



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASES DE STIELTJES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

FRANCISCO JAVIER RIVERA RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Marcos López García

2012





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*...Y será como el que tiene hambre y sueña,
y parece que come; mas cuando despierta,
su alma está vacía...*

Isaías 29:8

*...sino que lo necio del mundo escogió Dios,
para avergonzar a los sabios;
y lo débil del mundo escogió Dios,
para avergonzar a lo fuerte;
y lo vil del mundo y lo menospreciado escogió Dios,
y lo que no es, para deshacer lo que es...*

1° Corintios 1:27-28

Contenido

Introducción	v
1 Estructuras de clases de Stieltjes	1
1.1 Planteamiento formal del problema	1
1.2 Definición de clases de Stieltjes	3
1.3 Consecuencias estructurales	4
1.4 Construcción por escalamiento aleatorio	10
1.5 Clases de Stieltjes para funciones de densidad	13
1.6 Índice de disimilitud para distribuciones de clases de Stieltjes	15
2 Integración compleja y clases de Stieltjes	19
2.1 Teorema principal	19
2.2 Ejemplos	21
2.3 Distribución log-normal	25
2.4 Distribución gamma generalizada	26
2.4.1 Potencias de la distribución normal	27
2.4.2 Potencias de la distribución exponencial	27
2.5 Potencias de la distribución gaussiana inversa generalizada	27
2.6 Potencias de la distribución logística	28

3	Condición de Krein-Lin y Clases de Stieltjes	31
3.1	Criterio de Carleman	31
3.2	El criterio de Krein-Lin y el problema de momentos de Hamburger	32
3.3	El criterio de Krein-Lin y el problema de momentos de Stieltjes	33
3.4	Teorema principal	34
3.5	Funciones de variación regular	36
3.5.1	Determinación y variación regular	40
4	Distribución logarítmica skew-normal	43
4.1	Definición y propiedades de la distribución skew-normal	44
4.1.1	El problema de momentos de la distribución skew-normal	47
4.2	Distribución log-skew-normal	48
4.3	Clases de Stieltjes para la distribución LSN	51
4.4	Posibles extensiones	53
4.5	Aplicación de la distribución logarítmica skew-normal	58
A	Teoría de la Medida	65
B	Probabilidad	69
C	Núcleo de Poisson y espacios de Hardy	73
	Bibliografía	77

Introducción

En este trabajo hacemos un análisis sobre algunos resultados relacionados al problema de momentos. A continuación se presenta de forma breve un panorama histórico del origen, planteamiento y soluciones de dicho problema.

Una breve reseña histórica

En 1885 Tchebyshev planteó el siguiente problema. Dadas las igualdades

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

¿se puede concluir que $w(x) = e^{-x^2}$? En este caso la respuesta es afirmativa, ver Ejemplo 3.3, pero el problema general que planteamos más adelante está lejos de ser elemental.

En 1894 T.J. Stieltjes publicó su trabajo clásico “*Recherches sur les fractions continues*”, ver [73], que contenía gran número de nuevas ideas, entre ellas un nuevo concepto de integral (nuestra moderna integral de Stieltjes). En él propuso y resolvió completamente el siguiente problema que llamó el “*problema de momentos*”.

Tal problema consiste en encontrar una función acotada y no decreciente $\alpha(x)$ en el intervalo $[0, \infty)$, tal que su sucesión de momentos coincida con una predeterminada sucesión de escalares $\{\mu_n\}$, es decir:

$$\mu_n = \int_0^{\infty} x^n d\alpha(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Asimismo Markov, discípulo de Tchebyshev, trabajó en el problema relacionado de encontrar cotas para $\int_I d\alpha(x)$, si se conocen los $n+1$ primeros momentos de la función no decreciente $\alpha(x)$ en J , donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene a I . Este problema fue propuesto por Tchebyshev

y Markov desarrolló completamente la solución en su tesis de 1884. Markov continuó el trabajo de Tchebyshev en este terreno, aplicándolo con éxito a la demostración del *teorema del límite central* de la teoría de la probabilidad.

En 1919, el matemático alemán H. Hamburger extendió el problema de Stieltjes a todo el eje real, teniendo como principal objetivo determinar la convergencia o divergencia de las fracciones continuas. Esta extensión no es trivial en absoluto pues al permitir que la variable x pueda tomar valores negativos aumenta la complejidad del problema. Hamburger hace por primera vez uso del *principio de selección de Helly* en este contexto.

En 1922 Marcel Riesz resuelve el problema de momentos en el intervalo $[0, 1]$, obteniendo resultados muy generales sobre la extensión de funcionales positivos. Utiliza los polinomios cuasiortogonales para establecer en este caso la unicidad de soluciones y analiza también la íntima conexión entre el problema de momentos y la llamada propiedad de la cerradura (fórmula de Parseval) de los polinomios $\{P_n(x)\}$, ver por ejemplo [69, pág. 61].

En 1923 T. Carleman establece la conexión entre el problema de momentos y la teoría de funciones cuasi-analíticas y las formas cuadráticas infinitas. A él se debe la más conocida y utilizada condición suficiente para establecer la unicidad de la soluciones, ver [1, pág. 85].

En 1923 F. Hausdorff da un criterio para que el problema posea solución (necesariamente única) en un intervalo finito. Proporciona un teorema (ver [69, pág. 91]) que construye la función de distribución solución a partir de la sucesión dada.

El interés por el problema de momentos fue creciendo hasta hoy. Entre las más importantes contribuciones debemos mencionar el trabajo de Akhiezer y M.G. Krein (1934) en el que generalizaron resultados de Markov, extendiendo además la teoría al problema de momentos trigonométrico.

Estos trabajos revelaron importantes conexiones entre el problema de momentos y muchas ramas del análisis.

Los diferentes enfoques

Hay distintos puntos de vista y técnicas que se han ocupado para resolver el Problema de los Momentos. Afortunadamente la literatura sobre este tema es abundante. A veces las técnicas se entrecruzan, pero podemos distinguir al menos cinco formas de abordarlo.

1. Fracciones Continuas y sus Teoremas de Convergencia. Históricamente es el primer método, como hemos señalado fue desarrollado por Stieltjes en [73] y posteriormente usado por Hamburger en [31, 32, 33].

2. Principio de Selección de Helly. Fue utilizado por Grommer en [27] y Hamburger [31, 32, 33].
3. Análisis Funcional. Es la herramienta usada por Hausdorff en [35] y Riesz en [65], por otra parte Dieudonné afirma que el Problema de los Momentos no es ajeno al nacimiento de la teoría de los espacios de Banach. El germen de los trabajos de Banach y Hanh se encuentra en los de Riesz y Helly.
4. Teoría de las Funciones Analíticas. Nevanlinna introduce un punto de vista diferente al situar el problema en el contexto de esta teoría, ver [54].
5. Análisis Armónico y Análisis de Fourier. Esta herramienta fue recientemente utilizada por Lin y López-García. En [45] Lin trabajó con el Criterio de Krein, obteniendo una prueba elegante y desarrollando un nuevo criterio. Asimismo en [25, 48, 49] López-García caracterizó familias de funciones que son solución a problemas de momentos.

Temas

La tesis abordará principalmente la noción de clases de Stieltjes. Se utilizarán conceptos y resultados de Probabilidad, Teoría de la Medida y Análisis Complejo, Armónico y de Fourier, la mayoría de los cuales vienen enunciados en el apéndice de la tesis. El contenido de cada capítulo es el siguiente:

En el Capítulo 1 se introduce la definición de clase de Stieltjes y exploramos las consecuencias de dicha definición, además estudiamos algunas técnicas para construir nuevas clases a partir de una clase de Stieltjes dada.

En el Capítulo 2 se prueba uno de los teoremas principales de la tesis, el Teorema 2.2, el cual, permite construir de manera explícita clases de Stieltjes de funciones de densidad que son ampliamente conocidas en Probabilidad.

El objetivo del Capítulo 3 es ver la relación que existe entre las clases de Stieltjes y el criterio de Krein, además analizamos el vínculo que hay entre las funciones de variación regular y el criterio mencionado.

Por último, el Capítulo 4 está dedicado a un par de distribuciones bastante interesantes. Iniciamos definiendo la distribución skew-normal y a partir ella se construye la distribución log-skew-

normal. Para cada distribución analizamos el problema de determinación, además construimos una clase de Stieltjes con centro en la distribución log-skew-normal, finalizamos con algunas generalizaciones de la distribución que acabamos de mencionar y una pequeña aplicación en el campo de la medicina.

CAPÍTULO 1

Estructuras de clases de Stieltjes

A partir del estudio de funciones de distribución que son soluciones a un problema de momentos surge el problema de indeterminación, es decir, verificar si la solución es única o no. Hay varias formas de encontrar la respuesta, una de ellas es exhibir explícitamente distribuciones distintas con los mismos momentos.

En 1894 Stieltjes fue el primero en dar un ejemplo de una cantidad infinita de funciones de distribución definidas en \mathbb{R}^+ que tienen los mismos momentos. Además, H. Hamburger usó una idea similar para distribuciones definidas en \mathbb{R} .

A continuación planteamos de manera formal el problema de los momentos, en las Secciones 1.2 y 1.3 damos la definición de una clase de Stieltjes y algunas consecuencias de esta definición. Después mostramos una técnica para construir una clase de Stieltjes a partir de una clase dada e ilustramos con un ejemplo. Por último, definimos el índice de disimilitud para distribuciones de clases de Stieltjes y damos algunos ejemplos.

1.1 Planteamiento formal del problema

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} .

Definición 1.1 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo fijo y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = P[X \leq x]$, $x \in \mathbb{R}$; se escribirá $X \sim F$ y el n -ésimo momento de X y F se denotará por

$$\mu_n(F) := \int_I x^n dF(x),$$

siempre que la integral sea finita, $n \geq 0$. En adelante, suponemos que toda distribución F tiene asociada su **sucesión de momentos** finita $\{\mu_n(F)\}_{n=0}^\infty$.

En la definición anterior I es el soporte de F . Si $I = (0, \infty)$ o \mathbb{R} entonces no se escribe el intervalo de integración, salvo cuando sea necesario.

Definición 1.2 Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales. El **problema de momentos** relacionado con $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ sobre el intervalo I , consiste en encontrar una función de distribución F definida en I , cuya sucesión de momentos coincida con la sucesión dada, es decir,

$$\mu_n(F) = \mu_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Si existe tal F , entonces decimos que es una solución al problema de momentos (relacionado con $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ sobre el intervalo I).

En esta sección nos enfocamos en dar distribuciones distintas con la misma sucesión de momentos.

El problema de unicidad en el problema de momentos se plantea de la siguiente manera: ¿Es F la única función de distribución que corresponde a $\{\mu_n(F)\}_{n=0}^\infty$? Si la respuesta es sí, diremos que el problema de momentos tiene solución única, o que F es determinada. En caso contrario, existe al menos una distribución G , tal que $G \neq F$ y G tiene la misma sucesión de momentos que F ; en este caso decimos que F es indeterminada, o que F y G son M -equivalentes. Esto da pie a las siguientes definiciones.

Definición 1.3

1. El problema de momentos relacionado a la sucesión $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ sobre el intervalo I es determinado si tiene una única solución. En caso contrario, decimos que es **indeterminado**.
2. Una función de distribución F definida en un intervalo I es (in)determinada si el problema de momentos asociado a $\{\mu_n(F)\}_{n=0}^\infty$ sobre I es (in)determinado.

Se puede mostrar que si el problema de momentos sobre un intervalo finito tiene solución, ésta es única, ver [35]. Sin embargo, esto cambia al considerar intervalos infinitos.

Distinguimos tres casos que dependen del intervalo I :

- (i) cuando $I = \mathbb{R}^+$ se le refiere como el *problema de momentos de Stieltjes*.
- (ii) cuando $I = \mathbb{R}$ se le refiere como el *problema de momentos de Hamburger*.
- (iii) cuando $I = [0, 1]$ se le refiere como el *problema de momentos de Hausdorff*.

Observación 1.4 *La existencia de la función generadora de momentos $M(t) = E[e^{tX}]$, $t \in (-t_0, t_0)$ para alguna $t_0 > 0$, implica que todos los momentos de X son finitos y que F es determinada. Esto se conoce como la condición de Cramer, ver [18]. En particular, el problema de momentos de Hausdorff siempre tiene una única solución. Así las cosas, sólo nos importará el problema de momentos de Stieltjes y Hamburger.*

1.2 Definición de clases de Stieltjes

En [77] Stoyanov formalizó la primera construcción usada por Stieltjes [73] para exhibir algunas funciones de distribución M -equivalentes, i.e. que tienen la misma sucesión de momentos. Las siguientes secciones fueron redactadas en base a lo escrito en el artículo *Structure of Stieltjes classes of moment-equivalent probability laws*, ver [59]. Los conceptos y la teoría la desarrollamos sobre el intervalo $I = (0, \infty)$, se puede extender a $I = \mathbb{R}$.

Definición 1.5 *Sea h una función medible que satisface $|h| \leq 1$ en $(0, \infty)$ y $\int x^n h(x) dF(x) = 0$, para todo $n \geq 0$. Sea*

$$dF_\epsilon(x) = (1 + \epsilon h(x)) dF(x), \quad x > 0. \quad (1.1)$$

*Decimos que $\mathcal{S}(F, h) = \{F_\epsilon : -1 \leq \epsilon \leq 1\}$ es una **clase de Stieltjes** con centro en F y perturbación h . A las funciones $F_{\pm 1}$ se les llama funciones extremas.*

Observación 1.6

1. *Cada elemento de $\mathcal{S}(F, h)$ es una función de distribución que tiene la misma sucesión de momentos que F . $F_\epsilon \geq 0$ en $(0, \infty)$ y $F_\epsilon(x) = F(x) + \epsilon \int_0^x h(t) dF(t) \uparrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$.*
2. *Si h no es idénticamente cero c.d. entonces los elementos de $\mathcal{S}(F, h)$ son distintos, así que F es indeterminada.*
3. *Para todo $\epsilon \in [-1, 1]$ se tiene $F_\epsilon \leq 2F$ en $(0, \infty)$.*
4. *Si $F_{\epsilon_1}, F_{\epsilon_2} \in \mathcal{S}(F, h)$ entonces*

$$\int (1 + \epsilon_1 h(x)) dF_{\epsilon_2}(x) = \int (1 + \epsilon_2 h(x)) dF_{\epsilon_1}(x).$$

1.3 Consecuencias estructurales

Definición 1.7 Sea F una función de distribución indeterminada y $\mathcal{M}(F)$ el conjunto de todas las funciones de distribución que son M -equivalentes a F .

Observación 1.8

1. $\mathcal{M}(F)$ es un conjunto convexo.
2. Una clase de Stieltjes con centro en F es un subconjunto de $\mathcal{M}(F)$.

Definición 1.9

1. Si F y G son funciones de distribución, escribimos $F \ll G$ si F es absolutamente continua con respecto a G , y escribimos $F \asymp G$ si $F \ll G$ y $G \ll F$. Ver Apéndice A.
2. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se define el soporte de f como:

$$\text{sop}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

A continuación presentamos el primer resultado que proporciona información sobre los miembros de una clase de Stieltjes.

Teorema 1.10 Si A y B son elementos de la clase de Stieltjes $\mathcal{S}(F, h)$ entonces $A \asymp B$, y por tanto $\text{sop}(A) = \text{sop}(B)$. Inversamente si A y B son distribuciones M -equivalentes y $A \asymp B$ entonces existe una clase de Stieltjes $\mathcal{S}(F, h)$, con

$$F(x) = \frac{1}{2}(A(x) + B(x)) \text{ y } h(x) = \frac{1 - \lambda(x)}{1 + \lambda(x)}$$

donde $\lambda(x) = \frac{dA}{dB}(x)$, tal que $A = F_{-1}$ y $B = F_1$.

Demostración. Por la Proposición A.9 se sigue que $F_\epsilon \ll F$ para todo $|\epsilon| \leq 1$. Si $0 \leq |\epsilon| < 1$ se cumple

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + \epsilon h(t)} dF_\epsilon(t),$$

y por la Proposición A.9 se tiene que $F \ll F_\epsilon$. Si $\epsilon = 1$, notamos que

$$P_{F_1}(\{1 + h = 0\}) := \int_{\{1+h=0\}} dF_1 = \int_{\{1+h=0\}} (1 + h) dF = 0,$$

para consultar la definición de P_{F_1} ver Apéndice C. Entonces

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + h(t)} dF_1(t),$$

así se tiene $F \ll F_1$. De manera similar se ve que $F \ll F_{-1}$. Por lo tanto $F_\epsilon \asymp F$ para todo $|\epsilon| \leq 1$.

Ahora supongamos que A y B son distribuciones M -equivalentes y $A \asymp B$, por lo tanto $dA = \frac{dA}{dB}dB$, ver Apéndice A. Para $n \geq 0$ tenemos

$$\int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} dA(x) = \int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} \frac{dA}{dB}(x) dB(x) = \int \frac{x^n \lambda(x)}{1 + \lambda(x)} dB(x),$$

y además

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} dB(x) &= \int x^n dB(x) - \int x^n \frac{\lambda(x)}{1 + \lambda(x)} dB(x) \\ &= \int x^n dA(x) - \int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} dA(x) \\ &= \int x^n \frac{\lambda(x)}{1 + \lambda(x)} dA(x). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int x^n h(x) dF(x) &= \frac{1}{2} \left(\int x^n h(x) dA(x) + \int x^n h(x) dB(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} dA(x) - \int \frac{x^n \lambda(x)}{1 + \lambda(x)} dA(x) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\int \frac{x^n}{1 + \lambda(x)} dB(x) - \int \frac{x^n \lambda(x)}{1 + \lambda(x)} dB(x) \right] = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte $|1 - \lambda(x)| \leq 1 + \lambda(x)$ para todo $x \in (0, \infty)$, por lo tanto $|h| \leq 1$ en $(0, \infty)$.

Para $0 \leq p \leq 1$ consideramos

$$K_p(x) = pA(x) + (1 - p)B(x), \quad x \in (0, \infty),$$

las distribuciones K_p son M -equivalentes:

$$\int x^n dK_p(x) = p \int x^n dA(x) + (1 - p) \int x^n dB(x) = \int x^n dB(x), \quad n \geq 0.$$

En términos de índices de clases, para $\epsilon \in [-1, 1]$ ponemos $F_\epsilon(x) = K_{(1-\epsilon)/2}(x)$, $x \in (0, \infty)$. En concreto,

$$F_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(A(x) + B(x)) + \frac{\epsilon}{2}(B(x) - A(x)).$$

□

El siguiente ejemplo fue tomado de [70, Ejemplo 1.1], y muestra la existencia de funciones de densidad mutuamente singulares que son M -equivalentes.

Ejemplo 1.11 Sea $b \in \mathcal{C}_c^\infty((0, \infty))$ una función no nula y

$$\hat{b}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-ixu} b(u) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

su transformada de Fourier que pertenece al espacio de Schwarz \mathcal{J} , ver [72, pág. 136]. Dado que

$$b(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty \hat{b}(x) e^{ixu} dx,$$

podemos derivar n veces respecto a u para obtener

$$b^{(n)}(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty (ix)^n \hat{b}(x) e^{ixu} dx$$

Haciendo $u = 0$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^\infty x^n \hat{b}(x) dx = \sqrt{2\pi} (-i)^n b^{(n)}(0),$$

para todo $n \geq 0$. Ahora consideramos b tal que $b^{(n)}(0+) = 0$ para todo n , por ejemplo $b(u) = \exp(-u^{-1})$. Sean

$$g_1(x) = K_1(\Re \hat{b}(x))^+ \quad y \quad g_2(x) = K_2(\Re \hat{b}(x))^- , \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $K_i^{-1} = \int_{-\infty}^\infty \Re(\hat{b}(x))^\pm dx$, $i = 1, 2$. Entonces g_1 y g_2 son funciones de densidad cuyos soportes tienen interiores disjuntos y que comparten la misma sucesión de momentos. Las funciones de distribución correspondientes son indeterminadas en el sentido de Hamburger. Dado que $\Re \hat{b}(x)$ es una función par, entonces las funciones $f_i(x) = x^{-1/2} g_i(\sqrt{x})$, $x > 0$, $i = 1, 2$, son M -equivalentes, pero no pertenecen a una misma clase de Stieltjes por el teorema previo.

Los siguientes corolarios muestran que los elementos de una clase de Stieltjes comparten propiedades de acotamiento.

Corolario 1.12 *Supongamos que F y G son M -equivalentes, $F \asymp G$ y $dG/dF(x) \leq 2$ para $x > 0$. Entonces $G \in \mathcal{S}(F, h)$ donde $h(x) = dG/dF(x) - 1$, $G = F_1$ y*

$$\frac{1}{2}G(x) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1 + G(x)).$$

Demostración. Primero vemos que $\mathcal{S}(F, h)$ es una clase de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \int x^n h(x) dF(x) &= \int x^n \frac{dG}{dF}(x) dF(x) - \int x^n dF(x) \\ &= \int x^n dG(x) - \int x^n dF(x) = 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Tenemos que $dG/dF(x) \geq 0$ c.d., por tanto $-1 \leq dG/dF(x) - 1 \leq 2 - 1 = 1$, así $|h| \leq 1$ c.d. Por otra parte $dF_1 = \frac{dG}{dF} dF = dG$, entonces $F_1 = G$.

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}G(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dG}{dF}(t) dF(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x 2dF(t) = F(x).\end{aligned}$$

Además $F(x) = \frac{1}{2}(F_{-1}(x) + G(x)) \leq \frac{1}{2}(1 + G(x))$, ya que $F_{-1}(x) \leq 1$. \square

Observación 1.13 Si se omite la condición de acotamiento $dG/dF \leq 2$, entonces F y G determinan una clase de Stieltjes unilateral, es decir, como en la Definición 1.1 pero con $0 \leq \epsilon \leq 1$. Esto es justamente el conjunto de combinaciones $F_\epsilon(x) = (1 - \epsilon)F(x) + \epsilon G(x)$.

