UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE METRIZACIÓN PARA GRUPOS DE FRÉCHET

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

ULISES ARIET RAMOS GARCÍA

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. MICHAEL HRUSAK

MÉXICO, D.F. MAYO, 2012

EL PROBLEMA DE METRIZACIÓN PARA GRUPOS DE FRÉCHET

Ulises Ariet RAMOS GARCÍA
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM
ariet@matmor.unam.mx

γ**-conjuntos**

$$\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*}(G)$$

γ_G**-conjuntos**

Director de Tesis: Michael HRUŠÁK

Introducción

Desde los inicios de la topología general, los problemas de metrización para ciertas clases de espacios topológicos, han sido siempre de gran interés. Por ejemplo, para la clase de grupos topológicos el teorema clásico de metrización de G. Birkhoff y S. Kakutani ([**Bi**],[**Ka**]) que data de 1936 establece que un grupo topológico T_1 es metrizable si y sólo si es primero numerable. Si se debilita la condición primero numerable, por nociones más débiles como la propiedad de Fréchet-Urysohn, es natural preguntarse si todavía se tiene un teorema de metrización. Recordemos que un espacio topológico Hausdorff X es *Fréchet-Urysohn* (o simplemente Fréchet) si para cada punto $x \in X$ que esté en la cerradura de un conjunto $A \subseteq X$, existe una sucesión de elementos de A que converge a x. La propiedad de Fréchet es un debilitamiento natural de primero numerable que ha sido estudiado ampliamente en la literatura. Existen grupos topológicos Fréchet no separables los cuales son no metrizables, un ejemplo de tales grupos es $G = \{g \in 2^{\omega_1} \colon |\mathrm{supp}(g)| \leqslant \omega\}$. Así, V. I Malykhin en 1978 ([**Ar4**],[**GS**], [**MT**]) propone el siguiente problema.

¿Existe un grupo topológico Fréchet separable no metrizable?

Dado que un grupo con un subgrupo denso metrizable es metrizable, entonces el problema puede ser reformulado preguntando por la existencia de un grupo topológico Fréchet numerable no metrizable.

Es bien conocido desde los inicios que el problema de Malykhin es realmente una pregunta de consistencia. Por ejemplo, en el tiempo en que Malykhin propone dicho problema, se conocia que si se asume $\mathfrak{p} > \omega_1$ y G es un grupo topológico metrizable separable con almenos dos elementos, entonces G^{ω_1} es un grupo topológico Fréchet separable el cual no es metrizable. Por tanto, para poder dar una solución al problema de Malykhin, o bien existe un ejemplo para dicha pregunta en **ZFC** ó consistentemente se tiene un teorema de metrización para grupos de Fréchet separables. Por tal razón, en la literatura el problema de Malykhin es conocido también como *el problema de metrización para grupos de Fréchet* ([**MT**]). Este problema ha sido de interés durante todo este tiempo hasta convertirse en uno de los problemas principales de la topología de conjuntos ([**HM**]), y muy en particular en una vieja pregunta de la estructura general de grupos topológicos ([**Ar4**], [**AT**]).

Diversos autores han obtenido soluciones parciales en el sentido positivo. En [**Ny2**] y [**Ny3**] P. J. Nyikos muestra que bajo cualquiera de las siguientes condiciones: $\mathfrak{p} > \omega_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ y la existencia de un γ-conjunto no numerable, existe una topología de grupo Fréchet no metrizable sobre el grupo Booleano $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ de los subconjuntos finitos de ω con la diferencia simétrica como operación de grupo. Es bien conocido que $\mathfrak{p} = \mathsf{non}(\gamma\text{-conjunto})$ ([**GN**]), en particular, todo espacio métrico separable de tamaño $< \mathfrak{p}$ es un γ-conjunto, y recientemente T. Orenshtein y B. Tsaban en [**OT**] prueban que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ implica la existencia de un γ-conjunto de cardinalidad $\mathfrak{p}$. Entonces, de hecho, la existencia de un γ-conjunto no numerable es una condición más débil que las condiciones antes mencionadas. Otro ejemplo consistente de un grupo topológico Fréchet separable no metrizable puede ser obtenido de un γ-conjunto no numerable usando resultados de la teoría de $C_p(X)$. En [**GN**] J. Gerlits y Zs. Nagy prueban que $C_p(X)$ es Fréchet separable no metrizable si y sólo si X es un γ-conjunto no numerable. Ellos también notan que todo γ-conjunto es de medida fuertemente cero, luego no hay γ-conjuntos no numerables en el modelo de Laver para la consistencia de la conjetura de Borel ([**La**]).

Por otro lado, nociones de la teoría de Ramsey así como técnicas de la teoría descriptiva de conjuntos (*e.g.*, teoría de juegos topológicos infinitos y determinación) han permitido dar resultados parciales en el sentido negativo. Identificando al conjunto potencia $\mathcal{P}(\omega)$ con el espacio de Cantor 2^ω, como cada topología τ sobre ω es en particular un subconjunto de $\mathcal{P}(\omega)$, entonces es claro qué significa cuando se dice que τ sea cerrada, abierta, G_δ, Borel, analítica, etc. Desde sus inicios, la teoría descriptiva de conjuntos, ha puesto en evidencia que los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (**ZFC**) pueden decidir, en términos generales, cualquier pregunta sobre conjuntos analíticos. En este contexto, dado que los ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin que se conocen son todos ellos no definibles, entonces cabe la pregunta de si existen ejemplos definibles (*e.g.*, de complejidad analítica). En [**TU**] S. Todorčević y C. Uzcátegui prueban que no hay ejemplos definibles de complejidad analítica a la pregunta de Malykhin, en otras palabras, ellos prueban que un grupo topológico Fréchet numerable es metrizable si y sólo si su topología es analítica.

El propósito de esta tesis es hacer un estudio del problema de Malykhin. Entre las principales contribuciones del presente trabajo se encuentra la solución al caso precompacto del problema de Malykhin, probando que es consistente con **ZFC** que todo grupo Abeliano numerable admita una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable (Corolario 3.10), y probando también que es consistente con **ZFC** que todo grupo Fréchet precompacto separable es metrizable (Teorema 4.21 (c)). Teniendo así que la pregunta de Malykhin para el caso precompacto es independiente de **ZFC**. En la busqueda de una solución completa al problema de Malykhin, hemos obtenido también que es consistente con **ZFC** y la negación de la hipótesis del continuo que todo grupo Fréchet separable de peso menor que el continuo es metrizable (Corolario 4.24). Estos resultados nos hacen pensar que es plausible tener consistentemente un teorema de metrización para grupos de Fréchet separables, y con ello tener que la pregunta de Malykhin es independiente de **ZFC**.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se dan las definiciones, convenciones y notaciones, así como algunos resultados básicos que se usarán a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 2 se hace un recuento de los resultados parciales más relevantes que varios autores han dado al problema de Malykhin a lo largo de todo este tiempo.

En el Capítulo 3 realizamos un estudio de las topologías de grupo Fréchet precompactas sobre grupos Abelianos numerables. Para cada grupo Abeliano numerable G, introducimos la noción de γ_G-conjunto, y con ayuda de la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen ([**Po**], [**vKa**]), demostramos que la existencia de una topología de grupo Fréchet precompacta Hausdorff no metrizable sobre G es equivalente a la existencia de un γ_G-conjunto no numerable que separa puntos de G (Corolario 3.7). La noción de γ_G-conjunto guarda una estrecha relación con la noción de γ-conjunto, *e.g.,* probamos que la existencia de un γ-conjunto no numerable es suficiente para que exista un γ_G-conjunto no numerable que separa puntos de G para todo grupo Abeliano numerable G (Corolario 3.10). Estudiando un poco más la noción de γ_G-conjunto, demostramos que para cualquier grupo Abeliano numerable G, la mínima cardinalidad de un subconjunto del grupo dual G^* que no sea un γ_G-conjunto es justamente el número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ (Teorema 3.15). El material comprendido de este capítulo se ha presentado en [**HR1**].

Finalmente, en el Capítulo 4 trataremos ciertos aspectos combinatorios del forcing de Laver-Prikry $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ asociado a un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre ω, los cuales se encuentran estrechamente relacionados con el problema de Malykhin. Este análisis combinatorio nos permitirá probar entre otras cosas la consistencia de un teorema de metrización para grupos de Fréchet precompactos (Teorema 4.21 (c)) y la consistencia de un teorema de metrización para grupos de Fréchet de peso pequeño (Corolario 4.24). Los resultados presentados en este capítulo están siendo reportados en [**HR2**].

Ulises Ariet Ramos García

Mayo 2012

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Asumimos del lector estar familiarizado con el lenguaje y los conceptos básicos de la teoría de conjuntos (incluyendo el método de "forcing"). También asumimos estar familiarizado con los conceptos básicos de la topología general y de la estructura general de grupos topológicos. En este capítulo se incluyen algunos de estos conceptos que vamos a utilizar a lo largo de todo el trabajo. Aunque más bien el propósito de este capítulo es fijar la notación para luego introducir al lector al tema que nos ocupa. Para los conceptos básicos de la teoría de conjuntos, incluyendo lo básico de forcing iterado, nos remitimos a [**Ku**]. Tópicos avanzados en la teoría de forcing iterado pueden encontrarse en [**Ba**] y [**BJ**]. En [**En**], el lector podrá encontrar una exelente introducción a la topología general. También una referencia usual en topología general es [**HNV**]. Para una introducción a la estructura general de grupos topológicos, y muy en particular lo referente a la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen, remitimos al lector a [**AT**] y [**HR**].

Otro propósito de este capítulo es establecer algunos resultados de la literatura de modo que podamos referirnos a ellos en capítulos posteriores. Los resultados donde no se indique una referencia es por que ellos forman parte del folklore de la literatura. En caso de que no se proporcione una prueba de un resultado, tal prueba puede encontrarse en una de las referencias citadas.

1. Teoría de conjuntos

La notación de teoría de conjuntos que se usará durante todo el trabajo es en su mayoría la usual y se sigue de [**Ku**]. En particular, la axiomática usual de Zermelo-Frankel con Axioma de Elección, será denotada por **ZFC**. Muy amenudo, en la teoría de conjuntos, se utilizan modelos de fragmentos "suficientemente grandes"de **ZFC**. Reservamos el nombre **ZFC*** para referirnos a estos fragmentos y no abundaremos en precisar la definición de "suficientemente grande".

Utilizaremos las letras griegas κ, λ, θ para denotar números cardinales infinitos, α, β, γ, δ para referirnos a números ordinales, y i, j, k, ℓ, n, m para denotar números naturales. El primer cardinal infinito es denotado por ω o $\aleph_0$, ω_1 o $\aleph_1$ representa el primer ordinal no numerable y $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad del conjunto potencia de ω. En este sentido, la hipótesis del continuo (**CH**) afirma que $\mathfrak{c} = \omega_1$. Para dos conjuntos X, Y su *diferencia simétrica* es denotada por $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Si X es un conjunto, su conjunto potencia es denotado por $\mathcal{P}(X)$. Los símbolos $[X]^\kappa$, $[X]^{<\kappa}$ denotan a la colección de todos los subconjuntos de X de cardinalidad

κ y menor que κ respectivamente. ${}^XY$ denota al conjunto de todas las funciones de X en Y. Ocasionalmente, en particular si $X = Y = \omega$ o si $X = \omega$ y $Y = 2$, escribiremos Y^X para el mismo conjunto, esperando que esto no se preste a confusión. El dominio y rango de una función f son denotados por $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{ran}(f)$ respectivamente. También, la preimagen y la imagen de un conjunto X bajo una función f será denotado por $f^{-1}[X]$ y $f[X]$ respectivamente. Como es usual, una función es en sí una gráfica $f \subset \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{ran}(f)$. La cardinalidad de un conjunto X es denotada por $|X|$ y $2^{|X|}$ es la cardinalidad de ${}^X2$. Si $|X| \leqslant \omega$, entonces diremos que X es *contable* o *numerable*.

Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{F} \restriction X$ denotará $\{F \cap X \colon F \in \mathcal{F}\}$, donde $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos, y $f \restriction X$ denotará la restricción de f en A, si f es una función. Usamos el símbolo '$\restriction$' en dos sentidos diferentes, esperando que esto no se preste a confusión. Por $\forall^\infty$ y $\exists^\infty$ denotamos los cuantificadores "*para todos salvo una cantidad finita*" y "*existe una cantidad infinita*" respectivamente.

Para $A, B \subseteq \omega$ y funciones $f, g \colon \omega \to \omega$ escribimos $A \subseteq^* B$ si $|A \setminus B| < \omega$ y $f \leqslant^* g$ si $|\{n \colon f(n) > g(n)\}| < \omega$. Recordemos que una familia de subconjuntos de ω es *centrada* si cualquier subfamilia finita tiene intersección infinita. El *número de pseudointersección* $\mathfrak{p}$ es la mínima cardinalidad de una familia centrada de subconjuntos de ω sin pseudointersecciones infinitas (*i.e.*, sin cota inferior común en el orden $\subseteq^*$). El *número de acotación* $\mathfrak{b}$ es la mínima cardinalidad de una familia no acotada de funciones en ω^ω con respecto al orden $\leqslant^*$. Es fácil ver que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$.

Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de un conjunto dado X es un *ideal* si

(1) para $A, B \in \mathcal{I}$, se tiene que $A \cup B \in \mathcal{I}$ y
(2) si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

A su vez este es *propio* si

(3) $X \notin \mathcal{I}$.

Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un *filtro* (propio) si $\mathcal{F}^* = \{X \setminus A \colon A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal (propio). Al ideal $\mathcal{F}^*$ se le conoce como el *ideal dual* del filtro $\mathcal{F}$, y de una manera análoga podemos definir $\mathcal{I}^*$, como el *filtro dual* del ideal $\mathcal{I}$. Denotaremos por $\mathsf{Fin}(X)$ al ideal de todos los subconjuntos finitos de X. Para X numerable, $\mathsf{Fin}(X)$ será abreviado simplemente por Fin, conocido también como *ideal de Fréchet*. Cabe mencionar que a lo largo de este trabajo normalmente sólo consideraremos ideales propios que contengan a $\mathsf{Fin}(X)$. Decimos que un ideal $\mathcal{I}$ sobre X es *alto* si para cada $Y \in [X]^\omega$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \cap Y$ es infinito. Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X, denotamos por $\mathcal{I}^+$ a la familia de los conjuntos $\mathcal{I}$-positivos, *i.e.*, subconjuntos de X que no pertenecen a $\mathcal{I}$. Para un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X, se define el *ideal ortogonal* de $\mathcal{I}$, denotado por $\mathcal{I}^\perp$, como el ideal de todos los subconjuntos de X que tienen intersección finita con cada elemento de $\mathcal{I}$. Así, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\perp\perp}$ y $\mathcal{I}^\perp = \mathcal{I}^{\perp\perp\perp}$. La *cofinalidad* de un ideal $\mathcal{I}$, $\mathsf{cof}(\mathcal{I})$, es la mínima cardinalidad de una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ tal que cada miembro de $\mathcal{I}$ está contenido en algún miembro de la familia $\mathcal{F}$. Una familia $\mathcal{F}$ con esta última propiedad es conocida como una *familia cofinal* en $\mathcal{I}$. Dado $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(\omega)$ (usualmente un filtro) y $f\colon \omega \to \omega$ denotemos por $f[\mathcal{F}]$ al conjunto $\{X \subseteq \omega\colon f^{-1}[X] \in \mathcal{F}\}$, y por $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ a la colección de todas las permutaciones f sobre ω tales que $f[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$.

Consideraremos sobre todo ideales y filtros sobre conjuntos numerables. En este caso, de hecho podemos pensar típicamente que son ideales o filtros sobre ω.

Dados A, B dos subconjuntos infinitos de ω, decimos que A y B son *casi ajenos* si $A \cap B$ es finito. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω es llamada una *familia casi ajena* si A y B son casi ajenos para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \neq B$. Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ denotamos por $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ al ideal generado por $\mathcal{A}$.

Consideramos a $\mathcal{P}(\omega)$ equipada con la topología natural inducida por la identificación de cada subconjunto de ω con su función característica, donde 2^ω viene dado con la topología producto. Decimos que un ideal $\mathcal{I}$ es un ideal Borel (analítico, coanalítico, ...) sobre ω si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre ω y $\mathcal{I}$ es Borel (analítico, coanalítico, ...) en esta topología. Lo mismo aplicará a los filtros. En particular, recordemos que si X es un espacio Polaco y $A \subseteq X$, entonces A es un conjunto *analítico* si existe un subconjunto de Borel (equivalentemente, un subconjunto cerrado) B de ω^ω y un mapeo continuo $f\colon \omega^\omega \to X$ tal que $f[B] = A$.

Dado un conjunto X y $s \in X^{<\omega}$, denotamos al *cono* de s por $\langle s\rangle = \{f \in X^\omega\colon s \subseteq f\}$. Por $s^\frown t$ denotamos la *concatenación* de las sucesiones s y t en X, y si $x \in X$ entonces $s^\frown x$ denotará a $s^\frown(x)$. Recordemos que $T \subseteq X^{<\omega}$ es un *árbol* si para cada $s \in T$ y cada $t \subseteq s$, entonces $t \in T$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X, un árbol T es *$\mathcal{A}$-ramificado* si $\mathrm{succ}_T(t) = \{x \in X\colon t^\frown x \in T\} \in \mathcal{A}$ para cada $t \in T$. Finalmente, $[T] = \{f \in X^\omega\colon \forall n \in \omega\, f \restriction n \in T\}$ denotará a la familia de *ramas* de T.

Las definiciones y propiedades de teoría descriptiva de conjuntos que se utilizen en lo subsecuente y no se hayan establecido de manera explícita a lo largo del trabajo, pueden consultarse en [**Ke**].

Una parte considerable del presente trabajo tiene que ver con resultados de consistencia obtenidos mediante extensiones de forcing. Remitimos al lector a [**Ku**] para lo referente a la teroría básica de forcing.

Recordemos que un *orden parcial* es una pareja $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y $\leqslant$ es una relación sobre $\mathbb{P}$ que es transitiva y reflexiva $(\forall p \in \mathbb{P}\,(p \leqslant p))$. Como es usual escribiremos $\mathbb{P}$ en vez de $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ si $\leqslant$ es clara en el contexto. Dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ son llamados *compatibles*, si ellos tienen una cota inferior común y son llamados *incompatibles* en caso contrario.

Por una *noción de forcing* entendemos un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ tal que para cada $p \in \mathbb{P}$ existen elementos incompatibles $q, r \in \mathbb{P}$ con $q, r \leqslant p$. Interpretamos $p \leqslant q$ como "*p extiende a q*", "*p es más fuerte que q*" o "*p tiene más información que q*". La frase "*p incompatible con q*" es denotada por $p \perp q$. Los elementos de $\mathbb{P}$ serán llamados *condiciones*. Finalmente, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ denotará la relación de forcing asociada con $\mathbb{P}$.

Una *anticadena* es un conjunto formado por elementos incompatibles por parejas. $\mathbb{P}$ satisface la *condición de cadena contable* (ccc) o *condición de anticadena contable*, si todas sus anticadenas son contables. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si cada elemento de $\mathbb{P}$ es $\geqslant$ a un elemento de D. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* si es cerrado superiormente y cualesquiera dos elementos de este son compatibles. Si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es llamado *$\mathcal{D}$-genérico* si intersecta a cada $D \in \mathcal{D}$.

El *axioma de Martin* (**MA**) afirma que si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ con la ccc y $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, entonces existe $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Por el término *modelo* entendemos un conjunto con una relación $\in$. Para modelos $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ decimos que $\mathbf{N}$ es un submodelo elemental de $\mathbf{M}$, $\mathbf{N} \prec \mathbf{M}$, si para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$\mathbf{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathbf{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

La *jerarquia acumulativa* de conjuntos es definida como $\mathbf{V}_0 = \emptyset$, $\mathbf{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha)$, y $\mathbf{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{V}_\alpha$ para λ un ordinal límite. $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$ es un modelo canónico de **ZFC**, donde **On** denota a la clase de los números ordinales. Para $x \in \mathbf{V}$, sea $\operatorname{rank}(x) = \min\{\alpha \colon x \in \mathbf{V}_\alpha\}$.

Uno de los modelos de $\mathbf{ZFC}^*$ que es usado muy amenudo es $\mathbf{H}(\theta)$, la colección de todos los conjuntos de cardinalidad hereditariamente menor que θ. Trabajaremos con $\mathbf{H}(\theta)$, donde θ es un cardinal regular "suficientemente grande".

Durante el presente trabajo haremos uso de la técnica de forcing iterado, aunque para nuestros propósitos solo haremos referencia a construcciones de forcing iterado con "soporte finito".

Recordemos que si $\mathbb{P}$ es una noción de forcing y $\dot{\mathbb{Q}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para una noción de forcing, entonces podemos forzar en $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ con $\dot{\mathbb{Q}}$ para obtener una nueva extensión $(\mathbf{V}^{\mathbb{P}})^{\dot{\mathbb{Q}}}$. Existe una sola noción de forcing $\mathbb{P} \star \dot{\mathbb{Q}}$ (llamada la *iteración* o *composición* de las nociones de forcing $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$) tal que la extensión $\mathbf{V}^{\mathbb{P}\star\dot{\mathbb{Q}}}$ es canónicamente isomorfa a $(\mathbf{V}^{\mathbb{P}})^{\dot{\mathbb{Q}}}$. La iteración $\mathbb{P} \star \dot{\mathbb{Q}}$ es definida como el conjunto de todas las parejas $\langle p, \dot{q}\rangle$ tal que $p \in \mathbb{P}$ y $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$". El orden $\leqslant_{\mathbb{P}\star\dot{\mathbb{Q}}}$ viene dado por

$$\langle p, \dot{q}\rangle \leqslant_{\mathbb{P}\star\dot{\mathbb{Q}}} \langle p', \dot{q}'\rangle \Leftrightarrow p \leqslant p' \wedge p' \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{q} \leqslant_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{q}'\text{”}.$$

1.1. Lema ([**Ku**]). *Sean $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$ como arriba. Entonces*

(1) *si $G \subseteq \mathbb{P}$ es genérico sobre $\mathbf{V}$, $H \subseteq \dot{\mathbb{Q}}_G$ genérico sobre $\mathbf{V}[G]$, entonces*

$$G \star H = \{\langle p, \dot{q}\rangle \colon p \in G,\ \dot{q}_G \in H\}$$

es genérico para $\mathbb{P} \star \dot{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}[G \star H] = \mathbf{V}[G][H]$, y

(2) *si $F \subseteq \mathbb{P} \star \dot{\mathbb{Q}}$ es genérico sobre $\mathbf{V}$, entonces $G = \{p \colon \exists \dot{q}\, \langle p, \dot{q}\rangle \in F\}$ es genérico para $\mathbb{P}$ sobre $\mathbf{V}$, $H = \{\dot{q}_G \colon \exists p \in G\, \langle p, \dot{q}\rangle \in F\}$ es genérico para $\dot{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbf{V}[G]$ y $F = G \star H$.* $\square$

Este lema nos permite identificar canónicamente $\mathbb{P} \star \dot{\mathbb{Q}}$-nombres con $\mathbb{P}$-nombres para elementos de $\dot{\mathbb{Q}}$.

Sea δ un ordinal y sea $\mathcal{I}$ un ideal (no necesariamente propio) sobre δ con $\mathsf{Fin}(\delta) \subseteq \mathcal{I}$. Una *construcción de forcing iterado de longitud δ con soporte en* $\mathcal{I}$, es un objeto de la forma

$$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle,$$

donde

(1) $\mathbb{P}_\alpha = \text{lím}_{\mathcal{I}} \langle \mathbb{P}_\beta, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$, y

(2) $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es una noción de forcing",

donde $\text{lím}_{\mathcal{I}} \langle \mathbb{P}_\beta, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$ es el conjunto de funciones sobre α tal que

(i) $p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta}$ "$p(\beta) \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$" para $\beta < \alpha$, y

(ii) $\{\beta \colon p(\beta) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}\} \in \mathcal{I}$.

Para $p, q \in \text{lím}_{\mathcal{I}} \langle \mathbb{P}_\beta, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$ se define

$$p \leqslant q \Leftrightarrow \forall \beta < \alpha \, (q \restriction \beta \Vdash \text{"}p(\beta) \leqslant_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta} q(\beta)\text{"})$$

y

$$\text{supp}(p) = \{\beta \colon p(\beta) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}\}.$$

Es fácil ver que el mapeo que manda a cada $p \in \mathbb{P}_{\alpha+1}$ a $\langle p \restriction \alpha, p(\alpha) \rangle$ es un isomorfismo entre $\mathbb{P}_{\alpha+1} = \text{lím}_{\mathcal{I}} \langle \mathbb{P}_\beta, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \colon \beta < \alpha + 1 \rangle$ y $\mathbb{P}_\alpha \star \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$. También, si $p \in \mathbb{P}_\beta$ podemos definir $p(\gamma) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma}$ para $\gamma \geqslant \beta$. De esta manera podemos tratar a $\mathbb{P}_\beta$ como un subconjunto de $\mathbb{P}_\alpha$ para $\alpha \geqslant \beta$. En caso de que $\mathcal{I} = \mathsf{Fin}(\delta)$, entonces diremos que $\mathbb{P}_\delta = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle$ es *una iteración con soporte finito*. Para más detalles en la teoría de forcing iterado, remitimos al lector también a [**Ba**] y [**BJ**].

2. Topología

Para un espacio topológico X, denotemos por $\tau(X)$ (o simplemente por τ) a la topología del espacio X. Sea $A \subseteq X$, denotaremos a la cerradura de A en X por $\text{Cl}_X(A)$ o bien por $\overline{A}$ si esto no se presta a confunsión. El interior de A (el conjunto abierto en X más grande contenido en A) será denotado por $\text{Int}_X(A)$ o simplemente $\text{Int}(A)$ si esto también no se presta a confunsión. En este sentido, A es llamado *nunca denso*, si su cerradura tiene interior vacío, en símbolos, $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ (o, equivalentemente, si el complemento de su cerradura es denso), y es llamado *denso en alguna parte* en otro caso. La colección de todos los subconjuntos nunca densos del espacio X será denotada por $\mathsf{nwd}(X)$.

Sea A un conjunto y X un espacio, entonces X^A tendrá la topología producto. Si $\langle X_i \colon i \in I \rangle$ es una familia de espacios topológicos y $X = \Pi_{i \in I} X_i$ es su producto cartesiano, $\pi_i \colon X \to X_i$ representará la i-ésima proyección de X para cada $i \in I$.

Todos los espacios considerados son al menos regulares T_1, y ocasionalmente completamente regulares, esto será claro por el contexto.

Recordemos que una subfamilia $\mathcal{B}$ de una topología τ de un espacio X es una *base* para X, si cada elemento de τ es la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Así, el *peso* de un espacio X es definido como

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}|\colon \mathcal{B} \text{ es una base de } X\} + \omega.$$

Una π-*base* en X es una familia $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos en X tales que si U es abierto y no vacío en X, entonces $V \subseteq U$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. El π-*peso* de X es definido entonces por

$$\pi w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}|\colon \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base en } X\} + \omega.$$

La *densidad* de X es definida por

$$d(X) = \text{mín}\{|D|\colon D \text{ es un subconjunto denso en } X\} + \omega.$$

1.2. Observación. $d(X) \leqslant \pi w(X) \leqslant w(X)$.

Sea X un espacio, $x \in X$ y $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X. $\mathcal{V}$ es una π-base local en x si para cada vecindad U de x existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subseteq U$. Si además se cumple que $x \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una *base local* en x. El π-*cáracter* y el *carácter* en x son definidos como

$$\pi\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}|\colon \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base local en } x\} + \omega$$

y

$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}|\colon \mathcal{V} \text{ es una base local en } x\} + \omega,$$

respectivamente. Así, el π-*cáracter* de X y el *carácter* de X son definidos por

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X)\colon x \in X\}$$

y

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X)\colon x \in X\},$$

respectivamente.

