



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

H-trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ

DIRECTORA DE LA TESIS
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM
DRA. MARÍA DEL ROCÍO ROJAS MONROY, FACULTAD DE CIENCIAS UAEM

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Prefacio

Debido a que los temas tratados en este trabajo de investigación son muy especializados, hemos incluido todas las definiciones necesarias para poder entender el contenido de este trabajo lo mejor posible. Iniciamos con el concepto de digráfica seguido de las definiciones básicas, con respecto a estructuras y subestructuras de una digráfica. Finalizamos con definiciones complementarias que sólo se utilizarán en el apartado de introducción histórica.

Nuestro objeto de estudio en este trabajo son los núcleos por trayectorias monocromáticas, H-núcleos por caminos y H-núcleos. Iniciamos con una introducción histórica, la cual lleva de la mano al lector a través de los orígenes de la teoría de núcleos, la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas y la teoría de H-núcleos por caminos (H-núcleos). En dicha introducción histórica proporcionamos la demostración de dos teoremas que fueron probados anteriormente por Arpin y Linek en un artículo [1]; las nuevas pruebas que hice de los teoremas 0.11.2 y 0.11.6 se caracterizan por ser más sencillas y claras, ya que Arpin y Linek utilizaron la teoría de relaciones y dos cuasiordenes para probar dichos resultados, lo cual llega a ser un poco tedioso cuando se leen esos resultados en su artículo. Decidimos que dichas pruebas se tenían que volver a hacer ya que era necesario familiarizarse más con el estudio que hicieron Arpin y Linek en su artículo, cabe mencionar que dicho estudio es el que posteriormente nos lleva a la generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas.

La teoría de núcleos es muy importante dentro de las matemáticas debido a la aplicación que tiene en la teoría de juegos, en lógica, en juegos tipo nim, por nombrar algunos campos. Desde que apareció la formulación de las dos propiedades que caracterizan a un núcleo, varios investigadores se han dado a la tarea de encontrar condiciones suficientes que garanticen la existencia de al menos un núcleo en una digráfica, ya que no toda digráfica tiene núcleo. Posteriormente el concepto de núcleo se generalizó para digráficas m -coloreadas y el nombre que recibió es el de núcleo por trayectorias monocromáticas. Como no toda digráfica tiene núcleo, entonces

no toda digráfica m -coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, si $m \geq 3$, lo cual condujo hacia una nueva línea de investigación. Varios resultados sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas principalmente están relacionados con operaciones entre dos digráficas (o una digráfica y una sucesión de digráficas) o en el estudio de ciertas familias de digráficas como son digráficas pretransitivas, digráficas cuasitransitivas, digráficas m -partitas, por nombrar algunas. Con la finalidad de encontrar condiciones suficientes y muy generales que garanticen la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas, Hortensia Galeana Sánchez en 2009 definió lo que es la digráfica de clases cromáticas de una digráfica m -coloreada, y con dicha digráfica Hortensia Galeana Sánchez dio una extensión de un resultado muy importante que hay dentro de la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas (el cual es conocido como el teorema de Sands, Sauer y Woodrow [46]) para el caso finito, como sigue: *Si D es una digráfica finita m -coloreada y la digráfica de clases cromáticas de D es bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.* Los resultados originales de este trabajo comienzan en el capítulo 1, en el cual se estudian condiciones para garantizar la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas, el primer resultado original es el teorema 1.1.1 el cual nos dice que si D es una digráfica m -coloreada y $\{V_1, V_2\}$ una partición de sus vértices tal que la cerradura de la digráfica inducida por V_1 tiene núcleo, la digráfica inducida por V_2 tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y no existen flechas de V_2 hacia V_1 , entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Posteriormente como consecuencia directa del teorema 1.1.1 tenemos que: (1) si la cerradura de toda componente fuertemente conexa de una digráfica D m -coloreada es núcleo perfecta, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (corolario 1.1.1), (2) si la digráfica de clases cromáticas de toda componente fuertemente conexa de una digráfica D m -coloreada es bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (corolario 1.1.2), (3) Si todo camino dirigido cerrado de una digráfica m -coloreada es 2-coloreado, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (corolario 1.1.3). Otro resultado original es el teorema 1.1.3, el cual muestra condiciones sobre el número de colores que están representados en las flechas que inciden en cada vértice de la digráfica m -coloreada, bajo cierta restricción sobre un conjunto fijo de colores. Como consecuencia directa del teorema 1.1.3 junto con el corolario 1.1.1 tenemos que si cada componente fuertemente conexa de la digráfica m -coloreada satisface la hipótesis del teorema 1.1.3, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (corolario 1.1.4). Cabe mencionar que Hortensia Galeana Sánchez incluyó un caso particular del teorema 1.1.3 y del corolario 1.1.4 como aplicaciones en su artículo donde introduce el concepto de digráfica

de clases cromáticas [28]. Concluimos el capítulo 1 con otro resultado original, teorema 1.2.1, el cual es el más importante del capítulo debido a que es una extensión del resultado que dice "si la digráfica de clases cromáticas de D es bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas". Más aún, del teorema 1.2.1 veremos que se desprende como corolario el teorema de Richardson, el cual es considerado uno de los teoremas clásicos y más importantes que hay dentro de la teoría de núcleos. El teorema 1.2.1 establece que si D es una digráfica m -coloreada tal que su digráfica de clases cromáticas no tiene ciclos dirigidos de longitud impar al menos tres, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Luego, el teorema 1.2.2 establece que si D es una digráfica semicompleta m -coloreada sin ciclos dirigidos de longitud 3, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Otra generalización del concepto de núcleo es el concepto de H -núcleo por caminos el cual se define sobre una digráfica D cuyas flechas están coloreadas con los vértices de otra digráfica H (H posiblemente con lazos y D simple). Dicho concepto se debe a Linek y Sands [38]. Posteriormente Arpin y Linek sentaron las bases de la teoría de H -núcleos por caminos al estudiar tres familias de digráficas, la cuales llamaron \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 . El trabajo realizado por Arpin y Linek motivó a Hortensia Galeana Sánchez a definir lo que es un H -núcleo por trayectorias (o simplemente H -núcleo), el cual es un concepto totalmente distinto al de H -núcleo por caminos. En el capítulo 2 estudiaremos la existencia de H -núcleos por caminos en digráficas infinitas, luego estudiaremos la existencia de H -núcleos en digráficas finitas. En la sección 2.1 del capítulo 2 trabajamos con digráficas infinitas, el primer resultado original el es teorema 2.1.6, el cual nos dice que si la digráfica de clases cromáticas de una digráfica D H -coloreada está contenida en H , entonces D tiene H -núcleo por caminos. Luego, el siguiente resultado original, y el más importante de la sección 2.1, es el teorema 2.1.7, el cual establece que si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices de la digráfica de clases cromáticas de una digráfica D H -coloreada, donde dicha partición tiene 3 propiedades, entonces D tiene H -núcleo (veremos que dicho H -núcleo por caminos es también un H -núcleo). Veremos que del teorema 2.1.7 se desprende como corolario el teorema de Sands, Sauer y Woodrow y el teorema de Hortensia Galeana Sánchez (si la digráfica de clases cromáticas de una digráfica D m -coloreada es bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas). La técnica utilizada para la prueba del teorema 2.1.7 es muy similar a la que utilizaron Sands, Sauer Woodrow. El lema 3.0.3 ubicado dentro de la prueba del teorema 2.1.7 también es un resultado original, el cual no se incluyó en ningún artículo, ya que la prueba del teorema 2.1.7 que se publicó en la revista *Graphs and Combinatorics* es totalmente distinta a la que se presenta en la sección 2.1. Cabe

mencionar que la prueba del teorema 2.1.7 que aquí se presenta es la prueba original, en el proceso de investigación para encontrar más condiciones que garantizan la existencia de H -núcleos por caminos nos dimos cuenta que una técnica utilizada para probar un resultado, de la sección 2.2 del capítulo 2, podía también ser útil para hacer la prueba del teorema 2.1.7 más corta y con ello demostrar que el teorema 2.1.7 y el teorema de Sands, Sauer y Woodrow son equivalentes. En la sección 2.2 del capítulo 2 trabajamos con digráficas finitas, el primer resultado original se presenta con el teorema 2.2.1, el cual garantiza que si la estructura de las digráficas de clases cromáticas de una digráfica H -coloreada se comporta como una digráfica en \mathcal{B}_3 , respecto de H , entonces D tiene H -núcleo por caminos. Posteriormente, los corolarios 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, los cuales también se presentan como resultados originales, son consecuencia directa del teorema 2.2.1. Finalizamos la sección 2.2 con el teorema 2.2.2, el cual es otro resultado original, dicho resultado es una generalización del teorema 1.2.1, en el caso cuando la digráfica de clases cromáticas no es bipartita.

Concluimos el trabajo con el estudio de la existencia de H -núcleos por caminos en una operación entre una digráfica D con una sucesión de digráficas ajenas en vértices, α . Dicha operación es llamada la D -suma, la cual también es conocida como una suma de Zikov. El primer resultado original del capítulo 3 es el teorema 3.0.5, el cual muestra la existencia de H -caminos en la D -suma a partir de la existencia de H -caminos en D o en cada elemento de la sucesión α y viceversa. Veremos que en el teorema 3.0.5 es necesario pedir que la digráfica H sea transitiva. Posteriormente con la ayuda del teorema 3.0.5 demostramos los siguientes resultados originales: teorema 3.0.6, teorema 3.0.7, teorema 3.0.8, teorema 3.0.9, teorema 3.0.10 y corolario 3.0.4.

El trabajo de investigación, producido durante estos cuatro años de estudio, que se presenta en esta tesis a partir del capítulo 1 se organizó en artículos, los cuales ya han sido enviados a revistas científicas de reconocimiento internacional. Dos artículos ya han sido publicados, otro ya fue aceptado para su publicación y otro se encuentra en revisión. Los artículos obtenidos son los siguientes:

1. Todos los resultados expuestos en el capítulo 1 de este trabajo forman parte de un artículo titulado **"An extension of Richardson's theorem in m -colored digraphs"**, el cual ya cuenta con aceptación para su publicación en la revista internacional **Graphs and Combinatorics**.

-
2. Todos los resultados expuestos en la sección 2.1 del capítulo 2 de este trabajo forman parte de un artículo titulado "H-kernels in infinite digraphs", el cual ya está publicado en la revista internacional *Graphs and Combinatorics* (Hortensia Galeana-Sánchez and Rocío Sánchez-López, *H-kernels in infinite digraphs*, *Graphs and Combinatorics*, March, 13, 2012. DOI 10.1007/s00373-012-1150-6).
 3. Todos los resultados expuestos en la sección 2.2 del capítulo 2 de este trabajo forman parte de un artículo titulado "*H-kernels by walks in H-colored digraphs and the color-class digraph*", el cual fue sometido para su revisión a la revista internacional *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*.
 4. Todos los resultados expuestos en el capítulo 3 de este trabajo forman parte de un artículo titulado "H-kernels in the D-join", el cual ya está publicado en la revista internacional *Ars Combinatoria* (Hortensia Galeana-Sánchez and Rocío Sánchez López, *H-kernels in the D-join*, *Ars Combinatoria* 98 (2011) 353-377).

A mi Dios, a mis padres, a mis hermanos y sobrinos

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi Dios por la vida y la inteligencia que me ha dado, le agradezco por haberme puesto en este camino y que me haya ayudado a terminar otra etapa académica. A mis padres les doy gracias por el apoyo brindado durante todos mis años de estudio, pero en especial felicito a mi madre por el gran esfuerzo que hizo por darme una educación universitaria a pesar de los comentarios de desaliento que recibió en varias ocasiones, gracias mamá por tus sacrificios. A mis hermanos les doy las gracias por el apoyo incondicional que me han brindado en todos los proyectos que he emprendido, se que soy un gran ejemplo para ellos y espero que cada uno haga realidad sus sueños así como yo lo hice, tengan en cuenta que *sueños + determinación = objetivo alcanzado*. A mis sobrinos les agradezco el interés brindado hacia mi trabajo; aunque ellos sólo saben restar, sumar, multiplicar y dividir, eso no ha sido obstáculo para que ellos puedan identificar una gráfica representada en algún lugar de esta gran ciudad. A David le doy las gracias por haber estado a mi lado en todos mis estados emocionales producidos por mi trabajo académico y de investigación durante la maestría y el doctorado, gracias David porque se que eres un amigo incondicional.

Gracias Laura Pastrana por haber sembrado la semilla del amor hacia las gráficas en mi corazón hace ya algunos añitos (no digo cuantos porque son muchos :)), agradezco tu dirección tanto académica como en lo personal, pero lo que más agradezco es que siempre te has preocupado por mi, claro ejemplo fue cuando me bajaste de mi nube de soberbia, eres una excelente maestra y una gran amiga. Gracias Laura porque tú me diste el empujoncito que me hacía falta para decidirme a realizar un posgrado. A Hortensia Galeana, mi directora y segunda mamá académica, agradezco que me haya aceptado como una de sus alumnas, es una excelente investigadora que se preocupa por el aprendizaje de cada uno de sus alumnos. En estos cuatro

años aprendí mucho de Hortensia y estuve muy contenta trabajando con ella. Gracias Hortensia por todo el apoyo que me brindaste durante mis estudios de posgrado y por el apoyo que sigo recibiendo de tu parte.

A mis amigos de la academia: César, Lidia, Brenda y Kernel les agradezco los momentos agradables que pase a su lado, por esos momentos, en el cubículo 214 del departamento de matemáticas, que pasamos ñoñeando, por los momentos de relax que nos dimos para mitigar el estrés de cada semestre. Les deseo éxito para cada uno de ustedes en sus proyectos actuales y futuros. De manera especial le agradezco a César el seguir siendo mi más leal confidente a pesar de que ya no convivimos como solíamos hacerlo.

También quiero agradecer a Ingrid por la amistad que me ha brindado, siempre recordaré aquellas aventuras que vivimos juntas en nuestros dos viajes a Europa. Gracias Lucia Herrera por tu amistad incondicional y por todos tus consejos. Gracias a Hazael y a Viktor por su amistad, son personas muy inteligentes que en un momento pueden hacer que utilice mi capacidad simbólica al máximo al considerar situaciones muy complejas y en otro puedo estar muriendo de la risa con sus ocurrencias mundanas.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM y a CONACYT agradezco el apoyo brindado, por medio de una beca, durante estos cuatro años de estudio.

A Hugo Rincón y a Rocío Rojas les agradezco por haber formado parte de mi comité tutor.

Agradezco a cada uno de mis sinodales el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo y por cada una de las observaciones que hicieron para mejorar la redacción del trabajo.

Índice general

Preliminares	7
0.1 Definiciones básicas	7
0.2 Tipos de digráficas y subdigráficas	8
0.3 Caminos dirigidos y Conexidad	9
0.4 La suma de una digráfica con una sucesión de digráficas	10
0.5 Resultados básicos de la Teoría de Digráficas	10
0.6 Digráficas m -coloreadas	11
0.7 Definiciones complementarias	11
Introducción Histórica	13
0.8 Núcleos	13
0.9 Núcleos por trayectorias monocromáticas	16
0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow	21
0.11 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y \mathcal{B}_3	29
0.12 H -núcleos por caminos y H -núcleos	53
1 Núcleos por trayectorias monocromáticas y la digráfica de clases cromáticas	55
1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas	57
1.2 Una extensión del teorema de Richardson	70
2 H-Núcleos	79
2.1 H -núcleos en digráficas infinitas	81
2.2 H -núcleos en digráficas finitas	105
2.2.1 H -núcleos y la digráfica de H -caminos	113

ÍNDICE GENERAL

3 H-núcleos en $\sigma(\alpha, D)$	119
Conclusión	147
Referencias	149

Preliminares

0.1 Definiciones básicas

Una **digráfica** D es una pareja $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto no vacío de elementos, llamados vértices, y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de vértices, llamados flechas. Note que de la definición de digráfica se sigue que podemos tener flechas de la forma (v,v) , las cuales llamaremos **lazos**. Diremos que D es **reflexiva** si todos sus vértices tienen un lazo. Diremos que D es **finita** si $V(D) \cup F(D)$ es un conjunto finito. Diremos que D es **infinita** si $V(D)$ es un conjunto infinito. El **orden** de D es el número de vértices que tiene. Dos o más flechas que unen al mismo par de vértices en la misma dirección son llamadas **multiflechas**. Una digráfica con multiflechas es llamada **multidigráfica**. Una **digráfica simple** es una digráfica que no tiene multiflechas ni lazos. En este trabajo estudiaremos digráficas infinitas, digráficas finitas, digráficas reflexivas, multidigráficas y digráficas simples; en cada caso tenemos que especificar con que tipo de digráfica (digráficas) vamos a trabajar. Diremos que dos vértices u y v de D son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos. Para una flecha (u,v) de D diremos que u es su **vértice inicial** y v es su **vértice final**. Diremos que una flecha **a incide** en un vértice v si v es vértice inicial o final de a . Para una flecha (u,v) de D diremos que el vértice u es **adyacente hacia** el vértice v , y el vértice v es **adyacente desde** el vértice u . Diremos que $(u,v) \in F(D)$ es **simétrica** si $(v,u) \in F(D)$. Diremos que $(u,v) \in F(D)$ es **asimétrica** si $(v,u) \notin F(D)$. El **grado exterior** de un vértice v , también llamado **exgrado** y denotado por $\delta^+(v)$, es el número de flechas de D que tienen a v como vértice inicial. El **grado interior** de un vértice v , también llamado **ingrado** y denotado por $\delta^-(v)$, es el número de flechas de D que tienen a v como vértice final. El **grado** de un vértice v , denotado por $\delta(v)$, se define como $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$. El conjunto de los **vecinos exteriores** de un vértice v se define como

$\Gamma^+(v) = \{y \in V(D) \mid (v,y) \in F(D)\}$. El conjunto de los **vecinos interiores** de un vértice v se define como $\Gamma^-(v) = \{y \in V(D) \mid (y,v) \in F(D)\}$. El conjunto de los **vecinos exteriores de un subconjunto** S de $V(D)$ se define como $\Gamma^+(S) = \{y \in V(D) \mid (v,y) \in F(D) \text{ para algún } v \in S\}$. El conjunto de los **vecinos interiores de un subconjunto** S de $V(D)$ se define como $\Gamma^-(S) = \{y \in V(D) \mid (y,v) \in F(D) \text{ para algún } v \in S\}$. Para un subconjunto no vacío S de $V(D)$ y $v \in V(D)$, una flecha $(u,v) \in F(D)$ es llamada una **Sv-flecha** siempre que $u \in S$. Análogamente, una flecha $(v,u) \in F(D)$ es llamada una **vS-flecha**. Para S y K dos subconjuntos no vacíos de $V(D)$, una flecha $(u,v) \in F(D)$ es llamada una **SK-flecha** siempre que $u \in S$ y $v \in K$. Dos digráficas D_1 y D_2 son **isomorfas**, denotado como $D_1 \cong D_2$, si existe una función biyectiva $f:V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que u es adyacente hacia v en D_1 si y sólo si $f(u)$ es adyacente hacia $f(v)$ en D_2 . Dos digráficas D_1 y D_2 son **iguales**, denotado por $D_1 = D_2$, si $V(D_1) = V(D_2)$ y $F(D_1) = F(D_2)$. El **complemento** de D , denotado por D^c , es la digráfica tal que $V(D^c) = V(D)$ y $(u,v) \in F(D^c)$ si y sólo si $(u,v) \notin F(D)$. Para una digráfica D con al menos una flecha definimos a su **digráfica de líneas**, denotada por $L(D)$, como la digráfica tal que $V(L(D)) = F(D)$ y \mathbf{a} es adyacente hacia \mathbf{b} en $L(D)$ si y sólo si el vértice final de \mathbf{a} es el vértice inicial de \mathbf{b} en D .

0.2 Tipos de digráficas y subdigráficas

Una digráfica D' es una **subdigráfica** de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Sean D y G digráficas, $G \subseteq D$ quiere decir que G es una subdigráfica de D . Una digráfica D' es una **subdigráfica inducida** de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y para $\{u,v\} \subseteq V(D')$ se tiene que $(u,v) \in F(D')$ si y sólo si $(u,v) \in F(D)$. Una digráfica D' es una **subdigráfica generadora** de D si $V(D') = V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Para $S \subseteq V(D)$, la **subdigráfica de D inducida por S** , denotada por $D[S]$, tiene $V(D[S]) = S$ y $F(D[S]) = \{(u,v) \in F(D) \mid \{u, v\} \subseteq S\}$. Diremos que $I \subseteq V(D)$ es un conjunto **independiente** si las únicas flechas en $D[I]$ son lazos. Diremos que $A \subseteq V(D)$ es un conjunto **absorbente** si para cada $x \in V(D) \setminus A$ existe $y \in A$ tal que $(x,y) \in F(D)$. Diremos que D es **bipartita** si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_i]$ es un conjunto independiente para cada $i \in \{1,2\}$. Diremos que D es **semicompleta** si para todo par de vértices $\{u,v\} \subseteq V(D)$, $(u,v) \in F(D)$ o $(v,u) \in F(D)$. Diremos que D es **transitiva** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $(u,v) \in F(D)$ y $(v,w) \in F(D)$ se tiene que $(u,w) \in F(D)$. Diremos que D es **simétrica** si todas sus flechas son simétricas. Diremos que D es **asimétrica** si todas sus flechas son asimétricas. Un **torneo** es una digráfica semicompleta asimétrica. La **parte simétrica** de D , denotada por $Sim(D)$, es la subdigráfica

generadora de D tal que sus flechas son las flechas simétricas de D . La **parte asimétrica** de D , denotada por $Asim(D)$, es la subdigráfica generadora de D tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D .

0.3 Caminos dirigidos y Conexidad

Un **camino dirigido** es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Un u_0u_n -**camino dirigido** es un camino dirigido de un vértice u_0 hacia un vértice u_n . Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices. Un **camino dirigido** (u_0, u_1, \dots, u_n) es **cerrado** si $u_0 = u_n$. Para un camino dirigido $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ diremos que n es la **longitud** de C , denotado por $l(C)$. Un **ciclo dirigido** $\gamma = (u_1, \dots, u_n, u_1)$ es un camino dirigido cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último. A los ciclos dirigidos los denotaremos por C_n , donde n es el número de vértices que tiene el ciclo dirigido. Para un camino dirigido $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\{u_i, u_j\} \subseteq V(C)$, con $i < j$, denotamos por (u_i, C, u_j) al u_iu_j -camino dirigido $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ contenido en C . Una **trayectoria infinita exterior** es una sucesión infinita (u_1, u_2, \dots) de distintos vértices de D tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Para S y K dos subconjuntos no vacíos de $V(D)$, una uv -trayectoria dirigida es una SK -**trayectoria dirigida** siempre que $u \in S$ y $v \in K$. Decimos que D es **unilateralmente conexa** si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida o existe una vu -trayectoria dirigida en D . Decimos que D es **fuertemente conexa** si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida y también existe una vu -trayectoria dirigida en D . Una **componente fuertemente conexa** de D es una subdigráfica inducida máxima por contención de D con la propiedad de ser fuertemente conexa. Notemos que si \mathcal{C} es la familia de las componentes fuertemente conexas de una digráfica D , entonces $V(D) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} V(C)$ y para cada $C_i, C_j \in \mathcal{C}$ ($i \neq j$) se tiene que

$V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$. Una **componente fuertemente conexa terminal** D' de D es una componente fuertemente conexa de D tal que $\Gamma^+(V(D')) \subseteq V(D')$. Una **componente fuertemente conexa inicial** D' de D es una componente fuertemente conexa de D tal que

$\Gamma^-(V(D')) \subseteq V(D')$. La **digráfica de condensación** de D , denotada por D^* , es la digráfica tal que $V(D^*) = \mathcal{C}$ (donde \mathcal{C} es la familia de las componentes fuertemente conexas de D) y $(C_i, C_j) \in F(D^*)$ si y sólo si existe una $V(C_i)V(C_j)$ -flecha en D . No es difícil probar que D^* no contiene ciclos dirigidos de longitud al menos dos, debido a que toda componente fuertemente conexa de D es máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa. A lo

largo de este trabajo en lugar de escribir *camino dirigido*, *trayectoria dirigida*, *camino cerrado dirigido*, *ciclo dirigido*, nos limitaremos a escribir sólo *camino*, *trayectoria*, *camino cerrado*, *ciclo*, respectivamente.

0.4 La suma de una digráfica con una sucesión de digráficas

La siguiente operación es conocida como una suma de Zykov, la cual será considerada en los capítulos 2 y 3.

Definición 0.4.1. Sean D una digráfica, con $V(D) = \{1, 2, \dots, p\}$ y $p \geq 2$, y $\alpha = (D_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(D_i) = \{i_1, \dots, i_{p_i}\}$ y $p_i \geq 1$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. La suma de la digráfica D y la sucesión α es la digráfica $\sigma(\alpha, D)$ tal que:

$$V(\sigma(\alpha, D)) = \bigcup_{i=1}^p (\{i\} \times V(D_i)) \text{ y}$$

$$F(\sigma(\alpha, D)) = \{((s, s_t), (r, r_t)) \mid (s = r \text{ y } (s_t, r_t) \in F(D_s)) \text{ o } ((s, r) \in F(D))\}$$

0.5 Resultados básicos de la Teoría de Digráficas

Los siguientes resultados se cumplen tanto para digráficas finitas como para digráficas infinitas.

Teorema 0.5.1. Sean D una digráfica y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.

Teorema 0.5.2. Todo camino cerrado, de longitud al menos dos, contiene un ciclo.

Teorema 0.5.3. Todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.

Lema 0.5.1. Si D es una digráfica sin trayectorias infinitas exteriores tal que $\delta^+(v) \geq 1$ para todo $v \in V(D)$, entonces D contiene un ciclo.

Note que si D es una digráfica finita, entonces D no tiene trayectorias infinitas exteriores. Así, si D finita cumple con la hipótesis del lema 0.5.1, entonces D tiene un ciclo.

0.6 Digráficas m -coloreadas

Sea D una digráfica. Una k -**coloración** de las flechas de D es una función $c:F(D)\rightarrow\{1, \dots, k\}$. Diremos que D es una digráfica **m -coloreada** si D tiene una m -coloración sobre sus flechas. Una **trayectoria dirigida** en D es llamada **monocromática** si todas sus flechas tienen asignado el mismo color. En este trabajo, para no escribir toda la frase "trayectoria dirigida monocromática" nos limitaremos a escribir sólo "trayectoria monocromática". Para una flecha (u,v) de D , denotamos por $c(u,v)$ al color de ésta. Para un vértice v de D , denotamos por $\xi(v)$ al conjunto de los colores que están representados en las flechas que inciden en el vértice v .

0.7 Definiciones complementarias

En esta sección presentaremos algunas definiciones que sólo utilizaremos en el capítulo de introducción histórica.

Diremos que $B \subseteq V(D)$ es un conjunto **dominante** si para cada $x \in V(D) \setminus B$ existe $y \in B$ tal que $(y,x) \in F(D)$. En un torneo T decimos que $v \in V(T)$ es un **2-rey** si para cada $u \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria de longitud a lo más dos desde u hasta v en T . Diremos que D es **quasitransitiva** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $\{(u,v), (v,w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u,w) \in F(D)$ o $(w,u) \in F(D)$. Una digráfica D es **pretransitiva derecha** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $\{(u,v), (v,w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u,w) \in F(D)$ o $(w,v) \in F(D)$. Una digráfica D es **pretransitiva izquierda** si para cualesquiera u, v, w vértices de D tales que $\{(u,v), (v,w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u,w) \in F(D)$ o $(v,u) \in F(D)$. Diremos que D es **hamiltoniana** si D contiene un ciclo γ tal que $V(\gamma) = V(D)$.

Una **gráfica** G es una pareja $(V(G), A(G))$ tal que $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos, llamados vértices, y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de $V(G)$, llamados aristas. Decimos que G es **completa** si $(u,v) \in A(G)$ para cada $u,v \in V(G)$. Una subgráfica completa de G es llamada un **clan** de G . Decimos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Decimos que H es **subgráfica inducida** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y para $\{u, v\} \subseteq V(H)$ se tiene que $(u,v) \in A(H)$ si y sólo si $(u,v) \in A(G)$. Una asignación de colores a los vértices de G , exactamente un color para cada vértice, de tal manera que vértices adyacentes tienen asignado un color distinto es llamada una

Preliminares

coloración propia de G . Una coloración propia de $V(G)$ que usa n -colores es llamada una **n -coloración propia**. Decimos que G es **n -coloreable** si existe una m -coloración propia de $V(G)$ para algún $m \leq n$. El mínimo n para el cual G es una gráfica n -coloreable es llamado el **número cromático** de G , denotado por $\chi(G)$. El **número de clan** de G , denotado por $\omega(G)$, es el máximo número de vértices sobre todas las subgráficas completas de G . Decimos que G es **perfecta** si $\chi(H) = \omega(H)$ para cada subgráfica inducida H de G .

Introducción Histórica

0.8 Núcleos

A lo largo de esta introducción histórica consideraremos digráficas finitas al menos que se especifique lo contrario.

Sea D una digráfica. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un *núcleo* de D si éste es independiente y absorbente. El concepto de núcleo tiene su origen en la teoría de juegos, el cual fue introducido en [49] por Von Neumann y Oskar Morgenstern. Originalmente a un núcleo se le llamó *solución*. Neumann y Morgenstern querían encontrar principios matemáticos que definieran el *comportamiento racional* para los participantes de una economía social, o un juego, y derivar de ellos las características generales de dicha conducta. Los principios buscados debían ser muy generales, es decir, válidos en todas las situaciones. Tras un exhaustivo estudio, Neumann y Morgenstern llegaron a definir los postulados que caracterizarían a la solución para su problema (en caso de que ésta existiera). Así es como nace el concepto de solución.

En juegos completamente cooperativos los jugadores actúan con *eficacia* cuando ellos forman una coalición única, llamada la gran coalición. El objetivo del juego es encontrar distribuciones aceptables del pago total de la gran coalición. Distribuciones donde un jugador recibe menos de lo que podría obtener por su cuenta, sin cooperar con ninguna otra persona, son inaceptables; dicha condición es conocida como la *racionalidad individual*. Las *imputaciones* son distribuciones que son eficientes y son individualmente racionales.

El concepto de dominación de imputaciones en juegos de n personas fue desarrollado por Neumann y Morgenstern en [49]. En dicha formulación, cada imputación era representada por

Introducción Histórica

un elemento a, b, c, \dots , de algún conjunto universal P . Si a domina a b (es decir, existe un número suficiente de participantes que prefieren a en lugar de b , y además son capaces de imponer su preferencia por a), entonces $a > b$. La relación $>$ se supone irreflexiva. El conjunto de imputaciones condujo a la definición de una solución en términos de la relación definida sobre el conjunto. La definición formal de solución es la siguiente:

Un subconjunto S de P es una *solución* de la relación $>$ si se cumple lo siguiente:

1. Para cualquier par de elementos a y b en S se cumple que $a \not> b$.
2. Para cualquier $a \in P \setminus S$ existe $b \in S$ tal que $b > a$.

Esta formulación puede ser visualizada por medio de una digráfica D cuyo conjunto de vértices representa al conjunto P y existe una flecha del vértice a al vértice b si y sólo si $a > b$. Así, el problema de encontrar una solución de una relación es equivalente a encontrar un conjunto independiente y dominante, digamos S , en D .

Posteriormente Berge notó que el concepto de solución se podía aplicar en otros campos de estudio de las matemáticas y con una ligera redefinición de dicho concepto Berge definió lo que es el núcleo de una digráfica.

Note que el concepto de núcleo y el concepto de solución son duales direccionalmente, ya que S es solución de una digráfica D si y sólo si S es un núcleo de la digráfica obtenida de D al cambiar la dirección de todas las flechas de D .

La teoría de núcleos es muy importante dentro de las matemáticas debido a la aplicación que tiene no sólo en la teoría de Juegos si no también en lógica, juegos tipo nim, listas de arista-coloración [5], por nombrar algunos campos. Además, Berge y Duchet [4] relacionaron la teoría de núcleos y la teoría de gráficas perfectas con la siguiente conjetura:

Conjetura 0.8.1. G es una gráfica perfecta si y sólo si G es una gráfica núcleo soluble¹.

¹Sea G una gráfica. Una *biorientación* de G es reemplazar cada arista $\{u,v\}$ de G por cualquiera de las flechas en el conjunto $\{(u,v), (v,u)\}$ o ambas. Una biorientación es llamada clan-acíclica si todo clan no tiene ciclos dirigidos. Una gráfica es núcleo soluble si toda biorientación clan-acíclica tiene núcleo.

El hecho de que las gráficas perfectas son núcleo solubles fue probado por Boros y Gurvich en [7] y el inverso es una consecuencia del teorema fuerte de las gráficas perfectas (Strong Perfect Graph Theorem)[9].

Por otro lado, la teoría de núcleos recientemente ha sido utilizada en [29] y [30] para probar algunos casos particulares de otra conjetura famosa:

Conjetura 0.8.2. (*Payan y Xuong [36]*) *En toda digráfica existe un conjunto independiente máximo que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima.*

Es muy natural pensar que la teoría de núcleos puede ayudar a encontrar una respuesta positiva a dicha conjetura, ya que en [3] Berge demostró que todo núcleo es un conjunto independiente máximo, además se puede probar fácilmente que un núcleo interseca a toda trayectoria de longitud máxima.

Como no toda digráfica tiene núcleo, varios autores han buscado condiciones suficientes que garanticen la existencia de al menos un núcleo. Entre los pioneros dentro de esta línea de investigación podemos nombrar a Von Neumann, Morgenstern, Richardson, Berge, Köning, Victor Neumann-Lara, Duchet, Meyniel, Hortensia Galeana, H. Jacob, entre otros.

En [10] Chvátal demostró que el problema de decidir cuando una digráfica tiene núcleo es un problema *NP-completo*. Más aún, en [16] Fraenkel demostró que el problema sigue siendo *NP-completo* aún para digráficas planas tal que $\delta^+(v) \leq 2$, $\delta^-(v) \leq 2$ y $\delta(v) \leq 3$ para cada $v \in V(D)$.

Como el problema de encontrar núcleos es un problema *NP-completo*, varios investigadores han restringido su investigación hacia ciertas familias de digráficas muy en particular como por ejemplo, digráficas quasitransitivas [27], digráficas pretransitivas [25], por citar algunas.

Los primeros resultados que exhibieron condiciones para la existencia de al menos un núcleo principalmente tienen sus hipótesis sobre los ciclos de la digráfica. Dichos resultados son los siguientes:

Teorema 0.8.1. (*Von Neumann [49]*) *Si D es una digráfica sin ciclos, entonces D tiene núcleo.*

Posteriormente Richardson generalizó el resultado de Von Neumann con el siguiente teorema.

Teorema 0.8.2. (*Richardson [42]*) *Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.*

Varias extensiones del teorema de Richardson han sido encontradas a través de los años, una de ellas se debe a Duchet.

Teorema 0.8.3. (Duchet [13]) *Si D es una digráfica tal que todo ciclo de longitud impar tiene dos flechas simétricas, entonces D tiene núcleo.*

Otro resultado muy importante dentro de la teoría de núcleos, debido a Duchet, es el siguiente:

Teorema 0.8.4. (Duchet [13]) *Si D es una digráfica tal que todo ciclo tiene una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Note que como la hipótesis que se exhibe en cada uno de los tres teoremas anteriores también se hereda para cada subdigráfica inducida de D , entonces cada subdigráfica también tienen núcleo. Esta observación nos lleva a la siguiente definición.

Definición 0.8.1. *Una digráfica D es **Núcleo Perfecta** si D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.*

En este trabajo daremos una nueva generalización del teorema de Richardson, la cual versa sobre una digráfica m -coloreada.

0.9 Núcleos por trayectorias monocromáticas

Hay varias generalizaciones del concepto de núcleo, una de ellas se define sobre una digráfica cuyas flechas están coloreadas.

En [40] Rédei probó que todo torneo finito tiene una trayectoria Hamiltoniana y en [37] Landau probó que todo torneo finito tiene un 2-rey. Así, con dichos resultados, ya no es de sorprender que todo torneo T cuyas flechas están coloreadas con un mismo color tiene un vértice v con la siguiente propiedad: para cada vértice $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w hacia v (v es absorbente por trayectorias monocromáticas). En [46] Sands, Sauer y Woodrow demostraron lo siguiente (para digráficas posiblemente infinitas):

Teorema 0.9.1. (Sands, Sauer y Woodrow) *Toda digráfica D cuyas flechas están coloreadas con dos colores, sin trayectorias monocromáticas infinitas exteriores, tiene un subconjunto S de vértices que tiene dos propiedades: (1) para cualquier par de vértices en S no existen trayectorias monocromáticas entre ellos, (2) para cualquier vértice x en $V(D) \setminus S$ existe un vértice w en S y una trayectoria monocromática de x hacia w (S es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas).*

0.9 Núcleos por trayectorias monocromáticas

En particular, ellos probaron que

Corolario 0.9.1. *Todo torneo finito T cuyas flechas están coloreadas con dos colores tiene un vértice v tal que para cada $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w hacia v .*

Ellos también notaron que si se usan más de dos colores, entonces no necesariamente es cierto que todo torneo tiene un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas. Como ejemplo propusieron al ciclo dirigido de longitud tres cuyas flechas están coloreadas con tres colores distintos. A partir de dicho ciclo se puede construir un torneo cuyas flechas están coloreadas con $m \geq 4$ colores tal que no contiene un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas. La construcción es la siguiente:

Supongamos que el conjunto de vértices del ciclo de longitud 3 es $\{v_1, v_2, v_3\}$ y el conjunto de sus flechas es $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_3) = 2$ y $c(v_3, v_1) = 3$. Denotemos por C_3 a dicho ciclo con la coloración dada. Sea T_m el torneo, cuyas flechas están coloreadas con m colores, obtenido de C_3 al agregar un conjunto $\{v_4, \dots, v_m\}$ de nuevos vértices y el conjunto $\{(v_i, v_j) \mid j < i, 4 \leq i \leq m\}$ de nuevas flechas. Además $c(v_i, v_j) = i$ para cada $i \in \{4, \dots, m\}$. Claramente T_m no contiene un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas.

En [46] Sands, Sauer y Woodrow formularon la siguiente pregunta, que aseguran se debe a Erdős:

Problema 0.9.1. *¿Para cada n existe un menor entero positivo $f(n)$ tal que todo torneo cuyas flechas están coloreadas con n colores contiene un conjunto S de $f(n)$ vértices que es absorbente por trayectorias monocromáticas?*

En particular, se preguntaron si

Problema 0.9.2. *¿ $f(3) = 3$?*

De acuerdo al resultado obtenido por Sands, Sauer y Woodrow se tiene que $f(2) = 1$. Además, $f(1) = 1$.

Existen torneos cuyas flechas están coloreadas con tres colores, los cuales bajo ciertas condiciones contienen un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas; más aún, dichos torneos cumplen con no contener a C_3 . En [46] Sands, Sauer y Woodrow expusieron la siguiente pregunta:

Introducción Histórica

Problema 0.9.3. Sea T un torneo cuyas flechas están coloreadas con tres colores el cual no contiene C_3 . ¿ T debe tener un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas?

Cabe mencionar que el problema 0.9.3 aún sigue abierto.

En [39] Shen Minggang retomó la pregunta del problema 0.9.3 y probó lo siguiente:

Teorema 0.9.2. Si T es un torneo finito m -coloreado tal que no contiene torneos de orden tres cuyas flechas están coloreadas con tres colores, entonces T contiene un vértice v absorbente por trayectorias monocromáticas.

Shen Minggang probó el corolario 0.9.1 como consecuencia del teorema 0.9.2 .

G_5 :

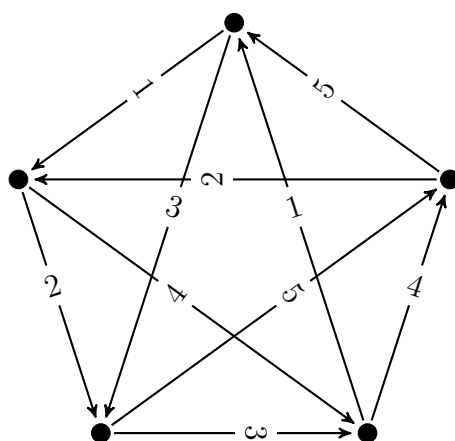


Figura 1

Shen Minggang le llamó T_3 al torneo transitivo de tres vértices cuyas flechas están coloreadas con tres colores. En [39] Minggang probó que en el teorema 0.9.2 no se puede omitir la hipótesis de que T no contenga T_3 . Shen Minggang considero como ejemplo a la digráfica 5-coloreada G_5 la cual cumple con lo siguiente (ver figura 1): no contiene C_3 , tiene al menos un T_3 y no contiene un vértice absorbente por trayectorias monocromáticas. A partir de la digráfica G_5 se puede construir un contraejemplo para el problema 0.9.3 cuando se consideran más de 5 colores, lo cual condujo a tratar de encontrar un contraejemplo para el problema 0.9.3 utilizando 3 y 4 colores. Por otro lado, Minggang también probó que en el teorema 0.9.2 no se puede omitir la hipótesis de que T no contenga C_3 , lo cual muestra que su teorema es lo mejor posible.