Si en el Teorema 1.10 A y B tienen funciones de densidad $a(x)$ y $b(x)$ respectivamente, entonces $h(x) = [b(x) - a(x)]/[b(x) + a(x)]$; si en el corolario anterior $f(x) = F'(x)$ y $g(x) = G'(x)$, entonces la condición de acotamiento es $g(x) \leq 2f(x)$, y en este caso $h(x) = (g(x)/f(x)) - 1$.

Corolario 1.14 Si el centro F de $\mathcal{S}(F, h)$ tiene función de densidad f entonces F_ϵ tiene función de densidad

$$f_\epsilon(x) = f(x)(1 + \epsilon h(x)), \quad -1 \leq \epsilon \leq 1.$$

Además, si f es acotada entonces f_ϵ es acotada para cada ϵ . Inversamente, si f no es acotada y existe $\bar{\epsilon} \in [-1, 1]$ tal que $f_{\bar{\epsilon}}$ es acotada entonces f_ϵ no es acotada para cada $\epsilon \in [-1, 1] \setminus \{\bar{\epsilon}\}$.

Demostración. De la definición se sigue

$$F_\epsilon(x) = \int_0^x (1 + \epsilon h(t)) dF(t) = \int_0^x (1 + \epsilon h(t)) f(t) dt.$$

Si f está acotada por $M > 0$, entonces $|f_\epsilon(x)| \leq 2M$, $x > 0$. Si f no es acotada existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $f(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado que $f_{\bar{\epsilon}}$ es acotada así se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\bar{\epsilon}}(x_n) < \infty$, entonces $h(x_n) \rightarrow -1/\bar{\epsilon}$, y por lo tanto $f_\epsilon(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $\epsilon \neq \bar{\epsilon}$. \square

El siguiente resultado complementa al Corolario 1.12.

Corolario 1.15 Supongamos que F y G son M -equivalentes y $F \asymp G$. Si $b = \sup_{x>0} dG/dF(x) < \infty$ entonces $\mathcal{S}(F, h_b)$ es una clase de Stieltjes donde

$$h_b = \frac{dG/dF(x) - 1}{1 \vee (b - 1)},$$

si además $b > 2$, entonces

$$F_1(x) = \frac{(b-2)F(x) + G(x)}{b-1}, \quad F_{-1}(x) = \frac{bF(x) - G(x)}{b-1},$$

para $x > 0$, y

$$G(x)/b \leq F(x) \leq 1 - b^{-1} + b^{-1}G(x), \quad x > 0.$$

Demostración. De la hipótesis se sigue que $dG = \frac{dG}{dF}dF$, ver Apéndice A. Para cada $n \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int x^n h_b(x) dF(x) &= \frac{1}{1 \vee (b-1)} \left[\int x^n \frac{dG}{dF}(x) dF(x) - \int x^n dF(x) \right] \\ &= \frac{1}{1 \vee (b-1)} \left[\int x^n dG(x) - \int x^n dF(x) \right] = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$-1 \leq \frac{dG(x)/dF(x) - 1}{1 \vee (b-1)} \leq \frac{b-1}{1 \vee (b-1)} \leq 1.$$

Si $b > 2$ entonces $h_b = [(dG/dF) - 1]/(b-1)$, de donde se sigue la mencionada representación de F_1 y F_{-1} . De la definición de b se sigue que

$$G(x) \leq \int_0^x b dF(t) = bF(x).$$

Para la otra desigualdad usamos que $\frac{dF}{dG} = \left(\frac{dG}{dF}\right)^{-1}$, ver Apéndice A, para obtener

$$1 - F(x) = \int_x^\infty \frac{dF}{dG}(t) dG(t) \geq b^{-1} \int_x^\infty dG(x) = b^{-1}(1 - G(x)).$$

□

Ahora la pregunta es ¿cuáles son los elementos de $\mathcal{M}(F)$ que pueden ser centros de alguna clase de Stieltjes? La respuesta la da el siguiente resultado.

Definición 1.16 *Sea S un conjunto convexo en un espacio vectorial real. Decimos que $x \in S$ es un punto extremo de S , si siempre que x está en el segmento que une a un par de puntos $u, v \in S$ entonces $x = u$ o $x = v$.*

Teorema 1.17 *Supongamos que F es una distribución indeterminada. Entonces $G \in \mathcal{M}(F)$ es el centro de una clase de Stieltjes si y sólo si G no es un punto extremo de $\mathcal{M}(F)$.*

Demostración. Si $G \in \mathcal{M}(F)$ es el centro de la clase $\mathcal{S}(G, h)$ entonces $G = \frac{1}{2}(G_1 + G_{-1})$, por lo tanto no es un punto extremo de $\mathcal{M}(F)$.

Recíprocamente, si G no es un punto extremo de $\mathcal{M}(F)$, entonces existen funciones de distribución $G_i \in \mathcal{M}(F)$, $i = 1, 2$, y $0 < \alpha < 1$ tal que $G = \alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2$. Notamos que $\text{sop}(G_i) \subset \text{sop}(G) = \text{sop}(G_1) \cup \text{sop}(G_2)$. Por tanto las funciones de distribución $A = (1 - (1 - \alpha)^2)G_1 + (1 - \alpha^2)G_2$ y $B = \alpha^2 G_1 + (1 - \alpha)^2 G_2$ satisfacen las condiciones de la segunda parte del Teorema 1.10 y por tanto $G = \frac{1}{2}(A+B)$ es el centro de una clase de Stieltjes. \square

Ahora bien, un teorema de Naimark afirma que G es un punto extremo de $\mathcal{M}(F)$ si y sólo si los polinomios son densos en $\mathcal{L}^1(G)$. Una demostración se encuentra en un artículo de Askhizer [1, pág. 47]; la prueba original se debe a Gelfand.

Supongamos que X es una variable aleatoria positiva que tiene función de distribución F . El siguiente resultado proporciona dos transformaciones que mapean una clase de Stieltjes en otra. Necesitamos la siguiente notación: sea w una función no negativa en $(0, \infty)$ tal que $m_w := E[w(X)] < \infty$, y sea \hat{X}_w una variable aleatoria que tiene la función de distribución ponderada $\hat{F}_w(x) = m_w^{-1} \int_0^x w(y) dF(y)$. Ponemos $m_n = E(X^n)$, $n \geq 0$.

Teorema 1.18 *Sea $\mathcal{S}(F, h)$ una clase de Stieltjes y w una función no negativa en $(0, \infty)$ tal que $m_w < \infty$.*

1. *Supongamos que $w(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $x > 0$, satisface $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| m_{j+n} < \infty$ para todo $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{S}(\hat{F}_w, h)$ es una clase de Stieltjes.*
2. *Supongamos que $\tau(x)$ es un polinomio estrictamente creciente en $(0, \infty)$ con inversa $\eta(y)$. Entonces $\mathcal{S}(G, \gamma)$ es una clase de Stieltjes, donde $G(y) = F(\eta(y))$ y $\gamma(y) = h(\eta(y))$.*

Demostración.

1. Los elementos de $\mathcal{S}(\hat{F}_w, h)$ son de la forma $d\hat{F}_{w,\epsilon}(x) = m_w^{-1}(1 + \epsilon h(x))w(x)dF(x)$ y por el Teorema de Fubini se tiene

$$\int x^n h(x) w(x) dF(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int x^{j+n} h(x) dF(x) = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

2. La función de distribución de $Y = \tau(X)$ es $G(y) = F(\eta(y))$ y haciendo el cambio de variable $\eta(y) = x$ se obtiene

$$\int y^n h(\eta(y)) dG(y) = \int (\tau(x))^n h(x) dF(x),$$

y como $(\tau(x))^n$ es un polinomio entonces la parte derecha de la igualdad anterior es cero para todo $n \geq 0$.

□

1.4 Construcción por escalamiento aleatorio

Sean X, V variables aleatorias independientes con funciones de distribución F y K respectivamente, entonces la función de distribución de $Y = VX$ es

$$G(x) = \int F(x/v)dK(v). \quad (1.2)$$

El lector puede consultar la prueba en el *Apéndice B*. Supongamos que $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(\nu_n)_{n=0}^{\infty}$ son las sucesiones de momentos finitas de X y V , respectivamente, entonces $E[Y^n] = \nu_n s_n$, $n \geq 0$; se sigue que si F es una distribución indeterminada entonces G también lo es. Este método de escalamiento aleatorio permite mostrar ejemplos de distribuciones M -equivalentes que se construyen a partir de un par de distribuciones, una de ellas indeterminada.

El siguiente resultado muestra la posibilidad de extender lo anterior a clases de Stieltjes.

Teorema 1.19 *Si $\mathcal{S}(F, h)$ es una clase de Stieltjes, entonces también lo es $\mathcal{S}(G, \kappa) = \{G_\epsilon : -1 \leq \epsilon \leq 1\}$ donde κ está dada implícitamente por*

$$\int_0^x \kappa(y)dG(y) = \int_0^\infty \int_0^{x/v} h(z)dF(z)dK(v), \quad x > 0. \quad (1.3)$$

Si $b_1 < b_2$ son constantes reales tal que $b_1 \leq h \leq b_2$ c.d. en \mathbb{R}^+ respecto a dF entonces $b_1 \leq \kappa \leq b_2$ c.d. en \mathbb{R}^+ respecto a dG .

Supongamos que $P(V > 0) = 1$ y que F tiene función de densidad f . Entonces G tiene función de densidad

$$g(x) = \int v^{-1}f(x/v)dK(v), \quad x > 0 \quad (1.4)$$

y

$$\kappa(x)g(x) = \int v^{-1}h(x/v)f(x/v)dK(v). \quad (1.5)$$

Demostración. Por definición $dG_\epsilon = (1 + \epsilon\kappa)dG$, por lo tanto

$$\begin{aligned} G_\epsilon(x) &= G(x) + \epsilon \int_0^x \kappa(y)dG(y) \\ &= \int_0^\infty F(x/v)dK(v) + \epsilon \int_0^\infty \int_0^{x/v} h(z)dF(z)dK(v) \\ &= \int_0^\infty F_\epsilon(x/v)dK(v). \end{aligned}$$

Asimismo de la definición de κ se sigue

$$\int x^n \kappa(x) dG(x) = \int \int x^n h(x/v) dF(x/v) dK(v) = \int v^n \left(\int z^n h(z) dF(z) \right) dK(v) = 0,$$

para todo $n \geq 0$.

Si $b_1 \leq h \leq b_2$ en $(0, \infty)$, entonces para $0 < x' < x''$, se tiene

$$b_1(G(x'') - G(x')) = b_1 \int_0^\infty (F(x''/v) - F(x'/v)) dK(v) \leq \int_{x'}^{x''} \kappa(y) dG(y) \leq b_2 \int_0^\infty (F(x''/v) - F(x'/v)) dK(v) = b_2(G(x'') - G(x')),$$

ahora utilizando el Lema A.1 se sigue $b_1 \leq \kappa \leq b_2$ en $(0, \infty)$. Al escoger $b_1 = -1$ y $b_2 = 1$ se sigue que $\mathcal{S}(G, \kappa)$ es una clase de Stieltjes. Finalmente, si F es absolutamente continua y $P(V > 0) = 1$ entonces por (1.2) G es absolutamente continua con función de densidad (1.4). La igualdad (1.5) se sigue de (1.3). \square

Del resultado anterior se sigue que G_ϵ es la función de distribución de $Y_\epsilon := VX_\epsilon$ si F_ϵ es la función de distribución de X_ϵ .

El siguiente ejemplo puede ser visto como una interpretación alterna de las Secciones 2 y 3 en [12]. Para ello introducimos algunas nociones básicas del llamado q -cálculo. Si el lector desea profundizar en este tema puede consultar [41, 63].

Definición 1.20 *El q -factorial se define como sigue $n!_q := (1 - q)^{-1}(q; q)_n$ para $q \in (0, 1)$ y $a \in \mathbb{R}$ donde*

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Para $q \in (0, 1)$, escribimos

$$(a; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

La función q -exponencial está dada por

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!_q = 1 / ((1 - q)x; q)_\infty,$$

donde la segunda igualdad se obtiene por el q -teorema del binomio, ver [63, pág. 8]. Además para $x > 0$ se cumple

$$e_q(x) \rightarrow e^x \text{ cuando } q \rightarrow 1. \quad (1.6)$$

Definición 1.21 *Para $x > 0$ la función q -gamma está dada por*

$$\Gamma_q(x) = \begin{cases} (1 - q)^{1-x} \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty}, & \text{si } q \in (0, 1) \\ (q - 1)^{1-x} q^{\binom{x}{2}} \frac{(q^{-1}; q^{-1})_\infty}{(q^{-x}; q^{-1})_\infty}, & \text{si } q > 1. \end{cases}$$

El siguiente resultado se puede ver en [63, pág. 21].

Lema 1.22

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Gamma_q(x) = \Gamma(x). \quad (1.7)$$

Además la siguiente igualdad se puede encontrar en [57, (6.21)].

$$\int_0^\infty x^{a-1} e_q(-x) dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma_q(1-a)} := A_q(a), \quad a > 0.$$

Para $a > 0$ fija introducimos la siguiente función de densidad de una variable aleatoria $C_q(a)$, ver [4, Sección 4],

$$f_A(x; a) = x^{a-1} e_q(-x) / A_q(a), \quad x > 0. \quad (1.8)$$

La sucesión de momentos de f_A es

$$M_A(n) := \int_0^\infty x^n f_A(x; a) dx = \frac{A_q(a+n)}{A_q(n)} = (1-q)^{-n} (q^a; q)_n q^{-an - \binom{n}{2}}.$$

En [4, ecuaciones (4.4), (4.6)] Askey exhibe una distribución discreta que tiene la misma sucesión de momentos que f_A , así que f_A es indeterminada para todo $a > 0$. De (1.6) y (1.7) se tiene para todo $x > 0$ que

$$f_A(x; a) \rightarrow \frac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)} \text{ cuando } q \rightarrow 1.$$

Esto es curioso ya que la densidad límite (densidad gamma) es determinada. En [13] Berg llama al problema de momentos relacionado con $(M_A(n))_{n=1}^\infty$ el problema de momentos q -Laguerre porque f_A es una medida de ortogonalidad para los polinomios q -Laguerre, ver [53].

El factor $q^{-an - \binom{n}{2}}$ es la sucesión de momentos de las distribuciones M -equivalentes a la distribución log-normal $LN(\mu(a), \sigma^2)$, donde $\mu(a) := (a - 1/2)\sigma^2$ y con función de densidad

$$f_L(x; \mu(a), \sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu(a))^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0.$$

El factor $(1-q)^{-n} (q^a; q)_n$ son los momentos de la variable aleatoria q -gamma discreta $\gamma_q(a)$:

$$P(\gamma_q(a) = j) = (1-q)^{-1} q^j = (q^a; q) q^{aj} / (q; q)_j, \quad j \geq 0,$$

ver [57, Sección 5]; la función de momentos para la q -gamma discreta es

$$M_{dq}(t; a) := E[\gamma_q^t(a)] = \frac{\Gamma_q(a+t)}{\Gamma_q(a)} \quad (1.9)$$

que converge a $\Gamma(a+t)/\Gamma(a)$ cuando $q \rightarrow 1$, la función de momentos de la distribución gamma con parámetro $\lambda = 1$. Como mencionamos al principio de esta sección se pueden obtener soluciones al problema de momentos q -Laguerre al considerar la distribución de $Y = \gamma_q(a)X$ donde $X \sim LN(\mu(a), \sigma^2)$. Sea $\Lambda(a) \sim LN(\mu(a), \sigma^2)$, entonces la función de momentos de $W_a = \gamma_q(a)\Lambda(a)$ es $q^{-at - \binom{t}{2}} M_{dq}(t; a)$. Su función de densidad es un caso especial del siguiente lema.

Lema 1.23 *Si $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ entonces la función de densidad de $\gamma_q(a)X$ es*

$$g(x; a, \mu, \sigma) = (q^a; q)_\infty (-1 - q)^{-1} x^{-1} q^{a+1/2} e^\mu; q)_\infty f_L((1 - q)x; \mu, \sigma),$$

donde f_L es la función de densidad de $LN(\mu, \sigma^2)$ y $q = e^{-\sigma}$.

Demostración. De (1.4) se obtiene

$$\begin{aligned} g(x; a, \mu, \sigma) &= E[\gamma_q^{-1}(a) f_L(x/\gamma_q(a); \mu, \sigma)] \\ &= \frac{(q^a; q)_\infty}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{aj}}{(q; q)_j} \exp \left[-(2\sigma^2)^{-1} (\log x - \mu + j\sigma^2 + \log(1 - q))^2 \right] \\ &= (q^a; q)_\infty f_L(x; \mu - \log(1 - q), \sigma) \sum_{j=0}^{\infty} [(1 - q)^{-1} x^{-1} q^{a+1/2} e^\mu] q^{\binom{j}{2}} / (q; q)_j. \end{aligned}$$

Otra identidad de Euler afirma que la suma es igual al factor q -producto en la afirmación, ver [63, pág. 354]. \square

1.5 Clases de Stieltjes para funciones de densidad

Supongamos que X es una variable aleatoria con función de distribución F que es absolutamente continua y con densidad f , en este caso escribimos $X \sim f$.

Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones integrables sobre \mathbb{R} con valores reales. Si $x^n f(x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{Z}$, definimos el momento de orden n de f como sigue:

$$s_n(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Ahora consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}) : s_n(f) < \infty \text{ para todo } n \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{M}_0 &= \left\{ f \in \mathcal{M} : s_n(f) = 0 \text{ para todo } n \geq 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Notación 1 *Cuando reemplazamos en (1.10) la condición $n \geq 0$ con $n \in \mathbb{Z}$, escribiremos \mathcal{M}^s , \mathcal{M}_0^s , en lugar de \mathcal{M} , \mathcal{M}_0 .*

Definición 1.24 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable.

1. Si $f \in \mathcal{M}$ decimos que f tiene **sucesión de momentos finita** $\{s_n(f)\}_{n \geq 0}$.
2. Si $f \in \mathcal{M}_0$ decimos que f tiene **sucesión de momentos nula**.

En esta ocasión trabajamos sobre el intervalo $I = \mathbb{R}$, es claro que los conceptos tienen sentido para $I = (0, \infty)$.

Definición 1.25 Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada con $\|h\|_\infty := \sup|h(x)| = 1$ y f una función de densidad en \mathbb{R} .

1. Decimos que h es una perturbación de la densidad f si el producto $g = fh$ tiene sucesión de momentos nula.
2. La clase de Stieltjes basada en la densidad $f \in \mathcal{M}$ y con perturbación h está dada por

$$\mathcal{S}(f, h) = \{f_\varepsilon(x) = f(x)[1 + \varepsilon h(x)], \quad x \in \mathbb{R}, |\varepsilon| \leq 1\}$$

De las definiciones anteriores se sigue el siguiente resultado:

Observación 1.26 Sea $\mathcal{S}(f, h)$ una clase de Stieltjes y $\varepsilon, \varepsilon' \in [-1, 1]$

1. f_ε es una función de densidad de una variable aleatoria X_ε inducida por la función de distribución $F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x f_\varepsilon(t)dt$, ver Proposición B.4, además $f_\varepsilon \in \mathcal{M}$.
2. Si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0)h(x_0) \neq 0$, entonces $f_\varepsilon \neq f_{\varepsilon'}$ para todo $\varepsilon \neq \varepsilon'$.
3. f_ε tiene la misma sucesión de momentos que f .

Observación 1.27 1. A partir de una clase de Stieltjes $\mathcal{S}(f, h)$ podemos construir otra clase de Stieltjes $\mathcal{S}(g, q)$ como sigue: Sea $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$ c.d. en \mathbb{R} . Ponemos $c_1 = \int f(u)b(u)du$ y $c_2 = \sup_u |h(u)|/b(u)$, basta tomar

$$g(x) = \frac{1}{c_1} f(x)b(x) \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{1}{c_2} h(x)/b(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Si h_1 y h_2 son perturbaciones de la densidad f , entonces

$$(h_1 + \lambda h_2)f \in \mathcal{M}_0$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.6 Índice de disimilitud para distribuciones de clases de Stieltjes

En [77] Stoyanov definió el índice de similitud para clases de Stieltjes como una variación total entre la “distancia” de F_1 y F_{-1} . Además exhibe algunos de estos valores para clases de Stieltjes basadas en la distribución log-normal y potencias de las distribuciones normal y exponencial. Este último se analiza con más detalle por Stoyanov y Tolmatz en [80], y las potencias de la distribución inversa Gaussiana son estudiadas por Ostrovska y Stoyanov en [78].

A continuación se da la motivación del índice de similitud. Sean $F_{\varepsilon_1}, F_{\varepsilon_2} \in \mathcal{S}(F, h)$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [-1, 1]$ y sean X_{ε_1} y X_{ε_2} las respectivas variables aleatorias. La Observación 1.6 implica que X_{ε_1} y X_{ε_2} tienen los mismos momentos, además si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, entonces sus funciones de distribución son diferentes $F_{\varepsilon_1} \neq F_{\varepsilon_2}$.

Una pregunta importante es determinar que tan grande es la diferencia $F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_2}$. Por tanto, necesitamos una forma de medirla, para ello introducimos la siguiente definición tomada de [62, pág. 266].

Sea $(U, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable con el álgebra de Borel usual $\mathcal{B}(U)$ y sea $\mathcal{L}(U)$ el espacio vectorial de las variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) tal que $X(\omega) \in U$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definición 1.28 (Métrica de variación total) Para $X_1, X_2 \in \mathcal{L}(U)$ definimos

$$\begin{aligned} \sigma(X_1, X_2) &:= \sup_{A \in \mathcal{B}(U)} |P[X_1 \in A] - P[X_2 \in A]| \\ &= \sup \{ |E[f(X_1)] - E[f(X_2)]| : f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ es medible y } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \}, \end{aligned}$$

donde d es la métrica discreta.