1.3. Observación. $\pi\chi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$ para $x \in X$, luego $\pi\chi(X) \leqslant \chi(X)$. También se sigue fácilmente que $\pi\chi(X) \leqslant \pi w(X)$ y $\chi(X) \leqslant w(X)$.

Recordemos que un espacio X es llamado *primero numerable* si $\chi(X) = \omega$. Denotemos por $\eta(x)$ a la colección de todos los conjuntos abiertos de X que contienen al punto x.

Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, decimos que $S \subseteq X$ *converge* a x (denotado por $S \to x$), si cada vecindad de x contiene a todos los puntos de A salvo una cantidad finita. Una de las generalizaciones más naturales y antigüas del concepto de primero numerable en un espacio topológico, es sin duda la propiedad de Fréchet-Urysohn. Un espacio topológico Hausdorff X es *Fréchet-Urysohn* si para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ y cualquier punto $x \in \overline{A}$ existe una sucesión (típicamente no trivial) $S \subseteq A$ tal que $S \to x$. Para nuestra comodidad, abreviaremos y llamaremos a tales espacios simplemente espacios de *Fréchet*.

La *estrechez* de un punto x en un espacio topológico X es el cardinal infinito más pequeño κ con la propiedad de que si $x \in \overline{A}$ con $A \subseteq X$, existe $E \subseteq A$ tal que $x \in \overline{E}$ y $|E| \leqslant \kappa$. Este número cardinal es denotado por $t(x, X)$. La *estrechez* de un espacio X es el supremo de todos los números $t(x, X)$ para $x \in X$, el cual es denotado por $t(X)$. Así, todo espacio Fréchet tiene estrechez numerable.

Las definiciones y propiedades topológicas que se utilizen en lo subsecuente y no se hayan establecido de manera explícita en esta sección o a lo largo del trabajo, pueden consultarse en [**En**].

3. La propiedad de Fréchet idealizada y las α_i-propiedades

Dado un espacio X y un punto $x \in X$, denotemos por $\mathcal{I}_x$ al ideal dual del filtro de vecindades de x, *i.e.*, $\mathcal{I}_x = \{A \subseteq X : x \notin \overline{A}\}$.

1.4. Observación. (1) Si X es numerable, entonces los miembros infinitos de $\mathcal{I}_x^\perp$ son precisamente las sucesiones convergentes a x.
(2) El espacio X es Fréchet en x si y sólo si para cada $A \in \mathcal{I}_x^+$ existe $S \in [A]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_x^\perp$, o equivalentemente, para cada $A \in \mathcal{I}_x^+$ el ideal $\mathcal{I}_x \restriction A$ no es alto.

La observación anterior nos muestra el lenguaje combinatorio que se encuentra detrás de la propiedad de Fréchet. Este lenguaje será el que usaremos a lo largo de todo el trabajo.

Por otro lado, a un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X, podemos asociarle de una manera natural un espacio topológico $X_\mathcal{I}$ de la siguiente manera. El conjunto base es $X \cup \{\mathcal{I}\}$, los elementos de X son aislados y las vecindades básicas de $\mathcal{I}$ son de la forma $\{\mathcal{I}\} \cup (X \setminus I)$, con $I \in \mathcal{I}$. Pues bien, es fácil ver que $X_\mathcal{I}$ es Fréchet si y sólo si $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$. De hecho, esto último es lo que motiva la definición de que un ideal $\mathcal{I}$ es *Fréchet* si $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp\perp}$.

1.5. Observación. (1) Todo ideal numerablemente generado es Fréchet. En particular, el ideal Fin es Fréchet.
(2) $\mathcal{I}$ no es Fréchet si y sólo si existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $\mathcal{I} \restriction A$ es alto.
(3) $\mathcal{I}^\perp$ es siempre Fréchet.

Con el objetivo de estudiar la propiedad de Fréchet en el producto topológico, A. V. Arhangel'skii en [**Ar1**] y [**Ar2**], introduce como una herramienta para su estudio, las α_i-propiedades.

Un espacio X es un α_i-*espacio*, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, si para cada $x \in X$ y cada sucesión $\langle I_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{I}_x^\perp \setminus \mathsf{Fin}(X)$, existe $I \in \mathcal{I}_x^\perp$ tal que

α_1**:** Para cada $n \in \omega$, $I_n \subseteq^* I$, es decir, $\mathcal{I}_x^\perp$ es un P-ideal.
α_2**:** Para cada $n \in \omega$, $I_n \cap I$ es infinito (equivalentemente, $I_n \cap I \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$).
α_3**:** Existe una infinidad de n's en ω tal que $I_n \cap I$ es infinito.
α_4**:** Existe una infinidad de n's en ω tal que $I_n \cap I \neq \emptyset$.

Notemos que estas definiciones tienen sentido también en cualquier ideal sobre un conjunto arbitrario. Aunque las definiciones de las α_i-propiedades tienen sentido en cualquier espacio topológico, nosotros sólo las consideraremos en la clase de los espacios de Fréchet, los cuales en general serán numerables.

Unas consecuencias inmediatas que podemos notar, son las siguientes

$$\begin{tikzcd}
 & & \alpha_1 \arrow[r] & \alpha_2 \arrow[r] & \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4 \\
\text{Métrico} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{Primero}\\ \text{numerable}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & & \text{Fréchet} & & &
\end{tikzcd}$$

Las α_i-propiedades han sido estudiadas por diversos autores a lo largo de todo este tiempo, y se sabe entre otras cosas, que se pueden distinguir entre sí en la clase de los espacios de Fréchet numerables, aunque dos de ellas sólo se puedan distinguir consistentemente. En este punto, no abundaremos en muchos detalles, salvo en los resultados que serán necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

La siguiente proposición nos muestra el papel que tiene el invariante cardinal $\mathfrak{p}$ (*resp.,* $\mathfrak{b}$) para que un espacio numerable X sea Fréchet (*resp.,* α_1) en un punto x.

1.6. Teorema ([**Ny3**]). *Sea X un espacio numerable y x un punto en X. Entonces*

(1) *Si $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$, entonces X es Fréchet en x. Más aún, esta cota es óptima, es decir, existe un espacio numerable X y un punto $x \in X$ con $\chi(x, X) = \mathfrak{p}$ tal que X no es Fréchet en x.*

(2) *Si $\chi(x, X) < \mathfrak{b}$, entonces X es α_1 en x. También esta cota es óptima, es decir, existe un espacio numerable X y un punto $x \in X$ con $\chi(x, X) = \mathfrak{b}$ tal que X no es α_1 en x.*

Demostración. Empecemos traduciendo esto último al lenguaje de ideales. Así, la propiedad de que X sea Fréchet (*resp.*, α_1) en x se traduce en que el ideal $\mathcal{I}_x$ sea Fréchet (*resp.*, α_1), y $\chi(x, X)$ se traduce en $\mathsf{cof}(\mathcal{I}_x)$. Con esto en mente, pasemos entonces a probar la versión idealizada de esta proposición.

(1) Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) < \mathfrak{p}$ y sea $Y \in \mathcal{I}^+$. Tomemos $\mathcal{J}$ un subconjunto cofinal en $\mathcal{I}$ con $|\mathcal{J}| = \mathsf{cof}(\mathcal{I})$, y hagamos $\mathcal{Y} = \{Y \setminus J \colon J \in \mathcal{J}\}$. Como $Y \in \mathcal{I}^+$ entonces $\mathcal{Y} \subseteq [Y]^\omega$. Ahora, del hecho de que $\mathcal{J}$ es cofinal en $\mathcal{I}$, nos es difícil ver que $\mathcal{Y}$ forma una familia centrada, luego $|\mathcal{Y}| < \mathfrak{p}$ implica la existencia de una pseudointersección $C \in [Y]^\omega$ de la familia $\mathcal{Y}$. De aquí es inmediato ver que $C \in \mathcal{I}^\perp$, y por lo tanto $\mathcal{I}$ es Fréchet.

Para la otra parte, tomemos una familia centrada $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ de tamaño $\mathfrak{p}$ sin pseudointersecciones infinitas, y consideremos el ideal $\mathcal{I}$ generado por la familia $\{\omega \setminus U \colon U \in \mathcal{U}\}$. Pues bien, el ideal $\mathcal{I}$ es alto. En efecto, sea $Y \in [\omega]^\omega$ entonces Y no es una pseudointersección de la familia $\mathcal{U}$, luego existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $C = Y \setminus U$ (el cual pertenece a $\mathcal{I}$) es infinito. Así, $\mathcal{I}$ no es Fréchet y la $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{p}$, y entonces el espacio asociado $X_{\mathcal{I}}$ no es Fréchet en $\mathcal{I}$ y $\chi(\mathcal{I}, X_{\mathcal{I}}) = \mathfrak{p}$.

(2) Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω tal que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) < \mathfrak{b}$ y sea $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}$. Tomemos $\mathcal{J}$ un subconjunto cofinal en $\mathcal{I}$ con $|\mathcal{J}| = \mathsf{cof}(\mathcal{I})$. Definamos para cada $J \in \mathcal{J}$ una función $f_J \in \omega^\omega$ dada por $f_J(n) = \text{mín}\,\{m \in I_n \colon k \notin J$ para cada $k \in I_n$ con $k \geqslant m\}$, luego $|\mathcal{J}| < \mathfrak{b}$ implica la existencia de una función $f \in \omega^\omega$ tal que $f_J \leqslant^* f$ para toda $J \in \mathcal{J}$. Sea $I = \bigcup_{n\in\omega}\{m \in I_n \colon f(n) \leqslant m\}$, entonces claramente $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$. Por otro lado, si $J \in \mathcal{J}$ entonces existe $m_J \in \omega$ tal que $f_J(n) \leqslant f(n)$ para toda $n \geqslant m_J$, por lo que $J \cap \bigcup_{n\geqslant m_J}\{m \in I_n \colon f(n) \leqslant m\} = \emptyset$, y dado que $\bigcup_{n<m_J}\{m \in I_n \colon f(n) \leqslant m\} \subseteq \bigcup_{n<m_J} I_n$, se sigue entonces que $I \cap J$ es finito. Así, $I \in \mathcal{I}^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}$, y por lo tanto $\mathcal{I}$ es α_1.

Para la otra parte, tomemos $\langle f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones no decrecientes en $\langle \omega^\omega, \leqslant^*\rangle$ no acotada. Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, sea $A_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega \colon m \leqslant f_\alpha(n)\}$ y considerese el ideal $\mathcal{I}$ en $\omega \times \omega$ generado por la familia $\{A_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b}\}$. Pues bien, el ideal $\mathcal{I}$ no es α_1 y la $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$. En efecto, que la $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ es claro, ahora para ver que $\mathcal{I}$ no es α_1, sea $I_n = \{n\} \times \omega$ para cada $n \in \omega$, entonces $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}$. Ahora, supongamos que para algún $I \subseteq \omega \times \omega$ se tiene que $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$, entonces definamos $f \in \omega^\omega$ dada por $f(n) = \text{mín}\,\{m \in \omega \colon \langle n, k\rangle \in I_n \cap I$ para toda $k \geqslant m\}$, luego existe $\alpha < \mathfrak{b}$ y $N \in [\omega]^\omega$ tal que $f_\alpha(n) > f(n)$ para toda $n \in N$, pero esto quiere decir entonces que $I \cap A_\alpha$ es infinito. Por lo tanto $\mathcal{I}$ no es α_1. Así, el espacio asociado $X_{\mathcal{I}}$ no es α_1 en $\mathcal{I}$ y $\chi(\mathcal{I}, X_{\mathcal{I}}) = \mathfrak{b}$. $\square$

Veamos ahora algunas relaciones que existen entre las α_i-propiedades y algunos juegos topológicos infinitos.

Sea X un espacio topológico y x un punto en X. El *juego abierto-punto*, $G_{\mathrm{op}}(x, X)$, introducido por G. Gruenhage en [**Gr**] es definido de la siguiente manera. Este juego es jugado por dos jugadores, **I** y **II**. En el n-ésimo paso ($n \in \omega$), el jugador **I** elige un subconjunto abierto U_n de X alrededor de x, y el jugador **II** elige un punto $x_n \in U_n \setminus \{x\}$. **I** gana si la sucesión $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ converge a x, en otro caso **II** gana.

Como es usual, una estrategia para el jugador **I** es un mapeo $\rho \colon (X \setminus \{x\})^{<\omega} \to \eta(x)$, y una estrategia para el jugador **II** es un mapeo $\sigma \colon \eta(x)^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to X \setminus \{x\}$ tal que para cada $n \in \omega$ y para cada $s \in \eta(x)^n$ se tiene que $\sigma(s) \in s(n-1)$. Una estrategia ρ para **I** es una *estrategia ganadora* si para cada $f \in X^\omega$ con $f(n) \in \rho(f \restriction n)$ para cada $n \in \omega$ se tiene que $x \in \overline{\mathrm{ran}(f)}$. Similarmente, σ es una *estrategia ganadora* para **II**, si para cada $f \in \eta(x)^\omega$ se tiene que $x \notin \overline{\{\sigma(f \restriction n) \colon n \in \omega\}}$.

1.7. Lema (Folklore). *Sea X un espacio topológico. Entonces*

(a) *Si X es numerable, entonces* **I** *tiene estrategia ganadora si y sólo si $\chi(x, X) = \omega$.*

(b) **II** *tiene estrategia ganadora si y sólo si existe $T \subseteq (X\setminus\{x\})^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{I}_x^+$ tal que $[T] \subseteq (\mathcal{I}_x^{\perp})^+$.*

Demostración. (a) Sea ρ una estrategia para **I** y supongamos que $\chi(x, X) > \omega$. Dado que $\mathrm{ran}(\rho)$ es numerable, entonces existe $U \in \eta(x)$ tal que $\rho(t) \nsubseteq U$ para toda $t \in (X \setminus \{x\})^{<\omega}$. Así, si **II** elige $x_n \in U_n \setminus U$ en el paso n, entonces la sucesión $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ no convergerá a x, luego

ρ no puede ser una estrategia ganadora para **I**. Por lo tanto, si **I** tiene estrategia ganadora entonces $\chi(x, X) = \omega$.

Para el otro sentido, supongamos que $\chi(x, X) = \omega$, entonces existe una base numerable $\{U_n \in \eta(x) \colon n \in \omega\}$ alrededor de x de tal manera que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Así, la estrategia ganadora para **I** es que en el paso n elija U_n.

(b) Supongamos que $\sigma \colon \eta(x)^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to X \setminus \{x\}$ es una estrategia ganadora para **II**, entonces construyamos por inducción un árbol $T \subseteq (X \setminus \{x\})^{<\omega}$ poniendo $\emptyset \in T$ y si $s \in T$ entonces es posible encontrar una sucesión finita $\overline{s} \in \eta(x)^{<\omega}$ tal que $\mathrm{dom}(\overline{s}) = \mathrm{dom}(s)$ y para cada n en $\mathrm{dom}(s)$ se tiene que $s(n) = \sigma(\overline{s} \restriction n)$ y $\overline{s \restriction n} = \overline{s} \restriction n$. Entonces $s^\frown y \in T$ si y sólo si existe $U \in \eta(x)$ tal que $\sigma(\overline{s}^\frown U) = y$. Fija esta U ponemos $\overline{s^\frown n} = \overline{s}^\frown U$. Como σ es una estrategia, es claro que T es un árbol de ramificación en $\mathcal{I}_x^+$, y como esta estrategia es ganadora entonces $[T] \subseteq (\mathcal{I}_x^\perp)^+$.

Para el otro sentido, supongamos que existe $T \subseteq (X \setminus \{x\})^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{I}_x^+$ tal que $[T] \subseteq (\mathcal{I}_x^\perp)^+$. Entonces la estrategia que hace ganar a **II** es la siguiente. En la primera jugada **II** debe elegir $x_0 \in U_0 \cap \mathrm{succ}_T(\emptyset)$, luego para la jugada $n \geqslant 1$ debe elegir $x_n \in U_n \cap \mathrm{succ}_T(x_{n-1})$, siendo x_{n-1} lo que jugó en la jugada $n-1$. Así $\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in T$ y entonces $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ no converge a x. □

1.8. Proposición (Folklore). *Supongamos que X es un espacio de Fréchet en x, entonces* **II** *no tiene estrategia ganadora si y sólo si X es α_2 en x.*

Demostración. Supongamos que **II** no tiene estrategia ganadora, entonces para cada árbol $T \subseteq (X \setminus \{x\})^{<\omega}$ existe $f \in [T]$ tal que $\mathrm{ran}(f) \in \mathcal{I}_x^\perp$. Ahora, sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}_x^\perp \setminus \mathsf{Fin}(X)$, y consideremos $T = \{s \in (X \setminus \{x\})^{<\omega} \colon s(n) \in I_n \text{ para cada } n < |s|\}$. Entonces T es un árbol de ramificación en $\mathcal{I}_x^+$, luego existe $f \in [T]$ con $\mathrm{ran}(f) \in \mathcal{I}_x^\perp \setminus \mathsf{Fin}(X)$. Pues bien, si $I = \mathrm{ran}(f)$ entonces $I \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Así, X es α_2 en x.

Para el otro sentido, sea $T \subseteq (X \setminus \{x\})^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{I}_x^+$. Como X es Fréchet en x, entonces para cada $s \in T$ existe $I_s \in \mathcal{I}_x^\perp \setminus \mathsf{Fin}(X)$ tal que $I_s \subseteq \mathrm{succ}_T(s)$. Ahora, como X es α_2 en x entonces existe $I \in \mathcal{I}_x^\perp \setminus \mathsf{Fin}(X)$ tal que $I \cap I_s \neq \emptyset$ para cada $s \in T$, luego existe $f \in [T]$ tal que $\mathrm{ran}(f) \subseteq I$. Por lo tanto **II** no tiene estrategia ganadora. □

4. Grupos topológicos

Uno de los objetos de nuestro estudio serán los grupos topológicos, los cuales, como su nombre lo indica, implican una entidad algebraica que permite una estructura topológica muy relacionada con la operación de grupo. Es la definición de grupo topológico la que presenta mejores condiciones para desarrollar tanto la topología como el álgebra, estando ambas presentes.

Una topología τ sobre un grupo $(G, \cdot)$ es una *topología de grupo*, si las operaciones de grupo $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (multiplicación) y $x \mapsto x^{-1}$ (inverso) son continuas, cuando $G \times G$ viene con la topología producto. Si H es un subgrupo de G, entonces cada topología de grupo sobre G induce una topología de grupo sobre H. Un *grupo topológico* es una terna $(G, \cdot, \tau)$ que consiste de un grupo $(G, \cdot)$ y una topología de grupo τ sobre G. Si no hay ambigüedad, usaremos sólo G para referirnos al grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$.

El símbolo e_G (o simplemente e) denotará siempre a la identidad de un grupo G. En ocasiones prescindiremos del uso del símbolo de operación binaria $\cdot$, *i.e.,* en vez de $x \cdot y$ escribiremos simplemente xy.

Una de las ventajas que se tienen al trabajar con grupos topológicos es que la operación de grupo hace indistinguibles las propiedades locales en el grupo desde el punto de vista de la topología, como lo muestra el siguiente teorema.

1.9. Teorema (Folklore). *Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones φ_g y σ_g (llamadas tralaciones a la derecha e izquierda por g, respectivamente) de G en sí mismo, dadas por $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$ con $x \in G$, son homeomorfismos. La inversión $f\colon G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$, también es un homeomorfismo.* $\square$

1.10. Corolario. *Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.* $\square$

La siguiente proposición resume algunos otros resultados que pueden obtenerse con la ayuda del Teorema 1.9, dichos resultados nos permiten estudiar las propiedades locales de un grupo topológico en un solo punto, que por simplificar, usualmente siempre se toma a la identidad del grupo como punto de referencia.

1.11. Proposición (Folklore). *Sea G un grupo topológico.*

(1) *Si D es un subespacio denso en G y U es una vecindad de la identidad e, entonces $G = DU$.*
(2) *Si $\mathcal{B}$ es una base local para e y para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $D_B \subseteq G$ tal que $G = D_B B$, entonces $\{xB\colon x \in D_B,\ B \in \mathcal{B}\}$ forma una base para G.*
(3) *Si U es una vecindad de la identidad e, entonces para cada $n > 0$ existe V vecindad de e con $V^n \subseteq U$, donde $V^n = V \cdots V$, n factores.* $\square$

Ahora, con la ayuda de esta última proposición es posible obtener el siguiente teorema.

1.12. Teorema (Folklore). *Sea G un grupo topológico, la familia $\eta(e)$ de todos los subconjuntos abiertos de G que contienen al elemento identidad e, es una base de filtro con las siguientes propiedades.*

(i) *para cada $U \in \eta(e)$ existe $V \in \eta(e)$ tal que $V \cdot V \subseteq U$, aquí $V \cdot W = \{vw\colon v \in V \text{ y } w \in W\}$;*
(ii) *para cada $U \in \eta(e)$ existe $V \in \eta(e)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, donde $V^{-1} = \{v^{-1}\colon v \in V\}$;*
(iii) *para cada $U \in \eta(e)$ y cada $a \in G$ existe $V \in \eta(e)$ tal que $aV \subseteq Ua$.*

Inversamente, si η es una base de filtro (alrededor de e) de un grupo G que satisface las propiedades (i)-(iii), entonces la familia

$$\tau = \{V \subseteq G\colon \forall a \in V\ \exists U \in \eta\, (aU \subseteq V)\}$$

es una topología de grupo sobre G tal que η es una base local para τ en e. □

Así, una topología de grupo está completamente determinada por la base de filtro $\eta(e)$.

Todos los grupos topológicos que se considerarán aquí son almenos T_0 luego completamente regulares.

El teorema clásico de metrización para grupos topológicos dado por G. Birkhoff y S. Kakutani en 1936 establece lo siguiente.

1.13. Teorema ([**Bi**],[**Ka**]). *Un grupo topológico T_1 es metrizable si y sólo si es primero numerable.* □

Un resultado útil relacionado con este teorema es el siguiente.

1.14. Proposición (Folklore). *Todo grupo topológico que admita un subgrupo denso metrizable es también metrizable.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico que admite un subgrupo denso metrizable H. Por el Teorema 1.13, H es primero numerable. Sea $\{V_n\colon n \in \omega\}$ una base local numerable del elemento identidad e en H. Entonces para cada $n \in \omega$ existe un abierto U_n en G tal que $V_n = U_n \cap H$. Pues bien, $\{U_n\colon n \in \omega\}$ forma una base local de e en G. En efecto, sea $U \in \eta_G(e)$, entonces por la regularidad de G, existe $W \in \eta_G(e)$ tal que $\mathrm{Cl}_G(W) \subseteq U$. Ahora, existe $n \in \omega$ tal que $V_n \subseteq W \cap H$, y por densidad de H, se tiene que $\mathrm{Cl}_G(U_n) = \mathrm{Cl}_G(V_n) \subseteq \mathrm{Cl}_G(W)$, por lo que $U_n \subseteq U$. Finalmente, por la homogeniedad de un grupo topológico, se tiene entonces que G es primero numerable, luego por el Teorema 1.13, se obtiene que G es metrizable. □

El siguiente teorema nos muestra que para la clase de los grupos topológicos algunos cardinales invariantes clásicos coinciden.

1.15. Teorema ([**Ar3**]). *Sea G un grupo topológico. Entonces*

(a) $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$*;*
(b) $\chi(G) = \pi\chi(G)$*;*
(c) $w(G) = \pi w(G)$.

Demostración. (a) Sabemos que $d(G) \leqslant w(G)$ y $\chi(G) \leqslant w(G)$ (Obervación 1.2 y 1.3), luego $d(G) \cdot \chi(G) \leqslant w(G)$. Para la otra desigualdad, considere un subconjunto denso D en G de cardinalidad $d(G)$. Sea $\mathcal{B}$ una base local para e tal que $|\mathcal{B}| = \chi(G)$. Por la Proposición 1.11 (1) sabemos que $G = DB$ para cada $B \in \mathcal{B}$, y por el inciso (2) de la misma proposición se deduce que $\mathcal{V} = \{xB\colon x \in D, B \in \mathcal{B}\}$ forma una base para G de cardinalidad no mayor que $d(G) \cdot \chi(G)$. Por consiguiente, $w(G) \leqslant d(G) \cdot \chi(G)$.

(b) Por Observación 1.3, es suficiente con probar que $\chi(G) \leqslant \pi\chi(G)$. Sea $\mathcal{U}$ una π-base en la identidad e de G tal que $|\mathcal{U}| = \pi\chi(G)$. Entonces la familia $\mathcal{W} = \{UU^{-1}\colon U \in \mathcal{U}\}$ forma una base local en e. En efecto, si $O \in \eta(e)$ entonces existe $V \in \eta(e)$ tal que $VV^{-1} \subseteq O$. Dado que $\mathcal{U}$ es una

π-base en e, podemos encontrar $U \in \mathcal{U}$ con $U \subseteq V$. Entonces $W = UU^{-1} \in \mathcal{W}$ y $e \in W \subseteq O$. Esto prueba que $\mathcal{W}$ es una base local en la identidad de G. Dado que $|\mathcal{W}| \leqslant |\mathcal{U}| = \pi\chi(G)$, concluimos que $\chi(G) \leqslant \pi\chi(G)$. Esto prueba (b).

(c) Por Obervación 1.2, es suficiente con demostrar que $w(G) \leqslant \pi w(G)$. Sabemos que $d(G) \leqslant \pi w(G)$ y $\pi\chi(G) \leqslant \pi w(G)$ (Obervación 1.2 y 1.3). Por lo tanto, según los incisos (a) y (b), se tiene que

$$w(G) \leqslant d(G) \cdot \chi(G) \leqslant d(G) \cdot \pi\chi(G) \leqslant \pi w(G).$$

□

El producto directo de una familia de grupos topológicos equipado con la topología producto es grupo topológico.

El *grupo cociente* G/N de un grupo topológico G con respecto a un subgrupo normal N de G es usualmente equipado con la topología cociente. Esta topología es siempre una topología de grupo, G/N es Hausdorff si y sólo si N es cerrado, G/N es discreto si y sólo si N es abierto, G/N es indiscreto si y sólo si N es denso. La proyección canónica $\pi\colon G \to G/N$ es abierta.

El grupo del círculo $\mathbb{T}$ es identificado con el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, el cual escribiremos en forma aditiva. Al elemento neutro de un grupo Abeliano G, lo denotaremos por 0_G (o simplemente 0), y en el caso de $\mathbb{T}$ será denotado por $\mathbf{0}$. La *norma* $\|x\|$ de un elemento $x \in \mathbb{T}$, se define como la longitud del arco más pequeño entre $\mathbf{0}$ y x. Por tanto, si d denota la métrica usual de $\mathbb{T}$ entonces $d(x, y) = \|x - y\|$. Denotemos por $T_m = \{x \in \mathbb{T}\colon \|x\| < \frac{1}{m}\}$ al arco simétrico abierto centrado en $\mathbf{0}$ con radio $\frac{1}{m}$.

Recordemos que dado un grupo Abeliano G su (grupo dual) *grupo de carácteres* es definido como

$$G^* = \{x\colon G \to \mathbb{T}\colon x \text{ es un homomorfismo continuo}\}$$

equipado con la topología *compacto-abierta*. El *mapeo evaluación* $e\colon G \to \mathbb{T}^{G^*}$ es definido por la fórmula $e(g)(x) = x(g)$ para $g \in G$ y $x \in G^*$.

La teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen es una poderosa herramienta para el estudio de propiedades topológicas y algebraicas de grupos Abelianos localmente compactos. Un buen ejemplo de esto son los siguientes hechos conocidos de la literatura que debemos tener presente.

1.16. Teorema ([**Po**], [**vKa**]). *Sea G un grupo Abeliano localmente compacto. Entonces*

(1) *G^* es un grupo Abeliano localmente compacto.*
(2) *Via el mapeo evaluación e, G^{**} es naturalmente isomorfo a G.*
(3) *G^* es compacto si y sólo si G es discreto.*
(4) *Un grupo Abeliano compacto G es metrizable si y sólo si G^* es numerable.* □

Estos resultados motivan a decir que toda porción de información relativa a un grupo Abeliano localmente compacto está contenida en alguna parte de su grupo dual. Así, por ejemplo, todo grupo Abeliano compacto puede caracterizarse mediante propiedades puramente algebraicas de su grupo dual discreto.

Por el símbolo G_d denotaremos al grupo G dotado con la topología discreta.

1.17. Observación. $|(G_d)^*| \geqslant \mathfrak{c}$, cuando G es infinito.

Dado un grupo Abeliano G y un número primo p, la *parte p de torsión*, o equivalentemente, la *componente p-primaria* de G es definida como

$$G_p = \{g \in G\colon p^n g = 0_G, \text{ para algún } n \in \omega\}.$$

Si $G = G_p$ para algún primo p, entonces G es llamado un *p-grupo de torsión*. Es bien conocido que cada grupo Abeliano de torsión es isomorfo a la suma directa $\bigoplus_p G_p$.

Un subconjunto no vacío A de un grupo Abeliano G que no contenga al elemento neutro es llamado *independiente*, si para cada conjunto finito $a_1, \ldots, a_n$ de elementos distintos de A y números enteros $m_1, \ldots, m_n$, la igualdad $m_1a_1 + \cdots + m_na_n = 0_G$ implica que $m_ia_i = 0_G$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Así, el lema de Kuratowski-Zorn nos implica que cada subconjunto independiente de un grupo G está contenido en un subconjunto independiente maximal. El *rango libre de torsión* de un grupo Abeliano G, en símbolos $r_0(G)$, es definido como la cardinalidad de un subconjunto independiente maximal de elementos de orden infinito de G. Similarmente, para un primo p, el *p-rango* $r_p(G)$ de un grupo G es definido como la cardinalidad de un subconjunto independiente maximal de G donde cada elemento tiene orden una potencia de p. El *rango de Prüfer*, a menudo llamado simplemente el *rango* de G, es definido como

$$r(G) = r_0(G) + \sum_p r_p(G).$$

Es claro que $r(G) = r_0(G)$ si el grupo G es libre de torsión, y $r(G) = r_p(G)$ si G es un p-grupo de torsión. Para un primo p, denotemos por $\mathbb{Z}(p^\infty)$ al p-grupo cuasicíclico. Para más detalles así como para una introducción a la teoría de estructura de grupos Abelianos remitimos al lector a [**Ro**] (*e.g.,* véase Sección 4.2).

Las definiciones y propiedades de grupos topológicos que se utilizen en lo subsecuente y no se hayan establecido de manera explícita en esta sección o a lo largo del trabajo, pueden consultarse en [**AT**] y [**HR**].

Capítulo 2

Problema de Malykhin

Con el propósito de establecer las líneas de investigación que se han visto involucradas en el estudio del problema de Malykhin, en el presente capítulo hacemos un recuento de los resultados parciales más relevantes que varios autores han dado al problema de Malykhin a lo largo de todo este tiempo. Los resultados son presentados usando el lenguaje combinatorio que se describió en la Sección 3 del Capítulo 1.

Comenzamos con dos resultados (en cierto sentido generales) de la literatura que serán necesarios tener presentes.

Con el objetivo de generalizar el resultado de metrizabilidad de G. Birkhoff y S. Kakutani, en [**AM**] A. V. Arhangel'skii y V. I. Malykhin introducen la noción de bisecuencialidad en espacios topológicos.

Sea X un espacio topológico, decimos que X es *bisecuencial* en $x \in X$, si para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X que converja a x, existe una sucesión $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq \mathcal{U}$ convergente a x, es decir, para cada $U \in \eta(x)$ existe $n \in \omega$ tal que $X_n \subseteq U$. Llamando entonces a X bisecuencial, si este es bisecuencial en cada $x \in X$.

Es claro que todo espacio primero numerable es bisecuencial. Así, el siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.13.

2.1. Teorema ([**AM**]). *Todo grupo topológico bisecuencial es metrizable.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico bisecuencial con elemento identidad e. Sea $\mathcal{G}$ la familia de todos los subconjuntos densos abiertos de G, luego como $\eta(e) \cup \mathcal{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces tomemos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre G que contenga a $\eta(e) \cup \mathcal{G}$, obteniendo en particular que $\mathsf{nwd}(G) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Ahora, dado que G es bisecuencial en e, entonces existe una sucesión $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq \mathcal{U}$ convergente a e. Haciendo $U_n = \operatorname{Int}(\overline{X_n}) \neq \emptyset$ y $V_n = U_n \cdot U_n^{-1}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos que $\langle V_n \colon n \in \omega \rangle$ forma una base de vecindades alrededor de e. En efecto, de la teoría básica de grupos topológicos, se sabe que existe $\mathcal{V} \subseteq \eta(e)$ tal que $\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^{-1} = \{V \cdot V^{-1} \colon V \in \mathcal{V}\}$ forma una base de vecindades alrededor de e. Ahora, dado que G es regular, para $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \eta(e)$ tal que $\overline{U} \subseteq V$, luego como existe $n \in \omega$ tal que $X_n \subseteq U$, obtenemos que $U_n \subseteq V$, por lo que entonces $V_n \subseteq V \cdot V^{-1}$. Así, $\langle V_n \colon n \in \omega \rangle$ forma una base de vecindades alrededor de e. De la homogeniedad de un grupo topológico obtenemos que G es primero numerable, luego por el Teorema 1.13, G es metrizable. $\square$

Con respecto a las α_i-propiedades, el siguiente resultado nos muestra que para la clase de los grupos topológicos, la condición de ser Fréchet es suficiente para obtener la α_i-propiedad más débil.

2.2. Teorema ([**Ny1**]). *Todo grupo topológico Fréchet es* α_4.

Demostración. Sea G un grupo topológico Fréchet con elemento identidad e. Por la homogeniedad de un grupo topológico, para ver que G es α_4, es suficiente con probar que G es α_4 en e. Así, sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}_e^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}(G)$ y $\{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración de I_0, entonces se tiene que $x_n \cdot I_n \to x_n$ para cada $n \in \omega$, luego $e \in \overline{X}$, donde $X = \bigcup_{n\in\omega}(x_n \cdot I_n)$. Dado que G es Fréchet en e, existe $J \in [X]^{\omega}$ tal que $J \to e$, entonces $J \cap (x_n \cdot I_n)$ es finito para cada $n \in \omega$, luego existe $K \in [\omega]^{\omega}$ tal que $\langle x_k \cdot y_k \rangle_{k\in K} \subseteq J$ con $y_k \in I_k$ para cada $k \in K$.

Por otro lado, dado que $\langle x_k \rangle_{k\in K}$ converge a e, entonces también lo hace la sucesión $\langle x_k^{-1} \rangle_{k\in K}$, y en consecuencia la sucesión $\langle x_k^{-1} \cdot (x_k \cdot y_k) \rangle$ también converge a e. Así, $I = \{y_k : k \in K\} \in \mathcal{I}_e^{\perp}$ y satisface que $\exists^{\infty} n \in \omega$ tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. □

1. Resultados parciales en el sentido positivo

Hemos mencionado ya en la introducción general de esta tesis que si se asume $\mathfrak{p} > \omega_1$ y G es un grupo topológico metrizable separable con almenos dos elementos, entonces G^{ω_1} es un grupo topológico Fréchet separable el cual no es metrizable. Otros ejemplos consistentes (más "descriptivos") a la pregunta de Malykhin se han construido a lo largo de la historia del problema. Estos ejemplos sin embargo han sido esencialmente solo de dos tipos: de tipo Booleano y del tipo $C_p(X)$. En esta sección presentamos dichas construcciones, en donde la combinatoria infinita de $\mathcal{P}(\omega)$ así como el estudio de ciertos subconjuntos especiales de la recta real han mostrado ser una herramienta útil para el estudio del problema de Malykhin.

1.1. El caso Booleano y el ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$ Fréchet. Sea $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ el grupo *Booleano* (*i.e.*, todo elemento que no es el neutro del grupo tiene orden 2) formado por los subconjuntos finitos de ω con la diferencia simétrica como operación de grupo. Con ayuda del Teorema 1.12, al grupo $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ le podemos introducir de una manera natural una clase de topologías que lo hacen un grupo topológico.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, para cada $I \in \mathcal{I}$ consideremos el conjunto $\mathcal{I}_I = \{a \in [\omega]^{<\omega} : a \cap I \neq \emptyset\}$, y denotemos por $\mathcal{I}^{<\omega}$ al ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$ generado por los conjuntos $\mathcal{I}_I$ con $I \in \mathcal{I}$, esto es, $\mathcal{I}^{<\omega} = \{A \subseteq [\omega]^{<\omega} : \text{existe } I \in \mathcal{I} \text{ tal que } I \cap a \neq \emptyset \text{ para toda } a \in A\}$. Haciendo al filtro dual de $\mathcal{I}^{<\omega}$ una base de vecindades de $\emptyset$, podremos introducir una topología $\tau_{\mathcal{I}}$ sobre $[\omega]^{<\omega}$ que hace de $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ un grupo topológico. Ahora, es fácil ver que $([\omega]^{<\omega}, \Delta, \tau_{\mathcal{I}})$ es Hausdorff si y sólo si $\mathcal{I}$ es libre (*i.e.*, $\bigcup \mathcal{I} = \omega$). Dado que para nosotros todo ideal $\mathcal{I}$ contiene a Fin, entonces $\mathcal{I}$ es libre y en consecuencia $\tau_{\mathcal{I}}$ será siempre Hausdorff.

El estudio del ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$ bajo la propiedad de Fréchet, lo hacen E. Reznichenko y O. Sipacheva en [**RS**], aunque ellos lo abordan en términos de que un filtro $\mathcal{F}$ sobre ω tenga la propiedad de *Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos* (FUF), tal propiedad es denotada en la literatura también por $\mathrm{FU}_{\mathrm{fin}}$ (*e.g.*, véase [**GS**]). La noción FUF había aparecido ya antes en la literatura con A. Dow y J. Steprāns en [**DS**] bajo el nombre "groupwise Fréchet", pero el primer estudio sistemático de esta noción lo hacen Reznichenko y Sipacheva en [**RS**].

Antes de presentar el estudio de $\mathcal{I}^{<\omega}$, cabe mencionar el siguiente hecho.

2.3. HECHO (Folklore). *Todo grupo Booleano numerable es isomorfo a* $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$.

DEMOSTRACIÓN. Para esto, simplemente notemos que todo grupo Booleano es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$, luego si este grupo es numerable, entonces este espacio tendrá la misma dimensión que $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$, por lo que ambos espacios tendrán que ser isomorfos como espacios vectoriales, entonces en particular también lo tendrán que ser como grupos. $\square$

El siguiente teorema resume algunas relaciones que existen entre $\mathcal{I}^{<\omega}$ y $\tau_{\mathcal{I}}$.

2.4. TEOREMA ([**RS**]). *Sea* $\mathcal{I}$ *un ideal (libre) sobre* ω. *Entonces*

(1) $\tau_{\mathcal{I}}$ *hace de* $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ *un grupo topológico.*
(2) $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega})$*, luego* $\tau_{\mathcal{I}}$ *es primero numerable (equivalentemente, metrizable) si y sólo si* $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega$.
(3) $\tau_{\mathcal{I}}$ *es Fréchet si y sólo si* $\mathcal{I}^{<\omega}$ *es Fréchet.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Para esto, empecemos con notar que el filtro dual de $\mathcal{I}^{<\omega}$ es justamente $\mathcal{F}^{<\omega} = \{A \subseteq [\omega]^{<\omega} \colon \text{existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq A\}$, donde $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$. Así, el filtro $\mathcal{F}^{<\omega}$ está siendo generado por los conjuntos de la forma $[F]^{<\omega}$, con $F \in \mathcal{F}$. Ahora, es imediato ver que la familia $\eta = \{[F]^{<\omega} \colon F \in \mathcal{F}\}$, satisface las condiciones del Teorema 1.12, por lo que entonces $\tau_{\mathcal{I}}$ hace de $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ un grupo topológico.

(2) Para esto, notemos que si $\mathcal{J}$ es un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}$, entonces los conjuntos de la forma $\mathcal{I}_J$ para $J \in \mathcal{J}$ forman un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}^{<\omega}$, de aquí que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega}) \leqslant \mathsf{cof}(\mathcal{I})$.

Para la otra desigualdad, notemos que podemos identificar al ideal $\mathcal{I}$ con $\mathcal{I}^{<\omega} \restriction [\omega]^1$. Así, si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}^{<\omega}$, entonces $\mathcal{A} \restriction [\omega]^1$ formará un subconjunto cofinal de $\mathcal{I}^{<\omega} \restriction [\omega]^1$, de aquí que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) \leqslant \mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega})$. Por lo tanto, $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega})$.

Finalmente, de esto último y del Teorema 1.13, se sigue entonces la otra parte de este inciso.

(3) Sea $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$. Entonces para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $a \in X$ con $I \cap a = \emptyset$, equivalentemente, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $a \in X$ con $a \subseteq F$, donde $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$. Así, $X \cap [F]^{<\omega} \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$, luego por definición de $\tau_{\mathcal{I}}$, $\emptyset \in \overline{X}$. Por ser $\tau_{\mathcal{I}}$ Fréchet, existe $C \in [X]^\omega$ tal que $C \to \emptyset$, por lo que entonces $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$.

En el otro sentido, sea $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$ tal que $\emptyset \in \overline{X}$. Entonces $X \cap [F]^{<\omega} \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$). Esto quiere decir que $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$, luego por ser $\mathcal{I}^{<\omega}$ Fréchet, existe $C \in [X]^\omega$ tal que $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$, de donde $C \to \emptyset$. $\square$

Así, una manera de introducirle al grupo Booleano $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ una topología de grupo Fréchet no metrizable, es encontrando un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω con $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) > \omega$ tal que el ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$

sea Fréchet. Por tal razón, esta ha sido una de las líneas de investigación para abordar la pregunta de Malykhin en el caso Booleano. De hecho, Reznichenko y Sipacheva en [**RS**] hacen la siguiente pregunta.

2.5. Pregunta (Reznichenko-Sipacheva [**RS**]). *¿Existe un ideal $\mathcal{I}$ no numerablemente generado tal que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet?*

Como un primer ejemplo de esto, veamos que $\mathfrak{p} > \omega_1$ es una condición suficiente para encontrar un ideal con dichas propiedades.

2.6. Hecho (Folklore). *$\mathfrak{p} > \omega_1$ implica la existencia de una topología de grupo Fréchet no metrizable en el grupo Booleano $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$.*

Demostración. Para esto, tomemos un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω con $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega_1$ (*e.g*, el ideal generado por una familia casi ajena de tamaño ω_1). Dado que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I}) < \mathfrak{p}$, entonces según la versión idealizada de (1) del Teorema 1.6, el ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet. $\square$

Veamos a continuación algunas relaciones que hay entre $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^{<\omega}$ en correlación con la propiedad de Fréchet y las α_i-propiedades.

2.7. Hecho (Folklore). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Si $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces también $\mathcal{I}$ es Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ respectivamente.*

Demostración. Para ver esto, como podemos identificar al ideal $\mathcal{I}$ con $\mathcal{I}^{<\omega} \restriction [\omega]^1$, y dado que la atomización $[\omega]^1 \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$, entonces la propiedad de ser Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ del ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$, será heredada también a $\mathcal{I}^{<\omega} \restriction [\omega]^1$, y en consecuencia a $\mathcal{I}$. $\square$

Mostremos que las propiedades α_4, α_3 y α_2 coinciden en $\mathcal{I}^{<\omega}$. Este resultado es dado por P. J. Nyikos en [**Ny3**]. Este resultado así como otras consecuencias relativas a los ideales $\mathcal{I}^{<\omega}$ y $\mathcal{I}$, estan englobados en el próximo teorema, para el cual será necesario tener presente el siguiente lema.

2.8. Lema ([**Ny3**]). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, entonces $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$ si y sólo si $\bigcup X \in \mathcal{I}^\perp$ y X es localmente finito, esto es, $\{x \in X : n \in x\}$ es finito para cada $n \in \omega$.*

Demostración. Sea $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$ e $I \in \mathcal{I}$ dados. Como $\mathcal{I}_I \in \mathcal{I}^{<\omega}$, entonces $X \cap \mathcal{I}_I = \{x \in X : x \cap I \text{ es finito}\}$ es finito, luego $(\bigcup X) \cap I$ es finito. Así, $\bigcup X \in \mathcal{I}^\perp$. Para ver que X es localmente finito, notemos que para cada $n \in \omega$ se tiene que $\{n\} \in \mathcal{I}$, luego $\mathcal{I}_{\{n\}} = \{a \in [\omega]^{<\omega} : n \in a\} \in \mathcal{I}^{<\omega}$, entonces $X \cap \mathcal{I}_{\{n\}}$ es finito, es decir, $\{x \in X : n \in x\}$ es finito.

En el otro sentido, sea $X \in [\omega]^{<\omega}$ localmente finito con $\bigcup X \in \mathcal{I}^\perp$. Para ver que $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$, es suficiente con probar que $X \cap \mathcal{I}_I$ es finito para cada $I \in \mathcal{I}$. Sea $I \in \mathcal{I}$. Entonces para $X \cap \mathcal{I}_I = \{x \in X : x \cap I \text{ es finito}\}$ tenemos que $(\bigcup X) \cap I \subseteq \bigcup (X \cap \mathcal{I}_I)$, pero $(\bigcup X) \cap I$ es finito y dado que X es localmente finito, entonces $X \cap \mathcal{I}_I$ debe ser finito. Por lo tanto $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$. $\square$

2.9. Teorema ([**Ny3**]). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Entonces*

(1) $\mathcal{I}^{<\omega}$ *es* α_1 *si y sólo si* $\mathcal{I}$ *es* α_1.
(2) α_4 *es equivalente a* α_2 *para* $\mathcal{I}^{<\omega}$.
(3) *Si* $\mathcal{I}^{<\omega}$ *es Fréchet, entonces* $\mathcal{I}^{<\omega}$ *es* α_2.

Demostración. (1) Una de las implicaciones ya fué observada anteriormente en el Hecho 2.7, por lo que sólo una implicación requiere de prueba. Así, supongamos que el ideal $\mathcal{I}$ es α_1, y tomemos $\langle X_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}([\omega]^{<\omega})$. Hagamos $I_n = \bigcup X_n$ para cada $n \in \omega$, luego por el Lema 2.8, se sigue que $\langle I_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathcal{I}^{\perp}$ y que X_n es localmente finito para cada $n \in \omega$, deduciendose de esto último en particular, que I_n es infinito para cada $n \in \omega$. Y dado que $\mathcal{I}$ es α_1, entonces existe $I \in \mathcal{I}^{\perp}$ tal que $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$. Ahora, dado que X_n es localmente finito, obtenemos por un lado que $\{x \in X_n\colon x \cap n \neq \emptyset\}$ es finito, y por el otro que $x \subset I$ para toda $x \in X_n$ salvo una cantidad finita. Así, definiendo $X'_n = \{x \in X_n\colon x \subset I \text{ y } x \cap n = \emptyset\}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos que $X_n \subseteq^* X'_n$ para cada $n \in \omega$. Pues bien, hagamos $X = \bigcup_{n\in\omega} X'_n$, luego $\bigcup X \subseteq I$, por lo que $\bigcup X \in \mathcal{I}^{\perp}$. Por otro lado, por la manera en que se definieron los X'_n's, es fácil ver que X es localmente finito, luego por el Lema 2.8, se obtiene que $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp}$. Ahora, es claro que $X_n \subseteq^* X$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_1.

(2) Una de las implicaciones es clara. Así, supongamos que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_4, y tomemos $\langle X_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}([\omega]^{<\omega})$. Fijando una enumeración de X_n, digamos $X_n = \{x_n(k)\colon k \in \omega\}$, para cada $n \in \omega$, definamos $y_n(k) = \bigcup_{m\leqslant n} x_m(k)$ para $\langle n, k\rangle \in \omega \times \omega$, luego hagamos $Y_n = \{y_n(k)\colon k \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Así, aplicando el Lema 2.8, se obtiene que $\langle Y_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathsf{Fin}([\omega]^{<\omega})$, luego como $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_4, entonces existe $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp}$ tal que $Y \cap Y_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Entonces, para cada $n \in \omega$, podemos elegir k_n tal que $x_n(k_n)$ sea un subconjunto de algún $y(\ell_n) \in Y$, y de tal manera que los ℓ_n's sean distintos. Ahora, por Lema 2.8, sabemos que $\bigcup Y \in \mathcal{I}^{\perp}$ y que Y es localmente finito, luego $X = \{x_n(k_n)\colon n \in \omega\}$ también es localmente finito, y dado que $\bigcup X \subseteq \bigcup Y$ entonces también tenemos que $\bigcup X \in \mathcal{I}^{\perp}$. Así, aplicando nuevamente el Lema 2.8, obtenemos que $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^{\perp}$, el cual cumple por definición que $X \cap X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_2.

(3) Supongamos que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces por la Proposición 2.4 inciso (3), se tiene que $\tau_{\mathcal{I}}$ es Fréchet, luego por el Teorema 2.2, obtenemos que $\tau_{\mathcal{I}}$ es α_4, es decir, $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_4. Así, aplicando el inciso anterior de este teorema, se obtiene que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es α_2. □

2.10. Teorema ([**Ny3**]). $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ *implica la existencia de una topología de grupo Fréchet no metrizable en el grupo Booleano* $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$.

Demostración. Nuevamente, es suficiente con probar que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ es posible encontrar un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\omega\times\omega$ con $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) > \omega$ tal que el ideal $\mathcal{I}^{<\omega}$ sea Fréchet. Para esto, sea $\langle f_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones no decrecientes en $\langle \omega^\omega, \leqslant^*\rangle$ no acotada. Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ consideremos $L_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega\colon m < f_\alpha(n)\}$, y para cada $n \in \omega$, sea $C_n = \{n\} \times \omega$ (la n-ésima columna de $\omega \times \omega$). Pues bien, sea $\mathcal{I}$ el ideal sobre $\omega \times \omega$ generado por la familia casi ajena $\{f_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\} \cup \{C_n\colon n \in \omega\}$. Ahora, es fácil ver que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) > \omega$, y para ver que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet, sea $X \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$ y consideremos $X_\alpha = \{x \in X\colon x \subset L_\alpha\}$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$.

2.11. Afirmación. Existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que $X_\alpha \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$.

Demostración de la afirmación. Supongamos lo contrario, entonces para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ existen $F_\alpha \in [\alpha]^{<\omega}$ y $n_\alpha \in \omega$ tales que $x \cap (\bigcup_{\beta \in F_\alpha} f_\beta) \neq \emptyset$ para cada $x \in X_\alpha$ con $x \cap (n_\alpha \times \omega) = \emptyset$. Dado que la cofinalidad de $\mathfrak{b}$ es no numerable (ya que $\mathfrak{b}$ es regular) existe un subconjunto estacionario S_0 de $\mathfrak{b}$ y un número natural m tal que $|F_\alpha| = m$ para toda $\alpha \in S_0$. Aplicando el lema de Fodor a la función regresiva $r\colon S_0 \to \mathfrak{b}$, dada por $r(\alpha) = \text{mín}\,(F_\alpha)$, se obtiene la existencia de un estacionario $S_1 \subseteq S_0$ y la existencia de un ordinal β_0 tal que $\beta_0 = \text{mín}\,(F_\alpha)$ para toda $\alpha \in S_1$. Repitiendo este argumento m veces, se llega a un subconjunto estacionario S de $\mathfrak{b}$ tal que $F_\alpha = F$ para toda $\alpha \in S$. Sea $Y = \{x \in X\colon x \cap f_\beta = \emptyset \text{ para toda } \beta \in F\}$, luego $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$. Entonces para cada conjunto finito de columnas de $\omega \times \omega$, existe un elemento de Y que las evita, por lo que podemos definir $\{x_n\colon n \in \omega\} \subseteq Y$ de tal manera que si $k_n = \text{mín}\,(\pi_1(x_n))$ entonces $k_n > \text{máx}\,(\pi_1(x_{n-1}))$. Sea h una función con dominio $\{k_n\colon n \in \omega\}$ tal que $h(k_n) > \text{máx}\,(\pi_2(x_n))$ para cada $n \in \omega$, entonces existe $\alpha \in S$ tal que $f_\alpha(k_n) > h(k_n)$ para una cantidad infinidad de n's, y dado que f_α es no decreciente, se sigue que $x_n \subset L_\alpha$ para una cantidad infinita de n's. Pero esto contradice que $F_\alpha = F$. ■

Una vez probada la afirmación anterior, consideremos $X^\beta = \{x \in X_\alpha\colon x \cap f_\beta = \emptyset\}$ para cada $\beta \leqslant \alpha$, y para cada $n \in \omega$, sea $X^\beta_n = \{x \in X^\beta\colon x \cap (n \times \omega) = \emptyset\}$. Dado que $X_\alpha \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$, entonces $\mathcal{X} = \{X^\beta_n\colon \beta \leqslant \alpha \text{ y } n \in \omega\}$ forma una familia centrada de subconjuntos infinitos de $L_\alpha^{<\omega}$, y como $|\alpha| < \mathfrak{p}$ (este es el único lugar donde se usa que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$), entonces existe $C \subset L_\alpha^{<\omega}$ una pseudointersección infinita de la familia $\mathcal{X}$. Ahora, es fácil ver que $\bigcup C \in \mathcal{I}^\perp$ y que C es localmente finito, luego por el Lema 2.8, se concluye que $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$. Por lo tanto $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet. □

1.2. γ-conjuntos y espacios $C_p(X)$ Fréchet. Para un espacio topológico X denotemos por $C(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre X con valores reales. Usamos $C_p(X)$ para denotar al espacio $C(X)$ equipado con la topología de convergencia puntual, *i.e.*, la topología heredada de $\mathbb{R}^X$, donde la topología en $\mathbb{R}^X$ es la usual del producto topológico. Es bien conocido que $C_p(X)$ forma un anillo topológico con la suma $+$ y el producto $\cdot$ puntual de funciones, en particular forma un grupo topológico con la suma puntual $+$ de funciones.

El estudio de la propiedad de Fréchet en los espacios $C_p(X)$ lo hacen J. Gerlits y Zs. Nagy en [**GN**], en donde para su estudio introducen una propiedad de cubiertas de X que a continuación definimos.

2.12. Definición. Sea X un conjunto (típicamente infinito) y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X.

- Decimos que $\mathcal{U}$ es una *ω-cubierta* de X, si para cada $F \in [X]^{<\omega}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$.

- Decimos que $\mathcal{U}$ es una γ-*cubierta* de X, si para cada $x \in X$, $x \in U$ para toda $U \in \mathcal{U}$ salvo una cantidad finita de U's.

