

Análisis del flujo a través de distintas geometrías usando el método de Boltzmann en redes

Tesis que se presenta para obtener el título de Física

Versión 1.0+

**Departamento Física
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México**

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Ivonne Leonor Medina Lino.
Departamento Física
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
2012

Análisis del flujo a través de distintas
geometrías usando el método de
Boltzmann en redes



Tesis de Licenciatura

A mi abuelo José de Jesús Lino Arredondo

in memoriam

Agradecimientos

Mi mas profundo agradecimiento al Dr. Francisco Mandujano por todo el apoyo brindado durante todas las etapas de este proyecto, asi como por su colaboración estrecha para llevar a cabo esta tesis. Agradezco especialmente a todos mis sinodales por tomarse el tiempo de leer y corregir mi trabajo y por las valiosas enseñanzas que me dejaron sus sugerencias y comentarios. Agradezco tambien el espacio y soporte técnico brindado dentro del laboratorio libre IV que fue vital para la elaboración de este trabajo. Gracias tambien a mi familia por su cariño y apoyo moral que siempre me han brindado en particular a mi mamá Ma. del Carmen Lino, a Benjamin Jairo y a Eduardo Emanuel.

Índice

Agradecimientos	IX
1. Ecuaciones de un fluido viscoso	5
1.1. Leyes de conservación	5
1.2. Ecuaciones con parámetros adimensionales	6
1.3. Arrastre	7
1.4. Sustentación	8
1.5. Antecedentes	11
2. Teoría de la ecuación de Boltzmann en redes	13
2.1. Función de distribución: hipótesis previas	13
2.2. Ecuación de Boltzmann	14
2.2.1. De la ecuación de Boltzmann a las ecuaciones de Navier-Stokes.	16
2.2.2. Algoritmo del método de Boltzmann en redes	17
2.3. Condiciones de frontera: Cuerpos rugosos y cuerpos lisos.	18
3. Resultados preliminares	21
3.1. Validación del programa	21
3.2. La condición de flujo uniforme: cilindros	21
3.2.1. Condiciones sobre cuerpos sólidos inmersos.	23
3.3. Flujo alrededor de elipses	23
3.4. Conclusión del capítulo	25
4. El arrastre en diferentes geometrías	27
4.1. Resumen.	27
4.2. Cilindro	27
4.3. Elipses	29
4.4. Alas de Joukowski simétricas	30
4.4.1. Ala simétrica de $l = 10$ y $t = 1$	31
4.4.2. Ala simétrica de $l = 6$ y $t = 1$	32
4.5. Alas de Joukowski no simétricas	34

4.5.1. Ala no simétrica de $l=10$, $t=1$ y $h=0.5$	35
4.5.2. Ala de $l=6$, $t=1$ y $h=0.2$	36
4.5.3. Ala de $l=6$, $t=1$ y $h=0.4$	37
4.5.4. Ala de $l=6$, $t=1$ y $h=0.6$	37
4.6. Comparativo de curvas de arrastre entre las diferentes geometrías.	40
4.7. Conclusiones del Capítulo	45
5. Conclusiones	47
Bibliografía	49

Índice de figuras

1.1. Cuerpo fijo al sistema de coordenadas inmerso en un fluido newtoniano que tiene una velocidad U uniforme lejos del objeto.	5
1.2. Ala no simétrica.	10
1.3. Ala no simétrica.	10
1.4. Gráfica C_d vs. Re	11
2.1. Espacio de 6 dimensiones de la molécula.	14
2.2. Modelo BGK sobre red cuadrada.	18
2.3. Diagrama del algoritmo usado para el cuerpo rugoso.	19
2.4. Diagrama del algoritmo usado para el cuerpo liso.	19
3.1. Magnitud del campo de velocidades. Rebote a medio camino (izquierda) y fronteras curvas (derecha).	23
3.2. Gráfica comparativa del arrastre como función de la razón de aspecto para diferentes números de Reynolds y la expresión empírica (1.26).	24
3.3.	25
4.1. Cilindro $Re=100$, flujo estacionario	28
4.2. Cilindro $Re=120$, inicia flujo no estacionario	28
4.3. Cilindro $Re=150$, flujo no estacionario	28
4.4. Elipse $Re=150$, flujo estacionario	29
4.5. Elipse $Re=180$, inicia flujo no estacionario	30
4.6. Elipse $Re=200$, flujo no estacionario	30
4.7. Ala de Joukowski simétrica. Parámetros: t y l .	31
4.8. Gráfica Re vs. C_d para $l = 10$ y $t = 1$	32
4.9. Ajuste= $1.0566x^{-0.406}$	33
4.10. Elipse $Re=175$, flujo estacionario	34
4.11. Elipse $Re=200$, inicia flujo no estacionario	34
4.12. Elipse $Re=300$, flujo no estacionario	34
4.13. Ala no simétrica.	35
4.14. Ajuste= $0.959x^{-0.529}$	36

4.15. Ajuste= $1.2945x^{-0.53}$	36
4.16. Ajuste= $1.2244x^{-0.511}$	37
4.17. Ajuste= $1.102x^{-0.468}$	38
4.18. Elipse $Re=600$, flujo estacionario	38
4.19. Elipse $Re=700$, inicia flujo no estacionario	39
4.20. Elipse $Re=900$, flujo no estacionario	39
4.21. Comparativo Cd vs. Re de todas las geometrías	40
4.22. Comparación del arrastre, como función del Re , sobre elipses con diferente razón de aspecto.	41
4.23. Comparación del arrastre, como función del Re , sobre alas de Joukowsky simétricas, con diferente razón de aspecto.	42
4.24. Comparación del arrastre para diferentes valores de los parámetros de un ala no simétrica.	43
4.25. Comparativo de ajustes de las alas no simétricas	44
4.26. Comparativo de ajustes de las alas simétricas	44
4.27. Acercamiento del comparativo entre elipse, ala simétrica y ala no simétrica.	45

Índice de Tablas

3.1. Cuerpo liso, frontera libre de esfuerzo, $Re = 20$ y $Re = 40$. La razón de aspecto en la primera columna se definió como el tamaño del dominio computacional en la dirección perpendicular al flujo entre el radio del cilindro.	22
3.2. Cuerpo liso, frontera libre de esfuerzo, $Re = 100$ y $Re = 200$.	22
3.3. Lista de ajustes de curvas de arrastre para diferentes valores del número de Reynolds.	24
4.1. Ala simétrica: $l=10$, $t=1$	32
4.2. Ala simétrica: $l=6$, $t=1$	33
4.3. Ala no simétrica: $l=10$, $t=1$, $h=0.5$	35
4.4. Ala no simétrica: $l=6$, $t=1$, $h=0.4$	37
4.5. Ala no simétrica: $l=6$, $t=1$, $h=0.6$	38

Resumen

Se realizó el estudio de las fuerzas de arrastre y sustentación sobre cuatro geometrías distintas: cilindro, elipse, alas de Joukowski simétricas y alas de Joukowski no simétricas, las ecuaciones se resolvieron numéricamente usando el método de Boltzmann en redes. El primer paso fue realizar la validación de este método comparándolo con los resultados conocidos que se han encontrado en la literatura. Actualmente se tiene muy bien estudiados los caso del cilindro y las elipses en el rango de valores del numero de Reynolds que estudiamos, sin embargo los demás casos son mas escásos. Finalmente se analizó cualitativa y cuantitativamente cuál de estas figuras genera un menor arrastre con un programa que ha sido validado y es flexible para estudios posteriores.

Introducción

La motivación de este estudio se debe a la preocupación de primera necesidad de encontrar el objeto geométrico que genera menor arrastre dadas similares dimensiones de un objeto, ya que como se explicará en este trabajo el arrastre es una fuerza que se opone al movimiento que se traduce en inversión de energía, lo que representa siempre un costo indeseado. La reducción de arrastre es una de las tareas más importantes en muchas industrias, como podrían ser el diseño de aeronaves o de submarinos. El arrastre que genera el flujo del viento sobre una aeronave impacta directamente en el consumo de combustible (turbosina), y a su vez este representa un 22 % del costo total de operación en la industria aeronáutica [1]. Pero en los últimos años este costo se ha incrementado hasta en un 40 %. Estudios anteriores [1] han demostrado que la reducción en el arrastre ahorra hasta un 1.5 % el consumo de turbosina. Lo cual cobra relevancia al tomar en consideración que el costo del combustible para la industria representa un monto aproximado de \$250 millones de dolares. Para el caso de los submarinos no se tienen los datos precisos debido a la hermeticidad de la industria en ese aspecto, pero se puede conjeturar que al disminuir el arrastre en alguna proporción se disminuye el consumo de energético para manejar el submarino.

Debido a que el mayor número de Reynolds en nuestro análisis es de un orden entre $Re=20$ a $Re=800$, tiene mucho sentido para nosotros hablar mas de submarinos o de dirigibles que de aeronaves, que son mayores a $Re=10^5$ [2], mientras que los dirigibles por su diámetro y velocidad si caen dentro del rango que manejamos en el modelo [3].

En el primer capítulo de este trabajo se hace una descripción teórica del problema que se aborda, así como el planteamiento de las ecuaciones, sus condiciones de frontera y su versión sin dimensiones, se da la definición de arrastre, sustentación y se presentan algunos resultados previos en la materia. En el segundo capítulo se da una presentación breve de la teoría de la ecuación de Boltzmann en redes y su algoritmo. Se describe la mejora al algoritmo *half way bounce-back*. En el capítulo 3, se da la validación del código usando variaciones del algoritmo en las condiciones de frontera, también se presentan los resultados de arrastre alrededor de elipses y los ajustes de los resultados computacionales con las curvas empíricas. Por último en el capítulo

4 se muestran los diagramas del punto de transición entre el estado estacionario y el no estacionario de las diferentes geometrías analizadas: círculos, elipses, alas de Joukowski simétricas y no simétricas. También se muestran las curvas de arrastre vs. Reynolds de las alas variando sus parámetros y por último un comparativo del arrastre entre las diferentes geometrías con un mismo parámetro en común llamado razón de aspecto.

Capítulo 1

Ecuaciones de un fluido viscoso

En este capítulo nos proponemos discutir el planteamiento físico y matemático de las ecuaciones que describen el flujo alrededor de un cuerpo. En particular nos interesa estudiar el arrastre sobre diferentes geometrías; cilindros, elipses y alas de Joukowski, para lo cual discutiremos los conceptos fundamentales usados para su estudio.

El problema consiste en estudiar el flujo alrededor de un cuerpo con diferentes geometrías como se muestra en la figura 1.1. El fluido es newtoniano de densidad ρ , viscosidad cinemática ν y velocidad U lejos del cuerpo. Sobre este nos interesa principalmente medir la fuerza en x , es decir el arrastre, que analizaremos a través de su parámetro adimensional relacionado C_D , también estudiaremos el valor pronosticado para la fuerza en y analizándolo con su respectivo parámetro adimensional C_L .

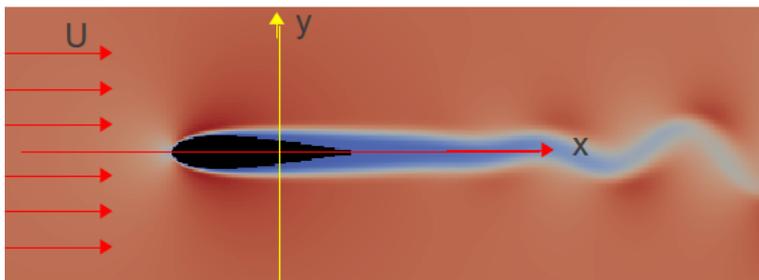


Figura 1.1: Cuerpo fijo al sistema de coordenadas inmerso en un fluido newtoniano que tiene una velocidad U uniforme lejos del objeto.

1.1. Leyes de conservación

La descripción matemática del estado de un fluido móvil queda determinada si podemos obtener las tres componentes de velocidad $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$

y dos magnitudes termodinámicas que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión p y la densidad ρ . Para el estudio del flujo alrededor de cuerpos bidimensionales con flujo incompresible y homogéneo i.e. $\rho = cte.$, se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes [4] que provienen de los principios de conservación de masa y momento dados por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

donde la constante η se denomina coeficiente de viscosidad dinámica.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son matemáticamente un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, elípticas [5]. Las condiciones de frontera son de no deslizamiento sobre la superficie del cuerpo es decir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

y lejos del cuerpo en la frontera:

$$\mathbf{u} = (U, 0). \quad (1.4)$$

cuando $r \rightarrow \infty$ i.e. r lejos de la superficie del cuerpo. El fluido que consideramos es newtoniano e isotérmico, es decir no hay intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido y los cuerpos que lo rodean, por lo que no hay gradiente de temperatura externo y la ecuación de energía es $E = cte$ escalar pasivo, donde E se refiere a la energía total del sistema i.e. la suma de la energía cinética más la energía interna del sistema. Puesto que ya establecimos que la densidad es constante y que la temperatura es una cantidad conservada, a través de la ecuación de estado de los gases ideales el sistema de ecuaciones, queda bien determinado.