Ahora definimos la métrica variación total como

$$\begin{aligned} V(X_1, X_2) &:= 2\sigma(X_1, X_2) \\ &= \sup \{ |E[f(X_1)] - E[f(X_2)]| : f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ es medible y } \|f\|_\infty \leq 1 \}. \end{aligned}$$

Si $X_1, X_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, haciendo algunos cálculos, se obtiene $V(X_1, X_2) = \int |dF_{X_1} - dF_{X_2}|$.

La diferencia entre X_{ε_1} y X_{ε_2} puede ser medida con la métrica anterior

$$\begin{aligned} V(X_{\varepsilon_1}, X_{\varepsilon_2}) &:= 2\sigma(X_{\varepsilon_1}, X_{\varepsilon_2}) \\ &= \int |(1 + \varepsilon_1 h)dF - (1 + \varepsilon_2 h)dF| \\ &= |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \int |h|dF \end{aligned}$$

Esto nos motiva a pensar en el siguiente número:

$$\mathcal{D}(F_{\varepsilon_1}, F_{\varepsilon_2}) := \frac{1}{2}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \int |h(u)|dF(u)$$

El número $\mathcal{D}(F_{\varepsilon_1}, F_{\varepsilon_2})$ caracteriza el error que cometemos al elegir dos representantes de la clase $\mathcal{S}(F, h)$. Sean ε_1 y ε_2 tales que $\mathcal{D}(F_{\varepsilon_1}, F_{\varepsilon_2})$ es máximo, esto se logra cuando $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = -1$, o viceversa. Por lo tanto, la máxima distancia, denotada por $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, entre un par de distribuciones de $\mathcal{S}(F, h)$ es:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \max_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \mathcal{D}(F_{\varepsilon_1}, F_{\varepsilon_2}) = \mathcal{D}(F_1, F_{-1}) = \int |h(u)|dF(u).$$

Lo anterior da pie a la siguiente definición:

Definición 1.29 *A cada clase de Stieltjes $\mathcal{S}(F, h)$ se le asocia un índice de disimilitud $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ dado por*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = E[|h(X)|] = \int |h(u)|dF(u).$$

Observación 1.30 $0 \leq \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \leq 1$ y $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = 0$ si y sólo si F es determinada.

A continuación calculamos el valor de índices de disimilitud de algunas variables aleatorias conocidas. Para hacer los cálculos usamos MAPLE.

Sea X una variable aleatoria positiva, absolutamente continua y con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp[-2^{-1}(\ln x)^2], \quad x > 0.$$

En el siguiente capítulo se prueba que X es indeterminada y también que

$$h(x) = \text{sen}(2\pi \ln x), \quad x > 0,$$

es perturbación de f . Para la clase $\mathcal{S}(f, h)$ el índice de disimilitud es $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = 0.436709$.

Ahora consideramos ξ una variable aleatoria positiva, absolutamente continua y con función de densidad

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2x}\right], \quad x > 0.$$

Sea $X = \xi^r$ con $r > 0$ se puede probar que su función de densidad es (ver Observación 2.10)

$$f(x) = \frac{e}{\sqrt{2\pi r}} x^{-\frac{(2r+1)}{2r}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{1/r} + x^{-1/r})\right], \quad x > 0.$$

Consideramos los siguientes casos:

1. Con $r = 3$ se tiene $X = \xi^3$. Así, la función de densidad f y la perturbación h son

$$f(x) = \frac{e}{3\sqrt{2\pi}} x^{-7/6} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{1/3} + x^{-1/3})\right], \quad h(x) = \text{sen} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x^{1/3} + x^{-1/3}) + \frac{\pi}{6} \right].$$

Para la clase de Stieltjes $\mathcal{S}(f, h)$ el índice de disimilitud es $D_{\mathcal{S}} = 0.621414$.

2. Con $r = 4$ se tiene $X = \xi^4$. Así, la función de densidad f y la perturbación h son

$$f(x) = \frac{e}{4\sqrt{2\pi}} x^{-9/8} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{1/4} + x^{-1/4})\right], \quad h(x) = \text{sen} \left[\frac{\sqrt{1}}{2}(x^{1/4} + x^{-1/4}) + \frac{\pi}{8} \right].$$

Para la clase de Stieltjes $\mathcal{S}(f, h)$ el índice de disimilitud es $D_{\mathcal{S}} = 0.555248$.

3. Con $r = 6$ se tiene $X = \xi^6$. Así, la función de densidad f y la perturbación h son

$$f(x) = \frac{e}{6\sqrt{2\pi}} x^{-13/12} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^{1/6} + x^{-1/6})\right], \quad h(x) = \text{sen} \left[\frac{\sqrt{3}}{6}(x^{1/6} + x^{-1/6}) + \frac{\pi}{12} \right].$$

Para la clase de Stieltjes $\mathcal{S}(f, h)$ el índice de disimilitud es $D_{\mathcal{S}} = 0.255875$.

CAPÍTULO 2

Integración compleja y clases de Stieltjes

En esta sección se utiliza la integración compleja para obtener, de manera sistemática, clases de funciones con sucesión de momentos nula. Como consecuencia se construyen clases de Stieltjes cuyos centros son densidades bastante populares en probabilidad.

Recordamos que una región en el plano complejo \mathbb{C} es un conjunto abierto y conexo, además $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ denota el grupo multiplicativo en \mathbb{C} . Decimos que una función g es analítica en $S \subset \mathbb{C}$, si g es una función analítica en alguna región que contiene a S .

Para $\alpha \in (0, 1)$ introducimos el conjunto

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \pi\alpha\}.$$

2.1 Teorema principal

En esta sección presentamos un resultado que nos permite construir perturbaciones de funciones de densidad, por lo tanto podemos construir clases de Stieltjes. Stoyanov y Ostroska obtienen un resultado, ver [78, Lema 3.1], que les permite construir clases de Stieltjes cuyo centro es una pontecia de la distribución gaussiana inversa. El siguiente lema se debe a López-García, además es nuevo y generaliza la proposición de Stoyanov y Ostroska, ver [51].

Lema 2.1 Sean $\alpha \in (0, 1)$, $A, \varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$. Si g es analítica en S_α y satisface

$$t^{\mu-1} |g(t)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+), \quad (2.1)$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(Ae^{it})| dt = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(\varepsilon e^{it})| dt = 0, \quad (2.3)$$

entonces $t^{\mu-1} |g(te^{i\pi\alpha})| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, y

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} g(te^{i\pi\alpha}) dt = e^{-i\pi\alpha\mu} \int_0^\infty t^{\mu-1} g(t) dt. \quad (2.4)$$

Demostración. Tomamos $0 < \varepsilon < A < \infty$, por el teorema de Cauchy tenemos

$$\oint_{C_{\varepsilon,A}} z^{\mu-1} g(z) dz = 0,$$

donde el contorno $C_{\varepsilon,A}$ consiste del segmento que va de ε a A , el arco del círculo $z = Ae^{it}$ de $t = 0$ a $t = \pi\alpha$, el segmento de $Ae^{i\pi\alpha}$ a $\varepsilon e^{i\pi\alpha}$, y el arco del círculo $z = \varepsilon e^{i(\pi\alpha-t)}$ de $t = 0$ a $t = \pi\alpha$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^A t^{\mu-1} g(t) dt + i \int_0^{\pi\alpha} (Ae^{it})^\mu g(Ae^{it}) dt - e^{i\pi\alpha} \int_{-A}^{-\varepsilon} (-te^{i\pi\alpha})^{\mu-1} g(-te^{i\pi\alpha}) dt \\ - i \int_0^{\pi\alpha} (\varepsilon e^{i(\pi\alpha-t)})^\mu g(\varepsilon e^{i(\pi\alpha-t)}) dt = 0. \end{aligned}$$

El resultado se sigue de la condiciones (2.1), (2.2) y (2.3). \square

El lema anterior implica el siguiente resultado:

Teorema 2.2 Sea $\alpha \in (0, 1)$. Si g es una función analítica en S_α que cumple las condiciones (2.2), (2.3) con $\mu = \frac{n+1}{\alpha}$, y $x^n |g(x^\alpha)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ para todo $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), entonces

$$\mathfrak{S} \left\{ g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha) \right\} \in \mathcal{M}_0(\mathcal{M}_0^s),$$

siempre que $g(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x > 0$.

Demostración. Haciendo $\mu = \frac{n+1}{\alpha}$, $t = x^\alpha$, $t^{-1} dt = \alpha x^{-1} dx$ en (2.4) obtenemos que

$$\int_0^\infty x^n g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha) dx = (-1)^{n+1} \int_0^\infty x^n g(x^\alpha) dx,$$

para todo $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$). \square

En la siguiente sección vemos que hay bastantes densidades que satisfacen las condiciones del teorema anterior.

2.2 Ejemplos

Antes presentamos algunos resultados bastante básicos.

Observación 2.3 Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^*$, entonces

$$|e^z| = e^{\Re z}, \quad |z^\lambda| = |z|^{\Re \lambda} \exp(-(\Im \lambda) \arg z). \quad (2.5)$$

Demostración.

1. Sabemos que la serie $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} y que la función conjugación es continua en \mathbb{C} , por lo tanto $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$. Tenemos

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\Re z}.$$

2. Por definición $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ para z en alguna rama del logaritmo. De la parte previa se tiene

$$|z^\lambda| = e^{\Re(\lambda \log z)}.$$

Al escribir $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\log z = \ln |z| + i \arg z$, obtenemos

$$\Re(\lambda \log z) = \lambda_1 \ln |z| - \lambda_2 \arg z,$$

de donde se sigue el resultado. □

Proposición 2.4 Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \exp\{-(\ln x)^2\} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{\lambda^2}{4}}. \quad (2.6)$$

Demostración. Hacemos el cambio de variable $y = \ln x$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \exp\{-(\ln x)^2\} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda y - y^2\} dy \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)^2\right\} dy = \sqrt{\pi} e^{\frac{\lambda^2}{4}}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.5 Para cualquier $\delta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta \exp\{-(\ln x)^2\} = 0, \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \searrow 0} x^\delta \exp\{-(\ln x)^2\} = 0. \quad (2.8)$$

Demostración. Si $\delta \leq 0$ se sigue que $x^\delta \exp\{-(\ln x)^2\} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Si $\delta > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} x^\delta \exp\{-(\ln x)^2\} &= \exp\{\delta \ln x\} \exp\{-(\ln x)^2\} \\ &= \exp\{-\ln x(\ln x - \delta)\} \leq x^{-\delta}, \end{aligned}$$

si $\ln x \geq 2\delta$. Así

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta \exp\{-(\ln x)^2\} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\delta} = 0.$$

Para la segunda parte usamos (2.7) con x^{-1} en vez de x . □

Finalmente tenemos preparado el terreno para presentar nuestro primer ejemplo.

Ejemplo 2.6 La función $g(z) = z^\beta e^{-(\ln z)^2}$ es analítica en S_α para todo $\alpha \in (0, 1)$ y $g(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$. Afirmamos que g cumple las condiciones del Teorema 2.2; por (2.6)

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} |g(t)| dt = \int_0^\infty t^{\mu+\beta-1} \exp\{-(\ln t)^2\} dt < \infty,$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} A^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(Ae^{it})| dt &= A^\mu \int_0^{\pi\alpha} |A^\beta e^{it\beta} e^{-(\ln Ae^{it})^2}| dt \\ &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} \exp\{\Re\{-(\ln(Ae^{it}))^2\}\} dt \\ &= A^{\mu+\beta} e^{-(\ln A)^2} \int_0^{\pi\alpha} e^{t^2} dt. \end{aligned}$$

Usando (2.7) se sigue que g satisface (2.2) para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

De manera similar

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(\varepsilon e^{it})| dt = \int_0^{\pi\alpha} e^{t^2} dt \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\mu+\beta} e^{-(\ln \varepsilon)^2} = 0,$$

del Teorema 2.2 se sigue que $\Im\{g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha)\} \in \mathcal{M}_0^s$.

Calculando obtenemos

$$\begin{aligned} \Im(g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha)) &= \Im(e^{i\pi\alpha\beta} x^{\alpha\beta} \exp\{-(\alpha \ln x + i\pi\alpha)^2\}) \\ &= x^{\alpha\beta} \exp\{-\alpha^2(\ln x)^2 + (\pi\alpha)^2\} \Im\{e^{i\pi(\alpha\beta - 2\alpha^2 \ln x)}\} \\ &= x^{\alpha\beta} e^{(\pi\alpha)^2 - \alpha^2(\ln x)^2} \operatorname{sen}(\pi\alpha\beta - 2\pi\alpha^2 \ln x). \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha^2 = 1/(2\sigma^2)$ se tiene que

$$x^{\beta/(\sqrt{2}\sigma)} \exp\left[-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\beta}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\pi \ln x}{\sigma^2}\right) \in \mathcal{M}_0^s$$

para todo $\sigma > 1/\sqrt{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Un cálculo directo (como en la obtención de (2.6)) muestra que lo anterior es válido para todo $\sigma > 0$. En particular, cuando $\beta = -\sqrt{2}\sigma$ se tiene

$$x^{-1} \exp \left[-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \ln x}{\sigma^2} \right) \in \mathcal{M}_0^s, \quad (2.9)$$

es decir $h(x) = \operatorname{sen}(\pi\sigma^{-2} \ln x)$ es una perturbación de la densidad $f(x) = \frac{x^{-1}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right)$ para todo $\sigma > 0$.

A continuación vemos resultados que se obtienen de manera similar al anterior.

Ejemplo 2.7 Sean α, λ, ρ números positivos, $\beta \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha < 1$, $\alpha\lambda < \frac{1}{2}$ y $\alpha\beta > -1$. La función $g(z) = z^\beta e^{-\rho z^\lambda}$ es analítica en S_α para todo $\alpha \in (0, 1)$ y satisface las condiciones del Teorema 2.2:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n |x^{\alpha\beta} e^{-\rho x^{\alpha\lambda}}| dx &= \frac{1}{\rho\lambda\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\rho}\right)^{\frac{n+\alpha\beta+1}{\lambda\alpha}-1} \exp\{-u\} du \\ &= \frac{\rho^{-(n+\alpha\beta+1)/(\lambda\alpha)}}{\lambda\alpha} \Gamma\left(\frac{n+\alpha\beta+1}{\lambda\alpha}\right), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Por otro lado, para todo $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} A^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(Ae^{it})| dt &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} |e^{-\rho A^\lambda e^{it\lambda}}| dt \\ &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} \exp\{\Re\{-\rho A^\lambda e^{it\lambda}\}\} dt \\ &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} \exp\{-\rho A^\lambda \cos(t\lambda)\} dt \\ &\leq \pi\alpha A^{\mu+\beta} \exp\{-\rho A^\lambda \cos(\pi\alpha\lambda)\}. \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que la función coseno es decreciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $0 < \alpha\lambda < \frac{1}{2}$. Claramente (ver (2.12))

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A^{\mu+\beta} \exp\{-\rho A^\lambda \cos(\pi\alpha\lambda)\} = 0,$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$, de donde sigue que g satisface (2.2). De manera similar tenemos que

$$\varepsilon^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(\varepsilon^{it})| dt \leq \pi\alpha \varepsilon^{\mu+\beta} \exp\{-\rho \varepsilon^\lambda \cos(\pi\alpha\lambda)\}.$$

Como antes, se sigue que g cumple (2.3) si $\mu + \beta > 0$. Del Teorema 2.2 se sigue que $\mathfrak{S}\{g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha)\} \in \mathcal{M}_0$. Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} g(e^{i\pi\alpha} x^\alpha) &= x^{\alpha\beta} e^{i\pi\alpha\beta} \exp\{-\rho x^{\alpha\lambda} e^{i\pi\alpha\lambda}\} \\ &= x^{\alpha\beta} \exp\{-\rho x^{\alpha\lambda} \cos(\pi\alpha\lambda)\} [\cos(\pi\alpha\beta - \rho x^{\alpha\lambda} \operatorname{sen}(\pi\alpha\lambda)) \\ &\quad + i \operatorname{sen}(\pi\alpha\beta - \rho x^{\alpha\lambda} \operatorname{sen}(\pi\alpha\lambda))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x^{\alpha\beta} \exp\{-\rho x^{\alpha\lambda} \cos(\pi\alpha\lambda)\} \operatorname{sen}(\pi\alpha\beta - \rho x^{\alpha\lambda} \operatorname{sen}(\pi\alpha\lambda)) \in \mathcal{M}_0. \quad (2.10)$$

En particular, consideramos $a, b > 0$ y $0 < c < \frac{1}{2}$, poniendo $\lambda = \frac{c}{\alpha}$, $\beta = \frac{a-1}{\alpha}$, $\rho = \frac{b}{\cos[\pi\alpha\lambda]}$, se obtiene

$$x^{a-1} \operatorname{sen}(\pi a - bx^c \tan[\pi c]) \exp(-bx^c) \in \mathcal{M}_0. \quad (2.11)$$

Así que la función $h(x) = \operatorname{sen}(\pi a - bx^c \tan[\pi c])$ es una perturbación de la densidad $f(x) = c^{-1} b^{-a/c} \Gamma(a/c) x^{a-1} \exp(-bx^c)$.

Proposición 2.8

$$e^{-x} \leq s^s x^{-s} \quad \text{para todo } s, x > 0. \quad (2.12)$$

Demostración. Si $x > 0$ entonces $x \leq e^x$, por lo tanto $\frac{x}{s} \leq e^{x/s}$ cuando $x, s > 0$. \square

Ejemplo 2.9 Sean $\alpha, \lambda, \rho_1, \rho_2 > 0$, con $\alpha < 1$, $\alpha\lambda < \frac{1}{2}$ y $\beta \in \mathbb{R}$. La función $g(z) = z^\beta e^{-\rho_1 z^\lambda - \rho_2 z^{-\lambda}}$ es analítica en S_α . Afirmamos que $x^n |g(x^\alpha)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n |g(x^\alpha)| dx &= \int_0^1 x^{n+\alpha\beta} \exp\{-\rho_1 x^{\alpha\lambda}\} \exp\{-\rho_2 x^{-\alpha\lambda}\} dx \\ &+ \int_1^\infty x^{n+\alpha\beta} \exp\{-\rho_1 x^{\alpha\lambda}\} \exp\{-\rho_2 x^{-\alpha\lambda}\} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{n+\alpha\beta} \exp\{-\rho_2 x^{-\alpha\lambda}\} + \int_1^\infty x^{n+\alpha\beta} \exp\{-\rho_1 x^{\alpha\lambda}\} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{n+\alpha\beta} s^s \rho_2^{-s} x^{\alpha\lambda s} dx + \int_1^\infty x^{n+\alpha\beta} s^s \rho_1^{-s} x^{-\alpha\lambda s} dx < \infty, \end{aligned}$$

eligiendo $s > 0$ lo suficientemente grande.

Por otra parte, para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} A^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(Ae^{it})| dt &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} \exp\{\Re\{-\rho_1 A^\lambda e^{it\lambda} - \rho_2 A^{-\lambda} e^{-it\lambda}\}\} dt \\ &= A^{\mu+\beta} \int_0^{\pi\alpha} \exp\{-(\rho_1 A^\lambda + \rho_2 A^{-\lambda}) \cos(t\lambda)\} dt \\ &\leq A^{\mu+\beta} (\pi\alpha) \exp\{-(\rho_1 A^\lambda + \rho_2 A^{-\lambda}) \cos(\pi\alpha\lambda)\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $A \rightarrow \infty$ por (2.12), por lo tanto se cumple (2.2). De manera similar tenemos

$$\varepsilon^\mu \int_0^{\pi\alpha} |g(\varepsilon^{it})| dt \leq \varepsilon^{\mu+\beta} (\pi\alpha) \exp\{-(\rho_1 \varepsilon^\lambda + \rho_2 \varepsilon^{-\lambda}) \cos(\pi\alpha\lambda)\} \rightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por (2.12), por lo tanto se cumple (2.3).

Por el Teorema 2.2 tenemos $\mathfrak{S}\{g(e^{i\pi\alpha}x^\alpha)\} \in \mathcal{M}_0^s$. Calculando obtenemos

$$\begin{aligned} g(e^{i\pi\alpha}x^\alpha) &= x^{\alpha\beta} e^{i\pi\alpha\beta} e^{-\rho_1 e^{i\pi\alpha\lambda} x^{\alpha\lambda} - \rho_2 e^{-i\pi\alpha\lambda} x^{-\alpha\lambda}} \\ &= x^{\alpha\beta} \exp\{-[\rho_1 x^{\alpha\lambda} + \rho_2 x^{-\alpha\lambda}] \cos(\pi\alpha\lambda)\} \\ &\quad \times [\cos(\pi\alpha\beta + (\rho_2 x^{-\alpha\lambda} - \rho_1 x^{\alpha\lambda}) \operatorname{sen}[\pi\alpha\lambda]) \\ &\quad + i \operatorname{sen}(\pi\alpha\beta + (\rho_2 x^{-\alpha\lambda} - \rho_1 x^{\alpha\lambda}) \operatorname{sen}[\pi\alpha\lambda])]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &x^{\alpha\beta} \operatorname{sen}\left\{\pi\alpha\beta + (\rho_2 x^{-\alpha\lambda} - \rho_1 x^{\alpha\lambda}) \operatorname{sen}[\pi\alpha\lambda]\right\} \\ &\times \exp\left\{-\left(\rho_1 x^{\alpha\lambda} + \rho_2 x^{-\alpha\lambda}\right) \cos[\pi\alpha\lambda]\right\} \in \mathcal{M}_0^s. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En particular, consideramos $b_1, b_2 > 0$, $0 < c < 1/2$ y $a \in \mathbb{R}$, poniendo $\lambda = c/\alpha$, $\beta = (a-1)/\alpha$, $\rho_i = b_i/\cos[\pi\alpha\lambda]$, $i = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} &x^{a-1} \operatorname{sen}\left\{\pi a + (b_2 x^{-c} - b_1 x^c) \tan[\pi c]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\left(b_1 x^c + b_2 x^{-c}\right)\right\} \in \mathcal{M}_0^s. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Así que $h(x) = \operatorname{sen}\left\{\pi a + (b_2 x^{-c} - b_1 x^c) \tan[\pi c]\right\}$ es una perturbación de la densidad $f(x) = C \exp\left\{-\left(b_1 x^c + b_2 x^{-c}\right)\right\}$, donde $C^{-1} = \int_0^\infty \exp\left\{-\left(b_1 x^c + b_2 x^{-c}\right)\right\} dx$.

