UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

SOBRE LA DIMENSIÓN DE FIBRAS DE MORFISMOS ENTRE ESPACIOS DE ZARISKI

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

DANIEL ROBLES LÓPEZ

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. MUSTAPHA LAHYANE
TUTOR: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

MÉXICO, DISTRITO FEDERAL ABRIL, 2012.

La nieve no rompe la rama del sauce.

Proverbio Japonés.

Agradecimientos

Son muchas las personas que han contribuido de una u otra manera para la realización de esta tesis, algunas pueden no ser conscientes de ello. Ante todo, lo que más aprecio es el importante apoyo académico y anímico que en cada una de ellas he encontrado.

El soporte de mi familia ha sido fundamental para mi desarrollo personal y profesional. Agradezco a mi padre por brindarme su tiempo e ilustrarme con tertulias tan fecundas, a Sofi, Oli, Oscar, Diego, mis sobrinos Celia y Carlos; con quienes he compartido momentos formidables, a Haya; por su interesante y generosa compañía.

Quiero destacar a mis amigos con los que he vivido innumerables situaciones: Álvaro, Andrés, Ceci, Czar, Haydeé, Lili, Pedro, Yina, cada uno de ustedes sabe por qué son personas de mi consideración; en particular, a mis estimadas colegas María Elena, por su amable asistencia y Anayanzi, al encontrar en ella tantas coincidencias de pensamiento.

Atribuyo a mis profesores el haberme inspirado a explorar áreas del conocimiento que tanto me motivan. Gracias, Dr. Carlos Prieto de Castro, por la confianza puesta en mí. Reconozco al productivo equipo de trabajo académico impulsado por el Dr. Mustapha Lahyane y la constante colaboración de mi compañera tesista Carolina.

Finalmente, agradezco al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por facilitar mi estancia de investigación en la ciudad de Morelia, y al Programa de la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH en 2011 otorgado al Dr. Mustapha Lahyane por su apoyo.

Introducción

La motivación del presente trabajo está dada por estudios en el área de *Geometría Algebraica*; específicamente en el tema de la *dimensión de variedades afines* y sus propiedades. La herramienta necesaria para lograr avances en tales temas se encuentra en desarrollo del *Álgebra Conmutativa*. Desde esta perspectiva se resuelven ciertos problemas que conciernen a la dimensión de las estructuras algebraicas correspondientes a estas variedades.

Los tópicos presentados son bien conocidos y tratados ampliamente. Las técnicas utilizadas para resolver cada tema están basadas en los textos de la bibliografía. La meta principal es aplicar la teoría de la *dimensión de anillos* en el caso de *homomorfismos locales* y relacionar las dimensiones del dominio y codominio de dichos homomorfismos, obteniendo también información subyacente de los ideales primos del codominio.

Para lograr lo propuesto, en los dos primeros capítulos se revisarán los conceptos fundamentales, recopilando las propiedades básicas de módulos sobre un anillo conmutativo con unidad: *Localización, producto tensorial, condiciones de cadena*. Se observan también propiedades de módulos y su relación con ideales primos, maximales y primarios. Con base en los temas de *longitud* de módulos, *anillos y módulos graduados* se pueden obtener enunciados relevantes para los teoremas sobre dimensión que nos interesan.

Una parte considerable de esta tesis se enfoca en el análisis de tres parámetros. El primero de ellos es la *dimensión de Krull*. Los otros dos están definidos para *anillos locales Noetherianos*: La *dimensión de Chevalley* y el *grado del polinomio de Hilbert*.

Por último, se aplican los resultados obtenidos para dar una cota para la dimensión de ciertos anillos locales que son codominios de homomorfismos. En particular, si tales homomorfismos satisfacen una de dos condiciones adicionales (la del *ascenso* o la del *descenso*), se tiene información precisa sobre la dimensión. En tal caso, se da un ejemplo para cada una de estas condiciones. Dichos ejemplos son descritos en los apéndices y provienen de clases importantes de módulos: Las *extensiones enteras de anillos* y los *módulos planos*.

Notación y Terminología

En el contexto de este trabajo, los anillos serán únicamente anillos conmutativos con unidad diferente del cero. El conjunto de las unidades de un anillo A se denotará por $\mathcal{U}(A)$.

Las letras $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ denotarán a los conjuntos de números naturales y de números enteros, respectivamente. Para referirnos al conjunto de los números enteros no negativos se usará $\mathbb{Z}_+$ y el símbolo ∞ se referirá al $\sup \mathbb{Z}_+$.

En cuanto a las relaciones entre conjuntos, $\subset$ representará contención estricta, $\subseteq$ denotará contención con la posibilidad de igualdad y $\nsubseteq$ se utilizará para expresar cuando un conjunto no esté contenido en otro.

Además, si Γ es un subconjunto de un anillo A, se adoptará la notación $\langle \Gamma \rangle_A$ para expresar al ideal generado por Γ en el anillo A. Más aún, si $\Gamma = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r\}$, donde r es un entero positivo, denotaremos simplemente $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle_A$ en lugar de $\langle \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r\} \rangle_A$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Para efecto de los conceptos analizados aquí, se utilizarán las nociones y propiedades de módulos que se encuentran en las tres primeras secciones del Capítulo 2 del libro [**Ati**].

Las secciones de este capítulo se conforman de ideas básicas necesarias para la presentación de los resultados que se desarrollan en este trabajo de tesis. Se definirá la *localización de un anillo* en un *subconjunto multiplicativo*. También se desarrollará el concepto de *producto tensorial* de módulos. Para ambas construcciones se darán propiedades y algunos ejemplos. En particular, se darán las propiedades universales de cada una de ellas.

Posteriormente se tratarán los *módulos y anillos Noetherianos y Artinianos*. Analizaremos el concepto de *longitud* de un módulo, especialmente se dará una caracterización cuando dicha longitud es finita (ver la Proposición 1.52). Para finalizar el capítulo, se revisarán los conceptos de anillos y módulos graduados.

1. Localización de Anillos y Módulos

A continuación, se define un subconjunto multiplicativo de un anillo. Con base en ello se construye la localización de un anillo dado, que a su vez, tiene una estructura algebraica de un anillo. Más aún, se definirá la localización de un A-módulo M en un subconjunto multiplicativo S de un anillo A, que será un módulo no solamente sobre A, sino también sobre la localización del anillo A en S.

Definición 1. Sea S un subconjunto de un anillo A. S es un subconjunto multiplicativo de A si

1. $0_A \notin S$ y $1_A \in S$, y
2. $ab \in S$ para cualesquiera a y $b \in S$.

Ejemplo 1.1.

1. Sean A un anillo y f un elemento no nilpotente de A. El conjunto $\{f^n | \; n \in \mathbb{Z}_+\}$ es un subconjunto multiplicativo de A.
2. Sea B un anillo. B no es un subconjunto multiplicativo de B.

Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A, definimos una relación $\sim$ sobre $A \times S$ de la siguiente manera:
Sean (a_1, s_1) y (a_2, s_2) elementos de $A \times S$. Decimos que $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ si, y sólo si, existe $u \in S$ tal que

$$u(s_2a_1 - s_1a_2) \;=\; 0_A. \tag{1}$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A \times S$.

- $\sim$ es reflexiva. En efecto $(a, s) \sim (a, s)$, pues $1_A(sa - sa) = 0_A$ para cualesquiera $a \in A$ y $s \in S$.
- $\sim$ es simétrica. En efecto, sean (a_1, s_1) y (a_2, s_2) elementos de $A \times S$ tales que $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$. Así, existe $u \in S$ con $us_2a_1 = us_1a_2$. Se sigue que existe $u \in S$ con $us_1a_2 = us_2a_1$ y por lo tanto, $(a_2, s_2) \sim (a_1, s_1)$.
- $\sim$ es transitiva. En efecto, sean (a_1, s_1), (a_2, s_2) y (a_3, s_3) elementos de $A \times S$ tales que $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ y $(a_2, s_2) \sim (a_3, s_3)$. Se sigue que existen u_1 y $u_2 \in S$ con

$$u_1s_2a_1 \;=\; u_1s_1a_2, \text{ y} \tag{2}$$
$$u_2s_3a_2 \;=\; u_2s_2a_3. \tag{3}$$

Multiplicando la ecuación (2) por u_2s_3 y la ecuación (3) por u_1s_1, se tiene que

$$\begin{aligned} u_2s_3u_1s_2a_1 &= u_2s_3u_1s_1a_2, \text{ y} \\ u_1s_1u_2s_3a_2 &= u_1s_1u_2s_2a_3. \end{aligned}$$

De esta forma, $u_2u_1s_2s_3a_1 = u_2u_1s_2s_1a_3$, donde $u_2u_1s_2 \in S$. Por lo tanto,

$$(a_1, s_1) \sim (a_3, s_3).$$

Así, $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A \times S$ y podemos construir el conjunto cociente de $A \times S$ por $\sim$. A este conjunto cociente lo denotamos por $\mathrm{S}^{-1}A$. Además, si $(a, s) \in A \times S$, entonces representamos al elemento $\{(b, t) \in A \times S \,|\, (b, t) \sim (a, s)\}$ de $\mathrm{S}^{-1}A$ por $\dfrac{a}{s}$.

Proposición 1.2. *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A.*

1. $\mathrm{S}^{-1}A$ *tiene una estructura de un anillo bajo las operaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} + : \mathrm{S}^{-1}A \times \mathrm{S}^{-1}A &\to \mathrm{S}^{-1}A \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) &\mapsto \frac{ta+sb}{st}, \quad y \\ \times : \mathrm{S}^{-1}A \times \mathrm{S}^{-1}A &\to \mathrm{S}^{-1}A \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) &\mapsto \frac{ab}{st}, \end{aligned}$$

donde a, $b \in A$ y s, $t \in S$.

2. *La asignación natural i_S^A dada por*

$$\begin{aligned} i_S^A : A &\to \mathrm{S}^{-1}A \\ \alpha &\mapsto i_S^A(\alpha) = \frac{\alpha}{1_A} \end{aligned} \tag{4}$$

es un homomorfismo de anillos tal que $i_S^A(t) \in \mathcal{U}(\mathrm{S}^{-1}A)$ para todo $t \in S$.

Demostración.

1. Primero veamos que la adición + le da a $\mathrm{S}^{-1}A$ una estructura de un grupo abeliano. En efecto:
   - La adición + está bien definida:
     Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ y $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. Supongamos que los elementos $\left(\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}\right)$ y $\left(\frac{a_3}{s_3}, \frac{a_4}{s_4}\right)$ son iguales. Ésto es, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_3}{s_3}$ y $\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_4}{s_4}$. Existen u y $v \in S$ tales que

$$us_3a_1 = us_1a_3, \quad \text{y} \tag{5}$$
$$vs_4a_2 = vs_2a_4. \tag{6}$$

Multiplicando la ecuacion (5) por s_2s_4 y la ecuación (6) por s_1s_3, se tiene que

$$us_2s_3s_4a_1 = us_1s_2s_4a_3, \quad \text{y} \tag{7}$$
$$vs_1s_3s_4a_2 = vs_1s_2s_3a_4. \tag{8}$$

Al multiplicar la ecuación (7) por v y la ecuación (8) por u, se sigue que

$$\begin{array}{lrcl} (9) & vus_2s_3s_4a_1 & = & vus_1s_2s_4a_3, \quad \text{y} \\ (10) & uvs_1s_3s_4a_2 & = & uvs_1s_2s_3a_4. \end{array}$$

Sumando las ecuaciones (9) y (10), y utilizando la distributividad del producto en A, tenemos que $uv(s_2s_3s_4a_1 + s_1s_3s_4a_2) = uv(s_1s_2s_4a_3 + s_1s_2s_3a_4)$. De forma que

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2} = \frac{s_4a_3 + s_3a_4}{s_3s_4} = \frac{a_3}{s_3} + \frac{a_4}{s_4}.$$

Por lo tanto, la adición + está bien definida.

- Veamos la asociatividad de la adición +:
  Sean $a_1,\ a_2,\ a_3 \in A$ y $s_1,\ s_2,\ s_3 \in S$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}\right) &= \frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{s_3a_2 + s_2a_3}{s_2s_3}\right) \\ &= \left(\frac{s_2s_3a_1 + s_1(s_3a_2 + s_2a_3)}{s_1s_2s_3}\right) \\ &= \left(\frac{s_2s_3a_1 + s_3s_1a_2 + s_2s_1a_3}{s_1s_2s_3}\right) \\ &= \left(\frac{(s_2s_3a_1 + s_3s_1a_2) + s_2s_1a_3}{s_1s_2s_3}\right) \\ &= \left(\frac{(s_2a_1 + s_1a_2)s_3 + s_2s_1a_3}{s_1s_2s_3}\right) \\ &= \left(\frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3} \\ &= \left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3}. \end{aligned}$$

- Probaremos que la adición + es conmutativa:
  Sean $a_1,\ a_2 \in A$ y $s_1,\ s_2 \in S$. Se sigue que

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2} = \frac{s_1a_2 + s_2a_1}{s_1s_2} = \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1}.$$

- El neutro aditivo de $S^{-1}A$ es $\dfrac{0_A}{1_A}$. En efecto, sean $a \in A$ y $s \in S$. Así,

$$\frac{0_A}{1_A} + \frac{a}{s} = \frac{s0_A + 1_A a}{1_A s} = \frac{a}{s}.$$

- Sean $a \in A$ y $s \in S$. El inverso aditivo de $\dfrac{a}{s}$ es $\dfrac{-a}{s}$, en efecto,

$$\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{sa + s(-a)}{ss} = \frac{sa - sa}{ss} = \frac{0_A}{ss} = \frac{0_A}{1_A} = 0_{S^{-1}A}.$$

Ahora veamos las propiedades del producto $\times$ en $S^{-1}A$.

- El producto $\times$ está bien definido:

  Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ y $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$. Supongamos que $\left(\dfrac{a_1}{s_1}, \dfrac{a_2}{s_2}\right)$ y $\left(\dfrac{a_3}{s_3}, \dfrac{a_4}{s_4}\right)$ son iguales. Esto es, $\dfrac{a_1}{s_1} = \dfrac{a_3}{s_3}$ y $\dfrac{a_2}{s_2} = \dfrac{a_4}{s_4}$. Existen u y $v \in S$ tales que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} us_3a_1 &= us_1a_3, \quad \text{y} \\ vs_4a_2 &= vs_2a_4. \end{aligned}$$

  Se sigue que $uvs_3s_4a_1a_2 = uvs_1s_2a_3a_4$. De esta forma,

$$\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{a_3a_4}{s_3s_4} = \frac{a_3}{s_3} \times \frac{a_4}{s_4}.$$

- El producto $\times$ es asociativo:

  Sean $a_1, a_2, a_3 \in A$ y $s_1, s_2, s_3 \in S$. Se sigue que

$$\frac{a_1}{s_1} \times \left(\frac{a_2}{s_2} \times \frac{a_3}{s_3}\right) = \frac{a_1}{s_1} \times \left(\frac{a_2a_3}{s_2s_3}\right) = \frac{a_1a_2a_3}{s_1s_2s_3} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2} \times \frac{a_3}{s_3} = \left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2}\right) \times \frac{a_3}{s_3}.$$

- Veamos la conmutatividad del producto $\times$. En efecto, sean $a_1, a_2 \in A$ y $s_1, s_2 \in S$. Se tiene que $\dfrac{a_1}{s_1} \times \dfrac{a_2}{s_2} = \dfrac{a_1a_2}{s_1s_2} = \dfrac{a_2a_1}{s_2s_1} = \dfrac{a_2}{s_2} \times \dfrac{a_1}{s_1}$.
- La adición + distribuye al producto $\times$:

  Sean $a_1, a_2, a_3 \in A$ y $s_1, s_2, s_3 \in S$. Así,

$$\frac{a_1}{s_1} \times \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}\right) = \frac{a_1}{s_1} \times \left(\frac{s_3a_2 + s_2a_3}{s_2s_3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_1(s_3a_2 + s_2a_3)}{s_1s_2s_3} \\
&= \frac{s_3a_1a_2 + s_2a_1a_3}{s_1s_2s_3} \\
&= \frac{a_1a_2}{s_1s_2} + \frac{a_1a_3}{s_1s_3} \\
&= \frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_3}{s_3}.
\end{aligned}$$

- El neutro multiplicativo de $\mathrm{S}^{-1} A$ es el elemento $\dfrac{1_A}{1_A}$. En efecto, sean $a \in A$ y $s \in S$. Así, $\dfrac{a}{s} = \dfrac{1_A a}{1_A s} = \dfrac{1_A}{1_A} \times \dfrac{a}{s}$.
- Mostraremos ahora que $1_{\mathrm{S}^{-1} A} \neq 0_{\mathrm{S}^{-1} A}$. Supongamos que $\dfrac{1_A}{1_A} = \dfrac{0_A}{1_A}$. Se sigue que existe $u \in S$ tal que $u1_A = u0_A$ y así, $u = 0_A$. Ésto es una contradicción, ya que $0_A \notin S$.

Por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1} A$ tiene una estructura de un anillo bajo la adición y el producto dados.

2. A continuación, se mostrará que i_S^A es un homomorfismo de anillos y para cualquier $t \in S$, $i_S^A(t) \in \mathcal{U}(\mathrm{S}^{-1} A)$. En efecto, sean α y $\beta \in A$.
   - Mostraremos que i_S^A está bien definida. En efecto, supongamos que $\alpha = \beta$. Se sigue que $\dfrac{\alpha}{1_A} = \dfrac{\beta}{1_A}$. Es decir, $i_S^A(\alpha) = i_S^A(\beta)$.
   - Veamos que i_S^A preserva la estructura aditiva.
   $$i_S^A(\alpha) + i_S^A(\beta) = \frac{\alpha}{1_A} + \frac{\beta}{1_A} = \frac{\alpha + \beta}{1_A} = i_S^A(\alpha + \beta).$$
   - i_S^A preserva la estructura del producto. En efecto,
   $$\begin{aligned}
   i_S^A(\alpha) \times i_S^A(\beta) &= \frac{\alpha}{1_A} \times \frac{\beta}{1_A} = \frac{\alpha\beta}{1_A} = i_S^A(\alpha\beta), \\
   i_S^A(1_A) &= \frac{1_A}{1_A}.
   \end{aligned}$$
   - Sea $t \in S$. Tenemos que $\dfrac{1_A}{t} \times i_S^A(t) = \dfrac{1_A}{t} \times \dfrac{t}{1_A} = \dfrac{t}{t} = \dfrac{1_A}{1_A} = 1_{\mathrm{S}^{-1} A}$. Así, $\dfrac{1_A}{t} = \left(i_S^A(t)\right)^{-1}$ y con ello, $i_S^A(t) \in \mathcal{U}\left(\mathrm{S}^{-1} A\right)$. □

El inciso 1 de la Proposición 1.2 da pie a la siguiente definición.

Definición 2. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. La localización de A en S es el anillo $(\mathrm{S}^{-1} A, +, \times)$, donde $+$ y $\times$ son las operaciones dadas en el inciso 1 de la Proposición 1.2. Dicha localización la denotaremos simplemente por $\mathrm{S}^{-1} A$.

Damos ahora un ejemplo.

Ejemplo 1.3.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ y considérese el conjunto $S_\alpha = \{\alpha^n | \, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Es claro que S_α es un subconjunto multiplicativo de $\mathbb{Z}$. La localización de $\mathbb{Z}$ en S_α se denotará por $\mathbb{Z}_\alpha$.
2. Sea I un ideal propio de un anillo A y considérese el conjunto $1_A + I$. Veremos que dicho conjunto es un subconjunto multiplicativo de A:
   - Supongamos que $0_A \in 1_A + I$. Se sigue que $0_A = 1_A + a$ para algún $a \in I$. Ésto es, $1_A = -a$ para algún $a \in I$. Así, I contiene a 1_A. Es decir, $I = A$, lo que contradice nuestra hipótesis sobre I. Por lo tanto, $0_A \notin 1_A + I$.
   - Como $0_A \in I$, se sigue que $1_A \in 1_A + I$.
   - Sean a_1 y $a_2 \in I$. Así, $(1_A + a_1)(1_A + a_2) = 1_A + a_2 + a_1 + a_1 a_2$. Sabemos que $a_2 + a_1 + a_1 a_2 \in I$. Por lo tanto, $(1_A + a_1)(1_A + a_2) \in 1_A + I$.

   En particular, si $I = \{0_A\}$, entonces $1_A + I = \{1_A\}$ y así, $(1_A + I)^{-1} A$ es un anillo isomorfo a A.

Dado un subconjunto multiplicativo S de un anillo A y el homomorfismo i_S^A de anillos, tenemos que $\mathrm{S}^{-1} A$ es una A-álgebra y por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1} A$ es un A-módulo.
Ahora veremos la localización de un módulo en un subconjunto multiplicativo de un anillo. Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo. Consideremos la relación sobre $M \times S$, que denotaremos nuevamente por $\sim$, dada de la siguiente manera: $(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2)$ si existe $u \in S$ tal que $u(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0_M$, donde (m_1, s_1) y (m_2, s_2) son elementos de $M \times S$.
La prueba de que esta relación es una relación de equivalencia es similar a la prueba para el caso de la relación sobre $A \times S$, dada antes de la Proposición 1.2. Al conjunto cociente de $M \times S$ por $\sim$ lo denotamos por $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. Además, si $(m, s) \in M \times S$, representamos al elemento $\{(n, t) \in M \times S \,|\, (n, t) \sim (m, s)\}$ de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ por $\dfrac{m}{s}$.

Proposición 1.4. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo.* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *tiene una estructura de un* $\mathrm{S}^{-1} A$*-módulo con las siguientes operaciones:*

$$\begin{array}{rcl} + : \mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M} \times \mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M} & \to & \mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M} \\ \left(\dfrac{m_1}{s}, \dfrac{m_2}{t}\right) & \mapsto & \dfrac{tm_1 + sm_2}{st}, \quad y \\ \cdot : \mathrm{S}^{\text{-}1} A \times \mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M} & \to & \mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M} \\ \left(\dfrac{a}{s}, \dfrac{m}{t}\right) & \mapsto & \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{m}{t} = \dfrac{am}{st}, \end{array}$$

Demostración. De manera análoga a la Proposición 1.2, se muestra que $\mathrm{S}^{\text{-}1}\mathrm{M}$ es un grupo abeliano. Estudiaremos ahora el producto por escalares.

- El producto $\cdot$ está bien definido. En efecto, sean $a_1, a_2 \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ y $m_1, m_2 \in M$. Supongamos que $\left(\frac{a_1}{s_1}, \frac{m_1}{t_1}\right) = \left(\frac{a_2}{s_2}, \frac{m_2}{t_2}\right)$. Así, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ y $\frac{m_1}{t_1} = \frac{m_2}{t_2}$. Existen u y $v \in S$ tales que $us_2a_1 = us_1a_2$ y $vt_2m_1 = vt_1m_2$. Se sigue que $uvs_2t_2a_1m_1 = uvs_1t_1a_2m_2$. Dado que $uv \in S$, tenemos que
$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{m_1}{t_1} = \frac{a_1m_1}{s_1t_1} = \frac{a_2m_2}{s_2t_2} = \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{m_2}{t_2}.$$
- Sean $a_1, a_2 \in A$, $s_1, s_2, t \in S$ y $m \in M$. Mostraremos que los elementos $\left(\left(\frac{a_1}{s_1}\right) \times \left(\frac{a_2}{s_2}\right)\right) \cdot \left(\frac{m}{t}\right)$ y $\left(\frac{a_1}{s_1}\right) \cdot \left(\left(\frac{a_2}{s_2}\right) \cdot \left(\frac{m}{t}\right)\right)$ son iguales. En efecto,
$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2}\right) \cdot \frac{m}{t} &= \frac{a_1a_2}{s_1s_2} \cdot \frac{m}{t} \\ &= \frac{(a_1a_2)m}{(s_1s_2)t} \\ &= \frac{a_1(a_2m)}{s_1(s_2t)} \\ &= \frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{m}{t}\right). \end{aligned}$$
- A continuación, mostraremos que la adición $+$ de M distribuye al producto por escalares $\cdot$. Sean $a \in A$, $t, s_1, s_2 \in S$ y $m_1, m_2 \in M$. Se sigue que
$$\begin{aligned} \frac{a}{t} \cdot \left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}\right) &= \frac{a}{t} \cdot \left(\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}\right) \\ &= \frac{a(s_2m_1 + s_1m_2)}{ts_1s_2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a(s_2m_1) + a(s_1m_2)}{ts_1s_2} \\
&= \frac{(as_2)m_1 + (as_1)m_2}{ts_1s_2} \\
&= \frac{(s_2a)m_1 + (s_1a)m_2}{ts_1s_2} \\
&= \frac{s_2(am_1) + s_1(am_2)}{ts_1s_2} \\
&= \frac{am_1}{ts_1} + \frac{am_2}{ts_2} \\
&= \frac{a}{t} \cdot \frac{m_1}{s_1} + \frac{a}{t} \cdot \frac{m_2}{s_2}.
\end{aligned}
$$

- Veamos ahora que la adición + del anillo distribuye al producto por escalar $\cdot$. En efecto, sean $a_1,\ a_2 \in A,\ s_1,\ s_2,\ t \in S$ y $m \in M$. Así,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) \cdot \frac{m}{t} &= \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2} \cdot \frac{m}{t} \\
&= \frac{(s_2a_1 + s_1a_2)m}{s_1s_2t} \\
&= \frac{(s_2a_1)m + (s_1a_2)m}{s_1s_2t} \\
&= \frac{s_2(a_1m) + s_1(a_2m)}{s_1s_2t} \\
&= \frac{a_1m}{s_1t} + \frac{a_2m}{s_2t} \\
&= \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{m}{t} + \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{m}{t}.
\end{aligned}
$$

- Por otra parte, tenemos que $\frac{1_A}{1_A} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1_A m}{1_A s} = \frac{m}{s}$ para cualesquiera $m \in M$ y $s \in S$.

Por lo tanto, $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo con las operaciones de adición y producto por escalares descritas. □

Siguiendo la misma idea que en la Definición 2, para un módulo M sobre un anillo A, se define la *localización* de M en un subconjunto multiplicativo S de A como sigue:

Definición 3. Sean M un módulo sobre un anillo A y S un subconjunto multiplicativo de A. La localización de M en S es el $S^{-1}A$-módulo $(S^{-1}M, +, \cdot)$, donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones dadas en la Proposición 1.4. Dicha localización la denotaremos simplemente por $S^{-1}M$.

Ahora definiremos el aniquilador de un elemento de un módulo y veremos algunas propiedades de dicho concepto.

Definición 4. Sean M un módulo sobre un anillo A y m un elemento de M. El *aniquilador* de m es el conjunto $\{a \in A | \, am = 0_M\}$, y se denota por $\mathrm{Ann}_A(m)$.

Proposición 1.5. *Sean M un módulo sobre un anillo A y m un elemento de M. Se tiene que $\mathrm{Ann}_A(m)$ es un ideal de A.*

Demostración. Es claro, debido a que $\mathrm{Ann}_A(m)$ es el núcleo del siguiente morfismo de módulos sobre A:

$$\begin{aligned} \psi : A &\rightarrow M \\ \alpha &\mapsto \alpha m. \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 1.6. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A e i_S^A el homomorfismo dado en la Proposición 1.2. Se tiene que*

$$\ker i_S^A = \bigcup_{s \in S} \mathrm{Ann}_A(s). \tag{11}$$

Demostración. Sea $\alpha \in A$ y supongamos $\alpha \in \ker i_S^A$. Ésto es, $i_S^A(\alpha) = 0_{S^{-1}A}$, o bien, $\dfrac{\alpha}{1_A} = 0_{S^{-1}A}$. Ello ocurre si, y sólo si, existe $s \in S$ tal que $s\alpha = 0_A$. Es decir, existe $s \in S$ tal que $\alpha \in \mathrm{Ann}_A(s)$, lo que equivale a que $\alpha \in \bigcup_{s \in S} \mathrm{Ann}_A(s)$. $\square$

Corolario 1.7. *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. Se sigue que S no contiene divisores de cero de A si, y sólo si, i_S^A es un homomorfismo inyectivo.*

Demostración. Por la Proposición 1.6, $\ker i_S^A = \bigcup_{s \in S} \mathrm{Ann}_A(s)$. Supongamos que $\ker i_S^A = \{0_A\}$, ésto es, $\bigcup_{s \in S} \mathrm{Ann}_A(s) = \{0_A\}$. Es decir, $\mathrm{Ann}_A(s) = \{0_A\}$ para todo $s \in S$, o bien, s no es un divisor de cero de A para todo $s \in S$. $\square$

Corolario 1.8. *Sea S un subconjunto multiplicativo de un dominio entero A. El homomorfismo i_S^A es inyectivo.*

Demostración. Como A es un dominio entero, cualquier subconjunto multiplicativo de A no contiene divisores de cero. Por el Corolario 1.7, i_S^A es inyectivo. □

Sean M un módulo sobre un anillo A y S un subconjunto multiplicativo de A. Se tiene un morfismo de A-módulos dado por

$$\begin{aligned} i_S^M : M &\rightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \\ m &\mapsto \frac{m}{1_A}. \end{aligned}$$

Si N es un A-submódulo de M, entonces existe un morfismo inyectivo de $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos dado por

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{S}^{-1} N &\rightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \\ \frac{n}{s} &\mapsto \frac{n}{s}. \end{aligned}$$

De esta forma, consideraremos a $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ como un $\mathrm{S}^{-1} A$-submódulo de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$.

Proposición 1.9. *Sean M un módulo sobre un anillo A y S un subconjunto multiplicativo de A. Los $\mathrm{S}^{-1} A$-submódulos del $\mathrm{S}^{-1} A$-módulo $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ son de la forma $\mathrm{S}^{-1} N$, donde N es un A-submódulo de M.*

Demostración. Sea N' un $\mathrm{S}^{-1} A$-submódulo de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ y consideremos el A-submódulo de M dado por $N = \left(i_S^M\right)^{-1}(N')$. Mostraremos que $\mathrm{S}^{-1} N = N'$. Veamos que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} \subseteq N'$. Sean $n \in N$ y $s \in S$. Dado que $n \in N$, tenemos que $\frac{n}{1_A} \in N'$. Por otro lado, N' es un $\mathrm{S}^{-1} A$-módulo, así, $\frac{n}{s} = \frac{1_A}{s} \cdot \frac{n}{1_A} \in N'$.
Recíprocamente, sean $n' \in N'$. Existen $m \in M$ y $s \in S$ tales que $n' = \frac{m}{s}$. Con ello, $\frac{s}{1_A} \cdot \frac{m}{s} = \frac{m}{1_A} \in N'$. De esta manera, $m \in i_S^{M^{-1}}(N')$. Así, $m \in N$ y por lo tanto, $\frac{m}{s} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$. □

Corolario 1.10. *Los ideales de $\mathrm{S}^{-1} A$, donde A es un anillo y S es un subconjunto multiplicativo de A son de la forma $\mathrm{S}^{-1} I$, donde I es un ideal de A.*

Demostración. Tenemos que A es un A-módulo y sus A-submódulos son los ideales que contiene. Por la la proposición anterior, se sigue el resultado. □

Proposición 1.11. *Si A es un dominio entero y S es un subconjunto multiplicativo de A, entonces $\mathrm{S}^{-1} A$ es un dominio entero.*

Demostración. Sean $a, a' \in A$ y $t, t' \in S$ tales que $\frac{a}{t} \times \frac{a'}{t'} = 0_{S^{-1}A}$. Así, $\frac{aa'}{tt'} = \frac{0_A}{1_A}$, lo que implica que existe $u \in S$ tal que $uaa' = 0_A$. Dado que A es un dominio entero, resulta que $u = 0_A$ o $aa' = 0_A$. Como S no contiene a 0_A, tenemos que $aa' = 0_A$. Nuevamente, como A es un dominio entero, se sigue que $a = 0_A$ o $a' = 0_A$. Con ello, $\frac{a}{t} = \frac{0_A}{1_A}$ o $\frac{a'}{t'} = \frac{0_A}{1_A}$. □

Ahora describiremos ciertos morfismos entre las localizaciones de módulos. Sean A un anillo y $\varphi : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Consideraremos la asignación dada por

$$(12) \qquad \begin{array}{rcl} S^{-1}\varphi : S^{-1}M & \to & S^{-1}N \\ \dfrac{m}{s} & \mapsto & S^{-1}\varphi\left(\dfrac{m}{s}\right) = \dfrac{\varphi(m)}{s}. \end{array}$$

Mostraremos que $S^{-1}\varphi$, está bien definida. En efecto, sean $m_1, m_2 \in M$ y $s_1, s_2 \in S$ tales que $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$. Se sigue que existe $u \in S$ tal que $us_2m_1 = us_1m_2$. Como consecuencia, $\varphi(us_2m_1) = \varphi(us_1m_2)$. Dado que φ es un morfismo de A-módulos, $us_2\varphi(m_1) = us_1\varphi(m_2)$. Con ello, $\frac{\varphi(m_1)}{s_1} = \frac{\varphi(m_2)}{s_2}$.

Probaremos que $S^{-1}\varphi$ preserva la estructura aditiva. Sean $m_1, m_2 \in M$, $s, s_1, s_2 \in S$ y $a \in A$. Se tiene que

$$\begin{aligned} S^{-1}\varphi\left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}\right) &= S^{-1}\varphi\left(\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2}\right) \\ &= \frac{\varphi(s_2m_1 + s_1m_2)}{s_1s_2} \\ &= \frac{\varphi(s_2m_1) + \varphi(s_1m_2)}{s_1s_2} \\ &= \frac{\varphi(s_2m_1)}{s_1s_2} + \frac{\varphi(s_1m_2)}{s_1s_2} \\ &= \frac{s_2\varphi(m_1)}{s_1s_2} + \frac{s_1\varphi(m_2)}{s_1s_2} \\ &= \frac{\varphi(m_1)}{s_1} + \frac{\varphi(m_2)}{s_2} \\ &= S^{-1}\varphi\left(\frac{m_1}{s_1}\right) + S^{-1}\varphi\left(\frac{m_2}{s_2}\right). \end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que $\mathrm{S}^{-1}\varphi$ preserva la estructura del producto por escalares. En efecto, sean $m \in M$, s, $t \in S$ y $a \in A$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}^{-1}\varphi\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{m}{t}\right) &= \mathrm{S}^{-1}\varphi\left(\frac{am}{st}\right)\\
&= \frac{\varphi(am)}{st}\\
&= \frac{a\varphi(m)}{st}\\
&= \frac{a}{s}\cdot\frac{\varphi(m)}{t}\\
&= \frac{a}{s}\cdot\mathrm{S}^{-1}\varphi\left(\frac{m}{t}\right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathrm{S}^{-1}\varphi$ es un morfismo de $\mathrm{S}^{-1}A$-módulos. Esta aplicación es llamada la *localización* de φ en S.

A continuación, veamos que la localización de la composición de morfismos de módulos es igual a la composición de las localizaciones de dichos morfismos. Sea φ como antes y sea $\psi : N \to P$ un morfismo de A-módulos. Afirmamos que $\mathrm{S}^{-1}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{S}^{-1}\psi\circ\mathrm{S}^{-1}\varphi$. En efecto, claramente los dominios y codominios de $\mathrm{S}^{-1}(\psi\circ\varphi)$ y $\mathrm{S}^{-1}\psi\circ\mathrm{S}^{-1}\varphi$ coinciden. De esta manera, sólo falta ver que sus reglas de asignación son las mismas. Sean $m \in M$ y $s \in S$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}^{-1}(\psi\circ\varphi)\left(\frac{m}{s}\right) &= \frac{\psi\circ\varphi(m)}{s}\\
&= \frac{\psi(\varphi(m))}{s}\\
&= \mathrm{S}^{-1}\psi\left(\frac{\varphi(m)}{s}\right)\\
&= \mathrm{S}^{-1}\psi\left(\mathrm{S}^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right)\right)\\
&= \mathrm{S}^{-1}\psi\circ\mathrm{S}^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right).
\end{aligned}$$

En la siguiente Proposición, se analiza el comportamiento de la localización de morfismos de módulos con las sucesiones exactas de módulos sobre un anillo.

Proposición 1.12. *Sea A un anillo. Si existe una sucesión exacta de A-módulos de la siguiente forma:*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'', \tag{13}$$

entonces la siguiente sucesión de $\mathrm{S}^{-1}A$*-módulos es exacta:*

$$\mathrm{S}^{-1}M' \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}f} \mathrm{S}^{-1}M \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}g} \mathrm{S}^{-1}M''. \tag{14}$$

Demostración. Dado que $g \circ f = 0_{\mathrm{Hom}_A(M',M'')}$, se tiene que

$$\mathrm{S}^{-1}g \circ \mathrm{S}^{-1}f = \mathrm{S}^{-1}(g \circ f) = 0_{Hom_{\mathrm{S}^{-1}A}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}',\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}'')}.$$

Con ello, $\mathrm{Im}\,\mathrm{S}^{-1}f \subseteq \ker \mathrm{S}^{-1}g$. Solo falta mostrar que $\ker \mathrm{S}^{-1}g \subseteq \mathrm{Im}\,\mathrm{S}^{-1}f$. En efecto, sean $m \in M$ y $s \in S$ tales que $\frac{m}{s} \in \ker \mathrm{S}^{-1}g$. Esto implica que $0_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}''} = \frac{g(m)}{s}$. Existe $u \in S$ tal que $0_{M''} = ug(m) = g(um)$, así, $um \in \ker g = \mathrm{Im}\,f$. Con ello, existe $m' \in M'$ tal que $um = f(m')$. Como consecuencia, $\frac{m}{s} = \frac{u}{u} \cdot \frac{m}{s} = \frac{um}{us} = \frac{f(m')}{us} = \mathrm{S}^{-1}f\left(\frac{m'}{us}\right) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{S}^{-1}f$. Por lo tanto, $\ker \mathrm{S}^{-1}g \subseteq \mathrm{Im}\,\mathrm{S}^{-1}f$. □

Corolario 1.13. *Sean M un módulo sobre un anillo A y N un A-submódulo de M. Si S es un subconjunto multiplicativo de A, entonces los* $\mathrm{S}^{-1}A$*-módulos* $\mathrm{S}^{-1}\frac{M}{N}$ *y* $\frac{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}}$ *son isomorfos.*

Demostración. Se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \longrightarrow 0\ ,$$

donde i es la inclusión de N en M y π es la proyección. Por la Proposición 1.12, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}i} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}\pi} \mathrm{S}^{-1}\frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

de $\mathrm{S}^{-1}A$-módulos es exacta. Como $\mathrm{S}^{-1}\pi$ es una aplicación sobre, por el Primer Teorema de Isomorfismo, $\mathrm{S}^{-1}\frac{M}{N}$ es un $\mathrm{S}^{-1}A$-módulo isomorfo a $\frac{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}{\ker \mathrm{S}^{-1}\pi} = \frac{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}{\mathrm{Im}\,\mathrm{S}^{-1}i} = \frac{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}}$. □

Proposición 1.14. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y N, M A-submódulos de un A-módulo P. Los siguientes* $\mathrm{S}^{-1}A$*-submódulos de* $\mathrm{S}^{-1}P$ *son iguales:*

1. $\mathrm{S}^{-1}(M + N)$ *y* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$,

2. $S^{-1}(M \cap N)$ y $S^{-1}M \cap S^{-1}N$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sabemos que M y N son A-submódulos de $M + N$. Así, $S^{-1}M$ y $S^{-1}N$ son $S^{-1}A$-submódulos de $S^{-1}(M + N)$. Por consiguiente, $S^{-1}M + S^{-1}N$ es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}(M + N)$.
   Recíprocamente, sea $\alpha \in S^{-1}(M + N)$. Existen $m \in M$, $n \in N$ y $s \in S$ tales que $\alpha = \dfrac{m+n}{s} = \dfrac{m}{s} + \dfrac{n}{s} \in S^{-1}M + S^{-1}N$.
   Por lo tanto, $S^{-1}(M + N) = S^{-1}M + S^{-1}N$.
2. Dado que $M \cap N$ es un A-submódulo de los A-módulos M y N, tenemos que $S^{-1}(M \cap N)$ es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$ y de $S^{-1}N$. Con ello, $S^{-1}(M \cap N)$ es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M \cap S^{-1}N$.
   Por otro lado, sea $\alpha \in S^{-1}M \cap S^{-1}N$. Existen $m \in M$, $n \in N$ y $s, t \in S$ tales que $\alpha = \dfrac{m}{s} = \dfrac{n}{t}$. Con ello, existe $u \in S$ tal que $utm = usn \in M \cap N$. Como $uts \in S$, resulta que $\dfrac{m}{s} = \dfrac{utm}{uts} \in S^{-1}(M \cap N)$. □

Por inducción, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.15. *Sea A un anillo. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ submódulos de un A-módulo M, se sigue que:*

1. $S^{-1}(M_1 + M_2 + \ldots + M_n) = S^{-1}M_1 + S^{-1}M_2 + \ldots + S^{-1}M_n$, *y*
2. $S^{-1}(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n) = S^{-1}M_1 \cap S^{-1}M_2 \cap \ldots \cap S^{-1}M_n$. □

Ahora veremos la propiedad universal de la localización de anillos.

Proposición 1.16 (Propiedad Universal de la Localización de Anillos). *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. Se tiene que para cualquier anillo B y para cualquier homomorfismo $\varphi : A \to B$ de anillos tal que $\varphi(S)$ es un subconjunto de $\mathcal{U}(B)$, existe un único homomorfismo $\widetilde{\varphi} : S^{-1}A \to B$ de anillos tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_S^A"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{15}$$

Demostración. Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : \mathrm{S}^{-1} A & \rightarrow & B \\ \dfrac{a}{t} & \mapsto & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{t}\right) = \varphi(a)(\varphi(t))^{-1}. \end{array}$$

Veamos que $\widetilde{\varphi}$ está bien definida. En efecto, tomemos $a, b \in A$ y $s, t \in S$ de forma que $\dfrac{a}{s} = \dfrac{b}{t}$. Se sigue que existe $r \in S$ tal que $rta = rsb$ y por lo tanto, $\varphi(rat) = \varphi(rbs)$. Así, $\varphi(r)\varphi(at) = \varphi(r)\varphi(bs)$. Como $\varphi(r) \in \mathcal{U}(B)$, esto implica que $\varphi(at) = \varphi(bs)$. Con ello $\varphi(a)\varphi(t) = \varphi(b)\varphi(s)$ y consecuentemente, $\varphi(a)(\varphi(s))^{-1} = \varphi(b)(\varphi(t))^{-1}$. Es decir, los elementos $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{s}\right)$ y $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{b}{t}\right)$ son iguales.

A continuación, se muestra que $\widetilde{\varphi}$ es un homomorfismo de anillos. En efecto, sean $a, b \in A$ y $s, t \in S$.

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t}\right) & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{at + bs}{st}\right) \\ & = & (\varphi(at) + \varphi(bs))(\varphi(st))^{-1} \\ & = & (\varphi(a)\varphi(t) + \varphi(b)\varphi(s))(\varphi(s)\varphi(t))^{-1} \\ & = & (\varphi(a)\varphi(t) + \varphi(b)\varphi(s))((\varphi(s))^{-1}(\varphi(t))^{-1}) \\ & = & \varphi(a)\varphi(t)(\varphi(t))^{-1}((\varphi(s))^{-1} + \varphi(b)\varphi(s)(\varphi(t))^{-1}((\varphi(s))^{-1} \\ & = & \varphi(a)((\varphi(s))^{-1} + \varphi(b)(\varphi(t))^{-1} \\ & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{s}\right) + \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{b}{t}\right), \\ \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{s}\right)\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{b}{t}\right) & = & \left(\varphi(a)(\varphi(s))^{-1}\right)\left(\varphi(b)(\varphi(t))^{-1}\right) \\ & = & \varphi(a)\varphi(b)(\varphi(s))^{-1}(\varphi(t))^{-1} \\ & = & \varphi(a)\varphi(b)(\varphi(s)\varphi(t))^{-1} \\ & = & \varphi(ab)(\varphi(st))^{-1} \\ & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{ab}{st}\right) \\ & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{a}{s} \times \dfrac{b}{t}\right), \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(\frac{1_A}{1_A}\right) &= \varphi(1_A)\varphi(1_A)^{-1}\\
&= 1_B(1_B)^{-1}\\
&= 1_B.
\end{aligned}
$$

Ahora, observemos que el diagrama 15 conmuta. Dado $\alpha \in A$, tenemos que

$$\widetilde{\varphi}\left(i_S^A(\alpha)\right) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{\alpha}{1_A}\right) = \varphi(\alpha)(\varphi(1_A))^{-1} = \varphi(\alpha).$$

Por último, veamos que $\widetilde{\varphi}$ es único con las características descritas hasta ahora. En efecto, tomemos un homomorfismo $\psi : \mathrm{S}^{\text{-}1} A \to B$ de anillos tal que $\varphi = \psi \circ i_S^A$ y sean $\alpha \in A$ y $s \in S$.

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\frac{\alpha}{s}\right) &= \psi\left(\frac{\alpha}{1_A} \times \frac{1_A}{s}\right)\\
&= \psi\left(\frac{\alpha}{1_A}\right)\psi\left(\frac{1_A}{s}\right)\\
&= \psi\left(i_S^A(\alpha)\right)\psi\left(\left(\frac{s}{1_A}\right)^{-1}\right)\\
&= \varphi(\alpha)\psi\left((i_S^A(s))^{-1}\right)\\
&= \varphi(\alpha)\psi\left((i_S^A(s))\right)^{-1}\\
&= \varphi(\alpha)\varphi(s)^{-1}\\
&= \widetilde{\varphi}\left(\frac{\alpha}{s}\right). \quad \square
\end{aligned}
$$

Corolario 1.17. *Si S es un subconjunto multiplicativo de un anillo A tal que S es un subconjunto de $\mathcal{U}(A)$, entonces los anillos A y $\mathrm{S}^{\text{-}1} A$ son isomorfos.*

Demostración. Tenemos que $\mathrm{Id}_A(S) = S \subseteq \mathcal{U}(A)$. Por la propiedad universal de la localización de anillos, existe un único homomorfismo $\widetilde{\mathrm{Id}_A}$ de anillos tal que $\mathrm{Id}_A = \widetilde{\mathrm{Id}_A} \circ i_S^A$. Falta mostrar que $i_S^A \circ \widetilde{\mathrm{Id}_A} = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}^{\text{-}1} A}$. En efecto, sean $\alpha \in A$ y $s \in S$.

$$
\begin{aligned}
i_S^A \circ \widetilde{\mathrm{Id}_A}\left(\frac{\alpha}{s}\right) &= i_S^A(\mathrm{Id}_A(\alpha)(\mathrm{Id}_A(s))^{-1})\\
&= i_S^A(\alpha s^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i_S^A(\alpha) \times i_S^A\left(s^{-1}\right) \\
&= \frac{\alpha}{1_A} \times \left(\frac{s}{1_A}\right)^{-1} \\
&= \frac{\alpha}{1_A} \times \frac{1_A}{s} \\
&= \frac{\alpha}{s}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, i_S^A es un isomorfismo de anillos. $\square$

Ahora veamos una generalización de la Proposición 1.16.