1.2. Ecuaciones con parámetros adimensionales

En esta sección adimensionalizaremos las variables dependientes e independientes, definimos $\nu = \eta/\rho$ como la viscosidad cinemática y etiquetamos a las variables con dimensiones con un asterisco y las adimensionales sin asterisco con lo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= U \mathbf{u}, \\ x_i^* &= dx_i, \\ t^* &= \frac{d}{U} t, \\ p^* &= \frac{\nu U \rho}{d} p, \end{aligned}$$

donde U como ya habíamos definido es la velocidad característica de un fluido, en este caso la velocidad de corriente libre (Ver figura (1.1)) y d es una longitud característica del cuerpo. Así, el único parámetro independiente es el número de Reynolds, dado por,

$$Re = \frac{Ud}{\nu}, \quad (1.5)$$

Incluyendo las hipótesis dadas arriba, sustituyendo las variables adimensionales y la definición de Re , las ecuaciones fundamentales de un fluido viscoso incompresible, quedan de la siguiente forma:

$$Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.7)$$

Con las condiciones de frontera:

$$\mathbf{u} = 0, \quad (1.8)$$

en la superficie del objeto y $U_x=1$ lejos del objeto.

1.3. Arrastre

El vector de fuerza de superficie puede ser relacionado con el tensor de estres σ_{ij} como sigue: Para una superficie orientada arbitrariamente cuya normal unitaria \hat{n} tiene componentes, n_1, n_2, n_3 , la fuerza esta dada por $P_j = \sigma_{ij}n_i$ lo que lleva a definir la fuerza hidrodinámica como [6]:

$$\vec{F} = \int \sigma \cdot \hat{n} ds, \quad (1.9)$$

Donde el tensor de estres toma la forma [6]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.10)$$

Se define al arrastre, como la fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza a través de un fluido, en la misma dirección a la velocidad de la corriente incidente, es decir paralela al eje de las x o F_x . Por lo que queda definida como:

$$F_x = \vec{F} \cdot \hat{i}, \quad (1.11)$$

Dado que es una práctica común expresar la fuerza ejercida sobre los cuerpos en movimiento se divide F_x entre la fuerza $\frac{1}{2}\rho U^2$ y la longitud característica del cuerpo d el coeficiente de arrastre queda [6]:

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 d}, \quad (1.12)$$

donde U es la velocidad de la corriente libre en la dirección x (Ver figura 1.1), ρ la densidad del flujo.

1.4. Sustentación

Se define a la sustentación F_y como la fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza a través de un fluido en dirección perpendicular a la velocidad de la corriente incidente, es decir paralela al eje y . Es decir:

$$F_y = \vec{F} \cdot \hat{j}. \quad (1.13)$$

La circulación esta definida como:

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.14)$$

donde \mathbf{u} representa el vector velocidad y $d\mathbf{l}$ el elemento de contorno del objeto sobre el que pasa el fluido. La vorticidad de un elemento de fluido se define como el rotacional del vector velocidad

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.15)$$

La vorticidad contenida en un elemento de fluido es relacionada con la circulación alrededor del elemento, aplicando el teorema de Stokes a la definición de la circulación con lo que se obtiene [5]:

$$\Gamma = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.16)$$

Esta ecuación muestra que para un contorno cerrado que encierra un area A , si $\omega = 0$ entonces $\Gamma = 0$ y viceversa [5]. Existe una fuerza de sustentación sobre un cuerpo cuando existe circulación alrededor de el [5]. En flujos potenciales esta fuerza de sustentación esta dada por

$$F_y = \rho U \Gamma, \quad (1.17)$$

con ρ la densidad del fluido, U la velocidad de corriente libre y Γ la circulación, la cual es conocida como la ley de Kutta-Joukowski, la cual nos indica que solo hay fuerza de sustentación sobre un cuerpo si existe circulación alrededor de este [5] y no depende de la forma del objeto. Tomamos este resultado solo como referencia inicial, dado que el flujo en este trabajo es viscoso, ya que si tomamos en cuenta la viscosidad el comportamiento cambia según el número de Reynolds que se este considerando. Para números de $Re \ll 1$ el proceso dominante en el flujo es la difusión de la vorticidad lejos del cuerpo [6]. El fluido en inmediato contacto con el cuerpo es arrastrado a la misma velocidad de este lo que lleva a a la generación de vorticidad alrededor del cuerpo y por lo dicho arriba a la generación de fuerza de sustentación.

Existen estudios detallados acerca del tema (Norberg 2000) pero no entran en los propósitos de este trabajo, por lo que aquí solo se mencionarán de brevemente de manera cualitativa. Cuando las aproximaciones de Stokes y Oseen son aplicables, se observa que el fluido tiene simetría de punta a cola cerca de un cuerpo simétrico pero se observan asimetrías lejos de este. Para valores grande de Re la asimetría es mas pronunciada. Experimentalmente se observa que para $R=0.25$ la asimetría alrededor de un flujo es difícilmente discernible, es mas evidente entre $R = 3.64$ y $Re = 9.10$, donde hay una región de una ligera circulación inmediatamente despues del cilindro. Se observa tambien que mientras Re se incrementa esta región de recirculación se hace mas grande y el patrón de movimiento se intensifica [6].

Sustentación de un ala de Joukowski simétrica. Los siguientes resultados fueron deducido para un flujo ideal y potencial y fueron tomados de [5] para la obtención de las ecuaciones analíticas que describen la geometría del ala y su coeficiente de sustentación C_L . Se describirá brevemente cómo se obtienen estas ecuaciones, para ver una deducción mas detallada consultese [5].

Sea el plano complejo al que llamaremos plano z cuyas coordenadas x y y son mapeadas en el plano real al que llamaremos plano ζ cuyas coordenadas son ξ y η por medio de la transformación

$$\zeta = f(z) \quad (1.18)$$

donde f es una función analítica. Esta transformación es llamada conforme si preserva ángulos. Una de las transformaciones conformes más importantes en el estudio de la mecánica de fluidos es la transformación de Joukowski. Por medio de esta transformación y soluciones a flujos básicos, es posible obtener soluciones para flujo alrededor de elipses y una familia de alas. La transformación de Joukowski está dada por:

$$z = \zeta + \frac{\gamma^2}{\zeta} \quad (1.19)$$

donde la constante γ^2 es tomada usualmente como real. Una familia de alas puede ser obtenida en el plano z considerando la transformación de Joukowski en conjunto con una serie de círculos en el plano ζ cuyos centros estan desplazados ligeramente del origen. Estas alas son conocidas como familia de alas de Joukowski. El ala de Joukowski simétrica esta dada por la ecuación:

$$\frac{y}{t} = \pm 0.385 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \sqrt{1 - \left(2\frac{x}{l}\right)^2}, \quad (1.20)$$

con una geometría como la de la figura 1.2 con los parámetros, l y t^1 , que indican su largo y ancho respectivamente. El coeficiente de sustentación esta

¹No se debe confundir este parametro t con la variable de tiempo t . Se preserva esta notación para ser congruente con la notación de la bibliografía en este tema.



Figura 1.2: Ala no simétrica.

dado por

$$C_L = 2\pi \left(1 + 0.77\frac{t}{l}\right) \sin \alpha, \quad (1.21)$$

con ángulo de ataque α [5]. Se puede observar que si tal ángulo α es cero C_L se anula también.

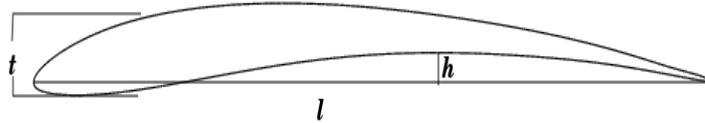


Figura 1.3: Ala no simétrica.

Sustentación de una ala de Joukowski no simétrica. El ala de Joukowski no simétrica, está caracterizada por tres parámetros, l el largo del ala, medida de la punta de la cola a la punta del frente, t que se refiere al ancho máximo del ala, y h que mide la curvatura del ala, como se ve en la figura 1.3. El ala de Joukowski simétrica está dada por la ecuación:

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{4} \left(1 + \frac{l^2}{16h^2}\right) - x^2} - \frac{l^2}{8h} \pm 0.385t \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} \quad (1.22)$$

El coeficiente de sustentación para el ala de Joukowski no simétrica es [5]:

$$C_L = 2\pi \left(1 + 0.77\frac{t}{l}\right) \sin \left(\alpha + \frac{2h}{l}\right), \quad (1.23)$$

en este caso, aunque α sea cero, C_L no se anula, tal fenómeno será estudiado posteriormente. En este análisis computacional se calculó el arrastre con la definición (1.12).

1.5. Antecedentes

Existen dos resultados previos, el primero teórico y el segundo empírico acerca de coeficiente de arrastre y sustentación y se describen a continuación:

Arrastre alrededor de un círculo. Un resultado teórico previo dice que [6]:

$$C_D = \frac{8 \cdot \pi}{Re \cdot \log(28/Re)}, \quad (1.24)$$

pero solo para $Re \ll 1$ lo cual no será posible constatar durante la validación, pues se usaron Re moderados. Por este motivo para comparar se usan otros artículos como: [7] y [8], con simulaciones numéricas que a su vez están comparados con resultados experimentales en regímenes de Re más altos que uno.

Arrastre alrededor de una elipse. En este caso el arrastre está dado por [9]:

$$C_D = 2 \times 0.0075 \times (1 + c/t) + 1.1(t/c), \quad (1.25)$$

Los parámetros que caracterizan a la elipse son t y c^2 , que representan el ancho y el largo de la elipse respectivamente o también conocidos como eje menor y eje mayor de la misma. Las ecuaciones que se dan a continuación

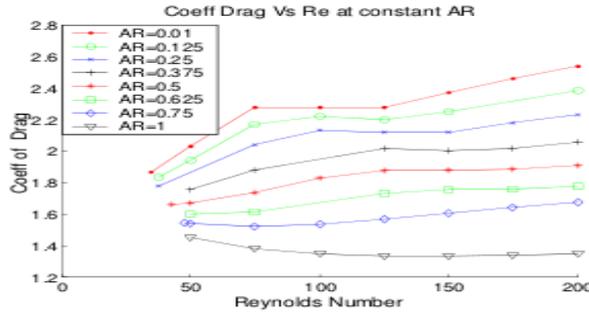


Figura 1.4: Gráfica Cd vs. Re

han sido desarrolladas empíricamente y la curva esta dada por la función [9]:

$$C_D = 2C_{flam}(1 + c/t) + 1.1(t/c), \quad (1.26)$$

Donde $C_{flam} = 0.0075$ [9] y que como veremos en nuestros experimentos computacionales aún para $Re=200$ sigue siendo válida. En el mismo trabajo [9], se menciona que la razón c/t óptima (i.e. donde C_D es mínimo) está alrededor de 9. Se puede observar que 1.26 no muestra una dependencia directa del Re pero en en [9] se menciona que el rango de validez de esta

²Al igual que en la nota anterior, se hacer énfasis en no confundir t y c con las variables de tiempo y velocidad de la luz. Estas no son cambiadas para mantener la sincronía con trabajos en el campo de flujos alrededor de elipse y alas.

ecuacion es para un intervalo de Re de 1 a 4000. En [10] se muestra la dependencia de Cd respecto al Re de manera numérica en la gráfica 1.4 tomada de [10]. En el caso de las alas con configuraciones más generales no se halló ninguna fórmula empírica con que hacer la comparación.

Capítulo 2

Teoría de la ecuación de Boltzmann en redes

El objetivo de este capítulo es hacer una descripción general la teoría de la ecuación de Boltzmann, así como una breve descripción del método numérico que utilizamos, el cual es llamado método de Boltzmann en redes [11, 12, 13].

2.1. Función de distribución: hipótesis previas

El sistema bajo consideración es un gas diluido de N moléculas encerradas en una caja de volumen V . La temperatura es suficientemente alta y la densidad suficientemente baja para que la partícula pueda ser considerada como clásica, con una bien definida posición y velocidad. Además, dos moléculas pueden ser consideradas distinguibles una de la otra i.e. sigue la estadística de Maxwell-Boltzman. Las moléculas interactúan con las otras a través de colisiones elásticas cuya naturaleza es especificada a través de una sección transversal de dispersión dada y solamente el caso de un sistema de un tipo de molécula será considerado. Una importante simplificación del problema es hecha ignorando la estructura atómica de las paredes contenedoras del gas bajo consideración. Esto es, la física de las paredes contenedoras es reemplazada por superficies idealizadas que actúan sobre las moléculas que inciden de una manera sencilla, es decir se reflejan elásticamente. No es de interés describir el movimiento de cada partícula en detalle, si no de conocer la función de distribución

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

que representa la probabilidad de encontrar a una partícula, al tiempo t , dentro de un elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ alrededor de \mathbf{r} y dentro de un elemento diferencial del espacio de velocidades $d^3\mathbf{v}$ alrededor de \mathbf{v} , donde

\mathbf{r} y \mathbf{v} son vectores tridimensionales que representan posición y velocidad. Para hacer la definición de $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$ más precisa, consideremos el es-

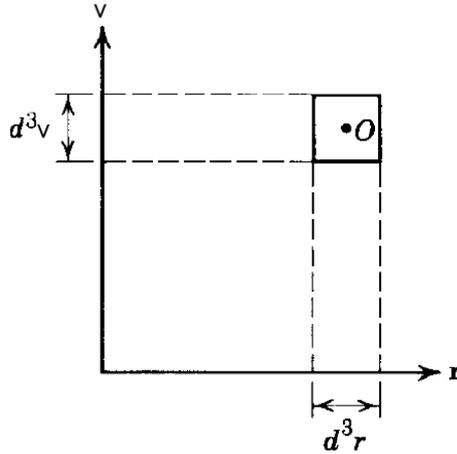


Figura 2.1: Espacio de 6 dimensiones de la molécula.

pacio 6-dimensional, llamado espacio Γ (que se conoce genéricamente en mecánica clásica como espacio fase), representado por las coordenadas \mathbf{r}, \mathbf{v} de una molécula. El espacio Γ está esquemáticamente mostrado en la figura 2.1 (Tomado de [12]). Un punto en este espacio representa al estado de una molécula. Para algún instante de tiempo t , el estado del sistema entero de N moléculas es representado por N puntos en el espacio fase, tal como se muestra alrededor del punto O en la figura 2.1. Si el tamaño de estos elementos de volumen son escogidos para que cada uno de ellos contenga un número muy grande de puntos, y si la densidad de estos puntos no varía rápidamente de uno a otro elemento vecino, en este sentido la función $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ puede ser tomada como una función continua en sus argumentos, ya que el número de partículas en una celda del espacio fase contiene un número suficiente de ellos. Con los puntos en el espacio Γ podemos construir un histograma tomando en consideración los diferentes estados que puede asumir la partícula y con esto construir la función de distribución. El objetivo de la teoría cinética es encontrar la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, para una interacción molecular particular.

