



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Fenómeno conjugado conducción-convección
natural y producción de entropía en una
cavidad rectangular con paredes de espesor
finito.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

Daniel Pastrana Maldonado

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. César Treviño Treviño



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central

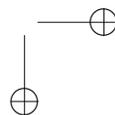
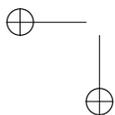
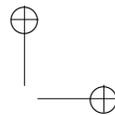
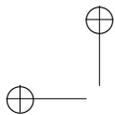


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Índice general

Resumen	v
Introducción	VI
1. Preliminares	1
1.1. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos	2
1.1.1. Conservación de masa	4
1.1.2. Conservación de cantidad de movimiento	5
1.1.3. Conservación de energía	6
1.2. Ecuaciones constitutivas	8
1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes y ecuación de energía	10
1.4. Aproximación de Boussinesq	11
1.5. Consideraciones sobre la ecuación de energía	13
1.6. Producción de entropía en un flujo conductor de calor	15
1.7. Ecuación diferencial para la conducción de calor	19
2. Planteamiento del problema	23
2.1. Variables y ecuaciones adimensionales	26
2.2. Ecuaciones de balance en forma adimensional	26
2.3. Producción de entropía adimensional	31
2.4. Número de Nusselt	32
3. Solución numérica	33
3.1. Discretización de las ecuaciones	33
3.1.1. Método de volúmenes de control	33
3.1.2. Forma discreta de las ecuaciones	34
3.1.3. Las cuatro reglas básicas	44
3.2. Mallas escalonadas	45

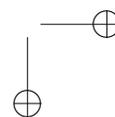
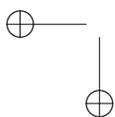
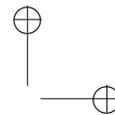
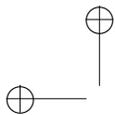
3.3. Algoritmo SIMPLE	48
3.4. Ecuaciones de corrección para la velocidad y la presión	49
3.5. Condiciones de frontera	52
3.6. Generación del espacio computacional	53
3.7. Relajación y convergencia de las soluciones	55
3.8. Implementación del algoritmo	56
3.9. Validación del código computacional	57
4. Resultados	59
Conclusiones	83

Resumen

Utilizando el método de discretización por volúmenes finitos y el algoritmo SIMPLE, se presenta un análisis numérico de los efectos que tienen la variación en las fuerzas de flotación sobre la convección natural y producción de entropía de un fluido confinado a una cavidad rectangular con una relación de aspecto adimensional grande $AR = 12$ compuesta de cuatro paredes conductoras de espesor finito. Los valores de la relación de difusividad y conductividad térmica, entre las paredes sólidas y el fluido son fijos, $\alpha = 600$ y $K = 600$ respectivamente, así como el número de Prandtl, $Pr = 7$, valores aproximados para un sistema constituido por aluminio y agua.

El estudio se realizó para tres números de Rayleigh $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6 con un valor fijo del espesor de las paredes $h = 0.1$. Las fuentes de calor constan de dos secciones de las paredes verticales que se mantienen a temperatura constante cerca del fondo de la cavidad.

En cada caso se obtuvieron las isotermas, el campo de producción de entropía, el flujo de calor hacia el sistema, dado por el número de Nusselt, y se estudió cuantitativamente la dinámica de vórtices encontrando distintos mecanismos de flujo de calor y pérdida de simetría ligados a la variación del número de Rayleigh.



Introducción

La convección natural se presenta, normalmente, en fluidos que se encuentran sujetos a la acción de un campo gravitacional y se debe a diferencias en la densidad provocadas por la existencia de un gradiente de temperatura, o concentración, en el seno del fluido, aunque este fenómeno, también se puede producir en fluidos con propiedades eléctricas y/o magnéticas.

Debido al papel determinante que juega el fenómeno de convección natural en la mayoría de los flujos que nos rodean, su estudio adquiere un carácter fundamental. Es posible encontrar dicho fenómeno tanto en la naturaleza como en procesos industriales. En la naturaleza se presenta en las diferencias de temperatura que enfrentan las nubes en su interior y los vientos geostroficados generados en la atmósfera terrestre, así como en el proceso de mezclado de las aguas oceánicas y se asocia a la dinámica de los materiales del manto y su influencia en el movimiento de las placas tectónicas en la corteza terrestre. En la industria, es igualmente importante en el diseño de convertidores solares. En los equipos electrónicos, el aprovechamiento de la convección natural se considera un factor importante para la disipación de calor así como en la ventilación, calefacción y aislamiento de edificios, ventanas y todo tipo de espacios cerrados dispuestos a ser acondicionados a temperaturas constantes.

En una buena parte de los sistemas prácticos que involucran el fenómeno de convección natural es indispensable considerar las propiedades conductoras del material que contiene al fluido junto a otros factores –fuentes de calor dependientes del tiempo y su posición en el sistema, entre otros– que afectan directamente la transferencia de calor. Por ejemplo, en el diseño y la construcción de edificios las propiedades termofísicas de las paredes sólidas y conductoras de calor afectan el aislamiento térmico y la circulación del aire al interior del edificio. Una situación similar se presenta en el enfriamiento de los apa-

ratos electrónicos que se encuentran sujetos a temperaturas que varían en el tiempo como resultado de la energía eléctrica suministrada. Un conocimiento más profundo de los efectos combinados de estos factores sobre las respuestas de fluidos fuera de equilibrio, y las características de la transferencia de calor, podría ofrecer una orientación útil en el desarrollo de otras aplicaciones prácticas.

Con base en lo anterior, los procesos de transferencia de calor convectivos en geometrías simples adquieren gran importancia, pues permiten el estudio de la dinámica del flujo y de la transferencia de calor que se genera en el sistema, promoviendo un entendimiento amplio de la descripción matemática de los flujos. Las investigaciones recientes en este tema han ampliado su horizonte debido a que los resultados experimentales y computacionales han develado una gran diversidad de topologías de flujo y complejidad en los procesos transitorios, en los que también se han observado cambios de estructura de flujo con mayor o menor estabilidad, además de la clara relación que existe entre las estructuras de flujo y la cantidad de calor transferido en el sistema.

Si bien la mayoría de las veces la veracidad de los resultados está ligada a mediciones directas provenientes de los experimentos, realizar dichas mediciones resulta en costos elevados tanto en capital como en tiempo. Cada nueva configuración de estudio requiere la construcción de un nuevo modelo para realizar las mediciones de forma directa. Como consecuencia, suele recurrirse a estudios teóricos de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido. Sin embargo, salvo para casos muy particulares, el tratamiento analítico de las ecuaciones se complica enormemente. Por esta razón, las soluciones numéricas representan una buena alternativa en el tratamiento de problemas complejos, y usualmente brindan predicciones altamente confiables cuando también pueden reproducir resultados para casos cercanos a aquellos que han sido confirmados analítica o experimentalmente.

De acuerdo a su relevancia, no es de sorprender que el estudio de la convección y transferencia de calor en cavidades de distintas geometrías haya proliferado durante décadas, aunque enfocado, en su mayoría, en los estados estacionarios de flujos producidos en cavidades en las que las propiedades térmicas de las paredes no se toman en cuenta. Una revisión detallada para casos en dos y tres dimensiones con diferentes tipos de condiciones de frontera fue realizada por Ostrach [1], donde discute la importancia de los análisis de escala para determinar los detalles del flujo así como sus implicaciones en los

métodos numéricos. Otros ejemplos recientes de este tipo de estudios pueden ser consultados en [2, 3, 4], en los que se analizan los efectos provocados por cambios en la geometría del sistema, en la propiedades del fluido y en las condiciones de frontera, aunados a estudios de estabilidad en los flujos generados.

Por otro lado, análisis de las soluciones transitorias en sistemas de este tipo han arrojado información valiosa sobre los procesos de transferencia de calor que conducen a los distintos estados estacionarios y han permitido observar una amplia variedad de dinámicas de vórtices que no tienen lugar en estos últimos. Por ejemplo, Gustafson y Halasi [5] presentan el efecto que tiene un incremento en la relación de aspecto –en una cavidad cuadrada de pared móvil– sobre la respuesta transitoria para un número de Reynolds $Re = 10^4$. Muestran que al duplicar la relación de aspecto aparecen nuevas características dinámicas que no se presentan en el caso estacionario, ni cuando se consideran números de Reynolds menores, o cuando la cavidad es cuadrada. Las bifurcaciones de las soluciones transitorias se presentan como dos, tres o cuatro vórtices interactuando. También señalan que la relación de aspecto es un segundo parámetro en importancia que promueve la bifurcación de las soluciones, mostrando que si se mantiene fijo el número de Reynolds en 10^4 y la relación de aspecto adopta un valor crítico entre 1 y 2 tiene lugar una bifurcación de Hopf ¹.

En relación al fenómeno conjugado conducción-convección en cavidades con paredes conductoras, Kim y Viskanta [6] realizaron un estudio tanto numérico como experimental acerca del efecto que tienen las paredes conductoras sobre la convección natural. Estudiaron las soluciones estacionarias en una cavidad cuadrada constituida por cuatro paredes conductoras para tres configuraciones distintas. Reportan que bajo ciertas configuraciones del sistema, la presencia de paredes sólidas reduce las diferencias de temperatura en la cavidad, contribuyen a estabilizar parcialmente el flujo y debilitan la transferencia de calor por convección. Otro trabajo de los mismos autores [7] restringe el estudio a una cavidad cuadrada con un gradiente de temperatura entre las paredes laterales e investiga la transferencia de calor por conducción, radiación y convección natural modelando una estructura celular. Los resultados de este trabajo sugieren que el número de Nusselt local o promedio es uno de los muchos parámetros que controlan el problema de la transferencia de calor

¹Es un tipo de bifurcación presente en algunos sistemas de forma que al variar uno de los parámetros que gobiernan al sistema este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico, dando origen o desapareciendo una órbita periódica.

conjugada. Los resultados reportados también indican que la transferencia de calor por convección se reduce debido a los efectos de la conducción en las paredes y los intercambios de calor por radiación entre las superficies.

Misra y Sarkar [8], trataron una cavidad cuadrada con una pared vertical de espesor finito para diferentes valores del número de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 . Investigaron el efecto de la conducción en la pared para tres valores distintos del espesor adimensional (0.1, 0.2 y 0.4) y un rango amplio de valores de la conductividad térmica. Encontraron que la relación entre conductividades térmicas es un factor determinante en la predicción del número de Nusselt. También señalan que la temperatura promedio en la interfaz sólido líquido se mantiene igual cuando se incrementa el número de Rayleigh en un factor de diez y cuando se incrementa la relación entre conductividades térmicas en un factor de dos.

Liaqat y Baytas [9] analizaron una cavidad cuadrada con paredes de espesor finito. Las cuatro paredes que conforman la cavidad tienen propiedades conductoras finitas y su parte externa se encuentra a temperatura constante. La cavidad contiene un fluido con fuentes de calor volumétricas y uniformes. El estudio se realiza para distintos números de Rayleigh entre 10^7 y 10^{12} . Al comparar sus resultados con estudios similares pero que no toman en cuenta el fenómeno conjugado, conducción-convección natural, encontraron que hay un cambio significativo en el comportamiento del flujo resultante. Especialmente lograron mostrar que las paredes con una alta difusividad térmica funcionan mucho mejor si lo que se pretende es enfriar el fluido.

Moghtada y Mobedi [10] se centraron en el estudio de la convección natural en una cavidad cuadrada con paredes conductoras de espesor finito horizontales. Las paredes verticales se consideran de espesor cero y sobre ellas se establece un gradiente de temperatura constante sobre el sistema. El espesor adimensional de las paredes horizontales se fija en 0.1 y se obtienen las soluciones estacionarias para varios números de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 , así como para diferentes valores de la relación entre difusividades térmicas en un rango entre 0 y 50. Sus resultados muestran que a pesar de que las paredes horizontales no reducen directamente la diferencia de temperaturas entre las paredes verticales, éstas contribuyen a disminuir la transferencia de calor a través de la cavidad, especialmente para valores altos del número de Rayleigh y de la relación entre conductividades térmicas.

Recientemente un trabajo muy completo realizado por Zhang *et al.* [11] estudia las soluciones no-estacionarias del fenómeno conjugado conducción-convección natural en una cavidad cuadrada con paredes conductoras de espesor finito. Una de las paredes laterales se encuentra sometida a cambios periódicos de la temperatura, mientras que la pared opuesta se mantiene a una temperatura constante. Particularmente el estudio se centra en tres factores de influencia distintos: las propiedades termofísicas de las paredes, distintos patrones periódicos de la temperatura y la inclinación de la cavidad. Los resultados numéricos revelan que dentro del rango de parámetros de estudio, la transferencia de calor aumenta casi linealmente con la razón entre conductividades y difusividades térmicas pero disminuye con el ángulo de inclinación de la cavidad. Por otra parte, es posible aumentar o disminuir la transferencia de calor variando el periodo de pulsación de la temperatura.

En vista de la importancia práctica y teórica que han mostrado los sistemas mencionados, se han dedicado esfuerzos importantes a la optimización de los procesos de transporte que tienen lugar en ellos. En los últimos años, los estudios de transferencia de calor y diseño de dispositivos térmicos se han inclinado por los llamados análisis de segunda ley –con referencia a la segunda ley de la termodinámica– y por el concepto de mínima producción de entropía. Esto se debe, en su mayoría, a la importancia que tiene el conocer un conjunto de parámetros que optimicen un proceso en un sistema dado y a la relación que existe entre dicho conjunto y la mínima producción de entropía. En este sentido el trabajo de Bejan [12, 13] resulta importante, pues ha logrado introducir métodos de minimización de la producción de entropía en temas clásicos de ingeniería como el incremento en la transferencia de calor, el diseño de intercambiadores de calor y sistemas de aislamiento térmico para evaluar el desempeño de los sistemas termodinámicos.

La producción de entropía en un sistema fuera de equilibrio está asociada a los procesos irreversibles que tienen lugar en él. Estos procesos pueden ser resultado de flujos de calor, flujos de masa, reacciones químicas, efectos de la viscosidad del fluido, entre otros. Por lo tanto, la producción de entropía está ligada a los valores de las fuerzas termodinámicas que los provocan. Estas fuerzas, en general, se obtienen de forma empírica y están dadas por gradientes de cantidades intensivas asociadas a los flujos que provocan mediante el concepto de trabajo generalizado, y pueden ser, por ejemplo, gradientes de temperatura, gradientes de concentración de una sustancia en una solución, gradientes de la afinidad, entre otras. De esta manera, resulta claro que la

producción de entropía depende de los valores locales de las fuerzas termodinámicas dentro del sistema, siendo necesario tener un conocimiento previo de sus valores para poder calcularla.

En la literatura existen múltiples análisis de segunda ley y producción de entropía para gran variedad de sistemas particulares [14, 15, 16] pero el fenómeno de convección natural en cavidades cerradas no ha recibido mucha atención debido a que las tasas de transferencia de calor y trabajo son relativamente bajas, permitiendo despreciar fácilmente los efectos irreversibles en comparación con los sistemas en convección forzada o mixta [17]. Esta situación ha cambiado en los últimos años con trabajos como el de Erbay *et al.* [17] quienes calcularon numéricamente la producción de entropía en los estados transitorios de una cavidad cuadrada con paredes sin espesor y que se calienta, total y parcialmente, por una de las paredes laterales y se enfría por la pared opuesta. Sus resultados muestran que las zonas de alta producción de entropía local se localizan en la esquina inferior izquierda de la pared caliente y la esquina superior derecha de la pared fría para el caso en que la pared está completamente caliente. Sin embargo, en el caso de calentamiento parcial, el sitio donde se produce más entropía se ubica en la esquina superior de la sección caliente.

Por otro lado, la producción de entropía debida a la transferencia de calor y masa y los efectos de la viscosidad es calculada numéricamente por Magherbi *et al.* [18] para una cavidad cuadrada cuyas paredes laterales se encuentran a temperatura y concentración diferentes pero uniformes. Reportan la producción de entropía total en el estado estacionario e investigan cómo influye la inclinación de la cavidad, el número de Grashof y la relación de flotación en la producción de entropía. Sus resultados indican que la producción de entropía total se incrementa conforme aumenta el número de Grashof y la relación de flotación para valores moderados del número de Lewis, e indican que el ángulo de inclinación tiene un efecto significativo en la producción de entropía. También demuestran que la producción de entropía local debida a la transferencia de calor y aquella debida a la transferencia de masa son prácticamente iguales y se localizan en la parte inferior y superior de la pared caliente.

Bytas [19] analizó numéricamente el flujo y la producción de entropía de un fluido en una cavidad cuadrada porosa e inclinada utilizando la ley de Darcy y la aproximación de Boussinesq. Las paredes laterales de la cavidad se mantienen a temperatura constante, mientras que las dos paredes restantes

Introducción

XIII

se consideran adiabáticas. El estudio se centra en el ángulo de inclinación y el número de Darcy-Rayleigh. Muestran, a nivel local, las zonas de alta producción de entropía y proporcionan información de la sensibilidad del sistema con respecto a cambios en la inclinación, mientras que a nivel global la producción de entropía proporciona información del grado de irreversibilidad del proceso.

Existen pocos trabajos en relación al estudio de la producción de entropía en cavidades cerradas con paredes de espesor finito. Los trabajos realizados por Varol *et al.* [20, 21], utilizan un método en diferencias finitas para estudiar la producción de entropía debida al fenómeno conjugado conducción-convección natural. En [20] estudian una cavidad cuadrada con paredes laterales conductoras de diferente espesor, mientras que en [21] investigan una cavidad trapesoidal porosa cuya única pared vertical tiene espesor finito. Calculan las zonas de alta producción de entropía, isoterms, líneas de corriente, números de Nusselt y los perfiles de velocidades para números de Rayleigh entre $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ y diferentes valores del espesor de las paredes. Entre sus resultados más importantes se encuentra que la presencia de paredes sólidas afectan la temperatura y el campo de velocidades. El número de Bejan –que da cuenta de la contribución debida a la transferencia de calor a la irreversibilidad total– disminuye cuando el número de Rayleigh y la relación entre conductividades térmicas aumentan y las zonas de mayor producción de entropía local se localizan en las esquinas de la cavidad. También muestran que la forma de la cavidad puede ser un parámetro que permita lograr una menor producción de entropía y por lo tanto un ahorro de energía y que la producción de entropía debida a la fricción dentro del fluido no depende del espesor de las paredes.

De lo anterior es evidente que se han logrado grandes avances en el estudio y entendimiento del fenómeno de convección natural, dejando ver que las configuraciones y propiedades de los vórtices determinan la transferencia de calor y producción de entropía del sistema, haciendo de los análisis de segunda ley una herramienta útil para la optimización de dispositivos intercambiadores de calor. Sin embargo, la mayoría de los estudios se han concentrado en la transferencia de calor y producción de entropía de los estados estacionarios para cavidades cuadradas con paredes de espesor cero dejando una gran variedad de nuevas direcciones en las cuales dirigir esfuerzos.

En este sentido, el trabajo de tesis presentado tiene como objetivo aportar nueva información sobre la transferencia de calor y producción de entropía

para los estados transitorios de una cavidad con relación de aspecto grande y paredes de espesor finito. Con este fin, en el capítulo 1, se introducen los elementos teóricos necesarios para comprender el problema presentando una síntesis de la formulación de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos con las aproximaciones que permiten estudiar el fenómeno de convección natural. En el capítulo 2 se plantea formalmente el problema a resolver utilizando las herramientas matemáticas descritas en el capítulo 1, culminando con la formulación adimensional de las ecuaciones que gobiernan el problema. En el capítulo 3, se detalla el método de discretización por volúmenes de control y se obtiene la forma discreta de las ecuaciones que modelan el problema, además de describir el algoritmo SIMPLE utilizado para encontrar las soluciones numéricas del problema. Por último, los capítulos 4 y 5 corresponden a los detalles de los resultados obtenidos y conclusiones del trabajo, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

La convección de calor, o simplemente, convección, es uno de los procesos mediante los cuales se transfiere calor en los fluidos. Dicha transferencia de energía está promovida por el movimiento macroscópico de elementos de fluido, cada uno compuesto de un gran número de moléculas que se mueven por acción de una fuerza externa.

En la convección natural el flujo resulta solamente de la diferencia de densidades, producto de la diferencia de temperaturas del fluido, en presencia de la fuerza gravitacional. La densidad de un fluido disminuye al incrementar la temperatura. En presencia del campo gravitacional las diferencias en la densidad del fluido producidas por la diferencia de temperaturas, dan como resultado fuerzas de flotación. Sin la presencia de una fuerza de cuerpo la convección natural no es posible.

Por otro lado, la conducción es el proceso mediante el cual se transfiere calor en los sólidos en presencia de un gradiente de temperaturas. El flujo de calor se origina en la región que se encuentra a temperatura mayor y se dirige a la región que se encuentra a temperatura menor. El flujo de calor a través del medio está relacionado con una propiedad intrínseca de los materiales llamada conductividad térmica; y es tal que la magnitud del flujo de calor es proporcional a la magnitud de la conductividad. Para un sólido homogéneo e isótropo esta relación está dada por la ley de Fourier.

La convección es claramente un campo en el que convergen dos ramas de la física, la transferencia de calor y la mecánica de fluidos. Por esta razón, el estudio de cualquier tipo de problema relacionado con convección debe estar construido sobre una base sólida que contenga los principios básicos de la transferencia de calor y la mecánica de fluidos.

A continuación se presentan los elementos fundamentales necesarios para estudiar el problema planteado en este trabajo.

1.1. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos

Un fluido en movimiento está sujeto a tres leyes de conservación fundamentales: conservación de masa, cantidad de movimiento y energía. El primer paso será formular estas tres leyes de forma que se satisfagan en cada punto del fluido. Esto se logra aplicando cada ley a un elemento diferencial de fluido y considerando la hipótesis del medio continuo. Dicha hipótesis ignora la estructura molecular de la materia y se enfoca en sus efectos macroscópicos, haciendo posible tratar variables como la temperatura, presión, y velocidad como funciones continuas sobre un dominio de interés. Como resultado se obtienen las ecuaciones de movimiento para estudiar la convección natural de un fluido viscoso y conductor de calor.

Las tres leyes de conservación fundamentales de la mecánica –masa, momento y energía– están formuladas para una partícula o un sistema de partículas, encontrándose naturalmente en forma Lagrangiana. Sin embargo, en la mayoría de los problemas en mecánica de fluidos, resulta más conveniente el uso de coordenadas Eulerianas, donde las variables independientes son las coordenadas espaciales x , y , z y el tiempo t . Para derivar las ecuaciones de conservación básicas dentro del marco de referencia Euleriano, la atención pasa de estar centrada en una partícula o sistema de partículas, en este caso una porción de masa del fluido en particular, al fluido que pasa a través de un volumen de control fijo en el espacio.