0.9 Núcleos por trayectorias monocromáticas

En [24] Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy probaron con un ejemplo que la pregunta en el problema 0.9.3 tiene respuesta negativa cuando se utilizan 4 colores (ver figura 2). Lo cual deja pendiente probar el problema 0.9.3 o encontrar un contraejemplo para él.

D :

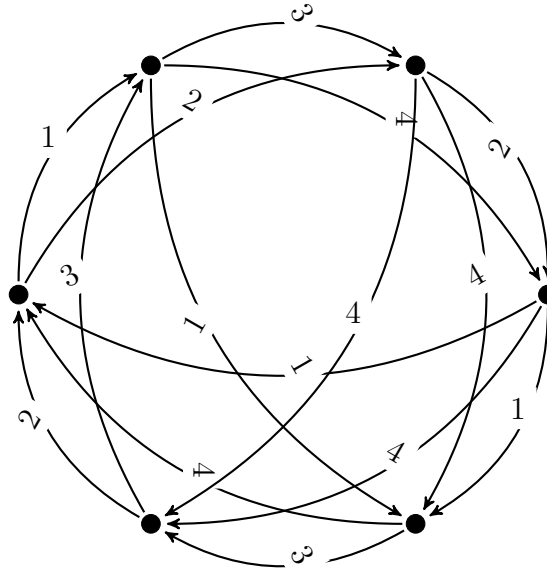


Figura 2

Con el fin de encontrar una respuesta positiva al problema 0.9.3, Hortensia Galeana introdujo el concepto de *núcleo por trayectorias monocromáticas* en [21] como sigue:

Definición 0.9.1. Sea D una digráfica m -coloreada. $N \subseteq V(D)$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si:

1. Para todo par de vértices distintos $x, y \in N$ no existen trayectorias monocromáticas entre ellos (N es independiente por trayectorias monocromáticas).
2. Para cada $u \in V(D) \setminus N$ existe $v \in N$ tal que hay una uv -trayectoria monocromática en D (N es absorbente por trayectorias monocromáticas).

Claramente podemos ver que D tiene núcleo si y sólo si la digráfica D , en la cual todas sus flechas tienen asignado un color distinto, tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Introducción Histórica

Por otro lado, ya que la definición de núcleo por trayectorias monocromáticas generaliza a la de núcleo, es muy natural pensar en una digráfica auxiliar que preserve toda la información con respecto a las trayectorias monocromáticas que hay entre todo par de vértices y que además sirva para poder aplicar la teoría de núcleos con la que ya se cuenta. En [18] Hortensia Galeana definió la cerradura de una digráfica m -coloreada como sigue:

Definición 0.9.2. *Sea D una digráfica m -coloreada.*

La cerradura de D , denotada por $\mathfrak{C}(D)$, es la multidigráfica m -coloreada tal que:

$$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D) \text{ y}$$

$$F(\mathfrak{C}(D)) = \bigcup_{i=1}^m \{(u,v) \text{ con color } i / \exists \text{ una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ en } D\} \cup F(D).$$

De la definición de cerradura se sigue que:

Lema 0.9.1. *En cualquier digráfica D m -coloreada se cumple que $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$.*

Teorema 0.9.3. *Sea D una digráfica m -coloreada. N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.*

En los años que siguieron al teorema anterior, los investigadores no sólo dedicaron su tiempo al estudio del problema 0.9.3, si no que en general se preguntaron ¿Cuándo una digráfica m -coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas?

Como no es sencillo decir cuando una digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, condiciones suficientes para la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas han sido obtenidas principalmente al añadir condiciones monocromáticas o casi-monocromáticas a subdigráficas como ciclos, trayectorias, subtorneos, número de colores distintos representados en cada vértice, etc, como ejemplos se sugiere ver [18], [21], [39], [26].

Recientemente, en [28] H. Galeana Sánchez introdujo el concepto de **digráfica de clases cromáticas** con la finalidad de poder encontrar nuevas condiciones que garanticen la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas. Dicha digráfica se define como sigue:

0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow

Definición 0.9.3. Sea D una digráfica arco-coloreada. La digráfica de clases cromáticas de D , denotada por $\mathcal{C}_c(D)$, es la digráfica tal que:

$$V(\mathcal{C}_c(D)) = \{i \mid \text{existe una flecha con color } i \text{ en } D\}$$

$(i, j) \in F(\mathcal{C}_c(D))$ si y sólo si existen dos flechas de D , digamos (u, v) y (v, w) , tales que $c(u, v) = i$ y $c(v, w) = j$

En [28] el resultado principal fue el siguiente:

Teorema 0.9.4. Sea D una digráfica finita m -coloreada. Si $\mathcal{C}_c(D)$ es una digráfica bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Como consecuencia se desprende el siguiente corolario.

Corolario 0.9.2. Si D es una digráfica finita 2-coloreada fuertemente conexa, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En este trabajo veremos condiciones sobre la digráfica de clases cromáticas de cada componente fuertemente conexa de una digráfica m -coloreada, las cuales van a garantizar la existencia de al menos un núcleo por trayectorias monocromáticas

0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow

El corolario 0.9.1 establece que todo torneo finito 2-coloreado T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Dicho resultado fue una consecuencia directa de un resultado más general que probaron Sands, Sauer y Woodrow para digráficas posiblemente infinitas. Desde la aparición del resultado de Sands, Sauer y Woodrow, varios autores han obtenido generalizaciones de dicho resultado, en particular del corolario 0.9.1. En [38] Linek y Sands consideraron una extensión del corolario 0.9.1 como sigue:

Linek y Sands colorearon las flechas de un torneo T con los elementos de un conjunto parcialmente ordenado P y ellos dicen que una trayectoria $(v_1, \dots, v_n) \subseteq T$ es *monótona* si $c(v_i, v_{i+1}) \leq c(v_{i+1}, v_{i+2})$ en P , para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$.

Consideremos las siguientes definiciones, las cuales nos ayudarán a comprender con más claridad lo que sigue.

Introducción Histórica

Definición 0.10.1. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Una **anticadena** A es un subconjunto de P tal que cada par de miembros de A son incomparables; es decir, para cualquier x, y en A se cumple que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Definición 0.10.2. La digráfica de un orden parcial (P, \leq) es una representación gráfica de dicho orden. La digráfica consiste en representar por medio de un vértice a cada elemento del conjunto P . Si $a \leq b$, entonces se traza una flecha desde el vértice a hacia el vértice b .

Por lo tanto, si R es una relación en P , las flechas en la digráfica de R corresponden exactamente a los pares en R y los vértices a los elementos del conjunto P . Como un orden parcial es reflexivo, cada vértice tendrá un lazo. Más aún, la digráfica es transitiva.

Definición 0.10.3. Sean (P_1, \leq_1) y (P_2, \leq_2) dos conjuntos parcialmente ordenados. La suma lineal de P_1 y P_2 es el conjunto parcialmente ordenado $(P_1 \cup P_2, \leq)$ tal que para todo $x, z \in P_1 \cup P_2$ se tiene que $x \leq z$ si y sólo si $(x, z \in P_1 \text{ y } x \leq_1 z)$ o $(x, z \in P_2 \text{ y } x \leq_2 z)$ o $(x \in P_1 \text{ y } z \in P_2)$.

Como trayectorias monocromáticas y monótonas coinciden si P es una anticadena, Linek y Sands generalizaron la definición del problema 0.9.1 como sigue:

Definición 0.10.4. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. $t_c(P)$ es el entero positivo más pequeño tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo T con los elementos de P existe un conjunto $S \subseteq V(T)$ de a lo más $t_c(P)$ vértices con la propiedad de que hay una trayectoria monótona desde cualquier vértice en $T \setminus S$ hacia un vértice de S .

Dicha definición implica que si P es una anticadena con exactamente dos elementos, entonces $t_c(P) = 1$ (debido al corolario 0.9.1).

En [38] el resultado principal de Linek y Sands consiste en la caracterización de los conjuntos finitos parcialmente ordenados P tales que $t_c(P) = 1$. Su teorema principal es el siguiente:

Teorema 0.10.1. Sea P un conjunto parcialmente ordenado finito. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $t_c(P) = 1$
2. P no contiene un subconjunto isomorfo a alguna de las digráficas de la figura 3
3. P es una suma lineal de anticadenas de uno y dos elementos.

0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow

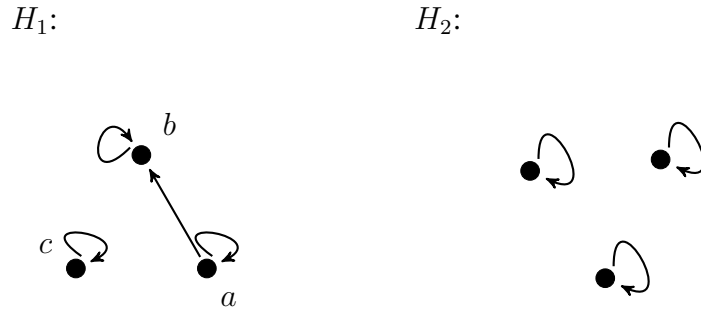


Figura 3

En [38] Linek y Sands probaron que $t_c(H_1) \geq 3$ al considerar a la digráfica de la figura 4, lo que los llevo a proponer el siguiente problema (el cual sigue abierto):

Problema 0.10.1. *¿Existe $t_c(H_1)$?, ¿ $t_c(H_1) = 3$?*

Posteriormente, en [38] Linek y Sands cerraron con la propuesta de otra extensión más. Ellos propusieron reemplazar el conjunto parcialmente ordenado P por una digráfica reflexiva H (es decir, todo vértice de H tiene un lazo) y con los vértices de H colorear las flechas de un torneo T . Con dicha coloración ellos dicen que una trayectoria $(u_1, \dots, u_n) \subseteq T$ es una H -trayectoria si $(c(u_i, u_{i+1}), c(u_{i+1}, u_{i+2})) \in F(H)$ para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Y definen $t_c(H)$ como el entero positivo más pequeño tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo T con los vértices de H existe un conjunto $S \subseteq V(T)$ de a lo más $t_c(H)$ vértices con la propiedad de que hay una H -trayectoria desde cualquier vértice en $T \setminus S$ hacia un vértice de S . Así, si H es la digráfica de un conjunto parcialmente ordenado P , entonces $t_c(H) = t_c(P)$.

En particular Linek y Sands dejan abierto el problema de encontrar a las digráficas H tales que $t_c(H) = 1$.

En [38] Linek y Sands también definieron el **número de coloración de torneo para una gráfica** G como sigue: Si G es una gráfica, D_G denota a la digráfica reflexiva obtenida de G al cambiar cada arista de G por una flecha simétrica y al añadir un lazo a cada vértice de G . El número de coloración de torneo de G , denotado por $t_c(G)$, se define como $t_c(D_G)$.

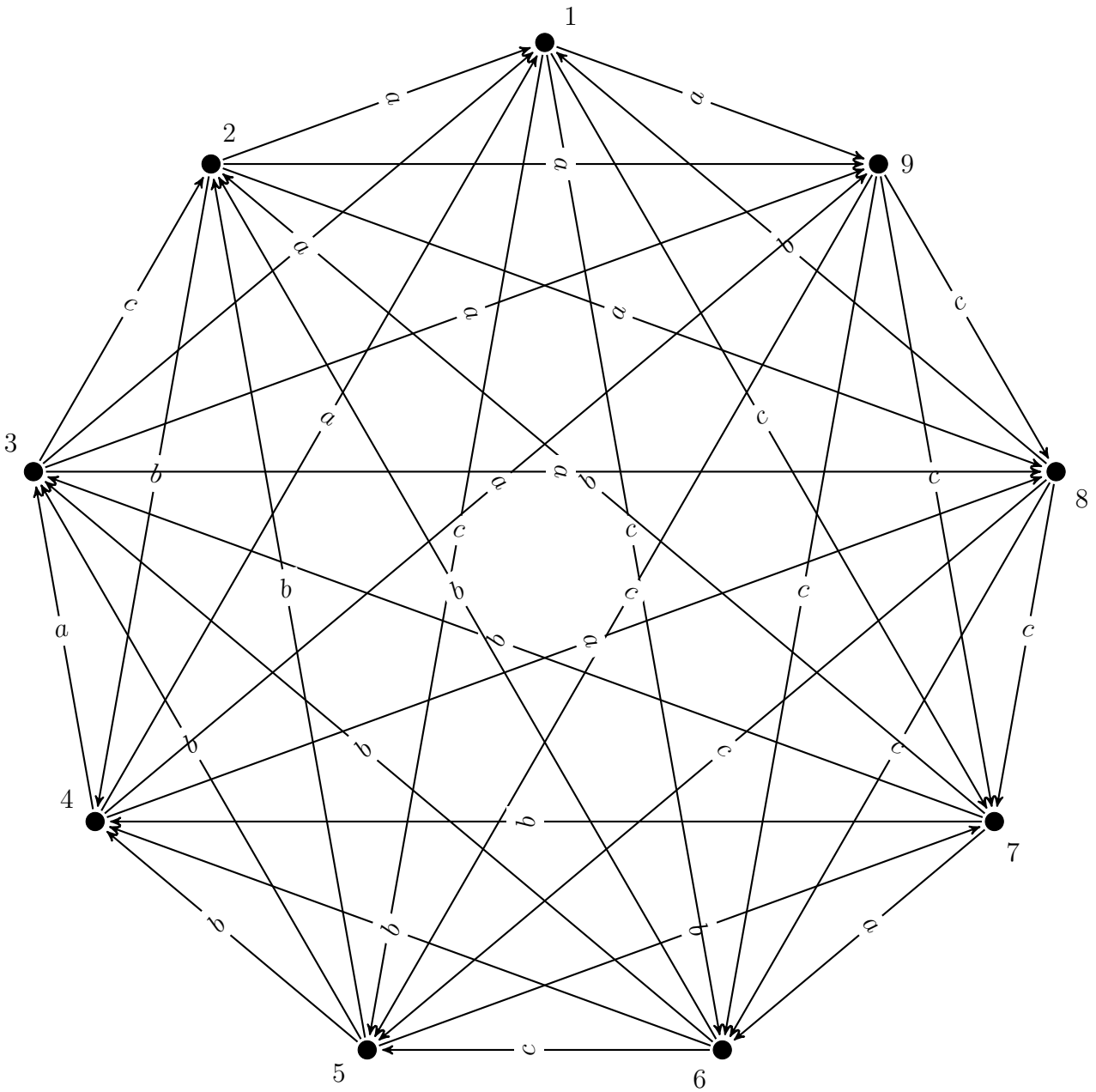


Figura 4

De la definición de número de coloración de torneo para una gráfica G , Linek y Sands observaron que $t_c(C_3) = t_c(C_4) = 1$ debido al teorema 0.10.1 (con C_n el ciclo simétrico de longitud n). Como $t_c(D) \geq 3$ cuando D contiene un conjunto independiente con tres vértices

0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow

(porque $t_c(I) \geq 3$ cuando I es la digráfica que consiste de tres vértices aislados), entonces $t_c(C_n) \geq 3$ para toda $n \geq 6$. Así, ellos se preguntaron lo siguiente:

Problema 0.10.2. ¿ $t_c(C_5) = 1$?

Supongamos que $C_5 = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$. Podemos decir que la respuesta a la pregunta del problema 0.10.2 es negativa, ya que el siguiente torneo T_0 , cuyas flechas están coloreadas con los vértices de C_5 , no tiene un vértice v tal que para cualquier vértice $x \in V(T_0) \setminus \{v\}$ existe una xv - D_{C_5} -trayectoria monótona en T_0 . Así $t_c(C_5) \geq 2$.

T_0 :

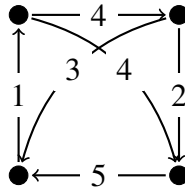


Figura 5

En [1] Arpin y Linek también prueban de una manera más general que $t_c(C_5) \geq 2$.

Como Linek y Sands no describen a las digráficas reflexivas H tales que $t_c(H) = 1$, entonces en [41] Reid, en particular, se encarga de estudiar $t_c(H)$ para digráficas reflexivas con tres elementos.

Para investigar $t_c(H)$ para digráficas reflexivas con tres vértices, en [41] Reid propuso la construcción de una digráfica reflexiva a partir de otra digráfica reflexiva como sigue:

Supongamos que H es una digráfica reflexiva la cual contiene una digráfica completa simétrica reflexiva D . Sea $H' = H \setminus V(D)$. Sea H/D la digráfica obtenida de H' al agregar un nuevo vértice, digamos z , y el siguiente conjunto de flechas:

$$\{(x,x) \mid x \in V(H/D)\} \cup \{(z,x) \mid (y,x) \in F(H) \text{ para algún } y \in V(D), x \in V(H')\} \cup \{(x,z) \mid (x,y) \in F(H) \text{ para algún } y \in V(D), x \in V(H')\}.$$

Introducción Histórica

Con la digráfica H/D Reid probó lo siguiente:

Lema 0.10.1. *Si H es una digráfica reflexiva la cual contiene una digráfica completa simétrica reflexiva D y $t_c(H)$ existe, entonces $t_c(H/D)$ existe y $t_c(H/D) \leq t_c(H)$.*

Corolario 0.10.1. *Supongamos que H es una digráfica reflexiva la cual contiene una digráfica completa simétrica reflexiva D tal que no hay flechas entre $V(D)$ y $(V(H) \setminus V(D))$ en H . Entonces $t_c(H)$ existe si y sólo si $t_c(H/D)$ existe, y en tal caso $t_c(H) = t_c(H/D)$.*

Corolario 0.10.2. *Si H es una digráfica completa simétrica reflexiva, entonces $t_c(H) = 1$.*

Lema 0.10.2. *Sea D una digráfica reflexiva. Si H es una subdigráfica generadora reflexiva de D tal que $t_c(H)$ existe, entonces $t_c(D)$ existe y $t_c(D) \leq t_c(H)$.*

Como $t_c(H_1) = 1$, con H_1 la digráfica reflexiva con conjunto de vértices $\{u, v\}$ y conjunto de flechas $\{(u,u), (v,v)\}$ (por el teorema de Sands, Sauer y Woodrow). Entonces del lema 0.10.2 se deduce lo siguiente:

Corolario 0.10.3. *Si H es una digráfica reflexiva con dos vértices, entonces $t_c(H) = 1$.*

Posteriormente en [1] Arpin y Linek obtienen como consecuencia directa de un resultado más general al corolario 0.10.3.

Lema 0.10.3. *Sea D una digráfica reflexiva tal que $t_c(D)$ existe. Si H es una subdigráfica inducida reflexiva de D , entonces $t_c(H)$ existe y $t_c(H) \leq t_c(D)$.*

Con la ayuda de los resultados anteriores Reid probó el siguiente teorema.

Teorema 0.10.2. *Suponga que H es una digráfica reflexiva con tres vértices.*

1. *Si H contiene un ciclo de longitud 2, entonces $t_c(H) = 1$,*
2. *Si H no contiene ciclos de longitud 2, pero H contiene un vértice de ingrado 2 o exgrado 2 (sin considerar los lazos), entonces $t_c(H) = 1$.*

Posteriormente, en [1] Arpin y Linek dan una amplia generalización del teorema 0.10.2.

En la figura 6 se exhiben todas las digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices.

0.10 Una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow

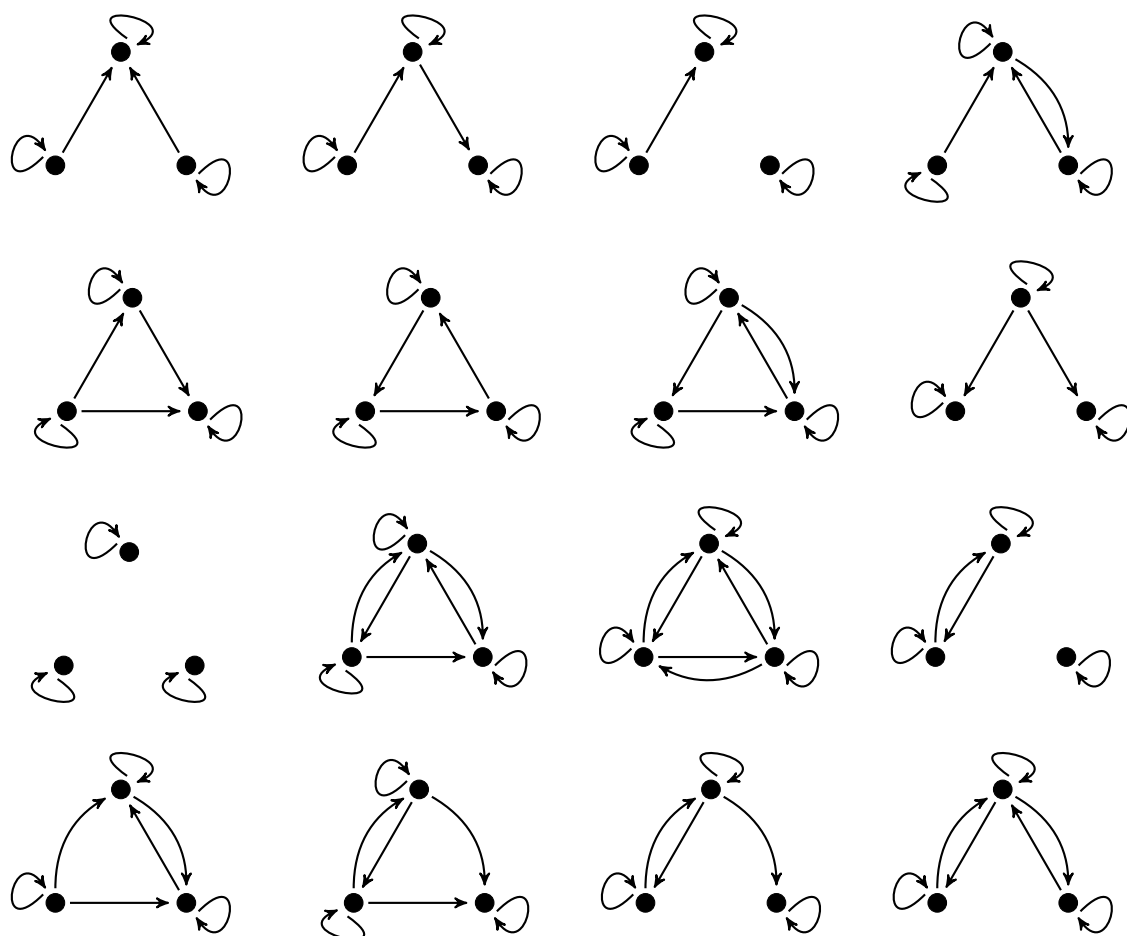


Figura 6: Todas las digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices.

Como hay 16 digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices, de las cuales 12 satisfacen las hipótesis del teorema 0.10.2, Reid dejó como problema encontrar $t_c(D_i)$ para las cuatro digráficas con tres vértices que se muestran en la figura 7.

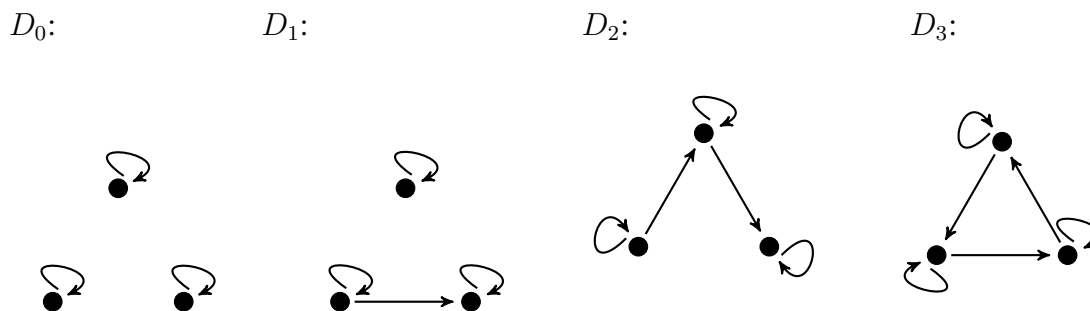


Figura 7

Note que determinar el valor de $t_c(D_1)$ es el problema 0.10.1, dado por Linek y Sands, y el problema de determinar el valor de $t_c(D_0)$ está relacionado con el problema 0.9.2.

Con un resultado de Arpin y Linek, dado en [1], es fácil verificar que $t_c(D_i) \geq 2$ para cada $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dicho resultado se verá en la sección 0.11.

Como la digráfica de la figura 4, cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D_3 , también muestra que $t_c(D_3) \geq 3$, Reid propuso el siguiente problema (el cual sigue abierto).

Problema 0.10.3. $\zeta t_c(D_3) = 3$?

Por otro lado Reid notó que si $t_c(D_0)$ existe, entonces del lema 0.10.2 se sigue que $3 \leq t_c(D_3) \leq t_c(D_2) \leq t_c(D_1) \leq t_c(D_0)$. Así otro problema propuesto fue el siguiente (el cual sigue abierto).

Problema 0.10.4. $\zeta t_c(D_2) = 3$?

Claramente si la respuesta a la pregunta del problema 0.10.4 es positiva, entonces la respuesta a la pregunta del problema 0.10.3 también lo es.

Finalmente, Reid cerró con un último problema (el cual sigue abierto).

Problema 0.10.5. $\zeta t_c(H)$ existe para toda digráfica reflexiva H sin ciclos de longitud mayor que 2 y sin conjuntos independientes de 3 o más vértices ?

0.11 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y \mathcal{B}_3

En [1] Arpin y Linek consideraron la última extensión que propusieron Sands y Linek en [38] (la cual consiste en colorear las flechas de un torneo T con los vértices de una digráfica reflexiva H) con la finalidad de extenderla para cualquier digráfica y así generalizar algunos de los resultados obtenidos por Reid en [41] y algunos de los resultados de linek y Sands en [38].

La generalización de las definiciones que fueron consideradas en [38] son las siguientes.

Definición 0.11.1. Sean D y H digráficas. Diremos que D es una digráfica H -coloreada si las flechas de D están coloreadas con los vértices de H , es decir, los colores de las flechas de D pertenecen al conjunto $V(H)$.

Definición 0.11.2. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Un camino o trayectoria $C = (z_0, z_1, \dots, z_k)$ en D es un H -camino o H -trayectoria, respectivamente, si $(c(z_0, z_1), \dots, c(z_i, z_{i+1}), \dots, c(z_{k-1}, z_k))$ es un camino en H .

Notemos que toda flecha en D es un H -camino.

Definición 0.11.3. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $I \subseteq V(D)$ es H -independiente por caminos si para cada par de vértices distintos en I no existen H -caminos entre ellos en D .

Definición 0.11.4. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. $A \subseteq V(D)$ es H -absorbente por caminos si para cada $x \in V(D) \setminus A$ existe $y \in A$ tal que hay un H -camino de x hacia y en D .

Definición 0.11.5. Sea H una digráfica. H tiene número de coloración de torneo k si cualquier H -coloración de las flechas de cualquier torneo finito siempre tiene un conjunto H -absorbente de cardinalidad a lo más k . Dicho número es denotado por $t_c(H) = k$.

Definición 0.11.6. Sean H_1 y H_2 dos digráficas. La suma lineal de H_1 y H_2 , denotada por $H_1 \bullet H_2$, es la digráfica tal que $V(H_1 \bullet H_2) = V(H_1) \cup V(H_2)$ (unión disjunta) y $F(H_1 \bullet H_2) = F(H_1) \cup F(H_2) \cup (V(H_1) \times V(H_2))$.

Arpin y Linek observaron que la concatenación de dos H -caminos no siempre es un H -camino. Más aún, ellos observaron que la existencia de un H -camino entre dos vértices no

Introducción Histórica

garantiza la existencia de una H -trayectoria entre dichos vértices. Para ilustrar dicha observación, consideremos a la digráfica $H = (\{1, 2\}, \emptyset)$ y a la digráfica H -coloreada $D = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\})$, donde $c(v_1, v_2) = 1$ y $c(v_2, v_3) = 2$. En D se tiene que (v_1, v_2) y (v_2, v_3) son H -caminos, mientras que (v_1, v_2, v_3) no es un H -camino en D (porque $(1, 2) \notin F(H)$). Y en la figura 8 se tiene que $(u_1, u_3, u_0, u_3, u_2)$ es un H -camino en D , pero no existe una H -trayectoria de u_1 hacia u_2 en D . Por tal motivo, en [1] Arpin y Linek prefirieron trabajar con H -caminos en lugar de H -trayectorias.

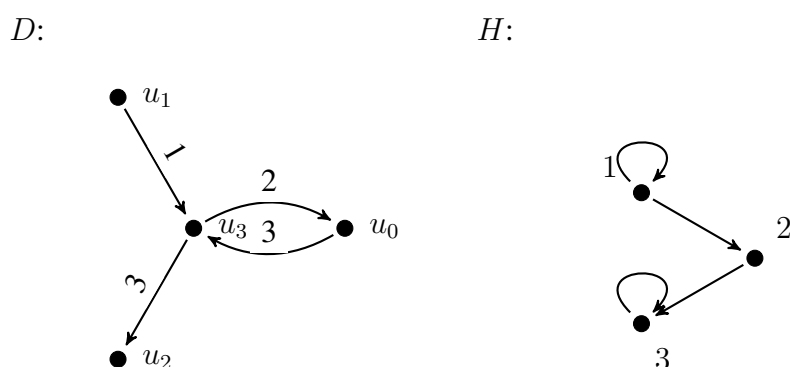


Figura 8

Sean H una digráfica, posiblemente con lazos, y D una digráfica H -coloreada. Diremos que $K \subseteq V(D)$ es un H -núcleo por caminos si K es H -independiente por caminos y H -absorbente por caminos. Cabe mencionar que Hortensia Galeana Sánchez en [12] propuso dicho nombre, y es necesario definirlo antes de tiempo por nuestra comodidad.

Note que el concepto de H -núcleo por caminos es una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas; ya que si $F(H) = \{(v, v) \mid v \in V(H)\}$, entonces todo H -camino es un camino monocromático, el cual contiene una trayectoria monocromática. Por consiguiente, el concepto de H -núcleo por caminos también generaliza al de núcleo.

En [1] el trabajo de Arpin y Linek consistió principalmente en el estudio de tres clases de familias de digráficas, las cuales se definen como sigue:

Definición 0.11.7. \mathcal{B}_1 es la clase de todas las digráficas H tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo finito con los vértices de H existe un vértice v de D con la propiedad de ser H -absorbente.

Definición 0.11.8. \mathcal{B}_2 es la clase de todas las digráficas H tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier multidigráfica D con los vértices de H existe un conjunto S de vértices de D que cumple con ser independiente y H -absorbente.

Definición 0.11.9. \mathcal{B}_3 es la clase de todas las digráficas H tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier multidigráfica D con los vértices de H existe un conjunto S de vértices de D que cumple con ser H -independiente por caminos y H -absorbente por caminos.

De la definición de $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y \mathcal{B}_3 Arpin y Linek derivaron el siguiente lema.

Lema 0.11.1. Sea H una digráfica posiblemente con lazos. La primera afirmación implica la segunda y la segunda afirmación implica la tercera.

1. Cualquier multidigráfica finita H -coloreada contiene un subconjunto de vértices que es H -independiente por caminos y H -absorbente por caminos.
2. Cualquier multidigráfica finita H -coloreada contiene un subconjunto de vértices que es independiente y H -absorbente por caminos.
3. Cualquier torneo finito H -coloreado contiene un vértice que es H -absorbente por caminos.

Luego, del lema 0.11.1 se deduce que $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$.

Posteriormente, ellos describieron algunas de las características de cada \mathcal{B}_i con el lema 0.11.2. Pero, antes de pasar a dicho resultado es conveniente dar una definición.

Introducción Histórica

Definición 0.11.10. Sea H una digráfica reflexiva. Supongamos que:

1. $V(H) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, donde cada C_i es no vacío y $C_i \cap C_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$,
2. $(x, y) \in F(H)$ siempre que $x \neq y$ y $\{x, y\} \subseteq C_i$ para algún i , y
3. $C_i \times C_j \subseteq F(H)$ siempre que $(i \neq j \text{ y } (C_i \times C_j) \cap F(H) \neq \emptyset)$ o $(i = j \text{ y } (x, x) \in F(H) \text{ para algún } x \in C_i)$.

La **contracción** de H es la digráfica H' definida como sigue: $V(H') = \{C_1, \dots, C_n\}$, y $(C_i, C_j) \in F(H')$ si y sólo si $(C_i \times C_j) \cap F(H) \neq \emptyset$.

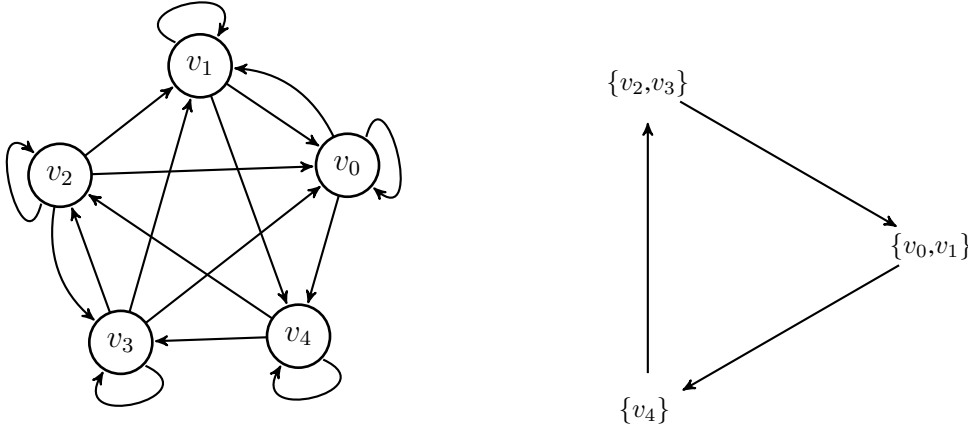


Figura 9: Una digráfica reflexiva con su contracción.

Lema 0.11.2. Las siguientes propiedades se cumplen para los \mathcal{B}_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Si $H \in \mathcal{B}_i$, con $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces $(x, x) \in F(H)$ para cada $x \in V(H)$.
2. Si $H \in \mathcal{B}_i$, con $i \in \{1, 2, 3\}$, y H_1 es una subdigráfica inducida de H , entonces $H_1 \in \mathcal{B}_i$.
3. Sea H' una contracción de H . Entonces $H \in \mathcal{B}_i$ si y sólo si $H' \in \mathcal{B}_i$, con $i \in \{1, 2, 3\}$.
4. Si $H \in \mathcal{B}_i$, con $i \in \{1, 2\}$, y $V(H) = V(H_1)$, $F(H) \subseteq F(H_1)$, entonces $H_1 \in \mathcal{B}_i$.

También notaron que \mathcal{B}_2 es cerrado bajo sumas lineales.

Lema 0.11.3. Si H_1 y H_2 están en \mathcal{B}_2 , entonces $H_1 \bullet H_2 \in \mathcal{B}_2$.

Después de que se presentaron algunas propiedades que tienen las digráficas en \mathcal{B}_i para cada $i \in \{1,2,3\}$, Arpin y Linek dieron una amplia caracterización de las digráficas en \mathcal{B}_2 con el siguiente resultado.

Teorema 0.11.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $H \in \mathcal{B}_2$,
2. H^c no tiene ciclos impares,
3. H es generado por un cuasiorden cuyo cociente de orden parcial es una suma lineal de anticadenas con 1 y 2 elementos.

Como una relación se puede representar por medio de una digráfica, Arpin y Linek decidieron emplear la teoría de relaciones para demostrar algunos de sus resultados en [1]. En particular, en el teorema 0.11.1 para demostrar **2 implica 3**, Arpin y Linek definieron una relación sobre $V(H)$ como sigue: $x R y$ si y sólo si $x = y$ o x y y pertenecen a un mismo camino cerrado. Arpin y Linek hicieron varias observaciones sobre cada clase de equivalencia y después probaron que todo subconjunto de clases de equivalencia tiene una clase de equivalencia mínima, lo cual les ayudó a concluir 3.

Notemos que como consecuencia del teorema 0.11.1 se obtiene el corolario 0.10.3 y el teorema 0.10.2, los cuales fueron probados por Reid en [41].

V_5 :

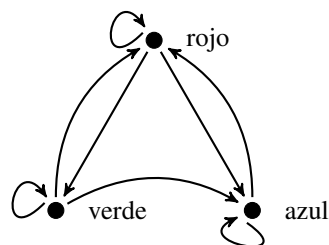


Figura 10

Introducción Histórica

Finalizada la caracterización de las digráficas en \mathcal{B}_2 , Arpin y Linek se propusieron a estudiar algunos teoremas concernientes a digráficas en \mathcal{B}_3 . En particular ellos probaron que la digráfica $V_5 = (\{\text{verde, azul, rojo}\}, \{(\text{verde, verde}), (\text{azul, azul}), (\text{rojo, rojo}), (\text{rojo, verde}), (\text{verde, rojo}), (\text{azul, rojo}), (\text{rojo, azul}), (\text{verde, azul})\})$ está en \mathcal{B}_3 (ver figura 10), lo cual implica que dos de las digráficas de la figura 11, a saber, $G_1 = (\{\text{verde, azul}\}, \{(\text{verde, verde}), (\text{azul, azul}), (\text{verde, azul}), (\text{azul, verde})\})$ y $G_3 = (\{\text{verde, azul}\}, \{(\text{verde, verde}), (\text{azul, azul}), (\text{verde, azul})\})$ también están en \mathcal{B}_3 (por el teorema 0.11.2, inciso 2). Como $G_2 = (\{\text{verde, azul}\}, \{(\text{verde, verde}), (\text{azul, azul})\})$ está en \mathcal{B}_3 (por teorema 0.9.1 de Sands, Sauer y Woodrow), se sigue que todas las digráficas con dos vértices pertenecen a \mathcal{B}_3 . Así, como consecuencia directa se obtiene el corolario 0.10.3, el cual fue probado por Reid.

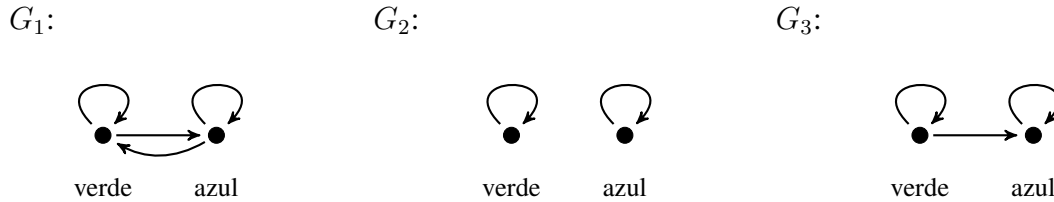


Figura 11: Todas las digráficas reflexivas con dos vértices.

Note que toda digráfica D contiene un subconjunto de vértices K tal que:

1. para cualquier par de vértices en K no existen trayectorias entre ellos, y
2. para cualquier vértice $x \in V(D) \setminus K$ existe $y \in K$ tal que hay una trayectoria de x hacia y .

Así, por nuestra parte podemos decir que nuevamente se verifica que G_1 está en \mathcal{B}_3 .

A continuación demostraremos directamente que G_3 está en \mathcal{B}_3 , para esto primero consideremos el siguiente lema el cual será de gran utilidad para nuestra demostración.

Lema 0.11.4. Sean D una digráfica G_3 -coloreada, $\mathfrak{C}(D)$ la cerradura de D y $\{x, y\} \subseteq V(D)$ dos vértices distintos. Entonces existe un xy - G_3 -camino en D si y sólo si existe un xy - G_3 -camino en $\mathfrak{C}(D)$.

Demostración

[\implies] Sea $C = (x = v_0, v_1, \dots, v_n = y)$ un xy - G_3 -camino en D .

Si C es monocromático, entonces $(x, y) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Así existe un xy - G_3 -camino en $\mathfrak{C}(D)$.

Supongamos que C no es monocromático. Entonces existe $v_i \in V(C)$ tal que $c(v_{i-1}, v_i) = \text{verde}$ y $c(v_i, v_{i+1}) = \text{azul}$. Puesto que $(\text{azul}, \text{verde}) \notin F(G_3)$, se sigue que (x, C, v_i) es monocromático de color verde (porque $c(v_{i-1}, v_i) = \text{verde}$) y (v_i, C, y) es monocromático de color azul (porque $c(v_i, v_{i+1}) = \text{azul}$). Lo que implica que $\{(x, v_i), (v_i, y)\} \subseteq F(\mathfrak{C}(D))$, $c(x, v_i) = \text{verde}$ y $c(v_i, y) = \text{azul}$. Así (x, v_i, y) es un G_3 -camino en $\mathfrak{C}(D)$.

