



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS  
PARA LA ECUACIÓN NO LINEAL DE  
BLACK-SCHOLES-MERTON

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
ACTUARIA

PRESENTA:  
LESLIE ALEJANDRA JIMÉNEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:  
ACT. EDGAR DÍAZ ORDOÑEZ

2013





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:  
Jiménez  
Rosas  
Leslie Alejandra  
58 48 40 24  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
303217712
  
2. Datos del tutor:  
Act.  
Edgar  
Díaz  
Ordoñez
  
3. Datos del sinodal 1:  
M. en C.  
Hugo  
Villaseñor  
Hernández
  
4. Datos del sinodal 2:  
Dr.  
Fernando  
Baltazar  
Larios
  
5. Datos del sinodal 3:  
Act.  
Carlos Vladimir  
Rodríguez  
Caballero
  
6. Datos del sinodal 3:  
M. en C.  
Sergio Iván  
López  
Ortega
  
7. Datos del trabajo escrito:  
Esquemas de diferencias finitas para la ecuación no lineal de Black-Scholes-  
Merton  
162p

2013

*A mis padres y hermanos, por ser guía, soporte y aliento.*

*A Edgar.*

*A los profesores que contribuyeron en la realización de este trabajo.*

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Finanzas y cálculo estocástico</b>	<b>1</b>
1.1. Precio de acciones y procesos estocásticos . . . . .	1
1.1.1. Modelos de caminata aleatoria . . . . .	2
1.1.2. Movimiento browniano . . . . .	6
1.2. Cálculo estocástico . . . . .	9
1.2.1. Integrales estocásticas . . . . .	9
1.2.2. Lema de Itô . . . . .	14
1.2.3. Proceso de Itô y representación de la fórmula de Feynman- Kac . . . . .	20
1.2.4. Cambio de medida: Radon-Nikodym y teorema de Girsanov	24
<b>2. Modelos de valuación de opciones</b>	<b>27</b>
2.1. Propiedades de las funciones de valuación . . . . .	28
2.1.1. Fronteras para valores de opciones . . . . .	28
2.1.2. Efectos del pago de dividendos . . . . .	33
2.2. Formulación Black-Scholes-Merton . . . . .	35
2.2.1. Principio de cobertura . . . . .	35
2.2.2. Estrategia de replicación dinámica . . . . .	37
2.2.3. Argumento de riesgo neutral . . . . .	41
2.3. Teoría del precio justo . . . . .	42
2.3.1. Medida de martingala equivalente y valuación libre de riesgo	43
2.3.2. Modelo de Black-Scholes . . . . .	47
2.4. Fórmula de Black-Scholes y sus propiedades . . . . .	48
2.4.1. Formulas de valuación para opciones europeas . . . . .	49
2.5. Modelo de valuación de opciones extendido . . . . .	55
2.5.1. Opciones sobre activos que pagan dividendos . . . . .	56

<b>3. Opciones americanas</b>	<b>61</b>
3.1. Condiciones de ejercicio óptimas . . . . .	61
3.1.1. Opciones americanas sobre activos con dividendos . . . . .	62
3.1.2. Condición de tangencia . . . . .	63
3.1.3. Frontera de ejercicio óptimo de una <i>call</i> americana . . . . .	66
3.1.4. Relaciones de simetría Put-Call . . . . .	70
3.1.5. Call americana sobre un activo de dividendo simple . . . . .	73
3.1.6. Opciones <i>put</i> americanas de uno o más dividendos . . . . .	78
3.2. Formulaciones para valorar opciones americanas . . . . .	80
3.2.1. Formulación de complementariedad lineal . . . . .	80
3.2.2. Problema de paro óptimo . . . . .	83
3.2.3. Representación integral de la recompensa al ejercicio temprano . . . . .	85
<b>4. Valuación de opciones, esquemas numéricos</b>	<b>91</b>
4.1. Métodos de malla . . . . .	92
4.1.1. Modelo binomial . . . . .	92
4.1.2. Límite continuo del modelo binomial . . . . .	93
4.1.3. Modelo con dividendos . . . . .	95
4.1.4. Características de ejercicio temprano . . . . .	97
4.2. Algoritmos de diferencias finitas . . . . .	98
4.2.1. Construcción de esquemas explícitos . . . . .	98
4.2.2. Esquemas implícitos y sus problemas de implementación . . . . .	101
4.2.3. Método de fijación de la frontera y técnica de relajación puntual . . . . .	104
4.2.4. Errores de truncamiento y orden de convergencia . . . . .	109
4.2.5. Estabilidad numérica y fenómeno de oscilación . . . . .	111
4.3. Simulación de Monte Carlo . . . . .	114
4.3.1. Técnicas de reducción de varianza . . . . .	117
4.3.2. Valuación de opciones americanas . . . . .	117
<b>5. Resultados</b>	<b>125</b>
5.1. Árbol Binomial . . . . .	125
5.2. Diferencias finitas, fijación de la frontera . . . . .	129
5.3. Algoritmo de Tilley . . . . .	133
5.4. Comparación . . . . .	138

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
<b>6. Conclusiones</b>	<b>145</b>
<b>Apéndice</b>	<b>147</b>
6.1. Código del árbol binomial . . . . .	147
6.2. Código de fijación de la frontera . . . . .	150
6.3. Código de algoritmo de Tilley . . . . .	155
<b>Bibliografía</b>	<b>161</b>



# Introducción

---

En el contexto actual, en el que la valuación constante y eficiente de instrumentos financieros se ha vuelto necesaria para el funcionamiento de los mercados de valores, será de gran utilidad el desarrollo de herramientas que permitan utilizar la teoría generada, ya que ayudarán a optimizar las condiciones en que se comercian dichos instrumentos. El siguiente trabajo presenta, además de la teoría que los sustenta, la implementación de diversos métodos de aproximación a la solución del problema de valuación para opciones americanas.

El primer capítulo aborda la característica de aleatoriedad de los componentes del precio de una opción, se presentan herramientas que permiten realizar operaciones matemáticas en funciones que involucran variables estocásticas. Son tratados los conceptos que son indispensables para la comprensión y construcción de los modelos de valuación.

En el segundo capítulo se introducen las propiedades de las fórmulas de valor de las opciones, cómo es aplicado el principio de cobertura libre de riesgo para obtener la ecuación diferencial que gobierna el valor de un derivado y la teoría de valor justo de opciones, la cual da lugar al enfoque de valuación neutral al riesgo. Al final se muestra la solución de la ecuación de Black-Scholes para el caso de opciones europeas de plan vanilla.

En el tercer capítulo se incluye la característica de ejercicio temprano y se presentan formulaciones de valuación de opciones americanas, tales como la de complementariedad lineal y la de paro óptimo. Se mostrará como la recompensa al ejercicio temprano puede ser expresada en términos de la frontera de ejercicio en una representación integral y se examinará cómo la determinación de la frontera de ejercicio óptimo se reduce a la solución de una ecuación integral.

En el cuarto capítulo se describen métodos numéricos en los que están incluidos los de malla, de diferencias finitas y simulación de Monte Carlo.

Por último, en el quinto capítulo se presentan códigos que ejemplifican la implementación de los métodos numéricos presentados, se realizan valoraciones y comparaciones de sus diversas características.



# Finanzas y cálculo estocástico

---

La evolución del precio de una acción en el tiempo se ha modelado mediante un *proceso estocástico* debido a su naturaleza aleatoria, de manera que, como el precio de un derivado está en función del precio de un activo subyacente, es necesario presentar herramientas que permitan realizar operaciones matemáticas en funciones que involucran variables estocásticas. En este capítulo se presentan los conceptos que son indispensables para la comprensión y construcción de los modelos de valuación.

## 1.1. Precio de acciones y procesos estocásticos

Se dice que el movimiento del precio de una acción sigue un proceso estocástico ya que su valor cambia en el tiempo de forma incierta, es por eso que el estudio de estos procesos está en relación con la investigación de la estructura de familias de variables aleatorias. En esta sección se presentan los modelos que han surgido de análisis relativos a este tema.

Usualmente se denota a una variable aleatoria por  $X(t)$ , donde  $t$  representa el tiempo y corre sobre algún conjunto de índices  $\tau$ . Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias, se denota por  $\{X(t), t \in \tau\}$ , dependiendo de si el conjunto de índices  $\tau$  es discreto o continuo, se dice que el proceso estocástico es discreto o continuo. En otras palabras, un proceso estocástico discreto para el precio de una acción es aquel en el que el precio puede cambiar para algunos tiempos discretos fijos. Por otro lado, un proceso continuo es aquel en el que el precio puede cambiar en cualquier momento. Los valores tomados por la variable aleatoria  $X_t$  pueden ser también discretos o continuos y el correspondiente proceso estocástico que se origina será discreto o continuo en el espacio respectivamente.

En la realidad, el precio de una acción puede cambiar solamente para valores discretos y durante el tiempo en el que el mercado de acciones está abierto,

pero en el desarrollo siguiente se asume que los procesos de precio pueden tomar valores en un conjunto numerable y que esto ocurre en tiempo continuo, esto con la finalidad de emplear las herramientas de cálculo estocástico.

Para el desarrollo de la teoría de procesos estocásticos que sigue, es necesario introducir un concepto importante, los procesos de Markov.

**Definición 1** *Un proceso de Markov es un proceso estocástico que a tiempo discreto  $X(n) : n = 0, 1, \dots$ , con espacio de estados numerable, satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero  $n \geq 0$ , y para cualesquiera estados  $x(0), \dots, x(n+1)$ , se cumple*

$$p(x(n+1)|x(0), \dots, x(n)) = p(x(n+1)|x(n)).$$

donde  $p(x(n+1)|x(n))$  representa  $P(X(n+1) = x(n+1) | X(n) = x(n))$ .

La interpretación es que si el precio de una acción sigue un proceso Markoviano, entonces sólo el valor actual de la acción es relevante para la predicción de valores futuros, a esto se le conoce como la propiedad Markoviana, y es consistente con la forma débil de eficiencia del mercado, la cual asume que el valor presente del precio de una acción condensa toda la información de sus precios pasados y que la particular trayectoria tomada por el precio de la acción es irrelevante.

Se iniciará con la discusión sobre modelos de caminata aleatoria discreta y subsecuentemente se obtendrá su límite continuo. Se obtendrá la ecuación de Fokker-Planck que gobierna la función de densidad del movimiento de caminata aleatoria continua. Se presentará la definición formal del movimiento Browniano y se discutirán algunas de sus propiedades.

### 1.1.1. Modelos de caminata aleatoria

Ahora se describe la caminata aleatoria discreta unidimensional y se considera el problema del límite continuo de la caminata aleatoria discreta.

Suponemos que una partícula inicia en el origen del eje de las  $x$ 's y que ésta salta hacia la derecha o izquierda con saltos de longitud  $\delta$ . Se define  $x(i)$  como la variable que toma los valores  $\delta$  o  $-\delta$  cuando la partícula en el  $i$ -ésimo salto se mueve a la izquierda o derecha respectivamente. Se asume que las probabilidades de izquierda o derecha son estacionarias, esto es, que estas probabilidades son las mismas en cualquier momento. Las probabilidades se escriben de la siguiente manera:

$$P(x(i) = \delta) = p, \quad P(x_i = -\delta) = q. \quad (1.1)$$

Donde  $p + q = 1$  y  $q$  es independiente de  $i$  ya que se trata de un proceso estacionario. Se asume que los saltos individuales son independientes de cada

otro salto, esto es que  $x(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , son independientes. Esta caminata aleatoria discreta es un proceso de Markov discreto.

La suma del proceso se define como:

$$X(n) = x(1) + x(2) + \dots + x(n), \quad (1.2)$$

el cuál da la posición de la partícula al final del  $n$ -ésimo salto. Ahora, sabemos que el valor esperado de  $x(i)$  es:

$$\mathbb{E}[x(i)] = \delta p - \delta q = (p - q) \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y por lo tanto:

$$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n x(i)\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[x(i)] = (p - q) \delta n, \quad (1.3)$$

como las  $x(i)$  son independientes tenemos que:

$$\text{var}(X(n)) = n \text{var}(x(i)),$$

donde la varianza de  $x(i)$  es:

$$\text{var}(x(i)) = [\delta^2 p + (-\delta)^2 q] - (\mathbb{E}[x(i)])^2 = \delta^2 - (p - q)^2 \delta^2 = 4pq\delta^2.$$

Entonces:

$$\text{var}(X(n)) = 4pq\delta^2 n. \quad (1.4)$$

A  $X(n) - X(n - 1)$  se le llama un incremento del modelo de caminata aleatoria discreta.

### Modelo continuo

Ahora se toma el límite de un paso infinitamente pequeño del modelo descrito arriba, para construir el modelo continuo de caminata aleatoria. Supondremos que se dan  $r$  pasos por unidad de tiempo, entonces, de acuerdo con las ecuaciones (1.3) y (1.4), la media del desplazamiento de la partícula por unidad de tiempo  $\mu$  es  $(p - q) \delta r$  y la varianza del desplazamiento alrededor de la media de la posición por unidad de tiempo  $\sigma^2$  es  $4pq\delta^2 r$ . Sea  $\lambda = \frac{1}{r}$  el intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos, y sea  $u(x, t)$  la probabilidad de que la partícula tome la posición  $x$  a tiempo  $t$ . Entonces:

$$u(x, t) = P(X(n\lambda) = x) \quad \text{para } t = n\lambda. \quad (1.5)$$

Para arribar a la posición  $x$  a tiempo  $t + \lambda$ , la partícula tiene que estar en  $x - \delta$  o  $x + \delta$  a tiempo  $t$ . Con probabilidad  $p$  (o  $q$ ), la partícula en  $x - \delta$  (o  $x + \delta$ ) se mueve a  $x$  en el siguiente paso. Por lo tanto, la función  $u(x, t)$  satisface la relación recurrente:

$$u(x, t + \lambda) = pu(x - \delta, t) + qu(x + \delta, t). \quad (1.6)$$

Para el límite continuo se toma  $\delta \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$  (entonces  $\lambda \rightarrow 0$ ). Ahora se considera la expansión de Taylor para cada término de la relación (1.6):

$$u(x, t + \lambda) = u(x, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

$$pu(x - \delta, t) = p \left[ u(x, t) - \delta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \mathcal{O}(\delta^3) \right],$$

$$qu(x + \delta, t) = q \left[ u(x, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}(\delta^3) \right],$$

para simplificar las expresiones se utiliza la notación de la  $\mathcal{O}$  grande. Regresando a la igualdad original y por eliminación de algunos términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= p \left[ -\delta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \mathcal{O}(\delta^3) \right] \\ &+ q \left[ \delta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}(\delta^3) \right] - \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

lo que después de simplificar se convierte en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[ (q - p) \frac{\delta}{\lambda} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^2}{\lambda} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\lambda) + \mathcal{O} \left( (q - p) \frac{\delta^3}{\lambda} \right). \quad (1.7)$$

Considerando las expresiones (1.3) y (1.4), y que  $\lambda$  está definida como el intervalo de tiempo entre dos saltos, se define:

$$\mu := (p - q) \frac{\delta}{\lambda} \quad y \quad \sigma^2 := 4pq \frac{\delta^2}{\lambda}, \quad (1.8)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son cantidades finitas. Es necesario observar que  $p = \mathcal{O}(1)$ ,  $q = \mathcal{O}(1)$  y que  $p + q = 1$ , consecuentemente, se deduce que  $\frac{\delta^2}{\lambda} = \mathcal{O}(1)$  o  $\frac{\delta}{\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ . También se deduce que la expansión asintótica  $\mathcal{O}(\delta)$  de  $p$  y  $q$  debe tomar la forma siguiente:

$$p \approx \frac{1}{2}(1 + k\delta) \quad y \quad q \approx \frac{1}{2}(1 - k\delta),$$

para alguna  $k$  por determinar. Entonces se tiene que  $4pq \approx 1$  y que:

$$\lim_{\delta, \lambda \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2. \quad (1.9)$$

Por último, debido a la ecuación (1.9) se deduce que  $p - q \approx \frac{\mu}{\sigma^2}\delta$  y entonces  $k = \frac{\mu}{\sigma^2}$ . La expansión asintótica de  $p$  y  $q$  explícita es:

$$p \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma^2}\delta\right) \quad y \quad q \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma^2}\delta\right). \quad (1.10)$$

Notar que  $p \rightarrow \frac{1}{2}$  y  $q \rightarrow \frac{1}{2}$  cuando se toma el límite asintótico  $\delta \rightarrow 0$ . Si este no es el caso, entonces el límite se vuelve infinito. Puesto que  $\frac{\delta^2}{\lambda} = \mathcal{O}(1)$ , el último término en la expresión (1.7) se vuelve  $\mathcal{O}\left((q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}\right) = \mathcal{O}(\lambda)$ . Consecuentemente, tomando los límites  $\delta, \lambda \rightarrow 0$  en la ecuación (1.7), se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

para la función de densidad de probabilidad  $u(x, t)$  de la caminata aleatoria continua.

La ecuación anterior es llamada la ecuación de Fokker-Planck. La tasa de deriva es  $\mu$  y la tasa de difusión es  $\sigma^2$ . En el tiempo  $t$ , la media del desplazamiento de la partícula es  $\mu t$  y la varianza del desplazamiento alrededor de la posición media es  $\sigma^2 t$ .

Por el teorema central del límite, se puede mostrar que el límite continuo de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X_n$  definida en la ecuación (1.2) tiende a la densidad de una variable aleatoria normal con la misma media y la varianza.

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal  $X$  con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$  esta dada por:

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Por la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, puede demostrarse que  $f_X(x, t)$  satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1.13)$$

con la condición inicial  $u(x, 0^+) = \delta(x)$ , donde  $u(x, 0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t)$ . Aquí,  $\delta(x)$  representa la función de Dirac con las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{y } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Notar que una función así no puede existir, por lo que se le considera sólo dentro de las funciones generalizadas (ver [11]).

La interpretación probabilística del resultado anterior es que, si se condiciona el evento a que la partícula inicia en posición  $x = 0$ ,  $f_X(x, t) \Delta x$  es la probabilidad de que la partícula esté en  $[x, x + \Delta x]$  en algún tiempo futuro  $t$ . Por esta razón a  $f_X(x, t)$  usualmente se llama función de densidad de transición. La condición inicial  $u(x, 0^+) = \delta(x)$  indica que la partícula inicia en  $x = 0$  casi seguramente. Además, el modelo de caminata aleatoria continuo hereda las propiedades de estacionariedad e independencia de incrementos del modelo discreto de caminata aleatoria.

### 1.1.2. Movimiento browniano

El movimiento browniano se refiere al incesante e irregular movimiento aleatorio de un partícula inmersa en un líquido o gas, según lo observado por R. Brown en 1827. El fenómeno puede ser explicado por las perpetuas colisiones de las partículas con el medio circundante. El proceso asociado al movimiento browniano es llamado movimiento browniano o proceso de Wiener.

#### Movimiento browniano

Se presenta la definición formal del movimiento browniano.

**Definición 2** *Un movimiento browniano con tendencia es un proceso estocástico  $X_t, t \geq 0$  con las siguientes propiedades:*

1. *Todo incremento  $X(t+s) - X(t)$  se distribuye normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ ; donde  $\mu$  y  $\sigma$  son parámetros fijos.*
2. *Para todo  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , cada uno de los incrementos  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  es una variable aleatoria independiente con distribución igual a la descrita en 1.*
3.  *$X(0) = 0$  y  $X(t)$  es continua.*

Notemos que  $X(t+s) - X(s)$  son independientes de la historia de la trayectoria, es decir, el conocimiento de  $X(\tau)$  para  $\tau < s$  no tiene efecto en la distribución de probabilidad para  $X(t+s) - X(s)$ . Esto precisa el carácter Markoviano del movimiento browniano.

### Movimiento browniano estándar

Para el caso particular en que  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , el movimiento browniano es llamado movimiento browniano estándar (o proceso de Wiener estándar). La correspondiente distribución de probabilidad para el movimiento browniano estándar  $Z(t)$ ; a un tiempo fijo  $t \geq 0$  está dada por:

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leq z | Z(t_0) = z_0) &= P(Z(t) - Z(t_0) \leq z - z_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{z-z_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-t_0)}\right) dx \\ &= N\left(\frac{z-z_0}{\sqrt{t-t_0}}\right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Algunas propiedades del movimiento browniano estándar son las siguientes:

1.  $\mathbb{E}[Z(t)^2] = \text{var}(Z(t)) + \mathbb{E}[Z(t)]^2 = t$ .
2.  $\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] = \min(t, s)$ .

Para demostrar el resultado de (2), se asume que  $t > s$  (sin pérdida de generalidad) y se considera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(t)Z(s)] &= \mathbb{E}\left[(Z(t) - Z(s))Z(s) + Z(s)^2\right] \\ &= \mathbb{E}[(Z(t) - Z(s))Z(s)] + \mathbb{E}[Z(s)^2] \end{aligned}$$

Dado que  $Z(t) - Z(s)$  y  $Z(s)$  son independientes y ambas  $Z(t) - Z(s)$  y  $Z(s)$  tienen media cero, entonces:

$$\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] = \mathbb{E}[Z(s)^2] = s = \min(t, s). \quad (1.15)$$

**Movimiento browniano geométrico**

Sea  $X(t)$  el movimiento browniano con parámetro de tendencia  $\mu \geq 0$  y parámetro de varianza  $\sigma^2$ . El proceso estocástico definido por:

$$Y(t) = e^{X(t)}, \quad (1.16)$$

es llamado *movimiento browniano geométrico*. Obviamente, el valor tomado por  $Y(t)$  es no negativo. Dado que  $X(t) = \ln(Y(t))$  es un movimiento browniano, por las propiedades 1) y 2) se deduce que  $\ln Y(t) - \ln Y(0)$  se distribuye normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ . Comúnmente se dice que  $\frac{Y(t)}{Y(0)}$  se distribuye log-normal. Como la función de densidad de  $X(t)$  esta dada por la ecuación (1.12), la función de densidad de  $\frac{Y(t)}{Y(0)}$  es:

$$f_Y(y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (1.17)$$

La media de  $Y(t)$  condicionada en  $Y(0) = y_0$  se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Y(t) | Y(0) = y_0] \\ &= y_0 \int_0^\infty y f_Y(y, t) dy \\ &= y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dx, \quad x = \ln y, \\ &= y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + \sigma^2 t)]^2 - 2\mu t \sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dx \\ &= y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

De forma similar, la varianza de  $Y(t)$  condicionada con  $Y(0) = y_0$ :

$$\begin{aligned}
& \text{var}(Y(t) | Y(0) = y_0) \\
&= y_0^2 \int_0^\infty y^2 f_Y(y, t) dy - \left[ y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \right]^2 \\
&= y_0^2 \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + 2\sigma^2 t)]^2 - 4\mu t \sigma^2 t - 4\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dx \right. \\
&\quad \left. - \left[ \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \right]^2 \right\} \\
&= y_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t) [\exp(\sigma^2 t) - 1]. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Dado un conjunto discreto de tiempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los sucesivos cocientes  $\frac{Y(t_2)}{Y(t_1)}, \dots, \frac{Y(t_n)}{Y(t_{n-1})}$  son variables aleatorias independientes, esto es, el porcentaje de cambios sobre intervalos de tiempo no traslapados es independiente.

En lo siguiente, se presentará el modelo de Black-Scholes, en el que uno de los supuestos es que precio de las acciones sigue un movimiento browniano geométrico.

## 1.2. Cálculo estocástico

El precio de un derivado es una función del precio del activo subyacente; este último se modela mediante un proceso estocástico. Ahora, para construir un modelo para la valuación de derivados es necesario mostrar herramientas de cálculo que permitan operaciones tales como composición, diferenciación, integración, etc., en funciones de variables aleatorias estocásticas. En esta sección se definen la integral y diferencial estocásticas de funciones que involucran variables aleatorias brownianas. En particular, se muestra la regla de diferenciación de Itô, mediante la cual se calculan las diferenciales de funciones de variables estocásticas. También se obtiene la representación de la fórmula de Feynman - Kac, la cual da una solución estocástica de una ecuación diferencial parcial parabólica. Después se aborda la noción de las derivadas de Radon-Nikodym y el teorema de Girsanov que efectúa el cambio de medidas de probabilidad equivalentes.

### 1.2.1. Integrales estocásticas

El movimiento browniano es el límite del modelo discreto de la caminata aleatoria. De manera intuitiva es fácil observar que las trayectorias brownianas pueden ser continuas, sin embargo no son suaves: son no diferenciables.

La propiedad de no-diferenciabilidad de un movimiento browniano en un espacio de probabilidad puede verse al probar que la variación cuadrática, que se define a continuación, no es finita.

Supóngase que  $X_t$  es un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  y  $t \in \tau$ , con  $\tau$  un subconjunto de los reales.

**Definición 3** *La variación cuadrática del proceso, denotada por  $[X]_t$ , está dada por:*

$$[X]_t = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2,$$

donde el rango de  $P$  son las particiones del intervalo  $[0, t]$  y  $\|\cdot\|$  representa la norma de la partición.

Existen resultados de cálculo que demuestran que la diferenciabilidad de un proceso implica variación cuadrática igual a cero.

### Variación cuadrática de un movimiento browniano

Suponer que se forma una partición  $\pi$  de un intervalo de tiempo  $[0, T]$  formada por los puntos:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

y sea  $\Delta_{max} = \max_k (t_k - t_{k-1})$ . Sea  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ , se define la correspondiente variación cuadrática del movimiento browniano  $Z(t)$  como:

$$Q_\pi = \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2. \quad (1.20)$$

La variación cuadrática de  $Z(t)$  sobre  $[0, T]$  es diferente de cero y su valor está dado por:

$$Q_{[0, T]} = \lim_{\Delta_{max} \rightarrow 0} Q_\pi = T. \quad (1.21)$$

Para demostrar la afirmación anterior basta demostrar que:

$$\lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \mathbb{E}[Q_\pi] = T \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta_{max} \rightarrow 0} \text{var}(Q_t - T) = 0. \quad (1.22)$$

En primer lugar, veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \text{var}(Z(t_k) - Z(t_{k-1})) \\
&= (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) \\
&= t_n - t_0 = T
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Entonces, queda probado el primer resultado de la ecuación ( 1.22). Ahora, para continuar, considérese:

$$\begin{aligned}
\text{var}(Q_\pi - T) &= \mathbb{E}\left[(Q_\pi - T)^2\right] - \mathbb{E}^2[Q_\pi - T] \\
&= \mathbb{E}\left[(Q_\pi - T)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(Q_\pi - T)(Q_\pi - T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 - \Delta t_k \right\} \right. \\
&\quad \left. \left\{ [Z(t_l) - Z(t_{l-1})]^2 - \Delta t_l \right\} \right].
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Dado que los incrementos  $Z(t_k) - Z(t_{k-1})$  para  $k = 1, \dots, n$  son independientes, solamente los términos correspondientes a  $k = l$  sobreviven en la serie doble de arriba. De manera que:

$$\begin{aligned}
\text{var}(Q_\pi - T) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \left\{ [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 - \Delta t_k \right\}^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^4\right] \\
&\quad - 2\Delta t_k \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^2\right] + \Delta t_k^2.
\end{aligned}$$

Ahora, como  $Z(t_k) - Z(t_{k-1})$  se distribuye normal con media cero y varianza  $\Delta t_k$ , se conoce su momento de cuarto orden:

$$\mathbb{E} \left[ \{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^4 \right] = 3\Delta t_t^2. \quad (1.25)$$

Tomando el límite cuando  $\Delta_{max} \rightarrow 0$ , se observa que  $\text{var}(Q_\pi - T) \rightarrow 0$ , y esto prueba el resultado de la expresión (1.22). En virtud de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(Q_\pi - T) = 0,$$

se dice que  $T$  es el límite en media cuadrática de  $Q_\pi$ .

### Observaciones

1. En general, la variación cuadrática de un movimiento browniano con varianza  $\sigma^2$  sobre el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  está dada por:

$$Q_{[t_1, t_2]} = \sigma^2 (t_1 - t_2). \quad (1.26)$$

2. Si se define  $dZ(t) = Z(t) - Z(t - dt)$ , cuando  $dt \rightarrow 0$ , entonces se puede deducir por los cálculos de arriba que:

$$\mathbb{E} \left[ dZ(t)^2 \right] = dt \quad \text{var} \left( dZ(t)^2 \right) = 2dt^2. \quad (1.27)$$

Dado que  $dt^2$  es una cantidad de orden infinitesimal, se puede afirmar que la cantidad aleatoria  $dZ(t)^2$  converge en el sentido de media cuadrada a la cantidad determinista  $dt$ .

### Definición de integral estocástica

**Definición 4** Sea  $f(t)$  una función arbitraria de  $t$  y  $Z(t)$  un movimiento browniano estándar. La integral estocástica

$$\int_0^T f(t) dZ(t),$$

se define como el límite de las siguientes sumas parciales (definidas usualmente en el sentido de Riemann-Stieltjes):

$$\int_0^T f(t) dZ(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [Z(t_k) - Z(t_{k-1})], \quad (1.28)$$

donde los puntos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  forman una partición del intervalo  $[0, T]$  y  $\xi_k$  es algún punto entre  $t_{k-1}$  y  $t_k$ . El límite es tomado en el sentido de media cuadrada<sup>1</sup>.

Desafortunadamente, el límite depende de cómo sean elegidos los puntos intermedios. Por ejemplo, suponer que se toma  $f(t) = Z(t)$  y se elige  $\xi_k = \alpha t_k + (1 - \alpha)t_{k-1}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , para toda  $k$ . Se considera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^n Z(\xi_k) [Z(t_k) - Z(t_{k-1})] \right] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [Z(\xi_k) Z(t_k) - Z(\xi_k) Z(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n [\min(\xi_k, t_k) - \min(\xi_k, t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n (\xi_k - t_{k-1}) = \alpha \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \\ &= \alpha T, \end{aligned} \tag{1.29}$$

de aquí se puede concluir que el valor esperado de la integral estocástica depende de cómo son elegidos los puntos  $\xi_k$  en  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Para resolver este problema se introduce un nuevo concepto. La integral de Itô se define para una clase especial de funciones, *funciones no anticipativas*, se presenta la definición:

**Definición 5** Sea  $t_0 \leq 0$ . Se dice que una familia  $\mathcal{F}_t$ , para  $t \geq t_0$ , de  $\sigma$ -álgebras es no anticipativa con respecto a un movimiento browniano  $X(t)$  si tiene las siguientes tres propiedades:

1.  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $(t_0 \leq s \leq t)$ ,
2.  $\mathfrak{B}[t_0, t] \subset \mathcal{F}_t$  ( $t \geq t_0$ ),
3.  $\mathcal{F}_t$  es independiente de  $\mathfrak{B}_t^+$  ( $t \geq t_0$ ),

donde  $\mathfrak{B}[t_0, t]$  denota la mínima  $\sigma$ -álgebra que cumple que para todo  $s \in [t_0, t]$ ,  $X(s)$  es medible, y  $\mathfrak{B}_t^+ = \mathfrak{B}[0, \infty)$ .

La tercera condición indica que  $\mathcal{F}_t$  puede contener sólo eventos que son independientes del movimiento browniano completo  $X(t)$ , para tiempos mayores que  $t$ .

<sup>1</sup>Se dice que una sucesión  $X_n$  converge a  $X$  en el sentido de media cuadrada si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} (|X_n - X|^2) = 0$$

**Definición 6** Se dice que una función  $G(t)$  es no anticipativa con respecto a  $\mathcal{F}_t$  (una familia de  $\sigma$ -álgebras no anticipativa), si  $G(s)$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible para todo  $s \in [t_0, t]$ .

Una interpretación es que una función es no anticipativa con respecto a un movimiento browniano si el valor de la función al tiempo  $t$  es determinado por la historia de la trayectoria de  $X(t)$  hasta el tiempo  $t$ . En finanzas, la acción de un inversionista es no anticipada en el sentido de que decide sobre la inversión antes de que el precio de la acción se mueva.

Acorde con la definición de integral estocástica, y seleccionando como partición  $\xi_k = t_{k-1}$ , la definición de integral estocástica de Itô está dada por:

$$\int_0^T f(t) dZ(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) [Z(t_k) - Z(t_{k-1})], \quad (1.30)$$

donde  $f(t)$  es una función no anticipativa con respecto a  $Z(t)$ .

### 1.2.2. Lema de Itô

Una vez que se ha definido la integral estocástica, puede darse la definición formal de una importante clase de procesos estocásticos continuos, llamados procesos de Itô.

**Definición 7** Sea  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ , la filtración generada por el movimiento browniano estándar  $Z(t)$  a través de la observación de la trayectoria de  $Z(t)$ . Entonces el proceso  $X(t)$  definido por:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ(s),$$

donde  $\mu(t)$  y  $\sigma(t)$  son  $\mathcal{F}_t$ -adaptados y se cumple que  $\int_0^T |\mu(t)| dt < \infty$ ,  $\int_0^T \sigma^2(t) dt < \infty$  (casi seguramente), es llamado proceso de Itô.

La forma diferencial de la ecuación anterior está dada por:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t). \quad (1.31)$$

Usualmente se nombra a  $\mu(t)$  como *deriva* y a  $\sigma(t)$  como *volatilidad*. Notemos que la diferencial de un movimiento browniano no está definida más que como una expresión alterna a la ecuación integral.

**Lema de Ito**

**Lema 1 Lema de Itô.** Sea  $f(t, x)$  una función para la cual las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , y  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  están definidas y son continuas,  $Z(t)$  un movimiento browniano estándar, y  $X(t)$  un proceso de Itô con deriva  $\mu(t)$  y volatilidad  $\sigma(t)$ . Entonces  $Y(t) = f(t, X(t))$  es también un proceso de Itô con diferencial:

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dX^2,$$

donde las parciales están evaluadas en  $(t, X)$ .

Notemos que el término de segundo orden  $dX^2$  solamente influye mediante la relación  $dZ^2 = dt$ .

Expandiendo la ecuación anterior se obtiene:

$$dY = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dZ.$$

Otra forma de escribir la ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} f(t, X(t))|_a^b &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \int_a^b \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dZ \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dt + \int_a^b \mu \frac{\partial f}{\partial x} dt + \int_a^b \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt + \int_a^b \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dZ, \end{aligned}$$

para todos los intervalos  $[a, b]$ .

**Demostración.** Se considera el caso en el que  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes por intervalos, con una partición común  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  con  $h = \max_j \Delta t_j$ .

Para abreviar la notación se denotará  $\frac{\partial}{\partial t}$  con un punto sobre la  $f$  y  $\frac{\partial}{\partial x}$  con una coma, por ejemplo  $\dot{f}_j = \frac{\partial f}{\partial t}|_{(t_j, X_j)}$ , y  $[f]_a^b$  denota  $f(t, X(t))|_a^b$ . Entonces, el lado izquierdo de la expresión anterior de la fórmula de Itô se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} [f]_a^b &= \sum_{j=0}^{n-1} \Delta f_j = \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}, X_{j+1}) - f(t_j, X_j)] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_j + \Delta t_j, X_j + \Delta X_j) - f(t_j, X_j)] \end{aligned}$$

Mediante una expansión de  $f(t, x)$  en una serie de Taylor se obtiene con la expresión ( 1.32), asumiendo que  $f(t, x)$  es diferenciable y que  $R_j = \mathcal{O}(|\Delta t_j|^3 + |\Delta X_j|^3)$  es el término residual.

$$\begin{aligned}
[f]_a^b &= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{f}_j \Delta t_j + \sum_{j=0}^{n-1} f'_j \Delta X_j + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \ddot{f}_j \Delta t_j^2 \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \dot{f}'_j \Delta t_j X_j + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f''_j \Delta X_j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} R_j. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Usaremos que la deriva  $\mu$  y la volatilidad  $\sigma$  son funciones escalonadas, es decir, que son constantes en cada elemento de la partición, y entonces  $\Delta X_j = \mu_j \Delta t_j + \sigma_j \Delta Z_j$  exactamente. En lo siguiente se considerará cada uno de los términos que integran el lado derecho de la ecuación ( 1.32), se toma el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , lo que implica que cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \dot{f}_j \Delta t_j \rightarrow \int_a^b \dot{f} dt.$$

De esta manera se obtiene el primer término de la fórmula de Itô, dos términos más son obtenidos de la siguiente convergencia:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} f'_j \Delta X_j &= \sum_{j=0}^{n-1} f'_j \mu_j \Delta t_j + \sum_{j=0}^{n-1} f'_j \sigma_j \Delta Z_j \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f' \mu dt + \int_a^b f' \sigma dZ.
\end{aligned}$$

Siguiendo con el mismo procedimiento, el tercer término de la expresión ( 1.32), al tomar el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , converge a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \ddot{f}_j \Delta t_j^2 \right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} |\ddot{f}_j| \Delta t_j^2 \leq \frac{1}{2} h \sum_{j=0}^{n-1} |\ddot{f}_j| \Delta t_j \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} h \int_a^b |\ddot{f}_j| dt \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

El desarrollo anterior sugiere un importante resultado:  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_t \Delta_t = dt dt$ , entonces  $dt dt = 0$ . El siguiente término de la expresión ( 1.32) se descompone en:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta X_j &= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{f}'_j \Delta t_j (\mu_j \Delta t_j + \sigma_j \Delta Z_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \dot{f}'_j \Delta t_j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta Z_j. \end{aligned}$$

El primer término del resultado anterior se elimina, ya que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \dot{f}'_j \Delta t_j^2 \leq h \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \dot{f}'_j \Delta t_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \int_a^b \mu \dot{f}' dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

El tratamiento del segundo término de la suma es más delicado, ya que es estocástico, pero utilizando criterios de convergencia casi segura<sup>2</sup> se determina que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta Z_j \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta Z_j \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \dot{f}'_k \Delta t_k \Delta Z_k \right) \right] \\ &= E \left[ \sum_{j,k=0}^{n-1} \sigma_j \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta Z_j \sigma_k \dot{f}'_k \Delta t_k \Delta Z_k \right] \\ &= \sum_{j,k=0}^{n-1} E \left[ \sigma_j \dot{f}'_j \Delta Z_j \sigma_k \dot{f}'_k \Delta Z_k \right] \Delta t_j \Delta t_k, \end{aligned}$$

todos los términos en la suma desaparecen excepto en los que  $k = j$  porque, por ejemplo si  $k < j$ , entonces el factor  $\Delta Z_k$  es independiente de todos los otros factores que influyen en la esperanza, entonces se obtiene:

$$E \left[ \sigma_j \dot{f}'_j \Delta Z_j \sigma_k \dot{f}'_k \Delta Z_k \right] = E \left[ \sigma_j \dot{f}'_j \Delta Z_j \sigma_k \dot{f}'_k \right] E \left[ \Delta Z_k \right] = 0.$$

---

<sup>2</sup>El teorema aplicable es el de Convergencia Dominada, que puede consultarse en la referencia bibliográfica [8].

Conservamos sólo los términos en que  $k = j$ :

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j \dot{f}'_j \Delta t_j \Delta Z_j \right)^2 \right] &= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \sigma_j^2 \dot{f}'_j{}^2 \Delta Z_j^2 \right] \Delta t_j^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \sigma_j^2 \dot{f}'_j{}^2 \right] E \left[ \Delta Z_j^2 \right] \Delta t_j^2 \\
&\leq h^2 \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \sigma_j^2 \dot{f}'_j{}^2 \right] \Delta t_j^2 \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} h^2 \int_a^b E \left[ \sigma^2 \dot{f}'^2 \right] dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,
\end{aligned}$$

entonces existe convergencia casi segura a cero. Nuevamente se observa un resultado útil, se tiene que  $\Delta_t \Delta Z \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , de manera que en el límite se tiene que  $dt dZ = 0$ , y ocurre lo mismo para  $dZ dt$ .

Siguiendo con el procedimiento se concluye que el único término cuadrático de la expresión ( 1.32) que es significativa es:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f''_j \Delta X_j^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\mu_j \Delta t_j + \sigma_j \Delta Z_j)^2 f''_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \mu_j^2 f''_j \Delta t_j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \sigma_j f''_j \Delta t_j \Delta Z_j + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f''_j \Delta Z_j^2.
\end{aligned}$$

De los tres términos que conforman la ecuación anterior, los dos primeros desaparecen, esto se justifica con los argumentos usados anteriormente, queda solamente el tercer término, se busca mostrar que éste último término converge casi seguramente a la integral  $\int_a^b \frac{1}{2} \sigma^2 f''$ , para esto se compara la sumatoria con  $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f''_j$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \Delta Z_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \Delta t_j \right)^2 \right] = \\
&= E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j) \right)^2 \right] \\
&= E \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j) \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_k^2 f_k'' (\Delta Z_k^2 - \Delta t_k) \right) \right] \\
&= E \left[ \sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \frac{1}{2} \sigma_k^2 f_k'' (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j) (\Delta Z_k^2 - \Delta t_k) \right] \\
&= \sum_{j,k=0}^{n-1} E \left[ \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \frac{1}{2} \sigma_k^2 f_k'' (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j) (\Delta Z_k^2 - \Delta t_k) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j)^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 \right] E \left[ (\Delta Z_j^2 - \Delta t_j)^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 \right] E \left[ (\Delta Z_j^4 - 2\Delta Z_j^2 \Delta t_j + \Delta t_j^2)^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 \right] (3\Delta t_j^2 - 2\Delta t_j \Delta t_j + \Delta t_j^2) \\
&= 2 \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 \right] \Delta t_j^2 \\
&\leq 2h \sum_{j=0}^{n-1} E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \right)^2 \right] \Delta t_j \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2h \int_a^b E \left[ \left( \frac{1}{2} \sigma^2 f'' \right)^2 \right] dt \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

La conclusión es que casi seguramente:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \Delta Z_j^2 \longrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \sigma_j^2 f_j'' \Delta t_j \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{2} \sigma^2 f'' dt,$$

cuando  $h \rightarrow 0$ , obteniendo así el último término de la fórmula de Itô.

De las propiedades de movimiento browniano se tiene que  $dZdZ = dt$  y después del desarrollo anterior también se sabe que  $dt dZ(t) = dZ(t)dt = 0$  y  $dt dt = 0$ , lo que implica que, cuando  $h \rightarrow 0$ :

$$R_j = \mathcal{O} \left( |\Delta t_j|^3 + |\Delta X_j|^3 \right) \rightarrow 0,$$

esto debido a que cada término de  $R_j$  es de orden superior al cuadrático en  $\Delta t_j$  y  $\Delta X_j$ , de manera que queda justo la integral de la fórmula de Itô.  $\square$

Con esto queda demostrado el Lema de Itô.

### 1.2.3. Proceso de Itô y representación de la fórmula de Feynman-Kac

Considérese un proceso de Ito definido en su forma diferencial:

$$dY(t) = \mu(t) dt + \sigma(t) dZ(t), \quad (1.33)$$

o en su forma integral:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dZ(s). \quad (1.34)$$

Definamos:

$$M(t) = \int_0^t \sigma(s) dZ(s).$$

Notemos que:

$$M(T) = M(t) + \int_t^T \sigma(s) dZ(s), \quad t < T.$$

Supóngase que se toma la esperanza condicional de  $M(T)$  dada la historia de la trayectoria browniana a tiempo  $t$ , entonces se define:

$$\mathbb{E}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \mathbb{F}_t],$$

donde  $\mathbb{F}_t := \sigma(\mathbb{B}_s : s \leq t)^+$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por los conjuntos abiertos. Entonces se obtiene que:

$$\mathbb{E}_t [M(T)] = M(t), \quad (1.35)$$

ya que la integral estocástica de  $M(T)$  tiene esperanza condicional cero y dado que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [M(t)^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \sigma(s) dZ(s) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \sigma^2(s) dZ^2(s) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \sigma^2(s) dt \right] < \infty \end{aligned}$$

Así,  $M(t)$  es una martingala<sup>3</sup>.  $Y(t)$  no es una martingala si  $\mu(t)$  es diferente de cero.