Es decir, si α es cualquier variable como la densidad o la temperatura del fluido, desde el punto de vista Euleriano α debe ser una función de las variables independientes x , y , z y t . Pero si se observa un elemento de fluido específico

1.1. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos 3

por un periodo de tiempo δt cuando está fluyendo—es decir, desde el punto de vista Lagrangiano—, las coordenadas relativas a su posición cambiarán δx , δy y δz mientras que el cambio de α queda dado por $\delta\alpha$. De esta forma, x , y , y z dejan de ser variables independientes y se convierten en funciones que dependen de t definidas por la trayectoria del elemento. El cambio de α durante el intervalo de tiempo δt queda dado por:

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\delta z,$$

y al dividir entre δt se obtiene:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}.$$

El lado izquierdo de la expresión anterior representa el cambio total en α durante un incremento de tiempo δt desde el punto de vista Lagrangiano y el término de la derecha expresa el cambio total de α en coordenadas Eulerianas. Cuando $\delta t \rightarrow 0$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}. \tag{1.1}$$

La expresión (1.1) se denomina derivada material y está escrita en forma tensorial y en coordenadas Cartesianas con el vector de posición y velocidad representados por $\mathbf{x} = x_k$ y $\mathbf{u} = u_k$ ($k = 1, 2, 3$) respectivamente. Aquí el término $\partial\alpha/\partial t$ expresa el hecho de que en cada punto del espacio las propiedades del fluido pueden cambiar en el tiempo. El último término de esta ecuación manifiesta que para un flujo independiente del tiempo, en el que sus propiedades sólo dependen de las coordenadas espaciales, existe un cambio en α debido a que cada elemento de fluido cambia su posición en el tiempo.

El método utilizado para derivar las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento de un fluido, a partir de las leyes de conservación, se basa en seguir un volumen de control arbitrario en un marco de referencia Lagrangiano. Como resultado, se deberán calcular las integrales de volumen de las derivadas materiales correspondientes a cada propiedad del fluido, resultando

indispensable transformar dichas integrales en expresiones equivalentes que involucren integrales de volumen de derivadas Eulerianas, lo que se logra fácilmente haciendo uso del teorema de transporte de Reynolds que relaciona la derivada Lagrangiana de una integral de volumen material de un sistema, con una integral que únicamente contiene derivadas Eulerianas [22]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha \, dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha u_k) \right] dV. \quad (1.2)$$

1.1.1. Conservación de masa

Con base en lo señalado anteriormente es fácil derivar la ecuación de continuidad a partir del principio de conservación de masa:

$$\frac{D(m)}{Dt} = 0. \quad (1.3)$$

Si se considera un volumen de control arbitrario tal que:

$$m = \int dm = \int \rho dV, \quad (1.4)$$

al aplicar directamente el teorema de transporte de Reynolds se obtiene:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0. \quad (1.5)$$

Dado que (1.5) se cumple para cualquier volumen, V , arbitrario, se puede deducir que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1.6)$$

conocida como ecuación de continuidad y no sólo expresa el principio de conservación de masa en el flujo, dado que está expresada en términos de una

1.1. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos 5

ecuación en derivadas parciales implica directamente que la velocidad de flujo es continua de donde toma su nombre.

1.1.2. Conservación de cantidad de movimiento

El principio de conservación de momentum resulta de aplicar la segunda ley de movimiento de Newton a un elemento material. Es decir, si se considera un elemento de fluido con una cierta cantidad de masa en un marco de referencia Lagrangiano, la razón de cambio en el momento del fluido es igual a la fuerza neta que actúa sobre él.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{D(m\mathbf{v})}{Dt} \quad (1.7)$$

Al considerar la masa por unidad de volumen ρ y su momento asociado $\rho\mathbf{u}$ el momento total contenido en el volumen V es $\int \rho\mathbf{u}dV$. Si las fuerzas externas que actúan sobre el elemento de fluido de masa m se dividen en fuerzas de cuerpo por unidad de masa \mathbf{f} y fuerzas de superficie por unidad de área \mathbf{P} , el cambio en el momento de la masa m contenida en el volumen V queda dado por

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S P_j dS + \int_V \rho f_j dV. \quad (1.8)$$

Las fuerzas de superficie P_j se relacionan con el tensor de esfuerzos σ_{ij} mediante la expresión $P_j = \sigma_{ij}n_i$, con n_i vector normal a la superficie sobre la que se aplica la fuerza, con lo que la expresión (1.8) toma la forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S \sigma_{ij}n_i dS + \int_V \rho f_j dV. \quad (1.9)$$

Es posible escribir la ecuación (1.9) en términos de integrales de volumen aplicando el teorema de transporte de Reynolds sobre el lado izquierdo de la ecuación y el teorema de Gauss sobre el primer término del lado derecho

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho f_j \right] dV = 0. \quad (1.10)$$

Debido a que el elemento de volumen V sobre el que se realiza la integral es arbitrario, la ecuación (1.10) debe cumplir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho f_j = 0.$$

Usando la ecuación de continuidad, finalmente se obtiene la ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j. \quad (1.11)$$

El miembro izquierdo de la ecuación (1.11) da cuenta del cambio de momentum por unidad de volumen del fluido, mientras que en el miembro derecho se encuentran las fuerzas que producen dicho cambio.

1.1.3. Conservación de energía

La ecuación de la energía se obtiene de aplicar la primera ley de la termodinámica a un elemento material de fluido. La primera ley de la termodinámica establece que en un sistema cerrado, el cambio total de la energía interna (ΔU) del sistema está dado por la suma del calor (Q) que gana o pierde el sistema y el trabajo (W) que realiza o se realiza sobre el sistema, es decir

$$\Delta U = Q + W. \quad (1.12)$$

La primera ley de la termodinámica aplica únicamente a sistemas que se encuentran en equilibrio termodinámico. Aunque un elemento de fluido puede ser considerado como un sistema termodinámico en un marco de referencia Lagrangiano, en general, no se encuentra en reposo y por lo tanto no está en equilibrio. Sin embargo un fluido en movimiento rara vez se encuentra muy

1.1. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos 7

alejado del estado de equilibrio, por lo que esta aparente dificultad puede superarse invocando la hipótesis de equilibrio local introducida en el marco de la teoría Termodinámica de Procesos Irreversibles. Esta hipótesis establece que, aunque no exista equilibrio en un sistema de forma global, es posible suponer que existe equilibrio en regiones pequeñas del mismo. La hipótesis de equilibrio local es válida siempre que los gradientes y fuerzas que actúan sobre el sistema no sean muy grandes y permite definir las variables termodinámicas usuales para un sistema fuera de equilibrio como lo es un fluido en movimiento. De esta forma, la primera ley de la termodinámica se escribe como

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt}. \quad (1.13)$$

Es importante considerar que la energía total U de un fluido en movimiento está compuesta por la energía interna y la energía cinética, es decir:

$$U = \rho \left(e + \frac{1}{2} u_j u_j \right). \quad (1.14)$$

De lo anterior, la primera ley de la termodinámica para un elemento arbitrario de fluido de masa m y volumen V toma la siguiente forma

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) dV = - \int_S q_j n_j dS + \int_S u_j \sigma_{ij} n_i dS + \int_V u_j \rho f_j dV. \quad (1.15)$$

El término izquierdo de la ecuación (1.15) corresponde al cambio en la energía total del sistema –energía interna por unidad de masa e , más energía cinética por unidad de masa–, el primer término corresponde al calor que sale del elemento de fluido por unidad de tiempo, donde q_i son las componentes del vector flujo de calor que sale o entra del volumen de control, el segundo y tercer término del miembro derecho es el trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas externas –fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo–.

Después de aplicar el teorema de transporte de Reynolds al término izquierdo de la ecuación (1.15) y el teorema de Gauss al primer y tercer término del lado derecho se obtiene

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right) \right] dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) dV + \int_V u_j \rho f_j dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV. \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) puede reescribirse de tal modo que sea de la forma $\int_V [\quad] dV = 0$ en donde la elección de V es arbitraria, por lo tanto, la suma dentro de los corchetes en la integral debe ser cero.

Es fácil manipular la ecuación (1.16) y utilizar la ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para obtener la expresión final que gobierna la conservación de energía térmica en un fluido en movimiento

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (1.17)$$

En la ecuación (1.17) el miembro izquierdo representa el cambio en la energía interna, mientras que el miembro derecho da cuenta de las causas que originan dicho cambio. El primero de estos términos representa la conversión de energía mecánica en energía térmica debida a la acción de los esfuerzos de superficie. El segundo término representa los flujos de calor que cruzan el sistema.

1.2. Ecuaciones constitutivas

Se puede notar que las ecuaciones que describen las tres leyes de conservación, ecuaciones (1.6), (1.11) y (1.17), forman en conjunto un sistema de cinco ecuaciones escalares con diecisiete incógnitas –densidad ρ , energía e , tres componentes del vector velocidad u_j , tres componentes del vector de flujo de calor q_j y nueve componentes del tensor de esfuerzos σ_{ij} –.

Para obtener un sistema de ecuaciones completo se busca relacionar el tensor de esfuerzos con el tensor de deformaciones y el vector flujo de calor

1.2. Ecuaciones constitutivas

9

con el gradiente de temperaturas y se agregan dos ecuaciones de estado. A estas relaciones se les conoce como ecuaciones constitutivas.

La relación que guardan el tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones está directamente relacionada con la naturaleza del fluido. Muchos fluidos, como el aire, el agua y los fluidos considerados bajo este estudio, se comportan como fluidos newtonianos, por lo que se deben cumplir los siguientes postulados:

- Cuando el fluido se encuentra en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.
- El tensor de esfuerzos σ_{ij} está relacionado linealmente con el tensor de deformaciones e_{kl} y depende únicamente de este tensor.
- Si no existe una acción de corte en una rotación de cuerpo rígido del fluido, los esfuerzos de corte son cero.
- No hay direcciones privilegiadas en el fluido, es decir, todas las propiedades del fluido son funciones de punto.

Bajo estos postulados es posible demostrar que la relación constitutiva del tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano es [23]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (1.18)$$

con p la presión termodinámica, δ_{ij} la delta de Kroneker, μ el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido y λ el segundo coeficiente de viscosidad.

La segunda ecuación constitutiva, que relaciona el flujo de calor y el gradiente de temperaturas, es la ley de Fourier y establece que el flujo de calor por conducción es directamente proporcional al gradiente de temperaturas

$$q_j = -k\frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (1.19)$$

donde k es la conductividad térmica del fluido.

A partir de estas dos ecuaciones constitutivas, el número de incógnitas se reduce a siete (densidad, presión, temperatura, energía y tres componentes del vector velocidad) con lo que resulta necesario agregar dos ecuaciones de estado para completar el sistema de ecuaciones. Estas son las ecuaciones de estado térmica y calórica

$$p = p(\rho, T) \quad \text{y} \quad e = e(\rho, T). \quad (1.20)$$

Las ecuaciones de estado térmica y calórica más usadas son las correspondientes a un fluido ideal

$$p = \rho RT \quad \text{y} \quad e = c_v T, \quad (1.21)$$

donde R es la constante universal de los gases y c_v la capacidad calorífica a volumen constante.

1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes y ecuación de energía

Al sustituir la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano (1.18) en la ecuación de conservación de momento (1.11) se obtienen las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho g \delta_{i3}. \quad (1.22)$$

En la ecuación anterior se ha sustituido f_j por $g\delta_{j3}$, es decir, la única fuerza de cuerpo que actúa sobre el sistema es la fuerza gravitacional y el eje x_3 se elige como el correspondiente a la dirección vertical hacia arriba.

La ecuación de energía para fluidos newtonianos resulta de sustituir la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos (1.18) y la ecuación constitutiva del flujo de calor en la ecuación de conservación de energía (1.17)

1.4. Aproximación de Boussinesq

11

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \quad (1.23)$$

donde

$$\Phi = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.24)$$

es la función de disipación viscosa y mide el ritmo al que la energía mecánica se convierte en energía térmica por el efecto de la viscosidad dentro del fluido.

1.4. Aproximación de Boussinesq

La convección natural se produce debido a diferencias en la densidad del fluido bajo la acción de la fuerza de gravedad, por lo que no es conveniente reducir el problema suponiendo directamente que la densidad del fluido es constante. A pesar de esto es posible eliminar la densidad de la lista de variables y simplificar el problema considerando la aproximación de Boussinesq.

La base de esta aproximación es que, en convección natural, los flujos son enteramente inducidos por las diferencias en la densidad, producto de una diferencia de temperaturas, es decir, la densidad es función únicamente de la temperatura $\rho = \rho(T)$ y el resto de las propiedades físicas se consideran constantes. Como consecuencia, la variación en la densidad se puede despreciar en la ecuación de continuidad y en los términos de las ecuaciones de movimiento, excepto en el término de flotación, es decir, la ecuación de continuidad se puede escribir como si se tratara de un flujo incompresible,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.25)$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes toman la forma

$$\rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho_0 u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) - \rho g \delta_{j3}, \quad (1.26)$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido en un estado de referencia, por ejemplo en estado estático o moviéndose a velocidad constante. Para este estado de referencia

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (1.27)$$

y la ecuación (1.26) se reduce a

$$-\frac{\partial p_0}{\partial x_j} - \rho_0 g \delta_{j3} = 0. \quad (1.28)$$

Al restar (1.28) de (1.26) se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho_0 u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial(p - p_0)}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) - (\rho - \rho_0) g \delta_{j3}. \quad (1.29)$$

Es posible eliminar la variación de la densidad $(\rho - \rho_0)$ y ponerla en términos de una diferencia de temperaturas utilizando el coeficiente de expansión volumétrica

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (1.30)$$

En convección natural las variaciones de la presión son generalmente pequeñas respecto a la presión hidrostática por lo que se puede considerar que β no depende de p

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dT} \right). \quad (1.31)$$

1.5. Consideraciones sobre la ecuación de energía

13

Si se consideran gradientes de temperaturas pequeños, de tal manera que la densidad varíe de forma lineal, la derivada se puede aproximar como

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \right). \quad (1.32)$$

Con lo que se obtiene una ecuación de estado para la densidad

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)], \quad (1.33)$$

que al sustituir en la ecuación (1.29) y tomar en cuenta que $p_0 = -\rho_0 g z$ (resultado que se obtiene de integrar la ecuación (1.28)) se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes bajo la aproximación de Boussinesq

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (p + \rho_0 g z) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) + \beta(T - T_0) g \delta_{i3}. \quad (1.34)$$

donde ρ es el coeficiente de viscosidad cinemática definido como μ/ρ_0 .

1.5. Consideraciones sobre la ecuación de energía

Al emplear la aproximación de Boussinesq es posible reducir la ecuación para la energía (1.23), pero primero es conveniente evaluar la tasa de disipación viscosa y la tasa transferencia de calor.

Considérese a V una velocidad representativa del sistema, d una escala de longitud y $T_0 - T_1$ una escala de diferencias de temperatura. Con esto,

$$\frac{\Phi}{\rho \frac{D(c_v T)}{Dt}} \approx \frac{\mu V^2 d^{-2}}{\rho c_v (T_0 - T_1) V d^{-1}} = \frac{\nu V}{c_v (T_0 - T_1) d}.$$

Para un gas típico $\nu/c_v \approx 10^{-8} K s$ y para un líquido típico $\nu/c_v \approx 10^{-9} K s$ demostrando que el cociente es muy pequeño tanto para líquidos como para

gases, a menos que $V/(T_0 - T_1)d$ sea muy grande. Por lo tanto, es posible despreciar el término de disipación viscosa Φ en la ecuación de balance de energía.

El término de producción de calor por compresión se puede reescribir de la siguiente forma

$$-p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -p\beta \frac{DT}{Dt}.$$

Para un gas ideal, $p = (c_p - c_v)\rho T$ y $\beta = 1/T$, con lo que se encuentra

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cong c_p \rho \frac{DT}{Dt},$$

exhibiendo que no es posible despreciar el término de calentamiento por compresión en relación a la transferencia de calor como la ecuación (1.25) sugiere. Sin embargo, en los líquidos, el término tratado es despreciable, principalmente porque la transferencia de calor es proporcional a la densidad, la cual es por lo menos 10^3 veces mayor en los líquidos típicos en comparación con los gases típicos.

De acuerdo con las aproximaciones anteriores la ecuación de energía se reduce a

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{1.35}$$

donde κ es la difusividad térmica, $\kappa = k/\rho_0 c_p$ para un gas ideal y $\kappa = k/\rho_0 c$ para un líquido.

1.6. Producción de entropía en un flujo conductor de calor 15

1.6. Producción de entropía en un flujo conductor de calor

La segunda ley de la termodinámica introduce una variable de estado llamada entropía asociada a los intercambios de energía del sistema, esto es, al intercambio de calor que existe entre el sistema y sus alrededores. A diferencia de la energía, la entropía no sigue una ley de conservación, por lo que resulta interesante analizar su evolución en los procesos del sistema.

En un sistema macroscópico, la variación de la entropía se debe al intercambio de calor con los alrededores y a la producción de entropía interna

$$ds = d_i s + d_e s, \tag{1.36}$$

donde ds denota el cambio en la entropía total por unidad de masa, mientras que $d_i s$ es la producción de entropía interna y $d_e s$ es el cambio en la entropía debido al intercambio de calor con los alrededores.

Dependiendo del sentido del flujo de calor, hacia adentro o hacia afuera del sistema, $d_e s$ puede ser positiva o negativa. Por su parte $d_i s$ debe cumplir la segunda ley de la termodinámica, que exige

$$ds_i \geq 0. \tag{1.37}$$

Existe, dentro del marco de la Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal (TIL), una forma explícita de calcular $d_i s$ para procesos irreversibles. Esto se logra escribiendo adecuadamente las expresiones anteriores en términos de densidades de variables termodinámicas. Sin embargo, dado que la entropía es una cantidad de naturaleza estadística, debe suponerse que el sistema posee una cantidad suficiente de partículas para que el promedio estadístico tenga sentido.

Además, para definir de manera adecuada las variables termodinámicas, debe suponerse válida la hipótesis de equilibrio local, misma que se estableció anteriormente para derivar la ecuación de energía y que permite definir las variables termodinámicas usuales de la siguiente forma:

- Se pueden definir, como en equilibrio, las funciones termodinámicas en diferentes puntos del espacio en forma instantánea.
- Las variables termodinámicas se transforman en campos dependientes de la posición y del tiempo. Por ejemplo, la temperatura se expresa como $T = T(\mathbf{x}, t)$.
- Las ecuaciones de estado conservan su forma.

Lo anterior hace que local e instantáneamente pueda considerarse válida la ecuación de Gibbs, que de manera general se escribe como

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D\tilde{v}}{Dt} - \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{Dc_k}{Dt}, \quad (1.38)$$

con \tilde{v} el volumen específico y μ_k y c_k el potencial químico por unidad de masa y concentración de la especie química k , respectivamente.

En el sistema considerado en este estudio no existen diferentes especies químicas y por lo tanto la ecuación de Gibbs (1.38) se reduce a

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D\tilde{v}}{Dt}. \quad (1.39)$$

Si se utiliza la ecuación de continuidad en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.40)$$

y se sustituye en la ecuación (1.23), se obtiene

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho}$$

que puede reescribirse como sigue

1.6. Producción de entropía en un flujo conductor de calor 17

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - p \frac{D\tilde{v}}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho}. \quad (1.41)$$

Al sustituir la ecuación de balance (1.41) en la ecuación de Gibbs (1.39) se encuentra

$$T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\Phi}{\rho}. \quad (1.42)$$

Es conveniente recordar que la función de disipación Φ se obtuvo al sustituir la ecuación constitutiva (1.18) en la ecuación de balance de energía (1.17), a través del término $\sigma_{ij} \partial u_j / \partial u_i$, que representa el trabajo realizado por las fuerzas de superficie.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \left[-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \\ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned}$$

El término $p \partial u_k / \partial x_k$, representa la transferencia de energía reversible debida a compresiones, mientras que los otros dos términos representan las rapidez con la que se convierte energía mecánica en energía térmica de forma irreversible.

$$\Phi = \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2.$$

De esta manera, la ecuación (1.42) es

$$\frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{\rho T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\lambda}{\rho T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2\rho T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

Si se toma en cuenta la igualdad

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_j}{T} \right) + \frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

se obtiene la ecuación de balance de entropía

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_j}{T} \right) + \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\lambda}{T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.43)$$

Es conveniente reconocer que la ecuación (1.43) tiene la forma

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma,$$

de acuerdo a la notación vectorial usual. En la ecuación anterior, \mathbf{J}_s es el flujo de entropía y σ la producción de entropía interna.

Se puede notar que

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{q}}{T}, \quad (1.44)$$

mostrando que, en este caso, el flujo de entropía con los alrededores se produce únicamente debido al flujo de calor. En general, para sistemas abiertos, el flujo de entropía es producto de intercambio de masa y calor.

Por otra parte,

$$\sigma = \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\lambda}{T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (1.45)$$

que devela los dos medios por lo cuales se produce entropía en el sistema. El primero, debido a los flujos de calor que se conducen dentro del sistema, mientras que el segundo se debe a las fuerzas de fricción internas del fluido. Por tanto, es posible escribir

1.7. Ecuación diferencial para la conducción de calor

19

$$\sigma_q = \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2,$$

$$\sigma_v = \frac{\lambda}{T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

donde σ_q y σ_v son las contribuciones térmica y viscosa a la producción de entropía interna, respectivamente.

Al utilizar la ecuación (1.25) –resultado de considerar la aproximación de Boussinesq– se elimina el primer término de la producción de entropía viscosa, con lo que se obtienen las siguientes expresiones

$$\sigma_q = \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2, \tag{1.46}$$

$$\sigma_v = \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \tag{1.47}$$

De las dos expresiones anteriores, es claro que para encontrar la producción de entropía en un flujo conductor de calor, se necesita conocer los campos de velocidades y temperatura.

1.7. Ecuación diferencial para la conducción de calor

A continuación se deriva la ecuación diferencial para la conducción en un sólido estacionario, homogéneo e isotrópico con una fuente de calor en su interior. La generación de calor puede ser producto de efectos nucleares, eléctricos, químicos u otras fuentes que pueden ser funciones del tiempo y/o la posición. La razón de generación de calor en el medio, generalmente referida como generación de calor por unidad de tiempo, por unidad de volumen, se

denota con $g(x_i, t)$, y en el Sistema Internacional de unidades (SI) sus unidades son W/m^3 .

Considérese la ecuación de evolución temporal de energía para un volumen de control V , como el que se muestra en la Fig. 1.1, dada por

$$-\int_A q_j n_j dA + \int_V g(x_i, t) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c_p T(x_i, t) dV. \quad (1.48)$$

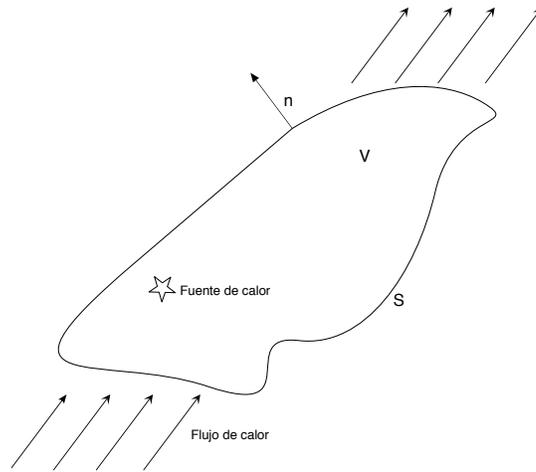


Figura 1.1. Energía almacenada en el volumen V .