[\impliedby] Sea $C = (x = v_0, v_1, \dots, v_n = y)$ un xy - G_3 -camino en $\mathfrak{C}(D)$. Sabemos que si existe un xy -camino monocromático de color k en $\mathfrak{C}(D)$, entonces existe un xy -camino monocromático de color k en D . Por lo tanto supongamos que C no es monocromático. Como C no es monocromático, existe $v_i \in V(C)$ tal que $c(v_{i-1}, v_i) = \text{verde}$ y $c(v_i, v_{i+1}) = \text{azul}$ (porque C es G_3 -camino). Con un razonamiento análogo al usado en la primera parte de la demostración de este lema obtenemos que (x, C, v_i) es monocromático de color verde en $\mathfrak{C}(D)$ y (v_i, C, y) es monocromático de color azul en $\mathfrak{C}(D)$. Por lo tanto existe un xv_i -camino monocromático de color verde en D , digamos C_1 , y existe un v_iy -camino monocromático de color azul en D , digamos C_2 . Por lo tanto $C_1 \cup C_2$ es un xy - G_3 -camino en D . ■

Del lema 0.11.4 se deduce lo siguiente: Si x y z son dos vértices distintos de D tales que existe un xz - G_3 -camino en D , entonces existe una de las siguientes trayectorias en $\mathfrak{C}(D)$.

1. $x \xrightarrow{\text{verde}} z$,
2. $x \xrightarrow{\text{azul}} z$,
3. $x \xrightarrow{\text{verde}} w \xrightarrow{\text{azul}} z$.

Sea G una digráfica G_3 -coloreada. $r \xrightarrow{\text{verde}} s$ ($r \xrightarrow{\text{azul}} s$) quiere decir que $(r, s) \in F(G)$ y $c(r, s) = \text{verde}$ (respectivamente $(r, s) \in F(G)$ y $c(r, s) = \text{azul}$).

Teorema 0.11.2. $G_3 \in \mathcal{B}_3$.

Demostración

Sea D una digráfica G_3 -coloreada. Demostraremos que D tiene G_3 -núcleo por caminos. Procederemos por inducción sobre $|V(D)|$.

Como toda digráfica G_3 -coloreada con 1 y 2 vértices tiene G_3 -núcleo por caminos, suponemos que si D' es una digráfica G_3 -coloreada con menos de p vértices, entonces D' tiene G_3 -núcleo por caminos.

Sea D una digráfica G_3 -coloreada con $p \geq 3$ vértices. Probaremos que $\mathfrak{C}(D) = G$ tiene G_3 -núcleo por caminos. Así, por el lema 0.11.4, se tiene que D tiene G_3 -núcleo por caminos.

Sean G' la subdigráfica generadora de G tal que $F(G') = \{(u,v) \in F(G) \mid c(u,v) = \text{azul}\}$ y B una componente fuertemente conexa inicial de G' .

Sea $K = \{y \in V(G) \mid \text{existe } u \in V(B) \text{ tal que } y \xrightarrow{\text{verde}} u\}$.

Consideremos dos casos.

Caso 1. $V(G) \setminus (K \cup V(B)) = \emptyset$.

En este caso afirmamos que $\{x\}$ es un G_3 -núcleo por caminos de G para cada $x \in V(B)$.

Sea $x \in V(B)$. Como $\{x\}$ es un conjunto G_3 -independiente por caminos en G , sólo resta probar que $\{x\}$ es un conjunto G_3 -absorbente por caminos en G .

Sea $y \in V(G) \setminus \{x\}$. Si $y \in V(B)$, entonces $y \xrightarrow{\text{azul}} x$, porque $\{x, y\} \subseteq V(B)$ y B es fuertemente conexa (ver figura 12).

Supongamos que $y \in K$. Entonces existe $u \in V(B)$ tal que $y \xrightarrow{\text{verde}} u$. Si $u = x$, entonces existe un G_3 -camino de y hacia x en G . Supongamos que $u \neq x$. Entonces $u \xrightarrow{\text{azul}} x$, porque $\{u, x\} \subseteq V(B)$ y B es fuertemente conexa (ver figura 12). Lo que implica que $y \xrightarrow{\text{verde}} u \xrightarrow{\text{azul}} x$ es un G_3 -camino de y hacia x en G . Por lo tanto $\{x\}$ es un G_3 -núcleo por caminos de G .

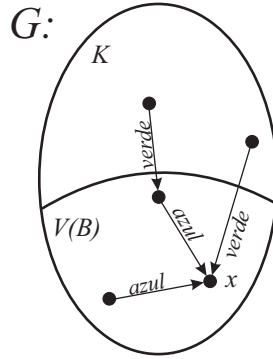


Figura 12

Caso 2. $V(G) \setminus (K \cup V(B)) \neq \emptyset$.

Como $G'' = G \setminus (K \cup V(B))$ es una digráfica G_3 -coloreada con menos de p vértices, de la hipótesis de inducción se sigue que G'' tiene un G_3 -núcleo por caminos, digamos S .

Afirmación 1. S es un conjunto G_3 -independiente por caminos en G .

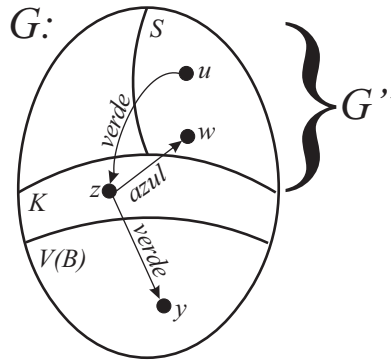


Figura 13

Procediendo por contradicción, supongamos que existen u y w en S tales que hay un G_3 -camino de u hacia w en G . Como S es G_3 -independiente en G'' , de la construcción de G'' se sigue que $u \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{azul}} w$ para algún $z \in V(G) \setminus V(G'')$. Puesto que $u \notin K$, de la definición de K se tiene que $z \notin V(B)$. Así $z \in K$, lo que implica que existe $y \in V(B)$ tal que $z \xrightarrow{\text{verde}} y$ (por

Introducción Histórica

definición de K). Entonces $u \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{verde}} y$. Por lo tanto $u \xrightarrow{\text{verde}} y$, y por consecuencia $u \in K$, lo cual contradice que $u \notin K$ (ver figura 13).

Por lo tanto S es un conjunto G_3 -independiente por caminos en G .

Consideremos dos subcasos sobre $V(B)$.

Caso 2.1. Para cada $x \in V(B)$ existe $s \in S$ tal que existe un G_3 -camino de x hacia s en G .

En este caso se sigue que S es un G_3 -núcleo por caminos de G .

Como S es un conjunto G_3 -independiente por caminos en G , sólo resta probar que S es un conjunto G_3 -absorbente por caminos en G .

Sea $h \in V(G) \setminus S$. Si $h \in V(G'') \setminus S$, entonces existe un G_3 -camino de h hacia S en G (porque S es G_3 -núcleo por caminos de G'') (ver figura 14).

Si $h \in V(B)$, entonces existe un G_3 -camino de h hacia S en G (por la suposición de este caso) (ver figura 14).

Si $h \in K$, entonces existe $w \in V(B)$ tal que $h \xrightarrow{\text{verde}} w$. Por otro lado, como existe $s \in S$ tal que hay un G_3 -camino de w hacia s en G , digamos P , y $\{(\text{verde}, \text{verde}), (\text{verde}, \text{azul})\} \subseteq F(G_3)$, se sigue que existe un G_3 -camino de h hacia s en G , a saber $(h, w) \cup P$, con $c(h, w) = \text{verde}$ (ver figura 14).

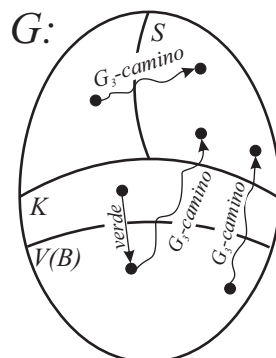


Figura 14

Por lo tanto S es un G_3 -núcleo por caminos de G .

Caso 2.2. Existe $x_0 \in V(B)$ tal que no hay G_3 -caminos de x_0 hacia S en G .

En este caso afirmamos lo siguiente.

Afirmación 2. No hay G_3 -caminos de S hacia x_0 en G .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $s \in S$ tal que hay un G_3 -camino de s hacia x_0 en G . Como $s \notin K$ y B es una componente fuertemente conexa inicial de G' , se tiene que $(s, x_0) \notin F(G)$. Por lo tanto $s \xrightarrow{\text{verde}} w \xrightarrow{\text{azul}} x_0$ para algún $w \in V(G)$.

Como $x_0 \in V(B)$ y B es una componente fuertemente conexa inicial de G' , se sigue que $w \in V(B)$, lo que implica que $s \in K$, en contradicción con el hecho que $s \notin K$.

Por lo tanto no hay G_3 -caminos de S hacia x_0 en G .

Afirmación 3. $\{x_0\} \cup S$ es un G_3 -núcleo por caminos de G .

De la suposición del Caso 2.2 y la afirmación 2 se tiene que $\{x_0\} \cup S$ es un conjunto G_3 -independiente por caminos en G . Por lo tanto sólo resta probar que $\{x_0\} \cup S$ es un conjunto G_3 -absorbente por caminos en G .

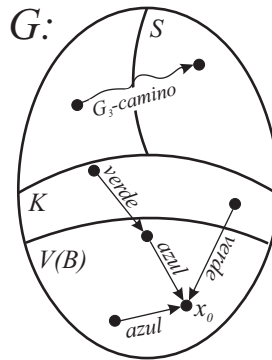


Figura 15

Sea $h \in V(G) \setminus (\{x_0\} \cup S)$. Si $h \in V(G') \setminus S$, entonces existe un G_3 -camino de h hacia S en G (recuerde que S es un G_3 -núcleo por caminos de G') (ver figura 15).

Si $h \in V(B) \setminus \{x_0\}$, entonces existe un camino monocromático de color azul de h hacia x_0

Introducción Histórica

en G (porque B es una componente fuertemente conexa de G'), el cual es un G_3 -camino en G (ver figura 15).

Si $h \in K$, entonces existe $w \in V(B)$ tal que $h \xrightarrow{\text{verde}} w$. Si $w = x_0$, entonces existe un G_3 -camino de h hacia $(\{x_0\} \cup S)$ en G . Supongamos que $w \neq x_0$. Entonces $w \xrightarrow{\text{azul}} x_0$ (porque B es fuertemente conexa en G'), lo que implica que existe un G_3 -camino de h hacia x_0 en G , a saber $h \xrightarrow{\text{verde}} w \xrightarrow{\text{azul}} x_0$ (ver figura 15).

Por lo tanto $\{x_0\} \cup S$ es un conjunto G_3 -absorbente por caminos en G . Así $\{x_0\} \cup S$ es un G_3 -núcleo por caminos de G . ■

En [1] Arpin y Linek no dejaron pasar la oportunidad de dar una nueva prueba, para el caso finito, del teorema de Sands, Sauer y Woodrow. Con ello probaron nuevamente que $G_2 \in \mathcal{B}_3$. Para dicha demostración ellos consideraron el siguiente teorema que trabaja sobre dos ordenes parciales extraídos naturalmente de la prueba original del teorema de Sands, Sauer y Woodrow.

Teorema 0.11.3. Sean \leq_{rojo} , \leq_{azul} dos ordenes parciales sobre el conjunto finito X . Entonces existe un conjunto $S \subseteq X$ que es un conjunto independiente en cada orden parcial y tiene la propiedad que para cada $x \in X \setminus S$ se cumple al menos una de las siguientes $x \leq_{\text{rojo}} s$ o $x \leq_{\text{azul}} s$ para alguna $s \in S$.

Teorema 0.11.4. (Sands, Sauer, Woodrow) Sea H la digráfica con conjunto de vértices $V(H) = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ y conjunto de flechas $F(H) = \{(\text{rojo}, \text{rojo}), (\text{azul}, \text{azul})\}$, entonces $H \in \mathcal{B}_3$.

Puesto que todas las digráficas reflexivas con dos vértices están en \mathcal{B}_3 , Arpin y Linek se preguntaron que sucede con las digráficas reflexivas con tres vértices o más. Para dar respuesta a esto, ellos exhibieron un resultado más general que nos da una idea de como debe ser la estructura de una digráfica en \mathcal{B}_3 . Dicho teorema es el siguiente:

Teorema 0.11.5. Sean H una digráfica y $W = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ un camino en H tal que:

1. para toda x_j , con $0 \leq j \leq k - 1$, hay un color $c_j \in V(H)$ tal que $(x_j, c_j) \notin F(H)$,
2. $(x_k, x_0) \notin F(H)$.

Entonces $H \notin \mathcal{B}_3$.

La demostración del teorema 0.11.5 se caracteriza principalmente por la construcción de una digráfica D H -coloreada sin H -núcleo por caminos, definida como sigue:

$$V(D) = \{v_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_{k+1}\} \cup \{\infty\}, \text{ y}$$

$$F(D) = \{(v_{ij}, v_{i(j+1)}) \mid 0 \leq j \leq k-1\} \cup \{(v_{ik}, v_{(i+1)0}) \mid i \in \mathbb{Z}_3\} \cup$$

$$\{(v_{ij}, \infty) \mid i \in \mathbb{Z}_3, 1 \leq j \leq k\}.$$

Como hay 16 digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices, con la ayuda del teorema 0.11.5 fue posible excluir de \mathcal{B}_3 a 7 de dichas digráficas (ver figura 16). Luego del lema 0.11.2, apartado 3, se sigue que las digráficas con tres vértices que se exhiben en la figura 17 están en \mathcal{B}_3 .

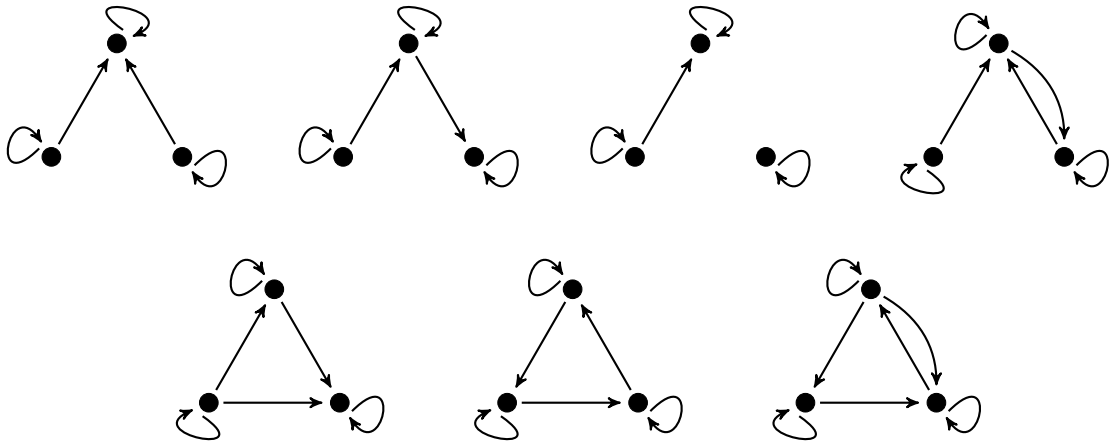


Figura 16: digráficas con tres vértices que no pertenecen a \mathcal{B}_3 , por el teorema 0.11.5.

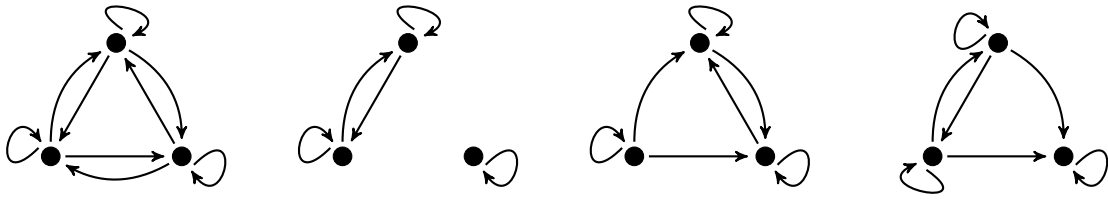


Figura 17: Digráficas con tres vértices que están en \mathcal{B}_3 como consecuencia del lema 0.11.2, apartado 3.

Por otro lado, Arpin y Linek probaron que la digráfica con conjunto de vértices $\{r, b, g\}$ y conjunto de flechas $\{(r,r), (b,b), (g,g), (r,b), (r,g)\}$ no está en \mathcal{B}_3 , sin embargo dicha digráfica si está en \mathcal{B}_2 (ver figura 18).

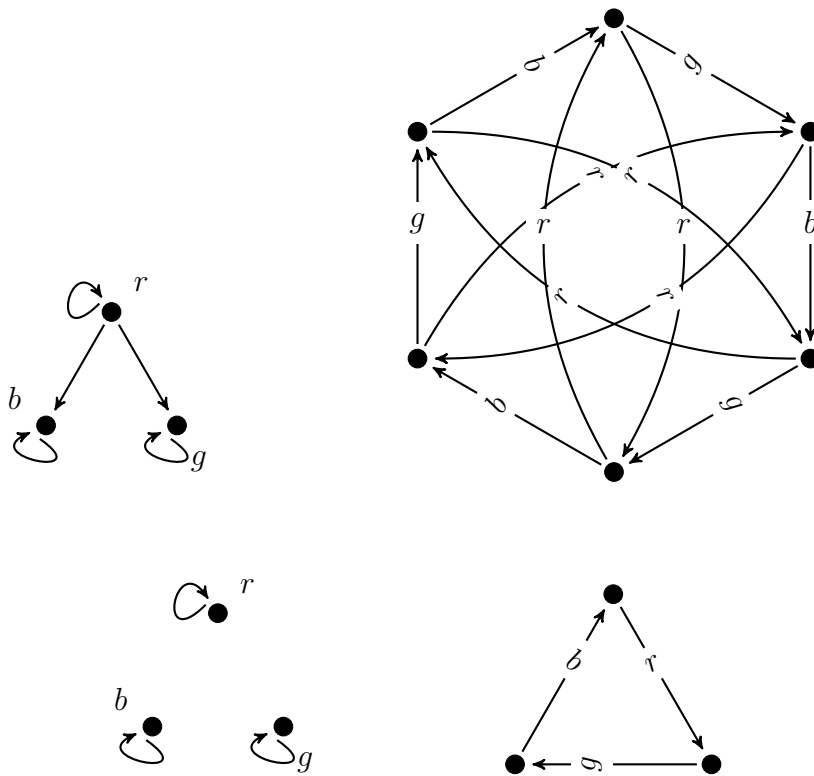


Figura 18: Dos digráficas con tres vértices que no están en \mathcal{B}_3 , con sus respectivas digráficas coloreadas en sus flechas con los vértices de la digráfica correspondiente, las cuales no tienen H -núcleo por caminos.

Así ellos probaron que \mathcal{B}_3 está contenido propiamente en \mathcal{B}_2 . También probaron que la digráfica con conjunto de vértices $\{r, b, g\}$ y conjunto de flechas $\{(r,r), (b,b), (g,g)\}$ no está en \mathcal{B}_3 (ver figura 18). Por lo tanto, Arpin y Linek excluyeron de \mathcal{B}_3 a 9 digráficas reflexivas con tres vértices, de las 16 no isomorfas que hay.

V_5 :

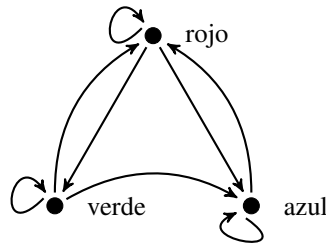


Figura 19

En [1] Arpin y Linek utilizaron la teoría de relaciones para probar que la digráfica V_5 (ver figura 19) está en \mathcal{B}_3 . Ellos definieron tres cuasiordenes sobre los vértices de una digráfica V_5 -coloreada para probar que ésta tiene V_5 -núcleo por caminos. Para hacer su prueba un poco más sencilla, Arpin y Linek definieron sobre una digráfica V_5 -coloreada G dos operaciones como sigue:

1. Si $x \xrightarrow{rojo} y$, entonces añadimos las flechas $x \xrightarrow{azul} y$ y $x \xrightarrow{verde} y$ (si dichas flechas no existen).
2. Si existe un V_5 -camino $x \xrightarrow{c} z \xrightarrow{c'} \dots \xrightarrow{c''} u \xrightarrow{c} y$, entonces añadimos la flecha $x \xrightarrow{c} y$ (si dicha flecha no existe).

Recordemos que si G es una digráfica V_5 -coloreada, $x \xrightarrow{verde} y$ quiere decir que $(x,y) \in F(G)$ y $c(x,y) = verde$. Análogamente se define $x \xrightarrow{azul} y$ y $x \xrightarrow{rojo} y$

Como G es finita se puede aplicar dichas operaciones hasta que ya no se pueda agregar nuevas flechas. A la digráfica resultante le llamaron la cerradura de G , respecto a las operaciones 1 y 2, a dicha digráfica V_5 -coloreada la denotaron por \overline{G} . De la definición de cerradura se deduce el siguiente lema.

Lema 0.11.5. *Sea G una digráfica V_5 -coloreada.*

1. *Existe un xy - V_5 -camino en G si y sólo si existe un xy - V_5 -camino en \overline{G} .*
2. *Si $x \neq y$ y hay un V_5 -camino de x hacia y en G , entonces en \overline{G} existe una de las siguientes trayectorias:*

$$(a) \ x \xrightarrow{\text{verde}} y,$$

$$(b) \ x \xrightarrow{\text{azul}} y,$$

$$(c) \ x \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{azul}} y,$$

$$(d) \ x \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} y.$$

Aquí vamos a presentar una demostración original, sin considerar la teoría de relaciones, que muestra nuevamente que V_5 está en \mathcal{B}_3 . Antes de ver la prueba, consideremos lo siguiente:

Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. En [1] Arpin y Linek definieron a la **digráfica de H -caminos** de D , denotada por $\mathcal{R}_H(D)$, como sigue:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{R}_H(D)) &= V(D) \\ F(\mathcal{R}_H(D)) &= \{(u,v) \mid \text{existe un } H\text{-camino de } u \text{ hacia } v \text{ en } D\} \end{aligned}$$

Arpin y Linek observaron que si $H \in \mathcal{B}_3$, entonces $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo para cualquier digráfica D H -coloreada. Además de esto, podemos afirmar que si H es una digráfica arbitraria y D una digráfica H -coloreada, entonces $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo si y sólo si D tiene H -núcleo por caminos.

Teorema 0.11.6. $V_5 \in \mathcal{B}_3$.

Demostración

Sea D una digráfica V_5 -coloreada. Demostraremos que D tiene V_5 -núcleo por caminos. Procederemos por inducción sobre $|V(D)|$.

Como toda digráfica V_5 -coloreada con 1 y 2 vértices tiene V_5 -núcleo por caminos, suponemos que si D' es una digráfica V_5 -coloreada con menos de p vértices, entonces D' tiene

V_5 -núcleo por caminos.

Sea D una digráfica V_5 -coloreada con $p \geq 3$ vértices. Probaremos que \overline{D} tiene V_5 -núcleo por caminos. Así, por el lema 0.11.5 se tiene que D tiene V_5 -núcleo por caminos.

Sean G' la subdigráfica generadora de \overline{D} tal que $F(G') = \{(u,v) \in F(G) \mid c(u,v) = \text{azul}\}$ y B una componente fuertemente conexa inicial G' .

Sea $K = \{y \in V(\overline{D}) \mid \text{existe } u \in V(B) \text{ tal que } y \xrightarrow{\text{verde}} u\}$.

Consideremos dos casos.

Caso 1. $V(\overline{D}) \setminus (K \cup V(B)) = \emptyset$.

En este caso afirmamos que $\{x\}$ es un G_3 -núcleo por caminos de G para cada $x \in V(B)$.

Sea $x \in V(B)$. Como $\{x\}$ es un conjunto V_5 -independiente por caminos en \overline{D} , sólo resta probar que $\{x\}$ es un conjunto V_5 -absorbente por caminos en \overline{D} .

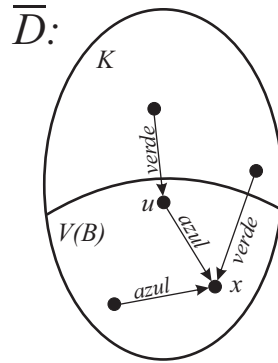


Figura 20

Sea $y \in V(\overline{D}) \setminus \{x\}$. Si $y \in V(B)$, entonces $y \xrightarrow{\text{azul}} x$ (porque $\{x, y\} \subseteq V(B)$ y B es fuertemente conexa) (ver figura 20).

Supongamos que $y \in K$. Entonces existe $u \in V(B)$ tal que $y \xrightarrow{\text{verde}} u$. Si $u = x$, entonces existe un V_5 -camino de y hacia x en \overline{D} . Supongamos que $u \neq x$. Entonces $u \xrightarrow{\text{azul}} x$ (porque

Introducción Histórica

$\{u, x\} \subseteq V(B)$ y B es fuertemente conexa). Lo que implica que $y \xrightarrow{\text{verde}} u \xrightarrow{\text{azul}} x$ es un V_5 -camino de y hacia x en \overline{D} (ver figura 20).

Por lo tanto $\{x\}$ es un V_5 -núcleo por caminos de \overline{D} .

Caso 2. $V(\overline{D}) \setminus (K \cup V(B)) \neq \emptyset$.

Como $G'' = \overline{D} \setminus (K \cup V(B))$ es una digráfica V_5 -coloreada con menos de p vértices, de la hipótesis de inducción se sigue que G'' tiene un V_5 -núcleo por caminos, digamos S .

Afirmación 1. Si existe un V_5 -camino de x hacia y en \overline{D} , para algún $\{x, y\} \subseteq S$, entonces $x \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} y$ en \overline{D} .

Como S es V_5 -independiente en G'' se sigue que no existen flechas entre x y y . Luego, no puede suceder que $x \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{azul}} y$ en \overline{D} , de otro modo, como S es V_5 -independiente en G'' se sigue que $z \notin V(G'')$. Así, $z \in (K \cup V(B))$. Puesto que $x \notin K$, de la definición de K se tiene que $z \notin V(B)$. Así $z \in K$, lo que implica que existe $w \in V(B)$ tal que $x \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{verde}} w$ en \overline{D} (por definición de K). Por lo tanto $x \xrightarrow{\text{verde}} w$ en \overline{D} , lo que implica que $x \in K$, en contradicción con el hecho que $x \notin K$ (ver figura 21).

Por lo tanto $x \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} y$ en \overline{D} .

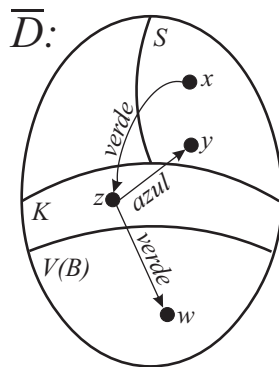


Figura 21

Sean $\mathcal{R}_{V_5}(\overline{D})$ la digráfica de V_5 -caminos de \overline{D} y G''' la subdigráfica de $\mathcal{R}_{V_5}(\overline{D})$ inducida

por S .

Afirmación 2. G''' es una digráfica transitiva.

Sea $\{u, v, w\} \subseteq V(G''')$ tal que $\{(u,v), (v,w)\} \subseteq F(G''')$. Entonces de la definición de $\mathcal{R}_{V_5}(\bar{D})$ se tiene que existe un V_5 -camino de u hacia v en \bar{D} y existe un V_5 -camino de v hacia w en \bar{D} . Luego de la afirmación 1 se sigue que $u \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} v$ en \bar{D} y $v \xrightarrow{\text{azul}} z'_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z'_2 \xrightarrow{\text{verde}} w$ en \bar{D} . Puesto que $(\text{verde}, \text{azul}) \in F(V_5)$ se concluye que existe un V_5 -camino de u hacia w en \bar{D} . Así $(u,w) \in F(\mathcal{R}_{V_5}(\bar{D}))$, lo que implica que $(u,w) \in F(G''')$.

Sea S_1 un núcleo de G''' , el cual existe porque G''' es una digráfica transitiva.

Afirmación 3. S_1 es un conjunto V_5 -independiente por caminos en \bar{D} .

Se sigue del hecho de que S_1 es un conjunto independiente en $\mathcal{R}_{V_5}(\bar{D})$.

Afirmación 4. Para cada $s \in V(G''') \setminus S_1$ existe un sS_1 - V_5 -camino en \bar{D} .

Sea $s \in V(G''') \setminus S_1$.

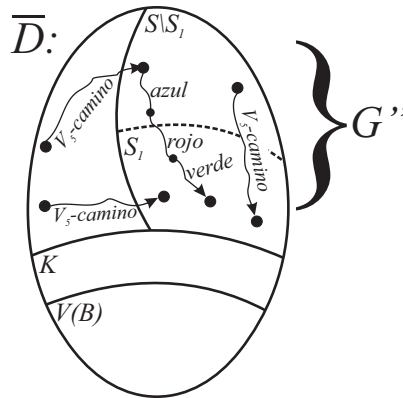


Figura 22

Si $s \in S \setminus S_1$, entonces hay un V_5 -camino de s hacia S_1 en \bar{D} (porque S_1 es núcleo de G''' y $V(G''') = S$) (ver figura 22).

Introducción Histórica

Si $s \in V(G''') \setminus S$, entonces existe $w \in S$ tal que hay un V_5 -camino de s hacia w en \overline{D} , digamos P , (porque S es un V_5 -núcleo por caminos de G'''). Si $w \in S_1$, entonces existe un V_5 -camino de s hacia S_1 en \overline{D} . Si $w \notin S_1$, entonces existe $z \in S_1$ tal que $w \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} z$ es un V_5 -camino de w hacia z en \overline{D} (debido a que S_1 es núcleo de G''' y la afirmación 1), llamémosle a dicho V_5 -camino P' . Como $\{(\text{rojo}, \text{azul}), (\text{verde}, \text{azul}), (\text{azul}, \text{azul})\} \subseteq F(V_5)$, se sigue que hay un V_5 -camino de s hacia z en \overline{D} , a saber $P \cup P'$ (ver figura 22).

Por lo tanto existe un V_5 -camino de s hacia S_1 en \overline{D} .

Ahora consideremos dos casos sobre $V(B)$.

Caso 2.1. Para cada $x \in V(B)$ existe un V_5 -camino en \overline{D} de x hacia algún $s \in S_1$.

En este caso afirmamos que S_1 es un V_5 -núcleo por caminos de \overline{D} .

Como S_1 es un conjunto V_5 -independiente por caminos en \overline{D} (por afirmación 3), sólo resta probar que S_1 es un conjunto V_5 -absorbente por caminos en \overline{D} .

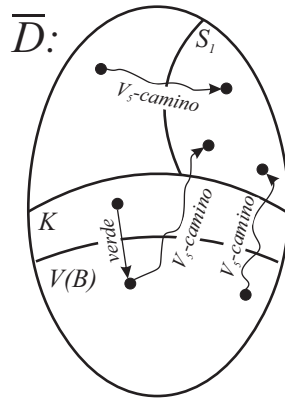


Figura 23

Sea $h \in V(\overline{D}) \setminus S_1$. Si $h \in V(G''') \setminus S_1$, entonces existe un V_5 -camino de h hacia S_1 en \overline{D} (por la afirmación 4) (ver figura 23).

Si $h \in V(B)$, entonces existe un V_5 -camino de h hacia S_1 en \overline{D} por la suposición de este caso (ver figura 23).

Si $h \in K$, entonces existe $w \in V(B)$ tal que $h \xrightarrow{\text{verde}} w$. Por otro lado, como existe $s \in S_1$ tal que hay un V_5 -camino de w hacia s en \overline{D} y $\{(verde, verde), (verde, azul), (verde, rojo)\} \subseteq F(V_5)$, se sigue que existe un V_5 -camino de h hacia s en \overline{D} (ver figura 23). Así, existe un V_5 -camino de h hacia S_1 en \overline{D} .

Por lo tanto S_1 es un V_5 -núcleo por caminos de \overline{D} .

Caso 2.2. Existe $x_0 \in V(B)$ tal que no hay V_5 -caminos de x_0 hacia S_1 en \overline{D} .

En este caso afirmamos lo siguiente.

Afirmación 2.1. Sea $s \in S_1$. Si existe un V_5 -camino de s hacia x_0 en \overline{D} , entonces

$$s \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} x_0.$$

Como $s \notin K$, se sigue que no existe una flecha de s hacia x_0 con color verde en \overline{D} . Como $s \notin V(B)$ y B es una componente fuertemente conexa inicial de G' , se sigue que no existe una flecha con color azul de s hacia x_0 en \overline{D} . Luego, $s \xrightarrow{\text{verde}} z \xrightarrow{\text{azul}} x_0$ no es posible, de otro modo, como B es una componente fuertemente conexa inicial de G' se tiene que $z \in V(B)$, lo que implica que $s \in K$, lo cual contradice que $s \in S_1 \subseteq V(G'') = V(\overline{D}) \setminus (K \cup V(B))$. Así,

$$s \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} x_0.$$

Sea $S_2 = \{s \in S_1 \mid \text{existe un } V_5\text{-camino de } s \text{ hacia } x_0 \text{ en } \overline{D}\}$.

Afirmación 2.2. $(S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\}$ es un V_5 -núcleo por caminos de \overline{D} .

De la suposición del caso 2.2 y la definición de S_2 se tiene que $(S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\}$ es un conjunto V_5 -independiente por caminos en \overline{D} . Por lo tanto, sólo resta probar que $(S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\}$ es un conjunto V_5 -absorbente por caminos en \overline{D} .

Sea $h \in V(\overline{D}) \setminus ((S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\})$.

Si $h \in S_2$ se tiene que existe un V_5 -camino de h hacia x_0 en \overline{D} (por definición de S_2).

Si $h \in V(G'') \setminus S_1$, de la afirmación 4 se tiene que existe $s \in S_1$ tal que hay un hs - V_5 -camino en \overline{D} , digamos P (ver figura 24). Si $s \in (S_1 \setminus S_2)$, entonces existe un V_5 -camino de h hacia

Introducción Histórica

$(S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\}$ en \bar{D} .

Si $s \in S_2$, como existe un sx_0 - V_5 -camino, digamos P' , de la forma $s \xrightarrow{\text{azul}} z_1 \xrightarrow{\text{rojo}} z_2 \xrightarrow{\text{verde}} x_0$ (por definición de S_2 y la afirmación 2.1) y $\{(verde, azul), (rojo, azul), (azul, azul)\} \subseteq F(V_5)$, entonces hay un V_5 -camino de h hacia x_0 en \bar{D} , a saber $P \cup P'$.

Si $h \in ((K \cup V(B)) \setminus \{x_0\})$, claramente existe un V_5 -camino de h hacia x_0 en \bar{D} (ver figura 24).

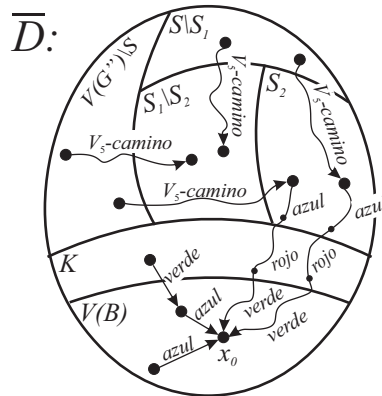


Figura 24

Por lo tanto, $(S_1 \setminus S_2) \cup \{x_0\}$ es un V_5 -núcleo por caminos de \bar{D} . ■

Por lo tanto, como hay 16 digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices, de las cuales 14 ya fueron estudiadas, Arpin y Linek dejarón como problema abierto ver si las siguientes digráficas están en \mathcal{B}_3 (ver figura 25). Cabe mencionar que aún no se ha encontrado una respuesta favorable o un contraejemplo para cada una de las digráficas que se presentan en la figura 25.

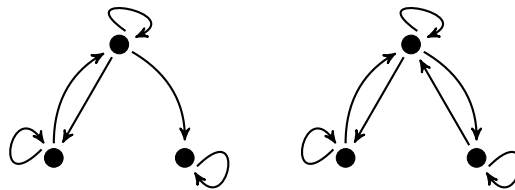


Figura 25: Las únicas digráficas con tres vértices que no se sabe si están en \mathcal{B}_3 .

Arpin y Linek también probaron que la digráfica con conjunto de vértices $\{u, v, b, g\}$ y conjunto de flechas $\{(u,b), (v,g), (u,g), (g,u), (b,v), (v,b)\}$ no está en \mathcal{B}_3 (ver figura 26).

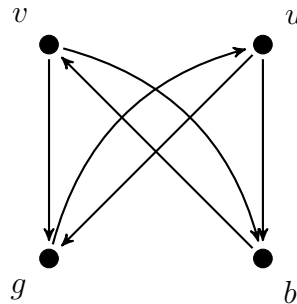


Figura 26: Digráfica con cuatro vértices que no pertenece a \mathcal{B}_3

Así podemos concluir lo siguiente, respecto a las digráficas reflexivas con tres vértices: de las 16 digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices que hay, en la figura 25 exhibimos a todas las digráficas que no se sabe si están en \mathcal{B}_3 . Posteriormente en la figura 27 exhibimos a todas las digráficas que se sabe que pertenecen a \mathcal{B}_3 . Finalmente en la figura 28 exhibimos a todas las digráficas que se sabe que no pertenecen a \mathcal{B}_3 .

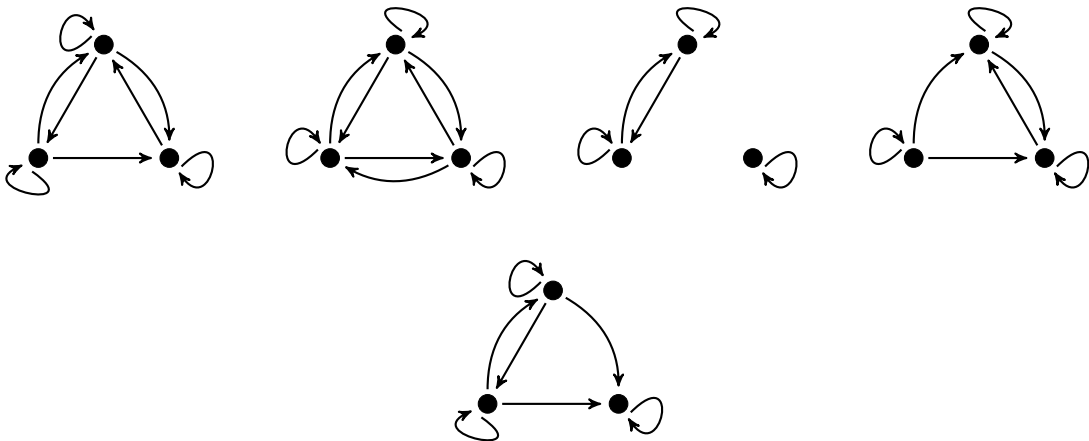


Figura 27: Todas las digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices que se sabe que si pertenecen a \mathcal{B}_3 .

Introducción Histórica

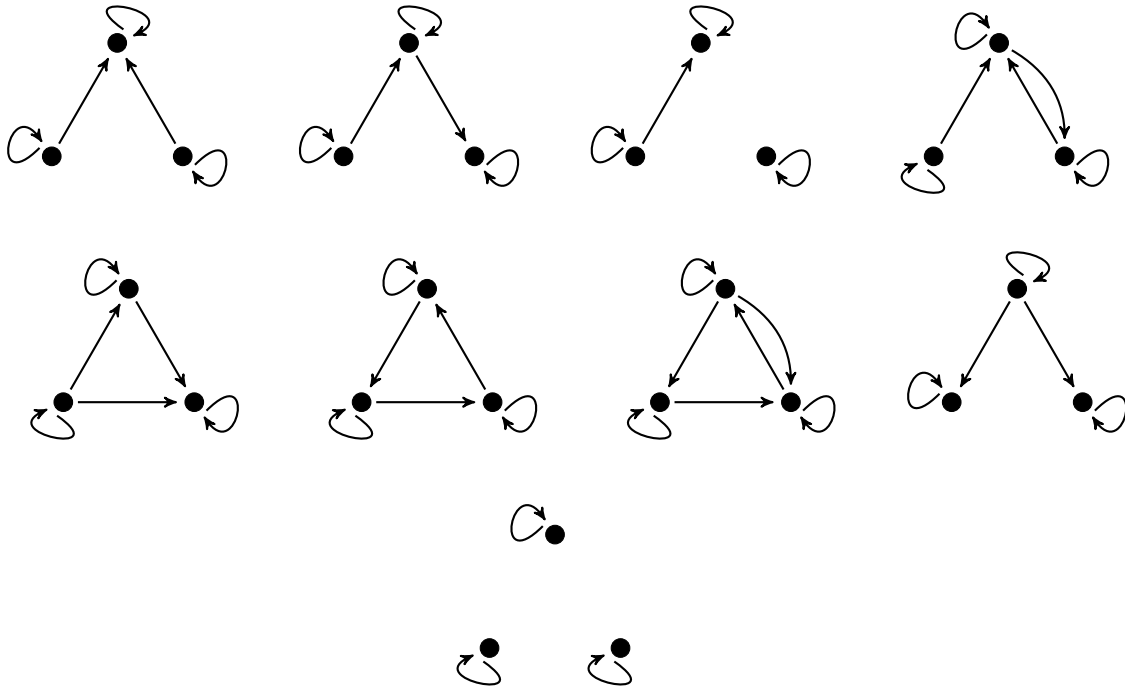


Figura 28: Todas las digráficas reflexivas no isomorfas con tres vértices que se sabe que no pertenecen a \mathcal{B}_3 .

Luego de su breve estudio sobre algunas digráficas en \mathcal{B}_3 , Arpin y Linek estudiaron algunas de las propiedades que tienen las digráficas en \mathcal{B}_1 . Dichos resultados son los siguientes.