2.3 Distribución log-normal

En [73] Stieltjes fue el primero que dio un ejemplo de una distribución indeterminada. Él mostró que la distribución log-normal con función de densidad con soporte en \mathbb{R}^+ dada por

$$d_\sigma(x) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} x^{-1} \exp\left(-2^{-1}\sigma^{-2}(\ln x)^2\right), \quad \sigma > 0,$$

junto con las densidades con $\varepsilon \in [-1, 1]$

$$d_\sigma(x) \left(1 + \varepsilon \operatorname{sen}\left(2\pi\sigma^{-2} \ln x\right)\right) \geq 0,$$

tienen la sucesión de momentos $\left(e^{n^2\sigma^2/2}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$. Por (2.9) se deduce que $h(x) = \operatorname{sen}(\pi\sigma^{-2} \ln x)$ es una perturbación de la densidad $d_\sigma(x)$ para cualquier $\sigma > 0$. En [37, Sección 1] Heyde demostró que $h(x) = \operatorname{sen}(2\pi n\sigma^{-2} \ln x)$, $|n| \geq 1$, es una perturbación de d_σ .

Observación 2.10 Si X es una variable aleatoria absolutamente continua y positiva con función de densidad f definida sobre \mathbf{R}^+ , entonces

$$\frac{1}{r}x^{-1+1/r}f\left(x^{1/r}\right), \quad x > 0,$$

es la función de densidad de la correspondiente variable aleatoria X^r , $r > 0$.

2.4 Distribución gamma generalizada

Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución gamma generalizada con parámetros positivos a, b, c , denotado por $X \sim GG(a, b, c)$, si X es positiva, absolutamente continua y tiene la función de densidad

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(x|a, b, c) = L^{-1}x^{a-1} \exp(-bx^c), \quad x > 0,$$

donde $L = c^{-1}b^{-a/c}\Gamma(a/c)$.

Observación 2.11 Por (2.11) tenemos que $h(x) = \sin(\pi a - bx^c \tan[\pi c])$, $0 < c < 1/2$, es una perturbación de \mathcal{G} , por lo tanto la distribución gamma generalizada $\mathcal{L}(X)$ es indeterminada si $c < 1/2$.

Asimismo podemos considerar las potencias positivas de $X \sim GG(a, b, c)$. Por la Observación 2.10, tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{r}L^{-1}x^{\frac{a}{r}-1} \exp(-bx^{c/r}),$$

es la función de densidad de X^r , i.e $X^r \sim GG(a/r, b, c/r)$, $r > 0$.

Proposición 2.12 Sea X una variable aleatoria con $X \sim GG(a, b, c)$. Entonces $E[X^r] < \infty$ para todo $r > 0$.

Demostración. Haciendo el cambio de variable $y = bx^c$, $y^{-1}dy = cx^{-1}dx$ tenemos

$$\begin{aligned} E[X^r] &= L^{-1} \int_0^\infty x^{r+a-1} \exp(-bx^c) dx \\ &= L^{-1}b^{-(r+a)/c} \int_0^\infty y^{\frac{r+a}{c}-1} \exp(-y) dy = L^{-1}b^{-(r+a)/c} \Gamma\left(\frac{r+a}{c}\right). \end{aligned}$$

□

De la Observación 2.11 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.13 Sea X una variable aleatoria con $X \sim GG(a, b, c)$, si $c/r < 1/2$ entonces $\mathcal{L}(X^r)$ es indeterminada.

De hecho, en [60] se muestra que $\mathcal{L}(X^r)$ es indeterminada si y sólo si $c/r < 1/2$, ahí se utiliza el *criterio de Krein* para ver que $\mathcal{L}(X^r)$ es indeterminada para $c/r < 1/2$.

2.4.1 Potencias de la distribución normal

Sea $\sigma \in \mathbb{R}$ fija y η una variable aleatoria positiva, absolutamente continua y con función de densidad

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\chi_{(0,\infty)}(x) \exp\left(-2^{-1}\sigma^{-2}x^2\right) = \mathcal{G}(x|1, 2^{-1}\sigma^{-2}, 2),$$

por lo tanto para $r > 0$ tenemos

$$\mathcal{L}(\eta^r) \sim \mathcal{G}\left(x|r^{-1}, 2^{-1}\sigma^{-2}, 2r^{-1}\right).$$

De la Observación 2.11 se tiene que para $r > 4$ la función $\sin\left(\pi r^{-1} - 2^{-1}\sigma^{-2}x^{2r^{-1}} \tan[2\pi r^{-1}]\right)$ es una perturbación para la densidad de $\mathcal{L}(\eta^r)$. Entonces $\mathcal{L}(\eta^r)$ es indeterminada si $r > 4$. De hecho, en [10, Proposición 2.2] Berg fue el primero en demostrar $\mathcal{L}(\eta^r)$ es indeterminada si y sólo si $r > 4$. En [76, Proposición 2.2] hay otra prueba basada en el *criterio de Krein*.

2.4.2 Potencias de la distribución exponencial

Sea $\sigma > 0$ fija y ξ una variable aleatoria positiva, absolutamente continua y con función de densidad

$$\chi_{(0,\infty)}(x)\sigma \exp(-\sigma x) = \mathcal{G}(x|1, \sigma, 1),$$

de donde se sigue que para $r > 0$

$$\mathcal{L}(\xi^r) \sim \mathcal{G}\left(x|r^{-1}, \sigma, r^{-1}\right).$$

De la Observación 2.11 se tiene que para $r > 2$ la función $\sin\left(\pi r^{-1} - \sigma x^{r^{-1}} \tan[\pi r^{-1}]\right)$ es una perturbación para la densidad de $\mathcal{L}(\xi^r)$. Entonces $\mathcal{L}(\xi^r)$ es indeterminada si $r > 2$. De hecho, esto fue probado en [60] utilizando los criterios de *Krein* y *Lin*.

2.5 Potencias de la distribución gaussiana inversa generalizada

Sea Y una variable aleatoria positiva, absolutamente continua y con función de densidad

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x|a, b_1, b_2, c) = C\chi_{(0,\infty)}x^{a-1} \exp\{-(b_1x^c + b_2x^{-c})\}$$

donde $b_1, b_2 > 0$, $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ y $C^{-1} = \int_0^\infty x^{a-1} \exp\{-(b_1x^c + b_2x^{-c})\}dx$.

Observación 2.14 Por (2.14) tenemos que

$$h(x) = \text{sen} \left\{ \pi a + (b_2 x^{-c} - b_1 x^c) \tan [\pi c] \right\}$$

con $0 < |c| < 1/2$, es una perturbación de \mathcal{I} , por lo tanto la correspondiente distribución $\mathcal{L}(Y)$ es indeterminada si $0 < |c| < 1/2$.

Sea η una variable aleatoria positiva absolutamente continua con función de densidad $\mathcal{I}(x|a, b_1, b_2, 1)$, $b_1, b_2 > 0$, $a \in \mathbb{R}$, lo que se denota por $\eta \sim GIG(a, b_1, b_2)$. Por las Observaciones 2.10 y 2.14 se tiene que para $r > 0$, $\mathcal{L}(\eta^r) \sim \mathcal{I}(x|a/r, b_1, b_2, 1/r)$, la función $\text{sen} \left\{ \pi a/r + (b_2 x^{-1/r} - b_1 x^{1/r}) \tan [\pi/r] \right\}$ es una perturbación de la densidad $\mathcal{L}(\eta^r)$ cuando $r > 2$. Entonces $\mathcal{L}(\eta^r)$ es indeterminada si $|r| > 2$. De hecho, utilizando técnicas de Krein-Lin, en [75] se demuestra que $\mathcal{L}(\eta^r)$ es indeterminada si y sólo si $|r| > 2$.

2.6 Potencias de la distribución logística

Decimos que una variable aleatoria η tiene distribución logística estándar si tiene la siguiente función de densidad

$$f_0(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Además η es determinada, porque η tiene función generadora de momentos, ver [9, pág. 4]. Consideramos la variable aleatoria $Y = |\eta|^r$ con $r > 0$, por la Observación 2.10 se tiene que la función de densidad de Y es

$$f(x) = \frac{2}{r} x^{-(1-1/r)} \frac{e^{-x^{1/r}}}{(1 + e^{-x^{1/r}})^2}, \quad x > 0. \quad (2.16)$$

El siguiente resultado muestra que Y tiene sucesión de momentos finita.

Proposición 2.15 Sea Y como arriba. Entonces $E[Y^n] < \infty$ para todo entero positivo n .

Demostración. Haciendo un cálculo sencillo se tiene

$$\begin{aligned} E[Y^n] &= \frac{2}{r} \int_0^\infty y^{n-1+1/r} e^{-y^{1/r}} (1 + e^{-y^{1/r}})^{-2} dy \\ &\leq \frac{2}{r} \int_0^\infty y^{n-1+1/r} e^{-y^{1/r}} dy = 2\Gamma(2nr + 1), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. □

En [39, Teorema 2.1], Lin y Huang mostraron que Y es determinada para $0 < r \leq 2$ y es indeterminada para $r > 2$.

Observación 2.16 *Consideremos la siguiente función*

$$\tilde{h}(x) = \left(1 + e^{-x^{1/r}}\right)^2 \operatorname{sen}[x^\beta \tan \pi\beta] \exp \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right) \ln x + x^{1/r} - x^\beta \right], \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.17)$$

Entonces para $r > 2$ y $\beta \in (1/r, 1/2)$, la función \tilde{h} es continua y acotada. Con $\tilde{c} = \sup_x |\tilde{h}(x)|$, por (2.11) la función $h(x) = \tilde{h}(x)/\tilde{c}$, $x \in \mathbb{R}^+$ es una perturbación de f .

CAPÍTULO 3

Condición de Krein-Lin y Clases de Stieltjes

En 1944 M. G. Krein propuso una condición para establecer la no unicidad en un problema de momentos cuando las distribuciones son absolutamente continuas. Esta condición se expresa en términos de la integral logarítmica normalizada de la densidad y existen un par de versiones que dependen del intervalo de integración.

Existen otra formas de la condición de Krein; basado en un trabajo hecho por H. Dym y H. P. McKean, G. D. Lin establece la unicidad de una solución para un problema de momentos. En esta sección presentamos resultados recientes, uno de ellos se debe a López-García, ver [52], además damos pruebas de resultados previamente conocidos y relacionados con otros temas.

3.1 Criterio de Carleman

Un criterio ampliamente utilizado para verificar la unicidad en un problema de momentos es el *criterio de Carleman*, ver [20, pág. 227] o [74, pág. 100]. Si F es una función de distribución con sucesión de momentos finita $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$, ponemos

$$C := C_F = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{-1/2k} & \text{si } \text{sop}(F) = \mathbb{R}^+, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{2k}^{-1/2k} & \text{si } \text{sop}(F) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

La constante C es conocida como la *cantidad de Carleman*. En ambos casos, una condición suficiente para que F sea determinada es que $C = \infty$. A esto se le llama el *criterio de Carleman*. Una consecuencia inmediata es que si la distribución F es indeterminada, entonces $C < \infty$. Sin embargo, hay distribuciones determinadas para las cuales $C < \infty$, ver [38] o [74, pág. 113].

Si además la función de distribución F es absolutamente continua con función de densidad $f > 0$, existe una condición adicional a $C < \infty$ que implica que f es indeterminada, ver [58, Sección 3].

Ahora bien, existe una condición suficiente, relativamente fácil de verificar, que establece que una función de densidad positiva $f \in \mathcal{M}$ es indeterminada. Esta condición consiste en verificar que la integral logarítmica (3.1) de f es finita y se le conoce como criterio de Krein.

3.2 El criterio de Krein-Lin y el problema de momentos de Hamburger

Teorema 3.1 *Sea f una función de densidad positiva definida en \mathbb{R} con sucesión de momentos finita tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f(x)}{1+x^2} dx < \infty, \quad (3.1)$$

entonces f es indeterminada.

Este resultado se puede obtener de otros más generales que aparecen en [43]. La prueba y varios comentarios están disponibles en [1]. Existen diferentes pruebas en [11, Teorema 4.1], [45, Teorema 1.1], [71, Corolario 2.1] que están basadas en ideas diferentes. Lin usa resultados fundamentales de los espacios de Hardy H^1 para hallar una función de densidad con la misma sucesión de momentos que f . En el Teorema 3.6 reescribimos tal demostración y exhibimos clases de Stieltjes con centro f .

Por otro lado, existen densidades positivas que son indeterminadas y cuya integral logarítmica es infinita, ver [74, pág. 114]. El *criterio de Lin* establece condiciones adicionales para que junto con la divergencia de la integral logarítmica de f se concluya que f es determinada:

Teorema 3.2 *Sea f una función de densidad definida en \mathbb{R} con sucesión de momentos finita tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f(x)}{1+x^2} dx = \infty,$$

supongamos además que existe $x_0 \geq 0$ tal que f es par, decreciente, diferenciable en (x_0, ∞) y

$$\frac{-xf'(x)}{f(x)} \nearrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Entonces f es determinada.

La prueba se puede ver en [45, Teorema 2.2] y consiste en mostrar que la cantidad de Carleman C_f es infinita, de donde el resultado se sigue por el criterio de Carleman.

Ejemplo 3.3 Para $\alpha > 0$ definimos la densidad $f(x) = C_\alpha \exp(-|x|^\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, donde $C_\alpha^{-1} = \frac{2}{\alpha} \Gamma(\frac{1}{\alpha})$. Los momentos impares de f son cero y un cambio de variable muestra que

$$s_{2n}(f) = C_\alpha \frac{2}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right) < \infty,$$

para todo $n \geq 0$. Si $0 < \alpha < 1$ entonces f satisface (3.1) por lo que es indeterminada. Por otra parte si $\alpha \geq 1$ la sucesión de momentos de f satisface $C_f = \infty$ y por el criterio de Carleman f es determinada.

3.3 El criterio de Krein-Lin y el problema de momentos de Stieltjes

Existen resultados correspondientes en el contexto del problema de momentos de Stieltjes, en este caso se supone que la densidad positiva f está definida en \mathbb{R}^+ .

Teorema 3.4 Sea f una función de densidad positiva definida en \mathbb{R}^+ y con sucesión de momentos finita tal que

$$\int_0^\infty \frac{-\log f(x^2)}{1+x^2} dx < \infty. \quad (3.2)$$

Entonces f es indeterminada.

La prueba está basada en un procedimiento de simetrización y se encuentra en [71, Corolario 2.1]. Asimismo, el siguiente resultado se puede ver en [45, Teorema 3.3].

Teorema 3.5 Sea f una función de densidad positiva definida en \mathbb{R}^+ y con sucesión de momentos finita tal que

$$\int_0^\infty \frac{-\log f(x^2)}{1+x^2} dx = \infty,$$

supongamos además que existe $x_0 \geq 0$ tal que f es decreciente, diferenciable en (x_0, ∞) y

$$\frac{-xf'(x)}{f(x)} \nearrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Entonces f es determinada.

3.4 Teorema principal

En esta sección se relaciona el *criterio de Krein* con las clases de Stieltjes. Acerca de este criterio Stoyanov afirma en [78, pág. 167] que “*es un resultado cualitativo, no hay indicio de cómo escribir otras distribuciones con los mismos momentos que f* ”. El siguiente resultado es nuevo y muestra que esto no es así; se debe a López-García, ver [52]. La demostración del siguiente teorema utiliza algunas definiciones y resultados del análisis complejo; estas herramientas se pueden consultar en el Apéndice C.

Teorema 3.6 *Sea f una función de densidad positiva en \mathbb{R} con sucesión de momentos finita. Si f cumple (3.1), entonces $\mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \cos v(x, t))$ y $\mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \sin v(x, t))$ son clases de Stieltjes, donde $v(z)$ es la armónica conjugada de $P_t * \log f(x)$ en \mathbb{R}_+^2 .*

Demostración. La condición (3.1) es equivalente a que $\log f \in \mathcal{L}^1(dt/(1+t^2))$, por lo cual podemos considerar la extensión armónica de $\log f$ al plano superior \mathbb{R}_+^2 dada por

$$u(x, t) = (P_t * \log f)(x)$$

donde

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2} = \Re \left(\frac{i}{\pi z} \right)$$

es el núcleo de Poisson, y $z = (x, t) \in \mathbb{R}_+^2$. Por el Teorema C.1 se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \log f(x), \text{ c.d. } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Sea $v(z)$ la función armónica conjugada de $u(z)$ en \mathbb{R}_+^2 . Dado que $u + iv$ es una función analítica en \mathbb{R}_+^2 , resulta que

$$g(z) = \exp(u(z) + iv(z))$$

es una función analítica en \mathbb{R}_+^2 . Usando la desigualdad de Jensen, obtenemos

$$|g(z)| = \exp u(z) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} P_t(x - y) f(y) dy,$$

por el Teorema de Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \text{ para todo } t > 0.$$

Por definición, la función g pertenece al espacio de Hardy analítico $H^1(\mathbb{R}_+^2)$. Por otro lado, el Teorema C.2 implica que existe una función $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ de tal manera que

$$\tilde{g}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} g(x, t), \text{ c.d. } x \in \mathbb{R}.$$

De (3.3) tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} |g(x, t)| = f(x), \text{ c.d. } x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto \tilde{g} es una función no idénticamente cero tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp(iv(x, t)) = \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)}, \text{ c.d. } x \in \mathbb{R},$$

de donde se sigue

$$\tilde{g}(x) = f(x) \lim_{t \rightarrow 0} \exp(iv(x, t)), \text{ c.d. } x \in \mathbb{R}.$$

Ahora por el Lema C.3 se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x) e^{itx} dx = 0 \text{ para todo } t \geq 0, \quad (3.4)$$

Por hipótesis f tiene sucesión de momentos finita, así que podemos derivar k veces respecto a t la igualdad en (3.4) para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k \tilde{g}(x) e^{itx} dx = 0 \text{ para todo } t \geq 0, k \geq 0.$$

Haciendo $t = 0$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \tilde{g}(x) dx = 0 \text{ para todo } k \geq 0,$$

es decir, \tilde{g} tiene sucesión de momentos nula y por lo tanto también $\Im \tilde{g}$ y $\Re \tilde{g}$, así que

$$\mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \cos v(x, t)) \text{ y } \mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \sin v(x, t))$$

son clases de Stieltjes.

□

A continuación presentamos el caso cuando la densidad f está definida en \mathbb{R}^+ .

Corolario 3.7 *Sea f una función de densidad positiva definida en \mathbb{R}^+ con sucesión de momentos finita. Si f cumple (3.2) entonces $\mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \cos(v(\sqrt{x}, t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \cos(v(-\sqrt{x}, t)))$ y $\mathcal{S}(f, \lim_{t \rightarrow 0} \sin(v(\sqrt{x}, t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \sin(v(-\sqrt{x}, t)))$ son clases de Stieltjes, donde $v(z)$ es la armónica conjugada de $P_t * f^*(x)$ en \mathbb{R}_+^2 y $f^*(x) = |x|f(x^2)$.*

Demostración. Ponemos $f^*(x) = |x|f(x^2)$ y notamos que f^* es una función de densidad definida en \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x f(x^2) dx = 1.$$

Además la densidad f^* satisface (3.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f^*(x)}{1+x^2} dx = -2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx - 2 \int_0^{\infty} \frac{\log[f(x^2)]}{1+x^2} dx < \infty.$$

De la demostración del teorema anterior se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} |x| f(x^2) \lim_{t \rightarrow 0} \exp(iv(x, t)) dx = 0 \text{ para todo } k \geq 0,$$

donde v es la armónica conjugada en \mathbb{R}_+^2 de $u(x, t) = P_t * f^*(x)$. Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} x^k f(x) \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \exp(iv(\sqrt{x}, t)) + \exp(iv(-\sqrt{x}, t)) \right\} dx = 0, \quad k \geq 0.$$

□

El resultado anterior nos lleva a plantear el siguiente problema abierto.

Problema 1 ¿Las perturbaciones obtenidas en el Teorema 3.6 y Corolario 3.7 son distintas a las obtenidas en el Capítulo 2?

3.5 Funciones de variación regular

Esta sección fue redactada con base a lo escrito en [29]. En la parte restante de este capítulo suponemos que todas las variables aleatorias son positivas, absolutamente continuas y que tienen sucesión de momentos finita.

Definición 3.8 La variable aleatoria X está en la **clase de Lin**, denotado $X \in \mathcal{L}$, si tiene una función de densidad f que es positiva, diferenciable y existe $x_0 \geq 0$ tal que f es decreciente en $[x_0, \infty)$, además

$$L_f(x) := -\frac{xf'(x)}{f(x)} = -x \frac{d}{dx}(\log f(x)) \nearrow \infty \text{ cuando } x_0 < x \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

En [61] Pedersen muestra que el intervalo de integración de (3.1) y (3.2) puede ser reemplazado por $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ y por un intervalo de la forma (a, ∞) para alguna $a > 0$, respectivamente; lo que da pie a considerar la siguiente notación y definición.

Notación 2

1. También denotamos por L_X a la función L_f y denotamos por L_r a la función asociada a L_{X^r} .

2. La integral de Krein de una densidad f la denotamos por

$$K(a) = \int_a^\infty \frac{-\log f(x^2)}{1+x^2} dx, \text{ para un cierto } a > 0.$$

Definición 3.9 Decimos que $X \in \mathcal{K}_c$ ($X \in \mathcal{K}_d$) si su densidad f asociada es positiva sobre (a, ∞) para alguna $a > 0$ y $K(a) < \infty$ ($K(a) = \infty$).

Proposición 3.10 Sea X una variable aleatoria con sucesión de momentos finita.