En la que se establece que el cambio en la energía total en el interior de del volumen de control se debe al flujo de calor que atraviesa la superficie límite del volumen, representado por el primer término del miembro izquierdo de la ecuación (1.48) (A es la superficie que contiene al elemento de volumen V , n_j es el vector normal unitario al elemento de superficie dA y apunta hacia afuera de la superficie, q_j es el vector flujo de calor sobre dA), más el calor generado al interior del volumen dado por el segundo término del miembro izquierdo de la misma ecuación. En el miembro derecho ρ y c_p denotan a la densidad y la capacidad calorífica a presión constante respectivamente.

Al aplicar el teorema de Gauss en le primer termino del lado izquierdo de la ecuación (1.48) e intercambiar la derivada y la integral en el término del lado derecho se obtiene

1.7. Ecuación diferencial para la conducción de calor

21

$$\int_V \left(-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + g(x_i, t) - \rho c_p \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (1.49)$$

La ecuación anterior fue derivada para un elemento arbitrariamente pequeño dentro del sólido; por lo tanto V puede elegirse tan pequeño como sea necesario para remover la integral. Obteniendo

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + g(x_i, t) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t}. \quad (1.50)$$

Si ahora se considera la ley de Fourier que relaciona el flujo de calor con el gradiente de temperaturas

$$q_j(x_i, t) = -k \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial x_j},$$

y se sustituye en la ecuación (1.50), se obtiene la ecuación diferencial de la conducción de calor para un sólido estacionario, homogéneo e isotrópico con una fuente en su interior dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial x_j} \right) + g(x_i, t) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t}. \quad (1.51)$$

En esta ecuación se considera que k puede depender del espacio o de la temperatura, $k = k(x_i, T)$, así como también que c_p depende de la temperatura. Cuando se supone que la conductividad térmica es constante –no depende de la posición o de la temperatura– la ecuación (1.51) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 T(x_i, t)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{k} g(x_i, t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t}. \quad (1.52)$$

donde $\kappa = k/\rho c_p$ es la difusividad térmica, es una propiedad del medio y tiene dimensiones de longitud²/tiempo. El significado físico de este parámetro

está asociado con la rapidez de propagación del calor dentro del sólido durante cambios de temperatura en el tiempo. Mientras más alta es la difusividad térmica, más rápido se propaga el calor en el medio.

Por último, en un medio con conductividad térmica constante y sin fuentes generadoras de calor, la ecuación (1.52) se convierte en la ecuación de Fourier

$$\frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x_i, t)}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.53)$$

Capítulo 2

Planteamiento del problema

En el presente trabajo se estudia la convección natural y producción de entropía en un fluido de Boussinesq confinado a una cavidad rectangular con una relación de aspecto grande, $RA = L/H = 12$, y paredes conductoras de espesor finito, h , como se muestra en la Fig. 2.1, donde L es la longitud de la parte interna de la cavidad y H el ancho. Si bien las cuatro paredes que conforman la cavidad son conductoras, el sistema en conjunto se encuentra aislado de sus alrededores excepto por dos porciones de longitud $l = H$ localizadas simétricamente en las paredes verticales a una distancia L_1 desde la parte interna de la pared superior de la cavidad que se mantienen a una temperatura constante T_1 , mayor que la temperatura inicial del fluido T_0 .

Las características del sistema anteriormente descritas obedecen a la idea de simular un sistema sencillo, que permita encontrar patrones de flujo y de transferencia de calor distintos a aquellos que se presentan en la mayoría de los estudios en cavidades cuadradas. La posición de las fuentes de calor se ha elegido cerca de las base para preferenciar el flujo de calor por convección natural hacia la parte alta de la cavidad, de forma que el sistema puede representar un calentador de agua.

En la sección anterior ya se han derivado las ecuaciones que modelan un sistema con estas características, es decir, en el fluido dentro de la cavidad se cumplen las ecuaciones

y en las paredes sólidas

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right), \quad (2.5)$$

donde se han utilizados los subíndices s y f para distinguir entre las propiedades del sólido y la del fluido, respectivamente.

Para obtener un planteamiento completo del problema no basta con derivar las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, es imprescindible considerar las condiciones de frontera a las que se encuentra sometido el sistema.

En la interfaz sólido-fluido se deben cumplir dos condiciones. La primera es que las velocidades de flujo se anulen en la capa de fluido que se encuentra en contacto directo con la pared sólida.

$$u_i = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \quad \text{en la interfaz sólido-fluido}; \quad (2.6)$$

La segunda establece el hecho de que la temperatura y el flujo de calor deben ser funciones continuas, es decir, en la interfaz tanto la temperatura como el flujo de calor, en el sólido y el fluido, son iguales.

$$T_s = T_f, \quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} = k_f \frac{\partial T_f}{\partial n}, \quad \text{en la interfaz sólido-fluido}, \quad (2.7)$$

en esta relación k_s y k_f son las conductividades térmicas del sólido y del fluido respectivamente.

Debido a que las fuentes de calor son dos porciones de las paredes verticales que se mantienen a temperatura constante T_1 , en el sólido debe cumplirse que

$$T_s = T_1, \quad \text{en:} \quad (2.8)$$

$$y \in [h + L_1, h + L_1 + l], \quad x \in [0, h] \quad \text{y}$$

$$y \in [h + L_1, h + L_1 + l], \quad x \in [h + H, 2h + H];$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial n} = 0 \quad \text{en la parte externa de las paredes,} \quad (2.9)$$

donde n denota la dirección normal a la pared.

2.1. Variables y ecuaciones adimensionales

Es conveniente describir el conjunto de ecuaciones (2.1)-(2.5) con sus respectivas condiciones de frontera en forma adimensional, de manera que permitan la fácil generalización de los resultados y la identificación directa de la combinación adimensional de parámetros que determinan el comportamiento del flujo y la dependencia del mismo respecto a variaciones en dichas combinaciones. La elección de las variables adimensionales debe hacerse tomando en cuenta las propiedades del sistema y, como consecuencia, deben reflejar sus características físicas esperadas o conocidas.

2.2. Ecuaciones de balance en forma adimensional

En general, las variables de posición se adimensionalizan utilizando una escala de longitud característica del sistema. Usualmente se elige la longitud, el ancho o la altura del recipiente que contiene al fluido. En otros casos, principalmente aquéllos en los que el fluido no se encuentra totalmente confinado, se elige la longitud de alguna sección con temperatura diferente que la del resto del fluido, donde normalmente se producen las fuerzas de flotación. Particularmente, para el sistema que se desea estudiar, la longitud característica elegida es el ancho H de la cavidad.

En cualquiera de los casos, si se denota esta escala característica por d , es posible definir las variables adimensionales de longitud de la siguiente forma

$$x_i^* = \frac{x_i}{d}, \quad (2.10)$$

donde el superíndice (*) distingue a las nuevas variables adimensionales.

2.2. Ecuaciones de balance en forma adimensional

27

Para el tiempo, se pueden elegir diferentes escalas, una de ellas es el tiempo característico de difusión de temperatura, que expresa el tiempo necesario para que una señal térmica viaje a través de la escala de longitud d . Con lo que se obtiene

$$t^* = \frac{t}{(d^2/\kappa)}. \quad (2.11)$$

En algunos casos, en los que $\nu = \mu/\rho \gg \kappa$ se puede usar de manera equivalente d^2/ν que mide el tiempo característico de difusión de momento lineal.

Si se adopta la escala de tiempo definida por (2.11), la escala de velocidades queda definida por el cociente $d/(d^2/\kappa) = \kappa/d$. Con lo que queda determinada la nueva velocidad adimensional

$$u_i^* = \frac{u_i}{(\kappa/d)}. \quad (2.12)$$

De acuerdo con esta escala de velocidad, se define la escala para la presión como $\rho_0 \kappa^2/d^2$, y la presión adimensional como

$$p^* = \frac{p}{(\rho_0 \kappa^2/d^2)}. \quad (2.13)$$

Alternativamente, es posible obtener primero una escala de velocidades características del flujo y, a partir de ella, construir la escala de tiempo correspondiente. Esto se logra notando que un elemento de fluido originalmente en reposo, en el que no existan fuerzas de flotación y que se encuentra bajo la acción de la gravedad, tendrá una velocidad igual a \sqrt{gd} después de recorrer la escala de longitud d . El efecto de la fuerza de flotación será el de modular esta velocidad por un factor proporcional a su intensidad. Dicho factor puede elegirse como $\sqrt{(\rho_0 - \rho_1)/\rho_0}$, donde ρ_1 es la densidad a la temperatura característica del sistema θ_1 . De esta forma, la velocidad adimensional se expresa como

$$u_i^* = \frac{u_i}{\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}}, \quad (2.14)$$

donde $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_1$. Con esta escala de velocidad se construye la escala de tiempo directamente como $d/\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}$ y el tiempo adimensional toma la forma

$$t^* = \frac{t}{d/\sqrt{gd\Delta\rho/\rho_0}}. \quad (2.15)$$

Además, la escala para la presión en este caso es $gd\Delta\rho$ y la presión adimensional

$$p^* = \frac{p}{gd\Delta\rho}. \quad (2.16)$$

La escala de temperatura suele construirse a partir de una diferencia de temperaturas representativa del flujo, misma que puede tomarse como la diferencia entre la temperatura inicial del fluido y la diferencia de temperatura que induce las fuerzas de flotación. Otra forma es utilizar las diferencia de temperaturas entre las paredes que confinan al fluido, en caso de que esta diferencia sea constante. En general, la temperatura adimensional se escribe como

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}. \quad (2.17)$$

Utilizando cualquiera de los dos conjuntos de variables adimensionales, es posible rescribir las ecuaciones (2.1)-(2.5) en forma adimensional, aunque es importante señalar que cuando se emplea la escala de velocidades modulada por la fuerza de flotación, suelen presentarse dificultades al comparar los resultados debido a que la escala de tiempo característica que se deriva depende de las diferencias de temperaturas usadas en cada caso. En este sentido es preferible utilizar la escala de velocidades definida por el tiempo difusivo, es decir, se ha decidido utilizar la siguiente combinación de variables adimensionales

2.2. Ecuaciones de balance en forma adimensional

29

$$x_i^* = \frac{x_i}{d}, \quad u_i^* = \frac{u_i H}{\kappa_f}, \quad t^* = \frac{t \kappa_f}{H^2},$$

$$p^* = \frac{p H^2}{\rho_0 \kappa_f^2}, \quad \theta_f^* = \frac{T_f - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \theta_s^* = \frac{T_s - T_0}{T_1 - T_0}. \quad (2.18)$$

con lo que se encuentra

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{D u^*}{D t^*} = -\frac{\partial}{\partial x^*} \left(p^* + \frac{g y^* H^3}{\kappa^2} \right) + Pr \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (2.20)$$

$$\frac{D v^*}{D t^*} = -\frac{\partial}{\partial y^*} \left(p^* + \frac{g y^* H^3}{\kappa^2} \right) + Ra Pr \theta_f^* + Pr \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (2.21)$$

$$\frac{D \theta_f^*}{D t^*} = \frac{\partial^2 \theta_f^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_f^*}{\partial y^{*2}}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \theta_s^*}{\partial t^*} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_s^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta_s^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (2.23)$$

donde se han definido tres parámetros adimensionales, el primero es el número de Prandtl, $Pr = \nu / \kappa_f$, que compara el coeficiente de difusividad de momento lineal con la difusividad térmica, y expresa una propiedad del fluido y no del flujo. El segundo es el número de Rayleigh, $Ra = \beta g d^3 (T_1 - T_0) / (\nu \kappa_f)$, que compara las fuerzas de flotación con las fuerzas viscosas y, a diferencia del número de Prandtl, expresa una propiedad del flujo y no solamente del fluido. Por último, el parámetro $\alpha = \kappa_s / \kappa_f$ da cuenta de la razón entre la difusividad térmica del sólido y la difusividad térmica del fluido .

Es posible escribir las ecuaciones (2.19)-(2.23) de forma más sencilla definiendo $P^* = p^* + g y^* H^3 / \kappa_f^2$ y omitiendo el superíndice * para mayor claridad, enfatizando que de ahora en adelante, cualquier referencia de las ecuaciones que gobiernan el sistema apunta a este conjunto de ecuaciones adimensionales.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + RaPr\theta_f + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.26)$$

$$\frac{D\theta_f}{Dt} = \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} \right), \quad (2.28)$$

De acuerdo con el conjunto de variables adimensionales utilizado –ecuaciones (2.18)– las condiciones de frontera para el problema toman la siguiente forma

$$u_i = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \quad \text{en la interfaz s\u00f3lido-fluido;} \quad (2.29)$$

$$\theta_s = \theta_f, \quad K \frac{\partial \theta_s}{\partial n} = \frac{\partial \theta_f}{\partial n}, \quad \text{en la interfaz s\u00f3lido-fluido.} \quad (2.30)$$

$$\theta_s = 1, \quad \text{en:} \quad (2.31)$$

$$y \in [L_1 + h, L_1 + h + 1], \quad x \in [0, h] \quad \text{y}$$

$$y \in [L_1 + h, L_1 + h + 1], \quad x \in [h + 1, 2h + 1]$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{en la parte externa de las paredes,} \quad (2.32)$$

donde K es la relaci\u00f3n de difusividades entre el s\u00f3lido y el fluido k_s/k_f y n la direcci\u00f3n normal a la pared. Cabe se\u00f1alar que en las condiciones de frontera adimensionales descritas, todas las variables de longitud est\u00e1n divididas entre el ancho interno de la cavidad H , por ejemplo la variable adimensional $L_1^* = L_1/H$, pero como ya se ha mencionado se ha decidido suprimir el super\u00edndice para obtener una versi\u00f3n m\u00e1s limpia de las ecuaciones.

2.3. Producción de entropía adimensional

31

2.3. Producción de entropía adimensional

En la sección 1.6 se ha deducido la expresión para la producción interna de entropía en un fluido de Boussinesq, misma que está dada por

$$\sigma = \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\mu}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.33)$$

en la que el primer término representa la producción de entropía térmica σ_q y el segundo término la producción de entropía viscosa σ_v

Al emplear el conjunto de variables adimensionales (2.18) es posible definir cada una de las contribuciones en la producción de entropía en forma adimensional como

$$\sigma_q^* = \sigma_q \frac{H^2 T_0^2}{k(T_1 - T_0)^2} = \frac{1}{(1 + \epsilon \theta^*)^2} \left[\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]$$

y

$$\sigma_v^* = \sigma_v \frac{H^2 T_0}{k(T_1 - T_0)} = \frac{Ec}{(1 + \epsilon \theta^*)} \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) \right].$$

donde Ec es el número de Eckert dado por $Ec = \nu \kappa / [c_p (T_1 - T_0) H^2]$ y $\epsilon = (T_1 - T_0) / T_0$. En el caso de estudio, se puede considerar que $0 < \epsilon \ll 1$ con lo que se obtiene la siguiente expresión para la producción de entropía adimensional en un flujo conductor de calor

$$\sigma = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + Ec \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right], \quad (2.34)$$

en donde nuevamente los superíndices han sido omitidos por claridad.

2.4. Número de Nusselt

El número de Nusselt es un número adimensional que permite medir la magnitud del flujo de calor en un proceso dado. Si se utilizan las variables dimensionales de temperatura y posición en la ley de Fourier –que relaciona el flujo de calor y el gradiente de temperatura– dada por

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (2.35)$$

se obtiene

$$q_j = -\frac{k}{L}(T_1 - T_0)\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}. \quad (2.36)$$

Ahora se define el flujo de calor adimensional

$$q_j^* = \frac{Lq_j}{k(T_1 - T_0)} = -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*}. \quad (2.37)$$

Para determinar la magnitud del flujo de calor en un punto de una superficie S , se toma el producto punto del flujo de calor con el vector normal a la superficie n_j . Este producto se denota como número de Nusselt

$$Nu = q_j^* n_j = -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*} n_j. \quad (2.38)$$

En términos de la ecuación anterior, el número de Nusselt promedio será la integral del número de Nusselt sobre la superficie S .

$$\bar{Nu} = \frac{1}{A_S} \int_S q_j^* n_j ds = \frac{1}{A_S} \int_S -\frac{\partial\theta}{\partial x_j^*} n_j ds. \quad (2.39)$$

Aquí A_S es el área total de la superficie S .

El número de Nusselt será utilizado para medir la magnitud del flujo de calor alrededor de las zonas en las que se aplica el gradiente de temperatura.

Capítulo 3

Solución numérica

3.1. Discretización de las ecuaciones

Existen diferentes métodos de discretización y algoritmos para resolver el conjunto de ecuaciones (2.24) - (2.28) y muchos de ellos pueden encontrarse en la referencia bibliográfica [24]. En el desarrollo de este trabajo se ha empleado el método de discretización por volúmenes de control junto al algoritmo SIMPLE. Los detalles de la solución numérica bajo este esquema son presentados en esta sección.

3.1.1. Método de volúmenes de control

El método de volúmenes de control permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales. Es un método alternativo a los métodos de diferencias finitas y elemento finito que se desprende como caso particular del método de residuos pesados.

La idea central de la formulación por volúmenes de control es fácil de entender y tiene una interpretación física directa. Considérese una malla de discretización del dominio de definición del problema. En torno a cada punto de la malla se construye un volumen de control de tal manera que los volúmenes no se superponen entre si y cubren todo el dominio en cuestión (Fig. 3.1).

La ecuación diferencial a resolver se integra sobre cada volumen de control resultando en una versión discretizada de la ecuación. Para evaluar las integrales correspondientes, es necesario especificar perfiles de variación de la variable dependiente ϕ entre los puntos de la malla.

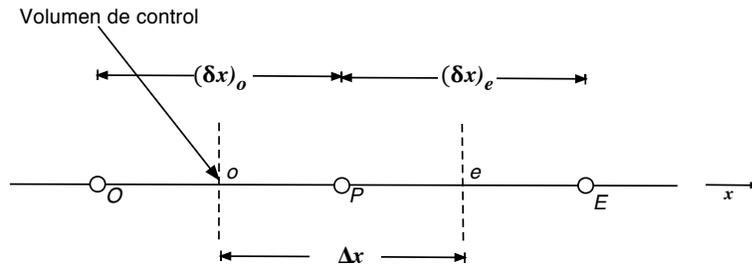


Figura 3.1. Malla de discretización por volúmenes de control en una dimensión.

El sistema de ecuaciones discretas resultante expresa el mismo principio de conservación de la propiedad ϕ para un volumen de control finito de la misma forma que lo expresa la ecuación diferencial para un volumen de control infinitesimal.

Una de las principales bondades de este método es que la solución obtenida para ϕ satisface en forma exacta la ecuación de conservación considerada, independientemente del grueso de la malla.

3.1.2. Forma discreta de las ecuaciones

Al considerar las ecuaciones (2.25) y (2.28), es posible notar que presentan una estructura similar propia de las ecuaciones de transporte. Esto permite obtener una ecuación de discretización general que puede ser utilizada en cada caso mediante la elección de parámetros y variables adecuados [25].

La ecuación que generaliza las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de balance de energía tiene la forma

3.1. Discretización de las ecuaciones

35

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + Ri\theta + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right), \quad (3.1)$$

donde Γ representa un coeficiente de difusividad generalizado.

En la ecuación anterior ϕ puede ser cualquier variable de flujo –la velocidad o la temperatura– volviéndose claro que, a partir de esta ecuación, es posible obtener cualquiera de las ecuaciones que gobiernan el flujo.

Si se considera la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.2)$$

y la ecuación general (3.1) en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

Es posible escribir (3.1) como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\theta. \quad (3.3)$$

en donde se pone de manifiesto que la variación temporal de la propiedad ϕ es resultado de los siguientes procesos:

1. Convección y/o difusión en la dirección x .
2. Convección y/o difusión en la dirección y .
3. Gradiente de presión.
4. Término fuente.

Cuando se definen los flujos de convección-difusión en la dirección x y en la dirección y como:

$$J_x = u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad J_y = v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

respectivamente, la ecuación (3.3) se transforma en:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\theta. \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) debe integrarse sobre el volumen de control como el que se muestra en la Fig. 3.2

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_o^e \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + Ri\theta \right) dx dy dt.$$

Para resolver estas integrales hay que hacer varias suposiciones. En la parte temporal es necesario especificar cómo varían ϕ_O , ϕ_C y ϕ_E en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Existen diferentes formas de considerar esta variación, las más relevantes pueden generalizarse mediante la siguiente expresión:

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_\omega dt = [f\phi_\omega^1 + (1-f)\phi_\omega^0] \Delta t \quad (3.5)$$

con $\omega = C, O, E$ y los superíndices 0 y 1 hacen referencia al valor de la variables ϕ_ω en los instantes de tiempo t y $t + \Delta t$ respectivamente.

Diferentes valores de f conducen a diferentes esquemas de discretización. Los más conocidos son:

- **Esquema explícito** ($f = 0$). Este esquema implica que el valor antiguo de ϕ_ω^0 prevalece en todo el intervalo de tiempo excepto en $t + \Delta t$ cuando ϕ_ω adquiere el valor ϕ_ω^1 .

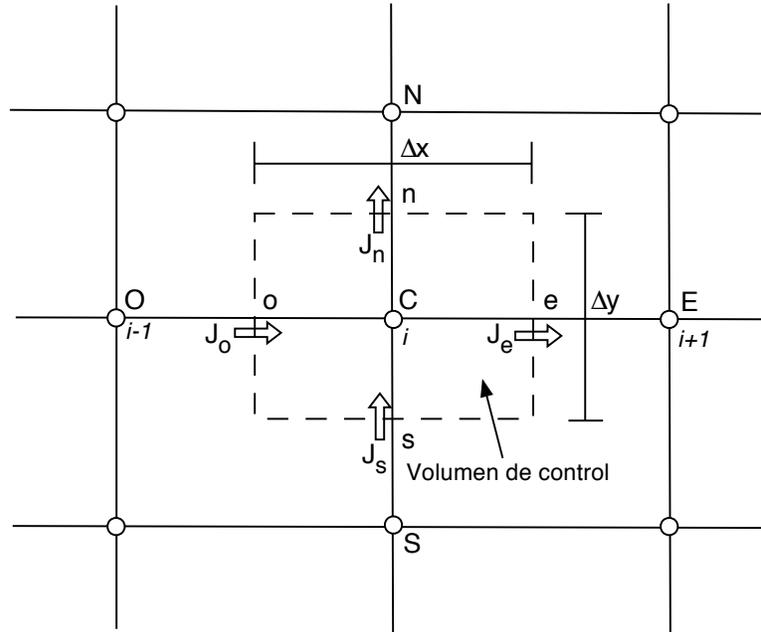


Figura 3.2. Volumen de control.

- **Esquema Crank-Nicolson** ($f = 0.5$). El esquema Crank-Nicolson supone una variación lineal de ϕ_ω en el intervalo de tiempo, desde ϕ_ω^0 hasta ϕ_ω^1 .
- **Esquema implícito** ($f = 1$). Supone que ϕ_ω cambia rápidamente de ϕ_ω^0 a ϕ_ω^1 al comienzo del intervalo de tiempo y este valor se mantiene hasta el final del mismo.

