v)\| = \sqrt{E(u, v)}.$$

Pero por hipótesis tenemos que

$$\int_{u_0}^u \|\alpha'_0(s)\| ds = \int_{u_0}^u \|\alpha'_1(s)\| ds,$$

es decir

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v)} ds,$$

que es equivalente a

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v_0)} - \sqrt{E(s, v)} ds = 0,$$

entonces

$$\sqrt{E(u, v_0)} - \sqrt{E(u, v)} = \frac{d}{du} \left(\int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v_0)} - \sqrt{E(s, v)} ds \right) = 0.$$

Así vemos que

$$E(u, v_0) = E(u, v),$$

para cualquier v en el dominio.

Por lo tanto E es constante respecto a v , entonces

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

Pero ahora tomando curvas α_0 y α_1 junto con las curvas:

$$\beta_0(v) := \mathbb{X}(u_0, v), \quad \beta_1(v) := \mathbb{X}(u, v).$$

Supongamos ahora que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 = \frac{\partial G}{\partial u}$$

Esto nos dice que E no depende de v y que G no depende de u .

Es decir E es constante respecto a v .

Por lo cual

$$E(u, v_0) = E(u, v),$$

para toda v en el dominio.

Entonces

$$\int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v_0)} \, dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(s, v)} \, ds,$$

por lo que

$$\int_{u_0}^u \|\alpha'_0(s)\| \, ds = \int_{u_0}^u \|\alpha'_1(s)\| \, ds.$$

También G es constante respecto a u .

Es decir

$$G(u_0, v) = G(u, v),$$

para toda u en el dominio.

Así tenemos que

$$\int_{v_0}^v \sqrt{G(u_0, t)} \, dt = \int_{v_0}^v \sqrt{G(u, t)} \, dt,$$

lo cual nos da

$$\int_{v_0}^v \|\beta'_0(t)\| dt = \int_{v_0}^v \|\beta'_1(t)\| dt.$$

Por lo que lados opuestos de un paralelogramo formado por curvas coordenadas tienen la misma longitud \square

Con todo esto podemos probar el siguiente lema:

Lema 2.3.3. *Para todo $s \in S'$ existe una parametrización $\tilde{\mathbb{X}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$, tal que las curvas coordenadas de $\tilde{\mathbb{X}}$ son las curvas asintóticas de $\tilde{\mathbb{X}}(U) = V'$ y forman una red de Tchebyshef.*

Demostración. Sea $s \in S'$, y $\mathbb{X} : U \rightarrow S'$ una parametrización local.

Como $K(s) < 0$ entonces tenemos dos direcciones asintóticas (distintas):

$$A_1 \neq A_2.$$

Sean

$$p := \mathbb{X}^{-1}(s) \in U \quad \text{y} \quad B_i := (D_p \mathbb{X})^{-1}(A_i) \in \mathbb{R}^2.$$

Consideremos $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 , y definamos la siguiente transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{con} \quad T(e_i) := (B_i).$$

Definamos

$$\tilde{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S', \quad \text{como} \quad \tilde{\mathbb{X}} := \mathbb{X} \circ T.$$

Entonces para $q := T^{-1}(p)$ tenemos

$$D_q \tilde{\mathbb{X}} = D_p \mathbb{X} \circ T,$$

por lo cual

$$D_q \tilde{\mathbb{X}}(e_i) = D_p \mathbb{X} \circ T(e_i) = A_i.$$

Es decir $D_q \tilde{\mathbb{X}}(e_i)$ son las direcciones asintóticas, y como por construcción son los vectores tangentes de las curvas coordenadas en el punto s , entonces las curvas coordenadas son asintóticas.

Veamos ahora que bajo la parametrización \tilde{X} las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshef.

Es decir por la proposición 2.3.2 tenemos que probar que sucede

$$E_v = 0 = G_u. \quad (2.6)$$

Recordando que

$$E_v = 2\langle \tilde{X}_{uv}, \tilde{X}_u \rangle, \quad G_u = 2\langle \tilde{X}_{uv}, \tilde{X}_v \rangle,$$

entonces (2.6) es equivalente a probar que \tilde{X}_{uv} es paralelo al vector normal N , dado por el mapeo de Gauss.

Observación. Nótese que tiene sentido hablar del mapeo de Gauss, ya que podemos escoger la vecindad U de la parametrización \tilde{X} lo suficientemente pequeña, de manera que $\tilde{X}(U)$ sea orientable.

Para lograr esto es conveniente recordar de [1, p. 141] que la segunda forma fundamental está dada por

$$II_p(v) = -\langle D_p N(v), v \rangle_p.$$

y que localmente los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \tilde{X}_{uu} \rangle = -\langle N_u, \tilde{X}_u \rangle, \\ f &= \langle N, \tilde{X}_{uv} \rangle = -\langle N_v, \tilde{X}_u \rangle, \\ g &= \langle N, \tilde{X}_{vv} \rangle = -\langle N_v, \tilde{X}_v \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

También es útil señalar que como $\langle N, N \rangle = 1$ entonces derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle N, N \rangle &= 2\langle N_u, N \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, N \rangle &= 2\langle N_v, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $N_u, N_v \in T_s(S')$, y como \tilde{X}_u, \tilde{X}_v forman una base de $T_s(S')$ entonces

$$\begin{aligned} N_u &= \alpha_{11} \tilde{X}_u + \alpha_{21} \tilde{X}_v, \\ N_v &= \alpha_{12} \tilde{X}_u + \alpha_{22} \tilde{X}_v. \end{aligned}$$

para algunas α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} en \mathbb{R} .

Por lo cual si tomamos $\gamma(t) = \tilde{\mathbb{X}}(u(t), v(t))$ entonces

$$\begin{aligned} D_p N(\gamma'(t)) &= \frac{d}{dt}(N(u(t), v(t))) \\ &= N_u u' + N_v v' \\ &= (\alpha_{11} \tilde{\mathbb{X}}_u + \alpha_{21} \tilde{\mathbb{X}}_v) u' + (\alpha_{12} \tilde{\mathbb{X}}_u + \alpha_{22} \tilde{\mathbb{X}}_v) v' \\ &= (\alpha_{11} u' + \alpha_{12} v') \tilde{\mathbb{X}}_u + (\alpha_{21} u' + \alpha_{22} v') \tilde{\mathbb{X}}_v. \end{aligned}$$

Por lo que en la base $\{\tilde{\mathbb{X}}_u, \tilde{\mathbb{X}}_v\}$ tenemos que

$$D_p N = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Y por [1, p. 155] tenemos que

$$K = \det(D_p N) = \det(a_{ij}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} N_u \wedge N_v &= (\alpha_{11} \tilde{\mathbb{X}}_u + \alpha_{21} \tilde{\mathbb{X}}_v) \wedge (\alpha_{12} \tilde{\mathbb{X}}_u + \alpha_{22} \tilde{\mathbb{X}}_v) \\ &= (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}) (\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v) \\ &= K (\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v). \end{aligned}$$

Sabemos por definición, tomando $D = \sqrt{EG - F^2}$ que

$$N = \frac{\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v}{\|\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v\|} = \frac{\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v}{D}. \quad (2.8)$$

Además

$$(N \wedge N_v)_u = N_u \wedge N_v + N \wedge N_{vu} \quad \text{y} \quad (N \wedge N_u)_v = N_v \wedge N_u + N \wedge N_{uv},$$

por lo cual al tomar la diferencia

$$(N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = 2(N_u \wedge N_v) = 2K(\tilde{\mathbb{X}}_u \wedge \tilde{\mathbb{X}}_v) = 2KDN. \quad (2.9)$$

También sabemos por (2.8) y por las ecuaciones de (2.7) que

$$\begin{aligned}
(N \wedge N_u) &= \frac{1}{D}((\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v) \wedge N_u) \\
&= \frac{1}{D}(\langle \tilde{X}_u, N_u \rangle \tilde{X}_v - \langle \tilde{X}_v, N_u \rangle \tilde{X}_u) \\
&= \frac{1}{D}(f \tilde{X}_u - e \tilde{X}_v),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

y que

$$\begin{aligned}
(N \wedge N_v) &= \frac{1}{D}((\tilde{X}_u \wedge \tilde{X}_v) \wedge N_v) \\
&= \frac{1}{D}(\langle \tilde{X}_u, N_v \rangle \tilde{X}_v - \langle \tilde{X}_v, N_v \rangle \tilde{X}_u) \\
&= \frac{1}{D}(g \tilde{X}_u - f \tilde{X}_v).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Sea $\alpha(u) := \tilde{X}(u, v)$ con v fija, una curva coordenada.

