



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS

MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

“INVARIANTES ALGEBRAICOS EN MATROIDES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MARCELINO RAMÍREZ IBÁÑEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. CRIEL MERINO LÓPEZ.

México, D.F.

Septiembre de 2011.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la amorosa memoria de mi madre,
por que hizo todo lo posible para que yo llegara hasta aquí
y se fue sin ver terminada su obra.
Catalina A. Ibáñez Martínez (1954-2009)

Agradecimientos

Para realizar mis estudios de doctorado, fue necesaria la ayuda, participación y apoyo de muchas personas, sin las cuales no me hubiera sido posible culminar mis estudios.

Mi familia fue un apoyo incondicional en todo momento. Gracias Melissa por todo el apoyo que me has dado, por ser paciente y cuidar de nuestros hijos mientras estudiaba. Gracias a mis gemelitas por que entendieron que a veces no era posible jugar con ellas. Gracias a mis hermanos Manuel, Verónica, Antonio y Teresita, ustedes siempre supieron apoyarme cuando lo necesite y animarme cuando andaba decaído. Gracias, muchísimas gracias a mi madrecita que me enseñó el camino de luchar y no darse por vencido, aun cuando a veces no hay luz al final del camino. Donde quiera que estés jefecita que el creador te tenga entre los suyos.

Estoy profundamente agradecido con la vida, por que puso en mi camino al Dr. Criel Merino como mi asesor de doctorado. Gracias a él, volví a encontrar ese amor por las matemáticas. No solo es un buen guía y maestro, si no también una excelente persona. Gracias por todas las enseñanzas que recibí de usted.

Agradezco al Dr. Jorge Urrutia por sus consejos y por permitirme participar en varios de sus talleres, en los cuales aprendí mucho. Siempre me abrió un hueco entre su grupo de estudiantes y me siento como uno más de ellos.

Gracias a la Dra. Guadalupe Rodriguez y a la Dra. Laura Chavez Lomelí por venir a trabajar con nosotros a Oaxaca, como fruto de sus visitas son algunos resultados del capítulo 2 de esta tesis. Debo de agradecer también al Dr. Steve Noble ya que gracias al trabajo conjunto que se realizó en el verano del 2009, se obtuvieron valiosos resultados de los capítulos 2 y 3.

Mis agradecimientos al Dr. Rolando Jiménez por formar parte de mi comité tutorial y por todo el apoyo que de él recibí.

Agradezco a la Dra. Gabriela Araujo, al Dr. Joaquín Tey y al Dr. Juan José Mo-

tellano por tomar parte de su tiempo, leer y hacer valiosas sugerencias y correcciones a esta tesis. Todos los errores que aún tenga esta tesis son solo míos.

Agradezco infinitamente todo el apoyo que me otorgó el Instituto de Matemáticas. Durante los 4 años como estudiante de doctorado, no solamente tuve todo lo necesario para realizar mis estudios, sino además pude siempre contar con el apoyo incondicional del personal que ahí labora. Los voy a extrañar mucho.

Agradezco a los profesores y estudiantes de la Escuela de Ciencias de la UABJO por permitirme formar parte de ellos y por todos los momentos inolvidables que compartimos.

Doy un agradecimiento muy especial a los estudiantes del Dr. Jorge: Marco, Canek, Javier, Adrián y Adriana (los pareja), Areli, Crevel, Dolores, Alfredo, Hernán (estudiante posdoctoral). En todos los talleres y congresos que coincidíamos me hicieron sentir como uno de ellos, además de siempre apoyarme moral y académicamente. Un agradecimiento especial a Dolores, por que siempre has sido una buena amiga y una excelente colega.

Por último, debo de agradecer al CONACyT por la beca que me otorgó para realizar mis estudios. Sin esta beca me hubiera sido imposible iniciar y mucho menos concluir mis estudios de doctorado. También debo de agradecer al personal administrativo del Instituto de Matemáticas de la UNAM por su valioso y siempre constante apoyo para la realización de solicitudes y trámites. Gracias especialmente a Ma. Inés y Socorro.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Matroides	1
1.1.1. Dualidad	5
1.1.2. Menores	6
1.1.3. Unión de Matroides	7
1.1.4. Polinomio de Tutte	8
2. Matroides de empedrado	13
2.1. Dos bases disjuntas	14
2.2. La Conjetura Merino-Welsh	18
2.2.1. Ruedas y rehiletes	19
2.2.2. Gráficas 3-regulares con cuello al menos 5	20
2.2.3. Gráficas completas	20
2.2.4. Matroides de Catalán	21
2.3. Convexidad de empedrados	22
2.4. Conclusiones	28
3. h-vector	31
3.1. h -vector	31
3.2. Complejos matroidales y multicomplejos	34
3.2.1. La función $g(r, n)$	39
3.3. Matroides de empedrado ralo	41
3.3.1. Bases y Polinomio de Tutte	43
3.4. $f(r, n)$ y coloración estándar de $G_{r,d}$	44
3.5. Conclusiones	52

4. Polinomio de Tutte de algunos matroides	55
4.1. Ruedas y rehiltes	55
4.1.1. $U_{2,4}$	56
4.1.2. $M(K_4)$, W^3 , $M(W_4)$ y W^4	57
4.2. Matroides de empedrado ralo	58
4.2.1. $U_{2,4}$, $U_{2,5}$ y $U_{3,5}$	59
4.2.2. $M(K_4)$	59
4.2.3. Matroide Fano y su dual	61
4.2.4. $S(2, 3, 13)$ y $AG(2, 3)$	62
4.2.5. $S(5, 6, 12)$	63
4.2.6. $AG(3, 2)$, $AG(3, 2)'$, R_8 , F_8 y L_8	64
4.2.7. Matroide Vámos	65
4.2.8. Pappus y non-Pappus	66
4.2.9. Matroide non-Desargues	67
4.3. Matroides representables sobre algún campo	68
4.3.1. $PG(2, 2)$ y $PG(2, 3)$	68
4.3.2. P_7 , P_8 y Q_3	68
4.3.3. $M(K_5)$	70
4.3.4. R_8 , R_9 , R_{10} y R_{12}	70
4.3.5. S_8 , T_8 y J	72
4.3.6. $S(5, 6, 12)$	73
4.4. Contracción y borrado	74
4.4.1. W_+^3	74
4.4.2. $M(K_{3,3})$ y $M^*(K_{3,3})$	75
4.5. $T_M(2, 0)$, $T_M(0, 2)$ y $T_M(1, 1)$	76
4.6. Conclusiones	76
Bibliografía	79

Índice de figuras

1.1.	Visualización de un matroide como retícula de subconjuntos	2
1.2.	Matroide uniforme	3
1.3.	Matroide de empedrado	3
1.4.	Matroide de caminos por retículas	4
2.1.	Para $a \geq 2$, $T_M(a, a)$ es menor que $T_M(0, 2a)$ o $T_M(2a, 0)$	16
2.2.	Gráfica de W_6	19
2.3.	Representación geométrica de $U_{2,2} \oplus U_{0,1}$	22
2.4.	Representación geométrica de $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$	24
2.5.	Representación geométrica de $U_{2,n}$ con elementos en paralelo	25
2.6.	29
2.7.	29
3.1.	32
3.2.	Partición de Δ	33
3.3.	Multicomplejo $\mathcal{M}_{r-1,d}$	36
3.4.	$f(r, d)$ monomios de grado r	36
3.5.	Conjunto dominante de $V(G_{4,3})$	45
3.6.	Coloración estándar de $G_{3,3}$	46
3.7.	Collares binarios de longitud $n = 4$	47
3.8.	Collares binarios y su rotación por 0's.	48
4.1.	La n -rueda	56
4.2.	$U_{2,4}$	56
4.3.	$M(K_4)$	57
4.4.	3-rueda	57
4.5.	3-rehilete	57
4.6.	4-rueda	58
4.7.	4-rehilete	58
4.8.	$U_{2,4}$	59
4.9.	$U_{2,5}$	59

4.10. $U_{3,5}$	59
4.11. $M(K_4)$ y su serie de relajaciones	60
4.12. Matroide R_6	61
4.13. Fano	61
4.14. Dual de Fano	61
4.15. F_7^-	62
4.16. Dual de F_7^-	62
4.17. Plano proyectivo $PG(2,3)$	62
4.18. Plano afín $AG(2,3)$	63
4.19. Plano afín $AG(3,2)$	64
4.20. cubo	64
4.21. F_8	65
4.22. cubo	65
4.23. Realización geométrica de V_8	66
4.24. Pappus	67
4.25. non-Pappus	67
4.26. Realización geométrica del matroide non-Desargues	67
4.27. $P7$	69
4.28. $P8$	69
4.29. Q_3	70
4.30. Gráfica de K_5	71
4.31. Configuración de Desargues	71
4.32. R_9	71
4.33. S_8	72
4.34. Matriz de S_8 sobre $GF(2)$	72
4.35. T_8	73
4.36. J	73
4.37. Contracción y borrado en W_+^3	74
4.38. Gráfica $K_{3,3}$	75
4.39. $M^*(K_{3,3})$	75

Introducción

En esta tesis se muestran dos resultados en la Teoría de Matroides. El primero tiene que ver con la convexidad del polinomio de Tutte [35, 16], el cual es un polinomio en dos variables que puede ser definido para gráficas o, en general, para matroides. El polinomio de Tutte tiene interpretaciones combinatorias muy interesantes, cuando es evaluado en diferentes puntos (x, y) y a lo largo de varias curvas algebraicas. Por ejemplo (ver [11]), para una gráfica G conexa $T_G(2, 0), T_G(0, 2)$ y $T_G(1, 1)$ son el número de orientaciones acíclicas, de orientaciones totalmente cíclicas y de árboles generadores de G respectivamente. $T_G(x, y)$ es el polinomio cromático a lo largo de la línea $y = 0$, después de algún cambio de variable adecuado y la multiplicación por un término. De manera similar podemos obtener el polinomio de flujo de una gráfica.

Se sabe que el polinomio de Tutte, ver [7], tiene la siguiente expansión

$$T_M(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j,$$

donde los coeficientes t_{ij} son no negativos. Note que para $m \geq 0$ y b arbitrario, si (x, y) está en la porción de línea $y = mx + b$ en el cuadrante positivo, entonces T_M aumenta cuando x aumenta. Este comportamiento tan simple de T_M a lo largo de líneas con pendiente positiva, sugiere el estudio del comportamiento de T_M a lo largo de líneas con pendiente negativa en el cuadrante positivo. Merino y Welsh [34] fueron los primeros en notar esto, en particular, estaban interesados en saber si el polinomio de Tutte es convexo a lo largo de la línea $x + y = 2$ en el cuadrante positivo. Ellos plantearon la siguiente conjetura.

Conjetura 0.1 *Sea G una gráfica 2-conexa sin lazos, entonces*

$$\max \{T_G(2, 0), T_G(0, 2)\} \geq T_G(1, 1). \quad (1)$$

La conjetura anterior es muy interesante, pues nos dice que el número de árboles generadores de una gráfica 2-conexa sin lazos o bien es menor que el número de orientaciones acíclicas o bien es menor que el número de orientaciones totalmente cíclicas.

Una pregunta relacionada es la de determinar si para cualquier gráfica G 2-conexa sin lazos se satisface la siguiente desigualdad (aparentemente más fuerte).

$$T_G(2, 0)T_G(0, 2) \geq (T_G(1, 1))^2.$$

Muy poco avance se ha hecho en relación a estas preguntas, sin embargo Jackson [25] mostró, con un argumento muy ingenioso, que para cualquier matroide M ,

$$T_M(3, 0)T_M(0, 3) \geq (T_M(1, 1))^2.$$

En este contexto mostramos tres resultados. Primero, probamos que si un matroide $M = (E, r)$ contiene dos bases disjuntas o si E es la unión de dos bases, entonces $\max\{T_M(2a, 0), T_M(0, 2a)\} \geq T_M(a, a)$, para $a \geq 2$. Estos resultados no pueden ser obtenidos por los métodos usados por Jackson en [25].

Segundo, mostramos que el polinomio de Tutte de un matroide de empedrado sin istmos satisface la desigualdad

$$tT_M(x_1, y_1) + (1 - t)T_M(x_2, y_2) \geq T_M(tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2), \quad (2)$$

con $t \in [0, 1]$ y $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = p$. Es decir, es una función convexa a lo largo del segmento de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo. Un matroide de empedrado es aquel en que todos sus circuitos tienen tamaño al menos $r(M)$. Nuestro interés en ellos radica en una conjetura hecha por D. Mayhew, M. Newman, D. Welsh y G. Whittle, ver [37]; que dice que asintóticamente casi todos los matroides son de empedrado. Un caso especial de (2) es cuando $x_1 = y_1, x_2 = y_2 = 0$ y $t = 1/2$, lo cual nos da (1) para la clase de matroides de empedrado. Por lo que si la conjetura antes mencionada es cierta, asintóticamente casi todos los matroides sin istmos cumplen (1). Tercero, mostramos que la Conjetura (0.1) se satisface para algunas clases pequeñas de matroides y gráficas que no son matroides de empedrado.

El segundo resultado que mostramos en esta tesis está motivado por una conjetura de R. Stanley. Dado un matroide M , siempre le podemos asociar un complejo simplicial $\Delta(M)$ formado por los conjuntos independientes de M . Estos complejos simpliciales son llamados *complejos matroidales*, los cuales son desbullables, “shellable” en inglés, ver sección 3.2. En otras palabras, desbullable nos dice que sus caras maximales son equicardinales y se pueden poner en un cierto orden que nos ayuda a hacer pruebas inductivas. Un invariante combinatorio asociado a los complejos desbullables, es su h -vector. Este vector codifica información como por ejemplo, el número de caras y los números de Betti. Tal vez por eso, es que los complejos han recibido mucha atención en Matemáticas, ver [5, 6, 53, 55]; pero también en Ciencias de la Computación, pues las entradas del h -vector de un matroide gráfico son los coeficientes de la H -forma del polinomio de confiabilidad de

G , ver [14].

En una de sus publicaciones de 1977 [47] Richard Stanley conjeturó (ver también [49]), lo siguiente.

Conjetura 0.2 *El h -vector de un complejo matroidal es la sucesión de grados de algún multicomplejo puro.*

Donde un multicomplejo es un ideal de orden del conjunto parcialmente ordenado \mathbb{N}^n . Es muy natural hacerse esta pregunta, pues uno esperaría que esto sucediera. Sin embargo, como dice el propio Stanley [49], “es una pregunta intrigante en la teoría de matroides”.

Por algún tiempo la conjetura no había tenido ningún progreso, pero en 1997 en el trabajo de Norman Biggs [2, 3] y en el de Criel Merino [32] se demostró implícitamente que para el caso de matroides cográficos la Conjetura 0.2 es cierta. Para una exposición más detallada ver [33]. Recientemente, la conjetura fue probada para matroides de rango 2 en [50], para matroides de caminos por retículas en [44], para matroides cotransversales en [46], para matroides de rango menor o igual a 3 y corango 2 en [30]. Nosotros mostramos que en el caso de los matroides de empedrado, la conjetura de Stanley es cierta. De ser cierta la conjetura propuesta por Mayhew, Newman, Welsh y Whittle nuestra demostración de la conjetura de Stanley abarcaría la clase más grande de matroides, en comparación con los otros resultados que abarcan clases pequeñas de matroides.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se dan los conceptos básicos que se necesitarán a lo largo del texto, empezamos con la definición de matroide para luego pasar al polinomio de Tutte. En el Capítulo 2 se exponen los resultados de convexidad antes mencionados, se hace una reformulación de la Conjetura 0.1 en términos de matroides y se demuestra para algunas clases de matroides. En el Capítulo 3 se muestra que el h -vector de un matroide de empedrado sin istmos es una O -sucesión pura, es decir que la Conjetura 0.2 es cierta para los matroides de empedrado sin istmos. En el proceso de demostración, se encontró una relación entre multicomplejos, collares aperiódicos y palabras Lyndon. Se estudió esta relación, se ofrecen algunos resultados y se da la Conjetura 3.39. En el Capítulo 4, se calculan los polinomios de Tutte de todos los matroides que aparecen en el Apéndice del libro de Oxley [41] y al final se comprueba que todos ellos satisfacen la Conjetura 2.8 hecha en el Capítulo 2. Por último se da la bibliografía utilizada a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo tiene como motivación, presentar las nociones básicas de la teoría de matroides que serán necesarias al lo largo de esta tesis. En los capítulos subsecuentes también daremos más definiciones, solo que se darán conforme se vayan necesitando; esto con el único fin de que sea más amena la lectura. También damos la definición del polinomio de Tutte de un matroide, éste es un invariante algebraico muy importante no solo para matroides sino para varios objetos matemáticos como son: los nudos, las gráficas, los códigos, entre otros. La parte de matroides está basada en el libro de Oxley, [41]. La parte del polinomio de Tutte, está basada en [11].

1.1. Matroides

Hay varias maneras equivalentes de definir un matroide: por sus conjuntos independientes, por sus bases, por su rango, por sus circuitos y por su cerradura; ver [41]. Nosotros extraemos de ahí solo dos, por sus conjuntos independientes y por su rango; pues son las que más usaremos.

Definición 1.1 *Un matroide M es un par ordenado (E, \mathcal{I}) que consiste de un conjunto finito E y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de E que satisfacen las tres condiciones siguientes:*

($\mathcal{I}1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

($\mathcal{I}2$) si $I \in \mathcal{I}$ y $I' \subset I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$.

($\mathcal{I}3$) si I_1, I_2 están en \mathcal{I} y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe un elemento e de $I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

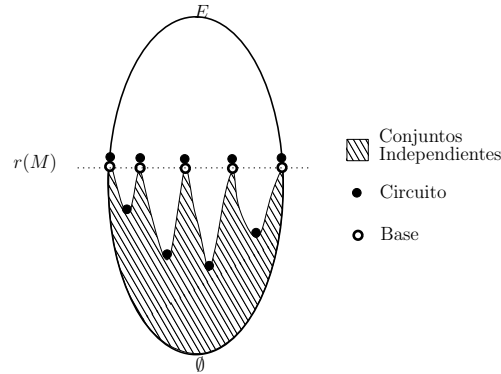


Figura 1.1: Visualización de un matroide como retícula de subconjuntos

Si $M = (E, \mathcal{I})$ es un matroide, los miembros de \mathcal{I} son los *conjuntos independientes* de M . A los subconjuntos independientes maximales de M los llamaremos *bases*. E es el *conjunto fundamento* de M y un subconjunto de E que no este en \mathcal{I} se le llama *dependiente*. A los subconjuntos dependientes minimales, es decir, aquellos conjuntos dependientes cuyos subconjuntos propios son independientes, los llamaremos *circuitos*. Un elemento $e \in E$ lo llamaremos *lazo* si $\{e\}$ es un circuito de M .

Una manera, muy útil, de visualizar un matroide se da en la Figura 1.1. Si pensamos en la retícula de subconjuntos de E , hasta abajo tenemos al conjunto vacío, después los subconjuntos con un elemento, con dos elementos, etc., hasta llegar a E . Los subconjuntos con $r(M)$ elementos son las bases.

Por ejemplo, si E es un conjunto con n elementos; sea \mathcal{I} la familia de subconjuntos de E de cardinalidad menor o igual a k , con $k \leq n$. Este es un matroide en E de rango k , llamado el *matroide uniforme*. Usualmente se denota por $U_{k,n}$, ver Figura 1.2.

Otro ejemplo son los *matroides de empedrado*, estos son aquellos matroides $M = (E, r)$ tales que no tiene circuitos de tamaño menor que $r(M)$, ver Figura 1.3. En particular, un matroide uniforme es un tipo de matroide de empedrado. En el Capítulo 3 se generalizará la noción de matroide de empedrado a la de matroide k -empedrado.

Un tercer ejemplo que damos es el de *matroide gráfico*. Dada una gráfica G , sea E el conjunto de aristas de la gráfica y sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos X de E tales que no contiene ningún ciclo de G . Esto define un matroide, el *matroide de ciclos de la gráfica G* y lo denotamos por $M(G)$. Cualquier matroide isomorfo al matroide de ciclos de una gráfica, lo llamaremos *matroide gráfico*.

Otro matroide que usaremos más adelante es el matroide de caminos por retículas. Para definirlo, primero necesitamos decir que son los matroides transver-

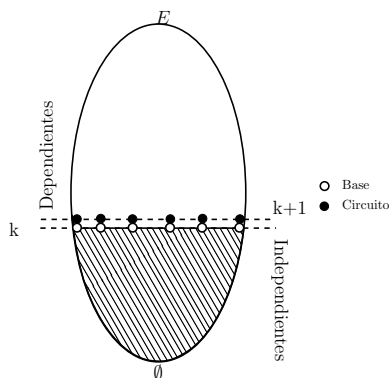


Figura 1.2: Matroide uniforme

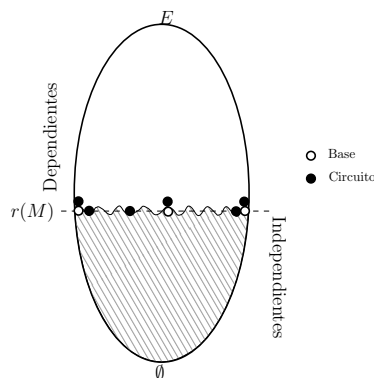


Figura 1.3: Matroide de empedrado

sales. Sea \mathcal{A} la familia (A_1, A_2, \dots, A_m) de subconjuntos de un conjunto finito S , usualmente se abrevia $(A_j \mid j \in J)$ por (A_1, A_2, \dots, A_m) donde $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Un *transversal* de \mathcal{A} es un subconjunto $\{x_j \mid j \in J\}$ de S , tal que $x_i \in A_i$ para toda $i \in J$. Un *Transversal parcial* de \mathcal{A} es un transversal de la familia $(A_k \mid k \in K)$ con K subconjunto de J . El teorema siguiente es un resultado de Edmonds y Fulkerson, ver [20].

Teorema 1.2 *Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de un conjunto finito S . Sea \mathcal{I} el conjunto de transversales parciales de \mathcal{A} . Entonces \mathcal{I} es la colección de conjuntos independientes de un matroide en S .*

Un *matroide transversal* es un matroide cuyos conjuntos independientes son los transversales parciales de alguna familia $\mathcal{A} = (A_j \mid j \in J)$; decimos que \mathcal{A} es la *presentación* del matroide transversal y denotamos a estos matroides por $M(\mathcal{A})$

Sea $\mathcal{A} = \{[a_1, c_1], [a_2, c_2], \dots, [a_r, c_r]\}$, donde $a_i \leq c_i$, $[a_i, c_i] = \{a_i, a_i + 1, \dots, c_i\}$ es un intervalo en los enteros, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r$ y $c_1 < c_2 < \dots < c_r \leq n + r$. Esta familia define un matroide transversal $M(\mathcal{A})$ llamado *matroide de caminos por retículas*, para más detalles ver [8]. Por ejemplo, si M es un matroide de caminos por retículas con presentación $[1, 5], [3, 7], [4, 8], [7, 9]$, en la Figura 1.4 se muestra este matroide y una de sus bases, $B = \{2, 4, 5, 8\}$.

Después de dar algunos ejemplos, continuamos con más propiedades de los matroides. La noción de base para un matroide es la generalización de base para un espacio vectorial, de [41] tenemos

Lema 1.3 *Si B_1 y B_2 son bases de M , entonces $|B_1| = |B_2|$.*

Otra noción importante en álgebra lineal es la dimensión, daremos la generalización para matroides de estas ideas, pero antes definimos una manera natural

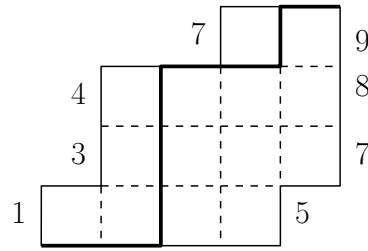


Figura 1.4: Matroide de caminos por retículas

de construir matroides. Sea M el matroide (E, \mathcal{I}) y supongamos que $X \subseteq E$. Sea $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$, entonces es fácil ver que el par $(X, \mathcal{I}|X)$ es un matroide. Llamamos a este matroide la *restricción* de M a X y la denotamos por $M|X$.

Como $M|X$ es un matroide, del Lema 1.3, todas sus bases son equicardinales. Definimos el *rango* $r(X)$ de X como el tamaño de una base B de $M|X$ y llamamos al conjunto B *base* de X . Es claro que r es una función de 2^E en \mathbb{N} , llamada la *función rango* de M . A veces escribiremos r_M por r y $r(M)$, el rango del matroide, por $r(E(M))$. Es claro que r satisface las siguientes propiedades

(R1) Si $X \subseteq E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$.