En este caso se adoptará el esquema implícito dado que es posible demostrar que el único valor de f que hace que el coeficiente que acompaña a $\phi_{\omega o}$, en la ecuación (3.5), sea siempre positivo es $f = 1$, haciendo que este esquema sea incondicionalmente estable. Esta referencia a la importancia de los signos que acompañan a los valores ϕ_C , ϕ_O y ϕ_E será retomada al final de esta sección.

Para evaluar las integrales espaciales se adopta la suposición de que los valores de ϕ y de la temperatura θ que prevalecen sobre el volumen de control son los valores de estas funciones evaluadas en en el punto C , es decir ϕ_C y

θ_C . Para la presión se supone que el valor de la presión sobre las caras del volumen de control o y e es el que toma en el centro de ellas, P_o y P_e .

Así se llega a la forma para la integral de la ecuación (3.4) sobre el volumen de control mostrado en la Fig. 3.2

$$\frac{\phi_C - \phi_C^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + J_e - J_o + J_n - J_s + (P_e - P_o) \Delta y - Ri \theta_C \Delta x \Delta y = 0. \quad (3.6)$$

En la ecuación (3.6) las variables J_o , J_e , J_n , y J_s denotan las integrales de de los flujos sobre las caras de los volúmenes de control; es decir,

$$\begin{aligned} J_e &= \int_s^n J_x|_e dy, & J_o &= \int_s^n J_x|_o dy, \\ J_s &= \int_o^e J_y|_s dx, & J_n &= \int_o^e J_y|_n dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De forma análoga se puede integrar la ecuación de continuidad (3.2) sobre el mismo volumen de control y obtener:

$$F_e - F_o + F_n - F_s = 0 \quad (3.8)$$

donde se han definido,

$$F_e = u_e \Delta y, \quad F_o = u_o \Delta y, \quad F_n = v_n \Delta x, \quad F_s = v_s \Delta x,$$

y se ha supuesto que los valores de u_e , u_o , v_s y v_n son los que se mantienen sobre las caras correspondientes.

Al multiplicar la expresión (3.8) por ϕ_C y restarla a la ecuación (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\phi_C - \phi_C^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_e - F_e \phi_C) - (J_o - F_o \phi_C) + (J_n - F_n \phi_C) \\ - (J_s - F_s \phi_C) + (P_e - P_o) \Delta y - Ri \theta_c \Delta x \Delta y = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

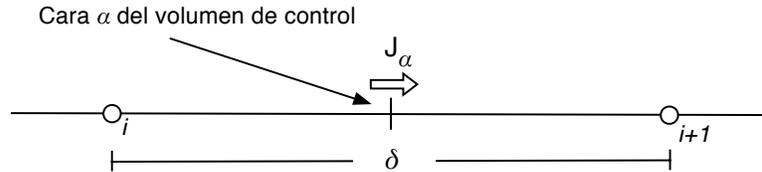


Figura 3.3. Flujo total J_α entre dos puntos adyacentes.

En la ecuación anterior aún falta determinar las expresiones discretas para los términos de la forma $J_\alpha - F_\alpha$ (con α la cara del volumen de control correspondiente). Con este fin considérense el caso unidimensional con dos puntos adyacentes de la malla de discretización separados una distancia δ , como se muestra en la Fig. 3.3, y las expresiones para los flujos de convección-difusión en forma adimensional,

$$J_x^* = \frac{J_x \delta}{\Gamma} = Pe_u \phi - \frac{\partial \phi}{\partial(x/\delta)},$$

$$J_y^* = \frac{J_y \delta}{\Gamma} = Pe_v \phi - \frac{\partial \phi}{\partial(y/\delta)}.$$

$Pe_u = u\delta/\Gamma$ y $Pe_v = v\delta/\Gamma$ son los números de Péclet¹ locales. Dada la similitud de ambas ecuaciones, se puede escribir de forma general el flujo adimensional:

$$J_\xi^* = \frac{J_\xi \delta}{\Gamma} = Pe_{u_\xi} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial(\xi/\delta)},$$

dónde ξ es cualquiera de las direcciones x o y . Si se considera que el valor de ϕ en la cara del volumen de control está dado por un promedio pesado de los valores que toma en los nodos i e $i + 1$, ϕ_i y ϕ_{i+1} , ϕ y el término $\partial(\phi)/\partial(x/\delta)$ es proporcional a la diferencia $\phi_{i+1} - \phi_i$ la ecuación anterior toma la forma

¹El número de Péclet es un número adimensional que relaciona la velocidad de advección y de difusión en un flujo.

$$J_{\xi}^* = (c\phi_i + (1 - c)\phi_{i+1})Pe_{u_{\xi}} - d(\phi_{i+1} - \phi_i) = B\phi_{\xi} - A\phi_{i+1}, \quad (3.10)$$

con c y d constantes y

$$A = d - (1 - c)Pe_{u_{\xi}} \quad y \quad B = cPe_{u_{\xi}} + d.$$

De la expresión anterior directamente se deduce la relación

$$B = A + Pe_{u_{\xi}}. \quad (3.11)$$

Al poner la relación anterior en términos de A y después en términos de B y sustituir en la ecuación (3.10) resultan

$$\begin{aligned} J_{\xi}^* &= (A(Pe_{u_{\xi}}) + Pe_{u_{\xi}})\phi_i - A(Pe_{u_{\xi}})\phi_{i+1} \\ &\implies J_{\xi}^* - Pe_{u_{\xi}}\phi_i = A(Pe_{u_{\xi}})(\phi_i - \phi_{i+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\xi}^* &= B(Pe_{u_{\xi}})\phi_i - (B(Pe_{u_{\xi}}) - Pe_{u_{\xi}})\phi_{i+1} \\ &\implies J_{\xi}^* - Pe_{u_{\xi}}\phi_{i+1} = B(Pe_{u_{\xi}})(\phi_i - \phi_{i+1}). \end{aligned}$$

Si se considera una dirección en particular y se evalúan estas relaciones en las caras posterior, p , y anterior, a , del volumen de control que contiene a ϕ_C respectivamente y se multiplican ambas ecuaciones por el factor Γ/δ_{α} , se encuentra

$$J_{p1} - u_{p1}\phi_C = \frac{\Gamma}{\delta_{p1}}A(Pe_{p1})(\phi_C - \phi_P), \quad (3.12)$$

$$J_{a1} - u_{a1}\phi_C = \frac{\Gamma}{\delta_{a1}}B(Pe_{a1})(\phi_A - \phi_C), \quad (3.13)$$

3.1. Discretización de las ecuaciones

41

donde el subíndice 1 se ha introducido para poner en claro que solo se ha considerado una dimensión. Para obtener la expresión para dos dimensiones se asume que estos valores son constantes sobre la cara del volumen de control correspondiente y se integra respecto a la dirección restante, dando como resultado:

$$J_p - u_p \phi_C A_p = \frac{\Gamma A_p}{\delta_p} A(Pe_p)(\phi_C - \phi_P), \quad (3.14)$$

$$J_a - u_a \phi_C A_a = \frac{\Gamma A_a}{\delta_a} B(Pe_a)(\phi_A - \phi_C), \quad (3.15)$$

en las que A_p y A_a son el área de las caras del volumen de control.

De las ecuaciones (3.14) y (3.15) se pueden deducir fácilmente las ecuaciones para J_x y J_y y generalizar el resultado para una tercera dimensión simplemente haciendo las sustituciones correspondientes,

$$J_e - F_e \phi_C = \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_e} A(Pe_e)(\phi_C - \phi_E), \quad (3.16)$$

$$J_o - F_o \phi_C = \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_o} B(Pe_o)(\phi_O - \phi_C), \quad (3.17)$$

$$J_n - F_n \phi_C = \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n)(\phi_C - \phi_N), \quad (3.18)$$

$$J_s - F_s \phi_C = \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s)(\phi_S - \phi_C). \quad (3.19)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) en la relación (3.9) se obtiene

$$a_C \phi_C = a_E \phi_E + a_O \phi_O + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b + (P_o - P_e) \Delta y \quad (3.20)$$

con

$$\begin{aligned}
 a_E &= \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_d} A(Pe_d), \\
 a_O &= \frac{\Gamma \Delta y}{\delta_o} B(Pe_o), \\
 a_N &= \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_n} A(Pe_n), \\
 a_S &= \frac{\Gamma \Delta x}{\delta_s} B(Pe_s), \\
 a_C &= a_E + a_O + a_N + a_S + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \\
 b &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_C^0 + \Delta x \Delta y Ri \theta_C.
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.20) es la expresión discreta de la ecuación general (3.4) y permite obtener una solución numérica.

Es fácil apreciar que, incluso en la forma discreta de la ecuación (3.4), el significado físico de cada uno de los coeficientes es claro. Los coeficientes a_E , a_O , a_N , y a_S representan el flujo producto de la difusión y la convección de la variable ϕ en las caras del volumen de control, el coeficiente b representa el término fuente de la variable ϕ y el término $(P_i - P_d)\Delta y$ da cuenta del forzamiento debido al gradiente de presión en x .

Otra característica importante de los coeficientes a_E , a_O , a_N , y a_S es que depende de los números de Péclet generalizados, de tal forma que cuando la variable ϕ se toma como una de las componentes de la velocidad, el término $a_k \phi$ resulta un término no lineal. La forma de tratar estos términos es iterativa. Para cada iteración se calculan los coeficientes a_k a partir de los valores de las velocidades encontrados en la iteración inmediata anterior. Así la ecuación (3.20) sigue siendo una ecuación lineal algebraica y se puede aplicar cualquier método conocido para resolver este tipo de ecuaciones.

Hasta este punto, aún cuando ya se ha encontrado una forma discreta de la ecuación (3.4), falta establecer la forma de los coeficientes $A(Pe_\xi)$ y $B(Pe_\xi)$. Para lo que debe tenerse en cuenta las propiedades simétricas de estos coeficientes.

Al invertir el sentido del sistema coordenado, Pe_ξ cambia de signo $-Pe_\xi$,

3.1. Discretización de las ecuaciones

43

y A y B intercambian sus papeles. Para que esto no altere los valores del flujo $A(Pe_\xi)$ y $B(Pe_\xi)$ deben estar relacionados de la siguiente forma

$$A(Pe_\xi) = B(-Pe_\xi), \quad (3.21)$$

$$B(Pe_\xi) = A(-Pe_\xi). \quad (3.22)$$

Las relaciones (3.21) y (3.22) hacen que sea suficiente evaluar la función $A(Pe_\xi)$ para valores positivos de Pe_ξ para determinar A y B para todos los valores posibles de Pe_ξ . Es posible demostrar lo anterior partiendo de la relación (3.11), considerando $Pe_\xi < 0$ y aplicando la relación (3.21), como se muestra a continuación

$$A(Pe_\xi) = B(Pe_\xi) - Pe_\xi = A(-Pe_\xi) - Pe_\xi = A(|Pe_\xi|) - Pe_\xi,$$

con lo que se hace evidente que las funciones $A(Pe_\xi)$ y $B(Pe_\xi)$ pueden expresarse en términos de $A(|Pe_\xi|)$ como sigue

$$A(Pe_\xi) = A(|Pe_\xi|) + [[-Pe_\xi, 0]] \quad (3.23)$$

$$B(Pe_\xi) = A(|Pe_\xi|) + [[Pe_\xi, 0]]. \quad (3.24)$$

En las dos relaciones anteriores se ha utilizado $[[A, B]]$ para referirse al máximo entre A y B .

Las diferentes formas que puede adoptar la función $A(|Pe_\xi|)$ resulta en diferentes esquemas de discretización. En la Tabla 3.1 se presentan algunos de los esquemas más populares.

En el desarrollo de este trabajo se ha elegido el esquema de ley de potencias,

$$A(|Pe|) = [[0, (1 - 0.1|Pe|)^5]], \quad (3.25)$$

Esquema	$A(Pe)$
Diferencia Central	$1 - 0.5 Pe $
Explicita descentrada	1
Híbrido	$[[0, 1 - 0.5 Pe]]$
Ley de Potencias	$[[0, (1 - 0.1 Pe)^5]]$
Exponencial	$ Pe /[\exp(Pe) - 1]$

Tabla 3.1. Función $A(|Pe|)$ para diferentes esquemas de discretización

porque es la mejor aproximación a la solución analítica de la ecuación estacionaria unidimensional que modela la convección y la difusión de la propiedad ϕ [25],

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right). \quad (3.26)$$

3.1.3. Las cuatro reglas básicas

De acuerdo con Patankar [25], existen cuatro reglas básicas que debe cumplir una ecuación discreta para asegurar su congruente sentido físico y sobre todo que cumpla con la condición de balance.

- **Consistencia de los flujos en las caras de los volúmenes de control.** El flujo que sale de un volumen de control debe igualar al que entra al siguiente volumen. En este sentido, una inconsistencia que se debe evitar es que Γ evaluado en el límite del volumen de control tenga valores distintos dependiendo del volumen de control considerado. Esto se logra evitando usar el valor Γ_C para evaluar el coeficiente Γ en o y e .
- **Coefficientes positivos.** Todos los coeficientes (a_C y los coeficientes de los puntos vecinos a_V) deben ser positivos. Lo cual no es arbitrario, está sostenido por un hecho físico. En los procesos convectivos y difusivos, un aumento en ϕ_V , donde V hace referencia a algún punto vecino,

3.2. Mallas escalonadas

45

debe conducir a un aumento en ϕ_C , lo que se consigue si y solo si los coeficientes a_i son todos positivos.

- **Linelizaci3n del t3rmino fuente con pendiente negativa.** Para evitar que el coeficiente a_C pueda adquirir un valor negativo. Cuando, en el problema existe un t3rmino fuente S , que se pueda escribir en forma lineal como $S = S_0 + S_1\phi_C$ se necesita imponer que S_1 sea menor que cero. Hecho que concuerda con el sentido f3sico del problema relacionado con la estabilidad del sistema considerado. El t3rmino fuente responde de forma negativa a los aumentos de temperatura, de lo contrario se tendr3a un sistema retroalimentado que se volver3a inestable al recibir aumentos de temperatura indiscriminadamente.
- **Suma de los coeficientes vecinos.** Si en la ecuaci3n diferencial original ϕ representa la variable dependiente, ambas funciones, ϕ y $\phi + C$ (donde C es una constante arbitraria), satisfacen la ecuaci3n diferencial correspondiente. Para obtener una buena soluci3n num3rica este hecho debe ser reproducido por la ecuaci3n discreta correspondiente, lo que se logra suponiendo que el valor del coeficiente a_C es igual a la suma de los coeficientes vecinos a_V .

3.2. Mallas escalonadas

Un problema importante, derivado del m3todo de discretizaci3n elegido, que puede conducir a soluciones f3sicamente err3neas est3 asociado a los t3rminos que involucran primeras derivadas.

Lo anterior puede ilustrarse f3cilmente considerando la contribuci3n del gradiente de presi3n $-\partial P/\partial x$ en la ecuaci3n discreta (3.20) dado por $P_o - P_e$.

Suponiendo una variaci3n lineal de la presi3n entre nodos adyacentes se obtiene que

$$P_o - P_e = \frac{P_O + P_C}{2} - \frac{P_C + P_E}{2} = \frac{P_O - P_E}{2}, \quad (3.27)$$

donde adicionalmente se ha supuesto que las caras o y e del volumen de control

se encuentran equidistantes y exactamente a la mitad de la distancia que separa al nodo central C de los nodos O y E respectivamente.

El resultado anterior expresa que las ecuaciones de cantidad de movimiento contendrán la información de las diferencias de presión entre dos nodos alternados de la malla y no entre nodos adyacentes, lo que tiene dos implicaciones. Por un lado la presión se calcula sobre una malla más gruesa en relación a la malla que realmente se está utilizando, lo que tiende a disminuir la precisión de la solución obtenida. Por otro lado, variaciones de importancia en el valor de la presión entre nodos, como aquéllas que pueden hacer que el cálculo numérico se vuelva inestable, no son percibidas por el algoritmo como variaciones importantes en el gradiente de presión. Por ejemplo, un campo de presiones como el que se muestra en la Fig. 3.4, en el que se establece una variación alternada de la presión entre nodos, es percibido por la ecuación discreta como si correspondiera a un gradiente de presión nulo. Un comportamiento muy similar se obtiene al discretizar la ecuación de continuidad sobre la misma malla.

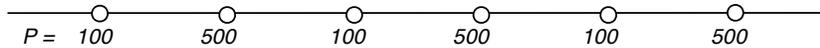


Figura 3.4. Ejemplo de un campo de presiones variable que es interpretado como un gradiente nulo por la aproximación (3.27).

La mejor solución a este inconveniente se obtiene reconociendo que no es necesario calcular todas las variables flujo sobre la misma malla de discretización. Se puede, si así se quiere o tiene un beneficio importante, utilizar diferentes mallas para cada variable dependiente.

En el caso de las componentes de la velocidad, en las que claramente se presenta esta dificultad, resulta ventajoso utilizar una malla de discretización diferente a aquélla que se utilice para todas las demás variables. Por supuesto, la ventaja que se obtiene es que los problemas descritos al inicio de esta sección desaparecen completamente.

La malla utilizada para superar esta dificultad recibe el nombre de malla desplazada o escalonada. Un esquema de este tipo de malla se presenta en la Fig. 3.5 en la que se aprecian los nodos para las velocidades escalonados

3.2. Mallas escalonadas

respecto a los nodos de la presión. En las mallas escalonadas, las presión se define en los nodos de la malla y las velocidades se especifican en las caras del volumen de control construido en torno a dichos nodos.

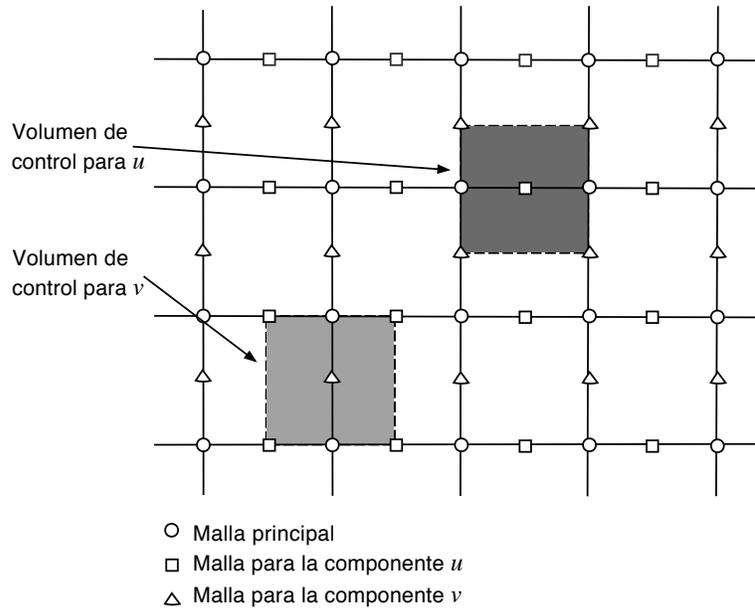


Figura 3.5. Mallas escalonadas.

De esta forma se evita tener que interpolar los valores para la presión en P_o y P_e pues en una malla escalonada el término $P_o - P_e$ se convierte en $P_C - P_E$, es decir, puntos en los que está definida la presión. Así las diferencias de presión entre dos nodos adyacentes de la malla se convierten en la fuerza que produce cambios en la componente de velocidad que se encuentra entre estos dos puntos, en consecuencia, perfiles para el campo de presiones como el que se muestra en la Fig. 3.4 puedan representarse correctamente.

Es posible darse cuenta que en un volumen de control típico (Fig. 3.2), la discretización de la ecuación de continuidad se expresa mediante la diferencia entre componentes de velocidad adyacentes. Mediante las mallas escalonadas únicamente campos de velocidades físicamente razonables tendrán las posibilidad de ser aceptables para la ecuación de continuidad.

3.3. Algoritmo SIMPLE

Para cumplir con los objetivos de este trabajo es necesario enfocarse en calcular el campo de velocidades donde se presenta un obstáculo importante, determinar el campo de presiones. Para un campo de presiones dado no existe ninguna dificultad en resolver las ecuaciones de momento lineal, pero la forma de obtener este campo de presiones no es directa, es claro que no se cuenta con una ecuación obvia mediante la cual se pueda determinar la presión.

El campo de presiones se encuentra indirectamente especificado vía la ecuación de continuidad. Cuando el campo de presiones *correcto* se sustituye en las ecuaciones de momento lineal, el campo de velocidades resultante satisface la ecuación de continuidad.

Sobre esta idea y en combinación con la discretización de la ecuación general (3.20), deducida en la sección anterior, se presenta el algoritmo SIMPLE utilizado en este trabajo para resolver el conjunto de ecuaciones (2.24)-(2.28); desarrollado por Patankar *et al.* durante la década de 1970 [25]. A pesar de haber sido desarrollado hace poco más de 40 años, es uno de los métodos de solución más utilizados en nuestros días. Esto se debe a que a lo largo de los años ha proporcionado resultados confiables utilizando recursos computacionales accesibles en tiempos razonables.

El nombre SIMPLE es el acrónimo en inglés de Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation y es un algoritmo de naturaleza iterativa que consta de siete pasos fundamentales:

1. Proponer un campo arbitrario de presión \tilde{p} .
2. Resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, en su forma discreta, y obtener los campos de velocidades \tilde{u}_i .
3. Resolver la ecuación de corrección para la presión p' , misma que se obtiene por medio de la ecuación de continuidad, a partir de \tilde{u}_i .
4. Corregir el campo de presión \tilde{p} con p' y obtener el campo de presión $p = \tilde{p} + p'$.
5. Corregir, vía la ecuación de continuidad y el campo de presión corregido p , los campos de velocidades \tilde{u}_i y determinar los nuevos campos de

3.4. Ecuaciones de corrección para la velocidad y la presión 49

velocidades u_i .

6. Resolver las ecuaciones discretas para otras cantidades físicas, por ejemplo la temperatura o concentraciones de especies químicas, en caso de que afecten el flujo. En caso contrario, es preferible resolver estas ecuaciones una vez que se ha declarado la convergencia para las componentes de velocidad del flujo.
7. Tratar el nuevo campo de presión p como un nuevo campo propuesto \tilde{p} y regresar al segundo paso. Es necesario repetir este procedimiento hasta que se obtenga convergencia en la solución.

3.4. Ecuaciones de corrección para la velocidad y la presión

A continuación, se derivan las ecuaciones de corrección para la presión y las velocidades analizando cómo afecta a la velocidad un cambio en la presión.