Entonces para $\alpha(u) = p$, por [1, p. 142] tenemos

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha'(u)) &= -\langle D_p N(\alpha'(u)), \alpha'(u) \rangle_p \\
&= -\langle N'(u), \alpha'(u) \rangle_p \\
&= \langle N(u), \alpha''(u) \rangle_p.
\end{aligned}$$

Pero

$$II_p(\alpha'(u)) = -\langle D_p N(\alpha'(u)), \alpha'(u) \rangle_p = 0,$$

al ser $\alpha'(u)$ una curva asintótica en $\tilde{X}(U)$.

Además $\alpha''(u) = \tilde{X}_{uu}(u, v)$, por lo cual obtenemos

$$e = \langle N(u, v), \tilde{X}_{uu}(u, v) \rangle = \langle N(u), \alpha''(u) \rangle = II_p(\alpha'(u)) = 0, \tag{2.12}$$

De manera análoga considerando ahora a $\beta(v) := \tilde{X}(u, v)$ con u fija, obtenemos que

$$g = \langle N(u, v), \tilde{X}_{vv}(u, v) \rangle = \langle N(v), \beta''(v) \rangle = II_p(\beta'(v)) = 0. \tag{2.13}$$

Como

$$-1 = K = \frac{eg - f^2}{D^2},$$

entonces

$$-1 = \frac{-f^2}{D^2},$$

por lo cual

$$\frac{f}{D} = \pm 1.$$

Sustituyendo (2.12) y (2.13) en (2.10) y (2.11) vemos que

$$(N \wedge N_u) = \pm \tilde{X}_u \quad \text{y} \quad (N \wedge N_v) = \mp \tilde{X}_v.$$

De esto obtenemos sustituyendo en (2.9) que

$$-2DN = 2KDN = (N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = \mp \tilde{X}_{vu} \mp \tilde{X}_{uv} = \mp 2\tilde{X}_{uv},$$

Por lo tanto tenemos que \tilde{X}_{uv} es paralelo a N .

De esta relación vemos que

$$E_v = 2\langle \tilde{X}_{uv}, \tilde{X}_u \rangle = 0 = 2\langle \tilde{X}_{vu}, \tilde{X}_v \rangle = G_u,$$

que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto la parametrización \tilde{X} forma una red de Tchebyshef. □

2.4. Tercer lema

Otros resultados que nos van a ser extremadamente útiles para probar el siguiente lema son

Proposición 2.4.1. *Si las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshef entonces podemos reparametrizar la vecindad coordenada de manera que*

$$E = 1, \quad F = \cos \theta \quad \text{y} \quad G = 1,$$

donde θ es el ángulo formado por las curvas coordenadas (es decir el ángulo que forman los vectores tangentes de las curvas en el punto de intersección).

Demostración. Como las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshef por la proposición anterior tenemos que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 = \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Es decir E es función que sólo depende de u y G es función que sólo depende de v :

$$E(u, v) = E(u) \quad \text{y} \quad G(u, v) = G(v).$$

Sean $\alpha(u) = \mathbb{X}(u, v)$ con v fija arbitraria, y $\beta(v) = \mathbb{X}(u, v)$ con u fija arbitraria, curvas coordenadas.

Entonces la longitud de arco de las curvas es

$$\tilde{u}(u) = \int_{u_0}^u \|\alpha'(s)\| ds = \int_{u_0}^u \sqrt{E(s)} ds,$$

$$\tilde{v}(v) = \int_{v_0}^v \|\beta'(t)\| dt = \int_{v_0}^v \sqrt{G(t)} dt.$$

Reparametrizando por longitud de arco α y β obtenemos que

$$\|\alpha'(\tilde{u})\| = 1 = \|\beta'(\tilde{v})\|.$$

Pero

$$\alpha'(\tilde{u}) = \mathbb{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{y} \quad \beta'(\tilde{v}) = \mathbb{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

teniendo así

$$E(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \mathbb{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), \mathbb{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = 1,$$

$$G(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \mathbb{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}), \mathbb{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = 1,$$

y

$$F(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \mathbb{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), \mathbb{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = \|\mathbb{X}_{\tilde{u}}\| \|\mathbb{X}_{\tilde{v}}\| \cos \theta = \cos \theta.$$

□

Proposición 2.4.2. *Si las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshef, por la proposición anterior tenemos $E = 1 = G$ y $F = \cos \theta$. En este caso sucede que*

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}.$$

Demostración. Como $E = 1 = G$ y $F = \cos \theta$, sustituyendo en las ecuaciones de los símbolos de Christoffel obtenemos:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \cos \theta = 0, \\ \Gamma_{11}^1 \cos \theta + \Gamma_{11}^2 = -\sin \theta \cdot \theta_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \cos \theta = 0, \\ \Gamma_{12}^1 \cos \theta + \Gamma_{12}^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \cos \theta = -\sin \theta \cdot \theta_v, \\ \Gamma_{22}^1 \cos \theta + \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Obteniendo que

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\theta_u}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\theta_v \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \Gamma_{12}^1 = 0 = \Gamma_{12}^2.$$

Como

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -E K, \quad (2.14)$$

entonces sustituyendo los símbolos de Christoffel en (2.14) obtenemos que

$$\begin{aligned} -K = -E K &= -\left(-\frac{\theta_u}{\sin \theta}\right)_v - \left(-\frac{\theta_u}{\sin \theta}\right) \left(\frac{\theta_v \cos \theta}{\sin \theta}\right) \\ &= \frac{\theta_{uv} \sin \theta - \theta_v \theta_u \cos \theta + \theta_u \theta_v \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\theta_{uv} \sin \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}. \quad (2.15)$$

□

Lema 2.4.3. *Sea $V' \subset S'$ la vecindad coordinada del lema 2.3.3, i.e. las curvas coordinadas son curvas asintóticas en V' . Entonces el área A de cualquier cuadrilátero formado por las curvas coordinadas es menor que 2π .*

Demostración. Sean u, v las coordenadas locales de V' de la parametrización $\tilde{\mathbb{X}}$ del lema 2.3.3.