Más aún,

Lema 1.4 *La función rango de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ satisface la condición*

(R3) *Si X y Y son subconjuntos de E , entonces*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$

La condición (R3) es llamada *submodularidad*. Las condiciones (R1)-(R3) caracterizan a la función rango de un matroide, ver [41].

Teorema 1.5 *Sea E un conjunto finito y $r : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ la función que satisface las condiciones (R1)-(R3). Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos de E para los cuales $r(X) = |X|$. Entonces (E, \mathcal{I}) es un matroide con función rango r .*

El teorema anterior nos dice que una manera equivalente de definir un matroide es por un conjunto finito E y una función r de E en \mathbb{N} que satisface las condiciones (R1)-(R3), cuando esto sucede denotamos al matroide como $M = (E, r)$.

En un espacio vectorial V , un vector \vec{v} está en el generado por $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ si los espacios generados por $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}\}$ tienen la misma dimensión. Sea $M = (E, r)$ un matroide arbitrario con función rango r . Sea cl la función de 2^E a 2^E tal que para cada $X \subseteq E$

$$cl(X) = \{X \in E : r(X \cup x) = r(X)\}.$$

Esta función la llamamos el *operador cerradura* de M . Al igual que la función rango, el operador cerradura satisface algunas condiciones que lo caracterizan ver Lema 1.4.2 de [41]. A $cl(X)$ la llamamos la *cerradura* de X en M y algunas veces la escribimos como $cl_M(X)$. Si $X = cl(X)$, a X lo llamamos un *conjunto cerrado* de M . Un *hiperplano* de M es un conjunto cerrado de rango $r(M) - 1$. Un subconjunto X de $E(M)$ es un *conjunto generador* de M si $cl(X) = E(M)$.

La siguiente proposición nos muestra que las bases y los hiperplanos son conjuntos generadores y no-generados especiales.

Proposición 1.6 *Sea M un matroide y $X \subseteq E(M)$, entonces*

- (i) *X es un conjunto generador si y sólo si $r(X) = r(M)$;*
- (ii) *X es base si y sólo si es un conjunto generador minimal; y*
- (iii) *X es un hiperplano si y sólo si es un conjunto no-generador maximal.*

1.1.1. Dualidad

Sea $M = (E, r)$ un matroide con función rango r . Definimos $M^* = (E, r^*)$ tal que para toda $X \subseteq E$,

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X).$$

No es difícil ver que r^* satisface las condiciones $(R_1) - (R_3)$. Del Teorema 1.5 se sigue que M^* es un matroide, llamado el matroide *dual* de M . El conjunto de bases de M^* es $\{E - B \mid B \text{ es base de } M\}$. A las bases de M^* las llamaremos *co-bases*; análogamente a los circuitos, hiperplanos, generadores y conjuntos independientes, los llamaremos *co-circuitos*, *co-hiperplanos*, *co-generadores* y *conjuntos co-independientes*, respectivamente. A los lazos de M^* los llamaremos *istmos*. Algunas relaciones entre estos conjuntos se dan en la siguiente

Proposición 1.7 *Sea $M = (E, r)$ un matroide y $X \subseteq E$, entonces*

- (i) *X es independiente si y sólo si $E - X$ es co-generador;*

- (ii) X es generador si y sólo si $E - X$ es co-independiente;
- (iii) X es un hiperplano si y sólo si $E - X$ es un co-circuito; y
- (iv) X es un circuito si y sólo si $E - X$ es un co-hiperplano.

Sea X un circuito-hiperplano del matroide M , decimos que el matroide M' se obtiene por *relajación* de M si las de bases de M' son las mismas que las de M más el circuito-hiperplano X . Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que si X es un circuito-hiperplano del matroide M , entonces $E(M) - X$ es un circuito-hiperplano de M^* . La operación de relajación tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.8 *Si M' se obtiene relajando el circuito-hiperplano X de M , entonces $(M')^*$ se obtiene de M^* relajando el circuito-hiperplano $E(M) - X$ de M^* .*

Demostración. Como $\mathcal{B}(M') = \mathcal{B}(M) \cup \{X\}$, se sigue que $\mathcal{B}((M')^*) = \mathcal{B}(M^*) \cup \{E(M) - X\}$ y el resultado se sigue. ■

1.1.2. Menores

Hay varias maneras de obtener un matroide a partir de otro. A continuación daremos dos importantes formas de hacer esto: por contracción y por borrado. En la siguiente subsección daremos otra, la unión de matroides.

Sean M un matroide con conjunto fundamento E y $e \in E$. Denotamos por $M \setminus e$ al matroide que se obtiene de M al *borrar* e de E , es decir, $M \setminus e$ es la restricción de M a $E - e$. Los independientes de este matroide son $\mathcal{I}' = \{I \subseteq E - e \mid I \in \mathcal{I}(M)\}$. Note que si G es una gráfica, entonces $M(G) \setminus e = M(G \setminus e)$.

La *contracción*, denotada por M/e , se define de la siguiente manera. Si $r_M(e) = 0$, o sea e es un lazo, entonces $M/e = M \setminus e$. Si $r_M(e) = 1$ entonces definimos $M/e := M(E - e, \mathcal{I}'')$, donde $\mathcal{I}'' = \{I - e \mid e \in I \in \mathcal{I}(M)\}$. M/e así definido cumple $(\mathcal{I}1)$ - $(\mathcal{I}3)$ de la Definición 1.1, por lo que es un matroide. Note que si G es una gráfica, entonces $M(G)/e = M(G/e)$. También observe que si $S \subseteq E - e$

$$r_{M/e}(S) = r_M(S \cup e) - r_M(e).$$

Las operaciones de contracción y borrado conmutan, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 1.9 *Sean e_1, e_2 elementos de $E(M)$. Entonces*

- i) $M \setminus e_1 \setminus e_2 = M \setminus e_2 \setminus e_1$.
- ii) $M/e_1/e_2 = M/e_2/e_1$.

iii) $M/e_1 \setminus e_2 = M \setminus e_2 / e_1$.

Demostración. (i) se sigue de la definición de restricción. Para (ii) basta con decir que $r_{M/e_1/e_2}(S) = r_M(S \cup \{e_1, e_2\}) - r_M(\{e_1, e_2\})$. Para mostrar (iii), sea $S \subseteq E - \{e_1, e_2\}$, luego

$$\begin{aligned} r_{M/e_1 \setminus e_2}(S) &= r_{M/e_1}(S) \\ &= r_M(S \cup e_1) - r_M(e_1) \\ &= r_{M \setminus e_2}(S \cup e_1) - r_{M \setminus e_2}(e_1) \\ &= r_{M \setminus e_2 / e_1}(S). \end{aligned}$$

■

Un matroide N es un *menor* del matroide M , si existen subconjuntos disjuntos X, Y de $E(M)$ tal que $N = M/X \setminus Y$.

1.1.3. Unión de Matroides

Existe varias maneras de unir matroides, dentro de ellas existe una muy importante dada por Nash-Williams (1966); llamada *unión de matroides*. Aquí solo mencionaremos como se construye la unión de matroides, para un estudio más detallado, ver Capítulo 12 de [41].

Teorema 1.10 Sean M_1 y M_2 matroides en el conjunto E , con funciones rango r_1 y r_2 respectivamente. Sea

$$\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 \mid I_1 \in \mathcal{I}(M_1), I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}.$$

Entonces, \mathcal{I} es la colección de conjuntos independientes de un matroide $M_1 \vee M_2$ en E . Mas aún, si $X \subseteq E$, su rango en $M_1 \vee M_2$ es

$$\min \{r_1(Y) + r_2(Y) + |X - Y| : Y \subseteq X\}.$$

El matroide $M_1 \vee M_2$ es llamado la *unión* de M_1 y M_2 . El teorema anterior se puede extender a más de dos matroides; es decir, si M_1, M_2, \dots, M_n es una familia arbitraria de matroides en el conjunto E , entonces existe un matroide $M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_n$ en E tal que

$$\mathcal{I}(M_1 \vee \dots \vee M_n) = \{I_1 \cup \dots \cup I_n \mid I_i \in \mathcal{I}(M_i), \text{ para } 1 \leq i \leq n\}.$$

Además, si M_i tiene como función rango a r_i , entonces el rango de X en $\vee_{i=1}^n M_i$ es

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(Y) + |X - Y| : Y \subseteq X \right\}. \quad (1.1)$$

Solo mencionamos que la unión de matroides también se puede definir cuando se tienen distintos conjuntos fundamento.

Ahora vamos a ver algunas aplicaciones de la unión de matroides. Las que nos interesan son resultados de J. Edmonds (1965) y las pruebas originales son anteriores al descubrimiento de la operación de unión de matroides.

Teorema 1.11 (Harary y Welsh) *Un matroide M tiene k bases disjuntas si y sólo si para cada subconjunto X de $E(M)$,*

$$kr(X) + |E(M) - X| \geq kr(M).$$

Demostración. M tiene k bases disjuntas si y sólo si $\bigvee_{i=1}^k M$ tiene rango al menos $kr(M)$. Por la ecuación (1.1), lo anterior ocurre si sólo si $kr(X) + |E(M) - X| \geq kr(M)$ para todo $X \subseteq E$. ■

Para el caso cuando $k = 2$ se tiene

$$2r(X) + |E(M) - X| \geq 2r(M).$$

1.1.4. Polinomio de Tutte

Un *invariante bajo isomorfismos* es una función f en la clase de todos los matroides tal que

$$f(M) = f(N) \text{ siempre que } M \cong N. \quad (1.2)$$

Es necesario observar que varios números asociados a un matroide M , tales como el número de bases, el número de conjuntos independientes y el número de conjuntos generadores, son invariantes algebraicos satisfaciendo las dos recursiones siguientes. Para cada elemento e de M ,

$$f(M) = f(M \setminus e) + f(M/e) \text{ si } e \text{ no es ni lazo ni istmo,} \quad (1.3)$$

$$f(M) = f(M|e)f(M \setminus e) \text{ en otro caso.} \quad (1.4)$$

Recordemos que $M|X$ denota al matroide restringido al conjunto $X \subseteq E$. Si \mathcal{K} es la clase de matroides cerrado bajo menores y bajo isomorfismo, y f es una función en \mathcal{K} satisfaciendo (1.2), (1.3) y (1.4), entonces f es llamado un *invariante Tutte-Grothendieck* o *invariante T-G*.

Sean $M = (E, r)$ un matroide con función rango r y $X \subseteq E$. Denotamos a $r(E) - r(X)$ por $z(X)$ y a $|X| - r(X)$ por $n(X)$, la función $n(X)$ es llamada la nulidad de X . $S_M(x, y)$ es el *polinomio generatriz del rango* del matroide M y se define como

$$S_M(x, y) = \sum_{X \subseteq E} x^{z(X)} y^{n(X)}. \quad (1.5)$$

Claramente $S_M(x, y)$ es un invariante bajo isomorfismos para la clase de todos los matroides. Más aún, no es difícil ver si I es un istmo y L es un lazo, entonces

$$S_I(x, y) = x + 1 \text{ y } S_L(x, y) = y + 1. \quad (1.6)$$

Lema 1.12 $S_M(x, y)$ es un invariante T - G para la clase de todos los matroides

Demostración. Sea e un elemento del matroide $M = (E, r)$. $S_M(x, y)$ se puede escribir como

$$S_M(x, y) = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{z(X)} y^{n(X)} + \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{z(X)} y^{n(X)}. \quad (1.7)$$

El primer término de la ecuación anterior es igual a $\sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{z(X)} y^{n(X)}$; se cumple,

$$r(E) = \begin{cases} r(E - e) + 1, & \text{si } e \text{ es un istmo,} \\ r(E - e), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{z(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} x \sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)} & \text{si } e \text{ es un istmo,} \\ \sum_{X \subseteq E \setminus e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{z(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} x S_{M \setminus e}(x, y) & \text{si } e \text{ es un istmo,} \\ S_{M \setminus e}(x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Si tomamos ahora el segundo término de la derecha de (1.7), este es igual a $\sum_{y \subseteq E \setminus e} x^{r((E-e) \cup e) - r(Y \cup e)} y^{n(Y \cup e)}$. Sean r' y n' la función rango y nulidad de M/e . Entonces para todo $Y \subseteq E - e$,

$$r'(Y) = \begin{cases} r(Y \cup e), & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ r(E \cup e) - 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$n'(Y) = \begin{cases} n(Y \cup e) - 1, & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ n(E \cup e), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{z(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} y \sum_{Y \subseteq E - e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)} & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ \sum_{Y \subseteq E - e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{z(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} y S_{M/e}(x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ S_{M/e}(x, y) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Sustituyendo (1.8) y (1.9) en (1.7), se tiene

$$S_M(x, y) = \begin{cases} S_{M \setminus e}(x, y) + S_{M/e}(x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni istmo,} \\ (x + 1) S_{M \setminus e}(x, y) & \text{si } e \text{ es un istmo,} \\ (y + 1) S_{M/e}(x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo.} \end{cases}$$

donde $S_I(x, y) = x + 1$ y $S_L(x, y) = y + 1$. Además, si e es un lazo, entonces $M \setminus e = M/e$. Es así que $S_M(x, y)$ satisface (1.2), (1.3) y (1.4). ■

El siguiente teorema, no solo extiende el lema anterior, si no que esencialmente dice que $S_M(x, y)$ es el invariante T-G universal. Al conjunto de clases de isomorfismos de matroides lo denotamos por \mathcal{M} .

Teorema 1.13 (Brylaski) *Existe una única función T de \mathcal{M} en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x, y]$ con las siguientes propiedades:*

(i) $T_I(x, y) = x$ y $T_L(x, y) = y$.

(ii) (contracción-borrado) *Si e es un elemento de M que no es lazo ni istmo, entonces*

$$T_M(x, y) = T_{M \setminus e}(x, y) + T_{M/e}(x, y).$$

(iii) *Si e es un lazo o un istmo de M , entonces*

$$T_M(x, y) = T_{M|e}(x, y) T_{M \setminus e}(x, y).$$

Demostración. Por el Lema 1.1.4, si definimos $T_M(x, y) = S_M(x - 1, y - 1)$, entonces (i)-(iii) se cumplen. Usando inducción en el número de elementos, se muestra que T es única. ■

Llamaremos a la función $T_M(x, y)$ el *polinomio de Tutte* del matroide M . De la demostración anterior se tiene

$$T_M(x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(X)} (y - 1)^{n(X)}. \quad (1.10)$$

El polinomio de Tutte puede ser calculado usando la ecuación anterior o usando las recursiones (ii) y (iii) del teorema anterior.

Necesitamos otra definición (equivalente) del polinomio de Tutte que usaremos mas adelante. Fijemos un orden \prec en los elementos de M , digamos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, donde $e_i \prec e_j$ si $i < j$. Sea B una base de M fija, decimos que e es un elemento *internamente activo* si $e \in B$ y es el elemento más pequeño del único cocircuito disjunto de $B \setminus \{e\}$. Dualmente, un elemento f es *externamente activo* si $f \notin B$ y es el elemento más pequeño del único circuito contenido en $B \cup \{f\}$. Definimos t_{ij} como el número de bases con actividad interna i y actividad externa j . En [52] Tutte define T_M usando estos conceptos, una prueba de la equivalencia con la ecuación (1.10) se puede encontrar en [7].

Definición 1.14 Si $M = (E, r)$ es un matroide con un orden total en E , entonces

$$T_M(x, y) = \sum_{i, j} t_{ij} x^i y^j. \quad (1.11)$$

En el Capítulo 4 se calcula el polinomio de Tutte de todos los matroides que aparecen en el Apéndice del libro de Oxley([41]). Es por eso que aquí no daremos ningún ejemplo de como calcular el polinomio. Cabe mencionar que el problema de evaluar el polinomio de Tutte en un punto (a, b) del plano de Tutte es $\#P$ -duro, excepto para ciertas curvas y en un cierto conjunto finito de puntos. Para más detalles ver [26] y [54].

Capítulo 2

Matroides de empedrado y dos bases disjuntas

Del capítulo anterior, recordemos que el polinomio de Tutte puede expresarse de la siguiente manera

$$T_M(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j,$$

donde los t_{ij} son enteros no negativos. Si tomamos $m \geq 0$ y b arbitraria, la ecuación anterior nos dice que en la porción de la línea $y = mx + b$ en el cuadrante positivo, $T_M(x, y)$ aumenta conforme x aumenta. Este comportamiento de T_M a lo largo de líneas con pendiente positiva, sugiere el estudio con pendientes negativas en el cuadrante positivo. C. Merino y D. Welsh [34] fueron los primeros en considerar esto, en particular estaban interesados en saber si el polinomio de Tutte es convexo en la porción de la línea $x + y = 2$ en el cuadrante positivo. Ellos hicieron la siguiente conjetura El teorema anterior nos dice, que en la porción de la línea $x + y = 2a$ en el cuadrante positivo, el valor de T en los puntos extremos del segmento de línea es mayor que el valor de T en el punto medio, ver Figura 2.1.

Conjetura 2.1 *Sea G una gráfica 2-conexa sin lazos. Entonces*

$$\max \{T_{M(G)}(2, 0), T_{M(G)}(0, 2)\} \geq T_{M(G)}(1, 1). \quad (2.1)$$

Obsérvese que esta es una condición necesaria para que T sea convexa en la porción de línea mencionada. Por otro lado, cualquier gráfica con al menos un lazo y al menos un istmo falla al cumplir (2.1), luego (2.1) no se satisface para toda gráfica. El interés principal en los puntos $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 1)$ es por que en toda gráfica G conexa $T_{M(G)}(2, 0)$, $T_{M(G)}(0, 2)$ y $T_{M(G)}(1, 1)$ es el número de orientaciones acíclicas, orientaciones totalmente cíclicas y árboles generadores de G respectivamente. Una

pregunta relacionada con la conjetura 2.1 es la determinar si para cualquier gráfica G sin lazos ni istmos, se cumple

$$T_{M(G)}(2, 0)T_{M(G)}(0, 2) \geq T_{M(G)}(1, 1),$$

el cual aparentemente es un argumento fuerte.

Muy poco se ha hecho para resolver estas preguntas. Sin embargo, B. Jackson en [25], con un argumento muy ingenioso, mostró que para un gráfica sin lazos ni istmos y números reales positivos a, b con $b \geq a(a + 2)$,

$$T_{M(G)}(b, 0)T_{M(G)}(0, b) \geq T_{M(G)}(a, a). \quad (2.2)$$

En este capítulo mostraremos tres resultados relacionado con lo antes expuesto. Primero probaremos que si un matroide $M = (E, r)$ tiene dos bases disjuntas entonces $T_M(0, 2a) \geq T_M(a, a)$, siempre que $a \geq 2$; dualmente, si E es la unión de dos bases entonces $T_M(2a, 0) \geq T_M(a, a)$. Estos resultados no pueden obtenerse con los métodos usados por B. Jackson en [25].

Segundo, en la Sección 2.2 mostraremos que (2.1) se cumple para algunas clases de matroides y gráficas.

Por último, en la Sección 2.3, mostramos que el polinomio de Tutte T de un matroide de empedrado sin istmos satisface la desigualdad

$$tT(x_1, y_1) + (1 - t)T(x_2, y_2) \geq T(tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2), \quad (2.3)$$

donde $0 \leq t \leq 1$ y x_1, x_2, y_1, y_2 son no negativos y satisfacen $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. En otras palabras, lo anterior nos dice que el polinomio de Tutte T es una función convexa a lo largo de la línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo. Un caso especial de la desigualdad (2.3), que se obtiene al tomar $x_1 = y_2 = 2$, $x_2 = y_1 = 0$ y $t = 1/2$, nos da la desigualdad (2.1) para la clase de matroides de empedrado.

Este Capítulo está basado en el artículo [16].

2.1. Dos bases disjuntas

Cuando el polinomio de Tutte se define por la ecuación (1.11), hay varias identidades que satisfacen los coeficientes t_{ij} . Para una caracterización completa de todas las relaciones lineales que satisfacen los coeficientes t_{ij} , ver Teorema 6.2.13 en [11]. De ahí provienen las siguientes relaciones.

Teorema 2.2 *Si M es un matroide de rango r con m elementos sin lazos ni istmos, entonces*

$$(i) \ t_{ij} = 0, \text{ siempre que } i > r \text{ o } j > m - r;$$

(ii) $t_{r0} = 1$ y $t_{0,m-r} = 1$

(iii) $t_{rj} = 0$ para toda $j > 0$ y $t_{i,m-r} = 0$ para todo $i > 0$.

Para comenzar con lo relacionado a dos bases disjuntas, primero damos el siguiente resultado que necesitaremos mas adelante.

Teorema 2.3 *Si M es un matroide que no tiene lazos ni istmos, entonces*

$$\max\{T_M(4, 0), T_M(0, 4)\} \geq T_M(2, 2).$$

Demostración. Sean r y m el rango y el número de elementos de M , respectivamente.

$$\begin{aligned} \max\{T_M(4, 0), T_M(0, 4)\} &\geq \{4^r, 4^{m-r}\} \\ &= \max\{2^{2r}, 2^{2(m-r)}\} \\ &\geq 2^m = T_M(2, 2). \end{aligned}$$

La primera desigualdad se sigue de (1.14) y de (ii) en el Teorema anterior. ■

A lo largo de esta tesis, algunas veces denotaremos el rango $r(E)$ del matroide por r , esperando no confundir al lector.

Note que para un matroide $M = (E, r)$ con dual $M^* = (E, r^*)$, las siguientes desigualdades son equivalentes para cualquier $A \subseteq E$.

$$|A| \leq |E| - 2(r(E) - r(A)), \quad (2.4)$$

$$|E \setminus A| \leq 2r^*(E \setminus A) \text{ y} \quad (2.5)$$

$$z(A) + n(A) \leq m - r. \quad (2.6)$$

Nos restringiremos ahora a todos los matroides M en los cuales todos los subconjuntos A de E satisfacen las desigualdades (equivalentes) anteriores. Por la desigualdad (2.4) y el Teorema 1.11 estos son los matroides que contienen dos bases disjuntas; por dualidad, estos son los matroides M cuyo conjunto fundamente E , es la unión de dos bases de M^* .

Como todo término $(x-1)^{z(A)}(y-1)^{n(A)}$ de T_M tiene a $x^{z(A)}y^{n(A)}$ como su monomio de máximo grado, el siguiente teorema es consecuencia directa de las desigualdades anteriores.

Teorema 2.4 *Si un matroide M contiene dos bases disjuntas, entonces $t_{ij} = 0$ para toda i y j tales que $i + j > m - r$. Dualmente, si E es la unión de dos bases, entonces $t_{ij} = 0$, para todo i y j tales que $i + j > r$.*

Es así que llegamos a nuestro primer resultado.

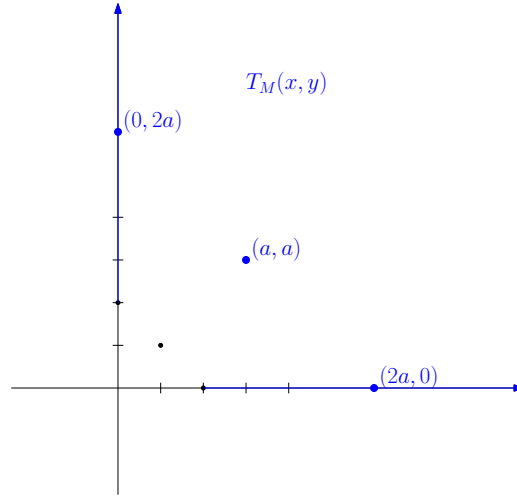


Figura 2.1: Para $a \geq 2$, $T_M(a, a)$ es menor que $T_M(0, 2a)$ o $T_M(2a, 0)$.

Teorema 2.5 Si M contiene dos bases disjuntas o E es la unión de dos bases entonces

$$\max\{T_M(2a, 0), T_M(0, 2a)\} \geq T_M(a, a), \quad (2.7)$$

para todo $a \geq 2$.