Primero se propone que la presión se obtiene de una expresión con la siguiente forma

$$P = P^* + P',$$

en donde P^* es la presión en la iteración anterior y P' es la corrección para la presión. De la misma forma, se propone que la velocidad se obtiene de una expresión similar

$$u_i = u_i^* + u_i'.$$

En esta expresión para la velocidad u_i^* es la velocidad obtenida en la iteración anterior y cumple la ecuación (3.20) haciendo $\phi = u_i^*$ y la presión $P = P^*$. De la misma forma se supone que u_i cumple la ecuación (3.20) con la presión P . A continuación se escriben ambas ecuaciones para la componente x ,

$$a_C u_C^* = a_E u_E^* + a_O u_O^* + a_N u_N^* + a_S u_S^* + b + (P_o^* - P_e^*) \Delta y,$$

$$a_C u_C = a_E u_E + a_O u_O + a_N u_N + a_S u_S + b + (P_o - P_e) \Delta y.$$

Al restar ambas ecuaciones se obtiene

$$a_C u'_C = a_E u'_E + a_O u'_O + a_N u'_N + a_S u'_S + b + (P'_o - P'_e) \Delta y.$$

Es posible despreciar las contribuciones de las velocidades vecinas, lo que se hace principalmente por conveniencia computacional, resultando ecuaciones algebraicas más manejables. Además, esto no afecta en ninguna forma la solución final, únicamente afecta la rapidez con la que se alcanza la convergencia de la solución. La palabra *Semi-Implicit* (semi-implícito) que conforma el nombre del algoritmo hace referencia a la omisión de estos términos.

De esta forma se tiene

$$u'_C = \frac{\Delta y}{a_C} (P'_o - P'_e),$$

y se encuentra la forma como se modifica la velocidad ante cambios en la presión

$$u_e = u_e^* + \frac{\Delta y}{a_e} (P'_O - P'_E). \quad (3.28)$$

La expresión para la componente en y se escribe como

$$v_n = v_n^* + \frac{\Delta x}{a_n} (P'_S - P'_N). \quad (3.29)$$

Las dos expresiones anteriores se han escrito en términos de mallas escalonadas (Fig. 3.5) para evitar que campos de presión y velocidad oscilantes, sean descritos de forma incorrecta.

Por último es necesaria una expresión para obtener la corrección de la presión P' . Con este fin se integra la ecuación de continuidad sobre el volumen de control seleccionado, Fig. 3.2

3.4. Ecuaciones de corrección para la velocidad y la presión 51

$$(u_e - u_o)\Delta y + (v_n - v_s)\Delta x = 0.$$

Al sustituir las expresiones correspondientes para las velocidades encontradas anteriormente (3.28) y (3.29) se encuentra

$$\left[\left(\frac{1}{a_e} + \frac{1}{a_o} \right) \Delta y^2 \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_s} \right) \Delta x^2 \right] P'_C = \frac{\Delta y^2}{a_e} P'_E + \frac{\Delta y^2}{a_i} P'_I + \frac{\Delta x^2}{a_n} P'_N + \frac{\Delta x^2}{a_s} P'_S - [(u_e^* - u_o^*)\Delta y + (v_n^* - v_s^*)\Delta x]. \quad (3.30)$$

Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3.20) y proporciona las correcciones al campo de presión para construir, vía procesos iterativos, el campo correcto. Lo anterior se vuelve más claro si se definen los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Delta y^2}{a_e}, \\ a_O &= \frac{\Delta y^2}{a_o}, \\ a_N &= \frac{\Delta x^2}{a_n}, \\ a_S &= \frac{\Delta x^2}{a_s}, \\ a_C &= a_E + a_O + a_N + a_S, \\ b &= -[(u_e^* - u_o^*)\Delta y + (v_n^* - v_s^*)\Delta x], \end{aligned} \quad (3.31)$$

que únicamente dependen de cantidades conocidas de la iteración inmediata anterior.

Cabe resaltar que el término fuente en la corrección de la presión, dado por b , es el negativo de la integral de la ecuación de continuidad sobre el volumen de control. Si b es cero, la velocidad encontrada en la iteración anterior junto con el campo de presiones satisfacen la ecuación de continuidad y no son necesarias más correcciones. Por lo tanto, b representa un término fuente de masa que la ecuación de corrección para la presión debe aniquilar. Debido a esta característica, este término fuente de masa es un buen parámetro para juzgar la convergencia de la solución en el proceso iterativo del algoritmo.

3.5. Condiciones de frontera

En el problema de determinar el campo de flujo de un fluido, normalmente existen dos clases de condiciones de frontera:

- Se conoce la presión en la frontera y se desconocen las velocidades.
- Se especifica la componente normal de la velocidad en la frontera.

En el primer caso, se debe diseñar una malla de modo que en la frontera se tengan nodos dónde se especifica la presión de tal forma que la presión de la iteración anterior sea $P^* = P_{frontera}$ por lo que la corrección de la presión en ese punto es $P' = 0$.

En el otro caso, mismo que tiene lugar en este trabajo, se diseña una malla de forma que la frontera coincida con la cara del volumen de control. Por ejemplo en la Fig. 3.6 se conoce la velocidad u_e , de modo que en la ecuación de corrección de la presión (3.30) no aparece el término P'_E ($a_E = 0$).

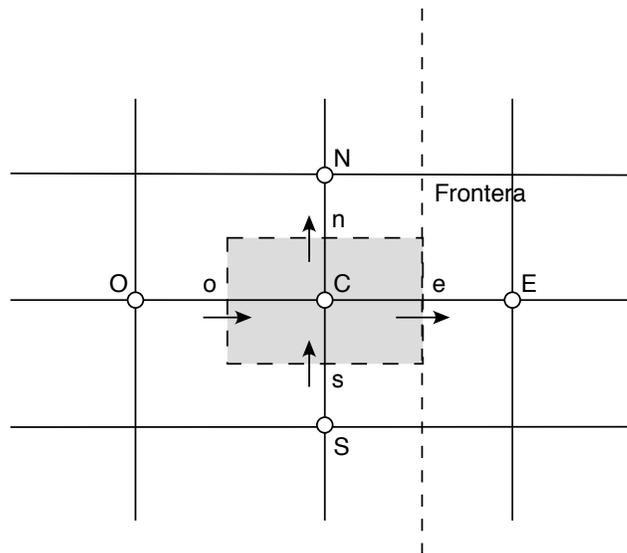


Figura 3.6. Volumen de control en la frontera para la ecuación de continuidad.

3.6. Generación del espacio computacional

Un aspecto relevante y primer paso a seguir antes de poder obtener una solución numérica de las ecuaciones que describen el problema físico que se plantea, es la generación de una malla computacional. Una malla bien construida y adaptada al problema que se intenta resolver se traduce en una solución convergente más exacta a un costo computacional menor.

Sobre esta, idea el problema tratado plantea la necesidad de utilizar una malla muy nutrida cerca de las paredes en las que se encuentran las placas calientes y donde los cambios en las velocidades son grandes. Debido a que las paredes de la cavidad tienen propiedades térmicas finitas, basta con utilizar una malla regular para calcular la conducción sobre ellas.

De acuerdo con el esquema de mallas escalonadas descrito, es necesario generar tres mallas regulares en las paredes de la cavidad pero irregulares en la parte interna que contiene al fluido. La parte irregular de la malla debe ser muy nutrida cerca de las paredes y perder finura lejos de las placas calientes.

Las mallas utilizadas en este trabajo constan de 84 nodos en la dirección horizontal y 184 en la dirección vertical, de los cuales 10 nodos se destinaron a las paredes sólidas (Fig. 3.7). Las mallas se generaron mediante las funciones de transformación de coordenadas (3.32) y (3.33) deducidas a partir de los conceptos del método perturbativo capa límite para resolver ecuaciones diferenciales [26]. Los detalles para obtener estas funciones pueden consultarse en [27] y [28].

$$x = x_c \left(1 - \frac{\sinh(m_x[\bar{x} - B])}{\sinh(m_x B)} \right) \quad (3.32)$$

$$y = \frac{1}{2} + m_y \left(\bar{y} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(1 - m_y) \operatorname{erf}(k_y[\bar{y} - 1/2])}{2 \operatorname{erf}(k_y/2)}, \quad (3.33)$$

con

$$B = \frac{1}{2m_x} \ln \frac{1 + (\exp(m_x) - 1)(x_c/L^*)}{1 + (\exp(-m_x) - 1)(x_c/L^*)}.$$

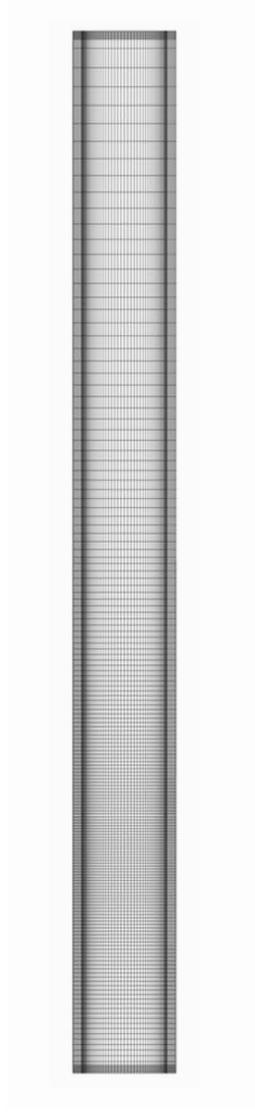


Figura 3.7. Malla principal.

En estas expresiones, $x_c = 2.5$ es el punto donde la malla es más fina, \bar{x} e \bar{y} son puntos uniformemente distribuidos del intervalo $[0, 1]$, erf es la función error y m_x , m_y y k_y son los parámetros de empaquetamiento de la malla. Los valores empleados para generar las mallas fueron: $m_x = 4$, $m_y = 0.15$ y $k_y = 5$.

3.7. Relajación y convergencia de las soluciones

En los métodos iterativos para la solución de ecuaciones algebraicas y en los algoritmos iterativos empleados para el manejo de la no linealidad de las ecuaciones, es conveniente acelerar o desacelerar los cambios en la variable dependiente entre una iteración y otra. Este proceso se conoce como sobre- o bajo-relajación. Por ejemplo, en el método de Gauss-Sidel, punto a punto, se suele utilizar la sobre-relajación para acelerar el proceso de convergencia de la solución resultando en el método conocido como sobre-relajaciones sucesivas. Por el contrario, es usual usar la bajo-relajación para evitar la divergencia en la soluciones de problemas no-lineales complejos.

Existen varias formas de introducir la sobre- o bajo-relajación. La forma como se introduce en este trabajo consiste en considerar la forma reducida de la ecuación (3.20)

$$a_C \phi_C = \sum a_{NB} \phi_{NB} + b \quad (3.34)$$

donde el subíndice NB hace referencia a todos los puntos vecinos al punto C y en el término fuente b se ha incluido el término de forzamiento dado por la diferencia de presiones.

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\phi_C = \frac{\sum a_{NB} \phi_{NB} + b}{a_C}.$$

Sea ϕ_C^* el valor de ϕ en la iteración anterior, sumando y restando este valor se obtiene:

$$\phi_C = \phi_C^* + \left(\frac{\sum a_{NB} \phi_{NB} + b}{a_C} - \phi_C^* \right).$$

El término entre parentesis corresponde al cambio de ϕ_C respecto a la iteración previa. Este cambio se puede modificar introduciendo un factor de relajación α de la siguiente manera:

$$\phi_C = \phi_C^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{NB} \phi_{NB} + b}{a_C} - \phi_C^* \right).$$

o

$$\frac{a_C}{\alpha} \phi_C = \sum a_{NB} \phi_{NB} + b + (1 - \alpha) \frac{a_C}{\alpha} \phi_C^*. \quad (3.35)$$

Es importante notar que cuando se obtiene una solución convergente, es decir $\phi_C = \phi_C^*$, la ecuación (3.35) implica que los valores de convergencia de ϕ satisfacen la ecuación original (3.34).

Cuando $0 < \alpha < 1$ se tiene bajo-relajación; es decir, los valores de ϕ_C son muy cercanos a ϕ_C^* . Cuando $\alpha > 0$ se tiene sobre-relajación.

No existen reglas generales para determinar el valor de α . Usualmente sus valores óptimos se obtienen con base en la experiencia y de analizar el comportamiento del código computacional.

3.8. Implementación del algoritmo

Para resolver las ecuaciones discretas que modelan el movimiento de un fluido de Boussinesq se desarrollaron códigos en lenguaje Fortran 90 paralizados por medio del estándar OpenMP (Open Multi Processing).

Los códigos resuelven las ecuaciones algebraicas –ecuación (3.20)– vía el algoritmo de matrices tridiagonales TDMA y un barrido línea por línea. El barrido se lleva a cabo primero en la dirección x y después en la dirección y .

Los campos de velocidad, presión y temperatura se construyen de forma iterativa siguiendo el algoritmo SIMPLE descrito anteriormente. Los parámetros empleados en la relajación de las soluciones para la presión, velocidad y temperatura varían pero están próximos a $\alpha_P \approx 0.58$, $\alpha_u \approx 0.52$ y $\alpha_\theta \approx 0.95$, respectivamente, declarando la convergencia de las soluciones en cada paso de tiempo bajo el criterio $b < 1 \times 10^{-10}$ para el término fuente de masa de la ecuación para la corrección de la presión (3.30). Al mismo tiempo debe cum-

3.9. Validación del código computacional

57

plirse que el residuo, Res_ϕ , de la solución sea menor que 1×10^{-8} para declarar una solución convergente.

Se utilizaron tres mallas distintas, de acuerdo con el esquema de mallas escalonadas, generadas como se ha detallado anteriormente. Una malla principal se utiliza para calcular la presión y la temperatura, y dos mallas escalonadas con respecto a la principal son empleadas en el cálculo de las componentes de la velocidad.

Es importante señalar que las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de energía se resuelven en todo el dominio de definición del problema, por lo que se vuelve necesario diferenciar entre los puntos que corresponden a las paredes sólidas y aquellos que corresponden al fluido. Esto se logra utilizando distintos valores para la viscosidad, $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ en el fluido y $\nu = 10^{50}$ en el sólido. El cambio en la viscosidad provoca que en el sólido el valor de las velocidades sea cero, como consecuencia la ecuación de energía para el fluido se convierte en la ecuación de energía para el sólido.

3.9. Validación del código computacional

El código se validó resolviendo el flujo en una cavidad cuadrada, en la que la pared izquierda se mantiene a una temperatura $\theta = 1$, la pared opuesta a una temperatura $\theta = 0$ y el techo y la base son superficies adiabáticas. Fueron considerados tres valores del número de Rayleigh, $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ y se calculó el número de Nusselt promedio en el estado estacionario. Los resultados se comparan con los reportados por De Vahl Davis [29] en la Tabla 3.2.

También se realizó un análisis de independencia de malla con dos mallas distintas, una de 84×184 y otra de 180×250 nodos. Se claculó el número de Nusselt promedio para $Ra = 10^6$. Los resultados se presentan en la Fig. 3.8 en la que no se aprecian variaciones significativas.

	$Ra = 10^4$	10^5	10^6
Presente estudio	2.247	4.549	8.817
De Vahl Davis	2.243	4.519	8.799

Tabla 3.2. Número de Nusselt promedio calculado en este estudio y el reportado en un de los varios *benchmarks* encontrados en la literatura [29].

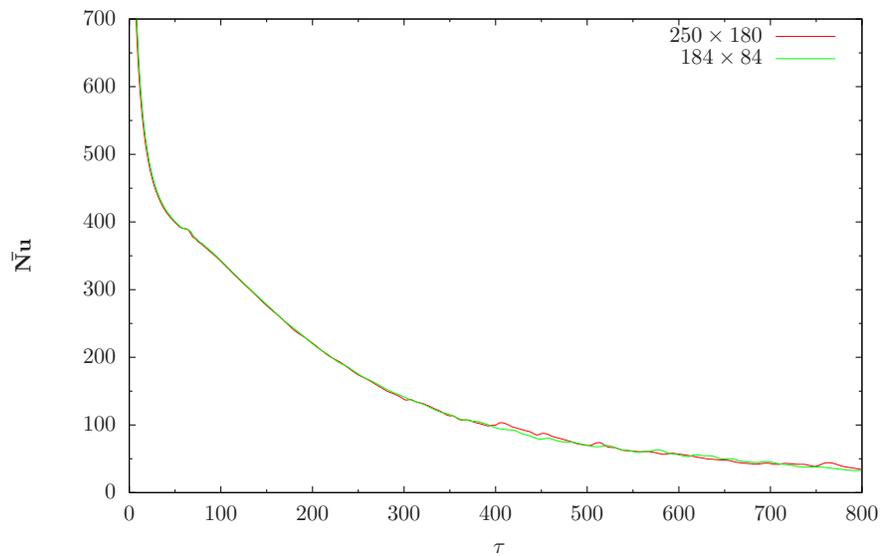


Figura 3.8. Comparación del número de Nusselt calculado con dos mallas distintas para $Ra = 10^6$.

Capítulo 4

Resultados

El problema presentado está gobernado por un conjunto grande de parámetros adimensionales independientes, el número de Rayleigh Ra , el número de Prandtl Pr , la relación entre las difusividades y conductividades térmicas del sólido y el fluido $\alpha = \kappa_s/\kappa_l$ y $K = k_s/k_f$, respectivamente, la relación de aspecto de la cavidad $AR = L/H$, la posición y tamaño de las fuentes de calor y el espesor de las paredes conductoras h .

Con base en el objetivo de este trabajo y de acuerdo a su significado físico, se adoptaron valores constantes para el número de Prandtl $Pr = 7$; relación entre difusividades y conductividades térmicas de $\alpha = 600$ y $K = 600$, valores aproximados a aquellos que corresponden a un sistema formado por agua y aluminio; relación de aspecto $AR = 12$; tamaño y posición de las fuentes de calor $l = H$ $L_1 = 2H + h$; espesor de las paredes $h = 0.1$; centrandó la atención en los efectos resultantes de considerar distintos valores del parámetro de flotación. En la Tabla 4.1 se listan los valores de los parámetros de estudio.

Espesor h	Número de Rayleigh Ra
0.1	10^4 , 10^5 y 10^6

Tabla 4.1. Valores de los parámetros de estudio.

Para analizar las respuestas locales del sistema, los resultados se reportan a través de las isotermas; perfiles de producción de entropía; promedio transversal de la temperatura en el fluido para cinco alturas distintas calculado de acuerdo con la relación

$$\tilde{\theta}_f(y, t) = \int_h^{h+1} \theta_f dx. \quad (4.1)$$

En los casos en los que el sistema pierde la simetría se calculó el primer momento de la distribución de temperaturas transversal (centroide de temperatura) $\tilde{x}(y, t)$ definido como

$$\tilde{x}(y, t) = \frac{\int_h^{h+1} x \theta_f dx}{\tilde{\theta}_f(y, t)}. \quad (4.2)$$

El flujo de calor se reporta a partir del número de Nusselt promedio alrededor de cada fuente. La expresión (2.39) toma la forma

$$\bar{N}u_f(t) = (-1)^n \int_{h+L_1}^{h+L_1+1} \frac{\partial \theta_f}{\partial x} \Big|_{x=x_n} dy \quad \text{en el fluido,} \quad (4.3)$$

donde $n = 1, 2$ y hace referencia a la fuentes de calor ubicadas en las paredes izquierda y derecha, respectivamente.

$$\bar{N}u_s(t) = K \frac{(-1)^m}{h} \int_0^h \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \Big|_{y=y_m} dx \quad \text{en el sólido fuente izquierda,} \quad (4.4)$$

$$\bar{N}u_s(t) = K \frac{(-1)^m}{h} \int_{h+1}^{2h+1} \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \Big|_{y=y_m} dx \quad \text{en el sólido fuente derecha,} \quad (4.5)$$

en ambas expresiones m hace referencia a la parte alta y baja del suministro de calor. En total se calcularon seis aportes distintos al flujo de calor, tres por cada fuente, por lo que el flujo de calor total al sistema Nu_T es el resultado de sumar las seis contribuciones.

También se ha calculado la temperatura promedio tanto en las paredes $\bar{\theta}_s$ como en el fluido $\bar{\theta}_f$ para obtener una comparación relativa del flujo de energía en ambas partes.

$$\bar{\theta}_f(t) = \frac{\int_h^L \int_h^H \theta_f \, dxdy}{\int_h^L \int_h^H \, dxdy}. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_s(t) = & \int_0^h \int_0^{1+2h} \theta_s \, dxdy + \int_h^{L_1} \int_0^h \theta_s \, dxdy + \int_{h+L_1+1}^{h+L_1} \int_0^h \theta_s \, dxdy \\ & + \int_{h+L_1}^{2h+L_1} \int_0^{1+2h} \theta_s \, dxdy + \int_h^{L_1} \int_{h+1}^{2h+1} \theta_s \, dxdy + \int_{h+L_1+1}^{h+L_1} \int_{h+1}^{2h+1} \theta_s \, dxdy \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_s(t) = & \int_0^h \int_0^{1+2h} \, dxdy + \int_h^{L_1} \int_0^h \, dxdy + \int_{h+L_1+1}^{h+L_1} \int_0^h \, dxdy \\ & + \int_{h+L_1}^{2h+L_1} \int_0^{1+2h} \, dxdy + \int_h^{L_1} \int_{h+1}^{2h+1} \, dxdy + \int_{h+L_1+1}^{h+L_1} \int_{h+1}^{2h+1} \, dxdy \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\bar{\theta}_s(t) = \frac{\tilde{\theta}_s}{\tilde{A}_s} \quad (4.9)$$

Por último, se incluye la producción de entropía promedio en toda la cavidad como medida del grado de irreversibilidad del proceso calculado de acuerdo con la siguiente expresión

$$\bar{\sigma}_q(t) = \frac{\int_0^{L+2h} \int_0^{H+2h} \sigma_q \, dxdy}{\int_0^{L+2h} \int_0^{H+2h} \, dxdy}. \quad (4.10)$$

Cabe señalar que para establecer una relación clara entre resultados, en algunos casos es preferible utilizar el tiempo adimensional convectivo definido como $\tau = \sqrt{(RaPr)} \, t$. Esto resulta conveniente al comparar las respuestas globales del sistema.

Respuestas locales del sistema

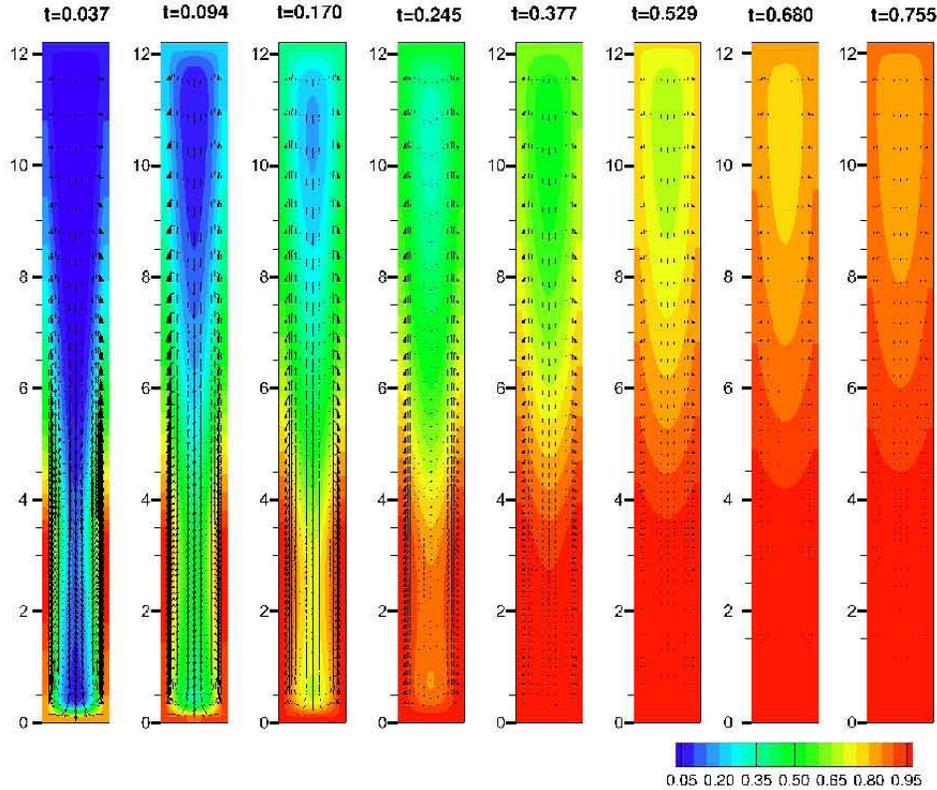


Figura 4.1. Evolución del campo de temperatura para $Ra = 10^4$. Se forman dos regiones de recirculación simétricas frente a las fuentes de calor cuya altura aumenta conforme incrementa la temperatura en las paredes. La forma de la isoterma indica que la difusión domina la transferencia de calor. El proceso es simétrico en todo el intervalo de tiempo.