Decimos que un espacio X es un γ-*espacio*, si cada ω-cubierta abierta de X admite una γ-subcubierta numerable. Un γ-espacio el cual a su vez también es un espacio métrico separable es llamado un γ-*conjunto*.

Motivados en la propiedad de Lindelöf, es útil saber bajo que condiciones de un espacio X, dada una ω-cubierta abierta arbitraria de X esta admite una ω-subcubierta numerable.

2.13. Proposición ([**GN**]). *Sea X un espacio topológico. Entonces X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$ si y sólo si toda ω-cubierta abierta de X admite una ω-subcubierta numerable.*

Demostración. Supongamos que X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$ y sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Del hecho de que $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta abierta de X, no es difícil ver que $\mathcal{U}^n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X^n para cada $n \in \omega$. Como X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$, entonces existe $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ numerable tal que $\mathcal{U}_n^n$ es una cubierta abierta de X^n, luego entonces $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$ forma una ω-subcubierta numerable de $\mathcal{U}$.

Para el otro sentido, sea $\mathcal{W}$ una cubierta abierta de X^n, hagamos

$$\mathcal{U} = \{U \subset X : U \text{ es abiero en } X \text{ y } U^n \text{ puede ser cubierto con una cantidad finita de elementos de } \mathcal{W}\}.$$

Es inmediato ver que $\mathcal{U}$ forma una ω-cubierta abierta de X, luego existe $\mathcal{V}$ una ω-subcubierta numerable de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{V}^n$ es una cubierta abierta de X^n y de aquí se sigue fácilmente que $\mathcal{W}$ admite una subcubierta numerable. □

De aquí se obtiene en particular que un espacio segundo numerable X es un γ-espacio, si cada ω-cubierta abierta numerable de X admite una γ-subcubierta.

Recordemos que un espacio X es llamado un *P-espacio*, si cualquier intersección numerable de abiertos en X también es un abierto en X.

2.14. Proposición (Folklore).
(1) *Si X es un espacio topológico numerable, entonces X es un γ-espacio.*
(2) *Si X es Lindelöf y P-espacio, entonces X es un γ-espacio.*

Demostración. (1) Supongamos que X es un espacio topológico numerable y sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Tomemos $X = \{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración del espacio X, como $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta abierta de X entonces para cada $n \in \omega$ podemos fijar una $U_n \in \mathcal{U}$ de tal manera que $\{x_m : m < n\} \subseteq U_n$. Entonces claramente $\mathcal{V} = \{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-subcubierta numerable de $\mathcal{U}$.

(2) Supongamos que X es un espacio Lindelöf y sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Como el producto finito de P-espacios Lindelöf es también Lindelöf, entonces por la Proposición 2.13

se sigue que $\mathcal{U}$ admite una ω-subcubierta numerable. Así, podemos suponer sin pérdidad de generalidad que $\mathcal{U}$ es numerable. Ahora bien, para cada $x \in X$ sea

$$V_x = \bigcap\{U \in \mathcal{U} \colon x \in U\},$$

entonces $\{V_x \colon x \in X\}$ forma una cubierta abierta del P-espacio Lindelöf X. Elegimos de esta cubierta una subcubierta numerable $\{V_{x_n} : n \in \omega\}$ y entonces para cada $n \in \omega$ elegimos $U_n \in \mathcal{U}$ de tal manera que $\{x_m \colon m < n\} \subseteq U_n$. Así, $\{U_n \colon n \in \omega\}$ es una γ-subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. $\square$

Veamos ahora la estrecha relación entre el concepto de γ-espacio y la propiedad de Fréchet en los espacios $C_p(X)$.

2.15. Teorema ([**GN**]). *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *$C_p(X)$ es Fréchet y α_2.*
(2) *$C_p(X)$ es Fréchet.*
(3) *X es un γ-espacio.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Es clara.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta abierta de X y hagamos

$$A = \{f \in C_p(X) \colon \text{existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } \{x \in X \colon |f(x)| < 1\} \subseteq U\}.$$

Notemos que $\bar{0} \in \overline{A}$ (la cerradura tomada en $C_p(X)$), donde $\bar{0}$ denota a la función identicamente cero. En efecto, si $U(F, \varepsilon)$ es un abierto básico alrededor de $\bar{0}$ en $C_p(X)$, tomemos una $U \in \mathcal{U}$ con $F \subseteq U$, y como los espacios que estamos considerando son almenos Tychonoff, tomemos también una $f \in C_p(X)$ con $0 \leqslant f \leqslant 1$ tal que $f \restriction F \equiv 0$ y $f \restriction X \setminus U \equiv 1$, luego entonces $f \in U(F, \varepsilon) \cap A$. Ahora, como $C_p(X)$ es Fréchet, existe una sucesión $\langle f_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq A$ convergente a $\bar{0}$. Entonces para cada $n \in \omega$ elegimos $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\{x \in X \colon |f_n(x)| < 1\} \subseteq U_n$, luego $\{U_n \colon n \in \omega\}$ forma una γ-subcubierta numerable de $\mathcal{U}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Dado que $C_p(X)$ es en particular un grupo topológico, para ver que $C_p(X)$ es Fréchet y α_2, es suficiente con probar que $C_p(X)$ es Fréchet y α_2 en $\bar{0}$.

Por otro lado, notemos que un espacio X es Fréchet y α_2 en un punto $x \in X$ si y sólo si para cada sucesión $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$ con $A_n \subseteq X$ y $x \in \overline{A_n}$ para cada $n \in \omega$, existe una sucesión $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ convergente a x tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \omega$. De aquí que esta propiedad se le conosca también como la *propiedad de la sucesión diagonal*.

Ahora bien, veamos que para la propiedad de ser γ-espacio, tenemos algo análogo a lo anterior.

2.16. Afirmación. X es un γ-espacio si y sólo si para cada sucesión $\langle \mathcal{U}_n \rangle_{n \in \omega}$ de ω-cubiertas abiertas de X, existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$ tal que $\{U_n \colon n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X.

Demostración de la afirmación. Una implicación es clara. Así que supongamos que X es un γ-espacio y sea $\langle \mathcal{U}_n \rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de ω-cubiertas abiertas de X. Dado que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$, entonces es suficiente con probar que existe una subsucesión infinita $\langle n_k \colon k \in \omega \rangle$ y una sucesión $U_k \in \mathcal{U}_{n_k}$ tal que $\{U_k \colon k \in \omega\}$ sea una γ-cubierta de X. Pues bien, sea $\{x_n \colon n \in \omega\}$ la enumeración de un subconjunto infinito de X, y hagamos

$$\mathcal{V}_n = \{U \setminus \{x_n\} \colon U \in \mathcal{U}_n\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n.$$

Es claro que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta abierta de X, luego existe una sucesión $V_k \in \mathcal{V}$ tal que $\{V_k \colon k \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora bien, para cada $k \in \omega$ existe una $n_k \in \omega$ y un abierto U_k tal que $V_k \subseteq U_k \in \mathcal{U}_{n_k}$. Ahora, si $n \in \omega$ y $\{x_m \colon m < n\} \subseteq V_k$ entonces $n_k > n$, luego $\{n_k \colon k \in \omega\}$ es infinito. ∎

Con ayuda de esta última afirmación probemos entonces que $C_p(X)$ tiene la propiedad de la sucesión diagonal. En efecto, sea $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de $C_p(X)$ tal que $\bar{0} \in \overline{A_n}$ para cada $n \in \omega$. Hagamos para cada $n \in \omega$

$$\mathcal{U}_n = \{\{x \in X \colon |f(x)| < 2^{-n}\} \colon f \in A_n\}.$$

Como claramente $\bar{0} \in \overline{A_n}$ y $A_n \subseteq C_p(X)$, entonces $\mathcal{U}_n$ es una ω-cubierta abierta de X para toda $n \in \omega$. De la afirmación anterior se sigue que existe una sucesión $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $\{U_n \colon n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora, si $U_n = \{x \in X \colon |f_n(x)| < 2^{-n}\}$ con $f_n \in U_n$, entonces la sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\omega}$ converge a $\bar{0}$. □

2.17. Corolario ([**GN**]). *$C_p(X)$ es Fréchet separable no metrizable si y sólo si X es un γ-conjunto no numerable.*

Demostración. Para ver esto, recordemos dos resultados conocidos de la literatura de los espacios $C_p(X)$ (*e.g.*, véase I.1.1 y I.1.5 en [**Ar5**]).

2.18. Hecho (Folklore). (1) *$|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X))$, luego $C_p(X)$ es metrizable si y sólo si X es numerable.*
(2) *$C_p(X)$ es separable si y sólo si X admite una topología más débil segundo numerable. Como nuestros espacios son almenos Tychonoff, por el teorema de metrización de Urysohn, esto último también es equivalente a que X admite una topología más débil que es metrizable y separable.* □

Así, el Teorema 2.15 junto con el hecho anterior, nos da lo deseado. □

Por otro lado, recordemos que un espacio métrico X tiene *medida fuertemente cero* (**SMZ** por sus siglas en inglés), si para cada sucesión de reales positivos $\langle \varepsilon_n \colon n \in \omega \rangle$, existe $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle$ una cubierta de X tal que $\operatorname{diam}(X_n) < \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$.

2.19. Proposición ([**GN**]). *Todo γ-conjunto tiene* **SMZ**.

Demostración. Sea X un γ-conjunto y $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos. Entonces para cada $n \in \omega$, consideremos la familia $\mathcal{F}_n$, la cual está formada por colecciones finitas de conjuntos abiertos, F, tales que $\{\mathrm{diam}(U) : U \in F\} = \{\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n+|F|-1}\}$. Así, haciendo $\mathcal{U}_n = \{\bigcup F : F \in \mathcal{F}_n\}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos claramente una sucesión $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ de ω-cubiertas abiertas de X, luego por la Afirmación 2.16, existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$ de tal manera que $\{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora bien, del hecho de que $U_n \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$, podemos encontrar recursivamente, una sucesión estrictamente creciente $\langle n_k : k \in \omega \rangle \subseteq \omega$ y una sucesión de abiertos $\langle V_n : n \in \omega \rangle$ tales que

(1) $U_0 = \bigcup_{n \leqslant n_0} V_n$, y $U_{n_k+1} = \bigcup_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} V_n$ para cada $k \in \omega$;
(2) $\mathrm{diam}(V_n) = \varepsilon_n$ para toda $n \in \omega$.

Como $\{U_n : n \in \omega\}$ es una γ-cubierta de X, entonces también lo es $\{U_{n_k+1} : k \in \omega\}$, de donde $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} V_n$, y por (2), se concluye que X es **SMZ**. □

Recordemos que R. Laver en [**La**] demuestra la consistencia de la conjetura de Borel, *i.e.*, es relativamente consistente con **ZFC** que todo conjunto con **SMZ** es numerable. Así, según el Corolario 2.17, en el modelo de Laver para la conjetura de Borel, todo γ-conjunto es numerable, o equivalentemente, todo espacio $C_p(X)$ Fréchet separable es metrizable. Esto nos dice en particular que en **ZFC** no encontraremos un ejemplo a la pregunta de Malykhin del tipo $C_p(X)$.

Por otro lado, consistentemente existen γ-conjuntos no numerables. De hecho, el siguiente invariante cardinal del continuo asociado a la noción de γ-conjunto, nos da una respuesta sencilla a esto. El cardinal $\mathsf{non}(\gamma\text{-conjunto})$ es definido como la mínima cardinalidad de un espacio métrico separable que no es un γ-conjunto.

2.20. Teorema ([**GN**]). $\mathsf{non}(\gamma\text{-}\textit{conjunto}) = \mathfrak{p}$.

Demostración. Sea $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia centrada sin pseudointersecciones infinitas. Aquí, estamos considerando a $\mathcal{X}$ como un subespacio de $\mathcal{P}(\omega)$. Para cada $n \in \omega$, sea $U_n = \{X \in \mathcal{X} : n \in X\}$. Dado que $\mathcal{X}$ es una familia centrada, entonces $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ forma una ω-cubierta abierta de $\mathcal{X}$. Para cada $A \in [\omega]^\omega$, hagamos $\mathcal{U}_A = \{U_n : n \in A\}$. Pues bien, es fácil ver que $\mathcal{U}_A$ es una γ-subcubierta si y sólo si A es una pseudointersección de $\mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}$ no es un γ-conjunto. Esto prueba que $\mathsf{non}(\gamma\text{-conjunto}) \leqslant \mathfrak{p}$.

Para la otra desigualdad, sea X un espacio métrico separable con $|X| < \mathfrak{p}$, luego X es segundo numerable. Así, para ver que X es un γ-conjunto es suficiente con probar que toda ω-cubierta abierta numerable de X admite una γ-subcubierta. Pues bien, sea $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ una ω-cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$, sea $A_x = \{n \in \omega : x \in U_n\}$. Hagamos $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$. Del hecho de que $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de X, se sigue que $\mathcal{A}$ forma una familia centrada. Como $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}$, entonces existe $A \in [\omega]^\omega$ pseudointersección de $\mathcal{A}$. Nuevamente, es fácil ver que A es una pseudointersección de $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{U}_A = \{U_n : n \in A\}$ es una γ-subcubierta. Por lo tanto, X es un γ-conjunto, luego $\mathfrak{p} \leqslant \mathsf{non}(\gamma\text{-conjunto})$. □

Por lo anterior, por ejemplo, bajo $\mathfrak{p} > \omega_1$ todo conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ con $|X| = \omega_1$ es un γ-conjunto, luego según el Corolario 2.17, el espacio $C_p(X)$ es Fréchet separable no metrizable. Por otra parte, también puede haber (consistentemente) γ-conjuntos de tamaño el continuo, *e.g.*, usando **MA**, F. Galvin y A. W. Miller en [**GM**] construyen un γ-conjunto de tamaño $\mathfrak{c}$.

Sea X un subconjunto de 2^ω. Para cada $x \in X$, consideremos $I_x = \{x \restriction n\colon n \in \omega\}$ la rama en $2^{<\omega}$ determinada por x. Denotemos por $\mathsf{Br}(X)$ al ideal sobre $2^{<\omega}$ generado por las ramas I_x con $x \in X$. Mostremos la relación que existe entre un γ-conjunto $X \subseteq 2^\omega$ y el ideal $\mathsf{Br}(X)$. Para esto, es necesario tener una reducción en la definición de un γ-conjunto en 2^ω.

2.21. Lema ([**Ny2**]). *Sea $X \subseteq 2^\omega$. Entonces X es un γ-conjunto si y sólo si toda ω-cubierta numerable de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω admite una γ-subcubierta.*

Demostración. Supongamos que X es un γ-conjunto y sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta numerable de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω. Entonces $\mathcal{U} \restriction X$ forma una ω-cubierta abierta (de hecho también cerrada) de X, luego $\mathcal{U} \restriction X$ admite una γ-subcubierta de la forma $\mathcal{V} \restriction X$, donde $\mathcal{V}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$, y como $\mathcal{V} \restriction X$ es una γ-cubierta de X, entonces también $\mathcal{V}$ es una γ-cubierta de X.

Para el otro sentido, sea $\mathcal{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Dado que 2^ω es un espacio separable cero dimensional, entonces X admite un base numerable de la forma $\mathcal{B} \restriction X$, donde $\mathcal{B}$ es una colección numerable de conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω. Así, como $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta abierta de X, entonces para cada $F \in [X]^{<\omega}$, existen $U \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{F} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ tales que $F \subseteq \bigcup \mathcal{F} \restriction X \subseteq U$. Haciendo $\mathcal{U}' = \{\bigcup \mathcal{F}\colon \mathcal{F} \in [\mathcal{B}]^{<\omega} \text{ y existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } \bigcup \mathcal{F} \restriction X \subseteq U\}$, entonces $\mathcal{U}'$ es una ω-cubierta numerable de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω, luego $\mathcal{U}'$ admite una γ-subcubierta $\mathcal{V}'$. Ahora bien, para cada $V \in \mathcal{V}'$ fijemos una $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \cap X \subseteq U_V$, entonces $\mathcal{V} = \{U_V\colon V \in \mathcal{V}'\}$ es una γ-subcubierta de $\mathcal{U}$. □

2.22. Teorema ([**Ny2**]). *Sea $X \subseteq 2^\omega$ e $\mathcal{I} = \mathsf{Br}(X)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *$\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet.*
(2) *X es un γ-conjunto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet, y sea $\{U_n\colon n \in \omega\}$ una ω-cubierta de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω, para la cual podemos suponer que $X \nsubseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Ahora, recordemos que los conjuntos de la forma $\langle t\rangle = \{f \in 2^\omega\colon t \subset f\}$ para $t \in 2^{<\omega}$ nos forman una base de cerrados-y-abiertos para 2^ω. Sea $V_n = 2^\omega \setminus U_n$ para cada $n \in \omega$, como V_n es cerrado-y-abierto en 2^ω, entonces por compacidad existe $B_n \in [2^{<\omega}]^{<\omega}$ tal que $V_n = \bigcup_{t \in B_n} \langle t\rangle$, cuya unión podemos suponer sin pérdida de generalidad que es ajena. Sea $A_n = \{t \in B_n\colon \text{ existe } x \in X \text{ tal que } t \subset x\}$, dado que $X \nsubseteq U_n$ para toda $n \in \omega$, entonces $A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \omega$. Hagamos $Y = \{A_n\colon n \in \omega\}$. Entonces $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$. En efecto, sea $I \in \mathcal{I}$, entonces existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $I \subseteq \bigcup_{x \in F} I_x$, donde recordemos que $I_x = \{x \restriction n\colon n \in \omega\}$. Ahora, existe $n \in \omega$ tal que $F \subset U_n$, entonces por definición de A_n

obtenemos que $A_n \cap I_x = \emptyset$ para cada $x \in F$, luego $A_n \cap I = \emptyset$ y como $A_n \neq \emptyset$, se sigue entonces que $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$. Así, como $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces existe $C \in [Y]^\omega$, y por tanto $N \in [\omega]^\omega$, tal que $C = \{A_n : n \in N\} \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$. Pues bien, $\{U_n : n \in N\}$ es una γ-cubierta de X. En efecto, sea $x \in X$, como $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$ entonces $C \cap \mathcal{I}_{I_x}$ es finito, es decir, $\{n \in N : A_n \cap I_x \neq \emptyset\}$ es finito, pero $\{n \in N : x \notin U_n\} \subseteq \{n \in N : A_n \cap I_x \neq \emptyset\}$, luego $x \in U_n$ para toda $n \in \omega$ salvo una cantidad finita. Así, por el Lema 2.21, se concluye entonces que X es un γ-conjunto.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X es un γ-conjunto, y sea $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$. Para cada $A \in Y$, definamos $V_A = \bigcup_{t \in A} \langle t \rangle$, luego V_A es un conjunto cerrado-y-abierto de 2^ω, y en consecuencia también lo es $U_A = 2^\omega \setminus V_A$. Así, $\{U_A : A \in Y\}$ forma una ω-cubierta de X. En efecto, sea $F \in [X]^{<\omega}$ e $I = \bigcup_{x \in F} I_x$, como $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$, existe $A \in Y$ tal que $A \cap I = \emptyset$, entonces $x \notin V_A$ para toda $x \in F$, y por tanto $F \subset U_A$. Dado que X es un γ-conjunto, por el Lema 2.21, existe $C \subseteq Y$ tal que $\{U_A : A \in C\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora, usando nuevamente que $Y \in (\mathcal{I}^{<\omega})^+$, podemos asegurar que esta γ-cubierta es infinita, luego entonces C es infinito. Pues bien, $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$. En efecto, sea $x \in X$, dado que $I_x \cap A \neq \emptyset$ implica $x \in V_A$, es decir, $x \notin U_A$, entonces $\{A \in C : A \cap I_x \neq \emptyset\} \subseteq \{A \in C : x \notin U_A\}$, y como $\{U_A : A \in C\}$ forma una γ-cubierta de X, se sigue entonces que $C \cap \mathcal{I}_{I_x}$ es finito, luego $C \in (\mathcal{I}^{<\omega})^\perp$. Así, $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet. $\square$

Por último, a manera de resumen de esta sección, las condiciones $\mathfrak{p} > \omega_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ y la existencia de un γ-conjunto no numerable, son condiciones suficientes para poder introducir en el grupo Booleano $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$ una topología Fréchet no metrizable del tipo $\tau_{\mathcal{I}}$. La existencia de un γ-conjunto no numerable es equivalente a la existencia de un espacio $C_p(X)$ Fréchet separable no metrizable. Por otra parte, $\mathfrak{p} = \mathsf{non}(\gamma\text{-conjunto})$, en particular, todo espacio métrico separable de tamaño $< \mathfrak{p}$ es un γ-conjunto, y recientemente T. Orenshtein y B. Tsaban en [**OT**] prueban que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ implica la existencia de un γ-conjunto de cardinalidad $\mathfrak{p}$. Entonces, de hecho, la existencia de un γ-conjunto no numerable es una condición más débil que las condiciones antes mencionadas. En otras palabras, las construcciones que se conocían para dar un ejemplo a la pregunta de Malykhin, usan axiomas que también son suficientes para producir un γ-conjunto no numerable.

2.23. Pregunta (Tsaban). *¿Es consistente con* **ZFC** *que cada γ-conjunto sea numerable pero exista un grupo topológico Fréchet numerable no metrizable?*

2. Resultados parciales en el sentido negativo

Un objeto O es *definible* si existe una fórmula $\varphi(x)$ con una variable libre tal que

$$\varphi(O) \wedge ((\forall x\, \varphi(x)) \rightarrow x = O).$$

Se consideran objetos definibles permitiendo alguna clase de parámetros (*e.g.*, números reales). Los conjuntos Borelianos, analíticos, ..., proyectivos, son objetos definibles usando a los números reales como parámetros. Ejemplos de objetos no definibles son, entre otros, los ultrafiltros, grietas de Hausdorff, conjuntos de Bernstein y familias casi ajenas maximales.

La clase de los conjuntos analíticos, la cual en particular contiene a la clase de los Borelianos, posee propiedades de regularidad importantes. Por ejemplo, todo conjunto analítico es medible con respecto a cualquier medida de Borel, tienen la propiedad de Baire (Lusin-Sierpiński) y si son no numerables, contienen un copia de 2^ω (Suslin). Los bien conocidos conjuntos patalógicos (o no definibles), como los conjuntos de reales no medibles y los conjuntos de Bernstein, no son análiticos. Entonces, en algún sentido, "los conjuntos definibles se comportan mejor que los no definibles".

Desde sus inicios, la teoría descriptiva de conjuntos, ha puesto en evidencia que los axiomas usuales de la teoría de conjuntos **ZFC** pueden decidir, en términos generales, cualquier pregunta sobre conjuntos analíticos. En este contexto, dado que los ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin que se conocen son todos ellos no definibles, entonces cabe la pregunta de si existen ejemplos definibles (*e.g.*, de complejidad analítica). Pues bien, S. Todorčević y C. Uzcátegui en [**TU**] prueban que no hay ejemplos definibles de complejidad analítica a la pregunta de Malykhin, o en otras palabras, que para la clase de topologías analíticas sí se tiene un teorema de metrización para grupos de Fréchet numerables. En esta sección presentamos dicho resultado, en donde nociones de la teoría de Ramsey y técnicas de la teoría descriptiva de conjuntos (*e.g.*, teoría de juegos topológicos infinitos y determinación) se ponen de manifiesto.

Motivados por la definición de bisecuencialidad, decimos que un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω es *bisecuencial*, si para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω con $\mathcal{U}\cap\mathcal{I}=\emptyset$, existe una sucesión $\langle X_n\colon n\in\omega\rangle\subseteq\mathcal{U}$ tal que para toda $I\in\mathcal{I}$ existe $n\in\omega$ con $I\cap X_n=\emptyset$.

Es claro que todo espacio bisecuencial es tanto Fréchet como α_4, y como todo grupo topológico Fréchet es α_4 (veáse Teorema 2.2), entonces es natural preguntarse qué relación pueden guardar estos espacios con los espacios bisecuenciales. Para la clase de topologías analíticas, el próximo lema da una respuesta a esto.

Recordemos que un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω es *selectivo*, si satisface las siguientes dos condiciones.

- p^+**:** Para cada sucesión decreciente $\langle X_n\colon n\in\omega\rangle\subseteq\mathcal{I}^+$, existe $X\in\mathcal{I}^+$ tal que $X\subseteq^* X_n$ para cada $n\in\omega$.
- q^+**:** Para cada $X\in\mathcal{I}^+$ y toda partición $X=\bigcup_{n\in\omega}F_n$ de X en conjuntos finitos, existe $Y\subseteq X$ tal que $Y\in\mathcal{I}^+$ y $|Y\cap F_n|\leqslant 1$ para cada $n\in\omega$.

2.24. LEMA ([**TU**]). *Todo grupo topológico Fréchet numerable cuya topología sea analítica es bisicuencial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo topológico Fréchet numerable con elemento identidad e, cuya topología sea analítica. Por la homogeniedad de un grupo topológico, basta probar que G es bisecuencial en e, lo cual significa, traduciendo a nuestro lenguaje de ideales, que el ideal $\mathcal{I}_e$ sea bisecuencial. Para esto, como G es numerable, entonces de entrada podemos pensar a nuestro ideal $\mathcal{I}_e$ sobre ω.

Empecemos viendo que el ideal $\mathcal{I}_e$ es selectivo. Como G es Fréchet y α_4 en e, entonces $\mathcal{I}_e$ es tanto Fréchet como α_4. Así, tomemos una sucesión decreciente $\langle X_n\colon n\in\omega\rangle\subseteq\mathcal{I}_e^+$, luego como

$\mathcal{I}_e$ es Fréchet, para cada $n \in \omega$ existe $I_n \in [X_n]^\omega$ tal que $I_n \in \mathcal{I}_e^\perp$. Haciendo una aplicación sencilla del lema de refinamiento ajeno, podemos suponer que los I_n's son ejenos por pares. Dado que $\mathcal{I}_e$ es α_4, entonces existe $I \in \mathcal{I}_e^\perp$ tal que $N = \{n \in \omega \colon I \cap I_n \neq \emptyset\}$ es infinito. Tomando una función de elección $f \colon N \to \bigcup_{n\in N}(I \cap I_n)$ y haciendo $X = \operatorname{ran}(f)$, obtenemos que $X \in \mathcal{I}_e^+$ y que $X \subseteq^* X_n$ para cada $n \in \omega$, es decir, $\mathcal{I}_e$ es p^+.

Para ver que $\mathcal{I}_e$ es q^+, tomemos $X \in \mathcal{I}_e^+$ y $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ una partición de X en conjuntos finitos. Por ser $\mathcal{I}_e$ Fréchet, existe $I \in [X]^\omega$ tal que $I \in \mathcal{I}_e^\perp$, luego $N = \{n \in \omega \colon I \cap F_n \neq \emptyset\}$ es infinito, por lo que tomamos una función de elección $f \colon N \to \bigcup_{n\in\omega}(I \cap F_n)$ y hacemos $Y = \operatorname{ran}(f)$, teniendo entonces que $Y \in \mathcal{I}_e^+$ y $|Y \cap F_n| \leqslant 1$ para cada $n \in \omega$, es decir, $\mathcal{I}_e$ es q^+. Con esto concluimos que $\mathcal{I}_e$ es selectivo.

Para ver que $\mathcal{I}_e$ es bisecuencial, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}_e = \emptyset$. Definamos el siguiente juego topológico infinito. El juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}_e^+)$, es jugado por dos jugadores, **I** y **II**. En el n-ésimo paso ($n \in \omega$), el jugador **I** elige un elemento $U_n \in \mathcal{U}$, y el jugador **II** elige un punto $x_n \in U_n$. **I** gana si el conjunto $\{x_n \colon n \in \omega\} \in \mathcal{I}_e$, en otro caso **II** gana. Teniendo entonces que

- **I** tiene estrategia ganadora si y sólo si existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathcal{I}_e$.
- **II** tiene estrategia ganadora si y sólo si existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathcal{I}_e^+$.