Teorema 0.11.7. $H \in \mathcal{B}_1$ si y sólo si $H^{-1} \in \mathcal{B}_1$ (con H^{-1} la digráfica obtenida de H al cambiar la orientación de cada flecha).

Teorema 0.11.8. Sea H una digráfica. Si $|V(H)| \leq 4$, entonces $H \in \mathcal{B}_1$ si y sólo si $H \in \mathcal{B}_2$.

Note que del teorema 0.11.1 y del teorema 0.11.8 se sigue que $t_c(D_i) \geq 2$ para cada digráfica D_i de la figura 7.

Notemos que el resultado del teorema 0.10.2 (obtenido por Reid en [41]) es una consecuencia directa del teorema 0.11.8.

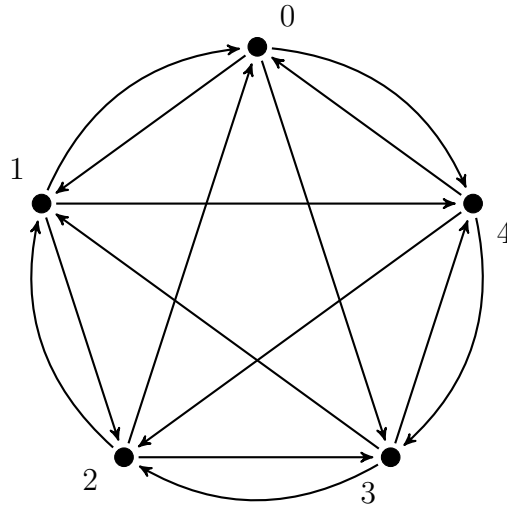


Figura 29

Ellos también probaron que la digráfica A_5 (ver figura 29) con conjunto de vértices \mathbb{Z}_5 y conjunto de flechas $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \setminus \{(0,2), (1,3), (2,4), (3,0), (4,1)\}$ está en \mathcal{B}_1 . Más aún, A_5 es la digráfica con 5 vértices que tiene el máximo número de flechas tal que $A_5 \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2$.

Posteriormente Arpin y Linek concluyeron su breve estudio de las digráficas en \mathcal{B}_1 con el siguiente teorema.

Teorema 0.11.9. *Las siguientes propiedades se cumplen para \mathcal{B}_1 .*

1. Si H está en \mathcal{B}_1 y H_1 es una subdigráfica inducida de H , entonces $H_1 \in \mathcal{B}_1$.
Si $V(H_2) = V(H)$ y $F(H) \subseteq F(H_2)$, entonces $H_2 \in \mathcal{B}_1$.
2. $H \in \mathcal{B}_1$ si y sólo si $H^{-1} \in \mathcal{B}_1$.
3. Si $H_1 \in \mathcal{B}_1$ y $H_2 \in \mathcal{B}_2$, entonces $H_1 \bullet H_2 \in \mathcal{B}_1$ y $H_2 \bullet H_1 \in \mathcal{B}_1$.

Finalmente Arpin y linek dejaron abierto el problema de completar la caracterización de las digráficas en \mathcal{B}_1 y en \mathcal{B}_3 , el cual sigue pendiente hasta la fecha. Ellos concluyeron su trabajo dejando una lista de varios problemas abiertos muy interesantes.

0.12 H -núcleos por caminos y H -núcleos

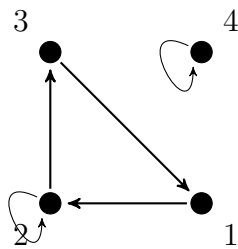
En [12] H. Galeana Sánchez y P. Delgado Escalante, motivadas por el trabajo realizado por Arpin y Linek en [1], introdujeron el concepto de H -núcleo, el cual se define como sigue:

Definición 0.12.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Decimos que $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo si:

1. Para cada $u \in V(D) \setminus N$ existe $v \in N$ tal que hay una uv - H -trayectoria en D (N es H -absorbente), y
2. para cada par de vértices distintos en N no existen H -trayectorias entre ellos en D (N es H -independiente).

Recordemos que como la existencia de un H -camino entre dos vértices no garantiza la existencia de una H -trayectoria entre dichos vértices y la unión de un uv - H -camino con un vw - H -camino no necesariamente es un uw - H -camino, en [1] Arpin y Linek prefirieron trabajar con H -caminos en lugar de H -trayectorias. Por lo tanto con este recordatorio podemos decir que las definiciones de H -núcleo por caminos y H -núcleo son totalmente independientes.

H :



D :

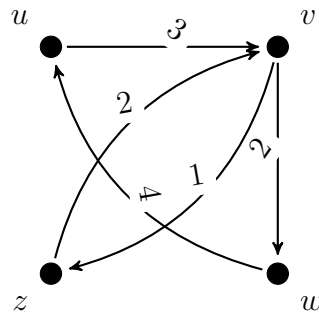
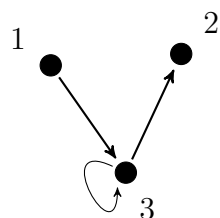


Figura 30: Una digráfica H -coloreada con H -núcleo por caminos y sin H -núcleo.

0.12 H -núcleos por caminos y H -núcleos

En la digráfica D de la figura 30 tenemos que $\{w\}$ es un H -núcleo por caminos en D porque (u, v, z, v, w) es un H -camino generador en D que termina en w . Por otro lado, es fácil verificar que todo conjunto H -independiente en D es de cardinalidad 1, pero un vértice no es H -absorbente en D .

H :



D :

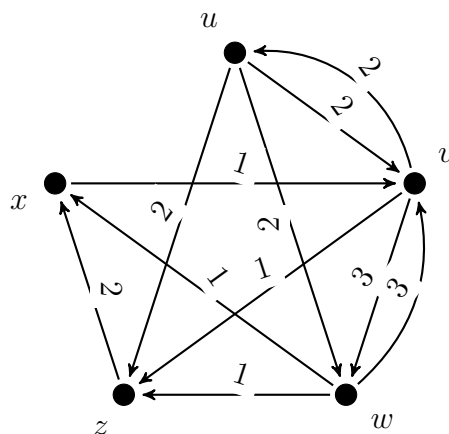


Figura 31: Una digráfica H -coloreada con H -núcleo y sin H -núcleo por caminos.

En la figura 31 tenemos que $\{u, x\}$ es un H -núcleo de D . Es fácil ver que todo conjunto H -independiente por caminos en D es de cardinalidad 1, ya que (x, v, w, v, u) es un H -camino entre x y u en D , pero un vértice no es H -absorbente por caminos en D .

Núcleos por trayectorias monocromáticas y la digráfica de clases cromáticas

En este capítulo veremos nuevos resultados que muestran la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas, para esto nuestro estudio será sobre la estructura de la digráfica de clases cromáticas de una digráfica m -coloreada y sobre la digráfica de clases cromáticas de cada componente fuertemente conexa de una digráfica m -coloreada.

Primero demostraremos que si D es una digráfica m -coloreada y existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que:

1. $\mathfrak{C}(D[V_1])$ es una digráfica núcleo perfecta,
2. $D[V_2]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas,
3. $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Luego probaremos que si D es una digráfica m -coloreada tal que la cerradura de cada una de sus componentes fuertemente conexas es una digráfica núcleo perfecta, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Posteriormente como corolarios obtendremos lo siguiente: (1) Si D es una digráfica m -coloreada tal que la digráfica de clases cromáticas de cada una de sus componentes fuertemente conexas es una digráfica bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. (2) Si D es una digráfica m -coloreada tal que todo camino cerrado en D es 2-coloreado, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En [28] H. Galeana Sánchez probó lo siguiente:

1. Sea D una digráfica m -coloreada tal que:

- (a) $|\xi(v)| \leq 2$ para cada $v \in V(D)$.
- (b) existe un color fijo c_i tal que $c_i \in \xi(v)$ para cada $v \in V(D)$.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

2. Sea D una digráfica m -coloreada tal que:

- (a) $|\xi(v)| \leq 2$ para cada $v \in V(D)$.
- (b) existen dos colores fijos c_i y c_j tal que $|\{c_i, c_j\} \cap \xi(v)| = 1$ para cada $v \in V(D)$.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En este capítulo daremos una generalización de los dos resultados anteriores.

Recordemos que H. Galeana Sánchez probó en [28] que si $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Daremos una extensión de este resultado como sigue: Sean D una digráfica m -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases cromáticas. Si $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Posteriormente, como consecuencia de dicho resultado probaremos que si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo, el cual es el famoso teorema de Richardson.

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

Teorema 1.1.1. *Sea D una digráfica m -coloreada. Si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que:*

1. $\mathfrak{C}(D[V_1])$ es una digráfica núcleo perfecta,
2. $D[V_2]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas,
3. $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Sean $D_1 = D[V_1]$ y $D_2 = D[V_2]$.

Vamos a demostrar que $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.

Las siguientes observaciones nos ayudarán a demostrar el teorema 1.1.1.

Observación 1. *Sea $T = (u = w_0, w_1, \dots, w_k = v)$ una trayectoria monocromática en D . Si $\{u, v\} \subseteq V(D_i)$ para algún $i \in \{1, 2\}$, entonces $T \subseteq D_i$.*

Procediendo por contradicción, supongamos que $T \not\subseteq D_i$. Como $T \not\subseteq D_i$ y $\{u, v\} \subseteq V(D_i)$, se sigue que existe $w_s \in V(T)$ tal que $w_s \notin V(D_i)$ para algún $s \in \{1, \dots, k-1\}$.

Consideremos dos casos sobre i .

Caso A. $i = 1$

En este caso sea $h = \max \{l \in \{0, \dots, k\} \mid w_l \notin V(D_1)\}$.

Notemos que h existe porque $w_s \notin V(D_1)$. Por otro lado, se sigue de la elección de h que $w_{h+1} \in V(D_1)$ y $w_h \in V(D_2)$ (recuerde que $w_h \notin V(D_1)$ y $V(D) = V_1 \cup V_2$). Así $[\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1] \neq \emptyset$, lo cual contradice la condición 3 del teorema 1.1.1.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Caso B. $i = 2$

En este caso sea $h = \text{mín} \{l \in \{0, \dots, k\} \mid w_l \notin V(D_2)\}$.

Notemos que h existe porque $w_s \notin V(D_2)$. Por otro lado, se sigue de la elección de h que $w_{h-1} \in V(D_2) = V_2$ y $w_h \in V(D_1) = V_1$ (recuerde que $w_h \notin V(D_2)$ y $V(D) = V_1 \cup V_2$). Así $[\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1] \neq \emptyset$, lo cual contradice la condición 3 del teorema 1.1.1.

Por lo tanto, $T \subseteq D_i$.

Observación 2. No hay V_2V_1 -trayectorias en D .

Como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$, se sigue que no hay V_2V_1 -trayectorias en D .

Observación 3. $\mathfrak{C}(D_i) = \mathfrak{C}(D)[V_i]$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Sea $i \in \{1, 2\}$. Ya que $V(\mathfrak{C}(D_i)) = V(\mathfrak{C}(D)[V_i])$, sólo resta probar que $F(\mathfrak{C}(D_i)) = F(\mathfrak{C}(D)[V_i])$.

Primero demostraremos que $F(\mathfrak{C}(D_i)) \subseteq F(\mathfrak{C}(D)[V_i])$. Sea $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D_i))$. Se sigue de la definición de cerradura que existe una uv -trayectoria monocromática en D_i , digamos T . Ya que $T \subseteq D$ (porque $D_i \subseteq D$), se sigue de la definición de cerradura que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Por otro lado, como $\{u, v\} \subseteq V(\mathfrak{C}(D_i)) = V(D_i) = V_i$ y $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$, se tiene que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D)[V_i])$.

Ahora veremos que $F(\mathfrak{C}(D)[V_i]) \subseteq F(\mathfrak{C}(D_i))$. Sea $a = (u, v) \in F(\mathfrak{C}(D)[V_i])$. Se sigue de la definición de cerradura que existe una uv -trayectoria monocromática en D , digamos T . Por otro lado, ya que $\{u, v\} \subseteq V_i = V(D_i)$, se sigue de la observación 1 que $T \subseteq D_i$. Así, $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D_i))$.

Por lo tanto, $\mathfrak{C}(D_i) = \mathfrak{C}(D)[V_i]$.

Observación 4. Sea $i \in \{1, 2\}$ fija. Si $I \subseteq V(\mathfrak{C}(D_i))$ es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D_i)$, entonces I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que I no es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$. Como I no es independiente en $\mathfrak{C}(D)$, existen dos vértices distintos u y v en I tal que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Por otro lado, debido a que $\{u, v\} \subseteq I \subseteq V(\mathfrak{C}(D_i)) = V_i$ y $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$,

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

se sigue que $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D)[V_i])$. Así, $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D_i))$ (porque $\mathfrak{C}(D_i) = \mathfrak{C}(D)[V_i]$, debido a la observación 3), lo cual contradice que I es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D_i)$.

Observación 5. $\Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^+(V_2) \cap V_1 \neq \emptyset$.

Sea $w \in \Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^+(V_2) \cap V_1$. Entonces existe $z \in V_2$ tal que $(z, w) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Más aún, se sigue de la definición de cerradura que existe una zw -trayectoria monocromática en D , digamos P . Por otro lado, ya que $z \in V_2$ y $w \in V_1$, se sigue que hay una V_2V_1 -trayectoria monocromática en D , a saber P , lo cual contradice la observación 2.

Como D_2 tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, se sigue que $\mathfrak{C}(D_2)$ contiene un núcleo, digamos N_2 .

Consideremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. N_2 es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Como N_2 es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D_2)$, se sigue de la observación 4 que N_2 es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Sea $H = \mathfrak{C}(D) \setminus (N_2 \cup \Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2))$.

Si $H = \emptyset$, se sigue de la construcción de H que N_2 es un núcleo de $\mathfrak{C}(D)$. Por lo tanto, supongamos que $H \neq \emptyset$.

Afirmación 2. H es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D_1)$.

Como N_2 es núcleo de $\mathfrak{C}(D_2) = \mathfrak{C}(D)[V_2]$ (recuerde que $\mathfrak{C}(D_2) = \mathfrak{C}(D)[V_2]$ por observación 3), se tiene que $V(\mathfrak{C}(D_2)) \subseteq (N_2 \cup \Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2))$, lo que implica que $V(H) \subseteq V_1$. Así, se sigue de la construcción de H que H es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D)[V_1]$. Por lo tanto, H es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D_1)$ (recuerde que $\mathfrak{C}(D)[V_1] = \mathfrak{C}(D_1)$ por observación 3).

Como H es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D_1)$ y $\mathfrak{C}(D_1)$ es una digráfica núcleo perfecta, se tiene que H contiene un núcleo, digamos N_1 .

Afirmación 3. N_1 es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Como N_1 es un conjunto independiente en H y H es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D_1)$ (por la afirmación 2), se sigue que N_1 es independiente en $\mathfrak{C}(D_1)$. Así, se sigue de la observación 4 que N_1 es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Afirmación 4. $N = N_1 \cup N_2$ es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Como N_1 y N_2 son conjuntos independientes en $\mathfrak{C}(D)$ (debido a las afirmaciones 1 y 3), sólo resta probar que no hay flechas entre el conjunto N_1 y el conjunto N_2 en $\mathfrak{C}(D)$.

- Veremos que no hay N_1N_2 -flechas en $\mathfrak{C}(D)$.

Como $N_1 \subseteq V(H)$, se sigue de la construcción de H que no hay N_1N_2 -flechas en $\mathfrak{C}(D)$.

- Veremos que no hay N_2N_1 -flechas en $\mathfrak{C}(D)$.

Como $N_2 \subseteq V(\mathfrak{C}(D_2)) = V_2$ y $N_1 \subseteq V(\mathfrak{C}(D_1)) = V_1$, se sigue de la observación 5 que no hay N_2N_1 -flechas en $\mathfrak{C}(D)$.

Por lo tanto, N es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Afirmación 5. N es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}(D)$.

Sea $u \in V(\mathfrak{C}(D)) \setminus N$. Demostraremos que existe una uN -flecha en $\mathfrak{C}(D)$.

Consideremos dos casos sobre u .

Caso 2.1. Existe una uN_2 -flecha en $\mathfrak{C}(D)$.

En este caso se tiene que existe una uN -flecha en $\mathfrak{C}(D)$ (debido a que $N_2 \subseteq N$).

Caso 2.2. No existe una uN_2 -flecha en $\mathfrak{C}(D)$.

En este caso como $u \notin \Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2)$, se tiene que $u \notin (\Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2) \cup N)$ (porque $u \notin N$). Ya que $V(\mathfrak{C}(D_2)) \subseteq (\Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2) \cup N)$ (porque N_2 es núcleo de $\mathfrak{C}(D_2)$), se sigue que $u \in V(H) \setminus N_1$ (recuerde que $H = \mathfrak{C}(D) \setminus (N_2 \cup \Gamma_{\mathfrak{C}(D)}^-(N_2))$). Por otro lado, debido a que N_1 es núcleo de H , se sigue que existe una uN_1 -flecha en H , lo que implica que existe una uN -flecha en $\mathfrak{C}(D)$ (porque $N_1 \subseteq N$).

Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}(D)$.

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

De las afirmaciones 4 y 5 se tiene que N es un núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.

Así, D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Corolario 1.1.1. Sean D una digráfica m -coloreada y D_1, \dots, D_ω las componentes fuertemente conexas de D . Si $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Demostraremos que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas por inducción sobre ω , el número de componentes fuertemente conexas de D .

Si $\omega = 1$, entonces de la hipótesis del corolario 1.1.1 se tiene que $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta, lo que implica que $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. Así, D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Hipótesis de inducción. Si D' es una digráfica m' -coloreada con $D'_1, \dots, D'_{\omega-1}$ componentes fuertemente conexas tal que $\mathfrak{C}(D'_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega-1\}$, entonces D' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Sea D una digráfica m -coloreada con D_1, \dots, D_ω ($\omega \geq 2$) componentes fuertemente conexas tal que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que D_1 es una componente fuertemente conexa inicial de D .

Consideremos a la digráfica $D' = D \setminus V(D_1)$.

Puesto que D_2, \dots, D_ω son todas las componentes fuertemente conexas de D' (debido a la construcción de D') y $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{2, \dots, \omega\}$, se sigue de la hipótesis de inducción que D' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Denotemos por V_1 a $V(D_1)$ y denotemos por V_2 a $V(D')$. Notemos que $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(D)$ tal que:

1. $\mathfrak{C}(D[V_1])$ es una digráfica núcleo perfecta (porque $D[V_1] = D_1$ y $\mathfrak{C}(D_1)$ es una digráfica núcleo perfecta).
2. $D[V_2]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (porque $D[V_2] = D'$).
3. $\Gamma_D^+(V_2) \cap V_1 = \emptyset$ (porque D_1 es una componente fuertemente conexa inicial de D).

Por lo tanto, se sigue del teorema 1.1.1 que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

El siguiente lema será útil para probar el teorema 1.1.2.

Lema 1.1.1. Sean D una digráfica m -coloreada, $\mathfrak{C}(D)$ la cerradura de D y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Entonces $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$.

Demostración.

Para probar que $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$ considere las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $V(\mathcal{C}_C(D)) = V(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$.

Como D es una digráfica m -coloreada, de la definición de cerradura se tiene que $\mathfrak{C}(D)$ también es una multidigráfica m -coloreada. Así de la definición de digráfica de clases cromáticas tenemos que $V(\mathcal{C}_C(D)) = V(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$.

Afirmación 2. $F(\mathcal{C}_C(D)) = F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$.

Primero veremos que $F(\mathcal{C}_C(D)) \subseteq F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$. Ya que $D \subseteq \mathfrak{C}(D)$ (debido a la definición de cerradura), se sigue que $\mathcal{C}_C(D) \subseteq \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$. Así, $F(\mathcal{C}_C(D)) \subseteq F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$.

Ahora veremos que $F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))) \subseteq F(\mathcal{C}_C(D))$. Sea $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)))$ para algún $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, m\}$. De la definición de digráfica de clases cromáticas se tiene que existen dos flechas (u, v) y (v, w) en $\mathfrak{C}(D)$ tal que $c(u, v) = i$ y $c(v, w) = j$.

Consideremos dos subafirmaciones sobre $\Gamma_D^-(v)$ y $\Gamma_D^+(v)$.

Subafirmación 2.1. Existe un vértice $w_1 \in \Gamma_D^-(v)$ tal que $c(w_1, v) = i$ en D .

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

Ya que $(u,v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ y $c(u,v) = i$ en $\mathfrak{C}(D)$, se sigue de la definición de $\mathfrak{C}(D)$ que existe una uv -trayectoria monocromática de color i en D . Así existe un vértice $w_1 \in \Gamma_D^-(v)$ tal que $c(w_1,v) = i$ en D .

Subafirmación 2.2. Existe un vértice $w_2 \in \Gamma_D^+(v)$ tal que $c(v,w_2) = j$ en D .

Ya que $(v,w) \in F(\mathfrak{C}(D))$ y $c(v,w) = j$ en $\mathfrak{C}(D)$, se sigue de la definición de $\mathfrak{C}(D)$ que existe una vw -trayectoria monocromática de color j en D . Así existe un vértice $w_2 \in \Gamma_D^+(v)$ tal que $c(v,w_2) = j$ en D .

Finalmente, de las subafirmaciones 2.1 y 2.2 y de la definición de digráfica de clases cromáticas se tiene que $(i,j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$.

Por lo tanto $F(\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))) \subseteq F(\mathcal{C}_C(D))$.

Así, $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$. ■

Teorema 1.1.2. Sean D una digráfica m -coloreada, $\mathfrak{C}(D)$ la cerradura de D y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Demostración.

Demostraremos que toda subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.

Sea D' una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D)$.

Considere la siguiente afirmación.

Afirmación 1. $\mathfrak{C}(D') = D'$.

Como $V(\mathfrak{C}(D')) = V(D')$ y $F(D') \subseteq F(\mathfrak{C}(D'))$ (debido a la definición de cerradura), sólo resta probar que $F(\mathfrak{C}(D')) \subseteq F(D')$.

Sea $a = (u,v) \in F(\mathfrak{C}(D'))$. Primero note que $\mathfrak{C}(D') \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$, porque $D' \subseteq \mathfrak{C}(D)$. Ya que $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$ y $\mathfrak{C}(D') \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$, se sigue que $\mathfrak{C}(D') \subseteq \mathfrak{C}(D)$. Así $a \in F(\mathfrak{C}(D))$.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Como $a \in F(\mathfrak{C}(D))$, $\{u, v\} \subseteq V(D')$ y D' es una subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D)$, entonces $a \in F(D')$.

Por lo tanto $\mathfrak{C}(D') = D'$.

Ahora consideremos dos casos sobre D' .

Caso 1. D' es una digráfica 1-coloreada.

En este caso se tiene que D' contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, digamos N . Como N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D' , se sigue que N es núcleo de $\mathfrak{C}(D')$, lo que implica que N es núcleo de D' (recuerde que $\mathfrak{C}(D') = D'$ por afirmación 1).

Caso 2. D' es una digráfica m' -coloreada, para algún $m' \geq 2$.

Como $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$ (lema 1.1.1) y $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita, se sigue que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$ es una digráfica bipartita. Por otro lado, note que $\mathcal{C}_C(D') \subseteq \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$, porque $D' \subseteq \mathfrak{C}(D)$. Así, $\mathcal{C}_C(D')$ es una digráfica bipartita, lo que implica que D' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (debido al teorema 0.9.4).

Como toda subdigráfica inducida de $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo, se sigue que $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta. ■

Corolario 1.1.2. Sean D una digráfica m -coloreada y D_1, \dots, D_ω las componentes fuertemente conexas de D . Si $\mathcal{C}_C(D_i)$ es una digráfica bipartita para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Demostraremos que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

Sea $i \in \{1, \dots, \omega\}$. Como $\mathcal{C}_C(D_i)$ es una digráfica bipartita, se sigue del teorema 1.1.2 que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Por lo tanto, $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

Así, se sigue del corolario 1.1.1 que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Corolario 1.1.3. *Sea D una digráfica m -coloreada. Si todo camino cerrado en D es 2-coloreado, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración.

Sean D_1, \dots, D_ω las componentes fuertemente conexas de D . Demostraremos que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

Sea $i \in \{1, \dots, \omega\}$. Si $|V(D_i)| = 1$ se cumple que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta. Supongamos que $|V(D_i)| \geq 2$.

Primero veremos que D_i es una digráfica 2-coloreada. Como D_i es fuertemente conexa, existe un camino cerrado W en D_i tal que $F(W) = F(D_i)$. Así, de la hipótesis del corolario 1.1.3 se tiene que W es 2-coloreado, lo que implica que D_i es una digráfica 2-coloreada.

Ahora veremos que $\mathcal{C}_C(D_i)$ es una digráfica bipartita. Supongamos que las flechas de D_i están coloreadas con los colores c_{i_1} y c_{i_2} . Como $V(\mathcal{C}_C(D_i)) = \{c_{i_1}, c_{i_2}\}$ y toda digráfica con dos vértices es una digráfica bipartita, se sigue que $\mathcal{C}_C(D_i)$ es una digráfica bipartita. Lo que implica que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta (por teorema 1.1.2).

Por lo tanto, se sigue del corolario 1.1.1 que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Los siguientes resultados son una generalización de los resultados obtenidos por H. Galeana Sánchez en [28]. El teorema 1.1.3 muestra una condición sobre el número de colores que están representados en las flechas que inciden en cada vértice de la digráfica, dicho número de colores está restringido a un subconjunto de colores fijo. Estas condiciones garantizan que la digráfica de clases cromáticas de una digráfica m -coloreada sea bipartita y así asegurar la existencia de al menos un núcleo por trayectorias monocromáticas. Así, el corolario 1.1.4 es una consecuencia directa del teorema 1.1.3 y el corolario 1.1.1.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Teorema 1.1.3. *Sea D una digráfica m -coloreada ($m \geq 2$), cuyas flechas están coloreadas con los colores del conjunto $\{1, \dots, m\}$, y sea $\alpha = \{c_1, \dots, c_k\}$ un subconjunto de $\{1, \dots, m\}$. Si $|\xi(v)| \leq 2$ y $|\xi(v) \cap \alpha| = 1$ para cada $v \in V(D)$, entonces $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita.*

Demostración.

Demostraremos que existe una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ en dos conjuntos independientes.

Considere dos casos sobre k .

Caso 1. $k = m$.

En este caso afirmamos que $V_1 = \{1\}$ y $V_2 = \{2, \dots, m\}$ son conjuntos independientes en $\mathcal{C}_C(D)$.

Como V_1 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$, sólo resta probar que V_2 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$. Procediendo por contradicción, supongamos que V_2 no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$. Entonces existen dos vértices distintos i y j en V_2 tal que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$. Ya que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que existen dos flechas (u, v) y (v, w) en D tal que $c(u, v) = i$ y $c(v, w) = j$. Note que $\xi(v) = \{i, j\}$, porque $i \neq j$ y $|\xi(v)| \leq 2$. Lo cual contradice que $|\xi(w) \cap \alpha| = 1$ para cada $w \in V(D)$ (porque en este caso $\alpha = \{1, \dots, m\}$).

Por lo tanto, V_2 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$.

Caso 2. $k < m$.

En este caso afirmamos que $V_1 = \alpha$ y $V_2 = V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus \alpha$ son conjuntos independientes en $\mathcal{C}_C(D)$.

1. Veremos que V_1 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que V_1 no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$. Entonces existen dos vértices distintos i y j en V_1 tal que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$. Ya

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que existen dos flechas (u, v) y (v, w) en D tal que $c(u, v) = i$ y $c(v, w) = j$. Note que $\xi(v) = \{i, j\}$, porque $i \neq j$ y $|\xi(v)| \leq 2$. Lo cual contradice que $|\xi(w) \cap \alpha| = 1$ para cada $w \in V(D)$ (recuerde que $V_1 = \alpha$).

Por lo tanto V_1 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$.

2. Veremos que V_2 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que V_2 no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$. Entonces existen dos vértices distintos i y j en V_2 tal que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$. Ya que $(i, j) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que existen dos flechas (u, v) y (v, w) en D tal que $c(u, v) = i$ y $c(v, w) = j$. Note que $\xi(v) = \{i, j\}$, porque $i \neq j$ y $|\xi(v)| \leq 2$. Así, se sigue que $\alpha \cap \{i, j\} = \emptyset$, porque $\{i, j\} \subseteq V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (recuerde que $V_1 = \alpha$ y $V_2 = V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus \alpha$). Lo cual contradice que $|\xi(w) \cap \alpha| = 1$ para cada $w \in V(D)$.

Por lo tanto V_2 es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$.

Por lo tanto $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita. ■

Corolario 1.1.4. Sean D una digráfica m -coloreada y D_1, \dots, D_ω sus componentes fuertemente conexas. Si para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$ se cumple que:

1. $|\xi_{D_i}(v)| \leq 2$ para cada $v \in V(D_i)$, y
2. existe un conjunto de colores $\alpha_i \subseteq C_i$, con C_i el conjunto de los colores que aparecen en las flechas de D_i , tal que $|\xi_{D_i}(v) \cap \alpha_i| = 1$ para cada $v \in V(D_i)$.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Demostraremos que $\mathcal{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$.

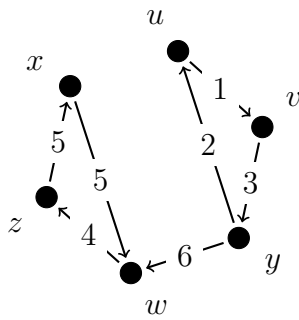
1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Sea $i \in \{1, \dots, \omega\}$. Supongamos que $F(D_i) \neq \emptyset$. Como la cerradura de toda digráfica 1-coloreada es una digráfica núcleo perfecta, podemos suponer que D_i es una digráfica m' -coloreada, con $m' \geq 2$. Puesto que la digráfica D_i cumple las hipótesis del teorema 1.1.3, se sigue que $\mathcal{C}_C(D_i)$ es una digráfica bipartita. Así, se sigue del teorema 1.1.2 que $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Por lo tanto, como $\mathfrak{C}(D_i)$ es una digráfica núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, \omega\}$, se sigue del corolario 1.1.1 que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Nota 1.1.1. Los inversos de todos los resultados anteriores en general no necesariamente son verdadero como se muestra en los ejemplos de las figuras 1.1, 1.2 y 1.3.

D_1 :



$\mathcal{C}_C(D_1)$:

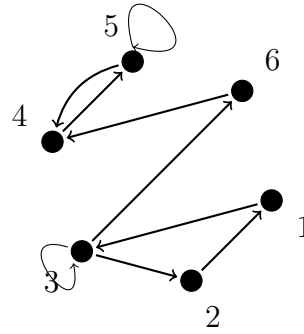


Figura 1.1

1. $\{v, w\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D_1 .
2. $\mathcal{C}_C(D_1)$ tiene ciclos de longitud impar.
3. D_1 no tiene una partición de sus vértices como en las hipótesis del teorema 1.1.1.
4. $D_1[\{v, y, u\}]$ es una componente fuertemente conexa de D_1 tal que $\mathfrak{C}(D_1[\{v, y, u\}])$ no es una digráfica núcleo perfecta.
5. $D_1[\{v, y, u\}]$ es una componente fuertemente conexa de D_1 tal que $\mathcal{C}_C(D_1[\{v, y, u\}])$ no es una digráfica bipartita.

1.1 Subestructuras de D y su digráfica de clases cromáticas

6. D_1 tiene un camino cerrado el cual no es 2-coloreado.
7. $\mathfrak{C}(D_2)$ es una digráfica núcleo perfecta y $\mathcal{C}_C(D_2)$ no es una digráfica bipartita (ver figura 1.2).

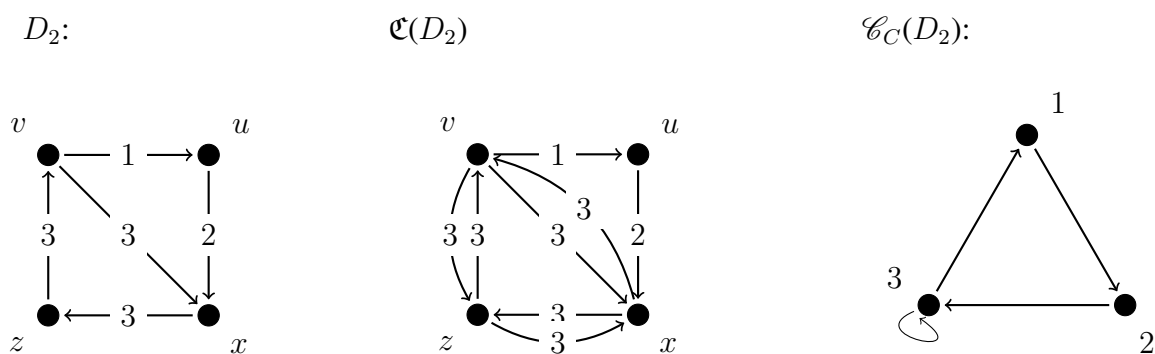


Figura 1.2: $\mathfrak{C}(D_2)$ es una digráfica núcleo perfecta y $\mathcal{C}_C(D_2)$ no es una digráfica bipartita.

8. $\mathcal{C}_C(D_3)$ es una digráfica bipartita y $|\xi_{D_3}(u)| = 3$ (ver figura 1.3).

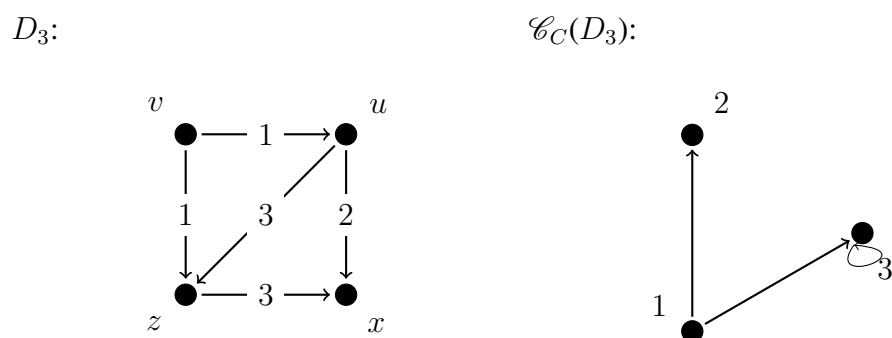


Figura 1.3: $\mathcal{C}_C(D_3)$ es una digráfica bipartita y $|\xi_{D_3}(u)| = 3$

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

En esta sección daremos una extensión del teorema 0.9.4, al considerar dos casos sobre la digráfica de clases cromáticas, la cual no tiene ciclos de longitud impar al menos tres, de una digráfica m -coloreada. Como consecuencia directa de dicha extensión probaremos el teorema de Richardson (teorema 0.9.4).

Teorema 1.2.1. *Sean D una digráfica m -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases cromáticas. Si $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración.

Procederemos por inducción sobre m .

Para $m = 1$ y $m = 2$ el resultado se sigue directamente del teorema 0.9.1.

Hipótesis de inducción. Si D' es una digráfica m' -coloreada, con $m' < m$, tal que $\mathcal{C}_C(D')$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, entonces D' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Sea D una digráfica m -coloreada tal que $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3.

Consideremos dos casos sobre $\mathcal{C}_C(D)$.

Caso 1. $\mathcal{C}_C(D)$ es fuertemente conexa.

En este caso, como $\mathcal{C}_C(D)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3 y es fuertemente conexa, entonces $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita. Así, se sigue del teorema 0.9.4 que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso 2. $\mathcal{C}_C(D)$ no es fuertemente conexa.

Sean G una componente fuertemente conexa terminal de $\mathcal{C}_C(D)$, $\{V_1 = V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus V(G)$,

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

$V_2 = V(G)\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ (note que $V_1 \neq \emptyset$ porque $\mathcal{C}_C(D)$ no es fuertemente conexa), y H la subdigráfica generadora de D tal que $F(H) = \{(x,y) \in F(D) \mid c(x,y) \in V_2\}$.

En este caso para demostrar que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas considere las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $\mathcal{C}_C(H)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3.

Como $H \subseteq D$, se sigue que $\mathcal{C}_C(H) \subseteq \mathcal{C}_C(D)$, lo que implica que $\mathcal{C}_C(H)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3 (porque por hipótesis $\mathcal{C}_C(D)$ no los contiene).

Puesto que H es una digráfica $|V_2|$ -coloreada, con $|V_2| < m$, tal que $\mathcal{C}_C(H)$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, se sigue de la hipótesis de inducción que H posee un núcleo por trayectorias monocromáticas, digamos N_1 .

Si N_1 es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces N_1 es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D (recuerde que $V(H) = V(D)$). Por lo tanto supongamos que N_1 no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Considere la siguiente notación que vamos a utilizar a lo largo de la prueba.

Sean $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y $S \subseteq V(D)$. Escribiremos: $u \rightsquigarrow_i v$ si existe una uv -trayectoria monocromática con color i en D ; $u \rightsquigarrow_{\text{mono}} v$ si existe una uv -trayectoria monocromática en D ; $u \rightsquigarrow_{\text{mono}} S$ si existe una uS -trayectoria monocromática en D ; $u \not\rightsquigarrow_i v$ es la negación de $u \rightsquigarrow_i v$; $u \not\rightsquigarrow_{\text{mono}} S$ es la negación de $u \rightsquigarrow_{\text{mono}} S$.

Afirmación 2. Si $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V(\mathcal{C}_C(D))$ y para algún $\{u, v\} \subseteq N_1$, con $u \neq v$, entonces $i \in V_1$.

Como N_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en H , de la construcción de H se tiene que $i \in V_1$.

Afirmación 3. Si $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$ y para algún $\{u, v\} \subseteq N_1$, con $u \neq v$, entonces $w \rightarrow_j u$ para cada $j \in V_2$ y para cada $w \in V(H) \setminus N_1$.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Procediendo por contradicción, supongamos que existen $\{u, v\} \subseteq N_1$, con $u \neq v$, y $w \in V(H) \setminus N_1$ tal que $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$ y $w \rightsquigarrow_j u$ para algún $j \in V_2$ (ver figura 1.4).

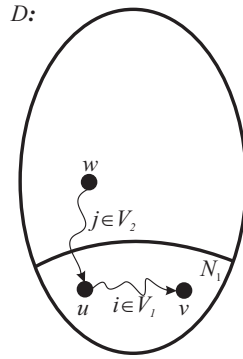


Figura 1.4

Como $w \rightsquigarrow_j u$ para algún $j \in V_2$, se sigue que existe $w_1 \in V(D)$ tal que $c(w_1, u) = j$. Por otro lado, puesto que $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V_1$, se tiene que existe $v_1 \in V(D)$ tal que $c(u, v_1) = i$. Por lo tanto de la definición de digráfica de clases cromáticas se tiene que $(j, i) \in F(\mathcal{C}_C(D))$. Así, existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, lo cual contradice que G es una componente fuertemente conexa terminal de $\mathcal{C}_C(D)$.

Afirmación 4. $V(H) \setminus N_1 \neq \emptyset$.

Como $V_2 \neq \emptyset$, se sigue de la construcción de H que $V(H)$ no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en H (recuerde que H es la subdigráfica generadora de D tal que $F(H) = \{(x, y) \in F(D) \mid c(x, y) \in V_2\}$). Así, $V(H) \setminus N_1 \neq \emptyset$.

Consideremos al conjunto $T = \{z \in N_1 \mid \text{existe } k \in N_1 \setminus \{z\} \text{ tal que } z \rightsquigarrow_j k \text{ para algún } j \in V_1\}$.

Notemos que $T \neq \emptyset$ debido a que N_1 no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Sea $N_2 = N_1 \setminus T$.

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

Afirmación 5. $N_2 \neq \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $N_2 = \emptyset$. Como $V(H) \setminus N_1 \neq \emptyset$ (afirmación 4) y N_1 es núcleo por trayectorias monocromáticas de H , se sigue que existen $h \in V(H) \setminus N_1$ y $w \in N_1$ tal que $h \rightsquigarrow_j w$ para algún $j \in V_2$. Por otro lado, puesto que $N_2 = \emptyset$, se sigue de la definición de T que para $w \in N_1$ existe $k \in N_1 \setminus \{w\}$ tal que $w \rightsquigarrow_i k$ para algún $i \in V_1$, lo cual contradice la afirmación 3.

Afirmación 6. N_2 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Como $N_2 \subseteq N_1$ y N_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en H , se sigue de la construcción de H que $u \rightarrow_j v$ para cada $j \in V_2$ y para cada $\{u, v\} \subseteq N_2$, con $u \neq v$. Por otro lado, de la definición de T se tiene que $x \rightarrow_i y$ para cada $i \in V_1$ y para cada $\{x, y\} \subseteq N_2$, con $x \neq y$. Por lo tanto, N_2 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Afirmación 7. Para cada $w \in V(H) \setminus N_1$ existe $h \in N_2$ tal que $w \rightsquigarrow_{\text{mono}} h$.

Sea $w \in V(H) \setminus N_1$. Como N_1 es núcleo por trayectorias monocromáticas de H , se sigue que existe $h \in N_1$ tal que $w \rightsquigarrow_j h$ para algún $j \in V_2$. Luego de la afirmación 3 y la definición de T se tiene que $h \notin T$. Así, $h \in N_2$.