2.2. Ecuación de Boltzmann

La ecuación para f estará limitada en sus aplicaciones a sistemas para los cuales:

1. La densidad es suficientemente baja para que solo las colisiones binarias elásticas entre las moléculas constituyentes necesiten ser consideradas.

2. Se asume que las velocidades de colisión interparticulares no están correlacionadas y son independientes de la posición de las partículas, hipótesis conocida como *stosszahlansatz*.

El número N de moléculas constituyentes del sistema que se describe es muy grande, del orden de 10^{23} moléculas y es conveniente tomar el límite estrictamente como $N \rightarrow \infty$ además la masa de cada molécula es aproximadamente nula de tal manera que la masa del sistema mN , en el límite permanece constante. También se toma el tamaño de acción de la esfera de una partícula aproximadamente cero de tal forma que si σ es un parámetro el cual caracteriza el rango de las fuerzas interparticulares, $N\sigma$ es constante. La trayectoria libre media del sistema es proporcional a $1/N * \sigma$, así que en este límite la trayectoria libre media permanece constante. En un sentido termodinámico la descripción dada es de un gas perfecto; es decir, las propiedades termodinámicas mantienen los valores de gas perfecto. Los límites que han sido considerados se caracterizan por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 N &\rightarrow \infty & (2.2) \\
 m &\rightarrow 0 \\
 \sigma &\rightarrow 0 \\
 N\sigma &= \text{constante} \\
 Nm &= \text{constante}
 \end{aligned}$$

Los límites de arriba son llamados límites de gas de Boltzmann. Bajo estas hipótesis se obtiene la ecuación de Boltzmann [11] dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = J(f), \quad (2.3)$$

Donde \mathbf{r} representa la posición de la partícula y \mathbf{v} la velocidad microscópica en el espacio fase. Algunas características de la ecuación que podemos enunciar son las siguientes:

- Es una ecuación integro-diferencial.
- El lado derecho de esta ecuación es conocido como término de colisión y es un operador integral como entidad matemática.
- El lado izquierdo de la ecuación incluye un operador diferencial en t y \mathbf{q} , y \mathbf{v} aparece como un parámetro cuando no hay fuerzas externas y que además representa la velocidad de las partículas.

2.2.1. De la ecuación de Boltzmann a las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el intento de utilizar la ecuación de Boltzmann para tratar un problema particular de fluidos, se encontraron muchas dificultades debido a su complejidad. Las dificultades son reducidas a proporciones manejables cuando el sistema considerado no está muy alejado del equilibrio. Bhatnager, Gross, y Krook [13] e independiente Welander (1954), introdujeron un simplificación del modelo de la ecuación de Boltzmann en equilibrio, el cual puede ser usado para tratar problemas generales de fluidos. El modelo arroja resultados cualitativamente correctos para una amplia variedad de problemas de fluidos. En el modelo el término de colisión $J(f)$ es reemplazado en la ecuación de Boltzmann, quedando de la siguiente manera [14]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda}(f - f_1), \quad (2.4)$$

donde $f \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es la función de distribución de una partícula, \mathbf{v} es la velocidad microscópica, λ es el tiempo de relajación debido a la colisión y f_1 es la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (ec. 2.5)

La ecuación (2.3) es muy complicada y fue casi 50 años después de la original deducción de Boltzmann que una solución aproximada fue obtenida. La solución en el estado de equilibrio está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann dada por [12]:

$$f_1 \equiv \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2RT}\right) \quad (2.5)$$

donde R es la constante de gas ideal, D es la dimensión del espacio, y ρ , \mathbf{u} , y T son la densidad de masa, velocidad y temperatura macroscópicas respectivamente. Las variables macroscópicas pueden ser escritas en términos de la función de distribución de la siguiente manera [14]:

$$\rho = \int f d\mathbf{v}, \quad (2.6)$$

$$\rho \mathbf{u} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad (2.7)$$

$$\rho \varepsilon = \frac{1}{2} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d\mathbf{v}, \quad (2.8)$$

Donde ρ , \mathbf{u} , y T son los momentos de la función de distribución f y ε es la energía dada por:

$$\varepsilon = \frac{D_0}{2} N_A k_B T, \quad (2.9)$$

donde D_0 es el número de grado de libertad de la partícula, N_A el número de Avogadro, k_B la constante de Boltzmann.

Posterior a esto y a través del procedimiento de Chapman-Enskog [15, 16], las ecuaciones de Navier-Stokes (1.7) y (1.6) para un flujo incompresible son derivadas del modelo de la ecuación de Boltzmann.

2.2.2. Algoritmo del método de Boltzmann en redes

Se describirá brevemente como se llega al algoritmo del método de Boltzmann en redes, para una descripción mas detallada ver [14]. La ecuación 2.4 puede se reescrita como una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\lambda}f = \frac{1}{\lambda}f_1 \quad (2.10)$$

La cual es integrada sobre el paso de tiempo δ_t , luego se hace la expansión de Taylor de $e^{-\delta_t/\lambda}$ y se desprecian los términos de orden $O(\delta_t^2)$, con lo que se llega a:

$$f(\mathbf{x} + \xi\delta_t, \xi, t + \delta_t) - f(\mathbf{x}, \xi, t) = -\frac{1}{\tau}[f(\mathbf{x}, \xi, t) - f_1(\mathbf{x}, \xi, t)] \quad (2.11)$$

donde $\tau \equiv \lambda/\delta_t$ es la relajación de tiempo adimensional el cual es un parámetro constante relacionado con la viscosidad de la siguiente manera: $\nu = 1/3(\tau - 1/2)$ y ξ es la velocidad microscópica. Aunque f_1 es escrito explícitamente como función de t , la dependencia de tiempo de f_1 recae solamente sobre las variables hidrodinámicas ρ , \mathbf{u} y T , los que representa el ansatz Chapman-Enskog [11], es decir, $f_1(\mathbf{x}, \xi, t) = f_1(\mathbf{x}, \xi; \rho, \mathbf{u}, T)$. La función de distribución de equilibrio es obtenida haciendo una expansión en la velocidad y dejando solo los términos de orden pequeños o equivalentemente haciendo la aproximación para bajos números de Mach, la cual queda como:

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp(-\xi^2/2RT) \times \left(1 + \frac{(\xi \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\xi \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT} \right) \quad (2.12)$$

Para calcular los momentos hidrodinámicos de f^{eq} se evalua la integral de momentos:

$$I = \int \psi(\xi) f^{eq} d\xi \quad (2.13)$$

donde $\psi(\xi)$ es in polinomio de ξ . Realizando esta integral se obtiene que la función de distribución de equilibrio para el modelo de Laticce Boltzmann de 9 partes está dada por :

$$f_\alpha^{(eq)} = w_\alpha \rho \left(1 + \left[3 \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right] \right). \quad (2.14)$$

donde $c = \delta_x/\delta_t$, y δ_x y δ_t son las constantes de espacio y tiempo para la red respectivamente. La ecuación de evolución del sistema es

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha\delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}[f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{(eq)}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.15)$$

donde τ es el de tiempo de relajación de colisión adimensional y las 9 velocidades discretas y los coeficientes de peso respectivamente siguientes:

$$e_\alpha = (0, 0), \quad w_\alpha = 4/9,$$

Si $\alpha = 0$,

$$e_\alpha = (\cos[(\alpha - 1)\pi/2], \sin[(\alpha - 1)\pi/2])c, \quad w_\alpha = 1/9,$$

Si $\alpha = 1, 2, 3, 4$,

$$e_\alpha = (\cos[(\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4], \sin[(\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4]), \quad w_\alpha = 1/36,$$

Si $\alpha = 5, 6, 7, 8$.

En la figura 2.2 se muestran las 9 posibles velocidades del modelo.

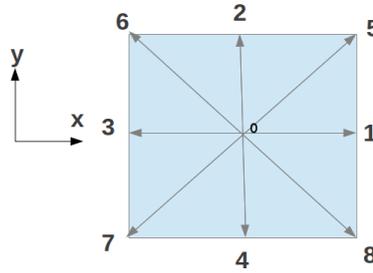


Figura 2.2: Modelo BGK sobre red cuadrada.

2.3. Condiciones de frontera: Cuerpos rugosos y cuerpos lisos.

En el primer intento por validar el programa se usó el algoritmo de rebote a medio camino (*half-way bounce back*)[17] para calcular la ubicación de los puntos de la frontera física, el cual consiste en que la frontera física entre un nodo fluido y uno sólido está siempre a la mitad de la distancia entre ellos, estos puntos están en azul marino en la figura 2.3 en la cual se dibuja una sección de la curva sobre la que se quiere hacer el cálculo, pintada de negro junto con la retícula de nodos en los que se calcula la solución de la ecuación de Boltzmann. Al unir los puntos azules (línea azul claro) se obtiene la curva sobre la que en realidad se está haciendo el cálculo con este algoritmo y que dista mucho de la curva sobre la cual en realidad se quiere calcular (línea negra). A las figuras sobre las que hicimos el cálculo con este algoritmo las llamamos genéricamente "cuerpos rugosos".

El segundo algoritmo usado, llamado método de fronteras curvas [18], se considera la distancia entre la posición del sólido sobre la línea que pasa por un nodo sólido y un nodo fluido (ver figura 2.4) igual que el anterior busca el punto medio entre los nodos y posteriormente se verifica si la distancia

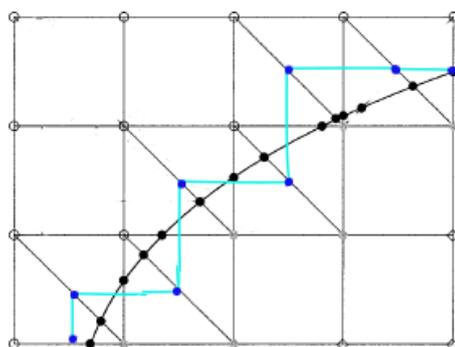


Figura 2.3: Diagrama del algoritmo usado para el cuerpo rugoso.

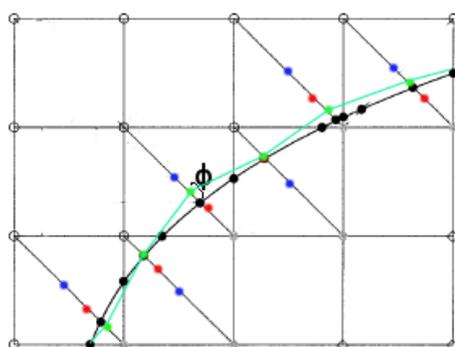


Figura 2.4: Diagrama del algoritmo usado para el cuerpo liso.

a la curva es menor que una distancia de tolerancia ϕ , si es así, se calcula sobre el punto hallado, pero si no se calcula la mitad entre el punto a medio camino y el nodo inicial más cercano a la curva, nuevamente se realiza la comparación con ϕ , este proceso se repite hasta que se logre alcanzar un punto con una distancia dentro del intervalo ϕ . En la figura 2.4 Se muestra con puntos azules los puntos del primer ciclo del algoritmo, un segundo ciclo con puntos rojos y un último con puntos verde agua sobre los cuales se trazo la trayectoria que sera usada. En donde ϕ aparece como la distancia de tolerancia, todos los demás puntos tiene una distancia menor a ϕ de la curva real. En el diagrama se observa que la curva que une estos puntos (línea verde agua) no es exactamente la curva real (línea negra), la diferencia está exagerada en el diagrama puesto la curva real es casi igual a la curva verde con un error a lo mas de ϕ . Genéricamente llamamos a los objetos sobre los cuales se hizo el cálculo de la solución de la ecuación de Boltzmann con este algoritmo como "cuerpos lisos". Con este algoritmo de cuerpo liso, se llevan a cabo dos experimentos con distintas condiciones de frontera, uno

con condiciones periódicas, dadas matemáticamente como:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(x + T, t), \quad (2.16)$$

en:

$$y = \pm L, \quad (2.17)$$

donde T es el periodo, L el ancho del sistema y \mathbf{v} las componentes de velocidad, y el otro con condiciones libre de esfuerzos, dadas matemáticamente por $u_x = u$ en la entrada cuando $x = 0$ y:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

En $x = \pm L$, tomando también en cuenta que lo ideal sería un flujo infinito por lo que se tenderá a hacer cada vez más grande el sistema.