Como las curvas coordinadas forman una red de Tchebyshef, por la proposición 2.4.1 podemos reparametrizar a V' por \tilde{u}, \tilde{v} de manera que

$$E = 1 = G, \quad F = \cos \theta.$$

Sean

$$\tilde{\mathbb{X}}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1), \tilde{\mathbb{X}}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_2), \tilde{\mathbb{X}}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2), \tilde{\mathbb{X}}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1) \in V',$$

y denotemos por R al rectángulo formado por las curvas coordinadas que tiene a los puntos anteriores como vértices, con ángulos internos

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$$

Como por (2.15) tenemos que

$$-1 = K = -\frac{\theta_{uv}}{\text{sen } \theta},$$

entonces

$$\theta_{uv} = \text{sen } \theta.$$

Por lo que

$$A = \int_R dA \tag{2.16}$$

$$= \int_R \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

$$= \int_R \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \, du \, dv = \int_R \text{sen } \theta \, du \, dv$$

$$= \int_R \theta_{uv} \, du \, dv \tag{2.17}$$

$$= \theta(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) - \theta(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1) + \theta(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) - \theta(\tilde{u}_1, \tilde{v}_2)$$

$$= \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) - 2\pi$$

$$< 4\pi - 2\pi$$

$$= 2\pi.$$

Ya que $\alpha_i < \pi$ al ser todos los vértices puntos hiperbólicos.

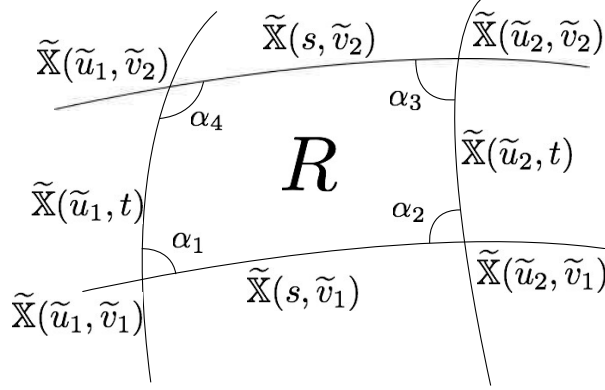


Figura 2.4: Vecindad R

Observación. La función θ en $\tilde{X}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)$ y en $\tilde{X}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_2)$ mide el ángulo generado entre el vector tangente a la curva $\tilde{X}(s, \tilde{v}_1)$ que va de $\tilde{X}(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ a $\tilde{X}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)$ en $s = \tilde{u}_2$ y el vector tangente a la curva $\tilde{X}(\tilde{u}_2, t)$ que va de $\tilde{X}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)$ a $\tilde{X}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$ en $t = \tilde{v}_1$, respectivamente.

Por lo cual

$$\theta(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1) = \pi - \alpha_2.$$

De manera análoga

$$\theta(\tilde{u}_1, \tilde{v}_2) = \pi - \alpha_4.$$

□

2.5. Cuarto Lema

Hasta ahora todas las consideraciones han sido locales.

Definiremos ahora una función

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S',$$

de manera que sea una parametrización global de S' .

La función \mathbf{x} se define de la siguiente manera:

Sea $O \in S'$ un punto arbitrario, y escogemos orientaciones de las curvas asintóticas que pasan por este punto (se escogen orientaciones de las rectas tangentes a las curvas coordenadas).

Seleccionamos una de estas curvas asintóticas etiquetándola a_1 , mientras la otra la etiquetamos como a_2 .

Para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(s, t)$ se obtiene recorriendo primero sobre a_1 desde O una longitud s .

Llamemos p' el punto obtenido.

Por p' pasan dos curvas asintóticas, siendo una de éstas por construcción a_1 .

Denotemos la otra como a_2^p y se le da la orientación obtenida de extender de manera continua la orientación de a_2 a lo largo de a_1 .

Esto es posible debido a que S' por construcción es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y por tanto es simplemente conexo.

A continuación, a lo largo de a_2^p se recorre desde p' una longitud t obteniendo un punto q .

Definimos

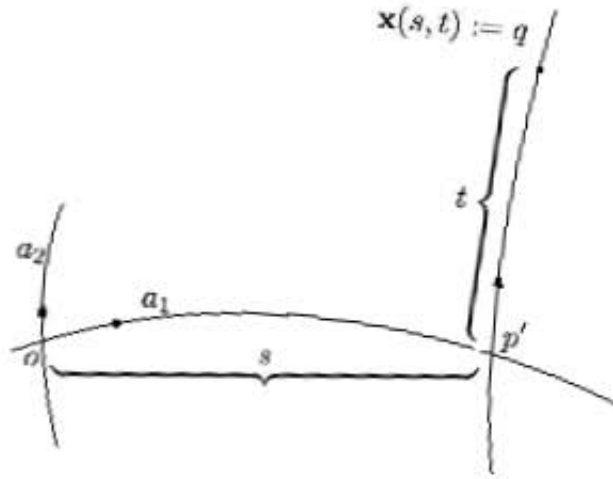
$$\mathbf{x}(s, t) := q.$$

Proposición 2.5.1. \mathbf{x} está definido para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Para probar esto probemos primero que $\mathbf{x}(s, 0)$ está definido para todo $s \in \mathbb{R}$.

Supongamos que no está definido en algún $s_0 \in \mathbb{R}$.

Entonces existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}(s, 0)$ está definido para todo $s < s_1$, pero no para $s = s_1$.

Figura 2.5: Construcción de $\mathbf{x}(s, t)$

Como por construcción $\mathbf{x}(s, 0) = a_1(s)$, entonces a_1 no está definida en s_1 .

Como S' es una superficie completa por el teorema de Hopf-Rinow-De Rham 2.1.3, tenemos que S' es un espacio métrico completo respecto a la métrica geodésica.

Además como para todo punto $p \in S'$ existe una vecindad normal W [2, p. 72], entonces la topología inducida por la métrica coincide con la topología de S' .

Al ser la curva

$$a_1 : (-\infty, s_1) \rightarrow S',$$

continua entonces para una sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, s_1)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_1,$$

tenemos que $a_1(s_n)$ es sucesión de Cauchy y por tanto tiene límite en S' al ser completo.

Esto nos dice que existe $q' \in S'$ con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1(s_n) = q',$$

pero por continuidad debe de suceder que $q' = a_1(s_1)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathbf{x}(s, 0)$ está definido para todo $s \in \mathbb{R}$.

De manera análoga fijando s se ve que $\mathbf{x}(s, t)$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como s es arbitrario tenemos que $\mathbf{x}(s, t)$ está definido para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. \square

Lema 2.5.2. *Para t fija la curva $\mathbf{x}(s, t)$ $s \in \mathbb{R}$ es una curva asintótica con longitud de arco s .*

Demostración. Para todo punto $\mathbf{x}(s', t') \in S'$ por el lema 2.3.3 existe una vecindad rectangular $\mathbf{x}((s_a, s_b) \times (t_a, t_b)) \subset V'$ tal que las curvas asintóticas forman una red de Tchebyshef en V' .

Observemos que si para algún $t_0 \in (t_a, t_b)$ la curva $\mathbf{x}(s, t_0)$ con $s \in (s_a, s_b)$, es curva asintótica entonces para cualquier $\tilde{t} \in (t_a, t_b)$ la curva $\mathbf{x}(s, \tilde{t})$ es asintótica.

Esto es por que el punto $\mathbf{x}(s, \tilde{t})$ se obtiene recorriendo un segmento de longitud \tilde{t} desde $\mathbf{x}(s, 0) = p$ a lo largo de a_2^p .

Pero esto es equivalente a recorrer un segmento de longitud $\tilde{t} - t_0$ desde $\mathbf{x}(s, t_0) = q$ a lo largo de a_2^q , ya que la curva a_2^p coincide con la curva a_2^q al ser las dos la curva asintótica distinta de a_1 que pasa por p .

Por esto y como estamos suponiendo que la curva

$$\mathbf{x}(s, t_0) \quad \text{con } s \in (s_a, s_b),$$

es curva asintótica entonces por construcción, la distancia de $\mathbf{x}(s, t_0)$ a $\mathbf{x}(s, \tilde{t})$ es $\tilde{t} - t_0$ para todo s en (s_a, s_b) a lo largo de la otra curva asintótica que pasa por $\mathbf{x}(s, t_0)$.