Proposición 1.18 (Propiedad Universal de la Localización de Módulos)**.** *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y sea M un A-módulo. Para cualquier A-módulo N tal que para todo $t \in S$ el morfismo*

$$
\begin{aligned}
\mu_t : N &\to N \\
n &\mapsto tn
\end{aligned}
$$

de A-módulos es un isomorfismo, se tiene que para cualquier morfismo $\varphi : M \to N$ de A-módulos, existe un único morfismo $\widetilde{\varphi} : \mathrm{S^{-1}M} \to N$ de A-módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_S^M"'] & N. \\
\mathrm{S^{-1}M} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

En particular, para cualquier $\mathrm{S^{-1}}$ A-módulo P y para cualquier morfismo $\psi : M \to P$ de A-módulos, existe un único morfismo $\widetilde{\psi} : \mathrm{S^{-1}M} \to P$ de $\mathrm{S^{-1}}$ A-módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_S^M"'] & P. \\
\mathrm{S^{-1}M} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Considérese la asignación

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} & \rightarrow & N \\ \dfrac{m}{t} & \mapsto & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) = \mu_t^{-1} \circ \varphi(m) \end{array}$$

y veamos que $\widetilde{\varphi}$ es un morfismo de A-módulos que hace conmutar el diagrama.
Primero probaremos que $\widetilde{\varphi}$ está bien definida. En efecto, sean $m_1, m_2 \in M$ y $t_1, t_2 \in S$ tales que $\dfrac{m_1}{t_1} = \dfrac{m_2}{t_2}$. Existe $u \in S$ tal que $ut_2m_1 = ut_1m_2$. Luego, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(ut_2m_1) & = & \varphi(ut_1m_2) \\ u\varphi(t_2m_1) & = & u\varphi(t_1m_2) \\ \mu_u(\varphi(t_2m_1)) & = & \mu_u(\varphi(t_1m_2)) \\ \varphi(t_2m_1) & = & \varphi(t_1m_2) \\ t_2\varphi(m_1) & = & \varphi(t_1m_2) \\ \mu_{t_2}(\varphi(m_1)) & = & \varphi(t_1m_2) \\ \varphi(m_1) & = & \mu_{t_2}^{-1}(\varphi(t_1m_2)) \\ \mu_{t_1}^{-1}(\varphi(m_1)) & = & \mu_{t_1}^{-1}(\mu_{t_2}^{-1}(\varphi(t_1m_2))) \\ \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_1}{t_1}\right) & = & \mu_{t_1}^{-1}(t_1\mu_{t_2}^{-1}(\varphi(m_2))) \\ \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_1}{t_1}\right) & = & \mu_{t_1}^{-1}(\mu_{t_1}(\mu_{t_2}^{-1}(\varphi(m_2)))) \\ \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_1}{t_1}\right) & = & \mu_{t_2}^{-1}(\varphi(m_2)) \\ \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_1}{t_1}\right) & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_2}{t_2}\right). \end{array}$$

Mostraremos que $\widetilde{\varphi}$ preserva la estructura de A-módulos. Sean $m_1, m_2 \in M$ y $t_1, t_2 \in S$.

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m_1}{t_1} + \dfrac{m_2}{t_2}\right) & = & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{t_2m_1 + t_1m_2}{t_1t_2}\right) \\ & = & \mu_{t_1t_2}^{-1}(\varphi(t_2m_1 + t_1m_2)) \\ & = & \mu_{t_1t_2}^{-1}(\varphi(t_2m_1) + \varphi(t_1m_2)) \\ & = & \mu_{t_1t_2}^{-1}(\varphi(t_2m_1)) + \mu_{t_1t_2}^{-1}(\varphi(t_1m_2)) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= t_2\mu_{t_1t_2}^{-1}(\varphi(m_1)) + \mu_{t_1t_2}^{-1}(t_1\varphi(m_2))\\
&= t_2\mu_{t_2}^{-1}\circ\mu_{t_1}^{-1}(\varphi(m_1)) + \mu_{t_2}^{-1}\circ\mu_{t_1}^{-1}(t_1\varphi(m_2))\\
&= \mu_{t_2}\circ(\mu_{t_2}^{-1}\circ\mu_{t_1}^{-1}(\varphi(m_1))) + \mu_{t_2}^{-1}\circ\mu_{t_1}^{-1}(\mu_{t_1}(\varphi(m_2)))\\
&= \mu_{t_1}^{-1}(\varphi(m_1)) + \mu_{t_2}^{-1}(\varphi(m_2))\\
&= \widetilde{\varphi}\left(\frac{m_1}{t_1}\right) + \widetilde{\varphi}\left(\frac{m_2}{t_2}\right).
\end{aligned}
$$

Sean $\alpha \in A$, $m \in M$ y $t \in S$. Así,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(\alpha\frac{m}{t}\right) &= \widetilde{\varphi}\left(\frac{\alpha m}{t}\right)\\
&= \mu_t^{-1}(\varphi(\alpha m))\\
&= \alpha\mu_t^{-1}(\varphi(m))\\
&= \alpha\widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right).
\end{aligned}
$$

Veamos que $\varphi = \widetilde{\varphi}\circ i_S^M$. En efecto, sea $m \in M$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\circ i_S^M(m) &= \widetilde{\varphi}\left(i_S^M(m)\right)\\
&= \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{1_A}\right)\\
&= \mu_{1_A}^{-1}\circ\varphi(m)\\
&= \varphi(m).
\end{aligned}
$$

Probaremos que $\widetilde{\varphi}$ es el único morfismo de A-módulos que hace conmutar el diagrama. Para ello, supongamos que existe un morfismo $\psi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to N$ de A-módulos tal que $\varphi = \psi\circ i_S^M$. Sean $m \in M$ y $t \in S$, se sigue que

$$
t\psi\left(\frac{m}{t}\right) = \psi\left(t\frac{m}{t}\right) = \psi\left(\frac{t}{1_A}\cdot\frac{m}{t}\right) = \psi\left(\frac{m}{1_A}\right) = \psi\circ i_S^M(m) = \varphi(m) = t\widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right).
$$

Como μ_t es biyectiva, tenemos que $\psi\left(\frac{m}{t}\right) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right)$.

Por último, si P es un $\mathrm{S}^{-1}A$-módulo y $\psi : M \to P$ es un morfismo de A-módulos, entonces existe un único morfismo $\widetilde{\psi}$ de A-módulos tal que $\psi = \widetilde{\psi}\circ i_S^M$. Falta mostrar que $\widetilde{\psi}$ es un morfismo de $\mathrm{S}^{-1}A$-módulos. En efecto, sabemos que $\widetilde{\psi}$ es un morfismo de grupos abelianos. Ahora, sean $\alpha \in A$, $m \in M$ y $s, t \in S$. Así,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}\left(\frac{\alpha}{s} \cdot \frac{m}{t}\right) &= \widetilde{\psi}\left(\frac{am}{st}\right) \\
&= \mu_{st}^{-1}(\psi(am)) \\
&= a\mu_{st}^{-1}(\psi(m)) \\
&= a\left(\frac{1_A}{st} \cdot \psi(m)\right) \\
&= \frac{a}{st} \cdot \psi(m) \\
&= \left(\frac{a}{s} \times \frac{1_A}{t}\right) \cdot \psi(m) \\
&= \frac{a}{s} \cdot \left(\frac{1_A}{t} \cdot \psi(m)\right) \\
&= \frac{a}{s} \cdot (\mu_t^{-1}(\psi(m))) \\
&= \frac{a}{s} \cdot \widetilde{\psi}\left(\frac{m}{t}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

A continuación, enunciamos una proposición sobre el anillo de los números enteros con base en el Corolario 1.8.

Proposición 1.19. *Sea S un subconjunto multiplicativo de $\mathbb{Z}$. Se sigue que $\mathrm{S}^{-1}\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subanillo de $\mathbb{Q}$ que contiene a un anillo isomorfo a $\mathbb{Z}$. En particular, para todo $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_\alpha$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$ que contiene a un anillo isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sabemos que el homomorfismo $i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}$ de anillos satisface que $i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}(S)$ es un subconjunto de $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$. Así, por la propiedad universal de la localización de anillos, existe un homomorfismo

$$\begin{aligned}
\widetilde{i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}} : \mathrm{S}^{-1}\mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\
\frac{x}{t} &\mapsto \frac{x}{t}
\end{aligned}$$

de anillos. Falta mostrar que $\widetilde{i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}}$ es inyectivo. En efecto, sean $x \in \mathbb{Z}$ y $t \in S$ tales que $\frac{x}{t} \in \ker \widetilde{i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}}$. Así, $\widetilde{i_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\mathbb{Z}}}\left(\frac{x}{t}\right) = 0$, ello implica que $\frac{x}{t} = 0$. Por lo tanto, existe $u \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $ux = 0$. Como $\mathbb{Z}$ es un dominio entero y $u \neq 0$, entonces $x = 0$. Se sigue que $\frac{x}{t} = 0_{\mathrm{S}^{-1}\mathbb{Z}}$.

Como consecuencia, $S^{-1}\,\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subanillo de $\mathbb{Q}$.
Por otra parte, por el Corolario 1.8, el homomorfismo $i_S^{\mathbb{Z}}$ es inyectivo. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subanillo de $S^{-1}\,\mathbb{Z}$. □

2. Producto Tensorial

En esta sección se tratará el producto tensorial de módulos y se revisarán sus propiedades básicas.

Definición 5. Sean A un anillo y M un módulo sobre A. M es libre si los A-módulos M y $\bigoplus_{i\in I} M_i$ son isomorfos, donde I es un conjunto no vacío y M_i es un Amódulo isomorfo a A para todo $i \in I$.

Dado un anillo A y un conjunto no vacío I, tomamos la notación dada por la siguiente expresión: $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A$. Así, un A-módulo M es libre si, y sólo si, M es isomorfo al A-módulo $A^{(I)}$ para cierto conjunto no vacío I.

Ejemplo 1.20.

- $A^{(\{0\})} = A$.
- $A^{(\{1,2\})} = A^2$.
- Dado $r \in \mathbb{N}$, se sigue que $A^{\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)} = A^r$, donde $\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}$ es el anillo de los números enteros módulo r.

Definición 6. Sean M, N y P módulos sobre un anillo A. Una aplicación $g : M \times N \to P$ es A-bilineal de $M \times N$ sobre P si satisface los siguientes enunciados:

1. Dado $m \in M$, la aplicación
$$\begin{array}{rcl} g_m : N & \to & P \\ n & \mapsto & g_m(n) = g(m,n) \end{array}$$
es un morfismo de A-módulos.
2. Dado $n \in N$, la aplicación
$$\begin{array}{rcl} g_n : M & \to & P \\ m & \mapsto & g_n(m) = g(m,n) \end{array}$$
es un morfismo de A-módulos.

Ahora, construiremos una especie particular de módulos libres y posteriormente, se definirá el producto tensorial de módulos. Sean M y N módulos sobre un anillo A. Tomemos el A-módulo libre

$$A^{(M\times N)} = \bigoplus_{(m,n)\in M\times N} A_{(m,n)},$$

donde $A_{(m,n)} = A$ para todo $(m,n) \in M \times N$.
Dado $(m,n) \in M\times N$, Denotaremos por $1_{(m,n)}$ al elemento de $A^{(M\times N)}$ tal que sus coordenadas son 0_A, salvo la coordenada correspondiente a (m,n), cuyo valor es 1_A. Así, si $x \in A^{(M\times N)}$, x se expresa de manera única como $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{(m_i,n_i)}$, donde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in A$ y $(m_i,n_i) \in M\times N$ para todo $i \in \{1,\dots,k\}$.

Sea Q el submódulo de $A^{(M\times N)}$ generado por los elementos de la forma:

$$\begin{aligned}
&1_{(m+m',n)} - 1_{(m,n)} - 1_{(m',n)}\\
&1_{(m,n+n')} - 1_{(m,n)} - 1_{(m,n')}\\
&1_{(\alpha m,n)} - \alpha 1_{(m,n)}\\
&1_{(m,\alpha n)} - \alpha 1_{(m,n)},
\end{aligned} \tag{16}$$

con $\alpha \in A$, $m, m' \in M$ y n, $n' \in N$. Tomemos el A-módulo

$$T = \frac{A^{(M\times N)}}{Q} \tag{17}$$

y la aplicación

$$\begin{aligned}
\theta : M\times N &\to T\\
(m,n) &\mapsto 1_{(m,n)} + Q.
\end{aligned} \tag{18}$$

Notación 7. Con lo anterior, dado $(m,n) \in M \times N$, denotamos por $m \otimes n$ al elemento $\theta(m,n)$.

Dado que los elementos $1_{(m,n)}$ generan a $A^{(M\times N)}$, donde $(m,n) \in M \times N$, se tiene que los elementos $m\otimes n$ generan al A-módulo T. Más aún, se sigue que

$$\begin{aligned}
(m+m')\otimes n &= m\otimes n + m'\otimes n,\\
m\otimes(n+n') &= m\otimes n + m\otimes n',
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\alpha(m\otimes n) &= (\alpha m)\otimes n\\ &= m\otimes(\alpha n),\end{aligned}$$

para cualesquiera $\alpha \in A$, m, $m' \in M$ y n, $n' \in N$. Como consecuencia, la aplicación θ es A-bilineal.

Ahora enunciamos la proposición que nos permite definir el producto tensorial de módulos.

Proposición 1.21. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Existe una pareja (T, θ), donde T es un A-módulo y $\theta : M \times N \to T$ es una aplicación A-bilineal con la siguiente propiedad:*
Para cualquier A-módulo P y para toda aplicación A-bilineal $\varphi : M \times N \to P$, existe un único morfismo $\widetilde{\varphi} : T \to P$ de A-módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & P. \\ T \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{20}$$

Más aún, si existe otra pareja (T', θ') que satisface tal propiedad, entonces existe un isomorfismo $\psi : T \to T'$ tal que $\psi \circ \theta = \theta'$.

Demostración. Sean $\varphi : M \times N \to P$ una aplicación A-bilineal, T el A-módulo construido anteriormente (ver ecuación (17)) y θ la aplicación dada en la expresión (18). Tomemos la asignación

$$\begin{aligned}\varphi' : A^{(M\times N)} &\to P\\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i 1_{(m_i,n_i)} &\mapsto \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i 1_{(m_i,n_i)}\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(m_i,n_i).\end{aligned}$$

y mostraremos que φ' es un morfismo de A-módulos. En efecto, sean

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i 1_{(m_i,n_i)}, \quad y\\ y &= \sum_{j=1}^{k_2}\beta_j 1_{\left(m'_j,n'_j\right)}\end{aligned}$$

elementos de $A^{(M\times N)}$ tales que k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$, (m_i, n_i), $(m'_j, n'_j) \in M \times N$ y $\alpha_i, \beta_j \in A$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, k_1\}$, $j \in \{1, \ldots, k_2\}$. Veamos que φ' está bien definida. Supongamos que $x = y$. Como la descomposición de los elementos en $A^{(M\times N)}$ es única, podemos asumir que $k_1 = k_2$, $m_i = m'_i$, $n_i = n'_i$ y $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k_1\}$. Así,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \varphi(m_i, n_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} \beta_i \varphi((m'_i, n'_i)) \\
&= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_2} \beta_i 1_{(m'_i,n'_i)}\right) \\
&= \varphi'(y).
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que φ' preserva la estructura de módulos. En efecto, sin pérdida de generalidad, para x y y, podemos suponer que $k_1 = k_2$ y que $(m_i, n_i) = (m'_i, n'_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, k_1\}$. Así, $x+y = \sum_{i=1}^{k_1} (\alpha_i+\beta_i) 1_{(m_i,n_i)}$. Con ello, se tienen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x+y) &= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} (\alpha_i + \beta_i) 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} (\alpha_i + \beta_i) \varphi(m_i, n_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \varphi(m_i, n_i) + \sum_{i=1}^{k_1} \beta_i \varphi(m_i, n_i) \\
&= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i 1_{(m_i,n_i)}\right) + \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} \beta_i 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \varphi'(x) + \varphi'(y).
\end{aligned}$$

Dado $\alpha \in A$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha x) &= \varphi'\left(\alpha \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} \alpha(\alpha_i 1_{(m_i,n_i)})\right) \\
&= \varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} (\alpha\alpha_i) 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} (\alpha\alpha_i)\varphi(m_i,n_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} \alpha\Big(\alpha_i\varphi(m_i,n_i)\Big) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i\varphi(m_i,n_i) \\
&= \alpha\varphi'\left(\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i 1_{(m_i,n_i)}\right) \\
&= \alpha\varphi'(x).
\end{aligned}$$

A continuación, se mostrará que $\varphi'(Q) = \{0_P\}$. Basta probar que si $z \in A^{(M\times N)}$ tiene una de las la formas descritas en las ecuaciones (16), entonces $\varphi'(z) = 0_P$. En efecto, sean m, $m' \in M$, n, $n' \in N$ y $\alpha \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi'(1_{(m+m',n)} - 1_{(m,n)} - 1_{(m',n)}) &= \varphi(m+m',n) - \varphi(m,n) - \varphi(m',n) \\
&= \varphi(m,n) + \varphi(m',n) - \varphi(m,n) - \varphi(m',n) \\
&= 0_P, \\
\varphi'(1_{(m,n+n')} - 1_{(m,n)} - 1_{(m,n')}) &= \varphi(m,n+n') - \varphi(m,n) - \varphi(m,n') \\
&= \varphi(m,n) + \varphi(m,n') - \varphi(m,n) - \varphi(m,n') \\
&= 0_P, \\
\varphi'(1_{(\alpha m,n)} - \alpha 1_{(m,n)}) &= \varphi(\alpha m,n) - \alpha\varphi(m,n) \\
&= \alpha\varphi(m,n) - \alpha\varphi(m,n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & = & 0_P, \\
\varphi'(1_{(m,\alpha n)} - \alpha 1_{(m,n)}) & = & \varphi(m,\alpha n) - \alpha\varphi(m,n) \\
 & = & \alpha\varphi(m,n) - \alpha\varphi(m,n) \\
 & = & 0_P.
\end{array}
$$

Como consecuencia, existe un morfismo de A-módulos dado por

$$
\begin{array}{rcl}
\widetilde{\varphi} : T & \to & P \\
\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_i \otimes n_i) & \mapsto & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(m_i, n_i).
\end{array}
$$

Más aún, se tiene que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \theta$. En efecto, dado $(m,n) \in M \times N$, se sigue que

$$\widetilde{\varphi} \circ \theta(m,n) = \widetilde{\varphi}(m \otimes n) = \varphi(m,n).$$

Obsérvese que $\widetilde{\varphi}$ es el único morfismo de A-módulos que hace conmutar el diagrama 20 (basta mostrarlo para los generadores de T). Sea $\phi : T \to P$ un morfismo de A-módulos tal que $\varphi = \phi \circ \theta$. Tomemos $(m,n) \in M \times N$, así, $\phi(m \otimes n) = \phi\big(\theta(m,n)\big) = \varphi(m,n) = \widetilde{\varphi}(m \otimes n)$. Por último, mostraremos que la pareja (T,θ) es única salvo isomorfismo. Supongamos que existe una pareja (T',θ'), donde T' es un A-módulo y $\theta' : M \times N \to T'$ es una aplicación A-bilineal tal que para toda aplicación A-bilineal $\varphi' : M \times N \to L$ con L un A-módulo, existe un único morfismo $\widetilde{\varphi'}$ de A-módulos tal que $\varphi' = \widetilde{\varphi'} \circ \theta'$. Ahora, si tomamos $P = T'$ y $\varphi = \theta'$ en el diagrama 20, entonces el siguiente diagrama:

(21)
$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\theta"'] & T' \\
T \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\theta'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo y si tomamos $L = T$ y $\varphi' = \theta$, se sigue que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta'"'] & T \\
T' \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\theta}"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Ello implica que

$$
\begin{aligned}
\theta &= \widetilde{\theta} \circ \theta' \\
&= \widetilde{\theta} \circ \left(\widetilde{\theta'} \circ \theta\right) \\
&= \left(\widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta'}\right) \circ \theta.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Por otra parte, dado que θ es una aplicación A-bilineal, si tomamos $P = T$, entonces existe un único morfismo $\overline{\theta} : T \to T$ de A-módulos tal que $\theta = \overline{\theta} \circ \theta$. Como Id_T es un morfismo de A-módulos y $\theta = \mathrm{Id}_T \circ \theta$, tenemos que $\overline{\theta} = \mathrm{Id}_T$. Por la ecuación (22) y dado que $\overline{\theta}$ es el único morfismo de A-módulos tal que $\theta = \overline{\theta} \circ \theta$, se sigue que $\overline{\theta} = \widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta'}$ y así, $\mathrm{Id}_T = \widetilde{\theta} \circ \widetilde{\theta'}$. De manera similar, se prueba que $\mathrm{Id}_{T'} = \widetilde{\theta'} \circ \widetilde{\theta}$ y por lo tanto, $\widetilde{\theta}$ es un isomorfismo entre los A-módulos T y T'.
Finalmente, si tomamos $\psi = \widetilde{\theta'}$, se prueba el enunciado. □

Definición 8. Sean M y N módulos sobre un anillo A. El producto tensorial de M y N sobre A es el A-módulo T dado en la expresión (17) y se denota por $M \otimes_A N$.

El hecho de que el diagrama 20 conmute es referido como la *Propiedad Universal del Producto Tensorial*, y para la aplicación θ dada en (18), diremos que θ es la aplicación A-bilineal natural de $M \times N$ en $M \otimes_A N$.

Proposición 1.22. *Si M, N y P son módulos sobre un anillo A, entonces el conjunto de las aplicaciones A-bilineales con dominio $M \times N$ y codominio P está en correspondencia biyectiva con el A-módulo* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M \otimes_A N, P)$.

Demostración. El resultado se sigue por la Proposición 1.21. □

Proposición 1.23. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Sean $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in M$ y $y_i \in N$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0_{M \otimes_A N}$. Se sigue que existe un A-submódulo finitamente generado M_0 de M y existe un A-submódulo finitamente generado N_0 de N de forma que $x_i \in M_0$ y $y_i \in N_0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0_{M_0 \otimes_A N_0}$.*

Demostración. Como $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0_{M \otimes_A N}$, se sigue que $\sum_{i=1}^{k} 1_{(x_i, y_i)} \in Q$, donde Q es el A-módulo generado por los elementos de la forma mostrada en (16). Sin pérdida de generalidad, existen $k' \in \mathbb{N}$, α_i, β_i, γ_i, δ_i, a_i, $b_i \in A$, m_i, $m_i' \in M$ y n_i, $n_i' \in N$ para todo

$i \in \{1, \ldots, k'\}$ tales que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} 1_{(x_i,y_i)} &= \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i(1_{(m_i+m_i',n_i)} - 1_{(m_i,n_i)} - 1_{(m_i',n_i)}) + \sum_{i=1}^{k'} \beta_i(1_{(m_i,n_i+n_i')} - 1_{(m_i,n_i)} - 1_{(m_i,n_i')}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{k'} \gamma_i(a_i 1_{(m_i,n_i)} - 1_{(a_i m_i,n_i)}) + \sum_{i=1}^{k'} \delta_i(b_i 1_{(m_i,n_i)} - 1_{(m_i,b_i n_i)}). \qquad (23)\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} M_0 &= Am_1 + \ldots + Am_{k'} + Am_1' + \ldots + Am_{k'}' + Ax_1 + \ldots + Ax_k, \\ N_0 &= An_1 + \ldots + An_{k'} + An_1' + \ldots + An_{k'}' + Ay_1 + \ldots + Ay_k, \end{aligned}$$

y tomemos al A-submódulo Q_0 de $A^{(M_0 \times N_0)}$ generado por los elementos que tienen las formas siguientes:

$$\begin{aligned} 1_{(m+m',n)} - 1_{(m,n)} - 1_{(m',n)}, \\ 1_{(m,n+n')} - 1_{(m,n)} - 1_{(m,n')}, \\ 1_{(\alpha m,n)} - \alpha 1_{(m,n)}, \\ 1_{(m,\beta n)} - \beta 1_{(m,n)}, \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in A$ y $m, m' \in M_0$ y $n, n' \in N_0$. Así, $M_0 \otimes_A N_0 = \dfrac{A^{(M_0 \times N_0)}}{Q_0}$ y por la expresión 23, tenemos que $\sum_{i=1}^{k} 1_{(x_i,y_i)} \in Q_0$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{k} 1_{(x_i,y_i)} + Q_0 = 0_{M_0 \otimes_A N_0}$. □

Proposición 1.24. *Sean M, N y P módulos sobre un anillo A. Se tiene que los A-módulos* $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ *y* $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ *son isomorfos.*

Demostración. Tomemos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \\ f &\mapsto \psi(f) : M \to \mathrm{Hom}_A(N, P) \end{aligned}$$

de forma que para cualesquiera $m \in M$ y $n \in N$, $\big(\psi(f)(m)\big)(n) = f(m \otimes n)$. Veamos que $\psi(f)(m)$ es un morfismo de A-módulos para cualesquiera $f \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ y $m \in M$. En efecto, sean $f \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ y $m \in M$. Mostraremos que $\psi(f)(m)$ está bien definida, pues si n_1 y $n_2 \in N$ de forma que $n_1 = n_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\big(\psi(f)(m)\big)(n_1) &= f(m \otimes n_1)\\
&= f(m \otimes n_2)\\
&= \big(\psi(f)(m)\big)(n_2).
\end{aligned}$$

Probaremos que $\psi(f)(m) : N \to P$ preserva la estructura de A-módulos. Sean $\alpha \in A$, n_1 y $n_2 \in N$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\big(\psi(f)(m)\big)(n_1 + n_2) &= f(m \otimes (n_1 + n_2))\\
&= f(m \otimes n_1 + m \otimes n_2)\\
&= f(m \otimes n_1) + f(m \otimes n_2)\\
&= \big(\psi(f)(m)\big)(n_1) + \big(\psi(f)(m)\big)(n_2),\\
\big(\psi(f)(m)\big)(\alpha n_1) &= f(m \otimes (\alpha n_1))\\
&= f(\alpha(m \otimes n_1))\\
&= \alpha f(m \otimes n_1)\\
&= \alpha\big(\psi(f)(m)\big)(n_1).
\end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que $\psi(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, P))$. Para mostrar que $\psi(f)$ es una aplicación bien definida, tomemos $m_1, m_2 \in M$ tales que $m_1 = m_2$ y $n \in N$. Así,

$$\big(\psi(f)(m_1)\big)(n) = f(m_1 \otimes n) = f(m_2 \otimes n) = \big(\psi(f)(m_2)\big)(n).$$

Sean $\alpha \in A$, $m_1, m_2 \in M$ y $n \in N$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\big(\psi(f)(m_1 + m_2)\big)(n) &= f\big((m_1 + m_2) \otimes n\big)\\
&= f\big(m_1 \otimes n + m_2 \otimes n)\\
&= f(m_1 \otimes n) + f(m_2 \otimes n)\\
&= \big(\psi(f)(m_1)\big)(n) + \big(\psi(f)(m_2)\big)(n)\\
&= \big(\psi(f)(m_1) + \psi(f)(m_2)\big)(n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\psi(f)(\alpha m_1)\Big)(n) &= f\Big((\alpha m_1)\otimes n\Big)\\ &= f\Big(\alpha(m_1\otimes n)\Big)\\ &= \alpha f(m_1\otimes n)\\ &= \alpha\Big(\psi(f)(m_1)\Big)(n).\end{aligned}$$

A continuación, probaremos que ψ es un morfismo de A-módulos. Es claro que ψ es una aplicación bien definida. Sean $\alpha \in A$, $m \in M$, $n \in N$ y f_1, $f_2 \in \mathrm{Hom_A}(M \otimes_A N)$.

$$\begin{aligned}\Big(\psi(f_1+f_2)(m)\Big)(n) &= \Big(f_1+f_2\Big)(m\otimes n)\\ &= f_1(m\otimes n)+f_2(m\otimes n)\\ &= \Big(\psi(f_1)(m)\Big)(n)+\Big(\psi(f_2)(m)\Big)(n)\\ &= \Big((\psi(f_1)+\psi(f_2))(m)\Big)(n),\\ \Big(\psi(\alpha f_1)(m)\Big)(n) &= \Big(\alpha f_1\Big)(m\otimes n)\\ &= \alpha f_1(m\otimes n)\\ &= \alpha\Big(\psi(f_1)(m)\Big)(n).\end{aligned}$$

Falta mostrar que ψ es un isomorfismo de A-módulos. En efecto, sea $f \in \mathrm{Hom_A}(M\otimes_A N, P)$. Supongamos que $f \in \ker\psi$, ésto es, $\psi(f) = 0_{\mathrm{Hom_A}(M\otimes_A N,P)}$, o bien,

$$f(m\otimes n) = \Big(\psi(f)(m)\Big)(n) = \Big(0_{\mathrm{Hom_A}(M,\mathrm{Hom_A}(N,P))}(m)\Big)(n) = \Big(0_{\mathrm{Hom_A}(N,P)}\Big)(n) = 0_P$$

para cualesquiera $m \in M$ y $n \in N$. Es decir, $f = 0_{\mathrm{Hom_A}(M\otimes_A N,P)}$. Como consecuencia, $\ker\psi = \{0_{\mathrm{Hom_A}(M\otimes_A N,P)}\}$ y por lo tanto, ψ es inyectiva.
Por último, mostraremos que ψ es sobre. Sea $g \in \mathrm{Hom_A}(M, \mathrm{Hom_A}(N, P))$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\phi : M\times N &\to P\\ (m,n) &\mapsto \phi(m,n) = g(m)(n).\end{aligned}$$

Veamos que ϕ es una aplicación A-bilineal. Sean $\alpha \in A$, m_1, $m_2 \in M$ y n_1, $n_2 \in N$.

$$\begin{aligned}\phi(m_1+m_2,n_1) &= g(m_1+m_2)(n_1)\\ &= \Big(g(m_1)+g(m_2)\Big)(n_1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(m_1)(n_1) + g(m_2)(n_1) \\
&= \phi(m_1, n_1) + \phi(m_2, n_1), \\
\phi(m_1, n_1 + n_2) &= g(m_1)(n_1 + n_2) \\
&= g(m_1)(n_1) + g(m_1)(n_2) \\
&= \phi(m_1, n_1) + \phi(m_1, n_2), \\
\phi(\alpha m_1, n_1) &= g(\alpha m_1)(n_1) \\
&= \big(\alpha g(m_1)\big)(n_1) \\
&= \alpha\big(g(m_1)(n_1)\big) \\
&= \alpha\phi(m_1, n_1), \\
\phi(m_1, \alpha n_1) &= g(m_1)(\alpha n_1) \\
&= \alpha\big(g(m_1)(n_1)\big) \\
&= \alpha\phi(m_1, n_1).
\end{aligned}
$$

Por la Proposición 1.22, existe un morfismo $\widetilde{\phi}$ de A-módulos único salvo isomorfismo que hace conmutar al siguiente diagrama:

(24)
$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] & P \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\phi}"'] &
\end{tikzcd} .
$$

Dados $m \in M$ y $n \in N$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Big(\psi\left(\widetilde{\phi}\right)(m)\Big)(n) &= \widetilde{\phi}(m \otimes n) \\
&= \widetilde{\phi}\big(\theta(m, n)\big) \\
&= \phi(m, n) \\
&= g(m)(n).
\end{aligned}
$$

Así, $\psi\left(\widetilde{\phi}\right) = g$ y con ello, ψ es sobre. Por lo tanto, $\mathrm{Hom_A}(M \otimes_A N, P)$ y $\mathrm{Hom_A}(M, \mathrm{Hom_A}(N, P))$ son A-módulos isomorfos. □

Proposición 1.25. *Dado un anillo A, se tienen los siguientes enunciados:*

1. *Si M y N son A-módulos, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_1 : M \otimes_A N &\to N \otimes_A M\\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (m_i \otimes n_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (n_i \otimes m_i)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

2. *Si M, N y P son A-módulos, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_2 : (M \otimes_A N) \otimes_A P &\to M \otimes_A (N \otimes_A P)\\ \sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} (m_{i_j} \otimes n_{i_j}) \otimes p_{i_j} \right) &\mapsto \sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} m_{i_j} \otimes (n_{i_j} \otimes p_{i_j}) \right)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

3. *Si I es un conjunto no vacío, M_i es un A-módulo para todo $i \in I$ y N es un A-módulo, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_3 : \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_A N &\to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N)\\ \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m_{i_j} \right) \otimes n_j \right) &\mapsto \sum_{i_j=1}^{k_j} \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j (m_{i_j} \otimes n_j) \right)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

4. *Si M es un A-módulo, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_4 : A \otimes_A M &\to M\\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (1_A \otimes m_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i\end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

Demostración.

1. Tomemos la siguiente aplicación A-bilineal:

$$\begin{aligned}\varphi_1 : M \times N &\to N \otimes_A M\\ (m, n) &\mapsto n \otimes m.\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.21, existe un morfismo $\widetilde{\varphi_1} : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ de A-módulos único salvo isomorfismo tal que $\widetilde{\varphi_1} \circ \theta = \varphi_1$, donde θ es la aplicación A-bilineal natural de $M \times N$ en $M \otimes_A N$. Ahora consideremos la siguiente aplicación A-bilineal:

$$\begin{aligned} \psi : N \times M &\to M \otimes_A N \\ (n, m) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.21, existe un morfismo $\widetilde{\psi} : N \otimes_A M \to M \otimes_A N$ de A-módulos único salvo isomorfismo tal que $\widetilde{\psi} \circ \theta' = \psi$, donde θ' es la aplicación A-bilineal natural de $N \times M$ en $N \otimes_A M$. Mostraremos que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi_1} = \mathrm{Id}_{M \otimes_A N}$. Basta probarlo para los elementos generadores de $M \otimes N$. En efecto, sea $(m, n) \in M \times N$.

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi_1}(m \otimes n) &= \widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi_1}(m \otimes n)) \\ &= \widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi_1}(\theta(m, n))) \\ &= \widetilde{\psi}(\varphi_1(m, n)) \\ &= \widetilde{\psi}(n \otimes m) \\ &= \widetilde{\psi}(\theta'(n, m)) \\ &= \psi(n, m) \\ &= m \otimes n. \end{aligned}$$

De manera similar se observa que $\widetilde{\varphi_1} \circ \widetilde{\psi} = \mathrm{Id}_{N \otimes_A M}$ y por lo tanto, $\widetilde{\varphi_1}$ es un isomorfismo entre los A-módulos $M \otimes_A N$ y $N \otimes_A M$.

2. Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi'_p : M \times N &\to M \otimes_A (N \otimes_A P) \\ (m, n) &\mapsto m \otimes (n \otimes p) \end{aligned}$$

es A-bilineal para todo $p \in P$. En efecto, sea $p \in P$ y tomemos m_1, $m_2 \in M$, n_1, $n_2 \in N$ y $\alpha \in A$.

$$\begin{aligned} \varphi'_p(m_1 + m_2, n_1) &= (m_1 + m_2) \otimes (n_1 \otimes p) \\ &= m_1 \otimes (n_1 \otimes p) + m_2 \otimes (n_1 \otimes p) \\ &= \varphi'_p(m_1, n_1) + \varphi'_p(m_2, n_1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi'_p(m_1, n_1 + n_2) &= m_1 \otimes ((n_1 + n_2) \otimes p) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes p + n_2 \otimes p) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes p) + m_1 \otimes (n_2 \otimes p) \\
&= \varphi'_p(m_1, n_1) + \varphi'_p(m_1, n_2), \\
\varphi'_p(\alpha m_1, n_1) &= \alpha m_1 \otimes (n_1 \otimes p) \\
&= \alpha(m_1 \otimes (n_1 \otimes p)) \\
&= \alpha\varphi'_p(m_1, n_1), \\
\varphi'_p(m_1, \alpha n_1) &= m_1 \otimes (\alpha n_1 \otimes p) \\
&= m_1 \otimes \alpha(n_1 \otimes p) \\
&= \alpha(m_1 \otimes (n_1 \otimes p)) \\
&= \alpha\varphi'_p(m_1, n_1).
\end{aligned}
$$

Por la Propiedad Universal del Producto Tensorial, existe un morfismo

$$\widetilde{\varphi'_p} : M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$$

de A-módulos único salvo isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi'_p"] \arrow[d, "\theta"'] & M \otimes_A (N \otimes_A P). \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi'_p}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ahora, consideremos la aplicación

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 : (M \otimes_A N) \times P &\to M \otimes_A (N \otimes_A P) \\
\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_i \otimes n_i), p\right) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \widetilde{\varphi'_p}(m_i \otimes n_i)
\end{aligned}
$$

y mostraremos que φ_2 es una aplicación A-bilineal. Es suficiente probarlo para los elementos de su dominio de la forma (x, y), donde x es un generador de $M \otimes_A N$ y $y \in P$. En efecto, sean m_1, $m_2 \in M$, n_1, $n_2 \in N$, p_1, $p_2 \in P$ y $\alpha \in A$.

$$\varphi_2((m_1 \otimes n_1) + (m_2 \otimes n_2), p_1) = \widetilde{\varphi'_{p_1}}((m_1 \otimes n_1) + (m_2 \otimes n_2))$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{\varphi'_{p_1}}(m_1 \otimes n_1) + \widetilde{\varphi'_{p_1}}(m_2 \otimes n_2) \\
&= \varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_1) + \varphi_2(m_2 \otimes n_2, p_1), \\
\varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_1 + p_2) &= \widetilde{\varphi'_{p_1+p_2}}(m_1 \otimes n_1) \\
&= \varphi'_{p_1+p_2}(m_1, n_1) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes (p_1 + p_2)) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes p_1 + n_1 \otimes p_2) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes p_1) + m_1 \otimes (n_1 \otimes p_2) \\
&= \varphi'_{p_1}(m_1, n_1) + \varphi'_{p_2}(m_1, n_1) \\
&= \widetilde{\varphi'_{p_1}}(m_1 \otimes n_1) + \widetilde{\varphi'_{p_2}}(m_1 \otimes n_1) \\
&= \varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_1) + \varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_2), \\
\varphi_2(\alpha(m_1 \otimes n_1), p_1) &= \widetilde{\varphi'_{p_1}}(\alpha(m_1 \otimes n_1)) \\
&= \alpha\widetilde{\varphi'_{p_1}}(m_1 \otimes n_1) \\
&= \alpha\varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_1), \\
\varphi_2(m_1 \otimes n_1, \alpha p_1) &= \widetilde{\varphi'_{\alpha p_1}}(m_1 \otimes n_1) \\
&= \varphi'_{\alpha p_1}(m_1, n_1) \\
&= m_1 \otimes (n_1 \otimes \alpha p_1) \\
&= m_1 \otimes \alpha(n_1 \otimes p_1) \\
&= \alpha(m_1 \otimes (n_1 \otimes p_1)) \\
&= \alpha\varphi'_{p_1}(m_1, n_1) \\
&= \alpha\widetilde{\varphi'_{p_1}}(m_1 \otimes n_1) \\
&= \alpha\varphi_2(m_1 \otimes n_1, p_1).
\end{aligned}
$$

Así, existe un morfismo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi_2} : (M \otimes_A N) \otimes_A P &\rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P) \\
\sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j}(m_{i_j} \otimes n_{i_j}) \otimes p_{i_j} \right) &\mapsto \sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} m_{i_j} \otimes (n_{i_j} \otimes p_{i_j}) \right)
\end{aligned}
$$

de A-módulos único salvo isomorfismo que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A N \times P \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\theta'"'] & M \otimes_A (N \otimes_A P). \\ (M \otimes_A N) \otimes_A P \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi_2}"'] & \end{tikzcd}$$

De manera análoga, se construye un morfismo

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\psi} : M \otimes_A (N \otimes_A P) & \to & (M \otimes_A N) \otimes P \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} m_{i_j} \otimes (n_{i_j} \otimes p_{i_j}) \right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} (m_{i_j} \otimes n_{i_j}) \otimes p_{i_j} \right). \end{array}$$

de A-módulos, y se puede observar que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi_2} = \mathrm{Id}_{(M\otimes_A N)\otimes P}$ y $\widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\psi} = \mathrm{Id}_{M\otimes_A (N\otimes_A P)}$, por lo tanto, $\widetilde{\varphi_2} : (M \otimes_A N) \otimes P \to M \times (N \otimes_A P)$ es un isomorfismo de A-módulos.

3. Veamos que $\widetilde{\varphi_3}$ está bien definida. En efecto, sean l, $l' \in \mathbb{N}$, α_j, $\alpha'_{j'} \in A$, n_j, $n'_{j'} \in N$, $k_j, k'_{j'} \in \mathbb{N}$ para cualesquiera $j \in 1, \ldots, l$, $j' \in 1, \ldots, l'$ y m_{i_j}, $m'_{i_{j'}} \in M$ para cualesquiera $i_j \in \{1, \ldots, k_j\}$ y $i_{j'} \in \{1, \ldots, k_{j'}\}$ de forma que

$$\begin{array}{rcl} x & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m_{i_j} \right) \otimes n_j \right) \\ y & = & \displaystyle\sum_{j'=1}^{l'} \alpha'_{j'} \left(\left(\sum_{i_{j'}=1}^{k'_{j'}} m'_{i_{j'}} \right) \otimes n'_{j'} \right). \end{array}$$

Podemos asumir que $l = l'$ y $k_j = k'_{j'}$. Supongamos que $x = y$, así,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi_3}(x) & = & \displaystyle\sum_{i_j=1}^{k_j} \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j (m_{i_j} \otimes n_j) \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \sum_{i_j=1}^{k_j} (m_{i_j} \otimes n_j) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m_{i_j} \right) \otimes n_j \right) \\ & = & x \\ & = & y \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{l} \alpha'_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m'_{i_j} \right) \otimes n'_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \alpha'_j \sum_{i_j=1}^{k_j} \left((m'_{i_j} \otimes n'_j) \right) \\
&= \sum_{i_j=1}^{k_j} \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha'_j (m'_{i_j} \otimes n_j) \right) \\
&= \widetilde{\varphi_3}(y).
\end{aligned}$$

Es claro que $\widetilde{\varphi_3}$ preserva la estructura de A-módulos y es sobre. Sólo falta mostrar que $\ker \widetilde{\varphi_3} = \left\{ 0_{(\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes_A N} \right\}$. En efecto, sea $x \in \left(\bigoplus_{i\in I} M_i \right) \otimes_A N$. Existen $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in A$, $n_j \in N$, $k_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in 1, \ldots, l$ y $m_{i_j} \in M$ para todo $i_j \in \{1, \ldots, k_j\}$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m_{i_j} \right) \otimes n_j \right).$$

Supongamos que $x \in \ker \widetilde{\varphi_3}$, ésto es, $\widetilde{\varphi_3}(x) = 0_{\bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes_A N)}$. Es decir,

$$\begin{aligned}
0_{\bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes_A N)} &= \sum_{i_j=1}^{k_j} \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j (m_{i_j} \otimes n_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_j (m_{i_j} \otimes n_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} (m_{i_j} \otimes n_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left(\left(\sum_{i_j=1}^{k_j} m_{i_j} \right) \otimes n_j \right) \\
&= x.
\end{aligned}$$

4. Dado que M es un A-módulo, la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi_4 : A \times M &\rightarrow M \\
(\alpha, m) &\mapsto \alpha m,
\end{aligned}$$

es A-bilineal y así, existe un morfismo $\widetilde{\varphi_4} : A \otimes_A M \to M$ de A-módulos único salvo isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

(25)
$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\theta"'] & M . \\ A \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi_4}"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \psi : M &\to A \otimes_A M \\ m &\mapsto 1_A \otimes m \end{aligned}$$

de A-módulos y veamos que $\psi \circ \widetilde{\varphi_4} = \mathrm{Id}_{A\otimes_A M}$ y $\widetilde{\varphi_4} \circ \psi = \mathrm{Id}_M$. En efecto, sea $m \in M$.

$$\begin{aligned} \psi \circ \widetilde{\varphi_4}(1_A \otimes m) &= \psi \circ \widetilde{\varphi_4}(\theta(1_A, m)) \\ &= (\psi \circ \widetilde{\varphi_4}) \circ \theta(1_A, m) \\ &= \psi \circ (\widetilde{\varphi_4} \circ \theta)(1_A, m) \\ &= \psi \circ \varphi_4(1_A, m) \\ &= \psi(\varphi_4(1_A, m)) \\ &= \psi(m) \\ &= 1_A \otimes m. \end{aligned}$$

Como los generadores del A-módulo $A \otimes_A M$ son de la forma $1_A \otimes m$ con $m \in M$, se sigue que $\psi \circ \widetilde{\varphi_4} = \mathrm{Id}_{A\otimes_A M}$. Por otra parte, dado $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_4} \circ \psi(m) &= \widetilde{\varphi_4}(\psi(m)) \\ &= \widetilde{\varphi_4}(1_A \otimes m) \\ &= \widetilde{\varphi_4}(\theta(1_A, m)) \\ &= \widetilde{\varphi_4} \circ \theta(1_A, m) \\ &= \varphi_4(1_A, m) \\ &= m \end{aligned}$$

y así, $\widetilde{\varphi_4} \circ \psi = \mathrm{Id}_M$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi_4}$ es un isomorfismo de A-módulos. $\square$

Dado un anillo A, si tenemos morfismos de A-módulos $\varphi : M \to M'$ y $\psi : N \to N'$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h : M \times N & \to & M' \otimes_A N' \\ (m, n) & \mapsto & h(m, n) = \varphi(m) \otimes \psi(n) \end{array}$$

es A-bilineal. En efecto, sean $\alpha \in A$, $m_1, m_2 \in M$ y $n_1, n_2 \in N$.

$$\begin{array}{rcl} h(m_1 + m_2, n_1) & = & \varphi(m_1 + m_2) \otimes \psi(n_1) \\ & = & (\varphi(m_1) + \varphi(m_2)) \otimes \psi(n_1) \\ & = & \varphi(m_1) \otimes \psi(n_1) + \varphi(m_2) \otimes \psi(n_1) \\ & = & h(m_1, n_1) + h(m_2, n_1), \\ h(m_1, n_1 + n_2) & = & \varphi(m_1) \otimes \psi(n_1 + n_2) \\ & = & \varphi(m_1) \otimes (\psi(n_1) + \psi(n_2)) \\ & = & \varphi(m_1) \otimes \psi(n_1) + \varphi(m_1) \otimes \psi(n_2) \\ & = & h(m_1, n_1) + h(m_1, n_2), \\ h(\alpha m_1, n_1) & = & \varphi(\alpha m_1) \otimes \psi(n_1) \\ & = & (\alpha\varphi(m_1)) \otimes \psi(n_1) \\ & = & \alpha(\varphi(m_1) \otimes \psi(n_1)) \\ & = & \alpha h(m_1, n_1), \\ h(m_1, \alpha n_1) & = & \varphi(m_1) \otimes \psi(\alpha n_1) \\ & = & \varphi(m_1) \otimes (\alpha\psi(n_1)) \\ & = & \alpha(\varphi(m_1) \otimes \psi(n_1)) \\ & = & \alpha h(m_1, n_1). \end{array}$$

Consideremos la aplicación A-bilineal natural θ de $M \times N$ en $M \otimes_A N$. Por la Propiedad Universal del Producto Tensorial, existe un morfismo $\widetilde{h} : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ de A-módulos único salvo isomorfismo tal que $h = \widetilde{h} \circ \theta$. A dicho morfismo de A-módulos lo denotamos por $\varphi \otimes \psi$.

Proposición 1.26. *Sean A un anillo y*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{26}$$

una sucesión exacta de A-módulos. Se sigue que la sucesión

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0 \tag{27}$$

de A-módulos es exacta para cualquier A-módulo N.