Si $t \rightsquigarrow_{\text{mono}} N_2$ para cada $t \in T$, entonces de las afirmaciones 6 y 7 se tiene que N_2 es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D (recuerde que $V(H) = V(D)$). Por lo tanto supongamos que existe $t' \in T$ tal que $t' \not\rightarrow_{\text{mono}} N_2$.

Sea $T' = \{t \in T \mid t \rightarrow_{\text{mono}} N_2\}$.

Consideremos a la digráfica $\mathfrak{C}(D)[T']$ (la subdigráfica de $\mathfrak{C}(D)$ inducida por los vértices de T').

Ahora consideremos las siguientes afirmaciones sobre $\mathfrak{C}(D)[T']$.

Afirmación 8. $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3.

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Como $\mathfrak{C}(D)[T'] \subseteq \mathfrak{C}(D)$, se sigue que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$, lo que implica que $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq \mathcal{C}_C(D)$ (porque $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)) = \mathcal{C}_C(D)$). Así, $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, porque por hipótesis $\mathcal{C}_C(D)$ no los contiene.

Afirmación 9. $c_{\mathfrak{C}(D)}(x,y) \in V_1$ para cada $(x,y) \in F(\mathfrak{C}(D)[T'])$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $(x,y) \in F(\mathfrak{C}(D)[T']) \subseteq F(\mathfrak{C}(D))$ tal que $c_{\mathfrak{C}(D)}(x,y) \in V_2$. Supongamos que $c_{\mathfrak{C}(D)}(x,y) = k$ para algún $k \in V_2$. Entonces de la definición de cerradura se tiene que existe una xy -trayectoria monocromática de color k en D , digamos P . Luego de la definición de H se tiene que $P \subseteq H$, lo cual contradice que N_1 es independiente por trayectorias monocromáticas en H (porque $\{x, y\} \subseteq T' \subseteq N_1$).

Ahora, como $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D)[T'])$ no tiene ciclos de longitud impar al menos 3 (afirmación 8), y $\mathfrak{C}(D)[T']$ es una digráfica m' -coloreada, con $m' \leq |V_1| < m$ (afirmación 9), se sigue de la hipótesis de inducción que $\mathfrak{C}(D)[T']$ posee un núcleo por trayectorias monocromáticas, digamos N_3 .

Afirmación 10. N_3 es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que existen u y v en N_3 , con $u \neq v$, tal que $u \rightsquigarrow_{\text{mono}} v$. Como $u \rightsquigarrow_{\text{mono}} v$, se sigue de la definición de cerradura que $(u,v) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Puesto que $\{u, v\} \subseteq N_3 \subseteq T'$, se sigue que $(u,v) \in F(\mathfrak{C}(D)[T'])$, lo cual contradice que N_3 es independiente por trayectorias monocromáticas en $\mathfrak{C}(D)[T']$.

Afirmación 11. Para cada $z \in T' \setminus N_3$ existe $h \in N_3$ tal que $z \rightsquigarrow_{\text{mono}} h$.

Sea $z \in T' \setminus N_3$. Como $z \in V(\mathfrak{C}(D)[T']) \setminus N_3$ y N_3 es núcleo por trayectorias monocromáticas de $\mathfrak{C}(D)[T']$, se sigue que existe $h \in N_3$ tal que existe una zh -trayectoria monocromática en $\mathfrak{C}(D)[T']$, digamos P . Puesto que $\mathfrak{C}(D)[T'] \subseteq \mathfrak{C}(D)$, tenemos que $P \subseteq \mathfrak{C}(D)$, lo que implica que $(z,h) \in F(\mathfrak{C}(D))$ (por definición de cerradura). Como $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$, se sigue que $(z,h) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Así, de la definición de cerradura se tiene que $z \rightsquigarrow_{\text{mono}} h$.

Afirmación 12. $N = N_2 \cup N_3$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

(a) Veamos que N es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Como N_2 y N_3 son conjuntos independiente por trayectorias monocromáticas en D (afirmaciones 6 y 10, respectivamente), entonces sólo resta probar que no existen N_2N_3 -trayectorias monocromáticas en D y no existen N_3N_2 -trayectorias monocromáticas en D .

De la definición de N_2 se tiene no existen N_2N_3 -trayectorias monocromáticas en D . Por otro lado de la definición de T' se tiene que no existen N_3N_2 -trayectorias monocromáticas en D (porque $N_3 \subseteq T'$).

Por lo tanto, N es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

(b) Veamos que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D .

Se sigue de las afirmaciones 7 y 11 y de la definición de $T \setminus T'$ (ver figura 1.5).

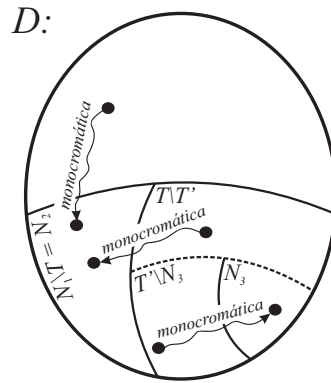


Figura 1.5

Por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

El siguiente resultado será muy útil en la demostración del corolario 1.2.1.

Lema 1.2.1. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar. Entonces $L(D)$ no tiene ciclos de longitud impar. ■

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

Como consecuencia del teorema 1.2.1 tenemos lo siguiente:

Corolario 1.2.1. (Richardson [42]) *Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.*

Demostración.

Sean D' la digráfica q -coloreada obtenida de D al asignar un color distinto a cada flecha de D , $L(D')$ su digráfica de líneas y $\mathfrak{C}(D')$ su cerradura.

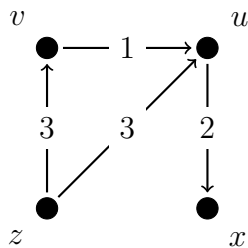
Note que de la definición de digráfica de clases cromáticas, de la definición de digráfica de líneas y de la coloración de las flechas de D se tiene que $\mathfrak{C}(D') = L(D')$.

Por otro lado, como $L(D')$ no tiene ciclos de longitud impar (por el lema 1.2.1), se sigue que $\mathfrak{C}(D')$ no tiene ciclos de longitud impar. Así, del teorema 1.2.1 se tiene que D' tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Lo que implica que $\mathfrak{C}(D') = D'$ tiene núcleo.

Por lo tanto, D tiene núcleo. ■

Nota 1.2.1. El ejemplo de la figura 1.6 muestra que el teorema 0.9.4 no implica a el teorema 1.2.1, es decir, $\mathfrak{C}(D_4)$ cumple con la hipótesis del teorema 1.2.1 y $\mathfrak{C}(D_4)$ no cumple con la hipótesis del teorema 0.9.4.

D_4 :



$\mathfrak{C}(D_4)$:

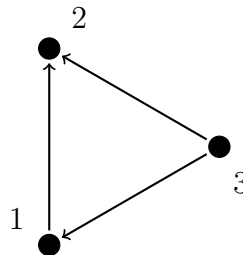


Figura 1.6: $\mathfrak{C}(D_4)$ no tiene ciclos de longitud impar y $\mathfrak{C}(D_4)$ no es bipartita.

Ahora el siguiente resultado sobre digráficas semicompletas garantiza que si a la digráfica de clases cromáticas sólo le pedimos que no contenga ciclos de longitud 3, entonces la digráfica

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Teorema 1.2.2. *Sean D una digráfica semicompleta m -coloreada y $\mathcal{C}(D)$ su digráfica de clases cromáticas. Si $\mathcal{C}(D)$ no contiene ciclos de longitud tres, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración.

Demostraremos que $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.

Demostraremos que todo ciclo γ de $\mathcal{C}(D)$ tiene al menos una flecha simétrica por inducción sobre $l(\gamma)$, la longitud de γ .

Si $l(\gamma) = 3$, supongamos que $\gamma = (v_1, v_2, v_3, v_1)$. Como $(c_{\mathcal{C}(D)}(v_1, v_2), c_{\mathcal{C}(D)}(v_2, v_3), c_{\mathcal{C}(D)}(v_3, v_1), c_{\mathcal{C}(D)}(v_1, v_2))$ es un camino cerrado de longitud tres en $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$, $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$ y $\mathcal{C}(D)$ no tiene ciclos de longitud tres, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c_{\mathcal{C}(D)}(v_1, v_2) = c_{\mathcal{C}(D)}(v_2, v_3) = k$. Así (v_1, v_2, v_3) es una trayectoria monocromática de color k en $\mathcal{C}(D)$, lo que implica que $(v_1, v_3) \in F(\mathcal{C}(D))$ (porque $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$). Por lo tanto (v_3, v_1) es una flecha simétrica de γ .

Supongamos que si γ' es un ciclo de $\mathcal{C}(D)$ de longitud menor que $n + 1$, con $n \geq 3$, entonces γ' tiene una flecha simétrica.

Sea $\gamma = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$ un ciclo de $\mathcal{C}(D)$ de longitud $n + 1$.

Demostraremos que γ tiene una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D)$. Procediendo por contradicción, supongamos que γ no tiene flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$.

Consideremos las siguientes afirmaciones sobre γ .

Afirmación 1. *γ no es monocromático en $\mathcal{C}(D)$.*

Como todo ciclo monocromático de $\mathcal{C}(D)$ es simétrico en $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$ (por definición de cerradura) y γ no tiene flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$, se sigue que γ no es monocromático en $\mathcal{C}(D)$

1. NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y LA DIGRÁFICA DE CLASES CROMÁTICAS

(recuerde que $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$).

Afirmación 2. Para todo par de vértices no consecutivos u y v de γ se tiene que (u, v) es una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(D)$.

Sean v_i y v_j dos vértices no consecutivos en γ . Supongamos sin pérdida de generalidad que $i + 1 < j$. Como D es una digráfica semicompleta, se tiene que existe al menos una flecha entre v_i y v_j en D . Si $(v_i, v_j) \in F(D)$, entonces $\gamma' = (v_i, v_j) \cup (v_j, \gamma, v_i)$ es un ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ de longitud menor que $n + 1$. Así se sigue de la hipótesis de inducción que γ' tiene una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(D)$. Como γ no tiene flechas simétricas, se sigue que (v_i, v_j) es una flecha simétrica de γ' en $\mathfrak{C}(D)$. El caso $(v_j, v_i) \in F(D)$ es análogo al anterior.

Como γ no es monocromático (afirmación 1), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_n, v_0) = a$ y $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_0, v_1) = b$, con $a \neq b$.

Como, en particular, $(v_1, v_n) \in F(\mathfrak{C}(D))$ (afirmación 2), vamos a considerar las siguientes afirmaciones sobre $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n)$.

Afirmación 3. $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) \neq b$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) = b$. Entonces (v_0, v_1, v_n) es una trayectoria monocromática de color b en $\mathfrak{C}(D)$, lo que implica que $(v_0, v_n) \in F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$. Así, $(v_0, v_n) \in F(\mathfrak{C}(D))$ (recuerde que $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$), lo que implica que γ tiene una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(D)$, lo cual no es posible.

Afirmación 4. $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) \neq a$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) = a$. Entonces (v_1, v_n, v_0) es una trayectoria monocromática de color a en $\mathfrak{C}(D)$, lo que implica que $(v_1, v_0) \in F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$. Así, $(v_1, v_0) \in F(\mathfrak{C}(D))$ (recuerde que $\mathfrak{C}(D) = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$), lo que implica que γ tiene una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(D)$, lo cual no es posible.

Por lo tanto de las afirmaciones 3 y 4 se concluye que $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) = c$, con $c \notin \{a, b\}$.

1.2 Una extensión del teorema de Richardson

Como $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_n, v_0) = a$, $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_0, v_1) = b$ y $c_{\mathfrak{C}(D)}(v_1, v_n) = c$, de la definición de digráfica de clases cromáticas se tiene que $W = (a, b, c, a)$ es un ciclo de longitud tres en $\mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$. Como $\mathcal{C}_C(D) = \mathcal{C}_C(\mathfrak{C}(D))$, se sigue que $\mathcal{C}_C(D)$ tiene un ciclo de longitud tres, lo cual contradice la hipótesis del teorema 1.2.2.

Por lo tanto γ tiene al menos una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(D)$.

Así $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. ■

H-Núcleos

Este capítulo se divide en dos secciones, uno para el estudio de H -núcleos por caminos en digráficas infinitas y otro para el estudio de H -núcleos por caminos en digráficas finitas.

En la primera sección demostraremos que si $\mathcal{C}_c(D) \subseteq H$, entonces D tiene H -núcleo. Para esto primero probaremos que toda digráfica sin trayectorias infinitas exteriores tiene un **núcleo por trayectorias**; es decir, un subconjunto $N \subseteq V(D)$ de vértices de D tal que:

1. para cualquier par de vértices distintos $u, v \in N$ no hay trayectorias entre ellos, y
2. para cada $u \in V(D) \setminus N$ existe $v \in N$ tal que hay una uv -trayectoria en D .

El siguiente resultado que probaremos considera una partición de los vértices de la gráfica de clases cromáticas de una digráfica H -coloreada en dos conjuntos con las siguientes condiciones:

Antes de dar el enunciado del resultado, consideremos la siguiente definición. Sean D una digráfica H -coloreada y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Sea $i \in \{1, 2\}$. Diremos que un H -camino C en D es V_i coloreado si $c(w, z) \in V_i$ para cada $(w, z) \in F(C)$.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada (posiblemente infinita) y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

2. H-NÚCLEOS

1. $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$ para cada $i \in \{1,2\}$,
2. Si $(u,v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para algún $u \in V_i$ y para algún $v \in V_j$, con $i \neq j$ y $i,j \in \{1,2\}$, entonces $(u,v) \notin F(H)$, y
3. D no tiene H -trayectorias infinitas exteriores V_i coloreadas para cada $i \in \{1,2\}$.

Entonces D tiene H -núcleo.

Veremos que como consecuencia directa del resultado anterior se desprende el teorema de Sands Sauer y Woodrow. Otra consecuencia directa del resultado anterior es que si la digráfica de clases cromáticas de una digráfica D m -coloreada es bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas (teorema 0.9.4).

En la segunda sección, para digráficas finitas, probaremos lo siguiente:

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si existen $H' \in \mathcal{B}_3$, con $V(H') = \{1, \dots, p\}$, y una partición $\{V_1, \dots, V_p\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. (a) Para $i \neq j$ si existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, entonces $(i,j) \in F(H')$ si y sólo si toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .
(b) $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$.
2. Para $i \neq j$, si existe una $V_i V_j$ -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$, entonces toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .

Entonces D tiene H -núcleo por caminos.

El resultado anterior establece que si la estructura de la digráfica de clases cromáticas de una digráfica H -coloreada es parecida a la de una digráfica en \mathcal{B}_3 , con respecto a H , entonces la digráfica H -coloreada tiene H -núcleo por caminos.

Posteriormente veremos algunas consecuencias del resultado anterior.

A lo largo del presente trabajo la digráfica H es una digráfica que posiblemente contenga lazos y la digráfica D es simple.

2.1 H -núcleos en digráficas infinitas

En este capítulo, la digráfica D^* es la digráfica de condensación de D .

De la definición de $\mathcal{C}_c(D)$ se tiene que $V(\mathcal{C}_c(D)) \subseteq V(H)$. Ya que $V(\mathcal{C}_c(D)) \subseteq V(H)$, la pregunta que nos podemos hacer es la siguiente: ¿Qué estructura o subestructuras debe tener $\mathcal{C}_c(D)$ respecto a la digráfica H para poder garantizar la existencia de H -núcleos por caminos (H -núcleos)?

Note que si $H_1 = (\{1\}, \{(1,1)\})$, entonces para toda digráfica D_1 H_1 -coloreada se tiene que $\mathcal{C}_c(D_1) \subseteq H_1$. Más aún, D_1 tiene un H_1 -núcleo (debido al teorema de Sands, Sauer y Woodrow). En general, no es difícil ver que toda digráfica finita D H -coloreada tal que $\mathcal{C}_c(D) \subseteq H$ tiene H -núcleo. Por otro lado, el hecho de que $V(\mathcal{C}_c(D)) \subseteq V(H)$ no siempre garantiza que $F(\mathcal{C}_c(D)) \subseteq F(H)$. Por ejemplo, considere a la digráfica $H_2 = (\{1, 2\}, \{(1,1), (2,2)\})$ y a la digráfica H_2 -coloreada $D_2 = (\{u, v, w\}, \{(u,v), (v,w)\})$, donde $c(u,v) = 1$ y $c(v,w) = 2$. Aunque $F(\mathcal{C}_c(D_2)) \not\subseteq F(H_2)$, en general se tiene que toda digráfica D H_2 -coloreada tiene H_2 -núcleo.

Analizando la digráfica de clases cromáticas $\mathcal{C}_c(D)$ de cualquier digráfica D H -coloreada que satisface las hipótesis del teorema 0.9.4, donde $F(H) = \{(v,v) \mid v \in V(H)\}$, se puede observar lo siguiente: Si $\{V_1, V_2\}$ es la partición de $V(\mathcal{C}_c(D))$ que hace que $\mathcal{C}_c(D)$ sea una digráfica bipartita, entonces la digráfica inducida por V_i en $\mathcal{C}_c(D)$ está contenida en la digráfica inducida por V_i en H para cada $i \in \{1,2\}$.

Los siguientes cuatro teoremas, demostrados en [45], serán útiles para la demostración del teorema 2.1.5.

Teorema 2.1.1. *Sea D una digráfica (posiblemente infinita). Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D^* no contiene trayectorias infinitas exteriores.*

2. H-NÚCLEOS

Teorema 2.1.2. *Sea D una digráfica acíclica (posiblemente infinita). Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D tiene al menos un vértice de exgrado cero.*

Teorema 2.1.3. *Sea D una digráfica (posiblemente infinita). Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D contiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.*

Teorema 2.1.4. *Sea D una digráfica acíclica (posiblemente infinita). Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.*

El siguiente teorema será útil para probar que si D es una digráfica (posiblemente infinita) sin H -trayectorias infinitas exteriores tal que $\mathcal{C}_C(D) \subseteq H$, entonces D tiene H -núcleo. Cabe mencionar que el teorema 2.1.5 fue demostrado por Berge en [3] para el caso finito. Más aún, el teorema 2.1.5 es una consecuencia directa del teorema de Sands, Sauer y Woodrow cuando la digráfica está coloreada con uno de los dos colores disponibles. Aquí presentamos una prueba constructiva.

Teorema 2.1.5. *Sea D una digráfica (posiblemente infinita). Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D tiene núcleo por trayectorias.*

Demostración. *Vamos a utilizar la siguiente notación.*

Sean G una digráfica, $\{u, v\} \subseteq V(G)$ y $S, S' \subseteq V(G)$. Escribiremos: $u \rightsquigarrow_G v$ si existe una trayectoria de u hacia v en G ; $u \rightsquigarrow_G S$ si existe una trayectoria de u hacia S en G ; $S \rightsquigarrow_G v$ si existe una trayectoria de S hacia v en G ; $S \rightsquigarrow_G S'$ si existe una trayectoria de S hacia S' en G .

Como D no tiene trayectorias infinitas exteriores, entonces del teorema 2.1.1 se tiene que D^* no contiene trayectorias infinitas exteriores. Ya que D^* es una digráfica acíclica, se sigue del teorema 2.1.4 que D^* tiene un núcleo, digamos N_1 .

Consideremos al conjunto $\mathcal{L} = \{K \in N_1 \mid \delta_{D^*}^+(K) = 0\}$.

Note que $\mathcal{L} \neq \emptyset$ (teorema 2.1.2).

Afirmación 1. *Para cada $C \in V(D^*) \setminus \mathcal{L}$ existe $C' \in \mathcal{L}$ tal que $C \rightsquigarrow_{D^*} C'$.*

2.1 H-núcleos en digráficas infinitas

Para demostrar la afirmación 1 consideremos dos casos.

Caso A. $N_1 \setminus \mathcal{L} = \emptyset$.

En este caso se tiene que $N_1 = \mathcal{L}$. Como N_1 es núcleo de D^* , entonces la afirmación 1 se cumple.

Caso B. $N_1 \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Ya que N_1 es núcleo de D^* , entonces sólo basta probar que para cada $C \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ existe una $C\mathcal{L}$ -trayectoria en D^* .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $C_1 \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ tal que en D^* no hay trayectorias de C_1 hacia \mathcal{L} .

Demostraremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ dados $C_n \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$ y una trayectoria $T_n = (C_1, \dots, C_n) \subseteq D^*$ existe $C_{n+1} \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$ tal que $C_{n+1} \notin V(T_n)$ y $(C_n, C_{n+1}) \in F(D^*)$. Más aún, $C_{n+1} \in (V(D^*) \setminus N_1)$ si n es impar y $C_{n+1} \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ si n es par.

Sea $T_1 = (C_1)$. Ya que $C_1 \in N_1 \setminus \mathcal{L}$, de la definición de \mathcal{L} se tiene que $\delta_{D^*}^+(C_1) \geq 1$.

Como $\delta_{D^*}^+(C_1) \geq 1$ y N_1 es independiente en D^* , entonces existe $C_2 \in V(D^*) \setminus N_1$ tal que $(C_1, C_2) \in F(D^*)$.

Sea $T_2 = (C_1, C_2)$.

Puesto que $C_2 \in V(D^*) \setminus N_1$ y N_1 es Núcleo de D^* , entonces existe $C_3 \in N_1$ tal que $(C_2, C_3) \in F(D^*)$.

Note que:

- (1) $C_3 \neq C_1$, de otro modo (C_1, C_2, C_3) es un ciclo en D^* , lo cual contradice que D^* es acíclica.
- (2) $T_3 = (C_1, C_2, C_3)$ es una trayectoria en D^* (debido a que $C_3 \neq C_1$, $C_3 \in N_1$ y $C_2 \notin N_1$).
- (3) $C_3 \notin \mathcal{L}$, de lo contrario en D^* se tiene que (C_1, C_2, C_3) es una $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria, lo cual contradice que en D^* no existe una $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria.

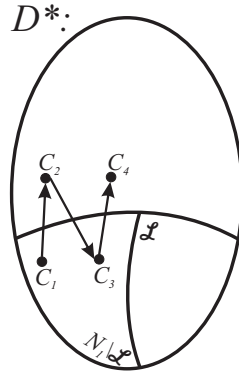
Ya que $C_3 \notin \mathcal{L}$, de la definición de \mathcal{L} se tiene que $\delta_{D^*}^+(C_3) \geq 1$.

2. H-NÚCLEOS

Como $\delta_{D^*}^+(C_3) \geq 1$, $C_3 \in N_1$ y N_1 es independiente en D^* , entonces existe $C_4 \in V(D^*) \setminus N_1$ tal que $(C_3, C_4) \in F(D^*)$.

Observe que:

- (4) $C_4 \neq C_2$, de otro modo (C_2, C_3, C_4) es un ciclo en D^* , lo cual contradice que D^* es acíclica.
- (5) $C_4 \notin \{C_1, C_3\}$ (porque $\{C_1, C_3\} \subseteq N_1$ y $C_4 \notin N_1$).
- (6) $T_4 = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ es una trayectoria en D^* (debido a (4) y (5)).



Supongamos que $T_n = (C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n)$ es una trayectoria en D^* y $C_n \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$, donde $\{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq V(D^*) \setminus N_1$ y $\{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq N_1$.

Veamos que existe $C_{n+1} \in (V(D^*) \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus \mathcal{L})$ tal que $C_{n+1} \notin V(T_n)$ y $(C_n, C_{n+1}) \in F(D^*)$.

Consideremos las siguientes dos posibilidades para C_n .

I. $C_n \in V(D^*) \setminus N_1$.

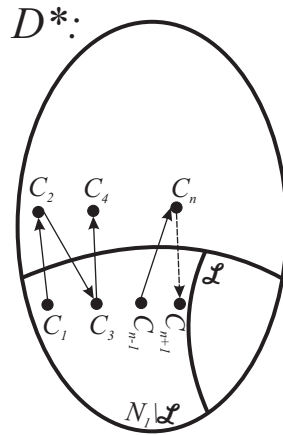
Como N_1 es Núcleo de D^* , entonces existe $C_{n+1} \in N_1$ tal que $(C_n, C_{n+1}) \in F(D^*)$.

Note que:

- (14) $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\}$, de lo contrario $(C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, C_{n+1})$ contiene un ciclo en D^* , lo cual contradice que D^* es acíclica.

2.1 H-núcleos en digráficas infinitas

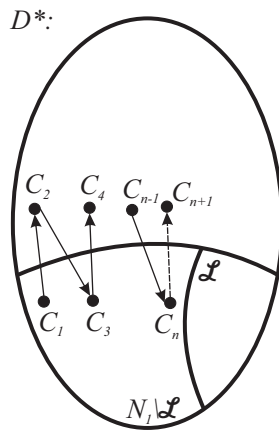
- (15) $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\}$ (porque $\{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq V(D^*) \setminus N_1$ y $C_{n+1} \in N_1$).
- (16) $T_{n+1} = (C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, C_{n+1})$ es una trayectoria en D^* (debido a (14) y (15)).
- (17) $C_{n+1} \notin \mathcal{L}$, de otro modo $(C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, C_{n+1})$ es una $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria en D^* , lo cual contradice que en D^* no existe una $C_1\mathcal{L}$ -trayectoria.



II. $C_n \in N_1 \setminus \mathcal{L}$.

En este caso, se sigue de la definición de \mathcal{L} que $\delta_{D^*}^+(C_n) \geq 1$.

Como $\delta_{D^*}^+(C_n) \geq 1$, $C_n \in N_1$ y N_1 es independiente en D^* , entonces existe $C_{n+1} \in V(D^*) \setminus N_1$ tal que $(C_n, C_{n+1}) \in F(D^*)$.



2. H-NÚCLEOS

Observe que:

(18) $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es par}, 1 \leq k \leq n\}$, de lo contrario $(C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, C_{n+1})$ contiene un ciclo en D^* , lo cual contradice que D^* es aciclica.

(19) $C_{n+1} \notin \{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\}$ (porque $\{C_k \mid k \text{ es impar}, 1 \leq k \leq n\} \subseteq N_1$ y $C_{n+1} \notin N_1$).

(20) $T_{n+1} = (C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n, C_{n+1})$ es una trayectoria en D^* (debido a (18) y (19)).

Finalmente, note que la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior en D^* . Sin embargo, esto contradice el hecho de que D^* no contiene trayectorias infinitas exteriores.

Así, para cada $C \in N_1 \setminus \mathcal{L}$ existe una $C\mathcal{L}$ -trayectoria en D^* .

Observación 1. Si C y C' son dos vértices distintos de D^* tales que $C \rightsquigarrow_{D^*} C'$, entonces para cada $u \in V(C)$ y para cada $z \in V(C')$ se tiene que $u \rightsquigarrow_D z$.

Por otro lado, como $\{V(C') \mid C' \in \mathcal{L}\}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, del Axioma de Elección se tiene que existe $N \subseteq \bigcup_{C' \in \mathcal{L}} V(C')$ tal que

$|N \cap V(C')| = 1$ para cada $C' \in \mathcal{L}$.

Afirmación 2. N es un núcleo por trayectorias de D .

Como N es un conjunto independiente por trayectorias en D , ya que $|N \cap V(C')| = 1$ y $\delta_{D^*}^+(C') = 0$ para cada $C' \in \mathcal{L}$, entonces sólo resta probar que N es un conjunto absorbente por trayectorias en D .

Sea $v \in V(D) \setminus N$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $v \in V(C)$ para alguna $C \in \mathcal{L}$.

Ya que $|N \cap V(C)| = 1$, podemos suponer que $N \cap V(C) = \{w\}$ para algún $w \in V(C)$. Como $\{v, w\} \subseteq V(C)$, se sigue de la definición de componente fuertemente conexa que $v \rightsquigarrow_D w$, lo que implica que existe una vN -trayectoria en D .

Caso 2. $v \notin V(C)$ para cada $C \in \mathcal{L}$.

Sea C' la componente fuertemente conexa de D que contiene al vértice v . Como $v \notin V(C)$ para cada $C \in \mathcal{L}$, entonces $C' \notin \mathcal{L}$. Ahora, de la afirmación 1 se tiene que existe $C'' \in \mathcal{L}$ tal que $C' \rightsquigarrow_{D^*} C''$. Finalmente, de la observación 1, en particular para $v \in V(C')$ y para $w \in (N \cap V(C''))$ se tiene que $v \rightsquigarrow_D w$.

Así, N es absorbente por trayectorias en D .

Por lo tanto, N es un núcleo por trayectorias en D . ■

El teorema 2.1.5 nos permite deducir el siguiente teorema.

Teorema 2.1.6. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada (posiblemente infinita) sin H -trayectorias infinitas exteriores y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si $\mathcal{C}_C(D) \subseteq H$, entonces D tiene H -núcleo.

Demostración.

Consideremos los siguientes hechos:

1. Todo camino en D es un H -camino en D .

Se sigue directamente de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$, de la definición de H -camino y el hecho que $\mathcal{C}_C(D) \subseteq H$.

2. D no tiene trayectorias infinitas exteriores.

Como D no tiene H -trayectorias infinitas exteriores, se sigue de 1 que D no contiene trayectorias infinitas exteriores.

Como D no contiene trayectorias infinitas exteriores, del teorema 2.1.5 se tiene que D tiene un núcleo por trayectorias, digamos N . Así, de 1 concluimos que N es un H -núcleo de D . ■

Ahora el siguiente teorema es una generalización del teorema de Sands, Sauer y Woodrow (teorema 0.9.1).

Sean D una digráfica H -coloreada y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Sea $i \in \{1, 2\}$. Diremos que un H -camino C en D es V_i coloreado si $c(w, z) \in V_i$ para cada $(w, z) \in F(C)$.

2. H-NÚCLEOS

Teorema 2.1.7. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada (posiblemente infinita) y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$ para cada $i \in \{1, 2\}$,
2. Si $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para alguna $u \in V_i$ y para alguna $v \in V_j$, con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2\}$, entonces $(u, v) \notin F(H)$, y
3. D no tiene H -trayectorias infinitas exteriores V_i coloreadas para cada $i \in \{1, 2\}$.

Entonces D tiene H -núcleo.

Demostración.

Para demostrar el teorema 2.1.7 necesitamos introducir algo de notación.

Sean $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y $S \subseteq V(D)$. Escribiremos: $u \rightsquigarrow_i v$ si existe una H -trayectoria V_i coloreada de u hacia v en D ; $u \rightsquigarrow_i S$ si existe una H -trayectoria V_i coloreada de u hacia S en D ; $S \rightsquigarrow_i v$ si existe una H -trayectoria V_i coloreada de S hacia v en D ; $u \nrightarrow_i v$ es la negación de $u \rightsquigarrow_i v$, y así sucesivamente.

Las siguientes observaciones serán útiles para probar el teorema 2.1.7.

Observación 1. Todo H -camino en D es un H -camino V_1 coloreado o un H -camino V_2 coloreado.

Sea P un H -camino en D . Procediendo por contradicción, supongamos que P no es un H -camino V_i coloreado en D para cada $i \in \{1, 2\}$. Como P no es V_1 coloreado ni V_2 coloreado, entonces existen dos flechas consecutivas en P , digamos $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(P)$, tal que $(c(u, v) \in V_1$ y $c(v, w) \in V_2)$ o $(c(u, v) \in V_2$ y $c(v, w) \in V_1)$. Puesto que P es un H -camino en D , se sigue que $(c(u, v), c(v, w)) \in F(H)$. Por otro lado, de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $(c(u, v), c(v, w)) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, lo cual contradice la condición (2) del teorema 2.1.7. Por lo tanto, P es un H -camino V_1 coloreado o V_2 coloreado en D .

Observación 2. Sea $i \in \{1,2\}$. Todo H-camino V_i coloreado en D contiene una H-trayectoria V_i coloreada.

Sea $T = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ un H-camino V_i coloreado en D . Como T es un w_0w_m -camino en D , entonces T contiene una w_0w_m -trayectoria, digamos $P = (u_0 = w_0, u_1, \dots, u_k = w_m)$. Ya que $c(w_r, w_{r+1}) \in V_i$ para cada $r \in \{0, \dots, m-1\}$ y $P \subseteq T$, se sigue que $c(u_l, u_{l+1}) \in V_i$ para cada $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Por otro lado, de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $T' = (c(u_0, u_1), \dots, c(u_{k-1}, u_k))$ es un camino en $\mathcal{C}_C(D)$. Más aún, $T' \subseteq \mathcal{C}_C(D)[V_i]$. Puesto que $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i] \subseteq H$, entonces $T' \subseteq H$. Por lo tanto, P es una w_0w_m -trayectoria V_i coloreada en D .

Observación 3. Sea $i \in \{1,2\}$. Si $T_1 = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ es un uv -H-camino V_i coloreado en D y $T_2 = (v = w_0, w_1, \dots, w_m = z)$ es un vz -H-camino V_i coloreado en D , entonces $T_1 \cup T_2$ es un uz -H-camino V_i coloreado en D .

Como $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v = w_0, w_1, \dots, w_m = z)$ es un camino en D , de la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $W = (c(u_0, u_1), \dots, c(u_{n-1}, u_n), c(w_0, w_1), \dots, c(w_{m-1}, w_m))$ es un camino en $\mathcal{C}_C(D)$. Más aún, ya que $V(W) \subseteq V_i$, entonces $W \subseteq \mathcal{C}_C(D)[V_i]$. Puesto que $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i] \subseteq H$, se sigue que W es un camino en H . Así, $T_1 \cup T_2$ es un uz -H-camino V_i coloreado en D .

Análogamente, si T_1 y T_2 son H-trayectorias V_i coloreadas en D tal que $V(T_1) \cap V(T_2) = \{v\}$, entonces $T_1 \cup T_2$ es una H-trayectoria V_i coloreada en D .

Observación 4. Si $u \rightsquigarrow_i v$ y $v \rightsquigarrow_i z$, entonces $u \rightsquigarrow_i z$.

Se sigue directamente de las observaciones 2 y 3.

Ahora, consideremos el siguiente lema, el cual nos ayudará a enunciar una observación 5.

Lema 2.1.1. Sean $i \in \{1,2\}$ y $W \subseteq V(D)$. Si para cada $u \in W$ existe $z \in W$ tal que $u \rightsquigarrow_i z$ y $z \rightarrow_i u$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ dadas:

1. dos sucesiones de vértices $(u_k)_{k \in \{1, \dots, n+2\}}$ y $(z_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$
2. una sucesión $(P_k)_{k \in \{1, \dots, n+1\}}$ de H-trayectorias V_i coloreadas en D

2. H-NÚCLEOS

3. una H -trayectoria V_i coloreada en D

$$C_n = \begin{cases} (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, u_3) & \text{si } n = 1 \\ \text{o} \\ (u_1, P_1, z_1) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (z_j, P_{j+1}, z_{j+1}) \right) \cup (z_n, P_{n+1}, u_{n+2}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

tales que

(a) $\{u_1, \dots, u_{n+2}\} \subseteq W$ y $\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq V(D)$

(b) $u_{k+1} \rightarrow_i u_k$ para cada $k \in \{1, \dots, n+1\}$

(c) P_k es una $u_k u_{k+1}$ - H -trayectoria V_i coloreada para cada $k \in \{1, \dots, n+1\}$

(d) $u_k \notin V\left(\bigcup_{j=1}^{k-2} P_j\right)$ para cada $k \in \{3, \dots, n+2\}$

(e) z_k es el primer vértice de P_k que aparece en P_{k+1} para cada $k \in \{1, \dots, n\}$

(f) $z_k \notin V\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} P_j\right) \cup V((u_k, P_k, z_{k-1}))$ para cada $k \in \{2, \dots, n\}$

se tiene que existen $u_{n+3} \in W$, $z_{n+1} \in V(D)$ y dos H -trayectorias V_i coloreadas P_{n+2} y C_{n+1} en D tales que P_{n+2} es una $u_{n+2} u_{n+3}$ - H -trayectoria V_i coloreada, $u_{n+3} \rightarrow_i u_{n+2}$, z_{n+1} es el primer vértice de P_{n+1} que aparece en P_{n+2} , $z_{n+1} \notin V\left(\bigcup_{j=1}^n P_j\right) \cup V((u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$ y

$$C_{n+1} = (u_1, P_1, z_1) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n (z_j, P_{j+1}, z_{j+1}) \right) \cup (z_{n+1}, P_{n+2}, u_{n+3}).$$

Procedamos a demostrar el lema 2.1.1.

Sea $u_1 \in W$.

2.1 H-núcleos en digráficas infinitas

Consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación (I). Existen dos vértices $\{u_2, u_3\} \subseteq W$ y dos H-trayectorias V_i coloreadas P_1 y P_2 tal que P_1 es una u_1u_2 -H-trayectoria V_i coloreada en D , P_2 es una u_2u_3 -H-trayectoria V_i coloreada en D , $u_2 \rightarrow_i u_1$, $u_3 \rightarrow_i u_2$ y $u_3 \notin V(P_1)$.

De la hipótesis del lema 2.1.1 se tiene que para $u_1 \in W$ existe $u_2 \in W$ tal que hay una u_1u_2 -H-trayectoria V_i coloreada en D , digamos P_1 , y $u_2 \rightarrow_i u_1$. Luego, para $u_2 \in W$ existe $u_3 \in W$ tal que hay una u_2u_3 -H-trayectoria V_i coloreada en D , digamos P_2 , y $u_3 \rightarrow_i u_2$. Por otro lado $u_3 \notin V(P_1)$, de otro modo como P_1 es una u_1u_2 -H-trayectoria V_i coloreada en D , entonces (u_3, P_1, u_2) es una u_3u_2 -H-trayectoria V_i coloreada en D , lo cual contradice $u_3 \rightarrow_i u_2$.

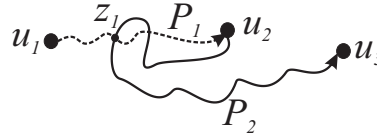


Figura 2.1

Afirmación (II). Existe un vértice $z_1 \in V(P_1)$ tal que z_1 es el primer vértice de P_1 que aparece en P_2 y $z_1 \neq u_1$.

Ya que $u_2 \in V(P_1) \cap V(P_2)$, podemos elegir un vértice $z_1 \in V(P_1)$ tal que z_1 es el primer vértice de P_1 que aparece en P_2 (ver figura 2.1). Note que $z_1 \neq u_1$, de otro modo $(u_2, P_2, z_1 = u_1)$ es una u_2u_1 -H-trayectoria V_i coloreada en D , lo cual contradice $u_2 \rightarrow_i u_1$.

Afirmación (III). $C_1 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, u_3)$ es una H-trayectoria V_i coloreada en D . De la elección de z_1 se tiene que $C_1 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, u_3)$ es una H-trayectoria V_i coloreada en D .

Sea $T_1 = (u_1, P_1, z_1)$.

Para $n = 1$ consideremos a las sucesiones (u_1, u_2, u_3) , (P_1, P_2) , (z_1) y a la H-trayectoria V_i

2. H-NÚCLEOS

coloreada $C_1 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, u_3)$.

Afirmación (IV). Existen un vértice $u_4 \in W$ y una H -trayectoria V_i coloreada P_3 en D tal que $u_4 \rightarrow_i u_3$, P_3 es una $u_3 u_4$ - H -trayectoria V_i coloreada y $u_4 \notin V(P_1 \cup P_2)$.

Se sigue de la hipótesis del lema 2.1.1 que para $u_3 \in W$ existe $u_4 \in W$ tal que hay una $u_3 u_4$ - H -trayectoria V_i coloreada en D , digamos P_3 , y $u_4 \rightarrow_i u_3$. Note que $u_4 \notin V(P_1 \cup P_2)$, de otro modo, ya que $P_1 \cup P_2$ es un $u_1 u_3$ - H -camino V_i coloreado, se sigue que $(u_4, P_1 \cup P_2, u_3)$ contiene una $u_4 u_3$ - H -trayectoria V_i coloreada (debido a la observación 2), lo cual contradice que $u_4 \rightarrow_i u_3$.

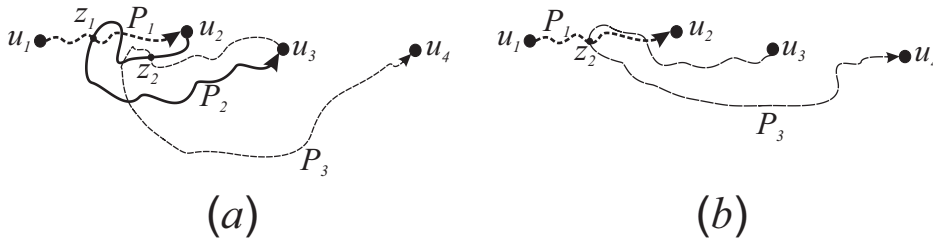


Figura 2.2

Afirmación (V). Existe un vértice $z_2 \in V(P_2)$ tal que z_2 es el primer vértice de P_2 que aparece en P_3 y $z_2 \notin V(P_1) \cup V(P'_2 = (u_2, P_2, z_1))$.