Por lo tanto $\mathbf{x}(s, \tilde{t})$ es curva asintótica.

Sea $\mathbf{x}(s, t)$ punto arbitrario de S' .

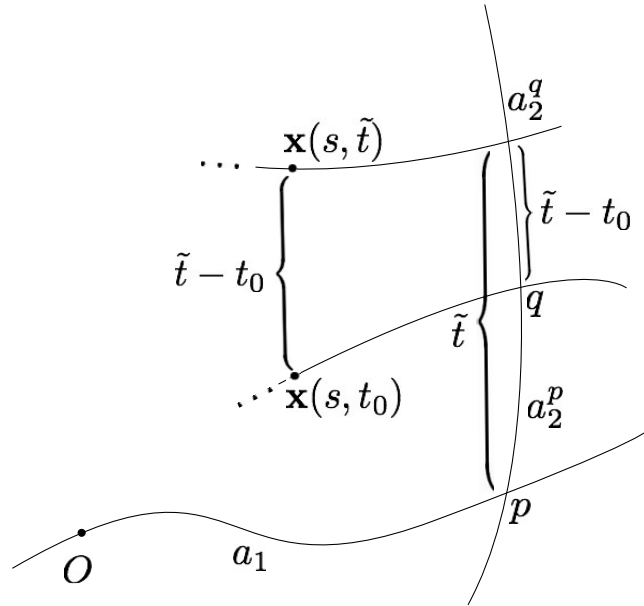


Figura 2.6: $\mathbf{x}(s, \tilde{t})$ es curva asintótica.

Por compacidad del segmento

$$\mathbf{x}(s, \bar{t}) \quad \text{con } \bar{t} \in [0, t],$$

podemos escoger un número finito de $t_i \in [0, t_1]$, con $t_0 = 0$, de manera que las vecindades rectangulares, como la descrita arriba, de cada $\mathbf{x}(s, t_i)$ cubran al segmento y que $\mathbf{x}(s, t_i)$ esté en la vecindad de $\mathbf{x}(s, t_{i-1})$.

Como sabemos por construcción que la curva $\mathbf{x}(s, 0)$ es curva asintótica entonces aplicando el razonamiento descrito arriba tenemos que la curva $\mathbf{x}(s, t_1)$ es curva asintótica, al estar $\mathbf{x}(s_1, t_1)$ en la vecindad de $\mathbf{x}(s_1, t_0)$.

Por lo cual, repitiendo este procedimiento un número finito de veces tenemos que para toda i la curva $\mathbf{x}(s, t_i)$ es curva asintótica.

Así concluimos que $\mathbf{x}(s, t)$ es curva asintótica al estar contenida en una vecindad rectangular de uno de los puntos $\mathbf{x}(s_1, t_i)$.

Como tomamos t arbitrario, entonces obtenemos el resultado. \square

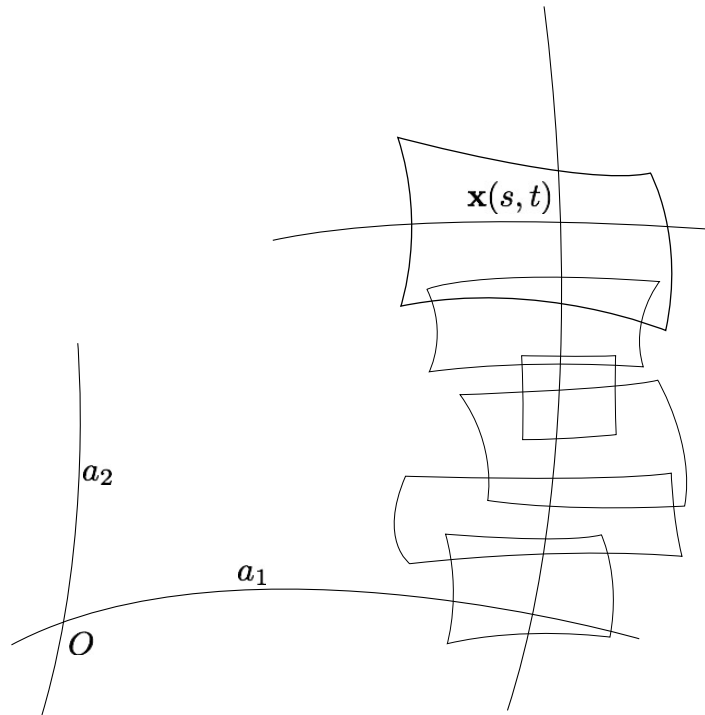


Figura 2.7: $\mathbf{x}(s, t)$ es curva asintótica para t fijo.

2.6. Quinto Lema

Observación. $\mathbf{x}(s_o, t)$ con s_o fija es curva asintótica por como definimos la función \mathbf{x} .

Lema 2.6.1. \mathbf{x} es un difeomorfismo local.

Demostración. Sabemos por el lema 2.5.2 que $\mathbf{x}(s, t_o)$ es curva asintótica, y por la observación que $\mathbf{x}(s_o, t)$ también es curva asintótica.

Pero el lema 2.3.3 nos dice que para cualquier punto de S' , existe una parametrización local $\tilde{\mathbf{X}}$ de una vecindad $V' \subset S'$, en la cual las curvas coordenadas son curvas asintóticas de S' .

Entonces en V' las curvas coordenadas de \mathbf{x} y las curvas coordenadas de $\tilde{\mathbf{X}}$ deben de coincidir.

Por lo tanto en V' coincide \mathbf{x} con $\tilde{\mathbf{X}}$, por como definimos \mathbf{x} .

Pero al ser $\tilde{\mathbf{X}}$ parametrización local, es difeomorfismo local, y por tanto \mathbf{x} es difeomorfismo local. \square

2.7. Sexto Lema

Lema 2.7.1. *\mathbf{x} es suprayectiva.*

Demostración. Sea $Q := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$.

Como para cada punto $\mathbf{x}(s, t) \in S'$, por el lema anterior \mathbf{x} es difeomorfismo local, entonces existe para (s, t) una vecindad $A_{(s,t)} \subset \mathbb{R}^2$ abierta tal que la restricción

$$\mathbf{x} : A_{(s,t)} \rightarrow S',$$

es un difeomorfismo.

En otras palabras $\mathbf{x}(A_{(s,t)}) \subset S'$ es abierto.

Como esto es para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ y además tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(s,t) \in \mathbb{R}^2} A_{(s,t)},$$

entonces obtenemos

$$Q = \mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = \mathbf{x} \left(\bigcup_{(s,t) \in \mathbb{R}^2} A_{(s,t)} \right) = \bigcup_{(s,t) \in \mathbb{R}^2} \mathbf{x}(A_{(s,t)}).$$

Por lo cual $Q \subset S'$ es abierto, al ser unión de abiertos. Supongamos ahora que Q es distinto de S' .

Como S' es homeomorfo por construcción a \mathbb{R}^2 , entonces es conexo.

Entonces tenemos que

$$\partial Q \neq \emptyset,$$

esto por que

$$\partial Q = \bar{Q} \setminus Q.$$

Entonces si

$$\partial Q = \emptyset,$$

tenemos que

$$\bar{Q} = Q.$$

Por lo tanto $S' \setminus Q$ es abierto.

Pero esto implica que S' es desconexo debido a que

$$S' = (S' \setminus Q) \cup Q,$$

lo cual es una contradicción.