Capítulo 3

Resultados preliminares

3.1. Validación del programa

Antes de poder hacer un estudio detallado del problema es necesario validar el programa que desarrollamos. Por un lado, el problema planteado en el capítulo 1 no tiene fronteras externas, puesto que se supone un flujo uniforme lejos del objeto. Evidentemente, desde el punto de vista computacional, el sistema debe ser finito. Por el otro lado, es muy importante asegurarse que el algoritmo no contenga errores de programación y, finalmente, cuáles son los rangos de valores que los parámetros relevantes del problema pueden tomar para que los resultados obtenidos sean confiables. En este capítulo se discuten los resultados obtenidos para las diferentes condiciones de frontera propuestas en el capítulo 1 para simular la condición de flujo uniforme y la correspondiente a no deslizamiento en fronteras rígidas internas. Dentro de la literatura para el método numérico propuesto en este trabajo, se encuentran referencias a la validez de los diferentes algoritmos propuestos, sin embargo, no hay suficientes resultados cuantitativos que permitan elegir entre ellas tomando en cuenta el balance entre simplicidad en la implementación de la condición y la precisión en los resultados, por lo que el análisis que presentamos a continuación puede ser de mucho utilidad para trabajos futuros.

3.2. La condición de flujo uniforme: cilindros

Para simular el caso de un fluido que se extiende hasta el infinito se hicieron tres propuestas para las condiciones de frontera: fijar una velocidad uniforme a una distancia lejos del cuerpo, imponer condiciones periódicas y una condición libre de esfuerzos en la dirección normal a la superficie en la frontera. En el primer caso, se encontraron soluciones no físicas, ya que al exigir un flujo uniforme a una distancia finita del cuerpo el flujo cerca del éste se ve fuertemente afectado por las paredes, sobretodo a números de Reynolds moderados, en donde se encontraron errores de hasta el 70 % aún en el caso

de flujo estacionario.

En el caso de las condiciones periodicas, se encontró que el error disminuye hasta un 20 % cuando el flujo es estacionario. Sin embargo, después de la transición a flujo dependiente del tiempo y periodico, el error en el coeficiente de arrastre promedio se incrementa hasta un 30 %. En vista de que en este regimen la fuerza hidrodinámica oscila en el tiempo, encontramos que además de incrementarse el error en la fuerza promedio, los espectros de potencias muestran frecuencias que no corresponden a los casos reportados en la literatura. Al incrementar el tamaño del sistema, se encuentra que el error puede mejorar, aunque tiene la desventaja de que aumenta considerablemente el tiempo de cómputo.

Razón	$Re=20$	% error	$Re=40$	% error
Cd Art.	2.19	—	1.62	—
51.20	2.16	1.36	1.62	0.00
34.13	2.18	0.45	1.63	0.61
25.60	2.20	0.45	1.64	1.23
20.48	2.22	1.36	1.65	1.85

Tabla 3.1: Cuerpo liso, frontera libre de esfuerzo, $Re = 20$ y $Re = 40$. La razón de aspecto en la primera columna se definió como el tamaño del dominio computacional en la dirección perpendicular al flujo entre el radio del cilindro.

Razón	$Re=100$	% error	$Re=200$	% error
Cd Art.	1.36	—	1.4	—
51.20	1.40	2.94	1.66	18.57
34.13	1.45	6.61	1.61	15.00
25.60	1.17	13.97	1.51	7.28
20.48	1.14	16.17	1.71	22.14

Tabla 3.2: Cuerpo liso, frontera libre de esfuerzo, $Re = 100$ y $Re = 200$.

Finalmente, al utilizar la condición libre de esfuerzos, el error se puede disminuir hasta menos del 2 %, para sistemas relativamente pequeños (ver Tablas 3.1 y 3.2). Sin embargo, se debe notar que al aumentar el número de Reynolds por encima del valor en la que el flujo se vuelve dependiente del tiempo, el error aumenta considerablemente. En estos casos hay que incrementar el número de nodos en el dominio computacional al incrementar el valor del Reynolds.

3.2.1. Condiciones sobre cuerpos sólidos inmersos.

Como se explicó en el capítulo anterior, el primer intento fue con un cuerpo rugoso, posteriormente se mejoró el código sustituyendo al cuerpo rugoso con un perfil mas suave. En la figura 3.1 se muestra un acercamiento, a la izquierda se ilustra la magnitud del campo de velocidades con las condiciones de rebote a medio camino [17] y a la derecha la condición para fronteras curvas. Con esta comparación podemos apreciar la mejoría en la simulación,

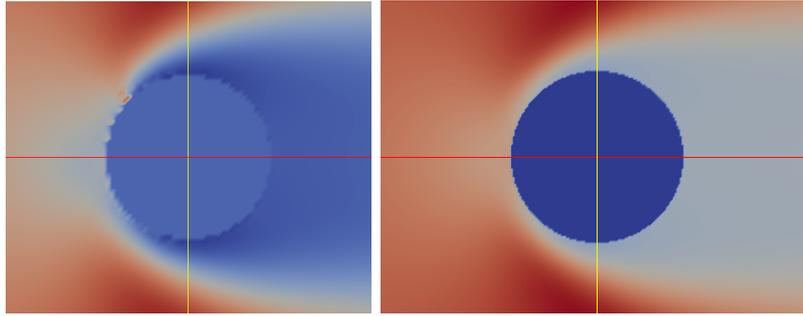


Figura 3.1: Magnitud del campo de velocidades. Rebote a medio camino (izquierda) y fronteras curvas (derecha).

por un lado es notoria la mejor resolución y que el flujo es perfectamente simétrico. Por otro lado, los errores en el cálculo de la velocidad cerca del objeto repercuten directamente en los valores en los que el fluido cambia de régimen, se observa ruido numérico que se traduce en oscilaciones no físicas que producen resultados cuantitativamente incorrectos. La condición de rebote a medio camino sólo es correcta a números de Reynolds pequeños, en donde la vorticidad en el flujo está contenida en una región muy pequeña alrededor del cilindro o en el caso de fronteras planas fijas.

3.3. Flujo alrededor de elipses

Para validar el resultado al modificar el objeto se compara con resultados para elipses, de tal manera que ahora se tienen dos distancias características, el eje menor t y el eje mayor c . Los resultados se comparan con la expresión (1.26), obtenida empíricamente de [9]. y se puede observar que el comportamiento de los Re que se usan en este trabajo es muy semejante a esta expresión.

Como se puede apreciar en la figura (3.2), para razones de aspecto pequeñas ($x = c/t$), los valores del arrastre varían apreciablemente de la expresión (1.26), en cambio para razones de aspecto grandes, el arrastre cambia relativamente poco al aumentar x .

A partir de los resultados que obtuvimos se realizó un ajuste para los diferentes valores del número de Reynolds simulados, tomando en cuenta

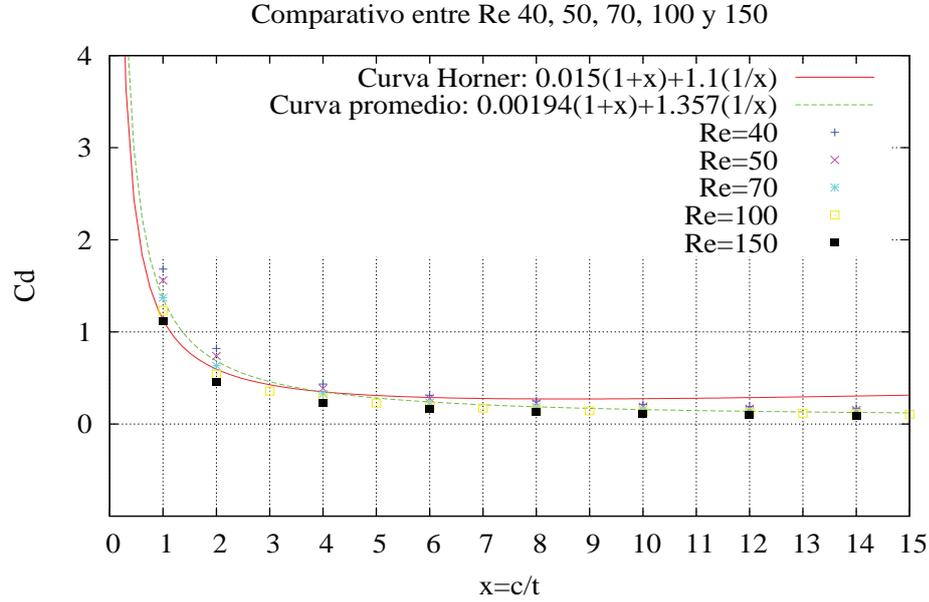


Figura 3.2: Gráfica comparativa del arrastre como función de la razón de aspecto para diferentes números de Reynolds y la expresión empírica (1.26).

que la curva es de la forma

$$Cd = a(1 + x) + b(1/x),$$

los resultados muestran que los coeficientes a y b dependen del número de Reynolds, sobretodo para razones de aspecto pequeñas (ver Tabla 3.3). Finalmente, calculamos un promedio de los coeficientes a y b para los ca-

Re	Ajuste
40	$0.004 \times (1 + x) + 1.6616 \times (1/x)$
50	$0.002767 \times (1 + x) + 1.5343 \times (1/x)$
70	$0.001854 \times (1 + x) + 1.3413 \times (1/x)$
100	$0.001124 \times (1 + x) + 1.1808 \times (1/x)$
150	$-0.0000217 \times (1 + x) + 1.06459 \times (1/x)$
Promedio	$0.00194 \times (1 + x) + 1.357 \times (1/x)$

Tabla 3.3: Lista de ajustes de curvas de arrastre para diferentes valores del número de Reynolds.

sos simulados que parece representar mejor el arrastre para valores grandes de x que la expresión (1.26) (ver figura 3.2). Como se mencionó en los antecedentes también existe una dependencia entre el C_d y el Re que no se muestra en la ecuación de [9] pero que si se describe en el trabajo de [10]. A

continuación mostramos una gráfica con un análisis similar pero con razones de aspecto mayores a 1 a diferencia del trabajo de [10] que es para razones de aspecto entre 0 y 1. Es importante señalar que estas gráficas coinciden cualitativamente en su comportamiento ya que se puede pensar en la gráfica 3.3 como una continuación del análisis en el intervalo de la razón de aspecto c/t o RA .

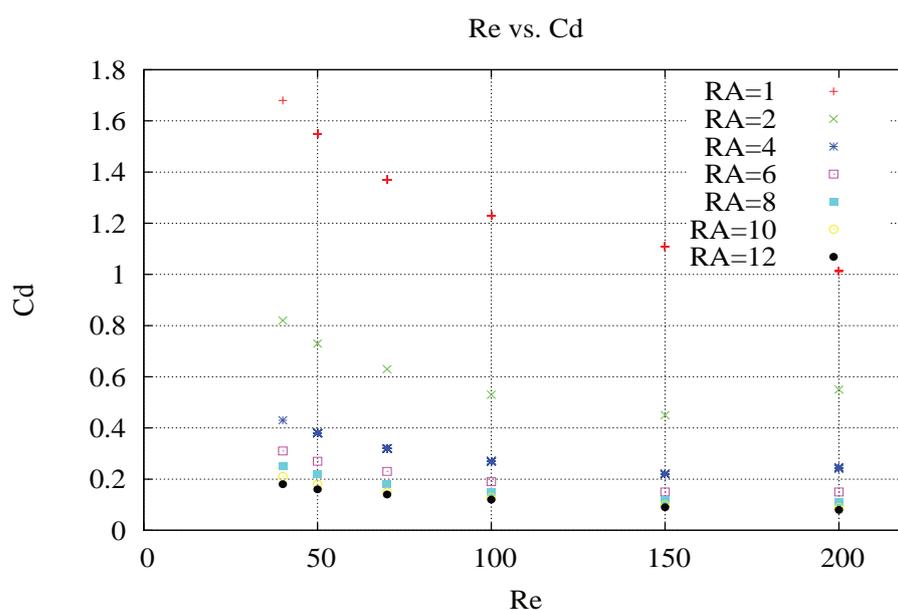


Figura 3.3

3.4. Conclusión del capítulo

En este capítulo se discutieron y estudiaron dos formas (cuerpo rugoso y cuerpo liso) de simular las condiciones a la frontera del problema que planteamos. La importancia de este ejercicio radicó en hacer un análisis de las diferencias entre las ecuaciones planteadas para ajustar condiciones de frontera numéricamente.

Los resultados mostraron que la condición de rebote a medio camino sólo es válida en regímenes de flujo a número de Reynolds bajos para fronteras curvas, es decir, para el caso en el que la capa límite está restringida a una región muy pequeña cerca del objeto y el flujo está descrito por las ecuaciones linealizadas de Stokes [4].

En el caso de números de Reynolds moderados se obtienen resultados cualitativamente incorrectos, sobre todo cuando el flujo tiene zonas de recirculación y en el caso dependiente del tiempo como se discutirá en el Capítulo

4. Los dos algoritmos propuestos son equivalentes, siendo que la condición de rebote a medio camino es más simple de implementar y hace menos cálculos por lo que resulta ser más eficiente.

Al comparar con algunos resultados de otros autores para el flujo alrededor de un cilindro, las diferencias resultaron ser menores al 5 %. Hay que notar que al aumentar el número de Reynolds por encima de cierto valor, es necesario aumentar la resolución de los cálculos para disminuir el error (ver Tabla 3.2). El intervalo de Re de la curva empírica es de $(1, 10000)$, y así como en los puntos experimentales no todos los puntos para todos los experimentos caen exactamente sobre la curva pero si tiene un comportamiento cualitativo similar, de igual forma nuestros resultados computacionales tienen pequeñas variaciones entre los experimentos, pero al ser un análisis adimensional todos deben converger hacia una misma curva. El intervalo de los números de Reynolds que se usó fue de $(10, 200)$ y el límite del código está cuando la velocidad característica U no satisfaga la condición de que el número de Mach sea pequeño y fuera de esto solo hay que aumentar el tamaño del sistema para obtener mejores resultados.