(i) Si $X \in \mathcal{K}_c$, entonces X es indeterminada.

(ii) Si $X \in \mathcal{L} \cap \mathcal{K}_d$, entonces X es determinada.

Demostración. La parte (i) está en [58, Proposición 3.1], la cual es extendida en [71, Corolario 2.1]. La parte (ii) se debe a [45, Teorema 2.1]. \square

La transformación dada en (3.5) está relacionada con las funciones de variación regular; ver [14, págs. 1-57], [19], [20, págs. 275-289] y [64, págs. 7-26].

Definición 3.11 Sea u una función medible y positiva sobre $[a, \infty)$ para alguna $a \geq 0$. Decimos que v es de **variación regular**, denotado por $u \in \mathcal{VR}(\rho)$ con $\rho \in \mathbb{R}$, si

$$\frac{u(xt)}{u(t)} \rightarrow x^\rho \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ para todo } x > 0.$$

Si $\rho = 0$ escribimos $u \in \mathcal{VS}$.

Los siguientes lemas contienen algunas propiedades de las funciones de variación regular.

Lema 3.12 Sea $u \in \mathcal{VR}(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$.

(a) Existe $\ell \in \mathcal{VS}$ tal que

$$u(x) = x^\rho \ell(x).$$

Además, si u tiene derivada monótona u' , entonces

$$L_u(x) := -\frac{xu'(x)}{u(x)} \rightarrow -\rho, \text{ } x \rightarrow \infty.$$

Si $\rho \neq 0$ entonces

$$u(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{si } \rho > 0, \\ 0 & \text{si } \rho < 0, \end{cases}$$

cuando $x \rightarrow \infty$.

(b) Si $u_i \in \mathcal{VR}(\rho_i)$, $i = 1, 2$, entonces $u_1 + u_2 \in \mathcal{VR}(\max\{\rho_1, \rho_2\})$.

(c) $\log u \in \mathcal{VS}$.

(d) Supongamos que $u_i \in \mathcal{VR}(\rho_i)$, $i = 1, 2$, $u_2 \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $u(x) = u_1(u_2(x))$. Entonces $u \in \mathcal{VR}(\rho_1\rho_2)$.

(e) Si $\ell \in \mathcal{VS}$ y $p < -1$ entonces $\int_0^\infty y^p \ell(y) dy < \infty$.

(f) Sea $\rho > 0$ y $u^{-1}(y) = \inf\{x : u(x) \geq y\}$, $y \geq 0$. Entonces $u^{-1} \in \mathcal{RV}(1/\rho)$.

Demostración.

(a) Haciendo

$$\ell(x) := \frac{u(x)}{x^\rho},$$

tenemos que

$$\frac{\ell(tx)}{\ell(t)} \rightarrow 1 \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

para todo $x > 0$. Si existe u' se sigue que

$$L_u(x) = -\rho - \frac{x\ell'(x)}{\ell(x)}.$$

Del Teorema de Representación y la Observación B.13, ver Apéndice B, se sigue que existe $b > 0$ tal que

$$\ell(x) = c \exp \left\{ \int_b^x s^{-1} \epsilon(s) ds \right\} \text{ para todo } x \geq b,$$

donde $c \in \mathbb{R}^+$ y $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y acotada que cumple $\epsilon(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. Se tiene que $\ell'(x) = x^{-1} \epsilon(x) \ell(x)$ y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\ell'(x)}{\ell(x)} = 0.$$

Para la última parte consideramos $\rho > 0$, por el Teorema de Representación, existe $b > 0$ tal que

$$u(x) = x^\rho \ell(x) = c \exp \left\{ \rho \ln x + \int_b^x s^{-1} \epsilon(s) ds \right\},$$

dado que $\epsilon(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$ elegimos $A > 0$ suficientemente grande tal que $|\epsilon(s)| < \rho/2$ si $s \geq A$. Por lo tanto

$$\rho \ln x + \int_b^x s^{-1} \epsilon(s) ds \geq \rho \ln x - \frac{\rho}{2} \int_A^x s^{-1} ds = \frac{\rho}{2} \ln x + K \rightarrow \infty$$

cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $u(x) \rightarrow \infty$. De manera similar se trata el caso $\rho < 0$.

(b) Haciendo un cálculo sencillo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{u_1(tx) + u_2(tx)}{u_1(t) + u_2(t)} &= \frac{u_1(tx)}{u_1(t)} \left(\frac{u_1(t)}{u_1(t) + u_2(t)} \right) + \frac{u_2(tx)}{u_2(t)} \left(\frac{u_2(t)}{u_1(t) + u_2(t)} \right) \\ &\leq \frac{u_1(tx)}{u_1(t)} + \frac{u_2(tx)}{u_2(t)}. \end{aligned}$$

(c) Consideramos la siguiente la igualdad,

$$\frac{\log u(tx)}{\log u(t)} = \frac{\log \left(\frac{u(tx)}{u(t)} u(t) \right)}{\log u(t)} = \frac{\log (u(tx)/u(t))}{\log u(t)} + 1.$$

Ahora por el Teorema B.11 aplicado a u se sigue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log u(tx)}{\log u(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log (u(tx)/u(t))}{\log u(t)} + 1 = 1.$$

(d) Por el Teorema B.11 aplicado a u_1 y por el hecho de que $u_2 \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_1(u_2(tx))}{u_1(u_2(t))} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_1 \left(\frac{u_2(tx)}{u_2(t)} u_2(t) \right)}{u_1(u_2(t))} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{u_1(yx^{\rho_2})}{u_1(y)} = x^{\rho_1 \rho_2}. \end{aligned}$$

Las pruebas de los incisos (e) y (f) se pueden consultar en [14, págs. 23 y 27] y [64, págs. 17 y 23], respectivamente. \square

Si el lector desea profundizar sobre las funciones de variación regular puede consultar las referencias mencionadas.

Dada $r > 0$, podemos hablar de la r -ésima potencia X^r de una variable aleatoria positiva X . En los siguientes resultados aparecen condiciones para que la potencia de una variable aleatoria pertenezca a las clases mencionadas.

Lema 3.13 *Sea $r > 0$ y X una variable aleatoria con densidad f . Si $X \in \mathcal{L}$, entonces $X^r \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Utilizando la Observación 2.10 y haciendo un cálculo sencillo, se tiene

$$L_r(x) = -x \left(\frac{1/r - 1}{x} + \frac{f'(x^{1/r})}{f(x^{1/r})} \cdot \frac{1}{r} x^{(1/r)-1} \right) = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} L_f(x^{1/r}).$$

□

El siguiente resultado determina cuándo la potencia de una variable aleatoria pertenece a la clase \mathcal{K}_d .

Lema 3.14 *Sea $r > 0$ y X una variable aleatoria positiva con densidad f . Entonces $X^r \in \mathcal{K}_d$ si y sólo si*

$$K_r(a) := \int_a^\infty \frac{y^{r-1}(\log f(y^2))}{1+y^{2r}} dy = \infty$$

para alguna $a > 0$.

Demostración. Utilizando propiedades del logaritmo y haciendo el cambio de variable $y = x^{1/r}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{-\log(r^{-1}x^{2/r-2}f(x^{2/r}))}{1+x^2} dx &= \int_a^\infty \frac{-\log(r^{-1}x^{2/r-2})}{1+x^2} dx + \int_a^\infty \frac{-\log(f(x^{2/r}))}{1+x^2} dx \\ &= I + r \int_a^\infty \frac{y^{r-1}(\log f(y^2))}{1+y^{2r}} dy \end{aligned}$$

para todo $a > 0$, además

$$|I| \leq C \int_a^\infty \frac{|\log x|}{1+x^2} dx < \infty.$$

El resultado se sigue de la Observación 2.10. □

A continuación presentamos una aplicación sencilla de los criterios de Krein y Lin.

Teorema 3.15 *Sea $r > 0$ y X una variable aleatoria con sucesión de momentos finita.*

(i) *Si $K_r(a) < \infty$ para alguna $a > 0$, entonces X^r es indeterminada.*

(ii) *Si $K_r(a) = \infty$ para alguna $a > 0$ y $X \in \mathcal{L}$, entonces X^r es determinada.*

Demostración. Para la primera parte se utiliza el Lema 3.14 y la Proposición 3.10 inciso (i). Para el inciso (ii) se usan los Lemas 3.13 y 3.14 y la Proposición 3.10 inciso (ii). □

3.5.1 Determinación y variación regular

En [76, pág. 947] Stoyanov menciona que las funciones de densidad de la forma (3.6) permiten estudiar el problema de determinación de las densidades de tipo exponencial, ya que sólo basta dar condiciones en términos de u y v . Aunque el problema se puede estudiar de manera más general, nos limitaremos a tomar $u \in \mathcal{VR}(\rho_u)$ y $v \in \mathcal{VR}(\rho_v)$, ver [56].

Teorema 3.16 Sea X una variable aleatoria positiva que tiene función de densidad dada por

$$f(x) = C \cdot u(x) \exp\{-v(x)\}, \quad x > 0. \quad (3.6)$$

con $u \in \mathcal{VR}(\rho_u)$, $\rho_u > -1$ y $v \in \mathcal{VR}(\rho_v)$, $\rho_v > 0$.

1. Si $\rho_v < 1/2$, entonces X es indeterminada.
2. Supongamos que u tiene derivada u' y existe $x_u > 0$ tal que u' y v son monótonas en $[x_u, \infty)$. Si $\rho_v > 1/2$, entonces X es determinada.

La prueba se infiere de la siguiente observación.

Observación 3.17 Bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene que $X \in \mathcal{L}$, ya que

$$L_X(x) = -\frac{xu'(x)}{u(x)} + xv'(x) = L_u(x) - v(x)L_v(x),$$

y por el Lema 3.12 inciso (a) tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_X(x) = -\rho_u + \rho_v \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty.$$

Dado que $\log v \in \mathcal{SV}$ se sigue que

$$\int_a^\infty \frac{|\log u(x^2)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

por lo tanto

$$K(a) = C' + \int_a^\infty \frac{v(x^2)}{1+x^2} dx = C' + \int_a^\infty \frac{x^{2\rho_v} \ell_v(x^2)}{1+x^2} dx,$$

por el Lema 3.12 inciso (a).

Si $\rho_v < 1/2$, se tiene

$$\begin{aligned} K(a) &= C' + \frac{1}{2} \int_{a^2}^\infty \frac{y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y)}{1+y} dy \\ &\leq C' + \frac{1}{2} \int_{a^2}^\infty y^{\rho_v-(3/2)} \ell_v(y) dy < \infty, \end{aligned}$$

por el Lema 3.12 inciso (e); así $X \in \mathcal{K}_c$ y por lo tanto X es indeterminada.

Si $\rho_v > 1/2$, por el Lema 3.12 inciso (a) se sigue que $y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y) \rightarrow \infty$ si $y \rightarrow \infty$, entonces para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que $y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y) > N$ si $y > M$, por lo tanto

$$\begin{aligned} K(a) &= C' + \frac{1}{2} \int_{a^2}^M \frac{y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y)}{1+y} dy + \frac{1}{2} \int_M^\infty \frac{y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y)}{1+y} dy \\ &> C' + \frac{1}{2} \int_{a^2}^M \frac{y^{\rho_v-(1/2)} \ell_v(y)}{1+y} dy + \frac{1}{2} \int_M^\infty \frac{N}{1+y} dy = \infty. \end{aligned}$$

Observación 3.18 Cuando $\rho_v = 1/2$ la conclusión depende de ℓ . Un ejemplo es $\ell(x) = 1$ y en este caso $K(a) = \infty$.

Finalmente consideramos el caso cuando v es suma de dos funciones de variación regular, una con exponente positivo y otra con exponente negativo.

Teorema 3.19 Sea f una función como en (3.6) con $u \in \mathcal{VR}(\rho_u)$, $\rho_u \in \mathbb{R}$ y $v = v_1 + v_2$, donde $v_1 \in \mathcal{VR}(\rho_1)$, $\rho_1 > 0$ y $v_2 \in \mathcal{VR}(-\rho_2)$, $\rho_2 > 0$.

(i) Si $\rho_1 < 1/2$, entonces X es indeterminada.

(ii) Además, supongamos que u , v_1 y v_2 cumplen las hipótesis del Teorema 3.16 inciso (2). Si $\rho_1 > 1/2$, entonces X es determinada.

Demostración. Tenemos que

$$K(a) = C' + \int_a^\infty \frac{x^{2\rho_1}\ell_1(x^2) + x^{-2\rho_2}\ell_2(x^2)}{1+x^2} dx,$$

la cual es finita si $\rho_1 < 1/2$, la prueba es similar a la de la Observación 3.17. Por otra parte si $\rho_1 > 1/2$ entonces $K(a) = \infty$, además por el Lema 3.12 inciso (b) tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L_X(x) = -\rho_u + \rho_1 \lim_{x \rightarrow \infty} v_1(x) = \infty,$$

esto demuestra (ii). □

Observación 3.20 La conclusión del resultado anterior es independiente de ρ_2 .

CAPÍTULO 4

Distribución logarítmica skew-normal

Las distribuciones normal y log-normal juegan un papel importante tanto en la teoría como en las aplicaciones de la probabilidad y estadística. Sin embargo, cuando se modela un fenómeno aleatorio complejo, en ocasiones se necesitan distribuciones más flexibles.

O'Hagan y Leonard fueron los primeros en introducir la distribución skew-normal, ver [55]. En [5, 6] Azzalini estudia propiedades fundamentales y propone varias generalizaciones, entre ellas algunas extensiones multivariadas. La distribución skew-normal multivariada tiene algunas aplicaciones dentro de la estadística, ver [3, 7].

Primero nos enfocamos en probar algunas propiedades básicas de la distribución skew-normal y la relación con el problema de momentos. También estudiamos la distribución logarítmica skew-normal, algunas de sus propiedades y su conexión con el problema de momentos, además exhibimos explícitamente clases de Stieltjes para dicha distribución. Por último, nos apoyamos en [15] para presentar una aplicación de ésta, Chai y Bailey la utilizaron como modelo para analizar datos de la calcificación de la arteria coronaria.

4.1 Definición y propiedades de la distribución skew-normal

Definición 4.1 Denotamos por ϕ y Φ a la densidad normal estándar y la distribución normal estándar, respectivamente. Dada $\lambda \in \mathbb{R}$ fija, decimos que una variable aleatoria X_λ tiene distribución **skew-normal**, denotado por $SN(\lambda)$, si $X_\lambda \sim f_\lambda$ donde $f_\lambda(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$.

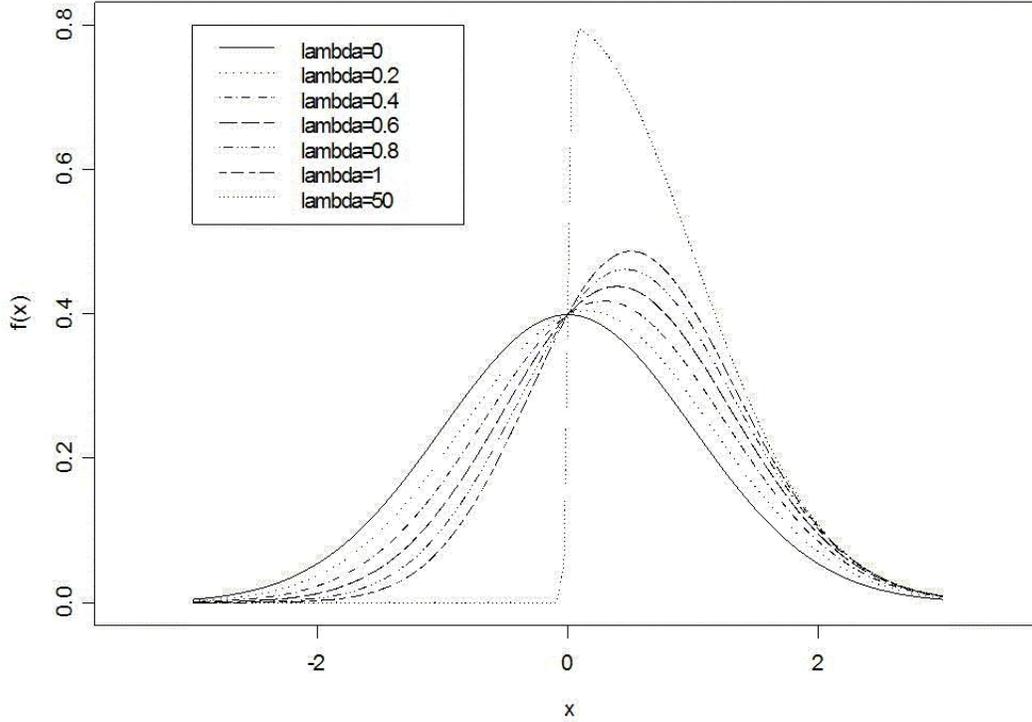


Figura 4.1: Gráfica de la distribución skew-normal con diferentes parámetros.

Dado que ϕ es una función par se tiene que $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. El siguiente resultado muestra que f_λ es efectivamente una función de densidad.

Proposición 4.2 f_λ es una función de densidad sobre \mathbb{R} .

Demostración. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ f_λ es positiva, además

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x) dx &= \int_0^{\infty} 2\phi(x)\Phi(\lambda x) dx + \int_{-\infty}^0 2\phi(x)\Phi(\lambda x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} 2\phi(x)\Phi(\lambda x) dx - \int_{\infty}^0 2\phi(-x)\Phi(-\lambda x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} 2\phi(x)[\Phi(\lambda x) + \Phi(-\lambda x)] dx = \int_0^{\infty} 2\phi(x) dx = 1.
 \end{aligned}$$

□

Ahora estudiamos propiedades fundamentales de la distribución skew-normal. Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar y denotemos por $\stackrel{d}{=}$ la igualdad en distribución. El siguiente resultado presenta una recopilación de algunas propiedades conocidas sobre la distribución en cuestión.

Proposición 4.3 *Para $\lambda \in \mathbb{R}$ sea $\delta = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$ y $X_\lambda \sim SN(\lambda)$. Entonces son válidas las siguientes afirmaciones*

1. $SN(0) = N(0, 1)$.
2. $|X_\lambda| \stackrel{d}{=} |Z|$.
3. $X_\lambda^2 \sim \chi_1^2$, donde χ_1^2 denota una variable aleatoria con función de distribución ji-cuadrada con un grado de libertad.
4. $-X_\lambda \sim SN(-\lambda)$, o equivalentemente $-X_\lambda \stackrel{d}{=} X_{-\lambda}$.
5. La función generadora de momentos de X_λ es $M_\lambda(t) = \exp(t^2/2)\Phi(\delta t)$, $t \in \mathbb{R}$.
6. La función característica de X_λ es $\Psi_t(t) = \exp(-t^2/2)(1 + i\tau(\delta t))$, $t \in \mathbb{R}$ donde

$$\tau(x) = \int_0^x \sqrt{2/\pi} \exp(y^2/2) dy \text{ y } \tau(-x) = -\tau(x) \text{ para todo } x \geq 0.$$
7. $SN(\lambda)$ es la distribución condicional de U dado $V < \lambda U$, donde U y V son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar.
8. $X_\lambda \xrightarrow{d} |Z|$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ y $X_\lambda \xrightarrow{d} -|Z|$ cuando $\lambda \rightarrow -\infty$ (convergencia en distribución).

Demostración.

1. Es claro.
2. De la Proposición B.6 inciso (4) se sigue

$$f_{|X_\lambda|}(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x) + 2\phi(-x)\Phi(-\lambda x) = 2\phi(x), \quad x \geq 0.$$

3. Por la Proposición B.6 inciso (5) se sigue

$$f_{X_\lambda^2}(x) = x^{-1/2}\phi(x^{1/2}) = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

4. Utilizando la Proposición B.6 inciso (6) se sigue

$$f_{-X_\lambda}(x) = 2\phi(-x)\Phi(-\lambda x) = 2\phi(x)\Phi(-\lambda x).$$

5. Se sigue de la Proposición 4.9.

6. Reescribimos la función generadora de momentos M_λ

$$M_\lambda(t) = 2e^{t^2/2}\Phi(\delta t) = 2e^{t^2/2} \left(\frac{1}{2} + \int_0^{\delta t} \phi(x)dx \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sea γ^* el segmento de línea que va de 0 a δti , es decir γ^* consiste de los puntos $\tilde{z} = yi$, donde $y \in (0, \delta t)$. Entonces la función característica está dada por

$$\begin{aligned} \Psi_t(t) &= M_\lambda(it) \\ &= 2e^{-t^2/2} \left(\frac{1}{2} + \int_{\gamma^*} \phi(\tilde{z})d\tilde{z} \right) \\ &= e^{-t^2/2} \left(1 + 2i \int_0^{\delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y^2/2} dy \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7. De la definición de función de distribución condicional y de la hipótesis se sigue

$$\begin{aligned} F_{U|V < \lambda U}(x) &= \frac{P[U \leq x, V < \lambda U]}{P[V < \lambda U]} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda u} f_{UV}(u, v) dv du}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} f_{UV}(u, v) dv du} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda u} \phi(u)\phi(v) dv du}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda u} \phi(u)\phi(v) dv du} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \phi(u)\Phi(\lambda u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\Phi(\lambda u) du} \\ &= 2 \int_{-\infty}^x \phi(u)\Phi(\lambda u) du, \end{aligned}$$

donde f_{UV} es la función de densidad conjunta de U y V .

8. Se tiene

$$\Phi(\lambda x) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$, entonces

$$f_\lambda(x) \rightarrow \begin{cases} 2\phi(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/\sqrt{2\pi} & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Por lo tanto $f_\lambda \rightarrow f_{|Z|}$ c.d., entonces $X_\lambda \xrightarrow{d} |Z|$. Análogamente cuando $\lambda \rightarrow -\infty$.