Demostración. Sea N un A-módulo. Dado un A-módulo P, consideremos el A-módulo $\mathrm{Hom_A}(N,P)$, como la sucesión (26) de A-módulos es exacta, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom_A}(M'', \mathrm{Hom_A}(N,P)) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom_A}(M, \mathrm{Hom_A}(N,P)) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom_A}(M', \mathrm{Hom_A}(N,P)) \tag{28}$$

de A-módulos es exacta, donde

$$\begin{aligned}
\overline{f} : \mathrm{Hom_A}(M, \mathrm{Hom_A}(N,P)) &\to \mathrm{Hom_A}(M', \mathrm{Hom_A}(N,P)) \\
\phi &\mapsto \overline{f}(\phi) : M' \to \mathrm{Hom_A}(N,P) \\
&\qquad\qquad m' \mapsto \phi(f(m')), \\
\overline{g} : \mathrm{Hom_A}(M'', \mathrm{Hom_A}(N,P)) &\to \mathrm{Hom_A}(M, \mathrm{Hom_A}(N,P)) \\
\phi'' &\mapsto \overline{g}(\phi'') : M \to \mathrm{Hom_A}(N,P) \\
&\qquad\qquad m \mapsto \phi''(g(m)).
\end{aligned}$$

Más aún, por la Proposición 1.24, existen isomorfismos de A-módulos como siguen:

$$\begin{aligned}
\psi'' : \mathrm{Hom_A}(M'' \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom_A}(M'', \mathrm{Hom_A}(N,P)) \\
h'' &\mapsto \psi(h'') : M'' \to \mathrm{Hom_A}(N,P) \\
&\qquad\qquad m'' \mapsto \psi(h'')(m'') : N \to P \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad n \mapsto h''\big(m'' \otimes n\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, P)) \\
h &\mapsto \psi(h) : M \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, P) \\
&\qquad\qquad m \mapsto \psi(h)(m) : N \to P \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad n \mapsto h\Big(m \otimes n\Big), \\
\psi' : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M' \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M', \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, P)) \\
h' &\mapsto \psi(h') : M' \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(N, P) \\
&\qquad\qquad m' \mapsto \psi(h')(m') : N \to P \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad n \mapsto h'\Big(m' \otimes n\Big).
\end{aligned}$$

Consideremos los morfismos de A-módulos siguientes:

$$\begin{aligned}
\overline{f \otimes \mathrm{Id}_N} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M' \otimes_A N, P) \\
\alpha &\mapsto \overline{f \otimes \mathrm{Id}_N}(\alpha) : M' \otimes_A N \to P \\
&\qquad \sum_{i=1}^{k} a_i(m'_i \otimes n_i) \mapsto \alpha\left(f \otimes \mathrm{Id}_N\left(\sum_{i=1}^{k} a_i(m'_i \otimes n_i)\right)\right), \\
\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M'' \otimes_A N, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M \otimes_A N, P) \\
\beta &\mapsto \overline{g \otimes \mathrm{Id}_N}(\beta) : M \otimes_A N \to P \\
&\qquad \sum_{i=1}^{k} a_i(m_i \otimes n_i) \mapsto \beta\left(g \otimes \mathrm{Id}_N\left(\sum_{i=1}^{k} a_i(m_i \otimes n_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

Mostraremos que $\psi' \circ \overline{f \otimes \mathrm{Id}_N} = \overline{f} \circ \psi$ y $\psi \circ \overline{g \otimes \mathrm{Id}_N} = \overline{g} \circ \psi''$. De nuevo, basta mostrarlo para los generadores del dominio en cada caso. En efecto, sean $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M \otimes_A N, P)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(M'' \otimes_A N, P)$, $m \in M$, $m' \in M'$ y $n \in N$.

$$\begin{aligned}
\Big(\psi'(\overline{f \otimes \mathrm{Id}_N}(\alpha))(m')\Big)(n) &= \Big(\overline{f \otimes \mathrm{Id}_N}(\alpha)\Big)(m' \otimes n) \\
&= \alpha\Big(f \otimes \mathrm{Id}_N(m' \otimes n)\Big) \\
&= \alpha\Big(f(m') \otimes n\Big) \\
&= \Big(\psi(\alpha)(f(m'))\Big)(n) \\
&= \Big(\overline{f}(\psi(\alpha))(m')\Big)(n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big(\psi(\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N}(\beta))(m)\Big)(n) &= \Big(\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N}(\beta)\Big)(m \otimes n) \\
&= \beta\Big(g \otimes \mathrm{Id}_N(m \otimes n)\Big) \\
&= \beta\Big(g(m) \otimes n\Big) \\
&= \Big(\psi''(\beta)(g(m))\Big)(n) \\
&= \Big(\overline{g}(\psi''(\beta))(m)\Big)(n).
\end{aligned}$$

Falta mostrar que la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom_A}(M'' \otimes_A N, P) \xrightarrow{\overline{g\otimes \mathrm{Id}_N}} \mathrm{Hom_A}(M \otimes_A N, P) \xrightarrow{\overline{f\otimes \mathrm{Id}_N}} \mathrm{Hom_A}(M' \otimes_A N, P)\ . \tag{29}$$

Dado que $\psi \circ \overline{g \otimes \mathrm{Id}_N} = \overline{g} \circ \psi''$, tenemos que

$$\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N} = \psi^{\ -1} \circ \overline{g} \circ \psi''.$$

Como la sucesión (28) es exacta, el morfismo $\overline{g}$ de A-módulos es inyectivo, así, $\psi^{\ -1} \circ \overline{g} \circ \psi''$ es un morfismo de A-módulos inyectivo y por lo tanto, $\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N}$ es un morfismo de A-módulos inyectivo. Más aún, como $\psi' \circ \overline{f \otimes \mathrm{Id}_N} = \overline{f} \circ \psi$, se tiene que $\overline{f \otimes \mathrm{Id}_N} = \psi'^{-1} \circ \overline{f} \circ \psi$ y así,

$$\begin{aligned}
\ker\left(\overline{f \otimes \mathrm{Id}_N}\right) &= \ker\left(\psi'^{-1} \circ \overline{f} \circ \psi\right) \\
&= \ker\left(\overline{f} \circ \psi\right) \\
&= \psi^{-1}\left(\ker \overline{f}\right) \\
&= \psi^{-1}\left(\mathrm{Im}\, \overline{g}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\psi^{-1} \circ \overline{g}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\psi^{-1} \circ \overline{g} \circ \psi''\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\overline{g \otimes \mathrm{Id}_N}\right).
\end{aligned}$$

Así, la sucesión (29) de A-módulos es exacta. Ello significa que la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$M' \otimes N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0. \qquad \square$$

En general, dado un anillo A, si una sucesión

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

de A-módulos es exacta, entonces no necesariamente se tiene que la sucesión

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N$$

de A-módulos sea una sucesión exacta. Este caso se trata con detalle en el apéndice B.

3. Algunas Propiedades de la Localización y del Producto Tensorial

A continuación, se dan propiedades del producto tensorial que formarán parte importante de las pruebas en los capítulos posteriores.

Proposición 1.27. *Sean M un módulo sobre un anillo A e I un ideal de A. Los A-módulos $\frac{A}{I} \otimes_A M$ y $\frac{M}{IM}$ son isomorfos.*

Demostración. Considérese la sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} \frac{A}{I} \longrightarrow 0,$$

donde α es la inclusión de I en A y β es la proyección de A en $\frac{A}{I}$. Por la Proposición 1.26, la sucesión

$$I \otimes_A M \xrightarrow{\alpha\otimes \mathrm{Id}_M} A \otimes_A M \xrightarrow{\beta\otimes \mathrm{Id}_M} \frac{A}{I} \otimes_A M \longrightarrow 0 \tag{30}$$

de A-módulos es exacta. Por el inciso 4 de la Proposición 1.25, existe un isomorfismo de A-módulos dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : A \otimes_A M &\to M \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (1_A \otimes m_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i, \end{aligned}$$

cuyo inverso es el morfismo de A-módulos siguiente:

$$\begin{aligned} \psi : M &\to A \otimes_A M \\ m &\mapsto 1_A \otimes m. \end{aligned}$$

Sea $\overline{\beta} = (\beta \otimes \mathrm{Id}_M) \circ \psi$. Como ψ es un isomorfismo y $\beta \otimes \mathrm{Id}_M$ es sobre, se tiene que $\overline{\beta}$ es sobre. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, los A-módulos $\dfrac{A}{I} \otimes_A M$ y $\dfrac{M}{\ker \overline{\beta}}$ son isomorfos.

Ahora se mostrará que $\ker \overline{\beta} = IM$. En efecto, sea $m \in M$. Supongamos que $m \in \ker \overline{\beta}$, ésto es, $(\beta \otimes \mathrm{Id}_M) \circ \psi(m) = 0_{\frac{A}{I} \otimes_A M}$. Es decir, $(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)(\psi(m)) = 0_{\frac{A}{I} \otimes_A M}$, o bien, $\psi(m) \in \ker(\beta \otimes \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathrm{Id}_M)$. Ello significa que existen $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$ y $m_i \in M$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$
\begin{aligned}
\psi(m) &= 1_A \otimes m \\
&= \alpha \otimes \mathrm{Id}_M \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha \otimes \mathrm{Id}_M (a_i \otimes m_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) \otimes \mathrm{Id}_M(m_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i.
\end{aligned}
$$

Es decir, existen $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$ y $m_i \in M$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$
m = \widetilde{\varphi}(\psi(m)) = \widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i \right) = \widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (1_A \otimes m_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i,
$$

o bien, $m \in IM$. Así, $\ker \overline{\beta} = IM$ y por lo tanto, $\dfrac{A}{I} \otimes_A M$ y $\dfrac{M}{IM}$ son A-módulos isomorfos. □

Dados S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo, observemos el comportamiento de los elementos del A-módulo $(S^{-1} A) \otimes_A M$. Sea $\alpha \in (S^{-1} A) \otimes_A M$, así, existen $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $s_i \in S$ y $m_i \in M$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i$. A continuación, expresaremos a α como un elemento de la forma $\dfrac{1_A}{s} \otimes m$ para ciertos $s \in S$ y $m \in M$. En efecto, consideremos $s = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_i$ y $t_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} s_j$. Así,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i t_i \frac{1_A}{s} \right) \otimes m_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1_A}{s} \otimes (a_i t_i m_i) \\
&= \frac{1_A}{s} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} a_i t_i m_i \right).
\end{aligned}$$

Con esto en mente, se realiza la prueba de la siguiente proposición:

Proposición 1.28. *Dados S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo, existe un isomorfismo de A-módulos de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} : (\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M &\rightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \\
\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \right) &\mapsto \widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i m_i}{s_i}.
\end{aligned}$$

Demostración. Tomemos la asignación

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathrm{S}^{-1} A) \times M &\rightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \\
\left(\frac{a}{s}, m \right) &\mapsto \varphi\left(\frac{a}{s}, m \right) = \frac{am}{s}
\end{aligned} \tag{31}$$

y veamos que está bien definida. En efecto, sean a_1, $a_2 \in A$, s_1, $s_2 \in S$, m_1, $m_2 \in M$ y supongamos que $\left(\frac{a_1}{s_1}, m_1 \right) = \left(\frac{a_2}{s_2}, m_2 \right)$. Así, $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ y $m_1 = m_2$. Existe $u \in S$ tal que $us_2a_1 = us_1a_2$. Con ello, $us_2a_1m_1 = us_1a_2m_1 = us_1a_2m_2$. Así, $\frac{a_1m_1}{s_1} = \frac{a_2m_2}{s_2}$ y como consecuencia, $\varphi\left(\frac{a_1}{s_1}, m_1 \right) = \frac{a_1m_1}{s_1} = \frac{a_2m_2}{s_2} = \varphi\left(\frac{a_2}{s_2}, m_2 \right)$.
A continuación, mostraremos que φ es una aplicación A-bilineal. Sean a, a_1, $a_2 \in A$, s, s_1,

$s_2 \in S$ y $m, m_1, m_2 \in M$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}, m\right) &= \varphi\left(\frac{s_2a_1+s_1a_2}{s_1s_2}, m\right)\\
&= \frac{(s_2a_1+s_1a_2)m}{s_1s_2}\\
&= \frac{s_2a_1m+s_1a_2m}{s_1s_2}\\
&= \frac{s_2a_1m}{s_1s_2}+\frac{s_1a_2m}{s_1s_2}\\
&= \frac{a_1m}{s_1}+\frac{a_2m}{s_2}\\
&= \varphi\left(\frac{a_1}{s_1}, m\right)+\varphi\left(\frac{a_2}{s_2}, m\right),\\
\varphi\left(\frac{a}{s}, m_1+m_2\right) &= \frac{a(m_1+m_2)}{s}\\
&= \frac{am_1+am_2}{s}\\
&= \frac{am_1}{s}+\frac{am_2}{s}\\
&= \varphi\left(\frac{a}{s}, m_1\right)+\varphi\left(\frac{a}{s}, m_2\right),\\
\varphi\left(a_1\frac{a}{s}, m\right) &= \varphi\left(\frac{a_1}{1_A}\times\frac{a}{s}, m\right)\\
&= \varphi\left(\frac{a_1a}{s}, m\right)\\
&= \frac{a_1am}{s}\\
&= \frac{a_1}{1_A}\cdot\frac{am}{s}\\
&= a_1\frac{am}{s}\\
&= a_1\varphi\left(\frac{a}{s}, m\right),\\
\varphi\left(\frac{a}{s}, a_1m\right) &= \frac{a(a_1m)}{s}\\
&= \frac{a_1am}{s}\\
&= \frac{a_1}{1_A}\cdot\frac{am}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_1 \frac{am}{s} \\ &= a_1 \varphi\left(\frac{a}{s}, m\right). \end{aligned}$$

Por la Propiedad Universal del Producto Tensorial, existe un único morfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : (\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M &\to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i &\mapsto \widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i\right) \end{aligned}$$

de $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos tal que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \theta$, donde θ es la aplicación A-bilineal natural de $(\mathrm{S}^{-1} A) \times M$ en $(\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M$. Se puede probar que $\widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i m_i}{s_i}$, donde $k \in \mathbb{N}$, α_i, $a_i \in A$, $s_i \in S$ y $m_i \in M$. Más aún, como $\widetilde{\varphi}\left(\frac{1_A}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s}$ para cualesquiera $m \in M$ y $s \in S$, se tiene que $\widetilde{\varphi}$ es un morfismo de A-módulos sobre. Ahora, veamos que $\widetilde{\varphi}$ es un morfismo de A-módulos inyectivo. Dado $\alpha \in (\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M$, tenemos que $\alpha = \frac{1_A}{s} \otimes m$ para ciertos $s \in S$ y $m \in M$. Supongamos que $\alpha \in \ker \widetilde{\varphi}$, ésto es, $0_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}} = \widetilde{\varphi}(\alpha) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{1_A}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s}$. Es decir, existe $u \in S$ tal que $um = 0_M$, o bien, existe $u \in S$ tal que

$$\alpha = \frac{1_A}{s} \otimes m = \frac{u}{us} \otimes m = \left(u \frac{1_A}{us}\right) \otimes m = \frac{1_A}{us} \otimes (um) = \frac{1_A}{us} \otimes 0_M = 0_{(\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M}.$$

Por lo tanto, $\ker \widetilde{\varphi} = \{0_{(\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M}\}$. En conclusión, $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo entre los A-módulos $(\mathrm{S}^{-1} A) \otimes_A M$ y $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. □

Proposición 1.29. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A, B un anillo, $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos y $S' = \varphi(S)$. Si $0_B \notin S'$, entonces S' es un subconjunto multiplicativo de B y los* S^{-1} *A-módulos* S^{-1} *B y $S'^{-1}B$ son isomorfos.*

Demostración. Mostramos primero que S' es un subconjunto multiplicativo de B. En efecto, tenemos que $0_B \notin S'$. Dado que $1_A \in S$, sabemos que $1_B = \varphi(1_A) \in S'$. Sean s' y $t' \in S'$, así, existen s y $t \in S$ tales que $\varphi(s) = s'$ y $\varphi(t) = t'$. Dado que $st \in S$, se tiene que $s't' = \varphi(s)\varphi(t) = \varphi(st) \in S'$.

Ahora, veamos que los $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}B$ y $S'^{-1}B$ son isomorfos. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : S^{-1}B & \rightarrow & S'^{-1}B \\ \dfrac{b}{s} & \mapsto & \dfrac{b}{\varphi(s)}. \end{array}$$

Afirmamos que ψ está bien definida. En efecto, sean $b_1, b_2 \in B$ y $s_1, s_2 \in S$. Supongamos que $\dfrac{b_1}{s_1} = \dfrac{b_2}{s_2}$. Existe $u \in S$ tal que

$$\begin{array}{rcl} us_2b_1 & = & us_1b_2 \\ \varphi(us_2)b_1 & = & \varphi(us_1)b_2 \\ \varphi(u)\varphi(s_2)b_1 & = & \varphi(u)\varphi(s_1)b_2. \end{array}$$

Así, existe $u' \in S'$ tal que $u'\varphi(s_2)b_1 = u'\varphi(s_1)b_2$ y con ello,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{b_1}{\varphi(s_1)} & = & \dfrac{b_2}{\varphi(s_2)}, \\ \psi\left(\dfrac{b_1}{s_1}\right) & = & \psi\left(\dfrac{b_2}{s_2}\right). \end{array}$$

Mostraremos que ψ preserva la estructura de $S^{-1}A$-módulos. Tomemos $\alpha \in A$, $s, s_1, s_2 \in S$ y $b_1, b_2 \in B$.

$$\begin{array}{rcl} \psi\left(\dfrac{b_1}{s_1} + \dfrac{b_2}{s_2}\right) & = & \psi\left(\dfrac{s_2b_1 + s_1b_2}{s_1s_2}\right) \\ & = & \dfrac{s_2b_1 + s_1b_2}{\varphi(s_1s_2)} \\ & = & \dfrac{\varphi(s_2)b_1 + \varphi(s_1)b_2}{\varphi(s_1)\varphi(s_2)} \\ & = & \dfrac{b_1}{\varphi(s_1)} + \dfrac{b_2}{\varphi(s_2)} \\ & = & \psi\left(\dfrac{b_1}{s_1}\right) + \psi\left(\dfrac{b_2}{s_2}\right), \\ \psi\left(\dfrac{\alpha}{s} \cdot \dfrac{b_1}{s_1}\right) & = & \psi\left(\dfrac{\alpha b_1}{ss_1}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha b_1}{\varphi(ss_1)} \\ &= \frac{\alpha b_1}{\varphi(s)\varphi(s_1)} \\ &= \frac{\alpha b_1}{s\varphi(s_1)} \\ &= \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{b_1}{\varphi(s_1)} \\ &= \frac{\alpha}{s} \cdot \psi\left(\frac{b_1}{s_1}\right). \end{aligned}$$

Es claro que ψ es un morfismo de A-módulos sobre. Ahora, mostraremos que ψ es un morfismo de A-módulos inyectivo. Sean $b \in B$ y $s \in S$, supongamos que $\frac{b}{s} \in \ker \psi$. Ésto es, $\psi\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{b}{\varphi(s)} = 0_{S'^{-1}B}$. Equivalentemente, existe $u' \in S'$ tal que $u'b = 0_B$, o bien, existe $u \in S$ tal que $\varphi(u)b = 0_B$. Esto significa que existe $u \in S$ tal que $ub = 0_B$. Es decir, $\frac{b}{s} = 0_{S^{-1}B}$. Con ello, $\ker \psi = \{0_{S^{-1}B}\}$, y se tiene que ψ es un morfismo de A-módulos inyectivo.

Por lo tanto, ψ es un isomorfismo entre los A-módulos $S^{-1}B$ y $S'^{-1}B$. $\square$

Proposición 1.30. *Sean A y B anillos, M un A-módulo, P un B-módulo, sea N un A-módulo (por la izquierda) y B-módulo (por la derecha) simultáneamente de forma que $a(nb) = (an)b$ para cualesquiera $a \in A$, $b \in B$ y $n \in N$ (cuando N satisface tales condiciones, N es un (A, B)-bimódulo). Se sigue que $M \otimes_A N$ es un B-módulo y $N \otimes_B P$ es un A-módulo. Más aún, $(M \otimes_A N) \otimes_B P$ y $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ son A-módulos (B-módulos) isomorfos.*

Demostración. Veamos que $N \otimes_B P$ es un A-módulo. Como antes, basta mostrarlo para los generadores de $N \otimes_B P$. En efecto, consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi : A \times (N \otimes_B P) &\to N \otimes_B P \\ \left(a, \sum_{i=1}^{k} n_i \otimes_B p_i\right) &\mapsto \varphi\left(a, \sum_{i=1}^{k} n_i \otimes_B p_i\right) = a\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \otimes_B p_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (an_i) \otimes_B p_i. \end{aligned}$$

Dados a, a_1, $a_2 \in A$, $n, n_1, n_2 \in N$ y p, p_1, $p_2 \in P$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(a,(n_1\otimes_B p_1+n_2\otimes_B p_2)) &= (an_1)\otimes_B p_1+(an_2)\otimes_B p_2\\
&= \varphi(a,n_1\otimes_B p_1)+\varphi(a,n_2\otimes_B p_2),\\
\varphi(a_1+a_2,n\otimes_B p) &= ((a_1+a_2)n)\otimes_B p\\
&= (a_1n+a_2n)\otimes_B p\\
&= (a_1n)\otimes_B p+(a_2n)\otimes_B p\\
&= \varphi(a_1,n\otimes_B p)+\varphi(a_2,n\otimes_B p),\\
\varphi(a_1a_2,n\otimes_B p) &= (a_1a_2n)\otimes_B p\\
&= (a_1(a_2n))\otimes_B p\\
&= a_1(a_2n\otimes_B p)\\
&= a_1\varphi(a_2,n\otimes_B p),\\
\varphi(1_A,n\otimes_B p) &= (1_An)\otimes_B p\\
&= n\otimes_B p.
\end{aligned}$$

Así, $N\otimes_B P$ es un A-módulo. De manera similar, se prueba que $M\otimes_A N$ es un B-módulo si se considera la aplicación

$$\begin{aligned}
\phi:(M\otimes_A N)\times B &\to M\otimes_A N\\
\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\otimes_A n_i, b\right) &\mapsto \phi\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\otimes_A n_i, b\right)=\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\otimes_A n_i\right)b=\sum_{i=1}^{k} m_i\otimes_A (n_ib).
\end{aligned}$$

Mostraremos que $(M\otimes_A N)\otimes_B P$ y $M\otimes_A (N\otimes_B P)$ son A-módulos isomorfos. En efecto, tomemos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned}
\psi: M\otimes_A (N\otimes_B P) &\to (M\otimes_A N)\otimes_B P\\
\sum_{j=1}^{l}\beta_j\left(\sum_{i_j=1}^{k_j}\alpha_{i_j}m_{i_j}\otimes_A (n_{i_j}\otimes_B p_{i_j})\right) &\mapsto \sum_{j=1}^{l}\beta_j\left(\sum_{i_j=1}^{k_j}\alpha_{i_j}(m_{i_j}\otimes_A n_{i_j})\otimes_B p_{i_j}\right),
\end{aligned}\tag{32}$$

donde $l\in\mathbb{N}$, $k_j\in\mathbb{N}$, β_j, $\alpha_{i_j}\in A$, $m_{i_j}\in M$, $n_{i_j}\in N$ y $p_{i_j}\in P$ para cualesquiera $j\in\{1,\dots,l\}$ e $i_j\in\{1,\dots,k_j\}$. Veamos que ψ es un morfismo de A-módulos. Para ello, nos limitaremos a los generadores del dominio. Sean $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, y $p, p_1, p_2 \in P$.

$$\begin{aligned}
\psi\Big((m_1 \otimes_A (n_1 \otimes_B p_1)) + (m_2 \otimes_A (n_2 \otimes_B p_2))\Big) &= ((m_1 \otimes_A n_1) \otimes_B p_1) + ((m_2 \otimes_A n_2) \otimes_B p_2) \\
&= \psi(m_1 \otimes_A (n_1 \otimes_B p_1)) + \psi(m_2 \otimes_A (n_2 \otimes_B p_2)), \\
\psi\Big(a(m \otimes_A (n \otimes_B p))\Big) &= \psi((am) \otimes_A (n \otimes_B p)) \\
&= ((am) \otimes_A n) \otimes_B p \\
&= (a(m \otimes_A n)) \otimes_B p \\
&= a((m \otimes_A n) \otimes_B p) \\
&= a\psi(m \otimes_A (n \otimes_B p)).
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi' : (M \otimes_A N) \otimes_B P &\to M \otimes_A (N \otimes_B P). \\
\sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} (m_{i_j} \otimes_A n_{i_j}) \otimes_B p_{i_j} \right) &\mapsto \sum_{j=1}^{l} \beta_j \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{i_j} m_{i_j} \otimes_A (n_{i_j} \otimes_B p_{i_j}) \right),
\end{aligned} \tag{33}$$

donde $l \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\beta_j, \alpha_{i_j} \in A$, $m_{i_j} \in M$, $n_{i_j} \in N$ y $p_{i_j} \in P$ para cualesquiera $j \in \{1, \ldots, l\}$ e $i_j \in \{1, \ldots, k_j\}$. De manera similar al caso para ψ, se prueba que ψ' es un morfismo de A-módulos. Más aún, es claro que $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{M \otimes_A (N \otimes_B P)}$ y $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{(M \otimes_A N) \otimes_B P}$. Por lo tanto, ψ es un isomorfismo de A-módulos.
Para probar que $(M \otimes_A N) \otimes_B P$ y $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ son B-módulos isomorfos, es necesario observar que ψ y ψ' son morfismos de B-módulos. La prueba de este hecho es similar a la prueba para ver que ψ y ψ' son morfismos de A-módulos. □

4. Anillos y Módulos Noetherianos

Ahora se presentan los módulos Noetherianos y algunas de sus características.

Lema 1.31. *Sea* $(\Sigma, \leq)$ *un conjunto ordenado. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Toda sucesión creciente de elementos de* Σ *es estable.*
2. *Todo subconjunto no vacío de* Σ *tiene un elemento maximal.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto Γ de Σ tal que $\Gamma \neq \emptyset$ y Γ no tiene un elemento maximal. Sea $\gamma_0 \in \Gamma$, como Γ no tiene un elemento maximal, existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma_0 \leq \gamma_1$ y $\gamma_0 \neq \gamma_1$. Nuevamente, dado que Γ no tiene un elemento maximal, existe $\gamma_2 \in \Gamma$ tal que $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$ y $\gamma_2 \notin \{\gamma_0, \gamma_1\}$. Siguiendo de esta manera, construimos una familia $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ tal que la sucesión

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \gamma_i \leq \ldots$$

no es estable. Por lo tanto, si toda sucesión de elementos en Σ es estable, entonces todo conjunto no vacío de Σ tiene un elemento máximal.
Recíprocamente, supongamos que todo subconjunto no vacío de Σ tiene un elemento maximal. Sea $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots$ una sucesión creciente de elementos de Σ. Existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que x_k es un elemento maximal de la familia $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$. Tomemos $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k < r$, así, $x_r = x_k$. Por lo tanto, la sucesión $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots$ es estable. □

Definición 9. Dado un módulo M sobre un anillo A, M es un A-módulo Noetheriano si el conjunto $\Sigma = \{N |\ N \text{ es un } A\text{-submódulo de } M\}$ satisface las condiciones del Lema anterior, donde la relación de orden $\leq$ está dada por $\subseteq$.

Proposición 1.32. *Dado un módulo M sobre un anillo A, M es un A-módulo Noetheriano si, y sólo si, todo A-submódulo de M es finitamente generado sobre A.*

Demostración. Supongamos que M es un A-módulo Noetheriano, sea N un A-submódulo de M y tomemos

$$\Gamma = \{N' |\ N' \text{ es un } A\text{-submódulo finitamente generado de } N\}.$$

Sabemos que $\{0_M\}$ es un A-submódulo finitamente generado de N, así, $\Gamma \neq \emptyset$. Por consiguiente, Γ tiene un elemento maximal $\widetilde{N}$. Sea $n \in N$ y consideremos el A-submódulo $\widetilde{N} + An$ de N. Como $\widetilde{N} \in \Gamma$, se sigue que $\widetilde{N} + An \in \Gamma$. Más aún, dado que $\widetilde{N}$ es un elemento maximal y $\widetilde{N} \subseteq \widetilde{N} + An$, se tiene que $\widetilde{N} = \widetilde{N} + An$, lo que implica que $n \in \widetilde{N}$. Con ello, $N \subseteq \widetilde{N}$. Por lo tanto, $N = \widetilde{N}$ y como consecuencia, N es un A-submódulo de M finitamente generado.
Recíprocamente, supongamos que todo A-submódulo de M es finitamente generado y tomemos una familia $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ de submódulos de M de forma que se tiene una sucesión

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_l \subseteq \ldots \tag{34}$$

de A-módulos. Consideremos al A-submódulo de M dado por $N = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} M_i$. Sabemos que N es un A-módulo finitamente generado, así, existen $r \in \mathbb{N}$ y $m_1, m_2, \ldots, m_r \in N$ tales que

$N = Am_1 + Am_2 + \ldots + Am_r$. Por otra parte, existe $i_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m_j \in M_{i_j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $s = \text{máx}\,\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, con ello, $M_{i_j} \subseteq M_s$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, r\}$ y así, m_1, $m_2 \ldots$, $m_r \in M_s$. Se sigue que $N = Am_1 + Am_2 + \ldots + Am_r \subseteq M_s \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} M_i = N$. Como consecuencia, $N = M_s$ y con ello, la sucesión de A-módulos 34 es estable. Por lo tanto, M es un A-módulo Noetheriano. □

Como resultado del Lema 1.31 y de la Proposición 1.32, tenemos la siguiente caracterización de los módulos Noetherianos:

Proposición 1.33. *Dado un módulo M sobre un anillo A, M es un A-módulo Noetheriano si satisface una de las condiciones siguientes:*

1. *Toda sucesión creciente de A-submódulos de M es estable.*
2. *Toda familia $(M_i)_{i \in I}$ de A-submódulos de M con I un conjunto no vacío, tiene un elemento maximal.*
3. *Todo A-submódulo de M es finitamente generado.* □

Teorema 1.34. *Sean A un anillo y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. M es un A-módulo Noetheriano si, y sólo si, M' y M'' son A-módulos Noetherianos.

Demostración. Sea M un A-módulo Noetheriano. Veamos que M' y M'' son A-módulos Noetherianos. En efecto, sea

$$M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_j \subseteq \ldots \tag{35}$$

una sucesión creciente de A-submódulos de M'. Se sigue que

$$\alpha(M'_0) \subseteq \alpha(M'_1) \subseteq \ldots \subseteq \alpha(M'_j) \subseteq \ldots$$

es una sucesión creciente de A-submódulos de M, que es estable. Así, existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\alpha(M'_r) = \alpha(M'_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. Como α es inyectiva, se tiene que $M'_r = M'_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. Por lo tanto, la sucesión (35) es estable y con ello, M' es un A-módulo Noetheriano. Sea

$$M''_0 \subseteq M''_1 \subseteq \ldots \subseteq M''_j \subseteq \ldots$$

una sucesión creciente de A-submódulos de M''. Se sigue que

$$\beta^{-1}(M_0'') \subseteq \beta^{-1}(M_1'') \subseteq \ldots \subseteq \beta^{-1}(M_j'') \subseteq \ldots$$

es una sucesión creciente de A-submódulos de M, que es estable. Existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\beta^{-1}(M_r'') = \beta^{-1}(M_n'')$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. Queremos probar que $M_n'' \subseteq M_r''$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $r \leq n$ y tomemos $m'' \in M_n''$. Existe $m \in \beta^{-1}(M_n'')$ tal que $m'' = \beta(m)$. Como $\beta^{-1}(M_n'') = \beta^{-1}(M_r'')$, entonces $m'' \in \beta^{-1}(M_r'')$, así, $m'' = \beta(m) \in M_r''$. Con ello, $M_n'' \subseteq M_r''$ y por lo tanto, $M_n'' = M_r''$.
Recíprocamente, supongamos que M' y M'' son A-módulos Noetherianos y consideremos una sucesión creciente de A-submódulos de M dada como sigue:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_j \subseteq \ldots.$$

Así,

$$\begin{aligned} &\alpha^{-1}(M_0) \subseteq \alpha^{-1}(M_1) \subseteq \ldots \subseteq \alpha^{-1}(M_j) \subseteq \ldots, \qquad \text{y} \\ &\beta(M_0) \quad \subseteq \beta(M_1) \quad \subseteq \ldots \subseteq \beta(M_j) \quad \subseteq \ldots \end{aligned}$$

son sucesiones crecientes de A-submódulos de M' y M'' respectivamente. Existen r_1 y $r_2 \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\alpha^{-1}(M_k) = \alpha^{-1}(M_{r_1})$ y $\beta(M_n) = \beta(M_{r_2})$ para cualesquiera k y $n \in \mathbb{N}$ con $r_1 \leq k$ y $r_2 \leq n$. Sea $r = \text{máx}\{r_1, r_2\}$. Tenemos que $\alpha^{-1}(M_n) = \alpha^{-1}(M_r)$ y $\beta(M_n) = \beta(M_r)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. Falta mostrar que $M_n \subseteq M_r$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$ con $r \leq n$. En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $r \leq n$ y tomemos $z \in M_n$. Así, $\beta(z) \in \beta(M_n) = \beta(M_r)$ y por consiguiente, existe $z_r \in M_r$ tal que $\beta(z) = \beta(z_r)$. Con ello, $\beta(z - z_r) = 0_{M''}$ y así, $z - z_r \in \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$. Por consiguiente, existe $x \in M'$ tal que $\alpha(x) = z - z_r$. Como $z \in M_n$ y $z_r \in M_r \subseteq M_n$, tenemos que $\alpha(x) = z - z_r \in M_n$. Esto implica que $x \in \alpha^{-1}(M_n) = \alpha^{-1}(M_r)$. Consecuentemente, $z - z_r = \alpha(x) \in M_r$. Como $z_r \in M_r$, entonces $z \in M_r$. Por lo tanto, $M_n \subseteq M_r$. □

Corolario 1.35. *Sean M un módulo sobre un anillo A y N un A-submódulo de M. M es un A-módulo Noetheriano si, y sólo si, N y $\dfrac{M}{N}$ son A-módulos Noetherianos.*

Demostración. El resultado se tiene del Teorema 1.34, considerando la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

de A-módulos, donde α es la inclusión de N en M y β es la proyección de M en $\dfrac{M}{N}$. □

Corolario 1.36. *Sean A un anillo, $n \in \mathbb{N}$ y M_i un A-módulo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. M_i es un A-módulo Noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ si, y sólo si, el A-módulo $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es un A-módulo Noetheriano.*

Demostración. Se probará por inducción sobre n. Si $n = 2$, consideremos la sucesión exacta de A-móduos siguiente:

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\alpha} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\beta} M_1 \longrightarrow 0,$$

donde α es la inclusión natural de M_2 en $M_1 \oplus M_2$ y β es la proyección de $M_1 \oplus M_2$ en M_1. Por el Teorema 1.34 se tiene el resultado.
Supongamos lo siguiente: Dado un A-módulo N_i para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, N_i es un A-módulo Noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si, y sólo si, $\bigoplus_{i=1}^{n-1} N_i$ es un A-módulo Noetheriano.
Sea M_i un A-módulo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos la siguiente sucesión exacta de A-módulos:

$$(36)\quad 0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0,$$

donde α es la inclusión natural de M_n en $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ y β es la proyección de $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ en $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$. Por la hipótesis de inducción, tenemos lo siguiente: M_i es un A-módulo Noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si, y sólo si, $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ y M_n son A-módulos Noetherianos. Así, por la sucesión (36) y el Teorema 1.34, M_i es un A-módulo Noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ si, y sólo si, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es un A-módulo Noetheriano. □

Definición 10. Un anillo A es Noetheriano si es Noetheriano como A-módulo.

Corolario 1.37. *Sea A un anillo. A es un anillo Noetheriano si satisface una de las siguientes condiciones.*

1. *Toda sucesión creciente de ideales de A es estable.*
2. *Toda familia no vacía de ideales de A tiene un elemento maximal.*
3. *Todo ideal de A es finitamente generado.*

Demostración. Dado que los A-submódulos de A son los ideales de A, por la Proposición 1.33, se tiene el resultado. $\square$

Proposición 1.38. *Sea M un módulo sobre un anillo Noetheriano A. M es un A-módulo finitamente generado si, y sólo si, M es un A-módulo Noetheriano.*

Demostración. Supongamos que M es un A-módulo Noetheriano. Por la Proposición 1.33, M es un A-módulo finitamente generado.
Recíprocamente, supongamos que M es un A-módulo finitamente generado. Existen $n \in \mathbb{N}$ y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que

$$M = Am_1 + \ldots + Am_n.$$

Sean $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1) \in A^n$ y consideremos el morfismo de A-módulos siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A^n & \to & M \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i. \end{array}$$

Es claro que φ sobre. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, $M = \operatorname{Im} \varphi$ y $\dfrac{A^n}{\ker \varphi}$ son A-módulos isomorfos. Como A es un anillo Noetheriano, por el Corolario 1.36, tenemos que A^n es un A-módulo Noetheriano. Por el Corolario 1.35, $\dfrac{A^n}{\ker \varphi}$ es un A-módulo Noetheriano y por lo tanto, M es un A-módulo Noetheriano. $\square$

Corolario 1.39. *Dado un ideal I de un anillo Noetheriano A, se sigue que el anillo $\dfrac{A}{I}$ es Noetheriano.*

Demostración. Como A es un anillo Noetheriano, toda sucesión creciente de ideales de A es estable. Por el Teorema de Correspondencia de Ideales, ello implica que toda sucesión creciente de ideales de $\dfrac{A}{I}$ es estable. Por lo tanto, $\dfrac{A}{I}$ es un anillo Noetheriano. $\square$

Proposición 1.40. *Sean A un anillo Noetheriano y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos sobre. Se sigue que B es un anillo Noetheriano.*

Demostración. Como φ es sobre, tenemos que $B = \operatorname{Im} \varphi$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, resulta que B y $\dfrac{A}{\ker \varphi}$ son A-módulos isomorfos. Dado que A es un anillo

Noetheriano, por el Corolario 1.35, $\dfrac{A}{\ker\varphi}$ es un A-módulo Noetheriano. Como $\ker\varphi$ es el aniquilador de B, la estructura de B como A-módulo y como $\dfrac{A}{\ker\varphi}$-módulo es la misma. Por lo tanto, B es un anillo Noetheriano. □

Proposición 1.41. *Si A es un subanillo de un anillo B tal que A es un anillo Noetheriano y B es finitamente generado sobre A, entonces B es un anillo Noetheriano.*

Demostración. Por la Proposición 1.38, se tiene que B es un A-módulo Noetheriano. Sea I un ideal de B. Por la Proposición 1.33, I es un A-módulo finitamente generado. Como A es subanillo de B, resulta que I es un B-módulo finitamente generado. Por el Corolario 1.37, B es un anillo Noetheriano. □

Proposición 1.42. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo. Si M es un A-módulo Noetheriano, entonces* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *es un* $\mathrm{S}^{-1}A$*-módulo Noetheriano.*

Demostración. Por la Proposición 1.9, los $\mathrm{S}^{-1}A$-submódulos de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ son de la forma $\mathrm{S}^{-1}N$, donde N es un A-submódulo de M. Más aún, dados N_1 y N_2 A-submódulos de M, $N_1 \subseteq N_2$, si, y sólo si, $\mathrm{S}^{-1}N_1 \subseteq \mathrm{S}^{-1}N_2$. Tomemos una sucesión de $\mathrm{S}^{-1}A$-módulos de la forma:

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_0 \subseteq \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_j \subseteq \ldots, \tag{37}$$

con M_i un A-submódulo de M para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Como i_S^M es un morfismo de A-módulos, tenemos una sucesión de A-módulos

$$i_S^{M\,-1}\left(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_0\right) \subseteq i_S^{M\,-1}\left(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_1\right) \subseteq \ldots \subseteq i_S^{M\,-1}\left(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_j\right) \subseteq \ldots,$$

lo que implica que

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_j \subseteq \ldots$$

es una sucesión de A-submódulos de M Como M es un A-módulo Noetheriano, dicha sucesión es estable. Con ello, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $M_n = M_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ con $n \leq k$, así, $\mathrm{S}^{-1}M_n = \mathrm{S}^{-1}M_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ con $n \leq k$. Como consecuencia, la sucesión (37) es estable. Por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ es un $\mathrm{S}^{-1}A$-módulo Noetheriano. □

Proposición 1.43. *Sea I un ideal de un anillo Noetheriano A. Existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sqrt{I}\right)^l \subseteq I$*

Demostración. Dado que A es un anillo Noetheriano, tenemos que $\sqrt{I}$ es un ideal finitamente generado. Existen $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha_i \in \sqrt{I}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ de manera que $\sqrt{I} = A\alpha_1 + A\alpha_2 + \ldots + A\alpha_k$. Más aún, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i^{n_i} \in I$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $l = n_1 + \ldots + n_k$, así, $\left(\sqrt{I}\right)^l$ es generado por los elementos de la forma:

$$\prod_{i=1}^{k} \alpha_i^{r_i} \tag{38}$$

con $r_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $\sum_{i=1}^{k} r_i = l$. Sea x un elemento de $\left(\sqrt{I}\right)^l$ expresado de la forma (38). Si $r_i < n_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $\sum_{i=1}^{k} r_i < l$, que es una contradicción. Como consecuencia, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $n_j \leq r_j$, y con ello, $\alpha_j^{r_j} \in I$. Así,

$$x = \alpha_j^{r_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i^{r_i} = \alpha_j^{n_j + (r_j - n_j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i^{r_i} = \alpha_j^{n_j} \left(\alpha_j^{(r_j - n_j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i^{r_i} \right) \in I.$$

En conclusión, todo generador de $\left(\sqrt{I}\right)^l$ es un elemento de I. Por lo tanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sqrt{I}\right)^l \subseteq I$. □

5. Anillos y Módulos Artinianos

Ahora se introducen los módulos Artinianos. Algunas propiedades que ellos satisfacen son análogas a las propiedades de módulos Noetherianos, tomando *sucesión decreciente* en lugar de *sucesión creciente*, elemento *minimal* en lugar de elemento *maximal* y cambiando de sentido las contenciones. Por tal razón, dichas propiedades sólo se enuncian y sus pruebas se omiten.

Lema 1.44. *Sea $(\Sigma, \leq)$ un conjunto ordenado. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Toda sucesión decreciente de elementos de Σ es estable.*
2. *Todo subconjunto no vacío de Σ tiene un elemento minimal.* □

Definición 11. Dado un módulo M sobre un anillo A, M es un A-módulo Artiniano si el conjunto $\Sigma = \{N \mid N \text{ es un } A\text{-submódulo de } M\}$ satisface las condiciones del Lema anterior, donde la relación $\leq$ está dada por $\subseteq$.

Teorema 1.45. *Sean A un anillo y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. M es un A-módulo Artiniano si, y sólo si, M' y M'' son A-módulos Artinianos. □

Corolario 1.46. *Sean M un módulo sobre un anillo A y N un A-submódulo de M. M es un A-módulo Artiniano si, y sólo si, N y $\dfrac{M}{N}$ son A-módulos Artinianos.* □

Corolario 1.47. *Sean A un anillo, $n \in \mathbb{N}$ y M_i un A-módulo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. M_i es un A-módulo Artiniano para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ si, y sólo si, el A-módulo $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es un A-módulo Artiniano.* □

Definición 12. Un anillo A es Artiniano si es Artiniano como A-módulo .

Proposición 1.48. *Sea A un anillo Artiniano. Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces M es un A-módulo Artiniano.*

Demostración. Como M es un A-módulo finitamente generado, existen $n \in \mathbb{N}$ y m_1, …, $m_n \in M$ tales que

$$M = Am_1 + \ldots + Am_n.$$

Sean $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \ldots, 1) \in A^n$ y consideremos la asignación siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi : A^n &\to M \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i. \end{aligned}$$

Es claro que φ es un morfismo de A-módulos sobre, así, $M = \operatorname{Im} \varphi$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, tenemos que M y $\dfrac{A^n}{\ker \varphi}$ son A-módulos isomorfos. Como A es un anillo Artiniano, por el Corolario 1.47, se tiene que A^n es un A-módulo Artiniano. Por el Corolario 1.46, tenemos que $\dfrac{A^n}{\ker \varphi}$ es un A-módulo Artiniano. Por lo tanto, M es un A-módulo Artiniano. □

Corolario 1.49. *Dado un ideal I de un anillo Artiniano A, se sigue que el anillo $\dfrac{A}{I}$ es Artiniano.* □

Proposición 1.50. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo. Si M es un A-módulo Artiniano, entonces* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *es un* S^{-1} *A-módulo Artiniano.* □

6. Módulos de Longitud Finita

En esta sección se introducen los módulos de longitud finita y se da una caracterización de ellos en relación con los módulos que son Noetherianos y Artinianos a la vez. Posteriormente, se muestran algunas propiedades.

Definición 13. Sea M un módulo sobre un anillo A.

1. Una cadena de A-submódulos de M es una sucesión de A-submódulos de M de la forma:

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_j \subset \ldots.$$

   La longitud de esta cadena es la cardinalidad de la familia de módulos que la componen.
2. Una serie de composición del A-módulo M es una cadena de A-submódulos de M

$$\{0_M\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M \tag{39}$$

   que es maximal $\left(\dfrac{M_{i+1}}{M_i} \text{ es un } A\text{-módulo simple para todo } i \in \{0, \ldots, n-1\}\right)$.
3. M es un A-módulo de longitud finita si M tiene una serie de composición.
4. Si M es un A-módulo de longitud finita, entonces la longitud de M en A es la longitud de una serie de composición del A-módulo M.

Sea M un módulo sobre un anillo A. Si M es un A-módulo de longitud finita, entonces escribimos $\ell_{\mathrm{A}}(M) \in \mathbb{Z}_+$. Más específicamente, cuando la longitud de M en A es $n \in \mathbb{Z}_+$, ello lo denotamos por $\ell_{\mathrm{A}}(M) = n$. Si M no es un A-módulo de longitud finita, entonces denotamos este hecho por $\ell_{\mathrm{A}}(M) = \infty$.

Proposición 1.51. *Sean M un módulo sobre un anillo A y N un A-submódulo de M. Si M es de longitud finita, entonces $\ell_{\mathrm{A}}(N) \leq \ell_{\mathrm{A}}(M)$. Más aún, cuando $N \subset M$, se tiene que $\ell_{\mathrm{A}}(N) < \ell_{\mathrm{A}}(M)$.*

Demostración. Supongamos que $\ell_{\mathrm{A}}(M) = r \in \mathbb{N}$. Así, M tiene una serie de composición de la forma:

$$\{0_M\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M.$$

Sea $N_i = N \cap M_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Se tiene una sucesión

$$\{0_M\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_r = N \tag{40}$$

de A-módulos. Tomemos $i \in \{1, \ldots, r\}$ y el morfismo de A-módulos dado por

$$\begin{aligned} \iota_i : N_i &\to M_i \\ n &\mapsto n. \end{aligned}$$

Como $\iota_i(N_i) \subseteq M_i$, se tiene el siguiente morfismo de A-módulos:

$$\begin{aligned} \bar{\iota}_i : \frac{N_{i+1}}{N_i} &\to \frac{M_{i+1}}{M_i} \\ n + N_i &\mapsto n + M_i. \end{aligned}$$

Veamos que $\bar{\iota}_i$ es inyectivo. En efecto, sea $n \in N_{i+1}$. Supongamos que $n + N_i \in \ker \bar{\iota}_i$. Ésto es, $\bar{\iota}_i(n + N_i) = M_i$. Es decir, $n + M_i = M_i$, que equivale a tener que $n \in M_i$. Como $n \in N_{i+1} \subseteq N$, ello significa que $n \in N \cap M_i = N_i$, o bien, $n + N_i = 0_{\frac{N_{i+1}}{N_i}}$.
Por consiguiente, $\dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ es isomorfo a un A-submódulo de $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$. Dado que $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ es un A-módulo simple, tenemos que $\dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ es un A-módulo isomorfo a $\left\{0_{\frac{M_{i+1}}{M_i}}\right\}$ o a $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$. Como consecuencia, de la sucesión de A-módulos 40, se puede obtener una serie de composición del A-módulo N como sigue:

$$\{0_M\} = N_0 \subset N_{j_1} \subset \ldots \subset N_{j_s} = N, \tag{41}$$

con $s \leq r$, y $j_k \in \{1, \ldots, r\}$ para todo $k \in \{1, \ldots, s\}$. Por lo tanto, $\ell_{\mathrm{A}}(N) \leq \ell_{\mathrm{A}}(M)$.
Supongamos ahora que $N \subset M$. Así, $N_r \subset M_r$, y con ello, $\dfrac{N_r}{N_{r-1}}$ es un A-módulo isomorfo a un A-submódulo propio de $\dfrac{M_r}{M_{r-1}}$. Se sigue que $\dfrac{N_r}{N_{r-1}} = \left\{0_{\frac{N_r}{N_{r-1}}}\right\}$, lo que implica que $N_r = N_{r-1}$. Por lo tanto, $s < r$ y así, $\ell_{\mathrm{A}}(N) < \ell_{\mathrm{A}}(M)$. $\square$

Proposición 1.52. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es un A-módulo de longitud finita.*
2. *M es un A-módulo Noetheriano y Artiniano.*

Demostración. Sea M un A-módulo de longitud finita.
Si M no es un A-módulo Noetheriano, entonces existe una sucesión

$$\{0_A\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_j \subseteq \ldots$$

de A-submódulos de M que no es estable. Por la Proposición 1.51,

$$\ell_{\mathrm{A}}(M_0) < \ell_{\mathrm{A}}(M_1) < \ell_{\mathrm{A}}(M_2) < \ldots < \ell_{\mathrm{A}}(M_j) < \ldots,$$

así, $n \leq \ell_{\mathrm{A}}(M_n) < \ell_{\mathrm{A}}(M)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Con ello,

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \ell_{\mathrm{A}}(M_n) \leq \lim_{n\to\infty} \ell_{\mathrm{A}}(M) = \ell_{\mathrm{A}}(M).$$

Como consecuencia, la longitud de M no es finita y se contradice nuestra hipótesis sobre M. Por lo tanto, M es un A-módulo Noetheriano.
Supongamos que M no es un A-módulo Artiniano. Existe una sucesión decreciente

$$M \supseteq M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_j \supseteq \ldots$$

de A-submódulos de M que no es estable. Así, $M_n \neq \{0_M\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Como consecuencia, M no tiene una serie de composición, lo que contradice el hecho de que M es un A-módulo de longitud finita. Por lo tanto, M es un A-módulo Artiniano.
Recíprocamente, supongamos que M es un A-módulo Noetheriano y Artiniano. Si $M = \{0_M\}$, entonces $\ell_{\mathrm{A}}(M) = 0$ y así, M es un A-módulo de longitud finita.
Si $M \neq \{0_A\}$, entonces tomemos $\Gamma = \{N|\ N$ es un A-submódulo de M y $N \neq M\}$. Dado que $\{0_M\} \in \Gamma$, se tiene que $\Gamma \neq \emptyset$. Como M es un A-módulo Noetheriano, existe un elemento M_1 maximal de Γ y así, $\dfrac{M}{M_1}$ es un A-módulo simple.
Si $M_1 = \{0_M\}$, entonces $\ell_{\mathrm{A}}(M) = 1$ y M es un A-módulo de longitud finita.
Si $M_1 \neq \{0_M\}$, entonces tomemos $\Gamma_1 = \{N|\ N$ es un A-submódulo de M_1 y $N \neq M_1\}$. De la misma forma que antes, existe un elemento M_2 maximal de Γ_1. Así, $\dfrac{M_1}{M_2}$ es un A-módulo simple y $M_2 \subset M_1 \subset M$.
Procediendo de la misma manera, dado que M es un A-módulo Artiniano, llegamos al punto en que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n+1} = M_n$ y $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$ es un A-módulo simple para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Mostraremos que $M_n = \{0_M\}$. En efecto, supongamos que $M_n \neq \{0_M\}$, se

sigue que $\Gamma_n = \{N |\ N$ es un A-submódulo de M_n y $N \neq M_n\} \neq \emptyset$. Con ello, existe un elemento M_{n+1} maximal de Γ_n, así, $M_{n+1} \neq M_n$, lo que contradice el hecho de que $M_{n+1} = M_n$. Por consiguiente,

$$\{0_M\} = M_n \subset M_{n-1} \subset M_{n-2} \subset \ldots \subset M_1 \subset M$$

es una serie de composición del A-módulo M y por lo tanto, M es un A-módulo de longitud finita. □

Proposición 1.53. *Sean A un anillo y* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de A-módulos. M es un A-módulo de longitud finita si, y sólo si, L y N son A-módulos de longitud finita. Más aún, si M es un A-módulo de longitud finita, entonces* $\ell_{\mathrm{A}}(M) = \ell_{\mathrm{A}}(L) + \ell_{\mathrm{A}}(N)$.