Como un ejemplo adicional, considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \sigma dZ(t) \quad \text{con } S(0) = S_0. \quad (1.36)$$

Su integral puede expresarse como sigue:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \sigma S(u) Z(u) du.$$

La solución en su forma cerrada para la ecuación diferencial estocástica de arriba está dada por:

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma Z(t)}. \quad (1.37)$$

Ahora se verificará que  $S(t)$  es una martingala. Para  $u < t$ , se considera la esperanza de  $S(t)$  condicionada a la filtración  $\mathcal{F}_u$ :

<sup>3</sup>El proceso estocástico  $\{X(t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \infty\}$  es llamado martingala con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  y la medida de probabilidad  $P$  si

$$X_s = \mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) \quad P\text{-casi seguramente, } \forall 0 \leq s < t < \infty,$$

Y,

$$\mathbb{E}|X(s)|^2 < \infty, \quad \forall s \leq 0.$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma Z(t) \right) \middle| \mathcal{F}_u \right] \\
= & \mathbb{E} \left[ S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} u + \sigma Z(u) \right) \exp(\sigma(Z(t) - Z(u))) \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} (t - u) \right) \middle| \mathcal{F}_u \right] \\
= & S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} u + \sigma Z(u) \right) \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} (t - u) \right) \mathbb{E} [\exp(\sigma(Z(t) - Z(u))) \middle| \mathcal{F}_u].
\end{aligned}$$

Condicionado a  $\mathcal{F}_u$ , el incremento browniano  $Z(t) - Z(u)$  es normal con varianza  $t - u$ . Recordemos que una variable aleatoria  $X$  es normal con media  $m_X$  y varianza  $\sigma_X^2$  si y sólo si la función generadora de momentos de  $X$  está dada por:

$$\mathbb{E} [\exp(\alpha X)] = \exp \left( \alpha m_X + \frac{\alpha^2}{2} \sigma_X^2 \right), \quad (1.38)$$

para algún valor real de  $\alpha$ . Entonces se obtiene que:

$$\mathbb{E} [\exp(\sigma(Z(t) - Z(u))) \middle| \mathcal{F}_u] = \exp \left( \frac{\sigma^2}{2} (t - u) \right).$$

Y entonces concluimos que:

$$\mathbb{E} \left[ S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma Z(t) \right) \middle| \mathcal{F}_u \right] = S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} u + \sigma Z(u) \right), \quad u < t, \quad (1.39)$$

por lo que  $S(t)$  es una martingala.

Supongamos que se considera el caso más general de un proceso de Itô.  $X(s)$ , con dinámica gobernada por la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(s) = \mu(X(s), s) ds + \sigma(X(s), s) dZ(s), \quad t \leq s \leq T, \quad (1.40)$$

con condición inicial  $X(t) = x$ . Considérese una función  $F(X(t), t)$ , en virtud del lema de Itô, su forma diferencial está dada por:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \mu(X, t) \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\sigma^2(X, t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right] dt + \sigma \frac{\partial F}{\partial X} dZ. \quad (1.41)$$

Se define un generador infinitesimal<sup>4</sup>  $\mathbb{A}$  asociado al proceso de Itô  $X(t)$  como sigue:

$$\mathbb{A} = \mu(X, t) \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\sigma^2(X, t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}. \quad (1.42)$$

Supóngase que  $F$  satisface la ecuación diferencial parcial parabólica<sup>5</sup>:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbb{A}F = 0 \quad (1.43)$$

con condición final:  $F(X(T), T) = h(X(T))$ , entonces  $dF$  se ve como sigue:

$$dF = \sigma \frac{\partial F}{\partial X} dZ.$$

Suponiendo que  $\sigma \frac{\partial F}{\partial X}$  es no anticipativa respecto al movimiento browniano  $Z(t)$ , se puede expresar la ecuación diferencial estocástica de arriba en su forma integral de la siguiente manera:

$$F(X(s), s) = F(X(t), t) + \int_t^s \sigma(X(u), u) \frac{\partial F}{\partial X}(X(u), u) dZ(u). \quad (1.44)$$

La integral estocástica puede ser vista como la suma de incrementos gaussianos consecutivos no homogéneos con media cero, así que un incremento de la

---

<sup>4</sup>El generador infinitesimal de un proceso estocástico es un operador diferencial que engloba una gran cantidad de información sobre el proceso. Sea  $X$  un proceso de Itô,  $X : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad que satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dZ_t,$$

donde  $Z$  es un movimiento browniano  $m$ -dimensional y  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  son los parámetros de media y varianza respectivamente. Para todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , sea  $P^x$  la medida de probabilidad que denota la regla de  $X$  dado un dato inicial  $X_0 = x$ , y sea  $E^x$  que denota la esperanza con respecto a  $P^x$ . El *generador infinitesimal* de  $X$  es el operador  $\mathbb{A}$ , el cual está definido para actuar sobre las funciones apropiadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{A}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t}.$$

El conjunto de todas las funciones  $f$  para las que existe el límite se denota por  $D_{\mathbb{A}}(x)$ , mientras que  $D_{\mathbb{A}}$  denota el conjunto de todas las funciones para las que existe el límite para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>5</sup>Una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

es parabólica si satisface la condición

$$B^2 - 4AC = 0.$$

integral estocástica tiene esperanza condicional cero. Tomando la esperanza condicional y tomando  $s = T$  y  $F(X(T), T) = h(X(T))$ , se obtiene la siguiente representación de la fórmula de Feynman-Kac:

$$F(x, t) = \mathbb{E}_{x,t}[h(X(T))], \quad t < T, \quad (1.45)$$

donde  $F(x, t)$  satisface la ecuación diferencial parcial (1.38) y  $\mathbb{E}_{x,t}$  se refiere a la esperanza condicional tomada en  $X(t) = x$  y  $\mathcal{F}_t$ . El proceso  $X(s)$  se inicializa en el punto fijo  $x$  y en tiempo  $t$  y sigue el proceso de Itô definido en la expresión (1.33).

#### 1.2.4. Cambio de medida: Radon-Nikodym y teorema de Girsanov

El concepto de medida de probabilidad neutral de riesgo deriva de la hipótesis de que el valor actual de los activos financieros es igual a los pagos esperados en el futuro, descontados a una tasa libre de riesgo, y además considerando la ausencia de arbitraje. Este concepto será de utilidad en el desarrollo del siguiente tema.

Bajo la medida neutral de riesgo, el precio descontado del activo subyacente se puede ver como una martingala. La valuación efectiva de las reclamaciones bajo la medida neutral de riesgo a veces requiere la transformación de un proceso de precio subyacente con tendencia en una martingala, pero bajo una medida diferente. La transformación puede ser efectuada efectivamente usando el teorema de Girsanov. Antes de entrar en la discusión de tal teorema, se discutirá la derivada de Radon-Nikodym la cual nos da la transformación entre dos medidas de probabilidad equivalentes.

Considérese el movimiento browniano  $Z_P(t)$  bajo la medida  $P$ . Sumemos una tendencia  $\mu t$  a  $Z_P(t)$ , con  $\mu > 0$ , es decir:

$$Z_{\tilde{P}}(t) = Z_P(t) + \mu t. \quad (1.46)$$

Aquí,  $Z_{\tilde{P}}(t)$  es un movimiento browniano con tendencia bajo la medida  $P$ . Para cambiar de la medida  $P$  a otra medida como  $\tilde{P}$  se multiplica  $dP$  por un factor  $\frac{d\tilde{P}}{dP}$  para obtener  $d\tilde{P}$ . El factor  $\frac{d\tilde{P}}{dP}$  es llamado derivada de Radon-Nikodym (véase [5], en este caso está dado por:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left(-\mu Z_P(t) - \frac{\mu^2}{2}t\right). \quad (1.47)$$

Para un horizonte de tiempo fijo  $T$ , se sabe que  $Z_P(T)$  tiene media cero y varianza  $T$  bajo  $P$ , donde:

$$P\left(\xi - \frac{d\xi}{2} < Z_P(T) < \xi + \frac{d\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\xi^2}{2T}} d\xi. \quad (1.48)$$

Para mostrar la validez de la afirmación, es suficiente mostrar que  $Z_{\tilde{P}}(T)$  es normal con media cero y varianza  $T$  bajo la medida  $\tilde{P}$  revisando la correspondiente función generadora de momentos de  $Z_{\tilde{P}}(T)$ . Considérese:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{P}}[\exp(\alpha Z_{\tilde{P}}(T))] &= \mathbb{E}_P\left[\frac{d\tilde{P}}{dP} \exp(\alpha Z_P(T) + \alpha\mu T)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\exp((\alpha - \mu) Z_P(T)) \exp\left(\alpha\mu T - \frac{\mu^2}{2} T\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{(\alpha - \mu)^2}{2} T + \alpha\mu T - \frac{\mu^2}{2} T\right) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha^2}{2} T\right), \end{aligned} \quad (1.49)$$

lo cual es válido para cualquier valor real de  $\alpha$ . En virtud de la ecuación (1.38), se obtiene el resultado deseado.

El teorema de Girsanov provee el proceso de localización de la derivada de Radon-Nikodym para el caso general en que la tasa de deriva no es constante.

### Teorema de Girsanov

Para iniciar la discusión respecto al Teorema de Girsanov, es necesario introducir las siguientes definiciones.

**Definición 8** Sean dos medidas de probabilidad  $P$  y  $Q$  definidas en el mismo espacio.  $P$  y  $Q$  son equivalentes si tienen los mismos conjuntos nulos.

**Definición 9** Se dice que  $Q$  es absolutamente continua con respecto a  $P$ , si  $Q(A) = 0$  siempre que  $P(A) = 0$  y se denota como  $Q \ll P$ . Por otro lado  $P$  y  $Q$  son equivalentes si  $Q \ll P$  y  $P \ll Q$ .

**Teorema 1** Teorema de Girsanov. Sea  $Q \ll P$ , entonces existe una variable aleatoria  $\Lambda$ , tal que  $\Lambda \geq 0$ ,  $\mathbb{E}_P(\Lambda) = 1$ , y

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(\Lambda(A)) = \int_A dP,$$

para algún conjunto medible  $A$ .  $\Lambda$  es  $P$  casi seguramente única. De igual forma, si existe  $\Lambda$  con las propiedades anteriores y  $Q$  está definida como en la expresión (1.50), entonces es una medida de probabilidad y  $Q \ll P$ .

La variable aleatoria  $\Lambda$  en el teorema anterior es la *derivada de Radon-Nikodym* o la densidad de  $Q$  con respecto a  $P$ , que se ha mencionado antes  $\frac{dQ}{dP}$ . A partir de la ecuación (1.50), si  $Q \ll P$ , entonces las esperanzas bajo  $P$  y  $Q$  están relacionadas por

$$\mathbb{E}_Q(Z) = \mathbb{E}_P(\Lambda Z), \quad (1.50)$$

para alguna variable aleatoria  $Z$  integrable con respecto a  $Q$ .

**Demostración.**

Por demostrar:

$$\mathbb{E}_Q[Z] = \mathbb{E}_P[\Lambda Z], \quad \text{donde } \Lambda = \frac{dQ}{dP}.$$

Sea  $Z$  una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[Z] &= \int_{\omega \in \Omega} Z(\omega) dQ \\ &= \int_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \frac{dQ}{dP} dP \\ &= \int_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \frac{dQ}{dP} dP \\ &= \int_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \Lambda dP \\ &= \mathbb{E}_P[Z\Lambda]. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_Q[Z] = \mathbb{E}_P[\Lambda Z], \quad \text{donde } \Lambda = \frac{dQ}{dP}.$$

# Modelos de valuación de opciones

---

Un derivado puede ser definido como aquel instrumento financiero cuya función de valor depende del valor de otro, es decir, de un activo subyacente. Un ejemplo de derivado es una *opción vanilla*, hay de dos tipos, una *opción call* da al poseedor (posición larga) el derecho de comprar al emisor (posición corta) un activo subyacente a un tiempo determinado y a un precio determinado. Una *opción put*, da al poseedor (posición larga) el derecho de vender al emisor (posición corta) el activo subyacente en cierto tiempo y a un precio determinado. El precio en el contrato se conoce como *precio de ejercicio* y la fecha pactada es *fecha de expiración* o de *maduración*. Las *opciones americanas* pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de maduración. Las *opciones europeas* pueden ser ejercidas sólo en la fecha de maduración.

La revolución en la valuación y negociación de los productos derivados inició a principios de los años 70's. En 1973, fue presentado el artículo de Black-Scholes y Merton sobre la teoría de valuación de opciones. Desde entonces el mundo de la ingeniería financiera ha tenido un importante crecimiento. La formulación libre de riesgo de Black-Scholes y Merton de la teoría de la valuación de opciones es atractiva por el hecho de que la función de valuación que se obtiene del modelo es una fórmula en la que intervienen sólo parámetros directamente observables, a excepción de la volatilidad. El valor del derivado puede ser calculado como si el precio de mercado del activo subyacente estuviera libre de riesgo. Dada la capacidad del modelo para explicar los datos empíricos, tuvo gran aceptación.

En la primera sección, después de una breve introducción a las propiedades de las fórmulas de valor de las opciones, se discutirá cómo es aplicado el principio de cobertura libre de riesgo para obtener la ecuación diferencial que gobierna el valor de un derivado. En la segunda se abordará la teoría de valor justo de opciones, la cual da lugar al enfoque de valuación neutral al riesgo. En la tercera sección se mostrará la solución de la ecuación de Black-Scholes para el caso de opciones europeas de plan vanilla.

## 2.1. Propiedades de las funciones de valuación

### 2.1.1. Fronteras para valores de opciones

En esta sección se establecerán fronteras para valores de opciones con respecto al precio del activo subyacente. Los supuestos básicos son que los inversionistas prefieren una ganancia alta a una pequeña y que no hay oportunidades de arbitraje, lo que se entiende como la posibilidad de obtener ganancias sin riesgo.

En primer lugar se deducen las fronteras para valores de opciones europeas y americanas, sin considerar el caso en que el activo subyacente paga dividendos. Para este caso se obtendrán propiedades matemáticas para el precio de expiración  $K$ , el precio del activo  $S$  y el tiempo restante para la expiración  $\tau$ . Después se verá el efecto que produce en el modelo incluir la característica de pago de dividendos para el activo subyacente. Se verá que las políticas de ejercicio temprano para una opción americana de un activo sin dividendos se pueden deducir a partir del análisis de la frontera para valores de opciones.

En lo siguiente se denotará con  $C$  y  $P$  a las funciones de valor de una opción americana *call* y *put*, y por  $c$  y  $p$  a sus contrapartes europeas.

*Valores no negativos de una opción*

Todo valor de una opción es no negativo, es decir

$$C \geq 0, P \geq 0, c \geq 0, p \geq 0. \quad (2.1)$$

Estas relaciones se obtienen de la estructura de la utilidad de los contratos de opciones. Si el valor de una opción fuera negativo, esto significaría que el comprador de una opción recibe dinero al inicio de un contrato mientras se le garantiza una utilidad final no negativa. De forma que él podría obtener una ganancia sin riesgo.

*Valores intrínsecos*

Sea  $C(S, \tau; K)$  que denota el valor de una opción *call* americana con un activo subyacente con valor actual de  $S$ , tiempo para la expiración  $\tau$  y precio de ejercicio  $K$ . Cuando  $\tau = 0$ , las utilidades finales son

$$C(S, 0; K) = c(S, 0; K) = \max(S - K, 0), \quad (2.2)$$

$$P(S, 0; K) = p(S, 0; K) = \max(K - S, 0). \quad (2.3)$$

Las cantidades  $\max(S - K, 0)$  y  $\max(K - S, 0)$  son comúnmente llamadas *valores intrínsecos* de una *call* y una *put*, respectivamente. Se argumenta que,

dado que las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier tiempo antes del vencimiento, el valor que tomen al momento de su ejercicio deben ser al menos los valores intrínsecos, esto es

$$C(S, \tau; K) \geq \max(S - K, 0), \quad (2.4)$$

$$P(S, \tau; K) \geq \max(K - S, 0). \quad (2.5)$$

Dado que  $C \geq 0$ , es suficiente considerar el caso en que  $S > K$ , donde la *call* americana está *in-the-money*<sup>1</sup>. Si suponemos que  $C$  es menor que  $S - K$  cuando  $S > K$ , ocurriría que un inversionista puede encontrar la posibilidad de hacer arbitraje si pide prestados  $C + K$  unidades de dinero para obtener una *call* americana y ejercerla inmediatamente para recibir el activo que vale  $S$ . La utilidad sin riesgo sería  $S - K - C > 0$ . El mismo argumento se puede utilizar para el caso de la expresión ( 2.5).

*Las opciones americanas valen al menos lo que sus contrapartes europeas*

Una opción americana da al poseedor los mismos privilegios que su contraparte europea más el privilegio de ejercicio temprano. El privilegio adicional no puede tener valor negativo. De manera que, una opción americana debe valer al menos lo que su contraparte europea, esto es

$$C(S, \tau; K) \geq c(S, \tau; K), \quad (2.6)$$

$$P(S, \tau; K) \geq p(S, \tau; K). \quad (2.7)$$

*Valores de opciones con diferente fecha de expiración*

Considérense dos opciones americanas con diferentes tiempos de expiración  $\tau_1 < \tau_2$ , la que tiene el tiempo más largo de expiración debe ser más valiosa que la opción de vida más corta, ya que proporciona el privilegio extra de ejercer la opción en el intervalo de tiempo entre las dos fechas de expiración. Este derecho adicional debe tener un valor positivo; entonces se tiene que

$$C(S, \tau_2; K) > C(S, \tau_1; K), \quad \tau_2 > \tau_1, \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>Una opción *call* está *in-the money*, si el precio del activo subyacente es mayor que el valor de ejercicio de la opción, por el contrario para la opción *put*, si el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio.

$$P(S, \tau_2; K) > P(S, \tau_1; K), \quad \tau_2 > \tau_1. \quad (2.9)$$

*Valores de opciones con diferentes precios de ejercicio*

Considérense dos opciones *call*, europeas o americanas, con diferentes precios de ejercicio,  $K_1 < K_2$ . La que tiene el precio de ejercicio más alto tiene una utilidad esperada menor que el de la opción con más bajo precio de ejercicio. Esto se debe a que la que tiene el precio mayor tiene estrictamente menor probabilidad de ser ejercida con una utilidad positiva, y al ser ejercida, induce un menor flujo de efectivo. Entonces, la función de valor de una opción *call* es decreciente conforme al precio de ejercicio

$$c(S, \tau; K_2) < c(S, \tau; K_1), \quad K_1 < K_2, \quad (2.10)$$

$$C(S, \tau; K_2) < C(S, \tau; K_1), \quad K_1 < K_2. \quad (2.11)$$

Por el contrario, la función de valor de una *put* europea o americana es una función creciente conforme a su precio de ejercicio, esto es

$$p(S, \tau; K_2) > p(S, \tau; K_1), \quad K_1 < K_2, \quad (2.12)$$

$$P(S, \tau; K_2) > P(S, \tau; K_1), \quad K_1 < K_2. \quad (2.13)$$

*Valores de opciones a diferentes niveles de precio del activo*

Para una opción *call* (*put*), tanto europea como americana, cuando el precio del activo actual es alto, se tiene una posibilidad muy grande de que la opción sea ejercida, y que esto genere una utilidad (pérdida) muy grande. De forma que, la función de valor de la opción *call* (*put*) es creciente (decreciente) en función del precio del activo, esto es

$$c(S_2, \tau; K) > c(S_1, \tau; K), \quad S_2 > S_1, \quad (2.14)$$

$$C(S_2, \tau; K) > C(S_1, \tau; K), \quad S_2 > S_1 \quad (2.15)$$

y

$$p(S_2, \tau; K) < p(S_1, \tau; K), \quad S_2 > S_1, \quad (2.16)$$

$$P(S_2, \tau; K) < P(S_1, \tau; K), \quad S_2 > S_1. \quad (2.17)$$

*Cotas superiores sobre valores de opciones call y put*

Se dice que una opción *call* es *perpetua* si su fecha de expiración está infinitamente lejos. El activo en sí puede considerarse una opción americana *call* con precio de ejercicio cero más los derechos adicionales sobre la posesión del activo como la recepción de dividendos, se deduce que  $S \geq C(S, \infty; 0)$ . Al aplicar las condiciones dadas por las expresiones ( 2.6), ( 2.8) y ( 2.11), se puede establecer que

$$S \geq C(S, \infty; 0) \geq C(S, \tau; K) \geq c(S, \tau; K). \quad (2.18)$$

Por lo tanto, los valores de las opciones *call* americanas y europeas tienen como cota superior el precio del activo. Más aun, si tomamos  $S = 0$  en la condición ( 2.18) y aplicando la no negatividad de los valores de las opciones, se obtiene

$$0 = C(0, \tau; K) = c(0, \tau; K),$$

esto es, el valor de la *call* se vuelve cero cuando el valor del activo es cero.

El valor de una *put* americana es equivalente a su precio de ejercicio cuando el valor del activo es cero; en otro caso, está acotado superiormente por el precio de ejercicio. Junto con la condición ( 2.7), se tiene que

$$K \geq P(S, \tau; K) \geq p(S, \tau; K). \quad (2.19)$$

*Cotas inferiores de valores de opciones call sobre un activo que no paga dividendos*

Los valores de una *call* europea sobre un activo que no paga dividendos son siempre mayores o iguales que el precio del activo menos el valor presente del precio de ejercicio, lo que se puede representar como

$$c(S, \tau; K) + KB(\tau) \geq S,$$

donde  $B(\tau) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , es una función continua y positiva, representa el factor descuento asociado a la tasa de interés libre de riesgo en el tiempo  $\tau$ .

Junto con la propiedad de no negatividad del valor de una opción, la cota inferior para los valores de la *call* europea se encuentra con

$$c(S, \tau; K) \geq \max(S - KB(\tau), 0).$$

Combinando con la condición ( 2.18), las cotas superior e inferior de los valores de una *call* europea sobre un activo que no paga dividendos están dadas por

$$S \geq c(S, \tau; K) \geq \max(S - KB(\tau), 0). \quad (2.20)$$

De hecho, también por la condición ( 2.18), las cotas superior e inferior también son válidas para las opciones americanas *call* sobre activos que no pagan dividendos. Más adelante se revisará cómo se afectan los resultados anteriores cuando la opción está sobre un activo que paga dividendos.

#### *Políticas de ejercicio temprano para opciones americanas*

En primer lugar, se considera una opción americana *call* sobre un activo que no paga dividendos. Una *call* americana se ejerce sólo cuando está *in-the-money*, es decir, cuando  $S > K$ . Se sabe que en cualquier momento en que se ejerce una *call* americana, la utilidad de ejercicio se convierte en  $S - K$  y siempre se busca que este valor sea positivo. Sin embargo, el valor de ejercicio es menor que  $\max(S - KB(\tau), 0)$ , ya que la tasa de interés debe ser mayor a la libre de riesgo, la cota inferior de la *call* cuando esta continua viva. El ejercicio de la opción antes de la fecha de expiración provoca una declinación en el valor de la *call* americana, de forma que para beneficio del poseedor de la opción, está no se ejercerá antes de la fecha de expiración. Ahora, ya que el privilegio de ejercicio temprano es rechazado, los valores de las opciones *call* americana y europea son iguales.

Cuando el activo paga dividendos, el ejercicio temprano de una *call* americana antes de la fecha de vencimiento podría ser óptimo cuando el valor del activo es muy alto y el dividendo es considerable. Bajo estas circunstancias, se vuelve más atractivo para el inversionista adquirir el activo a través del ejercicio temprano en lugar de conservar la opción. Cuando la *call* americana está muy *in-the-money*,  $S \gg K$ , la oportunidad de que el ejercicio temprano no sea favorable (pérdida de cobertura contra movimiento descendente del precio del activo) es muy baja. Por otro lado, la adquisición temprana del activo subyacente permite recibir el pago de dividendo del activo. Para *put* americanas, se puede mostrar que siempre es óptimo el ejercicio antes de la expiración cuando el valor del activo es suficientemente bajo.

#### *Propiedades de convexidad de la función de valor de una opción*

Los valores de una *call* son funciones convexas sobre el precio de ejercicio. Se escribe  $K_2 = \lambda K_3 + (1 - \lambda) K_1$  donde  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $K_1 \leq K_2 \leq K_3$ . Matemáticamente, la propiedad de convexidad se expresa mediante las siguientes desigualdades

$$c(S, \tau; K_2) \leq \lambda c(S, \tau; K_3) + (1 - \lambda) c(S, \tau; K_1), \quad (2.21)$$

$$C(S, \tau; K_2) \leq \lambda C(S, \tau; K_3) + (1 - \lambda) C(S, \tau; K_1). \quad (2.22)$$

Para demostrar que la desigualdad ( 2.21) funciona para una *call* europea, se consideran las utilidades de los siguientes portafolios al momento de expiración. El portafolio *G* contiene  $\lambda$  unidades del *call* con precio de ejercicio  $K_3$  y  $(1 - \lambda)$  unidades de la *call* con precio de ejercicio  $K_1$ , y el portafolio *D* contiene una *call* con precio de ejercicio  $K_2$ . En la siguiente tabla, se listan las utilidades de los dos portafolios a la expiración para los posibles valores de  $S_T$ .

Valor a la expiración	$S_T \leq K_1$	$K_1 \leq S_T \leq K_2$
Portafolio G	0	$(1 - \lambda)(S_T - K_1)$
Portafolio D	0	0
Comparación	$V_G = V_D$	$V_G \geq V_D$
Valor a la expiración	$K_2 \leq S_T \leq K_3$	$K_3 \leq S_T$
Portafolio G	$(1 - \lambda)(S_T - K_1)$	$\lambda(S_T - K_3) + (1 - \lambda)(S_T - K_1)$
Portafolio D	$S_T - K_2$	$S_T - K_2$
Comparación	$V_G \geq V_D$	$V_G = V_D$

Dado que  $V_G \geq V_D$  para todos los posibles valores de  $S_T$ , el portafolio *G* es dominante sobre el portafolio *D*; entonces se cumple la desigualdad ( 2.21). En el argumento anterior, no está incluido el factor  $\tau$ , entonces el resultado aplica cuando las *call* en los dos portafolios permiten el ejercicio prematuro. La propiedad de convexidad también aplica para *call* americanas. Intercambiando las opciones *call* en los dos portafolios anteriores por sus correspondientes opciones *put*, se puede mostrar mediante un argumento similar que las funciones de valor de opciones americanas y europeas *put* son funciones convexas sobre el precio de ejercicio.

### 2.1.2. Efectos del pago de dividendos

Ahora se examinarán los efectos del pago de dividendos sobre las cotas para los valores de las opciones. En la siguiente discusión, se asumirá que el tamaño y la fecha de los dividendos es conocida. Un resultado importante es que el ejercicio temprano de una opción *call* americana puede ser el óptimo si el dividendo es pagado durante el tiempo de vida de la opción.

Primero, se considerará el efecto de los dividendos sobre el precio del activo. Cuando un activo paga cierto monto de dividendo, el argumento de no arbitraje dicta que se espera que el precio del activo caiga por el mismo monto (asumiendo que no existen otros factores afectando el proceso, como impuestos o costos de transacción). Suponiendo que el precio del activo cae por un monto menor que el del dividendo, un inversionista puede obtener una utilidad sin riesgo si solicita un préstamo para comprar el activo antes del día del dividendo, después vender el activo ya que se ha cobrado el dividendo. La ganancia neta del inversionista es la diferencia entre el monto del dividendo y la pérdida del valor del activo después del cobro del dividendo. Si el precio del activo cae por un monto superior al del

dividendo, entonces funcionaría la venta en corto del activo antes del dividendo y la compra después de este, y es posible el arbitraje.

Sean  $D_1, D_2, \dots, D_n$  los montos de dividendo pagados a  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  periodos de tiempo. Sea  $D$  el valor presente de todos los montos de dividendos discretos pagados entre hoy y la fecha de expiración. Asumiendo tasa de interés constante, se tiene entonces que

$$D = D_1e^{-r\tau_1} + D_2e^{-r\tau_2} + \dots + D_ne^{-r\tau_n},$$

donde  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo<sup>1</sup> y  $e^{-r\tau_1}, e^{-r\tau_2}, \dots, e^{-r\tau_n}$  son los factores de descuento respectivos. Se examinará el impacto de los dividendos sobre la cota inferior en el valor de una *call* europea y la característica de ejercicio temprano de una opción americana *call*, con dependencia del grupo de dividendos  $D$ . Similar a los dos portafolios mostrados en la tabla 1, se modifica el portafolio  $B$  a que contenga una unidad del activo subyacente y un préstamo de  $D$  dólares. A la expiración, el valor del portafolio  $B$  siempre será  $S_T$  ya que el préstamo  $D$  será pagado durante la vida de la opción usando los dividendos recibidos. Se observa nuevamente que  $V_A \geq V_B$  a la expiración, entonces el valor presente del portafolio  $A$  tiene que ser al menos tanto como el del portafolio  $B$ . Junto con la propiedad de no-negatividad del valor de una opción, se obtiene

$$c(S, \tau, K, D) \geq \max(S - KB(\tau) - D, 0). \quad (2.23)$$

Esto nos da la nueva cota inferior para el valor de una opción europea *call* sobre un activo que paga dividendos. Ya que el valor de la *call* se hace menor cuando se realizan los dividendos, es posible que el valor de la *call* caiga por debajo del valor intrínseco  $S - K$  cuando el conjunto de dividendos  $D$  es lo suficientemente grande. De acuerdo con esto, la condición sobre  $D$  tal que  $c(S, \tau, K, D)$  pueda caer por debajo del valor intrínseco  $S - K$  está dada por

$$S - K > S - KB(\tau) - D \quad \text{ó} \quad D > K[1 - B(\tau)]. \quad (2.24)$$

Si  $D$  no satisface la condición anterior, nunca es óptimo ejercer la opción prematuramente. Sumado a la condición necesaria ( 2.24) sobre el tamaño de  $D$ , la *call* americana tiene que estar suficientemente *in-the-money* para que la posibilidad de ejercer prematuramente la opción en un momento no favorable sea baja. Dado que habrá una declinación esperada del derecho de ejercicio temprano después del pago del dividendo discreto, la estrategia óptima es ejercer el derecho antes del pago del dividendo para entonces obtener el pago del dividendo del activo.

<sup>1</sup>Una tasa libre de riesgo es aquella que un inversionista espera obtener al hacer una inversión completamente libre de riesgo

## 2.2. Formulación Black-Scholes-Merton

Black y Scholes revolucionaron la teoría de la valuación de opciones mostrando cómo cubrir continuamente la exposición de una posición corta de una opción. Considérese al emisor de una opción *call* europea sobre un activo subyacente. Ésto está expuesto a una pérdida sin límite si el precio de la acción se eleva muy por encima del precio de ejercicio. Para proteger la posición corta del emisor en la opción *call*, se puede considerar la compra de una cantidad determinada del activo subyacente, así la pérdida de la posición corta de la acción se compensa con la posición larga en el activo. De esta manera, el emisor está adoptando una estrategia de cobertura. Una posición de cobertura combina la opción con su activo subyacente con el fin de lograr compensar una posible pérdida con el activo. Los profesionales suelen monitorear el movimiento del precio del subyacente para así ajustar la proporción del activo subyacente y la opción en su portafolio, esto se entiende como *cobertura dinámica*. Black y Scholes demostraron que los inversionistas pueden crear un portafolio libre de riesgo. En un mercado eficiente, sin oportunidad de arbitraje libre de riesgo, un portafolio libre de riesgo debe obtener una tasa de rendimiento esperada igual a la tasa libre de riesgo.

### 2.2.1. Principio de cobertura

En el artículo que revela el celebrado modelo, Black y Scholes (ver [1]) publicaron los siguientes supuestos sobre el mercado financiero

1. La negociación ocurre continuamente en el tiempo.
2. La tasa de interés libre de riesgo  $r$  es conocida y constante en el tiempo.
3. El activo no paga dividendos.
4. No hay costos de transacción en compra o venta de activos u opciones, y no hay impuestos.
5. No hay penalización por ventas en corto y es posible hacer uso del total de las ganancias.
6. No hay oportunidades de arbitraje libre de riesgo.

Además de los puntos anteriores, también se supone que el precio del activo se comporta siguiendo un modelo de movimiento browniano geométrico, es decir

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \quad (2.25)$$

donde  $S_t$  denota el precio del activo al tiempo  $t$ , para  $t \geq 0$ ,  $\mu$  representa la tasa esperada de rendimiento,  $\sigma$  es la volatilidad y  $Z_t$  es un movimiento browniano

estándar. Tanto  $\mu$  como  $\sigma$  se asumen constantes. Considérese un portafolio que incluye la compra en corto de una unidad de una opción *call* europea y la posición larga de  $\Delta_t$  unidades del activo subyacente. El valor del portafolio  $\Pi(S_t, t)$  al tiempo  $t$  está dado por

$$\Pi(S_t, t) = -c + \Delta_t S_t,$$

donde  $c = c(S_t, t)$  denota el valor de la opción a tiempo  $t$ . Es preciso notar que  $\Delta_t$  cambia con el tiempo, esto refleja la naturaleza de cobertura dinámica del modelo. Debido a que  $c$  es una función estocástica de  $S_t$ , se le puede aplicar el lema de Itô para obtener su diferencial, con el resultado siguiente

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} dt.$$

Entonces se tiene que la evolución del valor del portafolio en el tiempo está dada por

$$\begin{aligned} d\Pi(S_t, t) &= -dc + \Delta_t dS_t \\ &= -\left(\frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} dt\right) + \Delta_t dS_t \\ &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) dS_t \\ &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) (\mu S_t dt + \sigma S_t dZ) \\ &= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \mu S_t\right] dt \\ &\quad + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \sigma S_t dZ_t. \end{aligned}$$

De manera que la ganancia financiera acumulada sobre el portafolio al tiempo  $t$  está dada por

$$\begin{aligned} G(\Pi(S_t, t)) &= \int_0^t -dc + \int_0^t \Delta_u dS_u \\ &= \int_0^t \left[-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u}\right) \mu S_u\right] du \\ &\quad + \int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u}\right) \sigma S_u dZ_u. \end{aligned} \tag{2.26}$$

El componente estocástico de la ganancia del portafolio está dado por el término  $\int_0^t (\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u}) \sigma S_u dZ_u$ , entonces, se adopta la estrategia de cobertura dinámica y se toma  $\Delta_u = \frac{\partial c}{\partial S_u}$  para todo tiempo  $u < t$ , lo que provoca que la ganancia sea determinista en cualquier momento. En virtud de no arbitraje, la ganancia financiera del portafolio debería ser la misma que la ganancia de una inversión en un activo libre de riesgo con una posición dinámica la cual tuviera valor de  $-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u}$ . La ganancia determinista para la posición dinámica de un activo libre de riesgo está dada por

$$M_t = \int_0^t r \left( -c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) du. \quad (2.27)$$

De la igualación de las ganancias  $M_t$  y  $G(\Pi(S_t, t))$  se obtiene lo siguiente

$$-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} = r \left( -c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \quad 0 < u < t.$$

Lo que es satisfecho por cualquier valor del activo  $S_t$  si  $c(S_t, t)$  cumple con la ecuación

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \quad (2.28)$$

La ecuación parcial anterior es llamada *ecuación de Black-Scholes*. Notar que el parámetro  $\mu$  el cual representa la tasa esperada de rendimiento del activo, no aparece en la ecuación.

### 2.2.2. Estrategia de replicación dinámica

Como una alternativa al enfoque de cobertura sin riesgo, Merton obtiene la ecuación de valuación de opciones a través de la construcción de un portafolio auto-financiable<sup>2</sup> y de cobertura dinámica que contiene el activo en riesgo, la opción y el activo libre de riesgo.

Sean  $Q_S(t)$  y  $Q_V(t)$  el número de unidades del activo y de la opción en el portafolio, respectivamente, y  $M_S(t)$  y  $M_V(t)$  el valor en pesos de  $Q_S(t)$  unidades del activo y  $Q_V(t)$  unidades de la opción, respectivamente. El portafolio auto-financiable se crea de tal manera que tiene costo de inversión inicial igual a cero y no hay fondos adicionales que se agreguen o retiren después. Las unidades de uno de los componentes del portafolio que sean adquiridas se financiarán con la venta del otro componente del mismo portafolio. Se dice que la composición

<sup>2</sup>Un portafolio es auto-financiable si a partir de su creación no hay infusiones ni retiros de capital o activos, de modo que la compra de un activo nuevo es financiada por la venta de un viejo.

del portafolio es dinámica ya que se le permite cambiar con el tiempo. Se denotará como  $S_t$  al precio del activo,  $V_t$  al valor de la opción y  $Z_t$  al movimiento browniano estándar a tiempo  $t$ . El valor del portafolio a tiempo  $t$  puede ser expresado como

$$\begin{aligned}\Pi(S_t, t) &= M_S(t) + M_V(t) + M(t) \\ &= Q_S(t)S + Q_V(t)V + M(t),\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde  $M(t)$  es el valor en pesos del activo libre de riesgo invertido en una cuenta sin riesgo del mercado monetario. Supongamos que el movimiento del precio del activo está gobernado por la ecuación diferencial (2.25), de forma que aplicando el lema de Itô se obtiene la diferencial de la función de valor de la opción  $V$ , que resulta ser

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ.\end{aligned}$$

Si suponemos que la dinámica estocástica de  $V$  está dada por

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_V dZ,\tag{2.30}$$

entonces  $\mu_V$  y  $\sigma_V$  están dadas por

$$\mu_V = \frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}{V},\tag{2.31}$$

$$\sigma_V = \frac{\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}}{V}.\tag{2.32}$$

Dado que la función  $\Pi(S_t, t)$  denota el valor del portafolio en el tiempo, se puede interpretar a su derivada  $d\Pi(S_t, t)$ , como el rendimiento instantáneo de dinero del portafolio, y esto está en función de los cambios diferenciables de los valores de la opción y del activo y a los intereses devengados, así como a los cambios en el monto del activo y la opción. De manera que la diferencial de  $\Pi(t)$  se calcula como sigue

$$\begin{aligned}d\Pi(t) &= [Q_S(t)dS + Q_V(t)dV + rM(t)dt] \\ &\quad + [SdQ_S(t) + VdQ_V(t) + dM(t)],\end{aligned}$$

donde  $rM(t) dt$  da el monto de intereses devengados en la cuenta en  $dt$  y  $dM(t)$  representa el cambio en el portafolio generado por la ganancia o pérdida de dinero que se obtuvo de la compra o venta de una proporción del activo o de la opción. Debido a que el portafolio es auto-financiable la suma de los últimos tres términos en la ecuación de arriba es igual a cero. El rendimiento instantáneo del portafolio puede ser expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= [Q_S(t) dS + Q_V(t) dV + rM(t) dt] \\ &\quad + M_S(t) \frac{dS}{S} + M_V(t) \frac{dV}{V} + rM(t) dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ahora, transformando la ecuación (2.33) mediante el uso de las formas diferenciales de  $\frac{dS}{S}$  y  $\frac{dV}{V}$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= [Q_S(t) dS + Q_V(t) dV + rM(t) dt] \\ &\quad + M_S(t) \frac{dS}{S} + M_V(t) \frac{dV}{V} + rM(t) dt \\ &= (\mu dt + \sigma dZ) M_S(t) + (\mu_V dt + \sigma_V dZ) M_V(t) - r dt (M_S(t) + M_V(t)) \\ &= (\mu - r) M_S(t) dt + (\mu_V - r) M_V(t) dt + \sigma M_S(t) dZ + \sigma_V M_V(t) dZ, \end{aligned} \quad (2.34)$$

lo que resulta

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= [(\mu - r) M_S(t) + (\mu_V - r) M_V(t)] dt \\ &\quad + [\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t)] dZ. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La forma de eliminar la parte estocástica del rendimiento instantáneo del portafolio construido arriba es elegir correctamente las cantidades del activo y la opción, de acuerdo con la siguiente ecuación

$$\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t) = \sigma S Q_S(t) + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} Q_V(t) = 0,$$

esto es, el número de unidades del activo y de la opción en un portafolio auto-financiable tiene que seguir la siguiente proporción

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} = -\frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.36)$$

para todos los tiempos. El monto de arriba depende del tiempo, entonces es necesario un reajuste continuo del portafolio. Ahora se tiene una cartera dinámica

de replicación que está exenta de riesgos y requiere inversión inicial nula, por lo que el rendimiento no estocástico del portafolio debe ser cero. La ecuación ( 2.35) se convierte en

$$0 = [(\mu - r) M_S(t) + (\mu_V - r) M_V] dt.$$

Sustituyendo la relación ( 2.36) en la ecuación de arriba se obtiene

$$(\mu - r) S \frac{\partial V}{\partial S} = (\mu_V - r) V. \quad (2.37)$$

Finalmente, sustituyendo  $\mu_V$  de la expresión ( 2.31) en la ecuación de arriba, el resultado es la misma ecuación de Black-Scholes para  $V$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Supongamos que se toma  $Q_V(t) = -1$  en el portafolio de arriba, esto es, el portafolio siempre está corto en una unidad de la opción. Por la ecuación ( 2.36), el número de unidades del activo en riesgo siempre se mantiene a nivel de  $\frac{\partial V}{\partial S}$  unidades, lo cual está cambiando continuamente en el tiempo.

Para mantener el portafolio auto-financiable cubierto, y conservando constantemente una unidad de la opción, se necesita tener tanto el activo subyacente como la cuenta en el mercado de dinero en el portafolio. El flujo de dinero neto resultante en la compra/venta del activo en riesgo en el proceso dinámico de mantener  $\frac{\partial V}{\partial S}$  unidades del activo en riesgo es desviado a la cuenta del mercado monetario.

### Replicando el portafolio

$$0 = \Pi(t) = -V + \Delta S + M(t),$$

el valor de la opción se encuentra con

$$V = \Delta S + M(t), \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (2.38)$$

La ecuación de arriba implica que la posición de la opción puede ser replicada por una estrategia de auto-financiamiento dinámica usando el activo en riesgo y el activo libre de riesgo con radio de protección  $\Delta$  igual a  $\frac{\partial V}{\partial S}$ .

### 2.2.3. Argumento de riesgo neutral

Presentaremos una perspectiva alternativa mediante la cual el argumento de *neutralidad al riesgo* pueda ser explicado en relación con el concepto de *precio de mercado de riesgo*, que será definido más adelante.