Demostración. Tomemos el caso cuando M tiene dos bases disjuntas, el otro caso se sigue por dualidad. Se cumple que $m - r \geq r$, de la demostración del Teorema 2.3 y la ecuación (1.11) se tiene $4^{m-r} \geq T_M(2, 2) = \sum_{i,j} t_{ij} 2^{i+j}$. Multiplicando está desigualdad por $(a/2)^{m-r}$,

$$(2a)^{m-r} \geq \sum_{i,j} t_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^{m-r} 2^{i+j} \geq \sum_{i,j} t_{ij} \left(\frac{a}{2}\right)^{i+j} 2^{i+j} = \sum_{i,j} t_{ij} a^{i+j}.$$

Donde la segunda desigualdad es cierta por el Teorema 2.4. Luego entonces,

$$T_M(0, 2a) \geq (2a)^{m-r} \geq \sum_{i,j} t_{ij} a^{i+j} = T_M(a, a).$$

■

El teorema anterior nos dice, que en la porción de la línea $x + y = 2a$ en el cuadrante positivo, el valor de T en los puntos extremos del segmento de línea es mayor que el valor de T en el punto medio, ver Figura 2.1.

El siguiente corolario muestra algunas clases de matroides que contienen dos bases disjuntas o cuyo conjunto E es la unión de dos bases.

Corolario 2.6 Para un matroide M , T_M satisface (2.7) para toda $a \geq 2$ siempre que M es uno de los siguientes:

- *un matroide idénticamente auto-dual,*
- *una geometría proyectiva sobre $GF(q)$ de rango r o su dual, para $r \geq 2$,*
- *un matroide de caminos por retículas sin istmos.*

Demostración. Un matroide $M = (E, r)$ es idénticamente auto-dual si $M = M^*$, por lo que B es base de M si y sólo si $E - B$ también lo es.

Para $r \geq 3$ el matroide $PG(r, q)$ contiene como submatroide a W_{r+1} , la $r + 1$ -rueda, ver [41]. Como W_{r+1} contiene dos bases disjuntas, $PG(r, q)$ tiene dos bases disjuntas. Para el caso de los planos proyectivos de orden m , cualquier contracción por un elemento es isomorfa al matroide que se obtiene de $U_{2,m+1}$ al remplazar cada elemento por m elementos en paralelo. Por lo que los planos proyectivos tienen dos bases disjuntas.

De la definición de un matroide de caminos por retículas $M[P, Q]$, dada en el Capítulo 1, no es difícil ver que $M[P, Q]$ tiene al menos dos bases disjuntas siempre que en su presentación $\mathcal{A} = \{[a_1, c_1], \dots, [a_r, c_r]\}$, se deba tener $c_i \neq a_i$ para toda i . Es decir, $M[P, Q]$ no tenga istmos. ■

Otra clase de matroides que también satisface el Corolario anterior son los matroides de empedrado. De hecho satisfacen algo más fuerte, como se muestra en la Sección 2.3.

Para las gráficas se tiene los siguientes casos

Corolario 2.7 *Para una gráfica G , T_G satisface (2.7) para toda $a \geq 2$ siempre que G es una de las siguientes:*

- *una gráfica 4-conexa por aristas,*
- *una gráfica de umbral 2-conexa,*
- *una gráfica bipartita completa,*
- *una gráfica serie-paralelo,*
- *una gráfica 3-regular,*
- *una gráfica bipartita plana,*
- *una gráfica Laman,*
- *una triangulación,*
- *la gráfica rueda W_n , para $n \geq 2$,*
- *una retícula cuadrada L_n , para $n \geq 2$,*

- *el n -ciclo $n \geq 2$*
- *un árbol con n aristas, para $n \geq 1$.*

Demostración. Por un resultado clásico (Nash-Williams 1961; W. Tutte 1961), ver [18] pag. 46, toda gráfica 4-conexa por aristas tiene dos árboles generadores disjuntos. No es difícil ver que las gráficas rueda y las de umbral 2-conexas tienen dos árboles generadores disjuntos. Utilizando la expresión para calcular la arboricidad de una gráfica dada en [40], vemos que las gráficas serie-paralelo simples, 3-regulares, bipartitas planas y gráficas “Laman” todas tienen arboricidad dos, que es equivalente a tener dos árboles generadores que cubran todas las aristas de la gráfica. Como las triangulaciones son duales geométricos de gráficas 3-regulares planas, tienen dos árboles generadores disjuntos por aristas.

No es difícil ver que $K_{2,m}$ con $m \geq 2$, $k_{3,3}$, la retícula cuadrada L_n para $n \geq 2$, el n -ciclo para $n \geq 2$ y un árbol tienen dos árboles generadores que cubren todas las aristas de la gráfica. $K_{n,m}$ siempre tiene dos árboles generadores disjuntos por aristas cuando $n, m \geq 3$, excepto cuando $n = m = 3$. ■

2.2. La Conjetura Merino-Welsh

Del Teorema 2.5 es natural preguntarse si la desigualdad (2.7) sigue siendo válida para $a = 1$. Para el caso de matroides gráficos es casi la Conjetura 2.1.

Note que la desigualdad (2.1) no es cierta en general. Por ejemplo, si añadimos lazos o istmos a algunas gráficas simples podemos construir gráficas que no las satisfacen. Por otro lado, la propiedad de conexidad puede no ser la más natural, por ejemplo, $U_{1,2} \oplus U_{1,2}$ satisface (2.7) para $a \geq 0$ y es un matroide gráfico $M(G)$, donde G consiste de 2-ciclos unidos por un vértice. Esto nos dice que la desigualdad (2.1) es cierta para algunas gráficas 1-conexas.

Por lo que el Teorema 2.5 sugiere que una conjetura más adecuada para gráficas y matroides sea la siguiente:

Conjetura 2.8 *Si M es un matroide cosimple que contiene dos bases disjuntas o si M es un matroide simple cuyo conjunto fundamental E es la unión de dos bases, entonces*

$$\max \{T_M(2, 0), T_M(0, 2)\} \geq T_M(1, 1). \quad (2.8)$$

A continuación mostraremos que la Conjetura 2.8 es cierta para los siguientes matroides: el n -rehilete W^n o un matroide de Catalán. También es cierta para las gráficas G sin lazos ni istmos, siempre que G sea una de las siguientes: la gráfica rueda W_n , una gráfica 3-regular con cuello al menos cinco, la gráfica completa K_n y la gráfica bipartita completa $K_{n,m}$ para $m \geq n \geq 2$.

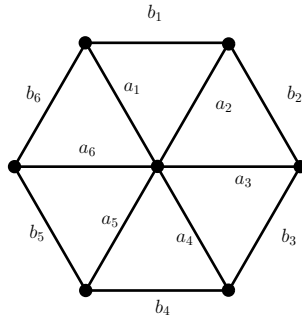


Figura 2.2: Gráfica de W_6

Denotaremos $\alpha(G)$ por $T_G(2, 0)$ el número de orientaciones acíclicas, $\alpha^*(G)$ por $T_G(0, 2)$ el número de orientaciones totalmente cíclicas y $\tau(G)$ por $T_G(1, 1)$ el número de árboles generadores.

2.2.1. Ruedas y rehiletos

En esta subsección hablaremos de una clase muy conocida de gráficas planas auto-duales: las ruedas. Y una clase relacionada con estas, los rehiletos. Las gráficas rueda W_n tienen $n + 1$ vértices y $2n$ aristas, ver Figura 2.2. El matroide rehilete W^n tiene por conjunto fundamento las aristas de W_n y sus bases son los árboles generadores de W_n más el circuito-hiperplano formado por las aristas del n -ciclo de W_n ; ver [41].

Es sabido que $\tau(W_n) = L_{2n} - 2$, con $n \geq 1$, donde L_k es el k -ésimo número de Lucas definido recursivamente como $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ y $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$ para $k \geq 3$. Este resultado fué demostrado por Sedláček [43] y también por Myers [39]. Utilizando el análogo de la fórmula de Binet-Fibonacci para los números de Lucas tenemos

$$\tau(W_n) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2.$$

El polinomio cromático de W_n es conocido, ver [4], y es $\chi_{W_n}(x) = x(x - 2)^n + (-1)^n x(x - 2)$. Aplicando ahora el famoso resultado de Stanley [48], que relaciona el número de orientaciones acíclicas y el polinomio cromático, i.e. $\alpha(G) = |\chi_G(-1)|$, tenemos que $\alpha(W_n) = 3^n - 3$. Otra manera de encontrar los valores de $\tau(W_n)$ y $\alpha(W_n)$, es usando el polinomio de Tutte de W_n que se da en la Sección 4.1. De lo anterior se tiene el siguiente

Teorema 2.9 *Para todo $n \geq 2$, $\alpha(W_n) \geq \tau(W_n)$ y $M(W_n)$ satisface la conjetura.*

Dado que W^n es una relajación de W_n , los polinomios de Tutte de W^n y $M(W_n)$ están relacionados de la siguiente manera, $T_{W^n}(x, y) = T_{W_n}(x, y) - xy + x + y$.

Esto implica

Teorema 2.10 *Para todo $n \geq 2$, $T_{W^n}(2, 0) \geq T_{W^n}(1, 1)$ y W^n satisface la Conjetura 2.8.*

2.2.2. Gráficas 3-regulares con cuello al menos 5

La siguiente cota inferior para el número de orientaciones acíclicas de gráficas 3-regulares con cuello al menos 5 proviene de [27]

$$\alpha(G) \geq (2^{3/8}3^{3/8}4^{1/8})^n,$$

Donde n es el número de vértices de G . Por otro lado, la siguiente cota superior para el número de arboles generadores de una gráfica 3-regular G está dada en [17].

$$\tau(G) \leq \frac{2\beta}{3n} e^{\frac{12}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{\beta})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

donde $\beta = \lceil \ln(n)/\ln(9/8) \rceil$. De esta fórmula se tiene el siguiente

Teorema 2.11 *Si G es una gráfica 3-regular con cuello al menos 5, se cumple que $\tau(G) < \alpha(G)$ y $M(G)$ satisface la Conjetura 2.8.*

2.2.3. Gráficas completas

Es natural preguntarse si la Conjetura, es verdadera para las gráficas completas y para las bipartitas completas. La respuesta es afirmativa como lo veremos a continuación y la demostración se hará por inducción.

Un resultado clásico de Cayley afirma que $\tau(K_n) = n^{n-2}$. Ahora bien, para K_3 se tiene $\alpha(K_3) = 6 > 3 = \tau(K_3)$, luego K_3 satisface la Conjetura.

Para poder aplicar inducción necesitamos el lema siguiente, cuya demostración es sencilla; ver [15].

Lema 2.12 *Si G es una gráfica 2-conexa con un vértice v de grado d , entonces $(2^d - 2)\alpha^*(G - v) \leq \alpha^*(G)$.*

Mostraremos que $\alpha^*(K_n) \geq n^{n-2}$, para $n \geq 4$. Si $n = 4$, $\alpha^*(K_4) = 24 > 16 = \tau(K_4)$. Ahora procedemos por inducción sobre n .

$$\begin{aligned} \tau(K_{n+1}) = (n+1)^{n-1} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 (n+1)\tau(K_n) \\ &\leq e(n+1)\tau(K_n) \leq (2^n - 2)\tau(K_n) \\ &\leq (2^n - 2)\alpha^*(K_n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por el Lema anterior, la última cantidad es menor o igual a $\alpha^*(K_{n+1})$.

Teorema 2.13 *Para todo $n \geq 3$, $M(K_n)$ satisface la Conjetura 2.8.*

La técnica usada para gráficas completas, puede ser usada para demostrar la conjetura en el caso de las gráficas de umbral; ver [15]. También en [15] se tiene el siguiente resultado para las gráficas bipartitas completas.

Teorema 2.14 *Para todo $m \geq n \geq 2$, $M(K_{n,m})$ satisface la Conjetura 2.8.*

2.2.4. Matroides de Catalán

Aquí sólo consideraremos los matroides N_n que se obtienen de los matroides de Catalán M_n eliminando los elementos 1 y $2n$ del conjunto $E = [2n]$. Estos corresponden a eliminar el lazo e istmo de M_n . Del Corolario 5.8 de [8] se tiene la siguiente expresión para el polinomio de Tutte de N_n

$$T_{N_n} = \sum_{i,j>0} \frac{i+j-2}{n-1} \binom{2n-i-j-1}{n-i-j+1} x^{i-1} y^{j-1}.$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas se tiene la fórmula para las evaluaciones en $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

$$T_{N_n}(2, 0) = T_{N_n}(0, 2) = \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{2m-k-1}{m-k} 2^k,$$

donde $m = n - 1$. El valor anterior es igual a $\binom{2m}{m}$ como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{2m-k-1}{m-k} 2^k &= \sum_{k=0}^m \left(\binom{2m-k-1}{m-1} - \binom{2m-k-1}{m} \right) 2^k \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \left(\binom{2m-k-1}{m-1} - \binom{2m-k-1}{m} \right) \binom{k}{j} \\ &= \sum_{j=m}^m \sum_{k=j}^m \left(\binom{2m-k-1}{m-1} - \binom{2m-k-1}{m} \right) \binom{k}{j} \\ &= \sum_{j=0}^m \left(\binom{2m}{m+j} - \binom{2m}{m+j+1} \right) \\ &= \binom{2m}{m}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

El paso clave en la cuarta igualdad es utilizar la identidad de convolución $\sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-k-1}{q} \binom{k}{j} = \binom{2m}{q+j+1}$ la cual es la identidad básica (5.6) en [22]. Claramente el valor de $T_{N_n}(1, 1)$ es el n -ésimo número de Catalán $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Teorema 2.15 *Para todo $n \geq 2$, N_n satisface la conjetura.*

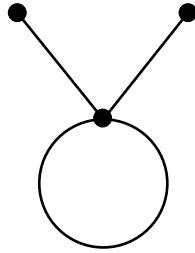


Figura 2.3: Representación geométrica de $U_{2,2} \oplus U_{0,1}$

2.3. Convexidad del polinomio de Tutte de empedrados

Recordemos que un matroide $M(E, r)$ es de empedrado si todos sus circuitos tienen tamaño al menos r . Primero mostraremos que los matroides de empedrado son cerrados bajo menores y que el conjunto de menores excluidos consiste del matroide $U_{2,2} \oplus U_{0,1}$ (Figura 2.3); ver [41](pag. 132, ejercicio 8).

Proposición 2.16 *Sea M un matroide de empedrado de rango r con n elementos. Si M tiene un istmo, entonces M es isomorfo a $U_{r-1, n-1} \oplus U_{1,1}$.*

Demostración. Si M no tiene circuitos, $M \cong U_{n-1, n-1} \oplus U_{1,1}$. En caso contrario, todos los circuitos de M tienen tamaño r . M/e tiene rango $r - 1$ y como ningún circuito contiene un istmo, todos los circuitos de M/e tienen tamaño al menos r . Se sigue que $M/e \cong U_{r-1, n-1}$ y tenemos el resultado. ■

Proposición 2.17 *Los matroides de empedrado son cerrados bajo menores.*

Demostración. Sea M un matroide de empedrado con rango r . Queremos mostrar que para todo $e \in E$, $M \setminus e$ y M/e son matroides de empedrado. Si M no tiene circuitos, no hay más que demostrar. Supongamos que M tiene un circuito.

Si e no es ni lazo ni istmo, $M \setminus e$ tiene por circuitos a todos aquellos circuitos que no contienen a e . Es así que $M \setminus e$ es un matroide de empedrado. Para el caso de la contracción, M/e tiene rango $r - 1$ y su colección de circuitos consiste de los miembros minimales no vacíos de $\{C - e \mid C \text{ es un circuito de } M\}$. Por tanto, M/e es de empedrado.

Si e es un lazo de M , el rango de M es a lo más 1. Como todo matroide de rango a lo más 1 es de empedrado, la afirmación es cierta.

Finalmente, si e es un istmo, por la proposición anterior, $M \cong U_{r-1, n-1} \oplus U_{1,1}$. En este caso $M \setminus e \cong M/e \cong U_{r-1, n-1}$ y el resultado se sigue. ■

Teorema 2.18 *M es un matroide de empedrado si y solo sí no tiene a $U_{2,2} \oplus U_{1,1}$ como menor.*

Demostración. Como $U_{2,2} \oplus U_{1,1}$ tiene rango 2 y un circuito de rango 1, no es de empedrado. Por la proposición anterior no puede ser un menor de un matroide de empedrado.

Supongamos que M es un matroide de rango r que no es de empedrado, entonces existe un circuito C de tamaño $s < r$. Como el rango de C es $s - 1$, existen elementos $e, f \in E$ tales que el rango de $C \cup \{e, f\}$ es $s + 1 \leq r$. Eliminando todos los elementos de $E \setminus C \cup \{e, f\}$ y contrayendo $s - 1$ elementos en C tenemos a $U_{2,2} \oplus U_{1,1}$ como menor. ■

A continuación mostraremos que los matroides de empedrado o contienen dos bases disjuntas o su conjunto fundamento es unión de dos bases. Como consecuencia satisfacen el Teorema 2.5.

Teorema 2.19 *Sea $M = (E, r)$ un matroide de empedrado de rango r con n elementos,*

- *si $2r > n$, entonces E es la unión de dos bases.*
- *si $2r < n$ y M no tiene istmos, entonces M contiene dos bases disjuntas.*

Demostración. Caso $2r > n$. Sea B_1 una base de M , entonces $I_2 = E \setminus B_1$ tiene tamaño $n - r < r$ y por tanto independiente. I_2 puede extenderse a una base B_2 . Se sigue que $E = B_1 \cup B_2$.

Caso $2r \leq n$. Supongamos que M tiene un circuito C de tamaño $r + 1$, luego $C' = E \setminus C$ tiene tamaño $n - r - 1 \geq r - 1$. Sea I un subconjunto de C' con tamaño $r - 1$. Como I es independiente y C es un conjunto generador, existe $a \in C$ tal que $I \cup \{a\}$ es base. Pero como $C \setminus a$ también es base, M tiene dos bases disjuntas.

Resta ver que sucede cuando M no tiene circuitos de tamaño $r + 1$. Sea B una base de M , si $E \setminus B$ tiene una base, ya terminamos. En caso contrario, $r(E \setminus B) = r - 1$ y definamos $H = cl(E - B)$ la cerradura de $E \setminus B$. Tomemos $I = E \setminus B \subseteq B$, I consta de los elementos de B que no están en la cerradura de H y $|I| = p + 1$ con $p \geq 1$ pues M no tiene istmos.

Procedemos a mostrar que también en este caso tenemos dos bases disjuntas. Sea $I' = I \setminus a$, con $a \in I$. I' es un conjunto independiente de tamaño p tal que para cualquier circuito C de tamaño r contenido en H , $I' \cup C$ contiene una base de M . Entonces, existe B_1 base de M de la forma $B = I' \cup A_1$ con A_1 subconjunto de H de tamaño $r - p$. Sea $B_2 = \{a\} \cup A_2$ con $A_2 \subseteq H \setminus A_1$ de tamaño $r - 1$. Esto lo podemos hacer pues, $|H \setminus A_1| = (n - p - 1) - (r - p) = (n - r) - 1 \geq r - 1$. Concluimos que B_1 y B_2 son las bases deseadas. ■

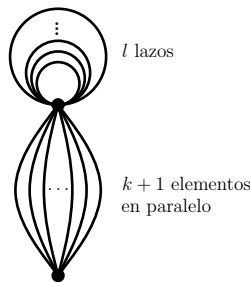


Figura 2.4: Representación geométrica de $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$

A continuación demostramos que para cualquier matroide de empedrado sin istmos, su polinomio de Tutte satisface

$$tT(x_1, y_1) + (1-t)T(x_2, y_2) \geq T(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), \quad (2.11)$$

siempre que $t \in [0, 1]$ y x_1, x_2, y_1, y_2 sean no negativos y cumplan $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Note que esta desigualdad es más fuerte que la establecida en (2.7), pues dice que $T_M(x, y)$ es una función convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo, en lugar de solo decir que el valor de T_M en algún punto final es mayor que el valor de T_M en el punto medio.

Para demostrar lo anterior, primero necesitamos de los siguientes resultados.

Lema 2.20 *Sea M un matroide. O bien $T_M(x, y)$ y $T_{M^*}(x, y)$ son convexas a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo, o bien ninguna lo es.*

Demostración. El resultado es una consecuencia directa de la igualdad $T_M(x, y) = T_{M^*}(y, x)$. ■

Lema 2.21 *Sea M un matroide y e un elemento de M que no es ni lazo ni istmo. Si $T_{M \setminus e}$ y $T_{M/e}$ son ambas convexas a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo, entonces T_M también lo es en el mismo dominio.*

Demostración. Se sigue directamente de la fórmula de contracción y borrado (Teorema 1.13, inciso (ii)) y del hecho que la suma de funciones convexas es convexa. ■

Los siguientes resultados los utilizaremos como argumentos inductivos más adelante. La representación geométrica de $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$ se puede ver en la Figura 2.4.

Lema 2.22 *Si M es isomorfo al matroide de empedrado $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$, donde $l \geq 0$ y $k \geq 1$, entonces T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

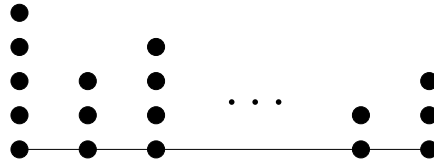


Figura 2.5: Representación geométrica de $U_{2,n}$ con elementos en paralelo

Demostración. El polinomio de Tutte de M es

$$T_M(x, y) = y^l(y^k + \cdots + y^1 + x) = py^l + \sum_{m=l+2}^{l+k} y^m.$$

Como y^m es convexa para todo $m \geq 0$ en la región dada y la suma de funciones convexas es convexa, se tiene el resultado. ■

Lema 2.23 *El polinomio T_M de un matroide uniforme M , es una función convexa en el cuadrante positivo. En particular, T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

Demostración. El polinomio de Tutte de un matroide uniforme puede ser calculado explícitamente usando (1.10).

$$T_{U_{r,n}}(x, y) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (x-1)^{r-i} + \binom{n}{r} + \sum_{i=r+1}^n \binom{n}{i} (y-1)^{i-r},$$

Esta ecuación se puede expandir en la siguiente expresión, la cual puede obtenerse usando directamente (1.14).

$$T_{U_{r,n}}(x, y) = \sum_{j=1}^{n-r} \binom{n-j-1}{r-1} y^j + \sum_{i=1}^r \binom{n-i-1}{n-r-1} x^i,$$

cuando $0 < r < n$ y $T_{U_{n,n}}(x, y) = x^n$ y $T_{U_{0,n}}(x, y) = y^n$.

Como cada término es una función convexa, el resultado se sigue. ■

Teorema 2.24 *Si M es un matroide de rango 2 sin lazos ni istmos, entonces T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

Demostración. Si M es isomorfo al matroide uniforme $U_{2,n}$, aplicando el lema anterior se tiene el resultado. De otra manera, M es isomorfo al matroide con elementos en paralelo cuya simplificación es isomorfa a $U_{2,n}$. La representación geométrica de este matroide se muestra en la Figura 2.5.

Si $n \geq 3$ o existe una clase paralelo de tamaño al menos 3, podemos elegir un elemento e en una clase paralelo no trivial de M tal que $M \setminus e$ no tiene un istmo. En este caso, M/e es isomorfo a $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$ donde $1 \geq 1$, $k \geq 1$ y $M \setminus e$ es un matroide de rango 2 sin lazos ni istmos. El resultado se sigue aplicando el Lema 2.22, inducción y el Lema 2.21.

El último caso, la simplificación de M es isomorfa a $U_{2,2}$ y todo elemento está en una clase paralelo de tamaño 2. Entonces M es isomorfo a $U_{1,2} \oplus U_{1,2}$, por lo que $T_M(x, y) = (x+y)^2$ la cual es convexa (de hecho es constante) a lo largo de $x+y = p$ para $p < 0$ y $0 \leq y \leq p$. ■

Antes de establecer nuestro resultado principal, necesitamos un resultado de tipo estructural de los matroides de empedrado sin istmos. Para hacer esto necesitamos la siguiente

Definición 2.25 *El 2-engrosamiento de un matroide M se obtiene de M reemplazando cada elemento que no es lazo por dos elementos en paralelo y reemplazando cada lazo por dos lazos. El 2-estiramiento de un matroide M , se define como el matroide dual del 2-engrosamiento de M^* , es decir, reemplazar cada elemento por dos elementos en serie.*

Lema 2.26 *Sea M un matroide de empedrado con rango r sin istmos. Si para cada elemento e de M , $M \setminus e$ tiene un istmo, entonces uno de los siguientes 3 casos ocurren.*

- (a) M es isomorfo a $U_{r,r+1}$, $r \geq 1$.
- (b) M es el 2-estiramiento de un matroide uniforme $U_{s,s+2}$, para algún $s \geq 1$.
- (c) M es isomorfo a $U_{1,2} \oplus U_{1,2}$.