Ya que $u_3 \in V(P_2) \cap V(P_3)$, podemos elegir un vértice $z_2 \in V(P_2)$ tal que z_2 es el primer vértice de P_2 que aparece en P_3 . Note que $z_2 \notin V(P_1) \cup V(P'_2 = (u_2, P_2, z_1))$, de otro modo, si $z_2 \in V(P_1)$, entonces $(u_3, P_3, z_2) \cup (z_2, P_1, u_2)$ contiene una $u_3 u_2$ - H -trayectoria V_i coloreada en D (ver figura 2.2 (b)) o si $z_2 \in V(P'_2)$, entonces $(u_3, P_3, z_2) \cup (z_2, P'_2, z_1) \cup (z_1, P_1, u_2)$ contiene una $u_3 u_2$ - H -trayectoria V_i coloreada en D (ver figura 2.2 (a)), y en ambos casos obtenemos una contradicción con $u_3 \rightarrow_i u_2$.

Afirmación (VI). $C_2 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, z_2) \cup (z_2, P_3, u_4)$ es una H -trayectoria V_i coloreada en D .

De la elección de z_2 se tiene que $C_2 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, z_2) \cup (z_2, P_3, u_4)$ es una H -trayectoria V_i coloreada en D .

Sea $T_2 = (u_1, P_1, z_1) \cup (z_1, P_2, z_2)$. Note que $T_1 \subseteq T_2$.

Supongamos que en D tenemos lo siguiente: dos sucesiones de vértices $(u_k)_{k \in \{1, \dots, n+2\}}$ y $(z_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$, una sucesión de H -trayectorias V_i coloreadas $(P_k)_{k \in \{1, \dots, n+1\}}$ y una H -trayectoria V_i coloreada $C_n = (u_1, P_1, z_1) \cup (\bigcup_{j=1}^{n-1} (z_j, P_{j+1}, z_{j+1})) \cup (z_n, P_{n+1}, u_{n+2})$ tales que satisfacen los incisos (a), (b), (c), (d), (e) y (f).

Sea $T_n = (u_1, P_1, z_1) \cup (\bigcup_{j=1}^{n-1} (z_j, P_{j+1}, z_{j+1}))$.

Por demostrar que el lema 2.1.1 se cumple para n .

Afirmación (VII). Existen un vértice $u_{n+3} \in W$ y una H -trayectoria V_i coloreada P_{n+2} en D tal que $u_{n+3} \rightarrow_i u_{n+2}$, P_{n+2} es una $u_{n+2}u_{n+3}$ - H -trayectoria V_i coloreada y $u_{n+3} \notin V(\bigcup_{j=1}^{n+1} P_j)$.

De la hipótesis del lema 2.1.1 tenemos que para $u_{n+2} \in W$, existe $u_{n+3} \in W$ tal que en D hay una $u_{n+2}u_{n+3}$ - H -trayectoria V_i coloreada, digamos P_{n+2} , y $u_{n+3} \rightarrow_i u_{n+2}$.

Por otro lado, afirmamos que $u_{n+3} \notin V(\bigcup_{j=1}^{n+1} P_j)$. Procediendo por contradicción, supongamos que $u_{n+3} \in V(\bigcup_{j=1}^{n+1} P_j)$. Ya que $\bigcup_{j=1}^{n+1} P_j$ es un u_1u_{n+2} - H -camino V_i coloreado en D , entonces

$(u_{n+3}, \bigcup_{j=1}^{n+1} P_j, u_{n+2})$ es un $u_{n+3}u_{n+2}$ - H -camino V_i coloreado en D . Se sigue de la observación

2 que $(u_{n+3}, \bigcup_{j=1}^{n+1} P_j, u_{n+2})$ contiene una $u_{n+3}u_{n+2}$ - H -trayectoria V_i coloreada en D , lo cual

contradice $u_{n+3} \rightarrow_i u_{n+2}$. Por lo tanto, $u_{n+3} \notin V(\bigcup_{j=1}^{n+1} P_j)$.

Afirmación (VIII). Existe un vértice $z_{n+1} \in V(P_{n+1})$ tal que z_{n+1} es el primer vértice de P_{n+1} que aparece en P_{n+2} y $z_{n+1} \notin V(\bigcup_{j=1}^n P_j) \cup V(P'_{n+1} = (u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$.

Ya que $u_{n+2} \in V(P_{n+1}) \cap V(P_{n+2})$, podemos elegir un vértice $z_{n+1} \in V(P_{n+1})$ tal que z_{n+1}

2. H-NÚCLEOS

es el primer vértice de P_{n+1} que aparece en P_{n+2} . Luego, afirmamos que $z_{n+1} \notin V(\bigcup_{j=1}^n P_j) \cup V(P'_{n+1} = (u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$. Procediendo por contradicción, supongamos que $z_{n+1} \in V(\bigcup_{j=1}^n P_j) \cup V((u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$. Si $z_{n+1} \in V(\bigcup_{j=1}^n P_j)$, entonces $(u_{n+2}, P_{n+2}, z_{n+1}) \cup (z_{n+1}, \bigcup_{j=1}^n P_j, u_{n+1})$ contiene una $u_{n+2}u_{n+1}$ -H-trayectoria V_i coloreada en D , lo cual contradice $u_{n+2} \not\rightarrow_i u_{n+1}$. Si $z_{n+1} \in V((u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$, entonces $(u_{n+2}, P_{n+2}, z_{n+1}) \cup (z_{n+1}, P'_{n+1}, z_n) \cup (z_n, P_n, u_{n+1})$ contiene una $u_{n+2}u_{n+1}$ -H-trayectoria V_i coloreada en D , lo cual contradice $u_{n+2} \not\rightarrow_i u_{n+1}$. Por lo tanto $z_{n+1} \notin V(\bigcup_{j=1}^n P_j) \cup V(P'_{n+1} = (u_{n+1}, P_{n+1}, z_n))$.

Afirmación (IX). $C_{n+1} = (u_1, P_1, z_1) \cup (\bigcup_{j=1}^n (z_j, P_{j+1}, z_{j+1})) \cup (z_{n+1}, P_{n+2}, u_{n+3})$ es una H-trayectoria V_i coloreada en D .

De la elección de z_{n+1} se tiene que $C_{n+1} = (u_1, P_1, z_1) \cup (\bigcup_{j=1}^n (z_j, P_{j+1}, z_{j+1})) \cup (z_{n+1}, P_{n+2}, u_{n+3})$ es una H-trayectoria V_i coloreada en D .

Sea $T_{n+1} = (u_1, P_1, z_1) \cup (\bigcup_{j=1}^n (z_j, P_{j+1}, z_{j+1}))$. Note que $T_n \subseteq T_{n+1}$.

Así, queda demostrado el lema 2.1.1.

Observación 5. Sean $i \in \{1,2\}$ y $W \subseteq V(D)$. Si para cada $u \in W$ existe $z \in W$ tal que $u \rightsquigarrow_i z$ y $z \not\rightarrow_i u$, entonces D contiene una H-trayectoria infinita exterior V_i coloreada.

Se sigue del lema 2.1.1 que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ contiene una H-trayectoria infinita exterior V_i coloreada en D .

Ahora procedamos a demostrar el teorema 2.1.7.

Para $S, T \subseteq V(D)$ diremos que $S \leq T$ si para todo $s \in S$ existe $t \in T$ tal que $s = t$ o $(s \rightsquigarrow_1 t$ y $t \rightarrow_1 s)$. Notemos que si $S \subseteq T$, entonces $S \leq T$.

Sea $\mathcal{I} = \{I \subseteq V(D) \mid I \text{ es un conjunto } H\text{-independiente en } D\}$.

Utilizando la definición de \leq demostraremos los siguientes hechos:

1. (\mathcal{I}, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.

[reflexiva] Sea $A \in \mathcal{I}$. Como $A \subseteq A$, entonces $A \leq A$.

[antisimétrica] Sean $A, B \in \mathcal{I}$ tales que $A \leq B$ y $B \leq A$.

Por demostrar que $A = B$. Primero veremos que $A \subseteq B$. Sea $a \in A$. Como $A \leq B$, entonces para $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a = b$ o $(a \rightsquigarrow_1 b \text{ y } b \dashrightarrow_1 a)$. Por otro lado, debido a que $B \leq A$, se tiene que para $b \in B$ existe $a' \in A$ tal que $b = a'$ o $(b \rightsquigarrow_1 a' \text{ y } a' \dashrightarrow_1 b)$.

Consideremos los siguientes cuatro casos:

Caso 1. $a = b$ y $b = a'$

En este caso se tiene que $a \in B$.

Caso 2. $a = b$ y $(b \rightsquigarrow_1 a' \text{ y } a' \dashrightarrow_1 b)$

En este caso se tiene que $a \rightsquigarrow_1 a'$ y $a' \dashrightarrow_1 a$, lo que implica que $a \neq a'$. Por lo tanto existen dos vértices distintos en A , a saber a y a' , tales que hay una H -trayectoria entre ellos en D , lo cual contradice que A es H -independiente en D .

Caso 3. $(a \rightsquigarrow_1 b \text{ y } b \dashrightarrow_1 a)$ y $b = a'$

En este caso se tiene que $a \rightsquigarrow_1 a'$ y $a' \dashrightarrow_1 a$, lo que implica que $a \neq a'$. Argumentando como en el caso 2 se llega a una contradicción.

Caso 4. $(a \rightsquigarrow_1 b \text{ y } b \dashrightarrow_1 a)$ y $(b \rightsquigarrow_1 a' \text{ y } a' \dashrightarrow_1 b)$

En este caso note que $a \neq a'$, de otro modo, como $b \rightsquigarrow_1 a'$, tenemos que $b \rightsquigarrow_1 a$, lo cual contradice que $b \dashrightarrow_1 a$. Ya que $a \rightsquigarrow_1 b$ y $b \rightsquigarrow_1 a'$, de la observación 4 se tiene que $a \rightsquigarrow_1 a'$. Argumentando como en el caso 2 se llega a una contradicción.

Como los casos 2, 3 y 4 producen una contradicción, se concluye que $a = b = a'$. Así, $A \subseteq B$.

2. H-NÚCLEOS

De manera análoga se demuestra que $B \subseteq A$.

[transitiva] Sean $A, B, C \in \mathcal{I}$ tales que $A \leq B$ y $B \leq C$.

Por demostrar que $A \leq C$. Sea $a \in A$. Probaremos que para $a \in A$ existe $c \in C$ tal que $a = c$ o ($a \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 a$). Como $A \leq B$, entonces para $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a = b$ o ($a \rightsquigarrow_1 b$ y $b \rightarrow_1 a$). Por otro lado, debido a que $B \leq C$, se tiene que para $b \in B$ existe $c \in C$ tal que $b = c$ o ($b \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 b$).

Consideremos los siguientes cuatro casos:

Caso A. $a = b$ y $b = c$

En este caso se tiene que $a = c$.

Caso B. $a = b$ y ($b \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 b$)

En este caso se tiene que $a \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 a$.

Caso C. ($a \rightsquigarrow_1 b$ y $b \rightarrow_1 a$) y $b = c$

En este caso se tiene que $a \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 a$.

Caso D. ($a \rightsquigarrow_1 b$ y $b \rightarrow_1 a$) y ($b \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 b$)

En este caso note que $a \neq c$, de otro modo, como $b \rightsquigarrow_1 c$, tenemos que $b \rightsquigarrow_1 a$, lo cual contradice que $b \rightarrow_1 a$. Ya que $a \rightsquigarrow_1 b$ y $b \rightsquigarrow_1 c$, de la observación 4 se tiene que $a \rightsquigarrow_1 c$. Además $c \rightarrow_1 a$, de otro modo, como $c \rightsquigarrow_1 a$ y $a \rightsquigarrow_1 b$, de la observación 4 se tiene que $c \rightsquigarrow_1 b$, lo cual contradice que $c \rightarrow_1 b$.

Por lo tanto para $a \in A$ existe $c \in C$ tal que $a = c$ o ($a \rightsquigarrow_1 c$ y $c \rightarrow_1 a$).

Así, (\mathcal{I}, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.

2. $\mathcal{L} = \{S \in \mathcal{I} \mid S \neq \emptyset \text{ y } S \rightsquigarrow_2 y \text{ implica que } y \rightsquigarrow_H S \text{ para cada } y \in V(D)\} \neq \emptyset$.

2.1 H-núcleos en digráficas infinitas

Notemos que existe $v \in V(D)$ tal que si $v \rightsquigarrow_2 y$, entonces $y \rightsquigarrow_2 v$ para cada $y \in V(D)$. En otro caso, se sigue de la observación 5 que D contiene una H -trayectoria infinita exterior, lo cual no es posible. Por lo tanto $\{v\} \in \mathcal{L}$, y así $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

3. (\mathcal{L}, \leq) tiene un elemento maximal.

Demostraremos que toda cadena en (\mathcal{L}, \leq) tiene una cota superior en \mathcal{L} .

Sean \mathcal{C} una cadena en (\mathcal{L}, \leq) y

$$S^\infty = \{s \in \bigcup \mathcal{C} \mid \text{existe } S \in \mathcal{C} \text{ tal que } s \in T \text{ para cada } T \in \mathcal{C} \text{ que satisface } T \geq S\}.$$

Veremos que S^∞ es una cota superior de \mathcal{C} y $S^\infty \in \mathcal{L}$.

- Por demostrar que $S^\infty \neq \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $S^\infty = \emptyset$.

Afirmamos que para cada $s \in \bigcup \mathcal{C}$ existe $w \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $s \rightsquigarrow_1 w$ y $w \rightarrow_1 s$. Sean

$s \in \bigcup \mathcal{C}$ y $S \in \mathcal{C}$ tales que $s \in S$. Como $s \notin S^\infty$, entonces para $S \in \mathcal{C}$ existe

$S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$. Ya que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$, existe $s_1 \in S_1$ tal que $s \rightsquigarrow_1 s_1$ y $s_1 \rightarrow_1 s$.

Por lo tanto, se sigue de la observación 5 que D contiene una H -trayectoria infinita exterior, lo cual contradice una de las hipótesis del teorema 2.1.7.

- Por demostrar que $S \leq S^\infty$ para cada $S \in \mathcal{C}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $S_0 \in \mathcal{C}$ tal que $S_0 \not\leq S^\infty$.

Ya que $S_0 \not\leq S^\infty$, entonces existe $s_0 \in S_0$ tal que $s_0 \notin S^\infty$ y para cada $z \in S^\infty$ se tiene que $s_0 \rightarrow_1 z$ o $z \rightsquigarrow_1 s_0$.

Como $s_0 \notin S^\infty$, entonces para $S_0 \in \mathcal{C}$ existe $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \geq S_0$ y $s_0 \notin S_1$. Ya que $s_0 \notin S_1$ y $S_1 \geq S_0$, para $s_0 \in S_0$ existe $s_1 \in S_1$ tal que $s_0 \rightsquigarrow_1 s_1$ y $s_1 \rightarrow_1 s_0$. Por otro lado, debido a que para cada $z \in S^\infty$ se tiene que $s_0 \rightarrow_1 z$ o $z \rightsquigarrow_1 s_0$, se sigue que $s_1 \notin S^\infty$.

Demostraremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ dadas dos sucesiones $(S_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ y $(s_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ tal que

2. H-NÚCLEOS

- $\alpha)$ $S_k \in \mathcal{C}$ y $s_k \in S_k$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$
- $\beta)$ $s_k \notin S_{k+1}$ para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$
- $\gamma)$ $S_k \geq S_{k-1}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$
- $\theta)$ $s_k \notin S^\infty$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$
- $\lambda)$ $s_0 \rightsquigarrow_1 s_k$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$
- $\sigma)$ $s_{k-1} \rightsquigarrow_1 s_k$ y $s_k \nrightarrow_1 s_{k-1}$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$

se tiene que existen $S_{n+1} \in \mathcal{C}$ y $s_{n+1} \in S_{n+1}$ tal que $S_{n+1} \geq S_n$, $s_n \notin S_{n+1}$, $s_0 \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$, $s_n \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$, $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_n$ y $s_{n+1} \notin S^\infty$.

Para $n = 1$ consideremos a las sucesiones (S_0, S_1) y (s_0, s_1) .

Consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación (a). Existen $S_2 \in \mathcal{C}$ y $s_2 \in S_2$ tal que $S_2 \geq S_1$, $s_1 \notin S_2$, $s_1 \rightsquigarrow_1 s_2$, $s_2 \nrightarrow_1 s_1$ y $s_0 \rightsquigarrow_1 s_2$.

Como $s_1 \notin S^\infty$, existe $S_2 \in \mathcal{C}$ tal que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$. Ya que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$, para $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 \rightsquigarrow_1 s_2$ y $s_2 \nrightarrow_1 s_1$.

Por otro lado, debido a que $s_0 \rightsquigarrow_1 s_1$ y $s_1 \rightsquigarrow_1 s_2$, se sigue de la observación 4 que $s_0 \rightsquigarrow_1 s_2$.

Afirmación (b). $s_2 \nrightarrow_1 s_0$ y $s_2 \notin S^\infty$.

Primero veremos que $s_2 \nrightarrow_1 s_0$. Procediendo por contradicción, supongamos que $s_2 \rightsquigarrow_1 s_0$. Ya que $s_2 \rightsquigarrow_1 s_0$ y $s_0 \rightsquigarrow_1 s_1$, se sigue de la observación 4 que $s_2 \rightsquigarrow_1 s_1$, lo cual contradice que $s_2 \nrightarrow_1 s_1$.

Puesto que para cada $z \in S^\infty$ se tiene que $s_0 \nrightarrow_1 z$ o $z \rightsquigarrow_1 s_0$, se sigue del hecho que $s_2 \nrightarrow_1 s_0$ y de la afirmación (a) que $s_2 \notin S^\infty$.

Supongamos que en D tenemos dos sucesiones $(S_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ y $(s_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ que satisfacen los incisos (α) , (β) , (γ) , (θ) , (λ) y (σ) .

Veremos que existen $S_{n+1} \in \mathcal{C}$ y $s_{n+1} \in S_{n+1}$ tal que $S_{n+1} \geq S_n$, $s_n \notin S_{n+1}$, $s_n \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$, $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_n$ y $s_{n+1} \notin S^\infty$.

Afirmación (c). Existen $S_{n+1} \in \mathcal{C}$ y $s_{n+1} \in S_{n+1}$ tal que $S_{n+1} \geq S_n$, $s_n \notin S_{n+1}$, $s_n \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$, $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_n$ y $s_0 \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$.

Por (θ) se sigue que $s_n \notin S^\infty$, lo que implica que existe $S_{n+1} \in \mathcal{C}$ tal que $S_{n+1} \geq S_n$ y $s_n \notin S_{n+1}$. Ya que $S_{n+1} \geq S_n$ y $s_n \notin S_{n+1}$, para $s_n \in S_n$ existe $s_{n+1} \in S_{n+1}$ tal que $s_n \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$ y $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_n$.

Por otro lado, se sigue de (λ) que $s_0 \rightsquigarrow_1 s_n$, y puesto que $s_n \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$, de la observación 4 se tiene que $s_0 \rightsquigarrow_1 s_{n+1}$.

Afirmación (d). $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_0$ y $s_{n+1} \notin S^\infty$.

Primero veremos que $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_0$. Procediendo por contradicción, supongamos que $s_{n+1} \rightsquigarrow_1 s_0$. Ya que $s_{n+1} \rightsquigarrow_1 s_0$ y $s_0 \rightsquigarrow_1 s_n$, de la observación 4 se tiene que $s_{n+1} \rightsquigarrow_1 s_n$, lo cual contradice que $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_n$.

Puesto que para cada $z \in S^\infty$ se tiene que $s_0 \nrightarrow_1 z$ o $z \rightsquigarrow_1 s_0$, se sigue del hecho que $s_{n+1} \nrightarrow_1 s_0$ y de la afirmación (c) que $s_{n+1} \notin S^\infty$.

Como $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ satisface las hipótesis de la observación 5, se sigue que D contiene una H -trayectoria infinita exterior, lo cual contradice una de las hipótesis del teorema 2.1.7.

Así, $S \leq S^\infty$ para cada $S \in \mathcal{C}$.

- Por demostrar que $S^\infty \in \mathcal{I}$.

Por demostrar que S^∞ es H -independiente en D . Sean $s, t \in S^\infty$. De la definición de S^∞ se tiene que existen S y T en \mathcal{C} tales que $s \in T_1$ para cada $T_1 \in \mathcal{C}$ tal que $T_1 \geq S$ y $t \in T_2$ para cada $T_2 \in \mathcal{C}$ tal que $T_2 \geq T$. Debido a que \mathcal{C} es una cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S \geq T$. Por lo tanto $s, t \in S_1$ para toda $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \geq S$, ya que \leq es transitiva y $t \in T_2$ para cada $T_2 \in \mathcal{C}$ tal que $T_2 \geq T$. Por otro lado, en particular, como S_1 es H -independiente en D para todo $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \geq S$, entonces en D no existen H -trayectorias entre s y t . Por lo tanto S^∞ es H -independiente en D .

- Por demostrar que $S^\infty \in \mathcal{L}$.

Como S^∞ es H -independiente en D , entonces sólo resta probar que si $S^\infty \rightsquigarrow_2 y$ para algún $y \in V(D)$, entonces $y \rightsquigarrow_H S^\infty$.

Supongamos que existe $y \in V(D)$ tal que $S^\infty \rightsquigarrow_2 y$. Por demostrar que $y \rightsquigarrow_H S^\infty$. Sean $s \in S^\infty$ y $S \in \mathcal{C}$ tales que $s \in S$ y $s \rightsquigarrow_2 y$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$, se tiene que $S \in \mathcal{L}$,

2. H-NÚCLEOS

lo que implica que $y \rightsquigarrow_H S$. Sea $t \in S$ tal que $y \rightsquigarrow_H t$.

Consideremos los dos siguientes casos:

Caso I. $t \in S^\infty$.

En este caso se tiene que $y \rightsquigarrow_H S^\infty$.

Caso II. $t \notin S^\infty$.

Notemos que $t \neq s$ (porque $s \in S^\infty$). Como $t \notin S^\infty$ y $S \leq S^\infty$, entonces para $t \in S$ existe $t^\infty \in S^\infty$ tal que $t \rightsquigarrow_1 t^\infty$ y $t^\infty \dashrightarrow_1 t$.

Por otro lado, ya que $y \rightsquigarrow_H t$, se afirma que $y \rightsquigarrow_1 t$, de otro modo como $s \rightsquigarrow_2 y$ y $y \rightsquigarrow_2 t$, de la observación 4 se tiene que $s \rightsquigarrow_2 t$, lo cual contradice que S es H -independiente en D (porque $\{s, t\} \subseteq S$, $t \neq s$).

Finalmente, ya que $y \rightsquigarrow_1 t$ y $t \rightsquigarrow_1 t^\infty$, se sigue de la observación 4 que $y \rightsquigarrow_1 t^\infty$.

Así, $S^\infty \in \mathcal{L}$.

Por lo tanto toda cadena en (\mathcal{L}, \leq) tiene una cota superior en \mathcal{L} .

Se sigue del lema de Zorn que (\mathcal{L}, \leq) tiene un elemento maximal, digamos N .

Afirmación 3. N es un H -núcleo de D .

Como N es H -independiente en D , entonces sólo resta probar que N es H -absorbente en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que N no es H -absorbente en D .

Sea $X = \{w \in V(D) \setminus N \mid w \dashrightarrow_H N\}$.

Notemos que $X \neq \emptyset$ (debido a que N no es H -absorbente en D). Por otro lado, ya que D no tiene H -trayectorias infinitas exteriores, de la contrapositiva de la observación 5

se tiene que existe $x_0 \in X$ tal que si $x_0 \rightsquigarrow_2 y$, entonces $y \rightsquigarrow_2 x_0$ para cada $y \in X$.

Consideremos al conjunto $T = \{t \in N \mid t \rightarrow_1 x_0\}$.

Ahora, notemos que:

(A) $N \rightarrow_2 x_0$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $N \rightsquigarrow_2 x_0$. Como $N \in \mathcal{L}$ y $N \rightsquigarrow_2 x_0$, de la definición de \mathcal{L} se tiene que $x_0 \rightsquigarrow_H N$, lo cual no es posible por la definición de X y porque $x_0 \in X$.

(B) $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que $T \cup \{x_0\}$ no es H -independiente en D . Como $T \cup \{x_0\}$ no es H -independiente en D , existen $u, v \in T \cup \{x_0\}$ tal que $u \rightsquigarrow_H v$. Puesto que T es H -independiente en D (porque $T \subseteq N$), se tiene que ($u \in T$ y $v = x_0$) o ($v \in T$ y $u = x_0$). Si $u \in T$ y $v = x_0$, entonces $T \rightsquigarrow_H x_0$, lo cual contradice la definición de T o el inciso (A) (porque $T \subseteq N$). Si $v \in T$ y $u = x_0$, entonces $x_0 \rightsquigarrow_H T$, lo cual contradice $x_0 \rightarrow_H N$ (porque $T \subseteq N$).

(C) $T \cup \{x_0\} \geq N$.

Sea $u \in N$. Por demostrar que para $u \in N$ existe $v \in T \cup \{x_0\}$ tal que $u = v$ o ($u \rightsquigarrow_1 v$ y $v \rightarrow_1 u$). Si $u \in T$, entonces ya acabamos. Si $u \notin T$, de la definición de T se tiene que $u \rightsquigarrow_1 x_0$. Además, $x_0 \rightarrow_1 u$ (porque $x_0 \rightarrow_H N$ y $u \in N$).

Por otro lado, como N es un elemento maximal de (\mathcal{L}, \leq) , de los incisos (B) y (C) se tiene que $T \cup \{x_0\} \notin \mathcal{L}$. Puesto que $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente en D (debido a (B)) y $T \cup \{x_0\} \notin \mathcal{L}$, se tiene que existe $z \in V(D)$ tal que $(T \cup \{x_0\}) \rightsquigarrow_2 z$ y $z \rightarrow_H (T \cup \{x_0\})$.

Consideremos las siguientes afirmaciones concernientes al vértice z .

(I) $T \rightarrow_2 z$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $T \rightsquigarrow_2 z$.

Observe que:

(a) $z \rightsquigarrow_H N$ y $z \rightsquigarrow_H (N \setminus T)$.

2. H-NÚCLEOS

Como $N \in \mathcal{L}$, $T \rightsquigarrow_2 z$ y $T \subseteq N$, de la definición de \mathcal{L} se tiene que $z \rightsquigarrow_H N$. Por otro lado, ya que $z \dashrightarrow_H T$ (porque $z \dashrightarrow_H (T \cup \{x_0\})$) y $z \rightsquigarrow_H N$, se sigue que $z \rightsquigarrow_H (N \setminus T)$.

(b) $z \dashrightarrow_2 (N \setminus T)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $z \rightsquigarrow_2 (N \setminus T)$. Como $T \rightsquigarrow_2 z$ (por la suposición inicial de (I)) y $z \rightsquigarrow_2 (N \setminus T)$, de la observación 4 se tiene que $T \rightsquigarrow_2 N \setminus T$, lo cual contradice que N es un conjunto H -independiente en D (ver figura 2.3 (a)).

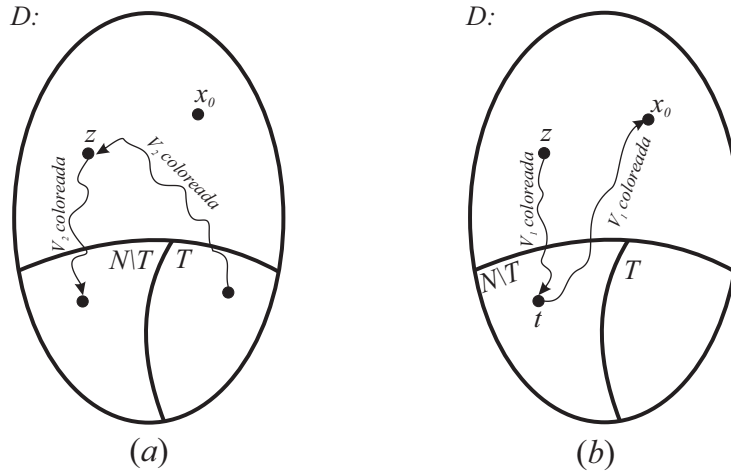


Figura 2.3

(c) $z \rightsquigarrow_1 (N \setminus T)$.

Ya que $z \rightsquigarrow_H (N \setminus T)$ (por el inciso (a)) y $z \dashrightarrow_2 (N \setminus T)$ (por el inciso (b)), se tiene que $z \rightsquigarrow_1 (N \setminus T)$.

Sea $t \in N \setminus T$ tal que $z \rightsquigarrow_1 t$.

(d) $t \rightsquigarrow_1 x_0$ y $z \rightsquigarrow_1 x_0$.

Puesto que $t \in N \setminus T$, de la definición de T se tiene que $t \rightsquigarrow_1 x_0$. Por otro lado, ya que $z \rightsquigarrow_1 t$ y $t \rightsquigarrow_1 x_0$ (ver figura 2.3 (b)), de la observación 4 se tiene que $z \rightsquigarrow_1 x_0$.

Finalmente, note que el inciso (d) contradice que $z \rightarrow_H (T \cup \{x_0\})$.

Por lo tanto, $T \rightarrow_2 z$.

(II) $x_0 \rightsquigarrow_2 z$.

Ya que $(T \cup \{x_0\}) \rightsquigarrow_2 z$, se sigue del inciso (I) que $x_0 \rightsquigarrow_2 z$.

(III) $z \notin N$.

Como $x_0 \rightsquigarrow_2 z$ (por el inciso (II)) y $x_0 \rightarrow_H N$, entonces $z \notin N$.

(IV) $z \rightarrow_H N$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $z \rightsquigarrow_H N$.

Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. $z \rightsquigarrow_2 N$.

Ya que $x_0 \rightsquigarrow_2 z$ (por el inciso (II)) y $z \rightsquigarrow_2 N$, de la observación 4 se tiene que $x_0 \rightsquigarrow_2 N$ (ver figura 2.4 (a)), lo cual contradice $x_0 \rightarrow_H N$.

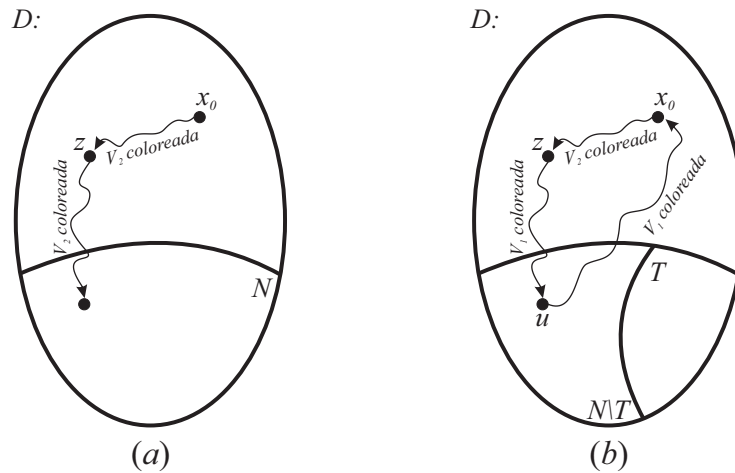


Figura 2.4

Caso 2. $z \rightsquigarrow_1 N$.

En este caso probaremos las siguientes afirmaciones.

(i) $z \rightsquigarrow_1 (N \setminus T)$.

Ya que $z \rightsquigarrow_1 N$ y $z \rightarrow_H T$ (porque $z \rightarrow_H (T \cup \{x_0\})$), se sigue que $z \rightsquigarrow_1 (N \setminus T)$.

2. H-NÚCLEOS

Sea $u \in N \setminus T$ tal que $z \rightsquigarrow_1 u$.

(ii) $u \rightsquigarrow_1 x_0$ y $z \rightsquigarrow_1 x_0$.

Ya que $u \notin T$, de la definición de T se tiene que $u \rightsquigarrow_1 x_0$. Por otro lado, como $z \rightsquigarrow_1 u$ y $u \rightsquigarrow_1 x_0$, de la observación 4 se tiene que $z \rightsquigarrow_1 x_0$ (ver figura 2.4 (b)).

Note que el inciso (ii) contradice $z \nrightarrow_H (T \cup \{x_0\})$.

Por lo tanto $z \nrightarrow_H N$.

Finalmente, hemos demostrado que z es un vértice de X tal que $x_0 \rightsquigarrow_2 z$ y $z \nrightarrow_2 x_0$, lo cual contradice la elección de x_0 .

Se sigue que N es H -absorbente en D .

Por lo tanto, N es un H -núcleo en D . ■

Ahora, los siguientes resultados son una consecuencia directa del teorema 2.1.7.

Corolario 2.1.1. (Sands, Sauer y Woodrow [46])

Toda digráfica 2-coloreada sin trayectorias infinitas exteriores monocromáticas tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Sea D una digráfica 2-coloreada sin trayectorias infinitas exteriores monocromáticas.

Supongamos que las flechas de D están coloreadas con los vértices de una digráfica H que tiene conjunto de vértices $V(H) = \{1, 2\}$ y conjunto de flechas $F(H) = \{(1,1), (2,2)\}$.

Como $V(\mathcal{C}_C(D)) = \{1,2\} = V(H)$ y $F(H) = \{(x,x) \mid x \in V(H)\}$, entonces la partición $\{V_1 = \{1\}, V_2 = \{2\}\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ cumple con las hipótesis del teorema 2.1.7.

Así, D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Corolario 2.1.2. (*H. Galeana-Sánchez [28]*)

Sea D una digráfica m -coloreada. Si $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica bipartita, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración.

Supongamos que las flechas de D están coloreadas con los vértices de una digráfica H que tiene conjunto de vértices $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y conjunto de flechas $F(H) = \{(k,k) \mid k \in \{u_1, u_2, \dots, u_m\}\}$.

Sea $\{V_1, V_2\}$ la partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ que hace que $\mathcal{C}_C(D)$ sea una digráfica bipartita.

Como $V(\mathcal{C}_C(D)) \subseteq V(H)$, $\mathcal{C}_C(D)[V_i]$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$ para cada $i \in \{1,2\}$ y $F(H) = \{(x,x) \mid x \in V(H)\}$, entonces la partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ cumple con las hipótesis del teorema 2.1.7.

Por lo tanto D tiene un H -núcleo por trayectorias, el cual es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D . ■

2.2 H -núcleos en digráficas finitas

En esta sección la digráfica D es una digráfica finita y simple.

El siguiente teorema nos dice que si la estructura de la digráfica de clases cromáticas de una digráfica H -coloreada es parecida a la de una digráfica en \mathcal{B}_3 , respecto a H , entonces la digráfica H -coloreada tendrá H -núcleo por caminos, con H no necesariamente en \mathcal{B}_3 .

Teorema 2.2.1. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Si existen $H' \in \mathcal{B}_3$, con $V(H') = \{1, \dots, p\}$, y una partición $\{V_1, \dots, V_p\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. (a) Para $i \neq j$ si existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, entonces $(i,j) \in F(H')$ si y sólo si toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .
 (b) $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.
2. Para $i \neq j$, si existe una $V_i V_j$ -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$, entonces toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .

2. H-NÚCLEOS

Entonces D tiene H -núcleo por caminos.

Demostración.

Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $H' \in \mathcal{B}_3$ como en las hipótesis del teorema 2.2.1.

Para demostrar que D tiene H -núcleo por caminos, consideremos a la digráfica H' -coloreada, D' , obtenida de D como sigue:

$$\begin{aligned} V(D') &= V(D) \text{ y } F(D') = F(D) \\ c_{D'}(u,v) &= i \text{ si y sólo si } c_D(u,v) \in V_i \end{aligned}$$

($c_{D'}(u,v)$ es el color de la flecha (u,v) en D' y $c_D(u,v)$ es el color de la flecha (u,v) en D).

Las siguientes afirmaciones serán útiles para demostrar el teorema 2.2.1.

Afirmación 1. Existe un uv - H -camino en D si y sólo si existe un uv - H' -camino en D' .

[\implies] Sea $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ un uv - H -camino en D . Supongamos que $c_D(x_k, x_{k+1}) \in V_{i_k}$ para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (note que los conjuntos V_{i_k} no necesariamente son distintos).

Como $(u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ es un camino en D' (por construcción de D'), sólo resta probar que $((c_{D'}(x_k, x_{k+1}) = i_k, c_{D'}(x_{k+1}, x_{k+2}) = i_{k+1}) \in F(H')$ para cada $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

Sea $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

Si $V_{i_k} = V_{i_{k+1}}$, entonces $i_k = i_{k+1}$. Así $((c_{D'}(x_k, x_{k+1}) = i_k, c_{D'}(x_{k+1}, x_{k+2}) = i_{k+1}) \in F(H')$, porque $(i_k, i_k) \in F(H')$.

Supongamos que $V_{i_k} \neq V_{i_{k+1}}$. De la definición de H -camino y la definición de $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$. Así, de la condición (2) del teorema 2.2.1 se tiene que toda $V_{i_k} V_{i_{k+1}}$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H para cada $k \in \{0, \dots, n-2\}$. Luego, se sigue de la condición (1) del teorema 2.2.1 que $(i_k, i_{k+1}) \in F(H')$.

Por lo tanto $(u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ es un uv - H' -camino en D' .

[\impliedby] Sea $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_m = v)$ un uv - H' -camino en D' . Supongamos que

2.2 H -núcleos en digráficas finitas

$c_{D'}(x_k, x_{k+1}) = i_k$ para cada $k \in \{0, \dots, m-1\}$ (note que las i_k no necesariamente son distintas). Ya que $c_{D'}(x_k, x_{k+1}) = i_k$ para cada $k \in \{0, \dots, m-1\}$, de la construcción de D' se tiene que $c_D(x_k, x_{k+1}) \in V_{i_k}$ para cada $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Puesto que $(u = x_0, x_1, \dots, x_m = v)$ es un camino en D (por construcción de D'), sólo resta probar que $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(H)$ para cada $k \in \{0, \dots, m-2\}$.

Sea $k \in \{0, \dots, m-2\}$.

Si $i_k = i_{k+1}$, entonces $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(H)$, porque $\{(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2}))\} \subseteq V_{i_k}$, $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(\mathcal{C}_C(D)[V_{i_k}])$ y $\mathcal{C}_C(D)[V_{i_k}] \subseteq H[V_{i_k}]$.

Supongamos que $i_k \neq i_{k+1}$. Como $(i_k, i_{k+1}) \in F(H')$ (porque C es un H' -camino en D'), de la condición (1) del teorema 2.2.1 se tiene que toda $V_{i_k} V_{i_{k+1}}$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H . Por otro lado, ya que $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(\mathcal{C}_C(D))$, $c_D(x_k, x_{k+1}) \in V_{i_k}$ y $c_D(x_{k+1}, x_{k+2}) \in V_{i_{k+1}}$, se sigue que $(c_D(x_k, x_{k+1}), c_D(x_{k+1}, x_{k+2})) \in F(H)$.

Por lo tanto $(u = x_0, x_1, \dots, x_m = v)$ es un uv - H -camino en D .

Como D' es una digráfica H' -coloreada y $H' \in \mathcal{B}_3$, entonces D' tiene un H' -núcleo por caminos, digamos N . Así, por la afirmación 1, N es un H -núcleo por caminos en D . ■

Ahora del teorema 2.2.1 podemos deducir los siguientes resultados.

En [1] Arpin y Linek probaron el siguiente lema.

Lema 2.2.1. Si $G \in \mathcal{B}_3$, entonces $(k, k) \in F(G)$ para cada $k \in V(G)$.

El lema 2.2.1 será útil en la demostración del siguiente teorema, el cual fue probado por Arpin y Linek en [1] (ver teorema 0.11.2, 3). Veremos que el teorema 2.2.1 es consecuencia directa del teorema 2.2.1.

2. H-NÚCLEOS

Corolario 2.2.1. Sea $H \in \mathcal{B}_3$, con $V(H) = \{1, \dots, p\}$ y $p \geq 2$, y $\alpha = (D_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos. Entonces $\sigma(\alpha, H) \in \mathcal{B}_3$.

Demostración.

Sea D una digráfica $\sigma(\alpha, H)$ -coloreada.

Probaremos que D tiene $\sigma(\alpha, H)$ -núcleo por caminos.

Afirmación 1. $D_i^c = (\sigma(\alpha, H)[\{i\} \times V(D_i)])$ es una digráfica completa simétrica con lazos, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.

Sea $i \in \{1, \dots, p\}$. Sean (i, u) y (i, v) dos vértices distintos de D_i^c . Como $(i, i) \in F(H)$, de la definición de $\sigma(\alpha, H)$ se tiene que $((i, u), (i, v)) \in F(\sigma(\alpha, H))$ y $((i, v), (i, u)) \in F(\sigma(\alpha, H))$. Además, $((i, u), (i, u)) \in F(\sigma(\alpha, H))$.

Sean $V_i = V(D_i^c) \cap V(\mathcal{C}_C(D))$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ y $S = \{k \mid V_k \neq \emptyset\}$.

Considere la partición $\{V_k \mid k \in S\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$.

Las siguientes afirmaciones sobre la partición $\{V_k \mid k \in S\}$ serán útiles para demostrar el corolario 2.2.1.

Afirmación 2. Para $i \neq j$ si existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, entonces $(i, j) \in F(H)$ si y sólo si toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de $\sigma(\alpha, H)$.

Supongamos que existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$.