Supongamos que se escribe el proceso estocástico seguido por el valor de la opción  $V(S, t)$  formalmente como en la expresión ( 2.30), entonces  $\mu_V$  y  $\sigma_V$  están dadas por las ecuaciones ( 2.31) y ( 2.32). Al reordenar los términos de la ecuación ( 2.31), se obtiene la siguiente forma de la ecuación que gobierna a  $V(S, t)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu_V V = 0. \quad (2.39)$$

A diferencia de la ecuación de Black-Scholes, la ecuación de arriba contiene los parámetros  $\mu$  y  $\mu_V$ . Para determinar para el valor de la opción, es necesario determinar  $\mu$  y  $\mu_V$  o encontrar medios indirectos para hallarlo. La clave radica en la formación de un portafolio libre de riesgo. Mediante la formación de la cartera cubierta libre de riesgo de forma dinámica, se observa que  $\mu$  y  $\mu_V$  se rigen por la ecuación ( 2.37). Ahora, de la combinación de las ecuaciones ( 2.32) y ( 2.37) se obtiene

$$\begin{aligned} (\mu - r) S \frac{\partial V}{\partial S} &= (\mu_V - r) V \\ \sigma_V &= \sigma \frac{S \frac{\partial V}{\partial S}}{V} \\ (\mu - r) \frac{S \frac{\partial V}{\partial S}}{V} \frac{1}{\sigma} &= \mu_V - r \\ (\mu - r) \sigma_V \frac{1}{\sigma} &= \mu_V - r \\ \frac{\mu_V - r}{\sigma_V} &= \frac{\mu - r}{\sigma}. \end{aligned}$$

La ecuación de arriba tiene la siguiente interpretación financiera. Las cantidades  $\mu_V - r$  y  $\mu - r$  representan la tasa extra de rendimiento sobre la tasa de interés libre de riesgo  $r$  en la opción y en el activo, respectivamente. Cuando cada una es dividida por su respectiva volatilidad (medida de riesgo asociada con la seguridad), la correspondiente proporción es llamada *precio de mercado de riesgo*. El precio de mercado de riesgo es interpretado como una tasa extra de rendimiento sobre la tasa de interés libre de riesgo por unidad de riesgo. La ecuación ( 2.40) revela que los dos valores susceptibles de cobertura, la opción y su activo subyacente, pueden tener el mismo precio de mercado de riesgo. Sustituyendo las expresiones ( 2.31) y ( 2.32) en ( 2.40) y reordenando los términos se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mu - r) \frac{\partial V}{\partial S} S &= \left( \frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}{V} - r \right) V \\
(\mu - r) \frac{\partial V}{\partial S} S &= \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \\
0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV.
\end{aligned}$$

Esta es precisamente la ecuación de Black-Scholes, la cual es idéntica a la obtenida mediante el establecimiento de  $\mu_V = \mu = r$  en la ecuación ( 2.39). Dicha relación implica que es cero el precio de mercado de riesgo de mantener la opción o el activo subyacente. Aquí se ha demostrado que el argumento de neutralidad al riesgo se mantiene cuando el riesgo de la opción puede ser cubierto por el del activo subyacente y la cobertura del portafolio tiene la tasa libre de riesgo como su tasa esperada de rendimiento. Como consecuencia, los precios de mercado de riesgo de la opción y del activo subyacente no están incluidos en la ecuación que gobierna el portafolio. La ecuación de Black-Scholes demuestra que la valuación de una opción puede ser realizada en el mundo del riesgo neutral mediante la toma artificial de la tasa esperada de rendimiento del activo subyacente y de la opción como la tasa libre de riesgo.

### 2.3. Teoría del precio justo

En esta sección se presentan conceptos que permitirán desarrollar la teoría de fijación de precios justos. Para ello es necesario definir el contexto en el que se desarrolla. Un concepto importante es el de mercado completo, lo que se entiende como uno en el que las operaciones se realizan sin costo de transacción, todos los participantes cumplen sus obligaciones oportunamente, todas las fuentes de riesgo financiero tienen un precio único y todos los estados futuros posibles pueden ser replicados por una cartera dinámica re-equilibrando los activos negociados. Bajo el contexto de completez en el mercado, el precio de arbitraje de un pago futuro está dado por la esperanza del pay-off final descontado bajo la medida de martingala equivalente. En la primera sección se discutirá la noción de ausencia de arbitraje y medida de martingala equivalente, y se presenta la fórmula de valuación de riesgo neutral para un posible pago futuro en un modelo de valores a tiempo continuo.

Otro concepto que será de utilidad en el desarrollo siguiente es el de numerario, el cual define las unidades en las que el precio del activo es medido. Por ejemplo, tomar  $S$  como numerario o la cuenta en el mercado de dinero. Un mercado financiero a tiempo continuo consta de activos negociados y estrategias de negocio que se dicen libres de arbitraje y completas si para cada elección de

numerario existe una única medida equivalente de martingala, tal que todos los precios de activos relativos al numerario son martingalas bajo la medida.

Además, en la segunda sección, se revisará el modelo de Back-Scholes. Se mostrará que la teoría del precio justo da el valor de una opción europea como la esperanza de la utilidad final descontada bajo la medida de martingala equivalente. Probando que la función de valor de la opción satisface la ecuación de Black-Scholes, se verá que la fórmula de valuación de riesgo neutral es consistente con la representación de la fórmula de Feynman-Kac.

### 2.3.1. Medida de martingala equivalente y valuación libre de riesgo

En el marco de tiempo continuo, a los inversionistas se les permite el comercio de forma continua en el mercado financiero hasta  $T$  tiempo finito. La incertidumbre en el mercado financiero es modelada mediante un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$ ,  $P$  es la medida de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $\mathcal{F}_t$  es la filtración y  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Supongamos que hay  $M + 1$  derivados para los cuales el proceso de valuación es modelado por un proceso estocástico adaptado  $S_m(t)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . Definimos  $h_m(t)$  como el número de unidades de los  $m$  derivados en el portafolio. La estrategia de negocio  $\mathbf{h}(t)$  es el proceso estocástico vectorial  $(h_0(t) \ h_1(t) \ h_M(t))^T$ , donde  $\mathbf{h}(t)$  es un  $(M + 1)$ -dimensional proceso predecible, ya que la composición de la cartera está determinado por el inversionista sobre la base de la información disponible antes de tiempo  $t$ .

El proceso de valor asociado con la estrategia de negocio  $\mathbf{h}(t)$  está definido por

$$V(t) = \sum_{m=0}^M h_m(t) S_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.40)$$

y su proceso de ganancia  $G(t)$  está dado por

$$G(t) = \sum_{m=0}^M \int_0^t h_m(u) dS_m(u), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (2.41)$$

$\mathbf{h}(t)$  es auto-financiable sí y sólo sí

$$V(t) = V(0) + G(t). \quad (2.42)$$

La ecuación anterior indica que el cambio en el valor de la cartera asociada a una estrategia de autofinanciamiento sólo proviene de los cambios en los precios de los activos, ya que no hay cobros adicionales o las salidas se producen después

de la fecha inicial  $t = 0$ . Se usará  $S_0(t)$  para denotar el proceso de una cuenta en el mercado de dinero que crece a tasa de interés libre de riesgo  $r(t)$ , esto es

$$dS_0(t) = r(t) S_0(t) dt. \quad (2.43)$$

El proceso de precio descontado de un derivado  $\tilde{S}_m(t)$  se define como

$$\tilde{S}_m(t) = \frac{S_m(t)}{S_0(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.44)$$

El proceso de valor descontado  $\tilde{V}(t)$  es obtenido dividiendo  $V(t)$  por  $S_0(t)$ . Usando  $S_0(t)$  como numerario y en virtud de la ecuación (2.42), se deduce que el proceso de ganancia descontado está dado por

$$\tilde{G}(t) = \tilde{V}(t) - \tilde{V}(0). \quad (2.45)$$

Se dice que una estrategia de negocio auto-financiable es  $Q$ -admisibles si el proceso descontado de ganancia  $\tilde{G}(t)$  es una  $Q$ -martingala. El correspondiente valor descontado del portafolio  $\tilde{V}(t)$  es una  $Q$ -martingala.

### Principio de no arbitraje y medida de martingala equivalente

Una estrategia de negocio auto-financiable  $\mathbf{h}$  representa una oportunidad de arbitraje sí y sólo si:

1.  $\tilde{G}(t) \geq 0$ , y
2.  $\mathbb{E}_P [\tilde{G}(T)] > 0$ ,

donde  $P$  es la actual medida de probabilidad de los estados de ocurrencia asociada con el modelo de derivados. Se dice que una medida de probabilidad  $Q$  en un espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una medida de martingala equivalente si satisface

1.  $Q$  es equivalente a  $P$ , esto es,  $Q$  y  $P$  tienen el mismo soporte.
2. Los procesos de valor descontado de los derivados  $\tilde{S}_m(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , son martingalas bajo  $Q$ , eso es

$$E_Q [\tilde{S}_m(u) | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_m(t), \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq u \leq T. \quad (2.46)$$

La ausencia de arbitraje implica la existencia de una medida de martingala equivalente, para mostrar esta afirmación suponemos que existe una medida de martingala equivalente y  $\mathbf{h}$  es una estrategia auto-financiable bajo  $P$ , también bajo  $Q$ . El valor del portafolio generado por  $\mathbf{h}$  descontado a tiempo  $t$ ,  $\tilde{V}(t)$  es una  $Q$ -martingala, entonces  $\tilde{V}(0) = E_Q [\tilde{V}(T)]$ . Ahora, se iniciará con  $V(0) =$

$\tilde{V}(0) = 0$ , y suponemos que  $\tilde{V}(T) \geq 0$ . Dado que  $Q(\omega) > 0$  y  $E_Q[\tilde{V}(T)] = \tilde{V}(0) = 0$  se puede observar que sólo es posible tomar  $\tilde{V}(T) = 0$ . En otras palabras, iniciando con  $\tilde{V}(0) = 0$ , es imposible tener  $\tilde{V}(T) > 0$ . De manera que no existen oportunidades de arbitraje.

Los pagos futuros son modelados como  $\mathcal{F}_T$ -variables aleatorias medibles. Se dice que un pago futuro  $Y$  es *alcanzable* si existe al menos una estrategia de negocio  $\mathbf{h}$  tal que a tiempo  $T$  el valor del portafolio  $V(T)$  sea igual a  $Y$ . En este caso decimos que  $Y$  es generada por  $\mathbf{h}$ . El precio de arbitraje de  $Y$  puede ser obtenido mediante el *enfoque de riesgo de valuación neutral*, tal como se verá en el siguiente teorema.

**Teorema 2** *Supongamos que una medida de martingala equivalente  $Q$  existe. Sea  $Y$  un pago futuro posible generado por una estrategia de negocio  $\mathbf{h}$   $Q$ -admisibles y auto-financiable. Para cada tiempo  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , el precio de arbitraje de  $Y$  está dado por*

$$V(t; \mathbf{h}) = S_0(t) E_Q \left[ \frac{Y}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.47)$$

La prueba del teorema (2) es fácil dado que  $Y$  es generada por una estrategia de negocio  $\mathbf{h}$   $Q$ -admisibles auto-financiable, entonces el proceso de valor descontado del portafolio  $\tilde{V}(t; \mathbf{h})$  es una martingala bajo  $Q$ . Esto conduce a

$$V(t; \mathbf{h}) = S_0(t) \tilde{V}(t; \mathbf{h}) = S_0(t) \mathbb{E}_Q \left[ \tilde{V}(T; \mathbf{h}) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Por otra parte, observando que  $\tilde{V}(T; \mathbf{h}) = \frac{Y}{S_0(T)}$ , se obtiene la fórmula de valuación de riesgo neutral (2.47).

Aunque puede haber dos portafolios de replicación que generan  $Y$ , la fórmula de valuación de riesgo neutral muestra que el precio de arbitraje es determinado por la expectativa de la utilidad final descontada, independientemente de la elección de la cartera de replicación. Esto es una consecuencia de la ley del precio único.

### Cambio de numerario

La fórmula de valuación de riesgo neutral (2.47) usa la cuenta en el mercado de dinero  $S_0(t)$  como el numerario. Geman, el Karoui y Rochet mostraron que la elección de  $S_0(t)$  como numerario no es necesariamente la única con la que la fórmula de valuación de riesgo neutral funciona. En esta sección se mostrará el poder de este descubrimiento.

Sea  $N(t)$  un numerario y se asume la existencia de una medida de probabilidad equivalente  $Q_N$  tal que todos los precios normalizados de los activos con respecto a  $N(t)$  son  $Q_N$ -martingalas. Sumado a esto, si un pago futuro  $Y$  es alcanzable bajo el par numerario-medida  $(S_0(t), Q)$ , entonces también

es alcanzable bajo un par alternativo  $(N(t), Q_N)$ . El precio de arbitraje de los valores obtenido mediante la fórmula de valuación neutral al riesgo debe concordar en ambas medidas. Entonces se tiene que

$$S_0(t) \mathbb{E}_Q \left[ \frac{Y}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = N(t) \mathbb{E}_{Q_N} \left[ \frac{Y}{N(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.48)$$

Para obtener la derivada de Radon-Nikodym (que se revisó en el capítulo anterior)

$$L(t) = \frac{dQ_N}{dQ} \bigg|_{\mathcal{F}_t}, \quad t \in [0, T],$$

se aplica la regla bayesiana<sup>4</sup> y se obtiene

$$\mathbb{E}_{Q_N} \left[ \frac{Y}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{\mathbb{E}_Q [L(T) | \mathcal{F}_t]} E_Q \left[ \frac{Y}{N(T)} L(T) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.49)$$

Por la expresión (2.48) se obtiene

$$\mathbb{E}_{Q_N} \left[ \frac{Y}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{N(0) S_0(t)}{N(t)} E_Q \left[ \frac{Y}{N(0) S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.50)$$

Recordemos la relación  $\mathbb{E}_Q [L(T) | \mathcal{F}_t]$ . Ahora, si se define la derivada de Radon-Nikodym  $L(t)$  como

$$L(t) = \frac{dQ_N}{dQ} \bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)}{N(0) S_0(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (2.51)$$

entonces las condiciones (2.49) y (2.50) son consistentes.

La técnica de cambio de numerario es vista como una de las más poderosas herramientas de valuación analítica de derivados financieros. En general, la derivada de Radon-Nikodym  $L_{N,M}(t)$  que efectúa el cambio de numerario-medida del par  $(N(t), Q_N)$  en el par alternativo  $(M(t), Q_M)$  está dada por

$$L_{N,M}(t) = \frac{dQ_N}{dQ_M} \bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)}{N(0)} \div \frac{M(t)}{M(0)}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.52)$$

<sup>4</sup>Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos mutuamente excluyentes que juntos forman el espacio  $S$ . Sea  $B$  cualquier evento del espacio muestral  $S$ , tal que  $P(B) > 0$ . Entonces

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}$$

Ahora, incluyendo el hecho de que  $P(A_k \cap B) = P(A_k) P(B | A_k)$ , la regla de Bayes se puede expresar como

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) P(B | A_k)}{P(A_1) P(B | A_1) + P(A_2) P(B | A_2) + \dots + P(A_n) P(B | A_n)}.$$

### 2.3.2. Modelo de Black-Scholes

Revisaremos el modelo de Black-Scholes bajo el marco de precio justo. Se asume la existencia de una medida neutral al riesgo  $Q$  bajo la cual todos los procesos de precio descontado son  $Q$ -martingalas. El modelo tiene básicamente dos activos para negociar, el activo subyacente en riesgo y el activo sin riesgo, esto en forma de una cuenta en el mercado de dinero. El proceso de precio del activo de riesgo y del activo sin riesgo bajo la medida de probabilidad  $P$  están gobernados por

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \quad (2.53)$$

$$dM_t = rM_t dt, \quad (2.54)$$

respectivamente, donde  $Z_t$  es un movimiento browniano con medida  $P$ . Supongamos que se toma la cuenta en el mercado de dinero como numerario, y se define el precio del activo descontado en riesgo como  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{M_t}$ . Por el lema de Itô, el proceso de valor  $\tilde{S}_t$  se convierte en

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (\mu - r) dt + \sigma dZ_t.$$

Es importante encontrar la medida equivalente de martingala  $Q$  bajo la cual el precio descontado del activo  $\tilde{S}_t$  sea una  $Q$ -martingala. Por el Teorema de Girsanov, elegimos  $\gamma(t)$  en la derivada de Radon-Nikodym tal que

$$\gamma(t) = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

y entonces ocurre que  $\tilde{Z}_t$  es un proceso browniano bajo la medida de probabilidad  $Q$  y

$$d\tilde{Z}_t = dZ_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt. \quad (2.55)$$

Bajo la medida  $Q$ , el proceso  $\tilde{S}_t$  se ve entonces así

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = r dt + \sigma d\tilde{Z}_t. \quad (2.56)$$

Ya que  $\tilde{Z}_t$  es un movimiento browniano con medida  $Q$ , se sigue que  $\tilde{S}_t$  es una  $Q$ -martingala. Sustituyendo las expresiones ( 2.55) en ( 2.56), el precio de la acción  $S_t$  bajo la  $Q$ -medida está gobernado por

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{Z}_t, \quad (2.57)$$

donde la tasa de deriva es igual a la tasa de interés libre de riesgo. Cuando la cuenta en el mercado de dinero es usada como numerario, la correspondiente medida de martingala es comúnmente llamada la *medida de riesgo neutral* y la tasa de deriva de  $S_t$  bajo la medida  $Q$  es llamada la *tasa de deriva de riesgo neutral*. En virtud de la fórmula de valuación de riesgo neutral dada por la expresión ( 2.47), el precio de arbitraje de un derivado está dado por

$$V(S, t) = \mathbb{E}_Q^{t,S} \left[ \frac{M_T}{M_t} h(S_T) \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q^{t,S} [h(S_T)], \quad (2.58)$$

donde  $\mathbb{E}_Q^{t,S}$  es la esperanza bajo la medida de riesgo neutral  $Q$  condicionada a la filtración  $\mathcal{F}_t$  con  $S_t = S$ . Bajo el supuesto de tasa de interés constante  $r$ , el factor de descuento  $\frac{M_T}{M_t} = e^{-r(T-t)}$  es constante por lo que se puede sacar de la esperanza. En lo siguiente sólo se escribirá  $\mathbb{E}_Q$  para referirse a  $\mathbb{E}_Q^{t,S}$ . La utilidad final de un derivado es alguna función de  $h$  del precio final  $S_T$ . Suponiendo que  $V(S, t)$  está gobernada por la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

en virtud de la representación de la fórmula de Feynman-Kac, la función de valor  $V(S, t)$  admite la representación de la esperanza definida en la ecuación ( 2.58). Esto ilustra la consistencia entre el principio de valuación neutral al riesgo y la formulación de Black-Scholes-Merton. Como un ejemplo, considerar una opción *call* europea tal que su utilidad final es  $\max(S_T - K, 0)$ . Usando la expresión ( 2.58), el valor *call*  $c(S, t)$  está dado por

$$\begin{aligned} c(S, t) &= e^{-r(T-t)} E_Q [\max(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)} \{ E_Q [S_T \mathbf{I}_{[S_T \leq K]}] - K E_Q [\mathbf{I}_{[S_T \leq K]}] \}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

En la siguiente sección, se mostrará cómo obtener la fórmula de valor *call* calculando las expresiones anteriores.

## 2.4. Fórmula de Black-Scholes y sus propiedades

En esta sección, se obtendrá la fórmula de Black-Scholes para valuación de opciones europeas *call* resolviendo directamente la fórmula de Black-Scholes añadiendo las condiciones auxiliares adecuadas. La fórmula para opciones europeas *put* se obtendrá de la relación de paridad *put-call*. También se obtendrá la fórmula de valuación *call* usando la fórmula de valuación de riesgo neutral mediante el cálculo de la esperanza de la utilidad final descontada. Mediante la sustitución

de la representación de la esperanza de la función de valuación *call* en la ecuación de Black-Scholes se deduce la ecuación de reversa de Fokker-Planck para la función de densidad de transición de los precios de los activos bajo la medida neutral al riesgo.

### 2.4.1. Formulas de valuación para opciones europeas

Recordemos que la ecuación de Black-Scholes para una opción *call* europea vanilla tiene la forma

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad 0 < S < \infty, \tau > 0, \quad (2.60)$$

donde  $c = c(S, t)$  es el valor de una *call* europea,  $S$  y  $\tau = T - t$  son el precio del activo y el tiempo para la expiración, respectivamente. Se usará el tiempo para la expiración  $\tau$  en lugar del tiempo  $t$  para que la ecuación de Black-Scholes se convierta en la usual ecuación diferencial parcial parabólica. Las condiciones auxiliares del modelo de valuación de opciones son escritas a continuación:

*Condición inicial (utilidad a la expiración)*

$$c(S, 0) = \max(S - K, 0), \quad \text{donde } K \text{ es el precio de ejercicio.} \quad (2.61)$$

*Comportamiento en las fronteras*

1. Cuando el valor del activo es cero para alguna  $t < T$ , este se quedará en cero para los subsecuentes tiempos entonces es seguro que la opción expirará fuera del dinero. Como consecuencia, la opción *call* tiene valor cero, esto es

$$c(0, \tau) = 0. \quad (2.62)$$

2. Cuando  $S$  es lo suficientemente grande, es casi seguro que la opción será ejercida. Ya que el valor presente del precio de ejercicio es  $Ke^{-r\tau}$ , se tiene que

$$c(S, \tau) \sim S - Ke^{-r\tau}, \quad \text{si } S \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Ilustraremos a continuación, sobre cómo aplicar la técnica de la función de Green en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales para determinar la solución de  $c(S, \tau)$ . Usando la transformación  $y = \ln S$  y  $c(y, \tau) = e^{-r\tau} \omega(y, \tau)$ , la ecuación de Black-Scholes se transforma en la siguiente ecuación parabólica de coeficientes constantes

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad -\infty < y < \infty, \tau > 0. \quad (2.64)$$

La condición inicial (2.61) para el modelo se transforma en

$$\omega(y, 0) = \max(e^y - K, 0). \quad (2.65)$$

Ya que el dominio del modelo de valuación es infinito, la ecuación diferencial junto con las condiciones iniciales son suficientes para determinar la función de valor de la opción *call*. Una vez que la función de valor se obtenga, se revisará que los valores de la función a las fronteras cumplan con las condiciones iniciales obtenidas.

### Enfoque con la función de Green

Recordemos que la función de densidad de probabilidad de un movimiento browniano  $X(t)$  con media  $\mu$ , y varianza  $\sigma^2$  y  $X(0) = 0$  está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right),$$

donde  $u(x, t)$  satisface la ecuación (1.13). Entonces se deduce que la función de dominio infinito de la expresión (2.64) está dada por

$$\phi(y, \tau; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2 \tau}\right). \quad (2.66)$$

Aquí,  $\phi(y, \tau; \xi)$  satisface la condición inicial

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \phi(y, \tau; \xi) = \delta(y - \xi),$$

donde  $\delta(y - \xi)$  es la función delta de Dirac que representa un impulso unitario en la posición  $\xi$ . La función de Green  $\phi(y, \tau; \xi)$  puede ser considerada como la respuesta en la posición  $y$  y a tiempo  $\tau$  hecha a un impulso unitario puesto en posición inicial  $\xi$ . Por otro lado, de las propiedades de la función de Dirac (ver Capítulo 1), la condición inicial puede ser expresada como

$$\omega(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi, 0) \delta(y - \xi) d\xi,$$

entonces  $\omega(y, 0)$  puede ser considerada como la superposición de impulsos de magnitud variable  $\omega(\xi, 0)$  que van desde  $\xi \rightarrow -\infty$  a  $\xi \rightarrow \infty$ . Debido a que la expresión (2.64) es lineal, la respuesta en posición  $y$  y tiempo  $\tau$  hecha a un impulso de magnitud  $\omega(\xi, 0)$  en posición  $\xi$  y  $\tau = 0$  está dada por  $\omega(\xi, 0) \phi(y, \tau; \xi)$ . Por el principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales, la solución al problema de valores iniciales representado por las expresiones (2.64) y (2.65) se obtiene sumando las respuestas dadas a estos impulsos. Esto equivale

a la integración desde  $\xi \rightarrow -\infty$  hasta  $\xi \rightarrow \infty$ . De manera que, la solución a  $c(y, \tau)$  está dada por

$$\begin{aligned}
 c(y, \tau) &= e^{-r\tau} \omega(y, \tau) \\
 &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi, 0) \phi(y, \tau; \xi) d\xi \\
 &= e^{-r\tau} \int_{\ln X}^{\infty} (e^\xi - K) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \\
 &\quad \exp\left(\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi. \tag{2.67}
 \end{aligned}$$

Aquí,  $\phi(y, \tau; \xi)$  puede ser interpretada como el kernel de la transformación integral que convierte el valor inicial  $\omega(\xi, 0)$  en la solución  $\omega(y, \tau)$  a tiempo  $\tau$ .

La integral en la ecuación ( 2.67) puede ser evaluada en forma cerrada como sigue. Considerar la siguiente integral, completando cuadrados en la expresión exponencial se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\int_{\ln X}^{\infty} e^\xi \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\
 &= \exp(y + r\tau) \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\
 &= e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y = \ln S.
 \end{aligned}$$

La otra integral puede ser expresada como sigue

$$\begin{aligned}
& \int_{\ln X}^{\infty} e^{\xi} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi \\
&= N\left(\frac{y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \ln K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&= N\left(\frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y = \ln S.
\end{aligned}$$

De manera que, la formula de valuación de una opción europea *call* se encuentra con

$$c(S, \tau) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2), \quad (2.68)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

La condición inicial se ve satisfecha si se observa que los límites de  $d_1$  y  $d_2$  tienden a cero ó uno dependiendo de  $S > K$  ó  $S < K$ , respectivamente, cuando  $\tau \rightarrow 0^+$ . Se observa que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} N(d_1) = \lim_{S \rightarrow \infty} N(d_2) = 1,$$

y que

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} N(d_1) = \lim_{S \rightarrow 0^+} N(d_2) = 0.$$

Se puede verificar que las condiciones a la frontera expresadas en ( 2.62) y ( 2.63) son satisfechas por la fórmula analítica de valuación para opciones *call*. También se puede demostrar que el valor de compra se encuentra dentro de los límites

$$\max(S - Ke^{-r\tau}, 0) \geq c(S, \tau) \geq S, \quad S \leq 0, \tau \leq 0, \quad (2.69)$$

lo que concuerda con los resultados de la distribución libre en los límites de la función de valor de una *call*.

### Enfoque de valuación de riesgo neutral

Usando el enfoque de valuación de riesgo neutral, el valor de la opción *call* europea puede ser obtenido mediante el cálculo de la esperanza de la utilidad final descontada bajo la medida de riesgo neutral. Sea  $\Psi(S_T, T; S, t)$  que denota la función de densidad de transición bajo la medida de riesgo neutral del precio final del activo  $S_T$  a tiempo  $T$ , dado el precio  $S$  a un tiempo previo. De acuerdo con la ecuación ( 2.59), el valor *call*  $c(S, t)$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} c(S, t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q [(S_T - K) \mathbf{I}_{[S_T \leq K]}] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) \Psi(S_T, T; S, t) dS_T. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Bajo la medida neutral de riesgo  $Q$ , el precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico con tasa de deriva  $r$  y tasa de varianza  $\sigma^2$ . Aplicando los resultados de las expresiones ( 1.37) y ( 1.36), se deduce que

$$\ln \frac{S_T}{S} = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \tilde{Z}(\tau), \quad \tau = T - t, \quad (2.71)$$

donde  $\tilde{Z}(\tau)$  es un movimiento browniano con medida  $Q$ . Se observa que  $\ln \frac{S_T}{S}$  es normal distribuido con media  $\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau$  y varianza  $\sigma^2 \tau$ . Como se deduce de la función de densidad de una variable aleatoria normal, la función de transición está dada por

$$\Psi(S_T, T; S, t) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp \left( - \frac{\left[ \ln \frac{S_T}{S} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right). \quad (2.72)$$

Como establecemos  $\xi = \ln S_T$  y  $y = \ln S$ , entonces  $\frac{S_T}{S} = e^{\xi - y}$  y  $d\xi = \frac{dS_T}{S_T}$ . Sustituyendo la función de densidad de transición de arriba en la expresión ( 2.70), el valor de la *call* europea puede ser expresada como

$$\begin{aligned} c(S, \tau) &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^\infty \max(e^\xi - K, 0) \\ &\quad \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp \left( - \frac{\left[ y + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau - \xi \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\xi, \end{aligned} \quad (2.73)$$

lo cual es consistente con el resultado obtenido en la expresión ( 2.67).

Si se compara el valor de la *call* de la expresión ( 2.68) con la representación de la esperanza de la ecuación ( 2.59) se deduce que

$$N(d_2) = \mathbb{E}_Q [\mathbf{I}_{\{S_T > K\}}] = Q[S_T > K]. \quad (2.74)$$

$$e^{r\tau} SN(d_1) = \mathbb{E}_Q [S_T \mathbf{I}_{\{S_T > K\}}]. \quad (2.75)$$

Por lo tanto,  $N(d_2)$  se reconoce como la probabilidad bajo la medida de riesgo neutral  $Q$  de que el *call* expire *in-the-money*, entonces  $Ke^{-r\tau}N(d_2)$  representa el valor presente de la esperanza bajo riesgo neutral del pago del precio de ejercicio realizado por el tenedor de la opción al vencimiento. También,  $SN(d_1)$  es la esperanza bajo riesgo neutral del precio descontado final de la acción condicionado a que el *call* esté *in-the-money* al vencimiento.

### Ecuaciones de Fokker-Planck

Si se sustituye la integral de ( 2.70) en la ecuación de Black-Scholes, se obtiene

$$0 = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max(S_T - X, 0) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \Psi}{\partial S} \right) dS_T.$$

La función integral desaparece y por lo tanto se llega a la siguiente ecuación para  $\Psi(S_T, T; S, t)$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \Psi}{\partial S} = 0. \quad (2.76)$$

Esta última es llamada *ecuación de reversa de Fokker-Planck*, ya que depende de  $S$  y  $t$  que son variables hacia atrás. En términos de las variables hacia adelante  $S_T$  y  $T$ , se puede mostrar que  $\Psi(S_T, T; S, t)$  satisface la siguiente ecuación hacia adelante de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2} S_T^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial S_T^2} + rS_T \frac{\partial \Psi}{\partial S_T} = 0. \quad (2.77)$$

### Función de valuación Put

Usando la relación de paridad *put-call*, el valor de una opción europea está dado por

$$\begin{aligned} p(S, \tau) &= c(S, \tau) + Ke^{-r\tau} - S \\ &= S[N(d_1) - 1] + Ke^{-r\tau}[1 - N(d_2)] \\ &= Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Con un valor del activo lo suficientemente bajo, se puede ver que  $N(d_2) \rightarrow 1$  y  $SN(-d_1) \rightarrow 0$  entonces

$$p(S, \tau) \sim Ke^{-r\tau} \quad \text{como } S \rightarrow 0^+. \quad (2.79)$$

El valor de la *put* puede estar por debajo de su valor intrínseco,  $K - S$ , cuando el valor de  $S$  es lo suficientemente pequeño.

Por otro lado, a pesar de que  $SN(d_1)$  es de la forma indeterminada  $\infty \cdot 0$  cuando  $S \rightarrow \infty$ , se puede ver que  $SN(-d_1) \rightarrow 0$  cuando  $S \rightarrow \infty$ . De manera que, se obtiene

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, \tau) = 0. \quad (2.80)$$

Esto no es una sorpresa, ya que la *put* europea seguramente vencerá fuera del dinero si el precio  $S \rightarrow \infty$ , entonces tiene valor cero. La función de valuación de una *put* es una función convexa decreciente de  $S$  y está acotada por arriba por el precio de ejercicio  $K$ .

Para una opción *put* europea perpetua, es decir, con tiempo infinito de expiración, se tiene que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p(S, \tau) = 0. \quad (2.81)$$

El valor de una opción *put* europea perpetua es cero, ya que el valor presente del precio de ejercicio se convierte en cero si se recibe en un tiempo infinito a partir de ahora.

## 2.5. Modelo de valuación de opciones extendido

En el inicio de esta sección se mostrará como se extiende la formulación original de B-S relajando algunas de las suposiciones del modelo. Es una practica común que los activos paguen dividendos con pagos discretos o tasa continua. Se examinará la modificación a la ecuación diferencial que gobierna y al proceso de valuación con la inclusión de una tasa continua de dividendos o dividendos discretos. También se presentarán las técnicas analíticas para resolver el modelo de valuación de opciones con parámetros dependientes del tiempo.

### 2.5.1. Opciones sobre activos que pagan dividendos

Los dividendos recibidos por el poseedor sobre un activo subyacente pueden ser estocásticos o deterministas. El modelo de dividendos estocásticos es muy complicado, de manera que se tendría que asumir que el dividendo es otra variable aleatoria en suma al precio del activo. En el desarrollo siguiente se supondrá que los dividendos son deterministas. Usando el principio de no-arbitraje, el precio del activo cae inmediatamente después de la fecha en que expira un dividendo, por un monto equivalente al del valor del dividendo.

#### Modelos de tasa continua de dividendo

Se considera el efecto de una tasa continua de dividendo sobre el valor de una opción *call* europea. Sea  $q$  que denota la tasa continua de dividendo pagada por el activo subyacente. Esto es, el poseedor recibe un dividendo de monto igual a  $qS_t dt$  por cada intervalo de longitud  $dt$ , donde  $S_t$  es el precio del activo. Se asume que la dinámica del precio del activo sigue un proceso browniano geométrico

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \quad (2.82)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  representan la tasa esperada de retorno y la varianza del precio del activo, respectivamente. Para obtener la ecuación diferencial que gobierna la función de valor  $c(S_t, t)$  de una opción *call* europea, se formará un portafolio de cobertura libre de riesgo mediante la compra en corto de una unidad de la *call* europea y una posición larga de  $\Delta_t$  unidades del activo subyacente. La ganancia financiera dada por el portafolio a tiempo  $t$  está dada por

$$\begin{aligned} & \int_0^t -dc + \int_0^t \Delta_u dS_u + q \int_0^t \Delta_u S_u du \\ = & \int_0^t \left\{ -\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + \left[ \left( \Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \mu + q \Delta_u \right] S_u \right\} du \\ & + \int_0^t \left( \Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dZ_u. \end{aligned}$$

El último término  $q \int_0^t \Delta_u S_u du$  representa la ganancia sumada al portafolio mediante el cobro del pago del dividendo. Eligiendo  $\Delta_u = \frac{\partial c}{\partial S_u}$ , el término estocástico desaparece de modo que la ganancia financiera se vuelve determinista para todos los tiempos. Por otra parte, la ganancia determinista de un activo libre de riesgo con la posición dinámica de  $-c + \Delta_u S_u = -c + \frac{\partial c}{\partial S_u} S_u$  está dada por

$$\int_0^t r \left( -c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) du.$$

Si se recuerda el principio de no arbitraje, se puede concluir que éstas dos cantidades deben ser equivalentes. Igualándolas se obtiene

$$-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + q S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} = r \left( -c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right), \quad 0 < u < t,$$

lo cual se satisface para cualquier precio del activo  $S_u$  si  $c(S, t)$  satisface la siguiente versión modificada de la ecuación de B-S

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \quad (2.83)$$

*Tasa de deriva neutral al riesgo*

Para la ecuación modificada de Black-Scholes ( 2.83), se deduce que la tasa de deriva neutral al riesgo del proceso de precio de un activo que paga una tasa de dividendos  $q$  es  $r - q$ . También es posible mostrar este resultado vía la aproximación de la teoría del precio justo o valuación de martingala. Suponiendo que todos los pagos de dividendo recibidos son usados para comprar unidades adicionales del activo subyacente, entonces el proceso de ganancia del tenedor de una unidad del activo subyacente inicialmente está dado por

$$\tilde{S}_t = e^{qt} S_t,$$

donde  $e^{qt}$  representa el factor de crecimiento por el número de unidades. Si suponemos que  $S_t$  sigue la dinámica de crecimiento que se definió en la expresión ( 2.82), entonces el proceso de crecimiento  $\tilde{S}_t$  sigue

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (\mu + q) dt + \sigma dZ_t.$$

El proceso de crecimiento descontado  $\tilde{S}_t^* = \frac{\tilde{S}_t}{S_0(t)}$  es una martingala bajo la medida equivalente neutral de riesgo  $Q$ . Esto equivale a encontrar  $Q$  tal que el proceso de crecimiento descontado  $\tilde{S}_t^*$  es una  $Q$ -martingala. Se elige  $\gamma(t)$  en la derivada de Radon-Nikodym para ser

$$\gamma(t) = \frac{\mu + q - r}{\sigma},$$

de modo que se tiene  $\tilde{Z}_t$  es un movimiento browniano bajo  $Q$  y

$$d\tilde{Z}_t = dZ_t + \frac{\mu + q - r}{\sigma} dt.$$

Ahora,  $\tilde{S}_t^*$  se convierte en una  $Q$ -martingala ya que

$$\frac{d\tilde{S}_t^*}{\tilde{S}_t^*} = \sigma d\tilde{Z}_t.$$

El precio del activo  $S_t$  bajo la medida equivalente de riesgo neutral  $Q$  se puede ver como

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q) dt + \sigma d\tilde{Z}_t.$$

De forma que, se deduce que la tasa de deriva neutral al riesgo de  $S_t$  es  $r - q$ .

#### Valuación para *call* y *put*

Si se hace que  $\tilde{S} = Se^{-q\tau}$  en la ecuación modificada de B-S ( 2.83),  $\tau = T - t$ , entonces la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \tilde{S}^2} + r\tilde{S} \frac{\partial c}{\partial \tilde{S}} - rc.$$

La utilidad final de una opción *call* europea en términos de  $\tilde{S}$  está dado por el  $\max(\tilde{S} - K, 0)$ . De forma que el valor de una opción *call* europea sobre un activo que paga dividendos puede ser obtenida por una simple modificación a la fórmula de valuación de B-S como sigue cambiando  $S$  por  $Se^{-q\tau}$  en la fórmula. Ahora, la fórmula de valuación de una *call* europea con tasa de dividendos continua  $q$  se encuentra con

$$c(S, \tau) = Se^{-q\tau} N(\tilde{d}_1) - Ke^{-r\tau} N(\tilde{d}_2), \quad (2.84)$$

donde

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad \tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sigma \sqrt{\tau}.$$

De forma similar, la fórmula de valuación para una opción *put* europea con tasa continua de dividendos  $q$  se puede deducir a partir de fórmula de B-S para ser

$$p(S, \tau) = Ke^{-r\tau} N(\tilde{d}_2) - Se^{-q\tau} N(\tilde{d}_1). \quad (2.85)$$

#### Paridad *put-call* y relaciones de simetría

Hay que notar que los nuevos valores de opciones *call* y *put* satisfacen la relación de paridad

$$p(S, \tau) = c(S, \tau) - Se^{-q\tau} + Ke^{-r\tau}. \quad (2.86)$$

La siguiente relación de simetría *put-call* puede deducirse a partir de las funciones de valor de las opciones *put* y *call*

$$c(S, \tau; K, r, q) = p(K, \tau; S, q, r), \quad (2.87)$$

esto es, el valor de una opción *put* puede obtenerse a partir del de la *call* correspondiente, mediante el cambio de  $S$  con  $K$  y  $r$  con  $q$  en la fórmula.



# Opciones americanas

---

La característica distintiva de una opción americana es el *privilegio de ejercicio anticipado*, es decir, el poseedor de la opción puede ejercerla antes de la fecha de expiración. Dado que esta característica puede otorgar un beneficio al poseedor de la opción, se intuye que una opción americana es más valiosa que su contraparte europea. Al recordar propiedades revisadas con anterioridad, este hecho se podrá verificar.

En el caso de que la opción sea sobre un activo que paga dividendos discretos, la determinación del momento en que es óptimo ejercer la opción está en función de la proximidad de las fechas de dividendo. Aún cuando no se trate de un activo con dividendos, es importante señalar que la frontera de precios de ejercicio óptimo para una opción americana no se conoce de antemano, debe determinarse como parte del modelo de valuación. Debido a esta característica, el problema de valuación de opciones americanas constituye un problema de frontera libre, cuyas características se analizarán más adelante.

Se presentarán formulaciones de valuación de opciones americanas, tales como la de complementariedad lineal y la de paro óptimo. Se mostrará como la recompensa de ejercicio temprano puede ser expresada en términos de la frontera de ejercicio en una representación integral y se examinará cómo la determinación de la frontera de ejercicio óptimo se reduce a la solución de una ecuación integral.

## 3.1. Condiciones de ejercicio óptimas

Las características de las políticas de ejercicio temprano para una opción americana dependen en gran medida de que el activo subyacente pague o no dividendos (con tasa discreta o continua). En la siguiente discusión se asumirá que los dividendos son conocidos desde el principio, en monto y tiempo de pago. En esta sección se realizará un análisis detallado de las propiedades de la frontera de ejercicio temprano.

Algunas de las condiciones requeridas para el ejercicio temprano óptimo son (i) el dividendo discreto es suficientemente grande en relación con el precio de ejercicio, (ii) la fecha de caducidad del dividendo anterior es cercana y (iii) el nivel de precios del activo antes de la fecha de dividendo es mayor que cierto umbral. Dado que las posibilidades de ejercicio temprano se limitan a algunas fechas de dividendos, la fórmula de valuación de una *call* americana sobre un subyacente con dividendos discretos y conocidos puede obtenerse como una europea compuesta.

### 3.1.1. Opciones americanas sobre activos con dividendos

Primero, se consideran los efectos de una tasa continua de dividendos (suponiendo que esta sea constante igual a  $q > 0$ ) sobre las políticas de ejercicio temprano de una *call* americana. Cuando el valor del activo  $S$  es excepcionalmente alto, es casi seguro que la *call* europea de un activo de dividendo continuo estará *in-the-money* al momento de la expiración. Se puede ver a la *call* americana como el activo sin sus ingresos por dividendos, y menos el valor presente del precio de ejercicio  $K$ . Cuando la *call* está lo suficientemente *in-the-money*, se observa que:

$$N(\hat{d}_1) \sim 1 \quad y \quad N(\hat{d}_2) \sim 1,$$

en la fórmula de valuación de una *call* europea ( 2.84), se obtiene:

$$c(S, \tau) \sim e^{-q\tau} S - e^{-r\tau} K \quad \text{cuando} \quad S \gg K. \quad (3.1)$$

El valor de esta *call* europea podría estar por debajo del valor intrínseco  $S - K$  a un valor suficientemente alto del activo, debido a la presencia del factor  $e^{-q\tau}$  delante de  $S$ . Aunque es posible que el valor de una opción europea esté por debajo del valor intrínseco, el poseedor de una opción americana con derecho de ejercicio temprano incluido no permitiría que su opción cayera por debajo del valor intrínseco. Por lo que, a un valor del activo lo suficientemente alto, se vuelve óptimo el ejercicio temprano de una opción americana sobre un activo que paga dividendos continuos; así, su valor no caerá por debajo del valor intrínseco sin ejercicio.

En la figura ( 3.1), la curva de valor de la opción *call* americana  $C(S, \tau)$  toca tangencialmente la línea punteada que representa el valor intrínseco de la *call* en algún precio de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$ . Notar que el precio óptimo tiene dependencia de  $\tau$ , el tiempo para la expiración. El comportamiento tangencial de la curva de valor de la *call* americana en  $S^*(\tau)$  será explicado en la siguiente subsección. Cuando  $S \leq S^*(\tau)$ , el valor de la *call* americana es igual a su valor intrínseco  $S - K$ . La colección de todos estos puntos  $(S^*(\tau), \tau)$  para todo  $\tau \in (0, T]$ , en el  $(S, \tau)$ -plano constituye la frontera de ejercicio óptimo (ver figura ( 3.2)). La opción *call* americana permanece viva sólo en la región

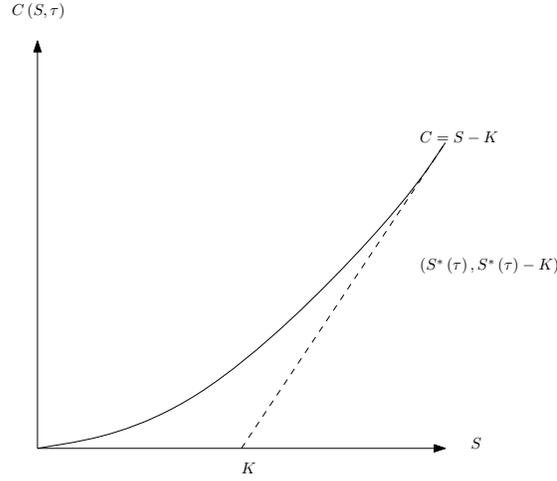


Figura 3.1: La curva muestra el precio de la función  $C(S, \tau)$  de una *call* americana de un activo que paga una tasa de dividendo continua. La curva de precio toca la línea punteada del valor intrínseco tangencialmente en el punto  $(S^+(\tau), S^*(\tau) - K)$ , donde  $S^*(\tau)$  es el precio de ejercicio óptimo. Cuando  $S \geq S^*(\tau)$  la *call* americana se vuelve  $S - K$ .