Sea $q \in \partial Q \neq \emptyset$.

Como Q es abierto entonces $q \notin Q$.

Sea R una vecindad rectangular de q dada por el lema 2.3.3.

Observación. Si $p \in Q$, es decir $p = \mathbf{x}(s_o, t_o)$, entonces las curvas asintóticas por p están contenidas en Q .

Esto es porque las curvas

$$\mathbf{x}(s_o, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(s, t_o),$$

son las curvas asintóticas por p .

Sea $a \in Q \cap R$ (Fig.2.7).

Entonces una de las curvas asintóticas de a intersecta a una de las curvas asintóticas de q .

Sea b el punto de intersección de las dos curvas.

Como b está sobre una curva asintótica de a , y a es elemento de Q entonces por la última observación todas las curvas asintóticas que pasan por

a están contenidas en Q y por tanto $b \in Q$ (es decir b es un punto interior).

Pero también b está sobre una curva asintótica de q , por lo cual q está sobre una de las curvas asintóticas de b .

Por lo tanto $q \in Q$ por la observación, lo cual es una contradicción ya que habíamos tomado a q en ∂Q . \square

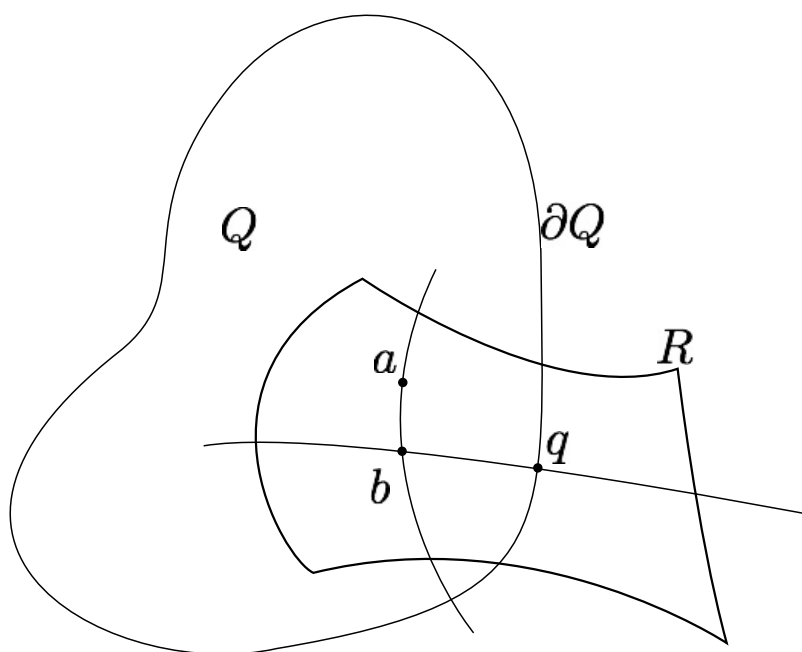


Figura 2.8: Punto a en la vecindad R , de q .

2.8. Séptimo Lema

El siguiente lema lo utilizaremos para probar en el próximo lema que \mathbf{x} es inyectiva.

Lema 2.8.1. *En S' hay dos campos diferenciables linealmente independientes que son tangentes a las curvas asintóticas de S'*

Demostración. Recordando que \mathbf{x} es difeomorfismo local para todo $(s_o, t_o) \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que

$$D_{(s_o, t_o)}\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(s_o, t_o)}\mathbf{x}(S'),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Utilizando la notación de [2], tenemos que

$$D_{(s_o, t_o)}\mathbf{x}(e_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{x}(s_o, t_o)),$$

$$D_{(s_o, t_o)}\mathbf{x}(e_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{x}(s_o, t_o)).$$

Además como e_1 es un vector tangente a la curva (s, t_o) , entonces $D_{(s_o, t_o)}(e_1)$ es tangente a la curva $\mathbf{x}(s, t_o)$, en $\mathbf{x}(s_o, t_o)$.

Por lo cual $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{x}(s_o, t_o))$ es una dirección asintótica de S' para todo (s_o, t_o) .

Análogamente $\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{x}(s_o, t_o))$ también es una dirección asintótica, tangente a la curva asintótica $\mathbf{x}(s_o, t)$.

Tomemos los siguientes campos sobre S'

$$V_i(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } q \in S',$$

con

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = D_{\mathbf{x}^{-1}(q)}\mathbf{x}(e_i).$$

Por la definición 1.3.11, un campo vectorial expresado en coordenadas locales como

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

es diferenciable si sucede que las funciones $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, son diferenciables.

Así por lo anterior tenemos que los campos V_i son diferenciables, al ser las funciones a_i constantes iguales a 1, y por construcción son linealmente independientes. \square

2.9. Octavo Lema

Por último probemos que \mathbf{x} es inyectiva.

Lema 2.9.1. *\mathbf{x} es inyectiva.*

Demostración. Para mostrar inyectividad, queremos probar que $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_1)$, implica que $(s_0, t_0) = (s_1, t_1)$.

Esto se logrará suponiendo primero

$$\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_0) \quad \text{para } s_1 > s_0,$$

y mostrar que esto conduce a una contradicción.

Por el lema anterior como existen sobre S' dos campos diferenciables linealmente independientes, que son tangentes a las curvas coordenadas (que son asintóticas como se mostró anteriormente), entonces estos deben de coincidir en $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_0)$.

Lo anterior nos dice que las curvas $\mathbf{x}(s_0, t)$, $\mathbf{x}(s_1, t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$, son tangentes en el punto de intersección $\mathbf{x}(s_0, t_0)$.

Debido a que \mathbf{x} es un difeomorfismo local, las curvas coordenadas $\mathbf{x}(s_0, t)$, $\mathbf{x}(s_1, t)$ son tangentes al campo $\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{x}(s, t))$ en $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_0)$.

Pero por lo anterior sabemos que $\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{x}(s_0, t_0)) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{x}(s_1, t_0))$, por lo cual al considerar a las curvas como flujos de este campo vectorial tenemos que debe existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t) \quad \text{para } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

En otras palabras las curvas coinciden en una vecindad de t_0 .

De esto se deduce que el conjunto J de puntos de la curva $\mathbf{x}(s_0, t)$ tales que

$$\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t),$$

es abierto.

Veamos que este conjunto J es cerrado.

Sea $(\mathbf{x}(s_0, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de este conjunto, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(s_0, t_n) = \mathbf{x}(s_0, t_\ell),$$

para algún $\mathbf{x}(s_0, t_\ell) \in S'$.

Para ver que J es cerrado es necesario ver que $\mathbf{x}(s_0, t_\ell)$ es un elemento de J .

Es decir

$$\mathbf{x}(s_0, t_\ell) = \mathbf{x}(s_1, t_\ell)$$

Como \mathbf{x} es difeomorfismo sobre una vecindad W de $\mathbf{x}(s_0, t_\ell)$, y por convergencia solamente un número finito de los elementos de la sucesión está afuera de W , entonces por continuidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_0, t_n) = (s_0, t_\ell),$$

de lo cual se infiere que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_\ell.$$

Pero como la sucesión $(\mathbf{x}(s_0, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ son elementos de J entonces

$$\mathbf{x}(s_0, t_n) = \mathbf{x}(s_1, t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto la sucesión $((s_1, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene como límite a (s_1, t_ℓ) .

