UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MÓDULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

M A R I O M O N C A D A R A M O S

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

2012

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias.
Presente.

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Una breve introducción a la teoría de módulos"

realizado por *Mario Moncada Ramos* con número de cuenta *30410535-7*, quien cubrió los créditos de la carrera de *Matemáticas*.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	Hugo Alberto Rincón Mejía	____________
Propietario	Dr. Alejandro Alvarado García	____________
Propietario	M. en C. Rolando Gómez Macedo	____________
Suplente	Dr. José Ríos Montes	____________
Suplente	M. en C. Iván Fernando Vilchis Montalvo	____________

Consejo Departamental de *Matemáticas*

El Jefe(a) del Consejo Departamental de Matemáticas

UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MÓDULOS

Mario Moncada Ramos

9 de mayo de 2012

Índice general

CAPÍTULO 1

Módulos, submódulos y morfismos

1.1. Preliminares

Suponemos conocida la teoría básica de grupos y la teoría de espacios vectoriales.

Recordatorio 1.1.1. *Sean A, B conjuntos, $K \subseteq A$, $L \subseteq B$ y $f : A \to B$ una función.*

1. *La imagen directa de un conjunto K bajo la función f se define como:*

$$f[K] = \{f(x) \mid x \in K\}.$$

2. *La imagen inversa de un conjunto L bajo la función f es el conjunto:*

$$f^{-1}[L] = \{x \mid f(x) \in L\}.$$

Definición 1.1.2. *Sean M, N grupos abelianos. Decimos que $f : M \to N$ es un morfismo de grupos si para todo $x, y \in M$ se cumple que:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Definición 1.1.3. *Sean N, M grupos abelianos y $f : M \to N$ un morfismo de M a N.*

1. *Definimos el núcleo de f como $Ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$.*
2. *Definimos la imagen de f como $Im(f) = \{y \in N \mid \text{existe } x \in M \text{ y } f(x) = y\}$.*

Definición 1.1.4. *Sean G,H grupos. Decimos que $f : G \to H$ es un isomorfismo de grupos si f es un morfismo inyectivo y suprayectivo.*

Notación 1.1.5. *Si G, H son grupos y existe $f : G \to H$ un isomorfismo de grupos, usaremos la notación $G \cong H$.*

Definición 1.1.6. *Sea M un grupo abeliano. Definimos el conjunto de morfismos $Hom(M, M)$ por:*

$$Hom(M, M) = \{f : M \to M \mid f \text{ es morfismo}\}.$$

Lema 1.1.7. *Sean M, N grupos abelianos, $f : M \to N$ y $g : M \to N$ morfismos de grupos. Entonces la función $f + g : M \to N$ con regla de correspondencia $(f + g)(m) \doteqdot f(m) + g(m)$ es un morfismo de grupos.*

Demostración. Veamos que cumple con ser aditiva. Si $m_1, m_2 \in M$, entonces

$$\begin{aligned}(f+g)(m_1+m_2) &= f(m_1+m_2)+g(m_1+m_2)\\ &= (f(m_1)+f(m_2))+(g(m_1)+g(m_2))\\ &= (f(m_1)+g(m_1))+(f(m_2)+g(m_2))\\ &= (f+g)(m_1)+(f+g)(m_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto $f + g$ es un morfismo de grupos. ■

Definición 1.1.8. *Un anillo es una quinteta $(R, +, \cdot, 0, 1)$, donde:*

- *R es un conjunto,*
- *$(R, +, 0)$ es un grupo abeliano,*
- *$(R, \cdot, 1)$ es un monoide,*
- *Se cumplen las leyes distributivas izquierda y derecha del producto sobre la suma, es decir para cualesquiera $a, b, c \in R$ se cumple:*
  - *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*
  - *$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.*

Ejemplo 1.1.9. *Son anillos:*

- *Los enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ con las operaciones usuales.*
- *Los campos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, con las operaciones usuales.*
- *Los enteros módulo n, $\mathbb{Z}_n$.*

- *El anillo de matrices $M_{n\times n}(R)$ con R un anillo y $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, con las operaciones usuales.*

Proposición 1.1.10. *Si M un grupo abeliano, entonces $(Hom(M,M), +, \circ, \overline{0}, Id_M)$ es un anillo, donde $+$ es la operación definida en el lema 1.1.7 y $\circ$ es la composición de funciones.*

Demostración. Demostraremos que $Hom(M,M)$ es un anillo.
Sean $f, g, h \in Hom(M,M)$ y $m, m_1, m_2 \in M$.

1. Que la suma es una operación en $Hom(M,M)$ se tiene por el lema 1.1.7.

2. La asociatividad de la suma.
$$\begin{aligned}(f+(g+h))(m) &= f(m)+(g+h)(m)\\ &= f(m)+(g(m)+h(m))\\ &= (f(m)+g(m))+h(m)\\ &= (f+g)(m)+h(m)\\ &= ((f+g)+h)(m).\end{aligned}$$
Por lo tanto $+$ es asociativa.

3. Existe el elemento neutro. Sea $\overline{0} : M \to M$ dado por $\overline{0}(m) = 0_M$ para todo $m \in M$.

   a) Primero veamos que es un morfismo:
$$\begin{aligned}\overline{0}(m_1+m_2) &= 0\\ &= 0+0\\ &= \overline{0}(m_1)+\overline{0}(m_2).\end{aligned}$$
   Por lo tanto $\overline{0} \in Hom(M,M)$.

   b) Veamos que en efecto, cumple con ser neutro:
$$\begin{aligned}(f+\overline{0})(m) &= f(m)+\overline{0}(m)\\ &= f(m)+0_M\\ &= f(m).\end{aligned}$$

4. Existe el inverso aditivo. Sea $-f : M \to M$ dada por $(-f)(m) \doteqdot -f(m)$.

   a) Que es morfismo.
$$\begin{aligned}(-f)(m_1+m_2) &= -f(m_1+m_2)\\ &= -(f(m_1)+f(m_2))\\ &= -f(m_1)-f(m_2)\\ &= (-f)(m_1)+(-f)(m_2).\end{aligned}$$
   Por lo tanto $-f \in Hom(M,M)$.

   b) Que es el inverso aditivo.
$$\begin{aligned}(f+(-f))(m) &= f(m)+(-f)(m)\\ &= f(m)-f(m)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que $(Hom(M,M),+,\overline{0})$ es un grupo abeliano.

Ahora bien, si consideramos a $(Hom(M,M)$ con la composición de funciones y la función identidad $Id_M : M \to M$, que es un morfismo de grupos como elemento neutro, tenemos que $(Hom(M,M),\circ,Id_M)$ es un monoide.

Veamos ahora que se cumplen las leyes distributivas.

- Sean $f,g,h \in Hom(M,M)$ y $m \in M$. Entonces:
$$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(m) &= f((g+h)(m))\\ &= f(g(m)+h(m))\\ &= f(g(m))+f(h(m))\\ &= (f\circ g)(m)+(f\circ h)(m)\\ &= [(f\circ g)+(f\circ h)](m).\end{aligned}$$
Por lo tanto $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$.
- Análogamente se obtiene que $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$.

Así $(Hom(M,M),+,\circ,\overline{0},Id_M)$ es un anillo con las operaciones definidas. ■

Proposición 1.1.11. *Sea $M = \mathbb{Z}$, veremos que $Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, es decir que existe un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Para la demostración de esta proposición notemos como son los elementos de $Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Consideremos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un morfismo de grupos. Veamos que f queda determinada por $f(1)$:

- $f(1) = a$, donde $a \in \mathbb{Z}$.
- $$\begin{aligned}f(2) &= f(1+1)\\ &= f(1)+f(1)\\ &= a+a\\ &= 2\text{a}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}f(m+1) &= f(m)+f(1)\\ &= m\cdot n+n\\ &= (m+1)\cdot n.\end{aligned}$$
- Así por inducción se demuestra que para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple $f(m) = m\cdot a$.

Ahora bien, como f es aditiva, entonces

$$\begin{aligned}0 &= f(0)\\ &= f(n-n)\\ &= f(n)+f(-n).\end{aligned}$$

De donde $-f(n) = f(-n)$ y como $f(n) = nf(1)$, entonces $-f(n) = -nf(1)$. Por lo tanto f queda determinada por $f(1)$.

Pasemos ahora a la demostración. Definimos $\varphi : Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ dada por $\varphi(f) \doteqdot f(1)$. Veamos que éste es un isomorfismo de grupos.

Que es morfismo. Si $f,g \in Hom(M,M)$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)(1)\\ &= f(1)+g(1)\\ &= \varphi(f)+\varphi(g).\end{aligned}$$

Que es inyectivo.
Si $f \in Ker(\varphi)$, entonces $\varphi(f) = f(1) = 0$, con lo que $f = \overline{0}$.
Que es suprayectivo.
Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = n \cdot \_$ es un morfismo que además satisface

$$\varphi(f) = f(1) = n \cdot 1 = n.$$

Por lo tanto φ es isomorfismo. ■

Definición 1.1.12. *Sea G un grupo abeliano. Decimos que G es divisible si*

$$G = nG$$

para todo $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Observación 1.1.13. *En general ocurre $nG \subseteq G$, así para mostrar que un grupo es divisible es suficiente verificar que $G \subseteq nG$.*

Ejemplo 1.1.14. *$\mathbb{Q}$ es divisible ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y cualquier $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tenemos que $n \cdot \left(\frac{a}{nb}\right) = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y con ello $\mathbb{Q} \subseteq n\mathbb{Q}$.*

Notación 1.1.15. *En los diagramas cuando hagamos referencia a la unicidad de una función, morfismo, etc; colocaremos el símbolo !.*

Observación 1.1.16. *Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $Y \subseteq X$, entonces $(Y, \leq\restriction_{Y\times Y})$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Definición 1.1.17. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $C \subseteq A$ es una cadena en A si $(C, \leq\restriction_{C\times C})$ es un conjunto totalmente ordenado.*

Definición 1.1.18. *Sea A un conjunto de conjuntos. Decimos que f es una función de elección si para cada elemento $B \in A$, $f(B) \in B$. Es decir, que para todo elemento en $B \in A$ podemos escoger un elemento de $C \in B$.*

A lo largo de este trabajo utilizaremos los siguientes axiomas que son equivalentes.

Axioma 1.1.19. *(Axioma de Elección). Para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección.*

Axioma 1.1.20. *(Lema de Zorn). Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena C está acotada en A, entonces $(A, \leq)$ tiene un elemento máximo.*

Axioma 1.1.21. *(**AE**). El producto cartesiano de un conjunto de conjuntos no vacíos es no vacío.*

Cuando estemos usando cualquiera de estos teoremas lo haremos notar escribiendo **AE**.

1.2. Módulos

Definición 1.2.1. *Sean R un anillo y M un grupo abeliano. Decimos que M es un $R-$módulo izquierdo, si existe una función $\cdot : R\times M \to M$ dada por $(r,m)\mapsto r\cdot m$ que cumple:*

1. *Para todo $m\in M$:*
$$1\cdot m \;=\; m.$$
2. *Para cualesquiera $r,s\in R$ y $m\in M$:*
$$(rs)\cdot m \;=\; r\cdot(s\cdot m).$$
3. *Para todos $r_1,r_2\in R$ y $m\in M$:*
$$(r_1+r_2)\cdot m \;=\; r_1\cdot m + r_2\cdot m.$$
4. *Para cualesquiera $r\in R$ y $m_1,m_2\in M$:*
$$r\cdot(m_1+m_2) \;=\; r\cdot m_1 + r\cdot m_2.$$

Definición 1.2.2. *Sean R un anillo y M un grupo abeliano. Decimos que M es un $R-$módulo derecho, si existe una función $\cdot : M\times R \to M$ dada por $(m,r)\mapsto m\cdot r$ que cumple:*

1. *Para todo $m\in M$:*
$$m\cdot 1 \;=\; m.$$
2. *Para cualesquiera $r,s\in R$ y $m\in M$:*
$$m\cdot(rs) \;=\; (m\cdot r)\cdot s.$$
3. *Para todos $r_1,r_2\in R$ y $m\in M$:*
$$m\cdot(r_1+r_2) \;=\; m\cdot r_1 + m\cdot r_2.$$
4. *Para cualesquiera $r\in R$ y $m_1,m_2\in M$:*
$$(m_1+m_2)\cdot r \;=\; m_1\cdot r + m_2\cdot r.$$

Notación 1.2.3. *Denotamos que M es un $R-$módulo izquierdo por ${}_RM$. Análogamente denotamos que N es $R-$módulo derecho por N_R.*

Observación 1.2.4. *A partir de este momento, salvo en el caso en que exista lugar a confusión, se omitirá el subíndice $_R$ del anillo con el que se esté trabajando.*

Ejemplo 1.2.5. *Si F es un campo, entonces un espacio vectorial $_FV$ es un $F-$módulo izquierdo.*

Ejemplo 1.2.6. *Sea M un grupo abeliano. Notamos que M es un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo, con la siguiente operación: $\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$ dada por:*

1. *Para todo $m \in M$ se define $0_{\mathbb{Z}} \cdot m = 0_M$.*
2. *Para todos $n \in \mathbb{N}$ y $m \in M$ se define: $(n+1) \cdot m = n \cdot m + m$.*
3. *Si $n < 0$ y $m \in M$, entonces $n \cdot m = -[(-n) \cdot m]$.*

Definición 1.2.7. *Sean M y N $R-$módulos izquierdos. Decimos que una función $f : M \to N$ es un $R-$morfismo de M en N si cumple:*

1. *f es un morfismo de grupos.*
2. *Para todos $m \in M$ y $r \in R$ se tiene que: $r \cdot f(m) = f(r \cdot m)$.*

Ejemplo 1.2.8. *Si M y N son $R-$módulos izquierdos, entonces la función $\overline{0} : M \to N$ tal que para todo $m \in M$ cumple que $\overline{0}(m) = 0_N$, es un $R-$morfismo de módulos.*

Notación 1.2.9. *Sean M,N $R-$módulos izquierdos.*

$Hom_R(M, N) = \{f : M \to N \mid M, N$ *son $R-$modulos izquierdos y f es $R-$morfismo de módulos*$\}$.

Lema 1.2.10. *Sean M, N, L $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$, $g : N \to L$ $R-$morfismos. Entonces la composición $g \circ f : M \to L$ es un $R-$morfismo.*

Demostración. Dado que la composición de funciones aditivas es aditiva tenemos que $g \circ f : M \to L$ es aditiva. Ahora para $r \in R$ y $m \in M$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(r \cdot m) &= g(f(r \cdot m)) \\ &= g(r \cdot f(m)) \\ &= r \cdot g(f(m)) \\ &= r \cdot (g \circ f)(m). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3. Submódulos

Definición 1.3.1. *Sean R un anillo, M un $R-$módulo izquierdo y $N \subseteq M$. Entonces N es un $R-$submódulo izquierdo de M si:*

1. $0_M \in N$,
2. *Para todo* $n_1, n_2 \in N$ *se cumple* $n_1 + n_2 \in N$,
3. *Para cualesquiera* $r \in R$ *y* $n \in N$, $r \cdot n \in N$.

Análogamente si M es un $R-$módulo derecho y $N \subseteq M$ es tal que:

1. $0_M \in N$,
2. *Para todo* $n_1, n_2 \in N$ *se cumple* $n_1 + n_2 \in N$,
3. *Para cualesquiera* $r \in R$ *y* $n \in N$, $n \cdot r \in N$.

Entonces diremos que N es un $R-$submódulo derecho de M.

Observación 1.3.2. *Si M y N son $R-$módulos izquierdos tales que $N \subseteq M$, entonces N es un $R-$submódulo izquierdo de M.*

Proposición 1.3.3. *Sean R un anillo, M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Entonces la función inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es un $R-$morfismo de módulos.*

Demostración.

1. Aditividad. Sean $m_1, m_2 \in N$. Entonces

$$\begin{aligned} i(m_1 + m_2) &= m_1 + m_2 \\ &= i(m_1) + i(m_2). \end{aligned}$$

   Por lo tanto i es aditiva.

2. Sea $n \in N$ y $r \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} i(r \cdot n) &= r \cdot n \\ &= r \cdot i(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto i es $R-$morfismo de $R-$módulos izquierdos. ■

Observación 1.3.4. *Si M, N son $R-$módulos (izquierdos o derechos) y $f : M \to N$ es un $R-$morfismo de M a N, entonces $f(0_M) = 0_N$.*

Teorema 1.3.5. *Sean N, M $R-$módulos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo entre ellos. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si K es un $R-$submódulo izquierdo de M, entonces $f[K]$ es un $R-$submódulo izquierdo de N.*
2. *Si L es un $R-$submódulo izquierdo de N, entonces $f^{-1}[L]$ es un $R-$submódulo izquierdo de M.*

Demostración.

1. Por la observación 1.3.4 se tiene que $0_N = f(0_M) \in f[K]$.

   Sean $x_1, x_2 \in K$, entonces $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Con lo cual la suma de las imágenes de dos elementos de K está en $f[K]$.

   Para $r \in R$ tenemos $r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \in f[K]$.

2. Como L es un $R-$submódulo izquierdo de M, entonces $0_N \in L$. Ahora bien de la observación 1.3.4 tenemos que $0_M \in f^{-1}(\{0_N\})$, con la cual

   $0_M \in f^{-1}(L)$.

   Sean $x_1, x_2 \in f^{-1}(L)$, entonces $f(x_1), f(x_2) \in L$ con lo cual

   $$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in L$$

   y así

   $$(x_1 + x_2) \in f^{-1}(L).$$

   Para terminar si $r \in R$ y $x \in f^{-1}[L]$, entonces por ser L un $R-$submódulo izquierdo de N, $r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \in L$ y así $r \cdot x \in f^{-1}[L]$. ■

Corolario 1.3.6. *Sean N, M $R-$módulos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo entre ellos. Entonces $Ker(f)$ es un $R-$submódulo de M e $Im(f)$ es un $R-$submódulo de N.*

Observación 1.3.7. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Definimos la siguiente relación $n \sim m$ si $n - m \in N$.*

Veamos que la relación definida en la observación 1.3.7 es una relación de equivalencia en M:

1. Reflexiva. Sea $m \in M$. Entonces $m \sim m$ ya que $m - m = 0_M \in M$.
2. Simétrica. Sean $n, m \in M$. Si $n \sim m$, entonces $m - n \in N$ y como N es un $R-$submódulo de M, entonces $-(m - n) = -m + n \in N$ con lo cual $m \sim n$.
3. Transitiva. Sea $m_1, m_2, m_3 \in N$. Si $m_1 \sim m_2$ y $m_2 \sim m_3$, tenemos que $m_1 - m_2 \in N$ y $m_2 - m_3 \in N$. Como N es un $R-$módulo izquierdo, entonces

   $m_1 - m_3 = (m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) \in N$.

Definición 1.3.8. *Con las hipótesis de la observación 1.3.7, definimos la clase $m + N$ como el conjunto $m + N = \{n \in M \mid n \sim m\}$.*

Definición 1.3.9. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo de M. Definimos el cociente $\frac{M}{N}$ como el conjunto $\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$.*

Teorema 1.3.10. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Entonces $\frac{M}{N}$ es un $R-$módulo izquierdo con la operación $\cdot : R \times \frac{M}{N} \to \frac{M}{N}$, dada por $\cdot(r, m + N) \doteqdot r \cdot m + N$.*

Demostración. Primero $\frac{M}{N}$ es un grupo abeliano ya que, en teoría de grupos se demuestra que si N es un subgrupo normal de M, entonces el cociente $\frac{M}{N}$ es grupo; y además que es abeliano si y sólo si el subgrupo conmutador de M, M' es un subgrupo de N lo que ocurre ya que M es abeliano.

Sea $\cdot : R \times \frac{M}{N} \to \frac{M}{N}$. Veamos que la operación está bien definida.

Sean $m_1 + N, m_2 + N \in \frac{M}{N}$ tal que $m_1 + N = m_2 + N$, demostraremos que $r \cdot m_1 + N = r \cdot m_2 + N$ para toda $r \in R$.

Como $m_1 + N = m_2 + N$, entonces $m_1 - m_2 \in N$. Al ser N un $R-$submódulo tenemos que $r \cdot (m_1 - m_2) \in N$, pero $r \cdot (m_1 - m_2) = r \cdot m_1 - r \cdot m_2 \in N$ con lo cual $r \cdot m_1 + N = r \cdot m_2 + N$. Por lo tanto la operación está bien definida.

Sean $1, r, s, r_1, r_2 \in R$ y $m + N, m_1 + N, m_2 + N \in \frac{M}{N}$. Entonces

- Sea $1 \cdot m + N$. Como $1 \cdot m = m$ ya que M es un $R-$módulo izquierdo. Tenemos que $1 \cdot m + N = m + N$.
- Sea $(rs) \cdot m + N$. Dado que $(rs) \cdot m = r(s \cdot m)$, se cumple que $(rs) \cdot m + N = r(s \cdot m) + N$.
- Sea $(r_1 + r_2) \cdot m + N$. Como M es un grupo abeliano tenemos que $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$. Con lo cual $(r_1 + r_2) \cdot m + N = (r_1 \cdot m + r_2 \cdot m) + N = (r_1 \cdot m + N) + (r_2 \cdot m + N)$.
- Sea $r \cdot (m_1 + m_2) + N$. Tenemos que $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$, con lo cual

$$\begin{aligned} r \cdot (m_1 + m_2) + N &= (r \cdot m_1 + r \cdot m_2) + N \\ &= (r \cdot m_1 + N) + (r \cdot m_2 + N). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{M}{N}$ es un $R-$módulo izquierdo y se tiene el resultado. ∎

Teorema 1.3.11. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo de M. Entonces la función $\pi : M \to \frac{M}{N}$ dada por $\pi(m) = m + N$ es un $R-$morfismo de M a $\frac{M}{N}$.*

Demostración. Sean $a, b \in M$ entonces

$$\begin{aligned} \pi(a + b) &= (a + b) + N \\ &= (a + N) + (b + N) \\ &= \pi(a) + \pi(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto π es aditiva.
Sean ahora $r \in R$ y $a \in M$ entonces

$$\begin{aligned}\pi(r \cdot a) &= r \cdot a + N \\ &= r \cdot (a + N) \\ &= r \cdot \pi(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto π es un $R-$morfismo. ■

1.4. Morfismos y sucesiones exactas

1.4.1. Sucesiones exactas

Definición 1.4.1. *Sean A, B, C $R-$módulos izquierdos, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ $R-$morfismos. Decimos que la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta en B si*

$$Im(f) = Ker(g).$$

Observación 1.4.2. *De la definición anterior $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta en B si y sólo si $g \circ f = \bar{0}$ y $Ker(g) \subseteq Im(f)$.*

Notación 1.4.3. $\{0\}$ *es un $R-$módulo izquierdo (derecho) que se denota por $_*0$ (0_*).*

Ejemplo 1.4.4. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos, $f : M \to N$ un $R-$morfismo y el $R-$morfismo $\bar{0} : {}_*0 \to M$. Entonces ${}_*0 \xrightarrow{\bar{0}} M \xrightarrow{f} N$ es exacta en M si y sólo si $Ker(f) = \{0_M\}$.*

Teorema 1.4.5. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo. La sucesión ${}_*0 \xrightarrow{\bar{0}} M \xrightarrow{f} N$ es exacta en M si y sólo si f es inyectiva.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces

$$f(x) - f(y) = 0_N.$$

Al ser f un $R-$morfismo tenemos que

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0_N,$$

así $x - y \in Ker(f)$. Ahora por el ejemplo 1.4.4 tenemos que

$$x - y \in Ker(f) = \{0_M\}.$$

Por lo tanto $x - y = 0_M$ y así $x = y$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in Ker(f)$, entonces

$$f(x) = 0_N = f(0_M).$$

Siendo f inyectiva, entonces $x = 0_M$. Por lo tanto $Ker(f) \subseteq \{0_M\}$ y así $Ker(f) = \{0_M\}$. Nuevamente por el ejemplo 1.4.4 como se cumple que $Ker(f) = \{0_M\}$, entonces

$$_*0 \xrightarrow{\bar{0}} M \xrightarrow{f} N$$

es exacta en M. ■

Teorema 1.4.6.

- *La sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\bar{0}} {_*0}$ es exacta en B si y sólo si*

$$Im(f) = Ker(\bar{0}) = B.$$

- *La sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\bar{0}} {_*0}$ es exacta en B si y sólo si f es suprayectiva.*

Definición 1.4.7. *Decimos que la sucesión*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

es exacta si $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ es exacta para todo M_i.

Observación 1.4.8. *Decimos que la sucesión $_*0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow {_*0}$ es exacta corta si f es inyectiva, g suprayectiva y se cumple que $Im(f) = Ker(g)$. Cuando una sucesión sea exacta corta se le abreviará con la notación s.e.c.*

1.4.2. Tipos de morfismos

Definición 1.4.9. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un $R-$morfismo de M a N. Decimos que f es un monomorfismo, si f se cancela a la izquierda de morfismos; es decir, para cualesquiera dos morfismos g y h donde $U \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{f} N$ tales que $f \circ g = f \circ h$, se tiene que $g = h$.*

Teorema 1.4.10. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $f : M \longrightarrow N$ un $R-$morfismo de M a N:*

1. *f es inyectivo.*
2. *f es monomorfismo.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existen g, h dos morfismos tales que $f \circ g = f \circ h$ y que $g \neq h$. Dado que $g \neq h$ existe $m \in M$ tal que $g(m) \neq h(m)$.

Como f es inyectiva, entonces $f \circ g(m) \neq f \circ h(m)$ lo cual es una contradicción a la elección de f y g.

Por lo tanto f es monomorfismo.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos f es un monomorfismo que no es inyectivo. Como no es inyectivo existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $m_1 \neq m_2$ y $f(m_1) = f(m_2)$. Como

$$f(m_1) = f(m_2),$$

entonces

$$f(m_1) - f(m_2) = 0,$$

al ser f morfismo $f(m_1 - m_2) = 0$, es decir

$$(m_1 - m_2) \in Ker(f).$$

Sea el $R-$morfismo inclusión $i : Ker(f) \hookrightarrow M$. Notemos que

$$f \circ i = \overline{0}$$

ya que si $x \in Ker(f)$, entonces aplicando i tenemos $i(x) = x$ y aplicando f tenemos $f(x) = 0_M$. Por otro lado consideremos el $R-$morfismo $\overline{0} : Ker(f) \to M$.

Entonces

$$f \circ i = \overline{0} = f \circ \overline{0},$$

como f es monomorfismo, $i = \overline{0}$. Ahora para $(m_1 - m_2) \in Ker(f)$ aplicando i tenemos que $0_M = i(m_1 - m_2) = m_1 - m_2$. Por lo tanto $m_1 = m_2$. Lo cual contradice la elección de m_1 y m_2. Así f es inyectiva. ∎

Definición 1.4.11. *Si M, N son $R-$módulos izquierdos y existe $f : M \to N$ un $R-$morfismo inyectivo, entonces diremos que M se sumerge en N.*

Definición 1.4.12. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Decimos que f es un epimorfismo, si f se cancela a la derecha de morfismos; es decir, para cualesquiera dos morfismos g, h tales que $M \xrightarrow{f} N \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} V$, donde $g \circ f = h \circ f$, se tiene que $g = h$.*

Teorema 1.4.13. *Sean M, N $R-$módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N:*

1. *f es suprayectivo.*
2. *f es epimorfismo.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existen g, h dos $R-$morfismos tales que $g \circ f = h \circ f$ y que $g \neq h$. Como $g \neq h$, existe $n \in N$ tal que $g(n) \neq h(n)$. Como f es suprayectiva, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$ con lo que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(m) &= g(f(m)) \\ &= g(n) \neq h(n) \\ &= h(f(m)) \\ &= (h \circ f)(m). \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción a la elección de g y h. Por lo tanto f es epimorfismo.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $f : M \to N$ un epimorfismo. Recordemos que $f(M)$ es un $R-$submódulo de N por el corolario 1.3.6. Sea $M \xrightarrow{f} N \underset{\overline{0}}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} \frac{N}{f(M)}$ donde π es la función descrita en el teorema 1.3.11.

Si $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \pi \circ f(m) &= \pi(f(m)) \\ &= f(m) + f(M) \\ &= 0 + f(M) \\ &= f(M). \end{aligned}$$

Es decir para $m \in M$ se cumple que $\pi \circ f = \overline{0}$.

Por otro lado consideremos al $R-$morfismo $\overline{0}$, entonces $\overline{0} \circ f = \overline{0}$. Por hipótesis f es epimorfismo, así $\pi = \overline{0}$.