Demostración. Supongamos que M es un A-módulo de longitud finita. Por la Proposición 1.52, esto significa que M es un A-módulo Artiniano y Noetheriano. Es decir, L y N son A-módulos Artinianos y Noetherianos (por las Proposiciones 1.34 y 1.45). Por la Proposición 1.52, ello es equivalente a que L y N sean de longitud finita.
Ahora, supongamos que $\ell_{\mathrm{A}}(L) = r$ y $\ell_{\mathrm{A}}(N) = t$ con r y $t \in \mathbb{Z}_+$. Con ello, existen series de composición

$$\begin{aligned} \{0_L\} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_r &= L, \quad \text{y} \\ \{0_N\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_t &= N \end{aligned}$$

de los A-módulos L y N respectivamente. Como α es un morfismo de A-módulos inyectivo, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(\{0_L\}) = \alpha(L_0) \subset \alpha(L_1) \subset \ldots \subset \alpha(L_r) &= \alpha(L) \\ &= \ker\beta \\ &= \beta^{-1}(\{0_N\}) \\ &= \beta^{-1}(N_0) \\ &\quad \subset \beta^{-1}(N_1) \subset \ldots \subset \beta^{-1}(N_t) = \beta^{-1}(N), \end{aligned}$$

y se tiene una cadena

$$\{0_M\} = \alpha(L_0) \subset \alpha(L_1) \subset \ldots \subset \alpha(L_r) \subset \beta^{-1}(N_1) \subset \ldots \subset \beta^{-1}(N_t) = M \tag{42}$$

de A-submódulos de M. Sea $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Nuevamente, como α es un morfismo de A-módulos inyectivo, se tiene que $\dfrac{\alpha(L_{i+1})}{\alpha(L_i)}$ es un A-módulo isomorfo a $\dfrac{L_{i+1}}{L_i}$, que es un A-módulo simple. Así, $\dfrac{\alpha(L_{i+1})}{\alpha(L_i)}$ es un A-módulo simple. Dado $j \in \{0, \ldots, t-1\}$, tenemos que $\dfrac{\beta^{-1}(N_{j+1})}{\beta^{-1}(N_j)}$ es un A-módulo simple $\left(\text{y con ello, } \dfrac{\beta^{-1}(N_1)}{\alpha(L_r)} = \dfrac{\beta^{-1}(N_1)}{\beta^{-1}(N_0)}\right)$ es un A-módulo simple. Por lo tanto, la cadena 42 es una serie de composición del A-módulo M, y así, $\ell_{\mathrm{A}}(M) = r + t = \ell_{\mathrm{A}}(L) + \ell_{\mathrm{A}}(N)$. □

Corolario 1.54. *Sea M un módulo sobre un anillo A tal que M es un A-módulo de longitud finita y sea N un A-submódulo de M. Se sigue que*

$$\ell_{\mathrm{A}}(M) = \ell_{\mathrm{A}}(N) + \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{N}\right).$$

Demostración. Tenemos la sucesión exacta de A-módulos siguiente:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ \alpha\ } M \xrightarrow{\ \beta\ } \frac{M}{N} \longrightarrow 0,$$

donde α es la inclusión de N en M y β es la proyección de M en $\dfrac{M}{N}$. Por la Proposición 1.53, tenemos que $\ell_{\mathrm{A}}(M) = \ell_{\mathrm{A}}(N) + \ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{N}\right)$. □

Corolario 1.55. *Sean L y N módulos sobre un anillo A. El A-módulo $L \oplus N$ es de longitud finita si, y sólo si, L y N son A-módulos de longitud finita. Más aún,*

$$\ell_{\mathrm{A}}(L \oplus N) = \ell_{\mathrm{A}}(L) + \ell_{\mathrm{A}}(N).$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta de A-módulos dada por

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ \varphi\ } L \oplus N \xrightarrow{\ \psi\ } N \longrightarrow 0$$

$$l \longmapsto (l, 0)$$

$$(l, n) \longmapsto n.$$

Por la Proposición 1.53, se tiene el resultado. □

Corolario 1.56. *Sean A un anillo, $k \in \mathbb{Z}_+$, $(M_i)_{i=0}^{k}$ una familia de A-módulos y*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_{k-2}} M_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} M_k \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Se tiene que

$$\ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-2}) - \ldots + (-1)^k \, \ell_{\mathrm{A}}(M_0) = 0.$$

Demostración. Tenemos que $\varphi_{i-1}(M_{i-1}) = \ker \varphi_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo y por el Corolario 1.54, $\ell_{\mathrm{A}}(M_k) = \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) - \ell_{\mathrm{A}}(\ker \varphi_{k-1})$, con ello,

$$\begin{aligned}
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}(\ker \varphi_{k-1}) \\
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}(\varphi_{k-2}(M_{k-2})) \\
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M_{k-2}}{\ker \varphi_{k-2}}\right) \\
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + (\ell_{\mathrm{A}}(M_{k-2}) - \ell(\ker \varphi_{k-2})) \\
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-2}) - \ell(\ker \varphi_{k-2}) \\
&\vdots \\
0 &= \ell_{\mathrm{A}}(M_k) - \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-1}) + \ell_{\mathrm{A}}(M_{k-2}) - \ldots + (-1)^{k-1} \, \ell_{\mathrm{A}}(M_1) + (-1)^k \, \ell_{\mathrm{A}}(M_0). \quad \square
\end{aligned}$$

7. Anillos y Módulos Graduados

En esta sección se introducen los anillos y módulos graduados, que se utilizarán en la sección 5 del capítulo 3.

Definición 14. Un anillo $(A, +, \times)$ es graduado si existe una familia $\big((A_n, +)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos de $(A, +)$ tal que:

1. Existe un isomorfismo $\varphi : A \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ de grupos, y
2. $A_r A_s \subseteq A_{r+s}$ para cualesquiera r y $s \in \mathbb{Z}$.

Notación 15. En términos de la definición 14, decimos que $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ es una graduación de A o simplemente, que

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$$

es un anillo graduado.

Supongamos que $\varphi : A \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ es un isomorfismo de grupos como en la Definición 14 y sea $k \in \mathbb{Z}$. Un elemento x de A es homogéneo de grado k si $\varphi(x) \in A_k$, ello lo denotamos simplemente por $x \in A_k$. Escribiremos $y = \varphi(y)$ para todo $y \in A$.

Sea $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ un anillo graduado. Dado que A es una suma directa de grupos abelianos, resulta que todo $a \in A$ tiene una expresión única de la forma $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $a_i \in A_{j_i}$ con $j_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Obsérvese que el único elemento de A que tiene más de un grado es 0_A. Más aún, 0_A tiene todos los grados, pues $0_A \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En el contexto de este trabajo, consideraremos un caso particular de graduaciones de anillos, tomaremos anillos graduados de la forma $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ con $A_k = \{0_A\}$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$. Siendo así, la Notación 15 se cambiará por

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n.$$

Proposición 1.57. *Dado un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$, se tiene que A_0 es un subanillo de A.*

Demostración. Sabemos que A_0 es un subgrupo de A y que $A_0A_0 \subseteq A_0$. Falta mostrar que $1_A \in A_0$. En efecto, existen $k \in \mathbb{Z}_+$ y $\lambda_i \in A_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$ tales que

$$1_A = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\lambda_0 \in A_0, \\ \lambda_1 &= (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\lambda_1 \in A_1, \\ &\vdots \\ \lambda_k &= (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\lambda_k \in A_k, \end{aligned} \tag{43}$$

y con ello,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_0\lambda_0 + \lambda_1\lambda_0 + \ldots + \lambda_k\lambda_0 \in A_0, \\ \lambda_1 &= \lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_1 + \ldots + \lambda_k\lambda_1 \in A_1, \\ &\vdots \\ \lambda_k &= \lambda_0\lambda_k + \lambda_1\lambda_k + \ldots + \lambda_k\lambda_k \in A_k. \end{aligned} \tag{44}$$

Sea $j \in \{0, \ldots, k\}$. Tenemos que $\lambda_i\lambda_j \in A_{i+j}$ y $\lambda_i\lambda_j \in A_j$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se sigue que $\lambda_i\lambda_j = 0_A$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{0, \ldots, k\}$. Tomando las igualdades en (43) y (44), se tiene que

$$\begin{aligned}
1_A &= \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \\
&= (\lambda_0\lambda_0 + \lambda_1\lambda_0 + \ldots + \lambda_k\lambda_0) + (\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_1 + \ldots + \lambda_k\lambda_1) + \ldots \\
&\quad +(\lambda_0\lambda_k + \lambda_1\lambda_k + \ldots + \lambda_k\lambda_k) \\
&= (\lambda_0\lambda_0 + \lambda_0\lambda_1 + \ldots + \lambda_0\lambda_k) \\
&= \lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k) \\
&= \lambda_0 1_A \\
&= \lambda_0 \in A_0.
\end{aligned}$$

Con ello, $1_A \in A_0$ y por lo tanto, A_0 es un subanillo de A. □

Notación 16. Sean $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ variables de un anillo A y $d \in \mathbb{Z}_+$. Los polinomios homogéneos de grado d del anillo $A[x_1, \ldots, x_r]$ se denotarán por

$$A[x_1, \ldots, x_r]_d = \left\{ \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbb{Z}_+^r \\ i_1+\ldots+i_r=d}} \lambda_{(i_1,\ldots,i_r)}(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_r^{i_r}) \,\middle|\, \lambda_{(i_1,\ldots,i_r)} \in A \right\}.$$

Ejemplo 1.58. Sea A un anillo.

- A es un anillo graduado con la graduación $A = A_0$. Esta graduación es llamada la graduación trivial de A.
- Sean $r \in \mathbb{Z}_+$ y $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ variables de A. El anillo $A[x_1, \ldots, x_r]$ es graduado con la graduación
$$A[x_1, \ldots, x_r] = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} A[x_1, \ldots, x_r]_d.$$
A dicha graduación le llamamos la *graduación estándar* del anillo de polinomios de r variables con coeficientes en A.

A continuación, definimos a los módulos graduados.

Definición 17. Sea $(M, +, \cdot)$ un módulo sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$. M es un A-módulo graduado si existe una familia de subgrupos $((M_n, +))_{n\in\mathbb{Z}}$ de $(M, +)$ tal que:

1. Existe un isomorfismo $\psi : M \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} M_n$ de grupos, y
2. $A_r M_s \subseteq M_{r+s}$ para cualesquiera r y $s \in \mathbb{Z}$.

Notación 18. En términos de la definición 17, decimos que $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es una graduación de M o simplemente, que

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

es un A-módulo graduado.

Supongamos que $\psi : M \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es un isomorfismo de grupos como en la Definición 17 y sea $k \in \mathbb{Z}$. Un elemento m de M es homogéneo de grado k si $\psi(m) \in M_k$, ello lo denotamos simplemente por $m \in M_k$. Escribimos $m' = \psi(m')$ para todo $m' \in M$.

Sea $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$. Dado que M es una suma directa de grupos abelianos, tenemos que todo $m \in M$ tiene una expresión única de la forma $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $m_i \in M_{j_i}$ con $j_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Obsérvese que el único elemento de M que tiene más de un grado es 0_M. Más aún, 0_M tiene todos los grados, pues $0_M \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En adelante, consideraremos un caso particular de módulos graduados. Estos son módulos graduados sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ de la forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ con $M_k = \{0_M\}$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$ y así, la notación 18 se cambiará por

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} M_n.$$

Proposición 1.59. *Sea $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} M_n$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$. M_n es un A_0-módulo para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Por la Proposición 1.57, A_0 es un anillo. Ahora, por la definición 17, $A_0 M_n \subseteq M_n$. Por lo tanto, M_n es un A_0-módulo. □

Ejemplo 1.60. Dado un campo k, observemos lo siguiente:

1. Sea x una variable de k. El anillo

$$\begin{aligned} A &= k[x] \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} k[x]_d \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} kx^d \end{aligned}$$

   es un módulo graduado sobre el anillo graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} k[x]_d$.
2. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ un conjunto de variables de k. El anillo

$$\begin{aligned} A &= k[x_1, x_2, \ldots, x_s] \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} k[x_1, x_2, \ldots, x_s]_d \end{aligned}$$

   es un módulo graduado sobre el anillo graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} k[x_1, x_2, \ldots, x_s]_d$.

Capítulo 2

Ideales Primos y Primarios

En este capítulo se dará la definición del *espectro* de un anillo y se enunciarán algunas propiedades, se introduce el *espacio de Zariski* de un anillo y posteriormente, se definirán los *ideales primarios* de un anillo. Estos conceptos son la base de los resultados sobre dimensión tratados en el capítulo 3.

1. Espectro de un Anillo

Se asumirá el conocimiento previo de algunas propiedades del Capítulo 1 de [**Ati**] para el desarrollo de esta sección. A continuación, se definen los *ideales primos* y el espectro de un anillo.

Definición 19. Sea A un anillo.

1. Un ideal $\mathfrak{p}$ de A es primo si:
   a) $\mathfrak{p} \neq A$, y
   b) para cualesquiera a y $b \in A$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$, se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.
2. El espectro de A es el conjunto de los ideales primos de A y se le denota por $\mathrm{Spec}(A)$.

En adelante, dado un anillo A, al conjunto de los ideales maximales de A se le denotará por $Max(A)$.

Proposición 2.1. *Sea A un anillo.*

1. *Dado un ideal* $\mathfrak{p}$ *de A,* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *si, y sólo si,* $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ *es un dominio entero.*
2. *Dado un ideal* $\mathfrak{m}$ *de A,* $\mathfrak{m} \in Max(A)$ *si, y sólo si,* $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ *es un campo.*
3. $Max(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$.
4. *Si B es un anillo,* $\varphi : A \to B$ *es un homomorfismo de anillos y* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$*, entonces* $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A)$.

Demostración.

1. Supongamos que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Sean a y $b \in A$ tales que $(a+\mathfrak{p})(b+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Así, $ab \in \mathfrak{p}$ y con ello, $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Ello implica que $(a+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$ o $(b+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Por lo tanto, $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un dominio entero.

   Recíprocamente, supongamos que $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un dominio entero, así, $\mathfrak{p} \neq A$. Sean a y $b \in A$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$. Tenemos que $(a+\mathfrak{p})(b+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$, con ello, $(a+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$ o $(b+\mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Esto implica que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$.
2. Supongamos que $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ no es un campo. Ésto es, existe un ideal I de A tal que $\left\{0_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}\right\} \subset \dfrac{I}{\mathfrak{m}} \subset \dfrac{A}{\mathfrak{m}}$, o bien, existe un ideal I de A tal que $\mathfrak{m} \subset I \subset A$. Es decir, $\mathfrak{m} \notin Max(A)$.
3. Sea $\mathfrak{m} \in Max(A)$. Por el inciso 2, tenemos que $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ es un campo. Con ello, $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ es un dominio entero y así, por el inciso 1, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$.
4. Dado que $\mathfrak{q} \neq B$, se tiene que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \neq A$. Sean a y $b \in A$ tales que $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Así, $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, se tiene que $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$ o $\varphi(b) \in \mathfrak{q}$. Por lo tanto $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ o $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. □

Corolario 2.2. *Sea A un anillo. El ideal $\{0_A\}$ de A es primo si, y sólo si, A es un dominio entero.*

Demostración. Por el inciso 1 de la Proposición 2.1, se tiene el resultado. □

Proposición 2.3. *Sean $n \in \mathbb{N}$ e $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Si $I_1 I_2 \cdots I_n \subseteq \mathfrak{p}$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_j \subseteq \mathfrak{p}$.*

Demostración. Basta probarlo para el caso $n = 2$. Así, supongamos que $I_1 I_2 \subseteq \mathfrak{p}$ e I_2 no está contenido en $\mathfrak{p}$. Existe $x \in I_2 \setminus \mathfrak{p}$. Tomando $z \in I_1$, es claro que $zx \in I_1 I_2$, así $xz \in \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ y $x \notin \mathfrak{p}$, tenemos que $z \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$. □

Proposición 2.4. *Sea A un anillo.*

1. *Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(A)$ e I un ideal de A. Si $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I \subseteq \mathfrak{p}_i$.*
2. *Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de A y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Si $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.*

3. *Sean* I_1, …, I_n *ideales de* A *y* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. *Si* $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \mathfrak{p}$, *entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $I_i = \mathfrak{p}$.

Demostración.

1. Se mostrará por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

   Si $n = 1$, el resultado es claro.

   Supongamos que para cualesquiera J ideal de A y $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{n-1} \in \operatorname{Spec}(A)$ se satisface lo siguiente: Si $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathfrak{q}_i$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $J \subseteq \mathfrak{q}_i$.

   Sean I un ideal de A y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(A)$ tales que I no está contenido en $\mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Falta mostrar que I no está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. En efecto, dado $j \in \{1, \ldots, n\}$, en particular tenemos que I no está contenido en $\mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Por hipótesis de inducción, I no está contenido en $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{p}_i$, así, existe $x_j \in I$ tal que $x_j \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Más aún, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \notin \mathfrak{p}_i. \tag{45}$$

   Observemos los siguientes casos:

   - Si $x_j \notin \mathfrak{p}_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x_j \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y con ello, $x_j \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.
   - Supongamos que $x_i \in \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos

$$y = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j,$$

     que es un elemento de I. Si $y \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \mathfrak{p}_k$. Tomemos la expresión de y dada por

$$y = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j.$$

     Como $x_k \in \mathfrak{p}_k$, se tiene que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \in \mathfrak{p}_k$ y así,

$$y - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} x_j \in \mathfrak{p}_k,$$

lo que contradice la ecuación (45), probándose que $y \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

En cualquiera de los dos casos, se tiene que I no está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

2. Supongamos que I_i no está contenido en $\mathfrak{p}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Veamos que $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ no está contenido en $\mathfrak{p}$. En efecto, existe $x_i \in I_i$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Tomando $x = \prod_{i=1}^{n} x_i$, tenemos que $x \in \prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ y $x \notin \mathfrak{p}$, de manera que $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ no está contenido en $\mathfrak{p}$.
3. Tenemos que $\mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$. Así, $\mathfrak{p} \subseteq I_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ y por el inciso 2, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $I_i = \mathfrak{p}$. □

En cuanto a anillos Artinianos, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.5. *Dado un anillo Artiniano A, se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto de ideales maximales de A es finito.*
2. *Los ideales primos de A son los ideales maximales de A.*
3. *El conjunto de ideales primos de A es finito.*
4. *El radical de Jacobson de A es el ideal* $\mathrm{Nil}(A)$*.*
5. $\mathrm{Nil}(A)$ *es un ideal nilpotente de A.*

Demostración.

1. Consideremos a la siguiente familia de ideales de A:

$$\Sigma = \left\{ \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_r | \ r \in \mathbb{N} \text{ y } \mathfrak{m}_j \in Max(A) \text{ para todo } j \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

Dado que $Max(A) \neq \emptyset$, tenemos que $\Sigma \neq \emptyset$. Como A es un anillo Artiniano, existe un elemento minimal $\mathfrak{n}$ de Σ. Sean $l \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_l \in Max(A)$ tales que

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_l.$$

Para ver que $Max(A)$ es un conjunto finito, mostraremos que $\mathfrak{m} \in \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_l\}$ para cualquier $\mathfrak{m} \in Max(A)$. En efecto, sea $\mathfrak{m} \in Max(A)$, así, $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} \in \Sigma$ y $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$. Como $\mathfrak{n}$ es un elemento minimal de Σ, se tiene que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$, así,

$$\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_l = \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m}.$$

Por el inciso 2 de la Proposición 2.4, existe $s \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\mathfrak{m}_s \subseteq \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{m}_s \in Max(A)$ y $\mathfrak{m} \neq A$, tenemos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_s$. Así, $Max(A) \subseteq \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_l\}$. Por lo tanto, $Max(A)$ es un conjunto finito no vacío.

2. Por el inciso 3 de la Proposición 2.1, tenemos que $Max(A) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$. Ahora mostraremos que $\operatorname{Spec}(A) \subseteq Max(A)$. En efecto, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, basta probar que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es un campo. Tomemos $a \in A$ tal que $a + \mathfrak{p} \neq 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$ y consideremos la sucesión decreciente de ideales de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ siguiente:

$$\frac{A}{\mathfrak{p}}(a+\mathfrak{p}) \supseteq \frac{A}{\mathfrak{p}}(a+\mathfrak{p})^2 \supseteq \ldots \supseteq \frac{A}{\mathfrak{p}}(a+\mathfrak{p})^j \supseteq \ldots.$$

Como A es un anillo Artiniano, por el Corolario 1.49, se tiene que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es un anillo Artiniano. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{A}{\mathfrak{p}}(a+\mathfrak{p})^k = \frac{A}{\mathfrak{p}}(a+\mathfrak{p})^{k+1}.$$

En particular, existe $\lambda \in A$ tal que

$$(a+\mathfrak{p})^k = (\lambda+\mathfrak{p})(a+\mathfrak{p})^{k+1} = (\lambda+\mathfrak{p})(a+\mathfrak{p})(a+\mathfrak{p})^k. \tag{46}$$

Dado que $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es un dominio entero y $a + \mathfrak{p} \neq 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$, por la ecuación (46), tenemos la siguiente igualdad:

$$(1_A + \mathfrak{p}) = (\lambda+\mathfrak{p})(a+\mathfrak{p}).$$

Como consecuencia, $\lambda + \mathfrak{p}$ es el inverso multiplicativo de $a + \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es un campo.

3. Por el inciso 1, el conjunto $Max(A)$ es finito, por el inciso 2, $\operatorname{Spec}(A) = Max(A)$. Se sigue que el conjunto $\operatorname{Spec}(A)$ es finito.
4. Por el inciso 2, el radical de Jacobson de A es

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\in Max(A)} \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(A)} \mathfrak{p}.$$

5. Sea $I = \operatorname{Nil}(A)$ y consideremos la siguiente sucesión decreciente de ideales de A:

$$I \supseteq I^2 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq \ldots.$$

Como A es un anillo Artiniano, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $I^s = I^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $s \leq n$. Supongamos que I no es nilpotente, lo que implica que $I^s \neq \{0_A\}$. Sea

$$\Gamma = \{J \mid J \text{ es un ideal de } A \text{ y } JI^s \neq \{0_A\}\}.$$

Tenemos que $I \in \Gamma$ y con ello, $\Gamma \neq \emptyset$. Como A es un anillo Artiniano, existe un elemento minimal J' de Γ. Por consiguiente, existe $z \in J'$ tal que $zI^s \neq \{0_A\}$. Más aún, $(zI^s)I^s = zI^{2s} = zI^s \neq \{0_A\}$, con ello, $zI^s \in \Gamma$. Sabemos que $zI^s \subseteq J'$ y que J' es un elemento minimal de Γ. Como consecuencia, $J' = zI^s$, así, existe $\alpha \in I^s$ tal que $z = z\alpha$. Veamos que $z = z\alpha^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por inducción sobre k: Si $k = 1$, entonces el resultado ya se tiene. Supongamos que $z = z\alpha^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Así, $z\alpha^{k+1} = (z\alpha^k)\alpha = z\alpha = z$. Como $\alpha \in I^s \subseteq I = \mathrm{Nil}(A)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^r = 0_A$. Sea $u \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq u$. Con ello,

$$\alpha^u = \alpha^{r+(u-r)} = \alpha^r \alpha^{u-r} = (0_A)\alpha^{u-r} = 0_A.$$

Por consiguiente, $z = z\alpha^u = 0_A$, lo que contradice la elección de z. Por lo tanto, I es un ideal nilpotente de A. □

Proposición 2.6. *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. Se tiene que*

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{-1} A) = \{\mathrm{S}^{-1} I \mid I \in \mathrm{Spec}(A) \text{ y } S \cap I = \emptyset\}.$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{Spec}\left(\mathrm{S}^{-1} A\right) \subseteq \{\mathrm{S}^{-1} I \mid I \in \mathrm{Spec}(A) \text{ y } S \cap I = \emptyset\}$. Sea $J \in \mathrm{Spec}\left(\mathrm{S}^{-1} A\right)$. Por el Corolario 1.10, existe un ideal I de A tal que $J = \mathrm{S}^{-1} I$ e $I = \left(i_S^A\right)^{-1}(J)$ (véase la prueba de la Proposición 1.9). Como i_S^A es un homomorfismo de anillos, por el inciso 4 de la Proposición 2.1, se tiene que $I \in \mathrm{Spec}(A)$.
Falta mostrar que $S \cap I = \emptyset$. En efecto, supongamos que $S \cap I \neq \emptyset$ y tomemos $t \in S \cap I$. Así, $\dfrac{t}{1_A} \in \mathcal{U}(\mathrm{S}^{-1} A)$ y $\dfrac{t}{1_A} \in \mathrm{S}^{-1} I$. Con ello, $J = \mathrm{S}^{-1} I = \mathrm{S}^{-1} A$, lo que contradice que $J \in \mathrm{Spec}\left(\mathrm{S}^{-1} A\right)$. Por lo tanto, $S \cap I = \emptyset$.
Ahora probaremos que $\{\mathrm{S}^{-1} I \mid I \in \mathrm{Spec}(A) \text{ y } S \cap I = \emptyset\} \subseteq \mathrm{Spec}\left(\mathrm{S}^{-1} A\right)$. En efecto, sea I un ideal de A tal que $I \in \mathrm{Spec}(A)$ y $S \cap I = \emptyset$. Supongamos que $\dfrac{1_A}{1_A} \in \mathrm{S}^{-1} I$, así, existen $\alpha \in I$ y $s \in S$ tales que $\dfrac{1_A}{1_A} = \dfrac{\alpha}{s}$. Con ello, existe $u \in S$ tal que $us = u\alpha$, esto implica que $us \in S \cap I$, que es una cotradicción con nuestra hipótesis, por consiguiente, $\dfrac{1_A}{1_A} \notin \mathrm{S}^{-1} I$, y como consecuencia, $\mathrm{S}^{-1} I \neq \mathrm{S}^{-1} A$.
Sean $a_1, a_2 \in A$ y $s_1, s_2 \in S$, supongamos que $\dfrac{a_1}{s_1} \times \dfrac{a_2}{s_2} = \dfrac{a_1 a_2}{s_1 s_2} = \dfrac{a}{s}$ para algunos $a \in I$ y $s \in S$. Existe $u \in S$ tal que $usa_1 a_2 = us_1 s_2 a$. Como I es un ideal de A y $a \in I$, tenemos que $usa_1 a_2 = (us_1 s_2)a \in I$. Más aún, dado que $I \in \mathrm{Spec}(A)$, tenemos que $us \in I$ o $a_1 a_2 \in I$.

Sabemos que $us \in S$ y $S \cap I = \emptyset$, con ello, $a_1a_2 \in I$. Como consecuencia, $a_1 \in I$ o $a_2 \in I$, lo que implica que $\dfrac{a_1}{s_1} \in \mathrm{S}^{-1}\, I$ o $\dfrac{a_2}{s_2} \in \mathrm{S}^{-1}\, I$. Por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1}\, I \in \mathrm{Spec}\left(\mathrm{S}^{-1}\, A\right)$. $\square$

Proposición 2.7. *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A, se tiene que $A \backslash \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativo de A.*

Demostración. Sea $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal propio de A, tenemos que $0_A \in \mathfrak{p}$ y $1_A \notin \mathfrak{p}$, así, $0_A \notin S$ y $1_A \in S$. Dados a y $b \in S$, se tiene que $a \notin \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, tenemos que $ab \notin \mathfrak{p}$ y con ello, $ab \in S$. $\square$

Notación 20. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A. Dados I un ideal de A, M un A-módulo y tomando $S = A \setminus \mathfrak{p}$, se adoptarán las expresiones siguientes:

1. $A_\mathfrak{p} = \mathrm{S}^{-1}\, A$,
2. $I_\mathfrak{p} = \mathrm{S}^{-1}\, I$, y
3. $M_\mathfrak{p} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$.

Corolario 2.8. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A.*

$$\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}_\mathfrak{p} |\ \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)\ y\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Demostración. Se tiene el resultado por la Proposición 2.6. $\square$

Proposición 2.9. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo A, $\mathfrak{q}_1$ y $\mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}(A)$ tales que $q_1 \cap S = \emptyset$ y $q_2 \cap S = \emptyset$. Se tiene que $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ si, y sólo si, $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$. Más aún, $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ si, y sólo si, $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subset \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$, sean $a \in \mathfrak{q}_1$ y $s \in S$. Se tiene que $a \in \mathfrak{q}_2$ y $s \in S$. Así, $\dfrac{a}{s} \in \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$. Por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$. Sea $a \in \mathfrak{q}_1$, así, $\dfrac{a}{1_A} \in \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$. Tomemos $b \in \mathfrak{q}_2$ y $t \in S$ tales que $\dfrac{a}{1_A} = \dfrac{b}{t}$. Así, existe $u \in S$ tal que $uta = ub \in \mathfrak{q}_2$. Como $\mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}(A)$, tenemos que $ut \in \mathfrak{q}_2$ o $a \in \mathfrak{q}_2$. Sabemos que $ut \in S$ y que $q_2 \cap S = \emptyset$, con ello, $ut \notin \mathfrak{q}_2$. Por lo tanto, $a \in \mathfrak{q}_2$ y como consecuencia, $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.
Ahora, de los dos párrafos anteriores, se tiene que $\mathfrak{q}_2 \nsubseteq \mathfrak{q}_1$ si, y sólo si, $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2 \nsubseteq \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1$, por lo tanto, $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ si, y sólo si, $\mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_1 \subset \mathrm{S}^{-1}\, \mathfrak{q}_2$. $\square$

Corolario 2.10. *Sean $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}'$ ideales primos de un anillo A. Se tiene que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}$ si, y sólo si, $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'_\mathfrak{p}$. Más aún, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}$ si, y sólo si, $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}'_\mathfrak{p}$.*

Demostración. Tomando $S = A \setminus \mathfrak{p}$ en la Proposición 2.9, se tiene el resultado. □

Corolario 2.11. *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A, $Max(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}_\mathfrak{p}\}$.*

Demostración. Como $Max(A_\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})$, por los Corolarios 2.8 y 2.10, se tiene el resultado. □

2. Espacio de Zariski de un Anillo

En esta sección, veremos que al conjunto de ideales primos de un anillo se le puede asignar una topología: la *Topología de Zariski*.

Notación 21. Dado un ideal I de un anillo A, se tomará la notación siguiente:

$$\mathrm{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) |\ I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Lema 2.12. *Dado un ideal I de un anillo A, se tiene que* $\mathrm{V}(I) = V\left(\sqrt{I}\right)$.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in V\left(\sqrt{I}\right)$. Así, $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$, con ello, $I \subseteq \mathfrak{p}$, lo que implica que $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$. Por lo tanto, $V\left(\sqrt{I}\right) \subseteq \mathrm{V}(I)$. Por otra parte, sea $\mathfrak{p}' \in \mathrm{V}(I)$, así, $I \subseteq \mathfrak{p}'$, con ello, $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{p}'$. Se sigue que $\mathrm{V}(I) \subseteq V\left(\sqrt{I}\right)$. □

Proposición 2.13. *Sea A un anillo.*

1. $V(\{0_A\}) = \mathrm{Spec}(A)$ *y* $V(A) = \emptyset$.
2. *Dados un conjunto $\Lambda \neq \emptyset$ y una familia $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de ideales de A, se tiene que*

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda).$$

3. $V(I \cap J) = V(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$ *para cualesquiera I y J ideales de A.*

Demostración.

1. $V(\{0_A\}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) |\ \{0_A\} \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}(A)$. $V(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) |\ A \subseteq \mathfrak{p}\} = \emptyset$.

2. En efecto,

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) &= \left\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)\middle|\ \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq \mathfrak{p}\right\} \\ &= \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ I_\lambda \subseteq \mathfrak{p} \text{ para todo } \lambda\in\Lambda\} \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ I_\lambda \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda). \end{aligned}$$

3. Sean I y J ideales de A. Por el Lema 2.12,

$$\begin{aligned} V(I\cap J) &= V\left(\sqrt{I\cap J}\right) \\ &= V\left(\sqrt{IJ}\right) \\ &= V(IJ) \\ &= \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ IJ\subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ I\subseteq \mathfrak{p} \text{ o } J\subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ I\subseteq \mathfrak{p}\}\cup\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) |\ J\subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= V(I)\cup V(J). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 22. Sea A un anillo.

1. La *Topología de Zariski* de Spec(A) es la topología obtenida al tomar como conjuntos cerrados de Spec(A) a los conjuntos de la forma V(I) con I un ideal de A.
2. Sea τ la Topología de Zariski de Spec(A). El espacio de Zariski de A es el espacio topológico (Spec(A), τ).

Dado un anillo A, nos referiremos al espacio de Zariski de A simplemente por Spec(A). Recordemos que una aplicación $\varphi : X \to Y$ es un morfismo de espacios topológicos si es continua.

3. Ideales Primos Asociados y Soporte de un Módulo

En esta sección se definen los ideales primos asociados y el soporte de un módulo sobre un anillo y se muestran algunas propiedades.

Observación 2.14. Sean M un módulo sobre un anillo A, $m \in M$ y $a \in A$ tales que $a \in \mathrm{Ann}_A(m)$. Dado $b \in A$, se tiene que $a(bm) = (ab)m = (ba)m = b(am) = b0_M = 0_M$. Así, $a \in \mathrm{Ann}_A(bm)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ann}_A(m) \subseteq \mathrm{Ann}_A(bm)$ para todo $b \in A$.

Proposición 2.15. *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$. Más aún, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(\alpha + \mathfrak{p})$ para todo $\alpha \in A \setminus \mathfrak{p}$.*

Demostración. Sean $\alpha \in A \setminus \mathfrak{p}$ y $\beta \in A$. Supongamos que $\beta \in \mathrm{Ann}_A(\alpha + \mathfrak{p})$, ésto es, $\beta(\alpha + \mathfrak{p}) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Es decir, $\beta\alpha + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, o bien, $\beta\alpha \in \mathfrak{p}$. Ello equivale a que $\beta \in \mathfrak{p}$. □

Definición 23. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Sea M un A-módulo. $\mathfrak{p}$ es un asociado de M si existe $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m)$. Al conjunto de los asociados de M se le denota por $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$.

Proposición 2.16. *Sean M un módulo sobre un anillo A y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$.
2. *Existe una sucesión exacta de A-módulos de la forma:*

$$0 \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi} M \,. \tag{47}$$

3. *$\frac{A}{\mathfrak{p}}$ es isomorfo a un A-submódulo de M.*

Demostración.

1⇒2 Tenemos que existe $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m)$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \frac{A}{\mathfrak{p}} & \to & M \\ a + \mathfrak{p} & \mapsto & am. \end{array}$$

Veamos que φ es un morfismo de A-módulos. Dados a y $b \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi((a+\mathfrak{p}) + (b+\mathfrak{p})) & = & \varphi((a+b)+\mathfrak{p}) \\ & = & (a+b)m \\ & = & am + bm \\ & = & \varphi(a+\mathfrak{p}) + \varphi(b+\mathfrak{p}), \end{array}$$

$$\begin{aligned}\varphi(b(a+\mathfrak{p})) &= \varphi((ba+\mathfrak{p})) \\ &= (ba)m \\ &= b(am) \\ &= b\varphi(a+\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

Falta mostrar que la sucesión de A-módulos dada en (47) es exacta. En efecto, sea $a \in A$. Supongamos que $a+\mathfrak{p} \in \ker\varphi$. Ésto es, $\varphi(a+\mathfrak{p}) = 0_M$, o bien, $am = 0_M$. Es decir, $a \in \mathrm{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}$, lo que significa que $a+\mathfrak{p} = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Por lo tanto, $\ker\varphi = \left\{0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}\right\}$.

2⇒3 Tenemos que $\varphi\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ es un A-submódulo de M. Dada la sucesión exacta de A-módulos (47), tenemos que $\ker\varphi = \left\{0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}\right\}$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, los A-módulos $\varphi\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ son isomorfos.

3⇒1 Sea N un A-submódulo de M tal que $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ y N son A-módulos isomorfos. Por la Proposición 2.15, tenemos que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(N)$. Como $\mathrm{Ass_A}(N) \subseteq \mathrm{Ass_A}(M)$, entonces $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M)$. □

Proposición 2.17. *Sean A un anillo y* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de A-módulos. Se tiene que* $\mathrm{Ass_A}(M) \subseteq \mathrm{Ass_A}(M') \cup \mathrm{Ass_A}(M'')$.

Demostración. Si $\mathrm{Ass_A}(M) = \emptyset$, entonces el resultado se tiene. Supongamos que $\mathrm{Ass_A}(M) \neq \emptyset$ y tomemos $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M)$. Por la Proposición 2.16, existe un A-submódulo N de M que es isomorfo al A-módulo $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$.
Supongamos que $f(M') \cap N = \{0_M\}$. Consideremos la restricción de g en N, que es un morfismo de A-módulos denotado por $g|_N : N \to M''$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, $\mathrm{Im}\, g|_N$ es un A-submódulo de M'' y los A-módulos $\mathrm{Im}\, g|_N$ y $\dfrac{N}{\ker g|_N}$ son isomorfos. Más aún, tenemos las siguientes igualdades e isomorfismos de A-módulos:

$$\mathrm{Im}\, g|_N \simeq \frac{N}{\ker g|_N} = \frac{N}{(\ker g) \cap N} = \frac{N}{f(M') \cap N} = \frac{N}{\{0_M\}} \simeq N \simeq \frac{A}{\mathfrak{p}}.$$

Así, M'' tiene un A-submódulo isomorfo a $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$. Por la Proposición 2.16, esto implica que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M'')$.

Supongamos que $f(M') \cap N \neq \{0_M\}$. Sabemos que $f(M')$ es un A-submódulo de M isomorfo a M' y que $f(M') \cap N$ es un A-submódulo de N. Sea $m \in \big(f(M') \cap N\big) \setminus \{0_M\}$. Como $m \in N$ y N es un A-módulo isomorfo a $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$, por la Proposición 2.15, tenemos que $\mathrm{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}$. Más aún, existe $m' \in M' \setminus \{0_{M'}\}$ tal que $f(m') = m$. Ahora, veamos que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m')$. Sea $\lambda \in A$ y supongamos que $\lambda \in \mathrm{Ann}_A(m')$, ésto es, $\lambda m' = 0_{M'}$. Como f es un morfismo de A-módulos inyectivo, esto equivale a que $\lambda m = 0_M$, es decir, $\lambda \in \mathrm{Ann}_A(m)$. Con ello, $\mathrm{Ann}_A(m') = \mathrm{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}$ y así, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M')$.
Se ha probado que dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M)$, tenemos que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M')$ o $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M'')$, por lo tanto, $\mathrm{Ass_A}(M) \subseteq \mathrm{Ass_A}(M') \cup \mathrm{Ass_A}(M'')$. □

Proposición 2.18. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo con $M \neq \{0_M\}$. Se sigue que* $\mathrm{Ass_A}(M) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\Gamma = \{\, \mathrm{Ann}_A(x) \mid x \in M \setminus \{0_M\}\}$. Obsérvese que $\mathrm{Ann}_A(x) \neq A$ para todo $x \in M \setminus \{0_M\}$. Dado que A es un anillo Noetheriano, existe $m \in M \setminus \{0_M\}$ tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m)$ es un elemento maximal de Γ. Mostraremos que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. En efecto, sean a y $b \in A$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$. Ello implica que $a(bm) = (ab)m = 0_M$ y $bm \neq 0_M$. Como consecuencia, $a \in \mathrm{Ann}_A(bm)$ y $bm \neq 0_M$. Por la Observación 2.14, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m) \subseteq \mathrm{Ann}_A(bm)$. Como $\mathrm{Ann}_A(bm) \in \Gamma$ y $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de Γ, entonces $\mathrm{Ann}_A(bm) = \mathfrak{p}$. Con ello, $a \in \mathfrak{p}$ y así, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ass_A}(M) \neq \emptyset$. □

Corolario 2.19. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo. $M = \{0_M\}$ si, y sólo si,* $\mathrm{Ass_A}(M) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $M = \{0_M\}$. Así, $\mathrm{Ann}_A(m) = \mathrm{Ann}_A(0_M) = A$ para todo $m \in M$ y con ello, $\mathrm{Ass_A}(M) = \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $M \neq \{0_M\}$. Por la Proposición 2.18, se tiene que $\mathrm{Ass_A}(M) \neq \emptyset$. □

Proposición 2.20. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado no trivial. Existen $n \in \mathbb{N}$, un A-módulo M_i y $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_i}$ son A-módulos isomorfos y*

$$\{0_M\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = M \tag{48}$$

es una cadena de A-módulos.

Demostración. Por el Corolario 2.19, tenemos que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) \neq \emptyset$. Sean $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$ y $M_0 = \{0_M\}$. Por la Proposición 2.16, existe un A-submódulo M_1 de M isomorfo al A-módulo $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_1}$. Con ello, $\dfrac{M_1}{M_0}$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_1}$ son A-módulos isomorfos. Si $M_1 = M$, se tiene el resultado. Si $M_1 \neq M$, entonces $\dfrac{M}{M_1} \neq \left\{0_{\frac{M}{M_1}}\right\}$. Nuevamente, por la Proposición 2.19, tenemos que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{M_1}\right) \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{M_1}\right)$. Por la Proposición 2.16, existe un A-submódulo M_2 de M tal que $M_1 \subset M_2$ y $\dfrac{M_2}{M_1}$ es un A-submódulo de $\dfrac{M}{M_1}$ isomorfo al A-módulo $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_2}$. Si $M_2 = M$, se tiene el resultado.
De la misma forma que en el párrafo anterior, tenemos de manera inductiva lo siguiente: Si $i \in \mathbb{N}$ y $M_{i-1} \neq M$, entonces existen $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)$ y un A-submódulo M_i de M tales que $M_{i-1} \subset M_i$ y los A-módulos $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_i}$ son isomorfos.
Como A es un anillo Noetheriano y M es un A-módulo finitamente generado, por la Proposición 1.38, tenemos que M es un A-módulo Noetheriano. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la cadena

$$\{0_M\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_j \subset \ldots \tag{49}$$

es estable en n.
Supongamos que $M_n \neq M$. Procediendo como antes, existen $\mathfrak{p}_{n+1} \in \mathrm{Spec}(A)$ y un A-submódulo M_{n+1} de M tales que $M_n \subset M_{n+1}$ y los A-módulos $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_{n+1}}$ son isomorfos. Esto contradice que la cadena (49) sea estable en n. Por lo tanto, $M_n = M$ y queda probado el enunciado. □

Corolario 2.21. *Dados un anillo Noetheriano A y un A-módulo M finitamente generado, se tiene que* $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$ *es un conjunto finito. Más aún, si $M \neq \{0_M\}$, entonces* $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) \neq \emptyset$.

Demostración. Si $M = \{0_M\}$, entonces $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) = \emptyset$. Supongamos que $M \neq \{0_M\}$. Por la Proposición 2.20, tenemos que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) \neq \emptyset$ y podemos construir una cadena como la dada en (48). Consideremos la siguiente sucesión exacta de A-módulos:

$$0 \to M_{n-1} \to M \to \frac{M}{M_{n-1}} \to 0,$$

donde el morfismo de M_{n-1} en M es la inclusión y el morfismo de M en $\dfrac{M}{M_{n-1}}$ es la proyección. Por las Proposiciones 2.17 y 2.15, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ass_A}(M) &\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-1}) \cup \mathrm{Ass_A}\left(\frac{M}{M_{n-1}}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-1}) \cup \mathrm{Ass_A}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-1}) \cup \mathrm{Ass_A}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_n}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-1}) \cup \{\mathfrak{p}_n\}.
\end{aligned} \tag{50}
$$

Observemos ahora la forma de $\mathrm{Ass_A}(M_{n-1})$. Tenemos una sucesión

$$0 \to M_{n-2} \to M_{n-1} \to \frac{M_{n-1}}{M_{n-2}} \to 0$$

de A-módulos exacta, donde el morfismo de M_{n-2} en M_{n-1} es la inclusión y el morfismo de M_{n-1} en $\dfrac{M_{n-1}}{M_{n-2}}$ es la proyección. Nuevamente, por las Proposiciones 2.17 y 2.15,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ass_A}(M_{n-1}) &\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-2}) \cup \mathrm{Ass_A}\left(\frac{M_{n-1}}{M_{n-2}}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-2}) \cup \mathrm{Ass_A}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_{n-1}}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-2}) \cup \{\mathfrak{p}_{n-1}\}.
\end{aligned}
$$

Por la expresión (50), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ass_A}(M) &\subseteq \Big(\mathrm{Ass_A}(M_{n-2}) \cup \{\mathfrak{p}_{n-1}\}\Big) \cup \{\mathfrak{p}_n\} \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_{n-2}) \cup \{\mathfrak{p}_{n-1}\} \cup \{\mathfrak{p}_n\}.
\end{aligned}
$$

Siguiendo de esta forma, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ass_A}(M) &\subseteq \mathrm{Ass_A}(M_1) \cup \{\mathfrak{p}_2\} \cup \ldots \cup \{\mathfrak{p}_n\} \\
&\subseteq \mathrm{Ass_A}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\right) \cup \{\mathfrak{p}_2\} \cup \ldots \cup \{\mathfrak{p}_n\} \\
&\subseteq \{\mathfrak{p}_1\} \cup \{\mathfrak{p}_2\} \cup \ldots \cup \{\mathfrak{p}_n\} \\
&\subseteq \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n\}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ass_A}(M)$ es un conjunto finito no vacío. $\square$

Corolario 2.22. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado no trivial. Los elementos minimales de* $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$ *forman un conjunto finito no vacío.*

Demostración. Por el Corolario 2.21, tenemos que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$ es un conjunto finito no vacío. Como consecuencia, el conjunto de los elementos minimales de $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$ es finito no vacío. □

Definición 24. Sea M un módulo sobre un anillo A. El soporte de M en A es el conjunto $\left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \middle| \, M_{\mathfrak{p}} \neq \left\{0_{M_{\mathfrak{p}}}\right\}\right\}$ y se denota por $\mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(M)$.