Capítulo 4

El arrastre en diferentes geometrías

4.1. Resumen.

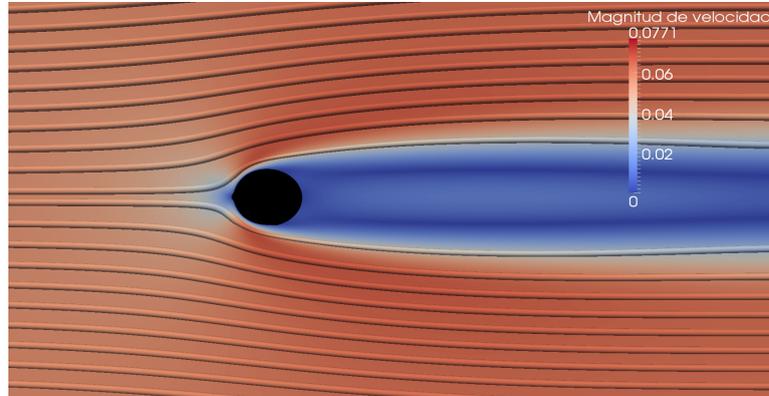
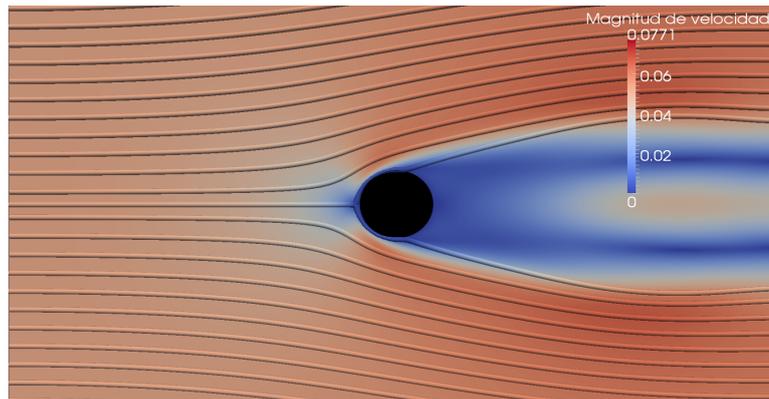
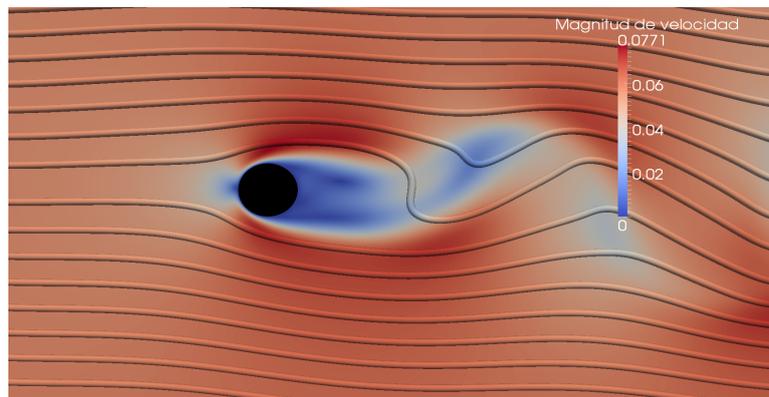
Para poder calcular cualitativamente cuál de las figuras presenta un menor arrastre, se hizo un análisis comparativo con un par de ejemplos de cada una de las cuatro figuras: cilindro, elipse, alas de Joukowsky simétricas y no simétricas.

Los datos a considerar para este análisis, son los resultados del coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, al cambiar las razones de aspecto en las elipses y las alas de Joukowsky. Se observaron tres regímenes de flujo: sin zonas de recirculación, con zona de recirculación adherida al objeto y flujo dependiente del tiempo, en el que se observa desprendimiento de vórtices. El primer regimen, que corresponde a números de Reynolds pequeños, no se estudió con detalle pues por una lado es el régimen más estudiado y, por el otro lado, debido a las velocidades asociadas al flujo los tiempos de cómputo son muy largos.

En cada caso se compararon entre si los coeficientes de arrastre para una geometría dada variando sus parámetros geométricos y el caso del flujo alrededor de un cilindro. Finalmente, de cada caso se comparó la curva de menor arrastre para todas las geometrías analizadas, tomando en cuenta los valores a los que sucede la transición de flujo estacionario a dependiente del tiempo en cada caso.

4.2. Cilindro

El modelo de Boltzmann en redes (L-B) para un cilindro simula el paso a un régimen no estacionario cuando el número de Reynolds rebasa 120. Las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran el antes, durante y después de esta transición.

Figura 4.1: Cilindro $Re=100$, flujo estacionarioFigura 4.2: Cilindro $Re=120$, inicia flujo no estacionarioFigura 4.3: Cilindro $Re=150$, flujo no estacionario

En este caso, encontramos que las transiciones entre los diferentes regímenes de flujo, sin zona de recirculación y con zona de recirculación, suceden cuando $Re > 2.5$ que coincide con los resultados reportados en la literatura. Al aumentar la velocidad del flujo, los vórtices detrás del objeto empiezan a oscilar, se desprenden y forman una calle de vórtices de Von Kármán, como se muestra en la figura 4.3 que se caracterizan por un gradiente de velocidad mayor y un cambio en la curvatura de las líneas de corriente. El número de Reynolds de transición de flujo estacionario a flujo dependiente del tiempo definida como Re_c para esta simulación (figuras 4.1, 4.2 y 4.3) se da en $Re_c = 120$, Al hacer una última simulación dejandola correr por más tiempo se encontró que $Re_c \lesssim 50$ que coincide con lo reportado en [8].

4.3. Elipses

Para el caso de una elipse con $t = 1$, $c = 2$ y razón $c/t = 2$, mostramos las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 del antes, durante y después de esa transición, junto con sus líneas de corriente y su escala de velocidades.

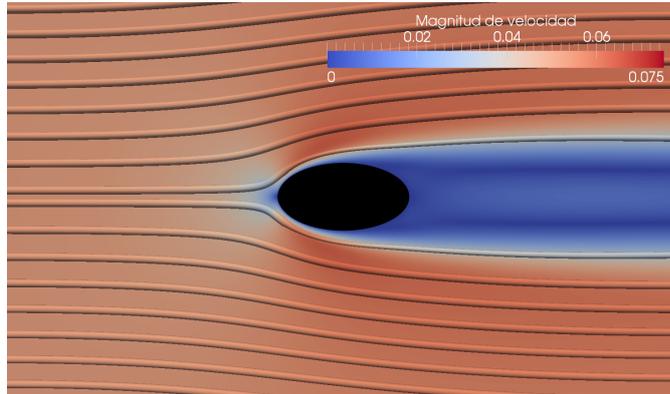
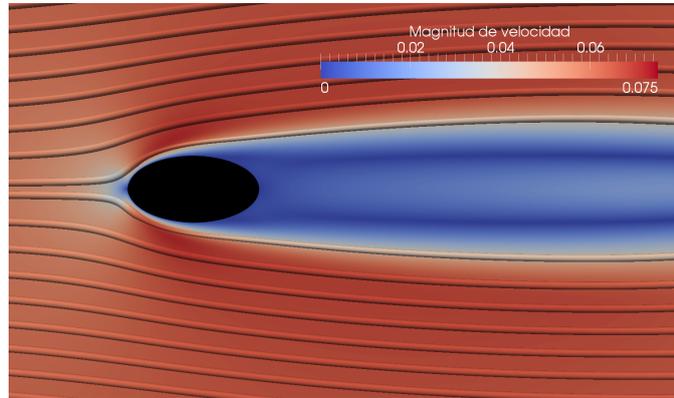
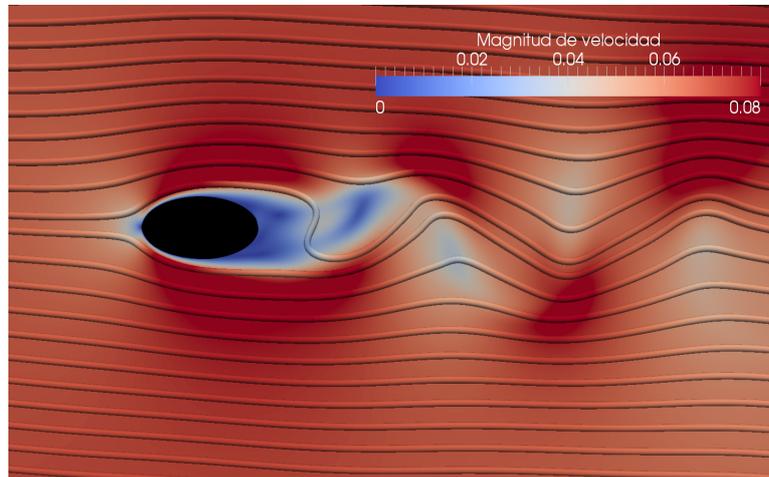


Figura 4.4: Elipse $Re=150$, flujo estacionario

Como es de esperarse, el tamaño de la estela disminuye con respecto al caso del cilindro, así como la distancia entre los centros de giro de los vórtices, lo cual, se traduce en una disminución en el coeficiente de arrastre. Al duplicar el valor de la razón de aspecto el valor del Reynolds de transición se incrementa, pues en otro experimento encontramos que en un determinado tiempo, con $c/t = 2$ $Re_c \lesssim 100$ y al duplicar c/t encontramos que $Re_c \lesssim 130$, y como el tamaño de la estela detrás del objeto disminuye, se encuentra una reducción adicional en el coeficiente de arrastre. Por lo que, cualitativamente, al aumentar c/t , el arrastre disminuye y la región en la que se forman y desprenden vórtices sucede a un Reynolds mayor.

Figura 4.5: Elipse $Re=180$, inicia flujo no estacionarioFigura 4.6: Elipse $Re=200$, flujo no estacionario

4.4. Alas de Joukowski simétricas

Como se vió en el capítulo 3, el número de parámetros con el que se caracteriza a las geometrías va cambiando. En el caso del círculo se usa el diámetro, en el caso de la elipse se usa el eje mayor y el eje menor, en el caso de las alas simétricas se usa el mayor ancho y el largo de punta a cola del ala, y como veremos en el caso de las ala asimétricas, se usan tres parámetros, el ancho mayor, el largo de punta a cola y su curvatura, como fueron definidas en el capítulo 3.

En todos los casos pudo haberse usado un tamaño arbitrario de los parámetros, pero para poder hacer un análisis con un punto de comparación entre todas las figuras, se opta por usar un mismo tamaño en el parámetro que enfrenta al flujo que en el caso del círculo es su radio, en el de la elipse es el doble de su eje menor, y de las alas es su ancho mayor. Cabe recordar

que cuando hablamos de tamaños todo el tiempo estamos hablando de razón de aspecto, que fueron en su momento (Capítulo 5) normalizadas respecto al diámetro del círculo.

Recordemos que los parámetros de las alas simétricas son l la longitud de la cuerda y t el espesor del ala como se muestra en la figura 4.7 y su ecuación es obtenida de 1.20.

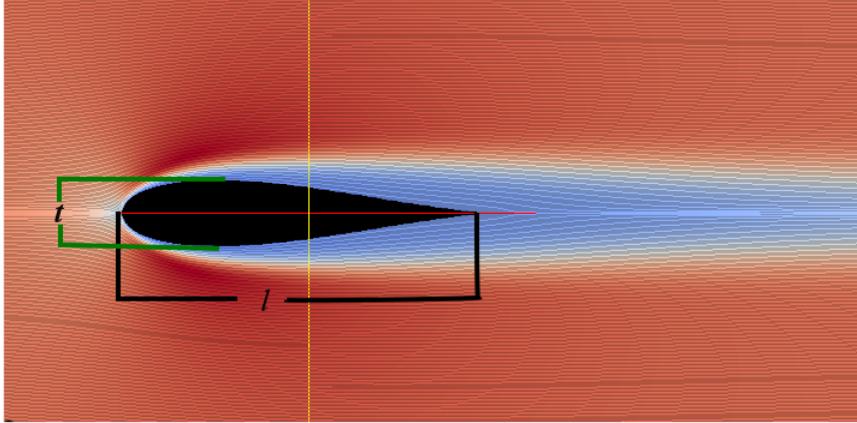


Figura 4.7: Ala de Joukowski simétrica. Parámetros: t y l .