$\mathbb{C} = \{(S, \tau) : 0 \leq S < S^*(\tau), 0 < T \leq \tau\}$ . El complemento de  $\mathbb{C}$  se llama región de paro  $\mathbb{S}$ , dentro de la cual la *call* americana puede ser ejercida de manera óptima, ver figura ( 3.2).

Usando el supuesto de continuidad de la trayectoria del precio del activo y de la tasa de dividendo, se espera que la frontera de ejercicio óptimo también sea una función continua de  $\tau$ , para  $\tau > 0$ . Mientras que una rigurosa prueba de la continuidad de  $S^*(\tau)$  es demasiado técnica, se presenta un argumento heurístico. Supongamos lo contrario, que  $S^*(\tau)$  tiene un salto hacia abajo en el instante  $\hat{\tau}$ . Asumiendo que el precio del activo  $S$  a tiempo  $\hat{\tau}$  satisface  $S^*(\hat{\tau}^-) < S < S^*(\hat{\tau}^+)$ , el valor de la opción *call* americana está estrictamente por arriba del valor intrínseco  $S - K$  para  $\hat{\tau}$  ya que  $S > S^*(\hat{\tau}^-)$  y se hace igual al valor intrínseco  $S - K$  en  $\hat{\tau}^+$  ya que  $S > S^*(\hat{\tau}^-)$ . Esto implicaría un salto hacia abajo en el valor de la opción en  $\hat{\tau}$ . Como no hay un flujo de efectivo asociado con la posición larga de una *call* americana en  $\hat{\tau}$ , este salto en el valor sugeriría una oportunidad de arbitraje.

### 3.1.2. Condición de tangencia

Se quiere examinar la condición de tangencia a lo largo de la frontera de ejercicio óptimo para una *call* americana sobre un activo con tasa de dividendo continua. En  $S = S^*(\tau)$ , el valor de la *call* americana ejercida es  $S^*(\tau) - K$  entonces

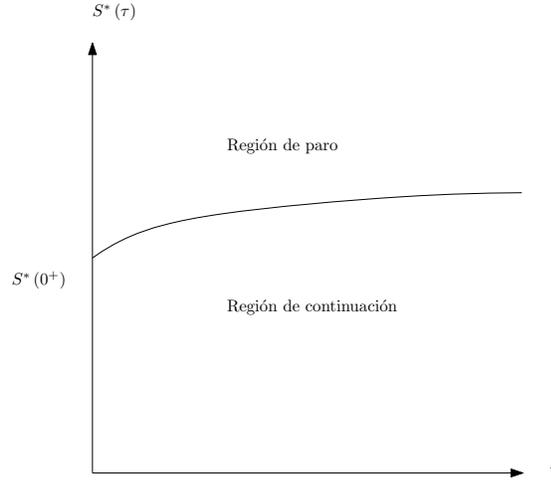


Figura 3.2: Una *call* americana sobre un activo de tasa de dividendo continua permanece viva dentro de la región de continuación  $C = \{(S, \tau) : S \in [0, S^*], \tau \in (0, T]\}$ . La frontera de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$  es una función continua y creciente de  $\tau$ .

$$C(S^*(\tau), \tau) = S^*(\tau) - K. \quad (3.2)$$

Esto se denomina la *condición de valor coincidente*.

Suponiendo que  $S^*(\tau)$  es una función conocida, el modelo de valuación se convierte en un problema de frontera dependiente del tiempo. Sin embargo, en el modelo de opciones *call* americanas,  $S^*(\tau)$  no se conoce de antemano, de hecho, debe ser determinada como parte de la solución. Una condición auxiliar adicional debe incluirse a lo largo de  $S^*(\tau)$  para reflejar la naturaleza del derecho de ejercicio anticipado que caracteriza a la opción americana.

Se seguirá el argumento de Merton (1973, Capítulo 1) para mostrar la continuidad de la delta (primera derivada de la función de valor de una opción con respecto al precio del activo subyacente) del valor de una opción *call* americana en el precio óptimo de ejercicio  $S^*(\tau)$ . Sea  $f(S, \tau; b(\tau))$  que denota la solución a la ecuación de Black-Scholes en el dominio  $\{(S, \tau) : S \in (0, b(\tau)), \tau \in (0, T]\}$ , donde  $b(\tau)$  es una frontera conocida. El poseedor de una *call* americana elige una política de ejercicio temprano que maximice el valor de la *call*. Usando tal argumento, el valor de una *call* americana está dado por

$$C(S, \tau) = \max_{\{b(\tau)\}} f(S, \tau; b(\tau)), \quad (3.3)$$

para todas las posibles funciones continuas de  $b(\tau)$ . Fijando  $\tau$ , por conveniencia, se escribe  $f(S, \tau; b(\tau))$  como  $F(S, b)$ , donde  $0 \leq S \leq b$ . Se observa que  $F(S, b)$

es una función diferenciable. Además, escribimos  $h(b) = F(b, b)$  lo cual se asume como una función diferenciable de  $b$ . Para una opción *call* americana  $h(b) = b - K$ . La derivada total de  $F$  con respecto a  $b$  a lo largo de la frontera  $S = b$  está dada por

$$\frac{dF}{db} = \frac{dh}{db} = \left. \frac{\partial F}{\partial S}(S, b) \right|_{S=b} + \left. \frac{\partial F}{\partial b}(S, b) \right|_{S=b},$$

donde la propiedad  $\frac{\partial S}{\partial b} = 1$  a lo largo de  $S = b$  ha sido incorporada. Sea  $b^*$  el valor crítico de  $b$  que maximiza  $F$ . Cuando  $b = b^*$ , se tiene  $\left. \frac{\partial F}{\partial b}(S, b^*) \right|_{S=b^*} = 0$  como la primera condición de derivada en un punto máximo. Por otro lado, para la función de utilidad al ejercicio de una opción *call* americana, se tiene

$$\left. \frac{dh}{db} \right|_{b=b^*} = \left. \frac{d}{db}(b - K) \right|_{b=b^*} = 1.$$

Poniendo los resultados juntos se obtiene

$$\left. \frac{\partial F}{\partial S}(S, b^*) \right|_{S=b^*} = 1. \quad (3.4)$$

Hay que tomar en cuenta que la elección óptima  $b^*(\tau)$  es justo el precio óptimo de ejercicio  $S^*(\tau)$ . La condición anterior puede ser expresada en la siguiente forma

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) = 1. \quad (3.5)$$

La condición (3.5) es comúnmente llamada *condición de tangencia*. Las dos condiciones auxiliares (3.2) y (3.5), respectivamente, revelan que  $C(S, \tau)$  y  $\frac{\partial C}{\partial S}(S, \tau)$  son continuas a través de la frontera de ejercicio óptima.

La condición de tangencia se aplica a todos los tipos de opciones americanas. Para una opción *put* americana, la pendiente de la línea del valor intrínseco  $(K - S)$  es  $-1$ . La continuidad de la delta del valor de la *put* americana en  $S = S^*(\tau)$  da

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) = -1. \quad (3.6)$$

### 3.1.3. Frontera de ejercicio óptimo de una *call* americana

Considérese una *call* americana sobre un activo que paga dividendo continuo, donde la frontera de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$  es una función continua y creciente de  $\tau$ , y  $\tau$  es el tiempo restante para la expiración de la opción. La propiedad de ser creciente deriva del hecho de que las pérdidas en el valor del subyacente asociadas con la posición larga de la *call* americana y el valor presente del precio de ejercicio son más significativas para una *call* de vida más larga, de forma que la *call* debe estar muy *in-the-money* para tomar la decisión de un ejercicio temprano. Sumado a esto, la compensación del dividendo recibido es mayor. Por lo tanto, la opción *call* americana debería ser ejercida al precio mayor óptimo  $S^*(\tau)$  en comparación con su contraparte de vida más corta.

La propiedad de ser creciente de  $S^*(t)$  también puede ser explicada por la propiedad de crecimiento de la curva de precio  $C(S, \tau)$  como función de  $\tau$  (ver expresión (2.8)). La curva de precio de una *call* americana de vida más larga dibujada contra  $S$  siempre está sobre su contraparte de vida más corta. La curva de precios superior correspondiente a la opción de vida larga, corta la línea de valor intrínseco en el punto crítico más alto  $S^*(\tau)$ .

Más aún, en la figura (3.1) se puede ver que la curva de precio de una *call* americana corta la línea de valor intrínseco en un valor crítico del subyacente mayor que  $K$ . Por lo tanto, se tiene  $S^*(\tau) \geq K$  para  $\tau \geq 0$ . Como alternativa, asumiendo lo contrario, supongamos que  $S^*(\tau) < K$ , entonces el proceso de ejercicio temprano  $S^*(\tau) - K$  se vuelve negativo. Ya que el privilegio de ejercicio temprano no puede ser una desventaja, la posibilidad de que  $S^*(\tau) < K$  queda descartada y entonces  $S^*(\tau) \geq K$ .

En lo siguiente, se presentará el análisis del comportamiento asintótico de  $S^*(\tau)$  cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  y  $\tau \rightarrow \infty$ .

#### Comportamiento asintótico de $S^*(\tau)$ cerca a la expiración

Cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  y  $S > K$ , por la continuidad de la función de precio de la *call*, el valor de la *call* tiende a la utilidad de ejercicio, entonces  $C(S, 0^+) = S - K$ . Si la *call* americana sigue viva, entonces su valor satisface la ecuación de B-S. Sustituyendo el valor *call* de arriba en la ecuación de B-S, dado que  $(S, \tau)$  se encuentra en la región continua, se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial C}{\partial \tau} \right|_{\tau=0^+} &= \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left. \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right|_{\tau=0^+} + (r - q) S \left. \frac{\partial C}{\partial S} \right|_{\tau=0^+} - rC|_{\tau=0^+} \\ &= (r - q) S - r(S - K) \\ &= rK - qS. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Suponemos que  $\left. \frac{\partial C}{\partial \tau} (S, 0^+) < 0 \right.$ , entonces  $C(S, \tau)$  se transforma en  $C(S, 0) = S - K$ , (valor intrínseco de una opción *call* americana) inmediatamente antes de la expiración. Esto da pie a una contradicción, ya que el valor de la *call* americana está siempre sobre el valor intrínseco. De forma que, se tiene  $\left. \frac{\partial C}{\partial \tau} (S, 0^+) \geq 0 \right.$

en el orden en el que se mantiene viva la *call* americana hasta un tiempo cercano a la expiración. El valor de  $S$  para el cual  $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$  cambia de signo es  $S = \frac{r}{q}K$ . También,  $\frac{r}{q}K$  está en el intervalo  $S > K$  sólo cuando  $q < r$ . Se consideran dos casos separados,  $q < r$  y  $q \geq r$ :

1. Caso  $q < r$

A tiempo inmediato antes de la expiración, se argumenta que la *call* americana debería mantenerse viva cuando  $S < \frac{r}{q}K$ . Esto es porque dentro de un intervalo corto de tiempo  $\delta t$  antes de la expiración, el dividendo  $qS\delta t$  ganado por el poseedor de la opción es menor que el interés  $rK\delta t$  ganado por el depósito del monto  $K$  en una cuenta en el mercado de dinero a una tasa de interés libre de riesgo  $r$ . La observación anterior es consistente con la no-negatividad de  $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$  cuando  $S \leq \frac{r}{q}K$ . Cuando  $S > \frac{r}{q}K$  la *call* americana debería ser ejercida ya que la no-negatividad de  $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$  podría violar la condición de que el valor de la *call* americana debe estar sobre el valor intrínseco  $S - K$ . Por lo que, para  $q < r$ , el precio óptimo de ejercicio  $S^*(0^+)$  está dado por el valor del activo tal que  $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$  cambia de signo. Se obtiene

$$S^*(0^+) = \frac{r}{q}K.$$

En particular, cuando  $q = 0$ ,  $S^*(0^+)$  se vuelve infinito. De hecho, dado que  $S^*(\tau)$  es una función monótona creciente de  $\tau$ , se deduce que  $S^*(\tau) \rightarrow \infty$  para todos los valores de  $\tau$ . Este resultado es consistente con el hecho de que nunca es óptimo ejercer una *call* americana sobre un activo que no paga dividendos antes de la expiración.

2. Caso  $q \geq r$

Cuando  $q \geq r$ ,  $\frac{r}{q}K$  se vuelve menor que  $K$  y entonces el argumento anterior debe modificarse. Primero, se mostrará que  $S^*(0^+)$  no puede ser mayor que  $K$ . Asumir lo contrario, supongamos que  $S^*(0^+) > K$  entonces la *call* americana continua viva cuando  $K < S < S^*(0^+)$  a tiempo cercano a la expiración. Dada la combinación de condiciones  $q \geq r$  y  $S > K$ , se observa que la pérdida en el monto del dividendo  $qS\delta t$  no ganado es más que el monto de intereses  $rK\delta t$  ganado si la *call* americana no se ejerce dentro de un intervalo corto de tiempo  $\delta t$  previo a la expiración. Esto representa una política de ejercicio temprano no óptima. Por lo tanto, se debe tener que  $S^*(0^+) \leq K$ . Junto con las propiedades de que  $S^*(\tau) \geq K$  para  $\tau > 0$  y  $S^*(\tau)$  es una función continua creciente de  $\tau$ , para  $q \geq r$ , entonces se tiene que:

$$S^*(0^+) = K.$$

En suma, el precio óptimo de ejercicio  $S^*(\tau)$  de una opción americana *call* sobre un activo que paga dividendos continuos en un tiempo cercano a la expiración está dado por:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S^*(\tau) = \begin{cases} \frac{r}{q}K & q < r \\ K & q \geq r \end{cases} = K \max\left(1, \frac{r}{q}\right). \quad (3.8)$$

En la expiración  $\tau = 0$ , la opción *call* americana será ejercida donde quiera que  $S \geq K$  y entonces  $S^*(0) = K$ . Por lo tanto, para  $q < r$ , hay un salto de discontinuidad de  $S^*(\tau)$  para  $\tau = 0$ .

### Comportamiento asintótico de $S^*(\tau)$ a tiempo infinito de expiración

Ya que  $S^*(\tau)$  es una función monótona creciente de  $\tau$ , el límite inferior para la frontera de ejercicio óptima  $S^*(\tau)$  para  $\tau > 0$  está dado por  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S^*(\tau)$ . Una opción con tiempo infinito de expiración se llama *opción perpetua*. La determinación de  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S^*(\tau)$  está relacionado con el análisis de la función de valor de la correspondiente opción *call* americana perpetua.

Sea  $C_\infty(S; K, q)$  que denota el valor de una opción *call* americana perpetua con precio de ejercicio  $K$  y sobre un activo que paga una tasa continua de dividendo  $q$ . Notar que no hay dependencia del tiempo en la función de valor de una *call* americana perpetua. Ya que el valor de una opción perpetua es insensible al cambio del tiempo, la ecuación de Black-Scholes se reduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 C_\infty}{dS^2} + (r - q) S \frac{dC_\infty}{dS} - r C_\infty = 0, \quad 0 < S < S_\infty^*, \quad (3.9)$$

donde  $S_\infty^*$  es el precio de ejercicio óptimo al cual la opción *call* americana perpetua debería ser ejercida. Notar que  $S_\infty^*$  es independiente de  $\tau$  ya que es simplemente el valor asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S^*(\tau)$ . Las condiciones a la frontera para el modelo de valuación de la *call* americana perpetua son

$$C_\infty(0) = 0 \quad y \quad C_\infty(S_\infty^*) = S_\infty^* - K. \quad (3.10)$$

Sea  $f(S; S_\infty^*)$  que denota la solución a las expresiones (3.9) y (3.10) para un valor dado de  $S_\infty^*$ . Dado que (3.9) es una ecuación diferencial ordinaria lineal, su solución general es de la forma

$$f(S; S_\infty^*) = c_1 S^{\mu_+} + c_2 S^{\mu_-},$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias,  $\mu_+$  y  $\mu_-$  son las correspondientes raíces positiva y negativa de la ecuación auxiliar:

$$\frac{\sigma^2}{2} \mu^2 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \mu - r = 0.$$

Dado que  $f(0; S_\infty^*) = 0$ , se tiene que  $c_2 = 0$ . Aplicando la condición a la frontera en  $S_\infty^*$ , se tiene:

$$f(S_\infty^*; S_\infty^*) = c_1 S_\infty^{*\mu_+} = S_\infty^* - K,$$

lo que resulta:

$$c_1 = \frac{S_\infty^* - K}{S_\infty^{*\mu_+}}.$$

La solución  $f(S; S_\infty^*)$  se reduce a la forma:

$$f(S; S_\infty^*) = (S_\infty^* - K) \left( \frac{S}{S_\infty^*} \right)^{\mu_+}, \quad (3.11)$$

donde:

$$\mu_+ = \frac{-\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} > 0.$$

Para completar la solución,  $S_\infty^*$  debe ser determinado. Se encontró  $S_\infty^*$  mediante la maximización del valor de la opción *call* americana entre todos los posibles precios de ejercicio óptimos, esto es:

$$C_\infty(S; K; q) = \max_{\{S_\infty^*\}} \left\{ (S_\infty^* - K) \left( \frac{S}{S_\infty^*} \right)^{\mu_+} \right\}. \quad (3.12)$$

El uso de los cálculos muestra que  $f(S; S_\infty^*)$  se maximiza cuando:

$$S_\infty^* = \frac{\mu_+}{\mu_+ - 1} K. \quad (3.13)$$

Supongamos que se escribe  $S_{\infty, C}^* = \frac{\mu_+}{\mu_+ - 1} K$ , entonces el valor de la *call* - americana perpetua toma la forma:

$$C_\infty(S; K, q) = \left( \frac{S_{\infty, C}^*}{\mu_+} \right) \left( \frac{S}{S_{\infty, C}^*} \right)^{\mu_+}. \quad (3.14)$$

La anterior solución cumple con la condición de tangencia.

$$\left. \frac{dC_\infty}{dS} \right|_{S=S_{\infty, C}^*} = 1. \quad (3.15)$$

Se puede resolver para  $S = S_{\infty, C}^*$  aplicando directamente la condición de tangencia sin antes pasar por el procedimiento de maximización. En efecto, la aplicación de la condición de tangencia incorpora el procedimiento de tomar el máximo de los valores de la opción entre todos los posibles valores de  $S = S_{\infty, C}^*$ .

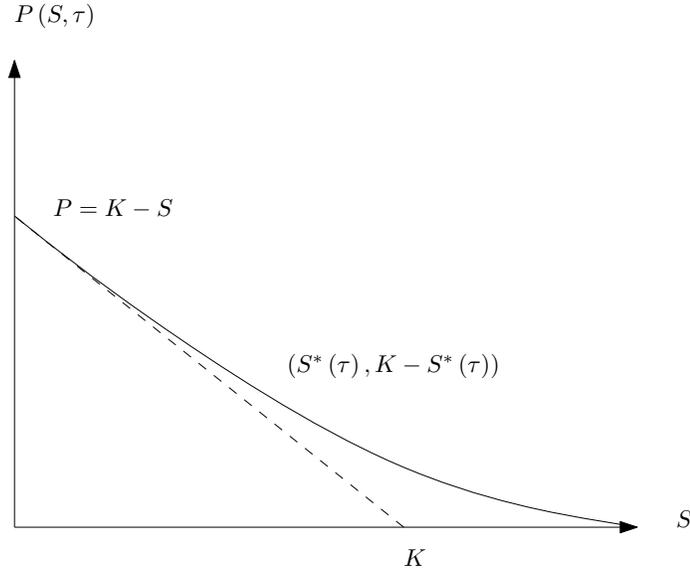


Figura 3.3: La curva muestra la función de valuación de una *put* americana en un tiempo para la expiración dado  $\tau$ . La curva de valuación toca tangencialmente la línea punteada que representa el valor intrínseco en el punto  $(S^*(\tau), K - S^*(\tau))$ , donde  $S^*(\tau)$  es el precio de ejercicio óptimo. Cuando  $S \leq S^*(\tau)$ , el valor de la *put* americana se vuelve  $K - S$ .

### 3.1.4. Relaciones de simetría Put-Call

El comportamiento de la frontera de ejercicio óptimo para una opción *put* americana sobre un activo de dividendo continuo se puede inferir a partir del de su contraparte *call*, esto debido a las relaciones de simetría que existen entre sus funciones de valuación. La gráfica de la función de valuación  $P(S, \tau)$  de una *put* americana contra  $S$  se muestra en la figura ( 3.3).

Considérese una opción *call* americana que provee del derecho de ejercicio en cualquier momento durante la vida de la opción, para intercambiar  $K$  pesos (en la forma de una cuenta en el mercado de dinero) por una unidad del activo subyacente que vale  $S$  pesos. Si tomamos el activo uno como el activo subyacente, activo dos el dinero, entonces el activo uno y el dos tienen sus respectivas tasas de dividendos  $q$  y  $r$ . La opción anterior puede ser considerada una opción de intercambio la cual cambia el activo dos por el activo uno. De forma similar, considérese una opción *put* americana como el derecho a intercambiar una unidad de activo subyacente el cual vale  $S$  pesos por  $K$  pesos en cualquier momento. La pregunta es, qué pasaría si se intercambia el rol del activo subyacente y el dinero en efectivo en la opción *put*. Ahora, la nueva *put* americana puede ser considerada como una equivalente a la usual *call* americana ya que ambas opciones confieren a sus poseedores el mismo derecho de intercambiar dinero por

el activo subyacente. Si se usa  $P(S, \tau; K, r, q)$  para denotar la función de valuación de la *put* americana, entonces la función de valuación de la *put* americana modificada (después del intercambio de rol entre el activo subyacente y el dinero en efectivo) está dada por  $P(K, \tau; S, q, r)$ , donde  $S$  y  $K$  son intercambiados y también para  $r$  y  $q$ . Ya que la *put* americana modificada es equivalente a la *call* americana, tenemos lo siguiente:

$$C(S, \tau; K, r, q) = P(K, \tau; S, q, r). \quad (3.16)$$

La simetría entre las funciones de valuación de las opciones americanas *put* y *call* es llamada *relación de simetría put-call*.

Ahora, se establecerá la relación de simetría *put-call* para los precios de ejercicio para opciones americanas *put* y *call*. Sea  $S_P^*(\tau; r, q)$  y  $S_C^*(\tau; r, q)$  que denotan la frontera de ejercicio óptimo para las opciones americanas *put* y *call* sobre un activo que paga tasa de dividendos continua, respectivamente. Cuando  $S = S_C^*(\tau; r, q)$ , el dueño de la *call* está dispuesto a intercambiar  $K$  pesos en efectivo por una unidad del activo subyacente el cual vale  $S_C^*$  pesos, ó un peso en efectivo por  $\frac{1}{K}$  unidades del activo subyacente, lo que vale  $\frac{S_C^*}{K}$  pesos. De forma similar, cuando  $S = S_P^*(\tau; r, q)$ , el dueño de una *put* está dispuesto a intercambiar  $\frac{1}{S_P^*}$  unidades del activo. Si ambas opciones americanas, *put* y *call*, pueden ser consideradas como opciones de intercambio y los roles del dinero en efectivo y del activo son intercambiables, entonces la correspondiente relación de simetría *put-call* para los valores de ejercicio óptimos es:

$$S_C^*(\tau; r, q) = \frac{K^2}{S_P^*(\tau; r, q)}. \quad (3.17)$$

### Comportamiento de $S_P^*(\tau)$ cerca de la expiración

Por la expresión (3.17) y por la propiedad de  $S_C^*(\tau)$  de ser monótona creciente, se puede deducir que  $S_P^*(\tau)$  es una función de  $\tau$  monótona decreciente. Por la ecuación (3.17) resta validar que  $\tau \rightarrow 0^+$ , la cota superior para  $S_P^*(\tau)$  está dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} S_P^*(\tau; r, q) &= \frac{K^2}{\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S_C^*(\tau; q, r)} \\ &= \frac{K^2}{K \max\left(1, \frac{q}{r}\right)} = K \min\left(1, \frac{r}{q}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para la ecuación (3.18), se observa que cuando  $q \leq r$ , se tiene que  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S_P^*(\tau) = K$ . Ahora, incluso cuando  $q = 0$ ,  $S_P^*(\tau)$  es diferente de cero ya que  $S_P^*(\tau)$  es una función decreciente continua de  $\tau$  para  $\tau > 0$  y su límite superior igual a  $K$ . De forma que, es óptimo ejercer una opción *put* americana incluso cuando el

activo subyacente no pague dividendos. Por otro lado, cuando la tasa de interés es cero,  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} S_P^*(\tau)$  se vuelve cero. Entonces sigue que  $S_P^*(\tau) = 0$  para  $\tau > 0$  ya que  $S_P^*(\tau)$  es una función decreciente de  $\tau$ . Por lo que se concluye que nunca es óptimo ejercer prematuramente una opción *put* americana cuando la tasa de interés es cero.

El entendimiento del comportamiento asintótico de  $S_P^*(\tau)$  cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  posee grandes retos matemáticos. Evans, Kuske y Keller (ver referencia [12]), mostraron que la expansión asintótica de  $S_P^*(\tau)$  cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  tiene la siguiente representación analítica:

1.  $0 \leq q < r$

$$S_P^*(\tau) \sim K - K\sigma \sqrt{\tau \ln \left( \frac{\sigma^2}{8\pi\tau(r-q)^2} \right)}; \quad (3.19)$$

2.  $q = r$

$$S_P^*(\tau) \sim K - K\sigma \sqrt{2\tau \ln \left( \frac{1}{4\sqrt{\pi}q\tau} \right)}; \quad y \quad (3.20)$$

3.  $q > r$

$$S_P^*(\tau) \sim \frac{r}{q} K \left( 1 - \sigma\alpha\sqrt{2\tau} \right). \quad (3.21)$$

Aquí,  $\alpha$  es una constante numérica que satisface la siguiente ecuación:

$$-\alpha^3 e^{\alpha^2} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1 - 2\alpha^2}{4}.$$

### Comportamiento de $S_P^*(\tau)$ a tiempo infinito de expiración

Siguiendo un proceso similar al de la opción americana *call* perpetua, el valor de una opción americana perpetua *put* se deduce a partir de:

$$P_{\infty}(S; K, q) = \frac{-S_{\infty, P}^*}{\mu_-} \left( \frac{S}{S_{\infty, P}^*} \right)^{\mu_-}. \quad (3.22)$$

Aquí,  $S_{\infty, P}^*$  denota el valor de ejercicio óptimo a tiempo infinito de expiración y su valor está dado por:

$$S_{\infty, P}^* = \frac{\mu_-}{\mu_- - 1} K, \quad (3.23)$$

dónde,

$$\mu_- = \frac{-\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} < 0.$$

Se puede ver que:

$$S_{\infty, P}^*(r, q) = \frac{K^2}{S_{\infty, C}^*(q, r)}, \quad (3.24)$$

lo que es consistente con la relación dada por ( 3.17).

### 3.1.5. Call americana sobre un activo de dividendo simple

Se ha explicado que cuando un activo hace pagos discretos de dividendos, el precio cae por el monto del dividendo justo después de la fecha de pago si no hay otros factores que incidan en el precio del activo. Estudios empíricos muestran que la caída relativa del precio del activo en proporción al monto del dividendo no es significativamente diferente de uno. En el desarrollo siguiente, por simplicidad, se asumirá que el precio del activo cae por el mismo monto que el valor del dividendo, justo después de la fecha de este. Se dice que una opción esta *protegida de dividendos* si el valor de la opción es invariante a la elección de las políticas de dividendo. Esto se hace mediante el ajuste del precio de ejercicio en relación al monto del dividendo. Aquí, se considerarán los efectos de dividendos discretos sobre las políticas de ejercicio temprano para opciones americanas que no estan protegidas contra los dividendos, esto es, el precio de ejercicio no está rebajado (para opciones *call*) ni elevado (para opciones *put*) por el monto del dividendo.

#### Políticas de ejercicio temprano

Dado que el poseedor de una *call* americana sobre un activo que paga dividendos discretos no recibirá algún dividendo en los periodos que hay entre las sucesivas fechas de dividendo, no es óptimo ejercer en cualquier momento que no sea fecha de pago de dividendo. Para estos tiempos entre fechas de dividendos, el derecho de ejercicio temprano no es efectivo. Si la opción se ejercerá, las posibles elecciones de tiempo son aquellos instantes antes del momento del pago de un dividendo. Como resultado, el propietario tiene derechos sobre el activo antes de que se cobre el dividendo y recibe este en el instante de pago. Se explorarán las condiciones bajo las cuales el poseedor de tal opción *call* americana podría elegir de manera óptima el ejercicio de su opción.

En la discusión siguiente, es más conveniente caracterizar la dependencia temporal de la frontera de ejercicio temprano usando como variable temporal a  $t$ . Se considera una *call* americana que paga sólo un dividendo discreto de un monto determinado  $D$  en la fecha conocida  $t_d$ . Sea  $S_d^-$  ( $S_d^+$ ) que denota el precio del activo a tiempo  $t_d^-$  ( $t_d^+$ ) lo cual es inmediatamente antes (después) de la fecha de dividendos  $t_d$ . Si la *call* americana se ejerce en  $t_d^-$ , el valor de la *call* se vuelve  $S_d^- - K$ . En otro caso, el valor del activo cae a  $S_d^+ = S_d^- - D$  justo después de que el dividendo se realiza. Ya que no hay más dividendos discretos después del tiempo  $t_d$ , la función de valuación de la *call* americana se comporta como la de su contraparte europea para  $t > t_d^+$ . Para impedir oportunidades de arbitraje,

la función de valuación debe ser continua en del instante en que ocurre el dividendo, ya que el poseedor de la opción *call* no recibe pago de dividendo en la fecha de este (a diferencia del poseedor del activo).

Partiendo de la expresión ( 2.19), se deduce que la cota inferior para el valor de una *call* americana en  $t_d^+$  es  $S_d^+ - Ke^{-r(T-t_d^+)}$ , donde  $T - t_d^+$  es el tiempo de expiración. En cuanto al tiempo de expiración se refiere, las cantidades  $T - t_d$ ,  $T - t_d^+$  y  $T - t_d^-$  son consideradas iguales. En virtud de la continuidad del valor de la *call* al cruzar la fecha de dividendo, la cota inferior para el valor de la *call* a tiempo  $t_d^-$  podría también ser igual a  $S_d^+ - Ke^{-r(T-t_d)} = (S_d^- - D) - Ke^{-r(T-t_d)}$ . Notar que la cota inferior para el valor de la *call* en  $t_d^-$  es afectado por  $D$  en anticipación del monto de dividendo discreto conocido  $D$  en el siguiente instante. Ahora, si ocurre que el valor de la cota inferior en  $t_d^-$  se vuelve menor que la utilidad de ejercicio de  $S_d^- - K$  cuando  $D$  es lo suficientemente grande. Se comparan las siguientes dos cantidades: utilidad al ejercicio  $E = S_d^- - K$  y la cota inferior del valor de la *call*  $B = (S_d^- - D) - Ke^{-r(T-t_d)}$ . Supongamos que  $E \leq B$ , esto es

$$S_d^- - K \leq (S_d^- - D) - Ke^{-r(T-t_d)} \quad \text{ó} \quad D \leq K \left[ 1 - e^{-r(T-t_d)} \right], \quad (3.25)$$

entonces nunca es óptimo ejercer la *call* americana en  $t_d^-$ . Esto es porque en cualquier valor del precio del activo  $S_d^-$  la *call* americana es más valiosa cuando se conserva que cuando se ejerce. Cuando el dividendo discreto  $D$  es significativo, en particular cuando  $D > K \left[ 1 - e^{-r(T-t_d)} \right]$ , entonces se vuelve óptimo ejercer en  $t_d^-$  cuando el precio del activo  $S_d^-$  está por encima de un valor umbral. Esta condición sobre  $D$  da una de las condiciones necesarias para el comienzo del ejercicio temprano. El monto de dividendo  $D$  debe ser lo suficientemente grande para compensar la pérdida del valor temporal del precio de ejercicio, donde el monto de pérdida está dado por  $K \left[ 1 - e^{-r(T-t_d)} \right]$ .

Sea  $C_d(S, t)$  que denota la función de valuación de una opción *call* americana con un dividendo, con  $t$  como la variable del tiempo. En virtud de la propiedad de continuidad del valor de la *call* en la fecha de dividendo, se tiene que

$$C_d(S_d^-, t_d^-) = c(S_d^- - D, t_d^+), \quad (3.26)$$

donde  $c(S^- - D, t_d^+)$  es el valor de la *call* dado por la fórmula de Black-Scholes con precio del activo  $S_d^- - D$  y tiempo  $t_d^+$ . Para entender mejor la decisión de ejercicio temprano en  $t_d^-$ , se presenta la gráfica de la función de valuación de la *call* ( 3.4), la utilidad de ejercicio  $E$  (correspondiente a la línea  $l_2 : B = S_d^- - D - Ke^{-r(T-t_d)}$ ) contra el precio del activo  $S_d^-$  (Ver Figura 5.4). La línea de utilidad de ejercicio  $l_1$  se encuentra en el lado izquierdo de la línea de cota inferior  $l_2$  cuando  $D > K \left[ 1 - e^{-r(T-t_d)} \right]$ . Ahora, la curva de valor de la *call* puede intersectar (no tangencialmente) la línea de utilidad al ejercicio  $l_1$

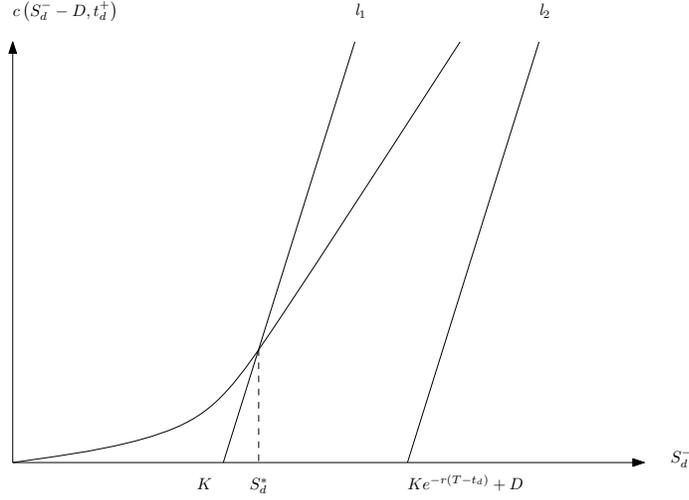


Figura 3.4: Para  $S_d^- > S_d^*$ , la curva de valor de la *call* europea  $V = c(S_d^- - D, t_d^+)$  permanece por debajo de la línea de utilidad al ejercicio  $l_1 : E = S_d^- - K$  cuando  $l_1$  está en el lado derecho de la línea  $l_2 : B = S_d^- - D - Ke^{-r(T-t_d)}$ . Aquí,  $S_d^*$  es el valor de  $S_d^-$  en el cual la curva de valor de la *call* europea corta la línea de utilidad al ejercicio  $l_1$ .

en algún precio crítico del activo  $S_d^*$ , el cual está dado por la solución de la siguiente ecuación

$$c(S_d^- - D, t_d) = S_d^- - K. \quad (3.27)$$

Se puede mostrar matemáticamente que cuando  $D \leq K [1 - e^{r(T-t_d)}]$ , no hay solución para la ecuación (3.27), un resultado que es consistente con la condición necesaria sobre  $D$  discutida anteriormente. Cuando el dividendo discreto es tan grande tal que  $D > K [1 - e^{r(T-t_d)}]$ , la *call* americana permanece viva después de la fecha de dividendo sólo si  $S_d^- < S_d^*$ . Cuando  $S_d^-$  está en o sobre  $S_d^*$ , podría ser óptimo ejercer la *call* en  $t_d^-$ . De forma que, el valor de la *call* americana en tiempo  $t_d^-$  está dado por

$$C_d(S_d^-, t_d^-) = \begin{cases} c(S_d^- - D, t_d^+) & \text{cuando } S_d^- < S_d^* \\ S_d^- - K & \text{cuando } S_d^- \geq S_d^*. \end{cases}$$

Si la *call* americana no es ejercida optimamente en  $t_d^-$ , entonces su valor permanece invariable a través de los lapsos de tiempo entre la fecha de dividendo. Notar que  $S_d^*$  depende de  $D$ , decrece en valor cuando  $D$  crece. Esto concuerda con la intuición financiera de que la propensión de ejercicio anticipado óptimo se haga mayor (correspondiente a un valor más bajo de  $S_d^*$ ) con un mayor pago de dividendo discreto.

En suma, el poseedor de una opción *call* americana sobre un activo que paga un dividendo discreto ejerce la *call* optimamente sólo en el instante anterior a la fecha de dividendo, a condición de que  $S_d^- \geq S_d^*$ , donde  $S_d^*$  satisfaga la condición (3.27). También,  $S_d^*$  existe sólo cuando  $D > K [1 - e^{-r(T-t_d)}]$ , lo que implica que el dividendo es lo suficientemente grande para compensar la pérdida en la fecha de ejercicio.

### Fórmula analítica de valuación para una *call* americana con un dividendo

Ya que una *call* americana sobre un activo que paga dividendos discretos conocidos puede ser ejercida sólo en los momentos inmediatos anteriores a las fechas de dividendo, la *call* americana se puede replicar mediante una opción europea compuesta que coincida con las fechas de dividendo. La existencia de esta estrategia de replicación hace posible la obtención de una fórmula de valuación para una *call* americana sobre un activo que paga dividendos discretos.

Si el precio del activo total  $S$  sigue un movimiento browniano geométrico, entonces existe la posibilidad de que los dividendos no puedan ser pagados, ya que el valor del activo podría caer por debajo del monto del dividendo en la fecha de pago. Ahora, asumimos que el precio neto del activo del valor presente de los dividendos en depósito, denotado por  $\tilde{S}$ , sigue un movimiento browniano geométrico. Se nombra a  $\tilde{S}$  como el componente de riesgo del precio del activo.

Supongamos que el activo paga un dividendo discreto simple de monto  $D$  en tiempo  $t_d$ , entonces el componente de riesgo de  $S$  se define como

$$\tilde{S} = \begin{cases} S & \text{para } t_d^+ \leq t \leq T \\ S - De^{-r(t_d-t)} & \text{para } t \leq t_d^- \end{cases}$$

Notar que  $\tilde{S}$  es continua aún en la fecha de dividendo. Los supuestos de Black-Scholes sobre el movimiento del precio de un activo se modifican de manera en que la medida neutral al riesgo del componente de riesgo  $\tilde{S}$  sigue el movimiento browniano geométrico

$$\frac{d\tilde{S}}{\tilde{S}} = rdt - \sigma dZ, \quad (3.28)$$

donde  $\sigma$  es la volatilidad de  $\tilde{S}$ .

Ahora, se obtendrá la fórmula de valuación para una opción americana *call* que paga un dividendo discreto  $D$  a tiempo  $t_d$ , donde  $D > K [1 - e^{-r(T-t_d)}]$ . Sea  $C_d(\tilde{S}, t)$  que denota el precio de una *call* americana de un dividendo y  $c(\tilde{S}, t)$  que denota la función de valuación *call* de Black-Scholes, donde  $t$  es la variable temporal. Sea  $\tilde{S}_d$  que denota el componente de riesgo del valor del activo en la fecha de dividendo  $t_d$ . Sea  $\tilde{S}_d^*$  que denota el valor crítico del componente

de riesgo en  $t = t_d$ , sobre el cual es óptimo el ejercicio. Este valor crítico  $\tilde{S}_d^*$  es la solución a la siguiente ecuación (ver ( 3.27))

$$\tilde{S}_d + D - K = c(\tilde{S}_d, t_d). \quad (3.29)$$

La opción *call* americana de un dividendo puede ser replicada por una opción europea compuesta cuya primera fecha de expiración coincida con la fecha de dividendo  $t_d$ . La opción compuesta paga en  $t_d$  ya sea  $\tilde{S}_d + D - K$  si  $\tilde{S}_d \geq \tilde{S}_d^*$  o una opción europea *call* con precio de ejercicio  $K$  y tiempo de expiración  $T - t_d$  si  $\tilde{S}_d < \tilde{S}_d^*$ . Sea  $\Psi(\tilde{S}_d, \tilde{S}; t_d, t)$  que denota la función de densidad de  $\tilde{S}_d$  a tiempo  $t_d$ , dado el precio del activo  $\tilde{S}$  en un tiempo anticipado  $t < t_d$ . Para  $t < t_d$ , el precio a tiempo  $t$  de la opción *call* americana de un dividendo está dada por

$$\begin{aligned} C_d(\tilde{S}, t) &= e^{-r(t_d-t)} \left[ \int_{\tilde{S}_d^*}^{\infty} [\tilde{S}_d - (K - D)] \Psi(\tilde{S}_d, \tilde{S}; t_d, t) d\tilde{S}_d \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tilde{S}_d^*} c(\tilde{S}_d, t_d) \Psi(\tilde{S}_d, \tilde{S}; t_d, t) d\tilde{S}_d \right], \quad t < t_d. \end{aligned} \quad (3.30)$$

El primer término puede ser interpretado como el valor de una *call* europea con dos diferentes precios de ejercicio. El precio de ejercicio  $\tilde{S}_d^*$  determina la valuación de la opción *call* en la expiración. La fórmula de valuación de una opción *call* americana de un dividendo está dada por

$$\begin{aligned} &C_d(\tilde{S}, t) \\ &= \tilde{S}N(a_1) - (K - D)e^{-r(t_d-t)}N(a_2) - Ke^{-r(T-t)}N_2\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right) \\ &\quad + \tilde{S}N_2\left(-a_1, b_1; -\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right) \\ &= \tilde{S}\left[1 - N_2\left(-a_1, b_1; \sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right)\right] + De^{-r(t_d-t)}N(a_2) \\ &\quad - K\left[e^{-r(t_d-t)}N(a_2) + e^{-r(T-t)}N_2\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde

$$a_1 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}}{\tilde{S}_d^*} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_d - t)}{\sigma \sqrt{t_d - t}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma \sqrt{t_d - t},$$

$$b_1 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}}{\tilde{K}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma \sqrt{T - t},$$

*Fórmula de aproximación de Black*

Sea  $c(S, t)$  que denota la función de valuación de una *call* europea, donde la variable temporal  $\tau$  es el tiempo restante para la expiración. Black (1975) hizo la siguiente propuesta para el valor aproximado de una *call* americana de un dividendo

$$\max \left\{ c(\tilde{S}, T - t; K), c(S, t_d - t; K) \right\}.$$

El primer término da el valor de una *call* de un dividendo cuando la probabilidad de ejercicio temprano es cero mientras que el segundo término asume que la probabilidad de ejercicio temprano es uno. Ya que ambos casos representan políticas de ejercicio temprano sub-óptimas, se puede inferir que

$$C_d(\tilde{S}, T - t; K) \geq \max \left\{ c(\tilde{S}, T - t; K), c(S, t_d - t; K) \right\}, \quad t < t_d. \quad (3.32)$$

### 3.1.6. Opciones *put* americanas de uno o más dividendos

Considérese una opción *put* americana sobre un activo que paga dividendos discretos durante la vida de la opción. Las políticas de ejercicio temprano óptimas correspondientes son más complicadas comparadas a su contraparte *call*. Dentro de un intervalo de tiempo corto antes de la fecha de pago de dividendo, el poseedor de la *put* podría optar por no ejercer, esto a cualquier nivel de precios debido a la proximidad del dividendo. Esto es, el poseedor prefiere aplazar el ejercicio hasta inmediatamente después de la fecha de dividendo con el fin de recibirlo. Durante el intervalo de tiempo desde la fecha del último dividendo, el comportamiento de la frontera de ejercicio temprano es como el de una *put* americana sobre un activo que no paga dividendos, entonces el precio de ejercicio óptimo  $S^*(t)$  aumenta monotonamente conforme aumenta  $t$ . Para tiempos que están entre fechas de dividendos o que son anteriores a la fecha del primer dividendo,  $S^*(t)$  podría aumentar o disminuir con el crecimiento de  $t$  o hacerse cero. Debido a la complejidad de las políticas de ejercicio óptimo, no existe una fórmula analítica para opciones americanas *put* sobre activos que pagan dividendos discretos.