Ahora bien, como $\mathcal{I}_e$ es selectivo, entonces **I** no tiene estrategia ganadora. En efecto, sea $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{U}$, para el cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada $t \in T$ es estrictamente creciente. Dado que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es centrado, T es numerable y $\mathcal{I}_e$ es p^+, entonces existe $X \in \mathcal{I}_e^+$ tal que $X \subseteq^* \operatorname{succ}_T(t)$ para cada $t \in T$, en donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \operatorname{succ}_T(\emptyset)$. Definamos recursivamente una función estrictamente creciente $g \colon \omega \to \omega$ tal que $g(0) = 0$, y para $n \geqslant 1$, $g(n) = \min\{k \in \omega \colon k > g(n-1) \text{ y } X \setminus k \subseteq \operatorname{succ}_T(t) \text{ para cada } t \in T \text{ con } \operatorname{ran}(t) \subseteq g(n-1)\}$. Es inmediato ver que nuestra función g está bien definida. Ahora, sean $X_0 = \bigcup_{n\in\omega}([g(2n), g(2n+1)] \cap X)$ y $X_1 = \bigcup_{n\in\omega}([g(2n+1), g(2n+2)] \cap X)$, luego existe $i \in 2$ tal que $X_i \in \mathcal{I}_e^+$. Así, dado que $\mathcal{I}_e$ es q^+, entonces existe $h \in \omega^\omega$ estrictamente creciente junto con una función de elección $f \colon \omega \to \bigcup_{n\in\omega}([g(2h(n)+i), g(2h(n)+1+i)] \cap X)$ tal que $\operatorname{ran}(f) \in \mathcal{I}_e^+$. Notemos que por la manera en que se definió g, se tiene que $f \in [T]$. Por lo que entonces el jugador **I** no tiene estrategia ganadora.

Dado que la topología de G es analítica, por resultados conocidos de la teoría descriptiva de conjuntos, se tiene que el juego $G(\mathcal{U}, \omega, \mathcal{I}_e^+)$ está determinado. Así, el jugador **II** tiene estrategia ganadora, por lo que existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathcal{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathcal{I}_e^+$. Sea $T = \{t_n \colon n \in \omega\}$ una enumeración de T, entonces hacemos $X_n = \bigcap_{m\leqslant n} \operatorname{succ}_T(t_m)$ para cada $n \in \omega$, luego como $\mathcal{U}$ es centrado, entonces se tiene que $\langle X_n \colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathcal{U}$. Pues bien, para cada $I \in \mathcal{I}_e$ existe $n \in \omega$ tal que $I \cap X_n = \emptyset$. Ya que de lo contrario, existiría $I \in \mathcal{I}_e$ tal que

$I \cap X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, luego $I \cap \mathrm{succ}_T(t) \neq \emptyset$ para toda $t \in T$. Por lo que podríamos definir recursivamente una $f \in [T]$ de tal manera que $f(n) \in I \cap \mathrm{succ}_T(f \restriction n)$, teniendo entonces que $\mathrm{ran}(f) \subseteq I$, contradiciendo el hecho de que el jugador **II** tiene estrategia ganadora. Por lo tanto, el ideal $\mathcal{I}_e$ es bisecuencial. □

2.25. TEOREMA ([**TU**]). *Un grupo topológico Fréchet numerable es metrizable si y sólo si su topología es analítica.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo espacio numerable primero numerable es analítico (de hecho es del tipo $F_{\sigma\delta}$), entonces una de las implicaciones es inmediata. Así, sea G un grupo topológico Fréchet numerable cuya topología es analítica, entonces por el Lema 2.24, G es bisecuencial, luego por el Teorema 2.1, G es metrizable. □

Revisando los argumentos que conducen a la prueba del teorema anterior, estariamos tentados en reproducir estos argumentos en un modelo de $\mathbf{ZF} + \mathbf{AD}$ (*e.g.,* $L(\mathbb{R})$), pero esto no es posible ya que en estos argumentos se utilizan ultrafiltros, los cuales son objetos no definibles. Sin embargo, para la clase de grupos Booleanos numerables que se trataron en la Subsección 1.1 del presente capítulo, sí se tiene consistentemente un teorema de metrización bajo **ZF**.

2.26. HECHO (Folklore). *Es relativamente consistente con* **ZF** *que* $\mathcal{I}^{<\omega}$ *es Fréchet si y sólo si* $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \models \mathbf{ZF} + \mathbf{AD}$ (*e.g.,* $L(\mathbb{R})$) e $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Si $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega$, como $\mathsf{cof}(\mathcal{I}^{<\omega}) = \mathsf{cof}(\mathcal{I})$, entonces claramente $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet.

Para el otro sentido, si $\mathcal{I}^{<\omega}$ es Fréchet, según el Teorema 2.9, $\mathcal{I}$ es α_2. La Proposición 1.8 nos dice entonces que el jugador **II** no tiene estrategia ganadora en el juego $G_{\mathrm{op}}(\emptyset, [\omega]^{<\omega})$, luego según **AD**, el jugador **I** tiene estrategia ganadora en $G_{\mathrm{op}}(\emptyset, [\omega]^{<\omega})$, entonces del Lema 1.7 (a) se sigue que $\mathsf{cof}(\mathcal{I}) = \omega$. □

Llevandonos este último hecho hacer la siguiente conjetura.

2.27. CONJETURA. $L(\mathbb{R}) \models$ *"Todo grupo topológico Fréchet numerable es metrizable".*

Con relación a la pregunta de Reznichenko y Sipacheva (Pregunta 2.5). J. Brendle y M. Hrušák en [**BH**] dan una respuesta parcial a esta pregunta en el sentido negativo.

2.28. TEOREMA ([**BH**]). *Es relativamente consistente con* $\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH}$ *que* $\mathcal{I}^{<\omega}$ *no es Fréchet para todo ideal* $\mathcal{I}$ *que sea* ω_1*-generado.* □

Omitimos una prueba de este teorema ya que éste será un caso particular de un resultado mucho más general que presentamos en el Capítulo 4 (Corolario 4.24). Cabe mencionar que el Teorema 2.28 es el primer resultado en la dirección de la consistencia de un teorema de metrización para grupos de Fréchet. Recientemente, usando una modificación del forcing introducido por Brendle y Hrušák en [**BH**], D. Raghavan en [**Ra**] obtiene otra respuesta parcial a la Pregunta 2.5, probando que es relativamente consistente con **ZFC** que para cierta familia de ideales no numerablemente generados del tipo $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{A})^{<\omega}$ no es Fréchet.

Capítulo 3

Grupos Abelianos Fréchet precompactos

T. Nogura y D. Shakhmatov en [**NS**] prueban que todo grupo localmente compacto con estrechez numerable es metrizable. En particular todo grupo compacto Fréchet es metrizable. Una clase más aplia de grupos topológicos que la clase de grupos compactos, es sin duda la clase de grupos precompactos. Un grupo topológico G es llamado *precompacto* (o equivalentemente, *totalmente acotado* [**We**]) si este es un subgrupo denso de un grupo compacto (equivalentemente, si con una cantidad finita de traslaciones de cada vecindad del elemento identidad e se puede cubrir a G). Entonces es natural preguntarse si todo grupo Fréchet precompacto es metrizable. Pues bien, el grupo $G = \{g \in 2^{\omega_1} : |\mathrm{supp}(g)| \leqslant \omega\}$ es un ejemplo de un grupo topológico Fréchet precompacto que no es primero numerable. Tal ejemplo, sin embargo no es separable. De hecho, todos los subespacios numerables de G son primero numerables (y entonces metrizables). Así, el problema de Malykhin para el caso precompacto también tiene cabida.

3.1. Pregunta (Malykhin-Precompacto). *¿Existe un grupo topológico Fréchet precompacto separable no metrizable?*

Por la Proposición 1.14, la pregunta anterior también puede ser reformulada preguntando por la existencia de un grupo topológico Fréchet numerable precompacto no metrizable. Desconocemos si la Pregunta 3.1 había sido ya considerada antes en la literatura. En el Capítulo 2 (Sección 1) mencionamos que los ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin que se han construido, son esencialmente de dos tipos: de tipo Booleano y de tipo $C_p(X)$. En este capítulo probaremos, entre otras cosas, que la existencia de un γ-conjunto no numerable es suficiente para que todo grupo Abeliano numerable admita una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable, probando en particular que consistentemente hay ejemplo a la Pregunta 3.1. Este hecho sin embargo no podrá ser extendido a toda la clase de grupos numerables, ya que A. Ju. Ol'šanskiĭ (*e.g.,* véase [**Ad**] (13.4)) da un ejemplo de un grupo numerable G (necesariamente no Abeliano) tal que la única topología de grupo que admite es la discreta. En particular, no existe una topología de grupo Fréchet no metrizable sobre G. Dicho ejemplo, nos muestra las restricciones topológicas que puede imponer la estructura algebraica de un grupo.

Pues bien, en el presente capítulo, nos concentraremos en el estudio de topologías de grupo Fréchet precompactas sobre grupos Abelianos numerables. Para cada grupo Abeliano numerable G, introducimos la noción de γ_G-conjunto, y con ayuda de la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen ([**Po**], [**vKa**]), demostramos que la existencia de una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable sobre G es equivalente a la existencia de un γ_G-conjunto no numerable que separa puntos de G. La noción de γ_G-conjunto guarda una estrecha relación con la noción de γ-conjunto, *e.g.,* probamos que la existencia de un γ-conjunto no numerable es suficiente para que exista un γ_G-conjunto no numerable que separa puntos de G para todo grupo Abeliano numerable G. Estudiando un poco más la noción de γ_G-conjunto, demostramos que para cualquier grupo Abeliano numerable G, la mínima cardinalidad de un subconjunto del grupo dual G^* que no sea un γ_G-conjunto es justamente el número de pseudointersección $\mathfrak{p}$.

1. Topologías de grupo Fréchet precompactas

Dado un grupo Abeliano G y $X \subseteq (G_d)^*$, sea τ_X la topología débil sobre G que hace continuas a cada $x \in X$. El símbolo G_X denotará al grupo G dotado con la topología τ_X. Supongamos que $X \subseteq (G_d)^*$, el *producto diagonal* de la familia X, denotado por r_X, es el mapeo de G en $\mathbb{T}^X$ definido por $r_X(g)(x) = x(g)$ para $g \in G$ y $x \in X$. Recordemos que $X \subseteq (G_d)^*$ *separa puntos* de G, si para cada $g \in G$ con $g \neq 0_G$ existe un carácter $x \in X$ tal que $x(g) \neq \mathbf{0}$. Por tanto, si X separa puntos de G entonces r_X es un encaje de G en el grupo producto $\mathbb{T}^X$. Es fácil ver que la topología τ_X es justamente la topología de subespacio inducida por r_X.

3.2. Teorema ([**CR**]). *Sea G un grupo Abeliano y $X \subseteq (G_d)^*$ que separa puntos de G. Entonces G_X es un grupo topológico precompacto Hausdorff. Más aún, cada topología de grupo precompacta Hausdorff sobre G es de la forma τ_X.* $\square$

La *topología de Bohr* de un grupo topológico Abeliano G es la topología τ_{G^*}. La cerradura de $r_{G^*}[G]$ en $\mathbb{T}^{G^*}$, denotada por bG, es un grupo topológico compacto Hausdorff. El grupo bG es llamado la *compactificación de Bohr* de G. Notemos que $r_G \colon G \to bG$ es un homomorfismo continuo de G sobre un subgrupo denso de bG.

En general, la compactificación de Bohr de un grupo topológico, es definido como una pareja (bG, r) donde bG es un grupo compacto Hausdorff y r es un homomorfismo continuo de G sobre un subgrupo denso de bG tal que cada homomorfismo continuo $f \colon G \to K$ sobre un grupo compacto K se extiende a un homomorfismo continuo $F \colon bG \to K$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama ($f = F \circ r$).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & bG \arrow[d, dashed, "F"] \\ & K \end{tikzcd}$$

La compactificación de Bohr de un grupo topológico existe y es única salvo isomorfismos. Esto último es una aplicación directa del teorema de Tychonoff.

Con estos elementos en mente, pasemos ahora a estudiar las topologías de grupo Fréchet precompactas sobre grupos Abelianos. Para esto, empezemos con definir dos objetos que serán de mucha utilidad. Dado un grupo Abeliano G, $g \in G$ y $m > 0$ sea $U_g^m = \{x \in (G_d)^* : x(g) \in T_m\}$, y dado $A \subseteq G$ sea $\mathcal{U}_A^m = \{U_a^m : a \in A\}$.

3.3. Lema. *Sea G un grupo Abeliano, $X \subseteq (G_d)^*$ que separa puntos de G y $A \subseteq G$. Entonces*

(1) *$\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$ si y sólo si 0_G pertenece a la τ_X-cerradura de A en G.*
(2) *$\mathcal{U}_A^m$ es una γ-cubierta de X para cada $m > 0$ si y sólo si A τ_X-converge a 0_G en G (esto es, cada τ_X-vecindad de 0_G contiene a todos los elementos de A salvo una cantidad finita).*

Demostración. Usando el producto diagonal r_X, podemos identificar a G_X con $r_X[G]$ en $\mathbb{T}^X$.

(1) $\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$ si y sólo si para cada $m > 0$ y para toda $F \in [X]^{<\omega}$ existe $a \in A$ tal que $x(a) \in T_m$ para cada $x \in F$ ($F \subseteq U_a^m$). Y esto es equivalente al hecho de que 0_G pertenezca a la τ_X-cerradura de A en G, ya que $U(F, m) = \{g \in G : x(g) \in T_m$ para cada $x \in F\}$ forma una vecindad básica de 0_G en $\mathbb{T}^X$.

(2) Supongamos que $\mathcal{U}_A^m$ es una γ-cubierta de X para cada $m > 0$, y sea $U(F, m)$ una vecindad básica de 0_G en $\mathbb{T}^X$. Entonces para cada $x \in F$ se tiene que $x \in U_a^m$ para toda $a \in A$ salvo una cantidad finita de a's, o equivalentemente, $A \subseteq^* U(\{x\}, m)$ para cada $x \in F$. De la finitud de F, se sigue que $A \subseteq^* U(F, m)$. Para el otro sentido, supongamos que A τ_X-converge a 0_G en G, y fijemos $m > 0$ y $x \in X$. De la convergencia se sigue que $A \subseteq^* U(\{x\}, m)$, o equivalentemente, $x \in U_a^m$ para toda $a \in A$ salvo una cantidad finita de a's. □

Así, el lema anterior nos provee de una conveniente traducción de las nociones necesarias para definir la propiedad de Fréchet en τ_X en términos de propiedades de cubierta del conjunto de carácteres X. Motivados en la definición de γ-espacio (Definición 2.12) damos a continuación una definición que recoge en lo fundamental ser Fréchet en τ_X. Dicha definición juega un papel importante en este capítulo.

3.4. Definición. Un conjunto (típicamente infinito) $X \subseteq (G_d)^*$ es un *γ_G-espacio*, si para cada subconjunto infinito $A \subseteq G$, en caso de que $\mathcal{U}_A^m$ sea una ω-cubierta de X para cada $m > 0$ entonces existe $B \subseteq A$ numerable tal que $\mathcal{U}_B^m$ es una γ-cubierta de X para cada $m > 0$. En el caso especial cuando G sea un grupo numerable, decimos que X es un *γ_G-conjunto* si este es un γ_G-espacio.

De la definición anterior y el Lema 3.3 deducimos inmediatamente el primer resultado principal de este capítulo.

3.5. Teorema. *Sea G un grupo Abeliano y $X \subseteq (G_d)^*$ que separa puntos de G. Entonces G_X es Fréchet si y sólo si X es un γ_G-espacio.* □

Notemos que el teorema anterior es en cierto sentido un resultado análogo al resultado de Gerlits y Nagy sobre los $C_p(X)$ (Teorema 2.15). De aquí también el nombre de γ_G-espacio.

El siguiente resultado es bien conocido [**CR**]. En aras de la claridad, incluimos un prueba corta de dicho resultado.

3.6. Teorema ([**CR**]). *Sea G un grupo Abeliano y sea $X \subseteq (G_d)^*$ que separa puntos de G. Entonces G_X es metrizable si y sólo si X es numerable.*

Demostración. Una de las implicaciones es clara. Así, supongamos que G_X es metrizable. Como $X \subseteq (G_X)^*$, es suficiente con probar que $(G_X)^*$ es numerable. Pues bien, dado que G_X es un subgrupo denso de bG_X, por la Proposición 1.14, G_X es metrizable si y sólo si bG_X es metrizable. Por la propiedad universal de la compactificación de Bohr, los grupos $(G_X)^*$ y $(bG_X)^*$ son algebraicamente isomorfos, y como bG_X es compacto, se sigue del Teorema 1.16 (4) que bG_X es metrizable si y sólo si $(bG_X)^*$ es numerable. $\square$

Combinando los dos teoremas anteriores, obtenemos la siguiente conclusión.

3.7. Corolario. *La existencia de una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable sobre un grupo Abeliano numerable G es equivalente a la existencia de un γ_G-conjunto no numerable que separa puntos de G.* $\square$

Existe una estrecha relación entre las nociones de γ-espacio y γ_G-espacio.

3.8. Proposición. *Si $X \subseteq (G_d)^*$ es un γ-espacio, entonces X es un γ_G-espacio.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto infinito de G tal que $\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$. Dado que X es un γ-espacio, podemos aplicar la Afirmación 2.16 para encontrar $U_{a_n}^{n+1} \in \mathcal{U}_A^{n+1}$ de tal manera que $\mathcal{U} = \{U_{a_n}^{n+1} \colon n \in \omega\}$ forme una γ-subcubierta de X. Sea $B = \{a_n \colon n \in \omega\}$. Entonces $\mathcal{U}_B^m$ es una γ-cubierta de X para toda $m > 0$. En efecto, sea $m > 0$ y $x \in X$, dado que $\mathcal{U}$ es una γ-subcubierta de X, existe una $k \in \omega$ con $k \geqslant m$ tal que $x \in U_{a_i}^{i+1} \subseteq U_{a_i}^m$ para toda $i \geqslant k$. $\square$

3.9. Observación. Todo espacio numerable X es un γ-espacio (Proposición 2.14 (1)), luego por la proposición anterior, todo conjunto numerable $X \subseteq (G_d)^*$ es un γ_G-espacio.

Con la ayuda de la Proposición 3.8, obtenemos otra interesante conclusión.

3.10. Corolario. *Asumiendo la existencia de un γ-conjunto no numerable, cada grupo Abeliano numerable admite una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable.*

Demostración. Sea X un γ-conjunto no numerable y sea G un grupo Abeliano numerable. Dado que los γ-conjuntos son cero dimensionales y $(G_d)^*$ es un espacio Polaco perfecto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq (G_d)^*$.

Por otro lado, dado que G es numerable, existe $Y \subset (G_d)^*$ numerable que separa puntos de G (*e.g.,* véase [**AT**] (1.1.8)). Sea $Z = X \cup Y$. Usando la Afirmación 2.16, es fácil ver que

Z también es un γ-conjunto. Por la Proposición 3.8, Z es un γ_G-conjunto. Por lo tanto, por el Corolario 3.7, τ_Z es una topología de grupo Fréchet precompacta no metrizable sobre G. $\square$

2. γ_G-conjuntos

En esta sección estudiaremos más la noción de γ_G-conjunto. Un primer resultado que ayuda a entender más esta noción es el siguiente.

3.11. Lema (Preservación). *Sea $f\colon H \to G$ un homomorfismo y sea $f^*\colon (G_d)^* \to (H_d)^*$ el homomorfismo inducido dado por $x \mapsto x \circ f$ para cada $x \in (G_d)^*$. Si $X \subseteq (G_d)^*$ es un γ_G-espacio, entonces $f^*[X]$ es un γ_H-espacio.*

Demostración. Sea $X \subseteq (G_d)^*$ un γ_G-espacio y sea $Y = f^*[X]$. Supongamos que $C \subseteq H$ es un conjunto infinito tal que $\mathcal{V}_C^m$ es una ω-cubierta de Y para toda $m > 0$, donde $\mathcal{V}_C^m = \{V_c^m \colon c \in C\}$ y $V_c^m = \{y \in (H_d)^* \colon y(c) \in T_m\}$. También podemos suponer que $\mathcal{V}_C^m$ es infinita para cada $m > 0$. Hagamos $A = f[C]$.

3.12. Afirmación. A es un conjunto infinito tal que $\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X para toda $m > 0$, donde $\mathcal{U}_A^m = \{U_a^m \colon a \in A\}$ y $U_a^m = \{x \in (G_d)^* \colon x(a) \in T_m\}$.

Demostración de la afirmación. Fijemos $m > 0$. Notemos que, si $x \in (G_d)^*$ y $c \in C$, entonces $x(f(c)) = f^*(x)(c)$, y por lo tanto, ${f^*}^{-1}[V_c^m] = U_{f(c)}^m$. Como $\mathcal{V}_C^m$ es infinito, se sigue entonces que A es un conjunto infinito. Supongamos ahora que $E \subset X$ es un conjunto finito. Hagamos $F = f^*[E]$. Entonces, existe $c \in C$ con $F \subseteq V_c^m$, y de aquí se sigue que $E \subseteq {f^*}^{-1}[F] \subseteq {f^*}^{-1}[V_c^m] = U_{f(c)}^m$. Así, $\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X. $\blacksquare$

Ahora, dado que X es un γ_G-espacio, existe $B \subseteq A$ numerable tal que $\mathcal{U}_B^m$ es una γ-cubierta de X para toda $m > 0$. Sea $\varphi\colon B \to \bigcup_{b\in B} f^{-1}[b]$ una función de elección, y hagamos $D = \varphi[B]$. Entonces, D es un subconjunto numerable de C tal que $\mathcal{V}_D^m$ es una γ-cubierta de Y para cada $m > 0$. $\square$

Ahora, notemos que f^* es suprayectiva si y sólo si f es inyectiva, y también notemos que f^* es inyectiva si y sólo si f es suprayectiva. Por lo tanto, obtenemos la siguiente conclusión.

3.13. Teorema. *La existencia de un γ_G-conjunto no numerable para algún grupo Abeliano numerable G, implica la existencia de un $\gamma_{\mathbb{Z}_\omega}$-conjunto no numerable, donde $\mathbb{Z}_\omega = \bigoplus_\omega \mathbb{Z}$ es el grupo Abeliano libre con una cantidad numerable de generadores.*

Demostración. Es bien conocido, de la teoría de grupos Abelianos libres, que para cada grupo Abeliano numerable G existe un homomorfismo suprayectivo $f\colon \mathbb{Z}_\omega \to G$. Entonces f^* es inyectiva, y por lo tanto, el teorema se sigue directamente del Lema 3.11. $\square$

Definamos $\mathsf{non}(\gamma_G\text{-conjunto}) = \text{mín}\{|X| \colon X \subseteq (G_d)^* \text{ y no es } \gamma_G\text{-conjunto}\}$. Con ayuda del Lema 3.11 podemos obtener un hecho útil acerca de este invariante cardinal del continuo.

3.14. Lema. *Sea H un subgrupo de G, entonces $\mathsf{non}(\gamma_G\text{-conjunto}) \leqslant \mathsf{non}(\gamma_H\text{-conjunto})$.*

Demostración. Sea $f\colon H \to G$ un monomorfismo, y supongamos que $Y \subseteq (H_d)^*$ no es γ_H-conjunto. Como f es inyectiva entonces f^* es suprayectiva, luego existe $X \subseteq (G_d)^*$ con $|X| = |Y|$ tal que $f^*[X] = Y$. Del Lema 3.11 se sigue inmediatamente que X no es un γ_G-conjunto. Es clara ahora la desigualdad del lema. $\square$

Establezcamos ahora el segundo resultado principal de este capítulo.

3.15. Teorema. *Sea G un grupo Abeliano numerable. Entonces* $\mathsf{non}(\gamma_G$*-conjunto*$) = \mathfrak{p}$.

Demostración. La desigualdad $\mathsf{non}(\gamma_G$-conjunto$) \geqslant \mathfrak{p}$, se sigue directamente de la Proposición 3.8 y del hecho de que $\mathfrak{p} = \mathsf{non}(\gamma$-conjunto$)$ (Teorema 2.20).

Por otro lado, para ver que $\mathsf{non}(\gamma_G$-conjunto$) \leqslant \mathfrak{p}$, por el Lema 3.14, es suficiente con probar que $\mathsf{non}(\gamma_H$-conjunto$)= \mathfrak{p}$, para algún subgrupo H de G. Para lograr esto último, necesitamos de un hecho acerca de la teoría de estructura de grupos Abelianos.

3.16. Hecho. *Cualquier grupo Abeliano numerable G, contiene una copia isomorfa de uno de los siguientes grupos: $\mathbb{Z}$, K, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ para un primo p, donde K es un grupo generado por un conjunto infinito independiente.*

Demostración. Supongamos que G no contiene una copia isomorfa de $\mathbb{Z}$ o K. Entonces $r(G)$ debe ser finito y $r_0(G) = 0$. Por lo tanto, existe un número primo p tal que G_p es infinito con $r(G_p)$ finito. Por 4.3.13 de [**Ro**], se sigue que G_p es una suma directa de una cantidad finita de grupos cíclicos y cuasicíclicos, luego el resultado se sigue. $\square$

3.17. Afirmación. $\mathsf{non}(\gamma_K$-conjunto$) = \mathfrak{p}$.

Demostración de la afirmación. Sea $A = \{a_n\colon n \in \omega\}$ un conjunto independiente de elementos no nulos de K tal que $K = \langle A\rangle$. Entonces $K = \bigoplus_{n\in\omega}\langle a_n\rangle$. Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia centrada sin pseudointersecciones infinitas. Notemos que para cada $n \in \omega$, podemos encontrar $b_n \in \mathbb{T}$ con $b_n \notin T_4$ tal que $\langle b_n\rangle$ es isomorfo con un subgrupo de $\langle a_n\rangle$. Ahora, para cada $F \in \mathcal{F}$ y para cada $n \in \omega$ consideremos la función $x_{F,n}\colon \langle a_n\rangle \to \mathbb{T}$ definida por

$$x_{F,n}(ma_n) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{Si } n \in F; \\ mb_n, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $x_{F,n}$ es un homomorfismo de grupos. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un único homomorfismo $x_F\colon K \to \mathbb{T}$ que hace conmutar el siguiente diagrama ($x_{F,n} = x_F \circ \iota_n$):

$$\begin{tikzcd} \langle a_n\rangle \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[dr, "x_{F,n}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\curvearrowright"] & K \arrow[d, dashed, "x_F"] \\ & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

donde ι_n denota a la inclusión. Hagamos $X = \{x_F\colon F \in \mathcal{F}\}$ y probemos que X no es un γ_K-conjunto. Claramente $|X| = |\mathcal{F}|$.