[\implies] Como $(i, j) \in F(H)$, de la definición de $\sigma(\alpha, H)$ se tiene que $((i, u), (j, v)) \in F(\sigma(\alpha, H))$ para cada $(i, u) \in V(D_i^c)$ y para cada $(j, v) \in V(D_j^c)$. Así toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de $\sigma(\alpha, H)$.

[\impliedby] Como existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos $((i, x), (j, y))$, y esta es una flecha de $\sigma(\alpha, H)$, entonces de la definición de $\sigma(\alpha, H)$ se tiene que $(i, j) \in F(H)$.

Afirmación 3. $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq \sigma(\alpha, H)[V_i]$.

Como $D_i^c = (\sigma(\alpha, H)[\{i\} \times V(D_i)])$ es una digráfica completa simétrica con lazos (afirmación 1) para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ y $\sigma(\alpha, H)[V_i] \subseteq D_i^c$, se sigue que $\sigma(\alpha, H)[V_i]$ es una digráfica completa simétrica con lazos. Así, $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq \sigma(\alpha, H)[V_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.

Afirmación 4. Para $i \neq j$, si existe una $V_i V_j$ -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(\sigma(\alpha, H))$, entonces toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de $\sigma(\alpha, H)$.

Supongamos que existe una $V_i V_j$ -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(\sigma(\alpha, H))$.
Sea $((i, x), (j, y)) \in F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(\sigma(\alpha, H))$.

Como $((i, x), (j, y)) \in F(\sigma(\alpha, H))$, de la definición de $\sigma(\alpha, H)$ se tiene que $((i, u), (j, v)) \in F(\sigma(\alpha, H))$ para cada $(i, u) \in V(D_i^c)$ y para cada $(j, v) \in V(D_j^c)$. Así toda $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de $\sigma(\alpha, H)$.

Por lo tanto, se sigue del teorema 2.2.1 que D tiene $\sigma(\alpha, H)$ -núcleo por caminos.

Así, $\sigma(\alpha, H) \in \mathcal{B}_3$. ■

Corolario 2.2.2. Sean H una digráfica reflexiva, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Supongamos que existe una partición $\{V_1, V_2, V_3\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. V_i es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$ y V_i es un conjunto independiente en H para cada $i \in \{1, 2, 3\}$,
2. $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(H)$ para cada $u \in V_1$ y para cada $v \in V_2$, y
3. no hay flechas entre $(V_1 \cup V_2)$ y V_3 en H .

Entonces D tiene un H -núcleo.

2. H-NÚCLEOS

Demostración.

Sea $H' \in \mathcal{B}_3$ la digráfica con conjunto de vértices $V(H') = \{1,2,3\}$ y conjunto de flechas $F(H') = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$.

Para demostrar el corolario 2.2.2, consideremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Para $i \neq j$, suponga que existe una V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$.
 $(i,j) \in F(H')$ si y sólo si toda V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .

[\implies] De la condición (2) del corolario 2.2.2 tenemos que toda V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H para cada $i,j \in \{1,2\}$. Así, se cumple que si $(i,j) \in F(H')$ entonces toda V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H para cada $i,j \in \{1,2\}$.

[\impliedby] Como existe una V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ y no hay flechas entre $(V_1 \cup V_2)$ y V_3 en H (por la condición 3 del corolario 2.2.2), se sigue que $i,j \in \{1,2\}$.

Si $i = 1$ y $j = 2$, se cumple que si toda V_1V_2 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H , entonces $(1,2) \in F(H')$ (recuerde que $(1,2) \in F(H')$). Por otro lado, si $i = 2$ y $j = 1$, se cumple que si toda V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H , entonces $(2,1) \in F(H')$ (recuerde que $(2,1) \in F(H')$).

Afirmación 2. $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$.

Como V_i es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$ y $H[V_i]$ es una digráfica reflexiva para cada $i \in \{1,2,3\}$ (porque H es una digráfica reflexiva), se sigue que $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$.

Afirmación 3. Para $i \neq j$, si existe una V_iV_j -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$, entonces toda V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .

Como no hay flechas entre $(V_1 \cup V_2)$ y V_3 en H , se sigue que $i,j \in \{1,2\}$.

Si $i = 1$ y $j = 2$, sea e una V_1V_2 -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$. Como $(u,v) \in F(H)$ para cada $u \in V_1$ y para cada $v \in V_2$ (condición 2 del corolario 2.2.2), tenemos que $e \in F(H)$.

Si $i = 2$ y $j = 1$, sea e una V_2V_1 -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$. Como $(u,v) \in F(H)$ para cada $u \in V_2$ y para cada $v \in V_1$ (condición 2 del corolario 2.2.2), tenemos que $e \in F(H)$.

Por lo tanto, del teorema 2.2.1 tenemos que D tiene un H -núcleo por caminos, el cual es un H -núcleo (porque toda digráfica H' -coloreada tiene H' -núcleo). ■

Corolario 2.2.3. Sean H una digráfica reflexiva, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ la digráfica de clases cromáticas de D . Supongamos que existe un conjunto independiente V en $V(\mathcal{C}_C(D))$ tal que:

1. V es un conjunto independiente en H ,
2. $H[V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus V]$ es una digráfica completa, y
3. no hay flechas entre $V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus V$ y V en H .

Entonces D tiene un H -núcleo.

Demostración.

Sea $H' \in \mathcal{B}_3$ la digráfica con conjunto de vértices $V(H') = \{1,2\}$ y conjunto de flechas $F(H') = \{(1,1), (2,2)\}$.

Sea $\{V_1 = V, V_2 = V(\mathcal{C}_C(D)) \setminus V\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$.

Para demostrar el corolario 2.2.3, consideremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Para $i \neq j$, supongamos que existe una $V_i V_j$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$.
 $(i,j) \in A(H')$ if and only if every $V_i V_j$ -arc in $\mathcal{C}_C(D)$ is an arc of H .

[\implies] Si $i = 1$ y $j = 2$, supongamos que existe una $V_1 V_2$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. Vamos a ver que $(1,2) \notin F(H')$. Como $F(H') = \{(1,1), (2,2)\}$, tenemos que $(1,2) \notin F(H')$.

Si $i = 2$ y $j = 1$, supongamos que existe una $V_2 V_1$ -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. Vamos a ver que $(2,1) \notin F(H')$. Como $F(H') = \{(1,1), (2,2)\}$, tenemos que $(2,1) \notin F(H')$.

2. H-NÚCLEOS

[\Leftarrow] Si $i = 1$ y $j = 2$, supongamos que $(1,2) \notin F(H')$. Vamos a ver que existe una V_1V_2 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. De la hipótesis de la afirmación 1, se sigue que existe una V_1V_2 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e . Por otro lado, de la condición 3 del corolario 2.2.3 tenemos que $e \notin F(H)$.

Si $i = 2$ y $j = 1$, supongamos que $(2,1) \notin F(H')$. Vamos a ver que existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. Del enunciado de la afirmación 1, se sigue que existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e . Por otro lado, de la condición 3 del corolario 2.2.3 tenemos que $e \notin F(H)$.

Afirmación 2. $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$.

Como $V = V_1$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}_C(D)$ y $H[V]$ es una digráfica reflexiva, entonces $\mathcal{C}_C(D)[V_1] \subseteq H[V_1]$. Por otro lado, como $H[V_2]$ es una digráfica reflexiva completa en H , se cumple que $\mathcal{C}_C(D)[V_2] \subseteq H[V_2]$.

Afirmación 3. Para $i \neq j$, si existe una V_iV_j -flecha en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$, entonces toda V_iV_j -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$ es una flecha de H .

Si $i = 1$ y $j = 2$, supongamos que existe una V_1V_2 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. Vamos a ver que no hay V_1V_2 -flechas en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$.

De la condición 3 del corolario 2.2.3 tenemos que no hay V_1V_2 -flechas en H . Así no hay V_1V_2 -flechas en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$.

Si $i = 2$ y $j = 1$, supongamos que existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, digamos e , tal que $e \notin F(H)$. Vamos a ver que no hay V_2V_1 -flechas en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$.

De la condición 3 del corolario 2.2.3 tenemos que no hay V_2V_1 -flechas en H . Así no hay V_2V_1 -flechas en $F(\mathcal{C}_C(D)) \cap F(H)$.

Por lo tanto, se sigue del teorema 2.2.1 que D tiene un H -núcleo por caminos, el cual es un H -núcleo (porque toda digráfica H' -coloreada tiene H' -núcleo). ■

2.2.1 H -núcleos y la digráfica de H -caminos

Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Recordemos que en [1] Arpin y Linek definieron a la **digráfica de H -caminos** de D , denotada como $\mathcal{R}_H(D)$, como sigue:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{R}_H(D)) &= V(D) \\ F(\mathcal{R}_H(D)) &= \{(u,v) \mid \text{existe un } H\text{-camino de } u \text{ hacia } v \text{ en } D\} \end{aligned}$$

En [1] Arpin y Linek observaron que si $H \in \mathcal{B}_3$, entonces $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo para cualquier digráfica D H -coloreada. En adición a esto, podemos afirmar que si H es una digráfica arbitraria y D una digráfica H -coloreada, entonces $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo si y sólo si D tiene H -núcleo por caminos.

Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. En el siguiente teorema utilizaremos a la digráfica de H -caminos de una subdigráfica generadora de D para probar la existencia de H -núcleos por caminos en D .

Antes de enunciar el teorema es necesario recordar lo siguiente:

Sean D una digráfica y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$. Sea $i \in \{1, 2\}$. Diremos que un H -camino C en D es V_i -coloreado si $c(w, z) \in V_i$ para cada $(w, z) \in F(C)$.

El siguiente resultado es una generalización del teorema 1.2.1 cuando $\mathcal{C}_C(D)$ no es fuertemente conexa.

Teorema 2.2.2. *Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{C}_C(D)$ su digráfica de clases cromáticas. Si existe una partición de $V(\mathcal{C}_C(D))$ en $\{V_1, V_2\}$ tal que:*

1. *No existen V_2V_1 -flechas en $\mathcal{C}_C(D)$,*
2. *si $(u, v) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ para algún $u \in V_1$ y para algún $v \in V_2$, entonces $(u, v) \notin F(H)$.*
3. *sea G la subdigráfica generadora de D tal que $F(G) = \{(x, y) \in F(D) \mid c(x, y) \in V_1\}$. Entonces $\mathcal{R}_H(G)$ es núcleo perfecta, y*

2. H-NÚCLEOS

4. sea D' la subdigráfica generadora de D tal que $F(D') = \{(x,y) \in F(D) \mid c(x,y) \in V_2\}$.
Entonces D' tiene H -núcleo por caminos.

Entonces D tiene H -núcleo por caminos.

Demostración.

Para demostrar el teorema 2.2.2 necesitamos introducir algo de notación.

Sean $\{u,v\} \subseteq V(D)$ y $S \subseteq V(D)$. Escribiremos: $u \rightsquigarrow_i v$ si existe un H -camino V_i -coloreado de u hacia v en D ; $u \rightsquigarrow_i S$ si existe un H -camino V_i -coloreado de u hacia S en D ; $S \rightsquigarrow_i v$ si existe un H -camino V_i -coloreado de S hacia v en D ; $u \not\rightsquigarrow_i v$ es la negación de $u \rightsquigarrow_i v$, y así sucesivamente.

Para demostrar que D tiene H -núcleo por caminos consideremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Todo H -camino en D es V_1 -coloreado o V_2 -coloreado.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un H -camino en D , digamos $W = (v_1, \dots, v_n)$, el cual no es V_1 -coloreado ni V_2 -coloreado. Como W no es V_1 -coloreado ni V_2 -coloreado, existen dos flechas consecutivas en W , digamos (v_{i-1}, v_i) y (v_i, v_{i+1}) para algún $i \in \{2, \dots, m-1\}$, tal que $(c(v_{i-1}, v_i) \in V_1$ y $c(v_i, v_{i+1}) \in V_2)$ o $(c(v_{i-1}, v_i) \in V_2$ y $c(v_i, v_{i+1}) \in V_1)$. Como $(c(v_{i-1}, v_i), c(v_i, v_{i+1})) \in F(\mathcal{C}_C(D))$ (por la definición de $\mathcal{C}_C(D)$) y no existen V_2V_1 -flechas en $\mathcal{C}_C(D)$ se tiene que $c(v_{i-1}, v_i) \in V_1$ y $c(v_i, v_{i+1}) \in V_2$. Por otro lado, como W es un H -camino en D se tiene que $(c(v_{i-1}, v_i), c(v_i, v_{i+1})) \in F(H)$, lo cual contradice la condición (2) del teorema 2.2.2.

Por lo tanto todo H -camino en D es V_1 -coloreado o V_2 -coloreado.

Sea N_1 un H -núcleo por caminos de D' . Si N_1 es un conjunto H -independiente por caminos en D , entonces N_1 es un H -núcleo por caminos de D (recuerde que $V(D') = V(D)$). Por lo tanto supongamos que N_1 no es un conjunto H -independiente por caminos en D .

Afirmación 2. Si existe $\{u, v\} \subseteq N_1$, $u \neq v$, tal que $u \rightsquigarrow_i v$ para algún $i \in V(\mathcal{C}_C(D))$, entonces $i = 1$.

Como N_1 es H -independiente por caminos en D' , de la construcción de D' y la afirmación 1 se tiene que $i = 1$.

Afirmación 3. Si existe $\{u, v\} \subseteq N_1$, $u \neq v$, tal que $u \rightsquigarrow_1 v$, entonces $w \rightsquigarrow_2 u$ para cada $w \in V(D') \setminus N_1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existen $\{u, v\} \subseteq N_1$, $u \neq v$, y $w \in V(D') \setminus N_1$ tal que $u \rightsquigarrow_1 v$ y $w \not\rightsquigarrow_2 u$.

Como $w \not\rightsquigarrow_2 u$, entonces existe $w_1 \in V(D)$ tal que $c(w_1, u) \in V_2$. Por otro lado, puesto que $u \rightsquigarrow_1 v$, entonces existe $v_1 \in V(D)$ tal que $c(u, v_1) \in V_1$. Por lo tanto de la definición de digráfica de clases cromáticas se tiene que $(c(w_1, u), c(u, v_1)) \in F(\mathcal{C}_C(D))$. Así, existe una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$, lo cual contradice la condición (1) del teorema 2.2.2.

Afirmación 4. $V(D') \setminus N_1 \neq \emptyset$.

Como $V_2 \neq \emptyset$, de la construcción de D' se tiene que $V(D')$ no es un conjunto H -independiente por caminos en D' . Así, $V(D') \setminus N_1 \neq \emptyset$.

Ahora, consideremos $T = \{z \in N_1 \mid \text{existe } k \in N_1 \setminus \{z\} \text{ tal que } z \rightsquigarrow_1 k\}$.

Notemos que $T \neq \emptyset$ debido a que N_1 no es un conjunto H -independiente por caminos en D .

Sea $N_2 = N_1 \setminus T$.

Afirmación 5. $N_2 \neq \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $N_2 = \emptyset$. Como $V(D') \setminus N_1 \neq \emptyset$ (afirmación 4) y N_1 es H -núcleo por caminos de D' , entonces existen $h \in V(D') \setminus N_1$ y $w \in N_1$ tal que $h \rightsquigarrow_2 w$. Por otro lado, puesto que $N_2 = \emptyset$, de la definición de T se tiene que para $w \in N_1$ existe $k \in N_1 \setminus \{w\}$ tal que $w \rightsquigarrow_1 k$, lo cual contradice la afirmación 3.

2. H-NÚCLEOS

Afirmación 6. N_2 es H -independiente por caminos en D .

Como $N_2 \subseteq N_1$ y N_1 es H -independiente por caminos en D' , entonces de la construcción de D' se tiene que $u \rightarrow_2 v$ para cada $\{u, v\} \subseteq N_2$, $u \neq v$. Por otro lado, de la definición de T se tiene que $x \rightarrow_1 y$ para cada $\{x, y\} \subseteq N_2$, $x \neq y$. Por lo tanto N_2 es H -independiente por caminos en D .

Afirmación 7. Para cada $w \in V(D') \setminus N_1$ existe $h \in N_2$ tal que $w \rightsquigarrow_H h$.

Sea $w \in V(D') \setminus N_1$. Como N_1 es H -núcleo por caminos de D' , entonces existe $h \in N_1$ tal que $w \rightsquigarrow_2 h$. Luego de la afirmación 3 y la definición de T se tiene que $h \notin T$. Así $h \in N_2$.

Si $t \rightsquigarrow_H N_2$ para cada $t \in T$, entonces de las afirmaciones 6 y 7 se tiene que N_2 es un H -núcleo por caminos de D (recuerde que $V(D') = V(D)$). Por lo tanto supongamos que existe $t' \in T$ tal que $t' \not\rightarrow_H N_2$.

Sea $T' = \{t \in T \mid t \rightarrow_H N_2\}$.

Como $\mathcal{R}_H(G)$ es una digráfica núcleo perfecta, se tiene que $\mathcal{R}_H(G)[T']$ (la subdigráfica de $\mathcal{R}_H(G)$ inducida por los vértices de T') contiene un núcleo, digamos N_3 .

Afirmación 8. N_3 es H -independiente por caminos en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que N_3 no es H -independiente por caminos en D . Como N_3 no es H -independiente por caminos en D , existen u y v en N_3 , $u \neq v$, tal que $u \rightsquigarrow_H v$. Puesto que $\{u, v\} \subseteq N_3 \subseteq T' \subseteq N_1$ y N_1 es H -núcleo por caminos de D' , entonces $u \rightsquigarrow_1 v$, lo que implica que existe un H -camino de u hacia v en G (por la definición de D'). Así de la definición de digráfica de H -caminos se tiene que $(u, v) \in F(\mathcal{R}_H(G))$. Por lo tanto $(u, v) \in F(\mathcal{R}_H(G)[T'])$, lo cual contradice que N_3 es un conjunto H -independiente en $\mathcal{R}_H(G)[T']$.

Afirmación 9. Para cada $z \in T' \setminus N_3$ existe $h \in N_3$ tal que $z \rightsquigarrow_H h$.

Sea $z \in T' \setminus N_3$. Como $z \in V(\mathcal{R}_H(G)[T']) \setminus N_3$ y N_3 es núcleo de $\mathcal{R}_H(G)[T']$, entonces existe

2.2 H -núcleos en digráficas finitas

$h \in N_3$ tal que $(z, h) \in F(\mathcal{R}_H(G)[T'])$. Puesto que $\mathcal{R}_H(G)[T'] \subseteq \mathcal{R}_H(G)$, entonces $(z, h) \in F(\mathcal{R}_H(G))$. Así de la definición de digráfica de H -caminos se tiene que existe un H -camino de z hacia h en G . Por lo tanto existe un H -camino de z hacia h en D (porque $G \subseteq D$).

Afirmación 10. $N = N_2 \cup N_3$ es un H -núcleo por caminos de D .

(a) Veamos que N es un conjunto H -independiente por caminos en D .

Como N_2 y N_3 son conjuntos H -independiente por caminos en D (afirmaciones 6 y 8, respectivamente), entonces sólo resta probar que no existen N_2N_3 - H -caminos en D y no existen N_3N_2 - H -caminos en D .

Como $N_3 \subseteq N_1$, de la definición de N_2 se tiene que no existen N_2N_3 - H -caminos V_1 coloreados en D . Puesto que N_1 es H -independiente por caminos en D' , se tiene que no existen N_2N_3 - H -caminos V_2 coloreados en D . Por otro lado de la definición de T' no existen N_3N_2 - H -caminos en D (porque $N_3 \subseteq T'$).

Por lo tanto, N es H -independiente por caminos en D .

(b) Veamos que N es H -absorbente por caminos en D .

Se sigue de las afirmaciones 7 y 9 y de la definición de $T \setminus T'$.

Por lo tanto D tiene H -núcleo por caminos. ■

2. H-NÚCLEOS

Nota 2.2.1. En el ejemplo de la figura 2.5 se muestra una digráfica H -coloreada que cumple con las hipótesis del teorema 2.2.1 (considere la partición $\{V_1 = \{c\}, V_2 = \{a, b\}\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$) y no cumple con las hipótesis del teorema 2.2.2, porque como $\mathcal{C}_C(D)$ es una digráfica fuertemente conexa se tiene que para toda partición de sus vértices en $\{V_1, V_2\}$ siempre existe una V_1V_2 -flecha y una V_2V_1 -flecha en $\mathcal{C}_C(D)$.

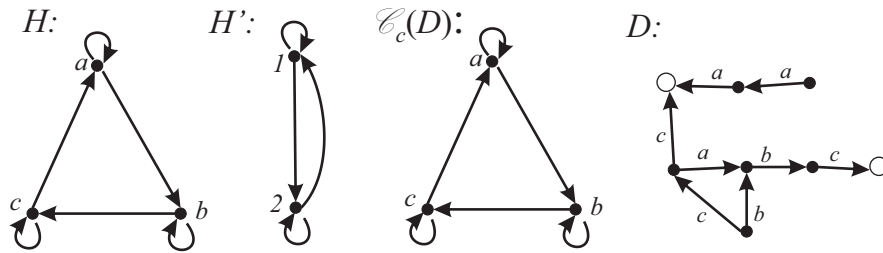


Figura 2.5

Nota 2.2.2. En el ejemplo de la figura 2.6 se muestra una digráfica H -coloreada que cumple con las hipótesis del teorema 2.2.2 (considere la partición $\{V_1 = \{2\}, V_2 = \{1, 3\}\}$ de $V(\mathcal{C}_C(D))$) y no cumple con las hipótesis del teorema 2.2.1, porque no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices de $\mathcal{C}_C(D)$ tal que $\mathcal{C}_C(D)[V_i] \subseteq H[V_i]$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

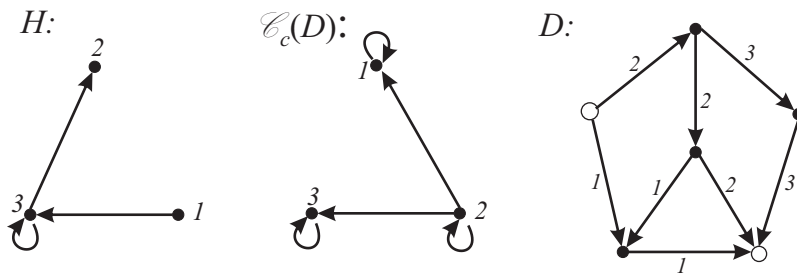


Figura 2.6

H-núcleos en $\sigma(\alpha, \mathbf{D})$

Ya que varios resultados que hay en la teoría de digráficas muestran que algunas propiedades se preservan bajo ciertas operaciones, varios autores han estado interesados en saber que tipos de construcciones preservan sus propiedades. En este capítulo estudiaremos una operación entre una digráfica D y una sucesión de digráficas ajenas en vértices α , llamada la D -suma. En particular exhibiremos condiciones necesarias y suficientes que garantizan la existencia de un H -núcleo por caminos en la D -suma a partir de la existencia de H -núcleos en D y en cada digráfica de la sucesión α .

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

A lo largo de este capítulo la digráfica H posiblemente tiene lazos y la digráfica D es finita y simple.

Definición 3.0.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Un camino cerrado $C = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_0) \subseteq D$ es un **camino cerrado H -cuasirestringido sobre z_0** si $(c(z_i, z_{i+1}), c(z_{i+1}, z_{i+2})) \in F(H)$ para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, índices tomados módulo $k+1$.

Notación 3.0.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Para $v \in V(D)$, $C_D(v)$ denota el conjunto de los caminos cerrados H -cuasirestringidos sobre v .

Definición 3.0.2. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. D es **H-núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida de D tiene H -núcleo.

Recordemos la siguiente definición.

Definición 3.0.3. Sean D una digráfica, cuyas flechas están coloreadas, con $V(D) = \{1, 2, \dots, p\}$ y $p \geq 2$, y $\alpha = (D_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas, cuyas flechas están coloreadas, ajenas en vértices dos a dos, con $V(D_i) = \{i_1, \dots, i_{p_i}\}$ y $p_i \geq 1$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. La suma de la digráfica D y la sucesión α es la digráfica, cuyas flechas están coloreadas, $\sigma(\alpha, D)$ tal que:

$$V(\sigma(\alpha, D)) = \bigcup_{i=1}^p (\{i\} \times V(D_i)) \text{ y}$$

$$F(\sigma(\alpha, D)) = \{((s, s_l), (r, r_t)) \text{ con color } k \mid (s = r \text{ y } (s_l, r_t) \in F(D_s) \text{ con color } k) \text{ o } ((s, r) \in F(D) \text{ con color } k)\}$$

En [51] I. Włoch exhibió condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en $\sigma(\alpha, D)$. Los resultados que a continuación se presentarán, bajo el contexto de la teoría de H -núcleos (H -núcleos por caminos), son una generalización de los resultados obtenidos por I. Włoch en [51].

Denotemos por D_i^c a la subdigráfica inducida de $\sigma(\alpha, D)$ que es isomorfa a D_i ; es decir, $D_i^c = \sigma(\alpha, D)[\{i\} \times V(D_i)]$.

Los siguientes resultados serán útiles para el desarrollo del trabajo.

Lema 3.0.2. *Sea H una digráfica transitiva. Si C es un uv -camino de longitud al menos uno en H , con la posibilidad de que $u = v$, entonces $(u,v) \in F(H)$.*

Demostración.

Sea $C = (v_0 = u, v_1, \dots, v_n = v)$ un uv -camino en H .

Demostraremos que $(v_0, v_n) \in F(H)$ por inducción sobre $l(C)$, la longitud de C .

Para $l(C) = 1$ claramente se cumple el enunciado.

Hipótesis de inducción. Si C' es un uv -camino de longitud menor que n en H , entonces $(u,v) \in F(H)$.

Sea $C = (v_0 = u, v_1, \dots, v_n = v)$ un uv -camino de longitud $n \geq 3$ en H . Como $(v_0, v_2) \in F(H)$, porque H es transitiva y $n \geq 3$, entonces $C' = (v_0, v_2, v_3, \dots, v_n)$ es un uv -camino de longitud menor que n en H . De la hipótesis de inducción se tiene que $(v_0, v_n) \in F(H)$.

■

Lema 3.0.3. *Sean H una digráfica transitiva y D una digráfica H -coloreada. Para $u, v \in V(D)$, con $u \neq v$, todo uv - H -camino en D contiene una uv - H -trayectoria en D .*

Demostración.

Sea $C = (z_0 = u, z_1, \dots, z_n = v)$ un uv - H -camino en D .

Demostraremos que C contiene una uv - H -trayectoria por inducción sobre $l(C)$, la longitud de C .

Si $l(C) = 1$, entonces C es una uv - H -trayectoria.

Hipótesis de inducción. Si C' es un uv - H -camino de longitud menor que n en D , entonces C' contiene una uv - H -trayectoria.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Sea $C = (z_0 = u, z_1, \dots, z_n = v)$ un uv - H -camino en D de longitud n .

Si $z_i \neq z_j$ para cada $i \neq j$, entonces C es una uv - H -trayectoria en D .

Supongamos que existen i y j , con $i \neq j$, tal que $z_i = z_j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Ya que C es un H -camino en D , se tiene que $(c(z_{h-1}, z_h), c(z_h, z_{h+1})) \in F(H)$ para cada $h \in \{1, \dots, n-1\}$. Más aún, como $(c(z_{i-1}, z_i), c(z_i, z_{i+1}), \dots, c(z_{j-1}, z_j), c(z_j, z_{j+1}))$ es un camino dirigido en H , se sigue del lema 3.0.2 que $(c(z_{i-1}, z_i), c(z_j, z_{j+1})) \in F(H)$. Por lo tanto, $C' = (z_0 = u, C, z_i) \cup (z_i = z_j, C, z_n = v)$ es un uv - H -camino en D de longitud menor que n . Así, se sigue de la hipótesis de inducción que C' contiene una uv - H -trayectoria, digamos T . Finalmente note que $T \subseteq C' \subseteq C$. ■

El resultado anterior nos permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.0.3. Sean H una digráfica transitiva y D una digráfica H -coloreada. $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo por caminos en D si y sólo si N es un H -núcleo en D .

Demostración.

[\implies] Sea $N \subseteq V(D)$ un H -núcleo por caminos en D .

Por demostrar que N es un H -núcleo en D .

1. Por demostrar que N es H -independiente en D .

Debido a que N es H -independiente por caminos en D y una H -trayectoria es un H -camino, entonces, en particular, N es H -independiente por trayectorias en D .

2. Por demostrar que N es H -absorbente en D .

Sea $u \in V(D) \setminus N$. Como N es H -absorbente por caminos en D , existe $v \in N$ tal que hay un H -camino de u hacia v en D , digamos C . Del lema 3.0.3 se tiene que C contiene una uv - H -trayectoria en D .

Por lo tanto, N es un H -núcleo en D .

[\impliedby] Sea $N \subseteq V(D)$ un H -núcleo en D .

Por demostrar que N es un H -núcleo por caminos en D .

1. Por demostrar que N es H -independiente por caminos en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que existen $x, y \in V(D)$ tal que hay un xy - H -camino en D , digamos C . Del lema 3.0.3 se sigue que C contiene una xy - H -trayectoria en D , lo cual no puede suceder porque N es H -independiente en D .

2. Por demostrar que N es H -absorbente por caminos en D .

Sea $u \in V(D) \setminus N$. Como N es H -absorbente en D , existe $v \in N$ tal que hay una uv - H -trayectoria en D . Así, existe un uv - H -camino en D .

Por lo tanto, N es un H -núcleo por caminos en D . ■

El teorema 3.0.4 fue considerado de gran importancia en [51], ya que a partir de él I. Włoch probó de una manera muy natural la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en $\sigma(\alpha, D)$.

Teorema 3.0.4. Sean D una digráfica k -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas k -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. Sean $(i, n), (j, m) \in V(\sigma(\alpha, D))$ dos vértices distintos. Hay una trayectoria monocromática de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ si y sólo si

(a) para $i \neq j$, existe una trayectoria monocromática en D de i hacia j .

(b) para $i = j$, existe una trayectoria monocromática en D_i de n hacia m o $C_D(i) \neq \emptyset$.

Ya que la concatenación de dos H -caminos (H -trayectorias) no siempre es un H -camino, entonces garantizar la existencia de H -caminos en D a partir de la existencia de H -caminos en $\sigma(\alpha, D)$ podría parecer un problema bastante complicado. Por ejemplo, en la digráfica $\sigma(\alpha, D)$ de la figura 3.1 tenemos que $((1, u_1), (2, v_1), (2, v_2), (3, w_2))$ y $((1, u_1), (2, v_1), (2, v_2), (3, w_2), (1, u_2))$ son H -trayectorias, mientras que en D no hay H -caminos de 1 hacia 3 y no hay caminos cerrados H -cuasirestringidos sobre 1.

Pero, si H es una digráfica transitiva, entonces nuestro problema se resuelve y así el teorema 3.0.5 generaliza al teorema 3.0.4.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, \mathbf{D})$

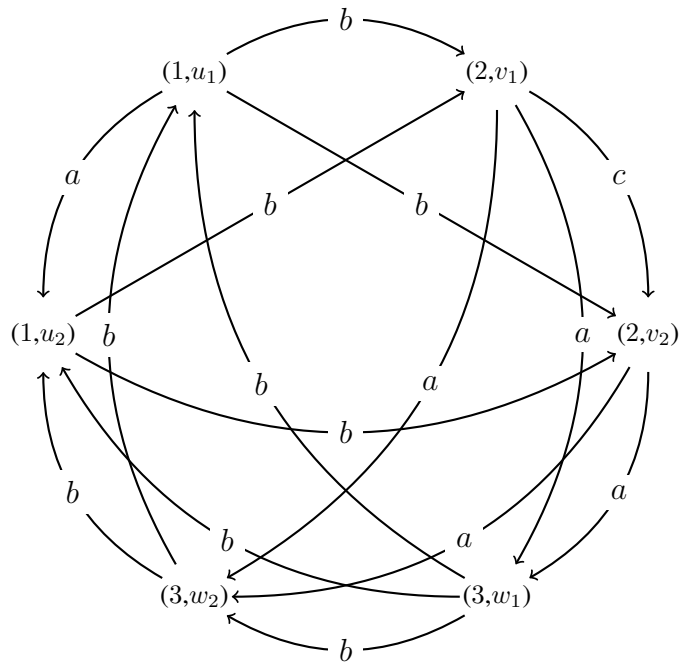
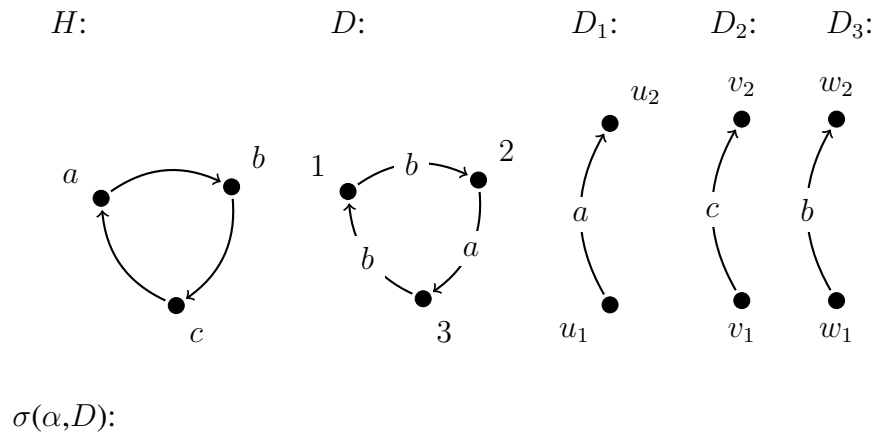


Figura 3.1

Teorema 3.0.5. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. Sean $(i, n), (j, m) \in V(\sigma(\alpha, D))$ dos vértices distintos. Hay un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ si y sólo si

- (a) para $i \neq j$, existe un H -camino de i hacia j en D .
- (b) para $i = j$, existe un H -camino de n hacia m en D_i o $C_D(i) \neq \emptyset$.

Demostración.

[\Leftarrow] Si $i \neq j$ y existe un H -camino de i hacia j en D , digamos $(i = i_0, i_1, \dots, i_k = j)$, entonces de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $((i_h, s), (i_{h+1}, l)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ para cada $(i_h, s) \in V(D_{i_h}^c)$ y para cada $(i_{h+1}, l) \in V(D_{i_{h+1}}^c)$ (ver figura 3.2), además $c(i_h, i_{h+1}) = c((i_h, s), (i_{h+1}, l))$ para cada $h \in \{0, \dots, k-1\}$. Por lo tanto, hay un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$.

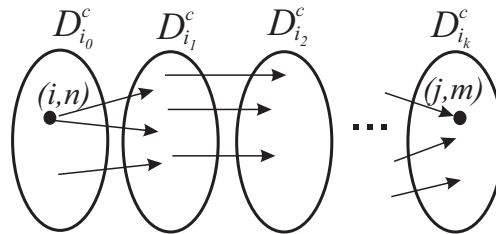


Figura 3.2

Si $i = j$ y existe un H -camino de n hacia m en D_i , digamos $(n = v_1, v_2, \dots, v_k = m)$, entonces de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $((i, n), (i, v_2), \dots, (i, m))$ es un H -camino de (i, n) hacia (i, m) en $\sigma(\alpha, D)$, ya que $c((i, v_r), (i, v_{r+1})) = c(v_r, v_{r+1})$ para cada $r \in \{1, \dots, k-1\}$ (ver figura 3.3).

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

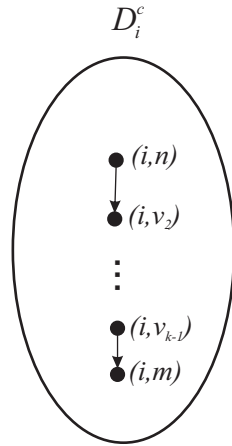


Figura 3.3

Supongamos que $i = j$, $C_D(i) \neq \emptyset$ y no existen H -caminos de n hacia m en D_i . Si $(i = i_0, i_1, \dots, i_k = i)$ es un camino cerrado H -cuasirestringido sobre i contenido en D , entonces de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $((i_h, s), (i_{h+1}, l)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ para cada $(i_h, s) \in V(D_{i_h}^c)$ y para cada $(i_{h+1}, l) \in V(D_{i_{h+1}}^c)$ (ver figura 3.4), además $c(i_h, i_{h+1}) = c((i_h, s), (i_{h+1}, l))$ para cada $h \in \{0, \dots, k-1\}$, lo que implica que hay un H -camino de (i, n) hacia (i, m) en $\sigma(\alpha, D)$.

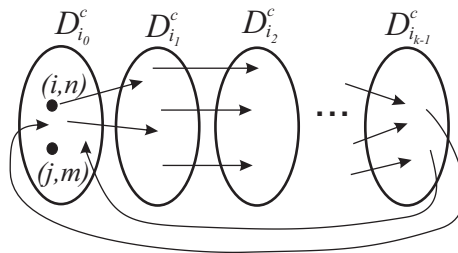


Figura 3.4

$[\implies]$ Sea $C = ((i, n), (r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (j, m))$ un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $i \neq j$

En este caso demostraremos que hay un H -camino en D de i hacia j por inducción sobre $l(C)$,

la longitud de C .

Si $l(C) = 1$, como $i \neq j$, de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $(i, j) \in F(D)$. Por lo tanto, hay un H -camino en D de i hacia j .

Si $l(C) = 2$, tres posibilidades serán analizadas:



Figura 3.5

(1) $r_1 = i$

Como $((r_1, s_1), (j, m)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ y $i \neq j$, de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ en particular se tiene que $((i, n), (j, m)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ (ver figura 3.5 (a)), lo que implica que $(i, j) \in F(D)$. Por lo tanto, existe un H -camino de i hacia j en D .

(2) $r_1 = j$

Como $((i, n), (r_1, s_1)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ y $i \neq j$, de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ en particular se tiene que $((i, n), (j, m)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ (ver figura 3.5 (b)), lo que implica que $(i, j) \in F(D)$. Por lo tanto, existe un H -camino de i hacia j en D .

(3) $r_1 \notin \{i, j\}$

En este caso, de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que (i, r_1, j) es un H -camino de i hacia j en D , ya que $c(i, r_1) = c((i, n), (r_1, s_1))$, $c(r_1, j) = c((r_1, s_1), (j, m))$, $i \neq j$ y $r_1 \notin \{i, j\}$.

Hipótesis de inducción. Si C' es un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ de longitud menor que k , entonces hay un H -camino de i hacia j en D .

Sea $C = ((i, n), (r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (j, m))$ un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ de longitud k , con $k \geq 3$.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Si C no es una H -trayectoria, entonces del lema 3.0.3 se tiene que C contiene una H -trayectoria de (i, n) hacia (j, m) de longitud menor que k . Así, de la hipótesis de inducción se tiene que hay un H -camino de i hacia j en D .

Supongamos que C es una H -trayectoria.

Si $|V(C) \cap V(D_{r_h}^c)| = 1$ para cada $h \in \{1, \dots, k-1\}$, entonces de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $P = (i = r_0, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, j = r_k)$ es un H -camino de i hacia j en D ; ya que $c(i, r_1) = c((i, n), (r_1, s_1))$, $c(r_1, r_2) = c((r_1, s_1), (r_2, s_2))$, \dots , $c(r_{k-1}, j) = c((r_{k-1}, s_{k-1}), (j, m))$, $i \neq j$ y $r_h \neq r_{h+1}$ para cada $h \in \{1, \dots, k-2\}$.

Supongamos que existe $h \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $|V(C) \cap V(D_{r_h}^c)| \geq 2$ y consideremos $l = \min \{h \in \{1, \dots, k-1\} \mid |V(C) \cap V(D_{r_h}^c)| \geq 2\}$.

Sean:

(r_{w_1}, s_{w_1}) el primer vértice en C que aparece en $D_{r_l}^c$

(r_{w_2}, s_{w_2}) el segundo vértice en C que aparece en $D_{r_l}^c$

\vdots

$(r_{w_\beta}, s_{w_\beta})$ el último vértice en C que aparece en $D_{r_l}^c$, con $\beta \geq 2$.

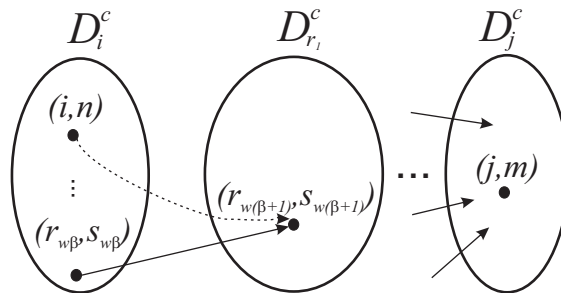


Figura 3.6

Procedamos a analizar las siguientes posibilidades para $D_{r_l}^c$.