Entonces obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(s_1, t_n) = \mathbf{x}(s_1, t_\ell).$$

Pero por otro lado como tomamos la sucesión $(\mathbf{x}(s_0, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en J , se cumple que

$$\mathbf{x}(s_0, t_n) = \mathbf{x}(s_1, t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de lo cual se sigue por unicidad del límite que

$$\mathbf{x}(s_0, t_\ell) = \mathbf{x}(s_1, t_\ell).$$

Por lo anterior tenemos que J es un conjunto no vacío, abierto y cerrado, de la curva $\mathbf{x}(s_0, t)$, por lo que tiene que ser toda la curva, para no desconectar la curva, la cual es homeomorfa a \mathbb{R} .

Lo que acabamos de probar es equivalente a

$$\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es más por la forma en que definimos la función \mathbf{x} , hemos probado que

$$\mathbf{x}(s_0 + a, t_0) = \mathbf{x}(s_1 + a, t_0) \quad \text{para } 0 \leq a \leq s_1 - s_0. \quad (2.18)$$

Esto es debido a que $\mathbf{x}(s_0 + a, t_0)$ se obtiene recorriendo desde $\mathbf{x}(s_0, t_0)$ sobre la curva $\mathbf{x}(s, t_0)$ una longitud a , pero al mismo tiempo $\mathbf{x}(s_1 + a, t_0)$ se obtiene avanzando una longitud a desde $\mathbf{x}(s_1, t_0) = \mathbf{x}(s_0, t_0)$, sobre la curva $\mathbf{x}(s, t_0)$.

Por lo tanto al final llegamos al mismo punto que es lo que afirmamos.

Pero por lo expuesto anteriormente sabemos que si

$$\mathbf{x}(s_0 + a, t_0) = \mathbf{x}(s_1 + a, t_0),$$

entonces se cumple

$$\mathbf{x}(s_0 + a, t) = \mathbf{x}(s_1 + a, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hasta ahora sólo hemos analizado qué sucede con el parámetro s , por lo cual veamos qué sucede con el parámetro t .

Tenemos dos opciones:

1. $\mathbf{x}(s_0, t_0) \neq \mathbf{x}(s_0, t)$, para toda t en \mathbb{R} , en el cual sólo sucede que para $s_1 > s_0$, $\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t)$.
2. $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_0, t_1)$, para alguna $t_1 > t_0$.

En el primer caso por (2.18), básicamente lo que sucede es que \mathbf{x} transforma dos líneas verticales a una distancia $s_1 - s_0$ una de la otra, a la misma curva, identificando (s, t) con $(s + s_1 - s_0, t)$.

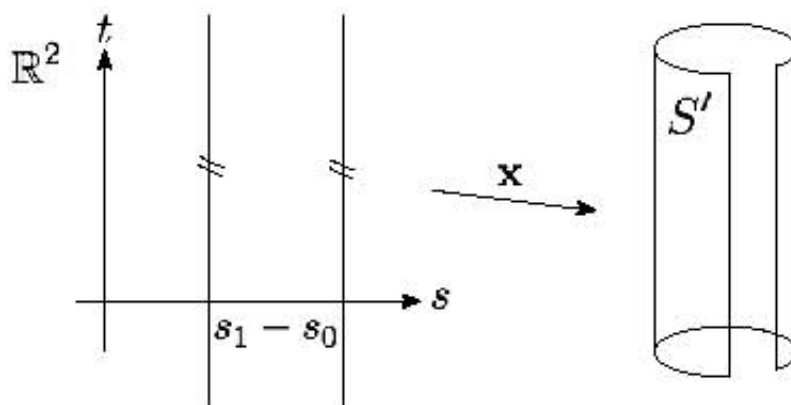


Figura 2.9: \mathbf{x} manda a \mathbb{R}^2 en un cilindro

Esto implica que $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = S'$ es homeomorfo a un cilindro, pero esto es una contradicción al ser S' el plano tangente de una superficie S .

En el segundo caso de manera análoga a la hecha para el parámetro s , se obtiene que

$$\mathbf{x}(s, t_0 + b) = \mathbf{x}(s, t_1 + b) \quad \text{para } 0 \leq b \leq t_1 - t_0 \quad \text{y } s \in \mathbb{R}.$$

Por lo cual \mathbf{x} , identifica a el punto (s, t) con $(s + s_1 - s_0, t + t_1 - t_0)$.

Entonces S' es homeomorfo a un toro, lo cual también es una contradicción.

De manera idéntica a lo hecho anteriormente se prueba que suponer

$$\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_0, t_1) \quad \text{para } t_1 > t_0,$$

conduce a una contradicción.

Por último analizamos el caso cuando

$$\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_1) \quad \text{para } t_1 > t_0, \text{ y } s_1 > s_0,$$

en el cual podemos proceder de manera análoga, pero sobre la curva que es imagen de la recta que une a (s_0, t_0) con (s_1, t_1) , obteniendo que bajo \mathbf{x} se identifican las rectas perpendiculares al vector $(s_1 - s_0, t_1 - t_0)$ que distan $\sqrt{(s_1 - s_0)^2 + (t_1 - t_0)^2}$ una de la otra.

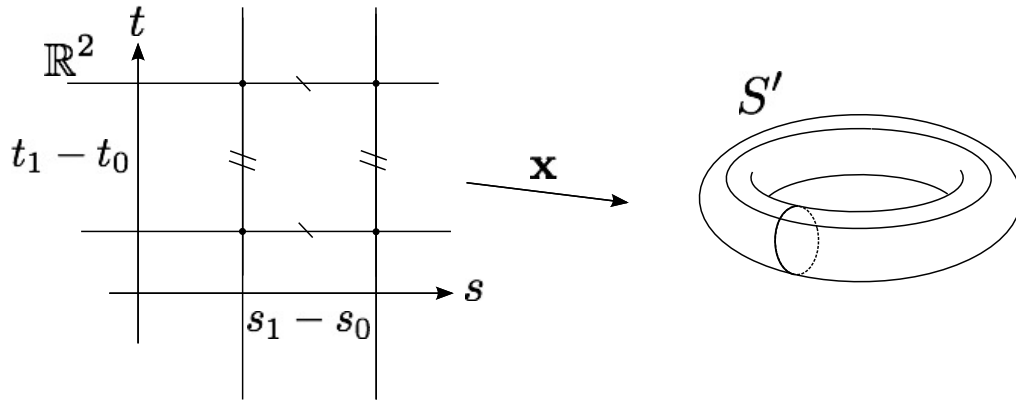


Figura 2.10: \mathbf{x} manda a \mathbb{R}^2 en un toro

Así como en los casos anteriores se llega a que S' es o bien homeomorfa a un cilindro, o bien homeomorfa a un toro, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto si tenemos que $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_1)$ entonces necesariamente $(s_0, t_0) = (s_1, t_1)$. \square

2.10. Prueba del Teorema de Hilbert

Después de todo lo expuesto en las secciones anteriores podemos dar una prueba del teorema de Hilbert.

Demostración del teorema de Hilbert. Sea S una superficie completa de curvatura K constante negativa. Sin pérdida de generalidad supongamos que la curvatura K es igual a -1 y supongamos la existencia de una inmersión isométrica $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Sea $p \in S$ y denotemos por S' a $T_p(S)$ con la métrica inducida por $exp_p : T_p(S) \rightarrow S$. Entonces $\Psi = \Phi \circ exp_p : S' \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión isométrica.

Por los lemas 2.6.1, 2.7.1 y 2.9.1 sabemos que existe una parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S'$, de todo S' .

Además por el lema 2.5.2 sabemos que las curvas coordenadas de esta para-

metrización son las curvas asintóticas de S' .

Consideremos “rectángulos” R_n formados por las curvas coordenadas de manera que $R_n \subset R_{n+1}$ y tales que su unión cubra a todo S' .

Por el lema 2.4.3 sabemos que el área de cada uno de estos “rectángulos” es menor que 2π .