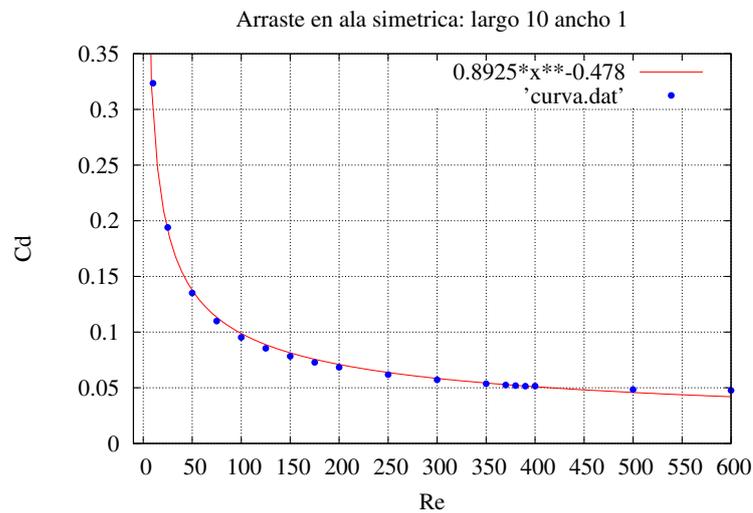
El coeficiente de sustentación, como se había mencionado en el Capítulo 1, está dado por la ecuación 1.21. En el caso de los experimentos computacionales que se realizaron α es igual a cero en todos los casos por lo que $C_L = 0$. Aunque se pasó de un comportamiento estacionario a uno no estacionario el promedio temporal de C_L siguió siendo cero. Se presentan dos de los casos más representativos con los que experimentamos, tomando en cuenta nuevamente el criterio de usar una razón de aspecto normalizada no mayor a 1, para seguir dentro del régimen en el cual se obtuvo la validación, asegurando de esta manera la fiabilidad de los resultados. Los dos parámetros variables en estos experimentos como ya se sabe son: t y l los cuales en el primer experimento tienen el valor de $l = 10$ y $t = 1$ con razón $l/t = 10$ y en el segundo $l = 6$ y $t = 1$ con razón $l/t = 6$. En cada uno se fue variando el Re mientras se mantenían los mismo valores de parámetro. Es importante comentar que la aportación de este trabajo es determinar algún comportamiento regular en este fenómeno. He aquí, los resultados obtenidos:

4.4.1. Ala simétrica de $l = 10$ y $t = 1$

Después de obtener los puntos del experimento computacional que se observan en la tabla 4.1, obtuvimos la curva que mejor le ajusta al coeficiente de arrastre dada por: $0.8925x^{-0.478}$, mostrada en rojo en la figura 4.8.

l=10 t=1			
Re	cd	Re	cd
10	0.32	250	0.061
25	0.19	300	0.057
50	0.13	350	0.053
75	0.10	370	0.052
100	0.09	380	0.051
125	0.08	390	0.051
150	0.07	400	0.051
175	0.07	500	0.048
200	0.06	600	0.047

Tabla 4.1: Ala simétrica: l=10, t=1.

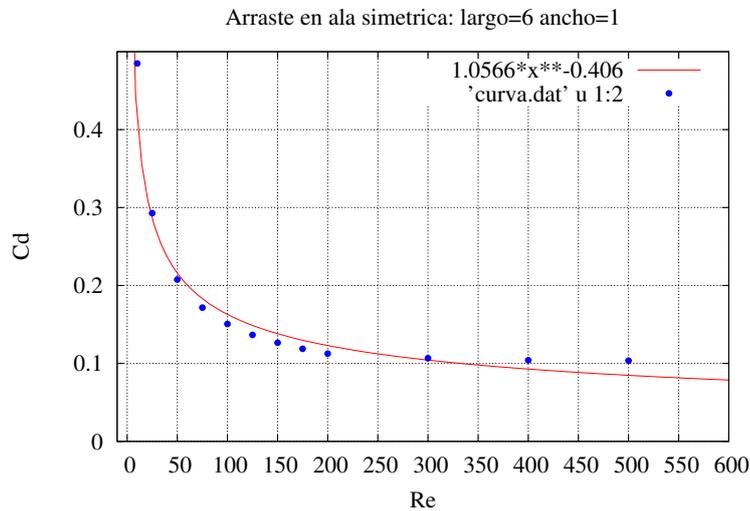
Figura 4.8: Gráfica Re vs. Cd para $l = 10$ y $t = 1$

4.4.2. Ala simétrica de $l = 6$ y $t = 1$

En la figura 4.9 se grafican los puntos experimentales de la tabla 4.2 junto con su ajuste. En todos los casos se obtuvieron los ajustes de un programa computacional, que daba la opción de ajustar los puntos a un polinomio de un solo término, y queda abierta la posibilidad de encontrar un ajuste con alguna otra función.

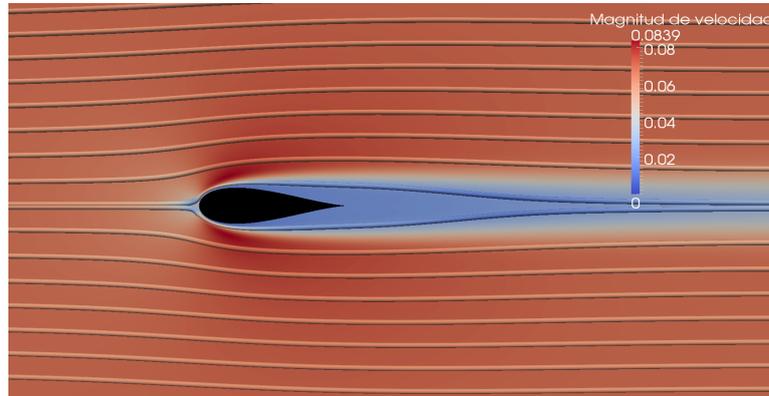
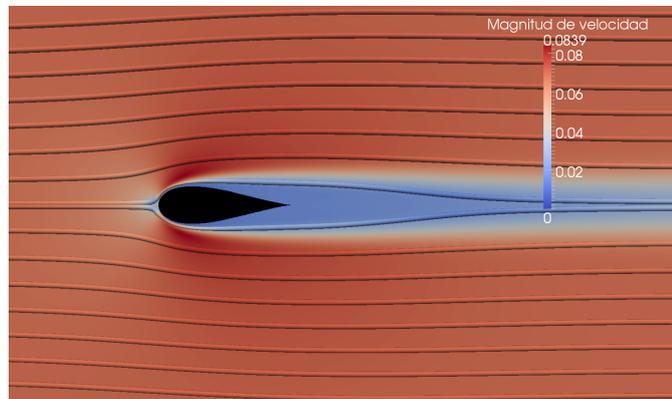
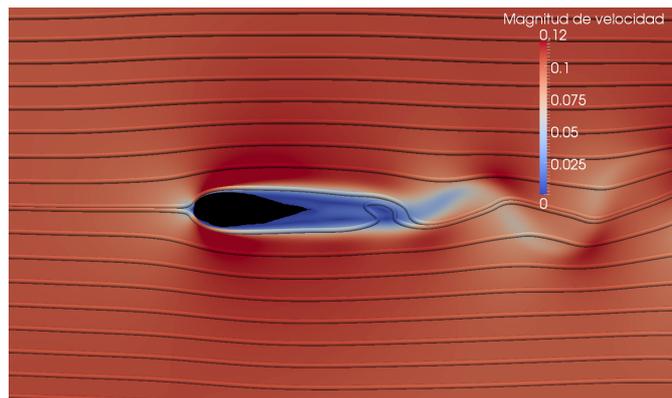
l=6 t=1			
Re	cd	Re	cd
10	0.48	175	0.118
25	0.29	200	0.112
50	0.20	300	0.106
75	0.17	400	0.104
100	0.15	500	0.103
125	0.13	150	0.126

Tabla 4.2: Ala simétrica: l=6, t=1.

Figura 4.9: Ajuste= $1.0566x^{-0.406}$

Se escogió para este análisis un ala de $t = 1$ y $l = 6$, que tiene un Re de transición de 200. En las figuras 4.10, 4.11, 4.12 se muestra el antes, durante y después de esa transición.

Se presentan algunos de los casos más representativos con los que experimentamos en los que se varía el cociente l/t y, en cada caso, se cambia el número de Reynolds. El coeficiente de sustentación resulta ser cero en los casos estacionarios y una función que oscila, en el caso de flujos dependientes del tiempo. Las diferencias entre las geometrías analizadas hasta el momento muestran que las amplitudes de oscilación en el coeficiente de sustentación disminuyen al aumentar la razón de aspecto y, por lo tanto, el valor del Reynolds de transición aumenta.

Figura 4.10: Elipse $Re=175$, flujo estacionarioFigura 4.11: Elipse $Re=200$, inicia flujo no estacionarioFigura 4.12: Elipse $Re=300$, flujo no estacionario

4.5. Alas de Joukowski no simétricas

Los parámetros de un ala no simétrica son: El largo del ala l , el máximo grosor t y h que caracteriza la curvatura, como se observa en la figura 4.13

que esta dada por la ecuación 1.22. El objetivo principal en esta sección es entender el efecto de romper la simetría del cuerpo en la dirección de la corriente libre y su efecto en el arrastre.

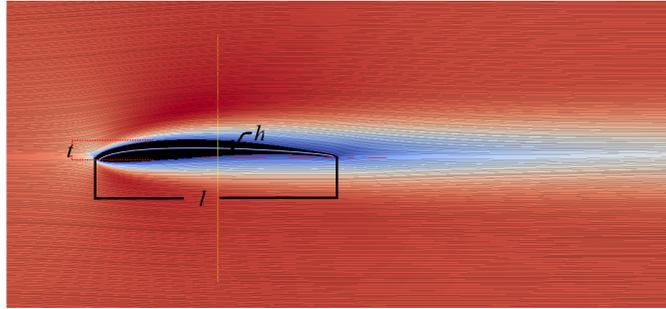


Figura 4.13: Ala no simétrica.

Debido a que en este caso los parámetros que se pueden variar son 3, es muy amplia la forma en que se pueden variar tales parámetros, en particular se escogieron los caso con los valores $l = 10$, $t = 1$ y $h = 0.5$ y 3 casos en los que se mantiene el valor de $l = 6$ y $t = 1$ y se varia h con valores de 0.2, 0.4 y 0.6. Para todos los casos se calculará el ajuste así como el valor de transición.

4.5.1. Ala no simétrica de $l=10$, $t=1$ y $h=0.5$

Igual que en la sección anterior se muestra la tabla de valores obtenidos así como la gráfica con su ajuste para estos parámetros:

l=10 t=1 h=0.5	
Re	Cd
10	0.297
50	0.117
100	0.081
150	0.065
200	0.057
300	0.047
400	0.041
500	0.037

Tabla 4.3: Ala no simétrica: $l=10$, $t=1$, $h=0.5$.

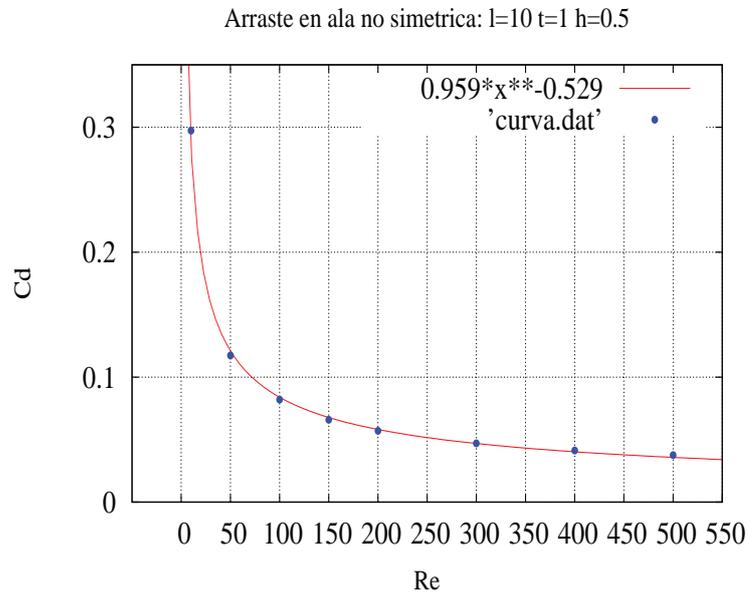


Figura 4.14: Ajuste= $0.959x^{-0.529}$

4.5.2. Ala de l=6, t=1 y h=0.2

Para este caso la transición resultó estar alrededor del $Re=700$ y el ajuste dado por $1.2945x^{-0.53}$

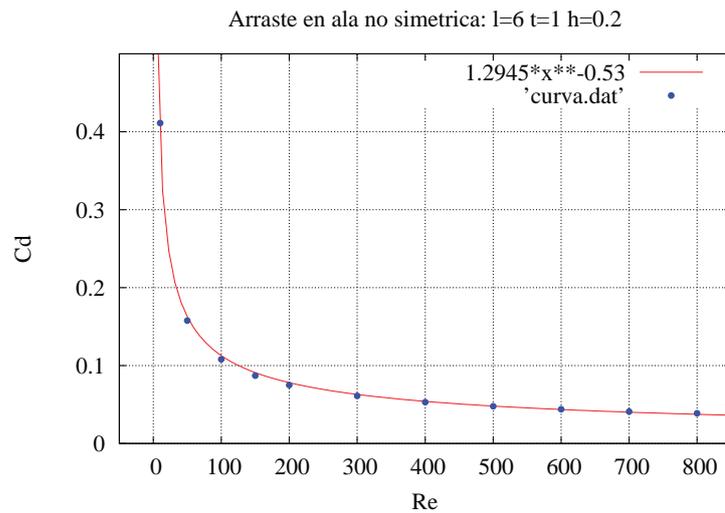


Figura 4.15: Ajuste= $1.2945x^{-0.53}$

4.5.3. Ala de $l=6$, $t=1$ y $h=0.4$

Para este caso la transición resulto estar alrededor del $Re=180$ y el ajuste dado por $1.2244x^{-0.511}$

l=6 t=1 h=0.4			
Re	cd	Re	cd
10	0.41	400	0.057
50	0.16	500	0.052
100	0.11	600	0.048
150	0.09	700	0.045
200	0.07	800	0.043
300	0.06		

Tabla 4.4: Ala no simétrica: $l=6$, $t=1$, $h=0.4$.