Si $n \in N$, entonces

$$\begin{aligned} n + f(M) &= \pi(n) \\ &= \overline{0}(n) \\ &= 0 + f(M). \end{aligned}$$

Con lo cual $n \in f(M)$. Por lo tanto $N \subseteq f(M)$, y así $N = f(M)$. ■

Definición 1.4.14. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Decimos que f es un bimorfismo si es un monomorfismo y un epimorfismo.*

Definición 1.4.15. *Sean N, M $R-$módulos izquierdos y $f : N \to M$ un $R-$morfismo de N a M. Decimos que f es un isomorfismo si existe $g : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N tal que $g \circ f = Id_M$ y $f \circ g = Id_N$.*

Teorema 1.4.16. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N:*

1. *f es isomorfismo.*
2. *f es bimorfismo.*
3. *f es biyección.*

Demostración. 2) $\Leftrightarrow$ 3) Si f es una biyección, entonces es inyectiva y suprayectiva. Por los teoremas 1.4.10 y 1.4.13 esto ocurre si y sólo si f es monomorfismo y epimorfismo. Por lo tanto f es bimorfismo. Y viceversa, si f es bimorfismo nuevamente por los teoremas 1.4.10 y 1.4.13 tenemos que f es biyección.

3) $\Rightarrow$ 1) Si f es biyección, entonces existe su inversa.

Sean $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N y supongamos que existe $g : N \to M$ una función tal que $f \circ g = Id_N$ y que $g \circ f = Id_M$. Veamos que g también es un $R-$morfismo.

- Para $n_1, n_2 \in N$ tenemos que existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $g(n_1) = m_1$ y $g(n_2) = m_2$. Con lo cual
$$\begin{aligned} g(n_1 + n_2) &= g(f(m_1) + f(m_2)) \\ &= g(f(m_1 + m_2)) \\ &= m_1 + m_2 \\ &= g(n_1) + g(n_2). \end{aligned}$$
- Sean $r \in R$ y $n \in N$. Para ese $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Entonces
$$\begin{aligned} g(r \cdot n) &= g(r \cdot f(m)) \\ &= g(f(r \cdot m)) \\ &= r \cdot m \\ &= r \cdot g(n). \end{aligned}$$

Con lo que la inversa también es un $R-$morfismo y así f es isomorfismo.
1) $\Rightarrow$ 3) Es inmediato. ■

Definición 1.4.17. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A, B dos $R-$submódulos izquierdos de M. Definimos:*

1. ${}_R[A, B] = \{N$ *es $R-$submódulo de M* $\mid$ *A es $R-$submódulo de N y N es $R-$submódulo de B*$\}$.
2. ${}_R(A, B] = \{N$ *es $R-$submódulo de M* $\mid$ *A es $R-$submódulo de N , N es $R-$submódulo de B y $A \neq N$*$\}$.
3. ${}_R[A, B) = \{N$ *es $R-$submódulo de M* $\mid$ *A es $R-$submódulo de N , N es $R-$submódulo de B y $N \neq B$*$\}$.
4. ${}_R(A, B) = \{N$ *es $R-$submódulo de M* $\mid$ *A es $R-$submódulo de N , N es $R-$submódulo de B , $A \neq N$ y $N \neq B$*$\}$.

Proposición 1.4.18. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Si $\{N_i\}_{i \in I}$ es una familia en ${}_R[{}_*0, M]$, entonces $\bigcap_{i \in I} N_i \in {}_R[{}_*0, M]$.*

Demostración. Demostraremos que $\bigcap_{i \in I} N_i$ es $R-$submódulo izquierdo de M.

1. $0_M \in \bigcap_{i \in I} N_i$, ya que $0_M \in N_i$ para toda $i \in I$.
2. Sean $x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i$. Como $x, y \in N_i$ para toda $i \in I$, entonces $x + y \in N_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $x + y \in \bigcap_{i \in I} N_i$.

3. Sea $r \in R$ y $x \in \bigcap_{i \in I} N_i$. Dado que $r \cdot x \in N_i$ para toda $i \in I$, tenemos que $r \cdot x \in \bigcap_{i \in I} N_i$.

■

Definición 1.4.19. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Definimos el submódulo generado por X en M como*

$$_R\langle X \rangle = \bigcap \{N \text{ es } R\text{−submódulo de } M \mid X \subseteq N\}.$$

Observación 1.4.20. *Notemos que para un subconjunto X de M, un $R-$módulo izquierdo, el submódulo generado por X en M es el menor $R-$submódulo, en el sentido de la contención, que contiene a X.*

Proposición 1.4.21. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Entonces sucede que $_R\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} r_i \cdot x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, I \text{ finito} \right\}$, donde $\sum_{i \in \varnothing} r_i x_i = 0_M$.*

Corolario 1.4.22. *$_R\langle X \rangle$ es un $R-$submódulo izquierdo de M.*

Demostración. Es una consecuencia automática de la proposición 1.4.18. ■

Proposición 1.4.23. *Si M es un $R-$módulo izquierdo, $X, Y \subseteq M$ y $X \subseteq Y$, entonces $_R\langle X \rangle \subseteq {_R\langle Y \rangle}$.*

Observación 1.4.24. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Si N es $R-$submódulo izquierdo de M, entonces $_R\langle N \rangle = N$.*

1.4.3. Teoremas de isomorfismo

Teorema 1.4.25. *(Primer teorema de isomorfismo) Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M en N. Entonces $\frac{M}{Ker(f)} \cong f(M)$.*

Demostración. Definamos la asignación $\overline{f} : \frac{M}{Ker(f)} \to f(M)$ dada por:

$$\overline{f}(x + Ker(f)) = f(x).$$

Veamos que $\overline{f}$ está bien definida. Supongamos que $x + Ker(f) = y + Ker(f)$. Entonces $x - y \in Ker(f)$, con lo que

$$0 = f(x - y) = f(x) - f(y)$$

y así

$$f(x) = f(y).$$

Demostraremos que $\overline{f}$ es un morfismo. Sean $x + Ker(f), y + Ker(f) \in \frac{M}{Ker(f)}$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{f}((x+y)+Ker(f)) &= f(x+y)\\ &= f(x)+f(y)\\ &= \overline{f}(x+Ker(f))+\overline{f}(y+Ker(f)).\end{aligned}$$

Sea $r \in R$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{f}(r(x+Ker(f))) &= \overline{f}(rx+Ker(f))\\ &= f(rx)\\ &= rf(x)\\ &= r\overline{f}(x+Ker(f)).\end{aligned}$$

Demostremos que $\overline{f}$ es isomorfismo.

Sean $x+Ker(f), y+Ker(f) \in \frac{M}{Ker(f)}$ tales que $\overline{f}(x+Ker(f)) = \overline{f}(y+Ker(f))$.

Demostraremos $x+Ker(f) = y+Ker(f)$.

Por hipótesis $\overline{f}(x+Ker(f)) = \overline{f}(y+Ker(f))$, entonces $f(x) = f(y)$. Dado que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x)-f(y) = 0_M$. Como f es morfismo $f(x)-f(y) = f(x-y)$ con lo cual $x-y \in Ker(f)$. De lo anterior $x+Ker(f) = y+Ker(f)$ y así $\overline{f}$ es inyectiva.

Si $y \in f(M)$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Consideremos la clase $x+Ker(f)$, la cual bajo $\overline{f}$ nos da $\overline{f}(x+Ker(f)) = f(x) = y$. Por lo tanto $\overline{f}$ es suprayectiva.

Por lo tanto $\overline{f}$ es isomorfismo y tenemos el resultado. ■

Corolario 1.4.26. *Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces $\frac{M}{Ker(f)} \cong N$.*

Definición 1.4.27. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y H, K $R-$submódulos izquierdos de M. Entonces $H+K = \{h+k : h \in H, k \in K\}$.*

Proposición 1.4.28. *Sean H, K $R-$módulos izquierdos. Entonces*

$$H+K = {}_R\langle H \cup K\rangle.$$

Demostración. Por demostrar que $H+K$ es el menor $R-$submódulo de M que contiene a $H \cup K$. Primero veremos que es un submódulo. Tenemos que:

1. $0 = 0+0 \in H+K$.
2. Sean $x, y \in H+K$, $x = (a_1+b_1), y = (a_2+b_2)$ con $a_1, a_2 \in H$ y $b_1, b_2 \in K$. Por lo tanto $(a_1+b_1)+(a_2+b_2) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)$, que está en $H+K$.
3. Sea $r \in R$, entonces $r \cdot (a_1+b_1) = r \cdot a_1 + r \cdot b_1 \in H+K$.

Como $H \subseteq H+K$ y $K \subseteq H+K$, entonces $H \cup K \subseteq H+K$ y así por la proposición 1.4.23 y la observación 1.4.24 se tiene que $\langle H \cup K\rangle \subseteq \langle H+K\rangle = H+K$. Ahora

$$H+K \subseteq \left\{\sum_{i\in I} r_i x_i \in M \mid r_i \in R, x_i \in H \cup K,\ \text{I finito}\right\} = \langle H \cup K\rangle.$$

Por lo tanto $\langle H \cup K\rangle = H+K$. ■

Teorema 1.4.29. *(Segundo teorema de isomorfismo) Sean M un $R-$módulo izquierdo y H, K $R-$submódulos izquierdos de M. Entonces*

$$\frac{K}{H\cap K}\cong\frac{H+K}{H}.$$

Demostración. Antes de demostrar este teorema hagamos una observación necesaria. Si H,K son $R-$módulos, entonces hemos visto como se define $H+K$. Ahora

$$\frac{H+K}{H}=\{(h+k)+H\mid h\in H\ ,\ k\in K\}.$$

Pero si $(h+k)+H\in\frac{H+K}{H}$, entonces

$$\begin{aligned}(h+k)+H &= (h+H)+(k+H)\\ &= H+(k+H)\\ &= k+H,\end{aligned}$$

con lo que los elementos de $\frac{H+K}{H}$ son elementos de la forma $k+H$.

Pasemos a la demostración. Consideremos a la inclusión $i:K\hookrightarrow(H+K)$, la proyección $\pi:(H+K)\rightarrow\frac{H+K}{H}$, y la composición de estos $R-$morfismos:

$$K\overset{i}{\hookrightarrow}(H+K)\overset{\pi}{\rightarrow}\frac{H+K}{H}.$$

Demostraremos que $Ker(\pi\circ i)=H\cap K$. Sea $x\in Ker(\pi\circ i)$, entonces:

$$\begin{aligned}H &= (\pi\circ i)(x)\\ &= \pi(i(x))\\ &= \pi(0+x)\\ &= x+H.\end{aligned}$$

Ahora $x\in H$ porque $H=x+H$. Tenemos que $K\overset{i}{\hookrightarrow}(H+K)\overset{\pi}{\rightarrow}\frac{H+K}{H}$ con lo cual $x\in K$ y así $x\in H\cap K$. Por lo tanto $Ker(\pi\circ i)\subseteq K\cap H$.

Si $x\in H\cap K$, entonces en particular $x\in H$. Así $i(x)=0+x$ y $\pi(0+x)=x+H$ como $x\in H$, entonces $x+H=H$. Por lo tanto $x\in Ker(\pi\circ i)$. Por lo tanto $Ker(\pi\circ i)=H\cap K$ y por el primer teorema de isomorfismo tenemos que $\frac{K}{H\cap K}\cong Im(\pi\circ i)$.

Para finalizar notemos que $Im(\pi\circ i)=\frac{H+K}{H}$. Como pasa que $Im(\pi\circ i)\subseteq\frac{H+K}{H}$. Sólo veremos la otra contención.

Sea $(h+k)\in\frac{H+K}{H}$. Por la observación hecha al comienzo de esta demostración $(h+k)+H=K+H=(\pi\circ i)(k)$. Por lo tanto $\frac{H+K}{H}\subseteq Im(\pi\circ i)$ y así $Im(\pi\circ i)=\frac{H+K}{H}$ ■

Teorema 1.4.30. *(Tercer teorema de isomorfismo) Sean M un $R-$módulo izquierdo, H un $R-$submódulo de L y L un $R-$submódulo de M. Entonces*

$$\frac{M}{L} \cong \frac{\frac{M}{H}}{\frac{L}{H}}.$$

Demostración. Consideremos $\pi : \frac{M}{H} \to \frac{M}{L}$ la asignación dada por

$$\pi(x+H) = x+L.$$

Demostremos que π es un epimorfismo con núcleo $\frac{L}{H}$ y usando el primer teorema de isomorfismo, obtendremos el resultado.

Demostremos que π está bien definida. Sean $x+H, y+H \in \frac{M}{H}$ tales que $x+H = y+H$. Por hipótesis $H \subseteq L$, entonces $x-y \in L$ con lo que

$$\begin{aligned} \pi(x+H) &= x+L \\ &= y+L \\ &= \pi(y+H). \end{aligned}$$

Ahora $\pi(x+H) = x+L$, así:

$$\begin{aligned} \pi\left((x+H)+(y+H)\right) &= \pi\left((x+y)+H\right) \\ &= (x+y)+L \\ &= (x+L)+(y+L) \\ &= \pi(x+H)+\pi(y+H). \end{aligned}$$

Por otro lado si $r \in R$, entonces:

$$\begin{aligned} \pi(r\cdot(x+H)) &= \pi((r\cdot x)+H) \\ &= (r\cdot x)+L \\ &= r\cdot(x+L) \\ &= r\cdot\pi(x+L). \end{aligned}$$

Por lo tanto π es un $R-$morfismo.

Demostraremos que $Ker(\pi) = \frac{L}{H}$. Sea $x+H \in Ker(\pi)$, entonces

$$\pi(x+H) = 0+L$$

por otro lado

$$\pi(x+H) = x+L,$$

de donde $x \in L$; así

$Ker(\pi) \subseteq \frac{L}{H}$. Ahora sea $x+H \in \frac{L}{H}$, entonces $x \in L$ con lo que

$$\pi(x+H) = x+L = 0+L,$$

así $x+H \in Ker(\pi)$. Por lo tanto $Ker(\pi) = \frac{L}{H}$.

Demostremos que π es epimorfismo. Sea $m+L \in \frac{M}{L}$. Dado que $m \in M$, consideremos la clase $m+H \in \frac{M}{H}$ la que bajo la función π nos da $\pi(m+H) = m+L$. Por lo tanto π es epimorfismo.

Al ser $Ker(\pi) = \frac{L}{H}$ y π epimorfismo, entonces se cumple la afirmación. ∎

1.5. Núcleos, conúcleos y retículas

1.5.1. Núcleos y conúcleos

Definición 1.5.1. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Decimos que el par (k, K) es un núcleo de f si:*

1. *K es un $R-$módulo izquierdo.*
2. *$k : K \to M$ es un $R-$morfismo de K a M tal que $f \circ k = \overline{0} : K \to N$.*
3. *Para todo $R-$morfismo $g : U \to M$ tal que $f \circ g = \overline{0}$, existe un único $R-$morfismo $\varphi : U \to K$ tal que $k \circ \varphi = g$.*

Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend left, "\overline{0}"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
& U \arrow[ul, dashed, "!\varphi"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\overline{0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.5.2. *Sea $f : M \to N$ un morfismo de $R-$módulos. Entonces la pareja $(i, Ker(f))$ es un núcleo de f, donde i es la inclusión $i : Ker(f) \to N$.*

Definición 1.5.3. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Decimos que el par (c, C) es un conúcleo de f si:*

1. *C es un $R-$módulo izquierdo*
2. *$c : N \to C$ es un $R-$morfismo de N a C tal que $c \circ f = \overline{0} : M \to C$*
3. *Para todo $R-$morfismo $g : N \to D$ tal que $g \circ f = \overline{0}$, existe un único $R-$morfismo $\varphi : C \to D$ tal que $\varphi \circ c = g$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\overline{0}"] \arrow[dr, "\overline{0}"'] & N \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, dashed, "!\varphi"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.5.4. *Sean M, N $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Entonces la pareja $(\pi, \frac{N}{Im(f)})$ es un conúcleo para f, donde $\pi : N \to \frac{N}{f(M)}$ es la proyección natural.*

Demostración. Sean $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N, $\pi : N \to \frac{N}{f(M)}$ y la composición de estos dos $R-$morfismos

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \frac{N}{f(M)}.$$

Notamos que si $x \in M$, entonces $f(x) \in f(M)$ y $\pi(f(x)) = f(x) + f(M)$, pero $f(x) \in f(M)$.

Consideremos $g : N \to H$ tal que $g \circ f = \overline{0}$ y definamos

$$\varphi : \frac{N}{f(M)} \to H$$

dado por

$$\varphi(n + f(M)) = g(n).$$

Veamos que efectivamente φ es el $R-$morfismo buscado. Demostremos que φ está bien definido.

Sean $n_1 + f(M), n_2 + f(M) \in \frac{N}{f(M)}$ tales que

$$n_1 + f(M) = n_2 + f(M).$$

Como $n_1 + f(M) = n_2 + f(M)$, entonces $n_1 - n_2 \in f(M)$ con lo que

$$n_1 - n_2 = f(x)$$

para algún $x \in M$. Ahora tenemos que aplicando la función g nos queda

$$0_H = g(f(x)) = g(n_1 - n_2)$$

pero g es $R-$morfismo con lo cual

$$g(n_1 - n_2) = g(n_1) - g(n_2).$$

Por lo tanto $0_H = g(n_1) - g(n_2)$ y así $g(n_1) = g(n_2)$.

Aditividad de $\overline{g}$. Sean $m_1 + f(M), m_2 + f(M) \in \frac{N}{f(M)}$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi((m_1 + f(M)) + (m_2 + f(M))) &= \varphi((m_1 + m_2) + f(M)) \\ &= g(m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Como g es $R-$morfismo, entonces

$$g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2)$$

por definición

$$g(m_1) + g(m_2) = \varphi(m_1 + f(M)) + \varphi(m_2 + f(M)).$$

Por lo tanto φ es aditiva.

Unicidad de φ. Si existiera $\overline{g} : \frac{N}{f(M)} \to H$ tal que $\overline{g} \circ \pi = g$, entonces $\varphi \circ \pi = g = \overline{g} \circ \pi$. Como π es epimorfismo, entonces se cancela a la derecha de morfismos, con lo que $\varphi = \overline{g}$ y así se tiene la unicidad. ∎

1.5.2. Retículas

Definición 1.5.5. *Decimos que una cuarteta* $(L, \leq, \wedge, \vee)$ *es una retícula si:*

1. $(L, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado (COPO).*
2. *Para todos* $a, b \in L$ *existen* $a \wedge b \in L$ *y* $a \vee b \in L$*, donde* $a \wedge b$ *es por definición la mayor de las cotas inferiores para* a *y* b*; análogamente* $a \vee b$ *es la menor de las cotas superiores comunes para* a *y* b*. A* $a \wedge b$ *se le llama ínfimo para* a *y* b *y a* $a \vee b$ *se le llama supremo para* a *y* b*.*

Definición 1.5.6. *Sea* $(L, \leq, \wedge, \vee)$ *una retícula. Decimos que una retícula es completa si para cualquier subconjunto* $S \subseteq L$ *existe un supremo y un ínfimo.*

Proposición 1.5.7. *Sea* $(L, \leq, \wedge, \vee)$ *una retícula completa. Entonces para cualquier* $S \subseteq L$ *el supremo y el ínfimo son únicos.*

Demostración. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula completa, $S \subseteq L$ y $a, a^{'} \in L$ supremos de S. Como a es supremo de S y $a^{'}$ es cota superior, entonces $a \leq a^{'}$. Análogamente $a^{'} \leq a$. Así $a = a^{'}$.

De manera similar se demuestra que el supremo de todo subconjunto de L es único. ■

Recordatorio 1.5.8. *Sean* R *un anillo y* M *un* $R-$*módulo izquierdo. Entonces* ${}_R[_*0, M] = \{N$ *es* $R-$*submódulo de* $M \mid N$ *es* $R-$*submódulo de* $M\}$*.*

Observación 1.5.9. *Si* R *es un anillo y* M *es un* $R-$*módulo izquierdo, entonces* $({}_R[_*0, M], \leq)$ *es un COPO con el siguiente orden: para* $N, N^{'} \in {}_R[_*0, M]$ *decimos que* $N \leq N^{'}$ *si* $N \subseteq N^{'}$*; es decir el orden definido es el determinado por la contención.*

Proposición 1.5.10. *Sean* R *un anillo y* M *un* $R-$*módulo izquierdo. Entonces* $({}_R[_*0, M], \leq, \wedge, \vee)$ *es una retícula completa.*

Demostración. Tenemos que $({}_R[_*0, M], \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado por la observación 1.5.9.

Demostraremos ahora que cualquier familia $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq {}_R[_*0, M]$, tiene un ínfimo y un supremo.

Sea $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq {}_R[_*0, M]$

1. Demostremos que $\bigcap\limits_{i \in I} N_i$ es el ínfimo para $\{N_i\}_{i \in I}$, es decir la mayor de las cotas inferiores para $\{N_i\}_{i \in I}$. Tenemos que $\bigcap\limits_{i \in I} N_i$ es un $R-$submódulo de N_j para toda $j \in I$.

   Supongamos que existe L un $R-$submódulo de M tal que L es $R-$submódulo izquierdo de N_i para toda $i \in I$, entonces L es $R-$submódulo de $\bigcap\limits_{i \in I} N_i$, con lo que $\bigcap\limits_{i \in I} N_i = \bigwedge\limits_{i \in I} N_i = \underset{i \in I}{inf}\, \{N_i\}$.

2. Consideremos $\left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle = \left\{ \sum_{j\in F} x_j \mid x_j \in N_j, F \subseteq I, F \text{ finito} \right\}$. Notamos que por la observación 1.4.24, $N_i = {}_R\langle N_i \rangle$ es $R-$submódulo de $\left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle$ para toda $i \in I$.

   Y además es la menor de las cotas superiores, ya que si consideramos a $L^{'}$ un $R-$submódulo izquierdo de M tal que para toda $i \in I$, N_i es un $R-$submódulo izquierdo de $L^{'}$. Notamos que cualquier suma finita de elementos de $\bigcup_{i\in I} N_i$ está contenida en $L^{'}$ por ser éste un $R-$submódulo de M, con lo cual para todo $F \subseteq I$ conjunto finito con $x_j \in \bigcup_{i\in I} N_i$ tenemos que $\sum_{j\in F} x_j \in L^{'}$.

   Por lo tanto $\left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle \subseteq L^{'}$ y así tenemos que $\left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle = \bigvee_{i\in I} N_i = \underset{i\in I}{sup}\{N_i\}$.

Por lo tanto ${}_R[{}_*0, M]$ es una retícula completa. ∎

Ejemplo 1.5.11. $(\mathbb{N}, "divide\ a", M.C.D, m.c.m)$ *es una reticula completa.*[1]

Definición 1.5.12. *Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Decimos que una retícula es distributiva, si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se cumple: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.*

Ejemplo 1.5.13. *Sea X un conjunto. Entonces $(\wp(X), \subseteq, \cap, \cup)$ es una retícula completa y distributiva.*

Definición 1.5.14. *Si $A \subseteq X$, entonces se dice que A tiene complemento y es $B = X \setminus A$. Cumple que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Podríamos preguntarnos cuando se puede generalizar el concepto de *complemento* en una retícula, en particular en la retícula de submódulos de un $R-$módulo. Lo cual nos lleva a la siguiente idea: Si M es un $R-$módulo, N un $R-$submódulo de él y si L es un complemento de N en ${}_R[{}_*0, M]$, entonces deberá ocurrir que $L + N = M$ y que $L \cap N = {}_*0$.

Notación 1.5.15. *Sean M un $R-$módulo izquierdo, N un R-submódulo de M y L un R-submódulo de M. Si ocurre que $L + N = M$ y $L \cap N = {}_*0$, entonces diremos que $L + N$ es directa y escribiremos $L \oplus N$.*

Observación 1.5.16. *Sean M un $R-$módulo izquierdo, N un R-submódulo de M y L un R-submódulo de M. Si L es un complemento de N en ${}_R[{}_*0, M]$, entonces escribiremos $L \oplus N$.*

Definición 1.5.17. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que ${}_R[{}_*0, M]$ es complementada si para todo A un $R-$submódulo de M, existe B un $R-$submódulo de M tal que $A \oplus B = M$.*

[1] Recordemos que M.C.D. se refiere al máximo común divisor, mientras que m.c.m. se refiere al mínimo común múltiplo de dos números.

Proposición 1.5.18. *Sean R un campo y M un $R-$módulo izquierdo. Entonces ${}_R[_*0, M]$ es una retícula complementada.*

Demostración. Si A es un $R-$submódulo de M, entonces existe $\beta \subseteq A$, tal que β es base, la cual se puede completar a una base de M. Supongamos que $\gamma \subseteq M$ tal que $\beta \cup \gamma$ es una base de M, entonces $\langle \gamma \rangle$ es un complemento para A. ■

Observación 1.5.19. *Los complementos no son únicos. Consideremos a ${}_{\mathbb{R}}[0, \mathbb{R}^2]$ y los siguientes elementos de ella $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ y $C = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Observamos que $A \oplus B = \mathbb{R} = A \oplus C$, y sin embargo $B \neq C$.*

Definición 1.5.20. *(**AE**) Sean $\{(A_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos parcialmente ordenados cada uno respectivamente con su orden. Definimos el producto de esta familia como:*

$$\prod_{i \in I} A_i \doteq \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \right\}.$$

Es decir $f = (f(i))_{i \in I}$.

Para esta familia definimos un orden en $\prod_{i \in I} A_i$ dado por: $\{f(i)\}_{i \in I} \leq \{g(i)\}_{i \in I}$ si y sólo si $f(i) \leq_i g(i)$ para toda $i \in I$.

Proposición 1.5.21. *Sea $\{(A_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos parcialmente ordenados. El producto de ella con el orden definido en la definición 1.5.20, $\left(\prod_{i \in I} A_i, \leq\right)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Proposición 1.5.22. *Si $\{(L_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i)\}_{i \in I}$ es una familia de retículas completas, entonces $\prod_{i \in I} L_i$ es una retícula completa con el orden dado en la definición 1.5.20.*

Demostración. Sean $\overline{f} : I \to \bigcup_{i \in I} L_i$ y $\underline{f} : I \to \bigcup_{i \in I} L_i$ dadas por

$$\overline{f}(i) = \vee_i f_j(i) \text{ y } \underline{f}(i) = \wedge_i f_j(i).$$

1. Afirmamos que $\overline{f} = \bigvee_{j \in J} f_j$. Demostraremos que $f_j \leq \overline{f}$ para toda $j \in J$.

   Por definición $\overline{f}(i) = \vee_i f_j(i)$, tenemos que para toda i se cumple que $f_j(i) \leq \vee_i f_j(i)$. Así para toda $j \in J$ tenemos que $f_j \leq \overline{f}$.

   Supongamos existe h tal que $f_j \leq h$ para toda $j \in J$. Entonces para cualquier $i \in I$ tenemos que $f_j(i) \leq h(i)$ y esto para toda $j \in J$. Por lo tanto $\vee_i f_j(i) \leq h(i)$.

   Por lo tanto $\underline{f} \leq h$ y así $\underline{f} = \bigvee_{j \in J} f_j$.

2. Afirmamos que $\underline{f} = \bigwedge_{j \in J} f_j$; es decir $\underline{f} \leq f_j$ para toda $j \in J$.

   Por definición $\underline{f}(i) = \wedge_i f_j(i)$, pero $\wedge_i f_j(i) \leq f_j(i)$ para toda i. De lo anterior $\underline{f} \leq f_j$ para toda $j \in J$.

   Supongamos ahora que existe g tal que $g \leq f_j$ para toda $j \in J$. Entonces para cualquier $i \in I$ $g(i) \leq f_j(i)$ para toda $j \in J$. Por lo tanto $g(i) \leq \wedge_i f_j(i)$.