(i) Si $D_{r_l}^c = D_i^c$

Como $(j,m) \notin V(D_i^c)$ (porque $i \neq j$); en particular $(j,m) \neq (r_{w_\beta}, s_{w_\beta})$, lo que implica que existe $(r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1}) \in V(C)$ tal que $((r_{w_\beta}, s_{w_\beta}), (r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1})) \in F(C)$. Puesto que $(r_{w_\beta}, s_{w_\beta})$ es el último vértice en C que aparece en D_i^c , entonces

$(r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1}) \notin V(D_i^c)$. Por lo tanto, de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que

$((i,n), (r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1})) \in F(\sigma(\alpha, D))$ (ver figura 3.6) y

$c((i,n), (r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1})) = c((r_{w_\beta}, s_{w_\beta}), (r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1}))$. Así, $C' = ((i,n), (r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1})) \cup$

$((r_{w_\beta+1}, s_{w_\beta+1}), C, (j,m))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ de (i,n) hacia (j,m) de longitud menor que k . Se sigue de la hipótesis de inducción que existe un H -camino en D de i hacia j .

(ii) Si $D_{r_l}^c \neq D_i^c$

Como $(i,n) \notin V(D_{r_l}^c)$ (porque $D_{r_l}^c \neq D_i^c$); en particular $(i,n) \neq (r_{w_1}, s_{w_1})$, lo que implica que existe $(r_{w_1-1}, s_{w_1-1}) \in V(C)$ tal que $((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})) \in F(C)$, y puesto que (r_{w_1}, s_{w_1}) es el primer vértice en C que aparece en $D_{r_l}^c$, entonces $(r_{w_1-1}, s_{w_1-1}) \notin V(D_{r_l}^c)$.

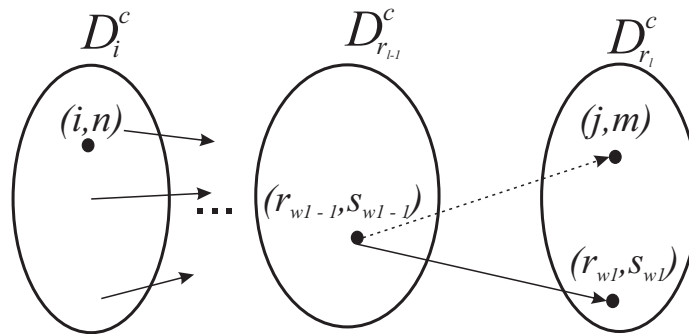


Figura 3.7

Si $(j,m) \in V(D_{r_l}^c)$, entonces de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que

$((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (j,m)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ (ver figura 3.7) y

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

$$c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (j, m)) = c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})).$$

Por lo tanto, $C' = ((i, n), C, (r_{w_1-1}, s_{w_1-1})) \cup ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (j, m))$ es un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ de longitud menor que k . Se sigue de la hipótesis de inducción que existe un H -camino de i hacia j en D .

Supongamos que $(j, m) \notin V(D_{r_l}^c)$. Debido a que $|V(C) \cap V(D_{r_l}^c)| \geq 2$, podemos elegir $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \in V(D_{r_l}^c)$ tal que $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \neq (r_{w_1}, s_{w_1})$. Como $(j, m) \notin V(D_{r_l}^c)$; en particular $(j, m) \neq (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})$, lo que implica que existe $(r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}) \in V(C)$ tal que

$((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1})) \in F(C)$ (ver figura 3.8). Puesto que $P = ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})) \cup ((r_{w_1}, s_{w_1}), C, (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ (porque $P \subseteq C$), se sigue de la definición de H -camino que $(c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})), c((r_{w_1}, s_{w_1}), (r_{w_1+1}, s_{w_1+1})), \dots, c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1})))$ es un camino en H . Así del lema 3.0.2 se tiene que $(c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})), c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}))) \in F(H)$. Por lo tanto, $C' = ((i, n), C, (r_{w_1-1}, s_{w_1-1})) \cup ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), C, (j, m))$ es un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$, ya que $c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) = c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1}))$. Puesto que $l(C') \leq k-1$, se sigue de la hipótesis de inducción que hay un H -camino de i hacia j en D .

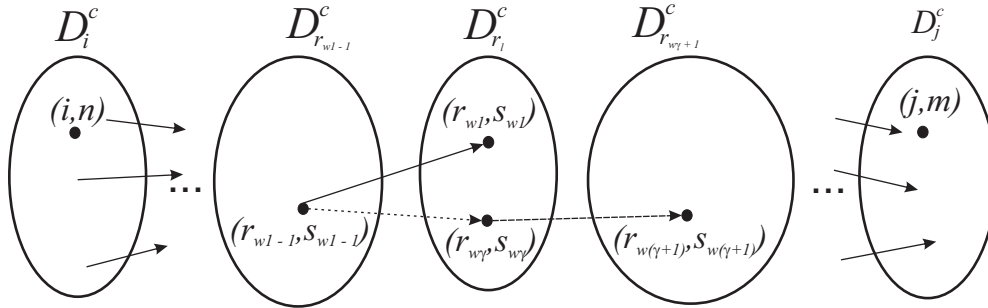


Figura 3.8

Caso 2. $i = j$

Si $C = ((i, n), (r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (i, m))$ está contenido en D_i^c , entonces por la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que hay un H -camino en D_i^c de n hacia m .

Supongamos que no hay H -caminos en D_i de n hacia m .

Observación 1. Como no hay H -caminos en D_i de n hacia m , entonces $l(C) \geq 2$ y existe $\epsilon \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $(r_\epsilon, s_\epsilon) \notin V(D_i^c)$.

Demostraremos que $C_D(i) \neq \emptyset$ por inducción sobre $l(C)$, la longitud de C .

Si $l(C) = 2$, entonces se sigue de la Observación 1 que $(r_1, s_1) \notin V(D_i^c)$ y de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que (i, r_1, i) es un camino cerrado H -cuasirestringido sobre i , ya que $c(i, r_1) = c((i, n), (r_1, s_1))$ y $c(r_1, i) = c((r_1, s_1), (i, m))$. Por lo tanto, $C_D(i) \neq \emptyset$.

Hipótesis de inducción. Si C' es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) de longitud menor que k , entonces $C_D(i) \neq \emptyset$.

Sea $C = ((i, n), (r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (i, m))$ un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) de longitud k , con $k \geq 3$.

Si C no es una H -trayectoria, entonces del lema 3.0.3 se tiene que C contiene una H -trayectoria de (i, n) hacia (i, m) , de longitud menor que k . Se sigue de la hipótesis de inducción que $C_D(i) \neq \emptyset$.

Supongamos que C es una H -trayectoria.

Por la observación 1 podemos elegir $t \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que (r_t, s_t) es el primer vértice en C que no aparece en $V(D_i^c)$.

Si $(r_t, s_t) \neq (r_1, s_1)$, entonces se sigue de la elección de t que $(r_{t-1}, s_{t-1}) \in V(D_i^c)$ y $((r_{t-1}, s_{t-1}), (r_t, s_t)) \in F(C)$, además de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $c((i, n), (r_t, s_t)) = c((r_{t-1}, s_{t-1}), (r_t, s_t))$. Por lo tanto, $((i, n), (r_t, s_t)) \cup ((r_t, s_t), C, (i, m))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) de longitud menor que k , así se sigue de la hipótesis de inducción que $C_D(i) \neq \emptyset$.

Si $(r_t, s_t) = (r_1, s_1)$, entonces procedamos de la misma manera como en el caso 1, ahora utilizando la H -trayectoria $T = ((r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (i, m))$.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Si $|V(T) \cap V(D_{r_h}^c)| = 1$ para cada $h \in \{1, \dots, k-1\}$, entonces por la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que $(r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, i)$ es un H -camino en D de r_1 hacia i , ya que $c(r_1, r_2) = c((r_1, s_1), (r_2, s_2)), \dots, c(r_{k-1}, i) = c((r_{k-1}, s_{k-1}), (i, m))$, $r_1 \neq i$ y $r_h \neq r_{h+1}$ para cada $h \in \{1, \dots, k-2\}$. Debido a que $c(i, r_1) = c((i, n), (r_1, s_1))$, se tiene que $(i, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, i)$ es un camino cerrado H -cuasirestringido sobre i . Por lo tanto, $C_D(i) \neq \emptyset$.

Supongamos que existe $h \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $|V(T) \cap V(D_{r_h}^c)| \geq 2$.

Sean $l = \min \{h \in \{1, \dots, k-1\} \text{ tal que } |V(T) \cap V(D_{r_h}^c)| \geq 2\}$ y

(r_{w_1}, s_{w_1}) el primer vértice en T que aparece en $D_{r_l}^c$
 (r_{w_2}, s_{w_2}) el segundo vértice en T que aparece en $D_{r_l}^c$
 \cdot
 \cdot
 \cdot
 $(r_{w_\beta}, s_{w_\beta})$ el último vértice en T que aparece en $D_{r_l}^c$

con $\beta \geq 2$.

Analizaremos las siguientes posibilidades para $D_{r_l}^c$.

(i) Si $D_{r_l}^c = D_{r_1}^c$

Como $(r_1, s_1) \notin V(D_i^c)$, se sigue de la definición de $\sigma(\alpha, D)$ que $r_1 \neq i$. Por otro lado, debido a que $|V(T) \cap V(D_{r_l}^c)| \geq 2$, podemos elegir $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})$ en $V(D_{r_l}^c)$ tal que

$(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \neq (r_{w_1}, s_{w_1})$. Como $(i, m) \notin V(D_{r_1}^c)$, en particular $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \neq (i, m)$, lo que implica que existe $(r_{w_{\gamma+1}}, s_{w_{\gamma+1}}) \in V(T)$ tal que $((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_{\gamma+1}}, s_{w_{\gamma+1}})) \in F(T)$. Puesto que $P = ((i, n), C, (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_{\gamma+1}}, s_{w_{\gamma+1}}))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ (porque $P \subseteq C$), de la definición de H -camino se sigue que $(c((i, n), (r_1, s_1)), c((r_1, s_1), (r_2, s_2)), \dots, c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_{\gamma+1}}, s_{w_{\gamma+1}})))$ es un camino dirigido en H . Así, por el lema 3.0.2 se tiene que $(c((i, n), (r_1, s_1)), c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_{\gamma+1}}, s_{w_{\gamma+1}}))) \in F(H)$. Por lo tanto,

$C' = ((i, n), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), T, (i, m))$ es una H -trayectoria en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) , ya que $c((i, n), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) = c((i, n), (r_1, s_1))$. Puesto que $l(C')$ es menor que k , se sigue

de la hipótesis de inducción que $C_D(i) \neq \emptyset$.

(ii) Si $D_{r_l}^c \neq D_{r_1}^c$

Si $(i, m) \in V(D_{r_l}^c)$, entonces por la definición de $\sigma(\alpha, D)$ se tiene que

$((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (i, m)) \in F(\sigma(\alpha, D))$ y $c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (i, m)) = c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1}))$.

Por lo tanto, $C' = ((i, n), C, (r_{w_1-1}, s_{w_1-1}))$

$\cup ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (i, m))$ es una H -trayectoria en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) de longitud menor que k . Se sigue de la hipótesis de inducción que $C_D(i) \neq \emptyset$.

Supongamos que $(i, m) \notin V(D_{r_l}^c)$. Debido a que $|V(T) \cap V(D_{r_l}^c)| \geq 2$, podemos elegir $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \in V(D_{r_l}^c)$ tal que $(r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}) \neq (r_{w_1}, s_{w_1})$. Como $(i, m) \notin V(D_{r_l}^c)$; en particular

$(i, m) \neq (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})$, lo que implica que existe $(r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}) \in V(T)$ tal que

$((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1})) \in F(T)$. Puesto que $P = ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})) \cup ((r_{w_1}, s_{w_1}), T, (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ (porque $P \subseteq T$), de la definición de H -camino se tiene que $(c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})), c((r_{w_1}, s_{w_1}), (r_{w_1+1}, s_{w_1+1})), \dots, c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1},$

$s_{w_\gamma+1})))$ es un camino dirigido en H . Así, por el lema 3.0.2 se tiene que $(c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1})), c((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), (r_{w_\gamma+1}, s_{w_\gamma+1}))) \in F(H)$. Por lo tanto, $C' = ((i, n), C, (r_{w_1-1}, s_{w_1-1})) \cup ((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) \cup ((r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma}), T, (i, m))$ es un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ de (i, n) hacia (i, m) , ya que $c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_\gamma}, s_{w_\gamma})) = c((r_{w_1-1}, s_{w_1-1}), (r_{w_1}, s_{w_1}))$. Puesto que C' es de longitud menor que k , se sigue de la hipótesis de inducción que $C_D(i) \neq \emptyset$. ■

El resultado anterior nos permite establecer los siguientes teoremas.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Teorema 3.0.6. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos.

$S^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ es un conjunto H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$ si y sólo si existe un conjunto $S \subseteq V(D)$ H -independiente por caminos en D tal que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$, donde $S_i \subseteq V(D_i^c)$ y para cada $i \in S$

$$(1) \dots\dots S_i - \begin{cases} \text{es } H\text{-independiente por caminos en } D_i^c & \text{si } C_D(i) = \emptyset \\ \text{consta de un único elemento de } V(D_i^c) & \text{si } C_D(i) \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{o}$$

Demostración.

[\implies] Sea $S^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ un conjunto H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Consideremos al conjunto $S = \{ i \in V(D) \mid (S^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset \}$.

Afirmación 1. S es un conjunto H -independiente por caminos en D .

Procediendo por contradicción, supongamos que S no es un conjunto H -independiente por caminos en D . Entonces existen $i, j \in S$, con $i \neq j$, tal que hay un H -camino de i hacia j en D . Por el teorema 3.0.5 (a) se tiene que para cada $(i, n) \in V(D_i^c)$ y para cada $(j, m) \in V(D_j^c)$ hay un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$. Por otro lado debido a que $i, j \in S$, se tiene que $(S^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset$ y $(S^* \cap V(D_j^c)) \neq \emptyset$. Lo que implica que, en particular, hay H -caminos de $(S^* \cap V(D_i^c))$ hacia $(S^* \cap V(D_j^c))$ en $\sigma(\alpha, D)$, lo cual no es posible porque S^* es H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Así, S es un conjunto H -independiente por caminos en D .

Si denotamos por $S_i = S^* \cap V(D_i^c)$ para cada i tal que $(S^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset$, entonces se sigue de la definición de S que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$.

Afirmación 2. S_i satisface (1) para cada $i \in S$.

Sea $i \in S$. Analizaremos dos casos sobre $C_D(i)$.

Caso 1. $C_D(i) = \emptyset$.

Demostraremos que S_i es un conjunto H -independiente por caminos en D_i^c .

Como S^* es H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$, se tiene que S_i debe ser H -independiente por caminos en D_i^c (porque $S_i \subseteq S^*$ y $D_i^c \subseteq \sigma(\alpha, D)$).

Caso 2. $C_D(i) \neq \emptyset$.

Demostraremos que $|S_i| = 1$.

Como $i \in S$, entonces $S_i \neq \emptyset$. Ahora, procediendo por contradicción, supongamos que $|S_i| \geq 2$.

Ya que $C_D(i) \neq \emptyset$, se sigue del teorema 3.0.5 (b) que para cada par de vértices $(i, n), (i, m) \in V(D_i^c)$ hay un H -camino en $\sigma(\alpha, D)$ entre ellos. Así, en particular, hay H -caminos entre todo par de elementos de S_i , lo cual no puede suceder porque S^* es H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$ y $S_i \subseteq S^*$.

Por lo tanto, $|S_i| = 1$.

[\Leftarrow] Sea $S \subseteq V(D)$ un conjunto H -independiente por caminos en D y $S_i \subseteq V(D_i^c)$ como en las hipótesis del teorema 3.0.6 para cada $i \in S$.

Demostraremos que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$ es un conjunto H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Si $|S^*| = 1$, entonces S^* es un conjunto H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$. Por lo tanto, supongamos que $|S^*| \geq 2$.

Sean $(i, n), (j, m) \in S^*$ dos vértices distintos. Demostraremos que no hay H -caminos entre (i, n) y (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$.

Procediendo por contradicción. Supongamos que existe un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Caso a. $i \neq j$.

En este caso, se sigue del teorema 3.0.5 (a) que hay un H -camino de i hacia j en D , lo cual no puede suceder porque S es H -independiente por caminos en D y $\{i, j\} \subseteq S$.

Caso b. $i = j$.

Como $|S_i| \geq 2$ (porque $\{(i, n), (i, m)\} \subseteq S_i$), de la hipótesis sobre S_i se tiene que $C_D(i) = \emptyset$. Por otro lado, debido a que hay un H -camino de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$, se sigue del teorema 3.0.5 (b) que hay un H -camino de n hacia m en D_i , lo que implica que hay un H -camino de (i, n) hacia (i, m) en D_i^c , lo cual no es posible porque S_i es H -independiente por caminos en D_i^c .

Por lo tanto, S^* es un conjunto H -independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$. ■

Teorema 3.0.7. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y

$\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos.

$S^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ es un conjunto H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$ si y sólo si existe un conjunto $S \subseteq V(D)$ H -absorbente por caminos en D tal que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$, donde $S_i \subseteq V(D_i^c)$ y para cada $i \in S$

(1) ... S_i —	{	es H -absorbente por caminos en D_i^c ,	si $C_D(i) = \emptyset$ y para cada
			$j \in S$ tal que $i \neq j$
			no hay H -caminos
			de i hacia j en D
			o
		es un subconjunto no vacío de $V(D_i^c)$,	en otro caso

Demostración.

[\implies] Sea $S^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ un conjunto H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Consideremos al conjunto $S = \{ i \in V(D) \mid (S^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset \}$.

Afirmación 1. S es un conjunto H -absorbente por caminos en D .

Sea $k \in V(D) \setminus S$. Como $k \notin S$, entonces $(S^* \cap V(D_k^c)) = \emptyset$. Puesto que S^* es H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$, se tiene que para $(k, n) \in V(D_k^c)$, para algún $n \in V(D_k)$, existe $(j, m) \in S^*$ tal que hay un H -camino de (k, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$. Por lo tanto, de la definición de S se tiene que $j \in S$. Así, se sigue del teorema 3.0.5 (a) que hay un H -camino de k hacia j en D (porque $k \neq j$).

Por lo tanto S es un conjunto H -absorbente por caminos en D .

Si denotamos por $S_i = S^* \cap V(D_i^c)$ para cada i tal que $(S^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset$, entonces se sigue de la definición de S que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$.

Afirmación 2. S_i satisface (1) para cada $i \in S$.

Sea $i \in S$. Analizaremos dos casos sobre $C_D(i)$.

Caso 1. $C_D(i) = \emptyset$ y para cada $j \in S \setminus \{i\}$ no hay H -caminos en D de i hacia j .

Demostraremos que S_i es un conjunto H -absorbente por caminos en D_i^c .

Sea $(i, n) \in V(D_i^c) \setminus S_i$.

Ya que no hay H -caminos de i hacia j en D para cada $j \in S \setminus \{i\}$, se sigue del teorema 3.0.5 (a) que para $(i, n) \in V(D_i^c)$ y para cada $(j, m) \in V(D_j^c)$ no hay H -caminos de (i, n) hacia (j, m) en $\sigma(\alpha, D)$ para cada $j \in S \setminus \{i\}$. Así, como S^* es un conjunto H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$, se tiene que para $(i, n) \in V(D_i^c) \setminus S_i$ existe $(i, m) \in S_i$ tal que hay un H -camino de (i, n) hacia (i, m) en $\sigma(\alpha, D)$. Por lo tanto, debido a que $C_D(i) = \emptyset$, se sigue del

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

teorema 3.0.5 (b) que hay un H -camino de n hacia m en D_i , lo que implica que hay un H -camino de (i, n) hacia (i, m) en D_i^c .

Así, S_i es un conjunto H -absorbente por caminos en D_i^c .

Caso 2. $C_D(i) \neq \emptyset$ o existe $j \in S \setminus \{i\}$ tal que hay un H -camino de i hacia j en D .

Debido a la definición de S_i se tiene que $S_i \neq \emptyset$.

[\Leftarrow] Sean $S \subseteq V(D)$ un conjunto H -absorbente por caminos en D y $S_i \subseteq V(D_i^c)$ como en las hipótesis del teorema 3.0.7 para cada $i \in S$.

Demostraremos que $S^* = \bigcup_{i \in S} S_i$ es un conjunto H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Sea $(k, n) \in V(\sigma(\alpha, D)) \setminus S^*$.

Consideremos dos casos sobre k .

Caso a. $k \notin S$.

Como $k \notin S$ y S es H -absorbente por caminos en D , se tiene que existe $i \in S$ tal que hay un H -camino de k hacia i en D . Por lo tanto, se sigue del teorema 3.0.5 (a) que para cada $(k, l) \in V(D_k^c)$ y para cada $(i, m) \in V(D_i^c)$ hay un H -camino de (k, l) hacia (i, m) en $\sigma(\alpha, D)$. Así hay un H -camino de (k, n) hacia $S_i \subseteq S^*$ en $\sigma(\alpha, D)$ (porque $S_i \subseteq V(D_i^c)$).

Caso b. $k \in S$.

Si S_k es un conjunto H -absorbente por caminos en D_k^c , entonces existe un H -camino de (k, n) hacia $S_k \subseteq S^*$ en $\sigma(\alpha, D)$ (porque $(k, n) \notin S_k$).

Si S_k es un subconjunto no vacío de $V(D_k^c)$, entonces de la hipótesis sobre S_k se tiene que $C_D(k) \neq \emptyset$ o existe $j \in S \setminus \{k\}$ tal que hay un H -camino de k hacia j en D .

Si $C_D(k) \neq \emptyset$, entonces se sigue del teorema 3.0.5 (b) hay un H -camino de (k, n) hacia $S_k \subseteq S^*$ en $\sigma(\alpha, D)$.

Si existe $j \in S \setminus \{k\}$ tal que hay un H -camino de k hacia j en D , entonces se sigue del teorema 3.0.5 (a) que hay un H -camino de (k, n) hacia $S_j \subseteq S^*$ en $\sigma(\alpha, D)$.

Por lo tanto, S^* es un conjunto H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$. ■

Teorema 3.0.8. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. $N^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ es un H -núcleo por caminos en $\sigma(\alpha, D)$ si y sólo si existe $N \subseteq V(D)$ H -núcleo por caminos en D tal que $N^* = \bigcup_{i \in N} N_i$, donde $N_i \subseteq V(D_i^c)$ y para cada $i \in N$

$$(1) \dots N_i = \begin{cases} \text{es un } H\text{-núcleo por caminos en } D_i^c, & \text{si } C_D(i) = \emptyset \\ \text{consta de un único elemento de } V(D_i^c), & \text{si } C_D(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

Demostración.

[\implies] Sea $N^* \subseteq V(\sigma(\alpha, D))$ un H -núcleo por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.

Consideremos al conjunto $N = \{ i \in V(D) \mid (N^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset \}$.

Afirmación 1. N es un H -núcleo por caminos en D .

Se sigue de los teoremas 3.0.6 y 3.0.7 que N es un conjunto H -independiente por caminos y H -absorbente por caminos en D , respectivamente. Por lo tanto, N es un H -núcleo por caminos en D .

Si denotamos por $N_i = N^* \cap V(D_i^c)$ para cada i tal que $(N^* \cap V(D_i^c)) \neq \emptyset$, entonces se sigue de la definición de N que $N^* = \bigcup_{i \in N} N_i$.

Afirmación 2. N_i satisface (1) para cada $i \in N$.

Sea $i \in N$. Analizaremos dos casos sobre $C_D(i)$.

Caso 1. $C_D(i) = \emptyset$.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Demostraremos que N_i es un H-núcleo por caminos en D_i^c .

Se sigue del teorema 3.0.6 que N_i es un conjunto H-independiente por caminos en D_i^c . Por otro lado, como no hay H-caminos de i hacia j en D para cada $j \in N \setminus \{i\}$ (porque N es H-independiente por caminos en D), entonces se sigue del teorema 3.0.7 que N_i es un conjunto H-absorbente por caminos en D_i^c .

Por lo tanto N_i es un H-núcleo por caminos en D_i^c .

Caso 2. $C_D(i) \neq \emptyset$.

Demostraremos que $|N_i| = 1$.

Como N^ es un conjunto H-independiente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$ y $C_D(i) \neq \emptyset$, se sigue del teorema 3.0.6 que $|N_i| = 1$.*

[\Leftarrow] Sean $N \subseteq V(D)$ un H-núcleo por caminos en D y $N_i \subseteq V(D_i^c)$ como en las hipótesis del teorema 3.0.8 para cada $i \in N$.

Demostraremos que $N^ = \bigcup_{i \in N} N_i$ es un H-núcleo por caminos en $\sigma(\alpha, D)$.*

Consideremos lo siguiente:

- I.** *Como N es un conjunto H-independiente por caminos en D , se tiene que para cada $i, j \in N$, con $i \neq j$, no hay H-caminos en D de i hacia j .*
- II.** *Como N_i es un H-núcleo por caminos en D_i^c si $C_D(i) = \emptyset$, se tiene que N_i es H-independiente por caminos y H-absorbente por caminos en D_i^c .*
- III.** *Como $|N_i| = 1$ si $C_D(i) \neq \emptyset$.*

Entonces, lo anterior lo podemos simplificar de la siguiente manera:

$$N_i - \begin{cases} \text{es un conjunto } H\text{-independiente por caminos en } D_i^c & \text{si } C_D(i) = \emptyset \\ \text{consta de un \u00fanico elemento de } V(D_i^c) & \text{o} \\ & \text{si } C_D(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

y

$$N_i - \begin{cases} \text{es un conjunto } H\text{-absorbente por caminos en } D_i^c, & \text{si } C_D(i) = \emptyset \text{ y para} \\ & \text{cada } j \in N \text{ tal que} \\ & i \neq j \text{ no hay} \\ & H\text{-caminos} \\ & \text{de } i \text{ hacia } j \text{ en } D \\ & \text{o} \\ \text{es un subconjunto no vac\u00edo de } V(D_i^c), & \text{en otro caso} \\ \text{(recordemos que bajo nuestras hip\u00f3tesis} & \\ N_i \text{ consta de un \u00fanico elemento de } V(D_i^c)) & \end{cases}$$

Por lo tanto, se sigue de los teoremas 3.0.6 y 3.0.7 que N^* es un conjunto H -independiente y H -absorbente por caminos en $\sigma(\alpha, D)$, respectivamente. ■

Observemos que del teorema 3.0.3 se sigue que los teoremas 3.0.6 3.0.7 3.0.8 tambi\u00e9n son v\u00e1lidos para H -trayectorias, es decir, en cada uno de dichos resultados podemos cambiar (H -independiente por caminos por H -independiente), (H -absorbente por caminos por H -absorbente) y (H -n\u00facleo por caminos por H -n\u00facleo), respectivamente.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

El lema siguiente será útil.

Lema 3.0.4. *Toda subdigráfica inducida en $\sigma(\alpha, D)$ es*

1. *una digráfica de la forma $\sigma(\alpha', D')$, donde D' es una subdigráfica inducida de D (con $|V(D')| \geq 2$) y α' es una sucesión de subdigráficas inducidas de D_i , para cada $i \in V(D')$,*
2. *una subdigráfica inducida de D_i^c para alguna $i \in \{1, \dots, p\}$*

o

3. *la unión de digráficas como en 1 y 2*

Los siguientes resultados muestran condiciones para que $\sigma(\alpha, D)$, D y cada elemento de α sean digráficas H -núcleo perfectas.

Teorema 3.0.9. *Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. Si $\sigma(\alpha, D)$ es H -núcleo perfecta, entonces D y D_i son digráficas H -núcleo perfectas para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.*

Demostración.

(I) *Por demostrar que D es H -núcleo perfecta.*

Sea G una subdigráfica inducida de D . Veremos que G contiene un H -núcleo.

Si $|V(G)| = 1$, entonces G contiene un H -núcleo. Supongamos que G tiene al menos dos vértices.

Sea $\alpha' = (D_r)_{r \in V(G)} \subseteq \alpha$. Como $\sigma(\alpha', G)$ es una subdigráfica inducida de $\sigma(\alpha, D)$, entonces $\sigma(\alpha', G)$ contiene un H -núcleo (porque $\sigma(\alpha, D)$ es H -núcleo perfecta). Por lo tanto, se sigue del teorema 3.0.8 que G contiene un H -núcleo.

(II) *Por demostrar que D_i es H -núcleo perfecta para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.*

Sean $i \in \{1, \dots, p\}$ y G una subdigráfica inducida de D_i . Veremos que G contiene un H -núcleo.

Si $|V(G)| = 1$, entonces G contiene un H -núcleo. Supongamos que G tiene al menos dos vértices.

Sean $\alpha' = (G)$ y $D' = (\{i\}, \emptyset)$. Como $\sigma(\alpha', D')$ es una subdigráfica inducida de $\sigma(\alpha, D)$, entonces $\sigma(\alpha', D')$ contiene un H -núcleo (porque $\sigma(\alpha, D)$ es H -núcleo perfecta). Por lo tanto, se sigue del teorema 3.0.8 que G contiene un H -núcleo (porque $C_{D'}(i) = \emptyset$). ■

Teorema 3.0.10. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. Si D es H -núcleo perfecta y para cada $i \in \{1, \dots, p\}$

$$(1) D_i - \begin{cases} \text{es } H\text{-núcleo perfecta,} & \text{si } C_D(i) = \emptyset \\ \text{tiene la propiedad de que todas sus subdigráficas inducidas} & \text{o} \\ \text{tienen un } H\text{-núcleo y cada uno de estos} & \text{si } C_D(i) \neq \emptyset \\ \text{consta de un único elemento,} & \end{cases}$$

entonces $\sigma(\alpha, D)$ es H -núcleo perfecta.

Demostración.

Demostraremos que toda subdigráfica inducida de $\sigma(\alpha, D)$ tiene un H -núcleo.

Sea G una subdigráfica inducida de $\sigma(\alpha, D)$. Se sigue del lema 3.0.4 que G tiene 3 posibilidades para su caracterización.

- I. G es una digráfica de la forma $\sigma(\alpha', D')$, donde D' es una subdigráfica inducida de D (con $|V(D')| \geq 2$) y $\alpha' = (D'_i)_{i \in V(D')}$ es una sucesión de subdigráficas inducidas de D_i para cada $i \in V(D')$.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, D)$

Como D es H-núcleo perfecta, entonces D' contiene un H-núcleo, digamos N . Por otro lado, se sigue de (1) que para cada $i \in N$ existe $N_i \subseteq V(D_i^c)$ tal que

$$(2) \dots N_i - \begin{cases} \text{es un H-núcleo de } D_i^c, & \text{si } C_D(i) = \emptyset \\ \text{es un H-núcleo de } D_i^c, \text{ el cual contiene} & \text{o} \\ \text{exactamente un vértice de } V(D_i^c), & \text{si } C_D(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

Ahora veremos que para cada $i \in N$ se tiene que

$$(3) \dots N_i - \begin{cases} \text{es un H-núcleo de } D_i^c, & \text{si } C_{D'}(i) = \emptyset \\ \text{contiene exactamente un vértice de } V(D_i^c), & \text{o} \\ & \text{si } C_{D'}(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

Si $C_{D'}(i) = \emptyset$, entonces $C_D(i) = \emptyset$ o $C_D(i) \neq \emptyset$ y en ambos casos se sigue de (2) que N_i es un H-núcleo de D_i^c .

Por otro lado, observe que si $C_{D'}(i) \neq \emptyset$, entonces $C_D(i) \neq \emptyset$. Así se sigue de (2) que en particular N_i consta de un único elemento de $V(D_i^c)$.

Por lo tanto (3) se satisface.

Por lo tanto, se sigue del teorema 3.0.8 que $\sigma(\alpha', D')$ contiene un H-núcleo.

II. G es una subdigráfica inducida de D_i^c para alguna $i \in \{1, \dots, p\}$.

En este caso, se sigue de (1) que G contiene un H-núcleo, ya que G es isomorfa a una subdigráfica inducida de D_i (debido a la definición de $\sigma(\alpha, D)$).

III. G es la unión de digráficas como en I y II.

En este caso, G contiene un H-núcleo, a saber, la unión de cada uno de los H-núcleos en cada digráfica de la forma I o II (debido a que $V(D_i^c) \cap V(D_j^c) = \emptyset$ para cada $i \neq j$). ■

Corolario 3.0.4. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\alpha = (D_q)_{q \in \{1, \dots, p\}}$ una sucesión de digráficas H -coloreadas ajenas en vértices dos a dos. Si $C_D(i) = \emptyset$ para cada $i \in V(D)$, entonces $\sigma(\alpha, D)$ es H -núcleo perfecta si y sólo si D y D_i son H -núcleo perfectas para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.

Demostración.

Se sigue directamente de los teoremas 3.0.9 y 3.0.10. ■

Conclusión

Comenzamos nuestro estudio sobre la existencia de Núcleos por trayectorias monocromáticas, la existencia de H -núcleos por caminos y la existencia de H -núcleos, considerando únicamente a la digráfica de clases cromáticas. El concepto de digráfica de clases cromáticas podría parecer a simple vista un concepto insignificante, pero durante el desarrollo de este trabajo pudimos ver que dicha construcción es una herramienta muy poderosa que nos ayudó a encontrar un núcleo por trayectorias monocromáticas (H -núcleo por caminos o H -núcleo). Gracias a la digráfica de clases cromáticas, además de presentar resultados originales, pudimos derivar como consecuencia directa de nuestros resultados a un par de resultados muy importantes que hay dentro de la teoría de núcleos por trayectorias monocromáticas y la teoría de núcleos; dichos resultados son el teorema de Sands, Sauer y Woodrow y el teorema de Richardson, respectivamente. Trabajar con componentes fuertemente conexas (inicial o terminal) en el teorema 0.11.2, en el teorema 0.11.6 y en el capítulo 1 fue una gran oportunidad de conocer otra forma de como utilizar a dichas subdigráficas; por ejemplo, una nueva técnica de demostración que se desarrolló para la prueba del teorema 1.2.1 muestra el gran poder que tiene la definición de componente fuertemente conexa terminal al haber trabajado con una componente fuertemente conexa terminal de la digráfica de clases cromáticas, donde a partir de esa elección pudimos construir el núcleo por trayectorias monocromáticas. También se pudo ver que el concepto de digráfica de clases cromáticas generaliza al concepto de digráfica de líneas de una digráfica, cuando las flechas de dicha digráfica están coloreadas con un color distinto. Dicha relación entre el concepto de digráfica de clases cromáticas y el concepto de digráfica de líneas hizo posible la generalización del teorema de Richardson. En conclusión podemos decir que la digráfica de clases cromáticas es una digráfica a la cual se le puede sacar mucho provecho en el estudio de la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas, H -núcleos por caminos y H -núcleos.

3. H-NÚCLEOS EN $\sigma(\alpha, \mathbf{D})$

Con respecto a los problemas expuestos en el capítulo de introducción histórica podemos decir que aún siguen siendo objeto de estudio para futuros temas de investigación.

Referencias

- [1] P. Arpin, V. Linek, Reachability problems in edge-colored digraphs, *Discrete Mathematics*, 307 (2007) 2276-2289. iii, 25, 26, 28, 29, 30, 33, 39, 41, 43, 53, 107, 113
- [2] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, London, 2000.
- [3] C. Berge, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, The Netherlands, 1989. 15, 82
- [4] C. Berge, P. Duchet, Probleme, *Seminaire MSH*, Paris, January 1983. 14
- [5] J. A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Springer, Berlin (2008). 14
- [6] M. Blidia, P. Duchet, H. Jacob, F. Maffray and H. Meyniel, Some operations preserving the existence of kernels, *Discrete Math.* 205 (1999) 211-216.
- [7] E. Boros, V. Gurvich, Perfect Graphs are Kernel Solvable, *Discrete Mathematics*, 159 (1-3) (1996) 35-55. 15
- [8] M. Borowiecki and A. Szelecka, One-factorizations of the generalized Cartesian product and of the x-join of regular graphs, *Discuss. Math.* 13 (1993) 15-19.
- [9] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, The Strong Perfect Graph Theorem, *Annals of Math* Vol 164(2006) 51-229. <http://www.columbia.edu/mc2775/perfect.pdf> 15
- [10] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973. 15

REFERENCIAS

- [11] W.E. Clark and S. Suen, An inequality related to Vizing's conjecture, *Elec. J. Combin.* 7 (#N4) (2000) 1-3.
- [12] P. Delgado-Escalante and H. Galeana-Sánchez, Restricted domination in arc-colored digraphs, *Discret Applied Mathematics*, enviado. 30, 53
- [13] P. Duchet, Graphes noyau-parfaits, *Ann. Discrete Math.* 9 (1980) 93-101. 16
- [14] P. Duchet, A sufficient condition for a digraph to be kernel perfect, *J. Graph Theory* 11 (1) (1987) 81-85.
- [15] B. Effantin and H. Kheddouci, Grundy Number of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 27(2007) 5-18.
- [16] A.S. Fraenkel, Planar Kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$, are NP-complete, *Discrete Appl. Math.* 3 (1981) 257-262. 15
- [17] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, On kernels and semikernels of digraphs, *Discrete Math.* 48 (1984) 67-76.
- [18] H. Galeana-Sánchez, On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, *Discrete Math.* 156 (1996) 103-112. 20
- [19] H. Galeana-Sánchez, A new method to extend KP-digraphs to CKI-digraphs, *Discrete Math.* 69 (1988) 207-209.
- [20] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, On the dichromatic number in kernel theory, *Math. Slovaca* 48 (1998) 213-219.
- [21] H. Galeana-Sánchez, Kernels in edge coloured digraphs, *Discrete Math.* 184 (1998) 87-99. 19, 20
- [22] H. Galeana-Sánchez, On the existence of (k,l)-kernels in digraphs, *Discrete Math.* 85 (1990) 99-102.
- [23] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana-Ramírez, Kernels in edge coloured line digraphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 18 (1998) 91-98.

REFERENCIAS

- [24] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments, *Discrete Math.* 282 (2004) 275-276. 19
- [25] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, Kernels in pretransitive digraphs, *Discrete Math.* 275 (2004) 129-136. 15
- [26] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, Monochromatic Paths and at Most 2-Coloured Arc Sets in Edge-Coloured Tournaments, *Graphs and Combinatorics* 21 (3) (2005) 307-317. 20
- [27] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas Monroy, Kernels in quasi-transitive digraphs, *Discrete Math.* 306 (2006) 1969-1974. 15
- [28] H. Galeana-Sánchez, Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph, *Discuss. Math. Graph Theory* 31, 273-281 (2011). v, 20, 21, 56, 65, 105
- [29] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez, Independent sets and non-augmentable paths in generalizations of tournaments, *Discrete Math.* 308(12) (2008) 2460-2472. 15
- [30] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez, J. J. Montellano-Ballesteros, Independent transversals of longest paths in locally semicomplete and locally transitive digraphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 29 (3) (2009) 469-480. 15
- [31] G. Hahna, P. Ille, Robert E. Woodrow, Absorbing sets in arc-coloured tournaments, *Discrete Math.* 283 (2004) 93-99.
- [32] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading(1972)274pp.
- [33] M. Kucharska, On (k,l) -kernels of orientations of special graphs, *Ars Combin.* 60 (2001) 137-147.
- [34] M. Kucharska, On (k,l) -kernel perfectness of special classes of digraphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 25 (2005) 103-119.
- [35] M. Kwaśnik, On (k,l) -kernels in graphs and their products (PhD Thesis, Technical University of Wrocław, Wrocław, 1980).

REFERENCIAS

- [36] J.M. Laborde, C. Payan and N.H. Xuong. Independent sets and longest paths in digraphs. Graphs and other combinatorial topics. Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory. (1982) 173-177. 15
- [37] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies, III: the condition for a score structure, Bull. Math. Biophys. 15 (1953) 143-148. 16
- [38] V. Linek, B. Sands, A note on paths in edge-colored tournaments, Ars Combin. 44 (1996) 225-228. v, 21, 22, 23, 29
- [39] S. Minggang, On monochromatic paths in m -coloured tournaments, J. Combin. Theory (B) 45 (1988) 108-111. 18, 20
- [40] L. Rédei, Ein Kombinatorischer Satz, Acta Litt. Sci. Szeged 7 (1934) 39-43. 16
- [41] K. B. Reid, Monotone reachability in arc-colored tournaments, Congr. Numer. 146 (2000) 131-141. 25, 29, 33, 51
- [42] M. Richardson, On weakly ordered systems, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 113-116. 15, 75
- [43] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, Ann. Math. 58 (2) (1953) 573.
- [44] M. Richardson, Extensions theorems for solutions of irreflexive relations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953) 649.
- [45] R. Rojas-Monroy, J. I. Villarreal-Valdés, Kernels in infinite digraphs, AKCE J. Graphs. Combin. 7 (1) (2010) 103-111. 81
- [46] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, On monochromatic paths in edge coloured digraphs, J. Combin. Theory (B) 33 (1982) 271-275. iv, 16, 17, 104
- [47] W. Szumny, A. Włoch and Iwona Włoch, On (k,l) -kernels in D -join of digraphs, Discuss. Math. Graph Theory 27 (2007) 457-470.
- [48] J. Topp, Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs, J. Rostock Math. Kolloq. 21 (1982) 73-81.

REFERENCIAS

- [49] J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944. 13, 15
- [50] A. Włoch and I. Włoch, On (k,l) -kernels in generalized products, Discrete Math. 164 (1997) 295-301.
- [51] I. Włoch, On kernels by monochromatic paths in D-join, Ars Combinatoria 99 (2011) 215-224. 120, 123