□

4.1.1 El problema de momentos de la distribución skew-normal

Por la Proposición 4.3 inciso (5) la función generadora de momentos $M_\lambda(t)$ de la distribución skew-normal existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto implica que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la distribución skew-normal es determinada, ver [28, 46]. En [10] Berg considera el problema de momentos de las potencias de la distribución normal estándar y obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.4 *Sea $Z \sim N(0, 1)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) Z^n es indeterminada para todo entero impar mayor que 1.

(b) Sea $r > 0$, $|Z|^r$ es determinada si y sólo si $r \leq 4$.

Para obtener algunas propiedades básicas de la distribución skew-normal necesitamos el siguiente resultado de Arnold y Lin, ver [2, Lema 2].

Lema 4.5 *Se satisface el siguiente comportamiento asintótico de Φ ,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\Phi(-x))}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Aplicando un par de veces la regla de L'Hopital obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln[1 - \Phi(x)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)/x}{2(1 - \Phi(x))} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

□

Vamos a estudiar el problema de momentos de potencias de la distribución skew-normal y probar que dicha distribución tiene las mismas propiedades descritas en la Proposición 4.4. Tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.6 Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X_\lambda \sim SN(\lambda)$. Entonces

(a) X_λ^n es indeterminada para todo entero impar mayor que 1.

(b) Sea $r > 0$, $|X_\lambda|^r$ es determinada si y sólo si $r \leq 4$.

Demostración. De la Proposición 4.3 inciso (2) y la Proposición 4.4 inciso (b), se sigue (b). Para probar (a), sea $Y_n = X_n^\lambda$, donde n es un número impar mayor o igual a 3, y por la Observación 2.10 la función de densidad de Y_n es

$$g_n(y) = \frac{2}{n} |y|^{\frac{1}{n}-1} \phi(y^{\frac{1}{n}}) \Phi(\lambda y^{\frac{1}{n}}), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Utilizando el criterio de Krein basta probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln g_n(y)}{1+y^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{-\ln g_n(y)}{1+y^2} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{-\ln g_n(y)}{1+y^2} dy \equiv I + II < \infty,$$

para n impar mayor que 1.

Primero consideramos $\lambda \geq 0$. Para estimar la primera integral, notamos que $\frac{1}{2} \leq \Phi(x) \leq 1$ para $x \geq 0$ y se tiene que

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^{\infty} \frac{-\ln \frac{2}{n} + \ln 2 + (1 - \frac{1}{n}) \ln y - \ln \phi(y^{\frac{1}{n}})}{1+y^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-\ln \frac{2}{n} + \ln 2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + (1 - \frac{1}{n}) \ln y - \frac{y^{2/n}}{2}}{1+y^2} dy < \infty, \end{aligned}$$

para $n \geq 3$. Para estimar la segunda integral, escribimos

$$\begin{aligned} II &= \int_0^{\infty} \frac{-\ln g_n(-y)}{1+y^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-\ln \frac{2}{n} + (1 - \frac{1}{n}) \ln y - \ln \phi(y^{\frac{1}{n}}) - \ln \Phi(-\lambda y^{\frac{1}{n}})}{1+y^2} dy. \end{aligned}$$

Por el Lema 4.5 se tiene que existe $A > 0$ tal que $-\ln \Phi(-\lambda y^{1/n}) \leq C\lambda^2 y^{2/n} + 1$ si $y \geq A$, por lo tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{-\ln \Phi(-\lambda y^{1/n})}{1+y^2} dy \leq C_1 + C\lambda^2 \int_A^{\infty} \frac{y^{2/n}}{1+y^2} dy < \infty,$$

para $n \geq 3$. De manera similar se trata el caso $\lambda < 0$. □

4.2 Distribución log-skew-normal

A continuación presentamos la definición de la distribución logarítmica skew-normal.

Definición 4.7 Una variable aleatoria positiva Y_λ tiene distribución **logarítmica skew-normal**, denotado por $Y_\lambda \sim LSN(\lambda)$, si la variable aleatoria $\ln Y_\lambda$ tiene distribución skew-normal. Así, la función de densidad de Y_λ es

$$g_\lambda(y) = \frac{2}{y} \phi(\ln y) \Phi(\lambda \ln y), \quad y > 0. \quad (4.1)$$

Observación 4.8 Si $\lambda = 0$ entonces $LSN(\lambda) = LN(0, 1)$.

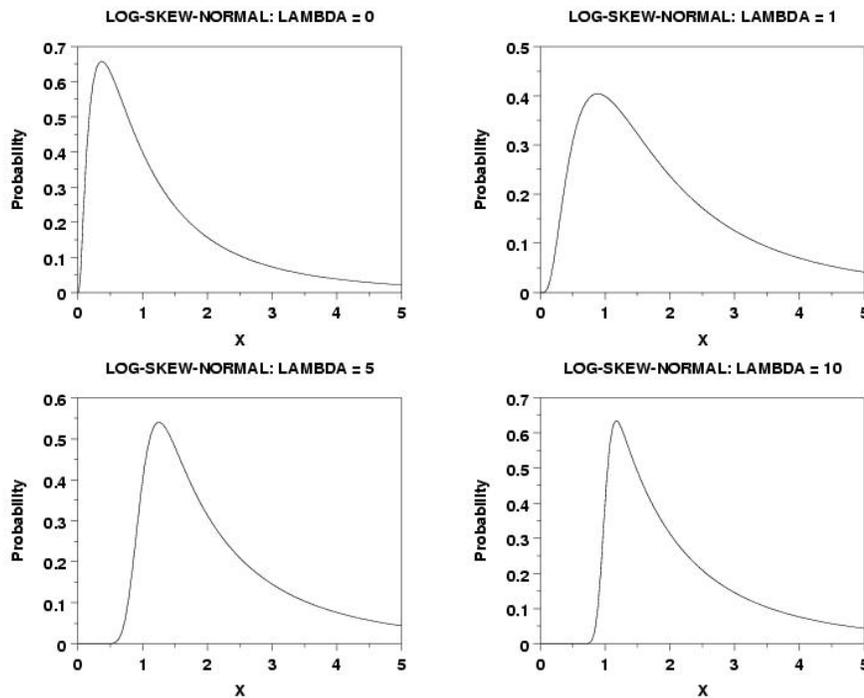


Figura 4.2: Gráficas de la distribución log-skew-normal con diferentes parámetros.

La variable aleatoria $Y_\lambda \sim LSN(\lambda)$ tiene momentos finitos de cualquier orden, de hecho, en el siguiente resultado damos una fórmula explícita para $E[Y_\lambda^t] = E[e^{tX_\lambda}]$, $t \in \mathbb{R}$, donde X_λ es una variable aleatoria con función de distribución skew-normal.

Proposición 4.9 Sea $Y_\lambda \sim LSN(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces el momento $E[Y_\lambda^t]$ de orden $t \in \mathbb{R}$, está dado por

$$m_t(\lambda) = E[Y_\lambda^t] = E[e^{tX_\lambda}] = 2e^{t^2/2} \Phi(\delta t) \quad (4.2)$$

donde $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Demostración. Notamos que $e^{t^2/2}\phi(x-t) = e^{tx}\phi(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así

$$\begin{aligned}
E[e^{tX_\lambda}] &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \phi(x) \Phi(\lambda x) dx \\
&= 2e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) \Phi(\lambda x) dx \\
&= 2e^{t^2/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda(x+t)} \phi(x) \phi(y) dy dx \right) \\
&= 2e^{t^2/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda x} \phi(x) \phi(y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\lambda x}^{\lambda(x+t)} \phi(x) \phi(y) dy dx \right) \\
&= 2e^{t^2/2} \left(\frac{1}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\lambda x}^{\lambda(x+t)} \phi(x) \phi(y) dy dx \right).
\end{aligned}$$

Ahora consideramos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

donde $\tan \alpha$ es la pendiente de la recta $y = \lambda x$; por lo tanto

$$\begin{aligned}
E[e^{tX_\lambda}] &= 2e^{t^2/2} \left(\frac{1}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tilde{x}) d\tilde{x} \int_0^{\lambda t \cos \alpha} \phi(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) \\
&= 2e^{t^2/2} \left(\int_{-\infty}^{\lambda t \cos \alpha} \phi(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) = 2e^{t^2/2} \Phi(\lambda t \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Notamos que $\lambda t \cos \alpha$ es la distancia entre las rectas $y = \lambda x$ y $y = \lambda(x+t)$; por geometría elemental $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. \square

De la Sección 2.3 sabemos que la distribución log-normal estándar es indeterminada, esta propiedad también es válida para $LSN(\lambda)$.

Teorema 4.10 *Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aleatoria $Y_\lambda \sim LSN(\lambda)$ es indeterminada.*

Demostración. En esta ocasión usamos el criterio de *Krein*. Basta mostrar que

$$\begin{aligned}
K(1) &= \int_1^{\infty} \frac{-\ln g_\lambda(y^2)}{1+y^2} dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \infty,
\end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{-\ln 2}{1+y^2} dy, \quad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{2 \ln y}{1+y^2} dy$$

$$I_3 = \int_1^\infty \frac{-\ln \phi(2 \ln y)}{1+y^2} dy, \quad I_4 = \int_1^\infty \frac{-\ln \Phi(2\lambda \ln y)}{1+y^2} dy.$$

Notamos que $I_1 < \infty$, además

$$I_2 \leq 2 \int_1^\infty \frac{\ln y}{y^2} dy = 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2\Gamma(2),$$

de manera similar se ve que $I_3 < \infty$. Por otro lado, si $\lambda \geq 0$ entonces $\Phi(2\lambda \ln y) \geq \frac{1}{2}$ cuando $y \geq 1$, así

$$I_4 \leq \int_1^\infty \frac{\ln 2}{1+y^2} dy < \infty.$$

Si $\lambda < 0$, por el Lema 4.5 se tiene que existe $A > 1$ tal que $-\ln \Phi(2\lambda \ln y) \leq C\lambda^2(\ln y)^2$ si $y \geq A$, por lo tanto

$$I_4 \leq C_1 + C\lambda^2 \int_A^\infty \frac{(\ln y)^2}{1+y^2} dy < \infty.$$

□

4.3 Clases de Stieltjes para la distribución LSN

En esta sección volvemos a mostrar que la densidad g_λ dada en (4.1) es indeterminada pero usamos el método de Stoyanov al mostrar una clase de Stieltjes con centro g_λ . Antes de construir una clase de Stieltjes para la distribución $SLN(\lambda)$ con $\lambda \geq 0$, necesitamos algunos resultados. Primero consideramos la función \tilde{p} definida como sigue

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \frac{\ell(x-1) \operatorname{sen}[\pi \ln(x-1)]}{\ell(x) \Phi(\lambda \ln x)}, & x > 1 \\ 0, & \text{c.d.} \end{cases} \quad (4.3)$$

donde ℓ es la función de densidad de la log-normal $LN(0, 1)$:

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Proposición 4.11

1. \tilde{p} es continua en $(1, \infty)$.
2. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{1+\frac{1}{2}\ln(x(x-1))} = \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)}$, si $x > 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} = 1$.

Demostración.

1. Las funciones $\frac{\ell(x-1)}{\ell(x)}$, $\text{sen}[\pi \ln(x-1)]$ y $1/\Phi(\lambda \ln x)$ son continuas en $(1, \infty)$, por lo tanto \tilde{p} es continua en $(1, \infty)$.
2. Si $x > 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} &= \frac{x}{x-1} \exp \left[\frac{1}{2} ((\ln x)^2 - (\ln(x-1))^2) \right] \\ &= \frac{x}{x-1} \left(\exp \left[\ln \frac{x}{x-1} \right] \right)^{\frac{1}{2} \ln(x(x-1))} \\ &= \left(\frac{x}{x-1} \right)^{1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1))}. \end{aligned}$$

3. Del inciso anterior tenemos

$$\frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} = \exp\{h(x)\}$$

donde $h(x) = (1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1))) \ln(x/(x-1))$, afirmamos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0.$$

Se cumple que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x/(x-1)) = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(1-1/x) = \infty$, además

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1)) \right) = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + \ln(x-1)) = -\infty,$$

por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$.

Ahora

$$h(x) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \bigg/ \frac{1}{1 + (1/2) \ln(x(x-1))}.$$

Utilizando la regla de L'Hôpital se sigue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1)))^2}{(2x-1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1)))^2}{2x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)(1 + \frac{1}{2} \ln(x(x-1)))}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x(x-1)} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x(x-1))}{x(x-1)} = 0. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado muestra que \tilde{p} es una función acotada.

Lema 4.12 *Existe una constante $\tilde{c} > 0$ tal que $|\tilde{p}| \leq \tilde{c}$ en \mathbb{R} para cada $\lambda \geq 0$.*

Demostración. Se puede ver que

$$|\tilde{p}(x)| = \left| \frac{\ell(x-1) \operatorname{sen}[\pi \ln(x-1)]}{\ell(x) \Phi(\lambda \ln x)} \right| \leq \left| \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} \right| \frac{1}{\Phi(\lambda \ln x)} \leq 2 \left| \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} \right|, \quad x > 1.$$

Dado que $\ell(x-1)/\ell(x)$ es continua en $(1, \infty)$ y acotada en vecindades de 1 y ∞ , se sigue el resultado. □

Teorema 4.13 *Sea $g = g_\lambda$ la función de densidad dada en (4.1) con $\lambda \geq 0$ y $p(x) = (1/\tilde{c})\tilde{p}(x)$, $x > 0$. Entonces la familia de funciones*

$$S(g, p) = \{g_\varepsilon(x) = g(x)[1 + \varepsilon p(x)], \quad x > 0, \quad |\varepsilon| \leq 1\}$$

es una clase de Stieltjes con centro g y perturbación p .

Demostración. Para $x > 1$ tenemos

$$\begin{aligned} g(x)p(x) &= \frac{2}{x\tilde{c}} \phi(\ln x) \Phi(\lambda \ln(x)) \frac{\ell(x-1) \operatorname{sen}[\pi \ln(x-1)]}{\ell(x) \Phi(\lambda \ln x)} \\ &= \frac{2}{\tilde{c}} \ell(x-1) \operatorname{sen}(\pi \ln(x-1)). \end{aligned}$$

Escribimos $x^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (x-1)^j$. Por (2.9) tenemos

$$\int_1^\infty x^k g(x)p(x) dx = \frac{1}{\tilde{c}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_1^\infty (x-1)^j \ell(x-1) \operatorname{sen}(\pi \ln(x-1)) dx = 0$$

para todo $k \geq 0$. □

4.4 Posibles extensiones

1. En esta sección usamos los siguientes resultados que aparecen en [5, 47], respectivamente.

Lema 4.14 *Sea f una función de densidad par no negativa y G una función de distribución absolutamente continua tal que G' es par. Entonces $2G(\lambda y)f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, es una función de densidad para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Teorema 4.15 *La función de densidad $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional*

$$g(x-1) = e^{-1/2} e^x g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

si y sólo si existe una función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de periodo 1, no negativa, tal que $\psi \in \mathcal{L}^1(0, 1)$,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \psi(x),$$

y

$$\int_0^1 \theta(x, 1/2) \psi(x) dx = 1,$$

donde la función θ está dada por

$$\theta(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t + 2\pi n i x}.$$

Estos resultados dan pie para considerar las siguientes funciones de densidad.

Definición 4.16 *Sean $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones pares que satisfacen las mismas condiciones que la función ψ en el teorema anterior. Dada $\lambda \in \mathbb{R}$ fija, decimos que una variable aleatoria X_λ tiene distribución **skew-simétrica normal** si su densidad es $f_\lambda(x) = 2\phi(x)\psi_1(x) \int_{-\infty}^{\lambda x} \psi_2(y)\phi(y)dy$, donde ϕ es la densidad normal estándar.*

Definición 4.17 *Una variable aleatoria Y_λ tiene distribución **logarítmica skew-simétrica normal** si la variable aleatoria $\ln Y_\lambda$ tiene distribución skew-simétrica normal, es decir, la densidad de Y_λ es*

$$g_\lambda(x) = \frac{2}{x} \phi(\ln x) \psi_1(\ln x) \int_{-\infty}^{\lambda \ln x} \psi_2(y) \phi(y) dy. \quad (4.5)$$

El siguiente resultado es el análogo de la Proposición 4.9.

Proposición 4.18 *Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ fija, la variable aleatoria Y_λ con función de densidad (4.5) tiene la función generadora de momentos*

$$\begin{aligned} E[Y_\lambda^t] &= e^{t^2/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi_1(x+t) G(\lambda x) dx \right] \\ &+ e^{t^2/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta t} \phi(x) \phi(y) \psi_1(x \cos \alpha - y \sin \alpha + t) \psi_2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) dy dx \right], \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $G(\lambda x) = \int_{-\infty}^{\lambda x} \psi_2(y) \phi(y) dy$.

Demostración. Procedemos como en la demostración de la Proposición 4.9.

$$\begin{aligned}
E[Y_\lambda^t] &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \psi_1(x) \phi(x) \left(\int_{-\infty}^{\lambda x} \psi_2(y) \phi(y) dy \right) dx \\
&= 2e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi_1(x+t) \left(\int_{-\infty}^{\lambda x + \lambda t} \psi_2(y) \phi(y) dy \right) dx \\
&= 2e^{t^2/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi_1(x+t) \left(\int_{-\infty}^{\lambda x} \psi_2(y) \phi(y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi_1(x+t) \left(\int_{\lambda x}^{\lambda x + \lambda t} \psi_2(y) \phi(y) dy \right) dx \right] \\
&= 2e^{t^2/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi_1(x+t) G(\lambda x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta t} \phi(x) \phi(y) \psi_1(x \cos \alpha - y \sin \alpha + t) \psi_2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) dy dx \right],
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el mismo cambio de variables que en la Proposición 4.9, así que

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

□

En particular, la sucesión de momentos de Y_λ es:

$$E[Y_\lambda^n] = e^{n^2/2} \left[1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta n} \phi(x) \phi(y) \psi_1(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \psi_2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) dy dx \right], \quad (4.6)$$

$n \in \mathbb{Z}$. Por las condiciones impuestas a ψ_1 y ψ_2 , se sigue que se pueden representar como series cosenoidales y la expresión (4.6) se puede reducir más. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.19 Si $\psi_1 \equiv 1$ y $\psi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
E[Y_\lambda^n] &= e^{n^2/2} \left[1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta n} \phi(x) \phi(y) \psi_2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) dy dx \right] \\
&= e^{n^2/2} + 2e^{n^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta n} \phi(x) \phi(y) \cos(nx \sin \alpha) \cos(ny \cos \alpha) dy dx \\
&\quad - 2e^{n^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta n} \phi(x) \phi(y) \sin(nx \sin \alpha) \sin(ny \cos \alpha) dy dx \\
&= e^{n^2/2} + 2e^{n^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cos(nx \sin \alpha) dx \int_0^{\delta n} \phi(y) \cos(ny \cos \alpha) dy \\
&\quad - 2e^{n^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \sin(nx \sin \alpha) dx \int_0^{\delta n} \phi(y) \sin(ny \cos \alpha) dy.
\end{aligned}$$

Ahora utilizando el hecho que ϕ es una eigenfunción de la Transformada de Fourier i.e. $\hat{\phi}(\xi) = \phi(\xi)$ donde $\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ix\xi}dx$, $\xi \in \mathbb{R}$, se sigue

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cos(nx \operatorname{sen} \alpha) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx \operatorname{sen} \alpha} + e^{-inx \operatorname{sen} \alpha}}{2} \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-nx \operatorname{sen} \alpha)} \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inx \operatorname{sen} \alpha} \phi(x) dx \right) \\ &= \phi(n \operatorname{sen} \alpha), \end{aligned}$$

de manera similar se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \operatorname{sen}(nx \operatorname{sen} \alpha) dx = 0.$$

Por lo tanto

$$E[Y_\lambda^n] = e^{n^2/2} \left[1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi(n \operatorname{sen} \alpha) \int_0^{\delta n} \phi(y) \cos(ny \cos \alpha) dy \right].$$

2. Sea (Z_1, Z_2) un vector aleatorio con distribución normal bivariada, esperanza $(0,0)$, varianza $\operatorname{var}(Z_i) = 1$, ($i = 1, 2$) y coeficiente de correlación $\rho \in (-1, 1)$. El siguiente resultado se encuentra en [8, Sección 3.2].

Proposición 4.20 *La distribución condicional de Z_1 dado Z_2 es $SN(\lambda(\rho))$, donde $\lambda(\rho) = \rho/\sqrt{1-\rho^2}$. En general, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ fija, la distribución condicional de Z_1 dado $Z_2 > a$, tiene función de densidad*

$$f_{a,\lambda}(x) = [\Phi(-a)]^{-1} \phi(x) \Phi \left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}} + \lambda(\rho)x \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Demostración. El resultado se sigue de la definición de distribución condicional y del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} F_{Z_1|Z_2>a}(x) &= \frac{P[Z_1 \leq x, Z_2 > a]}{P[Z_2 > a]} \\ &= [2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Phi(-a)]^{-1} \int_{-\infty}^x \int_a^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uy + y^2) \right] dy du \\ &= [2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Phi(-a)]^{-1} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \int_a^{\infty} \exp \left[\frac{-(y-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)} \right] dy du \\ &= [\Phi(-a)]^{-1} \int_{-\infty}^x \phi(u) \Phi \left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}} + \lambda(\rho)u \right) du. \end{aligned}$$

□

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $Y_{a,\lambda}$ una variable aleatoria positiva tal que $\ln Y_{a,\lambda}$ tiene función de densidad

$$g_{a,\lambda}(y) = [\Phi(-a)y]^{-1} \phi(\ln y) \Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}} + \lambda(\rho) \ln y\right), \quad y > 0. \quad (4.8)$$

Teorema 4.21 Para toda $a \in \mathbb{R}$, $Y_{a,\lambda}$ es indeterminada.

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 4.10. □

Asimismo podemos construir una clase de Stieltjes con centro en $g_{a,\lambda}$. Primero consideramos la función \tilde{q} definida como:

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} \frac{\text{sen}[\pi \ln(x-1)]}{\Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}} + \lambda(\rho) \ln x\right)}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

donde ℓ es la función de densidad log-normal $LN(0, 1)$.