   Por lo tanto $g(i) \leq \underline{f}$ y así $\underline{f} = \bigwedge_{j \in J} f_j$. ■

Definición 1.5.23. *Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Decimos que $S \subseteq L$ es una subretícula si:*

1. *S es cerrada bajo $\wedge$; es decir $\wedge \restriction_{S \times S}: S \times S \to S$ es función.*
2. *S es cerrada bajo $\vee$; es decir $\vee \restriction_{S \times S}: S \times S \to S$ es función.*

Definición 1.5.24. *Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula completa. Definimos el elemento menor L como $0 \doteqdot \bigwedge L$ y el elemento mayor de L como $1 \doteqdot \bigvee L$. Notamos que la unicidad de estos elementos nos la da la proposición 1.5.7.*

Observación 1.5.25. *Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula completa, entonces existen elementos mayor y menor.*

Definición 1.5.26. *Sea $\{(L_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i)\}_{i \in I}$ una familia de retículas con 0; es decir existe $0_i = \bigwedge L_i$ para cada $i \in I$. Definimos el coproducto de la familia como:*

$$\coprod_{i \in I} L_i \doteqdot \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} L_i \mid f(i) \in L_i \text{ y } f(i) = 0_i \text{ para casi toda } i \in I \right\}.$$

Observación 1.5.27. *Para $\{(L_i, \leq_i, \wedge_i, \vee_i)\}_{i \in I}$ una familia de retículas con 0, el coproducto de la familia queda determinado de la siguiente manera:*

$$\coprod_{i \in I} L_i \doteqdot \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} L_i \mid f(i) \in L_i \text{ y } sop(f) \text{ es finito} \right\}.$$

Proposición 1.5.28. *Sea $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de retículas con 0. Entonces $\coprod_{i \in I} L_i$ es una subretícula de $\prod_{i \in I} L_i$.*

Demostración. Sean f, g dos funciones en $\coprod_{i \in I} L_i$. Por definición f y g tienen soporte finito. Si $i \in sop(f \wedge g)$, entonces $i \in (sop(f) \cap sop(g)) \subseteq sop(f)$ el cual es finito, por lo cual $f \wedge g \in \coprod_{i \in I} L_i$.

Ahora si $i \in sop(f \vee g)$, entonces tenemos que $f(i) \vee g(i) \neq 0_i$. Lo anterior es válido si y sólo si $i \in sop(f) \cup sop(g)$. De lo anterior tenemos que $sop(f \vee g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$ los cuales al ser finitos, su unión también lo es. Por lo tanto $f \vee g \in \coprod_{i \in I} L_i$. ■

Proposición 1.5.29. *Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es una familia de retículas distributivas, entonces $\prod_{i\in I} L_i$ es una retícula distributiva.*

Demostración. Sea $i \in I$. Entonces

$$(f \wedge (g \vee h))(i) = f(i) \wedge (g(i) \vee h(i)) = (f(i) \vee g(i)) \wedge (f(i) \vee h(i)),$$

donde la segunda igualdad es válida ya que se cumple la distributividad en la i-ésima entrada. ■

Proposición 1.5.30. *Si $(L, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(L, \leq, \text{mín}, \text{máx})$ es una retícula distributiva.*

Demostración. Sean $a, b, c \in L$, queremos ver qué sucede con $a \wedge (b \vee c)$ o $b \wedge (a \vee c)$ o $c \wedge (a \vee b)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b \leq c$, entonces ocurre:

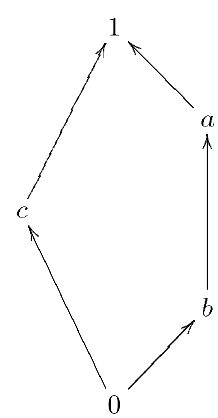
- $a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a$.
- $b \wedge (a \vee c) = b \wedge c = b$.
- $c \wedge (a \vee b) = c \wedge b = b$.

Ahora bien $a = a \vee a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, también $b = a \vee b = (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$ y por último $b = a \vee b = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$, con lo que la distributividad se cumple. Por lo tanto $(L, \leq, \text{mín}, \text{máx})$ es una retícula distributiva. ■

Ejemplo 1.5.31. $(\mathbb{N}, \leq, \text{mín}, \text{máx})$ *es una retícula distributiva.*

Pero no todas las retículas son distributivas.

Teorema 1.5.32. *La retícula del pentágono:*



no es distributiva.

Demostración. Sean a, b, c tales que $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ y $b < a$. Entonces

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge 1 \\ &= a \neq b \\ &= b \vee 0 \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

Por lo tanto no es distributiva. ■

Teorema 1.5.33. *La reticula del diamante:*

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur] & b \arrow[u] & c \arrow[ul] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

no es distributiva.

Demostración. Sean a, b, c tales que $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ y $b < a$. Entonces

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge 1 \\ &= a \neq 0 \\ &= 0 \vee 0 \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

Por lo tanto no es distributiva. ■

Definición 1.5.34.

- *Definimos la propiedad modular (PM) si para cualesquiera a, b, c tales que $b \leq a$, se cumple que $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.*

- *Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula. Decimos que la retícula es modular si en ella vale la propiedad modular, es decir para cualesquiera $a, b, c \in L$ tales que $b \leq a$ se cumple $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.*

Teorema 1.5.35. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces ${}_R[0, M]$ es modular.*

Demostración. Sean $A, B, C \in {}_R[0, M]$ tal que $B \subseteq A$. Demostraremos que $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$.

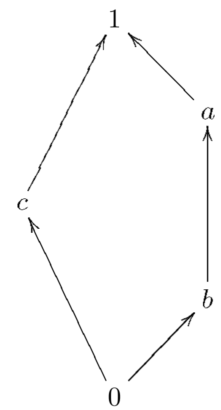
Como $(A \cap C) \subseteq C$, $C \subseteq (B + C)$ y por hipótesis $B \subseteq A$, entonces

$$B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C).$$

Ahora si $x \in A \cap (B + C)$, entonces $x = b + c$ con $x \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ ahora $c \in A$ ya que $b \in B \subseteq A$ y $c = (x - b) \in A$. Por lo tanto $x \in B + (A \cap C)$. ■

Proposición 1.5.36. *El pentágono no es modular.*

Demostración. Consideremos nuevamente la retícula del pentágono:



Entonces notamos que se cumple que $b \leq a$ y sin embargo:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge 1 \\ &= a \neq b \\ &= b \vee 0 \\ &= b \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$ ■

Observación 1.5.37. *Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula distributiva, entonces es modular. Esto se cumple ya que al cumplirse la distributividad, tenemos que para $a, b, c \in L$ se cumple que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Si además tuviéramos que $b \leq a$, entonces $(a \wedge b) = b$ con lo cual $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$, que es precisamente la condición para que $(L, \leq, \wedge, \vee)$ sea modular.*

Lema 1.5.38. *Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula, entonces $b \vee (a \wedge c) \leqq a \wedge (b \vee c)$.*

Teorema 1.5.39. *Una retícula $(L, \leq, \wedge, \vee)$ con más de 5 elementos es modular si y sólo si no tiene subretículas de la forma del pentágono.*

Demostración. $\Rightarrow$) Por contrapuesta. Dado que el pentágono no es modular por la proposición 1.5.36, cualquier retícula que tenga como subretícula a una de la forma pentágono no puede ser modular.

$\Leftarrow$) La demostración de esta implicación la haremos por contradicción. Supongamos que $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es un retícula con más de 4 elementos que no tiene subretículas de la forma del pentágono y no es modular.

Sean $a, b, c \in L$ tales que $b \leq a$ pero $b \vee (a \wedge c) \lneqq a \wedge (b \vee c)$.

Notamos que $b \lneqq a$ ya que si $b = a$ entonces pasaría que:

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (a \vee c) \\ &\geq a \wedge (b \vee c) \\ &\gneqq b \vee (a \wedge c) \\ &= a \vee (a \wedge c) \\ &= a \end{aligned}$$

Con lo que tendríamos $a \lneqq a$ lo que es una contradicción.

Tomemos ahora la siguiente subretícula:

$$\begin{tikzcd}
 & c\vee(a\wedge(b\vee c)) \overset{P.D.}{=} c\vee(b\vee(a\wedge c)) & \\
 & & a\wedge(b\vee c) \arrow[ul] \\
c \arrow[uur] & & \\
 & & b\vee(a\wedge c) \arrow[uu] \\
 & c\wedge(b\vee(a\wedge c)) \overset{P.D.}{=} c\wedge(a\wedge(b\vee c)) \arrow[uul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Veremos que

1. $c\vee(a\wedge(b\vee c)) = c\vee(b\vee(a\wedge c))$.
2. $c\wedge(b\vee(a\wedge c)) = c\wedge(a\wedge(b\vee c))$.

con lo cual tendríamos una subretícula de la forma pentágono; lo que nos dará la contradicción.

Demostremos 1):

$\geq$) Por hipótesis tenemos $a\wedge(b\vee c) \gneqq b\vee(a\wedge c)$, así $c\vee(a\wedge(b\vee c)) \geq c\vee(b\vee(a\wedge c))$.

$\leq$) Ahora:

$$\begin{aligned}
c\vee(a\wedge(b\vee c)) &\leq (c\vee a)\wedge(c\vee(b\vee c))\\
&\leq (c\vee a)\wedge(c\vee b))\\
&= b\vee c\\
&\leq c\vee(b\vee(a\wedge c))
\end{aligned}$$

Donde la igualdad es válida porque $b\leq a$. Por lo tanto $c\vee(a\wedge(b\vee c)) = c\vee(b\vee(a\wedge c))$.

Demostremos 2)

$\leq$) Por hipótesis tenemos $b\vee(a\wedge c) \lneqq a\wedge(b\vee c)$, con lo cual $c\wedge(b\vee(a\wedge c)) \leq c\wedge(a\wedge(b\vee c))$.

$\geq$) Tenemos $c\wedge(b\vee(a\wedge c)) \geq (c\wedge b)\vee(a\wedge c)$. Como $b\leq a$, entonces

$$\begin{aligned}
c\wedge(a\wedge(b\vee c)) &\geq (c\vee b)\vee(c\wedge(a\wedge c))\\
&\geq (c\wedge b)\vee(a\wedge c))\\
&= a\wedge c\\
&\geq c\wedge(a\wedge(b\vee c))
\end{aligned}$$

Por lo tanto (1.1) es una subretícula pentagonal de L, lo que es una contradicción.

■

Teorema 1.5.40. *Una retícula* $(L, \leq, \wedge, \vee)$ *es modular si y sólo si no tiene subretículas de la forma diamante.*

Teorema 1.5.41. *Sea* $(L, \leq, \vee, \wedge)$ *una retícula.* $(L, \leq, \vee, \wedge)$ *es distributiva si y sólo si para cualesquiera* $a, b, c \in L$ *si* $a \vee b = a \vee c$ *y* $a \wedge b = a \wedge c$*, entonces* $b = c$*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos L distributiva y que $a \vee b = a \vee c$, $a \wedge b = a \wedge c$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
b &= b \wedge (a \vee b) \\
&= b \wedge (a \vee c) \\
&= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\
&= (a \vee b) \wedge c \\
&= (a \vee c) \wedge c \\
&= c.
\end{aligned}
$$

Por la anterior tenemos $b \leq c$, simétricamente $c \leq b$. Por lo tanto $b = c$.

$\Leftarrow$) Primero veremos que L es una retícula modular. Para ello supongamos que por el contrario existe una subretícula pentagonal de L:

$$
\begin{tikzcd}
& c \vee a = c \vee b & \\
& & a \arrow[ul] \\
c \arrow[uur] & & \\
& & b \arrow[uu] \\
& c \wedge a = c \wedge b \arrow[uul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

la cual cumple que $a \vee b = a \vee c$ y $a \wedge b = a \wedge c$. Ahora bien por hipótesis tendría que pasar que $b = c$ lo cual sería una contradicción. Por lo tanto una retícula isomorfa al pentágono no puede ser subretícula de L, con la cual L es modular por el teorema 1.5.39.

Sean $a, b, c \in R$. Demostraremos que se vale la propiedad distributiva, consideremos $u = (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))$ y $v = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))$.

- Entonces:

$$
\begin{aligned}
b \vee u &= b \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b)) \\
&= b \vee (c \wedge (a \vee b)) \\
&= (b \vee c) \wedge (a \vee b).
\end{aligned}
$$

  Donde la segunda igualdad es válida ya que $(a \wedge b) \leq b$ y la tercera por que $b \leq (a \vee b)$ y se vale la propiedad modular.

- Por otro lado
$$\begin{aligned} b\vee v &= b\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c))\\ &= b\vee(a\wedge(b\vee c))\\ &= (b\vee c)\wedge(a\vee b). \end{aligned}$$
Donde la segunda igualdad se cumple por $(b\wedge c)\leq b$ y la tercera por que $b\leq(b\vee c)$ y nuevamente se cumple PM. Con lo cual $b\vee u=b\vee v$.

- Para el ínfimo de b y u:
$$\begin{aligned} b\wedge u &= b\wedge((a\wedge b)\vee(c\wedge(a\vee b)))\\ &= (a\wedge b)\vee(b\wedge(c\wedge(a\vee b)))\\ &= (a\wedge b)\vee(b\wedge c). \end{aligned}$$
Donde la segunda igualdad es válida por $(a\wedge b)\leq b$ y PM y la tercera porque $b\leq(a\vee b)$

- El de b y v:
$$\begin{aligned} b\wedge v &= b\wedge((b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c)))\\ &= (b\wedge c)\vee(b\wedge(a\wedge(b\vee c)))\\ &= (b\wedge c)\vee(b\wedge a). \end{aligned}$$
La segunda igualdad por $(b\wedge c)\leq b$ y PM y la tercera porque $b\leq(b\vee c)$. Tenemos entonces $b\wedge u=b\wedge v$.

De lo anterior tenemos que $u=v$, luego $a\wedge u=a\wedge v$. Con lo cual:

- El ínfimo de a y u:
$$\begin{aligned} a\wedge u &= a\wedge((a\wedge b)\vee(c\wedge(a\vee b)))\\ &= (a\wedge b)\vee(a\wedge c\wedge(a\vee b))\\ &= (a\wedge b)\vee(a\wedge c). \end{aligned}$$
Para la segunda igualad es verdadero que $(a\wedge b)\leq a$ y se cumple PM, para la tercera se cumple que $a\leq(a\vee b)$.

- El ínfimo de a y v:
$$\begin{aligned} a\wedge v &= a\wedge((b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c)))\\ &= (a\wedge(b\vee c))\vee(a\wedge(b\vee c))\\ &= a\wedge(b\vee c). \end{aligned}$$
Como $(a\wedge(b\vee c))\leq a$ y se cumple PM, entonces se da la segunda igualdad.

Por lo tanto $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, con lo cual se cumple la propiedad distributiva. ■

Definición 1.5.42. *Sean $(L,\leq_L,\wedge_L,\vee_L)$ y $(R,\leq_R,\wedge_R,\vee_R)$ dos familias de retículas (completas). Decimos que $f:L\to R$ es un morfismo de retículas (completas) si:*

1. $f\left(\bigvee_L\{X_i\}_{i\in I}\right)=\bigvee_R\{f(X_i)\}_{i\in I}$, *para I finito (arbitrario).*
2. $f\left(\bigwedge_L\{X_i\}_{i\in I}\right)=\bigwedge_R\{f(X_i)\}_{i\in I}$, *para I finito (arbitrario).*

Definición 1.5.43. *Sean* $(L, \leq_L, \wedge_L, \vee_L)$ *y* $(R, \leq_R, \wedge_R, \vee_R)$ *dos familias de retículas (completas). Decimos que* $h : L \to R$ *es un isomorfismo de retículas (completas) si:*

1. h *es un morfismo de retículas (completas).*
2. *Existe* $g : R \to L$ *un morfismo de retículas (completas) tal que* $g \circ h = 1_L$ *y* $h \circ g = 1_R$.

Teorema 1.5.44. *(Teorema de la correspondencia) Si* M, N *son dos* $R-$*módulos izquierdos y* $f : M \to N$ *es un* $R-$*morfismo suprayectivo, entonces existe* f^* *un isomorfismo de retículas completas* $f^* : [Ker(f), M] \to [{}_*0, N]$ *dado por* $f^*(K) = f[K]$*, es decir la imagen directa de* K *bajo* f*.*

Demostración. La demostración de este teorema la haremos en tres partes.
1) Demostraremos que f^* es un morfismo de retículas.
Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq [Ker(f), M]$.
Demostraremos que $f\left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle = \left\langle \bigcup_{i\in I} f[U_i] \right\rangle$.
$\subseteq$) Sea $\sum_{i=1}^{k} u_i \in \left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k} u_i\right) &= f(u_1 + u_2 + \ldots u_k) \\ &= f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f(u_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f\left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle \subseteq \left\langle \bigcup_{i\in I} f[U_i] \right\rangle$.
$\supseteq$) Sea $\sum_{i=1}^{k} u_i \in \left\langle \bigcup_{i\in I} f[U_i] \right\rangle$.
Tenemos que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f(u_i) \in f[U_{j_i}]$ para algún $j_i \in I$. Ahora bien $\sum_{i=1}^{k} u_i \in \left\langle \bigcup_{j_i\in I} U_{j_i} \right\rangle$.

Aplicando f tenemos $\sum_{i=1}^{k} f(u_i) = f\left[\sum_{i=1}^{k} u_i\right] \in f\left[\left\langle \bigcup_{j_i\in I} U_{j_i} \right\rangle\right] \subseteq f\left(\left\langle \bigcup_{i\in I} U_i \right\rangle\right)$.

Demostraremos que $f\left[\bigcap_{i\in I} U_i\right] = \bigcap_{i\in I} f[U_i]$.
$\supseteq$) Sea $y \in \bigcap_{i\in I} f[U_i]$. Si $i \in I$, entonces $y = f(x_i)$ para algún $x_i \in U_i$. Si $j \in I$, entonces $y = f(x_j)$ para algún $x_j \in U_j$.

Ahora bien $f(x_i) = y = f(x_j)$ de donde $f(x_i - x_j) = 0$, con lo que $x_i - x_j \in ker(f)$. Como $ker(f) \subseteq U_j$ para toda $j \in I$, entonces $x_i - x_j \in U_j$ con lo que $x_i \in U_j$ y así $x_i \in \bigcap_{j\in I} U_j$. Por lo tanto $f(x_i) \in f[\bigcap_{j\in I} U_j]$.

$\subseteq$) Sea $y \in f[\bigcap_{i\in I} U_i]$ entonces existe $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$ tal que $f(x) = y$. Como $f(x) \in f[U_i]$ para toda $i \in I$, entonces $f(x) \in \bigcup_{i\in I} f[U_i]$ y así $f\left[\bigcap_{i\in I} U_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[U_i]$.

Con lo que f^* es un morfismo de retículas.

Consideremos la función $f_* : [_*0, N] \to [Ker(f), M]$ dada por $f_*(U) = f^{-1}[U]$, pasaremos a demostrar ahora que 2) es morfismo de retículas y 3) f^* es el morfismo inverso de f_*

Demostremos 3) Sea U un $R-$submódulo de M tal que $Ker(f)$ es $R-$submódulo de U. Tenemos que $U \overset{f^*}{\mapsto} f[U] \overset{f_*}{\mapsto} f^{-1}[f[U]]$.

Demostraremos que $f^{-1}[f[U]] = U = Kef(f) + U$.

$\subseteq$) Sea $x+u \in Ker(f)+U$. Entonces $f(x+u) = f(x)+f(u) = 0+f(u) = f(u)$. Con lo que $x + u \in f^{-1}[f[U]]$. Por lo tanto $Ker(f) + U \subseteq f^{-1}(f(U))$.

$\supseteq$) Por otro lado si $x \in f^{-1}[f[U]]$, entonces $f(x) = f(u)$ para alguna $u \in U$, entonces $x - u \in Ker(f)$, así $x \in u + Ker(f) \subseteq U + Ker(f)$. Por lo tanto $Ker(f) + U = f^{-1}[f[U]]$.

Si V es un $R-$submódulo izquierdo de N, entonces aplicando f_* y f^* tenemos que $V \overset{f_*}{\mapsto} f^{-1}[V] \overset{f^*}{\mapsto} f[f^{-1}[V]] = V$. Donde la última igualdad es válida ya que por hipótesis f es epimorfismo. Por lo tanto f_* es la inversa de f^*. ■

Definición 1.5.45. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que:*

1. *a es máximo en A si para todo $b \in A$ tal que $a \leq b$, entonces $a = b$.*
2. *a es mayor en A si $b \leq a$ para todo $b \in A$.*

Definición 1.5.46. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y U un $R-$submódulo propio izquierdo de él. Decimos que U es máximo en M, si U es máximo en el sentido de la contención en ${}_R[_*0, M)$.*

Proposición 1.5.47. *Si R es un anillo (distinto del trivial), entonces R como $R-$módulo izquierdo tiene máximos.*

Demostración. Como R es no trivial es equivalente a que $1 \neq 0$. Sea ${}_R[_*0, R)$ la familia de ideales izquierdos propios de R y consideremos

$$\left({}_R[_*0, R), \subseteq\right)$$

a la familia ordenada con la inclusión, esta cumple con ser un conjunto parcialmente ordenado. Veremos que $\left({}_R[_*0, R), \subseteq\right)$ satisface con las hipótesis del lema de Zorn.

Supongamos que $\{I_j\}_{j\in X}$ es una cadena en ${}_R[_*0, R)$, entonces $\bigcup_{i\in X} I_i$ es un ideal izquierdo de R.

Si $x, y \in \bigcup_{i\in X} I_i$, entonces $x \in I_k$, $y \in I_j$ para $k, j \in I$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k \leq j$, entonces $x \in I_j$. Por lo tanto $x + y \in I_j$. Ahora $\bigcup_{i\in X} I_i$ también es cerrada multiplicación por $r \in R$ ya que cada uno de los I_j lo es.

Ahora $1 \notin I_i$ para toda $i \in I$ ya que $I_j \subsetneqq R$, entonces $1 \notin \bigcup_{i \in X} I_i$. Como $\bigcup_{i \in X} I_i$ es una cota superior para la cadena $\{I_j\}_{j \in X}$ concluimos que $({}_R\left[{}_*0, R\right), \subseteq)$ tiene máximos. ■

Teorema 1.5.48. *Sean M un $R-$módulo izquierdo, I un ideal bilateral de R tal que $IM = {}_*0$. Entonces:*

1. *$\frac{R}{I}$ es un anillo.*
2. *M es un $\frac{R}{I}$-módulo izquierdo.*

Demostración. 1) Es sencillo verificar las propiedades para que $\frac{R}{I}$ es un anillo.
2) Definamos la siguiente asignación $\hat{\cdot} : \frac{R}{I} \times M \to M$ dado por $\hat{\cdot}(r+I, x) \doteqdot r \cdot x$.
Veamos que ésta bien definida. Si $r + I = s + I$, entonces $r - s \in I$. Dado que $IM = {}_*O$, entonces para cualquier $x \in M$ se cumple que $(r - s)x = 0$ de donde $rx = sx$. Por lo tanto $\hat{\cdot}$ está bien definida. Es sencillo verificar que cumple las propiedades de la definición 1.3.1. ■

Definición 1.5.49. *Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula con elemento menor 0. Decimos que $b \in L$ es un seudocomplemento de $a \in L$ si:*

1. *$a \wedge b = 0$.*
2. *b es máximo con esta propiedad (es decir si existe $b \leq c$ tal que $b \wedge c = 0$, entonces $b = c$).*

Teorema 1.5.50. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A un $R-$submódulo izquierdo de M. Entonces existe B un $R-$submódulo izquierdo de M tal que B es seudocomplemento de A.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} = \{C \mid C$ es un $R-$submódulo de M y $A \cap C = {}_*0\}$. Tenemos que $(\mathbf{A}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathbf{A}$. Demostraremos que $\bigcup_{i \in I} C_i$ es una cota para $\{C_i\}_{i \in I}$. Si $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$, entonces $x \in A$ y $x \in C_j$ para algún $C_j \in \bigcup_{i \in I} C_i$. Como $C_j \in \mathbf{A}$, entonces $x \in A \cap C = {}_*0$, luego $x = 0_M$ y así $\{C_i\}_{i \in I}$ está acotada superiormente en $\mathbf{A}$.

Ahora por el lema de Zorn, $\mathbf{A}$ tiene máximos. Tomamos uno de ellos y ese es el que estábamos buscando. Por lo tanto la afirmación es válida. ■

Proposición 1.5.51. *Sea R un anillo visto como $R-$módulo izquierdo e I un $R-$submódulo izquierdo de R. Entonces I es un sumando directo de R si y sólo si $I = Re$ para algún $e \in R$ tal que $ee = e$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos I es un sumando directo de R (es decir existe J un $R-$submódulo izquierdo de R tal que $R = I \oplus J$). Tenemos para el elemento identidad (es decir el neutro multiplicativo) que $1 = e + f$. Sea $i \in I$, entonces $i = i \cdot 1 = i \cdot (e + f) = i \cdot e + i \cdot f$. Con lo cual $i - ie = if$ de donde $if \in I \cap J = \{0\}$.

Por lo tanto $i = ie$ que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $I = Re$. Entonces $Re \leq R$ con $ee = e$ Demostraremos que $R = Re \oplus R\,(1-e)$.

Sabemos que $1 = e + (1-e)$, con lo cual tenemos $R = Re + R\,(1-e)$.

Para finalizar demostraremos que $Re \cap R\,(1-e) = \{0\}$. Sea $y \in Re \cap R\,(1-e)$. Como $y \in Re$, entonces $y = re$. Por otro lado dado que $y \in R\,(1-e)$ entonces $y = s(1-e)$.

Así $re = s\,(1-e)$, multiplicando e por la derecha a ambos lados de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} re &= ree \\ &= s\,(1-e)\,e \\ &= (s - se)\,e \\ &= se - see \\ &= se - se \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Re \cap R\,(1-e) = \{0\}$. ■

CAPÍTULO 2

Módulos divisibles, inyectivos, libres y proyectivos

2.1. Módulos libres

Definición 2.1.1. *Sean F un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq F$. Decimos que F es libre con base X si:*

- *Si N es un $R-$módulo izquierdo y $\delta : X \to N$ una función de X a N, existe un único $R-$morfismo $\overline{f} : F \to N$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"'] & F \arrow[dl, dashed, "\exists!\overline{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1.2. *Sean R un anillo y $R^{(X)} = \{f : X \to R \mid sop(f) \text{ es finito}\}$. Afirmamos que $R^{(X)}$ es libre con base X.*

Demostración. A cada $x \in X$ le asociamos la función $\delta_x : X \to R$ dada por:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Supongamos además que existe una función $f : X \to N$.

Si $\theta \in R^{(X)}$, entonces $\theta = \sum\limits_{x \in sop(\theta)} \theta(x)\,\delta_x$. Vista de esta manera podemos definir $\overline{f} : R^{(X)} \to N$ dada por $\overline{f}\left(\sum\limits_{x \in sop(\theta)} \theta(x)\, i_x\right) = \sum\limits_{x \in sop(\theta)} \theta(x)\, f(x)$. Definido así tenemos que es $R-$morfismo y cumple lo que necesitamos. ■

Definición 2.1.3. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Decimos que X es una base de M si:*

1. $\langle X| = M$
2. *X es independiente (es decir si $\sum\limits_{x \in F \text{ finito}} r_x x = 0$, entonces $r_x = 0$).*

Teorema 2.1.4. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Si X es una base de M, entonces M es libre con base X.*

Demostración. Por hipótesis tenemos la función inclusión $i : X \to M$. Suponemos además que existe una función $f : X \to N$. Queremos ver que existe un único morfismo $\overline{f}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "!\overline{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Si $n \in M$, entonces $n = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$ con $r_i \in R$ y $x_i \in X$. Definamos $\overline{f}$ dada por: $\overline{f}(n) = r_1 f(x_1) + \cdots + r_n f(x_n)$, f está bien definida por la propiedad 2 de la definición 2.1.1. Por como está definida se tiene la unicidad. ■

Proposición 2.1.5. *${}_*0$ es libre con base $\emptyset$*

Demostración. Sea $\varphi : \emptyset \to {}_*0$ y supongamos existe $\varphi_N : \emptyset \to N$.
Definimos el morfismo $\overline{f} \equiv \overline{0} : {}_*0 \to N$ el cual cumple con ser único. ■

Proposición 2.1.6. *Sea R un anillo visto como un $R-$módulo izquierdo. Entonces R es libre con base $\{1\}$.*

Demostración. Consideremos la función inclusión $i : \{1\} \hookrightarrow R$ y supongamos que existe un morfismo $f : \{1\} \to N$.

Demostremos que hay un morfismo $\overline{f} : R \to N$. Como queremos que sea un $R-$morfismo y además que conmute, entonces $\overline{f}(1) = f(1)$, con lo cual

$$\overline{f}(r) = r\overline{f}(1) = rf(1).$$

Por lo tanto $\overline{f}$ es $R-$morfismo y es único por construcción. ■

2.2. Más sobre sucesiones exactas

Definición 2.2.1. *Sean A, B, C tres $R-$módulos izquierdos, dos $R-$morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ y la s.e.c $_*0 \to A \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{v}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \to_* 0$. Entonces:*

1. *Decimos que la sucesión se escinde por la izquierda si existe $u : B \to A$ un $R-$morfismo tal que $u \circ f = Id_A$.*

2. *La sucesión se escinde por la derecha si existe $v : C \to B$ un $R-$morfismo tal que $g \circ v = Id_C$.*

3. *La sucesión se escinde si se escinde por la izquierda y se escinde por la derecha.*

Teorema 2.2.2. *Sea $_*0 \to A \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{v}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \to_* 0$ una sucesión exacta corta.*

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *Existe $u : B \to A$ tal que $u \circ f = Id_A$*

2. *Existe $v : C \to B$ tal que $g \circ v = Id_C$*

3. *$B = f(A) \oplus D$ para algún D submódulo de B tal que $g \restriction_D : D \to C$ es un isomorfismo.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 3) Por hipótesis tenemos $_*0 \to A \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$. Demostraremos que $B = f(A) \oplus Ker(u)$. Sea $b \in B$.