La Fig. 4.1 muestra la evolución del campo de temperaturas cuando $Ra = 10^4$. En ella se aprecia que la difusión domina la transferencia de calor. Desde los primeros instantes se forman dos zonas de recirculación simétricas respecto al eje de simetría de la cavidad y frente a las fuentes de calor, cuya altura aumenta conforme incrementa la temperatura en las paredes. La contribución al flujo de calor por convección no es lo suficientemente grande para provocar un aumento significativo de la temperatura en la parte superior de la cavidad, la cual se calienta por efectos difusivos a lo largo de la pared como puede

verse a partir de la evolución de la forma de las isothermas presentadas. Para este número de Rayleigh, la rapidez a la que se transfiere calor en el sólido es mucho mayor que la rapidez a la que se transfiere calor por efectos convectivos dentro del fluido. Lo anterior permite la acumulación de energía en la parte media de la cavidad a la altura de las placas. Parte de esta energía se desplaza hacia abajo en el fluido por efecto de la corriente descendente, mientras que otra parte es llevada hacia arriba por convección y la mayor parte de la energía se transfiere sobre las paredes hacia la parte alta de la cavidad. Lo anterior promueve el aumento rápido de la temperatura en la zona cercana a las placas calientes, siendo prácticamente 1 a $t \approx 0.37$. Una vez que la parte baja se ha calentado totalmente el flujo de calor hacia la parte es por difusión.

En la Fig. 4.2 se ha graficado el promedio transversal de la temperatura adimensional del fluido como función del tiempo adimensional t para cinco alturas distintas: $y = 0.96, 2.70, 5.24, 7.65$ y 10.90 . Aquí se pone de manifiesto

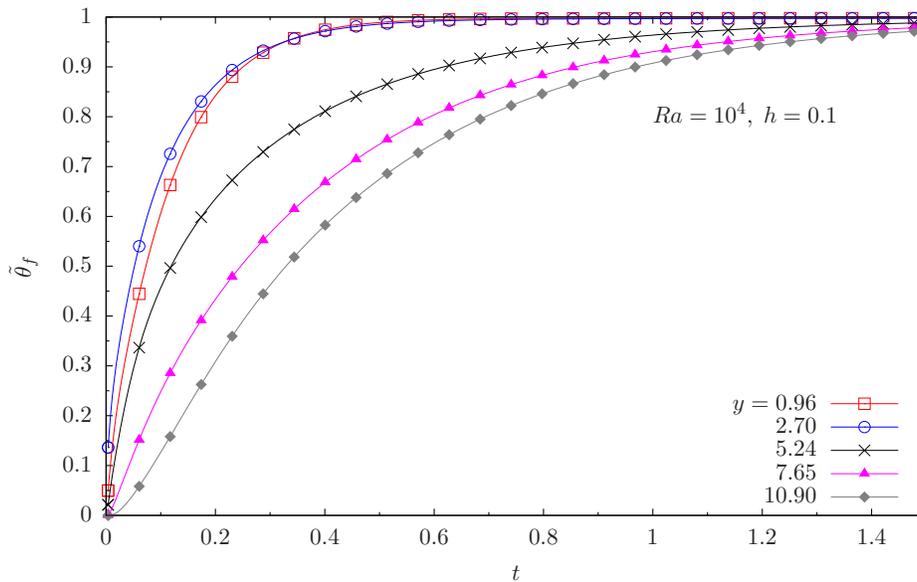


Figura 4.2. Promedio transversal de la temperatura adimensional del fluido como función del tiempo adimensional en cinco alturas distintas $y = 0.96, 2.70, 5.24, 7.65$ y 10.90 para $Ra = 10^4$ y $h = 0.1$. Se pone de manifiesto que el proceso es básicamente uniforme y difusivo con una mayor acumulación de energía en la parte baja de la cavidad.

que el sistema conserva la simetría en todo el intervalo de tiempo junto con el proceso de difusión uniforme. También se observa que la energía se acumula rápidamente en la zona media entre las fuentes de calor, $y \approx 2.70$, y la parte baja de la cavidad, $y \approx 0.96$, cuya temperatura aumenta prácticamente al mismo ritmo por efecto de las paredes laterales y su cercanía con la base de la cavidad.

En relación con la producción de entropía, la Fig. 4.3 muestra la evolución del campo de producción de entropía en la cavidad. En el sólido las curvas son prácticamente paralelas debido a que todo el calor se transfiere por difusión.

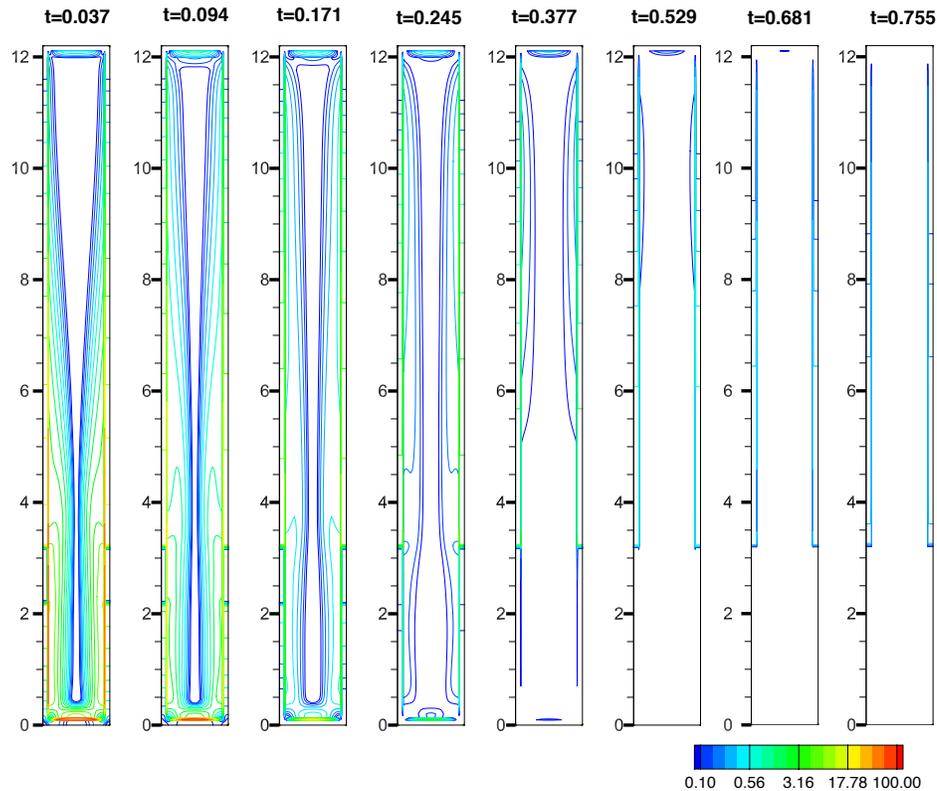


Figura 4.3. Evolución de la producción de entropía para $Ra = 10^4$. Los mayores aportes a la producción de entropía se localizan en la interfaz sólido-fluido. La producción disminuye y es prácticamente cero, al interior del fluido cerca del eje de simetría de la cavidad.

En el fluido la mayor cantidad de calor se transfiere por difusión desde las paredes y es precisamente en la interfaz sólido-fluido en donde los aportes a la producción de entropía también son altos. La producción de entropía disminuye, y es prácticamente cero, al interior del fluido cerca del eje de simetría de la cavidad.

Dada la relación que existe entre flujo de calor y producción de entropía, los valores más grandes para la producción de entropía se alcanzan en las zonas donde se dan los máximos de flujo de calor, es decir, donde los gradientes de temperatura son mayores. Como es de esperarse, de acuerdo a los patrones de flujo de calor y la evolución de las isoterms descritos anteriormente, los valores más grandes en la producción de entropía tienen lugar en los primeros instantes de tiempo frente a las fuentes de calor y en la parte media de la pared inferior. La zonas de producción de entropía se extienden hacia la parte superior de la cavidad al ritmo con el que fluye calor por las paredes y desaparecen conforme aumenta la temperatura.

Al aumentar el número de Rayleigh, $Ra = 10^5$ Fig. 4.4, la convección cobra un papel más importante. Se forman dos zonas de recirculación simétricas frente a las fuentes de calor que desplazan fluido caliente hacia arriba, cerca de las paredes, y fluido frío hacia abajo, a lo largo del eje de simetría de la cavidad. La rapidez con la que se transfiere calor por convección dentro del fluido es comparable a la velocidad de difusión sobre las paredes. El fluido que sube se encuentra a su paso con capas de fluido frío de densidad mayor que lo desvían ligeramente a la parte media de la cavidad, aquí el flujo descendente traslada parte de la energía del flujo ascendente hacia abajo. Al mismo tiempo, conforme la temperatura de las paredes conductoras aumenta, el frente de fluido de temperatura mayor se desplaza hacia arriba alimentado por el flujo de calor de las paredes hacia el fluido. Este proceso tiende a homogeneizar la temperatura del fluido en la parte alta y baja de la cavidad cercana al eje de simetría, como puede verse en la segunda imagen de la Fig. 4.4.

Para $t \approx 0.179$, la diferencia de temperaturas entre la pared y el fluido en la parte alta de la cavidad es mucho menor que la que existe en la parte inferior. Esto produce un flujo intenso de calor de las paredes hacia el fluido en la parte baja de la cavidad. Dicho flujo de calor, combinado con la energía transportada hacia abajo por la corriente descendente, provocan un aumento más rápido en la temperatura en esta zona.

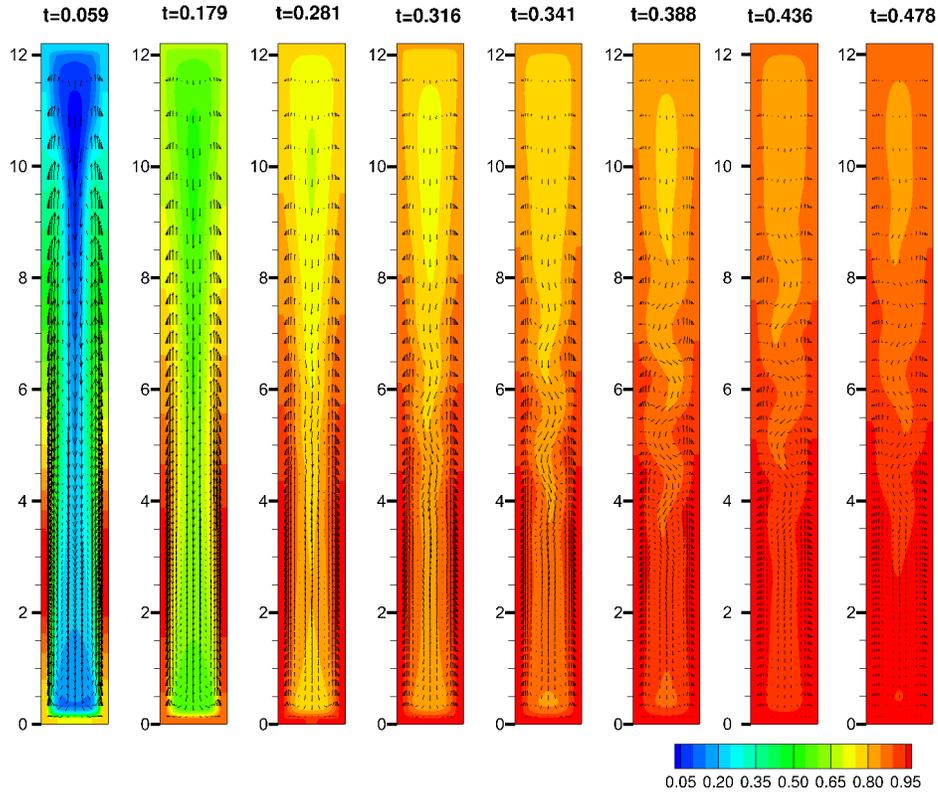


Figura 4.4. Evolución del campo de temperaturas para $Ra = 10^5$. La rapidez con la que se transfiere calor por convección dentro del fluido es comparable a la velocidad de difusión sobre las paredes. Se forman dos zonas de recirculación simétricas frente a las fuentes de calor pero la diferencia de temperatura entre la parte alta y baja de la cavidad al tiempo $t \approx 0.281$ propicia la perturbación del fluido y se dispara la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz con el sucesivo desprendimiento de vórtices.

Producto de la diferencia considerable entre las temperaturas de la parte alta y baja de la cavidad (tercera imagen de la Fig. 4.4) la corriente descendente se encuentra a su paso con fluido de densidad y velocidad considerablemente menores provocando que, dicha corriente, se desvíe ligeramente y cause una perturbación que dispara la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz y el desprendimientos de vórtices de las zonas cercanas a las regiones calientes. Con el tiempo la intensidad de los vórtices disminuye conforme aumenta la temperatura en la cavidad. Un acercamiento a la cavidad, en la zona comprendida entre $y \in (3, 6)$ para cuatro tiempos adimensionales distintos, se presentan en

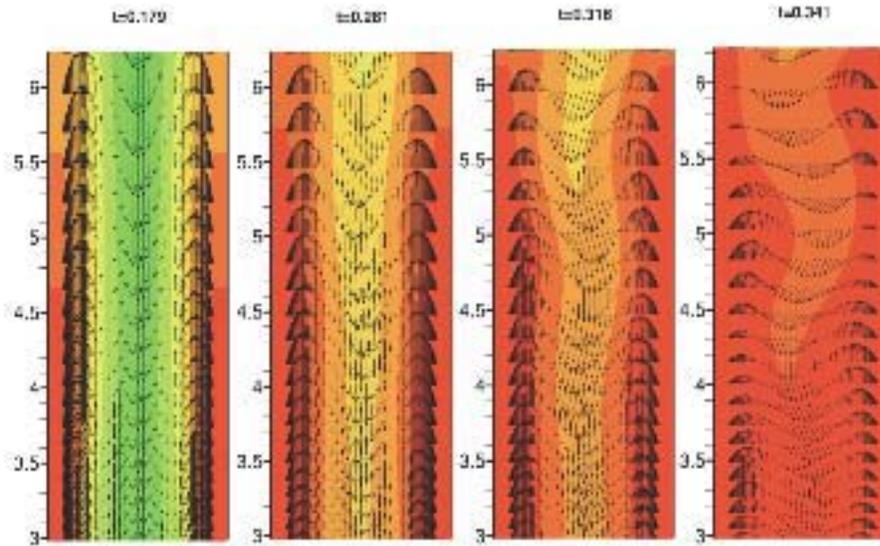


Figura 4.5. Acercamiento a la cavidad, en la zona comprendida entre $y \in (3, 6)$ para cuatro tiempos adimensionales distintos con $Ra = 10^5$. En ella se observa claramente el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz.

la Fig. 4.5. En ella se observa como una perturbación en el seno del fluido, debida a la diferencia de velocidades entre las capas de fluido, se amplifica en el tiempo y deriva en la pérdida de simetría del sistema.

La Fig. 4.6 ilustra el promedio transversal de la temperatura adimensional como función del tiempo adimensional t para diferentes posiciones de la coordenada longitudinal. Es posible apreciar que los flujos de calor por convección disminuyen las diferencias de temperatura a lo largo de la cavidad, es decir, contribuyen a homogeneizar la temperatura en el fluido logrando que a $t \approx 0.12$ las temperaturas de la parte alta, $y \approx 11$, y baja, $y \approx 1$, sean prácticamente iguales. Por otro lado, también muestra que en los primeros instantes de tiempo, $t < 0.2$, el flujo de calor máximo tiene lugar arriba de las fuentes de calor $y \approx 5$. Para tiempos mayores el desprendimiento de vórtices promovido por la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz disminuye ligeramente el flujo de calor en esta región.

A pesar de que la evolución de las isotermas revelan la inestabilidad del flujo y el desprendimiento de vórtices hacia la parte alta de la cavidad, sus

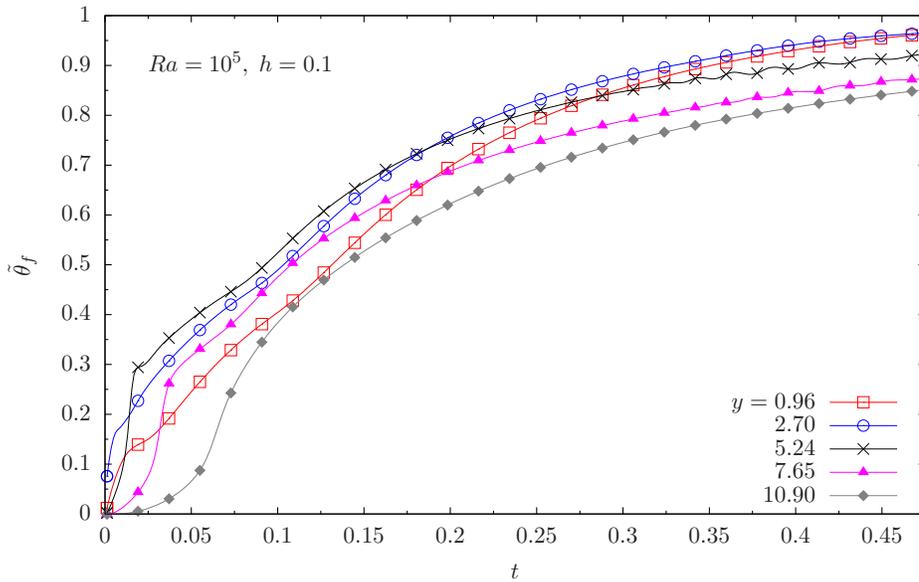


Figura 4.6. Promedio transversal de la temperatura adimensional del fluido como función del tiempo adimensional en cinco alturas distintas $y = 0.96, 2.70, 5.24, 7.65$ y 10.90 con $Ra = 10^5$. Los aportes convectivos al flujo de calor tienden a homogeneizar la temperatura del fluido.

aportes al flujo de calor son bajos comparados con los aportes difusivos, lo que explica el comportamiento suave de todas las curvas en la gráfica Fig. 4.6.

Es posible describir de forma más exacta la pérdida de simetría, utilizando el primer momento de la distribución de temperaturas transversal como función del tiempo adimensional t Fig. 4.7. Para una altura dada y los valores positivos de $\tilde{x}(y, t) - 0.6$ representan vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj. Esta gráfica pone de manifiesto que el sistema pierde la simetría en $y \approx 5$ al tiempo $t \approx 0.22$ aproximadamente. En este instante de tiempo se produce una perturbación que se amplifica con el tiempo originando desprendimientos de vórtices desde las zonas próximas a las fuentes de calor con una frecuencia bien definida. Con el tiempo, el desprendimiento se intensifica hasta $t \approx 0.36$ y posteriormente disminuye conforme aumenta la temperatura en toda la cavidad.

La evolución del campo de producción de entropía se muestra en la Fig. 4.8.

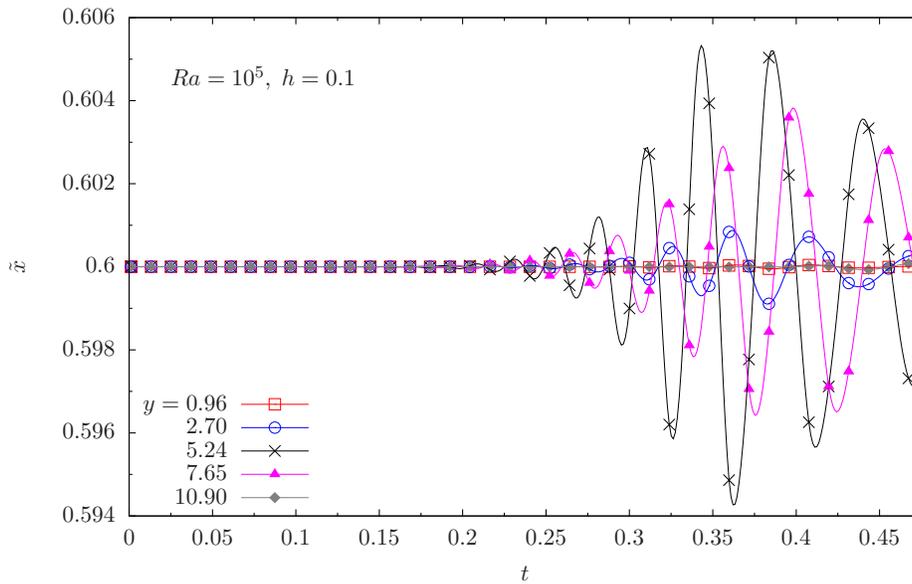


Figura 4.7. Centroide térmico para $Ra = 10^5$ como función del tiempo en diferentes alturas. El sistema pierde la simetría en $y \approx 5.24$ al tiempo $t \approx 0.22$. Para una altura dada y los valores positivos de $\tilde{x}(y, t) - 0.6$ representan vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Al igual que en el caso anterior, las zonas de mayor producción de entropía se localizan frente a las fuentes de calor y en la base de la cavidad extendiéndose hacia la parte alta al ritmo que fluye calor por las paredes laterales. Por otro lado, debido a que los aportes convectivos al flujo de calor son considerables, aparecen dos frentes de producción de entropía al interior del fluido, entre $x = 6$ y $x = 8$, como lo muestra la primera imagen de la Fig. 4.8, que se desplazan en dirección de la tapa de la cavidad. La producción de entropía cerca de las paredes en esta región es baja debido a que el gradiente de temperatura es pequeño. Conforme la temperatura de la cavidad aumenta, las zonas de producción de entropía se vuelven menos intensas y comienzan a desaparecer. Al tiempo en que ocurre la inestabilidad en el sistema, las curvas de entropía al interior del fluido se deforman y se rompen al ritmo al que se lleva acabo el desprendiendo de vórtices.