Como el área de $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ es igual al área de $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$, entonces el área de S' es menor que 2π . Pero esto contradice al lema 2.2.1.

Por lo tanto no puede haber inmersiones de S' en \mathbb{R}^3 , y como consecuencia no existen inmersiones de S en \mathbb{R}^3 . \square

Capítulo 3

Conclusión

Con el teorema de Hilbert ya demostrado cabe hacer las siguientes observaciones, que nos conducirán a generalizaciones del mismo.

La primera es que en el artículo original Hilbert trabajó con inmersiones analíticas, pero en la demostración anterior sólo se pidió que la inmersión fuera diferenciable (es decir de clase C^∞), que es una condición más débil.

Esto lleva a hacerse la pregunta de si se puede pedir menos con respecto al grado de diferenciabilidad, en otras palabras hasta qué natural k se sigue cumpliendo el teorema para inmersiones en la clase C^k .

En [4] Efimov demuestra el siguiente teorema, el cual era una conjetura hecha por Cohn-Vossen:

Teorema de Efimov. *Ninguna superficie con curvatura gaussiana $K \leq \text{const} < 0$, puede ser C^2 inmersa en el espacio euclidiano 3-dimensional \mathbb{E}^3 .*

El cual es todavía más fuerte que el de Hilbert, ya que la curvatura no es constante, sólo necesita estar acotada por arriba por una constante negativa.

Para el caso C^1 Kuiper demuestra en [9], a partir de trabajos de Nash, que existe un encaje C^1 isométrico del plano hiperbólico en \mathbb{E}^3 .

En [11] Klotz analiza a detalle la necesidad de la condición C^2 para lograr una contradicción respecto al área total de la superficie, tal y como se hace en este trabajo.

También otra observación se debe al siguiente teorema topológico dado por Whitney, el cual establece que cualquier m -variedad ($m > 1$) diferenciable puede ser inmersa diferenciablemente en \mathbb{R}^{2m-1} . Esto lleva a preguntarnos

qué sucede cuando añadimos la parte geométrica, es decir cuando pedimos que la inmersión sea isométrica.

Para el caso de dimensión dos se conocen inmersiones C^∞ del plano de Lobatchevsky en \mathbb{R}^5 , pero no se sabe si puede ser inmerso C^∞ isométricamente en \mathbb{R}^4 .

Esto nos lleva a notar que todo lo anterior es para el caso de dimensión 2. ¿Qué sucede con las variedades riemannianas de dimensión n , con curvatura seccional constante negativa ?

El resultado de Kuiper de hecho es más general y dice que \mathbb{H}^n , el espacio hiperbólico de dimensión n , tiene un encaje C^1 isométrico en \mathbb{E}^{n+1} . Cartan demuestra en [3], que la dimensión necesaria mínima para que exista al menos una inmersión isométrica local del espacio \mathbb{H}^n en el espacio euclidiano \mathbb{E}^k es $k = 2n - 1$. Por otro lado para \mathbb{H}^n se conocen sólo encajes C^∞ isométricos en \mathbb{E}^{6n-5} [5, p. 15].

Por trabajos de Killing [8] y Hopf [7], se sabe que todas las superficies completas de curvatura constante negativa son de la forma \mathbb{H}^n/Γ , con Γ un grupo discreto de isometrías que actúa libremente sobre \mathbb{H}^n . Con esto Xavier probó en [17] parcialmente la siguiente conjetura

Conjetura. *Para una variedad Riemanniana M^n de curvatura seccional constante negativa, no existen inmersiones (C^∞) isométricas completas en \mathbb{E}^{2n-1} para $n > 2$*

Xavier demostró que para \mathbb{H}^n/Γ con Γ no-elemental (esto quiere decir que Γ tiene conjunto límite infinito en la esfera sobre el infinito), lo anterior se cumple. Nikolayevsky en [12] simplifica esto demostrando que la conjetura se cumple si el grupo fundamental $\pi_1(M^n)$ no es trivial, es decir M^n no es simplemente conexa, por lo cual sólo queda responder si existen inmersiones isométricas completas de \mathbb{H}^n en \mathbb{E}^{2n-1} .

Apéndice A

El plano de Lobatchevsky es completo

En este Apéndice se demostrará la proposición 2.2.2, que dice básicamente que por dos puntos del plano de Lobatchevsky pasa una geodésica.

Esto se logrará demostrando que las rectas verticales y las circunferencias con centro en el eje x son geodésicas del plano de Lobatchevsky.

Para esto primero veamos que el rayo formado por los puntos $(0, y)$ con $y > 0$ es una geodésica.

Proposición A.0.1. *La curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ con $a > 0$, dada por $\alpha(t) := (0, t)$, es la imagen de una geodésica de \mathbb{R}_+^2 .*

Demostración. Sea $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ otra curva diferenciable, con $c(t) = (x(t), y(t))$ tal que: $c(a) = (0, a)$ y $c(b) = (0, b)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\ell(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{1}{y^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \frac{1}{y^2}} dt \\
&\geq \int_a^b \frac{1}{y} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&\geq \int_a^b \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{y} dy.
\end{aligned}$$

Como $0 < y$, se cumple lo siguiente:

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\left\langle \left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right), \left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle} dy = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{y^2}} dy = \int_a^b \frac{1}{y} dy.$$

Por lo tanto $\ell(c) \geq \ell(\alpha)$ para cualquier curva c que una $(0, a)$ con $(0, b)$.

Por esto α es una geodésica. \square

A continuación probemos que las transformaciones de Möbius son isometrías del plano de Lobatchevsky y que mandan el rayo $(0, y)$ con $y > 0$ a rayos verticales y circunferencias con centro en el eje x .

Proposición A.0.2. *Tomando $(x, y) = z \in \mathbb{C}$, las transformaciones que son de la forma*

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{transformaciones de Möbius})$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc > 0$, son isometrías de \mathbb{R}_+^2 en \mathbb{R}_+^2 .

Demostración. Para demostrar esta proposición tomemos una curva

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2,$$

con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Entonces tenemos que

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y},$$

por lo cual obtenemos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{y(t)}}.$$

Pensando a $\gamma(t)$ como un elemento complejo y denotando $|\cdot|$ la norma compleja obtenemos que

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))}.$$

Por otro lado tenemos que

$$\left| \frac{dT}{dz}(z) \right| = \left| \frac{a(cz + d) - (az + b)(c)}{(cz + d)^2} \right| = \left| \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \right| = \frac{ad - cb}{|cz + d|^2},$$

y como podemos describir a $T(z)$ de la siguiente manera

$$T(z) = \frac{(az + b)\overline{(cz + d)}}{|cz + d|^2} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2},$$

entonces la parte imaginaria de $T(z)$ es la siguiente

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2} \text{Im}(z).$$

Por lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|(T \circ \gamma)'(t)\| dt &= \int_0^1 \frac{|(T \circ \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}((T \circ \gamma)(t))} dt \\
&= \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dz}(\gamma(t)) \gamma'(t) \right|}{\operatorname{Im}(T(\gamma(t)))} dt \\
&= \int_0^1 \frac{ad - cb}{|c\gamma(t) + d|^2} \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{(ad - bc)\operatorname{Im}(z)} |\gamma'(t)| dt \\
&= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma'(t))} dt \\
&= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.
\end{aligned}$$

Y por la siguiente proposición vemos que las transformaciones de Möbius son isometrías de \mathbb{R}_+^2 en \mathbb{R}_+^2 . \square

Proposición A.0.3. *Si una función $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ cumple que para cualquier curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ lo siguiente*

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt.$$

Entonces f es una isometría.