Entonces

$$b \overset{u}{\mapsto} u(b) \overset{f}{\mapsto} f(u(b)) \overset{u}{\mapsto} u(f(u(b))) = u(b).$$

Tenemos que

$$u(f(u(b)) - b) = u(f(u(b))) - u(b) = 0,$$

con lo cual

$$b - f(u(b)) \in Ker(u).$$

Así

$$b \in Ker(u) + f(u(b)) \subseteq Ker(u) + f(A)$$

y con ello $B \subseteq f(A) + Ker(u)$.

La otra contención es inmediata ya que

$$f(A) \subseteq B \text{ y } Ker(u) \subseteq B$$

con lo que $f(A) + Ker(u) \subseteq B$. Por lo tanto $B = f(A) + Ker(u)$.

Veamos que la suma es directa. Sea $x \in f(A) \cap Ker(u)$, entonces $x = f(a)$ para algún $a \in A$. Tenemos que

$$0 = u(x) = u(f(a)) = a,$$

por lo que $a = 0$ y con ello $x = f(a) = f(0) = 0$.

Entonces $x = 0$ y así $f(A) \cap Ker(u) = {}_*0$. Por lo tanto $B = f(A) \oplus Ker(u)$.

Ahora veamos que $g \restriction_{Ker(u)}: Ker(u) \to C$ es un biyección. Tenemos que $C = g(B) = g(f(A) \oplus Ker(u)) = 0 + g(Ker(u))$. Entonces $g(Ker(u)) = C$, con lo cual es epimorfismo.

Por otro lado $Ker\left(g \restriction_{Ker(u)}\right) = Ker(u) \cap Ker(g) = Ker(u) \cap f(A) = {}_*0$, con lo que es inyectiva. Por lo tanto es biyectiva y así tenemos el resultado.

3) $\Rightarrow$ 2) Consideremos la sucesión exacta

$$_*0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} f(A) \oplus D \xrightarrow{g} C \longrightarrow_* 0.$$

Demostraremos que existe

$$v : C \longrightarrow f(A) \oplus D$$

tal que $g \circ v = Id_C$.

Consideremos $g^{-1} \restriction_D: D \to C$ la inversa de la restricción de g a D y el $R-$morfismo inclusión $i : D \hookrightarrow f(A) \oplus D$. Sea $v = i \circ g^{-1} \restriction_D$ la composición de estas dos funciones. Veamos que $g \circ v = Id_C$.

Sea $x \in C$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ v(x) &= g(v(x)) \\ &= g(i \circ g^{-1}(x)) \\ &= g(i(g^{-1})(x)) \\ &= g(i(g^{-1}(x)) \\ &= g(g^{-1}(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos el resultado.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $_*0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{v}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow {}_*0$ tal que $g \circ v = Id_C$.

Demostraremos que $B = f(A) \oplus v(C)$. Sea $b \in B$. Entonces

$$b \overset{g}{\mapsto} g(b) \overset{v}{\mapsto} v(g(b)) \overset{g}{\mapsto} g(v(g(b))) = g(b)$$

Tenemos

$$g(v(g(b)) - b) = g(v(g(b))) - g(b) = 0,$$

entonces

$$b - v(g(b)) \in Ker(g).$$

Con lo cual

$$b \in v(g(b)) + Ker(g).$$

Como la sucesión es exacta tenemos que

$$Ker(g) = Im(f) \text{ y } v(g(b)) \in Im(v)$$

Entonces $b \in Im(v) + Im(f)$. Por lo tanto $B = f(A) + v(C)$.

Ahora veamos que es directa. Sea $x \in f(A) \cap v(C)$. Tenemos que

$$v(c) = x = f(a)$$

para algunos $c \in C, a \in A$, entonces $g(x) = 0$ ya que $x \in Im(f)$ y por hipótesis la sucesión es exacta.

Por lo tanto $g(v(c)) = 0$ y en efecto $B = f(A) \oplus v(C)$. Ahora, definamos la siguiente función $u : f(A) \oplus v(C) \to A$ dada por $u(x) = u(f(a) + v(c)) = a$.

■

2.3. Módulos inyectivos y proyectivos

Definición 2.3.1. *Sea P un $R-$módulo izquierdo. Decimos que P es proyectivo si el funtor $Hom_R(P, \_)$ es exacto.* [1]

Definición 2.3.2. *Sea E un $R-$módulo izquierdo. Decimos que E es inyectivo si el funtor $Hom_R(\_, E)$ es exacto.*

Teorema 2.3.3. *Sea P un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es proyectivo.*
2. *Toda sucesión exacta corta ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to {}_*0$ se escinde.*
3. *P es un sumando directo de un módulo libre (es decir P es un sumando directo de $R^{(X)}$ para algún X).*
4. *Para toda sucesión exacta y todo morfismo $f : P \to C$ tal que:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[d, "f"] & \\
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & {}_*0
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $\overline{f} : P \to B$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] & \\
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & {}_*0
\end{tikzcd}$$

[1]Véase definición A.7.2 en el Apéndice A.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que P es proyectivo y consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "f"] & \\ {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & {}_*0 \end{tikzcd}$$

Consideremos la siguiente s.e.c ${}_*0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to {}_*0$, por hipótesis tenemos que

$$ {}_*0 \longrightarrow Hom\,(P, A) \xrightarrow{\alpha\circ\_} Hom\,(P, B) \xrightarrow{\beta\circ\_} Hom\,(P, C) \longrightarrow {}_*0$$

es exacta. Por lo que $\beta\circ\_$ es epimorfismo, entonces existe $\overline{f} \in Hom(P, B)$ tal que $\beta \circ \overline{f} = f$. Por lo tanto $\overline{f} \in Hom(P, C)$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea ${}_*0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to {}_*0$ una s.e.c. y consideremos

$$ {}_*0 \longrightarrow Hom\,(P, A) \xrightarrow{\alpha\circ\_} Hom\,(P, B) \xrightarrow{\beta\circ\_} Hom\,(P, C) \longrightarrow {}_*0$$

Necesitamos ver la exactitud en $Hom(P, C)$. Si $f \in Hom(P, C)$, entonces existe $\overline{f} \in Hom(P, B)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\beta\circ\overline{f} = f$, con lo cual $\beta\circ\_$ es epimorfismo y así $Hom(P, \_)$ es exacto. Por lo tanto P es proyectivo.

2) $\Rightarrow$ 3) Consideremos una sucesión exacta ${}_*0 \to K \to F \underset{\dashleftarrow}{\to} P \to {}_*0$, con F un $R-$módulo libre. Por hipótesis la sucesión se escinde, con lo cual P es isomorfo a un sumando directo de F un $R-$módulo libre.

4) $\Rightarrow$ 2) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & {}_*0 \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $h : B \to P$ tal que $g \circ h = 1_P$. Por lo tanto la sucesión se escinde y se tiene la implicación.

3) $\Rightarrow$ 1) Para demostrar esta implicación, veremos que a) Todo módulo libre es proyectivo y b) un sumando directo de un proyectivo es proyectivo, lo cual nos dará el resultado.

Sean ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ una s.e.c., F un $R-$módulo libre y $h : F \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & & F \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & {}_*0
\end{tikzcd}$$

Demostremos a). Sea X una base de F. Consideremos ahora el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Definamos $\alpha : X \to B$, para cada $x \in X$ escogemos un elemento en $g^{-1}(h(\delta(x)))$ y lo llamamos $\alpha(x)$. Por definición $g(\alpha(x)) = h(\delta(x))$ y así $g \circ \alpha = h \circ \delta$. Por la propiedad de las bases existe $\overline{h} : F \to B$ tal que $\overline{h} \circ \delta = \alpha$. Luego

$$g \circ \overline{h} \circ \delta = g \circ \alpha = h \circ \delta.$$

Por la unicidad en la propiedad de las bases tenemos que $g \circ \overline{h} = h$. Por lo tanto F es proyectivo.

Demostremos b). Sea P un $R-$módulo izquierdo proyectivo tal que $P = P_1 \oplus P_2$. Queremos ver que P_1 es proyectivo. Sean $h : P_1 \to C$, $g : B \to C$ un epimorfismo y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & P = P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "p_1"'] \arrow[ddl, "\alpha"'] & \\
 & P_1 \arrow[u, bend right, "i_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "\alpha \circ i"] & \\
B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & {}_*0
\end{tikzcd}$$

Existe $\alpha : P \to B$ tal que $g \circ \alpha = h \circ p_1$. Demostraremos que $g \circ \alpha \circ i = h$. Tenemos que $g \circ \alpha = h \circ p_1$. Por lo tanto $g \circ \alpha \circ i_1 = h \circ p_1 \circ i_1 = h$, donde la última igualdad es válida ya que $p_1 \circ i_1 = 1_{P_1}$. ■

Proposición 2.3.4. *Sea $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$módulos izquierdos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\bigoplus_{i \in I} P_i$ *es proyectivo.*

2. P_i es proyectivo para toda $i \in I$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Tenemos que $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es sumando directo de F, con F un módulo libre, entonces existen las siguientes inclusiones $P_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i \hookrightarrow F$ y ambas inclusiones se escinden.

Por lo tanto P_i es un sumando directo de F. Por lo tanto P_i es proyectivo.

2) $\Rightarrow$ 1) Para cada $i \in I$ existe F_i libre tal que P_i es sumando directo de F_i. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es sumando directo de $\bigoplus_{i\in I} F_i$, la cual es libre. ∎

2.3.1. Módulos divisibles

Definición 2.3.5. *Sea M un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Decimos que M es divisible si $M = nM$ para toda $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.*

Lema 2.3.6. *Cociente de módulos divisibles es divisible.*

Demostración. Sean D un $R-$módulo izquierdo, $f : D \to H$ un epimorfismo y $n > 0$. Entonces $nH = nf(D) = f(nD) = f(D) = H$ con lo cual tenemos que para todo $n > 0$ se cumple $nH = H$, así tenemos que cociente de divisibles es divisible. ∎

Teorema 2.3.7. *Sea M un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. M es divisible.

2. $M = pM$ para todo p primo.

3. M no tiene submódulos máximos.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por hipótesis se cumple que $M = pM$ para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, en particular para todo p primo.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos $M = pM$ con p primo. Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ el cual por el teorema fundamental de la aritmética sabemos que $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ su descomposición en primos. Por lo anterior tenemos que

$$nM = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})\, M = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_{k-1}}\right) p_k M = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_{k-1}}\right) M$$

Haciendo este proceso inductivamente tenemos que

$$\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_{k-1}}\right) M = M,$$

con lo que tenemos el resultado.

1) $\Rightarrow$ 3) Tenemos por el lema 2.3.9 que cociente de divisibles es divisible. Ahora bien si D es divisible y M es un $\mathbb{Z}-$módulo máximo de D, entonces $\frac{D}{M}$ es simple y además divisible. Por otro lado si S es un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo, entonces $S \cong \mathbb{Z}_p$. Por lo anterior tenemos que $S = pS \cong p\mathbb{Z}_p = {}_*0$.

3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que M no tiene $\mathbb{Z}-$submódulos máximos y que no es divisible, es decir existe p un número primo tal que $pM \neq M$. Tenemos que pM es un $\mathbb{Z}-$submódulo propio de M.

Consideremos $\pi : M \to \frac{M}{pM}$ y notemos que $p(\frac{M}{pM}) = pM$. Utilizando el Teorema 1.5.48 tenemos que $\frac{M}{pM}$ visto como $\mathbb{Z}_p-$módulo es isomorfo a $\mathbb{Z}_p^{(\beta)}$ para algún β.

Ahora por el teorema de la correspondencia las retículas $[pM, M]$ y $[0, \frac{M}{pM}]$ son isomorfas y está última es isomorfa a $[0, \mathbb{Z}_p^{(\beta)}]$.

Como $\mathbb{Z}_p^{(\beta)}$ es un $\mathbb{Z}-$espacio vectorial. tiene máximo. Lo que implica que $\frac{M}{pM}$ tiene un submódulo máximo $\frac{L}{pM}$. De donde L es máximo en M. Que es contradicción. Por lo tanto $pM = M$. ■

Ejemplo 2.3.8. $\mathbb{Q}$ *es divisible.*

Ejemplo 2.3.9. $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *es divisible.*

Teorema 2.3.10. *Sea M un grupo abeliano visto como $\mathbb{Z}-$módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo.*

2. *M es un $\mathbb{Z}-$módulo divisible.*

3. *Para todo $\mathbb{Z}-$morfismo $h : n\mathbb{Z} \to M$ existe un morfismo $\bar{h} : \mathbb{Z} \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "_\cdot x = \bar{h}"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Donde $x \in M$, es decir h es multiplicar por algún elemento de M.

Proposición 2.3.11. *Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{Z}-$módulos divisibles. Entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ es divisible.*

Demostración. Si $f \in \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$, entonces $f : I \to \bigcup\limits_{i\in I} N_i$ tal que $f(i) \in N_i$ y $f(i) = 0$ para casi toda i. Demostraremos que para todo p primo se tiene que $f = pg$, para alguna $g \in \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$.

Para cada $i \in I$ tenemos que $f(i) \in N_i$. Dado que $f(i) = p \cdot n_i$, entonces definamos g como sigue:
$g(i) = \begin{cases} n_i & \text{si } i \in sop(f) \\ 0 & \text{si } i \notin sop(f) \end{cases}$. Por lo tanto $g \in \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ y se tiene el resultado. ■

Proposición 2.3.12. *Sea M un grupo abeliano visto como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Entonces M contiene un subgrupo divisible mayor D tal que $M = D \oplus R$ y R no tiene subgrupos divisibles.*

Demostración. Consideremos el coproducto

$$\bigoplus \{D_i \mid Di \text{ es subgrupo de } M \text{ y } D_i \text{ es divisible}\}_{i\in I},$$

el cual es divisible por la proposición 2.3.11.

Consideremos la función $\bigoplus\limits_{i\in I} D_i \to \sum\limits_{i\in I} D_i$ dada por $f \mapsto \sum\limits_{i\in sop(f)} f(i)$. Esta función es sobreyectiva ya que para $x \in \sum\limits_{i\in I} D_i$, entonces $x \in D_i$ para algún $i \in I$. Utilizando la función delta de Kronecker que sabemos está en $\bigoplus\limits_{i\in I} D_i$ tenemos que $\delta_i^x \mapsto x \in D_i$. Con lo cual $\sum\limits_{i\in I} D_i$ es divisible.

Ahora $D = \sum \{D_i \mid D_i \text{ es } \mathbb{Z}\text{−submódulo izquierdo de } M\}_{i\in I}$ es un $\mathbb{Z}$−submódulo izquierdo de M, sólo falta verificar que es un sumando directo.

Consideremos la sucesión exacta ${}_*0 \to D \to M \to \frac{M}{D} \to {}_*0$, como D es inyectivo por el teorema 2.3.10 la sucesión exacta se escinde, con lo cual D es un sumando directo y se tiene el resultado. ■

Teorema 2.3.13. *Todo grupo abeliano se sumerge en un grupo divisible.*

Demostración. Sean G un grupo y $x \in G - \{0\}$. Consideremos $\mathbb{Z}x \leq G$ el subgrupo cíclico generado por x en G. Ahora bien si x es de orden infinito, entonces $\mathbb{Z}x$ es libre con lo que la asignación $x \mapsto 1$ con $1 \in \mathbb{Q}$ se extiende a un morfismo

$$\varphi_x : \mathbb{Z}x \to {}_x\mathbb{Q}$$

Si x tiene orden n con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{Z}x$ es isomorfo a $\mathbb{Z}n$ y así existe un morfismo de grupos dado por:

$$\varphi_x : \mathbb{Z}x \to {}_x\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

$$mx \mapsto \frac{m}{n} + \mathbb{Z}$$

Ahora bien, como $\mathbb{Q}$ y $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ son divisibles existe:

- Si x es de orden infinito, la función

  $$\psi_x : G \to \mathbb{Q}$$

  dada por $\psi_x(x) = 1$

- Si x es de orden n con $n \in \mathbb{N}$

  $$\psi_x : G \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

  dada por $\psi_x(x) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$

Construimos la siguiente función:

$$\Gamma : M \to (\oplus \mathbb{Q}^Y) \bigoplus \left(\oplus \left(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \right)^Z \right)$$

dada para $x \in G$ de la siguiente manera: $\Gamma(x) = \delta_x^{Y,Z}$

Donde $Y \subseteq G$ es tal que $Y = \{x \in G \mid x \text{ es de orden infinito}\}$ y $Z \subseteq G$ es tal que $Z = \{x \in G \mid x \text{ es de orden} n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

Por como está definida, Γ cumple con ser monomorfismo. ∎

2.3.2. Continuación de módulos proyectivos

Teorema 2.3.14. *(Lema de Baer) Sean R un anillo y E un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es inyectivo.*
2. *Para todo ideal izquierdo I de R y toda función $f : I \to E$ tal que*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \\ & E & \end{tikzcd}$$

existe una función $\varphi : R \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro.

2) $\Rightarrow$ 1) Consideremos B un $R-$módulo izquierdo, A un $R-$submódulo izquierdo de B y $f : A \to E$, queremos ver que f se puede extender a un morfismo $B \to E$.

Consideremos

$$\mathcal{S} = \{(X, f_X) \mid A \text{ es } R\text{−submódulo de } X,\ X \text{ es } R\text{−submódulo de } B,\ f_X : X \to E$$

$$\text{y } f_X \restriction_A = f\},$$

de tal manera que:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \\ E & X \arrow[l, "f_x"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En $\mathcal{S}$ definimos el siguiente orden: $(X, f_X) \leq (Y, f_Y)$ si y sólo si X es R−submódulo de Y y $f_Y \restriction_X = f_X$, es decir f_Y extiende a f_X. Es sencillo verificar que $(\mathcal{S}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $\mathcal{C} = \{(S_i, f_{S_i})\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{S}$. Definimos $(\overline{S}, \overline{f}_{\overline{S}})$, donde $\overline{S} = \bigcup\limits_{i\in I} S_i$ y $\overline{f}_{\overline{S}} = \bigcup\limits_{i\in I} f_{S_i}$. Es decir $\overline{f}_{\overline{s}}(a) = f_{s_i}(a)$ si $a \in S_i$.

Ésta es una buena definición porque $\mathcal{C}$ es una cadena. Es sencillo verificar que $(\overline{S}, \overline{f}_{\overline{S}})$ es una cota de $\mathcal{C}$ en S. Por lo anterior $(\mathcal{S}, \leq)$ cumple con las hipótesis del Lema de Zorn, así que existe (M, g) un elemento máximo en $\mathcal{S}$. Sólo nos falta verificar que $M = B$ para terminar la demostración.

M tiene que ser esencial en B pues $g \oplus \overline{0} : M \oplus K \to B$ extiende a M, si K es un R−submódulo de B y $M \cap K = *_0$. Por contradicción, supongamos M es un R−submódulo propio de B. Sea $x \in B \setminus M$ y consideremos $T = \{r \in R \mid rx \in M\}$, que es un ideal derecho no cero de R. Definimos $\alpha : T \to E$ tal que $\alpha(r) = g(rx)$. Por hipótesis existe $\overline{\alpha} : R \to E$ tal que extiende a α.

Ahora bien, definimos $\overline{g} : M + Rx \to E$ por

$$\overline{g}(y + rx) = g(y) + \alpha(r)$$

donde $y \in M$ y $r \in R$. Veamos que es una función.

Si $y + rx = y^{'} + r^{'}x$ con $y, y^{'} \in M$ y $r, r^{'} \in R$ tales que $y + rx = y^{'} + r^{'}x$, tenemos que $y - y^{'} = (r^{'} - r)x$, es un elemento de $M \cap Rx$, de donde $r^{'} - r \in T$.

Aplicando la función tenemos que

$$\alpha(r^{'}) - \alpha(r) = \alpha(r^{'} - r) = g((r^{'} - r)x) = g(y - y^{'}) = g(y) - g(y^{'}).$$

De donde tenemos que

$$\overline{g}(y + rx) = g(y) + \alpha(r) = \alpha(r^{'}) + g(y^{'}) = \overline{g}(y^{'} + r^{'}x).$$

Por lo tanto $\overline{g}$ extiende a g, lo que es una contradicción a la condición de que (M, g) es máximo en $\mathcal{S}$. Por lo tanto $M = B$ y tenemos el resultado. ■

Teorema 2.3.15. *Son equivalentes para un grupo abeliano* $(M, +, 0)$*:*

1. M *es divisible.*
2. ${}_{\mathbb{Z}}M$ *es inyectivo.*

Demostración. Podemos utilizar el lema de Baer y que todo ideal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $n\mathbb{Z}$.

1) ⇒ 2) Si

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z} \\ M & \end{tikzcd}$$

con f es un monomorfismo distinto de $\overline{0}$, entonces $0 \neq f(n) \in M$. Definamos el morfismo $f(n) \cdot \_ : \mathbb{Z} \to M$ el cual es un morfismo y extiende a f:

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "f(n)\cdot\_"] \\ M & \end{tikzcd}$$

ya que:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & n \arrow[dl, mapsto] \\ f(n) & \end{tikzcd}$$

Así por el lema de Baer M es inyectivo como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo.

2) $\Rightarrow$ 1) Por demostrar que M es un $R-$submódulo de kM para todo $k > 0$. Sea $x \in M$ y

$$\begin{tikzcd} k\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\varphi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Donde $f(k) = x$. Si φ extiende a f, entonces

$$x = f(k) = \varphi(k) = \varphi(k \cdot 1) = k \cdot \varphi(1).$$

Por lo tanto M es un $R-$submódulo de kM. ∎

Proposición 2.3.16. *Sea R un anillo. Si D es un grupo divisible*[2] *visto como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo, entonces ${}_RHom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es inyectivo como $R-$módulo izquierdo.*

Demostración. Utilizaremos el Lema de Baer. Consideremos siguiente diagrama con I un ideal izquierdo de R:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dl] \\ {}_RHom(R, D) & \end{tikzcd}$$

[2]Véase 1.1.12 para la definición de grupo divisible.

Tenemos que $f(i)(r) \in D$, en particular $f(i)(1) \in D$ además D es divisible y por el teorema previo tenemos que D es inyectivo con lo cual existe h tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f(\ )(1)"'] & R \arrow[dl, "h"] \\ D & \end{tikzcd}$$

h es aditiva y $h(i) = f(i)(1)$ para toda $i \in I$.

Queremos demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "H"] \\ {}_R Hom\,(R, D) & \end{tikzcd}$$

Sea H la función inducida por h.

Demostraremos que $i \circ H(j) = f(j)$. Entonces $i \circ H(j) = i(H(j)) = i(h(j)) = h(j) = f(j)(1)$, donde la última igualdad es válida por la observación arriba mencionada.

Por lo tanto $i \circ H = f(i)$ y tenemos el resultado. ■

Proposición 2.3.17. *Sea M un $R-$módulo izquierdo tal que $M \neq {}_*0$. Entonces $Hom\left(M, Hom\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)\right) \neq \emptyset$.*

Demostración. Bastará demostrar que para todo $Rx \neq 0_*$ existe $f : Rx \to Hom\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$ con $\overline{0} \neq f$, para que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & Hom\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right) \\ Rx \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $Rx \neq {}_*0$, entonces $0_* \neq Rx$ como $\mathbb{Z}-$módulo derecho. Así existe $g_x : Rx \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ tal que $g_x \neq {}_*0$. Aplicamos $Hom\,(R, \_) : R - mod \to \mathbb{Z} - mod$ el cual es exacto ya que R es proyectivo. Tenemos $g_x \circ \_ : Hom\,(R, Rx) \to \left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$. Demostraremos que $g_x \circ \_ \neq \overline{0}$, lo se verifica ya que $(g_x \circ (\_ \cdot x))\, 1 = g_x\,(1 \cdot x) = g_x(x) \neq \overline{0}$.

Por lo tanto se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Hom\,(R, Rx) \arrow[r, "g_x\circ\_\neq\overline{0}"] & Hom\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right) \\ Rx \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "\neq\overline{0}"'] & \end{tikzcd}$$

■

Corolario 2.3.18. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Para todo $x \in M$ con $x \neq 0$ existe $\Theta_x : M \to Hom\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$ tal que $\Theta_x(x) \neq 0$.*

Teorema 2.3.19. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces M se puede sumergir en un módulo inyectivo.*

Teorema 2.3.20. *Sea E un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es un $R-$módulo inyectivo (es decir, $Hom\,(\_, E)$ es exacto).*
2. *Toda sucesión exacta ${}_*0 \to E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ se escinde.*
3. *Para toda sucesión exacta ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ y todo morfismo $h : A \to E$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $\overline{h} : B \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

y consideremos la siguiente sucesión:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & Hom\,(C, E) \arrow[r, "\_\circ g"] & Hom\,(B, E) \arrow[r, "\_\circ f"] & Hom\,(A, E) \arrow[r] & {}_*0 \end{tikzcd}$$

que es exacta por hipótesis. En particular existe $\overline{h}$ tal que $(\_ \circ f)(\overline{h}) = h$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ una sucesión exacta y consideremos la siguiente sucesión:

$$ {}_*0 \longrightarrow Hom\,(C,E) \xrightarrow{\_\circ g} Hom\,(B,E) \xrightarrow{\_\circ f} Hom\,(A,E) \longrightarrow {}_*0 $$

Ahora si $h \in Hom(A,E)$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\overline{h}"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

Con lo cual existe $\overline{h} \in Hom(B,E)$ tal que $\overline{h} \circ f = h$, con lo cual $\_ \circ f$ es epimorfismo. Por lo tanto $Hom\,(\_, E)$ es exacto y así E es inyectivo.

3) $\Rightarrow$ 2) Sean ${}_*0 \to E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ una sucesión exacta y $1_E : E \to E$ el morfismo identidad en E. Por hipótesis existe $t : B \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & B \arrow[r] \arrow[dl, "t"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

De donde $t \circ f = 1_E$, con lo que la sucesión se escinde y se tiene el resultado.

2) $\Rightarrow$ 1) Para esta implicación demostraremos que a) Todo módulo se sumerge[3], y b) Un sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo.

a) Queda demostrado en el teorema 2.3.19.

b) Supongamos que $E = A \oplus B$ con E inyectivo. Usaremos nuevamente el lema de Baer.

Si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \\ A & \end{tikzcd}$$

entonces tenemos

[3] Véase la observación 1.4.11 para el término se sumerge.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[ddl, "g"] \\ A \arrow[d, "j"'] & \\ E & \end{tikzcd}$$

Donde g está dada por la inyectividad de E. Consideremos ahora $\rho : E \to A$ la escisión de j (esto ya que A es sumando directo de E)

Demostremos ahora que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[ddl, "g"] \\ A & \\ E \arrow[u, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

Tenemos

$$\rho \circ g \circ i = p \circ j \circ f = 1_A \circ f = f$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$_*0 \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow \frac{Q}{E} \longrightarrow {_*0}$$

Por hipótesis la sucesión se escinde así E es sumando directo de Q y por a) tenemos que Q es inyectivo. Por lo tanto tenemos el resultado. ■

Proposición 2.3.21. *Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$módulos izquierdos. Entonces $\prod\limits_{i \in I} M_i$ es inyectivo si y sólo si M_i es inyectivo para cada $i \in I$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Consideremos $_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {_*0}$ una sucesión exacta corta y a $h : A \to M_i$. Dado que $\prod\limits_{i \in I} M_i$ es inyectivo, existe $\gamma : B \to \prod\limits_{i \in I} M_i$ tal que $\gamma \circ f = i_i \circ h$ por lo tanto $\pi_i \circ \gamma \circ f = \pi_i \circ i_i \circ h = 1 \circ h = h$.

$$\begin{tikzcd}
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\pi_i \circ \gamma"'] \arrow[ddl, "\gamma"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\
& M_i \arrow[d, bend right, "i_i"'] & & & \\
& \prod\limits_{i \in I} M_i \arrow[u, "\pi_i"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos las siguiente igualdades $\gamma \circ f = i_i \circ h$ y $\pi_i \circ i_i = 1_{M_i}$. Queremos demostrar que $\pi_i \circ \gamma \circ f = h$ pero $\gamma \circ f = i_i \circ h$, así $\pi_i \circ \gamma \circ f = \pi_i \circ i_i \circ h = 1_{M_i} \circ h = h$, con lo que tenemos el resultado.