Para el número de Rayleigh alto, $Ra = 10^6$, el efecto de las fuerzas de flotación es más fuerte y promueve patrones de flujo distintos. En los primeros

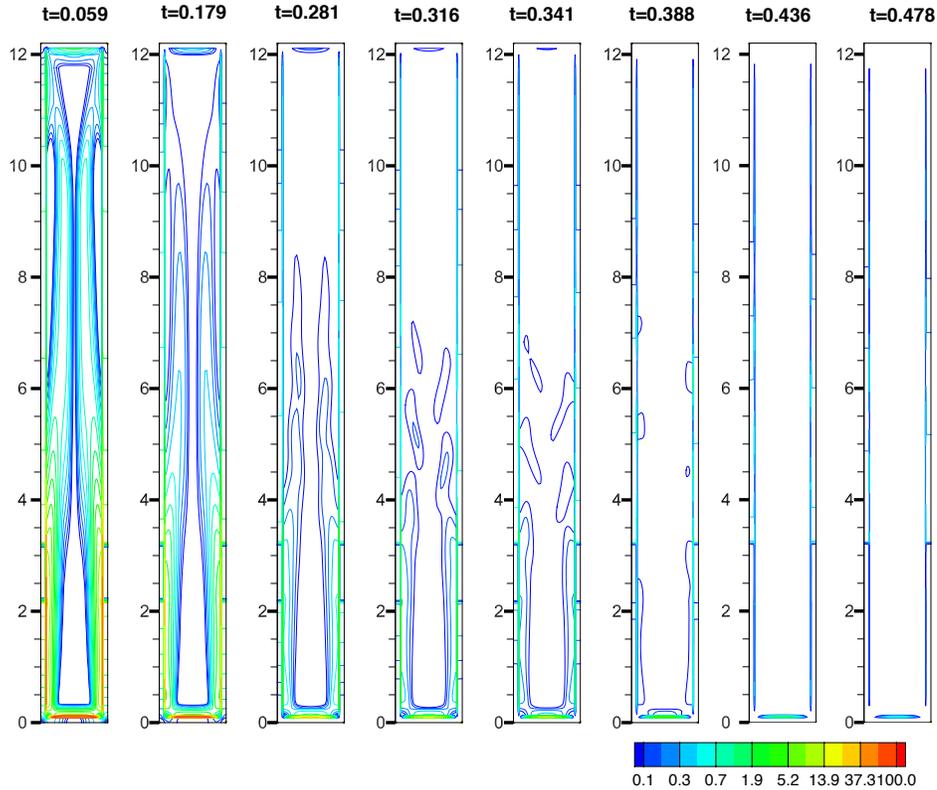


Figura 4.8. Evolución del campo de producción de entropía para $Ra = 10^5$. Es frente a las fuentes de calor y en la base de la cavidad en donde se produce la mayor cantidad de entropía. Aparecen dos frentes de producción de entropía al interior del fluido, entre $x = 6$ y $x = 8$, y crecen hacia la parte alta. Al tiempo en que ocurre la inestabilidad en el sistema, las curvas de entropía al interior del fluido se deforman y se rompen al ritmo al que se lleva acabo el desprendiendo de vórtices.

instantes de tiempo, $t < 0.37$, dos vórtices simétricos se forman frente a las fuentes de calor. Los efectos conjugados de la convección y la conducción en las paredes concentran energía en dos pequeñas zonas simétricas en la parte alta de las estructuras vorticosas. La altura de las zonas de recirculación aumenta conforme aumenta la temperatura en las paredes laterales desplazando las zonas de concentración de energía hacia arriba. Parte de esta energía es llevada hacia abajo por la corriente que desciende, aumentando la temperatura en la parte baja de la cavidad, como se ve en la primera imagen de la Fig. 4.9.

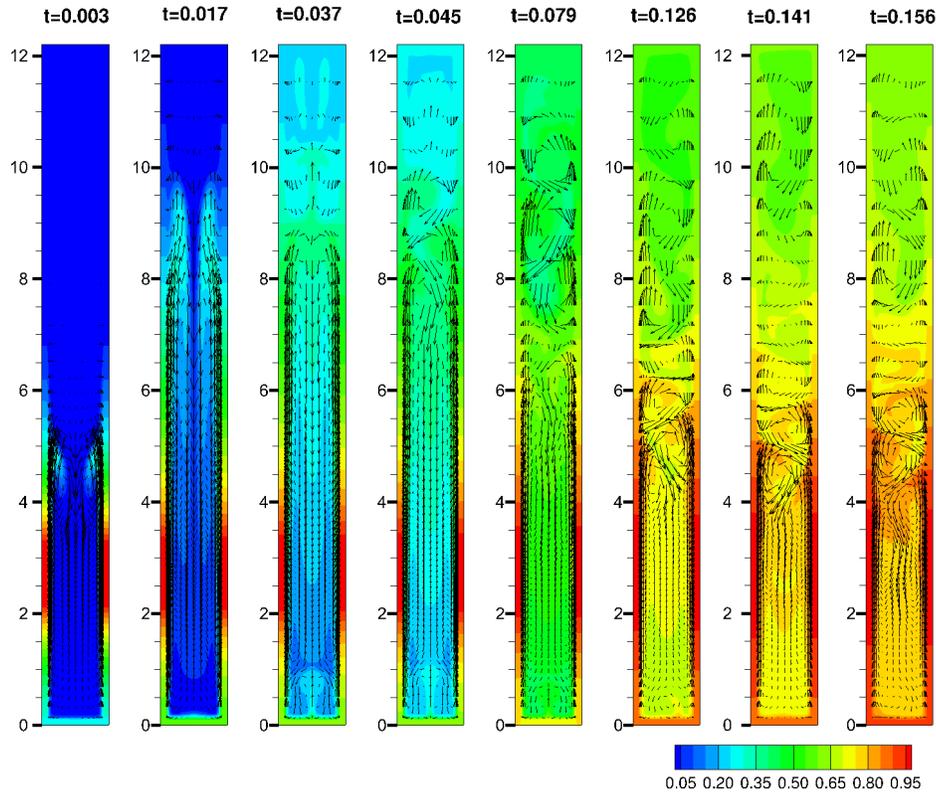


Figura 4.9. Evolución del campo de temperaturas para $Ra = 10^6$. Inicialmente aparecen dos zonas recirculación enfrente de las fuentes de calor. Los efectos conjugados de la convección y la conducción en las paredes promueven zonas de concentración de energía que dan lugar a nuevas zonas de recirculación no presentes en los casos anteriores. Esto conduce al sistema a una configuración de vórtices inestable y finalmente al rompimiento de la simetría.

Las concentraciones de energía en la parte alta de los vórtices generan un aumento en la temperatura en esta zona, lo que da lugar a dos nuevas regiones de recirculación separadas por la corriente descendente, una arriba de cada vórtice original, que giran en dirección contraria a los mismos. Estas regiones de recirculación dan la apariencia a las isothermas de orejas alargadas, como puede verse en la segunda imagen de la Fig. 4.9. Al tiempo $t \approx 0.017$, la temperatura en la parte media de la pared inferior aumenta y da origen a un flujo opuesto al flujo descendente y se forman dos zonas de recirculación simétricas adicionales.

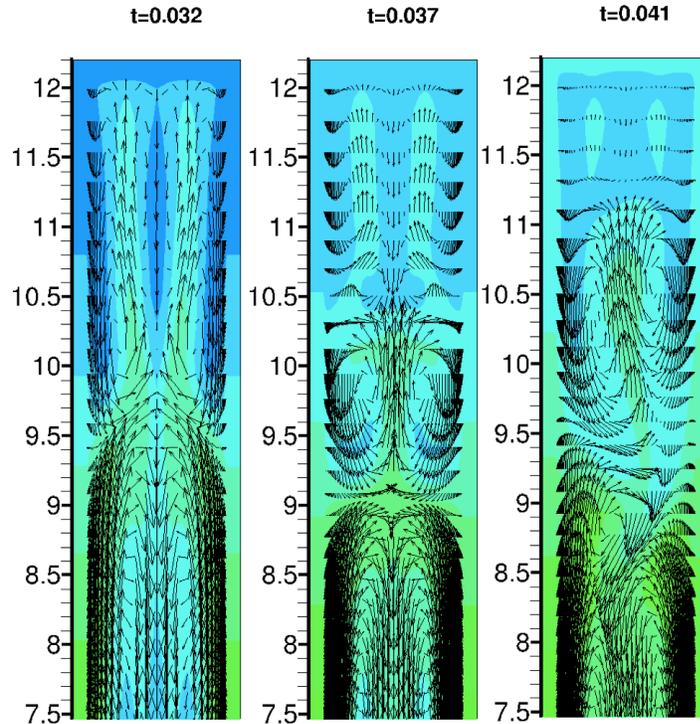


Figura 4.10. Acercamiento de la parte alta de la cavidad para cuatro tiempos adimensionales distintos con $Ra = 10^6$. Es posible observar con detalle la forma en la que el sistema pierde la estabilidad.

A $t \approx 0.037$, las regiones superiores de recirculación alcanzan el techo y la estructura acanalada que conduce fluido hacia abajo se cierra en $x \approx 9.4$. Esto da lugar a cuatro regiones de recirculación en la parte superior de la cavidad separadas de dos zonas de recirculación debajo de ellas por un plano de estancamiento localizado en $x \approx 10.5$. A su vez, estas dos últimas regiones quedan separadas de los vórtices principales por otro plano de estancamiento ubicado en $x \approx 9$. Debajo de este último plano, la temperatura del fluido es mayor que la temperatura de aquel que se encuentra por encima del mismo, como consecuencia, las dos regiones de recirculación principales empujan los vórtices superiores hacia arriba e inyectan fluido con temperatura mayor a lo largo del eje de simetría de la cavidad, donde se encontraba la estructura acanalada que conducía fluido hacia abajo como muestra la tercera imagen de la Fig. 4.10, en la que se presenta un acercamiento de la parte alta de la cavidad

para mostrar detalladamente la forma en que el sistema pierde la estabilidad. Este proceso conduce al rompimiento de la simetría del flujo. Una vez que el flujo no es simétrico, el fluido de menor temperatura, que se encuentra en la parte superior de la cavidad, cae rápidamente y provoca el desprendimiento de vórtices a lo largo de las paredes laterales.

Las Figs. 4.11 y 4.12 muestran el promedio transversal de la temperatura adimensional $\theta_f(\bar{y}, t)$, y el centroide de temperatura $\tilde{x}(y, t)$ como función del tiempo adimensional para diferentes posiciones a lo largo de la coordenada vertical, respectivamente. En la Fig. 4.11 se puede apreciar que gracias al efecto difusivo en las paredes, la señal térmica se desplaza más rápido a la parte alta de la cavidad, en comparación con los casos anteriores, reduciendo, en los primeros instantes de tiempo, la diferencia de temperaturas en el fluido. Esta diferencia es mínima al tiempo $t \approx 0.03$. Para tiempos mayores la diferencia

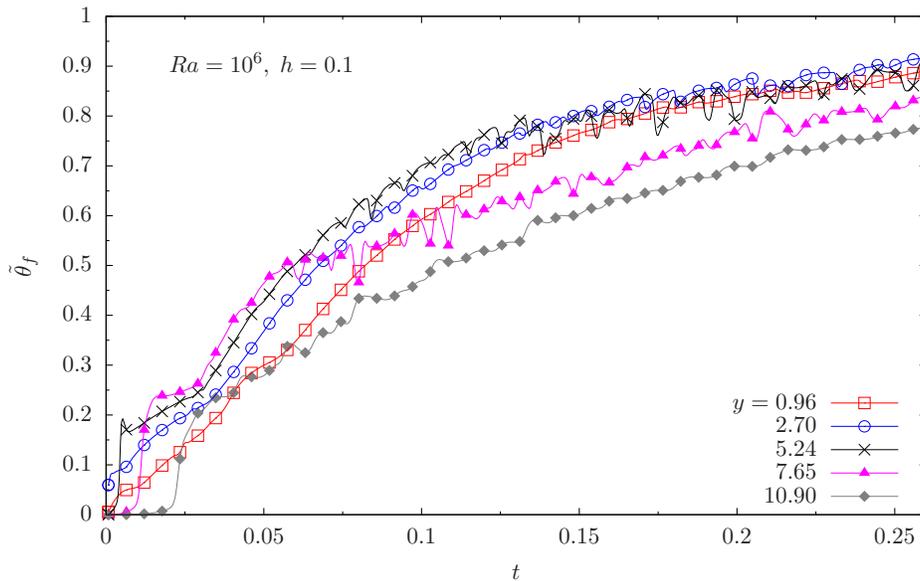


Figura 4.11. Promedio transversal de la temperatura adimensional del fluido como función del tiempo adimensional en cinco alturas distintas $y = 0.96, 2.70, 5.24, 7.65$ y 10.90 con $Ra = 10^6$. Gracias al efecto difusivo en las paredes la señal térmica se desplaza más rápido a la parte alta de la cavidad reduciendo, la diferencia de temperaturas en el fluido para $t < 0.03$. Para $t > 0.03$ la diferencia de temperatura en el fluido aumenta como resultado del descenso de fluido con temperatura baja.

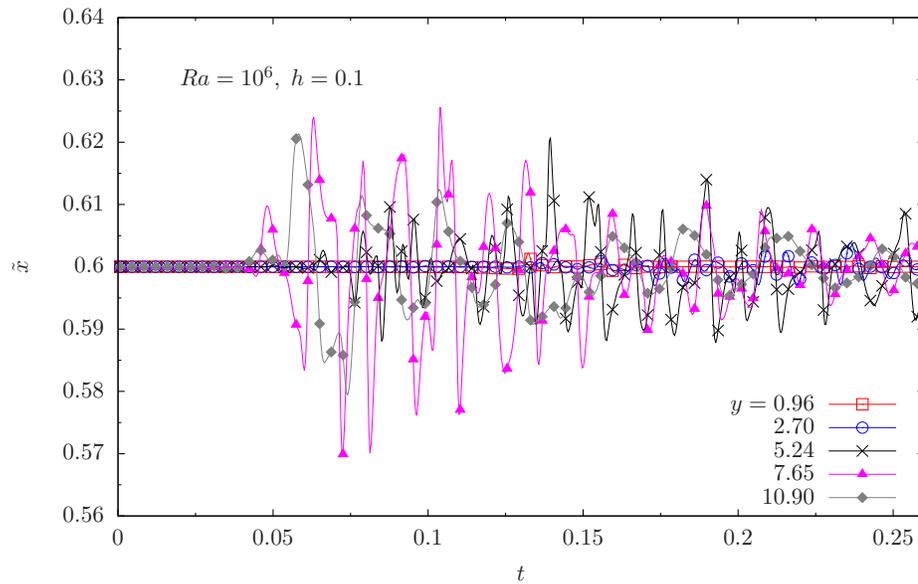


Figura 4.12. Centroide térmico para $Ra = 10^6$ como función del tiempo en diferentes alturas. Para una altura dada y los valores positivos de $\tilde{x}(y, t) - 0.6$ representan vórtices que giran en dirección contraria a las manecillas del reloj. El sistema pierde la simetría en $y \approx 11$ al tiempo $t \approx 0.03$. Se ve un incremento marcado en la intensidad de la dinámica de vórtices.

de temperaturas a lo largo de cavidad aumenta como resultado del descenso súbito de fluido con temperatura baja. También es posible apreciar ligeras oscilaciones en las curvas del promedio de temperatura transversal. Dichas oscilaciones y diferencias de temperatura son más pronunciadas en $y = 5.24$ y $y = 7.65$ indicando que los aportes al flujo de calor debidos al fluido frío que se precipita y al fluido caliente que asciende, como resultado del desprendimiento de vórtices, son significativos en esta zona. De acuerdo con la Fig. 4.12 se puede asegurar que el sistema pierde la simetría en la parte alta de la cavidad, $y \approx 11$, al tiempo $t \approx 0.03$. Esta figura también permite visualizar una mayor intensidad en la dinámica de vórtices en comparación con el caso anterior, teniendo un efecto más marcado en la región comprendida entre $y = 5$ y $y = 8$, así como el tiempo y la frecuencia a la que ocurren las erupciones. En este caso resalta la ausencia de una frecuencia definida.

Para este número de Rayleigh la evolución de las curvas de producción de entropía se ilustran en la Fig. 4.13. En este caso la producción de entropía es muchos más intensa. Como en los casos anteriores, las zonas de mayor producción de entropía se localizan en la parte baja de la cavidad, frente a las fuentes de calor y cerca de la base concentrada en una región mucho más delgada comparada con las correspondientes a los dos números de Rayleigh anteriores. En la zona media de la base aparece una erupción de producción de entropía debida a la presencia de dos zonas de recirculación y al choque de fluido frío y caliente que tiene lugar en esta zona. Es importante resaltar que, debido

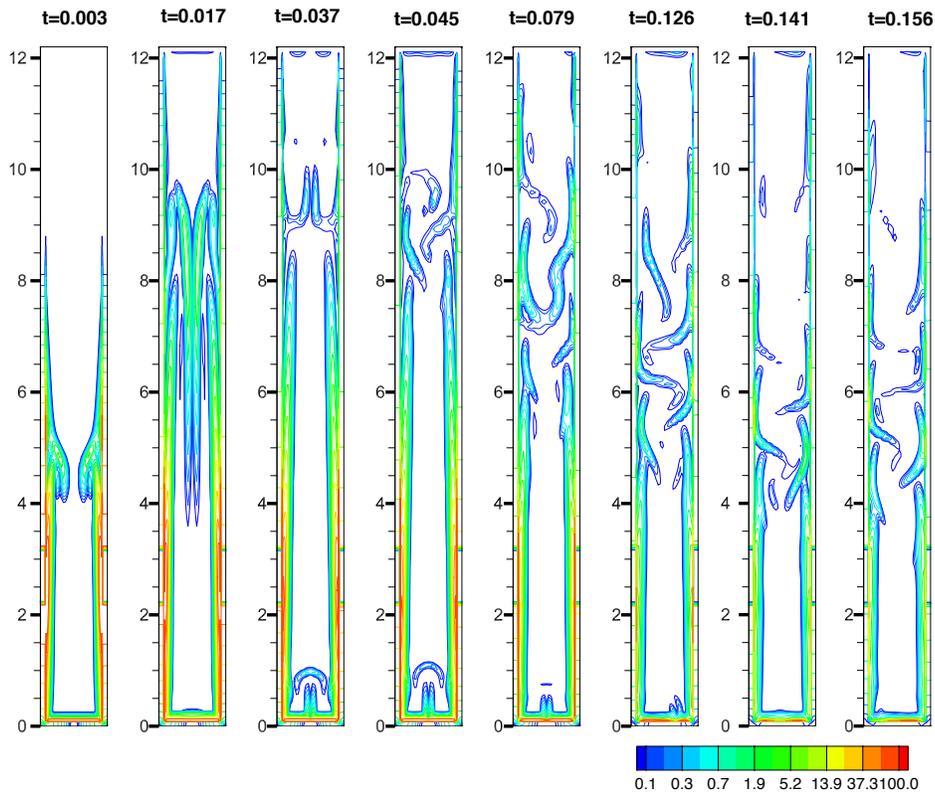


Figura 4.13. Evolución de la producción de entropía para $Ra = 10^6$. En este caso la producción de entropía es más intensa. Las zonas de mayor producción de entropía se encuentran frente a la fuentes de calor y en la base de la cavidad. Aparecen nuevas zonas de producción de entropía al interior del fluido y en la zona media de la base como resultado del incremento en el flujo de calor por convección.

al incremento del flujo de calor por convección, la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido en la parte alta de la cavidad disminuye reduciendo los aportes a la producción de entropía. También, como resultado del aumento significativo del flujo de calor entre las capas de fluido caliente que ascienden y las de fluido frío que descienden, aparecen dos zonas de producción de entropía al interior del fluido cerca de la parte media de la cavidad. Con el tiempo estas zonas crecen y se desplazan hacia arriba. Al encontrarse cerca de la tapa, momento en el que se alcanza la configuración inestable, las zonas desaparecen súbitamente. Inmediatamente después de que se pierde la simetría, nuevas zonas de producción de entropía aparecen y desaparecen principalmente cerca de las paredes sólidas, estas zonas coinciden con el descenso de fluido frío y el desprendimiento de vórtices que chocan con las paredes. Finalmente, la producción de entropía disminuye al ritmo que la temperatura de la cavidad aumenta.

Para los tres números de Rayleigh presentados únicamente se ha considerado la contribución térmica a la producción de entropía σ_q debido a que los aportes por parte del término viscoso σ_ν son, en los tres casos, por lo menos seis órdenes de magnitud menores.

Respuestas globales del sistema

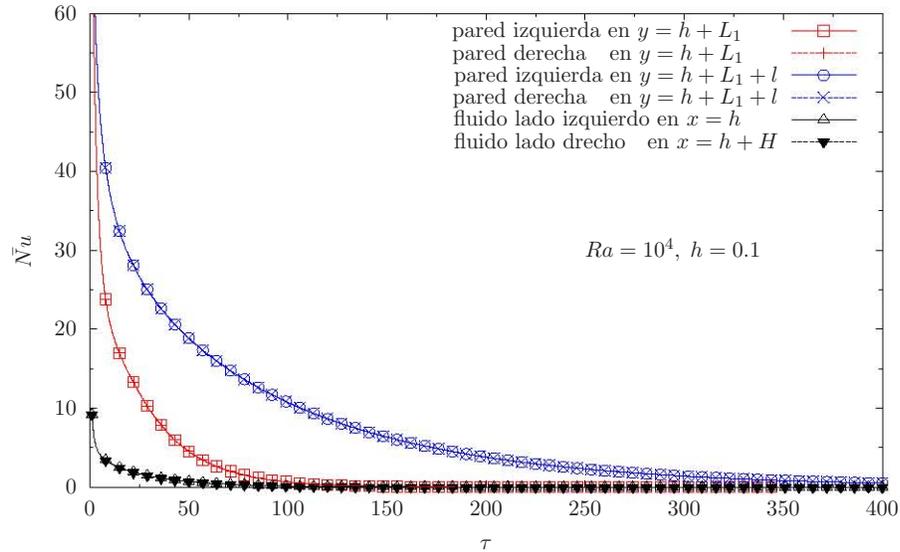


Figura 4.14. Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional convectivo en el sólido y en el fluido para $Ra = 10^4$.

Las Figs. 4.14, 4.15 y 4.16 muestran las tres contribuciones al flujo de calor –hacia el sólido y hacia el fluido– alrededor de cada una de las fuentes de calor como función del tiempo adimensional convectivo para los tres números de Rayleigh, $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6 , respectivamente. En los tres casos el flujo de calor hacia el sólido es mayor que el flujo de calor hacia el fluido debido al valor alto de la relación entre conductividades K .