Demostración. Si e es tal que $M \setminus e$ tiene un istmo f , entonces o bien $\{e, f\}$ forman una clase paralelo o están en serie. Por otro lado, si hay una clase paralelo en un matroide de empedrado, el matroide tiene rango 1 o 2. Luego, si $\{e, f\}$ están en una clase paralelo, M es isomorfo a $U_{1,2} \oplus U_{1,2}$ o a $U_{1,2}$. Asumamos que M no contienen clases paralelo no triviales. Entonces se tiene que cada elemento pertenece a una clase en serie de tamaño al menos dos. Supongamos que hay una clase en serie conteniendo al menos tres elementos e, f, g . Bajo esta suposición $M \setminus e$ tendrá al menos dos istmos, pero como M es de empedrado, todos sus menores son de empedrado. Es así que, siendo $M \setminus e$ un matroide de empedrado con al menos dos istmos, no puede tener circuitos, y por tanto $M \setminus e$ es isomorfo a $U_{r,r}$. Como M no tiene istmos, en este caso, se concluye que M es isomorfo a $U_{r,r+1}$. Para finalizar, nos falta el caso en que todo elemento de M está en una clase en serie de tamaño dos. Bajo esta hipótesis, M es el 2-estiramiento de un matroide

N de rango s con m elementos y $s \geq 1$. n es de empedrado, pues es un menor de M y debe de tener circuitos pues M no tiene istmos.

Si el tamaño mínimo de un circuito en N es s , entonces M tiene un circuito de tamaño $2s$. Pero el rango de M es $s + m$, pues es el 2-estiramiento de N . Luego $2s \geq m + s$ y por tanto $s = m$. En este caso N será isomorfo a $U_{s,s}$, lo cual es una contradicción. Es así que N no tiene circuitos de tamaño s .

De lo anterior se sigue que todos los circuitos de N tienen tamaño $s + 1$ y N es un matroide uniforme. Luego, existe un circuito en M de tamaño $2s + 2 \geq s + m$ y se cumple que $s + 2 \geq m \geq s + 1$. Se sigue que N es isomorfo a $U_{s,s+1}$ o a $U_{s,s+2}$. Pero si M es el 2-estiramiento de $U_{s,s+1}$, M es isomorfo a $U_{2s+1,2s+2}$ y es el caso cubierto por (a). ■

Lema 2.27 *Sea M un matroide de empedrado con rango r sin istmos. Si para cualquier elemento e de M , $M \setminus e$ tiene un istmo, entonces T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

Demostración. La demostración se reduce a analizar los tres casos dados en el lema anterior. Si M es isomorfo a $U_{r,r+1}$, el resultado se sigue del Lema 2.23. Si M es isomorfo a $U_{1,2} \oplus U_{1,2}$ o a $U_{1,2}$, los correspondientes polinomios de Tutte son $(x + y)^2$ y $x + y$ donde ambos son funciones convexas.

Si M es isomorfo al 2-estiramiento de $U_{s,s+2}$, entonces M^* es el 2-engrosamiento de $U_{2,n}$ que es un matroide de rango 2 y el resultado se obtiene del Teorema 2.24 y el Lema 2.20. ■

Finalmente, tenemos el resultado principal

Teorema 2.28 *Si M es un matroide de empedrado sin istmos, entonces T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

Demostración. Si M tiene un lazo, M tiene rango 1 y es isomorfo a $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$ con $l, k \geq 1$ y el resultado se sigue del Lema 2.22.

En caso contrario, todo elemento de M no es ni lazo ni istmo. Si existe un elemento e de M tal que $M \setminus e$ no tiene istmos, entonces $M \setminus e$ y M/e son matroides de empedrado sin istmos y el resultado es consecuencia del Lema 2.21.

Resta ver que sucede cuando para todo elemento e , $M \setminus e$ tiene un istmo. En este caso el resultado se sigue del Lema 2.27. ■

Desgraciadamente, los matroides de empedrado no son cerrados bajo dualidad pero por el Lema 2.20 podemos extender el resultado anterior a una clase más grande de matroides.

Corolario 2.29 *Si M o M^* es un matroide de empedrado sin istmos, entonces T_M es convexa a lo largo de la porción de línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo.*

Por el Teorema 2.19 los matroides M tales que M o M^* es de empedrado sin istmos, está contenido en la clase de matroides que contiene dos bases disjuntas o cuyo conjunto E es unión de dos bases. Luego, se tiene un resultado más fuerte del Teorema 2.5.

Corolario 2.30 *Si M es un matroide de empedrado sin istmos, entonces T_M satisface la desigualdad (2.7) para $a \geq 0$.*

2.4. Conclusiones

Se mostró que la Conjetura Merino-Welsh es cierta para algunas familias de gráficas, entre ellas las gráficas 3-regulares y las gráficas planas. Además, se hizo una reformulación de ésta en términos de la Teoría de Matroides, Conjetura 2.8, y se mostró que es cierta para algunas familias de matroides, entre ellas los matroides de empedrado; que se conjetura es la clase más grande. Recientemente, C. Thomassen demostró que la Conjetura Merino-Welsh es cierta para gráficas con al menos $4n$ aristas y para gráficas con a lo más $16n/15$ aristas, ver [51]. También demostró que la Conjetura se cumple para gráficas 3-regulares y para triangulaciones planas. Los métodos que utilizó él, son distintos a los nuestros.

En la sección 2.3 se mostró que T_M es convexa a lo largo de la línea $x + y = p$ en el cuadrante positivo, cuando M es un matroide de empedrado sin istmos. De la Definición 1.14, se sigue que T_M es convexa a lo largo de las semilíneas $y - mx + b$ para $m \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ en el cuadrante positivo. Es natural preguntarse para qué matroides T_M es convexa en el cuadrante positivo.

No hay una relación clara entre la convexidad del polinomio de Tutte en el cuadrante positivo y las clases de matroides que hemos considerado. Los matroides de empedrado sin istmos pueden o no pueden tener polinomios de Tutte que sean convexos en el cuadrante positivo. Por ejemplo, el polinomio de Tutte de los matroides uniformes es convexo en el cuadrante positivo, mientras que el polinomio de Tutte $y^l(y^k + \dots, y + x)$ del matroide $U_{1,k+1} \oplus U_{0,l}$, con $l \geq 1$ y $k \geq 1$, no es una función cóncava ni convexa. También hay matroides que no son de empedrado y su polinomio de Tutte si es convexo, por ejemplo, $U_{n,n}^2$ para $n \geq 3$, el 2-engrosamiento de $U_{n,n}$. El polinomio de Tutte de este matroide es $(x + y)^n$, que claramente es convexo. Sin embargo, note que esta última clase de matroides tiene dos bases disjuntas.

Establecer la convexidad del polinomio de Tutte para una clase de matroides dada parece un problema difícil. El polinomio de Tutte de las gráficas de la parte superior de la Figura 2.6 son funciones convexas, mientras que el polinomio de Tutte de la gráfica de la parte inferior no es ni cóncava ni convexa. Algo similar sucede para los matroides de la Figura 2.7, El polinomio de Tutte de los matroides

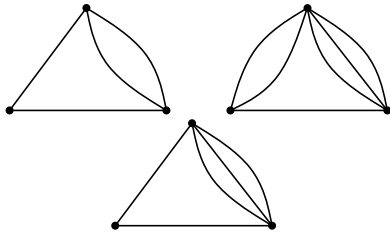


Figura 2.6

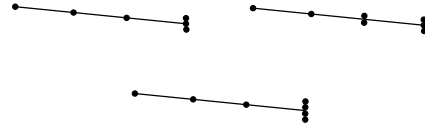


Figura 2.7

de la parte superior son funciones convexas y el polinomio de Tutte del matroide de la parte inferior no es ni cóncava ni convexa.

Capítulo 3

h-vector del matroide de empedrado

En el presente capítulo estudiaremos el h -vector de un matroide de empedrado y mostraremos que la conjetura de Stanley es cierta para esta familia de matroides. Una subfamilia importante y amigable de estudiar de los matroides de empedrado, son los matroides de empedrado ralo. Para estos matroides, daremos una cota inferior para su número de bases. También diremos específicamente cual es su polinomio de Tutte. Primero empezaremos dando algunos conceptos básicos que necesitaremos más adelante, tales como las nociones de f -vector, complejos desbullables, h -vector y multicomplejos. Gran parte del presente capítulo está basado en el artículo [36], así como los resultados ahí expuestos.

3.1. h -vector

Un *complejo simplicial* (o *complejo*) Δ es una colección de subconjuntos de un conjunto finito V tal que (1) si $F \in \Delta$ y $G \subseteq F$ entonces $G \in \Delta$, (2) si $v \in V$ entonces $\{v\} \in \Delta$. Los elementos de V son llamados *vértices* y los miembros de Δ son llamados *simplejos* o *caras*. Una cara que no está contenida propiamente en ninguna otra cara se llama *faceta*. La *dimensión* de una cara $F \in \Delta$ se define como $\dim F = |F| - 1$ y la del complejo Δ como $\dim \Delta = \max \{\dim F \mid F \in \Delta\}$. Un complejo simplicial Δ $(d - 1)$ -dimensional es *puro*, si todas sus facetas tienen la misma cardinalidad.

Asociado a Δ tenemos su f -vector (f_0, f_1, \dots, f_d) , donde f_i es el número de caras de tamaño i de Δ . Por lo que $f_0 = 1$, $f_1 = |V|$ y $f_k = 0$ para $k > r = \dim \Delta + 1$. La función generatriz del f -vector, o *enumerador de caras* se define

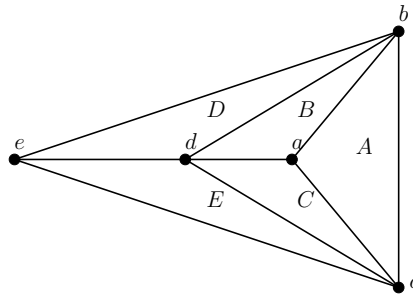


Figura 3.1

como

$$f_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^d f_i x^{d-i}.$$

Ejemplo 3.1 Sea Δ el complejo simplicial 2-dimensional de la Figura 3.1, cuyas facetas son $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$, $C = \{a, c, d\}$, $D = \{b, d, e\}$, $E = \{c, d, e\}$ y $F = \{b, c, d\}$. Sus números de caras son $f_0 = 1$, $f_1 = 5$, $f_2 = 9$ y $f_3 = 6$.

Para un complejo simplicial puro Δ , un *desbullado*, “shellable” en inglés, es un orden lineal de las facetas de Δ , tal que cada faceta interseca al complejo generado por sus predecesores en una unión no vacía de caras propias maximales. En otras palabras, el orden lineal F_1, F_2, \dots, F_t de las facetas de Δ es un desbullado si y sólo si

$$\begin{aligned} & \text{Para cada par de facetas } F_i, F_j \text{ tal que } 1 \leq i < j \leq t, \text{ existe una} \\ & \text{faceta } F_k \text{ con } 1 \leq k < j \text{ y un elemento } x \in F_j \text{ con la propiedad} \quad (3.1) \\ & F_i \cap F_j \subseteq F_k \cap F_j = F_j - x. \end{aligned}$$

Un complejo Δ se dice *desbullable*, si es puro y admite un desbullado.

Por ejemplo, tomemos el complejo Δ de la Figura 3.1. Si empezamos a ordenar linealmente las facetas de la forma A, B, E vemos que $A < E$ y $A \cap E = \{c\}$, pero no hay una faceta que sea menor que E y que cumpla la condición (3.1). Lo mismo ocurre con el ordenamiento lineal D, E, C, A , pues $D < A$, $D \cap A = \{b\}$ y no se satisface la condición (3.1). Sin embargo, cualquier permutación de A, B y C seguida de cualquier permutación de D, E y F da un desbullado para Δ .

Para $1 \leq l \leq t$ definimos

$$\mathcal{R}(F_l) = \{x \in F_l \mid F_l \setminus x \in \Delta_{l-1}\},$$

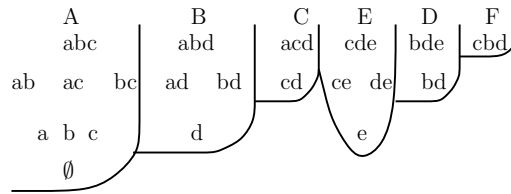


Figura 3.2: Partición de Δ

donde $\Delta_i = \{G \in \Delta \mid G \in F_k \text{ con } k \leq i\}$ y $\Delta_0 = \emptyset$. $\mathcal{R}(F_l)$ es llamada la *restricción* de F_l inducida por el desbullado. Note que $\mathcal{R}(F_l) = \emptyset$ si y sólo si $l = 1$ y $\mathcal{R}(F_l) = F_l$ si y sólo si todos los subconjuntos propios de F_l están contenidos en Δ_{l-1} . Si pensamos que Δ está parcialmente ordenado por inclusión de caras, podemos hablar de intervalos booleanos $[G_1, G_2] = \{G \in \Delta : G_1 \subseteq G \subseteq G_2\}$, como subconjuntos de Δ . Tenemos la siguiente proposición, ver [7].

Proposición 3.2 *Los intervalos $[\mathcal{R}(F_l), F_l]$, $i = 1, 2, \dots, t$ particionan al complejo desbullable Δ .*

Esta proposición nos dice que cuando añadimos la faceta F_l (con todas sus subcaras) al complejo Δ_{l-1} durante el proceso de desbullado, $\mathcal{R}(F_l)$ es la *única* cara minimal de F_l que es nueva en Δ_l , es decir, que se encuentra en $\Delta_l - \Delta_{l-1}$.

Para ilustrar la proposición anterior, tomemos el Ejemplo 3.1 con el desbullado dado por la ordenación lineal A, B, C, E, D, F . En la Figura 3.2 se muestra la partición, en intervalos $[\mathcal{R}(F_l), F_l]$, inducida por el desbullado.

El número de facetas tal que $|\mathcal{R}(F_l)| = i$ es denotado por h_i y no depende del desbullado, ver [7]. El vector (h_0, h_1, \dots, h_d) es llamado el *h-vector* de Δ . Para Δ del Ejemplo 3.1, la Figura 3.2 nos dice que su *h-vector* es $(1, 2, 2, 1)$.

La función generatriz del *h-vector*, o el *polinomio del desbullado* está dado por

$$h_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}. \tag{3.2}$$

Es bien sabido, ver [7], que el polinomio enumerador de caras y el polinomio del desbullado satisfacen la relación

$$h_{\Delta}(x + 1) = f_{\Delta}(x)$$

y los coeficientes satisfacen

$$f_k = \sum_{i=0}^k h_i \binom{d-i}{k-i}, \tag{3.3}$$

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} f_i \binom{d-i}{k-i}, \quad (3.4)$$

para $0 \leq k \leq d$.

3.2. Complejos matroidales y multicomplejos

Si $M = (E, r)$ es un matroide, la familia de conjuntos independientes forma un complejo simplicial de dimensión $r(E) - 1$, el cual denotamos por $\Delta(M)$. Las facetas de $\Delta(M)$ son las bases del matroide, por lo que $\Delta(M)$ es puro. Los complejos de este tipo son llamados *complejos matroidales*. Los complejos matroidales son desbullables, de hecho el polinomio de desbullición de $\Delta(M)$ es una evaluación del polinomio de Tutte (ver [7]), esto es,

$$T_M(x, 1) = h_{\Delta(M)}(x).$$

Por dualidad, también se tiene

$$T_M(1, y) = h_{\Delta(M^*)}(y).$$

Recordemos que los lazos de un matroide son circuitos de tamaño uno, por lo que no están en ningún conjunto independiente y como consecuencia no forman parte del complejo matroidal $\Delta(M)$. Esto nos asegura que para demostrar la Conjetura de Stanley, solamente necesitamos considerar a los matroides sin lazos.

Ahora bien, los istmos de un matroide están contenidos en cualquier base. Luego, los istmos están en cualquier faceta de $\Delta(M)$. Supongamos que el matroide M se obtiene del matroide M' al eliminar un istmo. Si el h -vector de M es (h_0, h_1, \dots, h_r) , como $r(M) = r(M') - 1$, entonces el h -vector de M' es $(h_0, h_1, \dots, h_r, 0)$. Esto nos dice que si borramos todos los istmos del matroide, toda la información importante contenida en el h -vector se mantiene. De esto y el párrafo anterior, solo nos enfocaremos en los matroides sin istmos y sin lazos.

Dado un conjunto parcialmente ordenado (copo) P , un *ideal de orden* es un subconjunto I de P , tal que si $x \in I$ y $y \leq x$, entonces $y \in I$. Si tomamos como copo a P , el conjunto de todos los monomios sobre las indeterminadas z_1, z_2, \dots, z_n y el orden está dado por divisibilidad, entonces un ideal de orden de P es llamado un *multicomplejo* sobre z_1, \dots, z_n .

Por otro lado, si formamos el copo (\mathbb{N}^n, \leq) , donde $a \leq b$ si $a(i) \leq b(i)$ para $1 \leq i \leq n$, entonces un multicomplejo \mathcal{M} también puede ser visto como un ideal de orden de (\mathbb{N}^n, \leq) . Es decir, si \mathcal{M} es un multicomplejo sobre z_1, \dots, z_n la imagen de la función $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}^n$ definida por

$$\mu(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n}) = (i_1, \dots, i_n)$$

es un ideal de orden de (\mathbb{N}^n, \leq) . Por lo que podemos intercambiar ambas definiciones de multicomplejos. Los elementos del multicomplejo los llamamos *monomios*.

El *rango* de un monomio del multicomplejo es la suma de los valores de sus entradas. Un multicomplejo cuyos monomios maximales tienen todos el mismo rango son llamados *puros*. El vector (h_0, h_1, \dots, h_d) , donde h_i es el número de monomios de rango i , es la *sucesión de grados* del multicomplejo. Un vector (h_0, h_1, \dots, h_d) es llamado una *O-sucesión(pura)* si es la sucesión de grados de algún multicomplejo(puro). R. Stanley probó que el h -vector de un complejo simplicial desbullable es una O -sucesión y planteó la siguiente conjetura [47]:

Conjetura 3.3 *El h -vector de un complejo matroidal es una O -sucesión pura.*

Cuando M es un matroide de empedrado, es fácil calcular el f -vector de $\Delta(M)$, cada subconjunto de tamaño $i < r$ es una cara de $\Delta(M)$ y las facetas son las bases de M . Tenemos el siguiente resultado que está implícito en [7].

Proposición 3.4 *El h -vector de un matroide de empedrado de rango r con n elementos y $b(M)$ bases es (h_0, h_1, \dots, h_r) con $h_k = \binom{n-r+k-1}{k}$ para $0 \leq k \leq r-1$ y $h_r = b(M) - \binom{n-1}{r-1}$.*

Demostración. Cuando $0 \leq i \leq r-1$, $f_i = \binom{n}{i}$. Utilizando (3.4) se tiene

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} \binom{r-i}{k-i} \binom{n}{i},$$

para $0 \leq k \leq r-1$. Por la identidad $(-1)^a \binom{b}{a} = \binom{a-b-1}{a}$, vemos que

$$h_k = \sum_{i=0}^k \binom{k-r-1}{k-i} \binom{n}{i}.$$

Usando la convolución de Vandermonde, $\binom{a+b}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{b}{k-i}$, obtenemos

$$h_k = \sum_{i=0}^k \binom{n-r+k-1}{k}.$$

Como $\sum_{i=0}^r h_i = b(M)$, se sigue

$$h_r = b(M) - \sum_{i=0}^{r-1} h_i = b(M) - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n-r+i-1}{i} = b(M) - \binom{n-1}{r-1}.$$

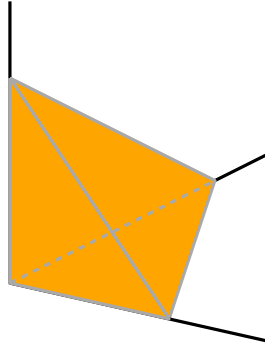


Figura 3.3:
Multicomplejo
 $\mathcal{M}_{r-1,d}$

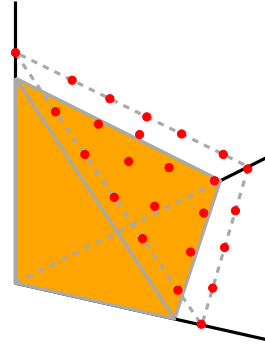


Figura 3.4: $f(r,d)$ monomios de grado r

■ La idea para probar que el h -vector de un matroide de empedrado sin istmos es la sucesión de grados de un un multicomplejo puro, es más o menos fácil. El multicomplejo $\mathcal{M}_{r,d}$ generado por todos los monomios de grado r sobre las d indeterminadas z_1, z_2, \dots, z_d , con r y d enteros positivos, tiene sucesión de grados (h_0, h_1, \dots, h_r) , donde h_k es el número de monomios de grado k , esto es $\binom{d+k-1}{k}$, ver Figura 3.3. Lo que solamente necesitamos, es mostrar que existe un multicomplejo \mathcal{M} que contenga a $\mathcal{M}_{r-1,n-r}$ y que el número de monomios de rango r son a lo más $b(M) - \binom{n-1}{r-1}$.

Definamos la función

$$f(r,d) = \min\{h_r \mid (h_0, \dots, h_r) \text{ es la O-sucesión de } \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_{r-1,d}\}.$$

La expresión anterior nos dice que $f(r,d)$ es el mínimo número de monomios de grado r en un multicomplejo puro de grado r , el cual contiene a todos los monomios de grado $r-1$ en d variables z_1, \dots, z_d , ver Figura 3.4.

De lo anterior se deduce que para cualesquiera enteros positivos d y r , si $h_k = \binom{d+k-1}{k}$ para $0 \leq k \leq r-1$ y $f(r,d) \leq h_r \leq \binom{d+r-1}{r}$, entonces la sucesión (h_0, h_1, \dots, h_r) es una O-sucesión pura.

Sea M un matroide de empedrado con n elementos y rango r . Haciendo $d = n - r$ vemos que el h -vector de M satisface $h_k = \binom{d+k-1}{k}$ con $0 \leq k \leq r-1$. Para demostrar que los matroides de empedrado cumplen la conjetura de Stanley, solo es necesario mostrar que $f(r,d) \leq h_r \leq \binom{d+r-1}{r}$, es decir,

$$f(r, n-r) \leq b(M) - \binom{n-1}{r-1} \leq \binom{n-1}{r}.$$

Claramente la segunda desigualdad es trivial, pues $b(M) \leq \binom{n}{r}$. Por tanto nuestro atención se centra en mostrar que la primera desigualdad es cierta.

Algunos valores de f son fáciles de calcular.

Lema 3.5 *Para $r \geq 1$ y $d \geq 1$ se cumple que $f(1, d) = 1$, $f(2, d) = \lceil d/2 \rceil$, $f(r, 1) = 1$ y $f(r, 2) = \lceil r/2 \rceil$.*

El siguiente lema nos será muy útil más adelante

Lema 3.6 $f(r, d) \leq f(r, d - 1) + f(r - 1, d)$.

Demostración. Sea \mathcal{M}' un multicomplejo en las variables z_1, z_2, \dots, z_{d-1} que contiene a $\mathcal{M}_{r-1, d-1}$, cuyo h -vector es (h'_0, \dots, h'_r) con $h'_r = f(r, d - 1)$. Sea \mathcal{M}'' el multicomplejo en las variables z_1, z_2, \dots, z_d que contiene a $\mathcal{M}_{r-2, d}$, con h -vector $(h''_0, \dots, h''_{r-1})$ y $h''_{r-1} = f(r - 1, d)$.

Construyamos el multicomplejo

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup z_d \mathcal{M}'' ,$$

donde $z_d \mathcal{M}'' = \{z_d m : m \in \mathcal{M}''\}$. Claramente \mathcal{M} contiene todos los monomios sobre z_1, \dots, z_{d-1} de grado a lo más $r - 1$. También contiene a todos los monomios sobre z_1, \dots, z_d de grado a lo más $r - 1$, donde z_d tiene grado al menos 1. Esto nos dice que \mathcal{M} contiene a todos los monomios sobre z_1, \dots, z_d de grado a lo más $r - 1$, i.e., contiene a $\mathcal{M}_{r-1, d}$.