$\Leftarrow$) Consideremos ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ una s.e.c.y $h : A \to \prod\{M_i\}$. Como M_i es inyectivo para toda $i \in I$, existe $\gamma_i : B \to M_i$ tal que $\gamma_i \circ f = \pi_i \circ h$. Entonces:

$$\begin{tikzcd}
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[ddl, "\gamma_i"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\
& \prod\limits_{i \in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & & & \\
& M_i & & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos a la familia de $\{\gamma_i\}_{i \in I}$. Definimos $\gamma : B \to \prod\limits_{i \in I} M_i$ dada por $\gamma(b) \doteq (\gamma_i(b))_{i \in I}$. Por la definición anterior tenemos que para toda i se cumple que $\pi_i \circ \gamma = \gamma_i$. Para finalizar demostraremos que $\gamma \circ f = h_i$, pero $\pi_i \circ \gamma \circ f = \gamma_i \circ f = \pi_i \circ h$, donde la primera igualdad es válida ya que por hipótesis M_i es inyectivo para toda i. Por lo tanto $\gamma \circ f = h$. ∎

CAPÍTULO 3

Más tipos de módulos, cápsulas divisibles e inyectivas

3.1. Módulos finitamente generados, de torsión y libres de torsión

Definición 3.1.1. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M es finitamente generado si existe $X \subseteq M$, X finito tal que ${}_R\langle X\rangle = M$.*

Proposición 3.1.2. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *M está finitamente generado por X si y sólo si el único submódulo de M que contiene a X es M.*
2. *Si existe un R-morfismo $f : M \to N$ y M está finitamente generado por X, entonces $f(M)$ está finitamente generado por $f(X)$.*

Demostración. Sea M un $R-$módulo izquierdo.

1. Supongamos $\langle X\rangle = M$. Por definición

$$ {}_R\langle X\rangle = \bigcap\{N \text{ es } R\text{−submódulo de } M \mid X \subseteq N\}, $$

entonces

$$ \bigcap\{N \text{ es } R\text{−submódulo de } M \mid X \subseteq N\} = M. $$

Para la otra implicación, dado que $X \subseteq M$ entonces $\langle X \rangle \subseteq M$. Como $\langle X \rangle$ es un $R-$módulo y por hipótesis el único $R-$módulo que contiene a X es M, entonces $M = \langle X \rangle$.

2. $f \restriction^{f(M)}: M \to f[M]$ es un epimorfismo y por hipótesis X está finitamente generado por M. Supongamos que L es un $R-$submódulo de N tal que $f(X)$ es un $R-$submódulo de L. Tenemos que

$$X \leq f^{-1}[f[X]] \leq f^{-1}(L) \leq M.$$

Por 1) $f^{-1}[L] = M$. Por lo tanto

$$f(X) \leq f[f^{-1}[L]] = f[M] = L,$$

entonces el único de los submódulos de N que contiene a $f(X)$ es N.

Al ser $f[X]$ un $R-$submódulo de L, entonces $f^{-1}[f[X]]$ es un $R-$submódulo de $f^{-1}[L]$ y además $f^{-1}[L]$ es un $R-$submódulo de M. Por el inciso 2 tenemos que $f^{-1}[L] = M$. Por lo tanto

$$L = f[f^{-1}[L]] = f[M].$$

■

Corolario 3.1.3. *Si M no tiene máximos, entonces M no es finitamente generado.*

Recordatorio 3.1.4. *$\mathbb{Q}$ es divisible y cociente de divisibles es divisibles.*

Corolario 3.1.5. *$\mathbb{Q}$ visto como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo no tiene máximos. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado.*

Demostración. Demostraremos que $\mathbb{Q}$ no tiene máximos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{Q}$ si tiene máximos.

Notemos que $\mathbb{Z}_p$ no es divisible ya que para p se tiene que $p\mathbb{Z}_p =_* 0 \neq \mathbb{Z}_p$.

Ahora bien recordemos que un grupo con solamente dos subgrupos es isomorfo a algún $\mathbb{Z}_p$.

Si M es un submódulo máximo de $\mathbb{Q}$, entonces $\frac{\mathbb{Q}}{M}$ es un módulo con exactamente dos subgrupos con lo cual es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Contradiciendo que $\mathbb{Z}_p$ no es divisible, pero un cociente de $\mathbb{Q}$ sí lo es, con lo cual $\mathbb{Q}$ no tiene máximos. ■

Definición 3.1.6. *Sea G un grupo abeliano. Decimos que G es de torsión si todos sus elementos son de orden finito.*

Proposición 3.1.7. *Si G es un grupo abeliano, entonces*

$$t(G) = \{x \in G : o(G) < \infty\}$$

es un subgrupo de G.

Definición 3.1.8. *Si G es un grupo, $t(G)$ se llama el subgrupo de torsión de G.*

Definición 3.1.9. *Si p es un número primo, definimos*

$$t_p(G) = \{g \in G | o(g) = p^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, n > 0\}$$

como la parte $p-$primaria de G.

Veamos ahora algunos resultados de teoría de grupos.

Teorema 3.1.10. *Sea G un grupo abeliano de torsión. Entonces G es la suma directa de sus partes $p-$primarias.*

Demostración. Por demostrar $G = \bigoplus_{p \text{ primo}} t_p(G)$.

Sea $0 \neq x \in t_p(G) \cap \left(\bigoplus_{q \text{ primo},\ p \neq p} (t_q(G)) \right)$, entonces $o(x) = p^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado $x = x_{q_1} + \ldots + x_{q_n}$, donde $o(x_{q_i}) = q_i^{m_i}$, entonces $(q_1^{m_i} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n}) \cdot x = 0$, por lo tanto $p^n \mid q_1^{m_i} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n}$, y en consecuencia p divide a q_i para algún i, lo que es una contradicción ya que $p \neq q_i$ para toda i y p, q_i son primos. Por lo tanto $t_p(G) \cap \left(\bigoplus_{q \text{ primo},\ p \neq p} (t_q(G)) \right) = \{0\}$.

Sea $x \in G$, entonces $o(x) = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, nombremos $s_i = \frac{o(x)}{p_i^{\alpha_i}}$ y notamos que $(s_1; \ldots; s_k) = 1$, entonces existen $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$ tales que $b_1 s_1 + \cdots + b_k s_k = 1$, multipliquemos por x se tiene que $x = (b_1 s_1 + \cdots + b_k s_k) x = b_1 s_1 x + \cdots + b_k s_k x$. Ahora

$$o(s_i x) = \frac{o(x)}{s_i} = \frac{o(x)}{\frac{o(x)}{p_i \alpha_i}} = p_i^{\alpha_i},$$

con lo que $b_i s_i x \in (t_{p_i}(G)) = D_i^{\alpha_i}$ y se sigue el resultado. ■

Ejemplo 3.1.11. *Como $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ es de torsión, entonces $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{p \text{ primo}} t_p\left(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$.*

Definición 3.1.12. *Definimos $\mathbb{Z}_{p^\infty} = t_p\left(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$.*

3.2. Módulos esenciales y módulos esencialmente cerrados

Definición 3.2.1. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Decimos que N es esencial en M si para todo K $R-$submódulo izquierdo de M distinto de ${}_*0$, se cumple que $N \cap K \neq {}_*0$ (o equivalentemente el único $R-$submódulo izquierdo de M tal que $N \cap K = {}_*0$, es $K = {}_*0$).*

Ejemplo 3.2.2. *$2\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo esencial en $\mathbb{Z}$ ya que $0 \neq 2n \in 2\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ si $n \neq 0$. En general tenemos que $n\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo esencial de $\mathbb{Z}$, si $n \neq 0$.*

Ejemplo 3.2.3. *$\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo esencial en $\mathbb{Q}$ ya que para un $\mathbb{Z}-$submódulo H de $\mathbb{Q}$ con $_*0 \neq H$ tenemos $0 \neq \frac{a}{b} \in H$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $0 \neq a = b\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z} \cap H$, con lo que $\mathbb{Z} \cap H \neq {}_*0$.*

Proposición 3.2.4. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo de M. N es un $R-$submódulo esencial de M si y sólo si para todo $x \in M$ con $0 \neq x$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $0 \neq x \in M$. Tenemos que $_*0 \neq Rx$, por hipótesis N es esencial en M, por lo tanto $_*0 \neq N \cap Rx$, es decir existe $0 \neq n = rx \in N$.
$\Leftarrow$) Supongamos ahora $_*0 \neq K$. Si $0 \neq x \in K$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in N$. Por lo tanto $0 \neq rx \in K \cap N$ y tenemos el resultado. ∎

Proposición 3.2.5. *Sean L, M, N $R-$módulos izquierdos. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si L es un $R-$submódulo esencial de N y N es un $R-$submódulo esencial de M, entonces L es un $R-$submódulo esencial de M.*

2. *Si L es un $R-$submódulo de N, N es un $R-$submódulo de M y L en un $R-$submódulo esencial de M, entonces L en un $R-$submódulo esencial de N y N en un $R-$submódulo esencial de M*

Demostración. 1) Sea $0 \neq x \in M$. Sabemos que existen $r, s \in R$ tales que $0 \neq rx \in N$ y $0 \neq s(rx) = (sr)x \in L$ con lo que obtenemos el resultado.
2) Es sencillo verificar. ∎

Definición 3.2.6. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y L un $R-$submódulo de M. Decimos que L es esencialmente cerrado en M si cada vez que L es esencial en $L^{'}$, un $R-$submódulo de M se cumple que $L = L^{'}$.*

Proposición 3.2.7. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A un $R-$submódulo izquierdo de M. Si A es un sumando directo de M, entonces A es esencialmente cerrado en M.*

Demostración. Sean M un $R-$módulo izquierdo, A,B $R-$submódulos izquierdos de M tales que $A \oplus B = M$. Supongamos que existe $A^{'}$ un $R-$submódulo izquierdo de M tal que A es esencial en $A^{'}$. Sucede que

$$A^{'} = A^{'} \cap M = A^{'} \cap (A \oplus B).$$

Ahora bien A es un $R-$submódulo de $A^{'}$, utilizando la propiedad modular tenemos $A^{'} \cap (A \oplus B) = A \oplus \left(A^{'} \cap B\right)$.

De lo anterior $0 = A \cap B \supseteq A \cap \left(A^{'} \cap B\right)$. Como A es esencial en $A^{'}$, entonces $A^{'} \cap B = {}_*0$. Por lo tanto $A = A^{'}$. ∎

3.3. Cápsulas divisibles

Definición 3.3.1. *Sean N, D $\mathbb{Z}-$módulos izquierdos y $f : N \to M$ un monomorfismo de N a D. Decimos que f es una cápsula divisible si:*

1. *D es divisible.*

2. *$Im(f)$ es esencial en D.*

Ejemplo 3.3.2. *Un ejemplo de cápsula divisible es $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ dada por $f(\overline{1}) = \overline{\frac{1}{p}}$.*

Proposición 3.3.3. *Sea D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo, divisible y libre de torsión. Entonces D es un $\mathbb{Q}-$módulo izquierdo y el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \times D \arrow[r, "\cdot"] & D \arrow[d, "1_D"] \\
\mathbb{Z} \times D \arrow[u] \arrow[r, "\cdot"'] & D
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $n > 0$ y $x \in D$ con $x \neq 0$. Tenemos que existe $y \in D$ tal que $x = ny$ y además esta y es única ya que si $ny = x = ny^{'}$, entonces $n\left(y - y^{'}\right) = 0$, al ser D divisible y tener un producto de dos elementos igualado a cero, entonces alguno de los dos debe ser cero. Tenemos por hipótesis que $n \neq 0$ así que $y - y^{'} = 0$; por consiguiente $y = y^{'}$. A y la denotamos como $\frac{x}{n}$. Definimos la siguiente función $\cdot : \mathbb{Q} \times D \to D$ dada por: $\cdot\left(\frac{m}{n}, x\right) \doteq m \cdot \left(\frac{x}{n}\right)$. Es sencillo verificar las propiedades para que sea un $\mathbb{Q}-$módulo izquierdo. ■

Corolario 3.3.4. *Sea D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo divisible y libre de torsión. Entonces D es isomorfo a $\mathbb{Q}^{(X)}$ para algún X como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo.*

Proposición 3.3.5. *Sea D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Si D es divisible, entonces $t(D)$ es divisible.*

Demostración. Sea $x \in t(D)$. Si $n > 0$, entonces $x = ny$ con $y \in D$. Ahora bien $0 = o(x) \cdot x = (o(x) \cdot n)\, y$ donde $o(x)$ es el orden del elemento x. Así $y \in t(D)$ y en consecuencia $t(D) \subseteq n \cdot t(D)$ para todo $n > 0$. Por lo tanto $t(D) = nt(D)$ y así $t(D)$ es divisible. ■

Corolario 3.3.6. *Sea D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Si D es divisible, entonces $D = t(D) \oplus L$ donde L es libre de torsión.*

Definición 3.3.7. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$subsubmódulos de M. Decimos que $\{N_i\}_{i \in I}$ es independiente si para toda $i \in I$ se cumple $N_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \{N_j\} = {}_*0$.*

Proposición 3.3.8. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Toda familia independiente de $R-$submódulos de M está contenida en una familia independiente máxima.*

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \left\{ \{N_i\}_{i\in I} \mid \{N_i\} \text{ es independiente } \right\}$. Definamos en $\mathcal{S}$ el siguiente orden: $\{N_i\}_{i\in I} \leq_{\mathcal{S}} \{M_j\}_{j\in J}$ si $N_i \in \{M_j\}_{j\in J}$ es sencillo verificar que $(\mathcal{S}, \leq_{\mathcal{S}})$ es un orden parcial.

Sea $\mathcal{C} = \left\{ \{N_i\}_{i\in I} \right\}_{I\in\mathcal{X}}$ una cadena en $\mathcal{S}$. Afirmamos que $\{N_i\}_{\cup\mathcal{X}}$ es una cota superior y esta en $\mathcal{S}$.

Demostraremos que es independiente. Supongamos que no fuera independiente, entonces existiría N_i tal que

$$0 \neq x \in N_i \cap \sum_{\cup\mathcal{X}\setminus\{i\}} \{N_j\} \neq_* 0$$

Con lo que $\{N_i, N_{j_1}, \ldots, N_{j_k}\}$ no sería independiente con $i \in I_0$, $j_i \in I_1$, …, $j_k \in I_k$.

Dado que $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces $N_i, N_{j_1}, \ldots, N_{j_k} \in \{N_k\}_{k\in I_l}$. Donde $I_l \in \mathcal{X}$ lo que es una contradicción ya que $\mathcal{C}$ es una cadena formada por familias independientes. ■

Proposición 3.3.9. *Si $\mathbb{Z}x$ es un grupo cíclico de orden p^n, entonces $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es una cápsula divisible.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un $\mathbb{Z}-$submódulo izquierdo de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ y consideremos el siguiente morfismo $f : \mathbb{Z}x \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ dado por $f(x) = \frac{\bar{1}}{p^n}$.

Tenemos que $f(mx) = \frac{\overline{m}}{p^n}$. Pero $\frac{\overline{m}}{p^n} = 0$ si $mx = 0$. Por lo tanto $f(\mathbb{Z}x) = \left\langle \frac{\bar{1}}{p^n} \right\rangle$ es un $\mathbb{Z}-$submódulo izquierdo esencial de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y con ello $E(\mathbb{Z}_{p^n}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. ■

Teorema 3.3.10. *Sea D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Si D es divisible y un $p-$grupo, entonces D es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X)}$ para algún conjunto X.*

Demostración. Si $D =_* 0$, entonces D es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{\emptyset}$.

Si $D \neq_* 0$, entonces existe $x \in D$ con $x \neq 0$ tal que $o(x) = p^n$ con $n > 0$ (si $n > 1$ entonces $o\left(p^{n-1}x\right) = p$). Podemos sin pérdida de generalidad suponer que $o(x) = p$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k", "\cong"'] & D \\
\mathbb{Z}_p \arrow[r, "m"'] & \mathbb{Z}_{p^\infty}
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & x \\ \overline{1} \arrow[r] & \overline{\frac{1}{p}} \end{tikzcd}$$

Como D es divisible y $m \circ k$ es monomorfismo, entonces existe $h : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to D$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"', "k"] & D \\ \mathbb{Z}_p \arrow[r, "m"'] & \mathbb{Z}_{p^\infty} \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que efectivamente h es monomorfismo, en caso contrario existiría $0 \neq \overline{\frac{a}{p^n}} \in ker(h)$ con $(a,p) = 1$.

Entonces $p^{n-1}\left(\overline{\frac{a}{p^n}}\right) \in ker(h)$, con lo que $a \cdot \overline{\frac{1}{p}} \in ker(h)$. Pero

$$\begin{aligned} a \cdot \overline{\frac{1}{p}} &= a \cdot m(\overline{1}) \\ &= a \cdot m(k(x)) \\ &= m(a \cdot k(x)) \\ &= m \circ k(ax), \end{aligned}$$

con lo que $h \circ m \circ k(ax) = 0$, pero $h \circ m \circ k = i$.

De donde $i(ax) = 0$ así ax=0 y con ello p divide a a, lo que es una contradicción. Por lo tanto h es monomorfismo.

Demostraremos que $h : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to D$ es monomorfismo. Si $a \cdot \overline{\frac{1}{p}} \in ker(h)$, entonces $h(a \cdot \overline{\frac{1}{p}}) = 0$ pero

$$h(a \cdot \overline{\frac{1}{p}}) = h(f(ax)) = ax.$$

Por lo tanto p divide a a, con lo cual $a \cdot \overline{\frac{1}{p}} = \overline{0}$. Así $ker(h) = {}_*0$.

Sea $\overline{a} \in Ker\,(h)$ con $\overline{a} \neq \overline{0}$ y $a \in \mathbb{Z}$.

Tenemos $0 \neq ax \overset{k}{\mapsto} \overline{a} \overset{m}{\mapsto} a$. Por otro lado $ax \mapsto 0$, como el diagrama es conmutativo tenemos $0 \neq ma \mapsto 0$ lo cual es una contradicción.

Dado que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible, tenemos que $h\left(\mathbb{Z}_{p^\infty}\right)$ es divisible. Por lo tanto $h\left(\mathbb{Z}_{p^\infty}\right)$ es un sumando directo de D, de donde $\left\{h\left(\mathbb{Z}_p\right)\right\}_{p \text{ primo}}$ es un conjunto independiente en D.

Sea

$$\mathcal{S} = \left\{\{N_i\}_{i\in I} \mid \{N_i\} \text{ es independiente }, N_i \text{ es } \mathbb{Z}\text{−submódulo de } D \text{ y } N_i \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}\right\}.$$

Supongamos que $\{N_i\}_{i\in K}$ es una familia independiente máxima. Entonces $\bigoplus_{i\in K} N_i$ es un $\mathbb{Z}-$submódulo de D el cual es divisible y por lo tanto $D = \bigoplus_{i\in K} N_i \oplus L$. Pero, ¿L podría ser distinto de cero?. No, ya que en caso afirmativo L contendría algún $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (lo que sería una contradicción a la condición máxima de $\{N_i\}_{i\in K}$). ■

Proposición 3.3.11. *Sea G un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Si G es finito y $(o(G), n) = 1$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, entonces G es $n-$divisible.*

Demostración. Como $(o(G), n) = 1$ existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a\cdot n + b\cdot o(G) = 1$, por lo tanto $G = n\cdot aG + b\cdot o(G)G$. Donde la segunda parte es cero y con ello se obtiene el resultado. ■

Proposición 3.3.12. *Si $\prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$, entonces $t\left(\prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p\right) = \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$.*

Demostración. Tenemos que $\bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p \subseteq t\left(\prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p\right)$. Demostraremos que se cumple la igualdad, es decir si $f \notin \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$, entonces f tiene soporte infinito. Sea f tal que $f(i) \in \mathbb{Z}_{p_i}$ con $f(i) \neq 0$.

Si $n\cdot f = 0$, entonces $n\cdot f(i) = 0$, con lo que p_i divide a n. Así $p_i \leq n$ lo que ocurre para toda i en el soporte de f recordemos que el soporte es infinito, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 3.3.13. *Sea G un grupo visto como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo. Si G es abeliano, entonces $\frac{G}{t(G)}$ no tiene elementos de orden finito (es decir, es libre de torsión).*

Demostración. Sea $x + t(G) \in \frac{G}{t(G)}$ tal que $x \notin t(G)$. Si $x + t(G)$ fuera de orden finito, entonces $m(x + t(G)) = t(G)$ por lo que $mx \in t(G)$. Así existe $n > 0$ tal que $(nm)x = n(mx) = 0$. Por lo tanto $x \in t(G)$, lo que es una contradicción a la hipótesis inicial. ■

Proposición 3.3.14. $\dfrac{\prod_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p}{\bigoplus_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p} = L$ *es divisible y libre de torsión.*

Demostración. Para ver que L es divisible, bastará ver que para todo q primo, se cumple que $qL = L$.

Sea $f + \left(\prod_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p\right) \in L$. Tomamos un primo r, con $r > q$, entonces

$$f = (f(1), f(2), \ldots, f(r), f(r+1), \ldots)$$

$$f = (f(1), f(2), \ldots, f(r), 0, \ldots, 0) + \\ (0, \ldots, 0, f(r_1), f(r_2), \ldots)$$

Donde $r_j \geq r$ con r_j primo para todo $j \in I$.

Como todos estos primos son distintos de q, entonces $f(r_j) = q\overline{z_j}$ tiene solución en $\mathbb{Z}_{r_j}$ (el cual es $q-$divisible y además r_j y q son primos distintos.

Hagamos:

$$g = (0, \ldots, 0, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots) .$$

Con lo que $f = h + qg$ y además f y qj son congruentes módulo $\prod_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p$.

Por lo tanto

$$f + \left(\prod_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p \right) = q \left(g \prod_{p \text{ es primo}} \mathbb{Z}_p \right)$$

lo que muestra que L es divisible.

■

3.4. Seudocomplementos

Definición 3.4.1. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y A, B dos $R-$submódulos de M. Decimos que B es seudocomplemento de A si:*

1. $A \cap B = {}_*0$.
2. *B es máximo con respecto a* 1.

Proposición 3.4.2. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y A, B dos $R-$submódulos de M. Si B es seudocomplemento de A, entonces $A \cap B = {}_*0$ y $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo esencial de M.*

Demostración. Sea B seudocomplemento de A. Sabemos que $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo de M. Ahora si $(A \oplus B)$ no fuera esencial, entonces existiría C un $R-$submódulo de M, ${}_*0 \neq C$ tal que $(A \oplus B) \cap C = {}_*0$. Con lo anterior $(A \oplus B) \oplus C$ sería un $R-$submódulo de M, pero $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$. Pero B es un $R-$submódulo propio de $B \oplus C$. Lo que es una contradicción a la definición de seudocomplemento de A. Por lo tanto $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo esencial de M. ■

Proposición 3.4.3. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y A un $R-$submódulo de M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es seudocomplemento de B para algún B $R-$submódulo de M.*
2. *A es esencialmente cerrado en M.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que A es seudocomplemento de B y que existe A' un $R-$submódulo de M tal que A es un $R-$submódulo propio y esencial en A'. Si ${}_*0 \neq A' \cap B$, entonces $A' \cap B$ es un $R-$submódulo de A'. Dado que A es esencial en A', entonces ${}_*0 = A \cap B \supseteq A \cap \left(A' \cap B\right) \neq_* 0$ lo que es una contradicción. Luego entonces debe ser que ${}_*0 = A' \cap B$, lo que también es contradictorio. Por lo tanto A es esencialmente cerrado en M.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que A es esencialmente cerrado en M. Sea B seudocomplemento de A. Sea $A^{'}$ tal que es seudocomplemento de B con $A \subseteq A^{'}$. Demostraremos que $A \leq_{es} A^{'}$ por contradicción. Si no fuera esencial, entonces existiría C un $R-$submódulo de $A^{'}$ con $*0 \neq C$ tal que $C \cap A \neq {}_*0$ y $(A \oplus C)$ es un $R-$submódulo de $A^{'}$. Tenemos que $(A \oplus C) \cap B = {}_*0$, con lo que $(A \oplus C) + B = (A \oplus C) \oplus B = A \oplus (B \oplus C)$, lo que contradice que B es un seudocomplemento de A. Por lo tanto A es un $R-$submódulo esencial de $A^{'}$. Como $A \subseteq A^{'}$, entonces $A = A^{'}$ ya que por hipótesis A es esencialmente cerrado. Por lo tanto A es seudocomplemento de B. ■

Proposición 3.4.4. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Todo $R-$submódulo A de M está contenido en un $R-$submódulo esencialmente cerrado.*

Demostración. Sea B seudocomplemento de A y $A^{'}$ un seudocomplemento de B tal que contenga a A. Entonces A es un $R-$submódulo esencial de $A^{'}$ y $A^{'}$ es esencialmente cerrado. ■

Corolario 3.4.5. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A un $R-$submódulo izquierdo. Entonces A tiene un seudocomplemento en M.*

Proposición 3.4.6. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A un $R-$submódulo izquierdo de M. Si B es seudocomplemento de A en M, entonces $\frac{A \oplus B}{B}$ es un $R-$submódulo esencial de $\frac{M}{B}$.*

Demostración. Supongamos que $\frac{A \oplus B}{B} \cap \frac{C}{B} = \frac{B}{B}$ así que $\frac{(A \oplus B) \cap C}{B} = \frac{B}{B}$.

Dado que B es un $R-$submódulo de C, entonces podemos aplicar la propiedad modular, así $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus B$. Así $A \cap C = (A \cap C) \cap B = {}_*0$. Como B es seudocomplemento, entonces $B = C$ y así $\frac{C}{B} = \frac{B}{B}$, con lo que se obtiene el resultado. ■

Teorema 3.4.7. *Sean E un $R-$módulo izquierdo inyectivo y A un $R-$submódulo izquierdo de M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es inyectivo.*
2. *A es un sumando directo de E.*
3. *A es esencialmente cerrado en E.*

Demostración. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Se tiene por el teorema 2.3.20.

2) $\Rightarrow$ 3) Esta implicación vale en general (véase proposición 3.2.7).

3) $\Rightarrow$ 2) Sean A esencialmente cerrado en E y $A^{'}$, B dos $R-$submódulos izquierdos de E tales que B es seudocomplemento de A, $A^{'}$ es seudocomplemento de B y A es $R-$submódulo de $A^{'}$. Como A es esencialmente cerrado, entonces $A = A^{'}$, con lo que A es seudocomplemento de B y B es seudocomplemento de A.

Tenemos que $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo de E y por la proposición 3.4.6 tenemos que $\frac{(A \oplus B)}{B}$ es un $R-$submodulo esencial de $\frac{E}{B}$ pero $A \cong \frac{A \oplus B}{B}$, además A es un $R-$submódulo de E con lo que tenemos que el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h", "\cong"'] \arrow[d, "i"'] & \frac{A\oplus B}{B} \arrow[r, "k", "es"'] & \frac{E}{B} \arrow[dll, "\varphi"] \\
E & &
\end{tikzcd}$$

Veremos que φ es monomorfismo. Sea $x+B \in \frac{E}{B}$ con $x \notin B$ y tal que $\varphi(x+B) = 0$. Dado que k es inclusión y $\frac{A+B}{B}$ es esencial en $\frac{E}{B}$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq r \cdot x + B \in \frac{A+B}{B}$, entonces $rx = a \in B$ con lo que $0 \neq a \in A$.

Ahora $0 = \varphi(rx) = i(a) = a$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $Ker\,(\varphi) =_* 0$ y así φ es monomorfismo.