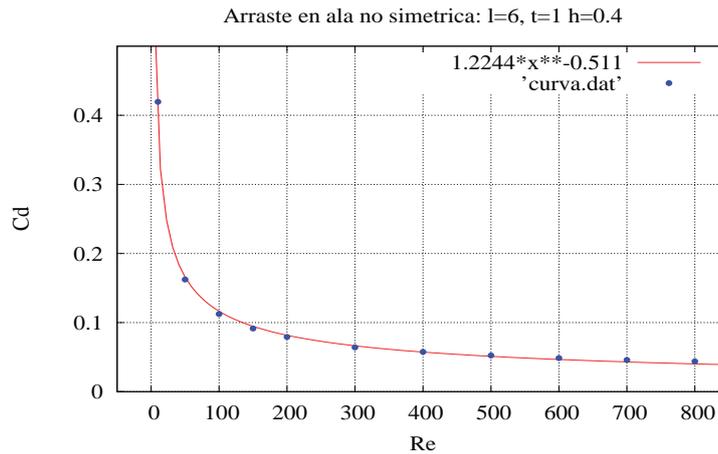


Figura 4.16: Ajuste= $1.2244x^{-0.511}$

4.5.4. Ala de $l=6$, $t=1$ y $h=0.6$

Para este caso no encontramos ningún Re de transición, es decir ningún caso resulto ser estacionario. El ajuste esta dado por $1.102x^{-0.468}$.

Se elige un ala de $t = 1$, $l = 6$ y $h = 0.2$, para mostrar el antes, durante y después de la transición que sucede en $Re=700$, con su campo de velocidades.

En otro estudio con un tiempo más largo al anterior encontramos que para una razón $l/t = 2$ con $h/t = 1$ y $Re_c < 250$, en contraste con el cilindro cuya cota superior encontramos que es 50 y para la elipse, de razón de aspecto $c/t = 2$, que está alrededor de 100. Entonces, el resultado de agregar la asimetría en el ala es una reducción en el arrastre. Para poder notar la

l=6 t=1 h=0.6			
Re	cd	Re	cd
10	0.42	400	0.064
50	0.16	500	0.060
100	0.11	600	0.056
150	0.09	700	0.054
200	0.08	800	0.054
300	0.07		

Tabla 4.5: Ala no simétrica: l=6, t=1, h=0.6.

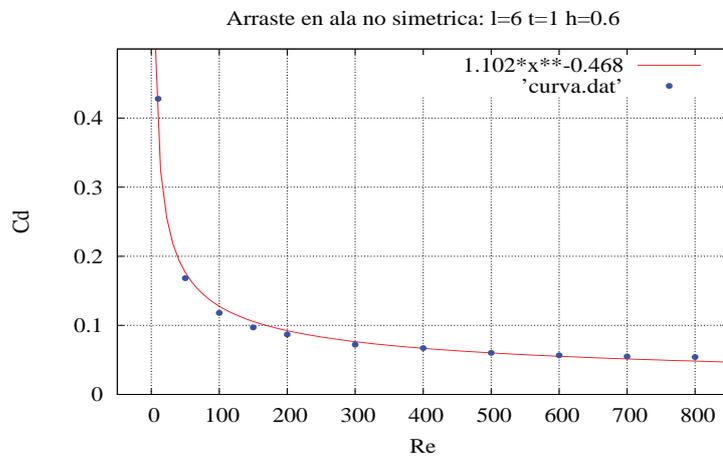
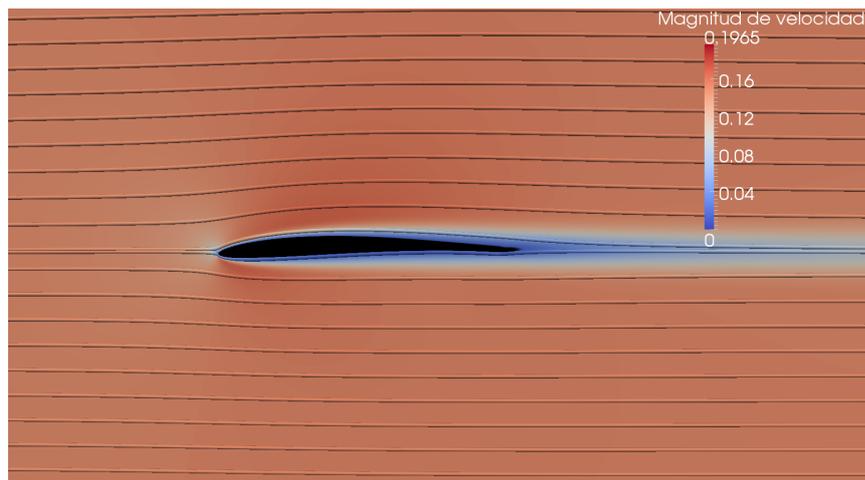
Figura 4.17: Ajuste = $1.102x^{-0.468}$ 

Figura 4.18: Elipse Re=600, flujo estacionario

Figura 4.19: Elipse $Re=700$, inicia flujo no estacionarioFigura 4.20: Elipse $Re=900$, flujo no estacionario

influencia en el parámetro h/t , utilizamos valores relativamente grandes en las primeras simulaciones, tomando en cuenta que como es bien sabido, los resultados obtenidos en la teoría de alas asimétricas es válido cuando este parámetro es pequeño. En este caso, algunos de los valores que utilizamos son tales que el coeficiente de sustentación resulta ser negativo. Por último también observamos que al disminuir la curvatura del ala, el coeficiente de sustentación se vuelve positivo. La influencia del parámetro h/t no es tan evidente, como se puede ver en la figura 4.24, pues parecería que al disminuir su valor el arrastre aumentó ligeramente. Además, al disminuir la curvatura, encontramos que el valor en el que el Reynolds de transición a flujo dependiente del tiempo decrece al disminuir h/t .

4.6. Comparativo de curvas de arrastre entre las diferentes geometrías.

Para poder comparar el arrastre entre las diferentes geometrías de manera puntual y sencilla, dada la inmensa cantidad de datos y experimentos arrojados a lo largo de este trabajo, se optó por tomar una muestra de cada una de las figuras que cumplieran con parámetros similares. Entonces se toma para todas las muestras un mismo $Re=200$ y una misma razón de aspecto normalizada=1. En el caso de la elipse $c/t = 2$ y se toma t con razón de aspecto igual a uno, en el caso del ala simétrica $t = 1$ y $l = 6$ y en el caso del ala no simétrica $t = 1$, $l = 6$ y $h = 0.4$. Como se ve en el caso de las alas se toma $t = 1$ para hacerlas equiparables a las otras dos figuras. En la gráfica 4.21 se ve reflejada esta comparación. El círculo es la geometría que genera mayor arrastre y el ala no simétrica la de menor arrastre. Esto está directamente relacionado con el valor de Re al cual cada geometría pasa de un régimen estacionario a uno no estacionario, puesto que la generación de flujo no estacionario detrás de cada figura se lleva una parte de la energía en su formación y por tanto el objeto necesita de una fuerza mayor para mantenerse en la posición inicial. Lo que resulta en un mayor arrastre pues como vimos en el capítulo uno, este es proporcional a la fuerza en x .

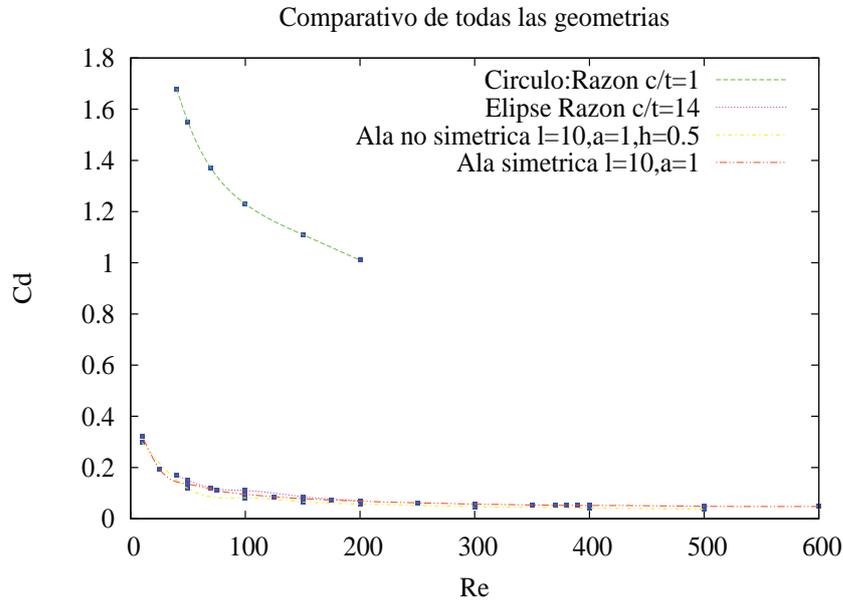


Figura 4.21: Comparativo Cd vs. Re de todas las geometrías

El error en la estimación de los datos reportados puede aumentar dependiendo de si el flujo es estacionario o no. En el caso del cilindro, sólo

los primeros tres puntos en la figura 4.22 son estacionarios, en el resto de los casos el coeficiente de arrastre oscila en el tiempo y se reporta el valor promedio. En el caso de las elipses, también se reportan valores no estacionarios, sin embargo, la amplitud de oscilación del coeficiente de arrastre, y de sustentación, es pequeña de manera que se puede ver como una pequeña variación alrededor del promedio. Esto se debe a que la amplitud de la oscilación en los coeficientes de arrastre y sustentación depende de la sección transversal del cuerpo relativa a la dirección de la corriente libre.

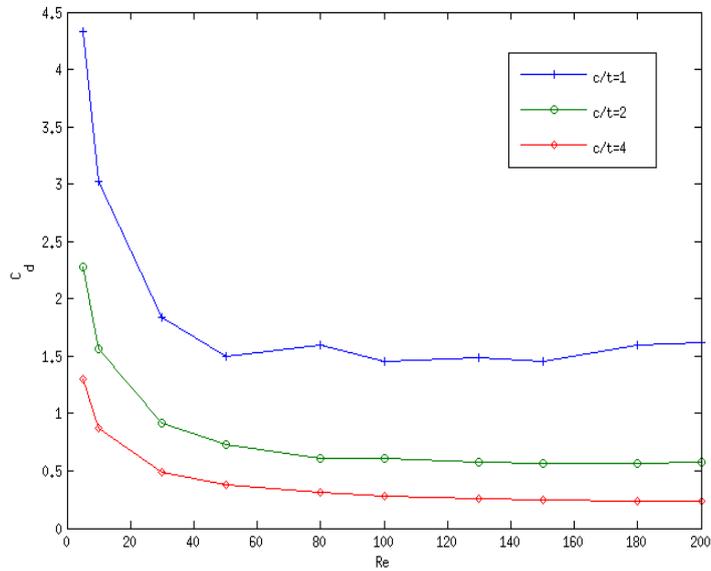


Figura 4.22: Comparación del arrastre, como función del Re , sobre elipses con diferente razón de aspecto.

Cualitativamente, observamos una reducción del arrastre y un aumento del valor del Reynolds de transición al aumentar la razón de aspecto, respecto al flujo alrededor de un cilindro. Encontramos que los valores de transición son tales que $Re_c < 80$, $Re_c < 100$ y $Re_c < 300$ para $l/t = 2$, $l/t = 4$ y $l/t = 10$. Al comparar con las mismas razones de aspecto, pero para las elipses, vemos que el aumento en el número de Reynolds de transición resultó ser menor, es decir, parecería que a número de Reynolds moderados no resulta más eficiente usar geometrías asimétricas respecto a la velocidad de la corriente libre. Esto puede deberse a que el tamaño de los vórtices detrás del objeto, a Re dado, es mayor para las alas simétricas que para las elipses.

El coeficiente de sustentación resulta ser cero en los casos estacionarios y una función que oscila, en el caso de flujos dependientes del tiempo. Las diferencias entre las geometrías analizadas hasta el momento muestran

que las amplitudes de oscilación en el coeficiente de sustentación disminuyen al aumentar la razón de aspecto y, por lo tanto, el valor del Reynolds de transición aumenta.

Algunos datos numéricos para el arrastre, como función del número de Reynolds, de simulaciones en alas simétricas que realizamos se muestran en la figura 4.23 en donde se puede apreciar que el arrastre se reduce conforme se aumenta la razón de aspecto. Sin embargo, esta geometría no parece mejorar el desempeño encontrado en el caso de las elipses, pues es conveniente evitar en la medida de lo posible la formación de vórtices para la optimización de la energía.