Fijemos $m > 0$. Sea $\{F_i : i < k\}$ un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es una familia centrada, existe $n \in \bigcap_{i<k} F_i$. Así, $x_{F_i}(a_n) = \mathbf{0}$ para toda $i < k$, luego entonces $\{x_{F_i} : i < k\} \subseteq U^m_{a_n}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}^m_A$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$. Supongamos ahora que B es un subconjunto infinito de A y verifiquemos que $\mathcal{U}^4_B$ no es una γ-cubierta de X. Supongamos lo contrario, *i.e.*, supongamos que para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $x_F \in U^4_b$ (o equivalentemente, $x_F(b) = \mathbf{0}$) para toda $b \in B$ salvo una cantidad finita de b's. Hagamos $E = \{n \in \omega : a_n \in B\}$. Notemos que para cada $F \in \mathcal{F}$, $x_F(a_n) = \mathbf{0}$ es equivalente a $n \in F$. Por lo tanto, E es una pseudointersección infinita de $\mathcal{F}$, lo cual contradice nuestra suposición acerca de $\mathcal{F}$. ■

3.18. AFIRMACIÓN. $\mathsf{non}(\gamma_{\mathbb{Z}(p^\infty)}\text{-conjunto}) = \mathfrak{p}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN. Consideremos a $\mathbb{Z}(p^\infty)$ como un subgrupo de $\mathbb{T}$, i.e., $\mathbb{Z}(p^\infty) = \langle a_n : n \geqslant 1\rangle$, donde $a_n = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}$ para $n \geqslant 1$. Para probar la afirmación, necesitamos del siguiente lema técnico.

3.19. LEMA. *Sea $N = \{2^n : n \geqslant 1\}$. Entonces, para cada $F \subseteq N$ existe $\overline{x}_F \in (\mathbb{Z}(p^\infty)_d)^*$ con las siguientes propiedades:*

(i) *$\overline{x}_F(a_n) \in T_4$ si y sólo si $n \in F$; y*
(ii) *$\overline{x}_F(a_n) \in T_n$ si $n \in F$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F un subconjunto de N. Hagamos

$$k = \begin{cases} 1, & \text{Si } p = 2; \\ \frac{p-1}{2}, & \text{cuando } p > 2, \end{cases}$$

y $A = \{a_n : n \geqslant 1\}$. Definamos un mapeo $x_F : A \to \mathbb{T}$ de la siguiente manera.

(1) $x_F(a_1) = \mathbf{0}$.
(2) $x_F(a_{2^n}) = \begin{cases} \frac{x_F(a_{2^{n-1}})}{p^{2^{n-1}}}, & \text{Si } 2^n \in F; \\ \frac{x_F(a_{2^{n-1}})}{p^{2^{n-1}}} + (\frac{k}{p} + \mathbb{Z}), & \text{en otro caso,} \end{cases}$ cuando $n \geqslant 1$.
(3) $x_F(a_m) = p^{2^n - m} x_F(a_{2^n})$, cuando $2^{n-1} \leqslant m \leqslant 2^n$.

Es fácil verificar que $px_F(a_1) = \mathbf{0}$ y $px_F(a_{n+1}) = x_F(a_n)$ para $n \geqslant 1$. Esto garantiza que x_F puede extenderse a un homomorfismo $\overline{x}_F : \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{T}$.

Resta probar que $\overline{x}_F$ satisface (i) y (ii). Para esto, tenemos que distinguir dos casos.

CASO **1**. $p = 2$.

Primero, notemos que $\|\frac{1}{m}(r + \mathbb{Z})\| = \frac{1}{m}\|r + \mathbb{Z}\|$ para toda $m > 0$ y $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$. Entonces, por los incisos (1) y (2), se sigue que

$$\|x_F(a_{2^n})\| = \begin{cases} \frac{\|x_F(a_{2^{n-1}})\|}{2^{2^{n-1}}}, & \text{Si } 2^n \in F; \\ \frac{1}{2} - \frac{\|x_F(a_{2^{n-1}})\|}{2^{2^{n-1}}}, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad (\star)$$

cuando $n \geqslant 1$. Claramente $\frac{\|x_F(a_{2^{n-1}})\|}{2^{2^{n-1}}} < \min\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{1}{4}\right\}$, para toda $n \geqslant 1$. Por lo tanto, se sigue de $(\star)$ que $\overline{x}_F$ satisface (i) y (ii).

CASO **2**. $p > 2$.

Al igual que en el caso anterior, es fácil ver que

$$\|x_F(a_{2^n})\| = \begin{cases} \frac{\|x_F(a_{2^{n}-1})\|}{p^{2^n-1}}, & \text{Si } 2^n \in F; \\ \frac{k}{p} + \frac{\|x_F(a_{2^{n}-1})\|}{p^{2^n-1}}, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad (\star\star)$$

cuando $n \geqslant 1$. También $\frac{\|x_F(a_{2^{n}-1})\|}{p^{2^n-1}} < \text{mín}\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{1}{4}\right\}$, para toda $n \geqslant 1$. Así, de $(\star\star)$ se sigue también que $\overline{x}_F$ satisface (i) y (ii) para este caso. □

Sea N como en el Lema 3.19 y $\mathcal{F} \subseteq [N]^\omega$ una familia centrada sin pseudointersecciones infinitas. Entonces, por Lemma 3.19, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $\overline{x}_F \in (\mathbb{Z}(p^\infty)_d)^*$ tal que $\overline{x}_F$ satisface (i) y (ii) de este lema. Sea $X = \{\overline{x}_F : F \in \mathcal{F}\}$ y probemos que X no es $\gamma_{\mathbb{Z}(p^\infty)}$-conjunto. Es claro que $|X| = |\mathcal{F}|$.

Fijemos $m > 0$. Sea $\{F_i : i < k\}$ un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es una familia centrada, existe $n \in \bigcap_{i<k} F_i$ tal que $n > m$. Por el Lema 3.19 (ii), se sigue que $\|\overline{x}_{F_i}(a_n)\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ para toda $i < k$, y por ende $\{\overline{x}_{F_i} : i < k\} \subseteq U^m_{a_n}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}^m_{A_N}$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$, donde $A_N = \{a_n : n \in N\}$. Supongamos ahora que B es un subconjunto infinito de A_N y verifiquemos que $\mathcal{U}^4_B$ no es una γ-cubierta de X. Con el objetivo de obtener una contradicción, supongamos que para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $\overline{x}_F \in U^4_b$ para toda $b \in B$ salvo una cantidad finita de b's. Hagamos $E = \{n : a_n \in B\}$. Por el Lema 3.19 (i), se sigue que $E \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathcal{F}$, lo cual contradice nuestra suposición acerca de $\mathcal{F}$. ■

3.20. Afirmación. $\mathsf{non}(\gamma_{\mathbb{Z}}\text{-conjunto}) = \mathfrak{p}$.

Demostración de la afirmación. Es bien conocido que el grupo dual $(\mathbb{Z}_d)^*$ es isomorfo a $\mathbb{T}$. Así, cada $x \in \mathbb{T}$ puede ser identificado con el homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{T}$ definido por $x(n) := nx$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Para establecer la afirmación, será necesario probar el siguiente lema.

3.21. Lema. *Sea $A = \{2^{4^n} : n \in \omega\}$. Entonces, para cada $F \subseteq A$ existe $x_F \in \mathbb{T}$ con las siguientes propiedades:*

(i) *$nx_F \in T_4$ si y sólo si $n \in F$; y*
(ii) *$nx_F \in T_n$ si $n \in F$.*

Demostración. Sea F un subconjunto de A y hagamos $E = \{n : 2^{4^n} \in F\}$. Para cada $n \in \omega$ consideremos el intervalo $J_n = [-\frac{1}{2^{4^n}}, \frac{1}{2^{4^n}}]$, y para cada $s \in 2^{<\omega}$ hagamos

$$I_s = \frac{1}{2} + \sum_{i \in |s|} \frac{1 - s(i)}{2^{4^i+1}} + J_{|s|}.$$

Estos intervalos satisfacen las siguientes propiedades:

(a) si $s \subseteq t$, entonces $I_t \subseteq I_s$;
(b) $I_s + \mathbb{Z} \subseteq U^4_{2^{4^i}}$ si y sólo si $s(i) = 1$; y
(c) si $s(i) = 1$, entonces $I_s + \mathbb{Z} \subseteq U^{2^{4^i}}_{2^{4^i}}$.

En efecto, para ver (a), primero notemos que

$$I_t = \frac{1}{2} + \sum_{i\in|s|} \frac{1-s(i)}{2^{4^i+1}} + \overbrace{\sum_{i\in|t|\setminus|s|} \frac{1-t(i)}{2^{4^i+1}} + J_{|t|}}^{(\star)},$$

y para verificar que $(\star) \subseteq J_{|s|}$, es suficiente con probar que

$$\frac{1}{2^{4^{|t|}}} + \sum_{i\in|t|\setminus|s|} \frac{1-t(i)}{2^{4^i+1}} \leqslant \frac{1}{2^{4^{|s|}}}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|s| < |t|$. Así, $|t| \geqslant |s|+1$, y dado que $4^{|s|+i} - 1 \geqslant 4^{|s|} + i$ para toda $i \geqslant 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{4^{|t|}}} + \sum_{i\in|t|\setminus|s|} \frac{1-t(i)}{2^{4^i+1}} &\leqslant \frac{1}{2^{4^{|s|+1}}} + \frac{1}{2^{4^{|s|}+1}} + \frac{1}{2^2}\sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{2^{4^{|s|+i}-1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^{4^{|s|}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{4^{|s|}}} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^{4^{|s|}}}\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{4^{|s|}}}.\end{aligned}$$

Para probar (b) y (c), notemos que

$$U_n^m = \{x \in \mathbb{T} \colon nx \in T_m\} = \sum_{k\in n}\left(\frac{k}{n} + I_{n,m}\right) + \mathbb{Z},$$

donde $I_{n,m} = (-\frac{1}{nm}, \frac{1}{nm})$. Supongamos que $s(i) = 1$. Entonces

$$I_{s\restriction_{i+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{j\in i} \frac{1-s(j)}{2^{4^j+1}} + J_{i+1}.$$

Claramente, $\frac{1}{2} + \sum_{j\in i} \frac{1-s(j)}{2^{4^j+1}} = \frac{k}{2^{4^i}}$, para algúna $k \in 2^{4^i}$. Como $\frac{1}{2^{4^{i+1}}} < \text{mín}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{4^i}}, \frac{1}{2^{4^i}}\cdot\frac{1}{2^{4^i}}\right\}$, entonces $I_s + \mathbb{Z} \subseteq I_{s\restriction_{i+1}} + \mathbb{Z} \subseteq U^4_{2^{4^i}} \cap U^{2^{4^i}}_{2^{4^i}}$. Esto prueba (c) y la primera parte de (b)

Para la segunda parte de (b), supongamos que $s(i) = 0$. Sea $k \in 2^{4^i}$ tal que $\frac{k}{2^{4^i}} = \frac{1}{2} + \sum_{j\in i} \frac{1-s(j)}{2^{4^j+1}}$. Entonces

$$I_{s\restriction_{i+1}} = \frac{k}{2^{4^i}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{4^i}} + J_{i+1}.$$

Dado que $\frac{1}{2^{4^{i+1}}} < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{4^i}}$, se sigue que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{4^i}} + J_{i+1} \subseteq [\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{4^i}}, \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^{4^i}}]$. Entonces $(I_{s\restriction_{i+1}} + \mathbb{Z}) \cap U^4_{2^{4^i}} = \emptyset$, y por lo tanto, también $(I_s + \mathbb{Z}) \cap U^4_{2^{4^i}} = \emptyset$.

Por el inciso (a), tomemos $x_F \in \bigcap_{n\in\omega} I_{\chi_E\restriction_n} + \mathbb{Z}$, donde χ_E es la función característica de E. Por lo tanto, se sigue de (b) y (c) que x_F satisface (i) y (ii). □

Sea A como en el Lema 3.21 y $\mathcal{F} \subseteq [A]^\omega$ una familia centrada sin pseudointersecciones infinitas. Entonces, por el Lema 3.21, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $x_F \in \mathbb{T}$ tal que x_F satisface (i) y (ii) de este lema. Sea $X = \{x_F \colon F \in \mathcal{F}\}$ y probemos que X no es un $\gamma_{\mathbb{Z}}$-conjunto. Claramente $|X| = |\mathcal{F}|$.

Fijemos $m > 0$. Sea $\{F_i \colon i < k\}$ un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es una familia centrada, existe $n \in \bigcap_{i<k} F_i$ tal que $n > m$. Por el Lema 3.21 (ii), se sigue que $\|nx_{F_i}\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ para cada $i < k$, y por ende $\{x_{F_i} : i < k\} \subseteq U_n^m$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_A^m$ es una ω-cubierta de X para cada $m > 0$. Supongamos ahora que B es un subconjunto infinito de A y veamos que $\mathcal{U}_B^4$ no es una γ-cubierta de X. En efecto, supongamos que para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $x_F \in U_b^4$ para toda $b \in B$ salvo una cantidad finita de b's. Por el Lema 3.21 (i), se sigue que $B \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathcal{F}$, lo que contradice nuestra suposición acerca de $\mathcal{F}$. $\blacksquare$

El teorema esta probado ahora. $\square$

Capítulo 4

Resultados de consistencia

En este capítulo trataremos algunas características combinatorias del forcing de Laver-Prikry $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ asociado a un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre ω, las cuales se encuentran muy ligadas a la combinatoria que está detrás de la propiedad de Fréchet (Oberservaciones 1.4 y 1.5). Este análisis combinatorio nos permitirá construir un modelo de **ZFC** en donde todo grupo Fréchet precompacto separable es metrizable (Teorema 4.21 (c)), obteniendo en particular que es consistente con **ZFC** que todo γ_G-conjunto sea numerable. El Teorema 4.21 (c) junto con el Corolario 3.10 nos dan una respuesta a la Pregunta 3.1, probando que la pregunta de Malykhin para el caso precompacto es independiente de **ZFC**. Más aún, en este mismo modelo se sigue también que $\mathfrak{c} = \omega_2$ y que cada espacio de Fréchet numerable regular de peso menor que $\mathfrak{c}$ tiene una π-base numerable (Teorema 4.21 incisos (a) y (b)). En grupos topológicos el π-peso y el peso coinciden (Teorema 1.15 (c)), luego es consistente con **ZFC** + **CH** que todo grupo Fréchet separable de peso menor que el continuo es metrizable (Corolario 4.24). Algunas de las ideas básicas de este análisis habián sido ya manejadas con anterioridad por J. Brendle y M. Hrušák en [**BH**][1] para el estudio combinatorio entre $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y la propiedad de Fréchet en $\mathcal{I}^{<\omega}$. De hecho, el resultado principal de [**BH**] (véase Teorema 2.28 de esta tesis) es un caso particular de nuestro Corolario 4.24.

1. Combinatoria y forcing

En esta sección desarrollamos las técnicas combinatorias necesarias en la construcción del modelo de **ZFC** que hemos mencionado más arriba.

1.1. Familias numerablemente altas y $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$. La Observación 1.5 (2) nos proporciona una conveniente traducción combinatoria de que un ideal $\mathcal{I}$ no sea Fréchet en términos de que dicho ideal restringido a un conjunto $\mathcal{I}$-positivo sea alto. Entonces, con el objetivo de preservar "no ser Fréchet" en iteraciones de forcing, estaremos interesados en estudiar la noción de "ser alto" en extensiones de forcing, aunque realmente nos enfocaremos en nociones mucho más fuertes que "ser alto" con el objeto de obtener propiedades combinatorias extras.

4.1. Definición ([**Do**]). Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, decimos que $\mathcal{I}$ es *numerablemente alto* (o *ω-hitting*), si para cada colección numerable $\langle A_n \colon n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^\omega$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \cap A_n$ es infinito para cada $n \in \omega$. De una manera similar, decimos que una familia arbitraria $\mathcal{H}$ de

[1] Cabe mencionar que el presente autor también tomo parte en esta discusión.

subconjuntos de ω es *numerablemente alta*, si para cada colección numerable $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \cap A_n$ (equivalentemente, $H \cap A_n \neq \emptyset$) es infinito para cada $n \in \omega$.

Una propiedad combinatoria útil de esta noción nos la provee el siguiente lema.

4.2. Lema (Folklore). *Sea $\mathcal{H}$ una familia numerablemente alta de subconjuntos de ω. Si $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{H}_n$, entonces existe n tal que $\mathcal{H}_n$ es numerablemente alta.*

Demostración. Supongamos lo contrario, *i.e.*, supongamos que para cada n existe una sucesión $\langle A_k^n : k \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para toda $H \in \mathcal{H}_n$ existe k con $H \cap A_k^n = \emptyset$. Ahora, para la sucesión $\langle A_k^n : n, k \in \omega \rangle$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \cap A_k^n \neq \emptyset$ para toda k y n. Encontramos n tal que $H \in \mathcal{H}_n$, luego existe k con $H \cap A_k^n = \emptyset$, una contradicción. □

Una familia numerablemente alta que jugará un papel importante en nuestro análisis nos la provee el siguiente lema.

4.3. Lema. *Sea $\triangle = \{\langle n, k \rangle : k \leqslant n < \omega\}$ y $\mathcal{H}_\triangle = \{h \in \omega^\omega : h \subset \triangle\}$. Entonces $\mathcal{H}_\triangle$ es una familia numerablemente alta.*

Demostración. Para $A \subseteq \triangle$ y $n \in \omega$ denotemos por $(A)_n$ a la sección vertical de A en n, *i.e.,* $(A)_n = \{k : \langle n, k \rangle \in A\}$. Haciendo $X_A = \{n : (A)_n \neq \emptyset\}$, A es infinito si y sólo si X_A es infinito. Ahora, sea $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\triangle]^\omega$. Definimos recursivamente una función $f \in \omega^\omega$ estrictamente creciente tal que $f(0) = \text{mín}(X_{A_0})$, y para $n > 0$, $f(n) = \text{mín}(X_{A_n} \setminus (f(n-1)+1))$. Así, $(A_n)_{f(n)} \neq \emptyset$ para toda $n \in \omega$. Pues bien, sea $h \in \omega^\omega$ tal que $h(f(n)) \in (A_n)_{f(n)}$ para $n \in \omega$ y $h \equiv 0$ en otro caso, luego $h \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. □

Una noción de forcing $\mathbb{P}$ *preserva familias numerablemente altas*, si para cada familia numerablemente alta $\mathcal{H}$, se tiene que $\Vdash_\mathbb{P}$ "$\mathcal{H}$ es numerablemente alta". Con el fin de investigar la preservación de familias numerablemente altas en iteraciones de forcing, introduzcamos una noción más fuerte de preservación de familias numerablemente altas.

4.4. Definición ([**BH**]). Una noción de forcing $\mathbb{P}$ *preserva fuertemente familias numerablemente altas*, si para cada $\dot{A}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un subconjunto infinito de ω, existe una sucesión $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ de subconjuntos infinitos de ω tal que para cualquier $B \in [\omega]^\omega$, si $B \cap B_n$ es infinito para cada n entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$B \cap \dot{A}$ es infinito".

4.5. Lema. *Sea P una noción de forcing. Si $\mathbb{P}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas entonces en particular $\mathbb{P}$ preserva familias numerablemente altas.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ una familia numerablemente alta y sea $\langle \dot{A}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de $\mathbb{P}$-nombres para subconjuntos infinitos de ω. Por la preservación fuerte de familias numerablemente altas, para cada n existe una sucesión $\langle B_k^n : k \in \omega \rangle$ de subconjuntos infinitos de ω tal que para cualquier $B \in [\omega]^\omega$, si $B \cap B_k^n$ es infinito para cada k entonces $\Vdash_\mathbb{P}$ "$B \cap \dot{A}_n$ es infinito". Sea $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \cap B_k^n$ es infinito para cada n y k, luego $\Vdash_\mathbb{P}$ "$H \cap \dot{A}_n$ es infinito para cada n". *i.e.*, $\Vdash_\mathbb{P}$ "$\mathcal{H}$ es numerablemente alta". □

Ahora, analizemos bajo qué condiciones una noción de forcing del tipo $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ preserva familias numerablemente altas. Recordemos que el *forcing de Laver-Prikry* $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$, asociado a un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre ω, es definido como el conjunto de todos los árboles $T \subseteq \omega^{<\omega}$ para los cuales existe nodo $s_T \in T$ (llamado el *tallo* de T) tal que para cualquier $t \in T$ sucede que $t \subseteq s_T$ o $s_T \subseteq t$, y para cada $t \in T$ con $t \supseteq s_T$ el conjunto $\operatorname{succ}_T(t) = \{n \in \omega \colon t^\frown n \in T\} \in \mathcal{F}$. El forcing $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ es ordenado por la inclusión $\subseteq$. Para cada $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y cada $s \in T$ con $s_T \subseteq s$, sea $T_s = \{t \in T \colon s \subseteq t \text{ o } t \subseteq s\}$ el *subárbol de T determinado por s*. La siguiente proposición resume algunas propiedades básicas de esta noción de forcing que debemos tener presente.

4.6. Proposición (Folklore). (1) *s_T es único para cada $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$.*

(2) *$\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ es un forcing σ-centrado que agrega genéricamente un real dominante, esto es, si G es un filtro $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-genérico sobre $\mathbf{V}$ entonces $\ell_{gen} := \bigcup_{T\in G} s_T \in \omega^\omega$ y*

$$\mathbf{V}[G] \models \forall f \in \mathbf{V} \cap \omega^\omega (f \leqslant^* \ell_{gen}).$$

(3) *Si denotamos por $\dot{A}_{gen}$ al $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-nombre para el rango de $\dot{\ell}_{gen}$, entonces $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ separa al filtro $\mathcal{F}$ via $\dot{A}_{gen}$, esto es,*

$$\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}} \text{“}\forall F \in \mathcal{F}\, \forall X \in \mathcal{F}^+ (\dot{A}_{gen} \subseteq^* F \wedge |\dot{A}_{gen} \cap X| = \aleph_0)\text{”}.$$

Demostración. (1) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y supongamos que existe $s \in T$ con $s \neq s_T$ el cual también es un tallo de T. Entonces $s \subsetneq s_T$ o $s_T \subsetneq s$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s \subsetneq s_T$. Como $\mathcal{F}$ es libre, entonces existe $n \in \operatorname{succ}_T(s)$ con $n \neq s_T(|s|)$. Así, $s^\frown n \in T$, pero $s^\frown n \nsubseteq s_T$ y $s_T \nsubseteq s^\frown n$, contradiciendo que s_T es un tallo de T.

(2) Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, sea $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}(s) = \{T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}} \colon s_T = s\}$. Entonces $\mathbb{L}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} \mathbb{L}_{\mathcal{F}}(s)$. Cada $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}(s)$ es centrado, ya que si $T, T' \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}(s)$, entonces $T \cap T' \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}(s)$. Así, $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ es σ-centrado.

Para ver que $\ell_{gen} \in \omega^\omega$, notemos simplemente que $T' \leqslant T$ implica $s_T \subseteq s_{T'}$, luego por genericidad de G, se sigue que $\ell_{gen} \in \omega^\omega$. Para checar la otra parte, sea $f \in \omega^\omega$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$. Dado que $\mathcal{F}$ es libre, para cada $n \in \omega$ existe $F_n \in \mathcal{F}$ tal que $F_n \cap f(n) = \emptyset$. Consideremos T_f la condición con tallo s_T tal que $\operatorname{succ}_{T_f}(t) = F_{|t|}$ para toda $t \in T_f$ con $t \supseteq s_T$. Haciendo $T' = T_f \cap T$, se obtiene que $T' \leqslant_0 T$ y

$$T' \Vdash \text{“}\forall n \geqslant |s_T| (f(n) \leqslant \dot{\ell}_{gen}(n))\text{”}.$$

(3) Sea $F \in \mathcal{F}$ y $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$. Consideremos T_F la condición con tallo s_T tal que $\operatorname{succ}_{T_F}(t) = F$ para toda $t \in T_F$ con $t \supseteq s_T$. Haciendo $T' = T_F \cap T$, obtenemos que $T' \leqslant_0 T$ y

$$T' \Vdash \text{“}\dot{A}_{gen} \setminus \operatorname{ran}(s_T) \subseteq F\text{”}.$$

Para ver la otra parte, procedamos por contradicción, *i.e.,* supongamos que existen $X \in \mathcal{F}^+$, n un número natural y una condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$T \Vdash \text{“}\dot{A}_{gen} \cap X \subseteq n\text{”}.$$

Notemos que para cada $m \in \operatorname{succ}_T(s_T)$ se tiene que $T_{s_T^\frown m} \Vdash$ "$\dot{\ell}_{gen}(|s_T|) = m$". Sea $m \in \operatorname{succ}_T(s_T) \cap X$ con $m > n$. Entonces $T_{s_T^\frown m} \Vdash$ "$\dot{A}_{gen} \cap X \nsubseteq n$", una contradicción, ya que $T_{s_T^\frown m} \leqslant T$. $\square$

El *análisis de rango* para nombres introducido por J. J. Baumgartner y P. Dordal en [**BD**] para el forcing de Hechler es una herramienta básica para analizar propiedades de forcing de nociones del tipo Laver-Prikry (véase por ejemplo [**Br1, Br2**]). Sea φ una fórmula en el lenguaje de forcing y $s \in \omega^{<\omega}$, decimos que s *prefiere* φ, si no existe una condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ con tallo s tal que $T \Vdash$ "$\neg\varphi$", o equivalentemente, cada condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ con tallo s admite una extensión T' tal que $T' \Vdash$ "φ". Con esta herramienta en mente, caractericemos combinatoriamente cuando un forcing del tipo $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ preserva familias numerablemente altas. Para esto, es necesario recordar la definición del *orden de Katětov* ([**GH, HZ**]). Dados dos ideales $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ sobre ω, decimos que $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$ si existe una función $f\colon \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[I] \in \mathcal{J}$ para cada $I \in \mathcal{I}$.

4.7. Proposición ([**BH**]). *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω y sea $\mathcal{F} = \mathcal{I}^*$ el filtro dual. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Para cada $X \in \mathcal{I}^+$ y cada $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I} \restriction X$ el ideal $\mathcal{J}$ no es numerablemente alto.*
(2) *$\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas.*
(3) *$\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ preserva familias numerablemente altas.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos lo contrario, *i.e*, supongamos que existe $\dot{A}$ un $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-nombre para un subconjunto infinito de ω tal que para cada $\langle B_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^\omega$ existe $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \cap B_n$ es infinito para cada n y sin embargo existe una condición $T_B \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y un número natural n_B tales que

$$T_B \Vdash \text{“}B \cap \dot{A} \subseteq n_B\text{”}. \qquad (\star)$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de tales $B \in [\omega]^\omega$, *i.e.*, la familia de todos las $B \in [\omega]^\omega$ tales que existe una condición $T_B \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y un número natural n_B tales que $T_B \Vdash$ "$B \cap \dot{A} \subseteq n_B$". Por nuestra suposición, $\mathcal{B}$ es numerablemente alta.

Definamos por recursión sobre los números ordinales un *rango* $\operatorname{rank}(s)$ como sigue:

$$\operatorname{rank}(s) = 0 \text{ si } \begin{cases} \text{o bien} & \exists K \in [\omega]^\omega\, \forall k \in K (s \text{ prefiere } k \in \dot{A}) \\ \text{o} & \exists X \in \mathcal{F}^+,\ f\colon X \to \omega \\ & \forall \ell \in X (s^\frown \ell \text{ prefiere } f(\ell) \in \dot{A}) \\ & \text{y } \forall k \in \omega (f^{-1}(k) \in \mathcal{I}) \end{cases}$$

y $\operatorname{rank}(s) \leqslant \alpha$ si existe $X \in \mathcal{F}^+$ tal que $\operatorname{rank}(s^\frown \ell) < \alpha$ para cada $\ell \in X$, cuando $\alpha > 0$. Así, ponemos $\operatorname{rank}(s) = \min\{\alpha\colon \operatorname{rank}(s) \leqslant \alpha\}$ en caso de que este último conjunto sea no vacío, y ponemos el símbolo ∞ en caso contrario.