Ahora si nos restringimos a la imagen de φ notamos que φ es un isomorfismo. Así

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & \frac{A\oplus B}{B} \arrow[r, "k", "es"'] & \frac{E}{B} \arrow[dll, "\varphi\restriction_{\varphi\left(\frac{E}{B}\right)}"] \\
\varphi\left(\frac{E}{B}\right) \arrow[d, "i"'] & & \\
E & &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado A es esencialmente cerrado y $\varphi\left(\frac{E}{B}\right)$ es esencial en $\varphi\left(\frac{E}{B}\right)$ con lo que $A = \varphi\left(\frac{E}{B}\right)$. Así $\varphi \restriction_A \circ k \circ h = 1_A$ y $\frac{E}{B} = \frac{A\oplus B}{B} \oplus U$. Como $\frac{A\oplus B}{B}$ es esencial en $\frac{E}{B}$, entonces $U = {}_*0$ y por lo tanto $\frac{A\oplus B}{B} = \frac{E}{B}$. Con lo que $A \oplus B = E$. ■

Teorema 3.4.8. *Sean D un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo y H un $\mathbb{Z}-$submódulo izquierdo de él. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *H es un sumando directo de D.*
2. *H es esencialmente cerrado en D.*
3. *H es divisible.*

Demostración. Por el teorema 2.3.10 tenemos que D es inyectivo si y sólo si D es divisible y por el teorema 3.4.7, tenemos el resultado. ■

3.5. Cápsulas inyectivas

Definición 3.5.1. *Sean M, E dos $R-$módulos izquierdos y $f : M \to E$ un $R-$morfismo de M a E. Decimos que f es una cápsula inyectiva de M si:*

1. *f es un monomorfismo esencial (es decir $Im(f)$ es esencial en E).*

2. E es inyectivo.

Proposición 3.5.2. *Sean M un $R-$módulo izquierdo. Si existe un monomorfismo $\varphi : M \to U$ con U inyectivo, entonces M tiene una cápsula inyectiva.*

Demostración. Sea E una extensión esencial máxima de $Im\,(\varphi)$ en U. Así M es isomorfo a $\varphi\,(M)$ el cual es un $R-$submódulo esencial máximo de E, y E es un sumando directo de U pues E es esencialmente cerrado.

Notemos que E es inyectivo. Si consideramos a $\rho \restriction^{E}: M \to E$ la composición dada por $M \xrightarrow{\varphi} \varphi(M) \xrightarrow{i} E$, la cual cumple con ser un monomorfismo esencial con E inyectivo y así tenemos el resultado. ■

Corolario 3.5.3. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces M tiene una cápsula inyectiva.*

Demostración. Es un corolario del teorema 2.3.19. ■

Proposición 3.5.4. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Dos cápsulas inyectivas de M son isomorfas.*

Demostración. Sean (α, E), $(\beta, E^{'})$ dos cápsulas inyectivas. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[dl, "\gamma"] \\ E^{'} & \end{tikzcd}$$

Como $E^{'}$ es inyectivo y α es monomorfismo, entonces existe $\gamma : E \to E^{'}$ tal que $\gamma \circ \alpha = \beta$. Afirmamos que γ es mono. Supongamos que existe $x \in E$ con $x \neq 0$ tal que $x \in Ker\,(\gamma)$. Dado que $x \neq 0$ y $\alpha\,(M)$ es un $R-$submódulo esencial de E, existe $0 \neq rx \in \alpha\,(M)$ y con ello existe $m \neq 0$ tal que $\alpha\,(m) \neq 0$. Dado que $0 \neq m \in M$, entonces $\beta\,(m) \neq 0$, pero $\beta = \gamma \circ \alpha$, así $\gamma \circ \alpha\,(rx) = r\,(\gamma \circ \alpha\,(x)) = 0$. Sin embargo $\gamma \circ \alpha\,(rx) = \beta\,(m) \neq 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Ker\,(\gamma) =_{*} 0$ y γ es monomorfismo.

Ahora consideremos $E \xrightarrow{\cong} \gamma\,(E) \xhookrightarrow{i} E^{'}$. Dado que $\gamma\,(E)$ es inyectivo, entonces $\gamma\,(E)$ es sumando directo de $E^{'}$, es decir $E = \gamma\,(E) \oplus U$ con U un $R-$submódulo izquierdo de $E^{'}$. Por otro lado $\beta\,(M)$ es un $R-$submódulo de $\gamma\,(E)$ y $\beta\,(M)$ es un $R-$submódulo esencial de $E^{'}$, así tenemos $\gamma\,(E)$ es un $R-$submódulo esencial de $E^{'}$, entonces $U = {}_{*}0$. Por lo tanto $\gamma\,(E) = E^{'}$ y así $E \cong E^{'}$. ■

3.6. Bimódulos

Definición 3.6.1. *Sean R, S dos anillos y M un grupo abeliano. Decimos que ${}_{R}M_{S}$ es un $R - S-$bimódulo si:*

1. M es un $R-$módulo izquierdo,

2. M es un $S-$módulo derecho,

3. Para todos $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$ se cumple que $(rm)\, s = r\,(ms)$.

Ejemplo 3.6.2. *Todo M $R-$módulo derecho es a la vez un $\mathbb{Z} - R-$bimódulo considerando a M como un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo.*

Ejemplo 3.6.3. *Sea M un grupo abeliano. Si consideramos $End(M)$ el anillo de endomorfismos de M, entonces M es un $End(M) - \mathbb{Z}-$bimódulo como $End(M)-$módulo izquierdo y $\mathbb{Z}-$módulo derecho definiendo la siguiente operación $(\varphi m)r \doteqdot \varphi(mr)$.*

Teorema 3.6.4. *Sean R, S dos anillos, ${}_SM_R$ un $S-R-$bimódulo y N un $S-$módulo izquierdo. Entonces*

$Hom_S\,(M, N)$ es un $R-$módulo izquierdo con la siguiente operación: $(rf)\,(x) \doteqdot f\,(xr)$.

Demostración. Sean $f, f_1, f_2 \in Hom_S\,(M, N)$, $r, r_1, r_2 \in R$ y $x \in M$. Veamos que en efecto se cumple las condiciones para que sea un $R-$módulo:

- $(1f)\,(x) = f\,(x \cdot 1) = f\,(x)$
- $((r_1 r_2)\, f)\,(x) = f\,(x\,(r_1 r_2)) = f\,((xr_1)\, r_2) = r_2 f\,(xr_1) = r_1\,(r_2 f\,(x))$
- $((r_1 + r_2)\, f)\,(x) = f\,(xr_1 + xr_2) = r_1 f\,(x) + r_2 f\,(x)$
- $r\,(f_1 + f_2)\,(x) = (f_1 + f_2)\,(xr) = rf_1\,(x) + rf_2\,(x)$.

■

Observación 3.6.5. *Si D es un grupo divisible visto como un $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}\,(R, D)$ es un $R-$módulo izquierdo considerando al anillo R como $\mathbb{Z} - R-$bimódulo, a D como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo y definida así la operación: $(rf)\,(x) \doteqdot f\,(xr)$.*

Proposición 3.6.6. *Sea R un anillo visto como $\mathbb{Z} - R-$bimódulo. Entonces $Hom_{\mathbb{Z}}\left(R, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$ es inyectivo como $R-$módulo izquierdo.*

Demostración. Es un corolario de la proposición 2.3.16 ■

3.7. Módulos simples y módulos semisimples

Definición 3.7.1. *Sea S un $R-$módulo izquierdo. Decimos que S es simple si ${}_R\,[{}_*0, S] = \{{}_*0, S\}$ y ${}_*0 \neq S$.*

Proposición 3.7.2. *Sea U un $R-$submódulo de M un $R-$módulo izquierdo. U es máximo si y sólo si $\frac{M}{U}$ es simple.*

Demostración. Sabemos que existe $\pi : M \to \frac{M}{U}$, un epimorfismo dado por $\pi(x) = x + U$. Por el teorema de la correspondencia existe un isomorfismo de retículas $[U, M] \rightarrowtail [_*0, \frac{M}{U}]$. Así que U es un $R-$submódulo máximo de M si y sólo si $|[U, M]| = 2$ si y sólo si $|[_*0, \frac{M}{U}]| = 2$ si y sólo si $\frac{M}{U}$ es simple. ■

Ejemplo 3.7.3. *Sea p un primo. Entonces $\mathbb{Z}_p$ es simple.*

Definición 3.7.4. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M es semisimple si todo A un $R-$submódulo izquierdo de M es un sumando directo de M.*

Ejemplo 3.7.5.

1. *Todo $R-$módulo izquierdo M simple es semisimple.*
2. *$_*0$ es semisimple.*
3. *Si R es un campo, entonces cualquier $R-$módulo izquierdo V es semisimple.*

Teorema 3.7.6. *La clase de los módulos semisimples es cerrada bajo tomar submódulos y bajo cocientes.*

Demostración. Demostraremos que es cerrada bajo submódulos.

Sean M un $R-$módulo izquierdo semisimple y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Demostraremos que N es semisimple. Sea K un $R-$submódulo izquierdo de N y consideremos la siguiente sucesión $K \overset{i_1}{\hookrightarrow} N \overset{i_2}{\hookrightarrow} M$. Como K es un $R-$submódulo izquierdo de M y M es semisimple, entonces K es sumando directo de M. Entonces la sucesión se escinde digamos que $\pi \circ (i_2 \circ i_1) = 1_K$, entonces $(\pi \circ i_2) \circ i_1 = 1_K$. Con lo que $\pi \circ i_1$ es una escisión de i_2. Por lo tanto K es un sumando directo de N.

Demostraremos ahora que la clase de los módulos semisimples es cerrada bajo cocientes.

Sean M, L dos $R-$módulos izquierdos tales que M es semisimple y $\rho : M \to L$ un epimorfismo de M a L. Completando a una sucesión exacta corta tenemos $_*0 \to Ker\,(\rho) \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\rho}{\to} L \to {_*0}$. Como $Ker\,(\rho)$ es un $R-$ submódulo izquierdo de M y M es semisimple, entonces $Ker\,(\rho)$ es un sumando directo de M. Como la sucesión se escinde por la izquierda, también se escinde por la derecha, por lo que existe $i : L \to M$ tal que $\rho \circ i = 1_M$ y así $i\,(L)$ es semisimple. Por el resultado previo y considerando que $L \overset{\cong}{\to} i\,(L)$, se tiene que L es semisimple. ■

Corolario 3.7.7. *Sean M, N dos $R-$módulos izquierdos y $f : M \to N$ un isomorfismo. Si N es semisimple, entonces M es semisimple.*

Observación 3.7.8. *La clase de los módulos semisimples en general no es cerrada bajo productos, ni bajo extensiones.*

La sucesión

$$_*0 \to 2\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \frac{\mathbb{Z}_4}{2\mathbb{Z}_4} \to {_*0}$$

de grupos abelianos, tiene los extremos simples pero $\mathbb{Z}_4$ no es semisimple pues sus submódulos forman una cadena con tres elementos $_*0, 2\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4$ y $2\mathbb{Z}_4$ no es un sumando directo de $\mathbb{Z}_4$.

Por lo tanto la clase de los semisimples en general no es cerrada bajo extensiones

Definición 3.7.9. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Definimos el zoclo de M como* $zoc(M) \doteqdot \sum\{S \mid S$ *es $R-$submódulo izquierdo de M y S es simple*$\}$.

Es inmediato que $zoc(M)$ es un $R-$submódulo de M.

Teorema 3.7.10. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es semisimple.*
2. *$M = zoc(M)$.*
3. *M es la suma directa de una familia de $R-$submódulos simples; es decir* $M = \bigoplus\{S_i \mid S_i$ *es $R-$submódulo izquierdo de M y S es simple*$\}_{i\in I}$.

Demostración. 3) $\Rightarrow$ 2) Es inmediato de la definición de zoclo.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea A un $R-$submódulo izquierdo de M. Demostraremos que A es sumando directo de M. Sea B un seudocomplemento de A en M, entonces $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo esencial de M. Sea S un $R-$submódulo izquierdo simple de M.

Tenemos que ${}_*0 \neq (A \oplus B) \cap S = S$ con lo cual S es un $R-$submódulo izquierdo de $A \oplus B$ para todo S $R-$submódulo izquierdo simple de M. Como $M = \sum\{S \mid S$ es $R-$submódulo izquierdo de M y S es simple$\} \subseteq A \oplus B$. Así $M = A \oplus B$. Por lo tanto B es complemento de A.

1) $\Rightarrow$ 3) Supongamos $M \neq {}_*0$ y M es semisimple. Como $M \neq {}_*0$ entonces existe $x \in M$ tal que ${}_*0 \neq Rx$. Ahora tenemos $Rx \hookrightarrow M$ y existe $Rx \to S$ epimorfismo. Como Rx es semisimple tenemos que $Rx \to S$ se escinde, así S se sumerge en M con lo que $zoc(M) \neq {}_*0$.

Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia independiente máxima de submódulos simples de M. Sea U un seudocomplemento de $\bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, es decir $M = \left(\bigoplus\limits_{i\in I} S_i\right) \oplus U$. Si suponemos que $U \neq {}_*0$, entonces U contendría un simple V y así $\{S_i\}_{i\in I} \cup \{V\}$ sería independiente, lo que contradiría a la condición máxima de $\{S_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto $U =_* 0$ y $M = \bigoplus\limits_{i\in I}\{S_i\}$. ■

Proposición 3.7.11. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces*

$$zoc(M) = \bigcap\{N \mid N \text{ es } R-\text{submodulo izquierdo esencial de } M\}.$$

Demostración. $\subseteq$) Sea S un $R-$módulo izquierdo simple y si N es un $R-$submódulo izquierdo esencial de M, entonces $S \cap N \neq_* 0$, con lo que $S \cap N = S$, así $S \leq N$. Por tanto $zoc(M) \subseteq \bigcap\{N \mid N$ es $R-$submódulo izquierdo esencial de $M\}$.

$\supseteq$) Por demostrar $\bigcap\{N \mid N$ es $R-$submodulo izquierdo esencial de $M\} = I$ es semisimple. Sea A un $R-$submódulo izquierdo de I y B un seudocomplemento de A en M, tenemos que $(A \oplus B)$ es un $R-$submódulo esencial de M, así tenemos la siguiente sucesión $A \hookrightarrow I \hookrightarrow A \oplus B$.

Utilizando la propiedad modular tenemos $I = I \cap (A \oplus B) = A \oplus (I \cap B)$. Por lo tanto A es un sumando directo de I. ■

Proposición 3.7.12. *Sea S un $R-$módulo izquierdo. Si S es simple, entonces $End_R(S) = Hom_R(S,S)$ es un anillo con división.*

Demostración. Sea $\alpha : S \to S$ un $R-$morfismo tal que $\alpha \neq \bar{0}$. Tenemos que $Ker(\alpha) \neq {}_*0$ con lo cual α es monomorfismo. También $Im(\alpha) = S$ y α es sobre. Así α es biyección, por lo tanto isomorfismo y con ello tiene inverso. ∎

Teorema 3.7.13. *Sea R un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R visto como $R-$módulo izquierdo es semisimple.*
2. *Todo $R-$módulo izquierdo M es semisimple.*
3. *Todo $R-$módulo izquierdo M es inyectivo.*
4. *Todo $R-$módulo izquierdo M es proyectivo.*
5. *Toda sucesión exacta ${}_*0 \to A \to B \to M \to {}_*0$ se escinde.*
6. *Todo $R-$submódulo N de un $R-$módulo izquierdo M es esencialmente cerrado en M.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sean M un $R-$módulo izquierdo y $R^{(X)} \to M$ un epimorfismo. Tenemos que $R^{(X)}$ es semisimple pues la suma directa de semisimples es semisimple. Por lo tanto M es semisimple ya que es un cociente de un semisimple.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean M un $R-$módulo izquierdo y $f : M \to E(M)$ una cápsula inyectiva. Por hipótesis $E(M)$ es semisimple, con lo que M es sumando directo de $E(M)$. Así $E(M) = M \oplus K$. Como M es un $R-$submódulo esencial de $E(M)$ y $M \cap K =_* 0$, entonces $K = {}_*0$. Por lo tanto $M = E(M)$ y así M es inyectivo.

3) $\Rightarrow$ 6) Sean M, N $R-$módulos izquierdos tales que N es un $R-$submódulo de M. Tenemos $N \hookrightarrow M$. Como N es inyectivo, entonces N es sumando directo de M. Por lo tanto N es esencialmente cerrado en M. (Véase proposición 3.2.7).

6) $\Rightarrow$ 4) Demostraremos que M es proyectivo.

4) $\Rightarrow$ 5) Sea una sucesión exacta ${}_*0 \to A \to B \xrightarrow{\pi} M \to {}_*0$. Como M es proyectivo, entonces π se escinde.

5) $\Rightarrow$ 1) Sea I es un ideal izquierdo de R. Como ${}_*0 \to I \to R \to \frac{R}{I} \to {}_*0$ se escinde, entonces I es un sumando directo de R. ∎

Proposición 3.7.14. *Si tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{k=1}^{n} M_k \arrow[r, "T"] & \bigoplus_{l=1}^{m} N_l \arrow[d, "p_j"] \\
M_i \arrow[u, "i_i"] \arrow[ur, "T_i"] \arrow[r, "p_j \circ T \circ i_i = T_{j,i}"'] & N_j
\end{tikzcd}$$

donde i_i,p_j son respectivamente la inclusión y la proyección canónicas, entonces la función $\Theta : End_R(M^n) \to M_{n\times n}(End(M))$ dada por $\Theta(T) = [T_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ es un isomorfismo.

Demostración. Demostremos primero que Θ es aditiva. Si $T, U : M^n \to M^n$, entonces

$$\begin{aligned} \Theta(T+U) &= [T+U]_{i,j} \\ &= [p_i \circ (T+U) \circ i_j] \\ &= [p_i \circ T \circ i_j + p_i \circ U \circ i_j] \\ &= [p_i \circ T \circ i_j] + [p_i \circ U \circ i_j] \\ &= \Theta(T) + \Theta(U) \end{aligned}$$

Por lo tanto es aditiva.

Demostremos que Θ es inyectiva.

Si

$$\Theta(T) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\},$$

entonces $p_i \circ i_j = \overline{0} : M \to M$ para todo i y para todo j.

Fijemos i, entonces $(p_i \circ T) \circ i_j = \overline{0} : M^n \to M$ para toda j. Por la propiedad universal de la suma directa tenemos que $p_i \circ T = \overline{0} : M^n \to M$, pues también se tiene que $\overline{0} \circ i_j = \overline{0} : M \to M$ para toda j.

De donde tenemos que $p_i \circ T = \overline{0}$ Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, así que por la propiedad universal del producto tenemos que $T = \overline{0} : M^n \to M^n$. Por lo tanto $ker(\Theta) = \{\overline{0}\}$. Por lo tanto Θ es inyectiva.

Demostremos ahora que Θ es un morfismo de anillos. Para esta demostración usaremos que

$$Id_{M^n} = \sum_{k=1}^{n} i_k \circ p_k : M^n \to M^n,$$

entonces $\Theta(U \circ T) = [(U \circ T)_{i,j}]$ y por definición

$$(U \circ T)_{i,j} = p_i \circ (U \circ T) \circ i_j$$

Ahora

$$\begin{aligned} p_i \circ (U \circ T) \circ i_j &= p_i \circ (U \circ Id_{M^n} \circ T) \circ i_j \\ &= p_i \circ \left(U \circ \left(\sum_{k=1}^{n} i_k \circ p_k \right) \circ T \right) \circ i_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} (p_i \circ U \circ i_k) \circ (p_k \circ T \circ i_j) \\ &= (\Theta(U)\Theta(T))_{i,j} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Theta(U \circ T) = \Theta(U)\Theta(T)$ y con esto tenemos que Θ es multiplicativa.

$\Theta(1_{M^n} = [p_i \circ 1_{M^n} \circ i_k] = [\delta_{i,k}]$ pues

$$\delta_{i,k} = p_i \circ i_k : M \to M$$

Así tenemos que Θ es un morfismo inyectivo de anillos.

Ahora demostremos que Θ es suprayectiva. Supongamos

$$[f_{i,j}] \in M_{n \times n}(End(M))$$

.

Fijemos i, entonces la familia $\{f_{i,j} : M \to M\}_{j=1}^{n}$ induce un morfismo $f_i : M \to M^n$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_{i,j}"'] & M^n \arrow[d, "p_j"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del producto.

Ahora la familia $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ induce un morfismo $f : M^n \to M^n$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "f"] & M^n \\
M \arrow[u, "i_j"] \arrow[ur, "f_i"'] & M
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "f"] & M^n \arrow[d, "p_j"] \\
M \arrow[u, "i_j"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[r, "f_{i,j}"'] & M
\end{tikzcd}$$

conmuta para toda i y para toda j.

Por lo tanto $\Theta(f) = [f_{i,j}]$.

Por lo tanto Θ es un isomorfismo de anillos. ∎

Corolario 3.7.15. *Si S es un $R-$módulo izquierdo simple, entonces $Hom\,(S^n, S^n) \cong M_{n\times n}\,(End_R\,(S))$, donde $M_{n\times n}\,(End_R\,(S))$ es un anillo con división.*

Teorema 3.7.16. *Sea R un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es semisimple.*
2. *$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$, donde D_i es un anillo con división para toda i.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea R semisimple, entonces $R = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, con S_i simple para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el corolario anterior, tenemos

$$R = (S_{11} \oplus \cdots \oplus S_{1k_1}) \oplus (S_{21} \oplus \cdots \oplus S_{2k_2}) \oplus \ldots,$$

donde los agrupamos con la siguiente condición $S_{ij} \cong S_{lk}$ si y solo si $i = l$, ahora tenemos $(S_{11} \oplus \cdots \oplus S_{1k_1}) = T_1$, $(S_{21} \oplus \cdots \oplus S_{2k_2}) = T_2$, con lo que $R = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$.

Por otro lado tenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$R \cong Hom(R, R) \cong \prod_{i,j} Hom(T_i, T_j) \cong \prod_{i} Hom(T_i, T_i).$$

Ahora, tenemos la siguiente asociación para $T_i \xrightarrow{\varphi} T_j :\mapsto (\varphi_{s,t})$, donde

$$\varphi_{s,t} = p_s \circ \varphi \circ i_t$$

ya que:

$$\begin{tikzcd}
T_i \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_t"'] & T_j \arrow[d, "p_s"] \\
S_{i,t} \arrow[r, "\varphi_{s,t}"'] & S_{i,s}
\end{tikzcd}$$

Escogemos $S_{i,1} \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha_t}} S_{i,t}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
S_{i,t} \arrow[r, "\varphi_{s,t}"] \arrow[d, "\alpha_t"'] & S_{i,s} \arrow[d, "\alpha_s^{-1}"] \\
S_{i,1} \arrow[r, "\alpha_s^{-1} \circ \varphi_{s,t} \circ \alpha_t"'] & S_{i,1}
\end{tikzcd}$$

Con lo cual $T_i \xrightarrow{\varphi} T :_j \mapsto \left(\alpha_s^{-1} \circ \varphi_{s,t} \circ \alpha_t\right)$, donde $\left(\alpha_s^{-1} \circ \varphi_{s,t} \circ \alpha_t\right) \in End(S_{i,1}) \ddot{=} D_i$. Por lo tanto $R \cong \prod_i M_{n_i}(D_i)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Primero hacemos una observación antes de demostrar esta implicación. En general tenemos que $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, demostraremos que, en general

$$R - mod \cong R_1 - mod \times \cdots \times R_n - mod.$$

Veamos que $R_1 \times R_2 - mod \cong R_1 - mod \times R_2 - mod$, y utilizando inducción obtendremos el resultado.

Sea M un $R_1 \times R_2-$módulo. Tenemos las siguientes funciones asociadas: ${}_{R_1 \times R_2}M \mapsto ((1,0)\, M \times (0,1)\, M)$ y $({}_{R_1}M_1 \times {}_{R_2}M_2) \mapsto_R (M_1 \times M_2)$ esta ultima válida ya que $R = R \times R = R_1 \times R_2 = (1,0)\, R \times (0,1)\, R$. Así, sí M es un $R-$módulo izquierdo, entonces $(1,0)\, M$ es un R_1-módulo con el siguiente morfismo $\cdot : R_1 \times (1,0)\, M \to (1,0)\, M$ la función dada por $r_1 \cdot ((1,0)\, x) \doteqdot (r_1, 0)\, x$. Es sencillo verificar que en efecto cumple con las propiedades. Si tuviéramos un morfismo entre dos $R-$módulos $f : M \to N$, entonces la función restringida a cada coordenada bastará para completar la asociación entre las categorías, como se demuestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} {}_RM \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & ((1,0)\, M, (0,1)\, M) \arrow[d, "(f\restriction_{(1,0)M}, f\restriction_{(0,1)M})"] \\ {}_RN \arrow[r] & ((1,0)\, N, (0,1)\, M) \end{tikzcd}$$

Ahora bastará ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ y si D es un anillo con división, entonces $M_n\,(D)$ es semisimple. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $M_n\,(D)$. Entonces

$$M_n\,(D) = \left\{\begin{matrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\} \oplus \left\{\begin{matrix} 0 & D & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & D & 0\cdots & 0 \end{matrix}\right\} \oplus \cdots \oplus \left\{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & D \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & D \end{matrix}\right\}.$$

Afirmamos que $\left\{\begin{matrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\}$ es un ideal simple de $M_n\,(D)$.

Sea $A \in M_n\,(D)$, entonces $A \left\{\begin{matrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\}$ con $* \in D$. Por lo tanto $\left\{\begin{matrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\}$ es un ideal izquierdo de $M_n\,(D)$. ■

Corolario 3.7.17. *Sea R un anillo. R es semisimple como $R-$módulo izquierdo si y sólo si R es semisimple como $R-$módulo derecho.*

Demostración. Que $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$ es una condición que no tiene lateralidad. ■

CAPÍTULO 4

Módulos artinianos, neterianos y superfluos

4.1. Artinianos y neterianos

Definición 4.1.1. *Sean R un anillo y M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M cumple con la condición de cadena ascendente en submódulos, (en abreviatura C.C.A.) si:*

1. *No hay cadenas ascendentes infinitas propias de submódulos o equivalentemente;*

2. *Para toda cadena ascendente de submódulos de M, $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \cdots \leq M_k \leq \cdots$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que se estaciona, es decir $M_i = M_k$ para toda $i \geq k$.*

Definición 4.1.2. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M es de Nöether (o neteriano) si M cumple C.C.A.*

Definición 4.1.3. *Sea R un anillo y M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M cumple con la condición de cadena descendente en submódulos, (en abreviatura C.C.D.) si:*

1. *No hay cadenas descendentes infinitas propias de submódulos o equivalentemente,*

2. *Para toda cadena descendente de submódulos de* M, $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \cdots \geq M_k \geq \cdots$ *existe un* $k \in \mathbb{N}$ *tal que se estaciona, es decir, para toda* $i \geq k$ *se cumple que* $M_k = M_i$.

Definición 4.1.4. *Sea* M *un* $R-$*módulo izquierdo. Decimos que* M *es de Artin (o artiniano) si* M *cumple C.C.D.*

Ejemplo 4.1.5. $\mathbb{Z}$ *visto como* $\mathbb{Z}-$*módulo izquierdo es neteriano pero no artiniano ya que* $2\mathbb{Z} \supsetneqq 4\mathbb{Z} \supsetneqq 8\mathbb{Z} \supsetneqq \cdots$.

Proposición 4.1.6. *Sea* M *un* $R-$*módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M *es finitamente generado.*
2. *Existe un epimorfismo* $\varphi : R^n \to M$, *para algún* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Si existe un morfismo* $f : \bigoplus_I N_i \to M$, *entonces existe* $F \subseteq I$, F *finito tal que existe un epimorfismo* $g : \bigoplus_F N_i \to M$.

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Si existe $f : R^n \to M$ y tenemos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ genera a R^n, entonces es sencillo verificar que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es un conjunto generador de M.

1) $\Rightarrow$ 3) Por hipótesis existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto generador de M. Supongamos que existe $f : \bigoplus_I N_i \to M$ un epimorfismo. Para x_i se tiene que $x_i = f\left(n_{k_{1,i}} + \cdots + n_{k_{i,i}}\right)$ con $n_{k_{j,i}} \in N_{k_j}$ y $k_{j,i} \in I$.

Sea Z el conjunto de las $k_{j,i}$. Si restringimos f, entonces $f \restriction_{\bigoplus_Z N_{k_{j,i}}} : \bigoplus_Z N_{k_{j,i}} \to M$ es el epimorfismo buscado.

3) $\Rightarrow$ 2) Sabemos que todo M puede ser cubierto por $R^{(X)}$ para algún conjunto X, entonces existe un epimorfismo $R^{(X)} \to M$, por hipótesis existe $F \subseteq X$, F finito tal que existe un epimorfismo $R^{(F)} \to M$, con lo que se obtiene el resultado. ■

Observación 4.1.7. *Todo módulo finitamente generado es cociente de un módulo libre finitamente generado.*

Es decir, si M *es finitamente generado, existe* $\pi R^n \to M$ *epimorfismo, para algún* $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.1.8. *La clase de los módulos finitamente generados es cerrada bajo cocientes y bajo extensiones.*

Demostración. Sea M un $R-$módulo izquierdo finitamente generado y sea $f : M \to N$ un epimorfismo. Por demostrar N es finitamente generado.