Se observa que a medida que aumenta el parámetro de flotación, el flujo de calor que recorre la pared sólida hacia la parte alta de la cavidad disminuye en relación al flujo de calor en la pared hacia la parte baja de la cavidad en un cierto intervalo de tiempo. Este efecto se debe básicamente a que para los dos números de Rayleigh altos, $Ra = 10^5$ y 10^6 , la rapidez a la que se transfiere calor por convección en el fluido, hacia la parte alta de la cavidad cerca de las paredes verticales, es comparable a la rapidez con la que se transfiere calor por difusión en el sólido, lo que provoca que la temperatura en el sólido y en el fluido que se encuentra cerca de la pared sean semejantes, disminuyendo el flujo de calor de las paredes hacia el fluido. En la parte baja de la cavidad la

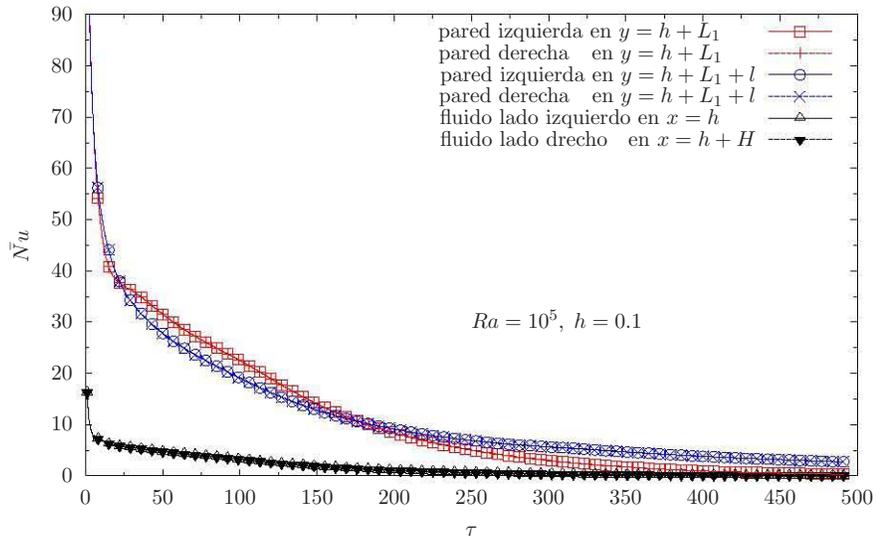


Figura 4.15. Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional convectivo en el sólido y en fluido para $Ra = 10^5$.

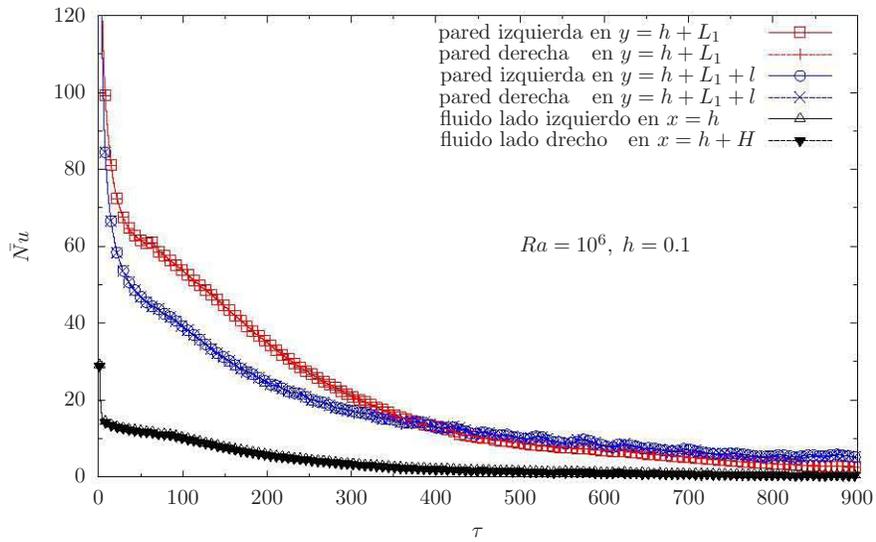


Figura 4.16. Número de Nusselt promedio como función del tiempo adimensional convectivo en el sólido y en fluido para 10^6 .

diferencia de temperatura entre las paredes y el fluido es grande por lo que el flujo de calor es mayor.

En el sólido el flujo de calor también crece con el parámetro de flotación. Al aumentar el número de Rayleigh las zonas donde se acumula mayor cantidad de energía se desplazan lejos de las fuentes de calor producto del aumento en el flujo de calor por convección, haciendo más intenso el gradiente de la fuente tanto hacia el sólido como hacia el fluido.

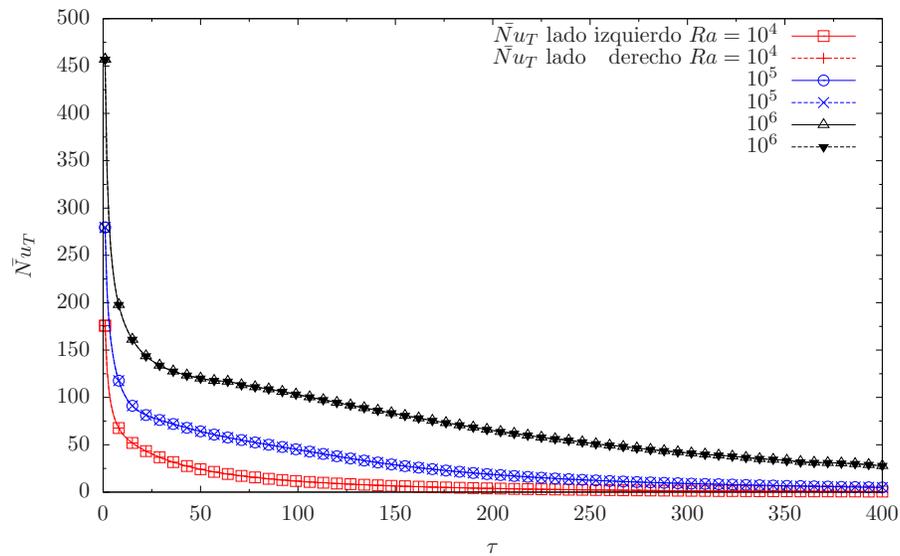


Figura 4.17. Número de Nusselt promedio total como función del tiempo adimensional convectivo para $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6

En la Fig. 4.17 se ha graficado la suma de las tres contribuciones al flujo de calor como función del tiempo adimensional convectivo τ para cada uno de los valores del número de Rayleigh considerados $Ra = 10^4$, 10^5 , y 10^6 . En esta gráfica se pone de manifiesto que a medida que el número de Rayleigh aumenta, el flujo de calor total hacia el sistema crece. Es importante indicar que, a pesar de la pérdida de simetría, que tiene lugar para los dos números de Rayleigh mayores, en los tres casos el flujo de calor que entra al sistema originado en ambas fuentes es muy similar en todo el intervalo de tiempo.

En la Fig. 4.18 se compara el flujo de calor adimensional para $Ra = 10^4$ con aquel obtenido con $Ra = 1$ en la escala de tiempo difusiva. Muestra que

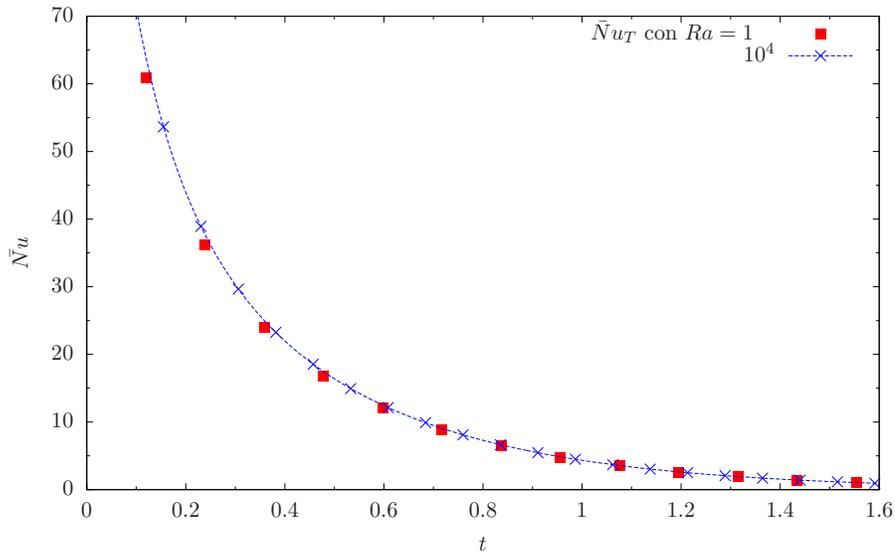
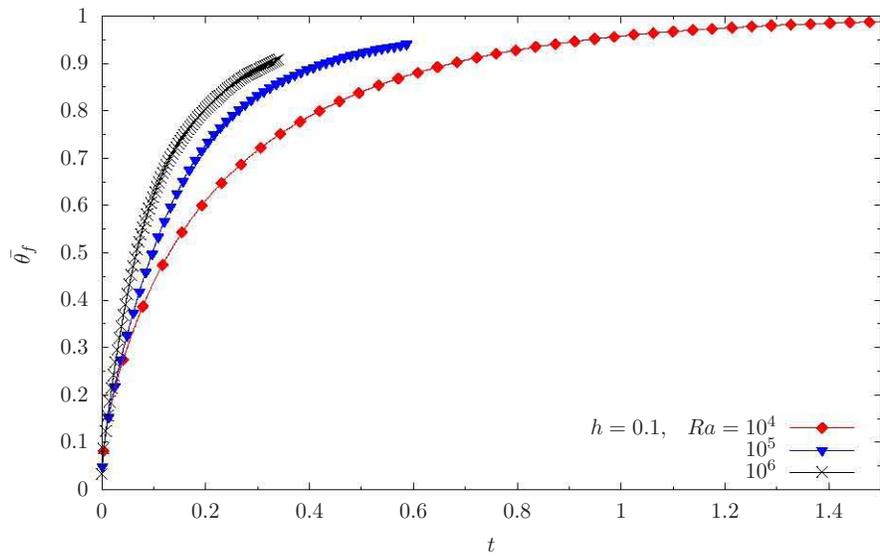


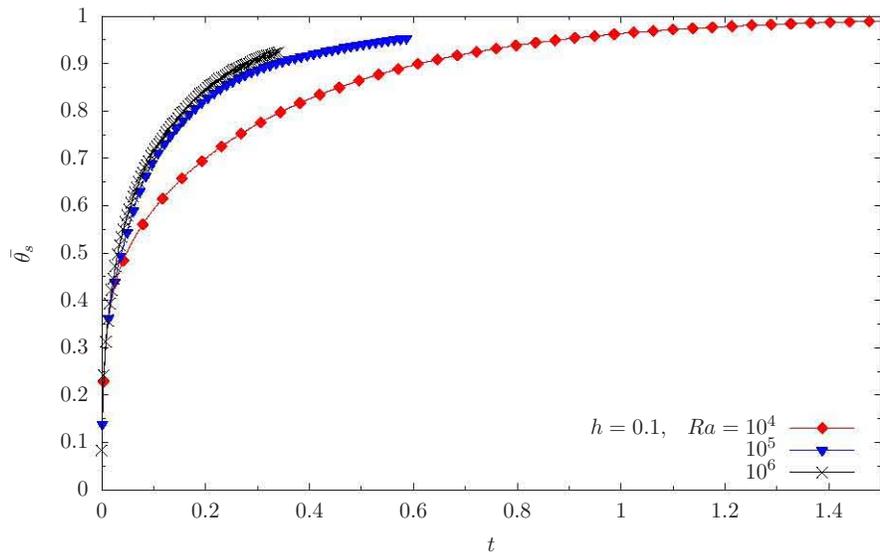
Figura 4.18. Número de Nusselt promedio total como función del tiempo adimensional para $Ra = 1$ y 10^4 .

para ambos casos el flujo de calor es prácticamente el mismo. Lo anterior se debe a que el término convectivo en la ecuación de balance de energía, $v_i \partial \theta / \partial x_i$, resulta mucho menor que el término difusivo, $\partial / \partial x_i (\partial \theta / \partial x_i)$, para estos valores del número de Rayleigh. Con esto se logra asegurar que para $Ra \leq 10^4$ el proceso de transferencia de calor es puramente difusivo, y que las diferencias con el flujo de calor para los casos correspondientes a los dos números de Rayleigh altos, son debidos únicamente a aportes convectivos.

De especial interés resulta la evolución temporal de la temperatura global promedio tanto en el sólido como en el fluido representadas en las dos imágenes de la Fig. 4.19. La temperatura global del fluido (Fig. 4.19 (a)), aumenta mucho más rápido para valores altos del número de Rayleigh porque los aportes convectivos al flujo de calor son mayores al incrementar el parámetro de flotación. Por otro lado la temperatura global de las paredes sólidas Fig. 4.19 (b) presentan una tendencia similar pero las curvas correspondientes a los dos números de Rayleigh altos se pegan debido a que el flujo de calor de la pared hacia el fluido, arriba de las fuentes de calor, es bajo.



(a)



(b)

Figura 4.19. Promedio de temperatura global como función del tiempo adimensional para $Ra = 10^4, 10^5$ y 10^6 para $h = 0.1$. (a) en el fluido, (b) en el sólido.

Finalmente, en la Fig. 4.20 se ha graficado la producción de entropía total como función del tiempo difusivo adimensional τ , e ilustra la influencia directa del incremento en las fuerzas de flotación sobre el aumento en la producción de entropía del sistema. Las curvas describen un comportamiento similar al que siguen las curvas de flujo de calor debido a la relación directa que existe entre estas dos cantidades y su comportamiento indican que, para $Ra = 10^6$, la cavidad se calienta más rápido pero el proceso genera una mayor cantidad de entropía. Resulta de interés señalar que para el número de Rayleigh mayor, la curva correspondiente exhibe una oscilación considerable que coincide con el surgimiento abrupto de las dos zonas de recirculación en la base de la cavidad.

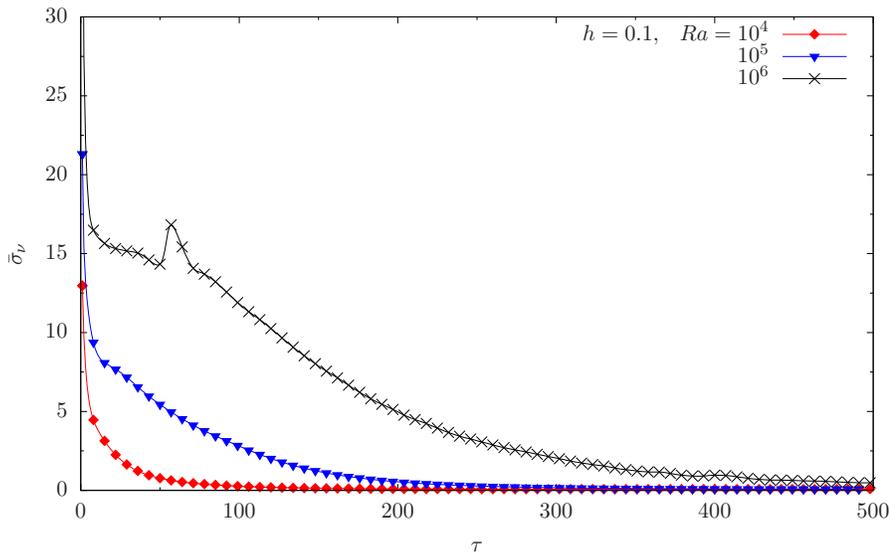


Figura 4.20. Producción de entropía total como función del tiempo adimensional convectivo para $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6 con $h = 0.1$.

Conclusiones

Por medio del método de discretización de volúmenes finitos y el algoritmo SIMPLE, se analizó numéricamente el efecto que tiene la variación de las fuerzas de flotación sobre la convección natural y producción de entropía en un fluido confinado a una cavidad con una relación de aspecto grande, $AR=12$, constituida por cuatro paredes conductoras de espesor finito a la que se le suministra calor por medio de dos porciones de las paredes sólidas verticales, ubicadas cerca del fondo de la cavidad, que se mantiene a temperatura constante. Se consideraron valores fijos del número de Prandtl, relación entre difusividades y conductividades térmicas de $Pr = 7$, $\alpha = 600$, $K = 600$, respectivamente, que corresponden, aproximadamente, a un sistema formado por aluminio y agua. Los cálculos se realizaron para tres valores distintos del número de Rayleigh, $Ra = 10^4$, 10^5 y 10^6 , manteniendo fijo el espesor de las paredes $h = 0.1$.

En cada caso se obtuvieron las isothermas, el campo de producción de entropía, el flujo de calor hacia el sistema, dado por el número de Nusselt, y se estudió cuantitativamente la dinámica de vórtices encontrando distintos mecanismos de flujo de calor y pérdida de simetría ligados a la variación del número de Rayleigh.

Para el número de Rayleigh bajo $Ra = 10^4$ el proceso de transferencia de calor es prácticamente difusivo y simétrico respecto al eje de simetría de la cavidad. Al considerar números de Rayleigh mayores, $Ra = 10^5$ y $Ra = 10^6$ la convección se vuelve más importante. La rapidez del flujo de calor por convección en el fluido es comparable a la rapidez de difusión en las paredes. Los efectos conjugados de la convección y la difusión en las paredes desplazan las zonas de máxima concentración de energía lejos de las fuentes de calor

y distribuyen la energía a lo largo de la cavidad tendiendo a homogeneizar la temperatura del fluido. En ambos casos el sistema pierde la simetría pero lo hace en formas distintas. Para $Ra = 10^5$ tiene lugar una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz pero los aportes al flujo de calor debido al desprendimiento de vórtices es bajo comparado con los aportes difusivos. Para $Ra = 10^6$ el sistema adquiere una configuración inestable formada por cuatro zonas de recirculación en la parte superior de la cavidad separadas por un plano de estancamiento de otras dos regiones de recirculación debajo de ellas. Otro plano de estancamiento separa a estas últimas de los vórtices primarios. Debajo del último plano de estancamiento —en donde se cierran los vórtices originales— la temperatura del fluido es mayor que la temperatura de aquel que se encuentra arriba de este plano. Como resultado, los vórtices principales inyectan fluido caliente hacia arriba y el fluido frío desciende súbitamente. En este caso los aportes al flujo de calor debido al desprendimiento de vórtices son significativos.

Con respecto al flujo de calor y producción de entropía se logró demostrar que el aumento de las fuerzas de flotación incrementan el flujo de calor tanto en la pared como en el fluido haciendo que el proceso sea más rápido pero también que produzca una mayor cantidad de entropía.

Al comparar los resultados obtenidos con aquellos reportados para un sistema similar pero que considera paredes adiabáticas, se observa que la presencia de paredes de espesor finito aumenta la rapidez y la estabilidad del proceso.

El siguiente paso para ampliar este trabajo es relacionar la influencia que tiene la variación del espesor de las paredes y considerar distintos valores de la relación entre difusividades térmicas sobre los patrones de flujo, la transferencia de calor y la producción de entropía.

Por otro lado es posible extender el trabajo haciendo modificaciones mínimas en los códigos para estudiar las respuestas del sistema considerando distintos parámetros físicos y geométricos cuyo significado físico sean de especial interés. También es posible completar los códigos para estudiar flujos en tres dimensiones y cavidades con geometría distinta.

Bibliografía

- [1] S. Ostrach. Natural convection in enclosures. *Journal of Heat Transfer*, 110:1175–1191, 1988.
- [2] A. AlAmiri, K. Khanafer, and I. Pop. Buoyancy-induced flow and heat transfer in a partially divided square enclosure. *Journal of Heat Transfer*, 52:3818–3828, 2009.
- [3] F. Corvaro and M. Paroncini. An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2d-piv system. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 52:355–365, 2009.
- [4] A. Dalal and M. K. Das. Numerical study of laminar natural convection in a complicated cavity heated from top with sinusoidal temperature and cooled from other sides. *Computers and Fluids*, 36:680–700, 2007.
- [5] K. Gustafson and K. Halasi. Cavity flow dynamics at higher reynolds number and higher aspect ratio. *Journal of Computational Physics*, 70:696–703, 1987.
- [6] D. M. Kim and R. Viskanta. Effect of wall heat conduction on natural convection heat transfer in a square enclosure. *Journal of Heat Transfer*, 107(1):139–146, 1985.
- [7] D. M. Kim and R. Viskanta. Heat transfer by conduction, natural convection and radiation across a rectangular cellular structure. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 5(4):205 – 213, 1984.
- [8] D. Misra and A. Sarkar. Finite element analysis of conjugate natural convection in a square enclosure with a conducting vertical wall. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 141(3-4):205–219, 1997.

- [9] A. Liaqat and A. C. Baytas. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:3273–3280, 2001.
- [10] Moghtada and Mobedi. Conjugate natural convection in a square cavity with finite thickness horizontal walls. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(4):503 – 513, 2008.
- [11] Wei Zhang, Chuhua Zhang, and Guang Xi. Conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time-periodic sidewall temperature and inclination. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32(1):52 – 64, 2011.
- [12] A. Bejan. Second law analysis in heat transfer. *Energy*, 5(8-9):720 – 732, 1980.
- [13] A. Bejan. *Entropy generation through heat and fluid flow*. John Wiley & Sons. Inc., 1994.
- [14] S. Mahmud and R. A. Fraser. The second law analysis in fundamental convective heat transfer problems. *International Journal of Thermal Sciences*, 42(2):177 – 186, 2003.
- [15] U. Narusawa. The second-law analysis of mixed convection in rectangular ducts. *Heat and Mass Transfer*, 37:197–203, 2001.
- [16] A. Z. Sahin. A second law comparison for optimum shape of duct subjected to constant wall temperature and laminar flow. *Heat and Mass Transfer*, 33:425–430, 1998.
- [17] L. B. Erbay, Z. Altaç, and B. Sülüs. An analysis of the entropy generation in a square enclosure. *Entropy*, 5(5):496–505, 2003.
- [18] M. Magherbi, H. Abbassi, N. Hidouri, and A. B. Brahim. Second law analysis in convective heat and mass transfer. *Entropy*, 8(1):1–17, 2006.
- [19] A. C. Baytas. Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(12):2089 – 2099, 2000.
- [20] Y. Varol, H. F. Oztop, and A. Koca. Entropy generation due to conjugate natural convection in enclosures bounded by vertical solid walls with

- different thicknesses. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(5):648 – 656, 2008.
- [21] Y. Varol, H. F. Oztop, and I. Pop. Entropy analysis due to conjugate-buoyant flow in a right-angle trapezoidal enclosure filled with a porous medium bounded by a solid vertical wall. *International Journal of Thermal Sciences*, 48(6):1161 – 1175, 2009.
- [22] I. G. Currie. *Fundamental mechanics of fluids*. McGraw-Hill, 1993.
- [23] F. M. White. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, 1991.
- [24] T. J. Chung. *Computational Fluid Dynamics*. University Press, 2002.
- [25] S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [26] C. Bender and S. Orszag. *Advance mathematical methods for Scientists and Engineers*. McGraw Hill, 1978.
- [27] L. Martínez-Suástegui and C. Treviño. Transient laminar opposing mixed convection in a differentially and asymmetrically heated vertical channel of finite length. *Heat Mass Transfer*, 51:5991–6005, 2008.
- [28] J. C. Tannehill, Anderson D. A., and R. H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Taylor & Francis, 1997.
- [29] G. De Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity a benchmark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:249–264, 1983.
- [30] J. A. Smits. *A physical introduction to fluid mechanics*. Jhon Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [31] M. Rosen. Second-law analysis: approaches and implications. *International Journal of Energy Research*, 23:415 – 429, 1999.