### Opciones *put* americanas de un dividendo

Primero, se consideran las políticas de ejercicio temprano para el modelo de opciones *put* americanas de un dividendo. Sea la fecha de dividendo  $t_d$ , la fecha de expiración  $T$  y el monto de dividendo  $D$ . Ya que la política de ejercicio en  $t > t_d$  es idéntica a la de una *put* americana sobre el mismo activo con dividendo cero, es suficiente para considerar la política de ejercicio a tiempo  $t$  antes de la fecha de dividendo. Supongamos que la *put* americana se ejerce a tiempo  $t$ , entonces el interés recibido desde  $t$  hasta  $t_d$  visto como la ganancia generada por el cambio del valor de precio de ejercicio  $K$  en el tiempo es  $K [e^{r(t_d-t)} - 1]$ , donde  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo. Cuando la ganancia del valor en el tiempo del precio de ejercicio es menor que el dividendo discreto, es decir,  $K [e^{r(t_d-t)} - 1] < D$ , el ejercicio anticipado de una *put* americana nunca es óptimo. Se observa que el ingreso por intereses  $K [e^{r(t_d-t)} - 1]$  depende de  $t_d - t$ , y su valor crece cuando  $t_d - t$  crece. Existe un valor crítico  $t_s$  tal que

$$K [e^{r(t_d-t_s)} - 1] = D. \quad (3.33)$$

Resolviendo para  $t_s$ , se obtiene

$$t_s = t_d - \frac{1}{r} \ln \left( 1 + \frac{D}{K} \right). \quad (3.34)$$

Dentro del intervalo  $[t_s, t_d]$ , nunca es óptimo ejercer una *put* americana.

Cuando  $t < t_s$ , se tiene  $K [e^{r(t_d-t)} - 1] > D$ . Bajo tales condiciones, el ejercicio anticipado puede ser óptimo cuando el precio del activo está por debajo de cierto valor crítico. El precio de ejercicio óptimo  $S^*(t)$  es influido por dos efectos compensatorios, el valor en el tiempo del precio de ejercicio y el dividendo discreto. Cuando  $t$  se aproxima a  $t_d$ , el efecto del dividendo se hace más dominante de modo que la *put* americana puede ser ejercida sólo cuando está muy *in-the-money*. Así,  $S^*(t)$  decrece así como  $t$  crece y se aproxima a  $t_s$ . Cuando  $t$  está suficientemente lejos de  $t_s$ , el efecto del dividendo disminuye de tal forma que la política de ejercicio anticipado se hace como la de una *put* americana sobre un activo de dividendo cero. En este caso,  $S^*(t)$  se hace una función creciente de  $t$ . Combinando estos resultados, la gráfica de  $S^*(t)$  contra  $t$  asemeja una forma de joroba para el periodo de tiempo anterior a  $t_s$ .

En la expresión ( 3.34),  $t_s$  crece conforme  $r$  crece, entonces el intervalo de tiempo de *no ejercicio*  $[t_s, t_d]$  se reduce con una tasa de interés más alta. Ya que el ejercicio temprano de una *put* americana resulta en la ganancia del valor en el tiempo del precio de ejercicio, una tasa de interés más alta implica un costo de oportunidad más alto del poseedor de una opción americana *put in-the-money*. De forma que, la pensión de ejercicio anticipado crece.

En suma, la frontera de ejercicio temprano óptimo  $S^*(t)$  de una *put* americana de un dividendo presenta el siguiente comportamiento.

1. Cuando  $t < t_s$ ,  $S^*(t)$  aumenta primero, después disminuye suavemente con el crecimiento de  $t$  hasta que caiga a cero el valor en  $t_s$ .
2.  $S^*(t)$  permanece en valor cero en el intervalo de tiempo  $[t_s, t_d]$ .
3. Cuando  $t \in (t_d, T]$ ,  $S^*(t)$  es una función monótona creciente de  $t$  con  $S^*(T) = K$ .

### 3.2. Formulaciones para valuar opciones americanas

En esta sección, se consideran dos formulaciones de valuación de modelos de opciones americanas, llamados, la formulación de complementariedad lineal y la formulación como un problema de paro óptimo. Primero, se mostrarán las desigualdades que son satisfechas por la función de valuación de una opción americana, y de las cuales deriva la formulación de complementariedad lineal. Alternativamente, la valuación de una opción americana puede ser vista como el supremo de la expectativa de utilidad al ejercicio en todos los posibles momentos de paro. Se puede mostrar que la solución a la formulación de tiempo óptimo de paro satisface la formulación de complementariedad lineal. A partir de la teoría física del proceso de difusión controlada, se podrá obtener una representación integral de la fórmula de valuación de una opción americana en términos de la frontera de ejercicio óptimo. También se mostrará como obtener la representación integral de la recompensa al ejercicio temprano usando el argumento financiero de retrasar la compensación al ejercicio. Usando el hecho de que el precio de ejercicio óptimo es el precio del activo al cual es indiferente ejercer o no ejercer, se deduce la ecuación integral para el precio de ejercicio óptimo.

#### 3.2.1. Formulación de complementariedad lineal

La valuación de una opción americana puede ser formulada como un problema de frontera libre, donde la frontera libre es la frontera de ejercicio óptimo la cual separa las regiones de continuidad y de paro. Cuando el precio del activo cae dentro de la región de paro, la opción *call* americana podría ser ejercida de forma óptima y su valor está dado por

$$C(S, \tau) = S - K, \quad S \geq S^*(\tau). \quad (3.35)$$

Esta función de utilidad al ejercicio,  $C = S - K$ , no satisface la ecuación de Black-Scholes ya que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial}{\partial S} + r \right] (S - K) = qS - rK. \quad (3.36)$$

En la región de paro, se observa  $S \geq S^*(\tau) > S^*(0^+) = K \max\left(1, \frac{r}{q}\right)$  entonces  $qS - rK > 0$ . El valor de la *call*  $C(S, \tau)$  se observa con la siguiente desigualdad

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} + rC > 0 \quad \text{para } S \geq S^*(\tau). \quad (3.37)$$

La desigualdad anterior se puede deducir también a partir del siguiente argumento financiero. Sea  $\Pi$  que denota el valor en riesgo del portafolio de cobertura definido como

$$\Pi = C - \Delta S \quad \text{donde } \Delta = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

En la región de continuación donde es óptimo conservar viva la opción americana, en virtud del argumento de no arbitraje, se tiene  $d\Pi = r\Pi dt$ . Sin embargo, el ejercicio anticipado óptimo de la *call* americana ocurre sí y sólo sí la tasa de retorno para el portafolio de cobertura libre de riesgo es menor que la tasa de interés libre de riesgo, es decir,

$$d\Pi < r\Pi dt. \quad (3.38)$$

Mediante el cálculo de  $d\Pi$  usando el lema de Itô, la desigualdad anterior puede mostrarse como equivalente a la expresión (3.37). Entonces se concluye que

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} + rC \geq 0, \quad S > 0 \text{ y } \tau > 0, \quad (3.39)$$

donde la desigualdad se mantiene cuando  $(S, \tau)$  se encuentra en la región de continuación. Por otro lado, el valor de la *call* americana siempre está por arriba del valor intrínseco  $S - K$  cuando  $S < S^*(\tau)$  y es igual al valor intrínseco cuando  $S \geq S^*(\tau)$ , esto es,

$$C(S, \tau) \geq S - K, \quad S > 0 \text{ y } \tau > 0. \quad (3.40)$$

En la ecuación anterior, la igualdad se sostiene cuando  $(S, \tau)$  está en la región de paro. Ya que  $(S, \tau)$  está también en la región de continuación, la igualdad se sostiene en uno de las desigualdades de variación. Entonces se deduce que

$$\left[ \frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} + rC \right] [C - (S - K)] = 0, \quad (3.41)$$

para valores de  $S > 0$  y  $\tau > 0$ . Para completar la formulación del modelo, se tiene que incluir la condición terminal de utilidad siguiente

$$C(S, 0) = \max(S - K, 0). \quad (3.42)$$

Las desigualdades ( 3.39), ( 3.40) y ( 3.41) junto con la condición auxiliar ( 3.42) constituyen la *formulación de complementariedad lineal* del modelo de valuación de una opción americana *call* (Dewynne, referencia [13]).

Para la anterior formulación de complementariedad lineal, se pueden deducir las siguientes dos propiedades para el precio de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$  de una *call* americana.

1. Es el precio más bajo del activo para el cual el valor de la *call* americana es igual a la utilidad de ejercicio.
2. Es el precio del activo al cual es indiferente ejercer o no ejercer la *call* americana.

Bunch y Johnson (ver referencia [14]) presentaron otra propiedad interesante de  $S^*(\tau)$ . Es el precio más bajo al cual el valor de la *call* americana no depende del tiempo de expiración, es decir,

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = 0 \quad \text{para } S = S^*(\tau). \quad (3.43)$$

Esto concuerda con la intuición financiera de que en el momento en que es óptimo el ejercicio inmediato, no importa cuanto tiempo falte para la maduración. Una demostración sencilla se presenta en seguida. Sobre la frontera de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$ , se tiene que

$$C(S^*(\tau), \tau) = S^*(\tau) - K.$$

Diferenciando ambos lados de la ecuación con respecto a  $\tau$ , se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}(S^*(\tau), \tau) + \frac{\partial C}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) \frac{dS^*(\tau)}{d\tau} = \frac{dS^*(\tau)}{d\tau}.$$

Usando la condición de tangencia  $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S^*(\tau), \tau) = 1$ , se obtiene el resultado en la ecuación ( 3.43).

### 3.2.2. Problema de paro óptimo

La valuación de una opción americana puede también ser formulada como un *problema de paro óptimo*. Un tiempo de paro  $t^*$  puede ser considerado como una función que asume valores sobre un intervalo  $[0, T]$  tal que la decisión de «parar a tiempo  $t^*$ » es determinada por la información sobre la trayectoria del precio del activo  $S_u$ ,  $0 \leq u \leq t^*$ . Considérese una opción *put* americana y supongamos que es ejercida en tiempo  $t^*$ ,  $t^* < T$ , la utilidad es  $\max(K - S_{t^*}, 0)$ . El valor razonable para la opción *put* con utilidad en  $t^*$  definida anteriormente está dado por

$$E_Q^t \left[ e^{-r(t^*-t)} \max(K - S_{t^*}, 0) \right],$$

donde  $E_Q^t$  denota la esperanza bajo la medida neutral de riesgo  $Q$  condicionada a  $S_t = S$ . Es válido prever que  $t^*$  es un tiempo de paro, independiente de si es determinista o aleatorio.

Ya que el poseedor puede ejercer la opción en cualquier momento durante la duración de ésta y él ó ella elige el tiempo óptimo de ejercicio tal que la esperanza mencionada antes de la utilidad descontada es maximizada, se deduce que el valor de la *put* americana está dado por (ver Karatzas referencia [15])

$$P(S, t) = \sup_{t \leq t^* \leq T} E_Q^t \left[ e^{-r(t^*-t)} \max(K - S_{t^*}, 0) \right], \quad (3.44)$$

donde  $t$  es la variable temporal y el supremo es tomado sobre todos los posibles tiempos de paro. Notar que  $P(S, t)$  siempre permanece en o sobre la utilidad y  $P(S, t)$  iguala la utilidad en el tiempo de paro  $t^*$ . El supremo anterior se alcanza en el tiempo de paro óptimo (Krylov, ver referencia [16]) entonces

$$t_{opt}^* = \inf_u \{t \leq u \leq T : P(S_u, u) = \max(K - S_u, 0)\}, \quad (3.45)$$

el cual es el primer tiempo al que la *put* americana cae a su valor de recompensa.

Ahora la intención es verificar que la solución al problema complementario lineal da el valor de la *put* americana esto concuerda con la expresión (3.44), donde el tiempo de paro óptimo está determinado por la ecuación (3.11). Se presenta el renombrado *Teorema de muestreo opcional*. En una de sus formas, establece que si  $(M_t)_{t \geq 0}$  es una martingala continua con respecto a la filtración  $(\mathbb{F}_t)_{t \geq 0}$  y si  $t^*$  es un tiempo de paro acotado con  $t^* > t$ , entonces

$$E[M_{t^*} | \mathbb{F}_t] = M_t.$$

Para cualquier tiempo de paro  $t^*$ ,  $t < t^* < T$ , se aplica el lema de Itô a la solución  $P(S, t)$  de la formulación complementaria lineal y se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{-rt^*} P(S_{t^*}, t^*) &= e^{-rt} P(S_t, t) \\
&+ \int_t^{t^*} e^{-ru} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \right. \\
&+ \left. \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial}{\partial S} - r \right] P(S_u, u) du \\
&+ \int_t^{t^*} e^{-ru} \sigma S \frac{\partial P}{\partial S}(S_u, u) dZ_u.
\end{aligned}$$

Ahora, el integrando de la primera integral es no-positivo como se deduce a partir de la desigualdad ( 3.38). Cuando se toma la esperanza de la martingala representada por la segunda integral, se obtiene

$$E_Q^t \left[ \int_t^{t^*} e^{-ru} \sigma S \frac{\partial P}{\partial S}(S_u, u) dZ_u \right] = 0,$$

en virtud del Teorema de muestreo opcional. Estos resultados conducen a

$$P(S, t) \geq E_Q^t \left[ e^{-r(t^*-t)} P(S_{t^*}, t^*) \right].$$

Más aún, desde que el resultado anterior es válido para cualquier tiempo de paro y  $P(S_{t^*}, t^*) \geq \max(K - S_{t^*}, 0)$ , se puede deducir

$$\begin{aligned}
P(S, t) &\geq \sup_{t \leq t^* \leq T} E_Q^t \left[ e^{-r(t^*-t)} P(S_{t^*}, t^*) \right] \\
&\geq \sup_{t \leq t^* \leq T} E_Q^t \left[ e^{-r(t^*-t)} \max(K - S_{t^*}, 0) \right]. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos se elige el tiempo de paro  $t_{opt}^*$  como se define en la expresión ( 3.45), entonces para  $u$  entre  $t$  y  $t_{opt}^*$ , se observa que  $P(S_u, u)$  permanece en la región continua, ya que  $t_{opt}^*$  es el primer tiempo al que  $P(S_{t_{opt}^*}, t_{opt}^*) = \max(K - S_{t_{opt}^*})$ . Por lo que se tiene

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial}{\partial S} - r \right] P(S_u, u) = 0.$$

Aplicando el Teorema de muestreo opcional otra vez, se obtiene

$$E_Q^t \left[ \int_t^{t_{opt}^*} e^{-ru} \sigma S \frac{\partial P}{\partial S}(S_u, u) dZ_u \right] = 0.$$

Al juntar estos resultados, se observa que la cota inferior de  $P(S, t)$  como se describe en la expresión ( 3.46) es alcanzada en  $t^* = t_{opt}^*$ , donde

$$P(S, t) = E_Q^t \left[ e^{-r(t^* - t_{opt}^*)} \max \left( K - S_{t_{opt}^*}, 0 \right) \right]. \quad (3.47)$$

Combinando las expresiones ( 3.46) y ( 3.47), se deduce que  $t_{opt}^*$  es un tiempo de paro óptimo y los resultados en las ecuaciones ( 3.44) y ( 3.45) se obtienen.

### 3.2.3. Representación integral de la recompensa al ejercicio temprano

De acuerdo con el artículo citado [16], el valor de una *put* americana está dado por

$$\begin{aligned} P(S, t) = & E_Q^t \left[ e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) \right] \\ & + \int_t^T e^{-r(u-t)} E_Q^u \left[ (rK - qS_u) \mathbb{I}_{\{S_u < S_{(u)}^*\}} \right] du. \end{aligned} \quad (3.48)$$

El primer término representa el valor usual de una *put* europea mientras que el segundo término representa la recompensa al ejercicio temprano. Sea  $\Psi(S_u; S)$  que denota la función de densidad de  $S_u$  condicionada sobre  $S_t = S$  bajo la medida de riesgo neutral  $Q$ . Se puede reescribir la fórmula anterior como

$$\begin{aligned} P(S, t) = & e^{-r(T-t)} \int_0^K (K - S_T) \Psi(S_T; S) dS_T \\ & + \int_t^T e^{-r(u-t)} \int_0^{S_{(u)}^*} (rK - qS_u) \Psi(S_u; S) dS_u du. \end{aligned} \quad (3.49)$$

La recompensa al ejercicio temprano se vuelve positiva ya que

$$rK - qS_u > 0 \quad \text{como} \quad S_u < S_{(u)}^* < \frac{rK}{q}.$$

#### Compensación al ejercicio retardado

Se quiere presentar un argumento intuitivo de que la recompensa al ejercicio anticipado puede ser interpretada como el costo de la compensación al ejercicio retardado (Jamshidian, ver referencia [18]). Si la opción americana se mantiene con vida para todos los valores del precio del activo hasta el momento de la expiración, el poseedor necesita compensar mediante un flujo de efectivo continuo el hecho de que la opción pueda ser ejercida de manera óptima. Considérese el

intervalo de tiempo entre  $u$  y  $u + du$  y supongamos que  $S_u$  cae dentro de la región de paro, el monto de compensación pagado al poseedor de la *put* americana debería ser  $(rK - qS_u) du$  siempre y cuando el poseedor esté de acuerdo en no ejercer aun cuando sea óptimo hacerlo. Esto es porque el poseedor ganará intereses por  $rK du$  debido al precio de ejercicio recibido y pérdida del dividendo  $qS_u du$  por la posición corta del activo si el elige ejercer su *put*. La esperanza descontada para la compensación del flujo de efectivo continuo anterior está dada por

$$e^{-r(u-t)} \int_0^{S^*(u)} (rK - qS_u) \Psi(S_u; S) dS_u.$$

La integración del flujo de efectivo descontado anterior desde  $u = t$  hasta  $u = T$  da la recompensa al ejercicio anticipado de una opción *put* americana, la cual es precisamente el último término en la expresión ( 3.49).

### Valor asociado y condición de tangencia

Carr, Jarrow y Myneni (ver referencia [19]) usaron la estrategia de negociación dinámica para presentar una interpretación financiera de la continuidad de  $P$  y  $\frac{\partial P}{\partial S}$  a través de la frontera de ejercicio óptimo  $S^*(u)$ . Después de la compra de una *put* americana en el tiempo actual  $t$ , el inversionista ejercerá la opción instantáneamente siempre y cuando el precio del activo caiga por debajo del precio de ejercicio óptimo  $S^*(u)$  a tiempo  $u$  y compra de vuelta la *put* siempre que el precio del activo se eleve por encima de  $S^*(u)$ . Ya que las transacciones de convertir la opción *put* en la posesión de efectivo más una posición corta de un activo y viceversa todas ocurren sobre la frontera de ejercicio temprano, se requieren las condiciones de *valor asociado* y *tangencia* en el orden en que se asegura que estas transacciones son auto financiables, esto es, cada reestructuración que se lleve a cabo en el portafolio será financiada por los ingresos de la venta de la posición anterior.

### Representación analítica de la valuación de una *put* americana

Ahora se usará el tiempo para la expiración  $\tau$  como la variable temporal en la frontera de ejercicio óptimo  $S^*(\tau)$ . Las integrales en las expresiones ( 3.48) y ( 3.49) pueden ser evaluadas para dar la siguiente representación de la fórmula de valuación de la *put* americana

$$\begin{aligned} P(S, \tau) &= Ke^{-r\tau} N(-d_2) - Se^{-q\tau} N(-d_1) \\ &+ \int_0^\tau [rKe^{-r\xi} N(-d_{\xi,2}) - qSe^{-q\xi} N(-d_{\xi,1})] d\xi, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde  $\tau = T - t$  y

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau},$$

$$d_{\xi,1} = \frac{\ln \frac{S}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \xi}{\sigma \sqrt{\xi}}, \quad d_{\xi,2} = d_{\xi,1} - \sigma \sqrt{\xi},$$

La nueva variable de tiempo puede ser considerada como el periodo de tiempo hasta el tiempo actual. De acuerdo con que  $\xi = 0$  y  $\xi = \tau$  corresponden al tiempo actual y la fecha de expiración, respectivamente.

Tomando la tasa de interés  $r$  como cero, la recompensa al ejercicio anticipado se convierte en

$$- \int_0^\tau q S e^{-q\xi} N(-d_{\xi,1}) d\xi,$$

lo cual se ve como una cantidad no positiva. De cualquier forma, la recompensa al ejercicio anticipado debe ser no negativa. Para satisfacer ambas condiciones, se debe tener

$$\int_0^\tau q S e^{-q\xi} N(-d_{\xi,1}) d\xi = 0,$$

lo cual se satisface sólo en el caso en que  $S^*(\xi) = 0$  para todos los valores de  $\xi$ . El valor cero del precio de ejercicio óptimo implica que la *put* americana nunca sea ejercida. Bajo una tasa de interés cero, la ganancia en el valor en el tiempo por el ejercicio temprano desaparece. En este caso, el valor de la *put* americana es el mismo que el de su contraparte europea ya que el privilegio de ejercicio temprano se ha perdido.

#### Ecuaciones integrales para las fronteras de ejercicio óptimo

Si se aplica la condición de frontera:  $P(S^*(\tau), \tau) = K - S^*(\tau) = K - S^*(\tau)$  a la fórmula de valuación de la *put* (3.50), se obtiene la siguiente ecuación integral para  $S^*(\tau)$

$$\begin{aligned} K - S^*(\tau) &= K e^{-r\tau} N(-\tilde{d}_2) - S^*(\tau) e^{-q\tau} N(-\tilde{d}_1) \\ &+ \int_0^\tau \left[ r K e^{-r\xi} N(-\tilde{d}_{\xi,2}) \right. \\ &\left. - q S^*(\tau) e^{-q\xi} N(-\tilde{d}_{\xi,1}) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln \frac{S^*(\tau)}{K} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad \tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sigma \sqrt{\tau},$$

$$\tilde{d}_{\xi,1} = \frac{\ln \frac{S^*(\tau)}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \xi}{\sigma \sqrt{\xi}}, \quad \tilde{d}_{\xi,2} = \tilde{d}_{\xi,1} - \sigma \sqrt{\xi},$$

La solución para  $S^*(\tau)$  requiere el conocimiento de  $S^*(\tau - \xi)$ ,  $0 < \xi \leq \tau$ . El proceso de solución comienza con  $S^*(0)$  y la integración hacia atrás en el tiempo calendario (que es,  $\tau$  creciendo).

La ecuación integral definida en (3.51) puede ser usada para encontrar el precio de ejercicio óptimo en el caso límite en que  $\tau \rightarrow \infty$ . Sea  $S_P^*(\infty)$  que denota  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_P^*(\tau)$ , lo que corresponde al precio de ejercicio óptimo para la *put* americana. Tomando el límite cuando  $\tau \rightarrow \infty$  en la expresión (3.51), y observando que el valor de la europea perpetua es cero, se obtiene

$$K - S_P^*(\infty) = \int_0^\infty \left[ rK e^{-r\xi} N\left(-\frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{\xi}\right) - qS_P^*(\infty) e^{-q\xi} N\left(-\frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \sqrt{\xi}\right) \right] d\xi. \quad (3.52)$$

El primero y segundo términos en la integral anterior pueden simplificarse como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-r\xi} N(-\rho \sqrt{\xi}) d\xi &= \left. -\frac{e^{-r\xi}}{r} N(-\rho \sqrt{\xi}) \right|_0^\infty - \frac{\rho}{2r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}\xi} e^{-r\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2r} \left[ 1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 2r}} \right], \quad \rho = \frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}; \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e^{-q\xi} N(-\rho' \sqrt{\xi}) d\xi = \frac{1}{2q} \left[ 1 - \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + 2q}} \right], \quad \rho' = \frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (3.52), se obtiene

$$K - S_P^*(\infty) = \frac{K}{2} \left[ 1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 2r}} \right] - \frac{S_P^*(\infty)}{2} \left[ 1 - \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + 2q}} \right].$$

Reordenando los términos, se tiene

$$S_P^*(\infty) = \frac{1 + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 2r}}}{1 + \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + 2q}}} K = \frac{\mu_-}{\mu_- - 1} K, \quad (3.53)$$

donde  $\mu_-$  está definido por la ecuación ( 3.23).

Alternativamente, se usará la condición de tangencia:  $\frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) = -1$  a lo largo de  $S^*(\tau)$  para obtener otra ecuación integral para  $S^*(\tau)$ . Tomando derivadas parciales con respecto a  $S$  de los términos en la expresión ( 3.50) y haciendo que  $S = S^*(\tau)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + \frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) \\
&= 1 + \frac{\partial p}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) \\
&\quad + \int_0^\tau \left[ rKe^{-r\xi} \frac{\partial}{\partial S} N(-d_{\xi,2}) \Big|_{S=S^*(\tau)} - qe^{-q\xi} N(-d_{\xi,1}) \Big|_{S=S^*(\tau)} \right. \\
&\quad \left. - qSe^{-q\xi} \frac{\partial}{\partial S} N(-d_{\xi,1}) \Big|_{S=S^*(\tau)} \right] d\xi \\
&= N(\tilde{d}_1) - \int_0^\tau \left[ \frac{(r-q)e^{-q\xi}}{\sigma\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\frac{\tilde{d}_{\xi,1}^2}{2}} + qe^{-q\xi} N(-\tilde{d}_{\xi,1}) \right] d\xi. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

#### Representación analítica de la valuación de una *call* americana

Similar a la valuación de la *put* americana dada en la expresión ( 3.50), la representación analítica de función de valuación de la *call* americana está dada por

$$\begin{aligned}
C(S, \tau) &= Se^{-q\tau} N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \\
&\quad + \int_0^\tau [qSe^{-q\xi} N(d_{\xi,1}) - rKe^{-r\xi} N(d_{\xi,2})] d\xi. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

La correspondiente ecuación integral para la frontera de ejercicio temprano  $S_C^*(\tau)$  puede ser deducida si se supone que  $C(S_C^*(\tau), \tau) = S_C^*(\tau) - K$ . Esto da

$$\begin{aligned}
S_C^*(\tau) - K &= S_C^*(\tau) e^{-q\tau} N(\tilde{d}_1) - Ke^{-r\tau} N(\tilde{d}_2) \\
&\quad + \int_0^\tau [qS^*(\tau) e^{-q\xi} N(\tilde{d}_{\xi,1}) \\
&\quad - rKe^{-r\xi} N(\tilde{d}_{\xi,2})] d\xi. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

De forma similar, tomando el límite  $\tau \rightarrow \infty$  en la expresión ( 3.56), se puede deducir la función asintótica superior de la frontera de ejercicio temprano de la opción *call* americana.



# Valuación de opciones, esquemas numéricos

---

En el capítulo anterior se han obtenido formas de valuación de opciones para una variedad de modelos. Sin embargo, los modelos de opciones que se prestan a soluciones analíticas son limitados. En la mayoría de los casos, la valuación de opciones se relega a procesos numéricos. Métodos numéricos en los que están incluidos los de malla, diferencias finitas y simulación de Monte Carlo.

La comunidad financiera comúnmente utiliza el esquema binomial para valuación numérica para una amplia variedad de modelos de opciones, esto debido a que es fácil de implementar además de didáctico. La esencia primaria del modelo binomial es la simulación del movimiento continuo de un activo mediante un modelo de caminata aleatoria discreta.

Por otro lado, la aproximación por diferencias finitas busca la discretización de los operadores diferenciales en la ecuación de Back-Scholes. Los esquemas numéricos derivados del procedimiento de discretización se pueden clasificar como esquemas explícitos o implícitos. Cada clase tiene sus ventajas y limitaciones. Los esquemas explícitos tienen mayor eficiencia computacional, pero son más susceptibles a inestabilidades numéricas si los intervalos de tiempo no son lo suficientemente pequeños. Curiosamente, se considera que los esquemas de malla tienen las mismas formas analíticas que los esquemas de diferencias finitas explícitas, aunque las dos clases de esquemas numéricos se obtienen utilizando enfoques muy diferentes.

El método de Monte Carlo simula el movimiento aleatorio del proceso de precio del activo y provee una solución probabilística al modelo de valuación de opciones. Como la mayoría de los problemas de valuación pueden ser formulados como una evaluación de la esperanza del riesgo neutral de la utilidad final descontada, la simulación de Monte Carlo provee de una herramienta directa de valuación de derivados. Se presentará la construcción y clasificación de un algoritmo que utiliza el modelo de Monte Carlo.

## 4.1. Métodos de malla

Se iniciará la discusión con la revisión del modelo binomial considerando su límite continuo. Se examinará como modificar los esquemas binomiales para que sea posible incorporar dividendos, ejercicio anticipado y características de opción *call*.

### 4.1.1. Modelo binomial

En el modelo de valuación binomial discreto, se simula el proceso estocástico del precio de un activo mediante un proceso binomial discreto, anteriormente se obtuvo una probabilidad neutral al riesgo  $p = \frac{R-d}{u-d}$  del incremento del precio en el proceso binomial discreto. Aquí,  $R = e^{r\Delta t}$  es el factor de crecimiento del activo libre de riesgo sobre el periodo de tiempo  $\Delta t$ , donde  $r$  es la tasa de interés constante. Sin embargo, el incremento proporcional  $u$  y el decremento proporcional  $d$  están directamente relacionados con la volatilidad del proceso del precio del activo. Se obtienen a continuación las relaciones que gobiernan  $u$ ,  $d$  y  $p$  en la formulación continua y su contraparte binomial discreta.

Sea  $S_t$  y  $S_{t+\Delta t}$  que denotan, respectivamente, los precios del activo a tiempos  $t$  y un periodo de tamaño  $\Delta t$  después. En el modelo continuo de Black-Scholes, se asume que la dinámica del precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico donde  $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$  se distribuye log-normal. Bajo la medida neutral de riesgo,  $\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$  se distribuye normal con media  $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t$  y varianza  $\sigma^2 \Delta t$ , donde  $\sigma^2$  es la tasa de variación. La media y varianza de  $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$  son  $R$  y  $R^2 \left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$ , respectivamente, ver expresiones ( 1.18) y ( 1.19). Por otro lado, para un modelo de opción binomial de un periodo bajo la medida neutral de riesgo, la media y varianza de la proporción del precio del activo  $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$  están dadas por

$$pu + (1 - p)d \quad \text{y} \quad pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2,$$

respectivamente. Igualando la media y varianza de la proporción del precio del activo en el modelo continuo y el discreto se obtiene

$$pu + (1 - p)d = R \tag{4.1}$$

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - R^2 = R^2 \left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right). \tag{4.2}$$

La ecuación ( 4.1) lleva a que  $p = \frac{R-d}{u-d}$ . Las ecuaciones ( 4.1) y ( 4.2) son sólo dos para tres incógnitas:  $u$ ,  $d$  y  $p$ . La tercer condición puede elegirse arbitrariamente. Una elección conveniente es la condición de árbol-simétrico

$$u = \frac{1}{d}, \quad (4.3)$$

de forma que los nodos de la malla asociados con el árbol binomial son simétricos. El precio del activo regresa al mismo valor cuando se registra un incremento seguido de un decremento.

Escribiendo  $\tilde{\sigma}^2 = R^2 e^{\sigma^2 \Delta t}$ , la solución a las condiciones ( 4.1), ( 4.2) y ( 4.3) se encuentra con

$$u = \frac{1}{d} = \frac{\tilde{\sigma}^2 + 1 + \sqrt{(\tilde{\sigma}^2 + 1)^2 - 4R^2}}{2R}, \quad p = \frac{R - d}{u - d}. \quad (4.4)$$

La anterior ecuación puede ser muy difícil de usar, por lo que se busca una simplificación para  $u$ , sin que se sacrifique el orden de precisión. Mediante la expansión de  $u$  como se definió en la ecuación ( 4.4) en una serie de Taylor en potencia de  $\sqrt{\Delta t}$ , se obtiene

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t + \frac{4r^2 + 4\sigma^2 r + 3\sigma^4}{8\sigma} (\sqrt{\Delta t})^3 + \mathbb{O}(\Delta t^2).$$

Observar que los primeros tres términos en la serie de Taylor anterior concuerdan con los de  $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  hasta el término  $\mathbb{O}(\Delta t)$ . Esto sugiere la elección de los siguientes valores de los parámetros (Cox, Ross y Rubinstein, ver referencia [20]):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{R - d}{u - d}. \quad (4.5)$$

Estas formas para los parámetros son más simples que las de la fórmula ( 4.4). Con este nuevo conjunto de parámetros, la varianza de la proporción del precio  $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$  en los modelos continuo y discreto concuerda hasta  $\mathbb{O}(\Delta t)^2$ . Esto es, la expresión ( 4.2) ahora se cumple hasta  $\mathbb{O}(\Delta t^2)$  ya que

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - R^2 e^{\sigma^2 \Delta t} = -\frac{5\sigma^4 + 12r\sigma^2 + 12r^2}{12} \Delta t^2 + \mathbb{O}(\Delta t^3).$$

#### 4.1.2. Límite continuo del modelo binomial

Dados los valores de los parámetros para  $u$ ,  $d$  y  $p$  en la expresión ( 4.5), se considera el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  de la fórmula binomial

$$c = [pc_u^{\Delta t} + (1 - p)c_d^{\Delta t}] e^{-r\Delta t}.$$

Se busca mostrar que la ecuación de Black-Scholes para el modelo de opciones continuas se obtiene como resultado. Dado que la función solución del modelo binomial es una función definida sólo en los nodos, es necesario mostrar la continuidad en su extensión continua de forma que las dos funciones coincidan en los puntos nodos. La fórmula continua binomial análoga puede ser escrita como sigue

$$c(S, t - \Delta t) = [pc(uS, t) + (1 - p)c(dS, t)]e^{-r\Delta t}. \quad (4.6)$$

Por conveniencia en la presentación, se tomará el tiempo actual como  $t - \Delta t$  y  $S$  como el valor actual del activo. Asumiendo continuidad de  $c(S, t)$ , se lleva a cabo el desarrollo de la expansión de Taylor en  $(S, t)$  como sigue:

$$\begin{aligned} & -c(S, t - \Delta t) + [pc(uS, t) + (1 - p)c(dS, t)]e^{-r\Delta t} \\ = & \frac{\partial c}{\partial t}(S, t)\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(S, t)\Delta t^2 + \dots - (1 - e^{-r\Delta t})c(S, t) \\ & e^{-r\Delta t} \left\{ [p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)]S\frac{\partial c}{\partial S}(S, t) \right. \\ & + \frac{1}{2} [p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2]S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S, t) \\ & \left. + \frac{1}{6} [p(u - 1)^3 + (1 - p)(d - 1)^3]S^3\frac{\partial^3 c}{\partial S^3} + \dots \right\}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Observando la relación:

$$1 - e^{-r\Delta t} = r\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

se puede mostrar que

$$\begin{aligned} e^{-r\Delta t} [p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)] & = r\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ e^{-r\Delta t} [p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2] & = \sigma^2\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ e^{-r\Delta t} [p(u - 1)^3 + (1 - p)(d - 1)^3] & = \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la expresión (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned} & -c(S, t - \Delta t) + [pc(uS, t) + (1 - p)c(dS, t)]e^{-r\Delta t} \\ = & \left[ \frac{\partial c}{\partial t}(S, t) + rS\frac{\partial c}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S, t) - rc(S, t) \right] \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Dado que  $c(S, t)$  satisface la fórmula binomial ( 4.6), entonces se obtiene

$$0 = \frac{\partial c}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial c}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S, t) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

En el límite  $\Delta \rightarrow 0$ , el valor de la *call*  $c(S, t)$  se obtiene a partir del modelo binomial que satisface la ecuación de Black-Scholes. Se dice que la fórmula binomial aproxima la ecuación de Black-Scholes en primer orden de precisión en tiempo.

### 4.1.3. Modelo con dividendos

El modelo binomial puede incorporar el efecto del pago de un dividendo por el activo subyacente. De hecho, con algunos supuestos y simplificaciones, se pueden incorporar también varios dividendos dentro de modelo.

En primer lugar, se considera la construcción del árbol binomial. Sea  $S$  que representa el precio del activo a tiempo actual el cual está a  $\Delta t$  de la expiración, y supongamos que un dividendo de monto  $D$  es pagado en un momento entre los tiempos que están a uno y a dos periodos del tiempo actual. El nodo en el árbol binomial en el tiempo que está a dos saltos del tiempo actual debe corresponder a los precios del activo siguientes

$$u^2 S - D, \quad S - D \quad \text{y} \quad d^2 S - D,$$

dado que el precio del activo cae por el mismo monto del dividendo después del pago de este. Extendiendo a un periodo de tiempo más, habrá seis nodos

$$(u^2 S - D) u, \quad (u^2 S - D) d, \quad (S - D) u, \quad (S - D) d, \quad (d^2 S - D) d, \quad (d^2 S - D) u,$$

en lugar de cuatro nodos como en el usual árbol binomial sin dividendo. Esto es porque  $(u^2 S - D) d \neq (S - D) u$  y  $(S - D) d \neq (d^2 S - D) u$ , entonces los nodos interiores no coinciden. Extendiendo un periodo de tiempo adicional, el número de nodos crece a nueve de cinco que tiene el usual árbol binomial, ver figura ( 4.1). En general, supongamos que un dividendo discreto es pagado en el futuro entre  $k$  y  $k + 1$  periodos de tiempo antes del tiempo actual, entonces en  $k + m$  periodos de tiempo después del tiempo actual, el número de nodos será  $(m + 1)(k + 1)$  en vez de  $k + m + 1$  como en el usual árbol binomial. Esto es porque cada uno de los  $k + 1$  nodos en el nivel de tiempo justo después del pago de dividendo sirve como la punta de un sub-árbol binomial. Cada uno de los sub-árboles genera  $m + 1$  nodos después de  $m$  periodos de tiempo. Por lo tanto, el número total de nodos binomiales generados por todos los  $k + 1$  sub-árboles es  $(m + 1)(k + 1)$ .

La dificultad anterior del crecimiento del número de nodos puede ser eludida mediante la división del precio del activo  $S_t$  en dos partes: el componente de

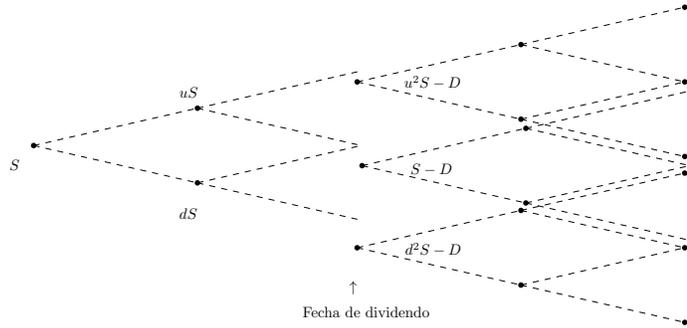


Figura 4.1: Árbol binomial con un dividendo.

riesgo  $\tilde{S}_t$  que es estocástico y el restante componente sin riesgo el cual esta reservado para el pago de dividendos (asumiendo que es determinista) en el futuro. Supongamos que la fecha de dividendo es  $t^*$ , entonces en el tiempo actual  $t$ , el componente de riesgo  $\tilde{S}_t$ , está dado por

$$\tilde{S}_t = \begin{cases} S_t, & \text{para } t > t^*, \\ S_t - De^{-r(t^*-t)}, & \text{para } t \leq t^*. \end{cases}$$

Sea  $\tilde{\sigma}$  que denota la volatilidad de  $\tilde{S}_t$ . Asumimos que  $\tilde{\sigma}$  es constante. Ahora,  $\tilde{\sigma}$  será usada en lugar de  $\sigma$  en el cálculo de los parámetros binomiales:  $p$ ,  $u$  y  $d$ , y construiremos un árbol binomial modelando el proceso de saltos discretos para  $\tilde{S}_t$ . Este supuesto es similar a la práctica común del uso de la fórmula de valuación de Black-Scholes con el precio del activo reducido por el valor presente de la suma de todos los dividendos futuros. A continuación reconectaremos los nodos en el árbol para  $S_t$ . Para construir el árbol conectado para  $S_t$ , en cada nodo del árbol, el valor del activo asociado se obtiene añadiendo la suma de los valores presentes de todos los dividendos futuros al componente de riesgo.

Sean  $S$  y  $\tilde{S}$  que denotan el precio del activo y el componente de riesgo en la punta de árbol binomial, respectivamente, y sea  $N$  que denota el número total de periodos de tiempo en el árbol. Ahora, asumir que un dividendo discreto  $D$  es pagado a tiempo  $t^*$ , el cual está entre los periodos de tiempo  $k$  y  $k + 1$ . En la punta de árbol binomial, el componente de riesgo  $\tilde{S}$  está relacionado con el precio del activo  $S$  por

$$S = \tilde{S} + De^{-kr\Delta t}.$$

Como ejemplo, consideremos un árbol binomial con cuatro periodos y un dividendo  $D$  que es pagado entre el segundo y tercer periodos o sea  $N = 4$  y  $k = 2$ . El valor presente del dividendo en la punta del árbol es  $De^{-2r\Delta t}$  entonces el valor del activo en la punta (nodo  $P$ ) es  $\tilde{S} + De^{-2r\Delta t}$ . En el nodo  $Q$ , el cual está un salto hacia arriba de la punta, el componente de riesgo se vuelve  $\tilde{S}u$

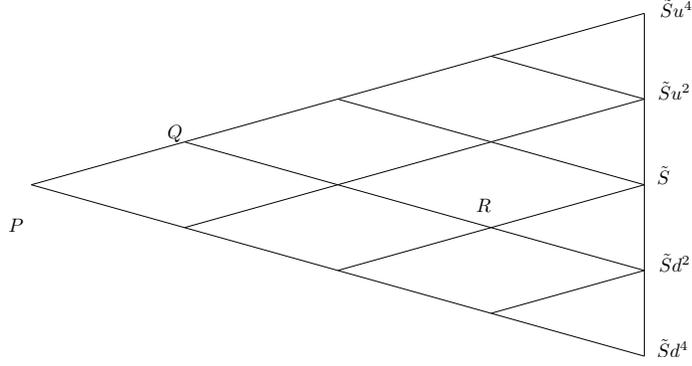


Figura 4.2: Construcción de un árbol binomial conectado con un dividendo  $D$ ,  $N = 4$  y  $k = 2$ . Los valores del activo en los nodos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son  $\tilde{S} + De^{-2r\Delta t}$ ,  $\tilde{S}u + De^{-r\Delta t}$  y  $\tilde{S}d$ , respectivamente.

mientras que el valor presente del dividendo es  $De^{-r\Delta t}$ . Con un salto hacia arriba y dos hacia abajo, se alcanza el nodo  $R$ . El nodo está a tres periodos de la punta y el dividendo ha sido pagado. Por lo tanto, el valor del activo es simplemente  $\tilde{S}ud^2 = \tilde{S}d$ , ver figura (4.2). En general, el valor del activo en el nodo  $(n, j)$  (lo que corresponde con  $n$  periodos desde la punta y  $j$  saltos hacia arriba en los  $n$  saltos) esta dado por

$$\tilde{S}u^j d^{n-j} + De^{-(k-n)r\Delta t} \mathbb{I}_{[n \leq k]}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad y \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

#### 4.1.4. Características de ejercicio temprano

Recuérdese que una opción americana puede ser terminada prematuramente dada la posibilidad de ejercicio temprano del poseedor. Sin el privilegio de ejercicio anticipado, la valuación de riesgo neutral sigue la usual fórmula binomial

$$V_{cont} = \frac{pV_u^{\Delta t} + (1-p)V_d^{\Delta t}}{R}.$$

Aquí, se usa  $V_{cont}$  para representar el valor de continuación de la opción cuando esta se mantiene viva. Para incorporar la característica de ejercicio temprano incrustada en la opción americana, se compara en un nodo binomial el valor de continuación  $V_{cont}$  con el valor intrínseco de la opción, el cual es la utilidad sobre el ejercicio temprano. El siguiente proceso de programación dinámica es aplicado a cada nodo binomial

$$V = \max(V_{cont}, h(S)), \quad (4.8)$$

donde  $h(S)$  es la función de utilidad al ejercicio.