Sólo resta mostrar que \mathcal{M} es un multicomplejo. Sean m, m' monomios tales que $m \in \mathcal{M}$ y $m' | m$. m' es un monomio en las variables z_1, \dots, z_d , si z_d tiene grado 0 tanto en m' como en m o z_d tiene grado al menos 1 tanto en m' como en m , se sigue que $m' \in \mathcal{M}$. Si z_d tiene grado 0 en m' y grado k en m , entonces m' divide a $\frac{m}{z_d^k} \in \mathcal{M}'$. Luego m' está en \mathcal{M} . ■

Definamos $\mathcal{P}_{r, n}$ como la clase de todos los matroides de empedrado sin istmos, con rango r y n elementos. También definamos

$$g(r, n) = \min \{ b(M) - \binom{n-1}{r-1} \mid M \in \mathcal{P}_{r, n} \} .$$

Note que $g(r, n)$ es igual al valor mínimo de h_r , sobre todos los h -vectores de matroides en $\mathcal{P}_{r, n}$. Si queremos demostrar la conjetura de Stanley para matroides de empedrado basta con mostrar que $g(r, n) \geq f(r, n - r)$. La prueba se hará por inducción, el pie de la inducción está dado por los siguientes dos lemas

Lema 3.7 *Para todo $n \geq 1$, $g(1, n) \geq f(1, n - 1)$.*

Demostración. Salvo isomorfismo, el único matroide en $\mathcal{P}_{1, n}$ es $U_{1, n}$. El h -vector de $U_{1, n}$ es $(1, n - 1)$, por lo que $g(1, n) = n - 1$ y $f(1, n - 1) = 1$. ■

Lema 3.8 Para todo $n \geq 2$, $g(2, n) \geq f(2, n - 2)$.

Demostración. Sabemos que $f(2, n - 2) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$. Basta con mostrar que $b(M) \geq (n-1) + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ para todo matroide de empedrado M de rango 2 y n elementos. Si todo elemento de M está en al menos 3 bases, entonces $b(M) \geq 3n/2 \geq 3(n-1)/2 \geq (n-1) + \lceil (n-2)/2 \rceil$.

Supongamos que M tiene un elemento e que está en a lo más 2 bases. Si el número de clases paralelas de M fuera al menos cuatro entonces todo elemento está en al menos 3 bases. Luego M tiene a lo más 3 clases paralelo. Si M tiene 2 clases paralelo, una de ellas debe tener cardinalidad 2, pues en caso contrario todos los elementos están en al menos 3 bases distintas. Por tanto, M es isomorfo a $U_{1,n-2} \oplus U_{1,2}$ con $n \geq 4$, pues M no tiene istmos, y $b(M) = 2(n-2) \geq (n-1) + \lceil (n-2)/2 \rceil$ con igualdad cuando $n = 4$.

Si M tiene 3 clases paralelo, dos clases deben de tener cardinalidad 1. Nuevamente, en caso contrario se tendría que todos sus elementos están en al menos 3 bases. Luego M es isomorfo a $U_{1,n-2} \oplus U_{2,3}$, i.e., es isomorfo a un triángulo reemplazando una de sus aristas por $n-2$ aristas en paralelo. Se tiene que $b(M) = 2(n-2) + 1 \geq 3(n-1)/2 \geq (n-1) + \lceil (n-2)/2 \rceil$ con igualdad cuando $n = 3$ y M es $U_{2,3}$. ■

Recordemos que dado cualquier matroide, podemos prescindir de los lazos e istmos ya que no repercuten en el cálculo del h -vector de su complejo matroidal. Por lo que el lema anterior demuestra que todos los matroides de rango 2 simples satisfacen la conjetura de Stanley.

Corolario 3.9 El h -vector del complejo matroidal de un matroide de rango 2 simple es una O -sucesión pura.

La primera demostración que se conoce de la conjetura de Stanley para matroides de rango 2 es la de E. Stokes, ver [50]. Stokes por medio de métodos algebraicos da una larga demostración. Recientemente J. De Loera et al., ver [30], dan una demostración combinatoria muy simple para matroides de rango 2. De hecho, ellos prueban mucho más; pero esto lo discutiremos más adelante.

Lema 3.10 Sea M un matroide de empedrado sin istmos de rango r y n elementos. Si para todo elemento e de M , $M \setminus e$ tiene un istmo, entonces $b(M) - \binom{n-1}{r-1} \geq f(r, n-r)$

Demostración. Del lema 2.26, se sigue que solo necesitamos revisar tres caso.

Si $M \cong U_{r,r+1}$, $b(M) = r + 1 = \binom{r}{r-1} + f(r, 1)$. En este caso tenemos igualdad.

Si M es el 2-estiramiento de $U_{s,s+2}$, M tiene rango $2s + 2$, $2s + 4$ elementos y $2(s+2)(s+1)$ bases. Luego $b(M) - \binom{2s+3}{2s+1} = s + 1$. Por otro lado, $f(2s+2, 2) = s + 1$ y también en este caso tenemos igualdad.

Finalmente, si $M \cong U_{1,2} \oplus U_{1,2}$, M tiene rango 2 y ya se considero en el lema anterior. ■

Teorema 3.11 *Para toda $r \leq n$ se cumple $g(r, n) \geq f(r, n - r)$.*

Demostración. La demostración será por inducción en $r + n$. Si $r \leq 2$ y $n \geq r$, el resultado se sigue de los lemas 3.7 y 3.8. Supongamos que el argumento es válido para r' y n' con $r' + n' \leq r + n$.

Sean $n \geq r > 2$ y M un matroide en $\mathcal{P}_{r,n}$ tal que $g(r, n) = b(M) - \binom{n-1}{r-1}$. Supongamos que existe $e \in E(M)$ tal que $M \setminus e$ no tiene istmos, entonces

$$\begin{aligned} g(r, n) &= b(M) - \binom{n-1}{r-1} = b(M \setminus e) - \binom{n-2}{r-1} + b(M/e) - \binom{n-2}{r-2} \\ &\geq g(r, n-1) + g(r-1, n-1) \geq f(r, n-1) + f(r-1, n-1) \\ &\geq f(r, n-r). \end{aligned}$$

En caso de que para todo elemento e de M , $M \setminus e$ tenga un istmo, el resultado se sigue del Lema 3.10. ■

Corolario 3.12 *El h -vector del complejo matroidal de un matroide de empedrado es una O -sucesión pura.*

3.2.1. La función $g(r, n)$

Otra manera de demostrar que la conjetura de Stanley es cierta para matroides de empedrado, es la que daremos a continuación.

Una caracterización explícita de las O -sucesiones fué dada por R. Stanley en [47]. Sin embargo, una caracterización completa de las O -sucesiones puras parece ser un problema sumamente difícil. Algunas propiedades que se conocen son las siguientes.

Teorema 3.13 ([23], [10], [13]) *Sea (h_0, h_1, \dots, h_d) el h -vector de un matroide o una O -sucesión pura con $h_d \neq 0$. Entonces*

- 1) $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$,
- 2) $h_i \leq h_{d-i}$ para todo $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ y
- 3) para todo $0 \leq j \leq d$

$$(-1)^j \sum_{i=0}^j (-b)^i h_i \geq 0, \tag{3.5}$$

para cualquier numero real $b \geq 1$, con posible igualdad sólo si $b = 1$.

T. Hibi [23] demostró las desigualdades 1) y 2) para el caso de O -sucesiones puras y conjeturó que el h-vector de un complejo matroidal debería también satisfacer dichas desigualdades. La desigualdad (3.5) se conoce como la desigualdad de Brown-Colbourn [10]. En 1995, M. K. Chari [14] demuestra la conjetura de Hibi.

Para un matroide de empedrado, podemos usar la desigualdad (3.5) del teorema anterior para acotar por abajo a h_r , con $r \geq 1$, de la siguiente manera

$$S(r, n) = (-1)^{r-1} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{n-r+i-1}{i}.$$

Damos algunos valores de S en la siguiente

Proposición 3.14 a) $S(1, n) = 1$ para todo $n \geq 1$.

b) $S(2, n) = n - 3$ para todo $n \geq 2$.

c) $S(n, n) = (-1)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

d) $S(n-1, n) = n-1 \pmod{2}$ para todo $n \geq 2$.

e) $S(n-2, n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Demostración.

a) $S(1, n) = (-1)^0 \binom{n-1}{0} = 1$ para todo $n \geq 1$.

b) $S(2, n) = (-1) \left(\binom{n-3}{0} - \binom{n-2}{1} \right) = n - 3$ para todo $n \geq 2$.

c) $S(n, n) = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{i-1}{i} = (-1)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Aquí aplicamos la convención usual $\binom{a}{0} = 1$ para toda a , y $\binom{a}{b} = 0$ para todos los enteros a, b con $b \geq a$ y $b \geq 0$.

d) $S(n-1, n) = (-1)^{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{i}{i} = (-1)^{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i$, el cual es 1 si n es par y 0 en otro caso.

e) $S(n-2, n) = (-1)^{n-3} \sum_{i=0}^{n-3} (-1)^i \binom{i+1}{i} = (-1)^{n-3} \sum_{i=0}^{n-3} (-1)^i (i+1)$. La suma anterior es $(n-2)/2$ si $n-2$ es par y $(n-1)/2$ si $n-2$ es impar.

■

La sucesión $\{S(r, n)\}$ tiene la misma recursión que los coeficientes binomiales.

Teorema 3.15 Para $n \geq r \geq 1$

$$S(r + 1, n + 1) = S(r + 1, n) + S(r, n).$$

Demostración. Esta igualdad se sigue de la fórmula de Pascal-Stifel $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$. ■

El resultado anterior muestra que la sucesión de enteros $\{S(r, n)\}$ es la sucesión A108561 en [45], pues ambas satisfacen la misma relación de recurrencia y las mismas condiciones iniciales.

¿Cómo se compara $S(r, n)$ con $f(r, n - r)$? La siguiente afirmación nos lo dice.

Teorema 3.16 Para $n \geq 3$ y $r \leq n - 2$, se cumple $f(r, n - r) \leq S(r, n)$.

Demostración. Para $r = 1$, $f(1, n - 1) = 1 = S(1, n)$ para toda n . Para $r = n - 2$, se tiene $f(n - 2, 2) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = S(n - 2, n)$. Por el Lema 3.6, $f(r, n - r) \leq f(r, n - r - 1) + f(r - 1, n - r)$. Por hipótesis de inducción, $f(r, n - r - 1) + f(r - 1, n - r) \leq S(r, n - 1) + S(r - 1, n - 1) = S(r, n)$. ■

Del resultado anterior, se sigue que $f(r, n - r) \leq g(r, d)$, para $n \geq 3$ y $r \leq n - 2$. Esto nos da una prueba alternativa al Corolario 3.12, pues es fácil revisar la desigualdad para los valores restantes de n y r .

Recientemente De Loera et. al., ver [30], encontraron una manera sencilla de demostrar que los matroides de rango 2, los de rango 3 y los matroides de co-rango 2 satisfacen la conjetura de Stanley. Para los matroides de rango 2, partieron adecuadamente cada h_i del h -vector de tal manera que podían asociarle un multicomplejo adecuado. Para co-rango 2, por medio de la actividad interna y externa pudieron encontrar explícitamente un multicomplejo adecuado. Para rango 3, usando la misma idea de acotar por arriba y por abajo el valor de h_3 , como lo hicimos nosotros para h_r en los matroides de empedrado, mostraron la validez de la conjetura.

3.3. Matroides de empedrado ralo

Determinar el número de bases de un matroide de empedrado resulta un tanto complicado y parece ser un problema difícil. Sin embargo, existe una subclase de matroides de empedrado que es más sencilla de estudiar. Esta clase es la de los matroides de empedrado ralo. Dicha clase últimamente ha sido objeto de mucho estudio, por ejemplo ver [9, 21, 37, 38]. En esta sección mostraremos una cota inferior justa para el número de bases de un matroide de empedrado ralo. Iniciamos

generalizando la noción de matroide de empedrado, la cual ya había sido dada por S. Rajpal en [42]. Luego daremos la definición de matroides k -empedrados ralos y algunas propiedades que satisfacen estos matroides.

Definición 3.17 *Dado un matroide M de rango $r \geq k$, decimos que es k -empedrado si todos los circuitos de M tienen cardinalidad mayor a $r - k$.*

Por ejemplo, todo matroide uniforme $U_{r,n}$ es 0-empedrado. Todo matroide de empedrado es 1-empedrado. No es difícil mostrar que

Proposición 3.18 *La clase de matroides k -empedrados es cerrada bajo menores.*

Proposición 3.19 *Un matroide es k -empedrado si y sólo si no tiene un menor que sea isomorfo a $U_{k+1,k+1} \oplus U_{0,1}$*

Definición 3.20 *Sea M un matroide k -empedrado de rango $r \geq k$, decimos que M es k -empedrado ralo si no existe H hiperplano de M , tal que $|H| \geq r + k$*

Cuando $k = 1$, en lugar de decir 1-empedrado ralo, simplemente diremos empedrado ralo. El siguiente teorema se sigue inmediatamente de la definición anterior.

Teorema 3.21 *Dado M matroide de rango r , M es de empedrado ralo si y sólo si todos los hiperplanos de M son de tamaño r o $r - 1$. Los hiperplanos de tamaño r son precisamente los circuitos de tamaño r .*

Lema 3.22 *Si M es un matroide de empedrado ralo con n elementos y rango a lo más 1, entonces M es isomorfo a $U_{1,n}, U_{1,n-1} \oplus U_{0,1}$ o $U_{0,n}$.*

Si M es un matroide k -empedrado ralo, entonces el cuello de M , el tamaño del circuito más pequeño, debe ser mayor o igual que $r - k + 1$. Dado que los hiperplanos son complementos de los co-circuitos, M^* no tiene hiperplanos de tamaño mayor a $n - r + k$ y su cuello es mayor o igual que $n - r - k + 1$. Por lo que M^* es k -empedrado ralo. Hemos probado la siguiente

Proposición 3.23 *M es un matroide k -empedrado ralo si y sólo si M^* es k -empedrado ralo.*

De las Proposiciones 3.18 y 3.19, más el resultado anterior se tiene

Teorema 3.24 *La clase de matroides k -empedrados ralos es cerrada bajo menores y sus menores excluidos son $U_{k+1,k+1} \oplus U_{0,1}$ y $U_{0,k+1} \oplus U_{1,1}$.*

3.3.1. Bases y Polinomio de Tutte

Para poder dar una cota al número de bases de un matroide de empedrado ralo es necesario introducir algunos conceptos. De [41] tenemos que dados los enteros $k > 1$ y $m > 0$, una colección $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ de subconjuntos de E , con la propiedad de que cada elemento de \mathcal{T} tenga al menos m elementos y cada subconjunto de E con m elementos este contenido en un único miembro de \mathcal{T} , es llamada una m -partición de E . También de [41] extraemos la siguiente proposición.

Proposición 3.25 *Si \mathcal{T} es una m -partición de E , entonces \mathcal{T} es el conjunto de hiperplanos de un matroide de empedrado en E con rango $m + 1$. Además, para $r \geq 2$ el conjunto de hiperplanos de cualquier matroide de empedrado en E con rango r es una $(r - 1)$ -partición de E .*

Del Teorema 3.21, sabemos que los hiperplanos de un matroide de empedrado ralo M con rango $r \geq 2$, son los circuitos de tamaño r más los independientes de tamaño $r - 1$ no contenidos en ningún circuito de tamaño r . Como los hiperplanos de M forman una $(r - 1)$ -partición de $E(M)$, cualquier subconjunto de tamaño $r - 1$ que no sea hiperplano está contenido en un único circuito de tamaño r .

Ahora bien, un sistema Steiner $S(l, m, n)$ está dado por un conjunto S con n elementos y una familia de subconjuntos de S de cardinalidad m , llamados bloques, con la propiedad de que cada subconjunto con l elementos está contenido en exactamente un bloque. A un sistema Steiner $S(r - 1, r, n)$ le podemos corresponder un matroide de empedrado ralo si tomamos como bases a todos los conjuntos de tamaño r que no estén contenidos en ningún bloque de $S(r - 1, r, n)$.

El número de subconjuntos de S de cardinalidad l es $\binom{n}{l}$ y el número de subconjuntos con l elementos de cada bloque es $\binom{m}{l}$. Como cada subconjunto de cardinalidad l está contenido en exactamente un bloque, se tiene $b = \binom{n}{l} / \binom{m}{l}$, donde b es el número de bloques. Para el caso de $S(r - 1, r, n)$ se tiene que el número de bloques es $\frac{1}{r} \binom{n}{r-1}$ y por tanto, el número de bases para el correspondiente matroide de empedrado ralo es $\binom{n}{r} - \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} = \frac{n-r}{r} \binom{n}{r-1}$. El siguiente Teorema nos afirma que el valor anterior es una cota inferior para el número de bases de matroides de empedrado ralo. Se sabe que los sistemas Steiner triples $S(2, 3, 6p + 1)$ y $S(2, 3, 6p + 3)$ (ver [28]) y que los sistemas Steiner cuádruples $S(3, 4, 6p + 2)$ y $S(3, 4, 6p + 4)$ (ver [24]) existen para todo p , por lo que hay un número infinito de matroides que alcanzan nuestra cota.

Teorema 3.26 *Sea M un matroide de empedrado ralo con n elementos y rango $r \geq 1$. Entonces M tiene al menos $\frac{n-r}{r} \binom{n}{r-1}$ bases.*

Demostración. Si $r = 1$, por el Lema 3.22 M es isomorfo o bien a $U_{1,n}$ o a $U_{1,n-1} \oplus U_{0,1}$. Ambos matroides tiene $n - 1$ bases.

Supongamos que $r \geq 2$. Por ser M de empedrado, todo subconjunto de tamaño

$r - 1$ es independiente. Pero por ser de empedrado ralo, por las observaciones anteriores al teorema, todo conjunto de tamaño $r - 1$ está en a lo más un circuito de tamaño r ; en otras palabras, todo conjunto independiente de tamaño $r - 1$ está en al menos $n - r$ bases. Si tomamos la gráfica bipartita cuyos vértices son por un lado los conjuntos independientes de tamaño $r - 1$ y por otro las bases, donde el par (I, B) es una arista de la gráfica si y sólo si la base B contiene al independiente I . Tenemos que el grado de cualquier independiente I de tamaño $r - 1$ es al menos $(n - r)$, luego el número de aristas de esta gráfica bipartita es al menos $(n - r) \binom{n}{r-1}$. Como el grado de cualquier base B en esta gráfica es r , el resultado se sigue inmediatamente. ■

Muchos invariantes que resultan difíciles de calcular para un matroide en general, son fáciles para matroides de empedrado ralo. Por ejemplo, note que si M es de empedrado ralo, todos los subconjuntos de tamaño $k < r$ son independientes, mientras que todos los subconjuntos de tamaño $k > r$ son generadores. Tomemos ahora los conjuntos de tamaño r , estos o son bases o son circuitos-hiperplanos. Como consecuencia, el polinomio de Tutte de un matroide de empedrado ralo con n elementos, rango r y λ circuitos-hiperplanos es

$$T_M(x, y) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (x-1)^{r-i} + \binom{n}{r} + \lambda(xy - x - y) + \sum_{r+1}^n \binom{n}{i} (y-1)^i - r. \quad (3.6)$$

3.4. $f(r, n)$ y coloración estándar de $G_{r,d}$

Ya hemos mostrado una cota justa para el número de bases de un matroide de empedrado ralo, y según se mostró; fué relativamente sencillo hacerlo. Pero este no es el caso de los matroides de empedrado, como lo veremos a continuación. Para calcular una cota inferior para el número de bases de un matroide de empedrado, estudiaremos el comportamiento de la función $f(r, n)$ definida en la sección anterior.

Empecemos por definir dos familias de gráficas. La primera gráfica es $G_{r,d}$, la cual que tiene como vértices a los monomios de grado r en d variables, donde el par $\{m, m'\}$ es una arista de la gráfica $G_{r,d}$ si y sólo si existen variables x, y distintas, tales que $m' = \frac{m}{x}y$; es decir, si y sólo existen variables x, y tales que el grado de x (resp. y) en m y el grado de x (resp. y) en m' solo difieren por uno. Las demás variables tienen el mismo grado en ambos monomios.

La segunda gráfica es $TG_{r,d}$, la cual tiene como vértices a todos los monomios en d variables de grado r y de grado $r - 1$. El par $\{m, m'\}$ es una arista de $TG_{r,d}$ si y sólo si existen variables x, y distintas, tales que $m' = \frac{m}{x}y$ o existe una variable x tal que $m' = \frac{m}{x}$. Note que $G_{r,i}$ es una subgráfica de $TG_{r,d}$, para todo $0 \leq i \leq d$.

Recordemos que un conjunto U de vértices *domina* a un conjunto U' de vértices

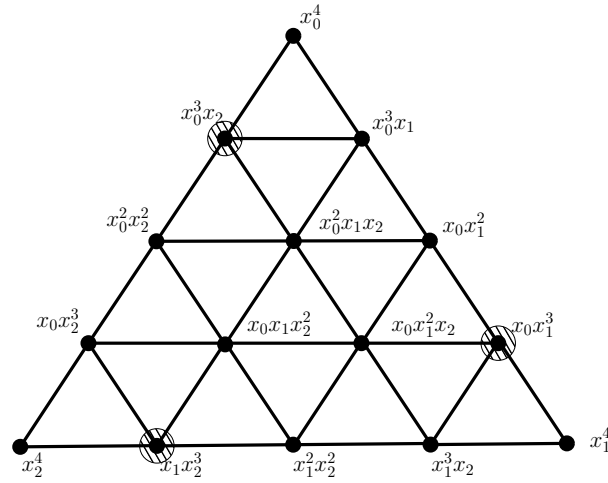


Figura 3.5: Conjunto dominante de $V(G_{4,3})$

en una gráfica si todo vértice en $U' \setminus U$ es adyacente a un vértice de U . Es así que, el problema de encontrar $f(r, n)$ puede ser trasladado al problema de encontrar un conjunto de vértices en $G_{r,d}$ de tamaño mínimo que domine al conjunto de vértices de $G_{r-1,d}$.

Es necesario advertir, que no basta con encontrar un conjunto dominante mínimo en $V(G_{r,d})$. Por ejemplo, si $r = 4$ y $d = 3$ en la Figura 3.5, los puntos con círculo sombreado a rayas $U = \{x_0^3 x_2, x_0 x_1^3, x_1 x_2^3\}$, son un conjunto dominante minimal de $V(G_{4,3})$, pero no domina a $V(G_{3,3})$; pues el vértice $x_0^2 x_1$ no es adyacente a ninguno elemento de U .

Con la idea de encontrar un conjunto dominante apropiado, definimos *la coloración estándar* ϱ_d de $G_{r,d}$. Supongamos que las d variables son $\{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}\}$. A cada variable x_i le asociamos el color $\varrho_d(x_i) = i \pmod d$ y después extendemos linealmente la coloración a todos los monomios, en otras palabras, para el monomio $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-1}}$ el valor de $\varrho_d(m)$ es $0t_0 + \dots + (d-1)t_{d-1} \pmod d$.

Por ejemplo, tomemos a todos los monomios de grado $r = 3$ en $d = 3$ variables y les aplicamos la coloración estándar. La Figura 3.6 nos muestra como hacemos esto.

Lema 3.27 *La coloración estándar ϱ_d es propia y $\chi(G_{r,d}) \leq d$.*

Demostración. Si (m, m') es una arista de $G_{r,d}$, entonces existen $i \neq j$ tales que $m' = \frac{m}{x_i} x_j$. Luego, $\varrho_d(m) - \varrho_d(m') = i - j \not\equiv 0 \pmod d$. Esto nos dice que m y m' reciben diferente color, por consiguiente ϱ_d es una d -coloración propia de $G_{r,d}$. ■

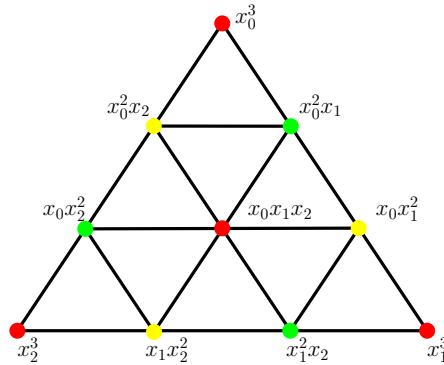


Figura 3.6: Coloración estándar de $G_{3,3}$

Proposición 3.28 *El número cromático $\chi(G_{r,d})$ coincide con $\omega(G_{r,d})$, el tamaño del clan más pequeño contenido en $G_{r,d}$ y ambos son igual a d .*

Demostración. Del lema anterior se sabe que $\chi(G_{r,d}) \leq d$. Es fácil ver que los vértices $\{x_0^r, x_0^{r-1}x_1, \dots, x_0^{r-1}x_{d-1}\}$ forman un clan, luego $\omega(G_{r,d}) \geq d$. Como para toda gráfica tenemos que $\omega(G_{r,d}) \leq \chi(G_{r,d})$, el resultado se sigue inmediatamente. ■

Hasta aquí, es necesario detenernos y observar que en la demostración anterior construimos un clan de tamaño d para x_0^r . De hecho esto se puede hacer para cada vértice de $G_{r,d}$. Mas aún, cualquier monomio en $G_{r,d}$ está en tantos clanes de tamaño d como variables aparezcan en dicho monomio. Esto es, si x_i es tal que $x_i | m$, entonces los vértices $\{\frac{m}{x_i}x_0, \frac{m}{x_i}x_1, \dots, \frac{m}{x_i}x_{d-1}\}$ forma un clan. Luego, se cumple que cualquier clase-color (todos aquellos monomios que son pintados con un solo color) de una d coloración de $G_{r,d}$ domina a $V(G_{r,d})$. Es así que, cualquier cualquier clase-color de una d -coloración de $G_{r,d}$ es un conjunto independiente y dominante, i. e., es un conjunto independiente maximal y un conjunto dominante minimal.