Proposición 2.23. *Dado un anillo A, se tiene que* $\mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(A) = \mathrm{Spec}(A)$.

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$. Por otra parte, sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Por la Proposición 1.2, tenemos que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo y así, $A_{\mathfrak{p}} \neq \left\{0_{A_{\mathfrak{p}}}\right\}$. Esto implica que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(A)$. Con ello, $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(A) = \mathrm{Spec}(A)$. □

Proposición 2.24. *Dado un módulo M sobre un anillo A, se tiene que*

$$\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(M).$$

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M)$. Por la proposición 2.16, existe una sucesión exacta de A-módulos como sigue:

$$0 \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi} M.$$

Por la Proposición 1.12, tenemos una sucesión exacta de $A_{\mathfrak{p}}$-módulos

$$0 \longrightarrow \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}.$$

Por el Corolario 1.13, tenemos que los $A_{\mathfrak{p}}$-módulos $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}}$ y $\frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}}$ son isomorfos. Como consecuencia, existe una sucesión exacta de $A_{\mathfrak{p}}$-módulos de la forma:

$$0 \longrightarrow \frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_{\mathfrak{p}}}} M_{\mathfrak{p}}.$$

Como $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$, por la Proposición 2.16, existe un $A_{\mathfrak{p}}$-submódulo N de $M_{\mathfrak{p}}$ que es isomorfo al $A_{\mathfrak{p}}$-módulo $\frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}} \neq \left\{0_{\frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}}}\right\}$, con ello, $\left\{0_{M_{\mathfrak{p}}}\right\} \neq N \subseteq M_{\mathfrak{p}}$. Esto implica que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}}(M) \subseteq \mathrm{Supp}_{\mathrm{A}}(M)$. □

Proposición 2.25. *Sean S un subconjunto multiplicativo de un anillo Noetheriano A y M un A-módulo. Se tiene que*

$$\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M) |\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Demostración. Tomemos $\Gamma = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M) |\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Si $M = \{0_M\}$, entonces $\mathrm{S^{-1}M} = \{0_{\mathrm{S^{-1}M}}\}$. Por el Corolario 2.19, se tiene que $\mathrm{Ass_A}(M) = \emptyset$ y $\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) = \emptyset$. Así,

$$\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) = \emptyset = \Gamma.$$

Si $M \neq \{0_M\}$, entonces $\mathrm{Ass_A}(M) \neq \emptyset$. Consideremos los dos casos siguientes:

1. Supongamos que $\mathrm{S^{-1}M} = \{0_{\mathrm{S^{-1}M}}\}$. Por el Corolario 2.19, $\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) = \emptyset$. Falta mostrar que $\Gamma = \emptyset$. En efecto, si $\Gamma \neq \emptyset$, entonces existe $m \in M \setminus \{0_M\}$ tal que $\mathrm{Ann}_A(m) \in \mathrm{Spec}(A)$ y $\mathrm{Ann}_A(m) \cap S = \emptyset$. Como $\dfrac{m}{1_A} = 0_{\mathrm{S^{-1}M}}$, existe $s \in S$ tal que $sm = 0_M$. Ello implica que $\mathrm{Ann}_A(m) \cap S \neq \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\Gamma = \emptyset$.
2. Supongamos que $\mathrm{S^{-1}M} \neq \{0_{\mathrm{S^{-1}M}}\}$. Como A es un anillo Noetheriano y $\mathrm{S^{-1}M}$ es un A-módulo, por la Proposición 2.18, tenemos que $\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) \neq \emptyset$.
   Veamos que $\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) \subseteq \Gamma$. En efecto, sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right)$, así, existen $m \in M$ y $s \in S$ tales que $x = \dfrac{m}{s} \in \mathrm{S^{-1}M} \setminus \{0_{\mathrm{S^{-1}M}}\}$ y $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(x) \in \mathrm{Spec}(A)$. Supongamos que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, sea $t \in \mathfrak{p} \cap S$. Así, $0_{\mathrm{S^{-1}M}} = t\dfrac{m}{s} = \dfrac{tm}{s}$. Existe $u \in S$ tal que $0_M = u(tm) = (ut)m$. Como consecuencia, existe $v \in S$ tal que $vm = 0_M$. Con ello, $\dfrac{m}{s} = 0_{\mathrm{S^{-1}M}}$, lo que contradice la elección de x. Por consiguiente, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Con esto en mente, observemos lo siguiente:
   Sea $\alpha \in A$. Supongamos que $\alpha \in \mathfrak{p}$, ésto es, $0_{\mathrm{S^{-1}M}} = \alpha x$. Es decir,
   $$0_{\mathrm{S^{-1}M}} = \alpha\frac{m}{s} = \frac{\alpha}{1_A} \cdot \frac{m}{s} = \frac{\alpha m}{s}.$$
   Esto significa que existe $u \in S$ tal que $0_M = u(\alpha m) = (u\alpha)m = (\alpha u)m = \alpha(um)$, o bien, $\alpha \in \mathrm{Ann}_A(um)$ para algún $u \in S$ ($um \neq 0_M$). Como consecuencia, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right) \subseteq \Gamma$ (y con ello, $\Gamma \neq \emptyset$).
   Sabemos que $\Gamma \neq \emptyset$. Mostraremos que $\Gamma \subseteq \mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right)$. Sea $\mathfrak{p} \in \Gamma$, así, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}(M)$ y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Existe $m \in M \setminus \{0_M\}$ tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m) \in \mathrm{Spec}(A)$. Tenemos que $tm \neq 0_M$ para todo $t \in S$. Como consecuencia, $\dfrac{m}{1_A} \neq 0_{\mathrm{S^{-1}M}}$.

Veamos que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right)$: Sea $\lambda \in A$ y supongamos que $\lambda \in \mathfrak{p}$. Así, $\lambda m = 0_M$ y por consiguiente, $\lambda \cdot \frac{m}{1_A} = 0_{\mathrm{S^{-1}M}}$. Con ello, $\lambda \in \mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right)$. Esto implica que $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right)$.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda \in \mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right)$, así, $0_{\mathrm{S^{-1}M}} = \frac{\lambda m}{1_A}$. Existe $u \in S$ tal que $0_M = u(\lambda m) = (u\lambda)m$, esto implica que $u\lambda \in \mathrm{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, se tiene que $u \in \mathfrak{p}$ o $\lambda \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, tenemos que $u \notin \mathfrak{p}$, ello implica que $\lambda \in \mathfrak{p}$ y por consiguiente, $\mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right) \subseteq \mathfrak{p}$. Como consecuencia, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A\left(\frac{m}{1_A}\right)$ y así, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right)$. Por lo tanto, $\Gamma \subseteq \mathrm{Ass_A}\left(\mathrm{S^{-1}M}\right)$. □

Corolario 2.26. *Sean A un anillo Noetheriano, M un A-módulo y $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$. Se tiene que* $\mathrm{Ass_A}(M_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{q}' \in \mathrm{Ass_A}(M) |\ \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}\}$.

Demostración. Por la Notación 20 y la Proposición 2.25, se tiene el resultado. □

Proposición 2.27. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo no trivial. Los elementos minimales de* $\mathrm{Ass_A}(M)$ *son los elementos minimales de* $\mathrm{Supp_A}(M)$.

Demostración. Por el Corolario 2.22, el conjunto de los elementos minimales de $\mathrm{Ass_A}(M)$ no es vacío. Por la Proposición 2.24, se tiene que $\mathrm{Ass_A}(M) \subseteq \mathrm{Supp_A}(M)$.
Primero se probará que los elementos minimales de $\mathrm{Ass_A}(M)$ son elementos minimales de $\mathrm{Supp_A}(M)$. Sea $\mathfrak{p}$ un elemento minimal de $\mathrm{Ass_A}(M)$. Dado que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp_A}(M)$, falta mostrar que $\mathfrak{p}$ es un elemento minimal de $\mathrm{Supp_A}(M)$. En efecto, Sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp_A}(M)$ tal que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Así, $M_{\mathfrak{q}}$ es un A-módulo tal que $M_{\mathfrak{q}} \neq \{0_{M_{\mathfrak{q}}}\}$. Como A es un anillo Noetheriano, por el Corolario 2.19, tenemos que $\mathrm{Ass_A}\,(M_{\mathfrak{q}}) \neq \emptyset$. Por el Corolario 2.26, resulta que

$$\mathrm{Ass_A}\,(M_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{q}' \in \mathrm{Ass_A}(M) |\ \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}\} \neq \emptyset.$$

Tomemos $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Ass_A}\,(M_{\mathfrak{q}})$, así, $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Ass_A}(M)$ y $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es un elemento minimal de $\mathrm{Ass_A}(M)$, se tiene que $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$ y con ello, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Esto implica que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es un elemento minimal de $\mathrm{Supp_A}(M)$.
Ahora mostraremos que los elementos minimales de $\mathrm{Supp_A}(M)$ son elementos minimales

de $\mathrm{Ass}_A(M)$. Sea $\mathfrak{p}$ un elemento minimal de $\mathrm{Supp}_A(M)$. Dado que $M_\mathfrak{p} \neq \left\{0_{M_\mathfrak{p}}\right\}$, por el Corolario 2.19, tenemos que $\mathrm{Ass}_A(M_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$. Más aún, por el Corolario 2.26,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}_A(M_\mathfrak{p}) &= \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A(M) |\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) |\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &\subseteq \mathrm{Supp}_A(M) \cap \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) |\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{p}$ es un elemento minimal de $\mathrm{Supp}_A(M)$, se tiene que

$$\mathrm{Supp}_A(M) \cap \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) |\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}\}.$$

Con ello, $\mathrm{Ass}_A(M_\mathfrak{p}) \subseteq \{\mathfrak{p}\}$ y así,

$$\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A(M) |\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}\}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es un elemento minimal de $\mathrm{Ass}_A(M)$. □

Corolario 2.28. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado no trivial. Los elementos minimales de* $\mathrm{Supp}_A(M)$ *forman un conjunto finito no vacío.*

Demostración. Por la Proposición 2.27, los elementos minimales de $\mathrm{Supp}_A(M)$ son los elementos minimales de $\mathrm{Ass}_A(M)$, por el Corolario 2.22, los elementos minimales de $\mathrm{Ass}_A(M)$ es un conjunto finito no vacío. Por lo tanto, los elementos minimales de $\mathrm{Supp}_A(M)$ forman un conjunto finito no vacío. □

Corolario 2.29. *Sea A un anillo Noetheriano. El conjunto de los ideales primos minimales de A es finito.*

Demostración. Dado que A es un anillo Noetheriano y A es un A-módulo finitamente generado, por el Corolario 2.28, los elementos minimales de $\mathrm{Supp}_A(A)$ forman un conjunto finito no vacío. Por la Observación 2.23, tenemos que $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}_A(A)$. Por lo tanto, el conjunto de los ideales primos minimales de A es finito. □

4. Ideales Primarios de un Anillo

En esta sección presentamos los ideales primarios de un anillo. Dichos ideales nos permitirán realizar algunos cálculos del capítulo siguiente.

Definición 25. Sea A un anillo. Un ideal I de A es primario si $I \neq A$ y para cualesquiera a y $b \in A$ tales que $ab \in I$, se tiene que $a \in I$ o $b^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.30. *Sea A un anillo. I es un ideal primario de A si, y sólo si, $\frac{A}{I} \neq \left\{0_{\frac{A}{I}}\right\}$ y todo divisor de cero de $\frac{A}{I}$ es nilpotente.*

Demostración. Supongamos que I es un ideal primario de A. Tenemos que $I \neq A$ y así, $\frac{A}{I} \neq \left\{0_{\frac{A}{I}}\right\}$. Mostraremos que todo divisor de cero de $\frac{A}{I}$ es nilpotente. Sea $b \in A$ tal que $b + I$ es un divisor de cero de $\frac{A}{I}$. Existe $a \in A$ tal que $a + I \neq 0_{\frac{A}{I}}$ y $(a + I)(b + I) = 0_{\frac{A}{I}}$, con ello, $ab + I = I$. Así, $ab \in I$, como I es un ideal primario y $a \notin I$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \in I$. Esto implica que $(b + I)^n = b^n + I = 0_{\frac{A}{I}}$. Por lo tanto, $b + I$ es nilpotente.
Recíprocamente, supongamos que I es un ideal de A tal que $\frac{A}{I} \neq \left\{0_{\frac{A}{I}}\right\}$ y todo divisor de cero de $\frac{A}{I}$ es nilpotente. Dado que $\frac{A}{I} \neq \left\{0_{\frac{A}{I}}\right\}$, tenemos que $I \neq A$. Falta mostrar que para cualesquiera a y $b \in A$ con $ab \in I$, se tiene que $a \in I$ o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \in I$. En efecto, sean a y $b \in A$ tales que $ab \in I$. Así, $(a + I)(b + I) = ab + I = I$. Supongamos que $a \notin I$. Si $b \in I$, entonces se tiene el resultado. Si $b \notin I$, entonces $b + I$ es un divisor de cero de $\frac{A}{I}$. Por consiguiente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b + I)^n = b^n + I = 0_{\frac{A}{I}}$. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \in I$. □

Proposición 2.31. *Sea I un ideal primario de un anillo A. Se tiene que $\sqrt{I}$ es el ideal primo más pequeño que contiene a I.*

Demostración. Tenemos que

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{p \in \mathrm{Spec}(A) \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \neq A. \tag{51}$$

Basta probar que $\sqrt{I} \in \mathrm{Spec}(A)$. En efecto, sean a y $b \in A$ tales que $ab \in \sqrt{I}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(ab)^n \in I$ y así, $a^n b^n \in I$. Como I es un ideal primario, se tiene alguno de los casos siguientes:

1. $a^n \in I$ o
2. existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(b^n)^k = b^{nk} \in I$.

Ello implica que $a \in \sqrt{I}$ o $b \in \sqrt{I}$. Dado que $\sqrt{I} \neq A$, tenemos que $\sqrt{I} \in \mathrm{Spec}(A)$. □

Definición 26. Sean I un ideal primario de un anillo A y $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$. I es un ideal $\mathfrak{q}$-primario si $\sqrt{I} = \mathfrak{q}$.

Proposición 2.32. *Sea I un ideal de un anillo A. Si $\sqrt{I} \in Max(A)$, entonces I es un ideal primario de A.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m} \in Max(A)$ tal que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Como $I \subseteq \sqrt{I} = \mathfrak{m} \subset A$, se tiene que $I \neq A$. Más aún, el conjunto de los ideales primos que contienen a I es $\{\mathfrak{m}\}$. Así, $\mathrm{Spec}\left(\frac{A}{I}\right) = \left\{\frac{\mathfrak{m}}{I}\right\}$, lo que implica que $Max\left(\frac{A}{I}\right) = \left\{\frac{\mathfrak{m}}{I}\right\}$. Dado $x \in \frac{A}{I}$, tenemos que $x \in \mathcal{U}\left(\frac{A}{I}\right)$ o $x \in \frac{\mathfrak{m}}{I} = \mathrm{Nil}\left(\frac{A}{I}\right)$. Ahora, si x es un divisor de cero de $\frac{A}{I}$, entonces $x \notin \mathcal{U}\left(\frac{A}{I}\right)$, con ello, $x \in \mathrm{Nil}\left(\frac{A}{I}\right)$. Por la Proposición 2.30, se tiene que I es un ideal primario de A. □

Definición 27. Un anillo A es local si $|Max(A)| = 1$. En tal caso, si $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A, ello se denota por $(A, \mathfrak{m})$.

Proposición 2.33. *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano e I un ideal de A. I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario si, y sólo si, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^l \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$.*

Demostración. Supongamos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^l \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$. Esto implica que $\sqrt{\mathfrak{m}^l} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}}$. Así, $\mathfrak{m} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}$ y con ello, $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Por la proposición 2.32, tenemos que I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario.
Recíprocamente, por la Proposición 1.43, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sqrt{I}\right)^l \subseteq I$. Como I es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, se tiene que $\mathfrak{m}^l \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$. □

Capítulo 3

Teoría de la Dimensión

Dado un anillo, podemos asignarle un ordinal, al que llamaremos la *dimensión de Krull* y lo referiremos simplemente como *dimensión*. Cuando dicho anillo es local Noetheriano, la dimensión está determinada por su ideal maximal y adicionalmente, se le asignarán la *dimensión de Chevalley* y el *grado del polinomio de Hilbert*. Se concluye este capítulo con el *Teorema Fundamental de la Teoría de la Dimensión*.

1. Dimensión de un Anillo

Para dar la dimensión de Krull de un anillo, tomaremos en cuenta a sus ideales primos y las cadenas que se forman con ellos.

Definición 28. Sea A un anillo. Una cadena prima de A es una cadena de ideales primos de A de la forma:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_r$$

con $r \in \mathbb{Z}_+$. La *longitud* de dicha cadena prima es r.

A continuación, definimos la altura de un ideal primo.

Definición 29. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A. La altura de $\mathfrak{p}$ es

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{r \in \mathbb{Z}_+ |\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p} \text{ es una cadena prima de } A\}.$$

Proposición 3.1. *Dados un anillo local* $(A, \mathfrak{m})$ *con* $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \in \mathbb{Z}_+$ *y* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$*, se tiene que* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. *Más aún,* $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ *si, y sólo si,* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = k$. Si $k < \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, entonces existe una cadena prima de A de la forma:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_k \subset \mathfrak{p}_{k+1} = \mathfrak{p}.$$

Dado que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, tenemos que $\mathfrak{p}_{k+1} = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, y con ello, tenemos una cadena prima de A como sigue:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_k \subset \mathfrak{m}.$$

Por consiguiente, $k < \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, que es una contradicción. Así, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$.
Por otra parte, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, entonces $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = k$. Recíprocamente, si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = k$, entonces existe una cadena prima

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}.$$

Supongamos que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, con ello, tenemos una cadena prima

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_k \subset \mathfrak{m},$$

así, $k < \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ si, y sólo si, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. □

Definimos ahora la dimensión de Krull de un anillo y posteriormente revisaremos el caso de los anillos locales.

Definición 30. Sea A un anillo. La dimensión de Krull de A es $\sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) | \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}$ y se denota por $\dim(A)$.

Ejemplo 3.2. El anillo de los números enteros tiene dimensión 1.

Proposición 3.3. *Si* $(A, \mathfrak{m})$ *es un anillo local, entonces* $\dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, por la Proposición 3.1, tenemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, con ello, $\dim(A) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) | \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\} \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq \dim(A)$. Así, $\dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. □

Definición 31. Sean I y J ideales de un anillo A. El cociente de I y J es

$$(I : J) = \{y \in A | \ yJ \subseteq I\}.$$

Proposición 3.4. *Dados I y J ideales de un anillo A,* $(I : J)$ *es un ideal de A.*

Demostración. Basta mostrar que $(I : J)$ es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por escalares. En efecto, sean α y $\beta \in A$. Supongamos que α y $\beta \in (I : J)$ y tomemos $x \in J$. Tenemos que $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \in I$ y con ello, $\alpha + \beta \in (I : J)$. Supongamos que $\alpha \in (I : J)$, tomemos $\lambda \in A$ y $x \in J$. Así, $(\lambda\alpha)x = \lambda(\alpha x) \in \lambda I \subseteq I$. Con ello, $\lambda\alpha \in (I : J)$. □

Notación 32. Sean I un ideal de un anillo A y $\alpha \in A$. Al ideal $(I : \langle\alpha\rangle_A)$ lo denotamos de manera más simple por $(I : \alpha)$.

Para lograr una caracterización de anillos Artinianos, veamos un criterio de espacios vectoriales que involucra la longitud finita y la dimensión.

Proposición 3.5. *Sea M un espacio vectorial sobre un campo k. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La dimensión de M finita.*
2. *M es un k-módulo de longitud finita.*
3. *M es un k-módulo Noetheriano.*
4. *M es un k-módulo Artiniano.*

Más aún, si M satisface tales condiciones, entonces $\ell_k(M) = \dim_k(M)$.

Demostración. Dado que k es un campo, tenemos que k es un anillo Noetheriano y Artiniano.

$1 \Rightarrow 2$ Supongamos que $\dim_k(M) = n \in \mathbb{N}$. Sean $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que

$$M = km_1 + \ldots + km_n, \tag{52}$$

y sean

$$\begin{aligned} M_0 &= \{0_M\}, \\ M_1 &= km_1, \\ M_2 &= km_1 \oplus km_2, \\ &\vdots \\ M_n &= km_1 \oplus km_2 \oplus \ldots \oplus km_n = M. \end{aligned}$$

Dado $i \in \{1, \ldots n\}$, tenemos los isomorfismos de k-módulos $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \simeq km_i \simeq k$. Como k es un k-módulo simple, se tiene que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$ es un k-módulo simple, así,

$$\{0_M\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n$$

es una serie de composición de M y por lo tanto, $\ell_k(M) = n = \dim_k(M)$.

$2 \Rightarrow 3$ Por la Proposición 1.52, M es Noetheriano.

$2 \Rightarrow 4$ Por la Proposición 1.52, M es Artiniano.

$3 \Rightarrow 1$ Supongamos que M no es de dimensión finita. Existe una familia $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vectores de M linealmente independiente. Sea L_k el espacio vectorial generado por $x_1, \ldots, x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, la cadena

$$L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \ldots$$

de A-módulos no es estable y por lo tanto, M no es un A-módulo Noetheriano.

$4 \Rightarrow 1$ Supongamos que M no es de dimensión finita. Existe una familia $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vectores de M linealmente independiente. Sea N_k el espacio vectorial generado por $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, la cadena

$$N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$$

de A-módulos no es estable y por lo tanto, M no es un A-módulo Artiniano. □

Teorema 3.6. *Sea A un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un anillo Noetheriano y* $\dim(A) = 0$.
2. *A es un A-módulo de longitud finita.*
3. *A es un anillo Artiniano.*

Demostración.

1⇒2 Supongamos que A no es un A-módulo de longitud finita. Si A no es Noetheriano, se tiene el resultado. Supongamos ahora que A es un anillo Noetheriano y consideremos el conjunto

$$\Gamma = \left\{ J \text{ ideal de } A \,\middle|\, \frac{A}{J} \text{ no es un } A\text{-módulo de longitud finita} \right\}.$$

Dado que $\{0_A\} \in \Gamma$, tenemos que $\Gamma \neq \emptyset$, así, existe un elemento maximal $\mathfrak{p}$ de Γ. Mostraremos que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ (obsérvese que $\mathfrak{p} \neq A$). En efecto, supongamos que $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Spec}(A)$. Sean α y $\beta \in A$ tales que $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$, $\alpha \notin \mathfrak{p}$ y $\beta \notin \mathfrak{p}$. Así, $\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p} : \alpha)$ y $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} + \langle\alpha\rangle_A$. Como $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de Γ, tenemos que $(\mathfrak{p} : \alpha) \notin \Gamma$ y $\mathfrak{p} + \langle\alpha\rangle_A \notin \Gamma$. Con ello, $\dfrac{A}{(\mathfrak{p} : \alpha)}$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{p} + \langle\alpha\rangle_A}$ son A-módulos de longitud finita. Tomemos los siguientes homomorfismos de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \dfrac{A}{(\mathfrak{p} : \alpha)} & \to & \dfrac{A}{\mathfrak{p}} \\ \lambda + (\mathfrak{p} : \alpha) & \mapsto & \lambda\alpha + \mathfrak{p} \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{c} \psi : \dfrac{A}{\mathfrak{p}} \to \dfrac{A}{\mathfrak{p} + \langle \alpha \rangle_A} \\ \mu + \mathfrak{p} \mapsto \mu + (\mathfrak{p} + \langle \alpha \rangle_A). \end{array}$$

Es claro que ψ es sobre. Para ver que φ es inyectiva, tomemos $\lambda \in A$. Supongamos que $\lambda + (\mathfrak{p} : \alpha) \in \ker \varphi$, ésto es, $\varphi(\lambda + (\mathfrak{p} : \alpha)) = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Es decir, $\lambda\alpha + \mathfrak{p} = 0_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}$. Esto significa que $\lambda\alpha \in \mathfrak{p}$, o bien, $\lambda \in (\mathfrak{p} : \alpha)$. Equivalentemente, $\lambda + (\mathfrak{p} : \alpha) = 0_{\frac{A}{(\mathfrak{p}:\alpha)}}$.
Veamos que $\operatorname{Im} \varphi = \ker \psi$. Sea $\mu \in A$ y supongamos que $\mu + \mathfrak{p} \in \operatorname{Im} \varphi$, ésto es, existe $\lambda \in A$ tal que $\mu + \mathfrak{p} = \lambda\alpha + \mathfrak{p}$. Es decir, $\mu - \lambda\alpha \in \mathfrak{p}$ para algún $\lambda \in A$, o bien, $\mu \in \mathfrak{p} + \langle \alpha \rangle_A$. Ello equivale a que $\mu + \mathfrak{p} \in \ker \psi$.
Como consecuencia, la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$0 \longrightarrow \frac{A}{(\mathfrak{p} : \alpha)} \xrightarrow{\varphi} \frac{A}{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi} \frac{A}{\mathfrak{p} + \langle \alpha \rangle_A} \longrightarrow 0.$$

Por la Proposición 1.53, resulta que $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un A-módulo de longitud finita, lo que contradice el hecho de que $\mathfrak{p} \in \Gamma$. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$.
Ahora, si $\dim(A) = 0$, entonces $\mathfrak{p} \in Max(A)$. Así, $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un campo, lo que implica que $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$-módulo Noetheriano. Por la Proposición 3.5, $\ell_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right) \in \mathbb{Z}_+$. Como $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_A\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ (Proposición 2.15), la estructura de $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ como A-módulo es la misma estructura que tiene como $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$-módulo. Como consecuencia, $\ell_A\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right) = \ell_{\frac{A}{\mathfrak{p}}}\left(\dfrac{A}{\mathfrak{p}}\right) \in \mathbb{Z}_+$, y de nuevo, se contradice que $\mathfrak{p} \in \Gamma$.
Por lo tanto, A no es un anillo Noetheriano o $\dim(A) \neq 0$, probando el resultado.

2⇒3 Como A es un A-módulo de longitud finita, por la Proposición 1.52, se tiene que A es un anillo Artiniano.

3⇒1 Por la Proposición 2.5, existen $r \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r \in Max(A)$ distintos entre sí tales que $\operatorname{Spec}(A) = Max(A) = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$. Así, $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ y con ello, $\dim(A) = 0$. Sea $I = \operatorname{Nil}(A)$.

$$\begin{aligned} I &= \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \ldots \mathfrak{m}_r \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_1} \cap \sqrt{\mathfrak{m}_2} \cap \ldots \cap \sqrt{\mathfrak{m}_r} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_1}\sqrt{\mathfrak{m}_2} \cdots \sqrt{\mathfrak{m}_r} \\ &= \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_r. \end{aligned}$$

Nuevamente, por la Proposición 2.5, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $I^s = \{0_A\}$. Consideremos la siguiente sucesión decreciente de ideales de A:

$$\begin{array}{lllllll} A & \supseteq & & \mathfrak{m}_1 \supseteq & \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \ldots \supseteq & \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \\ & \supseteq & I \supseteq & I\mathfrak{m}_1 \supseteq & I\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \ldots \supseteq & I\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \\ & \supseteq & I^2 \supseteq & I^2\mathfrak{m}_1 \supseteq & I^2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \ldots \supseteq & I^2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \\ & \vdots & & & & \\ & \supseteq & I^s = \{0_A\}. & & & \end{array}$$

Sabemos que $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}$ es un campo para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sean $i \in \{2, \ldots, r\}$ y $j \in \{2, \ldots, s\}$ y tomemos el $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}$-módulo $L_{(i,j)} = \dfrac{I^{j-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{i-1}}{I^{j-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_i}$. Tomando la sucesión

$$0 \to I^{j-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{i-1} \to A \to \frac{A}{I^{j-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{i-1}} \to 0$$

de A-módulos natural (que es exacta), tenemos que $I^{j-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{i-1}$ es un A-módulo Artiniano. Así, $L_{(i,j)}$ es un A-módulo Artiniano. Como $\mathfrak{m}_i \subseteq \operatorname{Ann}_A\left(L_{(i,j)}\right)$, se tiene que $L_{(i,j)}$ es un A-módulo que tiene la misma estructura como $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}$-módulo $\left(\text{espacio vectorial sobre } \dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}\right)$. Con ello, $L_{(i,j)}$ es un $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}$-módulo Artiniano. Por la Proposición 3.5, resulta que $L_{(i,j)}$ es un $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_i}$-módulo Noetheriano y por consiguiente, $L_{(i,j)}$ es un A-módulo Noetheriano.

Consideremos las siguientes sucesiones exactas de A-módulos (con los morfismos de inclusión y proyección correspondientes):

$$0 \longrightarrow I^s \longrightarrow I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \longrightarrow L_{(r,s)} \longrightarrow 0\ , \tag{53}$$

$$0 \longrightarrow I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \longrightarrow I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-2} \longrightarrow L_{(r-1,s)} \longrightarrow 0\ , \tag{54}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 \longrightarrow I^{s-1} \longrightarrow I^{s-2}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \longrightarrow L_{(r,s-1)} \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow I^{s-2}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1} \longrightarrow I^{s-2}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-2} \longrightarrow L_{(r-1,s-1)} \longrightarrow 0\ ,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}_1} \longrightarrow 0\ . \tag{55}$$

Dado que $I^s = \{0_A\}$ es un A-módulo Noetheriano, por el Corolario 1.46 y la sucesión de A-módulos 53, tenemos que $I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-1}$ es un A-módulo Noetheriano. Así, por el Corolario 1.46 y la sucesión de A-módulos 54, $I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\cdots\mathfrak{m}_{r-2}$ es un A-módulo Noetheriano. Siguiendo de la misma forma, llegamos a la sucesión de A-módulos 55 con $\mathfrak{m}_1$ y $\dfrac{A}{\mathfrak{m}_1}$ A-módulos Noetherianos. Ahora, por el Corolario 1.35, se concluye que A es un A-módulo Noetheriano. Por lo tanto, A es un anillo Noetheriano y $\dim(A) = 0$. □

2. Caso Especial: Dimensión de la Localización

Ahora se aplican los conocimientos de la sección anterior en el caso de la localización de un anillo, con ello, dado un subconjunto multiplicativo S de un anillo A, se observa la relación que hay entre la dimensión de A y la dimensión de $\mathrm{S}^{-1}A$. Es de particular interés el caso de la localización $A_\mathfrak{p}$ de A con $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Proposición 3.7. *Dado un subconjunto multiplicativo S de un anillo A,*

$$\dim(\mathrm{S}^{-1}A) \leq \dim(A).$$

Demostración. Si $\dim(A) = \infty$, entonces $\dim(\mathrm{S}^{-1}A) \leq \dim(A)$. Supongamos que $\dim(A) < \infty$ y consideremos una cadena prima en $\mathrm{S}^{-1}A$ dada por

$$\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_s = \mathfrak{q}$$

con $s \in \mathbb{Z}_+$. Dado $i \in \{0, \ldots, s\}$, existe $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{q}_i = S^{-1}\,\mathfrak{p}_i$, por la Proposición 2.9, tenemos que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \ldots, s-1\}$. Por consiguiente, se tiene una cadena prima de A de la forma $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_s$ y con ello, $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \dim(A)$. Como consecuencia,

$$\dim(S^{-1}A) \leq \dim(A). \quad \square$$

Corolario 3.8. *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A,* $\dim(A_\mathfrak{p}) \leq \dim(A)$.

Demostración. Sea $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Por la Proposición 3.7, $\dim(A_\mathfrak{p}) \leq \dim(A)$. $\square$

Proposición 3.9. *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A,* $\dim(A_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$.

Demostración. Por el Corolario 2.11, tenemos que $(A_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ es un anillo local, por la Proposición 3.3, $\dim(A_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p})$. Más aún, por los Corolarios 2.8 y 2.10, a toda cadena prima de $\mathfrak{p}$, corresponde una cadena prima de $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ de la misma longitud. Por lo tanto,

$$\dim(A_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}). \quad \square$$

3. Dimensión de Chevalley de un Anillo Local Noetheriano

A continuación, definimos la dimensión de Chevalley de un anillo local Noetheriano y presentamos algunas propiedades.

Consideremos un anillo local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ y tomemos el siguiente conjunto:

$$\left\{ r \in \mathbb{Z}_+ \mid \text{ existe un subconjunto } \Gamma \text{ de } \mathfrak{m} \text{ con } |\Gamma| = r \text{ y } \mathfrak{m} = \sqrt{\langle \Gamma \rangle_A} \right\}.$$

Como $\mathfrak{m}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario finitamente generado de A, dicho conjunto no es vacío y por lo tanto, tiene un elemento mínimo.

Definición 33. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano. La dimensión de Chevalley de A es

$$\min \left\{ r \in \mathbb{Z}_+ \mid \text{ existe un subconjunto } \Gamma \text{ de } \mathfrak{m} \text{ con } |\Gamma| = r \text{ y } \mathfrak{m} = \sqrt{\langle \Gamma \rangle_A} \right\}$$

y se denota por $\delta(A)$, o simplemente por δ, cuando no haya confusión con respecto al anillo en cuestión.

Veamos ejemplos de la dimensión de Chevalley:

Ejemplo 3.10.

1. La dimensión de Chevalley de un anillo local Artiniano es cero. En efecto, $\mathrm{Nil}(A) = \mathfrak{m}$ es nilpotente (ver Proposición 2.5), así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sqrt{\{0_A\}} = \sqrt{\mathfrak{m}^k} = \mathfrak{m}.$$
2. Dado un entero primo p, la dimensión de Chevalley del campo $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ es cero.

Definición 34. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano de dimensión $d \in \mathbb{Z}_+$. Un sistema de parámetros de A es un subconjunto Γ de $\mathfrak{m}$ tal que $|\Gamma| = d$ y $\langle \Gamma \rangle_A$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario.

Proposición 3.11. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano y* $n \in \mathbb{N}$ *tales que*
$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{m}^j \supseteq \ldots$$
es una sucesión de ideales de A estable en n. Se tiene lo siguiente:

- $\mathfrak{m}^n = \{0_A\}$,
- $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$, *y*
- *A es un anillo Artiniano.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$. Dado que el *radical de Jacobson* de A es el ideal $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}^n$ es un ideal de A finitamente generado, por el Corolario del Lema de Nakayama (Proposición 2.6 en [**Ati**]), resulta que $\mathfrak{m}^n = \{0_A\}$.
Por otra parte, como $\mathfrak{m} \in Max(A)$, se tiene que $\sqrt{\mathfrak{m}^j} = \mathfrak{m}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, se tiene que
$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^n \subseteq &\quad \mathfrak{p} \quad \subseteq \mathfrak{m}, \\ \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subseteq &\quad \sqrt{\mathfrak{p}} \quad \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}} \\ \mathfrak{m} \subseteq &\quad \mathfrak{p} \quad \subseteq \mathfrak{m}. \end{aligned}$$
Así, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, con ello, $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ y como consecuencia, $\dim(A) = 0$. Finalmente, por el Teorema 3.6, tenemos que A es un anillo Artiniano. □

4. Funciones Polinomiales

Ahora se introducen las funciones polinomiales y veremos la relación que tienen con ciertos módulos graduados finitamente generados. Ello nos permitirá dar resultados importantes en la siguiente sección.

Definición 35. Una función $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ es *polinomial* si existen $k \in \mathbb{Z}_+$ y $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $f(n) = p(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $k < n$.

Cuando se satisfacen las condiciones de la Definición 35, decimos que k y $p(x)$ determinan a f como función polinomial.

Proposición 3.12. *El polinomio que determina a una función polinomial es único.*

Demostración. Sea f una función polinomial determinada por $k_1 \in \mathbb{N}$ y $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y también determinada por $k_2 \in \mathbb{N}$ y $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Tomemos $k = \max\{k_1, k_2\}$, con ello, n es una raíz del polinomio $p(x) - q(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$. Como consecuencia, $\lim_{n\to\infty}(p(x) - q(x)) = 0$, con ello, $p(x) - q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Esto implica que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, el polinomio que determina a la función polinomial f es único. $\square$

Definición 36. Sea f una función polinomial determinada por el polinomio $p(x)$. El grado de f es el grado de $p(x)$ y es denotado por $\mathrm{gr}(f)$.

Ejemplo 3.13.

1. La función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

es polinomial de grado 2. En efecto, para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, $f(n) = p(n)$, donde

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \in \mathbb{Q}[x].$$

2. Todo elemento de $\mathbb{Q}[x]$ con dominio retringido a $\mathbb{Z}_+$ es una función polinomial.
3. Dado $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la siguiente función no es polinomial:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto g(n) = \gamma. \end{aligned}$$

Definición 37. El operador Δ de funciones polinomiales es el siguiente: Dada una función polinomial f, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Observación 3.14. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, se tiene que

$$a^i - b^i = (a-b)\left(a^{i-1} + a^{i-2}b + \ldots + ab^{i-2} + b^{i-1}\right).$$

Demostración. Por inducción sobre i: Si $i = 2$, entonces $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Supongamos que $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y

$$a^r - b^r = (a-b)\left(a^{r-1} + a^{r-2}b + \ldots + ab^{r-2} + b^{r-1}\right).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
a^{r+1} - b^{r+1} &= a^{r+1} - ab^r + ab^r - b^{r+1} \\
&= aa^r - ab^r + ab^r - bb^r \\
&= a\,(a^r - b^r) + b^r(a-b) \\
&= a(a-b)\left(a^{r-1} + a^{r-2}b + \ldots + ab^{r-2} + b^{r-1}\right) + b^r(a-b) \\
&= (a-b)a\left(a^{r-1} + a^{r-2}b + \ldots + ab^{r-2} + b^{r-1}\right) + (a-b)b^r \\
&= (a-b)\left(a^r + a^{r-1}b + \ldots + a^2b^{r-2} + ab^{r-1}\right) + (a-b)b^r \\
&= (a-b)\left(a^r + a^{r-1}b + \ldots + a^2b^{r-2} + ab^{r-1} + b^r\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \ldots + ab^{i-2} + b^{i-1})$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. □

Lema 3.15. *Dada una función polinomial f determinada por $k \in \mathbb{N}$ y $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, se tiene lo siguiente:*

1. *Δf es una función polinomial determinada por k y $p(x+1) - p(x)$.*
2. *Si $1 \leq \mathrm{gr}(f)$, entonces $\mathrm{gr}(\Delta f) = \mathrm{gr}(f) - 1$.*

Demostración. Sea $q(x) = p(x+1) - p(x)$.

1. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$. Así, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = p(n+1) - p(n) = q(n)$.
2. Supongamos que $p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ con $r \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$ y $a_r \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned}
q(x) &= p(x+1) - p(x) \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i(x+1)^i - \sum_{i=0}^{r} a_i x^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{r} a_i(x+1)^i - a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i\left((x+1)^i - x^i\right).
\end{aligned}
$$

Por la Observación 3.14, se tiene que

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{i=0}^{r} a_i\left(((x+1)-x)\left((x+1)^{i-1} + (x+1)^{i-2}x + \ldots + (x+1)x^{i-2} + x^{i-1}\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i\left((1)\left((x+1)^{i-1} + (x+1)^{i-2}x + \ldots + (x+1)x^{i-2} + x^{i-1}\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i\left((x+1)^{i-1} + (x+1)^{i-2}x + \ldots + (x+1)x^{i-2} + x^{i-1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r} a_i \sum_{j=0}^{i-1}(x+1)^{i-1-j}x^j.
\end{aligned}
$$

Tenemos que $gr\left((x+1)^{i-1-j}x^j)\right) = i-1$ para todo $j \in \{0,\ldots,i-1\}$, así, $\mathrm{gr}\left(\sum_{j=0}^{i-1}(x+1)^{i-1-j}x^j\right) = i-1$. Dado que $a_r \neq 0$, resulta que

$$
\begin{aligned}
r-1 &= \mathrm{gr}\left(\sum_{j=0}^{r-1}(x+1)^{r-1-j}x^j\right) \\
&= \mathrm{gr}\left(a_r\sum_{j=0}^{r-1}(x+1)^{r-1-j}x^j\right) \\
&= \mathrm{gr}\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{i-1}(x+1)^{i-1-j}x^j\right) \\
&= \mathrm{gr}(q) \\
&= \mathrm{gr}(\Delta f).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathrm{gr}(\Delta f) = r-1 = \mathrm{gr}(f) - 1$. □

Proposición 3.16. *Dada una función polinomial f tal que $1 \leq \mathrm{gr}(f)$, se tiene que $\mathrm{gr}(f) = s$ si, y sólo si, $\mathrm{gr}(\Delta f) = s-1$.*

Demostración. Si $\mathrm{gr}(f) = s$, entonces por el inciso 2 del Lema 3.15, se tiene que $\mathrm{gr}(\Delta f) = s - 1$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{gr}(\Delta f) = s - 1$. Si $\mathrm{gr}(f) = r \neq s$, por el Lema 3.15, tenemos que $\mathrm{gr}(\Delta f) = \mathrm{gr}(f) - 1 = r - 1 \neq s - 1$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{gr}(f) = s$. □

Proposición 3.17. *Para todo* $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ *existe* $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que* $\mathrm{gr}(h) = \mathrm{gr}(p) + 1$ *y* $p(x) = h(x+1) - h(x)$

Demostración. Por inducción sobre $\mathrm{gr}(p)$, se tiene lo siguiente:
Si $\mathrm{gr}(p) = 0$, entonces existe $a_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $p(x) = a_0$. Sea $h(x) = a_0 x$. Tenemos que $\mathrm{gr}(h) = 1 = \mathrm{gr}(p) + 1$ y $p(x) = a_0 = a_0(x+1) - a_0 x = h(x+1) - h(x)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para cualquier $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(q) = n - 1$, existe $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(g) = n$ y $q(x) = g(x+1) - g(x)$.
Tomemos $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(p) = n$. Existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ tales que $a_n \neq 0$ y $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Veamos que existe $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(h) = n + 1$ y $p(x) = h(x+1) - h(x)$. En efecto, dicho polinomio existe si, y sólo si, existen $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tales que $b_{n+1} \neq 0$, $h(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ y $p(x) = h(x+1) - h(x)$, o bien, existen $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tales que $b_{n+1} \neq 0$ y

$$
\begin{aligned}
p(x) &= b_{n+1}(x+1)^{n+1} + b_n(x+1)^n + \ldots + b_1(x+1) + b_0 \\
&\quad -\left(b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0\right) \\
&= b_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k + b_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \ldots + b_2(x^2+2x+1) + b_1(x+1) + b_0 \\
&\quad -b_{n+1}x^{n+1} - b_n x^n - \ldots - b_2x^2 - b_1x - b_0 \\
&= b_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + b_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k + \ldots + b_2(2x+1) + b_1, \\
&= \quad \binom{n+1}{n}b_{n+1}x^n \\
&\quad +\left(\binom{n+1}{n-1}b_{n+1} + \binom{n}{n-1}b_n\right)x^{n-1} \\
&\quad +\left(\binom{n+1}{n-2}b_{n+1} + \binom{n}{n-2}b_n + \binom{n-1}{n-2}b_{n-1}\right)x^{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&+\left(\binom{n+1}{2}b_{n+1}+\binom{n}{2}b_n+\binom{n-1}{2}b_{n-1}+\ldots+\binom{3}{2}b_3\right)x^2\\
&+\left(\binom{n+1}{1}b_{n+1}+\binom{n}{1}b_n+\binom{n-1}{1}b_{n-1}+\ldots+\binom{2}{1}b_2\right)x\\
&+\left(\binom{n+1}{0}b_{n+1}+\binom{n}{0}b_n+\binom{n-1}{0}b_{n-1}+\ldots+\binom{1}{0}b_1\right).
\end{aligned}
$$

Es decir, existe un sistema soluble de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ variables de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \binom{n+1}{n}b_{n+1},\\
a_{n-1} &= \binom{n+1}{n-1}b_{n+1}+\binom{n}{n-1}b_n\\
&\vdots\\
a_1 &= (n+1)b_{n+1}+nb_n+(n-1)b_{n-1}+\ldots+2b_2\\
a_0 &= b_{n+1}+b_n+b_{n-1}+\ldots+b_1.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Consideremos la matriz triangular extendida de la forma:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_{n+1} & a_0\\
0 & 2b_2 & \ldots & nb_n & (n+1)b_{n+1} & a_1\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n-1}b_n & \binom{n+1}{n-1}b_{n+1} & a_{n-1}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{n+1}{n}b_{n+1} & a_n
\end{array}\right).
$$

Dado que $\binom{n+1}{n}\neq 0$, $b_{n+1}\neq 0$ y $a_n\neq 0$, la ecuación $\binom{n+1}{n}b_{n+1}=a_n$ tiene solución y así, el sistema de ecuaciones (56) tiene solución única diferente de cero. Por lo tanto, existe $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(h(x))=n+1$ y $p(x)=h(x+1)-h(x)$. $\square$

Se tomará la siguiente convención: El polinomio $0\in\mathbb{Q}[x]$ tiene grado k para todo $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$. Así, 0 es el único polinomio de $\mathbb{Q}[x]$ que tiene grado k para todo $k\in\mathbb{Z}$.