Lema 4.22 Para $\rho \in (-1, 1)$ existe una constante $\tilde{c} > 0$ tal que $|\tilde{q}| \leq \tilde{c}$ en \mathbb{R} .

Demostración. Si $x > 1$ tenemos

$$|\tilde{q}(x)| \leq \left| \frac{\ell(x-1)}{\ell(x)} \right| \frac{1}{\Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)},$$

ya que

$$\Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \leq \Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{1-\rho^2}} + \lambda(\rho) \ln x\right),$$

el término de la derecha se acota usando la Proposición 4.11 incisos 2 y 3. □

Teorema 4.23 La familia de funciones

$$S(f_{a,\lambda}, q) = \{f_\varepsilon(x) = f_{a,\lambda}(x) [1 + \varepsilon q(x)], \quad x > 0, \quad |\varepsilon| \leq 1\}$$

es una clase de Stieltjes con centro en $f_{a,\lambda}$ y perturbación $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{c}$, $x > 0$.

Demostración. La prueba es análoga al Teorema 4.13. □

3. Sea g una función de densidad par y π una función medible que satisfice

$$0 \leq \pi(x) \leq 1 \text{ y } \pi(x) + \pi(-x) = 1 \text{ c.d. en } \mathbb{R}.$$

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$ fija, decimos que una variable aleatoria $X_{\pi,\lambda}$ tiene distribución *skew-normal-generalizada*, denotado por $X_{\pi,\lambda} \sim SNG(\lambda)$, si $X_{\pi,\lambda} \sim f_{\pi,\lambda}$ donde $f_{\pi,\lambda}(x) = 2g(x)\pi(\lambda x)$.

Observación 4.24 Como en la Proposición 4.2 se puede ver que, $f_{\pi,\lambda}$ es una función de densidad sobre \mathbb{R} .

Definición 4.25 Una variable aleatoria positiva $Y_{\pi,\lambda}$ tiene distribución **logarítmica skew-normal-generalizada**, denotado por $Y_{\pi,\lambda} \sim LSNG(\lambda)$, si $\ln Y_{\pi,\lambda} \sim SNG(\lambda)$. La función de densidad de $Y_{\pi,\lambda}$ es

$$g_{\pi,\lambda}(y) = \frac{2}{y}g(\ln y)\pi(\lambda \ln y), \quad y > 0. \quad (4.10)$$

Teorema 4.26 Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, si π y g satisfacen

$$\left| \int_1^\infty \frac{\ln g(2 \ln y)}{1 + y^2} dy \right| < \infty, \quad \left| \int_1^\infty \frac{\ln \pi(2\lambda \ln y)}{1 + y^2} dy \right| < \infty,$$

entonces la variable aleatoria $Y_{\pi,\lambda}$ es indeterminada.

Demostración. La prueba es análoga al Teorema 4.10, reemplazando Φ y ϕ por π y g respectivamente. \square

4.5 Aplicación de la distribución logarítmica skew-normal

En esta sección nos apoyamos de [50] para redactar los siguientes párrafos.

Cabe mencionar que esta distribución tiene conexión con un modelo probabilístico en la calcificación de la arterias coronarias (CAC). La enfermedad coronaria arteriosclerótica continúa siendo la principal causa de muerte en occidente. La Asociación Americana del Corazón estima que cerca de 71 millones de personas son afectadas por enfermedades cardiovasculares en los Estados Unidos y que a su vez, éstas son responsables del 30% de las muertes totales en ese país. Los costos generados de forma directa e indirecta, pueden ascender a cifras astronómicas de hasta 60 billones de dólares sólo en los Estados Unidos. Debido a la transición epidemiológica, la preocupación prioritaria dentro de las políticas de salud pública debe ser el diseño e implementación de métodos adecuados de tamizaje para enfermedades cardiovasculares, ver [68].

La presencia de calcio en las arterias coronarias, ver [40], es un excelente indicador de arteroesclerosis, un síndrome caracterizado por el depósito e infiltración de sustancias lipídicas en las paredes de las arterias, y se ha asociado como factor de riesgo independiente para futuros eventos coronarios, por lo tanto la evaluación de su utilidad como método de tamizaje es de especial importancia, ver [16]. Sin embargo, a pesar de su utilidad como predictor de eventos coronarios, su relación con la existencia de lesiones estenóticas hemodinámicamente significativas permanece incierta.

La nueva generación de tomógrafos multidetectores permite la detección y caracterización del calcio coronario, así como la obtención de estudios angiográficos coronarios de alta calidad y resolución, ver [21]. Sin embargo, a pesar de esta ventaja técnica, en la literatura médica aún no se encuentra un consenso acerca de la relación de estos dos parámetros, ver [24, 44].

En particular, existe un debate en torno a la forma ideal de tamizaje por imágenes para pacientes fuera del grupo de alto riesgo, debido a la calidad de las imágenes y su capacidad de caracterizar lesiones así como la dosis de radiación recibida. Por esta razón, se estudia el comportamiento de los niveles de calcio coronario en función de la angiografía coronaria por multidetectores.

Esta información puede ser de vital importancia en el diseño e implementación de métodos de tamizaje de pacientes con enfermedad coronaria.

La arteroesclerosis es una enfermedad inflamatoria crónica que afecta de manera ineludible todos los lechos arteriales incluyendo no sólo los vasos coronarios, sino la aorta torácica y abdominal, vasos mesentéricos, carótidas, vasos renales y periféricos, ver [67]. Esta enfermedad es un proceso de envejecimiento, endurecimiento y degeneración de la pared de las arterias que sobreviene con los años, aunque también puede afectar a personas relativamente jóvenes, debido a algunas enfermedades y a alteraciones que afectan a los tejidos de la parte interna de la pared de la arteria. La placa de ateroma está formada de colesterol, productos de desecho, células, calcio y fibrina. La pared de la arteria se engruesa y pierde su elasticidad, y puede llegar a obstruirla totalmente. La arterosclerosis es una enfermedad lenta y progresiva, pero tiene el potencial, a veces, de progresar rápidamente.

Resulta de una compleja interacción entre factores genéticos y ambientales que llevan a que la pared arterial responda a diferentes estímulos de tipo inflamatorio, a través de las acciones de las células endoteliales, células musculares lisas, plaquetas y células inflamatorias. Estas a su vez producen una gran variedad de sustancias tales como factores de crecimiento, citoquinas, enzimas y radicales libres, las cuales alteraran la estructura de la pared arterial y finalmente llevarán al desarrollo de la placa arteroesclerótica. La placa se encuentra compuesta de varias cantidades de células musculares lisas, macrófagos, linfocitos T, ésteres de colesterol, fosfolípidos

y tejido conectivo extracelular. Esta estructura forma la matriz extracelular que incluye también colágeno, proteoglicanos y la matriz pericelular formada por fibronectina y fibras de elastina, [81]. La placa continúa su crecimiento paulatino hasta incluso, llegar a obliterar el lumen del vaso, reduciendo el flujo sanguíneo y causando diferentes tipos de manifestaciones clínicas, ver [36].

La enfermedad arteroesclerótica cardiaca es la principal causa de muerte en el hemisferio occidental y en los países industrializados. Los mayores esfuerzos en recursos económicos y científicos han ido encaminados en las últimas décadas al tratamiento de sus complicaciones tales como el infarto agudo del miocardio, la angina, muerte súbita y falla cardiaca. Esto se refleja en el desarrollo de técnicas de diagnóstico invasivas y no invasivas, cirugías de puentes coronarios, procedimientos percutáneos como la angioplastia y colocación de “stents”. Cabe pensar entonces que una mejor alternativa sería enfocarse en la prevención del desarrollo de la enfermedad mediante la detección de aquellos pacientes en riesgo.

Ahora mencionamos, de forma breve, los modelos utilizados en el análisis de los datos de CAC. El modelo Tobit [79] fue propuesto por James Tobin (1958) para describir la relación entre una variable aleatoria dependiente no negativa y_i y una variable aleatoria independiente (o vector) x_i .

Matemáticamente, el modelo se ve como sigue

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } w_i \leq 0 \\ w_i & \text{si } w_i > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde w_i es una variable latente (i.e. no observable), tal que $w_i = x_i^\top \beta + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Además y_i , $i = 1, \dots, n$, denota el resultado observado, $x_i \in \mathbb{R}^k$ denota los valores de k variables explicativas para la i -ésima observación, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ denota los parámetros de regresión y ε_i denota el i -ésimo término residual.

En 1971 Cragg propone un modelo alterno al de Tobin, ver [17]. Formalmente, la función de densidad de un resultado y_i bajo la especificación de Cragg se puede expresar de la siguiente forma

$$g(y_i) = p_i I_i + (1 - p_i) f^+(y_i) \quad (4.12)$$

donde I_i es la función indicadora que toma el valor uno si $y_i = 0$ y cero en caso contrario, p_i es una probabilidad y f^+ es una función de densidad con $\text{sop}(f) \subset \mathbb{R}^+$.

Moulton y Halsey [34] generalizaron el modelo anterior como sigue

$$g(y_i) = [p_i + (1 - p_i)F^+(T)]I_i + (1 - p_i)f^+(y_i) \quad (4.13)$$

donde $T > 0$ fijo y F^+ es la correspondiente función de distribución de f^+ .

Haciendo

$$p_i = P[y_i = 0] = \Phi(-x_{(1)i}^\top \beta_{(1)}), \quad x_{(1)i} \subseteq x_i, \quad \beta_{(1)} \subseteq \beta$$

$$\log(y_i | y_i > 0) \sim SN(x_{(2)i}^\top, \sigma, \delta), \quad x_{(2)i} \subseteq x_i, \quad \beta_{(2)} \subseteq \beta$$

donde los datos observados y_i son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes, el conjunto de variables explicativas $x_{(j)} = (x_{(j)1}, \dots, x_{(j)n})^\top$ con $j = 1, 2$.

El modelo probit/log-skew-normal desarrollado se utiliza para el análisis de los datos de la CAC.

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue analizar la definición de clase de Stieltjes y sus propiedades básicas. También, se obtuvieron algunas técnicas para construir clases de Stieltjes a partir de una dada. La finalidad de dicha definición fue resolver la unicidad del Problema de Momentos.

Gracias a algunas herramientas del análisis complejo, entre ellas la integración compleja, se obtuvieron perturbaciones y como efecto fue posible construir explícitamente clases de Stieltjes cuyos centros son funciones de densidad muy conocidas en probabilidad y estadística. Es importante mencionar que el Teorema 2.2, que nos permitió construir estas perturbaciones, es nuevo, ver [51].

Otro aspecto nuevo es que a partir del criterio de Krein se pueden obtener clases de Stieltjes. Por otra parte, a partir de un resultado de Pedersen [61], se pudo debilitar el intervalo de integración de (3.1) y (3.2); además mostramos la relación que existe entre el problema de determinación y las funciones de variación regular y así estudiar funciones de densidad de la forma (3.6).

Estudiamos algunas propiedades de las distribuciones skew-normal y log-skew-normal LSN, además analizamos el Problema de Momentos para tales distribuciones, y exhibimos clases de Stieltjes cuyo centro es la distribución *LSN*.

APÉNDICE A

Teoría de la Medida

En este apéndice recordamos algunas definiciones y teoremas de la Teoría de la Medida, nos apoyamos en [26, Capítulos 10, 11].

Lema A.1 (Lema del promedio) Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Dada $k \geq 0$ y una función integrable f tal que $\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right| \leq k$ para todo $E \in S$ con $0 < \mu(E) < +\infty$. Entonces $|f| \leq k$ c.d. rel. μ .

Definición A.2 Sea (X, S) un espacio medible. Una medida con signo en (X, S) es una función conjuntista $\nu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. ν toma a lo más uno de los valores extendidos $+\infty$ o $-\infty$.
3. Si (E_i) es una sucesión disjunta de elementos de S , entonces: $\nu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$, en donde la igualdad anterior se debe entender como sigue:

Si $|\nu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)| < +\infty$ entonces la serie converge absolutamente y si $|\nu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)| = +\infty$, entonces la serie converge (en el sentido extendido) a $+\infty$ o $-\infty$ (respectivamente).

Decimos que ν es finita si $|\nu(E)| < \infty$ para todo $E \in S$ y es σ -finita si existe una sucesión (E_n) de elementos de S tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $|\nu(E_n)| < +\infty$ para todo n .

Definición A.3 Sea (X, S) un espacio de medida, $\mu_1 : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ una medida y $\mu_2 : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo. Decimos que μ_2 es absolutamente continua con respecto a μ_1 , denotado por $\mu_2 \ll \mu_1$, si $\mu_2(E) = 0$ siempre que $\mu_1(E) = 0$, $E \in S$.

Teorema A.4 (Radon-Nikodym(1930)) Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ -finita y $\nu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ -finita tal que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una función medible f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in S$. Si existe \tilde{f} medible tal que $\nu(E) = \int_E \tilde{f} d\mu$ para todo $E \in S$ entonces $f = \tilde{f}$ c.d. rel. μ .

Definición A.5 Sean (X, S) un espacio medible, $\mu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida σ -finita y $\nu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo σ -finita tal que $\nu \ll \mu$. La única función (rel. μ) f medible que satisface $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in S$ se llama la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ y se denota $f = \frac{d\nu}{d\mu}[\mu]$ ($[\mu]$ abrevia la expresión c.d. rel. μ).

A continuación enunciamos algunas propiedades de la derivada de Radon-Nikodym. Por simplicidad nos restringimos al caso de medidas σ -finitas.

Proposición A.6 Sean (X, S) un espacio medible, ν, ν_1, ν_2, ρ y $\mu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medidas σ -finitas entonces:

1. Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ y

$$\frac{d(\nu_1 \pm \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} \pm \frac{d\nu_2}{d\mu}[\mu].$$

2. Si $\rho \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ entonces: $\rho \ll \mu$ y

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \left(\frac{d\rho}{d\nu} \right) \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) [\mu].$$

3. Si ν y μ son equivalentes i.e. $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$, denotado por $\nu \asymp \mu$, entonces

$$\nu \left(\left\{ x \in X : \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0 \right\} \right) = 0, \quad \frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)^{-1} [\mu].$$

En adelante consideramos un espacio medible (X, S) .

Proposición A.7 Si μ es una medida sobre S y $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, entonces $\nu : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ es una medida con signo.

Por otra parte, una función de distribución F (ver B.3) genera una medida de probabilidad μ_F sobre los borelianos de \mathbb{R} . Esto se hace de la siguiente manera:

Primero se define la medida de los intervalos de la forma $(-\infty, x]$:

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x).$$

De donde es natural poner $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Posteriormente se extiende μ_F al álgebra de las uniones finitas disjuntas de conjuntos de la forma $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Finalmente usamos el teorema de extensión de Caratheodory para definir μ_F sobre los borelianos de \mathbb{R} .

Recíprocamente, si se tiene una medida de probabilidad μ sobre los borelianos en \mathbb{R} se puede definir:

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función así definida es una función de distribución y la medida que se genera a partir de ella, como se mencionó anteriormente, coincide con μ .

En otras palabras, hay una correspondencia uno a uno entre las funciones de distribución y las medidas de probabilidad sobre los borelianos de \mathbb{R} .

Definición A.8 *Se dice que una función de distribución F es absolutamente continua con respecto a una función de distribución G , si la medida generada por F es absolutamente continua con respecto a la medida generada por G , y se denota por $F \ll G$.*

Del teorema de Radon-Nikodym se deriva inmediatamente el siguiente resultado:

Proposición A.9 *Sean F y G dos funciones de distribución, entonces F es absolutamente continua con respecto a G si y sólo si existe una función medible no negativa f tal que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dG(y)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Definición A.10 (Medidas producto) *Sean (X, \mathcal{F}) y (Y, \mathcal{G}) dos espacios de medida. Introducimos el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, donde $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es la σ -álgebra de subconjuntos de $X \times Y$ generada por $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, es decir, $\sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.*

Definición A.11 *Sea $H \subset X \times Y$ y $x \in X$, definimos la x -sección de H (denotada por H_x) como el subconjunto de Y dado como sigue: $H_x = \{y \in Y : (x, y) \in H\}$. De manera similar podemos definir la y -sección de H (denotada como H^y), como el subconjunto de X dado como sigue: $H^y = \{x \in X : (x, y) \in H\}$.*

Se puede probar que si $H \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ entonces $H_x \in \mathcal{G}$ y $H^y \in \mathcal{F}$. El siguiente resultado nos garantiza la existencia de una medida en el espacio producto con la propiedad de que la medida de rectángulos medibles es el producto de sus medidas.

Teorema A.12 (*De la medida producto*) Sean (X, \mathcal{F}, μ) y (Y, \mathcal{G}, ν) dos espacios de medida σ -finita, entonces la función conjuntista $\pi : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\pi(H) = \int \nu(H_x) d\mu = \int \mu(H^y) d\nu$$

es una medida σ -finita, y es la única medida sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ con la propiedad de que: $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo $A \times B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Llamamos a π la medida producto de μ y de ν , se le denota por $\mu \otimes \nu$.

La demostración del teorema anterior se encuentra en Halmos [30]

Teorema A.13 Sean (X, \mathcal{F}, μ) y (Y, \mathcal{G}, ν) dos espacios de medida σ -finita, $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ y $F \times G \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_{F \times G} f d(\mu \otimes \nu) = \int_F \left(\int_G f d\nu \right) d\mu = \int_G \left(\int_F f d\mu \right) d\nu.$$

APÉNDICE B

Probabilidad

Para este tema nos apoyamos en las fuentes [42, Capítulo 4] y [66, págs. 68-90].

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} .

Definición B.1 Sea $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria.

1. La distribución de X es la probabilidad $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{F}$.
2. La función de distribución de X es $F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x dF_X(t)$, donde consideramos la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Se denota F_X para relacionar la función de distribución a la variable aleatoria X , pero cuando no hay ambigüedad solo se escribe F .

Proposición B.2 Sea F una función de distribución de una variable aleatoria. Entonces

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
2. Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
3. F es continua por la derecha, i.e. $F(x+) = F(x)$.

Definición B.3 Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es llamada función de distribución si cumple las propiedades anteriores.

Proposición B.4 Sea F una función de distribución. Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P_F)$ y una variable aleatoria X definida en Ω , tal que $F_X = F$.

Proposición B.5 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F . Para cualesquiera números reales $a < b$, se cumple

1. $P(X < a) = F(a-)$.
2. $P(X = a) = F(a) - F(a-)$.
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
4. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$.
5. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$.
6. $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$.

Proposición B.6 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F . Entonces se cumplen la siguientes afirmaciones

1. $F_{|X|}(x) = F(x) - F((-x)-)$
2. $F_{-X}(x) = 1 - F((-x)-)$
3. $F_{X^2}(x) = F(x^{1/2}) - F((-x^{1/2})-)$, $x \geq 0$.

Si además se cumple que F es absolutamente continua con $F' = f$ entonces

4. $F_{|X|}(x) = F(x) - F(-x)$ y $f_{|X|}(x) = f(x) + f(-x)$, $x \geq 0$.
5. $F_{-X}(x) = 1 - F(-x)$ y $f_{-X}(x) = f(-x)$
6. $F_{X^2}(x) = F(x^{1/2}) - F(-x^{1/2})$ y $f_{X^2}(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}(f(x^{1/2}) + f(-x^{1/2}))$, $x \geq 0$.

Definición B.7 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F . La esperanza de X , denotada por $E(X)$, se define como el número

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

cuando esta integral sea absolutamente convergente, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$, y en tal caso se dice que X es integrable, o que tiene esperanza finita.

Teorema B.8 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible tal que $g(X)$ tiene esperanza finita. Entonces

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Es común abreviar $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$ con $\int gdF$.

Proposición B.9 Sea F una función de distribución en \mathbb{R} .

1. Si $g \equiv c$, entonces $\int gdF = c$.
2. Para $B \in \mathcal{F}$, $\int \chi_B dF = P_F(B)$.
3. Si h, g son integrables con respecto de F y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\int (ag + bh)dF = a \int gdF + b \int hdF$.
4. Si g y h son integrables con respecto a F y $g \leq h$, entonces $\int gdF \leq \int hdF$.

La siguiente parte se tomó de [22, págs. 12-13]. Sean X, Y variables aleatorias y $F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Entonces

$$P[XY \leq z] = \int \int_{xy \leq z} dF(x, y).$$

Si $P[X = 0] = P[Y = 0] = 0$, entonces $x \leq z/y$ si $y > 0$ y $z/y \leq x$ si $y < 0$, así

$$P[XY \leq z] = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{z/y}^{\infty} dF(x, y) \right) + \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z/y} dF(x, y) \right). \quad (\text{B.1})$$

Si X y Y son independientes, se tiene

$$F(x, y) = P[X \leq x]P[Y \leq y] = F_X(x)F_Y(y),$$

entonces simplificando (B.1), obtenemos

$$P[XY \leq z] = \int_{-\infty}^0 \left(1 - F_X \left(\frac{z}{y} - 0 \right) \right) dF_Y(y) + \int_0^{\infty} F_X \left(\frac{z}{y} \right) dF_Y(y).$$

Además, si $g(y) = F'_Y(y)$ existe c.d. entonces $dF_Y(y) = g(y)dy$.

A continuación damos algunos resultados básicos de la teoría de las funciones de variación regular y nos apoyamos en [14, págs. 1-57], [19], [20, págs. 275-289] y [64, págs. 7-26].

Definición B.10 Sea u una función medible y positiva sobre $[a, \infty)$ para alguna $a \geq 0$. Decimos que u es una función de variación regular, denotado $u \in \mathcal{VR}(\rho)$ con $\rho \in \mathbb{R}$, si

$$\frac{u(xt)}{u(t)} \rightarrow x^\rho \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad \text{para todo } x > 0.$$

Si $\rho = 0$ escribimos $u \in \mathcal{VS}$.

Estas funciones fueron introducidas y estudiadas por Karamata en 1930, con u una función continua en lugar de medible. El teorema básico de Convergencia Uniforme, fue probado por Karamata en 1930 y en 1949 Korevaar lo demostró en el caso medible.