Demostración. Tomando a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tenemos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 E(\gamma(t)) + 2x'(t)y'(t)(F\gamma(t)) + (y'(t))^2 G(\gamma(t))},$$

pero por otro lado tenemos que

$$(f \circ \gamma)'(t) = D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) = x'(t) D_{\gamma(t)} f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + y'(t) D_{\gamma(t)} f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right),$$

por lo cual sabemos que

$$\|(f \circ \gamma)'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 E^*(\gamma(t)) + 2x'(t)y'(t)F^*(\gamma(t)) + (y'(t))^2 G^*(\gamma(t))},$$

tomando

$$\begin{aligned} E^*(p) &= \left\langle D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_p, \\ F^*(p) &= \left\langle D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_p, \\ G^*(p) &= \left\langle D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right), D_{\gamma(t)}f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_p. \end{aligned}$$

Si f no es isometría entonces existe $p \in S$ tal que sucede que $E(p) \neq E^*(p)$ ó $G(p) \neq G^*(p)$ ó $F(p) \neq F^*(p)$, por lo cual para una curva γ que pase por p tenemos que

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \neq \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt,$$

lo cual contradice nuestras hipótesis.

Por lo tanto $E = E^*$, $G = G^*$ y $F = F^*$, y por esto f es isometría. \square

Proposición A.0.4. *Las rectas verticales y las semicircunferencias con centro en el eje X son geodésicas de \mathbb{R}_+^2*

Demostración. Para probar esto, veamos que T manda el rayo $\{(0, y) | 0 < y\}$ en circunferencias con centro en el eje X y rectas verticales.

Entonces es útil ver que la siguiente ecuación corresponde ya sea a una recta o a una circunferencia en \mathbb{C} :

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} z + C = 0, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{A.1})$$

siendo una recta cuando $\alpha = 0$, y una circunferencia cuando $\alpha \neq 0$.

La siguiente ecuación corresponde a una recta en \mathbb{R}^2

$$Ax + By + C = 0 \quad (\text{A.2})$$

Tomando $z = x + iy$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z + \bar{z}) &= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x \\ \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo en (A.2) obtenemos

$$A \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) + B \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \right) + C = 0,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2}Az + \frac{1}{2}A\bar{z} - \frac{(i)(i)}{2i}Bz + \frac{(i)(i)}{2i}B\bar{z} + C = 0,$$

obteniendo así

$$\frac{1}{2}(A - iB)z + \frac{1}{2}(A + iB)\bar{z} + C = 0,$$

y tomando

$$\beta = \frac{A - iB}{2}$$

tenemos:

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + C = 0 \tag{A.3}$$

Ahora tomemos una circunferencia en \mathbb{R}^2 cuya ecuación es

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2 \tag{A.4}$$

Tomando $z = x + iy$ y $z_o = x_o + iy_o$ tenemos:

$$z - z_o = (x - x_o) + i(y - y_o)$$

por lo cual

$$\|z - z_o\|^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

entonces (A.4) queda equivalente a:

$$\|z - z_o\|^2 = (z - z_o)\overline{(z - z_o)} = z\bar{z} - z_o\bar{z} - \bar{z}_oz + z_o\bar{z}_o. \tag{A.5}$$

Sean

$$\beta = -\bar{z}_o \quad \text{y} \quad C = z_o\bar{z}_o - r^2$$

Entonces sustituyendo en (A.5) nos queda:

$$z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}z + C = 0. \quad (\text{A.6})$$

El rayo $\{(0, y) | 0 < y\}$ tiene asociada la ecuación

$$x = 0. \quad (\text{A.7})$$

Por lo que si z está en el eje imaginario ($x = 0$), entonces cumple la ecuación

$$\beta z + \bar{\beta}\bar{z} = 0 \quad (\text{A.8})$$

con $\beta = \frac{1}{2} = \bar{\beta}$.

Sea $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, entonces $z = \frac{dw - b}{a - cw}$.

Sustituyendo en (A.8)

$$\beta \left(\frac{dw - b}{a - cw} \right) + \beta \left(\frac{d\bar{w} - b}{a - c\bar{w}} \right) = 0,$$

entonces

$$\beta(dw - b)(a - c\bar{w}) + \beta(d\bar{w} - b)(a - cw) = 0,$$

por lo cual

$$\beta(daw - ba - dcw\bar{w} + bc\bar{w}) + \beta(da\bar{w} - ba - dc\bar{w}w + bcw) = 0,$$

quedando

$$(-2cd\beta)w\bar{w} + (ad\beta + bc\beta)w + (ad\beta + bc\beta)\bar{w} - (2ab\beta) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Si $c = 0$ ó $d = 0$ entonces (2) es una recta vertical ya que $(ad + bc)\beta \in \mathbb{R}$.

Si c y d son distintos de cero, entonces w está en una circunferencia de radio $\sqrt{2ab}$.

Es más como $x_o + iy_o = \bar{z}_o = (ad + bc)\beta \in \mathbb{R}$ entonces es una circunferencia con centro en el eje X .

Como las transformaciones de Möbius son isometrías entonces las rectas verticales y las circunferencias con centro en el eje x son geodésicas. \square

Debido a que entre cualesquiera dos puntos del plano pasa un círculo centrado en el origen o una recta vertical, tenemos que en \mathbb{R}_+^2 entre cualesquiera dos puntos pasa una geodésica, y por tanto \mathbb{R}_+^2 es una superficie completa, por el teorema de Hopf-Rinow-De Rham.

Bibliografía

- [1] Manfredo Perdigão do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1a edición, 1976.
- [2] Manfredo Perdigão do Carmo, *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1a edición, 1992.
- [3] Elie Cartan, *Sur les variété de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien*, Bull. Soc. Math. France, 47, 125-160, 1919; 48, 132-208, 1920.
- [4] Nikolai V. Efimov, *Generation of Singularities on Surfaces of Negative Curvature*. Mat. Sbornik, 64, 286-320, 1964.
- [5] Mikhael L. Gromov y Vladimir A. Rokhlin, *Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry*. Russ. Math. Surv., 25, 1-57, 1970.
- [6] David Hilbert, *Ueber Flächen von constanter gaußscher Krümmung*. Transactions of A.M.S., 2, 87-99, 1901.
- [7] Heinz Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*. Math. Ann. 95, 313-339, 1925.
- [8] Wilhem Killing, *Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen*. Math. Ann. 39, 258-278, 1891.
- [9] Nicolaas H. Kuiper, *On C^1 -Isometric imbeddings I, II*, Indag. Math., 17, 545-556 y 683-689, 1955.
- [10] John Milnor, *Hyperbolic Geometry: The First 150 Years*. Bull. A.M.S. (new series), 6, 9-24, 1982.

- [11] Tila Klotz Milnor, *Efimov's Theorem About Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*. Adv. Math., 8, 474-543, 1972.
- [12] Yury Nikolayevsky, *A non-immersion theorem for a class of hyperbolic manifolds*, Differential Geom. Appl., 9, 239-242, 1998.
- [13] Héctor Sánchez Morgado, Oscar Palmas Velasco, *Geometría riemanniana*, Las prensas de ciencias, UNAM, 1a edición, 2007.
- [14] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1., Publish or Perish, Houston, 3a edición, 1999.
- [15] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 3., Publish or Perish, Houston, 3a edición, 1999.
- [16] John Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry*. A.M.S. - L.M.S. History of Mathematics 10, 1a edición, 1996.
- [17] Frederico Xavier, *A Nonimmersion Theorem for Hyperbolic Manifolds*. Comment. Math. Helv., 60, 280-283, 1985.