Lema 3.18. *Sean* $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ *un anillo graduado y* S *un subconjunto finito de* A_1 *tales que* $A = A_0[S]$*. Se tiene que* A_γ *es un* A_0*-módulo finitamente generado para todo* $\gamma \in \mathbb{Z}_+$*. Más aún:*

- *Si* $S = \emptyset$*, entonces* 1_A *genera al* A_0*-módulo* A*.*
- *Si* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ *con* $s \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s}\right)_{\{(i_1,i_2,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \mid \, i_1+i_2+\ldots+i_s=\gamma\}}$$

  es una familia generadora del A_0*-módulo* A_γ*.*

Demostración. Supongamos que $S = \emptyset$. Tenemos que $A = A_0[S] = A_0$ y sabemos que 1_A genera al A-módulo A. Así, 1_A genera al A_0-módulo A.
Supongamos que $S = \{x_1, \ldots, x_s\}$ con $s \in \mathbb{N}$. Sean $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha_\gamma = \binom{\gamma+s-1}{s-1}$. Por la Proposición A.3 del Apéndice A, el A_0-módulo A_γ generado por la familia

$$\left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s}\right)_{\{(i_1,i_2,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \mid \, i_1+i_2+\ldots+i_s=\gamma\}}$$

es isomorfo a un cociente del A_0-módulo libre $A_0^{\alpha_\gamma}$. Como $A_0^{\alpha_\gamma}$ es un A_0-módulo finitamente generado, entonces A_γ es un A_0-módulo finitamente generado. □

Lema 3.19. *Sean* $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ *un anillo graduado y* S *un subconjunto finito de* A_1 *tales que* $A = A_0[S]$*. Si* A_0 *es un anillo Artiniano y* $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} M_k$ *es un* A*-módulo graduado finitamente generado, entonces* M_n *es un* A_0*-módulo de longitud finita para todo* $n \in \mathbb{Z}_+$*.*

Demostración. Por la proposición 1.57, tenemos que A_0 es un subanillo de A. Como M es un A-módulo graduado, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, se sigue que $A_0 M_n \subseteq M_n$. Por consiguiente, M_n es un A_0-módulo.
Como M es un A-módulo finitamente generado, existen $r' \in \mathbb{N}$ y $m'_1, \ldots, m'_{r'} \in M$ tales que

$$M = Am'_1 + \ldots + Am'_{r'}. \tag{57}$$

Dado $i \in \{1, \ldots, r'\}$, existe una única descomposición de m'_i en elementos homogéneos de M como sigue:

$$m'_i = m_{(i,0)} + m_{(i,1)} + \ldots + m_{(i,n_i)},$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}_+$ y $m_{(i,k)} \in M_k$ para todo $k \in \{0, \ldots, n_i\}$. Por la ecuación (57), tenemos que

$$
\begin{aligned}
M &= A\left(m_{(1,0)} + m_{(1,1)} + \ldots + m_{(1,n_1)}\right) \\
&\quad + A\left(m_{(2,0)} + m_{(2,1)} + \ldots + m_{(2,n_2)}\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + A\left(m_{(r',0)} + m_{(r',1)} + \ldots + m_{(r',n_{r'})}\right) \\
&\subseteq Am_{(1,0)} + Am_{(1,1)} + \ldots + Am_{(1,n_1)} \\
&\quad + Am_{(2,0)} + Am_{(2,1)} + \ldots + Am_{(2,n_2)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + Am_{(r',0)} + Am_{(r',1)} + \ldots + Am_{(r',n_{r'})}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, $m_{(i,k)} \in M$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, r'\}$ y $k \in \{0, \ldots, n_i\}$, con ello,

$$
\begin{aligned}
M &\supseteq Am_{(1,0)} + Am_{(1,1)} + \ldots + Am_{(1,n_1)} \\
&\quad + Am_{(2,0)} + Am_{(2,1)} + \ldots + Am_{(2,n_2)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + Am_{(r',0)} + Am_{(r',1)} + \ldots + Am_{(r',n_{r'})}.
\end{aligned}
$$

Así, existen $r \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$ y $m_i \in M_{k_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$ tales que

$$M = Am_0 + \ldots + Am_r. \tag{58}$$

Si $S = \emptyset$, entonces $A = A_0[\emptyset] = A_0$. Así, M es un A_0-módulo finitamente generado. Como A_0 es un anillo Noetheriano y Artiniano, por las Proposiciones 1.38 y 1.48, M es un A_0-módulo Noetheriano y Artiniano. Por la Proposición 1.52, M es un A_0-módulo de longitud finita. Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, M_n es un A_0-submódulo de M. Por la Proposición 1.51, se tiene que M_n es un A_0-módulo de longitud finita.

Supongamos que $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \subseteq A_1$ con $s \in \mathbb{N}$. Sean $n \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in M_n$. Por la expresión (58), existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in A$ tales que

$$m = \lambda_0 m_0 + \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r. \tag{59}$$

Dado $i \in \{0, \ldots, r\}$, tenemos que $\lambda_i m_i \in M_n$. Como $m_i \in M_{k_i}$, resulta que $\lambda_i \in A_{n-k_i}$. Por el Lema 3.18, sabemos que A_{n-k_i} es un A_0-módulo finitamente generado, con ello, $A_{n-k_i} m_i$

es un A_0-módulo finitamente generado. Así, $P = A_{n-k_0}m_0 + A_{n-k_1}m_1 + \ldots + A_{n-k_r}m_r$ es un A_0-módulo finitamente generado. Como A_0 es un anillo Noetheriano, por la Proposición 1.38, se tiene que P es un A_0-módulo Noetheriano. Dado que M_n es un A_0-submódulo de P, por la Proposición 1.32, tenemos que M_n es un A_0-módulo finitamente generado. Como consecuencia de las Proposiciones 1.38 y 1.48, se tiene que M_n es un A_0-módulo Noetheriano y Artiniano. Finalmente, por la Proposición 1.52, M_n es un A_0-módulo de longitud finita. □

Notación 38. Sean $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ un anillo graduado y $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} M_k$ un A-módulo graduado. Se tomará la siguiente expresión:

$$M_+ = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_j.$$

Lema 3.20. *Sean $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ un anillo graduado y $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} M_k$ un A-módulo graduado. Se tiene que M_+ es un A-submódulo de M.*

Demostración. Sabemos que M_+ es un subgrupo de M. Ahora veamos el comportamiento del producto por escalares en M_+. Basta mostrar que $AM_+ \subseteq M_+$. Sea $\lambda \in A$. Existen $v \in \mathbb{Z}_+$ y $\lambda_0 \in A_0$, $\lambda_1 \in A_1, \ldots, \lambda_v \in A_v$ tales que $\lambda = \lambda_0 + \ldots + \lambda_v$. Dado $m \in M_+$, existen $u \in \mathbb{N}$ y $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2, \ldots, m_u \in M_u$ de forma que $m = m_1 + \ldots + m_u$. Con ello, $\lambda m = \sum_{j=0}^{v}\sum_{i=1}^{u} \lambda_j m_i$. Sean $i \in \{1, \ldots, u\}$ y $j \in \{0, \ldots, v\}$. Tenemos que $\lambda_j m_i \in M_{i+j}$ y $1 \leq i + j$. Así, $\lambda m \in M_+$. Por lo tanto, M_+ es un A-submódulo de M. □

Lema 3.21. *Sean $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ un anillo graduado, $s \in \mathbb{N}$ y $S = \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq A_1$ tales que $A = A_0[S]$. Dados un A-módulo graduado $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} M_k$ y el morfismo*

$$\begin{aligned} \varphi_n : M_n &\rightarrow M_{n+1} \\ m &\mapsto x_s m \end{aligned}$$

de A_0-módulos para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:

- $K = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} \ker \varphi_k$ *es un A-submódulo de M, y*
- $C = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} \operatorname{coker} \varphi_k$ *es un A-módulo.*

Antes de continuar con la prueba de este lema, dado $n \in \mathbb{N}$ y tomando el morfismo de A_0-módulos correspondiente en dicho enunciado, consideraremos las siguientes notaciones:

$$K_n = \ker \varphi_n \qquad \text{y} \qquad C_{n+1} = \operatorname{coker} \varphi_n.$$

Demostración. Mostraremos que K es un A-submódulo de M. En efecto, como $(K, +)$ es la suma directa de subgrupos de $(M, +)$, tenemos que $(K, +)$ es un subgrupo de $(M, +)$, falta mostrar que $AK \subseteq K$.
Sean $\lambda \in A$ y $m \in K$. Existen $u \in \mathbb{Z}_+$ y $m_0 \in K_0$, $m_1 \in K_1$, ..., $m_u \in K_u$ tales que

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_u$$

y existen $v \in \mathbb{Z}_+$ y $\lambda_0 \in A_0$, $\lambda_1 \in A_1$, ..., $\lambda_v \in A_v$ tales que

$$\lambda = \lambda_0 + \ldots + \lambda_v. \tag{60}$$

Tenemos que $\lambda m = \sum_{j=0}^{v} \sum_{i=0}^{u} \lambda_j m_i$. Dados $i \in \{0, \ldots, u\}$ y $j \in \{0, \ldots, v\}$, se tiene que $\lambda_j m_i \in M_{i+j}$. Así,

$$\begin{aligned} x_s(\lambda_j m_i) &= (x_s\lambda_j)m_i \\ &= (\lambda_j x_s)m_i \\ &= \lambda_j(x_s m_i) \\ &= \lambda_j 0_M \\ &= 0_M, \end{aligned}$$

como consecuencia, $\lambda_j m_i \in K_{i+j}$. Así, $\lambda m \in K$, por lo tanto, $AK \subseteq K$.
Ahora veamos que C es un A-módulo. En efecto, sabemos que C tiene estructura de grupo porque es una suma directa de grupos. Sean $\lambda \in A$ y $z \in C$. Así, λ tiene una descomposición en elementos homogéneos de A como en la expresión (60) y existen $u \in \mathbb{N}$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, ..., $m_u \in M_u$ tales que

$$z = (m_1 + x_s M_0) + \ldots + (m_u + x_s M_{u-1}). \tag{61}$$

Teniendo en cuenta tales descomposiciones de z y λ en elementos homogéneos, consideremos la asignación siguiente:

$$\begin{array}{rcl}\psi : A \times C & \to & C \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z = \displaystyle\sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} (\lambda_j m_i + x_s M_{i+j-1}).\end{array}$$

Veamos que ψ está bien definida. Sean λ y z dadas como en las expresiones (60) y (61), tomemos $(\lambda', z') \in A \times C$ tal que $(\lambda', z') = (\lambda, z)$. Esto implica que $\lambda' = \lambda$ y existen $m'_1 \in M_1$, $m'_2 \in M_2$, ..., $m'_u \in M_u$ tales que

$$\begin{array}{rcl} z' & = & (m'_1 + x_s M_0) + \ldots + (m'_u + x_s M_{u-1}) \\ & = & (m_1 + x_s M_0) + \ldots + (m_u + x_s M_{u-1}). \end{array}$$

Sea $i \in \{1, \ldots, u\}$, así, $m_i + x_s M_{i-1} = m'_i + x_s M_{i-1}$, esto implica que $m_i - m'_i \in x_s M_{i-1}$. Dado $j \in \{0, \ldots, v\}$, se tiene que $\lambda_j(m_i - m'_i) \in x_s M_{i+j-1}$. Con ello, $\lambda_j m_i - \lambda_j m'_i \in x_s M_{i+j-1}$ y como consecuencia, $\lambda_j m_i + x_s M_{i+j-1} = \lambda_j m'_i + x_s M_{i+j-1}$. Por consiguiente,

$$\begin{array}{rcl} \psi(\lambda, z) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} (\lambda_j m_i + x_s M_{i+j-1}) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} \left(\lambda_j m'_i + x_s M_{i+j-1}\right) \\ & = & \psi\left(\lambda', z'\right). \end{array}$$

Sea $\mu \in A$ tal que $\mu = \mu_0 + \ldots + \mu_w$ es la descomposición de μ en elementos homogéneos de A, donde $w \in \mathbb{N}$ y $\mu_0 \in A_0$, ..., $\mu_w \in A_w$. Mostraremos que $\mu(\lambda z) = (\mu\lambda)z$.

$$\begin{array}{rcl} \mu(\lambda z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{w} \mu_k \left(\sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} \lambda_j m_i + x_s M_{i+j-1} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{w} \sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} \left(\mu_k(\lambda_j m_i) + x_s M_{(i+j)+k-1}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{w} \sum_{j=0}^{v} \sum_{i=1}^{u} \left((\mu_k \lambda_j) m_i + x_s M_{(i+j)+k-1}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{w} \sum_{j=0}^{v} (\mu_k \lambda_j) \sum_{i=1}^{u} (m_i + x_s M_{i+(j+k)-1}) \end{array}$$

$$= \quad (\mu\lambda)z.$$

Sea $z' \in C$ tal que $z' = (m'_1 + x_s M_0) + \ldots + (m'_{u'} + x_s M_{u'-1})$ es la descomposición de z' en elementos homogéneos de C, donde $u' \in \mathbb{N}$ y $m'_1 \in M_1, \ldots, m'_{u'} \in M_{u'}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u = u'$. Veamos que $\lambda(z + z') = \lambda z + \lambda z'$.

$$\begin{aligned}
\lambda(z+z') &= \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_0(m_i + m'_i) + x_s M_{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_1(m_i + m'_i) + x_s M_i\right) + \cdots \\
&\quad + \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_v(m_i + m'_i) + x_s M_{i+v-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_0 m_i + x_s M_{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_0 m'_i + x_s M_{i-1}\right) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_1 m_i + x_s M_i\right) + \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_1 m'_i + x_s M_i\right) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_v m_i + x_s M_{i+v-1}\right) + \sum_{i=1}^{u'}\left(\lambda_v m'_i + x_s M_{i+v-1}\right) \\
&= \lambda z + \lambda z'.
\end{aligned}$$

De manera similar, se muestra que la adición de A distribuye al producto por escalares. Es claro que $1_A z = z$, por lo tanto, C tiene la estructura de un A-módulo. □

Teorema 3.22. *Sean $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k$ un anillo graduado y S un subconjunto finito de A_1 tales que $A = A_0[S]$. Si A_0 es un anillo Artiniano y $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} M_k$ es un A-módulo graduado finitamente generado, entonces la función*

$$\begin{aligned}
\psi_{(A,M)} : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \ell_{A_0}(M_n)
\end{aligned}$$

es polinomial de grado menor o igual que $|S| - 1$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Por el Lema 3.19, se tiene que M_n es un A_0-módulo de longitud finita y por lo tanto, $\psi_{(A,M)}$ es una aplicación bien definida. Falta mostrar que $\psi_{(A,M)}$ es una función polinomial de grado a lo más $|S| - 1$. Se probará por inducción sobre

$|S| = s$:
Si $s = 0$, entonces $S = \emptyset$. Así, $A = A_0[\emptyset] = A_0$. Como M es un A-módulo finitamente generado, existen $r \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$ y $m_i \in M_{k_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$ tales que

$$\begin{aligned} M &= Am_0 + \ldots + Am_r \\ &= A_0 m_0 + \ldots + A_0 m_r \end{aligned} \tag{62}$$

(ver expresión (58) en la prueba del Lema 3.19). Podemos suponer que $k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_r$. Dado $j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k_r < j$, mostraremos que $M_j = \{0_M\}$. En efecto, sea $m \in M_j$. Así,

$$m = 0_{M_0} + 0_{M_1} + \ldots + 0_{M_{j-1}} + m \tag{63}$$

es la descomposición de m en elementos homogéneos de M. Por la ecuación (62), existe $\mu_i \in A_0$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$ tal que

$$\begin{aligned} m &= \mu_0 m_0 + \mu_1 m_1 + \ldots + \mu_r m_r \\ &= \mu_0 m_0 + \mu_1 m_1 + \ldots + \mu_r m_r + 0_{M_{k_r+1}} + 0_{M_{k_r+2}} + \ldots + 0_{M_j}, \end{aligned} \tag{64}$$

con $\mu_i m_i \in M_{k_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$. Consideremos la proyección natural

$$\pi_j : \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} M_k \to M_j.$$

Por las expresiones (63) y (64), tenemos que $m = \pi_j(m) = 0_{M_j} = 0_M$, con ello, $M_j = \{0_M\}$. Como consecuencia, $\ell_{A_0}(M_n) = \ell_{A_0}(\{0_M\}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $k_r < n$.
Por lo tanto, la función $\psi_{(A,M)}$ es polinomial y está determinada por k_r y por el polinomio $p(x) = 0 \in \mathbb{Q}[x]$. Más aún, $\mathrm{gr}\left(\psi_{(A,M)}\right) = \mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(0) = -1 = |S| - 1$.
Supongamos que para todo anillo graduado $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} B_k$ y para cualquier subconjunto finito S' de B_1 tales que $B = B_0[S']$ y $|S'| < s$, si B_0 es un anillo Artiniano y $N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} N_k$ es un B-módulo graduado finitamente generado, entonces la siguiente función es polinomial de grado menor o igual que $|S'| - 1$:

$$\begin{aligned} \psi_{(B,N)} : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ell_{B_0}(N_n). \end{aligned}$$

Sea $S = \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq A_1$. Consideremos el morfismo de A_0-módulos siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n : M_n & \to & M_{n+1} \\ m & \mapsto & x_s m. \end{array}$$

Tomemos los A-módulos

$$K = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} K_k, \qquad C = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} C_k$$

y al morfismo de A-módulos dado por

$$\begin{array}{rcl} \phi : M_+ & \to & \displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{M_{k+1}}{x_s M_k} = C, \\ m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r & \mapsto & \quad (m_1 + x_s M_0) \\ & & +(m_2 + x_s M_1) \\ & & \vdots \\ & & +(m_r + x_s M_{r-1}), \end{array}$$

donde $r \in \mathbb{N}$ y $m_i \in M_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Es claro que ϕ es sobre. Veamos que $\ker\phi = x_s M$. En efecto, sea $m = m_1 + \ldots + m_r \in M_+$, donde $r \in \mathbb{N}$ y $m_i \in M_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Supongamos que $m \in \ker\phi$. Ésto es, $\phi(m_1 + m_2 + \ldots + m_r) = 0_C$. Es decir,

$$(m_1 + x_s M_0) + (m_2 + x_s M_1) + \ldots + (m_r + x_s M_{r-1}) = 0_C,$$

o bien,

$$(m_1 + x_s M_0) = (m_2 + x_s M_1) = \ldots = (m_r + x_s M_{r-1}) = 0_C$$

(porque la descomposición en elementos homogéneos de elementos de C es única). Esto equivale a tener que $m_1 \in x_s M_0$, $m_2 \in x_s M_1$, …, $m_r \in x_s M_{r-1}$. Ello significa que existen $m'_0 \in M_0$, $m'_1 \in M_1$, …, $m'_{r-1} \in M_{r-1}$ tales que

$$\begin{array}{rcl} m_1 & = & x_s m'_0, \\ m_2 & = & x_s m'_1, \\ & \vdots & \\ m_r & = & x_s m'_{r-1}. \end{array}$$

Es decir, existen $m_0' \in M_0$, $m_1' \in M_1, \ldots, m_{r-1}' \in M_{r-1}$ tales que

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \ldots + m_r \\ &= x_s m_0' + x_s m_1' + \ldots + x_s m_{r-1}' \\ &= x_s \left(m_0' + m_1' + \ldots + m_{r-1}'\right). \end{aligned}$$

Ésto es, $m \in x_s M$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, tenemos que $x_s M$ es un A-submódulo de M_+ y los A-módulos $\dfrac{M_+}{x_s M}$ y C son isomorfos. Más aún, $x_s \in \mathrm{Ann}_A(C)$.
Por otra parte, dado que A_0 es un anillo Artiniano, por el Teorema 3.6, se tiene que A_0 es un anillo Noetheriano. Como S es finito, por el *Teorema de la Base de Hilbert*, tenemos que $A = A_0[S]$ es un anillo Noetheriano y así, por la Proposición 1.38, M es un A-módulo Noetheriano. Por los Lemas 3.20 y 3.21, tenemos que M_+ y K son A-submódulos de M, así, por la Proposición 1.33, resulta que M_+ y K son A-módulos finitamente generados. Más aún, dado que C es un A-módulo isomorfo a $\dfrac{M_+}{x_s M}$, tenemos que C es un A-módulo finitamente generado.
Ahora, tomemos en cuenta lo siguiente:

- Como $x_s \in \mathrm{Ann}_A(K)$, K es un $\dfrac{A}{Ax_s}$-módulo con la misma estructura de A-módulo.
- Como $x_s \in \mathrm{Ann}_A(C)$, C es un $\dfrac{A}{Ax_s}$-módulo con la misma estructura de A-módulo.
- Los anillos $\dfrac{A}{Ax_s}$ y $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ son isomorfos.

Como consecuencia, K y C son $A[x_1, \ldots, x_{s-1}]$-módulos finitamente generados. Dado que $A[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ es un anillo graduado con la graduación estándar, por hipótesis de inducción, las siguientes son funciones polinomiales de grado a lo más $|S| - 2$:

$$\begin{aligned} \psi_{(A[x_1,\ldots,x_{s-1}],K)} : \mathbb{Z}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ell_{A_0}(K_t), \\ \psi_{(A[x_1,\ldots,x_{s-1}],C)} : \mathbb{Z}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ell_{A_0}(C_t). \end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, tenemos la sucesión exacta de A_0-módulos siguiente:

$$0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{\iota_n} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} C_{n+1} \longrightarrow 0, \tag{65}$$

donde ι_n es la inclusión de K_n en M_n y π_n es la proyección natural de M_{n+1} en C_{n+1}. Por el Corolario 1.56, tenemos que

$$\begin{aligned}\ell_{A_0}(K_n) - \ell_{A_0}(M_n) + \ell_{A_0}(M_{n+1}) - \ell_{A_0}(C_{n+1}) = 0,\\ \ell_{A_0}(M_{n+1}) - \ell_{A_0}(M_n) = \ell_{A_0}(C_{n+1}) - \ell_{A_0}(K_n).\end{aligned}$$

Como $\ell_{A_0}(C_{n+1}) - \ell_{A_0}(K_n)$ es una función polinomial de grado menor o igual que $|S| - 2$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & f(k) = \ell_{A_0}(M_{k+1}) - \ell_{A_0}(M_k) \end{array}$$

es una función polinomial de grado a lo más $|S|-2$. Supongamos que $f(k)$ está determinada por $l \in \mathbb{Z}_+$ y $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ como función polinomial. Por la Proposición 3.17, existe $h(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ tal que $\mathrm{gr}(h) \leq |S| - 1$ y $p(x) = h(x + 1) - h(x)$.
Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $l < k$, así,

$$p(k) = \ell_{A_0}(M_{k+1}) - \ell_{A_0}(M_k) = h(k + 1) - h(k)$$

y se tiene que

$$\ell_{A_0}(M_{k+1}) = h(k + 1) + \ell_{A_0}(M_k) - h(k). \tag{66}$$

Sea $u = \ell_{A_0}(M_l) - h(l)$. Veamos que $\ell_{A_0}(M_k) = h(k) + u$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $l < k$. Por inducción sobre k:
Si $k = l + 1$, por la ecuación (66), tenemos que $\ell_{A_0}(M_{l+1}) = h(l + 1) + u$. Sea $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $l < k$ y $\ell_{A_0}(M_k) = h(k) + u$. Por la ecuación (66),

$$\begin{aligned}\ell_{A_0}(M_{k+1}) &= h(k + 1) + \ell_{A_0}(M_k) - h(k)\\ &= h(k + 1) + \big(h(k) + u\big) - h(k)\\ &= h(k + 1) + u.\end{aligned}$$

Como consecuencia, $\ell_{A_0}(M_k) = h(k) + u$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $l < k$. Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi_{(A,M)} : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \ell_{A_0}(M_n) \end{array}$$

es una función polinomial determinada por $l \in \mathbb{Z}_+$ y por el polinomio $h(x) + u$. Más aún,

$$\mathrm{gr}(\psi_{(A,M)}) = \mathrm{gr}(h(x) + u) = \mathrm{gr}(h) \leq |S| - 1.$$

De esta manera se ha probado el enunciado. □

Ejemplo 3.23. Recordemos los casos dados en el Ejemplo 1.60 visto en la Sección 7 del Capítulo 1. Sea k un campo, así, k es un anillo Artiniano y tenemos lo siguiente:

1. Sea x una variable de k. Para todo $d \in \mathbb{Z}_+$, tenemos que $k[x]_d = kx^d$, con ello,

$$\begin{aligned} k[x]_0 &= k, \\ \{x\} &\subseteq k[x]_1, \\ k[x] &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_+} k[x]_d \\ &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_+} kx^d. \end{aligned}$$

   Por la Proposición 3.5, se tiene que $\ell_k(k[x]_d) = \ell_k\left(kx^d\right) = \dim_k\left(kx^d\right) = 1$ para todo $d \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, la función

$$\begin{aligned} \psi_{(k[x],k[x])} : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\ d &\mapsto \ell_k(k[x]_d) = 1 \end{aligned}$$

   es polinomial de grado $|\{x\}| - 1 = 0$, determinada por 0 y por el polinomio $p(x) = 1$.

2. Sean $s \in \mathbb{Z}_+$ y $S = \{x_1, \ldots, x_s\}$ un conjunto de variables de k linealmente independientes sobre k. Tenemos que

$$\begin{aligned} k[S] &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_+} k[S]_d \\ &\simeq \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_+} k^{\binom{d+s-1}{s-1}} \\ k[S]_0 &= k, \\ S &\subseteq k[S]_1. \end{aligned}$$

   El isomorfismo de k-módulos de la expresión anterior es dado por la Proposición A.3 del Apéndice A. Más aún, por la Proposición 3.5, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\ell_k(k[S]_d) &= \ell_k\left(k^{\binom{d+s-1}{s-1}}\right) \\
&= \dim_k\left(k^{\binom{d+s-1}{s-1}}\right) \\
&= \binom{d+s-1}{s-1} \\
&= \frac{(d+s-1)(d+s-2)\cdots(d+1)d!}{(s-1)!d!} \\
&= \frac{(d+s-1)(d+s-2)\cdots(d+1)}{(s-1)!}.
\end{aligned}
$$

En congruencia con el Teorema 3.22, la función

$$
\begin{aligned}
\psi_{(k[S],k[S])} : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\
d &\mapsto \frac{(d+s-1)(d+s-2)\cdots(d+1)}{(s-1)!}
\end{aligned}
$$

es polinomial de grado $|S|-1$, determinada por 0 y por el polinomio

(67) $$p(x) = \frac{(x+s-1)(x+s-2)\cdots(x+1)}{(s-1)!}.$$

3. Sean x y y dos variables de k linealmente independientes sobre k. Consideremos el conjunto $S' = \{x, y, x+y\}$ y el anillo de polinomios $k[S'] = k[x,y]$. Por lo visto en el inciso 2, la función $\psi_{(k[S'],k[S'])} = \psi_{(k[x,y],k[x,y])}$ es polinomial determinada por el polinomio $p(x) = x+1$ (vease la ecuación (67)). Así,

$$\mathrm{gr}\left(\psi_{(k[S'],k[S'])}\right) = \mathrm{gr}(p) = 1 < |S'| - 1.$$

5. Filtraciones y Polinomio de Hilbert de un Anillo Local Noetheriano

La finalidad de esta sección es introducir el *polinomio de Hilbert* de un módulo finitamente generado sobre un anillo local Noetheriano, siendo de particular interés el caso de los anillos locales Noetherianos vistos como módulos y así, establecer una cota finita para la dimensión de dichos anillos (acotada a su vez por la dimensión de Chevalley).

Para alcanzar este objetivo, dado un ideal I de un anillo local $(A, \mathfrak{m})$, se presentará el concepto de *filtración* de un A-módulo con respecto a I (I-filtración). Prestaremos especial atención para el caso en que I sea un ideal $\mathfrak{m}$-primario.

Definición 39. Sea A un anillo. Una filtración de A es una sucesión decreciente

$$A = J_0 \supseteq J_1 \supseteq \dots \tag{68}$$

de ideales de A tal que $J_n J_m \subseteq J_{n+m}$ para cualesquiera n y $m \in \mathbb{Z}_+$.

Dada una filtración como en la definición 39, podemos construir un anillo graduado A' de la siguiente manera:

- La graduación y la estructura aditiva de A' está dada por el grupo $A' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{J_n}{J_{n+1}}$.
- Tomemos $A'_n = \dfrac{J_n}{J_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, sean k, $k' \in \mathbb{Z}_+$ y $\alpha_i = x_i + J_{i+1} \in A'_i$, $\beta_j = y_j + J_{j+1} \in A'_j$, donde $x_i \in J_i$ y $y_j \in J_j$ para cualesquiera $i \in \{0, \dots, k\}$ y $j \in \{0, \dots, k'\}$. Dados $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_k$ y $\beta = \beta_0 + \dots + \beta_{k'} \in A'$, podemos considerar que $k = k'$, con ello en mente, el producto de elementos de A' estará dado por

$$\begin{aligned} \times : A' \times A' &\rightarrow A' \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha\beta = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} (x_i y_j + J_{i+j+1}). \end{aligned}$$

Para probar que esta asignación está bien definida, basta probarlo para los elementos homogéneos. En efecto, sean i, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_i = x + J_{i+1}$, $\alpha'_i = x' + J_{i+1} \in A'_i$ con x, $x' \in J_i$, y $\beta_j = y + J_{j+1}, \beta'_j = y' + J_{j+1} \in A'_j$ con $y, y' \in J_j$ tales que $\alpha_i = \alpha'_i$ y $\beta_j = \beta'_j$. Así,

$$\begin{array}{rcll} x - x' \in J_{i+1}, & & y - y' \in J_{j+1}, & \\ (x - x')y \in J_{i+j+1}, & & (y - y')x' \in J_{i+j+1}, & \text{y} \\ (x - x')y + (y - y')x' & = & xy - x'y + x'y - x'y' & \\ & = & xy - x'y' & \in J_{i+j+1}. \end{array}$$

Como consecuencia, $xy + J_{i+j+1} = x'y' + J_{i+j+1}$.
El resto de las condiciones para que la aplicación $\times$ sea considerada un producto, se siguen porque los representantes de los elementos de A' las satisfacen en A. Por lo tanto, A' es un anillo graduado.

Definición 40. Sean I un ideal de un anillo A y M un A-módulo.

1. Una filtración de M es una sucesión de A-submódulos de M de la forma
$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_j \supseteq \ldots$$
y se denota simplemente por $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$.
2. Una I-filtración de M es una filtración $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de M tal que $IM_i \subseteq M_{i+1}$ para cualquier $i \in \mathbb{Z}_+$.
3. Una I-filtración $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de M es estable si existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ con $l < k$, se tiene que $IM_k = M_{k+1}$.

En términos de esta definición, obsérvese que $(I^n M)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una I-filtración de M.

Definición 41. Sea I un ideal de un anillo A. La filtración I-ádica de A es la sucesión
$$A = I^0 \supseteq I^1 \supseteq I^2 \supseteq \ldots$$
de ideales de A. El anillo graduado correspondiente a esta filtración es
$$G_I(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{I^n}{I^{n+1}}.$$

Notación 42. Sean I un ideal de un anillo A, M un A-módulo y $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una I-filtración de M. Se denota por $G_n(M)$ al A-módulo $\dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Denotamos a $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n(M)$ por $G_I(M)$.

Consideremos las condiciones de la Notación 42. Sean k, $k' \in \mathbb{Z}_+$, tomemos $\alpha_i = x_i + I_{i+1} \in G_I(A)$ y $m_j = y_j + M_{j+1} \in G_j(M)$, donde $x_i \in I_i$ y $y_j \in M_j$ para cualesquiera $i \in \{0, \ldots, k\}$ y $j \in \{0, \ldots, k'\}$. Dados $\alpha = \alpha_0 + \ldots + \alpha_k \in G_I(A)$ y $m = m_0 + \ldots + m_{k'} \in G_I(M)$, podemos considerar que $k = k'$, con ello en mente, consideremos la asignación
$$\begin{aligned} \cdot : G_I(A) \times G_n(M) &\to G_n(M) \\ (\alpha, m) &\mapsto \alpha m = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} (x_i y_j + M_{i+j+1}). \end{aligned}$$

Para probar que esta asignación está bien definida, basta probarlo para los elementos homogéneos de $G_I(A)$ y $G_I(M)$. En efecto, sean i, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_i = x + I_{i+1}$, $\alpha'_i = x' + I_{i+1} \in A'_i$ con x, $x' \in I_i$, y $m_j = y + M_{j+1}$, $m'_j = y' + M_{j+1} \in G_j(M)$ con y, $y' \in M_j$ de forma que

$\alpha_i = \alpha'_i$ y $m_j = m'_j$. Así,

$$\begin{aligned} x - x' &\in I_{i+1}, & y - y' &\in M_{j+1}, \\ (x - x')y &\in M_{i+j+1}, & x'(y - y') &\in M_{i+j+1}, \qquad \text{y} \\ (x - x')y + x'(y - y') &= xy - x'y + x'y - x'y' \\ &= xy - x'y' \qquad\qquad \in M_{i+j+1}. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $xy + M_{i+j+1} = x'y' + M_{i+j+1}$.
El resto de las condiciones para que la aplicación $\cdot$ sea considerada un producto por escalares, se siguen porque los representantes de los elementos de A' y $G_I(M)$ las satisfacen. Es claro que $A'_iG_j(M) \subseteq G_{i+j}(M)$. Por lo tanto, $G_I(M)$ es un $G_I(A)$-módulo graduado.

Proposición 3.24. *Sean A un anillo Noetheriano e I un ideal no trivial de A.*

1. *$G_I(A)$ es un anillo Noetheriano. Más aún,*
$$G_I(A) = \frac{A}{I}\left[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}\right],$$
donde $s \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_s \in A$, $I = \langle x_1, \ldots, x_s\rangle_A$ y $\overline{x_i} = x_i + I^2$.
2. *Si M es un A-módulo graduado finitamente generado y $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una I-filtración estable de M, entonces $G_I(M)$ es un $G_I(A)$-módulo graduado finitamente generado. Más aún, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que*
$$G_I(M) = \bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M).$$
Así, $G_I(M)$ es un $G_I(A)$-módulo Noetheriano.

Demostración.

1. Como A es un anillo Noetheriano, se tiene que I es finitamente generado sobre A y $\dfrac{A}{I}$ es un anillo Noetheriano. Así, existen $s \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_s \in A$ tales que
$$I = \langle x_1, \ldots, x_s\rangle_A.$$
Sea $\overline{x_i} = x_i + I^2$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ y veamos que $\dfrac{A}{I}\left[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}\right] \subseteq G_I(A)$. En efecto, tenemos que $\overline{x_i} \in \dfrac{I}{I^2} \subseteq G_I(A)$ y $\dfrac{A}{I} \subseteq G_I(A)$, como consecuencia,
$$\frac{A}{I}\left[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}\right] \subseteq G_I(A).$$

Falta mostrar que $G_I(A) \subseteq \frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$. Es suficiente probar que los elementos homogéneos de $G_I(A)$ son elementos de $\frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$. Sean $d \in \mathbb{Z}_+$ y $z \in \frac{I^d}{I^{d+1}}$. Si $d = 0$, entonces $z \in \frac{A}{I} \subseteq \frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$. Supongamos que $0 < d$. Existe $\alpha \in I^d$ tal que $z = \alpha + I^{d+1}$. Así, existe $\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} \in A$ para todo $(i_1, \ldots, i_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ tal que $i_1 + \ldots + i_s = d$ y

$$\alpha = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} \lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} \in I^d$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
z &= \alpha + I^{d+1} \\
&= \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} \lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} \right) + I^{d+1} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} \left(\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} + I^{d+1} \right) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} (\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} + I) \left(x_1^{i_1} \cdots x_s^{i_s} + I^{d+1} \right) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} (\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} + I) \left(x_1^{i_1} + I^{i_1+1} \right) \cdots \left(x_s^{i_s} + I^{i_s+1} \right) \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} (\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} + I) \left(x_1 + I^2 \right)^{i_1} \cdots \left(x_s + I^2 \right)^{i_s} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{Z}_+^s \\ i_1+\ldots+i_s=d}} (\lambda_{(i_1,\ldots,i_s)} + I)\, \overline{x_1}^{\,i_1} \cdots \overline{x_s}^{\,i_s} \in \frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}].
\end{aligned}$$

Así, $G_I(A) \subseteq \frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$.

Por lo tanto, $G_I(A) = \frac{A}{I}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$. Como $\frac{A}{I}$ es un anillo Noetheriano, por el Teorema de la base de Hilbert, tenemos que $G_I(A)$ es un anillo Noetheriano.

2. Como $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una I-filtración estable de M, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $M_{n_0} = I^r M_{n_0}$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} G_I(M) &= \bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M) \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} G_{r+n_0}(M) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M) \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \frac{I^r M_{n_0}}{I^{r+1} M_{n_0}} \\ &= \bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M) \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \frac{M_{n_0}}{M_{n_0}} \\ &= \bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M). \end{aligned}$$

Como A es un anillo Noetheriano y M es un A-módulo finitamente generado, por la Proposición 1.38, tenemos que M es un A-módulo Noetheriano. Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, M_n es un A-módulo finitamente generado y así, por la Proposición 1.38, M_n es un A-módulo Noetheriano. Ahora, por el Corolario 1.35, resulta que $G_n(M)$ es un A-módulo Noetheriano. Más aún, $I \subseteq \operatorname{Ann}_A(G_n(M))$ y así, $G_n(M)$ es un $\dfrac{A}{I}$-módulo Noetheriano. Por el Corolario 1.36, $\bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M)$ es un $\dfrac{A}{I}$-módulo Noetheriano. Por consiguiente, $\bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M)$ es un $\dfrac{A}{I}$-módulo finitamente generado. Dado que $\dfrac{A}{I} \subseteq G_I(A)$, tenemos que $\bigoplus_{k=0}^{n_0} G_k(M)$ es un $G_I(A)$-módulo finitamente generado. Por lo tanto, $G_I(M)$ es un $G_I(A)$-módulo Noetheriano. □

Proposición 3.25. *Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano, $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{m}$-primario, M un A-módulo finitamente generado y $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una $\mathfrak{q}$-filtración estable de M.*

1. *Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, $G_n(M)$ es un A-módulo de longitud finita y la siguiente función es polinomial de grado menor que el número de generadores de $\mathfrak{q}$:*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}(G_n(M)). \end{aligned}$$

2. *La función*

$$
\begin{array}{rcl}
f : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\
n & \mapsto & \ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{M_n}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right)
\end{array}
$$

es polinomial de grado menor o igual que el número de generadores de $\mathfrak{q}$.

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_s \in A$ tales que $\mathfrak{q} = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle_A$ y tomemos $\overline{x_i} = x_i + \mathfrak{q}^2$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Por la Proposición 3.24, $G_{\mathfrak{q}}(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{\mathfrak{q}^k}{\mathfrak{q}^{k+1}} = \left(\dfrac{A}{\mathfrak{q}}\right)[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$ es un anillo Noetheriano y $G_{\mathfrak{q}}(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} G_k(M)$ es un $G_{\mathfrak{q}}(A)$-módulo finitamente generado.

1. Dado que A es un anillo Noetheriano, $\dfrac{A}{\mathfrak{q}}$ es un anillo Noetheriano. Como $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, tenemos que $\operatorname{Spec}\left(\dfrac{A}{\mathfrak{q}}\right) = \left\{\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{q}}\right\}$, con ello, $\dim\left(\dfrac{A}{\mathfrak{q}}\right) = 0$. Por el Teorema 3.6, $\dfrac{A}{\mathfrak{q}}$ es un anillo Artiniano. Así, por el Teorema 3.22, la función

$$
\begin{array}{rcl}
g' : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\
n & \mapsto & \ell_{\frac{A}{\mathfrak{q}}}\left(G_n(M)\right)
\end{array}
$$

   es polinomial de grado menor que s.
   Veamos que $\ell_{\frac{A}{\mathfrak{q}}}\left(G_n(M)\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(M)\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. En efecto, sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Como $\mathfrak{q} \subseteq \operatorname{Ann}_A\left(G_n(M)\right)$, el A-módulo $G_n(M)$ tiene la misma estructura como $\dfrac{A}{\mathfrak{q}}$-módulo. Así, $\ell_{\frac{A}{\mathfrak{q}}}\left(G_n(M)\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(M)\right)$. Por lo tanto, la función

$$
\begin{array}{rcl}
g : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\
n & \mapsto & \ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(M)\right)
\end{array}
$$

   es polinomial de grado menor que s.
2. Por el inciso 1, $G_n(M)$ es un A-módulo de longitud finita para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y

$$
\begin{array}{rcl}
g : \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\
n & \mapsto & \ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(M)\right)
\end{array}
$$

es una función polinomial de grado menor que s. Dado $n \in \mathbb{N}$, veamos que $\dfrac{M}{M_n}$ es un A-módulo de longitud finita y $\ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{M_n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right)$ de manera inductiva sobre n:

Supongamos que $n = 1$. Así,

$$\ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(G_0(M)\right) \in \mathbb{Z}_+.$$

Sea $n = k \in \mathbb{N}$, supongamos que $\dfrac{M}{M_k}$ es un A-módulo de longitud finita y

$$\ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_k}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right).$$

Podemos considerar la siguiente sucesión exacta de A-módulos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_k(M) & \longrightarrow & \dfrac{M}{M_{k+1}} & \longrightarrow & \dfrac{M}{M_k} & \longrightarrow & 0 \\ & & m + M_{k+1} & \longmapsto & m + M_{k+1} & & & & \\ & & & & m + M_{k+1} & \longmapsto & m + M_k. & & \end{array}$$

Por la hipótesis de inducción y por la Proposición 1.52, tenemos que $\dfrac{M}{M_k}$ y $G_k(M)$ son A-módulos Noetherianos y Artinianos. Por los Teoremas 1.34 y 1.45, $\dfrac{M}{M_{k+1}}$ es un A-módulo Noetheriano y Artiniano. Como consecuencia, $\dfrac{M}{M_{k+1}}$ es un A-módulo de longitud finita (ver Proposición 1.52). Más aún, por la Proposición 1.53,

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_{k+1}}\right) &= \ell_{\mathrm{A}}\left(G_k(M)\right) + \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_k}\right) \\ &= \ell_{\mathrm{A}}\left(G_k(M)\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k} \ell_{\mathrm{A}}\left(G_i(M)\right), \\
g(k) &= \ell_{\mathrm{A}}\left(G_k(M)\right) \\
&= \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_{k+1}}\right) - \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_k}\right).
\end{aligned}
$$

Sea

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{M_n}\right).
\end{aligned}
$$

Como $g = \Delta f$ es una función polinomial de grado menor que s, por la Proposición 3.16, se concluye que f es una función polinomial de grado a lo más s. □

Proposición 3.26. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano y* $\mathfrak{q}$ *un ideal* $\mathfrak{m}$*-primario. La función*

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^n}\right)
\end{aligned}
$$

es polinomial de grado menor o igual que el número de generadores del ideal $\mathfrak{q}$.

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_s \in A$ tales que $\mathfrak{q} = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle_A$, tomemos $\overline{x_i} = x_i + \mathfrak{q}^2$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Por el inciso 1 de la Proposición 3.24, $G_{\mathfrak{q}}(A) = \frac{A}{\mathfrak{q}}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$ es un $G_{\mathfrak{q}}(A)$-módulo Noetheriano. Más aún, sabemos que $G_{\mathfrak{q}}(A)$ es un $G_{\mathfrak{q}}(A)$-módulo graduado finitamente generado. Dado que $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario de A, $\operatorname{Spec}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}}\right) = \left\{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{q}}\right\}$, así, $\dim\left(\frac{A}{\mathfrak{q}}\right) = 0$. Como $\frac{A}{\mathfrak{q}}$ es un anillo Noetheriano, por el Teorema 3.6, $\frac{A}{\mathfrak{q}}$ es un anillo Artiniano. Por el Teorema 3.22, la función

$$
\begin{aligned}
\psi_{\left(G_{\mathfrak{q}}(A), G_{\mathfrak{q}}(A)\right)} : \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \ell_{\frac{A}{\mathfrak{q}}}\left(G_n(A)\right)
\end{aligned}
$$

es polinomial de grado menor que s. Como $\mathfrak{q} \subseteq \operatorname{Ann}_A\left(G_n(A)\right)$, se tiene que $G_n(A)$ es un A-módulo con la misma estructura de $\frac{A}{\mathfrak{q}}$-módulo, con ello, $\ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(A)\right) = \ell_{\frac{A}{\mathfrak{q}}}\left(G_n(A)\right)$ y la siguiente función es polinomial de grado menor que s:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}\left(G_n(A)\right) \end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, consideremos la sucesión exacta de A-módulos siguiente:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}} \xrightarrow{\ i\ } \frac{A}{\mathfrak{q}^{n+1}} \xrightarrow{\ \pi\ } \frac{A}{\mathfrak{q}^n} \longrightarrow 0$$

$$\alpha + \mathfrak{q}^{n+1} \longmapsto \alpha + \mathfrak{q}^n,$$

donde i es el morfismo de inclusión. Por la Proposición 1.53,

$$\ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right) + \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^n}\right),$$

$$\ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right) - \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^n}\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right).$$

Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^n}\right), \end{aligned}$$

así, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right) - \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{A}{\mathfrak{q}^n}\right) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}\right) = g(n)$. Por la Proposición 3.16, resulta que f es una función polinomial de grado menor o igual que s. □

Definición 43. Sean $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano, $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{m}$-primario de A y M un A-módulo finitamente generado.

- El polinomio caracterísitico de M con respecto a $\mathfrak{q}$, denotado por $\chi_{\mathfrak{q}}^M(x)$, es el polinomio que determina a la función polinomial

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right). \end{aligned}$$

- El polinomio característico de A con respecto al ideal $\mathfrak{q}$ es el polinomio característico $\chi_{\mathfrak{q}}^A(x)$ y se le denota simplemente por $\chi_{\mathfrak{q}}(x)$.

Proposición 3.27. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano,* $\mathfrak{q}$ *un ideal* $\mathfrak{m}$*-primario de* A *y* M *un* A*-módulo finitamente generado. El coeficiente principal de los polinomios* $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ *y* $\chi_{\mathfrak{m}}^M$ *es el mismo y* $\operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{q}}^M\right) = \operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^M\right)$.

Demostración. Por la Proposición 2.33, existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Así, $\mathfrak{m}^{rn} \subseteq \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{m}^n$, con ello, $\mathfrak{m}^{rn}M \subseteq \mathfrak{q}^n M \subseteq \mathfrak{m}^n M$. Como consecuencia,

$$\begin{gathered}
\ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^{rn}M) \leq \quad \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) \leq \quad \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^n M), \\
-\ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^n M) \leq -\ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) \leq -\ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^{rn}M), \\
\ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^n M) \leq \ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) \leq \ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{m}^{rn}M), \\
\ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{\mathfrak{m}^n M}\right) \leq \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right) \leq \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{\mathfrak{m}^{rn}M}\right), \\
\chi_{\mathfrak{m}}^M(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}^M(rn).
\end{gathered}$$

Dado que $\chi_{\mathfrak{m}}^M$ y $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ son polinomios y $\operatorname{lím}_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(n) = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(rn)$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(n) \leq \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) \leq \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(rn) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(n).$$

Así, $\operatorname{lím}_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{m}}^M(n) = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$, con ello, $\operatorname{lím}_{n\to\infty} \dfrac{\chi_{\mathfrak{m}}^M(n)}{\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)} = 1$. Por lo tanto, el coeficiente principal de $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ y de $\chi_{\mathfrak{m}}^M$ es el mismo y $\operatorname{gr}(\chi_{\mathfrak{q}}^M) = \operatorname{gr}(\chi_{\mathfrak{m}}^M)$. □

Definición 44. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano.

- Dado un A-módulo M finitamente generado, el polinomio de Hilbert de M es el polinomio $\chi_{\mathfrak{m}}^M$.
- El polinomio de Hilbert de $(A, \mathfrak{m})$ es el polinomio $\chi_{\mathfrak{m}}$.

Notación 45. Dados un anillo local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ y M un A-módulo finitamente generado, se tomará la expresión $\mathrm{d}(M) = \operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^M\right)$.

Proposición 3.28. *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Se tiene que* $d(A) \leq \delta$.

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{m}$-primario de A generado por δ elementos. Por la Proposición 3.26 y la Proposición 3.27, se tiene el resultado. □

Lema 3.29. *Sean* M *y* M'' *módulos finitamente generados sobre un anillo local Noetheriano* $(A, \mathfrak{m})$. *Dado un morfismo* $\beta : M \to M''$ *de* A*-módulos sobre, se tiene que* $\beta|_{\mathfrak{q}^n M} : \mathfrak{q}^n M \to \mathfrak{q}^n M''$ *es sobre para todo* $n \in \mathbb{Z}_+$ *y* $\mathrm{d}(M'') \leq \mathrm{d}(M)$.