4.8. Afirmación. $\operatorname{rank}(s) < \infty$ para toda s.

Demostración de la afirmación. Supongamos que $\operatorname{rank}(s) = \infty$. Entonces $K := \{k\colon s \text{ prefiere } k \in \dot{A}\}$ es finito. Construimos recursivamente una condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ con tallo s tal que para cada $t \in T$ que extienda a s, se sigue lo siguiente:

(i) $\operatorname{rank}(t) = \infty$, y
(ii) $\{k\colon t \text{ prefiere } k \in \dot{A}\} \subseteq K$.

Por nuestra suposición, s satisface (i) y (ii). Ahora, sea t con las propiedades (i) y (ii). Dado que $\operatorname{rank}(t) = \infty$ entonces $\{\ell\colon \operatorname{rank}(t^\frown\ell) < \infty\} \in \mathcal{I}$, luego existe $X_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{rank}(t^\frown\ell) = \infty$ para cada $\ell \in X_0$. Sea $X_1 = \{\ell \in X_0\colon \exists k \notin K(t^\frown\ell \text{ prefiere } k \in \dot{A})\}$. Si $X_1 \in \mathcal{F}^+$, entonces definimos $f\colon X_1 \to \omega$ dada por

$$f(\ell) = \text{mín}\{k \notin K\colon t^\frown\ell \text{ prefiere } k \in \dot{A}\}.$$

Veamos que f es $\mathcal{I}$-pequeña, *i.e.*, $f^{-1}(k) \in \mathcal{I}$ para cada $k \in \omega$. En efecto, supongamos que $f^{-1}(k) \in \mathcal{I}^+ = \mathcal{F}^+$ para alguna k. Entonces t debe preferir $k \in \dot{A}$, ya que de lo contrario existiría una condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ con $s_T = t$ tal que $T \Vdash$ "$k \notin \dot{A}$". Sea $\ell \in \operatorname{succ}_T(t) \cap f^{-1}(k)$, entonces $T_{t^\frown\ell} \leqslant T$ y por ende también $T_{t^\frown\ell} \Vdash$ "$k \notin \dot{A}$", en particular $t^\frown\ell$ no prefiere $k \in \dot{A}$, una contradicción, ya que $\ell \in f^{-1}(k)$. Pero que t prefiera $k \in \dot{A}$ también es una contradicción, ya que $k \notin K$ y (ii) se sigue para t. Por lo tanto, hemos podido definir una función como en la definición de rank, y en consecuencia $\operatorname{rank}(t) = 0$, nuevamente una contradicción. Así $X_1 \in \mathcal{I}$ y $X_0 \setminus X_1 \in \mathcal{F}$. Para $t^\frown\ell$ con $\ell \in X_0 \setminus X_1$, las condiciones (i) y (ii) se siguen, luego la construcción procede.

Ahora, $\dot{A}$ es forzado a ser infinito, luego existe $T' \leqslant T$ y $k \notin K$ tal que $T' \Vdash$ "$k \in \dot{A}$". Entonces $s_{T'}$, el tallo de T', prefiere en particular $k \in \dot{A}$, una contradicción, ya que por un lado $s_{T'}$ satisface (ii) pero $k \notin K$. ■

Continuemos con la prueba de (1) ⇒ (2). Sea s_B el tallo de T_B. Fortaleciendo la condición T_B, si fuera necesario, podemos suponer que $\operatorname{rank}(s_B) = 0$ para toda $B \in \mathcal{B}$. De hecho, siendo un poco más generales, dada una condición $T \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y $s \in T$ con $s \supseteq s_T$, existe $t \in T$ con $t \supseteq s$ tal que $\operatorname{rank}(t) = 0$. En efecto, por la afirmación anterior, $\operatorname{rank}(s) = \alpha$ para algún número ordinal α. Pongamos $t_0 = s$, entonces existe $X_0 \in \mathcal{F}^+$ tal que $\operatorname{rank}(t_0^\frown\ell) < \alpha$ para cada $\ell \in X_0$. Sea $\ell_0 \in \operatorname{succ}_T(t_0) \cap X_0$, luego $t_0^\frown\ell_0 \in T$ y $\operatorname{rank}(t_0^\frown\ell_0) < \alpha$. Repitiendo el proceso anterior, podemos construir recursivamente (en la condición T) una sucesión $s = t_0 \subseteq t_1 \subseteq \dots$ tal que $\operatorname{rank}(t_0) > \operatorname{rank}(t_1) > \dots$, luego el proceso debe terminar en una cantidad finita de pasos, *i.e.*, existe $n \in \omega$ tal que $\operatorname{rank}(t_n) = 0$. Aplicando el argumento anterior a la condición T_B, podemos encontrar entonces $t_B \in T_B$ con $t_B \supseteq s_B$ tal que $\operatorname{rank}(t_B) = 0$. Ahora, existe $T'_B \leqslant T_B$ cuyo tallo es t_B, luego T'_B forzará también la suposición inicial ($\star$). Por lo tanto, la suposición que enunciamos al principio de este párrafo procede.

Ahora bien, $\mathcal{B}$ es numerablemente alta, entonces por el Lema 4.2, existen s y n tales que la familia $\mathcal{B}_{s,n} = \{B \in \mathcal{B}\colon s = s_B,\ \text{y } n = n_B\}$ es numerablemente alta. Fijemos tales s y n.

De acuerdo a la definición de rank, tenemos que considerar dos casos.

Caso **1**. $\exists K \in [\omega]^\omega\, \forall k \in K(s$ *prefiere* $k \in \dot{A})$.

Sea $B \in \mathcal{B}_{s,n}$ tal que $B \cap K$ es infinito, luego existe $k > n$ con $k \in B \cap K$. En consecuencia, existe $T \leqslant T_B$ tal que $T \Vdash$ "$k \in \dot{A}$", contradiciendo la suposición inicial $(\star)$.

Caso **2**. $\exists X \in \mathcal{F}^+$, $f\colon X \to \omega$ *$\mathcal{I}$-pequeña* $\forall \ell \in X(s^\frown \ell$ *prefiere* $f(\ell) \in \dot{A})$.

Hagamos $\mathcal{J} = \langle \mathcal{B}_{s,n} \rangle$, el ideal generado por $\mathcal{B}_{s,n}$, entonces el ideal $\mathcal{J}$ es numerablemente alto. Así, $\mathcal{J} \nleqslant_K \mathcal{I} \restriction X$, luego existe $B \in \mathcal{B}_{s,n}$ tal que $f^{-1}[B] \in \mathcal{I}^+$. Ahora, también $f^{-1}[B] \cap \operatorname{succ}_{T_B}(s) \in \mathcal{I}^+$, y dado que f es $\mathcal{I}$-pequeña, se sigue que $f[f^{-1}[B] \cap \operatorname{succ}_{T_B}(s)]$ es infinito, luego existe $\ell \in f^{-1}[B] \cap \operatorname{succ}_{T_B}(s)$ tal que $f(\ell) > n$. Así, $s^\frown \ell$ prefiere $f(\ell) \in \dot{A}$. Por lo tanto, existe $T \leqslant T_B$ cuyo tallo extiende a $s^\frown \ell$ tal que $T \Vdash$ "$f(\ell) \in \dot{A}$", contradiciendo nuevamente la suposición inicial $(\star)$, ya que $f(\ell) \in B$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se sigue del Lema 4.5.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que existe un ideal $\mathcal{J}$ (sobre ω) numerablemente alto Katětov abajo de $\mathcal{I} \restriction X$, para algún $X \in \mathcal{I}^+$, el cual es atestiguado por una función $f\colon X \to \omega$. Recordando que $\dot{A}_{gen}$ denota el $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-nombre para el rango de la función $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-genérica (véase Proposición 4.6 (2)), entonces $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$f[\dot{A}_{gen} \cap X]$ es infinito", y más aún, $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$f[\dot{A}_{gen} \cap X]$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathcal{J}$". Por lo tanto, $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\mathcal{J}$ no es alto y por ende no numerablemente alto". □

4.9. Corolario. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal Fréchet sobre ω. Entonces $\mathbb{L}_{\mathcal{I}^*}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe un ideal $\mathcal{J}$ sobre ω numerablemente alto Katětov abajo de $\mathcal{I} \restriction X$ para algún $X \in \mathcal{I}^+$, el cual es atestiguado por una función $f\colon X \to \omega$. Como $\mathcal{I}$ es Fréchet, existe $S \in [X]^\omega \cap \mathcal{I}^\perp$, de donde $f[S]$ debe ser infinito. El ideal $\mathcal{J}$ es numerablemente alto, en particular alto, luego existe $J \in \mathcal{J}$ con $J \cap f[S]$ infinito. Así, $f^{-1}[J \cap f[S]] \in \mathcal{I} \setminus \mathsf{Fin}$, contradiciendo que $S \in \mathcal{I}^\perp$. □

Como consecuencia de esto último, obtenemos en particular que $\mathbb{L}_{\mathsf{Fr}}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas, donde $\mathsf{Fr} = \mathsf{Fin}^*$ (el *filtro de Fréchet*).

La noción de preservar fuertemente familias numerablemente altas es lo suficientemente fuerte para ser preservada por iteraciones con soporte finito de forcings ccc que preserven dicha noción.

4.10. Lema ([**BH**]). *La iteración con soporte finito de nociones de forcing ccc que esten preservando fuertemente familias numerablemente altas, preserva fuertemente familias numerablemente altas.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}_\delta = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle$ una iteración con soporte finito de nociones de forcing ccc tal que cada $\mathbb{P}_\alpha$ preserva fuertemente familias numerablemente altas y

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ preserva fuertemente familias numerablemente altas”}.$$

Probemos entonces que $\mathbb{P}_\delta$ preserva fuertemente familias numerablemente altas.

Sea $\dot{A}$ un $\mathbb{P}_\delta$-nombre para un subconjunto infinito de ω. Procedemos por inducción sobre δ.

Caso **1**. $\delta = 0$.

Es claro, ya que $\mathbb{P}_0$ es el forcing trivial.

Caso **2**. $\delta = \alpha + 1$, *i.e.*, $\mathbb{P}_\delta = \mathbb{P}_\alpha \star \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$.

Sea G un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre $\mathbf{V}$. Entonces podemos encontrar una sucesión $\langle \dot{A}_n \colon n \in \omega \rangle$ de $\mathbb{P}_\alpha$-nombres para elementos de $[\omega]^\omega \cap \mathbf{V}[G]$ tal que

$$\mathbf{V}[G] \models \forall B \in [\omega]^\omega \left((\forall n \in \omega \, |B \cap A_n| = \aleph_0) \rightarrow \Vdash_{\mathbb{Q}_\alpha} \text{“}|B \cap \dot{A}| = \aleph_0\text{”} \right)$$

y por hipótesis de inducción, para cada n existe una sucesión $\langle B^n_k \colon k \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para cualquier $B \in [\omega]^\omega$ con $B \cap B^n_k$ infinito para cada k, se tiene que $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$B \cap \dot{A}_n$ es infinito”. Así, para toda $B \in [\omega]^\omega$ con $B \cap B^n_k$ infinito para toda n y k, se tiene que $\mathbf{V}[G][H] \models B \cap \dot{A}$ es infinito, donde H es cualquier filtro $\mathbb{Q}_\alpha$-genérico sobre $\mathbf{V}[G]$.

Caso **3**. $\mathrm{cof}(\delta) = \omega$.

No es difícil ver que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta = \omega$. Así, sea $\mathbb{P}_\omega = \langle \mathbb{P}_k, \dot{\mathbb{Q}}_k \colon k \in \omega \rangle$. En una extensión intermedia $\mathbf{V}[G_k]$, encontramos una sucesión decreciente de condiciones $\langle p_{n,k} \colon n \in \omega \rangle$ y subconjuntos infinitos $A_{n,k}$ de ω tales que

$$p_{n,k} \Vdash_{\mathbb{P}_{[k,\omega)}} \text{“los primeros } n \text{ elementos de } A_{m,k} \text{ y } \dot{A} \text{ coinciden para } m \leqslant n\text{”}.$$

Los $A_{n,k}$ son aproximaciones a $\dot{A}$.

Ahora, como cada $\mathbb{P}_k$ preserva fuertemente familias numerablemente altas, existe una sucesión $\langle B^m_{n,k} \colon m \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para cada $B \in [\omega]^\omega$, si $B \cap B^m_{n,k}$ es infinito para toda m entonces

$$\Vdash_{\mathbb{P}_k} \text{“}B \cap \dot{A}_{n,k} \text{ es infinito”}.$$

Consideremos $\langle B^m_{n,k} \colon n,\, k,\, m \in \omega \rangle$ y sea $B \in [\omega]^\omega$ tal que $B \cap B^m_{n,k}$ es infinito para toda n, k y m. Para finalizar la demostración, es suficiente con probar que

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\omega} \text{“}B \cap \dot{A} \text{ es infinito”}.$$

Si este no es el caso, entonces existe $q \in \mathbb{P}_\omega$ y $m \in \omega$ tal que $q \Vdash_{\mathbb{P}_\omega}$ “$B \cap \dot{A} \subseteq m$”. Dado que estamos iterando con soporte finito, existe k tal que $q \in \mathbb{P}_k$. Sea G_k un filtro $\mathbb{P}_k$-genérico sobre $\mathbf{V}$ tal que $q \in G_k$. Como $B \cap A_{m,k}$ es infinito, sea $\ell \geqslant m$ con $\ell \in B \cap A_{m,k}$. Para una n suficientemente grande,

$$p_{n,k} \Vdash_{\mathbb{P}_{[k,\omega)}} \text{“}\ell \in \dot{A}\text{”}.$$

Dado que $q \in G_k$, esto contradice la suposición inicial acerca de q.

Caso **4**. $\mathrm{cof}(\delta) > \omega$.

Para este caso, usando argumentos usuales de reflexión,[2] notemos que $\dot{A}$ es esencialmente un $\mathbb{P}_\alpha$-nombre para algún $\alpha < \delta$. Así, la hipótesis de inducción nos da fácilmente lo deseado. $\square$

1.2. Sellando a un ideal. La siguiente definición encuentra entre sus motivaciones la ya conocida Observación 1.5 (2).

4.11. Definición. Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing, $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω y $\dot{A}$ un $\mathbb{P}$-nombre. Decimos que $\mathbb{P}$ *sella* al ideal $\mathcal{I}$ via $\dot{A}$ si $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{A} \in \mathcal{I}^+ \wedge \mathcal{I} \upharpoonright \dot{A}$ es numerablemente alto".

Para las nociones del tipo $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$, la siguiente definición nos provee de la combinatoria necesaria para que el forcing $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ selle a un ideal $\mathcal{I}$ via $\dot{A}_{gen}$.

4.12. Definición. Sean $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Decimos que el ideal $\mathcal{I}$ es *numerablemente alto módulo* $\mathcal{F}$, si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\mathcal{I} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ y
- para cada familia numerable $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^+$ existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $H \cap I \in \mathcal{F}^+$ para cada $H \in \mathcal{H}$.

Notemos que si en la definición anterior hacemos $\mathcal{F} = \mathsf{Fr}$, entonces recuperamos la definición de un ideal numerablemente alto.

4.13. Lema. *Sean $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω y $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Entonces el forcing $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ sella al ideal $\mathcal{I}$ via $\dot{A}_{gen}$ si y sólo si $\mathcal{I}$ es numerablemente alto módulo $\mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ sella al ideal $\mathcal{I}$ via $\dot{A}_{gen}$. Como $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\dot{A}_{gen} \in \mathcal{I}^+$", se sigue entonces que $\mathcal{I} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Ahora, supongamos que existe una familia numerable $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^+$ tal que para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $H \in \mathcal{H}$ con $H \cap I \in \mathcal{F}^*$. Por 4.6 (3), $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\dot{A}_H := \dot{A}_{gen} \cap H$ es infinito para cada $H \in \mathcal{H}$" y también $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\dot{A}_{gen}$ es casi ajeno con cada elemento de $\mathcal{F}^*$". Por lo tanto, $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\mathcal{I} \upharpoonright \dot{A}_{gen}$ no es numerablemente alto".

Para el otro sentido, supongamos que $\mathcal{I}$ es numerablemente alto módulo $\mathcal{F}$. Del hecho de que $\mathcal{I} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ se sigue fácilmente que $\mathcal{I}^* \subseteq \mathcal{F}^+$, y dado que por genericidad se tiene que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$X \cap \dot{A}_{gen}$ es infinito para cada $X \in \mathcal{F}^+$" entonces podemos concluir que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\dot{A}_{gen} \in \mathcal{I}^+$".

Veamos ahora que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathcal{F}}}$ "$\mathcal{I} \upharpoonright \dot{A}_{gen}$ es numerablemente alto". Procedamos por contradicción, *i.e.*, supongamos que existe una sucesión $\langle \dot{A}_n \colon n \in \omega \rangle$ de $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$-nombres para subconjuntos infinitos de $\dot{A}_{gen}$ tal que para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $T_I \in \mathbb{L}_{\mathcal{F}}$, y $n_I, m_I \in \omega$ tales que

$$T_I \Vdash \text{“}\dot{A}_{n_I} \cap I \subseteq m_I\text{”}. \qquad (\star)$$

Definamos por recursión sobre los números ordinales un rango $\mathrm{rk}_n(s)$ como sigue:

$$\mathrm{rk}_n(s) = 0 \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F}^+ \, \forall b \in B (s^\frown b \text{ prefiere } b \in \dot{A}_n)$$
$$\mathrm{rk}_n(s) \leqslant \alpha \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F}^+ \, \forall b \in B (\mathrm{rk}_n(s^\frown b) < \alpha)$$

para $\alpha > 0$.

[2]Véase por ejemplo el Lema 5. 14 en [**Ku**].

4.14. Afirmación. $\mathrm{rk}_n(s) < \infty$ para toda s y n.

Demostración de la afirmación. Fijemos n y sea $k \in \omega$. Definamos por recursión un rango auxiliar $\rho_k(s)$ tal que

$$\rho_k(s) = 0 \Leftrightarrow \exists b > k(s \text{ prefiere } b \in \dot{A}_n)$$

y $\rho_k(s) \leqslant \alpha$ es definido de la misma manera que rk_n, para $\alpha > 0$. Primero notemos que $\rho_k(s) < \infty$ para toda s y k. En efecto, supongamos que $\rho_k(s) = \infty$ para algún s y k. Usando la definición de $\rho_k(s)$, podemos construir recursivamente una condición T con $s_T = s$ tal que $\rho_k(t) = \infty$ para cada $t \in T$ con $t \supseteq s$. Como $\dot{A}_n$ es forzado a ser infinito, existen $T' \leqslant T$ y $b > k$ tales que $T' \Vdash$ "$b \in \dot{A}_n$". En particular, $s_{T'} \supseteq s$ y $s_{T'}$ prefiere $b \in \dot{A}_n$ luego $\rho_k(s_{T'}) = 0$, una contradicción. Ahora, notemos también que como $\dot{A}_n$ es forzado a ser un subconjunto del genérico $\dot{A}_{gen}$, cualquier s solo puede preferir elementos del $\mathrm{ran}(s)$.

Si $\rho_k(s) = 1$, entonces existe $B \in \mathcal{F}^+$ tal que $s^\frown b$ prefiere $a \in \dot{A}_n$ para algún $a = a_b$ con $a > k$. Si sobre un $\mathcal{F}^+$-conjunto la misma $a \in \mathrm{ran}(s)$ funciona, obtenemos que $\rho_k(s) = 0$, una contradicción. Así, dado que $a_b \in \mathrm{ran}(s) \cup \{b\}$, se sigue entonces que sobre un $\mathcal{F}^+$-conjunto, $a_b = b$. Sin embargo, esto significa que $\mathrm{rk}_n(s) = 0$.

Ahora, sea $k > \max(\mathrm{ran}(s))$. Entonces $\rho_k(s) \geqslant 1$. Por el párrafo anterior e inducción, vemos que $\mathrm{rk}_n(s) < \infty$, como se requiere. ∎

Sea s_I el tallo de T_I. Fortaleciendo la condición T_I, si fuera necesario, podemos suponer que $\mathrm{rk}_{n_I}(s_I) = 0$ para toda $I \in \mathcal{I}$. De acuerdo a la definición de rk_n, para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $B_{s_I,n_I} \in \mathcal{F}^+$ tal que $s_I^\frown b$ prefiere $b \in \dot{A}_{n_I}$ para toda $b \in B_{s_I,n_I}$. Dado que $\mathcal{I}$ es numerablemente alto módulo $\mathcal{F}$, existe una I que intersecta a todas las $B_{s,n}$'s en un $\mathcal{F}^+$-conjunto, en particular $I \cap B_{s_I,n_I} \in \mathcal{F}^+$ y por lo tanto existe $b > m_I$ con $b \in I \cap B_{s_I,n_I} \cap \mathrm{succ}_{T_I}(s_I)$. Como $s_I^\frown b$ prefiere $b \in \dot{A}_{n_I}$, entonces existe una extensión de T_I cuyo tallo extiende a $s_I^\frown b$ y que fuerza $b \in \dot{A}_{n_I} \cap I$, contradiciendo la suposición inicial $(\star)$. □

4.15. Observación. Dada una sucesión $\Phi = \langle \Phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, Φ nos induce de manera natural un automorfismo $i_\Phi : \mathbb{L}_\mathcal{F} \to \mathbb{L}_\mathcal{F}$ dado por $i_\Phi(T) = \{t_\Phi : t \in T\}$, donde $t_\Phi(n) = \Phi_n(t(n))$ para $n < |t|$. Por lo tanto, si $\mathbb{L}_\mathcal{F}$ sella a un ideal $\mathcal{I}$ via $\dot{A}_{gen}$, entonces también lo sella via $\dot{A}^\Phi_{gen} := \{\Phi_n \circ \dot{\ell}_{gen}(n) : n \in \omega\}$.

2. Dos teoremas de metrización para grupos de Fréchet

Un objeto combinatorio naturalmente asociado a un espacio regular X, es sin duda el filtro $\mathsf{nwd}^*(X)$ de subconjuntos densos abiertos de X. Así, con la herramienta desarrollada en la sección anterior, veamos algunas relaciones que existen entre el forcing $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(X)}$ y el ideal dual $\mathcal{I}_x$ del filtro de vecindades de un punto $x \in X$.

4.16. Proposición. *Sea X un espacio numerable regular y x un punto en X. Entonces*

(1) *Si $\pi\chi(x, X) > \omega$, entonces $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(X)}$ sella al ideal $\mathcal{I}_x$ via $\dot{A}_{gen}$.*

(2) *Si X es T_1 Fréchet sin puntos aislados, entonces $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(X)}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas.*

Demostración. Para ver (1), por el Lema 4.13, es suficiente con demostrar que el ideal $\mathcal{I}_x$ sea numerablemente alto módulo $\mathsf{nwd}^*(X)$. Primero, es claro que $\mathcal{I}_x \cap \mathsf{nwd}^*(X) = \emptyset$. Para la otra parte, si no fuera el caso, entonces existe una familia numerable $\mathcal{H}$ de conjuntos densos en alguna parte tal que para cada $I \in \mathcal{I}_x$ existe una $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \cap I$ es nunca denso. Para cada $H \in \mathcal{H}$ hacemos $U_H = \operatorname{Int}(\overline{H}) \neq \emptyset$.

4.17. Afirmación. La familia $\{U_H \colon H \in \omega\}$ forma una π-base en x.

Demostración de la afirmación. Sea U una vecindad arbitraria de x, por la regularidad del espacio, existe una vencindad V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$. Ahora, $X \setminus V \in \mathcal{I}_x$, entonces existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \setminus V$ es nunca denso, luego $\operatorname{Int}(\overline{H \setminus V}) = \emptyset$. Pues bien, $U_H = \operatorname{Int}(\overline{H}) \subseteq \overline{V}$. En efecto, supongamos que $U_H \setminus \overline{V} \neq \emptyset$. Sea $y \in U_H \setminus \overline{V}$ y W abierto con $y \in W$. Como en particular $y \in \overline{H}$, entonces $H \cap (W \cap (U_H \setminus \overline{V})) \neq \emptyset$ luego $W \cap (H \setminus V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $y \in \overline{H \setminus V}$, *i.e.,* $U_H \setminus \overline{V} \subseteq \overline{H \setminus V}$, contradiciendo el hecho de que $\operatorname{Int}(\overline{H \setminus V}) = \emptyset$. ■

Así, $\pi\chi(x, X) = \omega$ contradiciendo la hipótesis inicial. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(X)}$ sella al ideal $\mathcal{I}_x$.

(2) Por la Proposición 4.7, es suficiente con demostrar que para cada $Y \in \mathsf{nwd}^+(X)$ y cada $\mathcal{J} \leqslant_K \mathsf{nwd}(X) \restriction Y$ el ideal $\mathcal{J}$ no es numerablemente alto. Procedamos por contradicción, *i.e*, supongamos que existe un ideal $\mathcal{J}$ (sobre ω) numerablemente alto Katětov abajo de $\mathsf{nwd}(X) \restriction Y$, para algún $Y \in \mathsf{nwd}^+(X)$, el cual es atestiguado por una función $f \colon Y \to \omega$. Pongamos $U = \operatorname{Int}(\overline{Y}) \neq \emptyset$.

4.18. Afirmación. Para cada $x \in U$ existe una sucesión infinita $S_x \subseteq Y$ que converge a x tal que $f \restriction S_x$ es finito a uno.

Demostración de la afirmación. Fijamos $x \in U$. El espacio X es sin puntos aislados, entonces existe una sucesión $\langle x_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq U \setminus \{x\}$ que converge a x. Ahora, notemos que $f^{-1}(n) \in \mathsf{nwd}(X)$ para cada $n \in \omega$. Entonces $Y_n = Y \setminus \{x\} \cup \bigcup_{i<n} f^{-1}(i)$ es denso en U para toda $n \in \omega$. Así, por ser X Fréchet, existe una sucesión $\langle y_k^n \colon k \in \omega \rangle \subseteq Y_n$ que converge a x_n para cada $n \in \omega$. Hagamos $Y' = \{y_k^n \colon k, n \in \omega\}$ entonces $x \in \overline{Y'}$ luego existe una sucesión $S_x \subseteq Y'$ que converge a x. Por construcción, S_x es la sucesión deseada. ■

Por ser $\mathcal{J}$ un ideal numerablemente alto existe un $J \in \mathcal{J}$ tal que $J \cap f[S_x]$ es infinito para cada $x \in U$ luego $f^{-1}[J]$ es denso en U, una contradicción. □

Para espacios con más estructura, *e.g.,* para grupos topológicos Fréchet numerables, la conclusión de la Proposición 4.16 (1) puede ser fortalecida. Para ver esto, será necesario introducir una terminología adicional.

Sea $G = \{g_n \colon n \in \omega\}$ un grupo numerable con $g_0 = e$. Para cada $n \in \omega$, hagamos $G_n = \{g_k \colon k \leqslant n\}$. Dada una función $f \colon \omega \to G$, sea $A_f = \bigcup_{n \in \omega} f(n) \cdot G_n$ y $\triangle_f \colon \triangle \to G$ dada por $\triangle_f(\langle n, k \rangle) = f(n) \cdot g_k$, luego $\operatorname{ran}(\triangle_f) = A_f$.