Por la proposición anterior existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n \to M \to N$ es un epimorfismo. Con ello, existe un epimorfismo $R^n \to N$. Por lo tanto N es finitamente generado.

Veamos ahora que es cerrada bajo extensiones.

Sea $_*0 \to A \to B \to C \to {_*0}$ una sucesión exacta con A y C módulos finitamente generados por la observación anterior existen

$$\begin{tikzcd}
 & R^n \arrow[d, "P_A"'] & & R^m \arrow[d, "P_B"'] & \\
_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & _*0
\end{tikzcd}$$

con $n, m \in \mathbb{N}$, completemos la sucesión de arriba:

$$\begin{tikzcd}
 & R^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "P_A"'] & R^n \oplus R^m \arrow[r, "k"] & R^m \arrow[d, "P_B"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & _*0
\end{tikzcd}$$

Como R^m es proyectivo existe $\gamma : R^m \to B$ tal que $\beta \circ \gamma = P_B$.
Ahora $\alpha \circ P_A$ y γ inducen λ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & R^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "P_A"'] & R^n \oplus R^m \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\lambda"'] & R^m \arrow[d, "P_B"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & _*0
\end{tikzcd}$$

Como $R^{n+m} \cong R^n \oplus R^m$ y λ es epimorfismo por el lema del quinto, entonces B es finitamente generado.

■

Definición 4.1.9. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M cumple la condición máxima en submódulos si para toda familia no vacía de submódulos de M tiene máximos.*

Proposición 4.1.10. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es neteriano.*
2. *M tiene condición máxima en submódulos.*
3. *Si N es un $R-$submódulo izquierdo de M, entonces N es finitamente generado.*

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Demostraremos la contrapuesta.

Si $N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq N_3 \subsetneqq \dots$ fuera una cadena ascendente propia de $R-$submódulos izquierdos de M, entonces $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ no tendría máximos.

1) $\Rightarrow$ 3) Demostraremos la contrapuesta.

Si N es un $R-$submódulo izquierdo de M que no fuera finitamente generado, entonces $N \neq {_*0}$. También existe $x_1 \in N$ con $x_1 \neq 0$ tal que $\langle x_1| \subsetneqq N$, por consiguiente existe $x_2 \in N \setminus \langle x_1|$ con $x_2 \neq 0$ y con ello $\langle x_1| \subsetneqq \langle x_1, x_2| \subsetneqq N$. Continuando de esta manera tenemos $\langle x_1| \subsetneqq \langle x_1, x_2| \subsetneqq \langle x_1, x_2, x_3| \subsetneqq \dots \subsetneqq \dots$. Luego existiría una sucesión $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x_1, \ldots, x_n| \lneqq \langle x_1, \ldots, x_{n+1}|$. Por lo tanto habría una cadena ascendente infinita propia.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $N_1 \lneqq N_2 \lneqq N_3 \lneqq \ldots$ una cadena ascendente propia de $R-$submódulos izquierdos de M. Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} N_i$ es un $R-$submódulo izquierdo de M. Por hipótesis existe $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tal que $\langle\{y_1, \ldots, y_n\}| = \bigcup\limits_{i\in I} N_i$ con $y_i \in N_{j_i}$. Así $\langle y_1, \ldots, y_n| \leq \bigcup\limits_{i=1}^{n} N_{j_i} = N_{i_l}$ para algún $l \in \mathbb{N}$. Con ello tenemos la cadena $N_1 \lneqq \ldots \lneqq N_s = N_{i_l}$, la cual termina en N_{i_l}. Por lo tanto la cadena es finita. ■

Definición 4.1.11. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M es finitamente cogenerado si dado un monomorfismo $f : M \to \prod\limits_{i\in I} N_i$, entonces existe un conjunto finito $F \subseteq I$ tal que $f \restriction_F^{\prod N_i} : M \to \prod\limits_{i\in F} N_i$ también es inyectivo.*

Proposición 4.1.12. *Sea un M un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es finitamente cogenerado.*
2. *Si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de $R-$submódulos izquierdos de M tal que $\bigcap\limits_{i\in I} N_i = {}_*0$, entonces existe un conjunto finito $F \subseteq I$ tal que $\bigcap\limits_{i\in F} N_i = {}_*0$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de $R-$submódulos izquierdos de M tal que $\bigcap\limits_{i\in I} N_i = {}_*0$.

Dado que para toda $i \in I$ tenemos que N_i es un $R-$submódulo izquierdo de M. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "P_i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \frac{M}{N_i} \\ & \prod\limits_{i\in I} \frac{M}{N_i} \arrow[u, "\pi_i"'] \end{tikzcd}$$

Ahora bien ${}_*0 = \bigcap\limits_{i\in I} N_i \hookrightarrow M \xrightarrow{\varphi} \prod\limits_{i\in I} \frac{M}{N_i}$ es una sucesión exacta, de donde existe $F \subseteq I$ finito tal que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \prod\limits_{i\in I} \frac{M}{N_i} \\ & \prod\limits_{i\in F} \frac{M}{N_i} \end{tikzcd}$$

con λ monomorfismo, donde λ es la correstricción de φ. Por lo tanto ${}_*0 = Ker\,(\lambda) = \bigcap\limits_{i \in F} N_i$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que para toda $i \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod\limits_{i \in I} L_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & L_i \end{tikzcd}$$

Entonces ${}_*0 = Ker(f) - \bigcap\limits_{i \in I} Ker\,(f_i)$. Por hipótesis, existe $F \subseteq I$, F finito tal que $\bigcap\limits_{i \in F} Ker\,(f_i) = {}_*0$. Por lo tanto la construcción de f a $M \rightarrowtail \prod\limits_{i \in F} L_i$ es un monomorfismo. ■

Teorema 4.1.13. *La clase de los módulos finitamente cogenerados es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas.*

Demostración. Demostraremos que es cerrada bajo submódulos.

Sean M un $R-$módulo izquierdo finitamente cogenerado, N un $R-$submódulo izquierdo de M y $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$submódulos izquierdos de N tal que $\bigcap\limits_{i \in I} L_i = {}_*0$. Con ello existe $F \subseteq I$, F finito tal que $\bigcap\limits_{i \in F} L_i = {}_*0$ ya que M es finitamente cogenerado.

Demostraremos que es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Sea M un $R-$módulo izquierdo finitamente cogenerado. Demostraremos que $E\,(M)$ es finitamente cogenerado. Sea $\{L_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$submódulos izquierdos de $E\,(M)$ tal que $\bigcap\limits_{i \in I} L_i = {}_*0$. Tenemos $\bigcap\limits_{i \in I} M \cap L_i = M \cap \left(\bigcap\limits_{i \in I} L_i \right) = {}_*0$, de donde para cada $i \in I$, $M \cap L_i$ es un $R-$submódulo izquierdo de M. Por hipótesis M es finitamente cogenerado, luego existe $F \subseteq I$, F finito tal que $M \cap \left(\bigcap\limits_{i \in F} L_i \right) = \bigcap\limits_{i \in F} M \cap L_i = {}_*0$. Con lo que $\bigcap\limits_{i \in F} L_i = {}_*0$ ya que M es un $R-$submódulo esencial de $E\,(M)$. Por lo tanto $E\,(M)$ es finitamente cogenerado.

■

Teorema 4.1.14. *Sea M un $R-$módulo izquierdo semisimple. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} S_i$.
2. *M es finitamente generado.*
3. *M es neteriano.*
4. *M es artiniano.*
5. *M es finitamente cogenerado.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Si $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ entonces M está generado por

$$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

con $0 \neq x_i \in S_i$ para toda i.

2) $\Rightarrow$ 1) Como M es semisimple, entonces existe $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de simples, tal que $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$. Por lo anterior hay un epimorfismo (mas aún un isomorfismo) $1_M : \bigoplus_{i \in I} S_i \to M$. Como M es finitamente generado existe $F \subseteq I$, F finito tal que $1_M : \bigoplus_{i \in F} S_i \to M$ por la proposición 4.1.6. Por lo tanto $M = \bigoplus_{i \in F} S_i$.

2) $\Rightarrow$ 3) Un simple S es neteriano pues sólo tiene dos $R-$submódulos. Ahora, como la clase de los neterianos es cerrada bajo extensiones, entonces una suma directa de simples es neteriana.

3) $\Rightarrow$ 2) Si M es neteriano, todos sus submódulos son finitamente generados. En particular M es finitamente generado.

1) $\Rightarrow$ 4) Un simple S es artiniano pues sólo tiene dos $R-$submódulos. Ahora, como la clase de los artinianos es cerrada bajo extensiones, entonces una suma directa de simples es artiniana.

4) $\Rightarrow$ 5) Si M es artiniano, entonces todos sus cocientes son finitamente cogenerados, en particular M es finitamente cogenerado.

5) $\Rightarrow$ 2) $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ es un $R-$submódulo izquierdo de $\prod_{i \in I} \{S_i\}$. Por hipótesis, M es finitamente cogenerado así existe F finito tal que hay un monomorfismo $f : M \to \prod_{i \in F} S_i = \bigoplus_{i \in F} S_i$. Luego entonces M es sumando directo de $\bigoplus_{i \in F} S_i$ y con ello es cociente de un finitamente generado, por lo tanto M es finitamente generado. ■

Definición 4.1.15. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Decimos que M cumple la condición mínima en $R-$submódulos izquierdos si toda familia no vacía de $R-$submódulos de M tiene mínimos.*

Proposición 4.1.16. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es artiniano.*

2. *M tiene condición mínima en $R-$submódulos izquierdos.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por contrapuesta. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de $R-$submódulos izquierdos de M tal que no tiene mínimos, entonces uno puede escoger $M_1 \gneqq M_2 \gneqq \ldots$ que no se estaciona. Por lo tanto M no es artiniano.

2) $\Rightarrow$ 1) Por contrapuesta. Sea $M_1 \gneqq M_2 \gneqq \ldots$ una cadena descendente propia infinita de $R-$submódulos izquierdos de M. Por lo tanto $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ es una familia de $R-$submódulos izquierdos sin mínimos. ■

Proposición 4.1.17. *La clase de los módulos artinianos es cerrada bajo submódulos y bajo cocientes.*

Demostración. Demostraremos que es cerrada bajo $R-$submódulos.

Sean M un $R-$módulo izquierdo artiniano y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Demostraremos que N es artiniano. Como M tiene condición mínima en $R-$submódulos izquierdos, en particular tiene condición mínima en $R-$submódulos izquierdos de N. Por lo tanto N es artiniano.

Demostraremos que es cerrada bajo cocientes.

Sea N un $R-$módulo izquierdo y $f : M \to N$ un $R-$morfismo suprayectivo. Demostraremos que N es artiniano. Al ser f suprayectivo, entonces por el teorema de la correspondencia hay una correspondencia biyectiva entre $[ker\,(f)\,, M]$ y $[_*0, N]$. Por hipótesis M es artiniano con lo cual $[ker\,(f)\,, M]$ tiene condición mínima. Por lo tanto $[_*0, N]$ tiene condición mínima y así N es artiniano. ∎

Proposición 4.1.18. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. M es finitamente cogenerado si y sólo si $zoc\,(M)$ es finitamente generado y $zoc\,(M)$ es un $R-$submodulo esencial en M.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es finitamente cogenerado. Por el teorema 4.1.13 tenemos que $zoc\,(M)$ es finitamente cogenerado. Como $zoc\,(M) = \sum\limits_{i\in I} L_i$ con L_i es simple. Como $zoc(M)$ es semisimple y finitamente cogenerado entonces por el Teorema 4.1.14 es finitamente generado.

Tenemos que $zoc(M)$ es la intersección de los $R-$módulos esenciales de M. Si $zoc(M) = {}_*0$, con N un $R-$submódulo de M, entonces

$$_*0 = zoc(M) \cap N = \bigcap \left(\{L|L \text{ es un } R-\text{submódulo esencial de } M\} \cup \{N\}\right).$$

Como M es finitamente generado, entonces la familia

$$\{L|L \text{ es un } R-\text{submódulo esencial de } M\} \cup \{N\}$$

tiene una subfamilia finita de intersección $_*0$.

Digamos que $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k \cap N = {}_*0$. Notemos que $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k \neq {}_*0$ por ser la intersección finita de un conjunto de submódulos esenciales. Además como $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k$ es esencial en M tenemos que $N = {}_*0$.

Por lo tanto $zoc(M)$ es esencial en M.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $zoc\,(M)$ es finitamente generado y $zoc\,(M)$ es un $R-$submódulo esencial de M. Demostraremos que M es finitamente cogenerado. Al ser $zoc\,(M)$ finitamente generado, entonces es finitamente cogenerado.

Consideremos $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de $R-$submódulos izquierdos de M tal que $\bigcap\limits_{i\in I} N_i = {}_*0$. Entonces $_*0 = zoc\,(M) \cap \left(\bigcap\limits_{i\in I} N_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} zoc\,(M) \cap N_i$. Como $zoc\,(M)$ es finitamente cogenerado existe F finito $F \subseteq I$ tal que $_*0 = \bigcap\limits_{i\in I} zoc\,(M) \cap N_i = \bigcap\limits_{i\in F} zoc\,(M) \cap N_i = zoc\,(M) \cap \left(\bigcap\limits_{i\in F} N_i\right)$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i\in F} N_i = {}_*0$. Por lo tanto M es finitamente cogenerado. ∎

Teorema 4.1.19. *Sean M, N dos $R-$módulos izquierdos. M es artiniano si y sólo si para todo epimorfismo $f : M \to N$, N es finitamente cogenerado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea M artiniano. Como la clase de los artinianos es cerrada bajo cocientes, basta ver que todo artiniano es finitamente cogenerado.

Como $zoc(M)$ es un $R-$submódulo izquierdo de M y M es artiniano entonces $zoc(M)$ es artiniano y además semisimple con lo cual es finitamente cogenerado. Demostraremos ahora que $zoc(M)$ es un $R-$submódulo esencial de M. Si no fuera así existiría U un $R-$submódulo izquierdo de M con $U \neq {}_*0$ y tal que $zoc(M) \cap U = {}_*0$. Como U es un $R-$submódulo izquierdo de M tenemos que U es artiniano (ya que los artinianos son cerrados bajo submódulos) con lo cual U tiene condición mínima. De lo anterior tenemos que existe T un $R-$submódulo izquierdo de U con $T \neq {}_*0$ y T mínimo, tal que para todo $x \in T$ con $x \neq 0$ se tiene que ${}_*0 \neq Rx$ el cual es un $R-$submódulo izquierdo de T. Al ser T mínimo, entonces $Rx = T$, con lo cual T es simple y así ${}_*0 \neq T \subseteq zoc(U)$ lo que es una contradicción a la condición mínima de T. Luego entonces $zoc(M)$ es un $R-$submódulo esencial de M y es finitamente generado. Por lo tanto M es finitamente cogenerado.

$\Leftarrow$) Sean $M \geqq N_1 \geqq N_2 \geqq \ldots$ una cadena descendente y $\mathcal{L} = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Como $\frac{M}{\mathcal{L}}$ es finitamente cogenerado y $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{N_i}{\mathcal{L}} = {}_*0$, entonces existe $F \subseteq \mathbb{N}$, F finito tal que $\bigcap\limits_{i\in F} \frac{N_i}{\mathcal{L}} = {}_*0$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i\in F} N_i = \mathcal{L} = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Pero $\{N_i\}_{i\in F}$ es finita. Por lo tanto $N_k = \bigcap\limits_{i\in F} N_i - \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} N_i$. ■

Proposición 4.1.20. *La clase de los módulos artinianos es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Tenemos que un módulo M es artiniano si y sólo si cada cociente de M es finitamente cogenerado por el teorema 4.1.19.

Sean ${}_*0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to {}_*0$ una sucesión exacta corta tal que A y C son $R-$módulos izquierdos artinianos y $f : B \to D$ un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] & {}_*0 \\
 & & D & &
\end{tikzcd}$$

Si $(f \circ \alpha)(A) = D$, entonces D es finitamente cogenerado, por ser un cociente de A. Si $(f \circ \alpha)(A) \lneqq D$, entonces extendemos el diagrama a

$$\begin{tikzcd}
{}_{*}0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ddr, "\overline{0}"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[ddl, "h"] & {}_{*}0 \\
& & D \arrow[d, "="'] & & \\
& & \frac{D}{(f\circ\alpha)(A)} & &
\end{tikzcd}$$

Con lo que existe $h : C \to \frac{D}{(f\circ\alpha)(A)}$ epimorfismo y $\frac{D}{(f\circ\alpha)(A)}$ es finitamente cogenerado, por ser un cociente de C.

Entonces

$$_{*}0 \to (f\circ\alpha)(A) \to D \to \frac{D}{(f\circ\alpha)(A)} \to {}_{*}0$$

es una sucesión exacta con extremos finitamente cogenerados, por lo tanto D es finitamente cogenerado.

En cualquier caso, D es finitamente cogenerado. Por lo tanto B es artiniano y se tiene el resultado. ■

4.2. Módulos Superfluos

Definición 4.2.1. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo izquierdo de M. Decimos que N es superfluo en M si para cualquier $R-$submódulo izquierdo U de M, $N+U=M$ implica $U=M$.*

Definición 4.2.2. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Definamos el radical de M como*

$$Rad\,(M) \doteqdot \bigcap \{N \mid N \text{ es } R-\text{submódulo izquierdo máximo de } M\}.$$

Proposición 4.2.3. $\bigcap \{N \mid N$ *es $R-$submódulo izquierdo máximo de* $M\} =$

$$\sum \{N \mid N \text{ es } R-\text{submódulo izquierdo superfluo de } M\}.$$

Demostración. $\supseteq$) Para esta contención veamos que cualquier módulo superfluo está contenido en cualquier submódulo máximo. Sea U un $R-$submódulo izquierdo superfluo de M y V un $R-$submódulo máximo de M. Si suponemos que U no es un $R-$submódulo izquierdo de V, entonces V sería un $R-$submódulo propio de $U+V$ por lo que $U+V=M$, pero U es superfluo en M, entonces $V=M$ lo cual es una contradicción a la condición máxima de V.

$\subseteq$) Sean U un R-submódulo izquierdo propio de M y $x \in \bigcap \{N \mid N$ es $R-$submódulo izquierdo máximo de $M\}$ con $x \neq 0$. Demostraremos que Rx es un $R-$submódulo superfluo de M. Si $Rx + U = M$, entonces por el segundo teorema de isomorfismos tenemos que $\frac{Rx}{Rx \cap U} \cong \frac{Rx+U}{U} = \frac{M}{U}$. Entonces $\frac{M}{U}$ es cíclico y contiene un submódulo máximo $\frac{C}{U}$. Ahora C no contiene a x pues $M = (Rx + U)$ no es un $R-$submódulo izquierdo de C. Así C es un submódulo máximo de M que no contiene a x lo cual es una contradicción. ■

Lema 4.2.4. *Sean M un $R-$módulo izquierdo y A, B dos $R-$submódulos izquierdos de M. Si A es superfluo en B, entonces A es superfluo en M.*

Demostración. Si $A + U = M$, entonces intersecando con B y usando la propiedad modular tenemos que $B = (B \cap M) = (B \cap (A + U)) = (A + (B \cap U))$. Como A es superfluo en B, entonces $(B \cap U) = B$ y por lo tanto $B \subseteq U$ con lo que $M = (A + U) \subseteq (B + U) = U$ por lo tanto A es superfluo en M. ■

Proposición 4.2.5. *$Rad(\_) : R - m\acute{o}d \to R - m\acute{o}d$ es un prerradical.*[1]

Demostración. Tenemos que

$$Rad\,(M) = \sum \{N \mid N \text{ es } R\text{−submódulo izquierdo superfluo de } M\}.$$

Como los morfismos $f : M \to N$ manda submódulos superfluos de M en submódulos superfluos de N, entonces

$$\begin{aligned} f(Rad(M) &= \sum \{N \mid N \text{ es } R\text{−submódulo izquierdo superfluo de } M\} \\ &\leq \sum \{L \mid L \text{ es } R\text{−submódulo izquierdo superfluo de } N\} \\ &= Rad(N)). \end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $f : M \to N$, $Rad(\_)$ es un prerradical. ■

Proposición 4.2.6. *Si r es un prerradical en $R-m\acute{o}d$, entonces $r\,(R)$ es un ideal bilateral de R.*

Demostración. Para todo $s \in R$ tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\_\cdot s"] & R \\ r\,(R) \arrow[u] \arrow[r, "\_\cdot s\restriction_{r(R)}"'] & r\,(R) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

.

Por lo tanto $(r\,(R)) \cdot s \subseteq r\,(R)$. Así que $r\,(R)$ es un ideal derecho de R. Ahora $(r\,(R))$ es un ideal bilateral ya que por definición de prerradical, $(r\,(R))$ es un ideal izquierdo. ■

[1]Véase Apéndice A para la definición de prerradical

Corolario 4.2.7. *$zoc(R)$ y $Rad(R)$ son ideales bilaterales.*

Teorema 4.2.8. *Sea R un anillo. R es semisimple si y sólo si $Rad(R) = {}_*0$ y R es artiniano izquierdo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos R es semisimple. Tenemos $R = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que es semisimple finitamente generado, es artiniano (véase el teorema 4.1.14). Así $M_i = \bigoplus_{j \neq i} S_j$ es máximo, entonces $Rad(R)$ es un $R-$submódulo izquierdo de $\bigcap \{N \mid N$ es $R-$submódulo máximo de $M\}$ el cual es subconjunto de $\bigcap_{i \in I} M_i = {}_*0$.

$\Leftarrow$) Sea R es artiniano con $Rad(R) = {}_*0$. Como R es artiniano, entonces R es finitamente cogenerado. Como R es finitamente cogenerado, existe un conjunto finito $\{N_1, \ldots N_n\}$ de submódulos máximos tal que el $R-$morfismo

$f \restriction: R \to \prod_{i=1}^{n} \frac{R}{N_i}$ donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, N_i es $R-$submódulo izquierdo máximo de R, también es inyectivo. Entonces R se sumerge en un semisimple. Por lo tanto R es semisimple. ∎

Proposición 4.2.9. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Si M es finitamente generado, entonces $Rad(R) \cdot M$ es un $R-$submódulo izquierdo propio de M.*

Demostración. Como M es finitamente generado, entonces M tiene submódulos máximos. Como

$$Rad(M) = \bigcap \{N | N \text{es un } R - \text{submódulo máximo de } M\}.$$

entonces $Rad(M) \lneqq M$.

Por otro lado para todo $x \in R$, $\_ \cdot x : R \to M$ es un morfismo. Como $Rad(\_)$ es un prerradical, entonces para todo $x \in M$ tenemos que $Rad(R) \cdot x \leq Rad(M)$.

Por lo tanto $Rad(R) \cdot M \leq Rad(M) \lneqq M$. ∎

Proposición 4.2.10. *Sea R un anillo. Si R es artiniano, entonces $Rad(R)$ es nilpotente.*

Demostración. Sean $S = \{(Rad(R))^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ y $(Rad(R))^m$ mínimo en S. Si $(Rad(R))^m \neq {}_*0$, entonces $(Rad(R))^{m+1} = Rad(R)\,(Rad(R))^m$ el cual es un $R-$submódulo izquierdo de $(Rad(R))^m$. Por la elección de $(Rad(R))^m$ tenemos $(Rad(R))^m = (Rad(R))^{m+1}$, así ${}_*0 \neq Rad(R)^m = (Rad(R))^m\,(Rad(R))$.

Sea $T = \{I \mid I$ es $R-$submódulo izquierdo de R y $(Rad(R))^m \cdot I \neq {}_*0\}$ e I mínimo en T. De lo anterior tenemos que existe $x \in I$ con $x \neq 0$ tal que $(Rad(R))^m Rx \neq {}_*0$ además Rx es un $R-$submódulo izquierdo de I. Sin embargo I es mínimo así $I = Rx$. Luego entonces $(Rad(R))^m I = (Rad(R))^m (Rad(R)\, I)$ y con ello $(Rad(R))\, Rx = Rx$ lo que es una contradicción a la proposición previa. Por lo tanto $(Rad(R))^m =_* 0$. ∎

Teorema 4.2.11. *Sea R un anillo. Si R es artiniano, entonces R es neteriano.*

Demostración. Supongamos que $(Rad\,(R))^n = {}_*0$, con $n \in \mathbb{N}$ y n mínimo respecto a esta propiedad. Demostraremos que $\frac{R}{(Rad(R))^m}$ es neteriano para todo $m \in \mathbb{N}$. La demostración se hará por inducción sobre n.

Notemos que $\frac{R}{Rad(R)}$ es semisimple, basta ver que $Rad\left(\frac{R}{Rad(R)}\right) = {}_*0$. Consideremos el epimorfismo canónico $\pi : R \twoheadrightarrow \frac{R}{Rad(R)}$. Por el teorema de la correspondencia tenemos una biyección entre las retículas de $[Rad\,(R)\,, R]$ y $\left[{}_*0, \frac{R}{Rad(R)}\right]$ y una correspondencia biyectiva entre los máximos de R y los de $\frac{R}{Rad(R)}$. Con lo que

$$Rad\left(\frac{R}{Rad\,(R)}\right) = \bigcap\left\{\frac{M}{Rad\,(R)} \mid M \text{ es } R\text{−submódulo máximo de } R\right\} =$$

$$\frac{\cap\{M \mid \text{ es } R\text{−submódulo máximo de } R\}}{Rad(R)} = \frac{Rad(R)}{Rad(R)} = {}_*0.$$

Por lo tanto $\frac{R}{Rad(R)}$ es semisimple artiniano.

Paso inductivo. Supongamos que $\frac{R}{(Rad(R))^k}$ es neteriano. Como $(Rad\,(R))^{k+1}$ es un R−submódulo izquierdo de $(Rad\,(R))^k$, tenemos la siguiente sucesión exacta ${}_*0 \to \frac{(Rad(R))^k}{(Rad(R))^{k+1}} \to \frac{R}{\left(Rad\left(R^{k+1}\right)\right)} \to \frac{R}{Rad(R^k)} \to {}_*0$. Dado que $Rad\,(R)$ anula a $\frac{(Rad(R))^k}{(Rad(R))^{k+1}}$, entonces $\frac{(Rad(R))^k}{(Rad(R))^{k+1}}$ es un $\frac{R}{Rad(R)}$−módulo, con lo que cumple con ser semisimple artiniano y por lo tanto es neteriano. Como la clase de los neterianos es cerrada bajo extensiones, entonces $\frac{R}{(Rad(R))^{k+1}}$ es neteriano y en particular $R \cong \frac{R}{Rad(R^n)} = \frac{R}{0}$ es neteriano. ■

Definición 4.2.12. *Sea M un R−módulo izquierdo. Decimos que M es semiartiniano si $zoc\left(\frac{M}{K}\right) \neq_* 0$ para todo $\frac{M}{K} \neq_* 0$.*

Definición 4.2.13. *Sea M un R−módulo izquierdo. Decimos que M es nilpotentes si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M^n = {}_*0$.*

Proposición 4.2.14. *Sea M un $\mathbb{Z}$−módulo izquierdo. M es semiartiniano si y sólo si M es de torsión.*

Proposición 4.2.15. *Sea M un R−módulo izquierdo. Si M es semiartiniano, entonces $zoc(M)$ es un R−submódulo esencial en M.*

Demostración. Por contradicción, supongamos $zoc\,(M)$ no es esencial en M. Tenemos que $zoc\,(M)$ tiene un seudocomplemento ${}_*0 \neq U \leq M$ tal que $zoc\,(M) \oplus U$ es un R−submódulo esencial en M. Sea V un seudocomplemento de U tal que contenga a $zoc\,(M)$. Por lo tanto $U \oplus V$ es un R−submódulo esencial en M. Utilizando los teoremas de isomorfismo tenemos que $U \cong \frac{V \oplus U}{V}$ el cual es un R−submódulo esencial en $\frac{M}{V}$, así $zoc\left(\frac{M}{V}\right) \neq {}_*0$, con lo que $\left(\frac{V \oplus U}{V}\right) \cap zoc\left(\frac{M}{V}\right) \neq {}_*0$. Ahora el que $\frac{V+U}{U}$ sea un R−submódulo esencial de $\frac{M}{V}$ se sigue de que V es un seudocomplemento de U por la proposición 3.4.3.