Demostración. Si $n = 0$, entonces $\mathfrak{q}^n M = M$, $\mathfrak{q}^n M'' = M''$ y $\beta|_{\mathfrak{q}^n M} = \beta$. Así, $\beta|_{\mathfrak{q}^n M}$ es sobre. Supongamos que $0 < n$. Mostraremos que $\beta(\mathfrak{q}^n M) = \mathfrak{q}^n M''$. Basta mostrarlo para los elementos generadores. En efecto, dado un generador x de $\mathfrak{q}^n M$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{q}$ y $m \in M$ tales que $x = \lambda_1 \cdots \lambda_n m$, así,

$$\beta(x) = \beta(\lambda_1 \cdots \lambda_n m) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \beta(m) \in \mathfrak{q}^n M''.$$

Recíprocamente, sea y un generador de $\mathfrak{q}^n M''$. Existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{q}$ y $m'' \in M''$ tales que $y = \lambda_1 \cdots \lambda_n m''$. Dado que β es sobre, existe $m \in M$ tal que $\beta(m) = m''$, de esta forma,

$$y = \lambda_1 \cdots \lambda_n m'' = \lambda_1 \cdots \lambda_n \beta(m) = \beta(\lambda_1 \cdots \lambda_n m) \in \beta(\mathfrak{q}^n M).$$

Por consiguiente, $\beta(\mathfrak{q}^n M) = \mathfrak{q}^n M''$, con ello, $\beta|_{\mathfrak{q}^n M} : \mathfrak{q}^n M \to \mathfrak{q}^n M''$ es sobre.
Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{\beta^{-1}(\mathfrak{q}^n M'')}{\mathfrak{q}^n M} \xrightarrow{\ \overline{\alpha}\ } \frac{M}{\mathfrak{q}^n M} \xrightarrow{\ \overline{\beta}\ } \frac{M''}{\mathfrak{q}^n M''} \longrightarrow 0$$

$$m + \mathfrak{q}^n M \longmapsto m + \mathfrak{q}^n M$$

$$m + \mathfrak{q}^n M \longmapsto \beta(m) + \mathfrak{q}^n M''.$$

de A-módulos exacta. Por la Proposición 1.53, tenemos que

$$\ell_A\left(\frac{M''}{\mathfrak{q}^n M''}\right) = \ell_A\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right) - \ell_A\left(\frac{\beta^{-1}(\mathfrak{q}^n M'')}{\mathfrak{q}^n M}\right),$$

así,

$$\ell_A\left(\frac{M''}{\mathfrak{q}^n M''}\right) \leq \ell_A\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right).$$

Como ello, $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{q}}^{M''}\right) \leq \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{q}}^{M}\right)$. Por la Proposición 3.27, $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) \leq \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M}\right)$, por lo tanto, $\mathrm{d}(M'') \leq \mathrm{d}(M)$. □

Lema 3.30. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ \alpha\ } M \xrightarrow{\ \beta\ } M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión de A-módulos exacta con M un A-módulo finitamente generado. Si $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{q}^n M' \xrightarrow{\alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}} \mathfrak{q}^n M \xrightarrow{\beta|_{\mathfrak{q}^n M}} \mathfrak{q}^n M'' \longrightarrow 0$$

de A-módulos es exacta.

Demostración. Como M es un A-módulo finitamente generado y A es un anillo Noetheriano, por la Proposición 1.38, tenemos que M es un A-módulo Noetheriano. Por el Teorema 1.34, tenemos que M' y M'' son A-módulos Noetherianos. Así, por la Proposición 1.38, M' y M'' son A-módulos finitamente generados.
Por el Lema 3.29, tenemos que $\beta|_{\mathfrak{q}^n M}$ es sobre. Dado que α es inyectivo, $\alpha|_{\mathfrak{q}^n M}$ es inyectivo. Falta mostrar que $\ker \beta|_{\mathfrak{q}^n M} = \operatorname{Im} \alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}$. Primero, veamos que $\operatorname{Im} \alpha \cap \mathfrak{q}^n M = \operatorname{Im} \alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}$. Es claro que $\operatorname{Im} \alpha|_{\mathfrak{q}^n M'} \subseteq \operatorname{Im} \alpha \cap \mathfrak{q}^n M$. Recíprocamente, si $x \in \operatorname{Im} \alpha \cap \mathfrak{q}^n M$, entonces existe $y \in M'$ tal que $\alpha(y) = x$ y $x = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda_{(i,1)} \cdots \lambda_{(i,n_i)} m_i$ con $m_i \in M, \beta_i \in A$, $n_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \in \{0, \ldots k\}$ y $\lambda_{(i,k')} \in \mathfrak{q}$ para cualesquiera $i \in \{0, \ldots k\}$ y $k' \in \{1, \ldots, n_i\}$. Sea

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Im} \alpha &\to M' \\ m &\mapsto f(m) = \alpha^{-1}(m). \end{aligned}$$

Tenemos que f y la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha' : M' &\to \operatorname{Im} \alpha \\ m' &\mapsto \alpha(m') \end{aligned}$$

son morfismos de A-módulos inversos entre sí, con ello,

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x) &= f(x) \\ &= f\left(\sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda_{(i,1)} \cdots \lambda_{(i,n_i)} m_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda_{(i,1)} \cdots \lambda_{(i,n_i)} f(m_i) \in \mathfrak{q}^n M'. \end{aligned}$$

Así, $x \in \operatorname{Im} \alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}$.
Por lo tanto, $\ker \beta|_{\mathfrak{q}^n M} = \ker \beta \cap \mathfrak{q}^n M = \operatorname{Im} \alpha \cap \mathfrak{q}^n M = \operatorname{Im} \alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}$. □

Lema 3.31. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión de A*-módulos exacta con* M *un* A*-módulo finitamente generado. Los polinomios* $\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}$ *y* $\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}$ *tienen el mismo coeficiente principal y*

$$\operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) = \operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right). \tag{69}$$

Demostración. Por el Lema 3.30, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{q}^n M' \xrightarrow{\alpha|_{\mathfrak{q}^n M'}} \mathfrak{q}^n M \xrightarrow{\beta|_{\mathfrak{q}^n M}} \mathfrak{q}^n M'' \longrightarrow 0$$

de A-módulos es exacta. Por la Proposición 1.53, se tiene que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{A}}(M') &= \ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(M''), \qquad \text{y} \\ \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M') &= \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M''), \end{aligned}$$

Sea $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M'}{\mathfrak{q}^n M'}\right)$, $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right)$ y $\chi_{\mathfrak{q}}^{M''}(n) = \ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{M''}{\mathfrak{q}^n M''}\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ con $k < n$. Tomemos $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k < n$. Por el Corolario 1.54,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) &= \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M'}{\mathfrak{q}^n M'}\right) \\ &= \ell_{\mathrm{A}}(M') - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M') \\ &= \ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(M'') - \left(\ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M'')\right) \\ &= \ell_{\mathrm{A}}(M) - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M) - \left(\ell_{\mathrm{A}}(M'') - \ell_{\mathrm{A}}(\mathfrak{q}^n M'')\right) \\ &= \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right) - \ell_{\mathrm{A}}\left(\frac{M''}{\mathfrak{q}^n M''}\right) \\ &= \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^{M''}(n). \end{aligned}$$

En particular, si $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$, entonces $\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}(n) = \chi_{\mathfrak{m}}^{M}(n) - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}(n)$. Con ello, los polinomios $\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}$ y $\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}$ tienen el mismo coeficiente principal y $\operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) = \operatorname{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right)$. □

Proposición 3.32. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano y*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión de A*-módulos exacta con* M *un* A*-módulo finitamente generado.*

1. $\mathrm{d}(M) = \text{máx}\,\{\mathrm{d}\,(M')\,, \mathrm{d}\,(M'')\}$, *y*
2. $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) < \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) = \mathrm{d}\,(M')$.

Demostración.

1. Por el Lema 3.29, $\mathrm{d}\,(M'') \leq \mathrm{d}\,(M)$. Por la ecuación (69), se observa lo siguiente:
   Si $\mathrm{d}\,(M'') < \mathrm{d}\,(M)$, entonces $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) < \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M}\right)$. Así, $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M}\right) = \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right)$.
   Si $\mathrm{d}\,(M'') = \mathrm{d}\,(M)$, entonces $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) = \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M}\right)$. Así,

   $$\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) = \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) \leq \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) = \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M}\right).$$

   En cualquier caso, se tiene que $\mathrm{d}(M) = \text{máx}\{\mathrm{d}(M'), \mathrm{d}(M'')\}$.
2. Como $\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}$ y $\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}$ tienen el mismo coeficiente principal y el mismo grado, tenemos que $\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) < \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M} - \chi_{\mathfrak{m}}^{M''}\right) = \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{M'}\right) = \mathrm{d}\,(M')$. □

Proposición 3.33. *Si* $(A, \mathfrak{m})$ *es un anillo local Noetheriano, entonces* $\dim(A) \leq \mathrm{d}(A) \in \mathbb{Z}_{+}$.

Demostración. Se probará por inducción sobre $\mathrm{d}(A)$.
Si $\mathrm{d}(A) = 0$, entonces existen k y $n_0 \in \mathbb{Z}_{+}$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}_{+}$ con $n_0 < n$, tenemos que $\ell_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}^n}\right) = k$. Como consecuencia, $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$. Por el Lema de Nakayama, resulta que $\mathfrak{m}^n = \{0_A\}$. Por la Proposición 3.11, se tiene que A es un anillo Artiniano. Así, por el Teorema 3.6, resulta que $\dim(A) = 0$, por lo tanto, $\dim(A) \leq \mathrm{d}(A)$.
Supongamos que que para todo anillo local Noetheriano (B, η) tal que $\mathrm{d}(B) < \mathrm{d}(A)$, se tiene que $\dim(B) \leq \mathrm{d}(B)$.
Si $\dim(A) = 0$, entonces $\dim(A) \leq \mathrm{d}(A)$.
Si $\dim(A) > 0$, entonces tomemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq \dim(A)$. Existe una cadena prima $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_r$ de A. Sea $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, consideremos al dominio entero $\overline{A} = \dfrac{A}{\mathfrak{p}_0}$ y $\overline{x} = x + \mathfrak{p}_0 \in \overline{A}$. Tomemos los morfismos de A-módulos

$$\begin{aligned} \mu : \overline{A} &\to \overline{A}, & \qquad \eta : \overline{A} &\to \frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}} \\ \alpha + \mathfrak{p}_0 &\mapsto \alpha x + \mathfrak{p}_0 & \qquad \alpha + \mathfrak{p}_0 &\mapsto (\alpha + \mathfrak{p}_0) + \overline{A}\overline{x} \end{aligned}$$

y la sucesión $0 \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\mu} \overline{A} \xrightarrow{\eta} \dfrac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}} \longrightarrow 0$ de A-módulos exacta. Por el inciso 2 del Lema 3.32, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{\overline{A}} - \chi_{\mathfrak{m}}^{\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}} - \chi_{\mathfrak{m}}^{\overline{A}}\right) &< \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{\overline{A}}\right), \\
\mathrm{gr}\left(-\chi_{\mathfrak{m}}^{\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}}\right) &< \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{\frac{A}{\mathfrak{p}_0}}\right), \\
\mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}}\right) &< \mathrm{gr}\left(\chi_{\mathfrak{m}}^{\frac{A}{\mathfrak{p}_0}}\right), \\
\mathrm{d}\left(\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}\right) &< \mathrm{d}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_0}\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, tomemos la sucesión $0 \longrightarrow \mathfrak{p}_0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \dfrac{A}{\mathfrak{p}_0} \longrightarrow 0$ de A-módulos exacta, donde i es la inclusión de $\mathfrak{p}_0$ en A y π es la proyección de A en $\dfrac{A}{\mathfrak{p}_0}$. Por el inciso 1 del Lema 3.32, tenemos la parte derecha de la siguiente expresión:

$$\mathrm{d}\left(\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}\right) < \mathrm{d}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_0}\right) \leq \mathrm{d}(A).$$

Con ello, $\mathrm{d}\left(\dfrac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}\right) \leq \mathrm{d}(A) - 1$. Por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\dim\left(\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}\right) \leq \mathrm{d}\left(\frac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}\right) \leq \mathrm{d}(A) - 1.$$

Así, la longitud de toda cadena prima de $\dfrac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}$ es menor o igual que $\mathrm{d}(A) - 1$. Sea $\overline{\mathfrak{p}}_i = \dfrac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_0}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Tenemos que

$$\frac{\overline{\mathfrak{p}}_1}{\overline{A}\overline{x}} \subset \frac{\overline{\mathfrak{p}}_2}{\overline{A}\overline{x}} \subset \ldots \subset \frac{\overline{\mathfrak{p}}_r}{\overline{A}\overline{x}}$$

es una cadena prima de longitud $r - 1$ del anillo $\dfrac{\overline{A}}{\overline{A}\overline{x}}$, ello implica que

$$\begin{aligned}
r - 1 &\leq \mathrm{d}(A) - 1, \\
r &\leq \mathrm{d}(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim(A) \leq d(A)$. □

Corolario 3.34. *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Se tiene que* $\dim(A) \leq \delta$.

Demostración. Por las Proposiciones 3.28 y 3.33, $\dim(A) \leq d(A) \leq \delta$. □

6. Sistema de Parámetros de un Anillo Local Noetheriano

Dado un anillo local Noetheriano, sabemos que su dimensión es a lo más, la dimensión de Chevalley. En esta sección veremos que la dimensión de Chevalley es menor o igual que la dimensión de Krull. Para ello, utilizaremos los resultados obtenidos en la sección 4 del Capítulo 1 y en la sección 3 del Capítulo 2.

Lema 3.35. *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *A es un anillo Artiniano.*
2. $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$.
3. $\{0_A\}$ *es un ideal* $\mathfrak{m}$*-primario.*
4. $\emptyset$ *es un sistema de parámetros de A.*

Demostración.

1⇒2 Por el Teorema 3.6, tenemos que A es un anillo Artiniano si, y sólo si, A es un anillo Noetheriano y $\dim(A) = 0$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Como el anillo $(A, \mathfrak{m})$ es local, entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, por la Proposición 3.3, tenemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = 0$. Así, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, por lo tanto, $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$.

2⇒3 Dado que $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$, se tiene que $\sqrt{\{0_A\}} = \mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Así, $\{0_A\}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario.

3⇒4 Como $\{0_A\}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario, tenemos que $\mathfrak{m} = \sqrt{\{0_A\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p}$. Así, $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ y $\dim(A) = 0$. Con ello, $\emptyset$ es un sistema de parámetros de A.

4⇒1 Tenemos que A es un anillo Noetheriano. Como $\emptyset$ es un sistema de parámetros de A, se tiene que $\dim(A) = 0$. Por el Teorema 3.6, A es un anillo Artiniano. □

Teorema 3.36. *Todo anillo local Noetheriano tiene un sistema de parámetros. De modo que la dimensión de Chevalley es menor o igual que la dimensión de Krull.*

Demostración. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano. Tomando en cuenta que $\dim(A) \leq \delta$ (por el Corolario 3.34), tenemos que existe $d \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d = \dim(A)$.
Si $d = 0$, entonces por el Teorema 3.6, A es un anillo Artiniano. Por el Lema 3.35, tenemos que $\emptyset$ es un sistema de parámetros de A. Así, $\delta \leq \dim(A)$.
Si $0 < d$, entonces veamos el siguiente proceso:

1. Por el Corolario 2.29, el conjunto de los ideales primos minimales de A es finito. Digamos que dicho conjunto es $\left\{\mathfrak{p}_{1_1}, \mathfrak{p}_{1_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{1_{s_1}}\right\}$ con $s_1 \in \mathbb{N}$. Sea $j \in \{1, \ldots, s_1\}$. Dado que $0 = \mathrm{ht}\left(\mathfrak{p}_{1_j}\right) < d = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, se tiene que $\mathfrak{p}_{1_j} \subset \mathfrak{m}$.
Veamos que $\bigcup_{i=1}^{s_1} \mathfrak{p}_{1_i} \subset \mathfrak{m}$. En efecto, supongamos que $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s_1} \mathfrak{p}_{1_i}$. Por el inciso 2 de la Proposición 2.4, existe $l \in \{1, \ldots, s_1\}$ tal que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_{1_l}$. Como $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de A, se tiene que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_{1_l}$, lo que contradice el hecho de que $\mathfrak{p}_{1_i} \subset \mathfrak{m}$ para todo $j \in \{1, \ldots, s_1\}$.
Sea $x_1 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^{s_1} \mathfrak{p}_{1_i}$. Se quiere probar que todo $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $Ax_1 \subseteq \mathfrak{q}$ tiene altura mayor o igual que 1. En efecto, tomemos $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $Ax_1 \subseteq \mathfrak{q}$. Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 0$, con ello, $\mathfrak{q}$ es un elemento minimal. Existe $l \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{1_l}$, así, $x_1 \in \mathfrak{p}_{1_l}$. Como consecuencia, $x_1 \in \bigcup_{i=1}^{s_1} \mathfrak{p}_{1_i}$, lo que contradice la elección de x_1. Por consiguiente, $1 \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$.
Si $\dim(A) = 1$, entonces $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$ y detenemos el proceso, de lo contrario, $1 < \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim(A)$ y continuamos de la siguiente forma:
2. Consideremos el anillo $\dfrac{A}{Ax_1}$. Sabemos que $\left(\dfrac{A}{Ax_1}, \dfrac{\mathfrak{m}}{Ax_1}\right)$ es un anillo local. Dado que A es un anillo Noetheriano, se tiene que $\dfrac{A}{Ax_1}$ es un anillo Noetheriano. Por el Corolario 2.29, el conjunto de los ideales primos minimales de $\dfrac{A}{Ax_1}$ es finito. Sean $s_2 \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{p}_{2_1}, \mathfrak{p}_{2_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{2_{s_2}} \in \mathrm{Spec}(A)$ tales que $\dfrac{\mathfrak{p}_{2_1}}{Ax_1}, \dfrac{\mathfrak{p}_{2_2}}{Ax_1}, \ldots, \dfrac{\mathfrak{p}_{2_{s_2}}}{Ax_1}$ son los ideales primos minimales de $\dfrac{A}{Ax_1}$. Dado $i \in \{1, \ldots, s_2\}$, tenemos que $\mathfrak{p}_{2_i}$ es un ideal primo minimal que contiene a Ax_1. Por el Teorema de Ideales Principales de Krull (Teorema 10.2 en [**Eis**]), $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{2_i}) \leq 1 < \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. Así, $\mathfrak{p}_{2_i} \subset \mathfrak{m}$.
De la misma forma que antes, se observa que $\bigcup_{i=1}^{s_2} \mathfrak{p}_{2_i} \subset \mathfrak{m}$. Sea $x_2 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^{s_2} \mathfrak{p}_{2_i}$. Como $Ax_1 \subseteq \mathfrak{p}_{2_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, s_2\}$, se tiene que $x_2 \neq x_1$.
Veamos que para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ tal que $Ax_1 + Ax_2 \subseteq \mathfrak{q}$, tenemos que $2 \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$.

En efecto, sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $Ax_1 + Ax_2 \subseteq \mathfrak{q}$, así, $Ax_1 \subseteq Ax_1 + Ax_2 \subseteq \mathfrak{q}$. Existe $j \in \{1, \ldots, s_2\}$ tal que $\mathfrak{p}_{2_j} \subseteq \mathfrak{q}$, y por el inciso 1 de este proceso, resulta que $1 \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$.

Supongamos que $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$. Como $Ax_1 \subseteq \mathfrak{p}_{2_j}$, tenemos que $1 \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_{2_j}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$, así, $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_{2_j}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = 1$. Esto implica que $\mathfrak{p}_{2_j} = \mathfrak{q}$. Dado que $x_2 \in \mathfrak{q}$, entonces $x_2 \in \mathfrak{p}_{2_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s_2} \mathfrak{p}_{2_i}$, lo que contradice la elección de x_2.

Por lo tanto, $2 \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$ para cualquier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $Ax_1 + Ax_2 \subseteq \mathfrak{q}$.

Si $\dim(A) = 2$, entonces $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m})$ y detenemos el proceso. De lo contrario, continuamos de la misma forma, obteniendo $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ tales que

$$d \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \dim(A) = d$$

para cualquier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ que satisface $Ax_1 + \ldots + Ax_d \subseteq \mathfrak{q}$.

Detenemos el proceso y tomemos $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $Ax_1 + \ldots + Ax_d \subseteq \mathfrak{q}$, así, $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = d$. Por la Proposición 3.3, tenemos que $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m})$, con ello, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ (por la Proposición 3.1). Como consecuencia,

$$\sqrt{Ax_1 + \ldots + Ax_d} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ Ax_1 + \ldots + Ax_d \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}.$$

Por la Proposición 2.32, tenemos que $Ax_1 + \ldots + Ax_d$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Esto implica que $\{x_1, \ldots, x_d\}$ es un sistema de parámetros de A.

Por lo tanto, todo anillo local Noetheriano tiene un sistema de parámetros, de modo que $\delta \leq \dim(A)$. $\square$

Teorema 3.37 (Teorema Fundamental de la Teoría de la Dimensión)**.** *Sea* $(A, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Se tiene que* $\dim(A) = d(A) = \delta$.

Demostración. Por el Corolario 3.34 y por la Proposición 3.36, $\delta \leq \dim(A) \leq \mathrm{d}(A) \leq \delta$ y por lo tanto, $\dim(A) = \mathrm{d}(A) = \delta$. $\square$

Capítulo 4

Dimensión de las Fibras

En este capítulo se presentan los resultados de interés en este trabajo. Primero consideraremos una especie en particular de homomorfismos de anillos, llamados *homomorfismos locales*. A partir de ello, dado un homomorfismo de anillos Noetherianos, se dará una cota superior para la altura de los ideales primos del codominio.

1. Concepto del Homomorfismo Local

Ahora se aplican los conocimientos adquiridos en el Capítulo 3 para el caso de homomorfismos locales de anillos.

Definición 46. Sean $(A, \mathfrak{m})$ y (B, η) anillos locales. Un homomorfismo $\varphi : A \to B$ de anillos es *local* si $\varphi^{-1}(\eta) = \mathfrak{m}$.

Notación 47. Dado un homomorfismo $\varphi : (A, \mathfrak{m}) \to (B, \eta)$ local de anillos, se establece lo siguiente:

- Sea I un ideal de A. El ideal de B generado por $\varphi(I)$ se denotará por $IB = B\varphi(I)$.
- Sea $x \in A$. El ideal de B generado por $\varphi(x)$ se denotará por $Bx = B\varphi(x)$.

2. Dimensión de las Fibras de Morfismos entre Espacios de Zariski

En esta sección se presentan los teoremas que nos motivan. Dado un homomorfismo entre anillos Noetherianos, se muestra que la dimensión de su codominio es acotada. Después se prueba que si tal homomorfismo satisface la condición del descenso o del ascenso, entonces dicha dimensión alcanza la cota en cuestión.

Teorema 4.1. *Sea $\varphi : (A, \mathfrak{m}) \to (B, \eta)$ un homomorfismo local de anillos con A y B Noetherianos. Se sigue que* $\dim(B) \leq \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$.

Demostración. Dado que A y B son anillos locales Noetherianos, por el Teroema 3.37, su dimensión es finita. Como $\varphi^{-1}(\eta) = \mathfrak{m}$, se tiene que $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \eta$, de forma que

$$\mathfrak{m}B = B\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \eta \subset B.$$

Tenemos que $\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}$ es un anillo local Noetheriano. Por el Teorema 3.37, resulta que $\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}$ es un anillo de dimensión finita. Supongamos que $\dim(A) = r$ y $\dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right) = s$. Por el Teorema 3.36, existe un sistema de parámetros $\{x_1, \ldots, x_r\}$ de A y existen $y_1, \ldots, y_s \in \eta$ tales que $\{y_1 + \mathfrak{m}B, \ldots, y_s + \mathfrak{m}B\}$ es un sistema de parámetros de $\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}$. Por la Proposición 2.33, existen k y $l \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}^k &\subseteq Ax_1 + \ldots + Ax_r \\
\mathfrak{m}^k B &\subseteq (Ax_1 + \ldots + Ax_r)B \\
&\subseteq Bx_1 + \ldots + Bx_r
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\eta^l}{\mathfrak{m}B} &\subseteq \left(\frac{\eta}{\mathfrak{m}B}\right)^l \\
&\subseteq \frac{B}{\mathfrak{m}B}(y_1 + \mathfrak{m}B) + \ldots + \frac{B}{\mathfrak{m}B}(y_s + \mathfrak{m}B) \\
&\subseteq B(y_1 + \mathfrak{m}B) + \ldots + B(y_s + \mathfrak{m}B) \\
&\subseteq (By_1 + \mathfrak{m}B) + \ldots + (By_s + \mathfrak{m}B) \\
&\subseteq (By_1 + \ldots + By_s) + \mathfrak{m}B.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(\eta^l\right)^k &\subseteq (By_1 + \ldots + By_s + \mathfrak{m}B)^k \\
&\subseteq By_1 + \ldots + By_s + \mathfrak{m}^k B \\
&\subseteq By_1 + \ldots + By_s + (Bx_1 + \ldots + Bx_r).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.33, tenemos que $By_1 + \ldots + By_s + B\varphi(x_1) + \ldots + B\varphi(x_r)$ es un ideal η-primario. Como consecuencia del Teorema fundamental de la dimensión (3.37), se tiene que $\dim(B) = \delta(B) \leq r + s$. Por lo tanto, $\dim(B) \leq \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$. □

Proposición 4.2. *Sean A y B anillos Noetherianos, $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Se tiene que $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})$ y $(B_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}_{\mathfrak{q}})$ son anillos locales Noetherianos y la aplicación*

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi} : A_{\mathfrak{p}} &\to B_{\mathfrak{q}} \\
\frac{a}{s} &\mapsto \overline{\varphi}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}
\end{aligned} \tag{70}$$

es un homomorfismo local de anillos.

Demostración. Como A y B son anillos Noetherianos, por la Proposición 1.41, se tiene que $A_\mathfrak{p}$ y $B_\mathfrak{q}$ son anillos Noetherianos. Por la Proposición 2.6, tenemos que $(A_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ y $(B_\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_\mathfrak{q})$ son anillos locales. Mostraremos que la aplicación $\overline{\varphi}$ es un homomorfismo de anillos. En efecto, tomemos $S = A \setminus \mathfrak{p}$ y sean $a, a' \in A$ y $s, s' \in S$.

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}\left(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}\right) &= \overline{\varphi}\left(\frac{as' + a's}{ss'}\right) \\
&= \frac{\varphi(as' + a's)}{\varphi(ss')} \\
&= \frac{\varphi(as') + \varphi(a's)}{\varphi(s)\varphi(s')} \\
&= \frac{\varphi(a)\varphi(s') + \varphi(a')\varphi(s)}{\varphi(s)\varphi(s')} \\
&= \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} + \frac{\varphi(a')}{\varphi(s')} \\
&= \overline{\varphi}\left(\frac{a}{s}\right) + \overline{\varphi}\left(\frac{a'}{s'}\right), \\
\overline{\varphi}\left(\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'}\right) &= \overline{\varphi}\left(\frac{aa'}{ss'}\right) \\
&= \frac{\varphi(aa')}{\varphi(ss')} \\
&= \frac{\varphi(a)\varphi(a')}{\varphi(s)\varphi(s')} \\
&= \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \times \frac{\varphi(a')}{\varphi(s')} \\
&= \overline{\varphi}\left(\frac{a}{s}\right) \times \overline{\varphi}\left(\frac{a'}{s'}\right).
\end{aligned}$$

Por último, veamos que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = \overline{\varphi}^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{q})$. En efecto, dado que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, se tiene que $\varphi^{-1}(B \setminus \mathfrak{q}) = A \setminus \mathfrak{p} = S$, así,

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{q}) &= \left\{ \frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p} \,\middle|\, a \in A,\ s \in S,\ \overline{\varphi}\left(\frac{a}{s}\right) \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p} \,\middle|\, a \in A,\ s \in S,\ \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \in \mathfrak{q}_\mathfrak{q} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}} \,\middle|\, a \in A,\ s \in S,\ \varphi(a) \in \mathfrak{q} \text{ y } \varphi(s) \in B \setminus \mathfrak{q} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}} \,\middle|\, a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}),\ s \in \varphi^{-1}(B \setminus \mathfrak{q}) \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\ s \in S \right\} \\
&= \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. *Sean A y B anillos Noetherianos, $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Se tiene que* $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\frac{B_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{q}}}\right)$.

Demostración. Por la Proposición 4.2, se tiene que $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})$ y $(B_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}_{\mathfrak{q}})$ son anillos locales y la aplicación (70) es un homomorfismo local de anillos. Por el Teorema 4.1, $\dim(B_{\mathfrak{q}}) \leq \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim\left(\frac{B_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{q}}}\right)$. Por la Proposición 3.9, $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\frac{B_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{q}}}\right)$. □

Definición 48. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos.

- φ satisface la *condición del descenso* si dados $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(B)$ con $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ y $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$, entonces existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ y $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.
- φ satisface la *condición del ascenso* si dados $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ con $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ y $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, entonces existe $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ y $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$.

Proposición 4.4. *Sean $(A, \mathfrak{m})$ y (B, η) anillos locales, $\varphi : A \to B$ un homomorfismo local de anillos que satisface la condición del descenso o del ascenso. Se tiene que* $\dim(B) = \dim(A) + \dim\left(\frac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$.

Demostración. Dado que (B, η) es un anillo local Noetheriano, se tiene que $\left(\frac{B}{\mathfrak{m}B}, \frac{\eta}{\mathfrak{m}B}\right)$ es un anillo local Noetheriano. Por la Proposición 3.33, existen r y $s \in \mathbb{Z}_+$ tales que $r = \dim(A)$ y $s = \dim\left(\frac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$. Así, existen $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec}(A)$ tales que

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{m}$$

es una cadena prima de A y existen $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que

$$\frac{\mathfrak{q}_0}{\mathfrak{m}B} \subset \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{m}B} \subset \ldots \subset \frac{\mathfrak{q}_s}{\mathfrak{m}B} = \frac{\eta}{\mathfrak{m}B}$$

es una cadena prima de $\frac{B}{\mathfrak{m}B}$, con ello,

$$\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}B \subseteq \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_s = \eta.$$

Como $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{q}_0$ y $\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Spec}(B)$ ($\mathfrak{q}_0$ es un ideal minimal de B con tales propiedades), se tiene que $\mathfrak{m} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0)$ y $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0) \in \operatorname{Spec}(A)$. Como $\mathfrak{m} \in Max(A)$, tenemos que $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0)$. Veamos los siguientes casos:

- Si φ satisface la condición del descenso, entonces sea $\mathfrak{q}'_r = \mathfrak{q}_0$. Existen $\mathfrak{q}'_0, \ldots, \mathfrak{q}'_{r-1} \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{p}_0 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}'_0), \ldots, \mathfrak{p}_{r-1} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}'_{r-1})$ y $\mathfrak{q}'_0 \subset \mathfrak{q}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}'_r$ (esta última es una cadena prima de B).
- Supongamos que φ satisface la condición del ascenso. Existe $\mathfrak{q}'_0 \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p}_0 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}'_0)$. Más aún, existen $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_r \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{p}_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}'_1), \ldots, \mathfrak{p}_r = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}'_r)$ y $\mathfrak{q}'_0 \subset \mathfrak{q}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}'_r$ (esta última es una cadena prima de B). Dado que $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0)$, podemos suponer que $\mathfrak{q}'_r = \mathfrak{q}_0$.

En cualquiera de los dos casos, existe una cadena prima de B de longitud $r+s$ como sigue:

$$\mathfrak{q}'_0 \subset \mathfrak{q}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}'_{r-1} \subset \mathfrak{q}'_r \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_s = \eta.$$

Por el Teorema 4.1, $\dim(B) \leq \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right) = r + s \leq \dim(B)$. Por lo tanto, $\dim(B) = \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$. □

Proposición 4.5. *Sean A y B anillos Noetherianos, $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos que satisface la condición del descenso o del ascenso,* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *y* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *tales que* $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. *Se tiene que* $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\dfrac{B_\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}}\right)$.

Demostración. Por la Proposición 4.2, el homomorfismo de anillos dado en (70) es local. Es claro que dicho homomorfismo satisface la condición del descenso o del ascenso. Por la Proposición 4.4, se tiene que $\dim(B_\mathfrak{q}) = \dim(A_\mathfrak{p}) + \dim\left(\dfrac{B_\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}}\right)$. Finalmente, por la Proposición 3.9, tenemos que $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\dfrac{B_\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}}\right)$. □

3. Aplicaciones

Se concluye el capítulo con esta sección, en la que se observan ejemplos de la condición del descenso y de la condición del ascenso. A saber, los homomorfismos planos y las extensiones enteras de anillos respectivamente.

Proposición 4.6. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *y* (B, η) *anillos locales Noetherianos y* $\varphi : A \to B$ *un homomorfismo local de anillos plano. Se tiene que* $\dim(B) = \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$.

Demostración. Por la Proposición B.12 del Apéndice B, φ satisface la condición del descenso. Por la Proposición 4.4, se prueba el enunciado. □

Proposición 4.7. *Sean* A *y* B *anillos Noetherianos,* $\varphi : A \to B$ *un homomorfismo de anillos plano,* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *y* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *tales que* $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. *Se tiene que* $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\dfrac{B_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}B_{\mathfrak{q}}}\right)$.

Demostración. Por la Proposición B.12 del Apéndice B, tenemos que φ satisface la condición del descenso, así, el homomorfismo $\overline{\varphi}$ dado en (70) satisface la condición del descenso. Por la Proposición 4.5, se tiene el resultado. □

Proposición 4.8. *Sean* $(A, \mathfrak{m})$ *y* (B, η) *anillos locales Noetherianos tales que* B *es una extensión entera de* A. *Se tiene que* $\dim(B) = \dim(A) + \dim\left(\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}\right)$.

Demostración. Utilizaremos los resultados del Apéndice C. Por la Proposición C.9, el homomorfismo que hace de B una extensión entera de A es local. Por el Corolario C.12, dicho homomorfismo satisface la condición del ascenso. Finalmente, por la Proposición 4.4, se tiene el resultado. □

Proposición 4.9. *Sean* A *y* B *anillos Noetherianos tales que* B *es una extensión entera de* A, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ *y* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *tales que* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. *Se tiene que* $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim\left(\dfrac{B_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}B_{\mathfrak{q}}}\right)$.

Demostración. Por el Corolario C.12 del Apéndice C, tenemos que el homomorfismo que hace de B una extensión entera de A satisface la condición del ascenso. Por la Proposición 4.5, se tiene el resultado. □

Apéndice A

Anillos de Polinomios y sus Componentes Homogéneas

Dados un anillo A y un conjunto finito de variables $\{x_1, \ldots, x_r\}$ de tal anillo, consideremos el anillo de polinomios $A[x_1, \ldots, x_r]$. Este apéndice tiene como finalidad mostrar que el A-módulo conformado por los elementos homogéneos de grado d es libre generado por $\binom{d+r-1}{r-1}$ elementos. Las proposiciones siguientes nos permitirán llegar a dicha conclusión.

Proposición A.1. *Sean m y $n \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$. Se tiene que:*

1. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.
2. $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$.
3. $\binom{m}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1} - \binom{m}{m-n+1}$.
4. $\binom{m+2}{m} = \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m-1}{m-2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0}$

Demostración. En efecto, tenemos lo siguiente:

1. $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!} = \dfrac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{m-n}$.
2.

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} &= \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} \\
&= \frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{(m-n+1)}{(m-n+1)} + \frac{n}{n}\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} \\
&= \frac{m!(m-n+1)}{n!(m-n)!(m-n+1)} + \frac{nm!}{n(n-1)!(m-n+1)!} \\
&= \frac{m!(m+1-n)}{n!(m-n+1)!} + \frac{m!n}{n!(m-n+1)!} \\
&= \frac{m!(m+1) - m!n}{n!(m+1-n)!} + \frac{m!n}{n!(m+1-n)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!} \\
&= \binom{m+1}{n}.
\end{aligned}$$

3. Por el inciso 2, $\binom{m+1}{m-n+1} = \binom{m}{m-n+1} + \binom{m}{m-n}$ y así, $\binom{m}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1} - \binom{m}{m-n+1}$.
4. Aplicando $m+1$ veces lo visto en el inciso 2, se sigue que

$$\begin{aligned}\binom{m+2}{m} &= \binom{m+1+1}{m}\\ &= \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m-1}\\ &= \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2}\\ &= \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m-1}{m-2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0}. \quad \square\end{aligned}$$

A continuación, utilizaremos el concepto de *composición* de un entero no negativo, definiremos una especie en particular; las llamadas *composiciones débiles* de longitud fija.

Definición 49. Sean $d \in \mathbb{Z}_+$ y $r \in \mathbb{N}$. Una composición débil de d de longitud r es un elemento $(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ tal que $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = d$. Dos composiciones débiles de d de longitud r son iguales si son iguales como elementos de $\mathbb{Z}_+^r$.

Dado que el único tipo de composiciones que utilizaremos son las débiles, simplemente les llamaremos composiciones.

Proposición A.2. *Dados $d \in \mathbb{Z}_+$ y $r \in \mathbb{N}$, el número de composiciones de d de longitud r es $\binom{d+r-1}{r-1}$.*

Demostración. Sea $(i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ una composición de d. Es claro que $i_1, \ldots, i_r \in \{0, \ldots, d\}$. Sea s_r el número de posibilidades para tener la expresión $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = d$ (la cantidad de composiciones de d de longitud r). Procederemos por inducción sobre r y antes de enunciar la hipótesis de inducción, se observarán los casos para $r \in \{1, 2, 3\}$ (dado que el caso $r = 3$ ilustra la forma de proceder para el paso inductivo).
Sabemos que $s_1 = 1$. Si $r = 2$, entonces las posibilidades de tener la expresión $i_1 + i_2 = d$ son

$$\begin{aligned} d + 0 &= d,\\ (d-1) + 1 &= d,\\ (d-2) + 2 &= d,\\ &\vdots\\ 0 + d &= d.\end{aligned}$$

Con ello, $s_r = s_2 = d + 1 = \binom{d+1}{1} = \binom{d+r-1}{r-1}$.
Supongamos que $r = 3$. Tomemos i_3 fijo y sea $d' = d - i_3$, así, $i_1 + i_2 = d'$. Por lo visto en el caso anterior, el número de posibilidades para tener dicha expresión está dado por $d' + 1 = \binom{d'+1}{1} = \binom{d-i_3+1}{1}$. Con ello,

$$s_r = s_3 = \sum_{i_3=0}^{d} \binom{d-i_3+1}{1} = \binom{d+1}{1} + \binom{d}{1} + \binom{d-1}{1} + \ldots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}.$$

Por la Proposición A.1 (usando el inciso 1, seguido del 4 y por último el 1),

$$\begin{aligned} s_r &= \binom{d+1}{d} + \binom{d}{d-1} + \binom{d-1}{d-2} + \ldots + \binom{2}{1} + \binom{1}{0} \\ &= \binom{d+2}{d} \\ &= \binom{d+2}{2} \\ &= \binom{d+r-1}{r-1}. \end{aligned}$$

Supongamos que el número de composiciones de d' de longitud r' es $\binom{d'+r'-1}{r'-1}$ para cualesquiera $d' \in \mathbb{Z}_+$ y $r' \in \mathbb{N}$ con $r' < r$.
Tomemos i_r fijo y sea $d' = d - i_r$, así, $i_1 + i_2 + \ldots + i_{r-1} = d'$. Si $r' = r-1$, entonces el número de posibilidades para tener dicha expresión es $\binom{d'+r'-1}{r'-1} = \binom{d-i_r+r-2}{r-2}$, como consecuencia,

$$\begin{aligned} s_r &= \sum_{i_r=0}^{d} \binom{d-i_r+r-2}{r-2} \\ &= \binom{d+r-2}{r-2} + \binom{d-1+r-2}{r-2} + \binom{d-2+r-2}{r-2} + \ldots + \binom{1+r-2}{r-2} + \binom{r-2}{r-2} \\ &= \binom{d+r-2}{r-2} + \binom{d+r-3}{r-2} + \binom{d+r-4}{r-2} + \ldots + \binom{r-1}{r-2} + \binom{r-2}{r-2}. \end{aligned} \tag{71}$$

Sustituyendo $n = d - j$ y $m = d + r - 2 - j$ con $j \in \{0, \ldots, d\}$ en el inciso 3 de la Proposición A.1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} j = 0 : \binom{d+r-2}{r-2} &= \binom{d+r-1}{r-1} - \binom{d+r-2}{r-1} \\ j = 1 : \binom{d+r-3}{r-2} &= \binom{d+r-2}{r-1} - \binom{d+r-3}{r-1} \\ j = 2 : \binom{d+r-4}{r-2} &= \binom{d+r-3}{r-1} - \binom{d+r-4}{r-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = d-1: \quad \binom{r-1}{r-2} &= \binom{r}{r-1} - \binom{r-1}{r-1} \\ j = d: \quad \binom{r-2}{r-2} &= 1. \end{aligned}$$

Por la ecuación (71), se tiene que

$$\begin{aligned} s_r &= \left(\binom{d+r-1}{r-1} - \binom{d+r-2}{r-1}\right) + \left(\binom{d+r-2}{r-1} - \binom{d+r-3}{r-1}\right) + \left(\binom{d+r-3}{r-1} - \binom{d+r-4}{r-1}\right) + \ldots + \left(\binom{r}{r-1} - \binom{r-1}{r-1}\right) + \binom{r-2}{r-2} \\ &= \binom{d+r-1}{r-1} + \left(-\binom{d+r-2}{r-1} + \binom{d+r-2}{r-1}\right) + \left(-\binom{d+r-3}{r-1} + \binom{d+r-3}{r-1}\right) + \ldots + \left(-\binom{r-1}{r-1} + \binom{r-2}{r-2}\right) \\ &= \binom{d+r-1}{r-1} + \left(-\binom{d+r-2}{r-1} + \binom{d+r-2}{r-1}\right) + \left(-\binom{d+r-3}{r-1} + \binom{d+r-3}{r-1}\right) + \ldots + \left(-1+1\right) \\ &= \binom{d+r-1}{r-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $s_r = \binom{d+r-1}{r-1}$ para cualesquiera $d \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$. □

Proposición A.3. *Sean $d \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_r$ un conjunto de variables de un anillo A. Se tiene que $A[x_1, \ldots, x_r]_d$ es un A-módulo isomorfo a $A^{\binom{d+r-1}{r-1}}$.*

Demostración. Tenemos que $A[x_1, \ldots, x_r]_d$ es un A-módulo libre generado por los elementos de la forma $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r}$ tales que $(i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ e $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = d$. La cantidad de dichos elementos es el número de composiciones de d de longitud r. Por la Proposición A.2, tal cantidad es $\binom{d+r-1}{r-1}$. Por lo tanto, $A[x_1, \ldots, x_r]_d$ es un A-módulo isomorfo a $A^{\binom{d+r-1}{r-1}}$. □

Apéndice B

Módulos Planos y Homomorfismos Planos

En este apéndice trataremos uno de los casos en los que se pueden aplicar los resultados de las proposiciones 4.4 y 4.5. Es el caso de los homomorfismos locales que son planos. Dichos homomorfismos satisfacen la condición del descenso.

1. Módulos Planos

En esta sección se introduce el concepto de *módulo plano* y se da una caracterización.

Definición 50. Sea N un módulo sobre un anillo A.

- N es plano sobre A si para toda sucesión

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \tag{72}$$

  exacta de A-módulos, la sucesión

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes N \tag{73}$$

  de A-módulos es exacta.
- N es fielmente plano sobre A si sucede lo siguiente: Toda sucesión de la forma (72) es exacta si, y sólo si, la sucesión (73) es exacta.

Ejemplo B.1. El $\mathbb{Z}$-módulo $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ no es plano. En efecto, consideremos la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos siguiente:

$$0 \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$$

$$0 \longmapsto 0$$

$$\alpha \longmapsto 2\alpha.$$

Por el inciso 4 de la Proposición 1.25, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo isomorfo a $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \neq \left\{0_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}\right\}$. Más aún, se observa que

$$\begin{aligned}
\ker\left(g \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}\right) &= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \\
\operatorname{Im} f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} &= \left\{0_{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión

$$0 \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

de $\mathbb{Z}$-módulos no es exacta.

Proposición B.2. *Sea N un módulo sobre un anillo A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *N es plano sobre A.*
2. *Si*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{74}$$

   es una sucesión de A-módulos exacta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0 \tag{75}$$

   de A-módulos es exacta.
3. *Si $f : M' \to M$ es un morfismo de A-módulos inyectivo, entonces el morfismo $f \otimes \mathrm{Id}_N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ de A-módulos es inyectivo.*
4. *Si $f : M' \to M$ es un morfismo de A-módulos inyectivo tal que M y M' son A-módulos finitamente generados, entonces el morfismo $f \otimes \mathrm{Id}_N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ de A-módulos es inyectivo.*

Demostración.

1⇔2 Supongamos que N es plano sobre A. Si la sucesión (74) es exacta, entonces las siguientes sucesiones de A-módulos son exactas:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M,$$

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'',$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Así, las siguientes sucesiones de A-módulos son exactas:

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N,$$

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N,$$

$$M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, la sucesión (75) es exacta.

Recíprocamente, si N no es un A-módulo plano, entonces existe una sucesión

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

de A-módulos exacta tal que la siguiente sucesión de A-módulos no es exacta:

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes N.$$

Obsérvese que la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{M'}{\ker f} \xrightarrow{\overline{f}} M \xrightarrow{\overline{g}} g(M) \longrightarrow 0$$

$$(m' + \ker f) \longmapsto f(m')$$

$$m \longmapsto g(m').$$

de A-módulos es exacta. Más aún, $\overline{g} \otimes \mathrm{Id}_N(y) = g \otimes \mathrm{Id}_N(y)$ para todo $y \in M \otimes_A N$, con ello, $\ker(\overline{g} \otimes \mathrm{Id}_N) = \ker(g \otimes \mathrm{Id}_N)$.
Ahora, veamos que $\mathrm{Im}\left(\overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N\right) = \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{Id}_N)$. En efecto, sea $y \in \mathrm{Im}\left(\overline{f} \otimes_A \mathrm{Id}_N\right)$. Existen $k \in \mathbb{N}$, $m'_1, \ldots, m'_k \in M'$ y $n_1, \ldots, n_k \in N$ tales que

$$\begin{aligned} y &= \overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} (m'_i + kerf) \otimes n_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N \left((m'_i + kerf) \otimes n_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{f}\,(m'_i + kerf) \otimes \mathrm{Id}_N(n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f\,(m'_i) \otimes \mathrm{Id}_N(n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f \otimes \mathrm{Id}_N\,(m'_i \otimes n_i) \\ &= f \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i \right) \in \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{Id}_N)\,. \end{aligned}$$

Sea $y \in \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{Id}_N)$. Existen $k \in \mathbb{N}$, $m'_1, \ldots, m'_k \in M'$ y $n_1, \ldots, n_k \in N$ tales que

$$\begin{aligned} y &= f \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f \otimes \mathrm{Id}_N\,(m'_i \otimes n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f\,(m'_i) \otimes \mathrm{Id}_N(n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{f}\,(m'_i + \ker f) \otimes \mathrm{Id}_N(n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N \left((m'_i + \ker f) \otimes n_i \right) \end{aligned}$$

$$= \overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} (m_i' + \ker f) \otimes n_i \right) \in \mathrm{Im}\left(\overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N\right).$$

Por otra parte, consideremos la siguiente sucesión de A-módulos:

$$0 \longrightarrow \frac{M'}{\ker f} \otimes_A N \xrightarrow{\overline{f}\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{\overline{g}\otimes \mathrm{Id}_N} g(M') \otimes_A N \longrightarrow 0. \tag{76}$$

Dado que $\mathrm{Im}\left(\overline{f} \otimes \mathrm{Id}_N\right) = \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{Id}_N) \neq \ker\,(g \otimes \mathrm{Id}_N) = \ker\,(\overline{g} \otimes \mathrm{Id}_N)$, resulta que la sucesión (76) no es exacta.

2⇔3 Supongamos que es válido el enunciado 2. Sea $f : M' \to M$ un morfismo de A-módulos inyectivo. Consideremos la siguiente sucesión de A-módulos exacta:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{f(M')} \longrightarrow 0,$$

donde π es la proyección de M en $\dfrac{M}{f(M')}$. Así, la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{\pi\otimes \mathrm{Id}_N} \frac{M}{f(M')} \otimes_A N \longrightarrow 0$$

de A-módulos es exacta y con ello, el morfismo $f \otimes \mathrm{Id}_N$ de A-módulos es inyectivo. Recíprocamente, supongamos que el enunciado 3 es válido. Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

una sucesión de A-módulos exacta. Así, f es un morfismo de A-módulos inyectivo y la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Como consecuencia, el morfismo $f \otimes \mathrm{Id}_N$ es inyectivo y por la Proposición 1.26, la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

de A-módulos es exacta.

3⇔4 Supongamos que el enunciado 3 es válido. En particular, se satisface para el caso en que M' y M'' son finitamente generados.