4.19. LEMA. *Sea G un grupo topológico Fréchet numerable no metrizable. Entonces $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}$ sella al ideal $\mathcal{I}_e$ via $A_{\dot{\ell}_{gen}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.16 (1), $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}$ sella al ideal $\mathcal{I}_e$ via $\dot{A}_{gen}$, y como $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$\dot{A}_{gen} \subseteq A_{\dot{\ell}_{gen}}$", se sigue entonces que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$A_{\dot{\ell}_{gen}} \in \mathcal{I}_e^+$". Para ver la otra parte, sea $\langle \dot{A}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}$-nombres para subconjuntos infinitos de $A_{\dot{\ell}_{gen}}$. Hagamos $\dot{B}_n = \triangle_{\dot{\ell}_{gen}}^{-1}[\dot{A}_n]$ para $n \in \omega$, luego $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$\langle \dot{B}_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\triangle]^\omega$". Ahora, según el Lema 4.3, $\mathcal{H}_\triangle$ es una familia numerablemente alta, y como G es Fréchet, entonces $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$\mathcal{H}_\triangle$ es numerablemente alta"(Proposición 4.16 (2)). Así, existe $h \in \mathcal{H}_\triangle$ tal que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$h \cap \dot{B}_n$ es infinito para cada $n \in \omega$". Identificando a $h(n)$ con $g_{h(n)}$ y como $\varphi_{g_{h(n)}}$ (la traslación a la derecha por $g_{h(n)}$) es un homeomorfismo (Teorema 1.9), entonces de hecho podemos pensar a h como una sucesión en $\mathrm{Aut}(\mathsf{nwd}^*(G))$. Entonces, haciendo $\dot{A}_n^h = \triangle_{\dot{\ell}_{gen}}[h \cap \dot{B}_n]$ obtenemos que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$\dot{A}_n^h$ es un subconjunto infinito de $\dot{A}_n \cap \dot{A}_{gen}^h$", donde $\dot{A}_{gen}^h = \{\dot{\ell}_{gen}(m) \cdot g_{h(m)} : m \in \omega\}$. Por la Observación 4.15, existe $I \in \mathcal{I}_e$ tal que $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$I \cap \dot{A}_n^h$ es infinito para cada $n \in \omega$". Por lo tanto, $\Vdash_{\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(G)}}$ "$\mathcal{I}_e \restriction A_{\dot{\ell}_{gen}}$ es numerablemente alto". □

Para topologías de grupo precompactas, el conjunto A_f definido más arriba tiene una peculiaridad topológica importante.

4.20. LEMA. *Sea G un grupo numerable y $f : \omega \to G$ una función. Entonces A_f es denso en cualquier topología de grupo precompacta sobre G.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una topología de grupo precompacta sobre G. Por la homegeniedad de un grupo topológico, basta probar que $A_f \in \mathcal{I}_e^+$. Para esto, sea $U \in \eta(e)$. Como G es precompacto, entonces existe $F \in [G]^{<\omega}$ tal que $G = U \cdot F$. Consideremos n tal que $F, F^{-1} \subseteq G_n$. Entonces, existen $a \in U$ y $b \in F$ tal que $f(n) = a \cdot b$, luego $a = f(n) \cdot b^{-1} \in f(n) \cdot G_n$. Por lo tanto, $A_f \in \mathcal{I}_e^+$. □

Pues bien, hemos desarrollado ya los elementos combinatorios necesarios para poder construir el modelo de **ZFC** que se mencionó al inicio de este capítulo.

4.21. TEOREMA. *Existe un modelo de* **ZFC** *en donde se sigue lo siguiente:*

(a) $\mathfrak{c} = \omega_2$;
(b) *cada espacio de Fréchet numerable regular de peso menor que $\mathfrak{c}$ tiene una π-base numerable;*
(c) *todo grupo Fréchet precompacto separable es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Empecemos con un modelo $\mathbf{V}$ donde se siguen **CH** y $\diamondsuit(S_1^2)$. Aquí, $S_1^2 = \{\alpha < \omega_2 : \mathrm{cof}(\alpha) = \omega_1\}$, y el principio combinatorio $\diamondsuit(S_1^2)$ afirma la existencia de una sucesión $\langle A_\alpha : \alpha \in S_1^2 \rangle$ con $A_\alpha \subseteq \alpha$ tal que para cada $A \subseteq \omega_2$, el conjunto $\{\alpha \in S_1^2 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_2. Fijemos una de dichas sucesiones y construyamos por recursión una iteración con soporte finito $\mathbb{P}_{\omega_2} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ tal que $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ y de tal manera que en el paso $\alpha \in S_1^2$, si A_α codifica un $\mathbb{P}_\alpha$-nombre para una topología τ Fréchet regular sin puntos aislados sobre ω con un punto $n \in \omega$ tal que $\pi\chi(n,\tau) > \omega$, entonces ponemos $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ un $\mathbb{P}_\alpha$-nombre para $\mathbb{L}_{\mathsf{nwd}^*(\tau)}$, en caso contrario o si $\alpha \notin S^2_1$, dejamos $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ un $\mathbb{P}_\alpha$-nombre para el forcing $\mathbb{L}_{\mathsf{Fr}}$.

Pues bien, sea G un filtro $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico sobre $\mathbf{V}$ y verifiquemos que en $\mathbf{V}[G]$ se siguen (a), (b) y (c).

(a) Dado que las nociones de forcing de la forma $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ agregan reales (Proposición 4.6 (2)), entonces $\mathbf{V}[G] \models \omega_2 \leqslant \mathfrak{c}$. Ahora, $\mathbb{P}_{\omega_2}$ es ccc con $|\mathbb{P}_{\omega_2}| = \omega_2$ y $\omega_2^\omega = \omega_2$, luego $\mathbf{V}[G] \models \mathfrak{c} \leqslant \omega_2$ (*e.g.,* véase Lema 3.3 en [**Ba**]). Por lo tanto, $\mathbf{V}[G] \models \mathfrak{c} = \omega_2$.

Para ver (b) y (c), es necesario tener presente el siguiente hecho.

4.22. Lema. *Sea $\dot{\tau} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ tal que $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash$ "$\dot{\tau}$ es una topología Fréchet sobre ω con $\pi\chi(n,\dot{\tau}) > \omega$", para alguna $n \in \omega$. Entonces $\{\alpha\colon \mathbf{V}^{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash$ "$\dot{\tau}_\alpha$ es Fréchet y $\pi\chi(n,\dot{\tau}_\alpha) > \omega$"$\}$ contiene un club relativo a S^2_1.*

Demostración. Definamos en $\mathbf{V}$ una función $F\colon \omega_2 \to \omega_2$ de la siguiente manera. Sea $\alpha \in \omega_2$. Como $\mathbf{V} \models \mathbf{CH}$ y $\mathbb{P}_\alpha$ es ccc, entonces $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash$ "$\mathfrak{c} = \omega_1$". En $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_\alpha}$, sea $\langle \dot{A}_\xi\colon \xi < \omega_1\rangle$ una sucesión tal que $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ "$\{\dot{A}_\xi\colon \xi < \omega_1\} = \mathcal{P}(\omega)$". Fijando ξ, podemos distinguir dos casos.

Caso **1**. $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash$ "$\dot{A}_\xi \in \mathcal{I}^+_n(\dot{\tau})$".

Entonces, por hipótesis, existe $\dot{S}_\xi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ tal que $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash$ "$\dot{S}_\xi \in [\dot{A}_\xi]^\omega \wedge \dot{S}_\xi \in \mathcal{I}^\perp_n(\dot{\tau})$". Usando un argumento usual de reflexión, es posible encontrar $\beta_\xi \geqslant \alpha$ tal que $\dot{S}_\xi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\beta_\xi}}$.

Caso **2**. $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash$ "$\dot{A}_\xi \notin \mathcal{I}^+_n(\dot{\tau})$".

Para este caso, existe $\dot{U}_\xi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ tal que $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash$ "$\dot{U}_\xi \in \eta_n(\dot{\tau}) \wedge \dot{U}_\xi \cap \dot{A}_\xi = \emptyset$". Nuevamente, podemos encontrar $\beta_\xi \geqslant \alpha$ tal que $\dot{U}_\xi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\beta_\xi}}$.

Pues bien, sea $F(\alpha) = \bigcup\{\beta_\xi\colon \xi < \omega_1\}$. Entonces, $C = \{\alpha\colon \alpha$ es cerrado bajo $F\}$ es un club. $\square$

(b) Empecemos con notar el siguiente hecho elemental.

4.23. Hecho. *Sea τ una topología Fréchet sobre ω. Entonces $A = \{n \in \omega\colon \pi\chi(n,\tau) = \omega\}$ es τ-cerrado.*

Demostración. Sea n en la τ-cerradura de A. Por ser τ Fréchet, existe $\langle n_k\colon k \in \omega\rangle \subseteq A$ que τ-converge a n. Sea $\mathcal{V}_k$ una π-base local numerable en n_k para $k \in \omega$, entonces $\mathcal{V} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{V}_k$ forma una π-base local numerable en n, luego $n \in A$. $\square$

Procediendo por contradicción, supongamos que en $\mathbf{V}[G]$ existe τ una topología Fréchet regular sobre ω tal que $\pi w(\omega,\tau) = \omega_1$. Así, en $\mathbf{V}[G]$ el ideal $\mathcal{I}_n(\tau)$ es Fréchet y existe $n \in \omega$ con $\pi\chi(n,\tau) = \omega_1$. Por el hecho anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que τ es sin puntos aislados. Usando otra vez un argumento de reflexión, existe $\beta < \omega_2$ tal que $\tau \in \mathbf{V}[G_\beta]$. Ahora, según el Lema 4.22, existe $C \subseteq S^2_1$ un club relativo a S^2_1 tal que para cada $\alpha \in C$, $\mathbf{V}[G_\alpha] \models \tau_\alpha$ es Fréchet y $\pi\chi(n,\tau_\alpha) > \omega$, donde $\tau_\alpha = \tau \cap \mathbf{V}[G_\alpha]$. Por lo tanto, en algún paso $\alpha \in C$ con $\alpha \geqslant \beta$, hemos agregado un conjunto $A_{gen} \subseteq \omega$ de tal manera que

$\mathbf{V}[G_\alpha] \models A_{gen} \in \mathcal{I}_n^+(\tau_\alpha)$ y el ideal $\mathcal{I}_n(\tau_\alpha) \restriction A_{gen}$ es numerablemente alto (Proposición 4.16 (1)). Ahora, $\tau = \tau_\alpha \in \mathbf{V}[G_\alpha] \subseteq \mathbf{V}[G]$, entonces en $\mathbf{V}[G]$ también se sigue que $A_{gen} \in \mathcal{I}_n^+(\tau)$. Así, por hipótesis, en $\mathbf{V}[G]$ existe $S \in [A_{gen}]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_n^\perp(\tau)$. La Proposición 4.16 (2) junto con el Lemma 4.10, nos dicen que la noción de forcing $\mathbb{P}_{\omega_2}$ preserva fuertemente familias numerablemente altas, entonces en $\mathbf{V}[G]$ el ideal $\mathcal{I}_n(\tau_\alpha) \restriction A_{gen}$ es numerablemente alto (en particular alto), luego existe $I \in \mathcal{I}_n(\tau_\alpha)$ tal que $I \cap S$ es infinito, contradiciendo el hecho de que $S \in \mathcal{I}_n^\perp(\tau)$.

(c) Procedamos también por contradicción, *i.e,* supongamos que en $\mathbf{V}[G]$ existe τ una topología de grupo Fréchet precompacta sobre ω no metrizable. Así, por el Teorema 1.15, $\pi\chi(e,\tau) > \omega$. Aplicando el Lema 4.22, existe $C \subseteq S_1^2$ un club relativo a S_1^2 tal que para cada $\alpha \in C$, $\mathbf{V}[G_\alpha] \models \tau_\alpha$ es Fréchet y $\pi\chi(e,\tau_\alpha) > \omega$. Por lo tanto, en algún paso $\alpha \in C$ hemos agregado un real $\ell_{gen} \in \omega^\omega$ de tal manera que en $\mathbf{V}[G_\alpha]$ el ideal $\mathcal{I}_e(\tau_\alpha) \restriction A_{\ell_{gen}}$ es numerablemente alto (Lema 4.19), luego en $\mathbf{V}[G]$ también $\mathcal{I}_e(\tau_\alpha) \restriction A_{\ell_{gen}}$ es numerablemente alto. Trabajemos en $\mathbf{V}[G]$. El Lema 4.20, nos dice que $A_{\ell_{gen}}$ es τ-denso, luego por hipótesis, existe $S \in [A_{\ell_{gen}}]^\omega$ tal que $S \in \mathcal{I}_n^\perp(\tau)$. Ahora, como $\mathcal{I}_e(\tau_\alpha) \restriction A_{\ell_{gen}}$ es numerablemente alto (en particular alto), existe $I \in \mathcal{I}_e(\tau_\alpha)$ tal que $I \cap S$ es infinito, contradiciendo el hecho de que $S \in \mathcal{I}_n^\perp(\tau)$, ya que $\mathcal{I}_e(\tau_\alpha) \subseteq \mathcal{I}_e(\tau)$. □

Como se ha mencionado ya, en grupos topológicos el π-peso y el peso coinciden (Teorema 1.15 (c)), entonces obtenemos inmediatamente un teorema de metrización para grupos de Fréchet de peso pequeño.

4.24. Corolario. *Es relativamente consistente con* **ZFC** + **CH** *que todo grupo Fréchet separable de peso menor que el continuo es metrizable.* □

Con relación al inciso (b) del Teorema 4.21, recientemente D. Barman y A. Dow en [**BD2**] han obtenido un resultado relacionado con esto. Recordemos que un espacio X es llamado *selectivamente separable* (o SS) si para cada sucesión $\langle D_n : n \in \omega \rangle$ de subconjuntos densos de X, existe una selección finita $F_n \subset D_n$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ es densa.

4.25. Teorema ([**BD2**]). *En cualquier modelo obtenido por agregar reales de Cohen sobre un modelo de* **CH** *se sigue que todo espacio de Fréchet numerable tiene π-peso a lo más ω_1.*

Demostración. Supongamos que nuestro modelo base $\mathbf{V}$ satisface **CH** y consideremos la noción de forcing $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$, donde κ es un cardinal mayor que ω_1. Sea $\dot{\tau}$ un $\mathbb{P}$-nombre para una topología sobre ω tal que $X = (\omega, \dot{\tau})$ es forzado a ser un espacio de Fréchet. Sea $\dot{A}_n$ un $\mathbb{P}$-nombre el cual es forzado a ser la colección de todas las sucesiones convergentes a n. Sea $\theta = 2^{\mathfrak{c}^+}$ y $\mathbf{M} \prec \mathbf{H}(\theta)$ un submodelo elemental tal que $\mathbf{M}^\omega \subset \mathbf{M}$ y $|\mathbf{M}| = \omega_1$. Supongamos también que X, $\dot{\tau}$ y $\{\dot{A}_n : n \in \omega\}$ están en $\mathbf{M}$. Probaremos que $\dot{\tau} \cap \mathbf{M}$ es forzado a ser una π-base para $\dot{\tau}$. Esto dependerá en gran medida del hecho de que el submodelo elemental $\mathbf{M}$ está cerrado por ω-sucesiones. En particular, tenemos que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{V}[G \cap \mathbf{M}]$ es un submodelo de $\mathbf{V}[G]$ el cual asegurará que la interpretación de $\dot{\tau} \cap \mathbf{M}$

será una topología Fréchet sobre ω en la cual, para cada n, la interpretación de $\dot{A}_n \cap \mathbf{M}$ será la colección de todas las sucesiones convergentes a n.

Procedamos ahora a trabajar dentro del modelo $\mathbf{V}[G \cap \mathbf{M}]$ (al cual nos referiremos como modelo base) y usemos que $\mathbf{V}[G]$ es obtenido al forzar con $\mathrm{Fn}(\kappa \setminus \mathbf{M}, 2)$ sobre este modelo. Haciendo un abuso de notación usual, podemos seguir usando $\dot{\tau}$ para denotar el nombre para la topología final en $\mathbf{V}[G]$. Ahora, supongamos que $\dot{U}$ es un nombre que es forzado a ser un elemento no vacío de $\dot{\tau}$. Para cada condición p, sea $\dot{U}_p^- = \{x \in \omega : p \Vdash \text{“}x \in \dot{U}\text{”}\}$. Notemos que $\dot{U}_p^-$ es un conjunto en el modelo base y es forzado por p a estar contenido en $\dot{U}$. También, por las suposiciones de elementaridad sobre $\mathbf{M}$, se sigue también que p debe forzar que la cerradura en el modelo base de $\dot{U}_p^-$ debe estar contenida en la cerradura de $\dot{U}$.

Con el objetivo de obtener una contradicción, supongamos que se fuerza que la cerradura de $\dot{U}$ no contiene ningún abierto no vacío del modelo base. En particular, por las suposiciones acerca de $\mathbf{M}$, tenemos entonces que existe una condición p_0 y un entero n tal que $p_0 \Vdash \text{“}n \in \dot{U}\text{”}$ y para cualquier condición $p \leqslant p_0$, $\dot{U}_p^-$ es nunca denso.

Dado que $\dot{U}$ es un nombre para un subconjunto de ω, podemos elegir un conjunto numerable $L \subset \kappa \setminus \mathbf{M}$ tal que $\mathrm{dom}(p_0) \subset L$ y para cada $k \in \omega$ y para cualquier condición $p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$, $p \Vdash \text{“}k \in \dot{U}\text{”}$ implica $p \restriction L \Vdash \text{“}k \in \dot{U}\text{”}$. En efecto, $\dot{U}$ es un $\mathrm{Fn}(L, 2)$-nombre, y sea $\{p_l : l \in \omega\}$ una enumeración de todos los elementos de $\mathrm{Fn}(L, 2)$ que extienden a p_0. Dado que para cada n, la unión $\dot{U}_{p_0}^- \cup \dot{U}_{p_1}^- \cup \cdots \cup \dot{U}_{p_n}^-$ es nunca densa, se sigue que el complemento de la cerradura de esta unión, D_n, es densa. Ahora, cada espacio de Fréchet numerable es SS ([**BD1**]), entonces existe una selección $F_n \in [D_n]^{<\omega}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} F_n$ es densa.

Dado que el espacio es Fréchet y $x \in \overline{\bigcup_{n \in \omega} F_n}$, existe una sucesión $S_x \subset \bigcup_{n \in \omega} F_n$ convergiendo a x. Por la definición de los D's, tenemos que S_x es casi ajeno a $\dot{U}_p^-$ para cada $p \in \mathrm{Fn}(L, 2)$ que extienda a p_0. Por otro lado, dado que S_x converge a x, tenemos por elemtaridad que S_x converge a x en el modelo final, y entonces debe existir una condición p la cual fuerza que S_x está casi contenida en $\dot{U}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Comentarios y preguntas

Es claro que la pregunta de Malykhin (en su generalidad) permanece aún abierta. Sin embargo, nuestro Teorema 4.21 motiva la siguiente pregunta.

4.26. PREGUNTA. *¿Tiene el problema de Malykhin una respuesta negativa en nuestro modelo?*

Más aún, los Teoremas 4.21 (b) y 4.25 junto con el Teorema 1.15 (c), nos muestran que en principio podría ser que la estructura algebraica no juegue un papel importante en el problema de Malykhin.

4.27. PREGUNTA. *¿Es consistente con* **ZFC** *que cada espacio de Fréchet numerable tenga* π*-peso numerable?*

Hasta este momento no sabemos si la misma conclusión del Teorema 4.25 se sigue también en nuestro modelo. Es claro que una respuesta afirmativa a esto junto con el Teorema 4.21 (b), nos darían una respuesta en el sentido positivo a la pregunta anterior, y con ello una respuesta en el sentido negativo a la pregunta de Malykhin.

Con relación al Lema 4.20, el cual es una pieza clave para poder obtener el Teorema 4.21 (c), queremos mencionar que es suficiente con que el conjunto A_f tenga almenos un punto de acumulación en cualquier topología de grupo Fréchet sobre el grupo G, para que los mismos argumentos que prueban el Teorema 4.21 (c) prueben de hecho el teorema de metrización que se busca.

Por otro lado, a lo largo de este trabajo, vimos como la noción de γ-conjunto se encuentra estrechamente relacionada con las construcciones de ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin. Como se vió, las construcciones que se conocen hasta al momento (incluyendo lo que hemos hecho con los γ_G-conjuntos) usan axiomas que también son suficientes para producir un γ-conjunto no numerable. Nos parece poco probable, pero por el momento no sabemos si la existencia de un grupo topológico Fréchet numerable no metrizable implica la existencia de un γ-conjunto no numerable (véase Pregunta 2.23). De hecho, no sabemos si la existencia de un γ_G-conjunto no numerable implica la existencia de un γ-conjunto no numerable.

4.28. PREGUNTA. *¿Es consistente con* **ZFC** *que cada* γ*-conjunto sea numerable pero exista un* γ_G*-conjunto no numerable para algún grupo* G*?*

Sin embargo, pensamos que las técnicas que hemos desarrollado en el Capítulo 4 pueden ser de gran utilidad para poder contestar esta pregunta en el sentido positivo.

Bibliografía

[Ad] S. I. Adian, *Classifications of periodic words and their applications in group theory*, In Burnside Groups, Proc. Bielefeld, Germany 1977 Workshop, J. L. Mennicke, editor, pages 1-40. Lecture Notes in Mathematics **806**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Ar1] A. V. Arhangel'skii, *Frecuency spectrum of a topological space and the classification of spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **206** (1972), 265-268. English translation in Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 1185-1189.

[Ar2] A. V. Arhangel'skii, *Frecuency spectrum of a topological space and the product operation*, Trudy Mosk. Mat. Obs. **40** (1979). English translation in Trans. Moscow Math. Soc. (1981) **Issue 2**, 163-200.

[Ar3] A. V. Arhangel'skii, *Relations among the invariants of topological groups and their subspaces*, Russian Math Surveys **35** (1980), 1-23.

[Ar4] A. V. Arhangel'skii, *Classes of topological groups*, Russian Math Surveys **36** (1981), 151-174.

[Ar5] A. V. Arhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Mathematics and Its Applications **78**, Kluwer Academic Plublishers, 1992.

[AM] A. V. Arhangel'skii, V. I. Malykhin, *Metrizability of topological groups*, Vestnik Moskow. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 3 (1996), 13-16. English translation in Moscow Univ. Math. Bull. 51 (1996) no. 3, 9-11.

[AT] A. V. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics vol. **I**, Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris 2008.

[BD1] D. Barman, A. Dow, *Selective Separability and* SS_+, Topology Proc. **37** (2011), 181-204, MR 2678950.

[BD2] D. Barman, A. Dow, *Proper forcing axiom and selective separability*, Topology Appl. **159** (3) (2012), 806-813.

[BJ] T. Bartoszynski, H. Judah, *Set theory: On the structure of the Real Line*, A. K. Peters, Wellesley, MA, 1995.

[Ba] J. E. Baumgartner, *Iterated Forcing*, Surveys in Set Theory (A. R. D. Mathias, ed.), London. Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **87**, Cambridge University Press, Cambridge 1983, 1-59.

[BD] J. E. Baumgartner, P. Dordal, *Adjoining dominating functions*, Journal of Symb. Logic **50** (1985), no. 1, 94-101.

[Bi] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Comp. Math. **3** (1936), 427-430.

[Br1] J. Brendle, *Mob families and mad families*, Arch. Math. Logic **37** (3) (1997), 183-197.

[Br2] J. Brendle, *Van Douwen's diagram for dense sets of rationals*, Ann. Pure Appl. Logic, **143** (1-3) (2006), 54-69.

[BH] J. Brendle, M. Hrušák, *Countable Fréchet Boolean groups: an independence result*, Journal of Symb. Logic **74** (2009), no. 3, 1061-1068.

[CR] W. W. Comfort, K. A. Ross, *Topologies induced by groups of characters*, Fund. Math. **55** (1964), 283-291.

[Do] A. Dow, *Two classes of Fréchet-Urysohn spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 241-247.

[DS] A. Dow, J. Steprāns, *Countable Fréchet* α_1*-spaces may be first-countable*, Arch. Math. Logic **32** (1992), 3-50.

[En] R. Engelking, *General Topology,* Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. **6**, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[GM] F. Galvin, A. W. Miller, γ*-sets and other singular sets of real numbers*, Topolgy Appl. **17** (1984), no. 2, 145-155.

[GH] S. García-Ferreira, M. Hrušák, *Ordering MAD families a la Katětov*, Journal of Symb. Logic **28** (2003), 1337-1353.

[GN] J. Gerlits, Zs. Nagy, *Some properties of* $C(X)$*, I*, Topology Appl. **14** (2) (1982), 151-161.

[Gr] G. Gruenhage, *Infinite games and generalizations of first countable spaces*, Topology Appl. **6** (1976), 339-352.

[GS] G. Gruenhage, P. I. Szeptycki, *Fréchet-Urysohn for finite sets*, Topology Appl. **151** (2005), 238-259.

[HNV] K. P. Hart, J. Nagata, J. E. Vaughan (eds.) *Encyclopedia of general topology*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam 2004.

[HR] E. Hewit, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol. **I**, Springer Verlag, 1979.

[HM] M. Hrušák, J. T. Moore, *Introduction: Twenty problems in set-theoretic topology*, In Open Problems in Topology II, E. Pearl ed., Elsevier (2007), 111-113.

[HZ] M. Hrušák, J. Zapletal, *Forcing with quotients*, Arch. Math. Logic **47** (2008), 719-739.

[HR1] M. Hrušák, U. A. Ramos-García, *Precompact Fréchet topologies on Abelian groups*, Submitted to Topology and its Applications, 2011.

[HR2] M. Hrušák, U. A. Ramos-García, *A metrization theorem for small Fréchet groups*, In preparation, 2011.

[Ka] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **12** (1936), 82-84.

[vKa] E. R. van Kampen, *Locally bicompact Abelian groups and their character groups*, Annals of Math. **36** (2) (1935), 448-463.

[Ke] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Studies in Mathematics **156**, Springer Verlag, 1995.

[Ku] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Volume **102** of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam 1980.

[La] R. Laver, *On the consistency of the Borel conjecture*, Acta Math. **137** (3-4) (1976), 151-169.

[Ma] A. A. Markov, *On free topological groups*, Translations Amer. Math. Soc., **1** (1962), 195-272.

[MT] J. T. Moore, S. Todorčević, *The metrization problem for Fréchet groups*, In Open Problems in Topology II, E. Pearl ed., Elsevier (2007), 201-206.

[NS] T. Nogura, D. Shakhmatov, *Amalgamation of convergent sequences in locally compact groups*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), 1349-1354.

[Ny1] P. J. Nyikos, *Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 793-801.

[Ny2] P. J. Nyikos, *The Cantor tree and the Fréchet-Urysohn property*, Ann. New York Acad. Sci. **552** (1989), 109-123.

[Ny3] P. J. Nyikos, *Subsets of* ${}^{\omega}\omega$ *and the Fréchet-Urysohn and* α_i*-properties*, Topology Appl. **48** (1992), 91-116.

[OT] T. Orenshtein, B. Tsaban, *Linear* σ*-additivity and some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 3621-3637.

[Po] L. S. Pontryagin, *The theory of topological commutative groups*, Annals of Math. **35** (2) (1934), 361-388.

[Ra] D. Raghavan, *A model with no strongly separable almost disjoint families*, Israel J. Math., to appear.

[RS] E. Reznichenko, O. Sipacheva, *Fréchet-Urysohn type properties in topological spaces, groups and locally convex vector spaces*, Moscow Univ. Math. Bull. **54** (3) (1999), 33-38.

[Ro] D. J. F. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Studies in Mathematics **80**, Springer Verlag, 1982.

[TU] S. Todorčević, C. Uzcátegui, *Analytic* κ*-spaces*, Topology Appl. **146-147** (2005), 511-526.

[We] A. Weil, *Sur les spaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Publ. Math. Univ. Strasbourg, Herman, Paris, 1937.