Como un ejemplo, se considera la valuación numérica de una opción americana *put*. Primero, se construye el usual árbol binomial y sea  $N$  que denota el número total de saltos de tiempo en el árbol. Sea  $S_j^n$  y  $P_j^n$  que denotan el precio del activo y el valor *put* en el nodo  $(n, j)$ , respectivamente. El valor intrínseco de una opción *put* es  $K - S_j^n$  en el nodo  $(n, j)$ , donde  $K$  es el precio de ejercicio. Por lo tanto, el proceso de programación dinámica aplicado a cada nodo está dado por

$$P_j^n = \max \left( \frac{pP_{j+1}^{n+1} + (1-p)P_{j-1}^{n+1}}{R}, K - S_j^n \right), \quad (4.9)$$

donde  $n = 0, 1, \dots, N-1$  y  $j = 0, 1, \dots, n$ .

## 4.2. Algoritmos de diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas son técnicas numéricas muy populares para resolver problemas de diversas disciplinas modelados por ecuaciones diferenciales. La primera aplicación de métodos de diferencias finitas fue presentada por Brennan y Schwartz en 1978.

En esta sección, se mostrará cómo desarrollar la familia de esquemas de diferencias finitas explícitos para valuación numérica de opciones. El esquema binomial pertenece a esta familia. En un esquema explícito, los valores de la opción en los nodos de un nivel de tiempo pueden ser calculados explícitamente a partir de los valores conocidos de un nivel de tiempo anterior. Sin embargo, si la discretización de los operadores espaciales diferenciales incluye valores de opciones en los nodos a lo largo del nuevo nivel de tiempo, entonces los cálculos de diferencias finitas incluyen la solución de un sistema de ecuaciones lineales en cada periodo de tiempo. Se discutirá cómo construir los esquemas de diferencias finitas para opciones europeas y se ilustrará sobre diversos métodos de solución de modelos para opciones americanas.

### 4.2.1. Construcción de esquemas explícitos

Mediante la aplicación de la transformación de variable  $x = \ln S$ , la ecuación de Black-Scholes para el valor de una opción europea se vuelve

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - rV, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.10)$$

donde  $V = V(x, \tau)$  es el valor de la opción. Aquí, se adopta el tiempo para la expiración  $\tau$  como la variable temporal. Suponiendo que se define  $W(x, \tau) = e^{r\tau} V(x, \tau)$ , entonces  $W(x, \tau)$  satisface

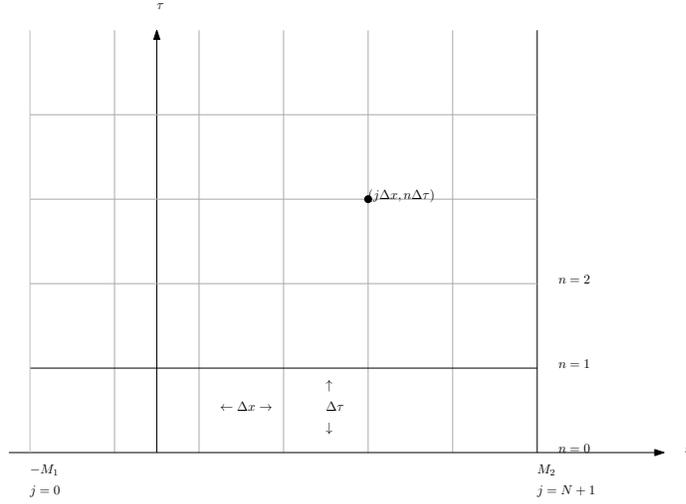


Figura 4.3: Malla de diferencias finitas con separación uniforme de  $\Delta x$  y periodo de tiempo de  $\Delta \tau$ . Los valores numéricos de la opción son calculados en los puntos nodo  $(j\Delta x, n\Delta \tau)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Los valores de la opción a lo largo de las fronteras:  $j = 0$  y  $j = N + 1$  son determinadas por las condiciones a la frontera del modelo de opciones. Los valores iniciales  $V_j^0$  a lo largo del nivel de tiempo cero,  $n = 0$ , son dados por la función terminal de utilidad.

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial W}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.11)$$

Para obtener el algoritmo de diferencias finitas, primero se transformará el dominio continuo del problema  $\{(x, \tau) : -\infty < x < \infty, \tau \geq 0\}$  en un dominio discreto. El alcance infinito de  $x = \ln S$  en el problema es aproximado por un intervalo finito truncado  $[-M_1, M_2]$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son constantes positivas lo suficientemente grandes para que las condiciones a la frontera en los dos finales del intervalo finito puedan ser aplicadas con suficiente exactitud. El dominio discretizado está superpuesto con un sistema uniforme de mallas o puntos nodo  $(j\Delta x, n\Delta \tau)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$ , donde  $(N+1)\Delta x = M_1 + M_2$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$  (ver figura (4.3)). El tamaño de salto  $\Delta x$  y cambio en el tiempo  $\Delta t$  son en general independientes. En la formulación de discretización de diferencias finitas, los valores de la opción son calculados sólo en los puntos nodo.

Se inicia con la discretización de la expresión (4.11) y sea  $W_j^n$  que denota la aproximación numérica de  $W(j\Delta x, n\Delta \tau)$ . Las derivadas continuas temporal y espacial en la expresión (4.11) son aproximadas por los siguientes operadores finitos de diferencias

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \tau}(j\Delta x, n\Delta\tau) &\approx \frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta\tau} && \text{(diferencia hacia adelante),} \\ \frac{\partial W}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta\tau) &\approx \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} && \text{(diferencia central),} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) &\approx \frac{W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n}{\Delta x^2} && \text{(diferencia central).}\end{aligned}$$

De forma similar, sea  $V_j^n$  que denota la aproximación numérica de  $V(j\Delta x, n\Delta\tau)$ . Se observa que

$$W_j^{n+1} = e^{r(n+1)\Delta\tau} V_j^{n+1} \quad \text{y} \quad W_j^n = e^{rn\Delta\tau} V_j^n,$$

entonces, cancelando  $e^{rn\Delta\tau}$ , se obtiene el siguiente esquema de diferencias finitas para la ecuación de Black-Scholes (ver la expresión (4.10))

$$\begin{aligned}V_j^{n+1} &= \left[ V_j^n + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right. \\ &\quad \left. + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right] e^{-r\Delta\tau}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Dado que  $V_j^{n+1}$  está expresado *explícitamente* en términos de valores de opciones en el  $n$ -ésimo nivel de tiempo, se puede calcular  $V_j^{n+1}$  directamente a partir de los valores conocidos de  $V_{j-1}^n$ ,  $V_j^n$  y  $V_{j+1}^n$ . Suponiendo que están dados los valores iniciales  $V_j^0$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$  a lo largo del nivel de tiempo cero, se puede usar el esquema (4.12) para encontrar los valores  $V_j^1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  a lo largo del primer nivel de tiempo  $\tau = \Delta\tau$ . Los valores en los nodos finales  $V_0^1$  y  $V_{N+1}^1$  están dados por condiciones numéricas a la frontera especificadas por el modelo de opciones. En ese sentido, las condiciones a la frontera son *naturalmente incorporadas* dentro de los cálculos finitos. El proceso de cómputo sigue de forma similar con los sucesivos niveles de tiempo  $\tau = 2\Delta\tau, 3\Delta\tau, \dots$ , a través de una marcha hacia adelante en la dirección de  $\tau$ . Esto es similar al proceso de inducción hacia atrás (en términos de tiempo calendario) en el método de malla.

Se considera la clase de esquemas explícitos de dos niveles y cuatro puntos de la forma

$$V_j^{n+1} = b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

donde  $b_1, b_0$  y  $b_{-1}$  son coeficientes específicos para cada esquema individual. Por ejemplo, el esquema (4.12) corresponde a

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left[ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \right] e^{-r\Delta\tau}, \\
b_0 &= \left[ 1 - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \right] e^{-r\Delta\tau}, \\
b_{-1} &= \left[ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \right] e^{-r\Delta\tau}.
\end{aligned}$$

#### 4.2.2. Esquemas implícitos y sus problemas de implementación

Supongamos que el término descontado  $-rV$  y las derivadas espaciales son aproximadas mediante el promedio de las diferencias de los operadores centrales en el  $(n)$ -ésimo y  $(n+1)$ -ésimo niveles de tiempo

$$\begin{aligned}
-rV \left( j\Delta x, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta\tau \right) &\approx -\frac{r}{2} (V_j^n + V_j^{n+1}) \\
\frac{\partial V}{\partial x} \left( j\Delta x, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta\tau \right) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left( j\Delta x, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta\tau \right) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right),
\end{aligned}$$

y la derivada temporal por

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} \left( j\Delta x, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta\tau \right) \approx \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta\tau},$$

entonces se obtiene en siguiente esquema implícito de diferencias finitas de dos niveles

$$\begin{aligned}
V_j^{n+1} &= V_j^n + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \left( \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n + V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{2} \right) \\
&\quad + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} \left( \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n + V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2} \right) \\
&\quad - r\Delta\tau \left( \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Este esquema es comúnmente conocido como *esquema de Crank-Nicolson* que es visto como un miembro de la clase general de esquemas de dos niveles y seis puntos de la forma

$$a_1 V_{j+1}^{n+1} + a_0 V_j^{n+1} + a_{-1} V_{j-1}^{n+1} = b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \\ j = 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

Se puede observar que el esquema de Crank-Nicolson corresponde a

$$a_1 = -\frac{\sigma^2}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{4\Delta x}, \\ a_0 = 1 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{r}{2} \Delta\tau, \\ a_{-1} = -\frac{\sigma^2}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{4\Delta x},$$

y

$$b_1 = -\frac{\sigma^2}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{4\Delta x}, \\ b_0 = 1 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \frac{r}{2} \Delta\tau, \\ b_{-1} = -\frac{\sigma^2}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{4\Delta x},$$

Supongamos que los valores para  $V_j^n$  son conocidos a lo largo del  $n$ -ésimo nivel de tiempo. La solución para  $V_j^{n+1}$  requiere la inclusión de un sistema tridiagonal de ecuaciones. Esto explica el uso del término *implícito* para esta clase de esquemas. En una forma matricial, el esquema de dos niveles y seis puntos puede representarse como sigue

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 V_2^n + b_0 V_1^n + b_{-1} V_0^n - a_{-1} V_0^{n+1}. \\ c_N &= b_1 V_N^n + b_0 V_N^n + b_{-1} V_{N-1}^n - a_1 V_{N+1}^{n+1}. \\ c_j &= b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \quad j = 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

La solución al anterior sistema tridiagonal se puede encontrar mediante el *algoritmo de Thomas* que es una eficiente implementación del proceso de eliminación gaussiano, los detalles se muestran en lo siguiente.

*Algoritmo de Thomas*

Considerar la solución al sistema tridiagonal de la siguiente forma

$$-a_j V_{j-1} + b_j V_j - c_j V_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.15)$$

con  $V_0 = V_{N+1} = 0$ . Esta forma es más general en el sentido de que los coeficientes pueden diferir en las ecuaciones. En el primer paso de eliminación, el sistema se reduce a su forma triangular superior mediante la eliminación de  $V_{j-1}$  en cada una de las ecuaciones. Iniciando con la primera ecuación, se puede expresar  $V_1$  en términos de  $V_2$  y otras cantidades conocidas. Esta relación es sustituida dentro de la segunda ecuación dando una nueva que incluye  $V_2$  y  $V_3$  solamente. Otra vez, se expresa  $V_2$  en términos de  $V_3$  y algunas cantidades conocidas. Se sustituye esta relación en la tercera ecuación, y así, sucesivamente.

Supongamos que las primeras  $k$  ecuaciones se redujeron a la forma

$$V_j - e_j V_{j+1} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Se usa la  $k$ -ésima ecuación reducida para transformar la original  $(k-1)$ -ésima a la misma forma

$$V_{k+1} - e_{k+1} V_{k+2} = f_{k+1}. \quad (4.16)$$

Ahora, se considera

$$V_k - e_k V_{k+1} = f_k,$$

y

$$-a_{k+1} V_k + b_{k+1} V_{k+1} - c_{k+1} V_{k+2} = d_{k+1},$$

la eliminación de  $V_k$  de estas dos ecuaciones da una nueva que incluye a  $V_{k+1}$  y  $V_{k+2}$ , de la siguiente forma

$$V_{k+1} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1} e_k} V_{k+2} = \frac{d_{k+1} + a_{k+1} f_k}{b_{k+1} - a_{k+1} e_k}. \quad (4.17)$$

Comparando las expresiones ( 4.16) y ( 4.17), y reemplazando la variable  $k+1$  por  $j$ , se pueden deducir las siguientes ecuaciones recurrentes para  $e_j$  y  $f_j$

$$e_j = \frac{c_j}{b_j - a_j e_{j-1}}, \quad f_j = \frac{d_j + a_j f_{j-1}}{b_j - a_j e_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.18)$$

Correspondiente al valor en la frontera  $V_0 = 0$ , se debe tener que

$$e_0 = f_0 = 0 \quad (4.19)$$

Iniciando con los valores anteriores, las relaciones recurrentes de la ecuación ( 4.18) pueden ser usadas para encontrar todos los valores  $e_j$  y  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Una vez que el sistema está en su forma triangular superior, se puede resolver para  $V_N, V_{N-1}, \dots, V_1$ , sucesivamente por una sustitución hacia atrás, iniciando con  $V_{N+1} = 0$ .

### 4.2.3. Método de fijación de la frontera y técnica de relajación puntual

En esta sección se consideran varias aproximaciones para la solución de modelos de opciones americanas usando métodos de diferencias finitas. Las dificultades en la construcción de algoritmos numéricos surgen a partir del desconocimiento de la frontera de ejercicio óptimo, lo cual se obtiene como parte de la solución. En primer lugar, se discutirá el método de fijación de la frontera, donde se aplica una transformación a la variable independiente de forma que la frontera libre asociada con la frontera de ejercicio óptimo se convierte en una frontera fija.

Recordemos que en el algoritmo binomial para valuar una opción americana, un proceso de programación dinámica es aplicado en cada nodo para determinar si el valor de continuación es menor que el valor intrínseco o no. Si este es el caso, el valor intrínseco es tomado como el valor de la opción, lo que implicaría el ejercicio anticipado de la opción. Se encuentran dificultades en la implementación del proceso de programación dinámica cuando se emplea un esquema implícito ya que los valores de la opción se obtienen implícitamente.

#### Método de fijación de la frontera

Se considera la construcción del algoritmo de fijación de la frontera para encontrar el valor de la opción y la frontera de ejercicio óptimo asociada  $S^*(\tau)$  de una opción americana *put*. Por simplicidad, se toma el precio de ejercicio como una unidad. Esto es equivalente a normalizar el precio del activo subyacente y el valor de la opción por el precio de ejercicio. En la región de continuación, el valor de la *put*  $P(S, \tau)$  satisface la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rS \frac{\partial P}{\partial S} + rP = 0, \quad \tau > 0, S^*(\tau) < S < \infty, \quad (4.20)$$

sujeto a las condiciones a la frontera

$$P(S^*(\tau), \tau) = 1 - S^*(\tau), \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) = -1, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} P(S, \tau) = 0,$$

y la condición inicial

$$P(S, 0) = 0 \quad \text{para} \quad S^*(0) < S < \infty,$$

con  $S^*(0) = 1$ . Se aplica la siguiente transformación de variable  $y = \ln \frac{S}{S^*(\tau)}$  de modo que  $y = 0$  en  $S = S^*(\tau)$ . Ahora, la frontera libre  $S = S^*(\tau)$  se vuelve una frontera fija  $y = 0$ , de lo que se deriva el nombre de éste método. En términos de la nueva variable independiente  $y$ , la ecuación gobernante se transforma en

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial P}{\partial y} + rP = \frac{S^{*\prime}(\tau)}{S^*(\tau)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (4.21)$$

sujeto al nuevo conjunto de condiciones auxiliares

$$P(0, \tau) = 1 - S^*(\tau), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(0, \tau) = -S^*(\tau), \quad P(\infty, \tau) = 0, \quad (4.22)$$

$$P(y, 0) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < \infty. \quad (4.23)$$

La no-linealidad en el modelo de opciones *put* americanas se debe al término no lineal  $\frac{S^{*\prime}(\tau)}{S^*(\tau)} \frac{\partial P}{\partial y}$ . A lo largo de la frontera  $y = 0$ , se aplican las propiedades de continuidad de  $P$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  y  $\frac{\partial P}{\partial \tau}$  de forma que  $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+, \tau)$  observa la relación

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} [1 - S^*(\tau)] - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) [-S^*(\tau)] \\ &\quad + r [1 - S^*(\tau)] - \frac{S^{*\prime}(\tau)}{S^*(\tau)} [-S^*(\tau)] \\ &= r - \frac{\sigma^2}{2} S^*(\tau). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Esta relación es usada para determinar  $S^*(\tau)$  una vez que se ha obtenido  $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+, \tau)$ .

La discretización directa de Crank-Nicolson de la expresión (4.21) resultaría en un sistema no lineal de ecuaciones para la determinación de  $V_j^{n+1}$  dada la

presencia del término no lineal  $\frac{S^*(\tau)}{S^*(\tau)} \frac{\partial P}{\partial y}$ . Para evitar las dificultades y manteniendo el mismo orden de exactitud que el esquema de Crank-Nicolson, se adoptará un esquema de tres niveles de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{P_j^{n+1} - P_j^{n-1}}{2\Delta\tau} - \left[ \frac{\sigma^2}{2} D_+ D_- + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) D_0 - r \right] \frac{P_j^{n+1} + P_j^{n-1}}{2} \\ &= \frac{S_{n+1}^* - S_{n-1}^*}{2\Delta\tau S_n^*} D_0 P_j^n, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $S_n^*$  denota la aproximación numérica de  $S^*(n\Delta\tau)$ , mientras que  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  son operadores discretos de diferencias definidos por

$$D_+ = \frac{1}{\Delta y} (E^1 - \mathbb{I}), \quad D_- = \frac{1}{\Delta y} (\mathbb{I} - E^{-1}), \quad D_0 = \frac{1}{2\Delta y} (E^1 - E^{-1}).$$

Aquí,  $\mathbb{I}$  denota el operador identidad y  $E^i$ ,  $i = -1, 1$ , denota el operador espacial de cambio en la función discreta  $P_j$ , definida por  $E^i P_j = P_{j+i}$ .

Las condiciones de tangencia, de relación y de frontera siguen el sistema de ecuaciones que relaciona  $P_{-1}^n$ ,  $P_0^n$ ,  $P_1^n$  y  $S_n^*$

$$P_0^n = 1 - S_n^*, \quad (4.26)$$

$$\frac{P_0^n - P_{-1}^n}{2\Delta y} = -S_n^*, \quad (4.27)$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \left[ \frac{P_1^n - 2P_0^n + P_{-1}^n}{\Delta y^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2} S_n^* - r = 0. \quad (4.28)$$

Aquí,  $P_{-1}^n$  es un valor ficticio fuera del dominio computacional. Mediante la eliminación de  $P_{-1}^n$  se obtiene

$$P_1^n = \alpha - \beta S_n^*, \quad n \geq 1, \quad (4.29)$$

donde

$$\alpha = 1 + \frac{\Delta y^2}{\sigma^2} r \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1 + (1 + \Delta y)^2}{2}.$$

Una vez que  $P_1^n$  es conocido, se puede encontrar  $S_n^*$  usando la expresión (4.29) y  $P_0^n$  usando la ecuación (4.26). Para la condición a la frontera en el final derecho del dominio computacional, se observa que el valor de la *put*

americana tiende a cero cuando  $S$  es lo suficientemente grande. Por lo tanto, se elige  $M$  lo suficientemente grande tal que  $P_{M+1}^n = 0$  con suficiente exactitud.

Sea  $\mathbb{P}^n = (P_1^n P_2^n \cdots P_M^n)^T$  y  $\mathbf{e} = (1 \ 0 \cdots 0)^T$ . Poniendo todas las condiciones auxiliares dentro del esquema de diferencias finitas (4.25), se quiere mostrar la forma de calcular  $\mathbb{P}^{n+1}$  a partir de valores conocidos de  $\mathbb{P}^n$  y  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Primero, se definen los siguientes parámetros

$$a = \mu\sigma^2 + r\Delta\tau, \quad b = \frac{\mu}{2} \left[ \sigma^2 - \Delta y \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right],$$

$$c = \frac{\mu}{2} \left[ \sigma^2 + \Delta y \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right],$$

donde  $\mu = \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2}$ . También, se define la matriz diagonal

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & -c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -b & a & -c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & a & -c & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & -b & a & -c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

En términos de  $\mathbb{A}$ , el esquema de diferencias finitas (4.25) se puede expresar como

$$(\mathbb{I} + \mathbb{A})\mathbb{P}^{n+1} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{P}^{n-1} + bP_0^{n-1}\mathbf{e}_1 + bP_0^{n+1}\mathbf{e}_1 + g^n D_0 \mathbb{P}^n, \quad n > 1, \quad (4.30)$$

donde  $g^n = \frac{S_{n+1}^* - S_{n-1}^*}{S_n^*}$ . Invertiendo la matriz  $(\mathbb{I} + \mathbb{A})$ , la expresión (4.30) puede verse como

$$\mathbb{P}^{n+1} = \mathbf{f}_1 + bP_0^{n+1}\mathbf{f}_2 + g^n \mathbf{f}_3, \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} [(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{P}^{n-1} + bP_0^{n-1}\mathbf{e}_1], \\ \mathbf{f}_2 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{f}_3 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} D_0 \mathbb{P}^n, \end{aligned}$$

Notemos que  $P_0^{n+1}$  y  $S_{n+1}^*$  pueden expresarse en términos de  $P_1^{n+1}$  usando las expresiones (4.26) y (4.27).

Dado que (4.31) es un esquema de tres niveles, se necesita  $\mathbb{P}^1$  en suma a  $\mathbb{P}^0$  para iniciar el cálculo. Para mantener el orden de precisión deseada, se emplea la siguiente técnica para obtener  $\mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2}\right) \tilde{\mathbb{P}} &= \left(\mathbb{I} - \frac{\mathbb{A}}{2}\right) \mathbb{P}^0 + \frac{b}{2} \tilde{P}_0 \mathbf{e}_1 + \tilde{g} D_0 \mathbb{P}^0, \\ \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2}\right) \mathbb{P}^1 &= \left(\mathbb{I} - \frac{\mathbb{A}}{2}\right) \mathbb{P}^0 + \frac{b}{2} P_0^1 \mathbf{e}_1 + g^1 D_0 \left(\frac{\tilde{\mathbb{P}} + \mathbb{P}^0}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde la primera ecuación da el valor corrector  $\tilde{\mathbb{P}}$  y  $\mathbb{P}^1$  es finalmente obtenido usando la segunda ecuación. El valor  $g^1$  y los valores iniciales están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= 1 - \tilde{S}_0^*, & \tilde{S}_0^* &= \frac{\alpha - \tilde{P}_1}{\beta}, \\ \tilde{g} &= \frac{\tilde{S}_0^* - S_0^*}{S_0^*} & \text{y} & \quad g^1 = \frac{S_1^* - S_0^*}{\frac{\tilde{S}_0^* + S_0^*}{2}}. \end{aligned}$$

### Método de relajación

Considerar un esquema implícito de diferencias finitas de la forma [ver la expresión (4.14)]

$$a_{-1}V_{j-1} + a_0V_j + a_1V_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.33)$$

donde el superíndice “ $n + 1$ ” es omitido por practicidad, y  $d_j$  representa cantidades conocidas. En lugar de resolver el sistema tridiagonal por eliminación directa (algoritmo de Thomas), se puede elegir el uso de un método de iteración. El proceso iterativo de Gauss-Seidel genera la  $k$ -ésima iteración de  $V_j$  mediante

$$\begin{aligned} V_j^{(k)} &= \frac{1}{a_0} \left( d_j - a_{-1}V_{j-1}^{(k)} - a_1V_{j+1}^{(k)} \right) \\ &= V_j^{(k-1)} + \frac{1}{a_0} \left( d_j - a_{-1}V_{j-1}^{(k)} - a_0V_j^{(k-1)} - a_1V_{j+1}^{(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde el último término en la ecuación representa la corrección hecha en el  $(k - 1)$ -ésima iteración de  $V_j$ . Se inicia desde  $j = 1$  y se procede secuencialmente incrementando el valor de  $V_j$ . Por lo tanto, cuando se calcula  $V_j^{(k)}$  en la  $k$ -ésima iteración, la nueva iteración  $V_{j-1}^{(k)}$  está disponible mientras que sólo la  $(k - 1)$ -ésima iteración  $V_{j+1}^{(k-1)}$  se conoce. Para acelerar la tasas de convergencia de las iteraciones, se multiplica el término de corrección por un parámetro de relajación  $\omega$ . El correspondiente proceso de iteración se vuelve

$$V_j^{(k)} = V_j^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_0}(d_j - a_{-1}V_{j-1}^{(k)} - a_0V_j^{(k-1)} - a_1V_{j+1}^{(k-1)}),$$

$$0 < \omega < 2. \quad (4.35)$$

Este proceso es llamado sucesiva sobre-relajación. Como una condición necesaria para la convergencia, el parámetro de relajación  $\omega$  debe ser elegido entre 0 y 2.

Sea  $h_j$  que denota el valor intrínseco de la opción americana en el  $j$ -ésimo nodo. Para incorporar la restricción de que el valor de la opción debe estar por arriba del valor intrínseco, el proceso de programación dinámica en combinación con el proceso de relajación está dado por

$$V_j^{(k)} = \max(V_j^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_0}(d_j - a_{-1}V_{j-1}^{(k)} - a_0V_j^{(k-1)} - a_1V_{j+1}^{(k-1)}), h_j). \quad (4.36)$$

Un suficiente número de iteraciones se realizan hasta que el siguiente criterio de término se cumple

$$\sqrt{\sum_{j=1}^N (V_j^{(k)} - V_j^{(k-1)})^2} < \epsilon, \quad \text{donde } \epsilon \text{ es algún valor pequeño de tolerancia.}$$

El valor de convergencia  $V_j^{(k)}$  es tomado para ser la solución numérica de  $V_j$ . El esquema anterior es llamado *método proyectado de sucesiva sobre-relajación*.

#### 4.2.4. Errores de truncamiento y orden de convergencia

El error de truncamiento local mide la discrepancia entre la solución continua y la del esquema numérico en el punto nodo. El error de truncamiento de un esquema numérico dado es obtenido mediante la sustitución de la solución exacta de un problema continuo dentro de un esquema numérico. Sea  $V(j\Delta x, n\Delta\tau)$  que denota la solución exacta de la ecuación continua de Black-Scholes. Se ilustrará el proceso de encontrar el error de truncamiento local de un esquema explícito hacia adelante y centrado en el tiempo mediante la sustitución de la solución exacta dentro del esquema numérico. El error de truncamiento local en el punto nodo  $(j\Delta x, n\Delta\tau)$  está dada por

$$\begin{aligned}
& T(j\Delta x, n\Delta\tau) \\
= & \frac{V(j\Delta x, (n+1)\Delta\tau) - V(j\Delta x, n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \\
& - \frac{\sigma^2 V((j+1)\Delta x, n\Delta\tau) - 2V(j\Delta x, n\Delta\tau) + V((j-1)\Delta x, n\Delta\tau)}{2\Delta x^2} \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{V((j+1)\Delta x, n\Delta\tau) - V((j-1)\Delta x, n\Delta\tau)}{2\Delta x} \\
& + rV(j\Delta x, n\Delta\tau). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Entonces se expresa cada término mediante una expansión de Taylor en el punto nodo  $(j\Delta x, n\Delta\tau)$ . Después de cancelar algunos términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
& T(j\Delta x, n\Delta\tau) \\
= & \frac{\partial V}{\partial\tau}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \mathbb{O}(\Delta\tau^2) \\
& - \frac{\sigma^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \mathbb{O}(\Delta x^4) \right] \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \mathbb{O}(\Delta x^4) \right] \\
& + rV(j\Delta x, n\Delta\tau).
\end{aligned}$$

Dado que  $V(j\Delta x, n\Delta\tau)$  satisface la ecuación de Black-Scholes, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
T(j\Delta x, n\Delta\tau) &= \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) - \frac{\sigma^2}{24} \Delta x^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(j\Delta x, n\Delta\tau) \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \mathbb{O}(\Delta\tau^2) \\
& + \mathbb{O}(\Delta x^4). \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Una condición necesaria para la convergencia de la solución numérica a la solución continua es que el error de truncamiento del esquema numérico debe tender a cero. En este caso, se dice que el esquema numérico es *consistente*. El *orden de aproximación* de un esquema es definido como el orden de la potencia de  $\Delta x$  y  $\Delta\tau$  de los principales términos del error de truncamiento. Supongamos que los términos principales del error de truncamiento son  $\mathbb{O}(\Delta\tau^k, \Delta x^m)$ , entonces se dice que el esquema numérico es  $k$ -ésimo orden de aproximación temporal y  $m$ -ésimo orden de aproximación espacial. Para la expresión (4.38), se observa que el esquema explícito hacia adelante y centrado en el espacio es de primer

orden en aproximación temporal y de segundo orden de aproximación espacial. Supongamos que se elige  $\Delta\tau$  del mismo orden que  $\Delta x^2$ , esto es,  $\Delta\tau = \lambda\Delta x^2$  para alguna constante finita  $\lambda$ , entonces los principales términos del error de truncamiento en la expresión (4.38) quedan como  $\mathcal{O}(\Delta\tau)$ .

Supongamos que los principales términos del error de truncamiento en un esquema numérico son  $\mathcal{O}(\Delta\tau^m)$ ,  $m$  es algún entero positivo, se puede mostrar que la solución numérica  $V_j^n(\Delta\tau)$  usando el salto de tiempo  $\Delta\tau$  tiene una expansión asintótica de la forma

$$V_j^n(\Delta\tau) = V_j^n(0) + K\Delta\tau^m + \mathcal{O}(\Delta\tau^{m+1}), \quad (4.39)$$

donde  $V_j^n(0)$  es visualizado como la solución continua en el límite cuando  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , y  $K$  es alguna constante independiente de  $\Delta\tau$ . Usando el salto de tiempo  $\Delta\tau$  y  $\frac{\Delta\tau}{2}$  sucesivamente, se puede mostrar que

$$V_j^n(0) - V_j^n(\Delta\tau) \approx 2^m \left[ V_j^n(0) - V_j^n\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) \right]. \quad (4.40)$$

Esto es, el error en la solución numérica de un esquema con aproximación de orden  $m$  es reducido por un factor de  $\frac{1}{2^m}$  cuando se reduce el salto de tiempo por un factor de  $\frac{1}{2}$ .

#### 4.2.5. Estabilidad numérica y fenómeno de oscilación

Un esquema numérico debe ser consistente para que la solución numérica converja a la solución exacta de una ecuación diferencial subyacente. Sin embargo, la consistencia es una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia. Los errores de redondeo en los que se incurre durante los cálculos numéricos pueden conducir a diferencias significativas de las soluciones. Además de los análisis de error de truncamiento, es necesario analizar las propiedades de estabilidad de un esquema numérico. En términos generales, se dice que un esquema es estable si los errores de redondeo no se amplifican durante el cálculo numérico. Para una ecuación diferencial como la de Black-Scholes, el *teorema de equivalencia de Lax* dice que la estabilidad es una condición suficiente y necesaria para la convergencia de un esquema de diferencias consistente.

Otra característica indeseable en el comportamiento de una solución por diferencias finitas es la ocurrencia de oscilaciones. Es posible generar valores negativos de la opción siempre que el esquema sea estable (ver figura (4.4)).

#### Método de análisis de estabilidad de Fourier

El método de Fourier está basado en el supuesto de que el esquema numérico admite una solución de la forma

$$V_j^n = A^n(k) e^{ikj\Delta x}, \quad (4.41)$$

donde  $k$  es el número de frecuencia de onda y  $i = \sqrt{-1}$ . Sustituyendo la ecuación (4.41) dentro de esquema (4.14), se obtiene

$$G(k) = \frac{A^{n+1}(k)}{A^n(k)} = \frac{b_1 e^{ik\Delta x} + b_0 + b_1 e^{-ik\Delta x}}{a_1 e^{ik\Delta x} + a_0 + a_{-1} e^{-ik\Delta x}}, \quad (4.42)$$

donde  $G(k)$  es el factor de amplificación que gobierna el crecimiento del componente de Fourier sobre un periodo de tiempo. La condición de estabilidad estricta de Neumann está dada por

$$|G(k)| \leq 1, \quad (4.43)$$

para  $0 \leq k\Delta x \leq \pi$ . De aquí en adelante, se escribirá  $\beta = k\Delta x$ .

*Estabilidad del esquema binomial de Cox-Ross-Rubinstein*

El correspondiente factor de amplificación del esquema binomial de Cox-Ross-Rubinstein es

$$G(\beta) = (\cos\beta + iq\text{sen}\beta) e^{-r\Delta\tau}, \quad q = 2p - 1. \quad (4.44)$$

La condición de estabilidad de Neumann requiere

$$|G(\beta)|^2 = [1 + (q^2 - 1) \text{sen}^2\beta] e^{-2r\Delta\tau} \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (4.45)$$

Cuando  $0 \leq p \leq 1$ , se tiene  $|q| \leq 1$  de forma que  $|G(\beta)| \leq 1$  para todo  $\beta$ . Bajo esta condición, el esquema garantiza que es estable en el sentido de Neumann. Entonces se obtiene la siguiente condición suficiente para la estabilidad de Neumann del esquema de Cox-Ross-Rubinstein: no ocurrencia de probabilidad de valores negativos en el esquema binomial.

*Estabilidad del esquema de Crank-Nicolson*

El factor de amplificación correspondiente al esquema de Crank-Nicolson se encuentra con

$$G(\beta) = \frac{1 - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} i \text{sen}\beta - \frac{r}{2} \Delta\tau}{1 + \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} i \text{sen}\beta + \frac{r}{2} \Delta\tau}. \quad (4.46)$$

La condición de Neumann requiere

$$|G(\beta)|^2 = \frac{\left(1 - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} - \frac{r}{2} \Delta\tau\right)^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \frac{\Delta\tau^2}{4\Delta x^2} \text{sen}^2 \beta}{\left(1 + \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} + \frac{r}{2} \Delta\tau\right)^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \frac{\Delta\tau^2}{4\Delta x^2} \text{sen}^2 \beta} \leq 1, \quad (4.47)$$

$$0 \leq \beta \leq \pi.$$

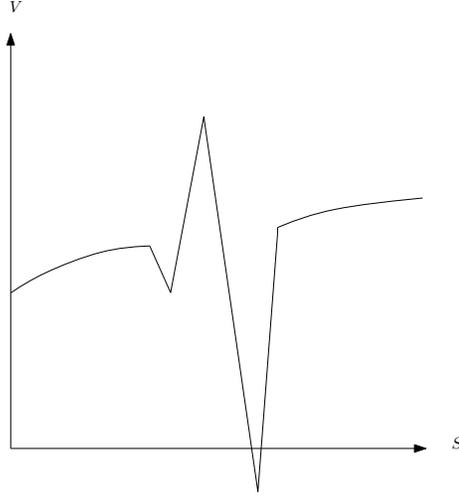


Figura 4.4: Oscilaciones

Se puede ver que la condición anterior se satisface para cualquier valor de  $\Delta\tau$  y  $\Delta x$ . Por lo tanto, el esquema de Crank-Nicolson es estable incondicionalmente.

#### Oscilaciones falsas de la solución numérica

Se pueden encontrar las condiciones suficientes para la no aparición de oscilaciones falsas en la solución numérica del esquema explícito de dos niveles. El siguiente teorema revela la relación entre los signos de los coeficientes en el esquema explícito y las oscilaciones falsas de la solución computacional (Kwok y Lau, 2001b).

**Teorema 3** *Supongamos que los coeficientes en el esquema explícito de dos niveles (4.13) son todos no negativos, y que los valores iniciales están acotados, esto es,  $\max_j |V_j^n| \leq M$  para alguna constante  $M$ , entonces*

$$\max_j |V_j^n| \leq M \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (4.48)$$

Para mostrar la prueba del teorema anterior, a partir del esquema explícito se deduce que

$$|V_j^{n+1}| \leq |b_{-1}| |V_{j-1}^n| + |b_0| |V_j^n| + |b_1| |V_{j+1}^n|,$$

entonces

$$\max_j |V_j^{n+1}| \leq b_{-1} \max_j |V_{j-1}^n| + b_0 \max_j |V_j^n| + b_1 \max_j |V_{j+1}^n|,$$

dado que  $b_{-1}$ ,  $b_0$  y  $b_1$  son no negativos. Sea  $E^n$  que denota el  $\max_j |V_{j+1}^n|$ , la desigualdad anterior puede expresarse como

$$E^{n+1} \leq b_{-1}E^n + b_0E^n + b_1E^n = E^n,$$

dado que  $b_{-1} + b_0 + b_1 = 1$ . Se obtiene que

$$E^n \leq E^{n-1} \leq \dots \leq E^0 = \max_j |V_j^0| = M.$$

Es conveniente analizar qué pasa cuando uno de los esquemas explícitos se vuelve negativo. Por ejemplo, se toma  $b_0 < 0$ ,  $b_{-1} > 0$  y  $b_1 > 0$ , y sea  $V_0^0 = \epsilon > 0$  y  $V_j^0 = 0, j \neq 0$ . En el siguiente nivel de tiempo,  $V_{-1}^1 = b_1\epsilon$ ,  $V_0^1 = b_0\epsilon$  y  $V_1^1 = b_{-1}\epsilon$ , donde el signo de  $V_j^1$  alterna con  $j$ . Se puede mostrar que esta propiedad de alternación de signos persiste en todos los siguientes niveles de tiempo. De esta forma, se deduce que

$$|V_j^{n+1}| = b_{-1}|V_{j-1}^n| - b_0|V_j^n| + b_1|V_{j+1}^n|. \quad (4.49)$$

Se suman sobre todos los valores de  $j$  de la ecuación anterior y sea  $\mathbb{S}^n = \sum_j |V_j^n|$ . Como resultado, se obtiene

$$\mathbb{S}^{n+1} = (b_{-1} - b_0 + b_1)\mathbb{S}^n = (1 - 2b_0)\mathbb{S}^n.$$

Notemos que  $1 - 2b_0 > 1$  ya que  $b_0 < 0$ . Se obtiene

$$\mathbb{S}^n = (1 - 2b_0)^n \mathbb{S}_0 = (1 - 2b_0)^n \epsilon,$$

y como  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{S}^n \rightarrow \infty$ . Los valores que cambian de signo de la solución oscilan en una vecindad de los nodos, y las amplitudes de oscilación crecen conforme crecen los números de saltos.

### 4.3. Simulación de Monte Carlo

Se ha observado que una amplia clase de problemas de valuación de derivados proviene de la evaluación funcional hacia adelante de

$$\mathbb{E}[f(Z(T; t, z))].$$

Aquí,  $Z$  denota el proceso estocástico que describe la evolución del precio de una o más variables financieras subyacentes, tales como precios de activos y tasas de interés, bajo la respectiva medida de probabilidad neutral al riesgo. El proceso  $Z$  tiene el valor inicial  $z$  a tiempo  $t$ , y la función  $f$  especifica el valor del derivado al tiempo de expiración  $T$ .

Como tercera alternativa a la de métodos de malla y métodos de diferencias finitas para la solución numérica de problemas de valuación de derivados, la simulación de Monte Carlo ha demostrado ser una técnica potente y versátil. El método de Monte Carlo es básicamente un proceso numérico para la estimación del valor esperado de una variable aleatoria, por lo que en sí lleva, de forma natural, a los problemas de valuación representados como esperanzas. El proceso de simulación envuelve la generación de variables aleatorias con una densidad de probabilidad dada y utiliza la ley de los grandes números para tomar la media muestral de estos valores como un estimador del valor esperado de la variable aleatoria. En el contexto de valuación de derivados, el proceso de Monte Carlo incluye los siguientes pasos:

1. Simular trayectorias muestrales de los estados de las variables subyacentes en el modelo tales como precios de activos y tasas de interés sobre la vida de derivado, de acuerdo con la distribución de probabilidad neutral al riesgo.
2. Para cada trayectoria muestral simulada, evaluar los flujos de efectivo discontinuos del derivado.
3. Tomar la media muestral de los flujos de efectivo descontados sobre todas las trayectorias muestrales.

Como ejemplo, se considera la valuación de una opción *call* europea para ilustrar el proceso de Monte Carlo. El proceso numérico requiere el cálculo de la utilidad esperada de la opción *call* a la expiración,  $\mathbb{E}_t [\max(S_T - K, 0)]$ , y descontado a valor presente a tiempo  $t$ , es decir,  $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t [\max(S_T - K, 0)]$ . Aquí,  $S_T$  es el precio del activo al momento de la expiración  $T$  y  $K$  es el precio de ejercicio. Asumiendo una distribución log-normal para el precio del activo, el proceso bajo la medida neutral de riesgo está dado por [ver la expresión ( 1.37)]

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}, \quad (4.50)$$

donde  $\Delta t$  es el salto de tiempo,  $\sigma$  es la volatilidad y  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo. Aquí,  $\epsilon$  denota una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza uno, entonces  $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$  representa una aproximación discreta a un incremento en el movimiento browniano del precio del activo con volatilidad  $\sigma$  sobre el incremento de tiempo  $\Delta t$ . El número aleatorio  $\epsilon$  puede ser generado en muchos de los lenguajes de programación, y en virtud de su carácter aleatorio, se asume un valor diferente en cada generación. Supongamos que hay  $N$  periodos de tiempo entre el tiempo actual  $t$  y el tiempo de expiración  $T$ , entonces  $\Delta t = \frac{(T-t)}{N}$ . El proceso numérico dado en la expresión ( 4.50) es repetido  $N$  veces para simular la trayectoria del precio desde  $S_t$  hasta  $S_T = S_{t+N\Delta t}$ . El valor de

la *call* que resulta de esta simulación de la trayectoria del precio del activo en particular es calculada usando la fórmula de utilidad descontada

$$c = e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0). \quad (4.51)$$

Esto completa la iteración de una muestra de la simulación de Monte Carlo para el modelo de opciones europeas.