Recíprocamente, supongamos que el enunciado 4 es válido. Sea $f : M' \to M$ un morfismo de A-módulos inyectivo. Tomemos $x \in M' \otimes_A N$. Existen $k \in \mathbb{N}$, $m'_1, \ldots, m'_k \in M'$ y $n_1, \ldots, n_k \in N$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i.$$

Se tiene que $x \in \ker(f \otimes \mathrm{Id}_N)$ si, y sólo si,

$$\begin{aligned} 0_{M \otimes_A N} &= f \otimes \mathrm{Id}_N(x) \\ &= f \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f \otimes \mathrm{Id}_N(m'_i \otimes n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f(m'_i) \otimes n_i. \end{aligned}$$

Sea $M'_0 = Am'_1 + \ldots + Am'_k$. Tenemos que $x = \sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i \in M'_0 \otimes_A N$. Por la Proposición 1.23, existen M_0 y N_0 A-submódulos finitamente generados de M y N respectivamente (con $f(M'_0) \subseteq M_0$) tales que $\sum_{i=1}^{n} f(m'_i) \otimes n_i = 0_{M_0 \otimes_A N_0}$. Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} f_0 : M'_0 &\to M_0 \\ m' &\mapsto f(m) \end{aligned}$$

de A-módulos. Se tiene que

$$\begin{aligned} f_0 \otimes \mathrm{Id}_N(x) &= f_0 \otimes \mathrm{Id}_N(x) \\ &= f_0 \otimes \mathrm{Id}_N \left(\sum_{i=1}^{k} m'_i \otimes n_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_0 \otimes \mathrm{Id}_N(m'_i \otimes n_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} f_0(m_i') \otimes n_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} f(m_i') \otimes n_i \\
&= 0_{M_0 \otimes_A N}.
\end{aligned}
$$

Como f es un morfismo de A-módulos inyectivo, tenemos que f_0 es inyectivo. Dado que M_0' y M_0 son A-módulos finitamente generados, $f_0 \otimes \mathrm{Id}_N$ es un morfismo de A-módulos inyectivo. Como consecuencia, $x = 0_{M_0' \otimes_A N}$ y así, $x = 0_{M \otimes_A N}$. Por lo tanto, $f \otimes \mathrm{Id}_N$ es un morfismo de A-módulos inyectivo. □

2. Homomorfismos Planos

Se introducen ahora los homomorfismos de anillos planos. Revisaremos aspectos sobre la estructura de tales homomorfismos que nos permitirán afirmar que satisfacen la condición del descenso.

Definición 51.

- Un homomorfismo $\varphi : A \to B$ de anillos es plano si B es plano sobre A con la estructura de A-álgebra dada por φ.
- Un homomorfismo $\varphi : A \to B$ de anillos es fielmente plano si B es fielmente plano sobre A con la estructura de A-álgebra dada por φ.

Proposición B.3. *Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. El A-álgebra $\mathrm{S}^{-1} A$ es un A-módulo plano.*

Demostración. Sea $0 \to M \to N$ una sucesión exacta de A-módulos. Por la Proposición 1.28, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ es un $\mathrm{S}^{-1} A$-módulo isomorfo a $\mathrm{S}^{-1} A \otimes_A M$ y $\mathrm{S}^{-1} N$ es un $\mathrm{S}^{-1} A$-módulo isomorfo a $\mathrm{S}^{-1} A \otimes_A N$. Por la Proposición 1.12, la sucesión $0 \to \mathrm{S}^{-1} M \to \mathrm{S}^{-1} N$ de $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos es exacta. Así, $0 \to \mathrm{S}^{-1} A \otimes_A M \to \mathrm{S}^{-1} A \otimes_A N$ es una sucesión de $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos exacta. Por la Proposición 1.30, dicha sucesión es de A-módulos. Por lo tanto, por la Proposición B.2, $\mathrm{S}^{-1} A$ es un A-álgebra plana. □

Proposición B.4. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos plano, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. El anillo $B_{\mathfrak{q}}$ es un A-módulo plano.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $S = A \setminus \mathfrak{p}$, $T = B \setminus \mathfrak{q}$. Sea $0 \to M' \to M$ una sucesión exacta de $A_{\mathfrak{p}}$-módulos, que a su vez es una sucesión exacta de A-módulos. Por la Proposición B.3, se tiene que $\mathrm{S}^{-1} A$ es un A-módulo plano, así, la sucesión

$$0 \longrightarrow \left(\mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{S}^{-1} A} \otimes f} \left(\mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M$$

de A-módulos es exacta. Como B es un A-módulo plano, tenemos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow B \otimes_A \left(\left(\mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M'\right) \xrightarrow{\mathrm{Id}_B \otimes \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{S}^{-1} A} \otimes f\right)} B \otimes_A \left(\left(\mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M\right), \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow \left(B \otimes_A \mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M' \xrightarrow{\left(\mathrm{Id}_B \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{S}^{-1} A}\right) \otimes f} \left(B \otimes_A \mathrm{S}^{-1} A\right) \otimes_A M$$

de A-módulos son exactas. Por la Proposición 1.28, la sucesión

$$0 \longrightarrow \left(\mathrm{S}^{-1} B\right) \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{S}^{-1} B} \otimes f} \left(\mathrm{S}^{-1} B\right) \otimes_A M$$

de A-módulos es exacta. Dado que $0_B \notin T$, por la Proposición 1.29, los $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos $\mathrm{S}^{-1} B$ y $T^{-1}B$ son isomorfos (A-módulos isomorfos). Como consecuencia, las siguientes sucesiones de A-módulos son exactas:

$$0 \longrightarrow \left(T^{-1}B\right) \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_{T^{-1}B} \otimes f} \left(T^{-1}B\right) \otimes_A M,$$

$$0 \longrightarrow B_{\mathfrak{q}} \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_{B_{\mathfrak{q}}} \otimes f} B_{\mathfrak{q}} \otimes_A M.$$

Por la Proposición B.2, resulta que $B_{\mathfrak{q}}$ es un A-módulo plano. □

Proposición B.5. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos plano. Si N es un B-módulo plano, entonces N es un A-módulo plano.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ una sucesión exacta de A-módulos. Como B es un A-módulo plano,

$$M' \otimes_A B \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_B} M \otimes_A B \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_B} M'' \otimes_A B \tag{77}$$

es una sucesión exacta de A-módulos. Dado que B es un (A,B)-bimódulo, por la Proposición 1.30, la sucesión (77) es una sucesión exacta de B-módulos. Como N es un B-módulo plano, la sucesión

$$(M' \otimes_A B) \otimes_B N \xrightarrow{(f\otimes \mathrm{Id}_B)\otimes \mathrm{Id}_N} (M \otimes_A B) \otimes_B N \xrightarrow{(g\otimes \mathrm{Id}_B)\otimes \mathrm{Id}_N} (M'' \otimes_A B) \otimes_B N$$

de B-módulos es exacta. Nuevamente, por la Proposición 1.30,

$$M' \otimes_A (B \otimes_B N) \xrightarrow{f\otimes(\mathrm{Id}_B \otimes \mathrm{Id}_N)} M \otimes_A (B \otimes_B N) \xrightarrow{g\otimes(\mathrm{Id}_B \otimes \mathrm{Id}_N)} M'' \otimes_A (B \otimes_B N)$$

es una sucesión exacta de A-módulos. Por el inciso 4 de la Proposición 1.25,

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_A N$$

es una sucesión exacta de A-módulos. Por lo tanto, N es un A-módulo plano. □

Proposición B.6. *Sean $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos y M un A-módulo plano. Se tiene que $M \otimes_A B$ es un B-módulo plano.*

Demostración. Sea $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ una sucesión exacta de B-módulos. Por los incisos 1 y 4 de la Proposición 1.25,

$$N' \otimes_B B \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_B} N \otimes_B B \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_B} N'' \otimes_B B$$

es una sucesión de B-módulos exacta. Dado que esta también es una sucesión de A-módulos y M es un A-módulo plano, la sucesión

$$(N' \otimes_B B) \otimes_A M \xrightarrow{(f\otimes \mathrm{Id}_B)\otimes \mathrm{Id}_M} (N \otimes_B B) \otimes_A M \xrightarrow{(g\otimes \mathrm{Id}_B)\otimes \mathrm{Id}_M} (N'' \otimes_B B) \otimes_A M$$

de A-módulos es exacta. Por la Proposición 1.30,

$$N' \otimes_B (B \otimes_A M) \xrightarrow{f\otimes(\mathrm{Id}_B \otimes \mathrm{Id}_M)} N \otimes_B (B \otimes_A M) \xrightarrow{g\otimes(\mathrm{Id}_B \otimes \mathrm{Id}_M)} N'' \otimes_B (B \otimes_A M)$$

es una sucesión exacta de A-módulos y de B-módulos simultáneamente. Por el inciso 1 de la Proposición 1.25, la siguiente es una sucesión exacta de B-módulos:

$$N' \otimes_B (M \otimes_A B) \xrightarrow{f\otimes(\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_B)} N \otimes_B (M \otimes_A B) \xrightarrow{g\otimes(\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_B)} N'' \otimes_B (M \otimes_A B)\,.$$

Por lo tanto, $M \otimes_A B$ es un A-módulo plano. □

Proposición B.7. *Sean $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos plano y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Se tiene que $B_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano. Más aún, si $P \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(P)$, entonces B_P es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano.*

Demostración. Por la Proposición B.6, $B_{\mathfrak{p}} = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano. Por la Proposición 1.29, los $A_{\mathfrak{p}}$-módulos $B_{\mathfrak{p}}$ y B_P son isomorfos. Por lo tanto, B_P es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano. □

Teorema B.8. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es un A-módulo fielmente plano.*
2. *M es un A-módulo plano y $N \otimes_A M \neq \{0_{N\otimes_A M}\}$ para cualquier A-módulo $N \neq \{0_N\}$.*
3. *M es un A-módulo plano y $\mathfrak{m}M \neq M$ para cualquier $\mathfrak{m} \in Max(A)$.*

Demostración.

1⇒2 Sea N un A-módulo tal que $N \otimes_A M = \{0_{N\otimes_A M}\}$. Consideremos la sucesión

$$0 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} 0 \tag{78}$$

de A-módulos. Tenemos que $0 \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_N} 0$ es una sucesión de A-módulos exacta. Dado que M es un A-módulo fielmente plano, resulta que la sucesión (78) es exacta. Por lo tanto, $N = \ker g = \operatorname{Im} f = \{0_N\}$, teniendo así, el enunciado 2.

2⇒3 Tenemos que M es un A-módulo plano. Dado que $\dfrac{A}{\mathfrak{m}} \neq \left\{0_{\frac{A}{\mathfrak{m}}}\right\}$, se tiene que $\dfrac{A}{\mathfrak{m}} \otimes_A M \neq \left\{0_{\frac{A}{\mathfrak{m}}\otimes_A M}\right\}$. Por la Proposición 1.27, los A-módulos $\dfrac{A}{\mathfrak{m}} \otimes_A M$ y $\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$ son isomorfos. Así, $\dfrac{M}{\mathfrak{m}M} \neq \{0_{\frac{M}{\mathfrak{m}M}}\}$. Por lo tanto, $\mathfrak{m}M \neq M$.

3⇒2 Sea $N \neq \{0_N\}$ un A-módulo. Tomemos $x \in N \setminus \{0_N\}$ y el morfismo

$$\begin{aligned} \phi : A &\to Ax \\ \alpha &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

de A-módulos. Sea $I = \ker \phi$. Dado que ϕ es sobre, los A-módulos $\dfrac{A}{I}$ y Ax son isomorfos. Así, $\dfrac{A}{I}$ es isomorfo a un A-submódulo de N. Con ello, existe una sucesión exacta de A-módulos de la siguiente forma:

(79) $$0 \to \frac{A}{I} \to N.$$

Por otra parte, sea $\mathfrak{m} \in Max(A)$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Así, $IM \subseteq \mathfrak{m}M \subset M$. Existe un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{M}{IM} & \to & \dfrac{M}{\mathfrak{m}M} \neq \{0_{\frac{M}{IM}}\} \\ m + IM & \mapsto & m + \mathfrak{m}M \end{array}$$

de A-módulos sobre, como consecuencia, $\dfrac{M}{IM} \neq \left\{0_{\frac{M}{IM}}\right\}$. Por la Proposición 1.27, $\dfrac{A}{I} \otimes_A M \neq \left\{0_{\frac{A}{I}\otimes_A M}\right\}$. Dado que M es un A-módulo plano y la sucesión (79) es exacta, la sucesión

$$0 \to \frac{A}{I} \otimes_A M \to N \otimes_A M$$

de A-módulos es exacta. Así, $N \otimes_A M$ tiene un A-submódulo isomorfo a $\dfrac{A}{I} \otimes_A M$, por lo tanto, $N \otimes_A M \neq \{0_{N\otimes_A M}\}$.

2⇒1 Sea

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

una sucesión de A-módulos. Supongamos que la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$N' \otimes_A M \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_M} N'' \otimes_A M.$$

Veamos que

(80) $$\ker(g \otimes \mathrm{Id}_M) = \ker g \otimes M.$$

En efecto, tomemos la sucesión

$$\ker g \xrightarrow{i} N \xrightarrow{g} N''$$

de A-módulos exacta, donde $i : \ker g \to N$ es la inclusión. Dado que M es un A-módulo plano, la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$\ker g \otimes_A M \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_M} N'' \otimes_A M.$$

Así, $\ker(g \otimes \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{Id}_M) = i \otimes \mathrm{Id}_M(\ker g \otimes_A M) = \ker g \otimes_A M$.
Observemos que

$$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Im}\, f \otimes M. \tag{81}$$

En efecto, tomemos la sucesión

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \frac{N}{\mathrm{Im}\, f}$$

de A-módulos exacta, donde $\pi : N \to \dfrac{N}{imf}$ es la proyección. Dado que M es un A-módulo plano, la siguiente sucesión de A-módulos es exacta:

$$N' \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_M} N \otimes_A M \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{Id}_M} \frac{N}{\mathrm{Im}\, f} \otimes_A M.$$

Como consecuencia, $\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_M) = \ker(\pi \otimes \mathrm{Id}_M)$. Por la ecuación (80), tomando $N'' = \dfrac{N}{\mathrm{Im}\, f}$ y $g = \pi$, se tiene que $\ker(\pi \otimes \mathrm{Id}_M) = \ker \pi \otimes_A M$. Con ello,

$$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_M) = \ker(\pi \otimes \mathrm{Id}_M) = \ker \pi \otimes_A M = \mathrm{Im}\, f \otimes_A M.$$

Así, $\mathrm{Im}((g \otimes \mathrm{Id}_M) \circ (f \otimes \mathrm{Id}_M)) = \mathrm{Im}(g \circ f) \otimes \mathrm{Id}_M = \mathrm{Im}(g \circ f) \otimes M = 0_{N'' \otimes_A M}$. Por nuestra hipótesis, resulta que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{0_{N''}\}$, con ello, $\mathrm{Im}\, f \subseteq \ker g$.
Por último, mostraremos que $\ker g \subseteq \mathrm{Im}\, f$. En efecto, sea $n \in N$ y supongamos que $n \in \ker g$. Tomemos $m \in M$, así,

$$g \otimes \mathrm{Id}_M(n \otimes m) = g(n) \otimes m = 0_{N''} \otimes m = 0_{N'' \otimes_A M}.$$

Por consiguiente, $n \otimes m \in \ker(g \otimes \mathrm{Id}_M)$, con ello, $n \otimes m \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Im}\, f \otimes_A M$. Esto implica que $n \in \mathrm{Im}\, f$.
Por lo tanto, $\ker g = \mathrm{Im}\, f$ y así, M es un A-módulo fielmente plano. □

Corolario B.9. *Sean $(A, \mathfrak{m})$, (B, η) anillos locales y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo local de anillos.*

1. *Dado un B-módulo finitamente generado no nulo M, se tiene que M es un A-módulo plano si, y sólo si, M es un A-módulo fielmente plano.*
2. *B es un A-módulo plano si, y sólo si, B es un A-módulo fielmente plano.*

Demostración.

1. Supongamos que M es un A-módulo fielmente plano. En particular, M es un A-módulo plano.
   Recíprocamente, supongamos que M es un A-módulo plano. Por el lema de Nakayama, $\eta M \subset M$. Dado que $\varphi^{-1}(\eta) = \mathfrak{m}$, se tiene que, $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \eta$. Así, $\mathfrak{m}M \subseteq \eta M \subset M$. Por el Teorema B.8 (2⇒1), M es un A-módulo fielmente plano.
2. Tomando $M = B$ en el inciso 1, se tiene el resultado. □

Notación 52. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Denotaremos por $J \cap A$ al ideal $\varphi^{-1}(J)$ de A para todo ideal J de B.

Proposición B.10. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos fielmente plano. La siguiente aplicación es sobre:*

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Spec}(B) &\to \mathrm{Spec}(A) \\ P &\mapsto \varphi^{-1}(P). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Por la Proposición B.7, $B_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo plano. Por el Corolario B.9, $B_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo fielmente plano. Por el Teorema B.8, $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \neq B_\mathfrak{p}$. Existe $\overline{\mathfrak{m}} \in \text{máx}(B_\mathfrak{p})$ tal que $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathfrak{m}}$, con ello, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathfrak{m}} \cap A_\mathfrak{p}$. Dado que $Max(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\}$, se tiene que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{m}} \cap A_\mathfrak{p}$. Sea $P = \overline{\mathfrak{m}} \cap B$, así

$$\varphi^{-1}(P) = P \cap A = (\overline{\mathfrak{m}} \cap B) \cap A = \overline{\mathfrak{m}} \cap A = (\overline{\mathfrak{m}} \cap A_\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}.$$

Por lo tanto, ψ es sobre. □

Corolario B.11. *Sean $(A, \mathfrak{m})$, (B, η) anillos locales y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo local de anillos plano. La siguiente aplicación es sobre:*

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Spec}(B) &\to \mathrm{Spec}(A) \\ P &\mapsto \varphi^{-1}(P). \end{aligned}$$

Demostración. Por el Corolario B.9, B es un A-módulo fielmente plano. Por la Proposición B.10, la aplicación ψ es sobre. □

La estructura de los homomorfismos planos revisada hasta ahora nos permite observar que dichos homomorfismos satisfacen la condición del descenso. Para ello, enunciamos lo siguiente:

Proposición B.12. *Sean A y B anillos. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos plano, entonces φ satisface la condición del descenso.*

Demostración. Sean $\mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tales que $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Por la Proposición B.7, $B_{\mathfrak{q}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano. Por el Corolario B.9, $B_{\mathfrak{q}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo fielmente plano por medio del homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi} : A_{\mathfrak{p}} & \to & B_{\mathfrak{q}} \\ \dfrac{\alpha}{s} & \mapsto & \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(s)}. \end{array}$$

Por la Proposición B.10, la siguiente aplicación es sobre:

$$\begin{array}{rcl} \psi' : \operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{q}}) & \to & \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \\ P & \mapsto & \overline{\varphi}^{\,-1}(P). \end{array}$$

Así, existe $\overline{\mathfrak{q}}' \in \operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{q}})$ tal que $\overline{\varphi}^{\,-1}\left(\overline{\mathfrak{q}}'\right) = \mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Sean $S = A \setminus \mathfrak{p}$ y $S' = B \setminus \mathfrak{q}$. Tomemos $\mathfrak{q}' = i_{S'}^{B\,-1}\left(\overline{\mathfrak{q}}'\right)$, dado que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_S^A"'] & B \arrow[d, "i_{S'}^B"] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

conmuta, se tiene que $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$. Supongamos que $\mathfrak{q}'$ no está contenido en $\mathfrak{q}$, así, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$ no está contenido en $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, ésto es, $\mathfrak{p}'$ no está contenido en $\mathfrak{p}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Como consecuencia, $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$. Por lo tanto, φ satisface la condición del descenso. $\square$

Apéndice C

Extensiones Enteras de Anillos

En este apéndice se trata otro ejemplo en el que se satisfacen las condiciones para aplicar las proposiciones 4.4 y 4.5. Este es el caso de las extensiones enteras de anillos locales Noetherianos. Comenzaremos dando las definiciones básicas de dicho concepto.

1. Elementos Enteros sobre un Anillo

El fundamento de este apéndice está dado por los elementos enteros de un anillo. A continuación, se describen dichos elementos y se da su caracterización.

Sea A un subanillo de un anillo B. Se quieren determinar ciertos subanillos de B que contienen a A. Sea $\beta \in B$, consideremos el conjunto

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=0}^{r} a_i\beta^i \in B \,\middle|\, r \in \mathbb{Z}_+,\ a_i \in A \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, r\} \right\}.$$

Tenemos que $\Gamma \subseteq B$. Más aún, Γ es un subanillo de B tal que $A \subseteq \Gamma$. En efecto, basta probar que Γ es un subanillo de B. Consideremos el homomorfismo de anillos siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f : A[x] & \to & B \\ x & \mapsto & \beta \\ \lambda \in A & \mapsto & \lambda. \end{array}$$

Obsérvese que si $P(x) \in A[x]$, entonces $f(P(x)) = P(\beta)$. Por la propiedad universal de los polinomios en una variable con coeficientes en A, se tiene que f es un homomorfismo de anillos y por lo tanto, $\operatorname{Im} f$ es un subanillo de B.

Veamos que $\operatorname{Im} f = \Gamma$. En efecto, por construcción de Γ, $\operatorname{Im} f \subseteq \Gamma$. Recíprocamente, tomemos $\gamma \in \Gamma$. Existen $r \in \mathbb{Z}_+$ y $a_i \in A$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$ tales que $\gamma = \sum_{i=0}^{r} a_i\beta^i$. Sea $Q(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i \in A[x]$, así, $\gamma = Q(\beta) = f(Q(x)) \in \operatorname{Im} f$. Como consecuencia, $\Gamma \subseteq \operatorname{Im} f$. Por lo tanto, $\Gamma = \operatorname{Im} f$.

Notación 53. Dados un subanillo A de un anillo B y $\beta \in B$, adoptaremos la expresión

$$A[\beta] \quad = \quad \{P(\beta) |\, P(x) \in A[x]\}\,.$$

Definición 54. Sean A un subanillo de un anillo B y $\beta \in B$. β es entero sobre A si existen $s \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_s \in A$ tales que

$$\beta^s + a_1\beta^{s-1} + \ldots + a_{s-1}\beta + a_s = 0_B.$$

Es decir, existe un polinomio mónico en $A[x]$ tal que β es una raíz de dicho polinomio.

Ejemplo C.1.

1. Para todo $\alpha \in A$, α es entero sobre A, dado que $P(\alpha) = 0_A$ con $P(x) = x - \alpha \in A[x]$.
2. $i \in \mathbb{C}$ es entero sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$, dado que $P(i) = 0$ con $P(x) = x^2 + 1$.

Definición 55. Sea A un anillo. Un A-módulo M es fiel si $\mathrm{Ann}_A(M) = \{0_A\}$.

El siguiente enunciado nos presenta una caracterización de elementos enteros sobre un subanillo de un anillo dado.

Teorema C.2. *Sean A un subanillo de un anillo B y $\beta \in B$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *β es entero sobre A.*
2. *$A[\beta]$ es un A-módulo finitamente generado.*
3. *Existe un subanillo C de B tal que*
   - i $A[\beta] \subseteq C$, *y*
   - ii *C es un A-módulo finitamente generado.*
4. *Existe un A-submódulo M de B tal que*
   - i $\beta M \subseteq M$.
   - ii *M es un A-módulo finitamente generado.*
   - iii *M es un $A[\beta]$-módulo fiel.*
5. *Existe un $A[\beta]$-módulo fiel N tal que N es un A-módulo finitamente generado.*

Demostración.

1⇒2 Dado que β es entero sobre A, existen $u \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_u \in A$ tales que

$$
\begin{aligned}
0_B &= \beta^u + \alpha_1\beta^{u-1} + \alpha_1\beta^{u-2} + \ldots + \alpha_u, \\
\beta^u &= \quad -\alpha_1\beta^{u-1} - \alpha_1\beta^{u-2} - \ldots - \alpha_u \\
&\in A\beta^{u-1} + A\beta^{u-2} + \ldots + A1_B.
\end{aligned} \tag{82}
$$

Mostraremos que $A[\beta] = \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$. En efecto, tenemos que

$$\langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A \subseteq \langle (\beta^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}\rangle_A = A[\beta].$$

Recíprocamente, veamos que $A[\beta] \subseteq \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$. Basta probar que $\beta^j \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. En efecto, por inducción sobre j, se tiene lo siguiente:

$\beta^0 = 1_B \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$. Sea $j \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\beta^l \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$ para todo $l \in \{0, \ldots, j-1\}$. Falta mostrar que $\beta^j \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$.

Si $j \leq u$, entonces por la ecuación (82), $\beta^j \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$. Si $u < j$, entonces

$$
\begin{aligned}
\beta^u &= -\alpha_1\beta^{u-1} - \ldots - \alpha_u, \\
\beta^u\beta^{j-u} &= -\alpha_1\beta^{u-1}\beta^{j-u} - \ldots - \alpha_u\beta^{j-u}, \\
\beta^j &= -\alpha_1\beta^{j-1} - \ldots - \alpha_u\beta^{j-u}.
\end{aligned}
$$

Como $\beta^{j-1}, \ldots, \beta^{j-u} \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$, tenemos que $\beta^j \in \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$, con ello, $A[\beta] \subseteq \langle 1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}\rangle_A$.

Por lo tanto, $A[\beta]$ es un A-módulo finitamente generado por $1_B, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{u-1}$.

2⇒3 Sea $C = A[\beta]$. Tenemos que $A[\beta]$ es un subanillo de B, $A[\beta] \subseteq C$ y C es un A-módulo finitamente generado.

3⇒4 Sea $C = M$. Dado que $A[\beta] \subseteq M$, se tiene que $\beta M \subseteq M$ y $1_A = 1_B \in M$, con ello, M es un subanillo de B. Más aún, M es un A-módulo finitamente generado, sólo falta mostrar que M es un $A[\beta]$-módulo fiel.

Tomemos $\lambda \in A[\beta]$ tal que $\lambda \in \mathrm{Ann}_{A[\beta]}(M)$. Así, $\lambda 1_B = 0_B$, como consecuencia, $\lambda = 0_B = 0_{A[\beta]}$. De forma que $\mathrm{Ann}_{A[\beta]}(M) = \left\{0_{A[\beta]}\right\}$ y por lo tanto, M es un $A[\beta]$-módulo fiel.

4⇒5 Sea $N = M$. Por la condición iii, N es un $A[\beta]$-módulo fiel y por la condición ii, N es un A-módulo finitamente generado.

5⇒1 Existen $l \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_l \in N$ tales que $N = An_1 + \ldots + An_l$. Como N es un $A[\beta]$-módulo, $\beta n_i \in N$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$. Existe $\lambda_{(i,j)} \in A$ con $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que

$$\begin{aligned}
\beta n_1 &= \lambda_{(1,1)} n_1 + \lambda_{(1,2)} n_2 + \ldots + \lambda_{(1,l)} n_l,\\
\beta n_2 &= \lambda_{(2,1)} n_1 + \lambda_{(2,2)} n_2 + \ldots + \lambda_{(2,l)} n_l,\\
&\vdots\\
\beta n_l &= \lambda_{(l,1)} n_1 + \lambda_{(l,2)} n_2 + \ldots + \lambda_{(l,l)} n_l,
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
0_N &= (\lambda_{(1,1)} - \beta) n_1 + \lambda_{(1,2)} n_2 + \lambda_{(1,3)} n_3 + \ldots + \lambda_{(1,l)} n_l,\\
0_N &= \lambda_{(2,1)} n_1 + (\lambda_{(2,2)} - \beta) n_2 + \lambda_{(2,3)} n_3 + \ldots + \lambda_{(2,l)} n_l,\\
&\vdots\\
0_N &= \lambda_{(l,1)} n_1 + \lambda_{(l,2)} n_2 + \lambda_{(l,3)} n_3 + \ldots + (\lambda_{(l,l)} - \beta) n_l.
\end{aligned}$$

Consideremos la matriz E en $M_{(l\times l)}(A[\beta])$ dada por

$$E = \begin{pmatrix} (\lambda_{(1,1)} - \beta) & \lambda_{(1,2)} & \ldots & \lambda_{(1,l)} \\ \lambda_{(2,1)} & (\lambda_{(2,2)} - \beta) & \ldots & \lambda_{(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(l,1)} & \lambda_{(l,2)} & \ldots & (\lambda_{(l,l)} - \beta) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$E \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_N \\ 0_N \\ \vdots \\ 0_N \end{pmatrix}.$$

Consideremos a la matriz adjunta E' de la matriz E. Como $E'E = \det(E)\,\mathrm{Id}_l$, donde Id_l es la matriz identidad en $M_{(l\times l)}(A[\beta])$, se tiene que

$$\det(E)\,\mathrm{Id}_l \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix} = E'E \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} 0_N \\ 0_N \\ \vdots \\ 0_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_N \\ 0_N \\ \vdots \\ 0_N \end{pmatrix}.$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \det(E)n_1 &= 0_N \\ \det(E)n_2 &= 0_N \\ &\vdots \\ \det(E)n_l &= 0_N. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\det(E) \in \mathrm{Ann}_{A[\beta]}(N)$. Dado que N es un $A[\beta]$-módulo fiel, $\det(E) = 0_{A[\beta]} = 0_B$. Así, existen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l \in A$ tales que

$$\det(E) = \beta^l + \gamma_1\beta^{l-1} + \ldots + \gamma_{l-1}\beta + \gamma_l.$$

De esta forma, β es una raíz del polinomio $P(x) = x^l + \gamma_1 x^{l-1} + \ldots + \gamma_{l-1}x + \gamma_l \in A[x]$ y por lo tanto, β es un elemento entero sobre A. □

2. Extensión Entera de un Anillo

Esta sección trata el concepto central de este apéndice. Se determinan ciertas características de interés para aplicar conceptos de dimensión.

Notación 56. Sea A un subanillo de un anillo B. El conjunto de los elementos de B que son enteros sobre A se denota por $E_{B/A}$.

Lema C.3. *Sean E un subanillo de un anillo F y M un F-módulo. Si M es un F-módulo finitamente generado y F es un E-módulo finitamente generado, entonces M es un E-módulo finitamente generado.*

Demostración. Existen $k, l \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_k \in M$ y $f_1, \ldots, f_l \in F$ tales que

$$\begin{aligned} M &= Fm_1 + \ldots + Fm_k \\ F &= Ef_1 + \ldots + Ef_l. \end{aligned}$$

Sean $m \in M$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ tales que $m = \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k$. Dado $i \in \{1, \ldots, k\}$, existen $e_{(i,1)}, \ldots, e_{(i,l)} \in E$ tales que $\lambda_i = e_{(i,1)} f_1 + \ldots + e_{(i,l)} f_l$. Así,

$$m = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(e_{(i,j)} f_j\right) m_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} e_{(i,j)} \left(f_j m_i\right).$$

Dado que $f_j m_i \in M$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, l\}$, se tiene que M es un E-módulo finitamente generado. □

Proposición C.4. *Sea A un subanillo de un anillo B. Se tiene que $E_{B/A}$ es un subanillo de B que contiene a A.*

Demostración. Se mostrará lo siguiente:

1. $E_{B/A}$ es un subgrupo de B bajo la estructura aditiva.
2. $\alpha\beta \in E_{B/A}$ para cualesquiera α y $\beta \in E_{B/A}$.
3. $1_B \in E_{B/A}$.

Sean α y $\beta \in E_{B/A}$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} A[\alpha - \beta] &\subseteq A[\alpha, \beta] = A[\alpha][\beta] \quad \text{y} \\ A[\alpha\beta] &\subseteq A[\alpha, \beta] = A[\alpha][\beta]. \end{aligned}$$

Por la condición 3 del Teorema C.2, para probar los incisos 1 y 2, basta mostrar que $A[\alpha][\beta]$ es un A-módulo finitamente generado. En efecto, dado que α es entero sobre A, se tiene que $A[\alpha]$ es un A-módulo finitamente generado. Como β es un elemento entero sobre A, tenemos que β es un elemento entero sobre $A[\alpha]$, con ello, $A[\alpha][\beta]$ es un $A[\alpha]$-módulo finitamente generado. Por el Lema C.3, $A[\alpha][\beta]$ es un A-módulo finitamente generado.
Finalmente, por el inciso 1 del Ejemplo C.1, se tiene que $1_B = 1_A \in E_{B/A}$ y así, se prueba el inciso 3. Por lo tanto, $E_{B/A}$ es un subanillo de B que contiene a A. □

Definición 57. Sea A un subanillo de un anillo B.

- B es una extensión entera de A si $B = E_{B/A}$.
- A es enteramente cerrado en B si $A = E_{B/A}$.

A continuación, se da la definición de extensiones enteras de anillos para el caso más general en que no se tiene una contención de anillos en el sentido estricto, sino una inclusión por medio de un homomorfismo.

Definición 58. Sean A y B anillos. B es una extensión entera de A si existe un homomorfismo $\varphi : A \to B$ de anillos inyectivo tal que B es una extensión entera de $\varphi(A)$.

Notación 59. Sea B una extensión entera de un anillo A. Dados $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, tomaremos la expresión $\alpha\beta = \varphi(\alpha)\beta$. En particular, denotamos simplemente por α al elemento $\varphi(\alpha)(1_B)$.

Proposición C.5. *Sea B una extensión entera de un anillo A.*

1. *Si J es un ideal de B e $I = J \cap A$ (ver la Notación 52), entonces $\dfrac{B}{J}$ es una extensión entera del anillo $\dfrac{A}{I}$.*
2. *Si S es un subconjunto multiplicativo de A, entonces $\mathrm{S}^{-1} B$ es una extensión entera del anillo $\mathrm{S}^{-1} A$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi : A \to B$ es el homomorfismo de anillos que hace de B una extensión entera de A. Dado $\beta \in B$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$\beta^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \ldots + a_n = 0_B. \tag{83}$$

1. Dado que $\varphi(I) \subseteq J$, tenemos el siguiente homomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi} : \dfrac{A}{I} & \to & \dfrac{B}{J} \\ \alpha + I & \mapsto & \varphi(\alpha) + J. \end{array}$$

Veamos que $\overline{\varphi}$ es inyectivo. En efecto, sea $\alpha \in A$. Supongamos que $\alpha + I \in \ker\overline{\varphi}$, ésto es, $\overline{\varphi}(\alpha + I) = 0_{\frac{B}{J}}$. Es decir, $\varphi(\alpha) + J = 0_{\frac{B}{J}}$, o bien, $\varphi(\alpha) \in J$. Ello equivale a que $\alpha \in I = J \cap A$. Por lo tanto, $\ker\overline{\varphi} = \{I\} = \left\{0_{\frac{A}{I}}\right\}$.
Ahora, sea $\beta \in B$. Por la expresión (83),

$$\begin{aligned}
\beta^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \ldots + a_n + J &= J,\\
\left(\beta^n + J\right) + \left(a_1\beta^{n-1} + J\right) + \left(a_2\beta^{n-2} + J\right) + \ldots + \left(a_n + J\right) &= 0_{\frac{B}{J}},\\
\left(\beta^n + J\right) + \left(\varphi(a_1) + J\right)\left(\beta^{n-1} + J\right) + \left(\varphi(a_2) + J\right)\left(\beta^{n-2} + J\right) + \ldots + \left(\varphi(a_n) + J\right) &= 0_{\frac{B}{J}},\\
\left(\beta^n + J\right) + \overline{\varphi}\left(a_1 + I\right)\left(\beta^{n-1} + J\right) + \overline{\varphi}\left(a_2 + I\right)\left(\beta^{n-2} + J\right) + \ldots + \overline{\varphi}\left(a_n + I\right) &= 0_{\frac{B}{J}},\\
\left(\beta^n + J\right) + \left(a_1 + I\right)\left(\beta^{n-1} + J\right) + \left(a_2 + I\right)\left(\beta^{n-2} + J\right) + \ldots + \left(a_n + I\right) &= 0_{\frac{B}{J}},\\
\left(\beta + J\right)^n + \left(a_1 + I\right)\left(\beta + J\right)^{n-1} + \left(a_2 + I\right)\left(\beta + J\right)^{n-2} + \ldots + \left(a_n + I\right) &= 0_{\frac{B}{J}}.
\end{aligned}$$

Así, $\beta + J$ es un elemento entero sobre $\dfrac{A}{I}$. Por lo tanto, $\dfrac{B}{J}$ es una extensión entera de $\dfrac{A}{I}$.

2. Sean $\beta \in B$ y $t \in S'$, veamos que existen $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ y $t_i \in S$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$\left(\frac{\beta}{t}\right)^n + \frac{a_1}{t_1} \times \left(\frac{\beta}{t}\right)^{n-1} + \frac{a_2}{t_2} \times \left(\frac{\beta}{t}\right)^{n-2} + \ldots + \left(\frac{a_n}{t_n}\right) = 0_{\mathrm{S}^{-1}B}. \tag{84}$$

Tomando la expresión (83),

$$\begin{aligned}
\frac{\beta^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \ldots + a_n}{t^n} &= \frac{0_B}{t^n},\\
\frac{\beta^n}{t^n} + \frac{a_1\beta^{n-1}}{t^n} + \frac{a_2\beta^{n-2}}{t^n} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} &= 0_{\mathrm{S}^{-1}B},\\
\frac{\beta^n}{t^n} + \frac{a_1}{t} \times \frac{\beta^{n-1}}{t^{n-1}} + \frac{a_2}{t^2} \times \frac{\beta^{n-2}}{t^{n-2}} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} &= 0_{\mathrm{S}^{-1}B},\\
\left(\frac{\beta}{t}\right)^n + \frac{a_1}{t} \times \left(\frac{\beta}{t}\right)^{n-1} + \frac{a_2}{t^2} \times \left(\frac{\beta}{t}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} &= 0_{\mathrm{S}^{-1}B},
\end{aligned}$$

que es una ecuación como en la expresión (84). Así, $\dfrac{\beta}{t}$ es un elemento entero sobre $\mathrm{S}^{-1}A$. Por lo tanto, $\mathrm{S}^{-1}B$ es una extensión entera de $\mathrm{S}^{-1}A$. □

3. Extensiones Enteras, Ideales Primos y Teorema del Ascenso

Aquí se muestra la forma en que las extensiones enteras satisfacen la *Condición del Ascenso*, de manera que se pueden observar algunas propiedades de dimensión para ellas.

Proposición C.6. *Sean A y B dominios enteros tales que B es una extensión entera de A. B es un campo si, y sólo si, A es un campo.*

Demostración. Supongamos que B es un campo. Dado $\alpha \in A \setminus \{0_A\}$, tenemos que $\alpha \in B \setminus \{0_B\}$. Así, $\alpha \in B$ tiene inverso multiplicativo $\beta \in B$. Como B es una extensión entera de A, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$0_B = \beta^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Multiplicando por $\beta^{1-n} = \alpha^{n-1} \in B$,

$$0_B = \beta + a_1 + a_2\alpha + \ldots + a_n\alpha^{n-1},$$

consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\beta &= -a_1 - a_2\alpha - \ldots - a_n\alpha^{n-1} \in B, \\
\varphi^{-1}(\beta) &= \varphi^{-1}\left(-a_1 - a_2\alpha - \ldots - a_n\alpha^{n-1}\right) \in A, \\
&= -a_1 - a_2\alpha - \ldots - a_n\alpha^{n-1} \in A.
\end{aligned}$$

Dado que φ es inyectivo, consideremos $\varphi^{-1}(\beta) \in A$, con ello, $\varphi\left(\alpha\varphi^{-1}(\beta)\right) = \alpha\beta = 1_B$. Así, $\alpha\varphi^{-1}(\beta) = 1_A$, de esta forma, $\varphi^{-1}(\beta) = \alpha^{-1} \in A$. Por lo tanto, A es un campo.
Recíprocamente, supongamos que A es un campo. Sea $\beta \in B \setminus \{0_B\}$ y tomemos $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ y

$$\beta^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \ldots + a_n = 0_B.$$

Así,

$$\beta(\beta^{n-1} + a_1\beta^{n-2} + a_2\beta^{n-3} + \ldots + \ldots + a_{n-1}) + a_n = 0_B,$$

Supongamos que $a_n = 0_A$. Como B es un dominio entero y $\beta \neq 0_B$, tenemos que

$$\beta^{n-1} + a_1\beta^{n-2} + a_2\beta^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0_B,$$

lo que contradice nuestra hipótesis sobre n. Con ello, $a_n \neq 0_B$ y así,

$$\beta(\beta^{n-1} + a_1\beta^{n-2} + a_2\beta^{n-3} + \ldots + \ldots + a_{n-1}) = -a_n \in \mathcal{U}(A) \subseteq \mathcal{U}(B).$$

Como consecuencia, $\beta \in \mathcal{U}(B)$ y por lo tanto, B es un campo. $\square$

Corolario C.7. *Sean B una extensión entera de un anillo A, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Se tiene que $\mathfrak{q} \in Max(B)$ si, y sólo si, $\mathfrak{p} \in Max(A)$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Así, $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ y $\dfrac{B}{\mathfrak{q}}$ son dominios enteros, y por el inciso 1 de la Proposición C.5, $\dfrac{B}{\mathfrak{q}}$ es una extensión entera de $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$. Por la Proposición C.6, $\dfrac{B}{\mathfrak{q}}$ es un campo si, y sólo si, $\dfrac{A}{\mathfrak{p}}$ es un campo. Ésto es, $\mathfrak{q} \in \text{máx}(B)$ si, y sólo si, $\mathfrak{p} \in Max(A)$. $\square$

Proposición C.8. *Sea B una extensión entera de un anillo A por medio de un homomorfismo φ, sean $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $S = A \setminus \mathfrak{p}$ y $S' = \varphi(S)$. Los $\mathrm{S}^{-1} A$-módulos $B_{\mathfrak{p}} = \mathrm{S}^{-1} B$ y $S'^{-1}B$ son isomorfos.*

Demostración. Dado que φ es inyectiva, tenemos que $0_B \notin S'$. Por la Proposición 1.29, se tiene el resultado. □

Proposición C.9. *Sean B una extensión entera de un anillo A y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.*

Demostración. Tomemos $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Por el inciso 2 de la Proposición C.5, $B_\mathfrak{p}$ es una extensión entera de $A_\mathfrak{p}$ por medio del homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : A_\mathfrak{p} &\rightarrow B_\mathfrak{p} \\ \frac{a}{t} &\mapsto \frac{\varphi(a)}{t}. \end{aligned}$$

de anillos. Es claro que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha=i_S^A"'] & B \arrow[d, "\beta=i_S^B"] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & B_\mathfrak{p}. \end{tikzcd} \tag{85}$$

Sean $\eta \in \text{máx}(B_\mathfrak{p})$ y $\mathfrak{m} = \overline{\varphi}^{\,-1}(\eta) = \eta \cap A_\mathfrak{p}$. Por el Corolario C.7, $\mathfrak{m} \in \text{máx}(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}_\mathfrak{p}\}$. Así, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, como consecuencia, $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$.
Por otra parte, sea $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\eta)$, así, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$. Como el diagrama (85) es conmutativo,

$$\mathfrak{q} \cap A = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}\left(\beta^{-1}(\eta)\right) = \alpha^{-1}\left(\overline{\varphi}^{\,-1}(\eta)\right) = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}. \quad \square$$

Corolario C.10. *Sea B una extensión entera de un anillo A. La siguiente aplicación es sobre:*

$$\begin{aligned} \psi : \operatorname{Spec}(B) &\rightarrow \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto \mathfrak{q} \cap A. \end{aligned}$$

Demostración. El resultado se tiene de la Proposición C.9. □

El siguiente teorema nos garantiza que las extensiones enteras es uno de los casos en los que podemos aplicar las propiedades de dimensión y altura que son de nuestro interés.

Teorema C.11. *[Teorema del Ascenso] Sean B una extensión entera de un anillo A, $m, n \in \mathbb{Z}_+$ con $m < n$ y*

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ \ldots \ \subseteq \mathfrak{p}_n, \\ \mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \ldots \ \subseteq \mathfrak{q}_m \end{aligned} \tag{86}$$

sucesiones de ideales primos de A y B respectivamente tales que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$. Se tiene que existen $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_n \tag{87}$$

es una sucesión de ideales primos de B y $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Más aún, si la sucesión (86) es una cadena prima de A, entonces la sucesión (87) es una cadena prima de B.

Demostración. Por inducción sobre $k = n - m$. Si $k = 1$, entonces las sucesiones (86) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ \ldots \ \subseteq \mathfrak{p}_{m+1}, \\ \mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \ldots \ \subseteq \mathfrak{q}_m. \end{aligned}$$

Sean $\overline{A} = \dfrac{A}{\mathfrak{p}_m}$, $\overline{\mathfrak{p}}_{m+1} = \dfrac{\mathfrak{p}_{m+1}}{\mathfrak{p}_m}$ y $\overline{B} = \dfrac{B}{\mathfrak{q}_m}$. Por el inciso 1 de la Proposición C.5, $\overline{B}$ es una extensión entera del anillo $\overline{A}$. Por la Proposición C.9, existe $\overline{\mathfrak{q}}_{m+1} \in \operatorname{Spec}\left(\overline{B}\right)$ tal que $\overline{\mathfrak{p}}_{m+1} = \overline{\mathfrak{q}}_{m+1} \cap \overline{A}$. Sea $\mathfrak{q}_{m+1} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\overline{\mathfrak{q}}_{m+1} = \dfrac{\mathfrak{q}_{m+1}}{\mathfrak{q}_m}$. Así, $\mathfrak{q}_m \subsetneq \mathfrak{q}_{m+1}$. Dado $\varphi(\mathfrak{p}_m) \subseteq \mathfrak{q}_m$, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{p}_m}"'] & B \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{q}_m}"] \\ \overline{A} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{B} \end{tikzcd}$$

$$\alpha + \mathfrak{p}_m \longmapsto \varphi(\alpha) + \mathfrak{q}_m.$$

Tenemos que $\mathfrak{q}_{m+1} \cap A = \pi_{\mathfrak{q}_m}^{-1}\left(\overline{\mathfrak{q}}_{m+1}\right) \cap A = \pi_{\mathfrak{p}_m}^{-1}\left(\overline{\mathfrak{q}}_{m+1} \cap \overline{A}\right) = \pi_{\mathfrak{p}_m}^{-1}\left(\overline{\mathfrak{p}}_{m+1}\right) = \mathfrak{p}_{m+1}$, con ello,

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1}$$

es una sucesión de ideales primos de B tales que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, m+1\}$.
Ahora, supongamos que para cualesquiera n', $m' \in \mathbb{Z}_+$ con $n' - m' = k \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente: Si

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{p}_{n'} \quad \text{y} \\ \mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{q}_{m'} \end{aligned}$$

son sucesiones de ideales primos de A y B respectivamente tales que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{1, \dots, m'\}$, entonces existen $\mathfrak{q}_{m'+1}, \dots, \mathfrak{q}_{n'} \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_{n'}$$

es una sucesión de ideales primos de B tales que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, n'\}$.
Sean

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{p}_n \quad \text{y} \\ \mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{q}_m \end{aligned} \tag{88}$$

sucesiones de ideales primos de A y B respectivamente con $n - m = k + 1$ y $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Así, $(n-1) - m = k$. Si consideramos las sucesiones

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{p}_{n-1} \quad \text{y} \\ \mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{q}_m \end{aligned}$$

de ideales primos de A y B respectivamente, entonces por la hipótesis de inducción, existen $\mathfrak{q}_{m+1}, \dots, \mathfrak{q}_{n-1} \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_{n-1} \tag{89}$$

es una sucesión de ideales primos de B y $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Ahora, consideremos las sucesiones (88) y (89) de ideales primos de A y B respectivamente, procediendo como en el caso $k = 1$, existe $\mathfrak{q}_n \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que

$$\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \ \dots \ \subseteq \mathfrak{q}_n$$

es una sucesión de ideales primos de B y $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
Por último, supongamos que la sucesión (86) es una cadena prima de B. Tomemos $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $\mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}_{j+1}$, así, $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}_j \cap A = \mathfrak{q}_{j+1} \cap A = \mathfrak{p}_{j+1}$, lo que contradice nuestra suposición sobre la sucesión (86). Por lo tanto, si la sucesión (86) es una

cadena de ideales primos de A, entonces la sucesión (87) es una cadena de ideales primos de B. □

Corolario C.12. *Si B es una extensión entera de un anillo A por medio de un homomorfismo φ, entonces φ satisface la condición del ascenso.*

Demostración. El resultado se tiene por el Teorema C.11, cuando $m = 1$ y $n = 2$. □

Bibliografía

[Ati] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Eis] David Eisenbud. *Commutative algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York Inc.

[Har] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York Inc., 1977.

[Mat] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra (Second Edition)*. The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., 1980.