Teorema B.11 (Teorema de Convergencia Uniforme (TCU)) Si $u \in \mathcal{VR}(\rho)$ con $\rho \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(xt)}{u(t)} = x^\rho$$

uniformemente local en $(0, \infty)$. Es decir, si $\rho < 0$ entonces converge uniformemente en intervalos de la forma (b, ∞) , $b > 0$. Si $\rho > 0$ y u es acotada en intervalos de la forma $(0, b]$ entonces converge uniformemente en intervalos de la forma $(0, b]$ para todo $b > 0$.

En 1930 Karamata demostró el siguiente teorema.

Teorema B.12 (Teorema de Representación) $\ell \in \mathcal{VS}$ si y sólo si

$$\ell(x) = c(x) \exp \left\{ \int_b^x \frac{\epsilon(s)}{s} ds \right\}, \quad x \geq b,$$

para alguna $b > 0$, donde $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles y acotadas que satisfacen $c(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$ y $\epsilon(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Observación B.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(x) \exp \left\{ \int_a^x \frac{\epsilon(s)}{s} ds \right\}}{c \exp \left\{ \int_a^x \frac{\epsilon(s)}{s} ds \right\}} = 1$$

APÉNDICE C

Núcleo de Poisson y espacios de Hardy

Para los siguientes temas nos apoyamos de la fuente [23, Capítulos 1,2].

Sea $u(z)$ una función armónica en el disco abierto \mathbb{D} y continua en $\bar{\mathbb{D}}$, esto es, $u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C(\bar{\mathbb{D}})$ y satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } \mathbb{D},$$

por el teorema del valor medio para funciones armónicas tenemos

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Sea $z_0 = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$. Existe una fórmula similar para $u(z_0)$, que se obtiene por un cambio de variable a través de una transformación de Möbius. Sea $\tau(z) = (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$. El círculo unitario $\partial\mathbb{D}$ es invariante bajo τ , y podemos escribir $\tau(e^{i\theta}) = e^{i\varphi}$. Por tanto

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\tau'(e^{i\theta})}{\tau(e^{i\theta})} e^{i\theta} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \theta_0) + r^2} := P_{z_0}(\theta). \quad (\text{C.1})$$

La función $P_{z_0}(\theta)$ es llamada *núcleo de Poisson* para el punto $z_0 \in \mathbb{D}$. Como $u(\tau^{-1}(z))$ es otra función continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y armónica en \mathbb{D} , haciendo el cambio de variable produce

$$u(z_0) = u(\tau^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) P_{z_0}(\theta) d\theta,$$

obteniendo la llamada fórmula integral de Poisson.

El núcleo de Poisson $P_z(\theta)$ también se puede escribir como sigue

$$P_z(\theta) = \Re \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z},$$

de donde se sigue que para θ fijo $P_z(\theta)$ es una función armónica de $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto cuando $f(\theta) \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{D})$, la función definida por

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta) f(\theta) d\theta. \quad (\text{C.2})$$

es armónica en \mathbb{D} . El extremo derecho de (C.1) muestra que la fórmula integral de Poisson puede ser interpretada como una convolución. Si $z = re^{i\theta_0}$, entonces

$$P_z(\theta) = P_r(\theta_0 - \theta)$$

y (C.2) toma la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta_0 - \theta) f(\theta) d\theta = (P_r * f)(\theta_0).$$

Ahora consideramos la función $z : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ definida como $z(w) = i(1-w)/(1+w)$. Sea $w_0 \in \mathbb{D}$ fijo y sea $z_0 = z(w_0) \in \mathbb{R}_+^2$. Esta función manda $\partial\mathbb{D}$ a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de modo que si $w = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, y $w \neq -1$, entonces $z(w) = t \in \mathbb{R}$. Derivando obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} P_{w_0}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2} := P_{z_0}(t), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

El lado derecho es el llamado núcleo de Poisson en el semiplano superior, $P_{z_0}(t) = P_{y_0}(x_0 - t)$ (la notación no es ambigua porque $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ y $y_0 \notin \mathbb{R}_+^2$). Por tanto la fórmula integral de Poisson para \mathbb{R}_+^2 es

$$u(z) = \int P_z(t) u(t) dt = \int P_y(x - t) u(t) dt.$$

cuando $u(z)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ y armónica en \mathbb{R}_+^2 .

Si $t \in \mathbb{R}$ fijo, el núcleo de Poisson para el semiplano superior es una función armónica de z ya que

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \Im \left(\frac{1}{t - z} \right), \quad z = x + iy.$$

se sigue que $P_z(t) \leq c_z/(1+t^2)$, donde c_z es una constante que depende de z . Por tanto, $P_z(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y la función

$$u(z) = \int P_z(t) f(t) dt.$$

es armónica en \mathbb{R}_+^2 cuando $f(t) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Asimismo la fórmula integral de Poisson para el semiplano superior se puede escribir como una convolución

$$u(z) = \int P_y(x-t)f(t)dt = (P_y * f)(x), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

El núcleo de Poisson tiene las siguientes propiedades

1. $P_y(t) \geq 0$, $\int P_y(t)dt = 1$.
2. $P_y(t) = P_y(-t)$.
3. P_y es decreciente cuando $t > 0$
4. $P_y(t) \leq 1/\pi y$, $t \in \mathbb{R}$.
5. Para $\delta > 0$ fijo, $\sup_{|t|>\delta} P_y(t) \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$.
6. Para $\delta > 0$ fijo, $\int_{|t|>\delta} P_y(t)dt \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$.
7. Además, $\{P_y\}_{y>0}$ es un semigrupo $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}$.

A continuación mencionamos algunos teoremas de suma importancia

Teorema C.1 1. Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in \mathcal{L}^p$, entonces

$$\|P_y * f - f\|_p \rightarrow 0, \quad \text{cuando } y \rightarrow 0.$$

2. Cuando f es acotada y uniformemente continua en \mathbb{R} , $(P_y * f)(x)$ converge uniformemente a $f(x)$.

Para estudiar los siguientes temas se recomienda al lector consultar [23].

La teoría clásica de los espacios de Hardy H^p es una mezcla del análisis real y complejo. Además, hay dos teorías de espacios de Hardy H^p , una para el disco y otra para el semiplano superior. En esta ocasión necesitamos la teoría del espacio de Hardy $H^p(dt)$ en el semiplano superior.

Sea $1 \leq p < \infty$ y $f(z)$ una función analítica en el semiplano superior \mathbb{R}_+^2 . Decimos que $f \in H^p = H^p(dt)$ si

$$\sup_{y>0} \int |f(x+iy)|^p dx = \|f\|_{H^p}^p < \infty.$$

Cuando $p = \infty$ escribimos H^∞ para el conjunto de funciones analíticas y acotadas en \mathbb{R}_+^2 , la norma en H^∞ está dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{R}_+^2} |f(z)|.$$

Se puede demostrar que H^p es un espacio de Banach, $1 \leq p \leq \infty$.

Sea $\alpha > 0$ fijo, consideremos el cono

$$\Gamma_\alpha(t) = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : |x - t| < \alpha y\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $u(z)$ es una función armónica en \mathbb{R}_+^2 , definimos la función *maximal no-tangencial* de u para $t \in \mathbb{R}$ como

$$u^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |u(z)|.$$

El valor de u^* depende del parámetro α pero una vez que α ha sido fijada omitimos esta distinción.

Teorema C.2 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in H^p(dt)$. Entonces para cualquier $\alpha > 0$, la función maximal no-tangencial*

$$f^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |f(z)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

está en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y

$$\|f^*\|_p^p \leq A_\alpha \|f\|_{H^p}^p,$$

donde la constante A_α depende sólo de α . Por otra parte, $f(z)$ tiene límite no-tangencial $\tilde{f}(t) := \lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \rightarrow t} f(z)$ c.d. en \mathbb{R} que satisface

$$\int |\tilde{f}(t)|^p dt = \|f\|_{H^p}^p$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|f(t + iy) - \tilde{f}(t)\|_p^p = 0.$$

El siguiente lema también es de suma importancia.

Lema C.3 *Sea $f(z) \in H^1(dt)$. Entonces la transformada de Fourier de su límite no-tangencial satisface*

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-2\pi i s t} dt = 0$$

para todo $s \leq 0$.

Teorema C.4 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $h > 0$. Entonces existe $f \in H^p(dt)$ tal que $|\tilde{f}(t)| = h(t)$ c.d. $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si*

$$\int \frac{\log h(t)}{1 + t^2} dt > -\infty.$$

Bibliografía

- [1] AKHIEZER, N. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Oliver & Boyd, Endinburgh, (1965).
- [2] ARNOLD, B., AND LIN, G. Characterizations of the skew-normal and generalized chi distributions. *Sankhya* 66 (2004), págs. 593–606.
- [3] ARNOLD, B. C., BEAVER, R. J., GROENEVELD, R. A., AND MEEKER, W. Q. The non-truncated marginal of a truncated bivariate normal distribution. *Psychometrika* 58 (1993), págs. 471–488.
- [4] ASKEY, R. Ramanujan’s extensions of the gamma and beta functions. *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), págs. 346–359.
- [5] AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics* 12 (1985), págs. 171–178.
- [6] AZZALINI, A. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica* 12 (1986), págs. 171–178.
- [7] AZZALINI, A., AND CAPITANIO, A. Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. 46* (1999), págs. 579–602.
- [8] AZZALINI, A., AND VALLE, A. D. The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* 83 (1996), págs. 715–726.

- [9] BALAKRISHNAN, N. *Handbook of the Logistic Distribution*. Marcel Dekker, New York, (1992).
- [10] BERG, C. The cube of a normal distribution is indeterminate. *Ann. Probab.* 16 (1988), págs. 910–913.
- [11] BERG, C. Indeterminate moment problems and the theory of entire functions. *J. Comput. Appl. Math.* 65 (1995), págs. 27–55.
- [12] BERG, C. From discrete to absolutely continuous solutions moment problems. *Arab J. Math. Sci.* 4 (1998), págs. 1–18.
- [13] BERG, C. On infinitely divisible solutions to indeterminate moment problems. *Proceedings of the International Workshop: Special Functions, World Scientific, Singapore 137* (2000), págs. 31–41.
- [14] BINGHAM, N., GOLDIE, C., AND TEUGELS, J. *Regular Variation*. Cambridge University Press, (1987).
- [15] CHAI, H. S., AND BAILEY, K. R. Use of log-skew-normal distribution in analysis of continuous data with a discrete component at zero. *Stat. Med.* 27 (2008), págs. 3643–3655.
- [16] COOIL, B., RAYA, S., LIPPOLIS, N., RUSSO, D., RAGGI, P., AND CALLISTER, T. Coronary artery disease: improved reproducibility of calcium scoring with electron –beam ct volumetric method. *Radiology* 208 (1998), págs. 807–814.
- [17] CRAGG, J. Some statistical models for limited dependent variables with applications to the demand for durable goods. *Econometrica* 39 (1971), págs. 829–844.
- [18] CRAMÉR, H. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. *Act. Sci. et Ind.* 736 (1938).
- [19] DE HANN, L. *On regular Variation and its Application to Weak Convergence of Extremes*. Mathematical Centre Tracts 32. Amsterdam: Mathematisch Centrum, (1970).
- [20] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2, 2nd ed.* New York: Wiley, (1971).
- [21] FITZGERALD, S., STOLFUS, L., WADE, W., AND HO, J. Relation of a coronary artery calcium score higher than 400 to coronary stenoses detected using multidetector computed tomography and to traditional cardiovascular risk factors. *Am. J. Cardiol* 10 (2008), págs. 1444–1447.

- [22] GALAMBOS, J., AND SIMORELLI, I. *Products of random variables, Applications to problems of physics and to arithmetical functions*. Marcel Dekker, Inc., (2004).
- [23] GARNETT, J. B. *Bounded analytic functions*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2007).
- [24] GASPAR, T., HALON, D., RUBINSHTEIN, R., PELED, N., AND LEWIS, B. Prevalence and extent of obstructive coronary artery disease in patients with zero or low calcium score undergoing 64-slice cardiac multidetector computed tomography for evaluation of a chest pain syndrome. *Am. J. cardiol* 99 (2007), págs. 472–475.
- [25] GÓMEZ, R., AND LÓPEZ-GARCÍA, M. A family of heat functions as solutions of indeterminate moment problems. *Int. J. Math. Math. Sci.* (2007), Article ID 41526, 11 pages, doi:10.1155/2007/41526.
- [26] GRABINSKY, G. *Teoría de la medida*. Prensas Ciencias, (2009).
- [27] GROMMER, H. Ganze transzendente funktionen mit lauter reellen nullstellen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* 4 (1919), págs. 114–166.
- [28] GUPTA, A., NGUYEN, T., AND SANQUI, J. A. Characterization of the skew normal distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.* 56 (2004), págs. 351–360.
- [29] GUT, A. On the moment problem. *Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability* 3(8) (2002), págs. 407–421.
- [30] HALMOS, P. R. *Measure theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1974).
- [31] HAMBURGER, H. Ueber eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems i. *Math. Ann.* 81 (1920), págs. 235–319.
- [32] HAMBURGER, H. Ueber eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems ii. *Math. Ann.* 82 (1921), págs. 120–164.
- [33] HAMBURGER, H. Ueber eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems iii. *Math. Ann.* 82 (1921), págs. 168–187.
- [34] HASLEY, N., AND MOULTON, L. A mixture model with detection limits for regression analyses of antibody response to vaccine. *Biometrics* 51 (1995), págs. 1570–1578.
- [35] HAUSDORFF, F. Momentenprobleme fur ein endliches intervall. *Math. Z.* 16 (1923), págs. 346–359.

- [36] HEGEL, R., AND SPENCE, J. Noninvasive phenotypes of atherosclerosis : similar windows but different ways. *Stroke* 35 (2004), pág. 649.
- [37] HEYDE, C. C. On a property of the lognormal distribution. *J. Royal Statist. Soc. Ser. B* 25 (1963), págs. 392–393.
- [38] HEYDE, C. C. Some remarks on the moment problem. *I. Quart. J. Math. Oxford* 14 (1963), págs. 91–96.
- [39] HUANG, J. S., AND LIN, G. D. The cube of a logistic distribution is indeterminate. *Austral. J. Statist* 39 (1997), págs. 247–252.
- [40] JAÑOWITZ, W., HILDNER, F., AND AGATSTON, A. Quantification of coronary artery calcium using ultrafast computed tomography. *J Am Coll Cardiol* 15 (1990), págs. 827–832.
- [41] KAC, V. G., AND CHEUNG, P. *Quantum calculus*. Universitext, Springer, (1992).
- [42] KARR, A. *Probability*. Springer-Verlag, (1992).
- [43] KREIN, M. On one extrapolation problem of Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 46(8) (1944), págs. 339–342.
- [44] LEPOR, N., MADYOON, H., AND CHENG, V. Presence and severity of non calcified coronary plaque on 64-slice computed tomographic coronary angiography in patients with zero and low coronary artery calcium. *Am J Cardiol* 99 (2007), págs. 1183–1186.
- [45] LIN, G. D. On the moment problems. *Statist. Prob. Lett.* 35 (1997(Correction: (2000), 205.)), págs. 85–90.
- [46] LIN, G. D., AND STOYANOV, J. On the problem determinacy of the distributions of compound geometric sums. *J. Appl. Probab.* 39 (2002), págs. 545–554.
- [47] LÓPEZ-GARCÍA, M. Characterization of distributions with the length-bias scaling property. *Elect. Comm. in Probab.* 14 (2009), págs. 186–191.
- [48] LÓPEZ-GARCÍA, M. Characterization of solutions to the stieltjes-wigert moment problem. *Statist. Probab. Lett.* 10 (2009), págs. 1337–1342.
- [49] LÓPEZ-GARCÍA, M. Characterization of solutions to the log-normal moment problem. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 55 (2010), págs. 387–391.

- [50] LOZANO, C. A. Puntuación de calcio coronario y presencia de estenosis significativas en arterias coronarias detectadas por angiografía multidetectores. *Universidad Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario* (2010).
- [51] LÓPEZ-GARCÍA, F. M. Families of absolutely continuous distributions as solutions of m -indeterminate moment problems. *en preparación para su publicación*.
- [52] LÓPEZ-GARCÍA, F. M. Stieltjes classes related to the hilbert transform. *en preparación para su publicación*.
- [53] MOAK, D. The q -analogue of the laguerre polynomials. *Math. Anal Appl.* 81 (1981), págs. 20–47.
- [54] NEVANLINNA, R. Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem. *Ann. Acad. Scient. Fennicae* 18 (1922), págs. 1–53.
- [55] O'HAGAN, A., AND LEONARD, T. Bayes stimation subject to uncertainty about parameter constraints. *Biometrika* 63 (1976), págs. 201–203.
- [56] PAKES, A., HUNG, W., AND WU, J. Criteria for the unique determination of probability distributions by moments. *Australian & New Zealand Journal of Statistics* 43 (2001), págs. 101–111.
- [57] PAKES, A. G. Length biasing and laws equivalent to the log-normal. *J. Math. Anal. Appl.* 197 (1996), págs. 825–854.
- [58] PAKES, A. G. Remarks on converse Carleman and Krein criteria for the classical moment problem. *J. Austral. Math. Soc.* 71 (2001), págs. 81–104.
- [59] PAKES, A. G. Structure of stieltjes classes of moment-equivalent probability laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 326(2) (2007), págs. 1268–1290.
- [60] PAKES, A. G., AND KHATTREE, R. Length-biasing, characterizations of laws and the moment problems. *Austral. J. Statist.* 34 (1992), págs. 307–322.
- [61] PEDERSEN, H. L. On Krein's theorem for indeterminacy of the classical moment problem. *Journal of Approximation Theory* 95 (1998), págs. 90–100.
- [62] RACHEV, S. T. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley, Chichester, (1992).

- [63] RAHMAN, M., AND GASPER, G. *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, (1990).
- [64] RESNICK, S. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Berlin: Springer-Verlag, (1987).
- [65] RIESZ, M. Sur le problème des moments. *Ark. F. Mat. Astr. O. Fys.* 17 (1923), págs. 1–52.
- [66] RINCÓN, L. *Curso intermedio de probabilidad*. Las prensas de ciencias, (2007).
- [67] ROSS, R. Atherosclerosis : an inflammatory disease. *N Engl J Med.* 340 (1999), págs. 115–126.
- [68] RUNKLE, G., AND JUNNILA, J. Coronary artery disease screening, treatment, and follow up. *Prim Care Clin* 83 (2006), págs. 863–865.
- [69] SHOHAT, J., AND TAMARKIN, J. *The Problem of Moments*. Mathematical Surveys, vol. 1, Providence, R.I., (1970).
- [70] SIMON, B. The classical moment problem as a self-adjoint finite operator. *Adv. Math.* 137 (1998), págs. 82–203.
- [71] SLUD, E. The moment problem for polynomial forms of normal random variables. *Ann. Probab.* 21 (1993), págs. 2200–2214.
- [72] STEIN, E. M., AND SHAKARCHI, R. *Fourier Analysis An Introduction*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, (2007).
- [73] STIELTJES, T. J. Recherches sur les fractions continues. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 8 (1894), págs. 1–122.
- [74] STOYANOV, J. *Counterexamples in Probability, 2nd edn*. John Wiley, Chichester, (1997).
- [75] STOYANOV, J. Inverse gaussian distribution and the moment problem. *J. Appl. Statist. Sci.* 9 (1999), págs. 61–71.
- [76] STOYANOV, J. Krein condition in probabilistic moment problems. *Bernoulli* 6 no. 5 (2000), págs. 939–949.
- [77] STOYANOV, J. Stieltjes classes for moment-indeterminate probability distributions. *Stochastic methods and their applications. J. Appl. Probab.* 41A (2004), págs. 281–294.

- [78] STOYANOV, J., AND OSTROVSKA, S. Stieltjes classes for m-indeterminate powers of inverse gaussian distributions. *Statist. Probab. Lett.* 71 (2005), págs. 165–171.
- [79] TOBIN, J. Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica* 26 (1958), págs. 24–36.
- [80] TOLMATZ, L., AND STOYANOV, J. New stieltjes classes involving generalized gamma distributions. *Statist. Probab. Lett.* 69 no. 2 (2004), págs. 213–219.
- [81] WANG, C., DE ALMEIDA, J., ANDERSON, T., VERMA, J., AND SZMITKO, P. New markers of inflammation and endothelial cell activation : Part i-ii. *Circulation* 108 (2003), pág. 2041.

Índice

- q -factorial, 11
- Índice de disimilitud, 16
- Cantidad de Carleman, 32
- Clase
 - de Stieltjes, 3, 14
 - de Lin, 36
- Criterio
 - de Carleman, 31
 - de Krein, 32
 - de Lin, 33
- Derivada de Radon-Nikodym, 66
- Distribución
 - M -equivalente, 3
 - (in)determinada, 2
 - exponencial, 27
 - gamma generalizada, 26
 - gaussiana inversa generalizada, 27
 - log-normal, 12, 25
 - log-skew-normal, 49
 - logística, 28
 - logarítmica skew-normal-generalizada, 58
 - normal, 27
 - ponderada, 9
 - skew-normal, 44
 - skew-normal-generalizada, 58
 - skew-simétrica normal, 54
- Escalamiento aleatorio, 10
- Espacios de Hardy, 75
- Función
 - q -exponencial, 11
 - q -gamma, 12
 - de variación regular, 37
- Integral
 - logarítmica, 32
 - de Krein, 37
- Métrica de variación total, 15
- Medida
 - con signo, 65
 - producto, 67
- Núcleo de Poisson, 74
- Perturbación, 3, 14
- Problema de momentos

- q -Laguerre, 12
- (in)determinado, 2
- de Hamburger, 3
- de Hausdorff, 3
- de Stieltjes, 3

Sucesión de momentos, 2

Teorema

- de Convergencia Uniforme, 72
- de Representación, 72
- de Radon-Nikodym, 66