Ahora, $\frac{V \oplus U}{V}$ debe tener un submódulo simple además al ser isomorfo a U, entonces U también debe contener un simple, con lo cual

$$_{*}0 \neq zoc\left(\frac{V \oplus U}{V}\right) \cong zoc\,(U)$$

lo cual es una contradicción ya que $zoc\,(M) \cap U = {}_{*}0$. Por lo tanto $zoc\,(M)$ es esencial en M. ■

Teorema 4.2.16. *La clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo:*

1. *Cocientes.*

2. *Submódulos.*

3. *Extensiones.*

4. *Sumas directas.*

Demostración. 1) Sean M, N dos $R-$módulos izquierdos. Si M es semiartiniano y $f : M \to N$ un epimorfismo con $N \neq {}_{*}0$, entonces N es semiartiniano. Por lo tanto existe $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \frac{N}{L}$ un epimorfismo. Con lo que $\frac{N}{L} \neq_{*} 0$ es un cociente de M y $zoc\left(\frac{N}{L}\right) \neq {}_{*}0$.

2) Sean M un $R-$módulo izquierdo y N un $R-$submódulo de M. Supongamos que M es semiartiniano entonces existe $f : N \to L$ epimorfismo tal que:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d] \\ L \arrow[r, "g"'] & \frac{M}{ker(f)} \end{tikzcd}$$

Donde $L \neq {}_{*}0$ y $g : L \to \frac{M}{ker(f)}$. Demostraremos que g es monomorfismo. Sea $y \in N$. Entonces $y \in M$ y $f\,(y) = x \in L$. Por otro lado

$$Ker(f) = g\,(x) = y + ker\,(f)\,,$$

con lo cual $y \in ker\,(f)$, así $x = f\,(y) = 0$. Por lo tanto $x = 0$ y así $ker(f) = \{0\}$.

Como M es semiartiniano, entonces $\frac{M}{ker(f)}$ es semiartiniano. De donde $zoc\left(\frac{M}{ker(f)}\right)$ es esencial en $\frac{M}{ker(f)}$.

Ahora bien $g\,(L) \neq {}_{*}0$, entonces $zoc\left(\frac{M}{ker(f)}\right) \cap g\,(L) \neq {}_{*}0$ y $zoc\,(g\,(L)) \neq {}_{*}0$ y como $L \cong g\,(L)$ entonces $zoc\,(L) \neq {}_{*}0$. Por lo tanto N es semiartiniano.

3) Sea $_{*}0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to {}_{*}0$ una sucesión exacta corta con A y C dos $R-$módulos izquierdos semiartinianos. Demostraremos que B es semiartiniano.

Consideremos el siguiente diagrama con los respectivos cocientes de A y C:

$$\begin{tikzcd}
{}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f\circ\alpha\restriction"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[d] & {}_*0 \\
{}_*0 \arrow[r] & (f\circ\alpha)(A) \arrow[r] & D \arrow[r] & \frac{D}{(f\circ\alpha)(A)} \arrow[r] & {}_*0
\end{tikzcd}$$

.

Observemos que si $Im\,(f\circ\alpha) \neq_* 0$, entonces $zoc\,(Im\,(f\circ\alpha))$ es esencial en $(Im\,(f\circ\alpha))$ pues (A) es semiartiniano y $f\circ\alpha\restriction$ es epimorfismo. Por lo tanto ${}_*0 \neq zoc\,(Im\,(f\circ\alpha)) \subseteq zoc\,(D)$, con lo cual $zoc\,(D) \neq {}_*0$. Si $(f\circ\alpha)\,(A) = {}_*0$, entonces $D \cong \frac{D}{(f\circ\alpha)(A)}$ el cual es un cociente de C y C es semiartiniano. Por lo tanto D es semiartiniano y así $zoc\,(D) \neq {}_*0$.

4) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de semiartinianos y supongamos que hay un epimorfismo $f : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \to N$ con $N \neq {}_*0$. Tomemos Rx un $R-$submódulo de N distinto de ${}_*0$ tal que $Rx \neq {}_*0$. Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "f"] & N \\
\bigoplus\limits_{j=1}^{k} M_{i_j} \arrow[r, "f\restriction"'] \arrow[u] & Rx \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Con $x = f\,(u)$ y así $u \in \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

Como $\bigoplus\limits_{j=1}^{k} M_{i_j}$ es semiartiniano por 3), entonces Rx es semiartiniano, con lo que $zoc\,(Rx)$ es esencial en Rx. Luego entonces $zoc\,(Rx) \neq {}_*0$ y así $zoc\,(N) \neq {}_*0$. Por lo tanto ${}_*0 \neq zoc\,(Rx)$ es un $R-$submódulo de $zoc\,(N)$. ■

Definición 4.2.17. *Sea R un anillo. Decimos que R es semiartiniano si*

$$zoc\,(M) \neq {}_*0$$

para todo $R-$módulo izquierdo M con $M \neq {}_*0$.

Teorema 4.2.18. *Sea R un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es semiartiniano.*
2. *R es semiartiniano como $R-$módulo izquierdo.*
3. *M es semiartiniano para todo $R-$modulo izquierdo M.*

Demostración. 3) $\Rightarrow$ 2) Si es para todo $R-$módulo izquierdo, en particular para él mismo visto como $R-$módulo izquierdo.

2) $\Rightarrow$ 3) Si R es un $R-$modulo izquierdo semiartiniano, entonces $R^{(X)}$ es semiartiniano para todo X. Como todo $R-$módulo izquierdo es cociente de un libre, entonces todo $R-$submódulo izquierdo es semiartiniano.

3) $\Rightarrow$ 1) Si M es un $R-$módulo izquierdo semiartiniano tal que $M \neq {}_{*}0$, entonces $zoc(M)$ es esencial en M, con lo que $zoc(R) \neq {}_{*}0$.

1) $\Rightarrow$ 3) Si M es un $R-$módulo izquierdo tal que $M \neq {}_{*}0$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces $zoc(N) \neq {}_{*}0$. Por lo tanto M es semiartiniano. ■

Definición 4.2.19. $zoc_2() : R - m\acute{o}d \to R - m\acute{o}d$ *se define por:*

$$\frac{zoc_2(M)}{zoc(M)} \ddot{=} zoc\left(\frac{M}{zoc(M)}\right).$$

Definición 4.2.20. *En general se define por recursión si n es un ordinal sucesor:*

$$\frac{zoc_{n+1}(M)}{zoc_n(M)} \ddot{=} zoc\left(\frac{M}{zoc_n(M)}\right).$$

Y para α un ordinal límite:

$$zoc_{\alpha}(M) \ddot{=} \bigcup_{\gamma<\alpha} zoc_{\gamma}(M).$$

Proposición 4.2.21. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $zoc_n(M)$ es semiartiniano.*

Teorema 4.2.22. *Sea R un anillo. Si R es semiartiniano y neteriano, entonces R es artiniano.*

Demostración. Consideremos la siguiente familia $\{zoc_{\alpha}(R) \mid \alpha \text{ es un ordinal}\}$ la cual tiene un máximo $zoc_m(R)$. Si $zoc_m(R)$ fuera un $R-$submódulo propio de R, entonces (al ser R es semiartiniano) ${}_{*}0 = \frac{zoc_{m+1}(R)}{zoc_m(R)} \ddot{=} zoc\left(\frac{R}{zoc_m(R)}\right)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $zoc_m(R) = R$.

Veamos por inducción que $zoc_k(R)$ es artiniano para toda $k \in \mathbb{N}$.

Base: $zoc_1(R) \ddot{=} zoc(R)$ es semisimple y neteriano, por lo tanto artiniano.

Supongamos $zoc_m(R)$ es artiniano, entonces $\frac{zoc_{m+1}(M)}{zoc_m(M)} \ddot{=} zoc\left(\frac{M}{zoc_m(M)}\right)$. Tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$${}_{*}0 \to zoc_m(R) \to zoc_{m+1}(R) \to zoc\left(\frac{R}{zoc_m(R)}\right) \to {}_{*}0.$$

Ahora $zoc_m(R)$ es artiniano por hipótesis de inducción. También $zoc\left(\frac{R}{zoc_m(R)}\right)$ es semisimple y neteriano, con lo cual es artiniano. Por lo tanto $zoc_{m+1}(R)$ es artiniano ya que la clase de los artinianos es cerrada bajo extensiones. ■

APÉNDICE A

Categorías

A.1. Primeras definiciones

Definición A.1.1. *Una categoría consta de:*

1. *Una clase de objetos* $\mathbf{C}_0$.

2. *Para cada par de objetos* A, B *en la clase* $\mathbf{C}_0$*, un conjunto* $\mathbf{C}(A, B)$ *también denotado como* $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ *cuyos elementos llamaremos morfismos de* A *en* B*; si* $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $f : A \to B$*. A la familia de todos estos morfismos lo denotamos* $\mathbf{C}_1$.

3. *Para cualesquiera* A, B, C *en la clase de* $\mathbf{C}_0$*, existe una función* $\circ : \mathbf{C}(B, C) \times \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{C}(A, C)$ *tal que* $\circ(f, g) = g \circ f$ *(es decir si* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$*, entonces* $g \circ f : A \to C$*) tal que:*

   a) *Para todo* A *en la clase* $\mathbf{C}_0$*, existe* $1_A : A \to A$ *tal que* $1_A \circ f = f$ *para todo* $f \in \mathbf{C}(B, A)$ *y* $g \circ 1_A = g$ *para todo* $g \in \mathbf{C}(A, C)$.

   b) *Se cumple* $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *para cualesquiera* f, g, h *elementos de* $\mathbf{C}_1$ *tales que se puedan componer.*

   c) *Si* $\mathbf{C}(A, B) \cap \mathbf{C}(C, D) \neq \emptyset$*, entonces* $A = C$ *y* $B = D$*).*

A.2. Ejemplos de categorías

Ejemplo A.2.1. *La categoría $SETS$ donde:*

1. $Sets_0 =$ *La clase de todos los conjuntos (en Teoría de Conjuntos llamado el universo V),*
2. $Sets(A,B) = \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$,
3. *La operación entre los morfismos es la composición de ellos.*

Ejemplo A.2.2. *Sea $(A, \leq)$ un preorden (es decir un conjunto A con una relación $\leq$ reflexiva y transitiva). Definimos en el preorden un único morfismo $f_{a,b} : a \to b$ si $a \leq b$. Definimos una categoría $\mathbb{A}$:*

1. $\mathbb{A}_0 = A$,
2. $\mathbb{A}(a,b) = \begin{cases} f_{a,b} : a \to b & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{si } a \not\leq b \end{cases}$,
3. *Si $a \leq b$, $b \leq c$ y $f : a \to b$, $g : b \to c$ definimos $h : a \to c$ donde $h = g \circ f$.*

Ejemplo A.2.3. *Si X es un conjunto, entonces X tiene asociada una categoría $\mathbb{X}$ donde:*

1. $\mathbb{X}_0 = X$,
2. $\mathbb{X}(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \neq y \\ 1_x & \text{si } x = y \end{cases}$,
3. *Si $x = y$ y $y = z$, los morfismos son 1_x y 1_y entonces la composición de ellas será $1_x \circ 1_y$ pero $x = y$, con lo cual $1_x \circ 1_y = 1_x$.*

Ejemplo A.2.4. *Sean $(M, \cdot, e)$ un monoide y $t \in M$. Entonces definimos la categoría $\mathbb{M}$:*

1. $\mathbb{M}_0 = \{*\}$, *donde $*$ es un único objeto.*
2. $\mathbb{M}_1 = M$.
3. *La composición entre elementos de $\mathbb{M}_1$ es la operación del monoide. Para cualesquiera $f, g \in M$ si $* \xrightarrow{f} * \xrightarrow{g} *$, entonces $g \circ f : * \to *$ está en M.*

Ejemplo A.2.5. *La categoría unitaria $\mathbb{I}$, donde:*

1. $\mathbb{I}_0 = \{X\}$.
2. $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}(X,X) = 1_X$.
3. *La función entre elementos de $\mathbb{M}_1$ es la composición, así $1_X \circ 1_X = 1_X$.*

Ejemplo A.2.6. *La categoría TOP, donde:*

1. $Top_0 =$ *La clase de todos los espacios topológicos.*

2. $Top(X,Y) = \{f : X \to Y | f$ *es una función continua*$\}$.

3. *La operación entre elementos de* Top_1 *es la composición de funciones.*

Para concluir con los ejemplos de categorías mencionaremos más ejemplos de ellas

Ejemplo A.2.7.

1. *Grup La categoría de grupos.*

2. *Ab La categoría de grupos abelianos.*

3. *Ring La categoría de anillos con unitario.*

4. *Si* K *es un campo, entonces* $Vect_K$ *es la categoría de los espacios vectoriales sobre* K.

5. *Si* R *es un anillo, entones* $R-$*mód es la categoría de los* $R-$*modulos izquierdos.*

Hay relaciones entre categorías como lo son:

A.3. Funtores

Definición A.3.1. *Sean* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *dos categorías. Decimos que* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *es un funtor de* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$ *si:*

1. *Para cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$, F *le asigna un objeto* $F(C)$ *de* $\mathbf{D}$.

2. *Para cualesquiera* C_1, C_2 *elementos en la categoría* $\mathbf{C}$ *existe una función* $F_{C_1,C_2} : \mathbf{C}(C_1, C_2) \to \mathbf{D}(F(C_1), F(C_2))$ *tal que:*

   a) *Para todo* $C \in \mathbf{C}$, $F(1_C) = 1_{F(C)}$ *y,*

   b) *Para cualesquiera* $f, g \in \mathbf{C}_1$ *que se puedan componer se cumple* $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Ejemplo A.3.2. *Si* $\mathbf{C}$ *es un categoría, entonces el funtor identidad está dado por* $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *donde* $1_{\mathbf{C}_0} : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{C}_0$ *y para cada* $f : C_1 \to C_2$ *con* $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$, *se tiene que* $1_{\mathbf{C}}(f) = f$.

Ejemplo A.3.3. *Si* X, Y *son conjuntos, estos tienen una categoría asociada (véase el ejemplo A.2.3). Un funtor* F *entre* $\mathbb{X}$ *y* $\mathbb{Y}$ *está dado por una función* $f : X \to Y$ *y la asignación* $F(G) = 1_{F(Z)}$ *para* $g \in (X)(Z, Z)$

$$\mathbb{X} \xrightarrow{F} \mathbb{Y}$$

$$X \xrightarrow[\textit{función}]{} Y$$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1_Z"'] & f(z) \arrow[d, "f(1_Z)"] \\ z \arrow[r] & f(z) \end{tikzcd}$$

Ejemplo A.3.4. *Hay un funtor de Ab a $Sets$ tal que a cada grupo G se le asocia el conjunto G y a cada morfismo $f : G \to H$ se le asocia la función $f : G \to H$ como se muestra en el diagrama:*

$$Ab \longrightarrow Sets$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

Ejemplo A.3.5. *Definimos un funtor como sigue: sean X, Y dos conjuntos, a los dos les asociamos $X \mapsto \mathbb{Z}^{(X)}$ y $Y \mapsto \mathbb{Z}^{(Y)}$ el grupo abeliano libre con base X y Y respectivamente. Y si $f : X \to Y$ es una función, entonces $f \mapsto \overline{f} : \mathbb{Z}^{(X)} \to \mathbb{Z}^{(Y)}$ la función inducida por f. Lo cual queda ejemplificado en el siguiente diagrama:*

$$Sets \xrightarrow{F} Ab$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}^{(X)} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Y \arrow[r] & \mathbb{Z}^{(Y)} \end{tikzcd}$$

Ejemplo A.3.6. *El funtor I de Ab a $Grup$ tal que $1_I(G) = G$ y $1_I(f) = f$ si $f : G \to H$, con $G, H \in Ab$.*

A este funtor se le llama funtor inclusión.

Recordatorio A.3.7.

- *Sea G un grupo. Denotamos por $G^{'}$ el subgrupo conmutador de G dado por $G^{'} = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$.*

- *Sean G, H dos grupos, $f : G \to H$ un morfismo de grupos y $G^{'}$, $H^{'}$ los subgrupos conmutadores de G y H respectivamente. Entonces $f \restriction_{G'} : G^{'} \to H^{'}$ es un morfismo de grupos.*

- *Para cualquier grupo G, $\frac{G}{G'}$ es un grupo abeliano.*

Ejemplo A.3.8. *El funtor de Grup a Ab*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \frac{G}{G'} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ H \arrow[r] & \frac{H}{H'} \end{tikzcd}$$

Donde $\overline{f} : \frac{G}{G'} \to \frac{H}{H'}$ es la función dada por $\overline{f}\left(gG^{'}\right) = f(g)\, H^{'}$, y del recordatorio anterior $G^{'}$, $H^{'}$ son los subgrupos conmutadores de G y H respectivamente.

Verifiquemos que la función $\overline{f}$ del ejemplo anterior está bien definida.

Sean $g_1G^{'}, g_2G^{'} \in \frac{G}{G'}$ tales que $g_1G^{'} = g_2G^{'}$, es decir $g_1^{-1}g_2 \in G^{'}$. Pero por el recordatorio anterior $f\left(g_1^{-1}g_2\right) \in H^{'}$.

De donde

$$f\left(g_1^{-1}g_2\right) = f\left(g_1^{-1}\right) f\left(g_2\right) = \left(f\left(g_1\right)\right)^{-1} f\left(g_2\right)$$

Por lo tanto $\left(f\left(g_1\right)\right)^{-1} f\left(g_2\right) \in H^{'}$, y así $f\left(g_1\right) H^{'} = f\left(g_2\right) H^{'}$ con lo que tenemos el resultado.

Ejemplo A.3.9. *Si $(M, *, e)$ y $(N, \times, f)$ son monoides, entonces el conjunto de objetos serán $\mathbb{M}_0 = \{\star\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{\diamond\}$ respectivamente. Así un funtor $F : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ debe cumplir $F(\star) = \diamond$ y si a es un elemento en $\mathbb{M}_1$, entonces $F(a)$ deberá ser un elemento en $\mathbb{N}_1$, por lo que además se deberá de cumplir $F(a * b) = F(a) \times F(b)$, como se muestra en el diagrama:*

$$\mathbb{M} \xrightarrow{F} \mathbb{N}$$

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r] \arrow[d, "a"] \arrow[dd, bend right=50, "b\circ a"'] & \diamond \arrow[d, "F(a)"'] \arrow[dd, bend left=50, "F(b)\circ F(a)"] \\ \star \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \diamond \arrow[d, "F(b)"'] \\ \star \arrow[r] & \diamond \end{tikzcd}$$

Es decir en monoides, un funtor entre dos categorías es un morfismo de monoides entre ellos.

A cada categoría se le asocia otra categoría de forma inmediata la cual es:

A.4. Categoría opuesta

Definición A.4.1. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Definimos la categoría opuesta de* $\mathbf{C}$*, denotada como* $\mathbf{C}^{op}$*:*

1. $\mathbf{C}_0^{op} = \mathbf{C}_0$.

2. *Para cualesquiera* $A, B \in \mathbf{C}_0$ *se cumple* $\mathbf{C}^{op}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$*, es decir:*

   - *Si* $f^\bullet \in \mathbf{C}_1^{op}(A, B)$ *entonces* $f : B \to A$*,*
   - *Si en* $\mathbf{C}$ *ocurre que* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es decir* $A \xrightarrow{g \circ f} C$*, entonces en* $\mathbf{C}^{op}$ *ocurre que* $A \xleftarrow{f^\bullet} B \xleftarrow{g^\bullet} C$*; en otras palabras* $A \xleftarrow{f^\bullet \circ_{op} g^\bullet} C$*. De manera más sencilla tenemos que* $(g \circ f)^\bullet = f^\bullet \circ_{op} g^\bullet$*.*

Situación que se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=40, "g\circ f"'] & A \\
B \arrow[d, "g"] & B \arrow[u, "f^\bullet"] \\
C & C \arrow[u, "g^\bullet"] \arrow[uu, bend right=40, "f^\bullet \circ_{op} g^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

Existe un funtor entre estas dos categorías, llamémoslo $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{op}$, donde:

1. Si $A \in \mathbf{C}_0$, entonces $\theta(A) = A$.

2. Si $f \in \mathbf{C}_1$, entonces $\theta(f) = f^\bullet$.

3. $\theta(g \circ f) = f^\bullet \circ_{op} g^\bullet = \theta(f) \circ_{op} \theta(g)$.

4. $\theta(1_A) = 1_A$, ya que $f = f \circ 1_A$ y $f^\bullet = 1_A^\bullet \circ_{op} f^\bullet$.

Lo cual se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=40, "g\circ f"'] & \theta(A) = A \\
B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[u, "f^\bullet"] \\
C \arrow[r, "\theta"] & C \arrow[u, "g^\bullet"] \arrow[uu, bend right=40, "f^\bullet \circ_{op} g^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien a este tipo de funtores que cumplen con lo descrito aquí arriba reciben un nombre particular lo cual veremos en la siguiente sección.

A.5. Funtores covariantes y contravariantes

Notación A.5.1. *Decimos que un funtor es covariante si cumple con la definición A.3.1.*

Definición A.5.2. *Sean* $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ *dos categorías. Un funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *es contravariante si:*

1. $F : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$ *es una asignación tal que a cada elemento de* $\mathbf{C}_0$ *le asigna un elemento de* $\mathbf{D}_0$.

2. $F : \mathbf{C}(C, D) \to \mathbf{D}(F(D), F(C))$ *es una función tal que si* $f : C \to D$, *entonces* $F(f) : F(D) \to F(C)$.

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con él.

Ejemplo A.5.3. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $C \in \mathbf{C}_0$. *Entonces* $\mathbf{C}(\_, C) : \mathbf{C} \to Sets$ *es un funtor contravariante.*

Si X, Y son elementos de la clase $\mathbf{C}_0$ y $g \in \mathbf{C}(X, Y)$, entonces $\mathbf{C}(\_, C)(X) = \mathbf{C}(X, C)$, análogamente para Y, $\mathbf{C}(\_, C)(Y) = (C)(Y, C)$.

Para $g : X \to Y$ el morfismo va a dar a $(\_ \circ g) : \mathbf{C}(Y, C) \to \mathbf{C}(X, C)$. Donde para cada elemento $h \in \mathbf{C}(Y, C)$ al aplicar $\_ \circ g$ nos dará $h \circ g \in \mathbf{C}(X, C)$. En el siguiente diagrama se representa de manera más sencilla:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{C}(X, C) \\ Y \arrow[r] & \mathbf{C}(Y, C) \arrow[u, "\_\circ g"'] \end{tikzcd}$$

Además $\mathbf{C}(\_, C)(1_X) = 1_{\mathbf{C}(X,C)}$.

Ejemplo A.5.4. *Sean* $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ *dos categorías. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *es contravariante si y sólo si* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{\theta} \mathbf{D}^{op}$ *es un funtor covariante.*

2. $\mathbf{C} \xrightarrow{\theta} \mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\theta} (\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$

3. $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *es contravariante si y sólo si* $\mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\theta} \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *es un funtor covariante.*

A.6. Una categoría particular

Definición A.6.1. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Decimos que* $\mathbf{C}$ *es una categoría pequeña si* $\mathbf{C}_0$ *es un conjunto.*

Definimos Cat la categoría de las categorías pequeñas, donde

1. $Cat_0 =$ La clase de las categorías pequeñas.
2. $Cat\left(\mathbf{C},\mathbf{D}\right) =$ Es la clase de todos los funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$.
3. Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ son funtores, entonces la composición de ellos se dá de la siguiente manera:

   Para $C, C_1 \in \mathbf{C}_0$ tenemos que $C \overset{F \circ G}{\to} F(G(C))$ y si $f \in \mathbf{C}_1$ con $f : C \to C_1$, entonces $f \overset{F \circ G}{\to} F \circ G(f)$ donde $F \circ G(f) : F(G(C)) \to F(G(C_1))$.

A.7. Más sobre funtores

Definición A.7.1. *Sean R, S dos anillos. Consideremos las categorías de los $R-$módulos izquierdos, los $S-$módulos izquierdos y $F : R-mód \to S-mód$ un funtor. Decimos que F es aditivo si $F_{M,N} : Hom_R\left(M,N\right) \to Hom_S\left(F\left(M\right), F\left(N\right)\right)$ es un morfismo de grupos para cualesquiera M, N dos $R-$módulos izquierdos.*

Definición A.7.2. *Sea $F : R - mód \to S - mód$ un funtor. Decimos que F es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta ${}_*0 \to A \to B \to C \to {}_*0$ (Véase definición 1.4.1) se cumple que la sucesión ${}_*0 \to F\left(A\right) \to F\left(B\right) \to F\left(C\right)$ es exacta izquierda.*

Teorema A.7.3. *Sea M un $R-$módulo izquierdo. Entonces el funtor contravariante $Hom\left(\_, M\right) : R - mod \to \mathbb{Z} - mod$ es exacto izquierdo.*

Demostración. Supongamos que la sucesión corta ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ es exacta. Demostraremos que ${}_*0 \to Hom\left(C,M\right) \overset{-\circ g}{\to} Hom\left(B,M\right) \overset{-\circ f}{\to} Hom\left(A,M\right)$ es un sucesión exacta izquierda.

Dado que g es epimorfismo, entonces para cualesquiera h, k tales que $h \circ g = k \circ g$ se cumple que $h = k$. Por lo anterior $\_ \circ g$ es inyectiva y por el teorema 1.4.10 tenemos que $\_ \circ g$ es monomorfismo.

Ahora $(\_ \circ f) \circ (\_ \circ g) = \_ \circ (g \circ f) = \_ \circ \overline{0} = \overline{0}$, donde la penúltima igualdad es válida ya que la sucesión ${}_*0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to {}_*0$ es exacta. Por lo tanto $Im(\_ \circ g) \subseteq Ker(\_ \circ f)$

Sólo falta verificar que $Ker\left(\_ \circ f\right) \subseteq Im\left(\_ \circ g\right)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} {}_*0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\overline{0}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[r] & {}_*0 \\ & & M & & \end{tikzcd}$$

Sea $u \in Ker(\_ \circ f)$. Tenemos que $u \circ f = \overline{0}$. Como $g(B) = C$ consideremos $v : g(B) \to M$ dada por $v(x) = u(y)$ donde $g(y) = x$ con lo cual

$$v \circ g(y) = v(g(y)) = v(x) = u(y).$$

Por lo tanto el diagrama anterior conmuta y así $u \in Im(\_ \circ g)$. ■

Teorema A.7.4. *Sean R un anillo y M un $R-$módulo izquierdo.*
Entonces $Hom\,(M, \_) : R - mód \to \mathbb{Z} - mód$ dado por:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Hom_R(M,N) \arrow[d, "f\circ\_"] \\ L \arrow[r] & Hom_R(M,L) \end{tikzcd}$$

con

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "f\circ\alpha"] & N \arrow[r, "f"] & L \end{tikzcd}$$

es un funtor exacto izquierdo.

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la del teorema anterior. ■

Ejemplo A.7.5. *$Hom\,(\_, \mathbb{Z})$ no es exacto, considerando la siguiente sucesión exacta corta $_*0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \to_* 0$.*

A.8. Prerradicales

Definición A.8.1. *Un prerradical es un funtor $\gamma : R - mód \to R - mód$ tal que para todo elemento M en $R - mód$ se tiene $\gamma\,(M)$ es un $R-$submódulo de M o equivalentemente, para cualesquiera M, N elementos de $R - mód$ y para todo $R-$morfismo $f : M \to N$ se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \gamma\,(M) \arrow[r] \arrow[d, "f\restriction_{\gamma(M)}"'] & M \arrow[d, "f"] \\ \gamma\,(N) \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

.

Ejemplo A.8.2. *$zoc\,(\_) : R - mód \to R - mód$ es un prerradical.*
Recordemos que para M un $R-$módulo izquierdo

$$zoc(M) = \sum \{S \mid S \text{ es submódulo izquierdo simple de } M\}$$

y $zoc\,(M)$ es un $R-$submódulo izquierdo de M. Sean N un $R-$módulo izquierdo y $f : M \to N$ un $R-$morfismo de M a N. Entonces

$$f\left(\sum \{S \mid S \text{ es } R\text{−submódulo izquierdo simple de } M\}\right)$$

es un $R-$submódulo izquierdo de

$$\sum \{f(S) \mid S \text{ es } R\text{−submódulo izquierdo simple de } M\}$$

el cual a su vez es un $R-$submódulo izquierdo de $zoc\,(N)$. Por lo tanto es un prerradical.

Bibliografía

[And73] FRANK ANDERSON AND FULLER. "Rings and categories of modules". Springer-Verlag New York Inc. New York (1973).

[Kas82] F. KASCH. "Modules and rings". Academic Press Inc. New York (1982).

[Rot95] JOSEPH J. ROTMAN. "An introducton to the theory of groups". Fourth edition. Springer-Verlag New York Inc. (1995).

Índice alfabético