Después de repetir la simulación anterior un número suficientemente grande de veces, el valor esperado de la *call* es obtenido mediante el cálculo del estimador de la media muestral de los valores de la *call* encontrados en la simulación. También, la desviación estándar del valor de la *call* puede encontrarse. Sea  $c_i$  que denota el estimador del valor de la *call* obtenido en la  $i$ -ésima simulación y sea  $M$  el número total de ensayos de la simulación. El valor esperado de la *call* esta dado por

$$\tilde{c} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M c_i, \quad (4.52)$$

y la varianza muestral del estimador es calculada por

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (c_i - \tilde{c})^2. \quad (4.53)$$

Para un valor lo suficientemente grande de  $M$ , la distribución

$$\frac{\tilde{c} - c}{\sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{M}}}, \quad c \text{ es el valor verdadero de la call,}$$

tiende a la distribución normal estándar. Notemos que la desviación estándar de  $\tilde{c}$  es igual a  $\frac{\tilde{s}}{\sqrt{M}}$  entonces el límite de confianza de la estimación puede reducirse incrementando el número de ensayos de la simulación,  $M$ . La aparición de  $M$  en el factor  $\frac{1}{\sqrt{M}}$  implica que la reducción de la desviación estándar por un factor de 10 requerirá un incremento del número de ensayos de la simulación de 100 veces.

Además, la eficiencia del Método de Monte Carlo puede ser elevada a través de varias técnicas de reducción de varianza.

### 4.3.1. Técnicas de reducción de varianza

Es deseable reducir la varianza muestral  $\tilde{s}^2$  de forma que una reducción significativa en el número de ensayos  $M$  se obtenga como resultado. Las dos técnicas más comunes de reducción de varianza son el *método de variables aleatorias antitéticas* y el *método de control de variables aleatorias*.

Ahora se describirá la forma de evaluar la eficacia de una técnica de reducción de varianza desde la perspectiva de la eficiencia computacional. Supongamos que  $W_T$  es el monto total de unidades de trabajo computacional disponibles para generar una estimación del valor de una opción  $V$ . Asumiendo que hay dos métodos para generar el estimador por Monte Carlo para el valor de la opción, que requieren  $W_1$  y  $W_2$  unidades de trabajo computacional, respectivamente, para cada ensayo de la simulación. Por simplicidad, se asume que  $W_T$  es divisible entre  $W_1$  y  $W_2$ . Sea  $V_i^{(1)}$  y  $V_i^{(2)}$  que denotan los estimadores de  $V$  en la  $i$ -ésima simulación usando los métodos 1 y 2, respectivamente, y sus respectivas desviaciones estándar son  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Las medias muestrales para los estimadores de  $V$  para los dos métodos usando  $W_T$  como monto de trabajo son, respectivamente

$$\frac{W_1}{W_T} \sum_{i=1}^{\frac{W_T}{W_1}} V_i^{(1)} \quad \text{y} \quad \frac{W_2}{W_T} \sum_{i=1}^{\frac{W_T}{W_2}} V_i^{(2)}.$$

Por la ley de los grandes números, los estimadores anteriores se acercan a ser normalmente distribuidos con media  $V$  y sus respectivas desviaciones estándar son

$$\sigma_1 \sqrt{\frac{W_1}{W_T}} \quad \text{y} \quad \sigma_2 \sqrt{\frac{W_2}{W_T}}.$$

Por lo tanto, el primer método sería preferible sobre el segundo en términos de eficiencia computacional si se tiene que

$$\sigma_1^2 W_1 < \sigma_2^2 W_2. \quad (4.54)$$

Dicho de otra forma, un estimador de varianza menor es preferible sólo si el radio de varianza  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  es menor que el radio de trabajo  $\frac{W_2}{W_1}$  cuando el aspecto de eficiencia computacional es tomado en cuenta.

### 4.3.2. Valuación de opciones americanas

Anteriormente se creía que el método de Monte Carlo podía usarse únicamente para derivados de estilo europeo. Las aparentes dificultades para trabajar con derivados de estilo americano se originan del carácter retroactivo de la característica de ejercicio temprano ya que no hay manera de saber si el ejercicio

temprano es óptimo cuando un valor particular del activo se alcanza en un tiempo dado. El valor estimado de la opción con respecto a una trayectoria de la simulación dada sólo se puede determinar con políticas de ejercicio preestablecidas.

Diversos algoritmos se han propuesto a lo largo del tiempo para resolver este problema, el primero es el propuesto por Tilley (1993) que se conoce como de *agrupar y clasificar*, el algoritmo calcula un estimador para el valor de continuación de la opción mediante el uso de inducción hacia atrás y una técnica de agrupación. En cada instante de tiempo, las trayectorias simuladas con precios del activo similares se agrupan para obtener un estimador del valor de la opción de un periodo hacia adelante. Otra aproximación (Grant, Vora y Weeks, 1996) intenta aproximar la frontera de ejercicio en cada punto de ejercicio temprano usando inducción hacia atrás como primer paso, después calcula el valor de la opción con una simulación hacia adelante sobre la base de políticas de ejercicio conocidas. La otra aproximación (Broadie y Glasserman, 1997) intenta encontrar las fronteras inferior y superior sobre el valor de la opción para simular trayectorias, la frontera superior está basada en un árbol no recombinado y el inferior en una malla estocástica. Estos valores superiores e inferiores convergen asintóticamente al valor verdadero de la opción. Se presentarán los tres algoritmos.

#### Algoritmo de agrupar y clasificar de Tilley

Tilley propuso el algoritmo de agrupar y clasificar el cual calcula un estimador para el valor de continuación de una opción americana usando inducción hacia atrás. Para cada salto de tiempo en el proceso de simulación, las trayectorias obtenidas se ordenan por el precio del activo y se organizan en grupos. El método se basa en la creencia de que las rutas de precios dentro de un conjunto dado son suficientemente similares para que tengan la misma expectativa del valor de un periodo hacia adelante de la opción. La frontera entre la decisión de ejercer o continuar es determinado para cada salto de tiempo.

Se asume que las opciones se pueden ejercer en los instantes específicos  $t = 1, 2, \dots, N$ . El proceso de simulación genera una muestra finita de  $R$  trayectorias del precio del activo para  $t = 0$  a  $t = N$ , donde la realización del precio del activo de la  $k$ -ésima trayectoria del precio es representada por la secuencia  $\{S_0(k), \dots, S_N(k)\}$ . Sea  $d_t$  que denota el factor de descuento para  $t$  hasta  $t+1$  y  $D_t$  el factor de descuento para 0 al tiempo  $t$ , entonces  $D_t = d_0 d_1 \dots d_{t-1}$ . Sea  $K$  el precio de ejercicio de la opción. El proceso de inducción hacia atrás inicia en  $t = N - 1$ . En cada  $t$ , se procede intuitivamente de acuerdo con los siguientes pasos.

1. Ordenar las trayectorias de precios por el precio del activo mediante la partición de las trayectorias ordenadas en  $Q$  grupos de  $P$  trayectorias en cada uno ( $R = QP$ ). Se denota  $B_t(k)$  como el conjunto de trayectorias de precios en el conjunto que contiene la trayectoria  $k$  a tiempo  $t$ . Para cada trayectoria  $k$ , calcular el valor intrínseco  $I_t(k)$  de la opción.

2. Calcular el valor de continuación de la opción  $H_t(k)$  definido como el valor presente del valor de la opción esperado para un periodo hacia adelante

$$H_t(k) = \frac{d_t(k)}{P} \sum_{j \in B_t(k)} V_{k+1}(j), \quad (4.55)$$

donde  $V_{t+1}(j)$  ha sido calculado en el anterior salto de tiempo. En particular,  $V_N(j) = I_N(j)$  para todo  $j$ .

3. Para cada trayectoria  $k$ , comparar  $H_t(k)$  con  $I_t(k)$  y decir *tentativamente* si ejercer la opción o no. Definir  $x_t(k)$  como la variable indicadora de ejercicio o continuación *tentativa*, donde

$$x_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } I_t(k) \geq H_t(k), \\ 0 & \text{cuando } I_t(k) < H_t(k). \end{cases}$$

Aquí, 1 y 0 representan *ejercer* y *continuar*, respectivamente.

4. En general, puede haber más de un paquete en el que  $x_t(k) = 1$  para alguna  $k \in B_t(k)$  pero 0 para otras trayectorias dentro del mismo conjunto. Estos conjunto tienen una *zona de transición* en el precio del activo desde la decisión de continuar hasta la de ejercer. El algoritmo debe refinarse mediante la creación de una frontera clara entre las decisiones de continuar o ejercer. Para conseguir este objetivo, se examinará la secuencia  $\{x_t(k) : k = 1, \dots, R\}$ , y se determina la frontera clara como el inicio de la cadena de unos, cuya longitud supera la de cada cadena subsecuente de ceros. Por ejemplo, considerar la siguiente cadena

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \overbrace{1}^{\text{frontera}} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0;$$

La longitud de la primera cadena de unos es 5, mientras que las longitudes de las cadenas subsecuentes de ceros son 2, 3 y 1. La trayectoria índice de los principales unos, es llamada  $k_t^*$ . Ahora, se define la variable indicadora de actualización de ejercicio o continuación  $y_t(k)$  mediante

$$y_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } k \geq k_t^*, \\ 0 & \text{cuando } k < k_t^*. \end{cases}$$

5. Para cada trayectoria  $k$ , definir el valor actual  $V_t(k)$  de la opción mediante

$$V_t(k) = \begin{cases} I_t(k) & \text{cuando } y_t(k) = 1, \\ H_t(k) & \text{cuando } y_t(k) = 0. \end{cases}$$

El proceso anterior va hacia atrás desde  $t = N - 1$  hasta  $t = 0$ . Finalmente, se define la variable indicadora de ejercicio o continuación con

$$Z_t(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t(k) = 1 \text{ y } y_s(t) = 0 \text{ para toda } s < t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una de las políticas de ejercicio de cada trayectoria de precios es establecida, el estimador de valor de la opción está dado por

$$\frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \sum_{t=1}^N Z_t(k) y_t(k) I_t(k). \quad (4.56)$$

Para cada trayectoria  $k$ ,  $Z_t(k)$  igual sólo en un instante de tiempo y  $y_t(k) I_t(k)$  da el valor descontado de la utilidad de la opción en esa trayectoria.

Hay varias debilidades importantes en el algoritmo de Tilley. No es eficiente computacionalmente ya que requiere de simular todas las trayectorias de precios en todos los saltos de tiempo. La agrupación y clasificación de todas las trayectorias de precios plantea requisitos estrictos sobre el almacenamiento y cálculo, incluso cuando el número de trayectorias simuladas es moderado. Como se muestra en los propios experimentos numéricos de Tilley, no hay ninguna garantía sobre la convergencia del algoritmo al valor verdadero. Además, la extensión del algoritmo a modelos de opciones de múltiples activos es muy tediosa.

#### Algoritmo Grant-Vora-Weeks

El algoritmo de simulación propuesto por Grant, Vora y Weeks en 1996 identifica en primer lugar el precio de ejercicio óptimo  $S_{t_i}^*$  y selecciona los instantes de tiempo  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  entre el tiempo actual  $t$  y el tiempo de expiración  $T$ . La determinación de precio de ejercicio óptimo está hecha mediante la simulación en sucesivos saltos de tiempo yendo hacia atrás en el tiempo. Una vez que la frontera de ejercicio es identificada, el valor de la opción puede ser estimado por medio del proceso usual de simulación, respetando la estrategia de ejercicio temprano mediante el conocimiento de la frontera de ejercicio.

Se ilustrará el procedimiento considerando la valuación de una opción *put* americana y eligiendo solo tres saltos de tiempo entre el tiempo actual  $t$  y el tiempo de expiración  $T$ , donde  $t_0 = t$  y  $t_3 = T$ . Asumiendo una tasa de dividendo constante  $q$ , el precio de ejercicio óptimo en  $T$  es igual al  $\min\left(\frac{r}{q}K, K\right)$ , donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción y  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo. A tiempo  $t_2$  el cual es uno previo antes de la expiración, el valor de la *put* es  $K - S_{t_2}$  donde  $S_{t_2} \leq S_{t_2}^*$ , y  $\mathbb{E}[P_T] e^{-r(T-t_2)}$  donde  $S_{t_2} > S_{t_2}^*$ . Aquí,  $P_T = \max(K - S_T, 0)$  denota el valor de la opción *put* en el tiempo de expiración  $T$ . Obviamente,  $\mathbb{E}[P_T]$  depende de  $S_{t_2}$ . Para un valor dado de  $S_{t_2}$ , se puede realizar un número suficiente de simulaciones para estimar  $\mathbb{E}[P_T]$ . El precio de ejercicio óptimo  $S_{t_2}^*$  se identifica encontrando el valor apropiado de  $S_{t_2}$  tal que

$$K - S_{t_2}^* = e^{-r(T-t_2)} \mathbb{E} [P_T | S_{t_2}^*]. \quad (4.57)$$

Se encuentra el estimador obtenido con la simulación de  $e^{-r(T-t_2)} \mathbb{E} [P_T]$  como una función de  $S_{t_2}$  comenzando con  $S_{t_2}$  cercano pero menor que  $S_{t_3}^*$  (observar que  $S_{t_3}^*$  es conocido y  $S_{t_2}^*$  debe ser menor que  $S_{t_3}^*$ ). Una vez que la dependencia funcional del valor esperado descontado  $e^{-r(T-t_2)} \mathbb{E} [P_T]$  en  $S_{t_2}$  es viable, se puede encontrar un buen estimador de  $S_{t_2}^*$  tal que satisfaga la ecuación (4.57).

Procediendo hacia atrás en el tiempo, se continua para estimar el precio de ejercicio óptimo a tiempo  $t_1$ . La simulación ahora inicia en  $t_1$ . El valor inicial del activo  $S_{t_1}$  es elegido primero con un valor ligeramente menor que  $S_{t_2}^*$  y la simulación se repite con la disminución de  $S_{t_1}$ . Otra vez, sería ideal encontrar el estimador del valor descontado esperado de la posesión de la *put*, y su valor esperado es una función de  $S_{t_1}$ . En un típico ensayo de la simulación, un valor del activo  $S_{t_2}^*$  es generado en  $t_2$  con el valor inicial del activo  $S_{t_1}$ . Usando el estimador de  $S_{t_2}^*$  obtenido en el paso previo, se puede determinar si  $S_{t_2}$  cae en la región de paro u otro caso. Si la respuesta es sí, el valor estimado de la *put* para la trayectoria simulada es el valor presente del valor de ejercicio temprano. De lo contrario, la simulación continúa generando un valor del activo al tiempo  $T$ . El valor de la *put* para esta trayectoria simulada entonces es igual al valor presente del correspondiente valor presente de la utilidad final. Este proceso de simulación se repite un número suficiente de veces de forma que un estimador del valor esperado descontado pueda obtenerse. De forma similar, se determina el valor crítico  $S_{t_1}^*$  tal que cuando  $S_{t_1}$  es elegido como  $S_{t_1}^*$ , el valor intrínseco  $K - S_{t_1}^*$  es igual al estimador del valor descontado esperado de la posesión de la *put*.

Una vez que los precios de ejercicios óptimo en  $t_1$  y  $t_2$  están disponibles, se puede imitar el proceso numérico anterior para encontrar el estimador del valor esperado descontado de conservar la *put* a tiempo  $t_0$  mediante la realización de ensayos de la simulación con un valor inicial del activo  $S_{t_0}$ . El valor de la *put* a tiempo  $t_0$  para un  $S_{t_0}$  dado es el máximo del estimador del valor descontado esperado obtenido con la simulación (tomando en cuenta la estrategia de ejercicio temprano como ya se ha determinado en el instante  $t_1$  y  $t_2$ ) y el valor intrínseco  $K - S_{t_0}$  para el ejercicio temprano.

#### Algoritmo de Broadie-Glasserman

El algoritmo de malla estocástica de Broadie y Glasserman de 1997, produjo dos estimadores para el valor verdadero de la opción, uno sesgado hacia arriba y el otro sesgado hacia abajo, pero ambos asintóticamente insesgados cuando el número de simulaciones tiende a infinito. Los dos estimadores juntos prevén un intervalo conservador de confianza para el valor de la opción.

Primero, un árbol aleatorio con  $b$  ramas es construido (ver figura (4.5) para  $b = 3$ ) y el valor del activo en el nodo a tiempo  $t_j$  se denota como

$$S_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_j \leq b,$$

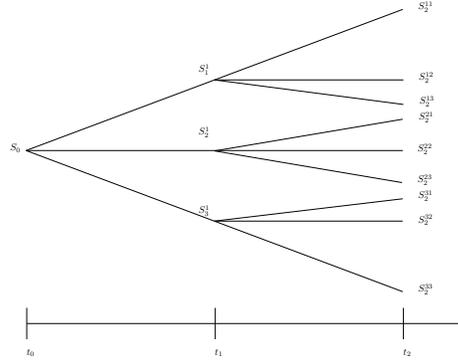


Figura 4.5: Simulación de un árbol con tres ramas y dos saltos de tiempo.

donde  $N$  es el número total de saltos de tiempo. El número total de nodos a tiempo  $t_j$  será  $b^j$ . Aquí,  $S_0$  es el valor inicial fijo y cada  $S_0, S_1^{i_1}, S_2^{i_1 i_2}, \dots, S_N^{i_1 i_2 \dots i_N}$  es una realización del proceso de Markov para el precio del activo, y dos de tales secuencias evolucionan independientemente una de la otra una vez que difieren en algún  $i_j$ .

Sea  $\theta_{\uparrow j}^{i_1 \dots i_j}$  y  $\theta_{\downarrow j}^{i_1 \dots i_j}$  que denotan los estimadores hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, del valor de la opción en el  $(i_1, \dots, i_j)$ -ésimo nodo a tiempo  $t_j$ . También, sea  $h_j(s)$  la utilidad para el ejercicio a tiempo  $t_j$  en el estado  $s$  y  $\frac{1}{R_{j+1}}$  el factor de descuento desde  $t_j$  hasta  $t_{j+1}$ . Broadie y Glasserman definieron el estimador hacia arriba para el valor de la opción en el nodo  $(i_1, \dots, i_j)$  a tiempo  $t_j$  como el máximo de las utilidades al ejercicio temprano y el estimador del valor de continuación desde el nodo sucesor  $b$ , como sigue

$$\theta_{\uparrow j}^{i_1 \dots i_j} = \max \left( h_j \left( S_j^{i_1 \dots i_j} \right), \frac{1}{b} \sum_{i_{j+1}=1}^b \frac{1}{R_{j+1}} \theta_{\uparrow j+1}^{i_1 \dots i_j i_{j+1}} \right). \quad (4.58)$$

Si el precio del activo en el nodo en el tiempo  $t_{j+1}$  llega a ser demasiado alto en el proceso de simulación, el proceso de programación dinámica anterior será tal que se elegirá no ejercer y tomar un valor más alto que el que optimiza la decisión de ejercer. Por otro lado, si los precios simulados del activo en  $t_{j+1}$  son demasiado bajos, el proceso indicará el ejercicio aún cuando el precio sea menor que el de ejercicio óptimo. El valor de la opción es sobre estimado ya que se tiene ventaja de conocimiento del futuro.

El algoritmo numérico para el estimador hacia abajo es ligeramente más complicado. En cada nodo, una rama es usada para estimar el valor de continuación y las otras  $b - 1$  ramas son usadas para estimar la decisión de ejercicio. El mismo proceso se repite  $b$  veces, donde cada rama se elige a su vez. Para explicar el proceso con más detalle, supongamos que el  $k$ -ésimo se elige para

estimar el valor de continuación mientras que los otros  $b - 1$  para estimar la decisión de ejercicio. Se elige el ejercicio temprano si la utilidad  $h_j(S_j^{i_1 \dots i_j})$  es mayor o igual que la esperanza del valor de continuación. La esperanza es calculada tomando la media entre  $b - 1$  ramas de los valores discontinuos  $\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\downarrow j+1}^{i_1 \dots i_{j+1}}$ ,  $i_{j+1} = 1, \dots, b, i_{j+1} \neq k$ . Si se elige el ejercicio temprano, entonces el estimador  $\eta_j^{i_1 \dots i_{j+1} k}$  toma el valor de utilidad  $h_j(S_j^{i_1 \dots i_j})$ , de lo contrario, toma el valor de continuación  $\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\downarrow j+1}^{i_1 \dots i_j k}$ . Así  $b$  estimadores se obtienen en los  $b$  saltos y se calcula la media para determinar el valor estimado de la opción en el nodo. El proceso puede ser descrito brevemente como sigue

$$\eta_j^{i_1 \dots i_j k} = \begin{cases} h_j(S_j^{i_1 \dots i_j}), & \text{si } h_j(S_j^{i_1 \dots i_j}) \geq \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{i_{j+1}=1, \\ i_{j+1} \neq k}}^b \frac{1}{R_{j+1}} \theta_{\downarrow j+1}^{i_1 \dots i_j i_{j+1}}, \\ & k = 1, \dots, b, \\ \frac{1}{R_{j+1}} \theta_{\downarrow j+1}^{i_1 \dots i_j k}, & \text{si } h_j(S_j^{i_1 \dots i_j}) < \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{i_{j+1}=1, \\ i_{j+1} \neq k}}^b \frac{1}{R_{j+1}} \theta_{\downarrow j+1}^{i_1 \dots i_j i_{j+1}}, \\ & k = 1, \dots, b, \end{cases}$$

entonces

$$\theta_{\downarrow j}^{i_1 \dots i_j} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \eta_j^{i_1 \dots i_j k}. \quad (4.59)$$

Ambos algoritmos ( 4.58) y ( 4.59) son inducciones hacia atrás, esto es, conociendo los estimadores a tiempo  $t_{j+1}$ , se calculan los estimadores de un tiempo antes  $t_j$ . Para ambos estimadores, hacia abajo y hacia arriba, las iteraciones iniciales de tiempo  $T = t_N$  son ambas dadas por la siguiente función de utilidad final

$$\theta_N^{i_1 \dots i_N} = h_N(S_N^{i_1 \dots i_N}). \quad (4.60)$$

El algoritmo de Broadie-Glasserman puede ser extendido para tratar con opciones de varios activos, y puede utilizarse para tomar decisiones más allá de ejercer o continuar con la opción.



# Resultados

---

Ahora que se mostró la teoría sobre la cual descansan las diferentes formulaciones para la solución numérica del problema de valuación de opciones americanas, se presentan ejemplos de estas junto con algunas de sus características.

La implementación y evaluación de los diferentes modelos se ha realizado para calcular el valor de una opción *put* americana sin dividendos, se buscó que los parámetros de los distintos modelos coincidieran, de forma que los valores obtenidos fueran comparables.

Los algoritmos que se han elegido son, para los esquemas de malla, el árbol binomial, para los de diferencias finitas, el método implícito de fijación de la frontera, y finalmente el algoritmo de Tilley, que emplea simulación Monte Carlo. Para la programación de cada uno estos algoritmos se ha utilizado el software libre **R**, la descripción detallada de cada uno se puede consultar en la sección de apéndices.

## 5.1. Árbol Binomial

El algoritmo para el árbol binomial ha sido el de menor complejidad, dado que este esquema resulta intuitivo y fácil de comprender en cada uno de sus avances. Se usó la formulación de Cox-Ross-Rubinstein (ver referencia [20]).

Como se ha descrito en el capítulo anterior, hay diversos parámetros que es preciso fijar para iniciar el cálculo,  $T$ , que representa el plazo total para la expiración,  $N_t$  que es el número de periodos en los que se divide el plazo total,  $S_0$  es el precio inicial del activo,  $\sigma$  que es la volatilidad supuesta del proceso de precio del activo,  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y  $K$  que representa el precio de ejercicio.

La exactitud del resultado de este modelo reside en el número de plazos en que se divide  $T$ , es decir  $N_t$ , por lo que se presenta la figura ( 5.1) en la que se muestra la variación del precio calculado haciendo variar  $N_t$ .

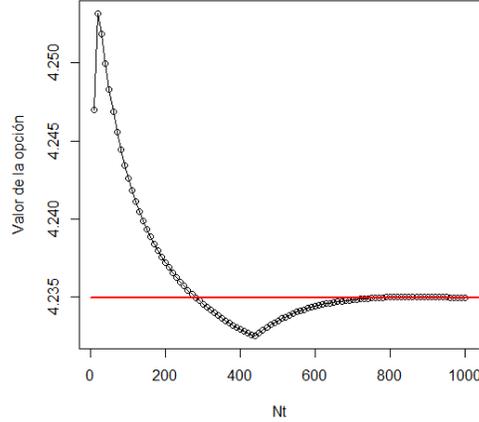


Figura 5.1: Variación del precio calculado por el modelo de árbol binomial respecto al incremento de  $N_t$ , opción *put* con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

El ensayo se ha realizado para  $N_t = 10$  hasta  $N_t = 1000$ , con  $S_0 = 10$ ,  $K = 11$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $r = 0,05$ . Se observa que conforme crece el número de periodos el precio tiende a un valor específico, en este caso  $P_0 = 4.234932$ , que fue obtenido con el valor mayor de  $N_t$ , es decir 1000. En la tabla ( 5.1) se pueden consultar los valores específicos obtenidos con el modelo.

Existen librerías en **R** que contienen funciones para calcular el precio de opciones americanas, en particular la función `CRRBinomialTreeOption`, de la librería `fOptions`, funciona para calcular el precio de opciones europeas y americanas, *call* o *put*, se ha comparado el resultado para una opción con las mismas características que las utilizadas en el modelo, el resultado es exactamente el mismo.

Se realizó un ensayo más para  $N_t = 10$  hasta  $N_t = 1000$ , con  $S_0 = 35$ ,  $K = 40$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $r = 0,1$ . En este caso, el valor cuando  $N_t = 1000$  es  $P_0 = 14,93338$ . En la tabla ( 5.2) se pueden consultar los valores específicos obtenidos con el modelo. La figura ( 5.2) muestra la evolución del precio conforme  $N_t$  crece.

Las dificultades para la implementación de este modelo han sido básicamente computacionales, se requieren grandes cantidades de memoria para evaluar el modelo cuando se utiliza  $N_t$  muy grande, tanto para el que se ha programado o el que está disponible en el software. Como ya se ha mencionado, se cuenta con la ventaja de la fácil comprensión del método y lo intuitivo de su generación, además de que se observa una rápida convergencia.

Valor de $N_t$	Valor de la opción	Valor de $N_t$	Valor de la opción	Valor de $N_t$	Valor de la opción
10	4.246990	350	4.233643	690	4.234796
20	4.253169	360	4.233483	700	4.234825
30	4.251878	370	4.233332	710	4.234850
40	4.249961	380	4.233190	720	4.234873
50	4.248335	390	4.233053	730	4.234894
60	4.246890	400	4.232921	740	4.234913
70	4.245570	410	4.232797	750	4.234930
80	4.244466	420	4.232682	760	4.234945
90	4.243464	430	4.232581	770	4.234958
100	4.242602	440	4.232531	780	4.234969
110	4.241816	450	4.232717	790	4.234979
120	4.241105	460	4.232895	800	4.234988
130	4.240458	470	4.233060	810	4.234994
140	4.239877	480	4.233213	820	4.235000
150	4.239339	490	4.233356	830	4.235004
160	4.238849	500	4.233489	840	4.235007
170	4.238397	510	4.233613	850	4.235009
180	4.237975	520	4.233728	860	4.235010
190	4.237584	530	4.233835	870	4.235010
200	4.237222	540	4.233934	880	4.235008
210	4.236880	550	4.234027	890	4.235006
220	4.236560	560	4.234113	900	4.235003
230	4.236255	570	4.234193	910	4.234999
240	4.235969	580	4.234267	920	4.234995
250	4.235700	590	4.234336	930	4.234989
260	4.235444	600	4.234400	940	4.234983
270	4.235202	610	4.234459	950	4.234976
280	4.234974	620	4.234514	960	4.234968
290	4.234756	630	4.234565	970	4.234960
300	4.234549	640	4.234612	980	4.234952
310	4.234352	650	4.234655	990	4.234942
320	4.234163	660	4.234695	1000	4.234932
330	4.233983	670	4.234732		
340	4.233809	680	4.234766		

**Tabla 5.1.** Valores de la opción obtenidos al variar  $N_t$  desde 10 hasta 1000, opción *put* con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

Valor de $N_t$	Valor de la opción	Valor de $N_t$	Valor de la opción	Valor de $N_t$	Valor de la opción
10	4.246990	350	4.233643	690	4.234796
20	4.253169	360	4.233483	700	4.234825
30	4.251878	370	4.233332	710	4.234850
40	4.249961	380	4.233190	720	4.234873
50	4.248335	390	4.233053	730	4.234894
60	4.246890	400	4.232921	740	4.234913
70	4.245570	410	4.232797	750	4.234930
80	4.244466	420	4.232682	760	4.234945
90	4.243464	430	4.232581	770	4.234958
100	4.242602	440	4.232531	780	4.234969
110	4.241816	450	4.232717	790	4.234979
120	4.241105	460	4.232895	800	4.234988
130	4.240458	470	4.233060	810	4.234994
140	4.239877	480	4.233213	820	4.235000
150	4.239339	490	4.233356	830	4.235004
160	4.238849	500	4.233489	840	4.235007
170	4.238397	510	4.233613	850	4.235009
180	4.237975	520	4.233728	860	4.235010
190	4.237584	530	4.233835	870	4.235010
200	4.237222	540	4.233934	880	4.235008
210	4.236880	550	4.234027	890	4.235006
220	4.236560	560	4.234113	900	4.235003
230	4.236255	570	4.234193	910	4.234999
240	4.235969	580	4.234267	920	4.234995
250	4.235700	590	4.234336	930	4.234989
260	4.235444	600	4.234400	940	4.234983
270	4.235202	610	4.234459	950	4.234976
280	4.234974	620	4.234514	960	4.234968
290	4.234756	630	4.234565	970	4.234960
300	4.234549	640	4.234612	980	4.234952
310	4.234352	650	4.234655	990	4.234942
320	4.234163	660	4.234695	1000	4.234932
330	4.233983	670	4.234732		
340	4.233809	680	4.234766		

**Tabla 5.2.** Valores de la opción obtenidos al variar  $N_t$  desde 10 hasta 1000, opción *put* con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

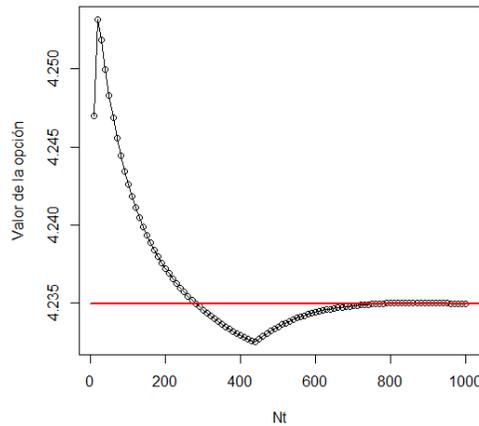


Figura 5.2: Variación del precio calculado por el modelo de árbol binomial respecto al incremento de  $N_t$ , opción *put* con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

## 5.2. Diferencias finitas, fijación de la frontera

Ahora se presentan los resultados de la implementación del algoritmo de fijación de la frontera, que descansa en el cambio de variable  $y = \ln \frac{S}{S^*(\tau)}$  donde  $S$  representa el precio del activo y  $S^*(\tau)$  la frontera de ejercicio temprano.

De inicio es necesario cargar la librería *Matrix* con el fin de que **R** reconozca las operaciones con matrices que se realizan como parte del procedimiento. Los siguientes parámetros son requeridos para iniciar,  $T$  que es el tiempo total que falta para la expiración de la opción,  $N_t$  que es el número de periodos en los que se dividirá el tiempo total, este parámetro determina el número de iteraciones que se realizarán. El método está diseñado para evaluar activos normalizados por el precio de ejercicio, es decir, suponiendo que  $K = 1$ , por lo que se necesita fijar y normalizar el precio inicial del activo  $S_0$ . Por último es necesario fijar la tasa de interés libre de riesgo  $r$ , y la varianza  $\sigma$ .

La media de la distribución se determina como parte de la solución, la malla discreta sobre la cual se calcularán los valores de la opción resulta de dividir el tiempo total para la expiración en  $N_t$  periodos, y se toma  $D_t = T/N_t$ , y en el parámetro espacial,  $D_y = c\sigma\sqrt{D_t}$ , donde  $c$  es una constante. Una vez fijos estos parámetros, se calcula la media de la distribución, en este caso con la fórmula  $\mu = \frac{D_t}{D_y}$ . Por último,  $M$ , que es el número de divisiones que tendrá la malla en la variable espacial y está dado por  $M = \frac{c_1\sigma\sqrt{T}}{D_y}$ , donde  $c_1$  es también constante, se

eligieron los valores  $c = \frac{3}{2}$  y  $c_1 = 8$ , esto siguiendo la recomendación del artículo de Lixin Wu y Yue-Kuen Kwok de 1991.

El procedimiento inicia con el cálculo de las constantes componentes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de la matriz cuadrada  $A$ , además de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Como se ha explicado en el capítulo anterior, el procedimiento necesita la determinación de los vectores de valor de la opción a tiempo 0 y 1 para iniciar los cálculos, los cuales se obtienen mediante las ecuaciones (4.32) no sin antes hacer los respectivos cálculos para  $\tilde{S}_0^*$  y  $S_1^*$ , las fórmulas utilizadas fueron las siguientes

$$\tilde{S}_0^* = \frac{f_1^1 + \frac{b}{2}f_2^1 - f_3^1 - \alpha}{\frac{b}{2}f_2^1 - \frac{f_3^1}{\tilde{S}_0^*} - \beta},$$

para  $\tilde{S}_0^*$ , donde

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} \left( \mathbb{I} - \frac{\mathbb{A}}{2} \right) \mathbb{P}^0 \\ f_2 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} \mathbf{e}_1, \\ f_3 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} D_0(\mathbb{P}^0), \end{aligned}$$

y para  $S_1^*$

$$S_1^* = \frac{\alpha - f_1^1 - \frac{b}{2}f_2^1 + \frac{2S_0^*f_3^1}{S_0^* + S_1^*}}{\beta - \frac{b}{2}f_2^1 + \frac{2f_3^1}{S_0^* + S_1^*}},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} \left( \mathbb{I} - \frac{\mathbb{A}}{2} \right) \mathbb{P}^0, \\ f_2 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} \mathbf{e}_1, \\ f_3 &= \left( \mathbb{I} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} D_0 \left( \frac{\tilde{\mathbb{P}} + \mathbb{P}^0}{2} \right). \end{aligned}$$

Después de calcular los valores iniciales se puede comenzar con la iteración. En cada periodo de tiempo  $n$  se calcula el valor de  $S_n^*$  a partir de la siguiente fórmula

$$S_n^* = \frac{\alpha - f_1^1 - bf_2^1 + \frac{S_{n-1}^* f_3^1}{S_n^*}}{\beta - bf_2^1 + \frac{f_3^1}{S_n^*}},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} [(\mathbb{I} - \mathbb{A}) \mathbb{P}^{n-1} + bP_0^{n-1} \mathbf{e}_1], \\ f_2 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} \mathbf{e}_1, \\ f_3 &= (\mathbb{I} + \mathbb{A})^{-1} D_0 \mathbb{P}^n. \end{aligned}$$

Con este procedimiento se obtiene un vector de  $M$  valores para la opción, regresando en la transformación de la variable  $S^*(\tau)$  se obtiene que

$$S_j = KS^*(T) e^{jD_y} \quad j = 1, \dots, M,$$

con lo que se obtienen valores iniciales de la opción para distintos precios iniciales, cabe señalar que también es necesario multiplicar los valores obtenidos en el vector final, es decir, en  $N_t$ , por el valor correcto de  $K$  y después, mediante una interpolación obtener el número buscado, se ha utilizado el método en el que se considera que la función es lineal en un intervalo.

Con el fin de ejemplificar el resultado del algoritmo se han fijado los parámetros del modelo en  $T = 1$ ,  $N_t = 100$ ,  $S_0 = 10$ ,  $K = 11$ ,  $r = 0.05$ , y  $\sigma = 1$ . La figura ( 5.3) muestra la evolución del proceso con una  $N_t = 20$ .

Dado que, el orden de aproximación obtenido está directamente relacionado con el número de periodos,  $N_t$ , que se seleccionan, en la figura ( 5.4) se muestra el resultado obtenido cuando  $N_t = 100$ .

Para evaluar el comportamiento del algoritmo conforme crece el valor de  $N_t$  se presenta la figura ( 5.5), en donde se hace variar a  $N_t$  desde 10 hasta 1000, y en la tabla ( 5.3) se muestran los valores obtenidos y el error de estos con respecto al valor obtenido por el método binomial.

El método de fijación de la frontera presenta una ventaja ante la opción del modelo binomial, el número de operaciones que es preciso realizar para el mismo valor de  $N_t$  es mucho menor, esto tiene importantes implicaciones en la memoria computacional utilizada.

Se realizó un segundo ejemplo para el valor de una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ , los resultados numéricos del ejercicio pueden consultarse en la tabla ( 5.4) y la evolución del precio de la opción en la figura ( 5.6).

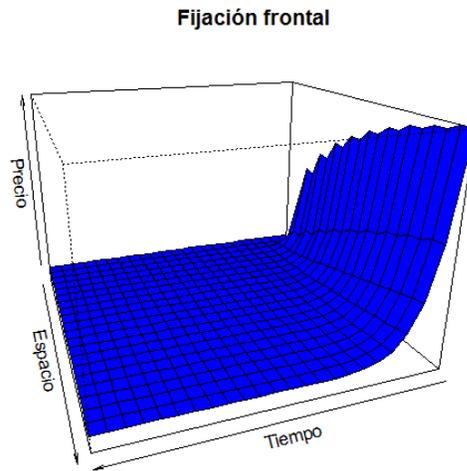


Figura 5.3: Representación de la solución del algoritmo de frontera fija para  $N_t = 20$ .

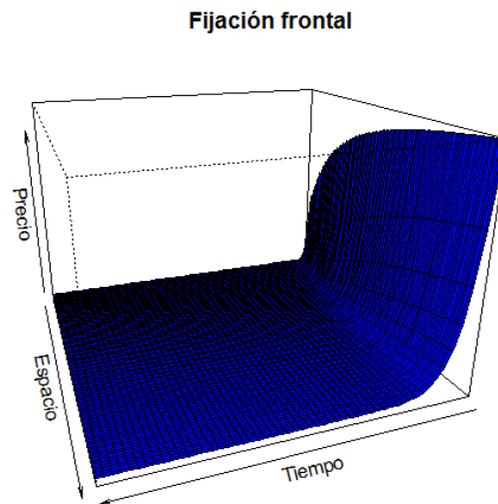


Figura 5.4: Representación de la solución del algoritmo de frontera fija para  $N_t = 100$ .

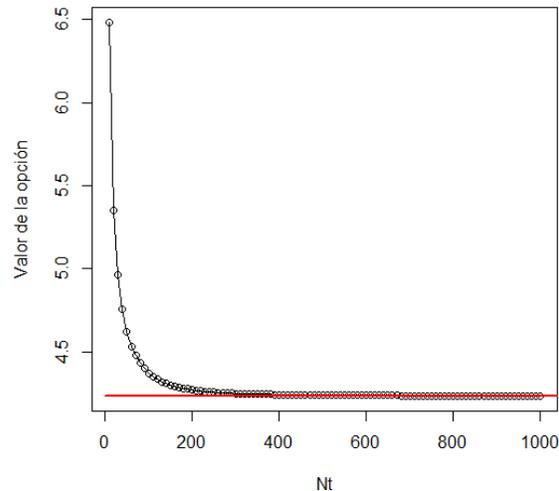


Figura 5.5: Representación de la solución del algoritmo de frontera fija para una *put* americana calculado al variar  $N_t$ , para una opción con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

### 5.3. Algoritmo de Tilley

Para ejemplificar la solución del problema de encontrar el valor de una opción *put* americana utilizando el método de Monte Carlo, se presenta el algoritmo de Tilley, que como desventaja tiene que no hay alguna demostración de que converja a la solución exacta.

Con el supuesto de que  $\ln\left(\frac{S(\tau)}{S(0)}\right)$  se distribuye normal, para las simulaciones de los precios del activo se utilizará la distribución log-normal. Se busca que los resultados obtenidos converjan a la solución obtenida con el método de árbol binomial según la formulación de Cox-Ross-Rubinstein presentada en 1979, de acuerdo con este supuesto, en promedio, los parámetros deben cumplir la relación  $\mu = \ln(1+r) - \frac{\sigma^2}{2}$ .

Ahora, es preciso fijar algunos datos iniciales:  $K$ , que representa el precio de ejercicio,  $S_0$ , el valor inicial del activo,  $d_t$ , el factor de descuento que aplica en un periodo de tiempo,  $\sigma^2$  y  $\mu$ , que representan la volatilidad y la media de la distribución.

Al seleccionar el número de trayectorias que serán simuladas,  $R$  y el número de grupos en los que se dividirán las trayectorias,  $Q$ , es necesario utilizar un parámetro de construcción definido como  $\alpha$  que cumple que  $Q = R^\alpha$ , el parámetro  $P$  se define como  $R/Q$  y representa el número de trayectorias agrupadas en cada conjunto.

Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error
10	6.4817	- 2.2468	350	4.2448	- 0.0099	680	4.2365	- 0.0015
20	5.3492	- 1.1142	360	4.2442	- 0.0093	690	4.2364	- 0.0015
30	4.9664	- 0.7314	370	4.2435	- 0.0085	700	4.2363	- 0.0014
40	4.7563	- 0.5213	380	4.2430	- 0.0081	710	4.2363	- 0.0013
50	4.6214	- 0.3865	390	4.2424	- 0.0075	720	4.2362	- 0.0013
60	4.5300	- 0.2950	400	4.2419	- 0.0070	730	4.2361	- 0.0012
70	4.4767	- 0.2418	410	4.2415	- 0.0066	740	4.2361	- 0.0012
80	4.4338	- 0.1989	420	4.2410	- 0.0061	750	4.2360	- 0.0011
90	4.3983	- 0.1634	430	4.2407	- 0.0058	760	4.2360	- 0.0011
100	4.3687	- 0.1338	440	4.2404	- 0.0054	770	4.2359	- 0.0010
110	4.3511	- 0.1161	450	4.2400	- 0.0051	780	4.2359	- 0.0010
120	4.3345	- 0.0996	460	4.2398	- 0.0048	790	4.2359	- 0.0009
130	4.3189	- 0.0840	470	4.2394	- 0.0045	800	4.2358	- 0.0009
140	4.3099	- 0.0750	480	4.2392	- 0.0043	810	4.2358	- 0.0009
150	4.3001	- 0.0652	490	4.2390	- 0.0040	820	4.2358	- 0.0008
160	4.2923	- 0.0574	500	4.2387	- 0.0038	830	4.2357	- 0.0008
170	4.2861	- 0.0512	510	4.2385	- 0.0036	840	4.2357	- 0.0008
180	4.2797	- 0.0448	520	4.2383	- 0.0034	850	4.2357	- 0.0007
190	4.2757	- 0.0408	530	4.2381	- 0.0032	860	4.2356	- 0.0007
200	4.2709	- 0.0359	540	4.2380	- 0.0031	870	4.2356	- 0.0007
210	4.2679	- 0.0330	550	4.2378	- 0.0029	880	4.2356	- 0.0007
220	4.2643	- 0.0294	560	4.2377	- 0.0027	890	4.2356	- 0.0006
230	4.2620	- 0.0270	570	4.2375	- 0.0026	900	4.2355	- 0.0006
240	4.2592	- 0.0242	580	4.2374	- 0.0025	910	4.2355	- 0.0006
250	4.2573	- 0.0224	590	4.2373	- 0.0023	920	4.2355	- 0.0006
260	4.2551	- 0.0202	600	4.2372	- 0.0022	930	4.2355	- 0.0005
270	4.2537	- 0.0188	610	4.2371	- 0.0021	940	4.2355	- 0.0005
280	4.2518	- 0.0169	620	4.2370	- 0.0020	950	4.2354	- 0.0005
290	4.2508	- 0.0158	630	4.2369	- 0.0019	960	4.2354	- 0.0005
300	4.2494	- 0.0144	640	4.2368	- 0.0018	970	4.2354	- 0.0005
310	4.2484	- 0.0135	650	4.2367	- 0.0017	980	4.2354	- 0.0005
320	4.2473	- 0.0124	660	4.2366	- 0.0017	990	4.2354	- 0.0004
330	4.2464	- 0.0115	670	4.2365	- 0.0016	1000	4.2354	- 0.0004
340	4.2456	- 0.0107						

**Tabla 5.3.** Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $N_t$  con el algoritmo de fijación de la frontera, para una opción con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error
10	6.4817	- 2.2468	350	4.2448	- 0.0099	680	4.2365	- 0.0015
20	5.3492	- 1.1142	360	4.2442	- 0.0093	690	4.2364	- 0.0015
30	4.9664	- 0.7314	370	4.2435	- 0.0085	700	4.2363	- 0.0014
40	4.7563	- 0.5213	380	4.2430	- 0.0081	710	4.2363	- 0.0013
50	4.6214	- 0.3865	390	4.2424	- 0.0075	720	4.2362	- 0.0013
60	4.5300	- 0.2950	400	4.2419	- 0.0070	730	4.2361	- 0.0012
70	4.4767	- 0.2418	410	4.2415	- 0.0066	740	4.2361	- 0.0012
80	4.4338	- 0.1989	420	4.2410	- 0.0061	750	4.2360	- 0.0011
90	4.3983	- 0.1634	430	4.2407	- 0.0058	760	4.2360	- 0.0011
100	4.3687	- 0.1338	440	4.2404	- 0.0054	770	4.2359	- 0.0010
110	4.3511	- 0.1161	450	4.2400	- 0.0051	780	4.2359	- 0.0010
120	4.3345	- 0.0996	460	4.2398	- 0.0048	790	4.2359	- 0.0009
130	4.3189	- 0.0840	470	4.2394	- 0.0045	800	4.2358	- 0.0009
140	4.3099	- 0.0750	480	4.2392	- 0.0043	810	4.2358	- 0.0009
150	4.3001	- 0.0652	490	4.2390	- 0.0040	820	4.2358	- 0.0008
160	4.2923	- 0.0574	500	4.2387	- 0.0038	830	4.2357	- 0.0008
170	4.2861	- 0.0512	510	4.2385	- 0.0036	840	4.2357	- 0.0008
180	4.2797	- 0.0448	520	4.2383	- 0.0034	850	4.2357	- 0.0007
190	4.2757	- 0.0408	530	4.2381	- 0.0032	860	4.2356	- 0.0007
200	4.2709	- 0.0359	540	4.2380	- 0.0031	870	4.2356	- 0.0007
210	4.2679	- 0.0330	550	4.2378	- 0.0029	880	4.2356	- 0.0007
220	4.2643	- 0.0294	560	4.2377	- 0.0027	890	4.2356	- 0.0006
230	4.2620	- 0.0270	570	4.2375	- 0.0026	900	4.2355	- 0.0006
240	4.2592	- 0.0242	580	4.2374	- 0.0025	910	4.2355	- 0.0006
250	4.2573	- 0.0224	590	4.2373	- 0.0023	920	4.2355	- 0.0006
260	4.2551	- 0.0202	600	4.2372	- 0.0022	930	4.2355	- 0.0005
270	4.2537	- 0.0188	610	4.2371	- 0.0021	940	4.2355	- 0.0005
280	4.2518	- 0.0169	620	4.2370	- 0.0020	950	4.2354	- 0.0005
290	4.2508	- 0.0158	630	4.2369	- 0.0019	960	4.2354	- 0.0005
300	4.2494	- 0.0144	640	4.2368	- 0.0018	970	4.2354	- 0.0005
310	4.2484	- 0.0135	650	4.2367	- 0.0017	980	4.2354	- 0.0005
320	4.2473	- 0.0124	660	4.2366	- 0.0017	990	4.2354	- 0.0004
330	4.2464	- 0.0115	670	4.2365	- 0.0016	1000	4.2354	- 0.0004
340	4.2456	- 0.0107						

**Tabla 5.4.** Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $N_t$  con el algoritmo de fijación de la frontera, para una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

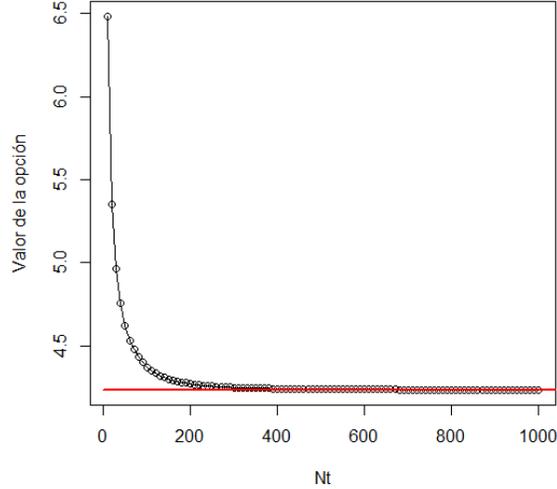


Figura 5.6: Representación de la solución del algoritmo de frontera fija para una *put* americana calculado al variar  $N_t$ , para una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

Para definir  $R$ ,  $Q$  y  $N_t$ , el número de precios que se simularán en cada ensayo, se realizarán algunas comparaciones en lo siguiente.

De la evaluación del modelo binomial en una opción con precio de ejercicio  $K = 11$ , precio inicial del subyacente  $S_0 = 10$ ,  $\sigma^2 = 1$ , tasa de rendimiento  $r = 0.05$ , y un número de intervalos de tiempo  $N_t = 1000$ , mediante el método binomial se obtuvo el precio que desde ahora se considerará el exacto, este es 4.234932. Para el método de Tilley, con estos mismos datos, queda determinada una  $\mu = -0.4788107$ .

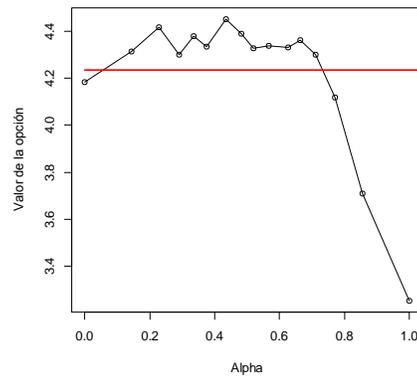
Se puede intuir que un mayor número de simulaciones  $R$  generará una mayor exactitud en el cálculo del precio de la opción, los límites de este acercamiento están dados por motivos de capacidad computacional. Se busca el monto  $\alpha$  que acerca el resultado del algoritmo al del método binomial, para ello se presentan los resultados obtenidos con un número de simulaciones  $R = 5!$  y  $R = 6!$ , para cada uno se evalúan los posibles valores de  $\alpha$ , para determinar la mejor aproximación.

Como se muestra en la tabla ( 5.4), en el caso de  $R = 5!$ , el valor de  $\alpha$  que resulta más conveniente es  $\alpha = 0$ , ya que el precio obtenido es de  $P_0 = 4.184515$  que tiene un error respecto al verdadero de 1.19% . La figura ( 5.7) muestra la evolución del precio cuando se modifica  $\alpha$  y la tabla ( 5.5) los valores para cada ensayo.

En cambio para  $R = 6!$ , el valor de  $\alpha$  que más eficiente es  $\alpha = 0.789293$ , ya que el precio obtenido es de  $P_0 = 4.208695$  que tiene un error respecto al verdadero

Q	P	Alpha	Precio	Exacto	Diferencia
1	120	0	4.184515	4.234932	0.050417
2	60	0.144783	4.315263	4.234932	0.080331
3	40	0.2294755	4.415569	4.234932	0.180637
4	30	0.2895659	4.299351	4.234932	0.064419
5	24	0.3361756	4.379434	4.234932	0.144502
6	20	0.3742585	4.333426	4.234932	0.098494
8	15	0.4343489	4.45059	4.234932	0.215658
10	12	0.4809586	4.388272	4.234932	0.153340
12	10	0.5190414	4.326321	4.234932	0.091389
15	8	0.5656511	4.337576	4.234932	0.102644
20	6	0.6257415	4.33269	4.234932	0.097758
24	5	0.6638244	4.360884	4.234932	0.125952
30	4	0.7104341	4.300931	4.234932	0.065999
40	3	0.7705245	4.11819	4.234932	0.116742
60	2	0.855217	3.711401	4.234932	0.523531
120	1	1	3.25446	4.234932	0.980472

**Tabla 5.5.** Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $\alpha$ , con  $R = 5!$ , para todos los posibles valores de  $Q$ .



**Figura 5.7:** Gráfica de la evolución del parámetro  $\alpha$  con respecto al tamaño de  $Q$ , con  $R = 5!$ .

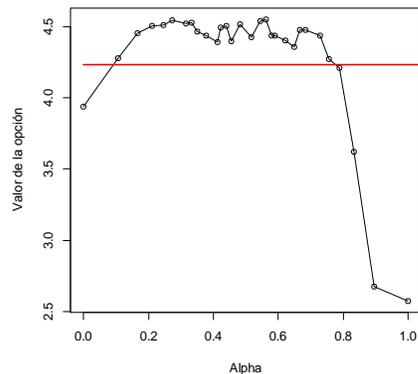


Figura 5.8: Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $\alpha$ , con  $R = 6!$ .

de 0.62% . La figura ( 5.8) y la tabla ( 5.6) muestran la evolución del valor de la opción cuando se modifica  $\alpha$ .

Dado que el precio más cercano se obtiene con los parámetros  $R = 6!$  y  $\alpha = 0.789293$ , se utilizarán tales valores en la discusión siguiente. Quedan también determinados por este análisis el valor de  $Q = 180$  y  $P = 4$ .

Resta la evaluación del modelo variando el tamaño de la muestra de cada simulación,  $N_t$ . Para esto se muestra la figura ( 5.9). En la tabla ( 5.7) se pueden consultar los valores exactos.

Como se ha mencionado antes, la gran desventaja de esta solución es que no garantiza la convergencia al valor real de la opción, pero en la gráfica se puede ver que conforme  $N_t$  crece los valores calculados son, en conjunto, más cercanos al valor real.

Se realizó un segundo ejemplo para el valor de una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ , los resultados numéricos del ejercicio pueden consultarse en la tabla ( 5.8) y la evolución del precio de la opción en la figura ( 5.10).

## 5.4. Comparación

Ya que se han estudiado por separado cada uno de los métodos implementados, se presenta la figura ( 5.11) que muestra los valores obtenidos al variar el

Q	P	Alpha	Precio	Exacto	Diferencia
1	720	-	3.940692	4.234932	0.294240
2	360	0.105354	4.280826	4.234932	0.045894
3	240	0.166981	4.456363	4.234932	0.221431
4	180	0.210707	4.506847	4.234932	0.271915
5	144	0.244623	4.510845	4.234932	0.275913
6	120	0.272335	4.544291	4.234932	0.309359
8	90	0.316061	4.522224	4.234932	0.287292
9	80	0.333963	4.528890	4.234932	0.293958
10	72	0.349977	4.467169	4.234932	0.232237
12	60	0.377688	4.434876	4.234932	0.199944
15	48	0.411605	4.392900	4.234932	0.157968
16	45	0.421414	4.496495	4.234932	0.261563
18	40	0.439316	4.502550	4.234932	0.267618
20	36	0.455330	4.398200	4.234932	0.163268
24	30	0.483042	4.516280	4.234932	0.281348
30	24	0.516958	4.426030	4.234932	0.191098
36	20	0.544670	4.540408	4.234932	0.305476
40	18	0.560684	4.549422	4.234932	0.314490
45	16	0.578586	4.434721	4.234932	0.199789
48	15	0.588395	4.435596	4.234932	0.200664
60	12	0.622312	4.402996	4.234932	0.168064
72	10	0.650023	4.358998	4.234932	0.124066
80	9	0.666037	4.475468	4.234932	0.240536
90	8	0.683940	4.475970	4.234932	0.241038
120	6	0.727665	4.438028	4.234932	0.203096
144	5	0.755377	4.272517	4.234932	0.037585
180	4	0.789293	4.208695	4.234932	0.026237
240	3	0.833019	3.622544	4.234932	0.612388
360	2	0.894647	2.677395	4.234932	1.557537
720	1	1.000000	2.575475	4.234932	1.659457

**Tabla 5.6.** Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $\alpha$ , con  $R = 6!$ .

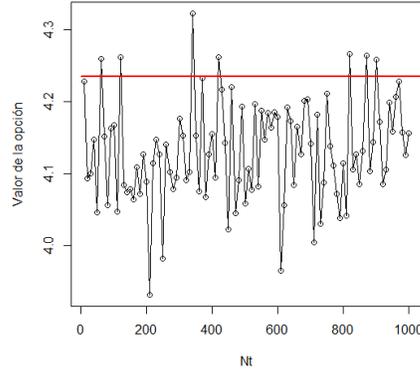


Figura 5.9: Valor de la opción *put* americana con distintos valores de  $N_t$ .

parámetro  $N_t$  en cada uno de los algoritmos para el caso de la opción *put* con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

Y para el caso en que  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ , se ve la evolución del precio de los tres métodos en la figura ( 5.12).

Como se puede observar en ambos gráficos, el algoritmo de árbol binomial presenta la mayor rapidez de convergencia, además de que, como ya se ha mencionado, es de fácil implementación comparado con los otros dos, con la única desventaja de la memoria que utiliza hace muy difícil el aumentar el orden de aproximación.

El algoritmo de fijación de la frontera es el que menor cantidad de memoria computacional ocupa en cada ensayo y como muestra la figura, también tiene una rápida convergencia, la desventaja que presenta es ser difícil de implementar y muy poco intuitivo.

El algoritmo de Tilley presenta una lenta aproximación al resultado exacto y alta volatilidad con respecto a los otros, debido obviamente a la utilización de simulaciones.

Se concluye, después del análisis de los tres diferentes métodos, que es cuestión de los recursos que cada usuario tenga disponibles la elección de un método. En caso de estar buscando exactitud en los resultados y se cuenta con recursos computacionales suficientes, se recomienda el método de árbol binomial. En caso de no contar con esto y tener requerimientos un tanto más flexibles, el

N	Precio	Exacto	Diferencia	N	Precio	Exacto	Diferencia
10	4.227792	4.234932	0.007140	510	4.106184	4.234932	0.128748
20	4.092608	4.234932	0.142324	520	4.077059	4.234932	0.157873
30	4.099818	4.234932	0.135114	530	4.196042	4.234932	0.038890
40	4.147472	4.234932	0.087460	540	4.081330	4.234932	0.153602
50	4.045988	4.234932	0.188944	550	4.187156	4.234932	0.047776
60	4.258535	4.234932	- 0.023603	560	4.146700	4.234932	0.088232
70	4.151254	4.234932	0.083678	570	4.183506	4.234932	0.051426
80	4.056417	4.234932	0.178515	580	4.164247	4.234932	0.070685
90	4.163114	4.234932	0.071818	590	4.184576	4.234932	0.050356
100	4.167328	4.234932	0.067604	600	4.177818	4.234932	0.057114
110	4.047242	4.234932	0.187690	610	3.964872	4.234932	0.270060
120	4.261703	4.234932	- 0.026771	620	4.055952	4.234932	0.178980
130	4.084316	4.234932	0.150616	630	4.192077	4.234932	0.042855
140	4.073566	4.234932	0.161366	640	4.172306	4.234932	0.062626
150	4.078631	4.234932	0.156301	650	4.083976	4.234932	0.150956
160	4.063748	4.234932	0.171184	660	4.165397	4.234932	0.069535
170	4.109211	4.234932	0.125721	670	4.126852	4.234932	0.108080
180	4.071782	4.234932	0.163150	680	4.201084	4.234932	0.033848
190	4.126707	4.234932	0.108225	690	4.203544	4.234932	0.031388
200	4.089116	4.234932	0.145816	700	4.141522	4.234932	0.093410
210	3.931904	4.234932	0.303028	710	4.004362	4.234932	0.230570
220	4.114486	4.234932	0.120446	720	4.182238	4.234932	0.052694
230	4.146685	4.234932	0.088247	730	4.030161	4.234932	0.204771
240	4.126441	4.234932	0.108491	740	4.086995	4.234932	0.147937
250	3.981573	4.234932	0.253359	750	4.210711	4.234932	0.024221
260	4.140058	4.234932	0.094874	760	4.137630	4.234932	0.097302
270	4.102044	4.234932	0.132888	770	4.111219	4.234932	0.123713
280	4.078772	4.234932	0.156160	780	4.072319	4.234932	0.162613
290	4.093677	4.234932	0.141255	790	4.038254	4.234932	0.196678
300	4.176130	4.234932	0.058802	800	4.114683	4.234932	0.120249
310	4.152572	4.234932	0.082360	810	4.041340	4.234932	0.193592
320	4.090947	4.234932	0.143985	820	4.266211	4.234932	- 0.031279
330	4.101971	4.234932	0.132961	830	4.105446	4.234932	0.129486
340	4.321772	4.234932	- 0.086840	840	4.127104	4.234932	0.107828
350	4.152394	4.234932	0.082538	850	4.084931	4.234932	0.150001
360	4.075476	4.234932	0.159456	860	4.131299	4.234932	0.103633
370	4.231802	4.234932	0.003130	870	4.264003	4.234932	- 0.029071
380	4.067109	4.234932	0.167823	880	4.103495	4.234932	0.131437
390	4.126757	4.234932	0.108175	890	4.143131	4.234932	0.091801
400	4.155220	4.234932	0.079712	900	4.258045	4.234932	- 0.023113
410	4.094755	4.234932	0.140177	910	4.171704	4.234932	0.063228
420	4.260888	4.234932	- 0.025956	920	4.085578	4.234932	0.149354
430	4.216912	4.234932	0.018020	930	4.105399	4.234932	0.129533
440	4.141934	4.234932	0.092998	940	4.197973	4.234932	0.036959
450	4.022162	4.234932	0.212770	950	4.158279	4.234932	0.076653
460	4.220183	4.234932	0.014749	960	4.206564	4.234932	0.028368
470	4.044763	4.234932	0.190169	970	4.228128	4.234932	0.006804
480	4.091119	4.234932	0.143813	980	4.156580	4.234932	0.078352
490	4.193389	4.234932	0.041543	990	4.125604	4.234932	0.109328
500	4.058483	4.234932	0.176449	1000	4.156372	4.234932	0.078560

Tabla 5.7. Valor de la opción *put* americana con distintos valores de  $N_t$ .

Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error	Nt	Valor Opcion	Error
10	6.4817	- 2.2468	350	4.2448	- 0.0099	680	4.2365	- 0.0015
20	5.3492	- 1.1142	360	4.2442	- 0.0093	690	4.2364	- 0.0015
30	4.9664	- 0.7314	370	4.2435	- 0.0085	700	4.2363	- 0.0014
40	4.7563	- 0.5213	380	4.2430	- 0.0081	710	4.2363	- 0.0013
50	4.6214	- 0.3865	390	4.2424	- 0.0075	720	4.2362	- 0.0013
60	4.5300	- 0.2950	400	4.2419	- 0.0070	730	4.2361	- 0.0012
70	4.4767	- 0.2418	410	4.2415	- 0.0066	740	4.2361	- 0.0012
80	4.4338	- 0.1989	420	4.2410	- 0.0061	750	4.2360	- 0.0011
90	4.3983	- 0.1634	430	4.2407	- 0.0058	760	4.2360	- 0.0011
100	4.3687	- 0.1338	440	4.2404	- 0.0054	770	4.2359	- 0.0010
110	4.3511	- 0.1161	450	4.2400	- 0.0051	780	4.2359	- 0.0010
120	4.3345	- 0.0996	460	4.2398	- 0.0048	790	4.2359	- 0.0009
130	4.3189	- 0.0840	470	4.2394	- 0.0045	800	4.2358	- 0.0009
140	4.3099	- 0.0750	480	4.2392	- 0.0043	810	4.2358	- 0.0009
150	4.3001	- 0.0652	490	4.2390	- 0.0040	820	4.2358	- 0.0008
160	4.2923	- 0.0574	500	4.2387	- 0.0038	830	4.2357	- 0.0008
170	4.2861	- 0.0512	510	4.2385	- 0.0036	840	4.2357	- 0.0008
180	4.2797	- 0.0448	520	4.2383	- 0.0034	850	4.2357	- 0.0007
190	4.2757	- 0.0408	530	4.2381	- 0.0032	860	4.2356	- 0.0007
200	4.2709	- 0.0359	540	4.2380	- 0.0031	870	4.2356	- 0.0007
210	4.2679	- 0.0330	550	4.2378	- 0.0029	880	4.2356	- 0.0007
220	4.2643	- 0.0294	560	4.2377	- 0.0027	890	4.2356	- 0.0006
230	4.2620	- 0.0270	570	4.2375	- 0.0026	900	4.2355	- 0.0006
240	4.2592	- 0.0242	580	4.2374	- 0.0025	910	4.2355	- 0.0006
250	4.2573	- 0.0224	590	4.2373	- 0.0023	920	4.2355	- 0.0006
260	4.2551	- 0.0202	600	4.2372	- 0.0022	930	4.2355	- 0.0005
270	4.2537	- 0.0188	610	4.2371	- 0.0021	940	4.2355	- 0.0005
280	4.2518	- 0.0169	620	4.2370	- 0.0020	950	4.2354	- 0.0005
290	4.2508	- 0.0158	630	4.2369	- 0.0019	960	4.2354	- 0.0005
300	4.2494	- 0.0144	640	4.2368	- 0.0018	970	4.2354	- 0.0005
310	4.2484	- 0.0135	650	4.2367	- 0.0017	980	4.2354	- 0.0005
320	4.2473	- 0.0124	660	4.2366	- 0.0017	990	4.2354	- 0.0004
330	4.2464	- 0.0115	670	4.2365	- 0.0016	1000	4.2354	- 0.0004
340	4.2456	- 0.0107						

**Tabla 5.8.** Valores de la opción *put* americana obtenidos al variar el parámetro  $N_t$  con el algoritmo de Tilley, para una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

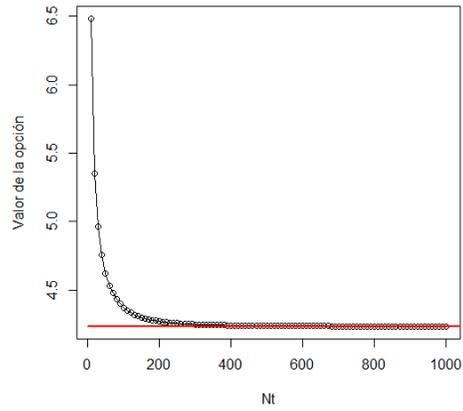


Figura 5.10: Representación de la solución del algoritmo de Tilley para una *put* americana calculado al variar  $N_t$ , para una opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

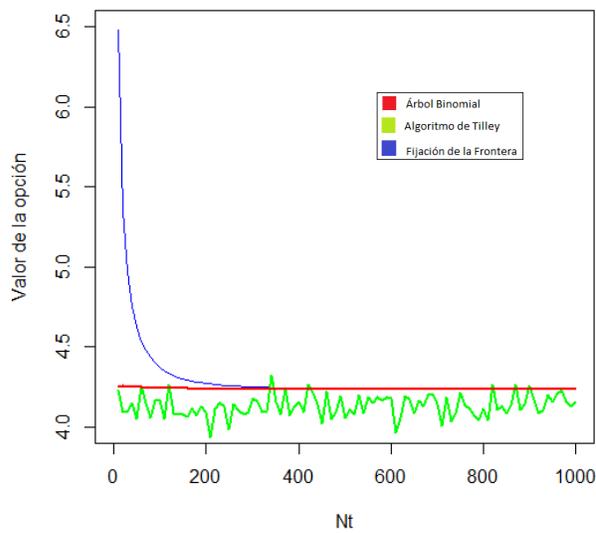


Figura 5.11: Se presenta la comparación de los tres métodos estudiados para la opción con  $S_0 = 10$  y  $K = 11$ .

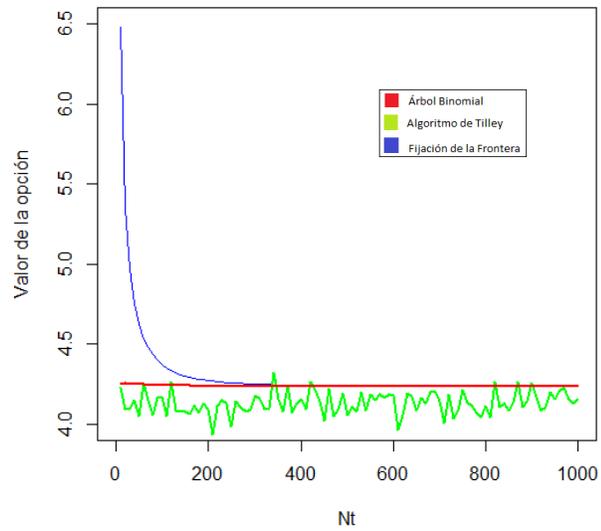


Figura 5.12: Se presenta la comparación de los tres métodos estudiados para la opción con  $S_0 = 35$  y  $K = 40$ .

ideal es el método de fijación frontal. El algoritmo de Tilley es recomendable sólo en caso de que la utilización de simulación sea un requisito.

# Conclusiones

---

En términos generales, el presente trabajo ha servido para compilar los fundamentos teóricos sobre los que descansan las herramientas de esquemas numéricos para valuar opciones americanas, además de ejemplificar la generación y el uso de algunos de ellos. Tales posibilidades se han desarrollado con la finalidad de mejorar el funcionamiento de los mercados financieros.

La selección de los algoritmos implementados permitió identificar las dificultades que presenta cada uno de los tres diferentes planteamientos. Haciendo referencia a los resultados obtenidos, en el caso del método binomial, se pudo observar que es de rápida convergencia y que es de comprensión fácil e intuitiva, pero presenta serias dificultades con respecto al almacenamiento de memoria.

El algoritmo de diferencias finitas, ha sido el de programación menos intuitiva y accesible además de que para un número de ensayos pequeño, el valor de la opción obtenido difiere mucho del valor real, pero cuenta con la gran ventaja de un requerimiento de memoria muy bajo.

El algoritmo que involucra simulación de Monte Carlo presenta una variación muy alta con respecto al precio real de la opción. Conviene en este punto hacer hincapié en el hecho de que, como se ha presentado en el capítulo 3, existen diferentes métodos de reducción de varianza que sugieren una mejoría posible en los resultados para este algoritmo, la implementación y estudio de tales métodos darían continuidad al presente trabajo.

De los resultados observados puede concluirse que con base en la demanda en orden de convergencia, aproximación o en eficiencia computacional es posible elegir alguno de los esquemas presentados.



# Apéndice

---

Se presentan los códigos en **R** que se han generado a partir de los diseños descritos en el Capítulo 3.

## 6.1. Código del árbol binomial

```
BINOMIAL=function(T,Nt,S0,sigma,r,K){  
  
  ##Se calcula la probabilidad de que el precio se incremente,  
  los factores de incremento y decremento del precio, el salto  
  en el tiempo.  
  s=sigma  
  Dt = T/Nt  
  R = exp(r*Dt)  
  u = exp(s*(sqrt(Dt)))  
  d = exp(-s*(sqrt(Dt)))  
  p = (R-d) / (u-d)  
  
  ##Se define matriz que tendrá los precios en cada tiempo  
  P = matrix(0,(2*Nt)+1,Nt+1)  
  
  #Se calculan los de precios del activo en los nodos, con los  
  factores u y d.  
  P[Nt+1,1]=S0  
  central= Nt+1  
  for (i in 0:Nt+1){  
    if (i%%2 == 1){  
      P[central,i]=S0  
    }  
  }  
  for (i in 1:Nt+1){
```

```

if (i%%2 == 1){
for (j in 1:((i-1)/2)){
P[central+(2*j),i]=d^(2*j)*S0
P[central-(2*j),i]= u^(2*j)*S0
}
}
else{
for (j in 1:(i/2)){
P[central+((2*(j-1))+1),i]=d^((2*(j-1))+1)*S0
P[central-((2*(j-1))+1),i]=u^((2*(j-1))+1)*S0
}
}
}

##Se calcula el valor intrínseco en los nodos del último nivel
de tiempo.
for (j in 0:(2*Nt)+1){
if (j%%2 == 1){
a=P[j,Nt+1]
P[j,Nt+1]= max(K-a,0)
}
}

##Se calcula el precio de la opción en cada nodo hacia atrás,
es decir, usando los valores del tiempo n para calcular los de
n-1.
for (i in 1:(Nt-1)){
if ((i-1)%2 == 1){
a=P[central,Nt+1-i]
P[central,Nt+1-i]=max(((1-p)*P[central+1,Nt+1-i+1]
+p*P[central-1,Nt+1-i+1])/R,K-a)
for (j in 1:((Nt-i)/2)){
a=P[central+(2*j),Nt+1-i]
P[central+(2*j),Nt+1-i]=max(((1-p)*P[central+(2*j)
+1,Nt+1-i+1]+p*P[central+(2*j)-1,Nt+1-i+1])/R,K-a)
b=P[central-(2*j),Nt+1-i]
P[central-(2*j),Nt+1-i]=max(((1-p)*P[central-(2*j)
+1,Nt+1-i+1]+p*P[central-(2*j)-1,Nt+1-i+1])/R,K-b)
}
}
if ((i-1)%2 == 0){
for (j in 1:((Nt+1-i)/2)){
a=P[central+((2*(j-1))+1),Nt+1-i]
P[central+((2*(j-1))+1),Nt+1-i]=max(((1-
p)*P[central+((2*(j-1))+1+1),Nt+1-i+1]+p*P[central
+((2*(j-1))+1-1),Nt+1-i+1])/R,K-a)

```

```
b=P[central-((2*(j-1))+1),Nt+1-i]
P[central-((2*(j-1))+1),Nt+1-i]=max((p*P[central-
((2*(j-1))+1+1),Nt+1-i+1]+(1-p)*P[central-
((2*(j-1))+1-1),Nt+1-i+1])/R,K-b)
}
}
}

##Se calcula el valor de la opción en el primer nivel de }
tiempo, cuando n=0, que es el resultado buscado.
P[central,1]=max(((1-p)*P[central+1,2]+p*P[central-1,2])/
R,K-S0)
return (P[central,1])
}
```

## 6.2. Código de fijación de la frontera

```

FRONTFIX = function(T,N,S0,r,K,sigma2){

Dtau = T/N
SOa = 1
Dy=(3/2)*sigma2*sqrt(Dtau)
M=round((8*sigma2*sqrt(T))/Dy,0)
mu=Dtau/(Dy^2)

## Constantes

a= (mu*sigma2) + (r*Dtau)
b=(mu/2)*(sigma2-(Dy*(r-(sigma2/2))))
c=(mu/2)*(sigma2+(Dy*(r-(sigma2/2))))

e1=matrix(0,M,1)
e1[1,1]=1

alpha = 1+(((Dy^2)/sigma2)*r)
beta= (1+((1+Dy)^2))/2

##Matriz identidad que se usará en los cálculos de F1, F2 y F3

I = matrix(0,M,M)

for (i in 1:M){
I[i,i]=1
}

##Matriz tridiagonal

A = matrix(0,M,M)

for (i in 1:M){
A[i,i]=a
if (i!=M){
A[i,i+1]=-c
A[i+1,i]=-b
}
}

##Condiciones iniciales

```

```

P0=matrix(0,M,1)

##Vector corrector

Pt = matrix(0,M,1)

##Para calcular el valor de Sta0 realizamos la siguiente fórmula

F1=matrix(0,M,1)
F2=matrix(0,M,1)
F3=matrix(0,M,1)

F1=solve(I+(A/2))%*(I-(A/2))%*P0
F2=solve(I+(A/2))%*e1

##Operador sobre P0

D0=matrix(0,M,1)

for (i in 1:M){
  if (i==1){
    D0[i,1]=0
  }
  else {
    if (i==M){
      D0[i,1]=0
    }
    else{
      D0[i,1]=P0[i+1,1]+P0[i-1,1]
    }
  }
}

D0=(1/(2*Dy))*D0

F3=solve(I+(A/2))%*D0

##Para calcular el valor de Sta0 realizamos la siguiente
fórmula

Sta0=(F1[1,1]+((b/2)*F2[1,1])-F3[1,1]-alpha)/(((b/2)*F2[1,1])-
(F3[1,1]/S0a)-beta)
Pt0=1-Sta0
Pt1=alpha-(beta*Sta0)
gt=((Sta0+S0a)/S0a)

```

```

Pt=F1+((b/2)*Pt0*F2)+(gt*F3)

##Calculando el vector P1

F1=solve(I+(A/2))*%(I-(A/2))*%PO
F2=solve(I+(A/2))*%e1

##Operador sobre Pt

D0=matrix(0,M,1)

for (i in 1:M){
  if (i==1){
    D0[i,1]=Pt0
  }
  else {
    if (i==M){
      D0[i,1]=0
    }
    else{
      D0[i,1]=Pt[i+1,1]+Pt[i-1,1]
    }
  }
}

D0=(1/(4*Dy))*D0

F3=solve(I+(A/2))*%D0

##Se crea un vector de precios

SA=matrix(0,N+1,1)
SA[1,1]=1

##Para calcular el valor de SA[1,1] se resuelve la ecuación

SA[2,1]=(alpha-F1[1,1]-((b/2)*F2[1,1])+((2*S0a*F3[1,1])/
(Sta0+S0a)))/(beta-((b/2)*F2[1,1])+((2*F3[1,1])/(Sta0+S0a)))

##Un vector para los precios a nivel de tiempo 0

P00=matrix(0,1,N+1)
P00[1,1]=0
P00[1,2]=1-SA[2,1]

```

```

##Se crea un vector para g

g=matrix(0,N,1)

g[1,1]=(SA[2,1]-S0a)/((Sta0+S0a)/2)

##Se calcula el vector P1
P1=F1+((b/2)*P00[1,1]*F2)+g[1,1]*F3

##Vector de solución

P = matrix(0,M,N+1)
P[ ,1]=P0
P[ ,2]=P1

##Algoritmo

for (i in 1:(N-1)){

DOPN=matrix(0,M,1)

F1=solve(I+A)%*%(((I-A)%*%P[ ,i+1])+(b*P00[1,i+1]*e1))
F2=solve(I+A)%*%e1

for (k in 1:M){
if (k==1){
DOPN[k,1]=P00[1,i+1]-P[k,2]
}
if (k!=1) {
if (k==M){
DOPN[k,1]=P[k-1,i+1]
}
if (k!=M){
DOPN[k,1]=P[k+1,i+1]+P[k-1,i+1]
}
}
}

F3=solve(I+A)%*%(DOPN*(1/(2*Dy)))

SA[i+2,1]=(alpha-F1[1,1]-(b*F2[1,1])+((SA[i,1]*F3[1,1])/
SA[i+1,1]))/(beta-(b*F2[1,1])+(F3[1,1]/SA[i+1,1]))
g[i+1,1]=(SA[i+2,1]-SA[i,1])/SA[i+1,1]
P00[1,i+2]=1+SA[i+2,1]

P[ ,i+2]=F1 + (b*P00[1,i+2])*F2 + g[i+1,1]*F3

```

```

}

P[ ,N]
P=P*11
persp(P,phi=20,theta=-200,ylab="Espacio",xlab="Tiempo",
zlab="Precio",expand = 0.7,col = "blue",main="Fijación frontal")

SOL=matrix(0,M,2)

for (i in 1:M){
SOL[i,1]=SA[N+1,1]*exp(Dy*i)*K
SOL[i,2]=P[i,N]
}

i=1
while (i<M & SOL[i,1]<=K){
i=i+1
}

##Interpolación

if (i==1){
aprox=SOL[1,2]
}
if (i!=1){
aprox=SOL[i-1,2]+((SOL[i,2]-SOL[i-1,2])/(SOL[i,1]-
SOL[i-1,1]))*(K-SOL[i-1,1])
}

return (aprox)
}

```

### 6.3. Código de algoritmo de Tilley

```

TILLEY = function(K,S0,R,dt,N,sigma,mu,Q)
{

P=R/Q

I = matrix(0,N,R)

#Se realizan simulaciones y se ordenan las trayectorias

for (i in 1:R){
I[ ,i]=rlnorm(N,mu,sigma)
I[1,i]=S0
A=I[ ,i]
A=sort(A,decreasing = TRUE)
I[ ,i]=A
}

#Se calcula el valor intrínseco para cada nodo

for (i in 1:R){
for (j in 1:N){
a=I[j,i]
I[j,i]=max(K-a,0)
}
}

#Se definen las matrices de valores de continuación H,
de valores indicadores X, Y, y de valor final V, y se
calculan los valores de cada una a tiempo N

H=matrix(0,N,R)
X=matrix(0,N,R)
Y=matrix(0,N,R)
V=matrix(0,N,R)

H[N, ]=I[N, ]
V[N, ]=I[N, ]

##Calculando X para el tiempo N
for (j in 1:R){
a=I[N,j]-H[N,j]
if (a>=0){

```

```

k=1
}
else{
k=0
}
X[N,j]=k
}

```

```

##Calculando la frontera para el tiempo N
maximal=0
maximap=R
suma = 0
for (j in 1:R){
if (X[N,j]==0){
suma=0
}
if (X[N,j]==1) {
suma=suma+1
if (suma>maximal){
maximap=j-suma+1
maximal=suma
}
}
}

```

```

Frontera = matrix(0,1,N)
Frontera[1,N]=maximap

```

```

##Calculando Y para el tiempo N
for (j in 1:R){
a=Frontera[1,N]
if (j < a){
Y[N,j]=0
}
else {
Y[N,j]=1
}
}

```

```

##Se corre el proceso iterativo hacia atrás que calcula los
valores al tiempo n-1 dados los de n hasta n=1

```

```

for(i in 1:(N-1)){

```

```

##Calcula el valor de continuación para los valores dados
de V

```

```

valor = R/Q
suma = 0
k=0

for(j in 1:R){
suma=suma+V[N-i+1,j]
k=k+1
if(k==valor & N-i+1>1){
H[N-i,j]=suma
while(k>0){
H[N-i,j-k+1]=suma*(dt/P)
k=k-1
}
suma = 0
}
}

## Calcula X para los valores dados de V

for (j in 1:R){
a=I[N-i,j]-H[N-i,j]
if (a>=0){
k=1
}
if (a<0){
k=0
}
X[N-i,j]=k
}

##Calcula la frontera en los valores de X

maximal=0
maximap=R
suma = 0

for (j in 1:R){
if (X[N-i,j]==0){
suma=0
}
if (X[N-i,j]==1) {
suma=suma+1
if (suma>maximal){
maximap=j-suma+1
maximal=suma
}
}
}

```

```
}  
}  
}
```

```
Frontera[1,N-i]=maximap
```

```
##Calcula el indicador Y
```

```
for (j in 1:R){  
  a=Frontera[1,N-i]  
  if (j < a){  
    Y[N-i,j]=0  
  }  
  else {  
    Y[N-i,j]=1  
  }  
}
```

```
##Calculando el valor de la opción para el nuevo nivel de tiempo
```

```
for (j in 1:R){  
  a=Y[N-i,j]  
  if (a==1){  
    V[N-i,j]=I[N-i,j]  
  }  
  else {  
    V[N-i,j]=H[N-i,j]  
  }  
}  
}
```

```
#Se determina el valor de la opción
```

```
Opcion=0  
Frontera1=matrix(0,1,R)
```

```
for (i in 1:R){  
  suma=0  
  for (j in 1:N){  
    if (Y[j,i]==1){  
      suma=suma+1  
    }  
  }  
  if (suma==1){  
    Frontera1[1,i]=j  
  }  
}
```

```
}  
}  
}  
  
for (j in 1:R){  
a= Frontera1[1,j]  
b=I[a,j]  
Opcion= Opcion + (b*(dt^a))  
}  
  
Opcion=(1/R)*Opcion  
return(Opcion)  
}
```



# Bibliografía

---

- [1] BLACK FISCHER, MYRON SHOLES. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. 1973.
- [2] DANIEL J. DUFFY. Finite Difference Methods in Financial Engineering. 2nd ed: 295-307. Wiley , 2006.
- [3] ROBERT J. ELLIOTT AND P. EKKEHARD KOPP. Mathematics of Financial Markets. 2nd ed: 131-167. Springer, 2005.
- [4] CHRISTIAN P. FRIES. Mathematical Finance Theory, Modeling and Implementation. *Wiley* 1st ed: 35-47. 2006.
- [5] PATRICK BILLINGSLEY. Probability and Measure. *Wiley* 3rd ed: 419-426. 1995.
- [6] YUE-KUEN KWOK. Mathematical Models of Financial Derivatives. *Department of Mathematics, Hong Kong University of Science and Technology* 2nd ed: 99-355. Springer, 2008.
- [7] LIXIN WU AND YUE-KUEN KWOK. A front-fixing difference method for the valuation of american options. *Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology*. 1-15. 1991.
- [8] STEVEN E. SHREVE. Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models. *Department of Mathematics Sciences Carnegie Mellon University, Pittsburg*. 1st ed: 93-209. Springer, 2004.
- [9] JAMES A. TILLEY. Valuing American Options in a Path Simulation Model. *Transactions of the Society of Actuaries*. vol. 45: 499-520. 1993.
- [10] PAUL WILTMOTT, SAM HOWISON AND JEFF DEWYNNE. Mathematics of Financial Derivatives. *University of Cambridge*. 1st ed: 1-121. 1995.
- [11] M. J. LIGHTHILL. Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. *Cambridge University Press*. 1st ed. 1958.

- [12] EVANS, J.D., KUSKE, R., KELLER, J.B. American options on assets with dividends near expiry, *Mathematical Finance. University of Minnesota*. vol. 12. 219-237, 2002.
- [13] DEWYNNE, J.N., HOWISON. Some mathematical results in the pricing of American options, *European Journal of Applied Mathematics. Mathematical Institute, Oxford*. vol. 4. 281-398, 1993.
- [14] BUNCH, D.S., JOHNSON, H.. The American put option and its critical stock price, *Journal of Finance*. vol. 55. 2333-2356, 2000.
- [15] KARATZAS, I., SHREVE. Brownian motion and stochastic calculus. 2nd ed: 103-154. Springer, 1991.
- [16] KRYLOV, N.V. Controlled diffusion processes. 1st ed. Springer, 1980.
- [17] DÍAZ ORDOÑEZ EDGAR. Riesgo de Crédito. *Facultad de Ciencias UNAM*. 2007.
- [18] JAMSHIDIAN, F. LIBOR and swap market models and measures, *Finance and Stochastics. University of Twente*. vol. 1. 293-330. 1997.
- [19] CARR, P., JARROW, R., MYNENI, R. Alternative characterizations of American put options, *Mathematical Finance*. vol. 2. 87-106. 1992.
- [20] COX, J.C., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*. vol. 7. 229-264. 1979.