Otra observación importante que hay que agregar es que cualquier clase-color de una d -coloración de $G_{r,d}$ domina al subconjunto $V(G_{r-1,d})$ de vértices de $TG_{r,d}$. Esto es cierto, pues si tomamos cualquier monomio m de grado $r-1$, sus vecinos en $V(G_{r,d})$ son $\{mx_0, mx_1, \dots, mx_{d-1}\}$ y estos forman un clan de tamaño d . Por lo que este conjunto debe de intersectar a cada una de las clase-color.

Definimos ahora la función $\bar{f}(r, d)$ como la cardinalidad mínima sobre todas las clase-color en la coloración estándar ϱ_d de $G_{r,d}$. Por las observaciones anteriores se tiene lo siguiente.

Proposición 3.29 *Para todo $r, d \geq 1$ enteros, $f(r, d) \leq \bar{f}(r, d)$.*

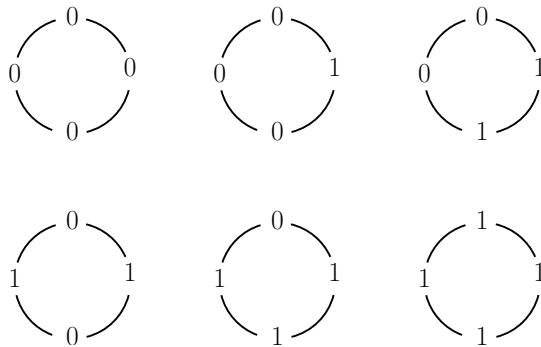


Figura 3.7: Collares binarios de longitud $n = 4$

Proposición 3.30 Para todo $r, d \geq 1$ enteros, $f(r, d) \leq \binom{d+r-1}{r}/d$

Mientras estábamos tratando de encontrar una fórmula para $\bar{f}(r, d)$, nuestros cálculos parecían apuntar al número de collares aperiódicos con r cuentas negras y d cuentas blancas, en la literatura también son conocidos como palabras Lyndon binarias de longitud $r + d$ y densidad r .

Los *collares binarios* o *collares sobre un alfabeto* $A = \{0, 1\}$, son sucesiones de 0's y 1's, donde dos sucesiones son equivalentes, si una se obtiene de la otra por rotación. Los collares de longitud n , son las órbitas de la acción del grupo cíclico C_n en las sucesiones de 0's y 1's con longitud n . Existe la definición de collares con cuentas de n colores distintos, pero a nosotros solo nos interesan los que tiene solo dos, por lo que de aquí en adelante cuando digamos collar, estaremos diciendo collar binario.

Por ejemplo, si $n = 4$ el número de collares de longitud 4 es $N_2(4) = 6$, $\{0000, 0100, 0110, 0101, 0111, 1111\}$. Las sucesiones 0100, 0010, 0001 y 1000 son equivalentes. Ver Figura 3.7.

Un collar lo llamaremos *aperiódico de longitud* n , si su órbita tiene tamaño n . Por ejemplo en la Figura 3.7, los collares aperiódicos son, $\{0100, 0110, 0111\}$. Dentro de los collares de longitud n están aquellos de *densidad fija*, es decir, aquellos collares que tienen un número fijo de 1's. El número total de estos, lo denotamos por $N_2(n, r)$; donde r es el número de 1's. En nuestro ejemplo, tenemos que el número de collares de longitud 4 con densidad 2 es $N_2(4, 2) = 2$, $\{0110, 0101\}$. Si volvemos a ver la Figura 3.7, estos son el de la esquina superior derecha y el de la esquina inferior izquierda. De estos dos el aperiódico es $\{0110\}$.

El número de collares aperiódicos de longitud $n = r + d$, con densidad r es

$$L_2(n, r) = \frac{1}{n} \sum_{k|(n,r)} \mu(k) \binom{n/k}{r/k}, \quad (3.7)$$

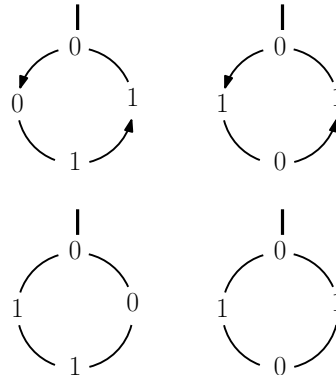


Figura 3.8: Collares binarios y su rotación por 0's.

donde (a, b) denota el máximo común divisor de los enteros a y b , y μ es la función de Möbius, ver [29].

Por comodidad, usaremos la siguiente notación. B_t denotará la cadena con un 0 seguido de t 1's. Si tenemos un collar, por ejemplo de la forma 011101001, lo denotaremos por bloques de la siguiente manera, $B_3B_1B_0B1$ donde el bloque $B_3 = 0111$, $B_1 = 01$ y $B_0 = 0$. Si r y d son enteros no negativos y $t_0 + t_1 + \dots + t_{d-1} = r$, $t_i \geq 0$, podemos formar el collar $B_{t_0}B_{t_1} \dots B_{t_{d-1}}$ de longitud $r + d$ y densidad r .

Note que si $m = x_0^{t_0}x_1^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-1}}$ es un vértice de $G_{r,d}$, a este monomio le podemos asociar el collar $a_m = B_{t_0}B_{t_1} \dots B_{t_{d-1}}$. Análogamente, si $a = B_{t_0}B_{t_1} \dots B_{t_{d-1}}$ es un collar de longitud n y densidad r , le podemos asociar el vértice $m_a = x_0^{t_0}x_1^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-1}}$ de $G_{r,d}$.

Sea C_d un grupo cíclico generado por σ y hagamoslo actuar sobre $G_{r,d}$ de la siguiente forma

$$\sigma(x_0^{t_0}x_1^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-1}}) = x_1^{t_0}x_2^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-2}}x_0^{t_{d-1}}.$$

Si $a_m = B_{t_0}B_{t_1} \dots B_{t_{d-1}}$ es el collar asociado al monomio m ,

$$\begin{aligned} \sigma(a_m) &= B_{t_1}B_{t_2} \dots B_{t_{d-2}}B_{t_0} \\ &= B_{t_{\sigma(0)}}B_{t_{\sigma(1)}} \dots B_{t_{\sigma(d-1)}}. \end{aligned}$$

Geoméricamente lo que hacemos es *rotar el collar* por 0's. Por ejemplo, habíamos dicho que los collares de longitud 4 y densidad 2, son 0110 y 0101. Al rotarlos bajo σ , nos queda 0011 y 0101, ver Figura 3.8.

Proposición 3.31 a_m es un collar aperiódico bajo C_n si y sólo si a_m es aperiódico bajo C_d

Podemos partir a los vértices de $G_{r,d}$ en clases de equivalencia, que son las órbitas bajo la acción de σ . Sea k entero, tal que $\sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m$. a_m se debe partir en k

bloques, cada uno de longitud $\frac{d}{k}$, es decir

$$a_m = \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_1 \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_2 \cdots \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_k,$$

por lo que $k|r$; es decir, $k|(r, d)$. Denotemos a $\mathcal{O}_{\frac{d}{k}} = \{m \in V(G_{r,d}) : \sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m\}$, se cumple

$$V(G_{r,d}) = \bigcup_{k|(r,d)} \mathcal{O}_{\frac{d}{k}}. \quad (3.8)$$

Pasemos ahora a decir que es una palabra Lyndon y mostrar cual es su relación con los collares aperiódicos, esta parte esta basada en [31]. Sea A un conjunto finito al que llamaremos *alfabeto*. Una palabra sobre el alfabeto A es una sucesión finita de elementos de A

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_i \in A.$$

Al conjunto de todas la palabras sobre el alfabeto A lo denotaremos por A^* . A^* tiene una operación binaria que se obtiene al concatenar dos sucesiones

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Esta operación binaria obviamente es asociativa, lo que nos permite prescindir de los paréntesis y escribir una palabra como

$$a_1 a_2 \cdots a_n.$$

La sucesión vacía, llamada la *palabra vacía*, es un neutro para la operación de concatenación y lo denotaremos con 1. Luego, para cualquier palabra w

$$1w = w1.$$

Un *monoide* es un conjunto N con una operación binaria que es asociativa y que tiene un elemento neutro denotado por 1_N . Luego, A^* así definido tiene una estructura de monoide. Al conjunto de palabras no vacías sobre A lo denotaremos por $A^+ := A^* - 1$. La *longitud* de una palabra $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ con $a_i \in A$, es el número n de letras que aparecen como producto en w y lo denotamos por $|w| := n$. Por ejemplo la longitud de la palabra vacía es 0.

Una palabra v se dice que es un *factor derecho* de $x \in A^*$, si existe una palabra $w \in A^*$ tal que $x = vw$. Decimos que un factor es *propio* si $v \neq x$. La definición para *factor izquierdo* es simétrica a la de factor derecho.

Un submonoide de un monoide N es un subconjunto P de N que contiene al elemento neutro y es cerrado bajo la operación del monoide, i. e., $PP \subset P$.

Dado un subconjunto X del monoide A^* , denotaremos por X^* al submonoide de A^* generado por X . Dada una palabra $w \in A^+$, el submonoide generado por w , lo denotamos por w^* .

Observe que en particular los collares binarios son palabras sobre un alfabeto con dos elementos.

Una palabra $x \in A^*$ se dice que es *primitiva* si no es una potencia de otra palabra. Es decir, si $x \neq 1$ y $x \in z^*$ implican $x = z$.

Proposición 3.32 *Si*

$$x^n = y^m, \quad x, y \in A^*, n, m \geq 0,$$

entonces existe una palabra z tal que $x, y \in z^$.*

En particular, para cada palabra $w \in A^+$, existe una única palabra primitiva x tal que $w \in x^$.*

Dos palabras x y y se dice que son *conjugadas* si existen palabras $u, v \in A^*$ tales que

$$x = uv, \quad y = vu.$$

Ésta es una relación de equivalencia en A^* , pues x es conjugada a y si y sólo si y se puede obtener de x por medio de una permutación cíclica de las letras de x .

Al monoide A^+ se le puede dar un orden lexicográfico, primero en el alfabeto A y después extendiéndolo a las palabras de la siguiente manera: para cualesquiera palabras $u, v \in A^+$, $u < v$ si $v \in uA^+$ o bien

$$u = ras, \quad v = rbt, \quad \text{con } a < b; \quad a, b \in A; \quad r, s, t \in A^*.$$

Donde $uA^+ = \{uw \mid w \in A^+\}$. Este orden así definido es total.

Una *palabra Lyndon* es una palabra primitiva que es minimal en su clase de conjugación. Al conjunto de palabras Lyndon lo denotamos por L . Equivalentemente, $l \in L$ si sólo si

$$\forall u, v \in A^+, \quad l = uv \Rightarrow l < vu.$$

Por ejemplo para $A = \{0, 1\}$ y $0 < 1$, la lista de las primeras palabras Lyndon son

$$L = \{0, 1, 01, 001, 011, 0001, 0011, 0111, 00001, 00011, 00101, \dots\}$$

Proposición 3.33 *Una palabra $w \in A^+$ es una palabra Lyndon si y sólo si es más pequeña que cualquiera de sus factores derechos propios.*

$$w \in L \Leftrightarrow \{\forall u \in A^+, w \in A^+v \Rightarrow w < v\}.$$

Teorema 3.34 (Lyndon) *Toda palabra $w \in A^+$ puede escribirse de manera única como un producto no creciente de palabras Lyndon:*

$$w = l_1 l_2 \cdots l_n, \quad l_i \in L \quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n.$$

Nuestro primer resultado dice que el número de monomios de grado r en d variables tiene la siguiente descomposición.

Teorema 3.35

$$\binom{d+r-1}{r} = \sum_{k|(d,r)} \frac{d}{k} L_2\left(\frac{r+d}{k}, \frac{r}{k}\right) \quad (3.9)$$

Demostración. Sean k entero tal que $k|(r, d)$ y $m = x_0^{t_0} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}} \in \mathcal{O}_{\frac{d}{k}}$. Por la Proposición 3.32, existe $x \in \{0, 1\}^*$ primitiva con la propiedad de que el collar $a_m = B_{t_0} \cdots B_{t_{d-1}} \in x^*$, esta x no es otra mas que $x = B_{t_0} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}$. Sea l_m la palabra Lyndon que representa a la clase de conjugación de x , luego $a_m \in l_m^*$ y l_m es un collar aperiódico de longitud $d/k + r/k$ y densidad r/k . Se sigue

$$|\mathcal{O}_{\frac{d}{k}}| = \frac{d}{k} \cdot L_2\left(\frac{r+d}{k}, \frac{r}{k}\right).$$

De la ecuación 3.8, se sigue el resultado. ■

Veamos el efecto de σ en la coloración estándar ϱ_d .

Lema 3.36 *Sea $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$ un vértice de $G_{r,d}$, entonces $\varrho_d(\sigma(m)) - \varrho_d(m) \equiv r \pmod{d}$.*

Corolario 3.37 *Las órbitas de tamaño d se pintan con $\frac{d}{(r,d)}$ colores.*

Corolario 3.38 *Si $(r, n) = 1$ o $n - r$ es primo, entonces $\bar{f}(r, n - r)$ es igual al número de collares aperiódicos de longitud n y densidad r .*

Demostración. Si $(r, n) = 1$, se sigue que $(r, n - r) = 1$. Por lo que sólo se tienen órbitas de tamaño $d = n - r$ y cada una de ellas se colorea con d colores. Por el Teorema 3.35, el número de collares aperiódicos es igual al tamaño de cualquier clase-color de la coloración estándar ϱ_d de $G_{r,d}$.

Supongamos $d = n - r$ primo. Si $(r, d) = 1$ por el caso anterior se tiene el resultado. Ahora bien, si $(r, d) = d$ entonces solo se tienen órbitas de tamaño 1 y d . Del Teorema 3.35, la órbita de tamaño 1 corresponde al collar $L_2(q + 1, q)$; donde $r = qd$ con q entero no negativo. Este collar se colorea con el color 0. Por el Corolario 3.37, las órbitas de tamaño d se colorean con un solo color y hay $d \cdot L_2(n, r)$ de estos collares. Solo basta con tomar cualquier color distinto a 0 y se tiene el resultado. ■

Nosotros proponemos la siguiente

Conjetura 3.39 $f(r, d) = \bar{f}(r, d) = L_2(n, r)$.

3.5. Conclusiones

Hemos demostrado la conjetura de Stanley para matroides de empedrado. Las estrategias que se han usado para mostrar que el h -vector de ciertas clases de matroides satisface la conjetura de Stanley, son muy diversas y aún no es claro que camino a seguir es el correcto para dar una demostración completa de la conjetura. Por ejemplo, en [32] se usa el “chip firing game”, para el caso de matroides de rango 2 en [50] se utilizan métodos algebraicos, Suho Oh alumno de Alex Postnikov, usando permutaedros, ver [46], demostró la conjetura para matroides cotransversales y en [44] a cada base del matroide le asocia un monomio que depende de la actividad externa e interna de dicha base. Recientemente De Loera et. al. [30], usando también actividad externa e interna demostraron la conjetura para matroides de rango a lo más 3 y para matroides de corango 2. Como se ha mencionado repetidamente a lo largo de esta tesis, está conjeturado que Como se puede ver las herramientas usadas para demostrar la conjetura son variadas. Ahora bien, cuando a la sucesión de grados se le agrega la propiedad de ser puro parece que el problema tiene características combinatorias más que algebraicas y por tanto, es de suponerse que, en ese caso las técnicas algebraicas no son las convenientes. Por otro lado, encontrar la relación entre actividad externa e interna y los multicomplejos lleva implícitamente buscar un orden adecuado para los elementos de E , el cual es muy complicado de hallar. Lo que la experiencia arroja, es que entender la estructura del matroide nos da cierta información sobre el posible orden a considerar. Un paso natural a seguir, es ver si la conjetura de Stanley es cierta para matroides regulares y tratar de ver si se puede dar una demostración completa de la conjetura apoyada en todos los resultados conocidos. Otra vía a considerar es ver si por medio de las palabras Lyndon, en términos de actividad externa e interna, se le puede asociar un multicomplejo apropiado a $\Delta(M)$.

El problema de encontrar buenas cotas para el número de bases de un matroide de empedrado, parece ser un reto muy interesante. La función $f(r, n - r)$ nos da una cota inferior para el número de bases de un matroide de empedrado, pero hay muchos casos en que no es justa. Cuando $n - r = 2$ y n es par, $f(r, n - r)$ nos da la cota inferior $\frac{n(n-2)}{2}$ y es alcanzada por el matroide dual del 2-engrosamiento de $U_{2, \frac{n}{2}}$; cuando n es impar, nos da la cota inferior $\frac{(n-1)^2}{2}$ y es alcanzada por el matroide dual de la extensión libre de $U_{2, m}$. Así, en este caso $f(r, n - r)$ es una cota inferior justa. Pero para el caso $n - r = 3$, la situación es diferente. Cuando $r = 2$, la cota nos da 6 bases y es alcanzada por el matroide de empedrado $U_{1,3} \oplus U_{1,2}$. Cuando el rango es 3, la cota inferior nos da 13; pero hay 8 matroides de empedrado sin istmos con 6 elementos y el número mínimo de bases es 15. Incluso, si usamos $S(r, n)$ para obtener una cota inferior, esta nos da 14.

La función $f(r, d)$ es muy intrigante y se ve difícil de calcular desde su definición. Se ha demostrado que $f(r, d) = \bar{f}(r, d)$ para $d = 1, 2, 3$ con $r \geq 1$, también para $d = 4$ y $1 \leq r \leq 6$. La Conjetura 3.39 implicaría, por ejemplo $f(r, d) = f(d, r)$, que geoméricamente no es fácil de ver y no hemos podido demostrar. Algo que nos impide resolver esta conjetura, es que aún no sabemos qué colores colorean ciertas órbitas y cuantas veces lo hacen. Sabemos, Teorema 3.35, como son las órbitas y cuantos elementos tienen ellas. Ahora tenemos que ir a ver a las palabras Lyndon y colorear ahí, esperando encontrar una relación.

Capítulo 4

Cálculo del polinomio de Tutte de algunos matroides

En el presente capítulo, calcularemos el polinomio de Tutte de todos los matroides que están en el Apéndice del libro de Oxley, [41]. Clasificaremos estos matroides en tres grupos: por contracción y borrado, los representables sobre algún campo, los de empedrado, las ruedas y rehiletos. Trataremos, en la medida de lo posible dar más de una manera de calcular el polinomio de Tutte de dichos matroides, solo para corroborar que nuestros cálculos son correctos.

4.1. Ruedas y rehiletos

Una familia muy conocida de gráficas planas auto-duales son las ruedas y una clase relacionada con estas son los rehiletos. Las gráficas rueda W_n tienen $n + 1$ vértices y $2n$ aristas, ver Figura 4.1.

El matroide rehilete W^n tiene por conjunto fundamento las aristas de W_n y sus bases son los arboles generadores de W_n mas el circuito-hiperplano formado por las aristas del n -ciclo de W_n (aristas del círculo en la Figura 4.1).

En el artículo [12], S.-C. Chang y R. Shrockel por medio del polinomio de Jones calcularon el polinomio de Tutte de W_n , el cual está dado por

$$T_{W_n}(x, y) = \frac{1}{2^n} [(1 + x + y) + ((1 + x + y)^2 - 4xy)^{1/2}]^n + \frac{1}{2^n} [(1 + x + y) - ((1 + x + y)^2 - 4xy)^{1/2}]^n + xy - x - y - 1. \quad (4.1)$$

Por otro lado, sabemos que si M' es una relajación de M , el polinomio de Tutte de M está dado por

$$T_{M'}(x, y) = T_M(x, y) - xy + x + y. \quad (4.2)$$

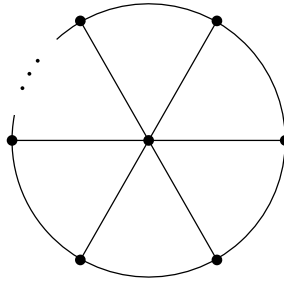


Figura 4.1: La n -rueda

De (4.1) y (4.2), el polinomio de Tutte del n -rehilete, W^n , es

$$T_{W^n}(x, y) = \frac{1}{2^n} [(1 + x + y) + ((1 + x + y)^2 - 4xy)^{1/2}]^n + \frac{1}{2^n} [(1 + x + y) - ((1 + x + y)^2 - 4xy)^{1/2}]^n - 1. \quad (4.3)$$

4.1.1. $U_{2,4}$

Este matroide es isomorfo a W^2 , el 2-rehilete. Por lo que usando (4.3) nos da

$$\begin{aligned} T_{U_{2,4}}(x, y) &= \frac{(1 + x + y + \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^2}{4} + \\ &\quad \frac{(1 + x + y - \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^2}{4} - 1 \\ &= x^2 + 2x + 2y + y^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

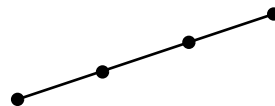


Figura 4.2: $U_{2,4}$

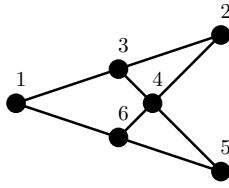


Figura 4.3:
 $M(K_4)$

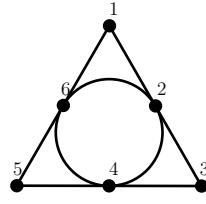


Figura 4.4: 3-
rueda

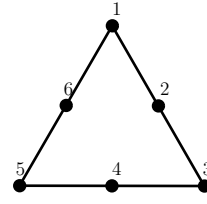


Figura 4.5: 3-
rehilete

4.1.2. $M(K_4)$, W^3 , $M(W_4)$ y W^4

El matroide $M(K_4)$ es isomorfo al matroide $M(W_3)$ la 3-rueda, por lo que de (4.1) se tiene

$$\begin{aligned} T_{M(K_4)}(x, y) &= \frac{(1 + x + y + \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^3}{8} + \\ &\quad \frac{(1 + x + y - \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^3}{8} + xy - x - y - 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 4xy + 2x + 2y + 3y^2 + y^3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dado que $M(K_4)$ es isomorfo a la 3-rueda W_3 , existe una única relajación de $M(K_4)$, el 3-rehilete W^3 . Por lo que usando (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} T_{W^3}(x, y) &= \frac{(1 + x + y + \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^3}{8} + \\ &\quad \frac{(1 + x + y - \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^3}{8} - 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3xy + 3x + 3y + 3y^2 + y^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Análogamente, usando (4.1) se tiene que el polinomio de Tutte de $M(W_4)$ es

$$\begin{aligned} T_{W_4}(x, y) &= \frac{(1 + x + y + \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^4}{16} + \\ &\quad \frac{(1 + x + y - \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^4}{16} + xy - x - y - 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 4x^2y + 6x^2 + 4xy^2 + 9xy + 3x + 3y + 6y^2 + \\ &\quad 4y^3 + y^4. \end{aligned}$$

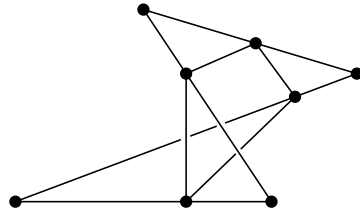


Figura 4.6: 4-rueda

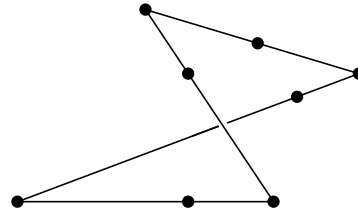


Figura 4.7: 4-rehilete

Por (4.3) el polinomio de Tutte de W^4 es

$$\begin{aligned}
 T_{W^4}(x, y) &= \frac{(1 + x + y + \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^4}{16} + \\
 &\quad \frac{(1 + x + y - \sqrt{(1 + x + y)^2 - 4xy})^4}{16} - 1 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 4x^2y + 6x^2 + 4xy^2 + 8xy + 4x + 4y + 6y^2 + \\
 &\quad 4y^3 + y^4.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2. Matroides de empedrado ralo

Sea $M = (E, r)$ un matroide de empedrado ralo, con $|E| = n$ y λ circuitos-hiperplanos. El polinomio de Tutte de M está dado por

$$\begin{aligned}
 T_M(x, y) &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (x-1)^{r-i} + \binom{n}{r} + \lambda(xy - x - y) \\
 &\quad + \sum_{i=r+1}^n \binom{n}{i} (y-1)^{i-r}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como consecuencia de la ecuación anterior, se tiene el polinomio de Tutte de $U_{r,n}$, pues los matroides uniformes son matroides de empedrado ralo sin circuitos-hiperplanos, i.e. $\lambda = 0$. Por lo que

$$T_{U_{r,n}}(x, y) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (x-1)^{r-i} + \binom{n}{r} + \sum_{i=r+1}^n \binom{n}{i} (y-1)^{i-r}, \tag{4.9}$$

cuando $0 < r < n$, $T_{U_{n,n}}(x, y) = x^n$ y $T_{U_{0,n}}(x, y) = y^n$.