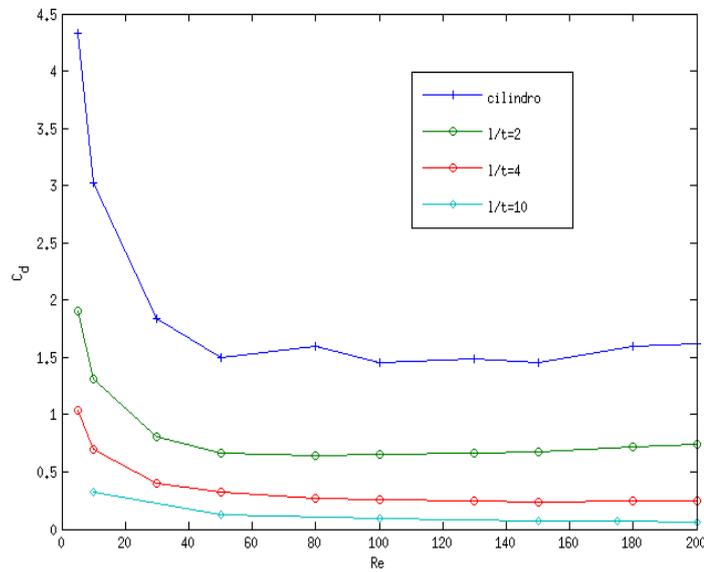


Figura 4.23: Comparación del arrastre, como función del Re , sobre alas de Joukowski simétricas, con diferente razón de aspecto.

El valor de Re de transición a flujo dependiente del tiempo también aumenta. Por ejemplo para una razón $l/t = 2$ con $h/t = 1$ encontramos que $Re_c < 250$, en contraste con el cilindro cuya cota superior encontramos que es 50 y para la elipse, de razón de aspecto $c/t = 2$, que está alrededor de 100. Entonces, el resultado de agregar la asimetría en el ala es una reducción en el arrastre.

Al aumentar el tamaño del ala, manteniendo fijo el valor de h/t , encontramos que el arrastre sobre el objeto disminuye y parece mejorar el caso de la elipse (ver figura 4.24) El valor del número de Reynolds de transición a flujo dependiente del tiempo también aumenta.

Se muestra otros comparativo de alas en la figura 4.25 en la que se observa un comportamiento regular. Para el caso de las alas no simétricas este

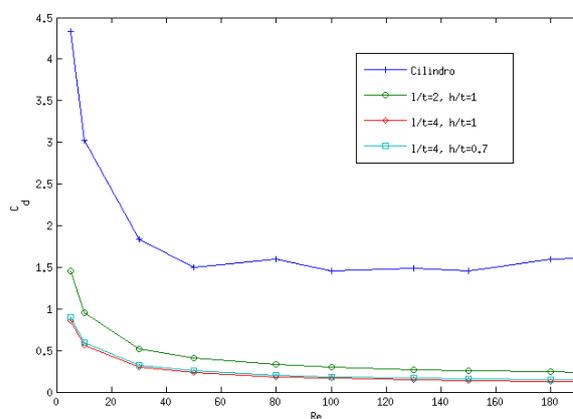


Figura 4.24: Comparación del arrastre para diferentes valores de los parámetros de un ala no simétrica.

comportamiento regular consiste en que al ir disminuyendo el parámetro de curvatura h el exponente de la curva va disminuyendo. Sería factible poder corroborar este comportamiento obteniendo más muestras, lo que entraría en las perspectivas a futuro de este trabajo. En la figura 4.26 se muestra el mismo tipo de comparativo y de igual manera se podría realizar un estudio más amplio en la tendencia de las alas simétricas con más muestras para poder corroborar este comportamiento.

También se realizó un resumen de C_d vs. Re donde se comparan todos los resultados anteriores que se muestran en la figura 4.21, en donde se observa que el arrastre del círculo es mucho mayor, posteriormente se hace un acercamiento entre la elipse, el ala simétrica y el ala no simétrica en la figura 4.27 en donde se aprecia que el ala no simétrica es la que genera menor arrastre.

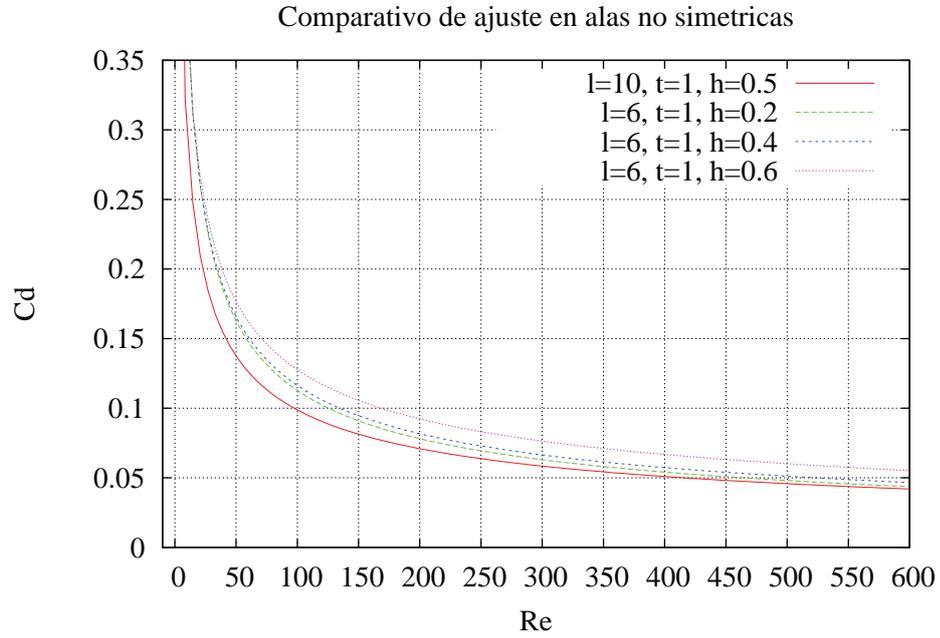


Figura 4.25: Comparativo de ajustes de las alas no simétricas

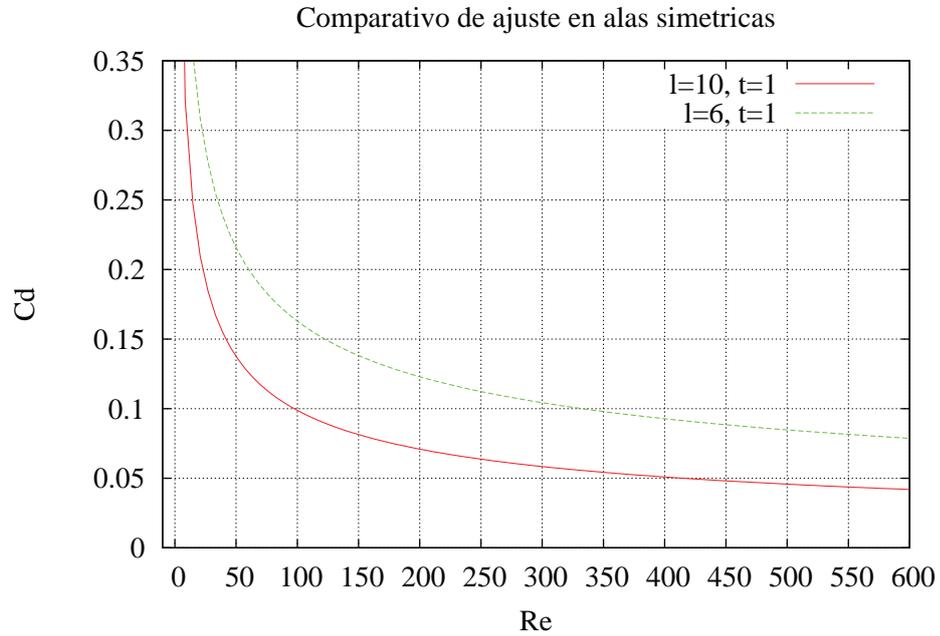


Figura 4.26: Comparativo de ajustes de las alas simétricas

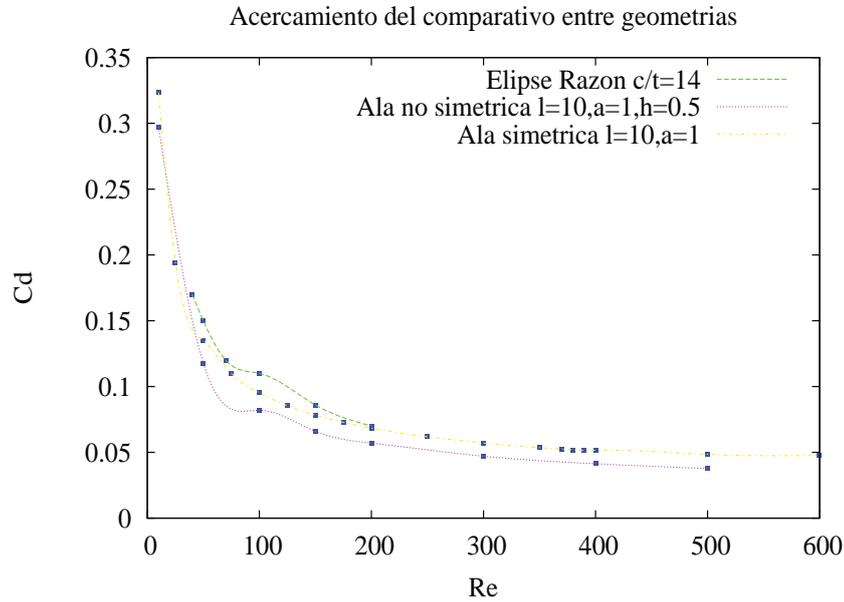


Figura 4.27: Acercamiento del comparativo entre elipse, ala simétrica y ala no simétrica.

4.7. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se obtuvo tanto el valor de Re al cual se pasa de un régimen estacionario a uno no estacionario, así como también las curvas de arrastre para alas simétricas y no simétricas. Usando el radio del círculo y el largo del ala como parámetros de comparación entre las distintas geometrías se observó que el mayor Cd se obtiene en el caso de un cilindro mientras que el menor Cd se observó en el caso de un ala no simétrica. También fué notorio que el caso del cilindro transitaba a un régimen no estacionario a Re más bajos que los de sus contrapartes elipsoidal en algunos experimentos se observa que esta transición es menor para el caso de la elipse que en el caso del ala simétricas, el ala no simétricas tiene un Re_c mayor a todos los casos anteriores además de que arroja un Cd menor en todos los casos, con lo que se puede concluir que es esta geometría la que genera un menor arrastre.

Capítulo 5

Conclusiones

El primer resultado importante que encontramos fue que se pueden mejorar de manera significativa los resultados arrojados por el método de Boltzmann en redes, modificando las condiciones de frontera de rebote a medio camino por otro algoritmo que busca un punto más cercano al real sobre el cual hacer los cálculos, hasta hacer el error menor a una tolerancia impuesta, con el cual pudimos alisar la frontera y realizar la validación con un error menor al 1%. En el estudio de los cuerpos geométricos inmersos en un fluido, el primero en ser analizado fue la elipse, en el que pudimos comparar, la curva empírica con los datos arrojado por el programa. En este caso, se obtuvieron ajustes a curvas polinomiales para números de Re específicos, así como una curva promedio de todos los casos estudiados. Tanto en el caso de las alas simétricas, como en el de las no simétricas, obtuvimos curvas suaves que nos hacen pensar que existe un comportamiento regular entre la variación de los parámetros de las alas y los polinomios que se ajustaron a las curvas. Debido a la naturaleza numérica de tales ajustes, cabe la posibilidad en un estudio posterior de generar ajustes con otro tipo de funciones y realizar más simulaciones con el fin de caracterizar tal comportamiento más detalladamente. Por último se analizó a los diferentes objetos estudiados, de tal forma que se puede concluir que el objeto que mayor arrastre genera con una misma longitud característica es el círculo y el ala no simétrica es la de menor arrastre. En perspectiva podrían aún hacerse estudios más detallados de estos últimos tipos de alas para ver cual de ellas generaría un menor arrastre, variando sus parámetros. Estos resultados son reelevantes pues con ello se dan curvas para Re específicos, con los que se puede predecir más finamente el fenómeno estudiado.

Bibliografía

- [1] Aerodinamics Drag Reduction Technologies. Proceedings of the CEAS/-DragNet. European Drag Reduction Conference. Germany. Springer, 2001.
- [2] Frank M. White. *Mecánica de Fluidos*. Mc Graw Hill. 2008.
- [3] Charles P. Burgess. *Airship Design*. University Press of the Pacific, 1927.
- [4] Landau y Lifshitz. *Mecánica de Fluidos*. Reverte, 1985.
- [5] I.G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, 1993.
- [6] G.K. Batchelor. *An introduction to the fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [7] R. Zhang R. Shock and H. Chen Y. Li. Prediction of vortex shedding from a circular cylinder using a volumetric Lattice-Boltzmann boundary approach. *The European Physical Journal*, 171:91–97, 2009.
- [8] Donna Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional stream function vorticity equation in irregular regions. *Journal of Computational Physics*, 176:231–275, 2001.
- [9] S.F. Hoerner. *Fluid-Dynamic Drag*. Library on Congress N.Y. U.S., 1964.
- [10] S.A. Johnson. Flow past elliptical cylinder at low Reynolds numbers. In *14th Australasian Fluids Mechanics Conference*, 2001.
- [11] S. Harris. *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*. Edit. Holt, Rinehart and Winston., New York, 1971.
- [12] Kerson Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, 1963.
- [13] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, Vol. 94(3):511–525, Mayo 1, 1954.

-
- [14] Xiaoyi He and Li-Shi Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Physical Review E*, 56:6812–6815, Diciembre 1997.
 - [15] Xiaoyi He and Li-Shi Luo. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation. *Journal of Statistical Physics*, 88:927–944, 1997.
 - [16] Robert Zwanzig. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 2001.
 - [17] A. J. C. Ladd. *Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1.*, volume 271. 1994.
 - [18] Renwei Mei. Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. *Physical Review E*, 65(041203):1–13, 2002.