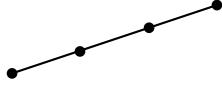


Figura 4.8: $U_{2,4}$

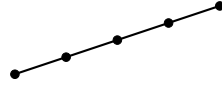


Figura 4.9: $U_{2,5}$

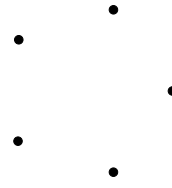


Figura 4.10:
 $U_{3,5}$

4.2.1. $U_{2,4}$, $U_{2,5}$ y $U_{3,5}$

Los matroides $U_{2,4}$, $U_{2,5}$ y $U_{3,5}$ son uniformes por lo que usando (4.9) tenemos

$$\begin{aligned} T_{U_{2,4}}(x, y) &= (x - 1)^2 + 4(x - 1) + 6 + 4(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 2y + y^2. \end{aligned}$$

La ecuación anterior, es igual a la ecuación (4.4) calculada por la fórmula del n-rehilete.

$$\begin{aligned} T_{U_{2,5}}(x, y) &= (x - 1)^2 + 5(x - 1) + 10 + 10(y - 1) + 5(y - 1)^2 + (y - 1)^3 \\ &= x^2 + 3x + 3y + 2y^2 + y^3. \end{aligned}$$

Como $(U_{2,5})^* = U_{3,5}$, de la ecuación anterior y sabiendo que $T_{M^*}(x, y) = T_M(y, x)$ se tiene

$$T_{U_{3,5}}(x, y) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3y + y^2.$$

4.2.2. $M(K_4)$

A continuación usaremos (4.2) para calcular de otra manera el polinomio de Tutte de $M(K_4)$, a partir de la serie de relajaciones de K_4 : $W^3, Q_6, P_6, U_{3,6}$. En la Figura 4.11 se muestra la representación geométrica de $M(K_4)$ y sus relajaciones. De (4.9) se sigue que

$$T_{U_{3,6}}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6y + 3y^2 + y^3.$$

Como $U_{3,6}$ es la única relajación de P_6 , de (4.2)

$$T_{U_{3,6}}(x, y) = T_{P_6}(x, y) + xy - x - y,$$

luego

$$T_{P_6}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 5x + xy + 5y + 3y^2 + y^3.$$

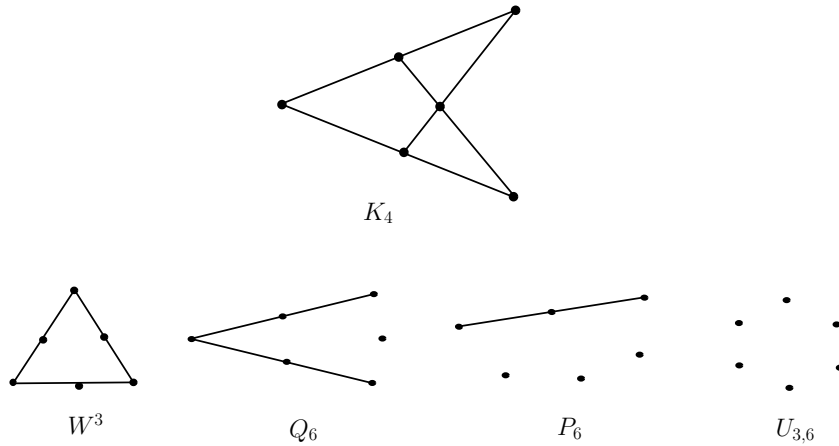


Figura 4.11: $M(K_4)$ y su serie de relajaciones

Análogamente, P_6 es la única relajación de Q_6 . Usando la ecuación anterior y (4.2) se tiene

$$T_{Q_6}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2xy + 4y + 3y^2 + y^3. \quad (4.10)$$

Q_6 es la única relajación de W^3 , por tanto,

$$T_{W^3}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3xy + 3y + 3y^2 + y^3. \quad (4.11)$$

Note que la ecuación anterior coincide con la ecuación (4.6). Como W^3 es la única relajación de K_4 , el polinomio de Tutte de K_4 es

$$T_{K_4}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + 2x + 2y + 3y^2 + y^3,$$

que es el mismo polinomio que se mostró en la ecuación (4.5), cuyo cálculo se hizo por la fórmula de la n-rueda.

Cabe mencionar que el matroide P_6 es una relajación del matroide R_6 , ver Figura 4.12. Por lo que Q_6 y R_6 tienen el mismo polinomio de Tutte. Este es un caso en que dos matroides que no son isomorfos tienen el mismo polinomio de Tutte. De la Figura 4.12, es claro que R_6 es un matroide de empedrado ralo con $\lambda = 2$, por lo que de (4.8) su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned} T_{R_6}(x, y) &= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 13x - 10 + 2xy + 13y \\ &\quad + 6(y-1)^2 + (y-1)^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 2xy + 4x + 4y + 3y^2 + y^3. \end{aligned}$$

Este polinomio es el mismo que (4.10), como se había mencionado.

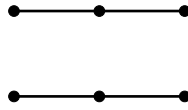


Figura 4.12: Matroide R_6

4.2.3. Matroide Fano y su dual

El matroide Fano, denotado F_7 , es el plano proyectivo más pequeño $PG(2, 2)$ y es isomorfo al único sistema Steiner $S(2, 3, 7)$ por lo que Fano es un matroide de empedrado ralo. El número de circuitos-hiperplanos coincide con el número de líneas de F_7 y son 7, ver Fig. 4.13.

Con base a lo anterior, de (4.8) se tiene que el polinomio de Tutte de F_7 es

$$\begin{aligned} T_{F_7}(x, y) &= (x - 1)^3 + 7(x - 1)^2 + 14x - 21 + 7xy + 28y + 21(y - 1)^2 + \\ &\quad 7(y - 1)^3 + (y - 1)^4 \\ &= x^3 + 4x^2 + 7xy + 3x + 3y + 6y^2 + 3y^3 + y^4. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Nuevamente, como $T_{M^*}(x, y) = T_M(y, x)$, el polinomio de Tutte de F_7^* es

$$T_{F_7^*}(x, y) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 7xy + 3y + 4y^2 + y^3. \tag{4.13}$$

Los matroides F_7^- y $(F_7^-)^*$ son una relajación de F_7 y F_7^* respectivamente. Por lo que, de (4.2) y de las ecuaciones (4.12) y (4.13), sus polinomios de Tutte son

$$T_{F_7^-}(x, y) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6xy + 4y + 6y^2 + 3y^3 + y^4,$$

$$T_{(F_7^-)^*}(x, y) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 6xy + 4y + 4y^2 + y^3.$$

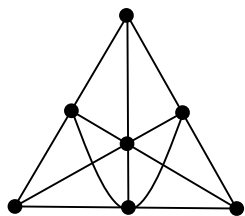


Figura 4.13: Fano

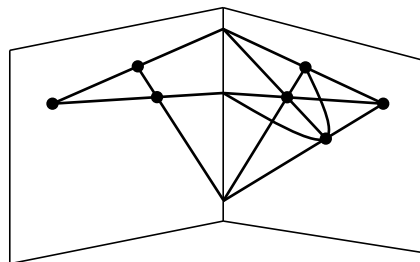


Figura 4.14: Dual de Fano

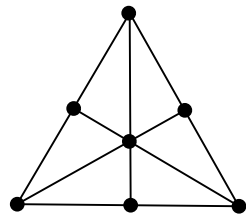


Figura 4.15: F_7^-

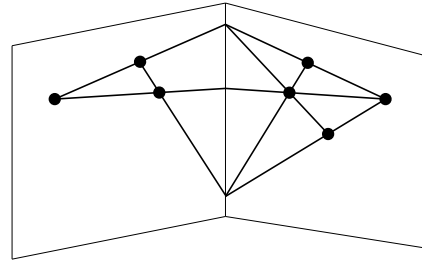


Figura 4.16: Dual de F_7^-

4.2.4. $S(2, 3, 13)$ y $AG(2, 3)$

Ya que iniciamos los cálculos de algunos sistemas Steiner, continuemos con otro mas. $PG(2, 3)$, el segundo plano proyectivo más pequeño, no es isomorfo al único sistema Steiner $S(2, 3, 13)$, pero si a $S(2, 4, 13)$. Dado que $PG(2, 3)$ no es de empedrado ralo, pero si de empedrado, en la siguiente sección calcularemos su polinomio de Tutte por medio de una representación matricial sobre $GF(3)$.

El sistema Steiner $S(2, 3, 13)$ es un matroide de empedrado ralo con 13 elementos, rango 3 y $\lambda = 26$ por lo que su polinomio de Tutte es

$$T_{S(2,3,13)}(x, y) = x^3 + 10x^2 + 29x + 26xy + 29y + 45y^2 + 36y^3 + 28y^4 + 21y^5 + 15y^6 + 10y^7 + 6y^8 + 3y^9 + y^{10}. \tag{4.14}$$

Siempre que se tiene una geometría proyectiva $PG(r - 1, q)$ podemos obtener de esta una geometría afín $AG(r - 1, q)$ simplemente eliminando todos los puntos de un hiperplano de $PG(r - 1, q)$. Por ejemplo, si nuestra geometría proyectiva

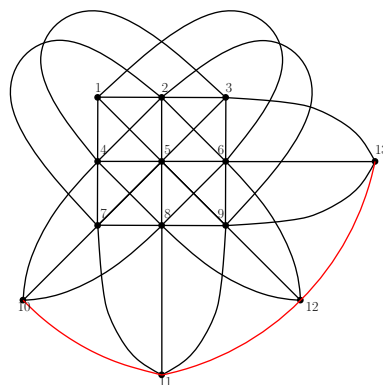


Figura 4.17: Plano proyectivo $PG(2, 3)$

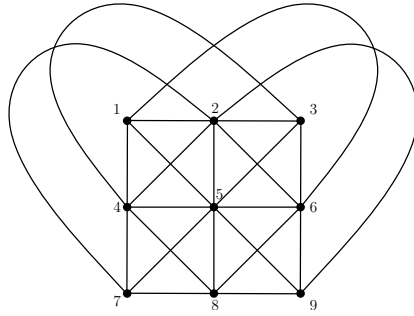


Figura 4.18: Plano afín $AG(2,3)$

es $PG(2,3)$ eliminando los puntos del hiperplano de color rojo en la Figura 4.17 obtenemos el plano afín $AG(2,3)$ cuya representación geométrica se muestra en la Fig. 4.18.

El plano afín $AG(2,3)$, es isomorfo al único sistema Steiner $S(2,3,9)$, pues cada línea contiene exactamente tres puntos y cualesquiera dos puntos están contenidos en exactamente una línea. Tiene 12 líneas, ocho “derechas” como $\{1, 2, 3\}$ o $\{1, 5, 9\}$ y 4 líneas “torcidas” como $\{1, 6, 8\}$. Se tiene que $AG(2,3)$ es un matroide de empedrado ralo con $\lambda = 12$ y por (4.8) su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned} T_{AG(2,3)}(x, y) &= (x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 24x - 78 + 12xy + 114y + \\ &\quad 126(y-1)^2 + 84(y-1)^3 + 36(y-1)^4 + 9(y-1)^5 + (y-1)^6 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12xy + 9x + 9y + 15y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6. \end{aligned}$$

4.2.5. $S(5, 6, 12)$

Calcularemos el polinomio de Tutte del último sistema Steiner, $S(5,6,12)$, que viene en el apéndice del libro de Oxley. Este sistema Steiner tiene rango 6, 12 elementos y $\lambda = 132$ circuitos-hiperplanos. Luego, su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned} T_M(x, y) &= (x-1)^6 + 12(x-1)^5 + 66(x-1)^4 + 220(x-1)^3 + 495(x-1)^2 \\ &\quad + 660x - 660 + 132xy + 660y + 495(y-1)^2 + 220(y-1)^3 + \\ &\quad 66(y-1)^4 + 12(y-1)^5 + (y-1)^6 \\ &= x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 56x^3 + 126x^2 + 120x + 132xy + 120y \\ &\quad + 126y^2 + 56y^3 + 21y^4 + 6y^5 + y^6. \end{aligned} \tag{4.15}$$

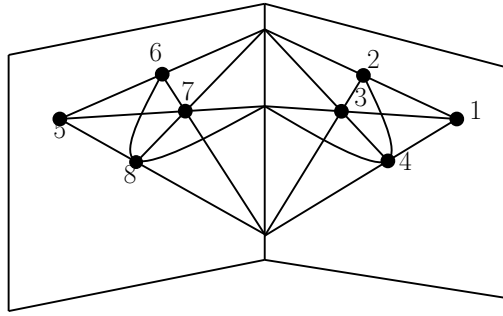


Figura 4.19: Plano afín
 $AG(3,2)$

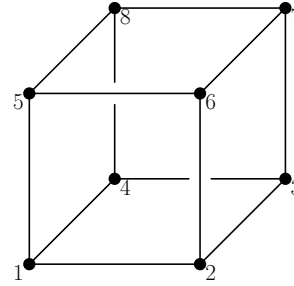


Figura 4.20: cubo

4.2.6. $AG(3,2)$, $AG(3,2)'$, R_8 , F_8 y L_8

Otro plano afín es $AG(3,2)$, las Figuras 4.19 y 4.20 nos muestran dos maneras de representar a este matroide. En la Fig. 4.20 los planos con cuatro puntos son: las seis caras del cubo, los seis planos diagonales $\{1, 2, 7, 8\}$, $\{2, 3, 5, 8\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 4, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ y $\{2, 4, 6, 8\}$, los planos torcidos $\{1, 3, 6, 8\}$ y $\{2, 4, 5, 7\}$. Cada uno de estos planos es un circuito-hiperplano de $AG(3,2)$. No es difícil ver que $AG(3,2)$ es isomorfo al único sistema Steiner $S(3,4,8)$ con $\lambda = 14$, por tanto de (4.8)

$$T_{AG(3,2)}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14xy + 6x + 6y + 10y^2 + 4y^3 + y^4 \quad (4.16)$$

Ahora utilizando la fórmula (4.2), podemos calcular una serie de relajaciones de $AG(3,2)$. $AG(3,2)'$ es la única relajación de $AG(3,2)$ que se obtiene de relajar el plano torcido $\{2, 4, 5, 7\}$, luego

$$\begin{aligned} T_{AG(3,2)'}(x, y) &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14xy + 6x + 6y + 10y^2 + 4y^3 + y^4 \\ &\quad - xy + x + y \\ &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 13xy + 7x + 7y + 10y^2 \\ &\quad + 4y^3 + y^4. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora bien, las únicas dos relajaciones de $AG(3,2)'$ son R_8 y F_8 . En el caso de R_8 , este se obtiene al relajar de $AG(3,2)'$ el único plano torcido $\{1, 3, 6, 8\}$, i.e, los planos con 4 puntos de R_8 son: las seis caras del cubo y los seis planos diagonales. Para el caso de F_8 , este se obtiene de $AG(3,2)'$ al relajar un plano diagonal. La representación geométrica de F_8 se muestra en la Figura 4.21, claramente se ve que no se tiene el plano torcido $\{2, 4, 5, 7\}$ ni el plano diagonal $\{2, 4, 6, 8\}$.

Ambos matroides no son isomorfos, R_8 es representable sobre cualquier campo

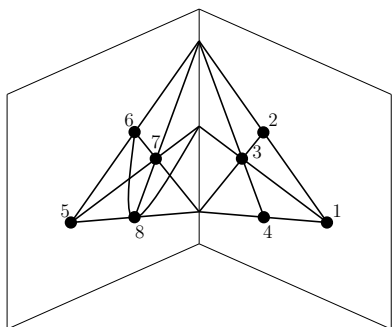


Figura 4.21: F_8

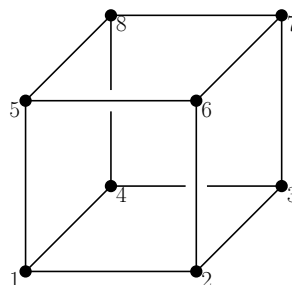


Figura 4.22: cubo

excepto $GF(2)$ y F_8 es no representable; mas sin embargo, tienen el mismo polinomio de Tutte por ser ambos las únicas dos relajaciones de $AG(3, 2)'$. Por lo que de (4.2) y (4.17)

$$T_{R_8}(x, y) = T_{F_8}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12xy + 8x + 8y + 10y^2 + 4y^3 + y^4.$$

La única relajación de R_8 es Q_8 , y se obtiene al relajar uno de los seis planos diagonales de R_8 . De la ecuación anterior y de (4.2) se tienen

$$T_{Q_8}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 11xy + 7x + 7y + 10y^2 + 4y^3 + y^4.$$

Por último, otro matroide que proviene de tomar planos del cubo, ver figura 4.22, es L_8 . Este matroide tiene como planos con cuatro puntos las seis caras del cubo más los dos planos torcidos $\{1, 8, 3, 6\}$ y $\{2, 7, 4, 5\}$. L_8 es un matroide de empedrado ralo con rango 4 y $\lambda = 8$, por tanto su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned} T_{L_8}(x, y) &= (x - 1)^4 + 8(x - 1)^3 + 28(x - 1)^2 + 48x - 42 + 8xy + 48y + \\ &\quad 28(y - 1)^2 + 8(y - 1)^3 + (y - 1)^4 \\ &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 8xy + 12x + 12y + 10y^2 + 4y^3 + y^4. \end{aligned}$$

4.2.7. Matroide Vámos

Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{T}_1 = \{1234, 1456, 1478, 2356, 2378\}$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \{T \subseteq E \mid |T| = 3 \text{ y } T \not\subseteq T', \text{ tal que } T' \in \mathcal{T}_1\}$. Es fácil ver que \mathcal{T} así definido es una 3-partición de E , por lo que \mathcal{T} es el conjunto de hiperplanos de un matroide de empedrado ralo cuya representación geométrica se muestra en la Figura 4.23. A este matroide se le conoce como el *matroide Vámos* y se denota por V_8 .

V_8 es un matroide de empedrado ralo con $\lambda = 5 = |\mathcal{T}_1|$, por lo que su polinomio

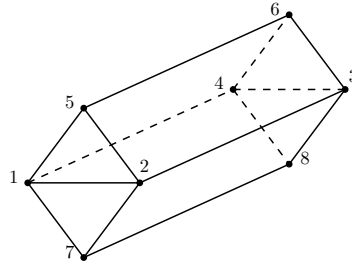


Figura 4.23: Realización geométrica de V_8

de Tutte es

$$\begin{aligned}
 T_{V_8}(x, y) &= (x-1)^4 + 8(x-1)^3 + \binom{8}{2}(x-1)^2 + \binom{8}{3}(x-1) \\
 &\quad + \binom{8}{4} + 5(xy - x - y) + \binom{8}{5}(y-1) + 86(y-1)^2 \\
 &\quad + 8(y-1)^3 + (y-1)^4 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5xy + 15x + 15y \\
 &\quad + 10y^2 + 4y^3 + y^4.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2.8. Pappus y non-Pappus

La representación geométrica del matroide Pappus se da en la Figura 4.24. De esta figura, es claro que cualesquiera dos puntos están en una única línea y que las líneas son circuitos-hiperplanos de un matroide de rango 3. Por lo que el matroide Pappus es un matroide de empedrado ralo con $\lambda = 9$ y su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned}
 T_M(x, y) &= (x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 27x - 78 + 9xy + 117y + 126(y-1)^2 \\
 &\quad + 84(y-1)^3 + 36(y-1)^4 + 9(y-1)^5 + (y-1)^6 \\
 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 9xy + 12y + 15y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6.
 \end{aligned}$$

Dado que el matroide *non-Pappus*, Figura 4.25, es una relajación del matroide Pappus, de la ecuación anterior y de (4.2) se tiene

$$\begin{aligned}
 T_M(x, y) &= x^3 + 6x^2 + 12x + 9xy + 12y + 15y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6 \\
 &\quad - xy + x + y \\
 &= x^3 + 6x^2 + 13x + 8xy + 13y + 15y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6.
 \end{aligned}$$

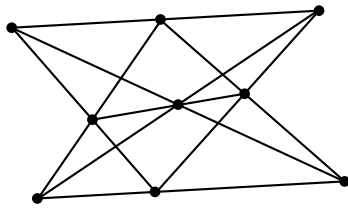


Figura 4.24: Pappus

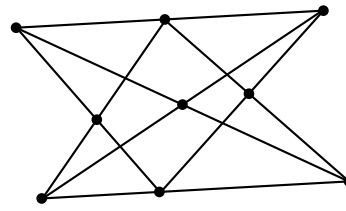


Figura 4.25: non-Pappus

4.2.9. Matroide non-Desargues

El matroide non-Desargues tiene como representación geométrica la que se muestra en la Figura 4.26. Es un matroide de rango 3, con 10 elementos. No tiene ciclos de tamaño menor a 3 y cualquier subconjunto de cardinalidad 3 o es base o es un circuito-hiperplano. Se sigue que este matroide es un matroide de empedrado ralo con 9 circuitos-hiperplanos, cuyos circuitos-hiperplanos son las 9 líneas que se muestran en la Figura 4.26. De lo anterior se tiene que el polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned}
 T_M(x, y) &= (x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 36x - 135 + 9xy + 201y \\
 &\quad + 252(y - 1)^2 + 210(y - 1)^3 + 120(y - 1)^4 + 45(y - 1)^5 \\
 &\quad + 10(y - 1)^6 + (y - 1)^7 \\
 &= x^3 + 7x^2 + 19x + 9xy + 19y + 21y^2 + 15y^3 \\
 &\quad + 10y^4 + 6y^5 + 3y^6 + y^7.
 \end{aligned}$$

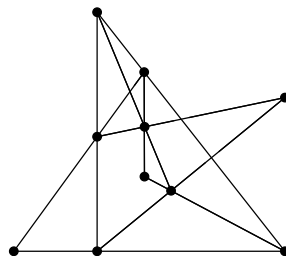


Figura 4.26: Realización geométrica del matroide non-Desargues

4.3. Matroides representables sobre algún campo

Para calcular el polinomio de Tutte de algunos matroides que son representables sobre algún campo, usaremos un programa que realizó Michael Barany. Para más información sobre este programa ir a [1].

4.3.1. $PG(2, 2)$ y $PG(2, 3)$

El matroide Fano F_7 , isomorfo al plano proyectivo $PG(2, 2)$, es representable solamente cuando el campo es de característica dos y su matriz que lo representa es

$$\left[\begin{array}{c|cccc} I_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

por lo que su polinomio de Tutte es

$$T_{F_7}(x, y) = x^3 + 4x^2 + 7xy + 3x + 3y + 6y^2 + 3y^3 + y^4,$$

y coincide con el polinomio de Tutte de F_7 calculado por la fórmula de matroides empedrados ralos.

La geometría proyectiva $PG(2, 3)$ solamente es representable sobre $GF(3)$, por lo que la matriz que representa a este matroide (ver Figura 4.17) es

$$\begin{array}{cccc|cccccccccccc} 1 & 2 & 4 & & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \left[\begin{array}{ccc|cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

y su polinomio de Tutte es

$$\begin{aligned} T_{PG(2,3)}(x, y) = & x^3 + 10x^2 + 13xy^2 + 26xy + 16x + 16y + 32y^2 + 36y^3 \\ & + 28y^4 + 21y^5 + 15y^6 + 10y^7 + 6y^8 + 3y^9 + y^{10}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3.2. P_7, P_8 y Q_3

Por el lema 6.4.13 de [41], la matriz que representa a P_7 sobre cualquier campo distinto de $GF(2)$ es

$$\left[\begin{array}{c|cccc} I_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & a & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right]$$

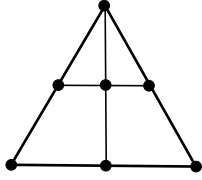


Figura 4.27: P_7

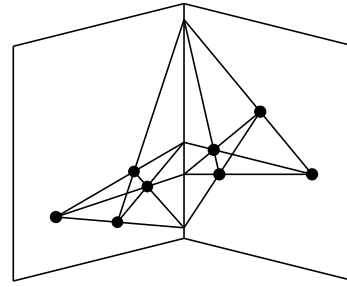


Figura 4.28: P_8

con $a \notin \{0, 1\}$. Haciendo $a = 2$ tenemos una representación de P_7 sobre $GF(3)$. Luego,

$$T_{P_7}(x, y) = x^3 + 4x^2 + 5xy + 5x + 5y + 6y^2 + 3y^3 + y^4.$$

Para el caso del matroide P_8 , la matriz sobre $GF(3)$ que lo representa es

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ I_4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

y su polinomio de Tutte es

$$T_{P_8}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 10xy + 10x + 10y + 10y^2 + 4y^3 + y^4.$$

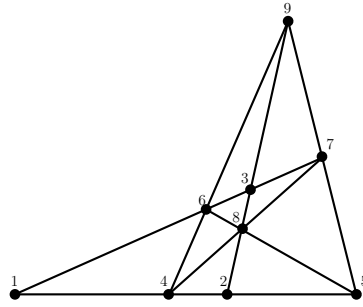
Para el caso del matroide Q_3 , este matroide es una geometría de Dawling ternaria con rango 3. Su representación geométrica está dada en la Figura 4.29.

Q_3 es representable sobre el campo F si y sólo si la característica de F no es dos. La matriz que representa a Q_3 sobre $GF(3)$ es

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

y su polinomio de Tutte es

$$T_{Q_3}(x, y) = 8y + 12y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6 + 8x + 10xy + 3xy^2 + 6x^2 + x^3.$$

Figura 4.29: Q_3

4.3.3. $M(K_5)$

Dada la gráfica K_5 , podemos asociarle el matroide gráfico $M(K_5)$. La representación geométrica de $M(K_5)$ es la configuración de Desargues 3-dimensional como se muestra en la Figura 4.31. Este matroide es regular y su matriz que lo representa es

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

y el polinomio de Tutte es

$$T_{M(K_5)}(x, y) = 6y + 15y^2 + 15y^3 + 10y^4 + 4y^5 + y^6 + 6x + 20xy + 15xy^2 + 5xy^3 + 11x^2 + 10x^2y + 6x^3 + x^4.$$

4.3.4. R_8, R_9, R_{10} y R_{12}

Para el caso de R_8 , este matroide es representable sobre cualquier campo de característica distinta a dos y su representación está dada por

$$\left[\begin{array}{c|cccc} I_4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

su polinomio de Tutte es

$$T_{R_8}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12xy + 8x + 8y + 10y^2 + 4y^3 + y^4. \quad (4.20)$$

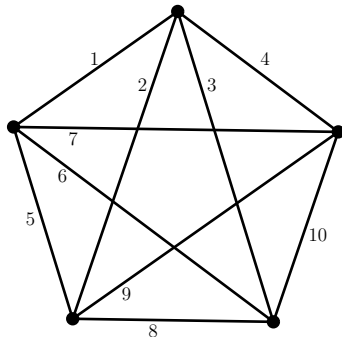


Figura 4.30: Gráfica de K_5

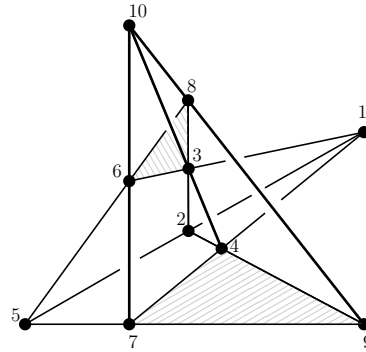


Figura 4.31: Configuración de Desargues

Este polinomio coincide con el polinomio calculado por la fórmula de matroides de empedrado.

Nuestro siguiente matroide es R_9 , el cual es representable si y sólo si el campo es de característica tres. La matriz que lo representa sobre $GF(3)$ es

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} I_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

y tiene como polinomio de Tutte a

$$T_{R_9}(x, y) = 8y + 13y^2 + 10y^3 + 6y^4 + 3y^5 + y^6 + 8x + 11xy + 2xy^2 + 6x^2 + x^3.$$

La representación matricial de R_{10} sobre cualquier campo está dada por

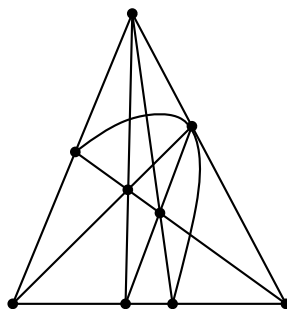
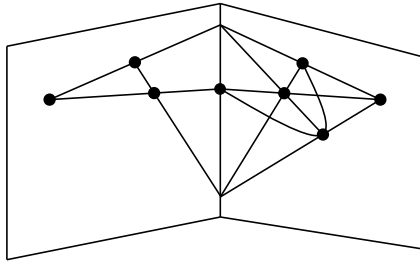


Figura 4.32: R_9

Figura 4.33: S_8

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Figura 4.34: Matriz de S_8 sobre $GF(2)$

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ I_5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

por lo que su polinomio de Tutte es

$$T_{R_{10}}(x, y) = x^5 + 5x^4 + 15x^3 + 15x^2y + 20x^2 + 15xy^2 + 30xy + 10x + 10y + 20y^2 + 15y^3 + 5y^4 + y^5. \quad (4.21)$$

La representación matricial de R_{12} sobre $GF(2)$ está dada por

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ I_6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

por lo que su polinomio de Tutte es

$$T_{R_{12}}(x, y) = x^6 + 6x^5 + 2x^4y + 19x^4 + 19x^3y + 35x^3 + 17x^2y^2 + 53x^2y + 35x^2 + 2xy^4 + 19xy^3 + 53xy^2 + 56xy + 14x + 14y + 35y^2 + 35y^3 + 19y^4 + 6y^5 + y^6.$$

4.3.5. S_8, T_8 y J

El matroide S_8 tiene como representación geométrica la que se muestra en la Figura 4.33 y su representación sobre $GF(2)$ está dada por la matriz de la Fig.

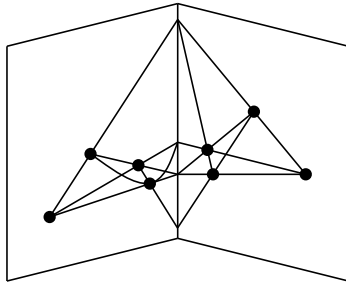


Figura 4.35: T_8

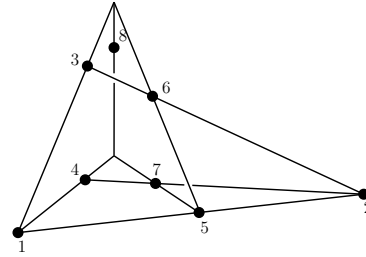


Figura 4.36: J

4.34. Por lo que su polinomio de Tutte es

$$T_{S_8}(x, y) = 4y + 7y^2 + 4y^3 + y^4 + 4x + 10xy + 3xy^2 + 7x^2 + 3x^2y + 4x^3 + x^4.$$

El matroide T_8 es representable sobre el campo F si y sólo si el campo es de característica tres. Su representación geométrica está dada en la Fig. 4.35 La matriz que representa a T_8 es $[I_4 \mid J_4 - I_4]$ sobre $GF(3)$, donde J_4 es la matriz que tiene 1 en todas sus entradas. El polinomio de Tutte es

$$T_{T_8}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 11xy + 9x + 9y + 10y^2 + 4y^3 + y^4.$$

Para el matroide J , ver Figura 4.36. La matriz que lo representa sobre $GF(3)$ es

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \\ I_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

donde enumeramos del 1 al 8 las columnas de la matriz anterior, según se enumera en la Figura 4.36. El polinomio de Tutte es

$$T_J(x, y) = x^4 + y^4 + 4 * x^3 + 3 * x^2 * y + 4 * y^3 + 7 * x^2 + 7 * y^2 + 6 * x + 6 * y + 8 * xy.$$

4.3.6. $S(5, 6, 12)$

El único sistema Steiner $S(5,6,12)$ es representable si y solo si el campo es de característica tres. La matriz que lo representa sobre $GF(3)$ es

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ I_6 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

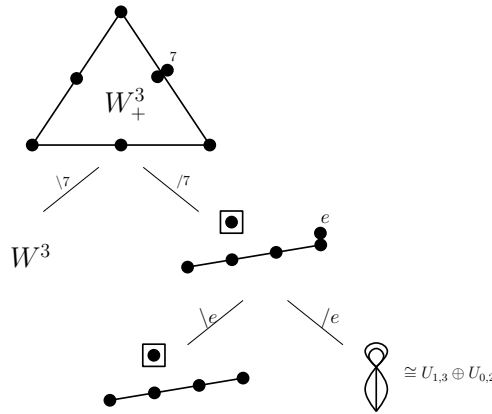


Figura 4.37: Contracción y borrado en W_+^3

y el polinomio de Tutte es

$$T_{S(5,6,12)}(x, y) = 120y + 126y^2 + 56y^3 + 21y^4 + 6y^5 + y^6 + 120x + 132xy + 126x^2 + 56x^3 + 21x^4 + 6x^5 + x^6.$$

4.4. Contracción y borrado

En esta sección por medio de la contracción y/o el borrado de un elemento del matroide M , calcularemos algunos polinomios de Tutte. Recordemos que si e es un elemento de M que no es ni lazo ni istmo, entonces

$$T_M(x, y) = T_{M \setminus e}(x, y) + T_{M/e}(x, y). \tag{4.22}$$

4.4.1. W_+^3

El Matroide W_+^3 se obtiene de W^3 al añadirle un elemento en paralelo. Por esta razón, W_+^3 no es un matroide de empedrado. En la Figura 4.37 se tiene una serie de contracción y borrado hechas a este matroide, por lo que usando la ecuación 4.22 tenemos

$$\begin{aligned} T_{W_+^3}(x, y) &= T_{W^3}(x, y) + y \cdot (T_{U_{2,4}}(x, y)) + T_{U_{1,3} \oplus U_{0,2}}(x, y) \\ &= (x^3 + 3x^2 + 3xy + 3x + 3y + 3y^2 + y^3) + y \cdot (x^2 + 2x + 2y + y^2) \\ &\quad + (y^4 + y^3 + xy^2) \\ &= x^3 + 3x^2 + x^2y + 3x + 5xy + xy^2 + 3y + 5y^2 + 3y^3 + y^4. \end{aligned}$$

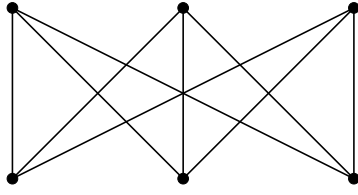


Figura 4.38: Gráfica \$K_{3,3}\$

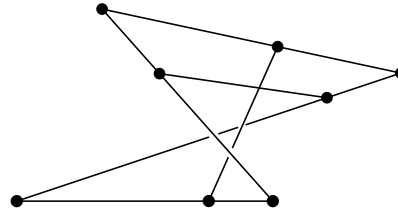


Figura 4.39: \$M^*(K_{3,3})\$

4.4.2. \$M(K_{3,3})\$ y \$M^*(K_{3,3})\$

Sabemos que el borrado de cualquier elemento de \$R_{10}\$ es isomorfo a \$M(K_{3,3})\$. Si \$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\$ etiqueta las columnas de la matriz que representa a \$R_{10}\$ (ver pag. 71), la matriz que representa a \$R_{10} \setminus 10\$ es

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 1 & 0 \\ I_5 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

por lo que el polinomio de Tutte de \$M(K_{3,3})\$ es

$$T_{M(K_{3,3})}(x, y) = 5y + 9y^2 + 5y^3 + y^4 + 5x + 15xy + 6xy^2 + 11x^2 + 9x^2y + 10x^3 + 4x^4 + x^5.$$

Se sigue que el polinomio de Tutte de \$M^*(K_{3,3})\$ es

$$\begin{aligned} T_{M^*(K_{3,3})}(x, y) &= T_{M(K_{3,3})}(y, x) \\ &= x^4 + 5x^3 + 6x^2y + 9x^2 + 9xy^2 + 15xy + 5x + 5y + 11y^2 \\ &\quad + 10y^3 + 4y^4 + y^5. \end{aligned}$$

También se sabe que la contracción de \$R_{10}\$ por cualquier elemento es isomorfo a \$M^*(K_{3,3})\$, por lo que de la ecuación (4.22) se sigue que

$$T_{R_{10}}(x, y) = T_{R_{10}/10}(x, y) + T_{R_{10} \setminus 10}(x, y) = T_{M^*(K_{3,3})}(x, y) + T_{M(K_{3,3})}(y, x),$$

por lo que

$$T_{R_{10}}(x, y) = x^5 + 5x^4 + 15x^3 + 15x^2y + 20x^2 + 15xy^2 + 30xy + 10x + 10y + 20y^2 + 15y^3 + 5y^4 + y^5.$$

La ecuación anterior coincide con el polinomio de Tutte dado por (4.21).

4.5. $T_M(2, 0)$, $T_M(0, 2)$ y $T_M(1, 1)$

Ahora procedemos a evaluar los polinomios de Tutte calculados anteriormente, para ver si la Conjetura 2.8 se cumple para estos matroides. Ya se mostró que la Conjetura 2.8 es cierta para las ruedas y rehiletos, así como para los matroides de empedrado. Por tanto, los matroides que restan por verificar son: W_+^3 , T_8 , J , P_8 , $M(K_{3,3})$, $M(K_5)$, R_{10} y R_{12} . En la Tabla siguiente se muestran las evaluaciones de estos matroides.

Se concluye que todos los matroides antes mencionados sí cumplen la Conjetura 2.8.

Matroide	$T_M(2, 0)$	$T_M(0, 2)$	$T_M(1, 1)$
W_+^3	26	66	26
T_8	106	106	59
J	88	88	47
P_8	108	108	60
$M(K_{3,3})$	230	102	81
$M(K_5)$	120	544	125
R_{10}	332	332	162
R_{12}	1008	1008	411

Cuadro 4.1: Evaluaciones del polinomio de Tutte en $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 1)$.

4.6. Conclusiones

Si tenemos calculado explícitamente el polinomio de Tutte de un matroide, uno estaría tentado a tratar de comprobar la conjetura de Stanley para dicho matroide. Esto está lejos de poder hacerse, pues aunque se tiene el h -vector, nada nos dice cuál será el multicomplejo cuya O -secuencia pura coincida con el h -vector. De Loeira, Kemper y Klee en su artículo [30], demostraron que la conjetura de Stanley es cierta para todos los matroides con a lo más 9 elementos. Ellos pudieron obtener, de D. Mayhew y G. Royle, la base de datos de todos los 385,369 matroides con a lo más nueve elementos. Usaron esta información para generar miles de O -sucesiones que fueran candidatas a ser el h -vector de un complejo matroidal. Por medio de algunas propiedades de los matroides y usando algunos programas pudieron encontrar los multicomplejos adecuados. Por todo esto, todos los matroides con a lo más 9 elementos presentados aquí, satisfacen la conjetura de Stanley. Las ruedas, W_r son matroides cográficos, por lo que satisfacen la conjetura de Stanley. Los rehiletos W^r son matroides cotransversales y también satisfacen la conjetura de

Stanley. J. Pacheco alumno de C. Merino demostró la conjetura para R_{10} . El único matroide de todos los presentados en este capítulo que falta por verificar si cumple o no la conjetura es R_{12} .

Se mostró que todos los matroides de este capítulo satisfacen la Conjetura 2.8. Hay otras familias para las cuales se cumple la conjetura: por ejemplo Marc Noy (en comunicación privada) demostró que $\tau(G) \leq \alpha(G)$ cuando G es una gráfica “outerplanar” maximal, usando la definición de contracción y borrado del polinomio de Tutte.

Bibliografía

- [1] M. Barany, <http://www.math.umn.edu/~reiner/Tutte/TUTTE.html>
- [2] N. Biggs, Chip firing and the critical group of a graph. *J. Algebraic Combin.*, 9 (1999), 25-45.
- [3] N. Biggs, The Tutte polynomial as a growth function. *J. Algebraic Combin.*, 10 (1999), 115-133.
- [4] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [5] A. Björner, Shellable and Cohen-Macaulay partial ordered sets. *Transactions of the American Mathematical Society* 260 (1980) 159-183.
- [6] A. Björner and M. L. Wachs, Shellable Nonpure Complexes and Posets. I and II. *Transactions of the American Mathematical Society* 348 (1996), 1299-1327 and 349 (1997) 3945-3975.
- [7] A. Björner, Homology and shellability of matroids and geometric lattices. In: N. White(ed) *Matroid Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, pages 226-283. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
- [8] J. Bonin, A. de Mier and M. Noy, Lattice path matroids: enumerative aspects and Tutte polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 104 (2003), pp. 63-94.
- [9] J. Bonin, Sparse paving matroids, basis-exchange properties, and cyclic flats. arXiv:1011.1010v1 2010.
- [10] J. I. Brown and C. J. Colbourn. Roots of the reliability polynomial. *SIAM J. Discrete Math.*, 5 (1992) 571-585.
- [11] T. Brylawski and J. Oxley, The Tutte polynomial and its applications. In: N. White(ed) *Matroid Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, pages. 123-225. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

-
- [12] S.-C. Chang and R. Shrock, Zeros of Jones Polynomials for Families of Knots and Links, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 301, 1-4 (2001) 196-218.
- [13] M. K. Chari. Two decompositions in topological combinatorics with applications to matroid complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.* , **349** (1997) 3925-3943.
- [14] M. K. Chari and C. J. Colbourn, Reliability polynomials: a survey. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 22 (1997) 177-193.
- [15] R. Conde, C. Merino, Comparing the number of acyclic and totally cyclic orientations with the number of spanning trees of a graph, *Int.J.Math.Comb.* 2 (2009) 78-79.
- [16] L.E. Chavez-Lomelí, C. Merino, S. D. Noble, M. Ramírez-Ibáñez, Some inequalities for the Tutte polynomial. *European Journal of Combinatorics*, Vol. 32, Issue 3 (2011), pag. 422-433.
- [17] F. Chung, S.T. Yau, Coverings, heat kernels and spanning trees, *Electron. J. Combin.* 6 (1999) R12. 21 pp.
- [18] R. Diestel, *Graph Theory*, in: Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.
- [19] J. Edmonds, Lehman's Switching Game and a Theorem of Tutte and Nash-Williams. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 69B (1965), pages 73-77.
- [20] Edmonds, J. and Fulkerson, D. R. (1965). Transversals and matroid partitions. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **69B**, 147-153.
- [21] J. Geelen and P. J. Humphries, Rota's Basis Conjecture for Matroids. *SIAM J. Discrete Math.* 20, 1042 (2006).
- [22] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, New York, 1990.
- [23] T. Hibi. Face number inequalities for matroid complexes and Cohen-Macaulay types of Stanley-Reisner rings of distributive lattices. *Pacific J. Math.*, **154**(1992) 253-264.
- [24] H. Hanani. On quadruple systems. *Canad. J. Math.*,. **12** (1960) 145-157.
- [25] B. Jackson, An Inequality for Tutte Polynomials. *Combinatorica* 30 (2010) 68-81.

-
- [26] F. Jaeger, D.L. Vertigan and D-J.A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. *Random Struct. Algorithms*, **7**(2):157-165, 1995.
- [27] N.E. Kahale, L.j. Shulman, Bonds on the chromatic polynomial and on the number of acyclic orientations of a graph, *Combinatorica* 16(1996) 383-397.
- [28] T.P. Kirkman. On a problem in combinatorics. *Cambridge Dublin Math. J.*, **2** (1847) 191-204.
- [29] J.H. van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.
- [30] Jesús A. de Loera, Yvonne Kempler and Steve Klee. *h*-vectors of small matroid complexes. arXiv:1106.2576v1, 2011.
- [31] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1997.
- [32] C. Merino, Chip firing and the Tutte polynomial, *Annals of Combinatorics*, 1 (1997) 253-259.
- [33] C. Merino, The Chip Firing Game and Matroid Complexes, in *Discrete Models: Combinatorics, Computation, and Geometry*, DM-CCG 2001, R. Cori, J. Mazoyer, M. Morvan, and R. Mosseri, eds., *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings AA* (2001), 245-256.
- [34] C. Merino and D.J.A. Welsh, Forests, colourings and acyclic orientations of the square lattice. *Annals of Combinatorics*, 3 (1999), pp. 417-429.
- [35] C. Merino, M. Ibañez and M. G. Rodríguez, A note on some inequalities for the Tutte polynomial of a matroid. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 34 (2009), pp. 603-607.
- [36] C. Merino, S. D. Noble, M. Ramírez-Ibañez and Rafael Villaroel, On the structure of the *h*-vector of a paving matroid. Preprint
- [37] D. Mayhew, M. Newman, D. Welsh and G. Whittle, On the asymptotic proportion of connected matroids. *European J. of Combin.* 32 (2011) 882-890.
- [38] D. Mayhew and D. Welsh, On the number of sparse paving matroids. *Adv. in Appl. Math.*, to appear.
- [39] B.R. Myers, Number of spanning trees in a wheel, *IEEE Trans. Circuit Theory* CT-18 (1971) 387-391.

-
- [40] C.St.J.A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs in to forest, *J. Lond. Math. Soc.* 39 (1964) 12.
- [41] J. G. Oxley, *Matroid Theory*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [42] S. Rajpal. On binary k -paving matroids and Reed-Muller codes. *Discrete Mathematics* 190 (1998) 191-200
- [43] J. Sedláček Lucas numbers in graph theory(czech. English summary). *Mathematics, Geometry and Graph Theory*, Univ. Karlova, Prague, 1970, pp. 111-115 (in Czech).
- [44] J. Schweig, On the h -Vector of a Lattice Path Matroid. *Electronic J. Combinatorics* 17(1) (2010) 1-6(electronic).
- [45] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. *Notices Amer. Math. Soc.*, **50** (2003) 912-915.
- [46] Oh Suho. Generalized permutahedra, h -vector of a cotransversal matroid and pure O -sequences, arXiv:1005.5586v2 2010.
- [47] R.P. Stanley, Cohen-Macaulay complexes, in *Higher Combinatorics*, M. Aigner (Ed.), Reidel Publishing, Dordrecht and Boston, 1977.
- [48] R.P. Stanley, Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.* 5 (1973) 172-178.
- [49] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, 2nd Edition, Progress in mathematics, Vol 41, Birkhuser, Boston-Besel-Stuttgart, 1996.
- [50] E. Stokes, the h -vectors of 1-dimensional Matroid Complexes and a Conjecture of Stanley. Preprint. (Submitted to *J. Algebraic Combinatorics*).
- [51] C. Thomassen, Spanning trees and orientations of graphs. *Journal of Combinatorics*, Vol. 1, Num. 2, pag. 101-11 (2010)
- [52] W. T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian J. Math.*, 6, (1954), pp. 80-91.
- [53] A. Van Tuyl and R. H. Villarreal, Shellable graphs and sequentially Cohen-Macaulay bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 115 (2008) 799-814.
- [54] D.L. Vertigan and D.J.A. Welsh. The computational complexity of the Tutte plane: the bipartite case, *Comb. Probab. Comput.*, **1**(2): 181-187, 1992.
- [55] G. M. Ziegler, Shelling Polyhedral 3-Balls and 4-Polytopes. *Discrete and Computational Geometry*, 19 (1998) 159-174.