UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

“LA FORMACIÓN DE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA: UN ANÁLISIS MATEMÁTICO A PARTIR DE LOS AXIOMAS SOBRE LAS PREFERENCIAS”

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ECONOMÍA

PRESENTA:

JUAN PABLO RAMÍREZ HERNÁNDEZ

ASESOR:

LIC. RODRIGO AYALA CALVILLO

México, Marzo de 2012

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

CAPÍTULO CUATRO

INTRODUCCIÓN

¿Por qué los individuos eligen consumir algunos bienes por sobre otros?

Este tipo de preguntas es importante no sólo para los vendedores y los departamentos de marketing de las empresas sino para toda la economía en su conjunto. Existe también una enorme gama de enfoques con los cuales se puede abordar el asunto. Podemos verlo desde una perspectiva sociológica, estadística o incluso puramente sicológica, sin embargo en el ámbito económico existe una teoría que dedica gran parte de su análisis al estudio de posibles respuestas a este tipo de interrogantes.

Es probable que la decisión de un consumidor de adquirir un bien respecto a otro dependa en gran medida de los precios relativos de ambos bienes o también esté condicionado al presupuesto con el que cuente el individuo para adquirirlos. No obstante que ambos planteamientos pueden ser razones de peso a la hora de decidirse entre los dos bienes, definitivamente otro argumento indispensable en este problema son las preferencias de los consumidores. Éstas representan para los individuos una especie de guía que los conduce a la hora de consumir bienes y servicios. Formalmente se definen como aquellos criterios de valoración por medio de los cuales los individuos pueden elegir de entre un conjunto de cestas de consumo la que resulte la mejor de las alcanzables.

El concepto de las preferencias es esencial para los economistas. A partir de él se desarrollan dos de las herramientas más importantes para la moderna teoría económica: Los Axiomas sobre las Preferencias y las Curvas de Indiferencia. Los primeros se entienden intuitivamente como una serie de características que asumen las preferencias las cuales condicionan su forma, la segunda definición se puede interpretar como una representación gráfica de la información que éstas contienen. Ambas herramientas nos proporcionan algunos de los elementos necesarios para modelar el comportamiento de los consumidores. Hemos decidido emprender un estudio de estos temas dado la tremenda importancia que tienen en la teoría económica.

Como era de esperarse para un asunto de tanta relevancia, existe un sinnúmero de estudios que abordan estos conceptos desde las más diversas ópticas. Comenzando por los libros de texto de economía y hasta las investigaciones más sofisticadas. Incluso podríamos llegar a pensar que existe una saturación de la información respecto a esta cuestión.

Por tal motivo hemos decidido orientar nuestro trabajo hacia un objetivo específico: la forma que asumen las curvas de indiferencia regulares. ¿Por qué adoptan esa figura? ¿Cuáles son las causas que la propician?

Es evidente que este enfoque, como muchos otros, ya ha sido estudiado con amplitud -fácilmente podemos comprobarlo al echar una mirada al índice-. Sin embargo el lector encontrará en esta lectura una novedosa exposición en la que se retoman diversas perspectivas.

Por un lado encontramos los rigurosos resultados que ofrece la formalidad matemática. Por otro está la utilización práctica de esos resultados en la teoría del consumidor. En este sentido tenemos una explicación fresca que privilegia el vínculo entre el razonamiento matemático y su aplicación económica. Por tal motivo, al inicio de cada capítulo se plantean todos los conceptos matemáticos que se utilizan a lo largo de cada apartado, en vez de enviarlos a un apéndice al final del texto. De esta manera se intenta reforzar la relación entre las matemáticas y la teoría económica. En este sentido se hace un esfuerzo por mostrar los temas de la manera más sencilla posible, evitando caer en lenguaje matemático pretencioso e inaccesible.

La estructura del documento fue trazada de la siguiente manera. El primer capítulo es un preámbulo general de la tesis. En él se plantean de manera intuitiva los conceptos más importantes que se manejan a lo largo del documento, asimismo se presenta una perspectiva histórica de la teoría de la utilidad.

A partir del segundo capítulo se realiza un estudio detallado de los temas que se expusieron de manera genérica en la primera sección. El segundo apartado se concentra particularmente en los dos primeros axiomas sobre las preferencias. Primero se presentan las definiciones matemáticas necesarias para tener una correcta aproximación al problema. Posteriormente se entra de lleno al análisis de los axiomas de orden, los cuales se tratan desde la perspectiva tanto económica como matemática.

La misma dinámica se emplea en el tercer capítulo. Después de revisar los conceptos matemáticos propios de este apartado, se analiza un tema esencial para el trabajo: el conjunto de consumo, el cual sirve como preámbulo para abordar los axiomas analíticos y los de conveniencia. En este capítulo se realizan algunos ejercicios y demostraciones en aras de fortalecer su exposición.

La explicación gráfica es una parte importante de este escrito. En el cuarto y último capítulo -donde se accede a las conclusiones de la tesis- se sintetiza gráficamente todo el estudio matemático y económico que se realizó en los tres apartados previos. De esta manera se pretende reforzar el análisis a través de imágenes para que pueda ser asimilado con mayor facilidad.

Al final, el resultado que se obtiene es una exposición sencilla pero a la vez rigurosa de los temas propuestos. De tal forma, se presenta un análisis de las preferencias de los consumidores a través de métodos matemáticos, gráficos y de la teoría económica, en la que se expone la formación de las Curvas de Indiferencia a partir de Axiomas sobre las Preferencias.

CAPÍTULO UNO

ESBOZO HISTÓRICO DE LA EVOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE LA UTILIDAD

1.1 INTRODUCCIÓN

En este primer apartado abordaremos de manera general la mayor parte de los temas que estudiaremos durante este trabajo.

Iniciaremos con una breve semblanza de la historia de la Teoría de la Utilidad. Describiremos la evolución que ha tenido a lo largo de la historia comenzando con una descripción de sus primeras interpretaciones hasta llegar a la más acabada versión de la misma. Explicaremos en qué consisten las dos subdivisiones tradicionales de este concepto: La Utilidad Cardinal y La Utilidad Ordinal, pondremos especial énfasis en esta última, asimismo nombraremos a los más importantes teóricos y sus aportaciones.

Una vez que hayamos concluido con la semblanza histórica, analizaremos la moderna Teoría de la Utilidad.

Comenzaremos abordando algunas definiciones que posteriormente nos serán de mucha utilidad: cesta de consumo, el problema económico del consumidor, el comportamiento racional del consumidor, etc. Todos ellos abonarán el terreno para definir uno de los conceptos sustanciales de este trabajo: las preferencias del consumidor. A partir de esta definición se desprenden otras que serán esenciales no sólo para este capítulo sino para toda la tesis en su conjunto. Nos referimos a los axiomas sobre las preferencias.

Los axiomas sobre las preferencias tienen una importancia fundamental ya que sirven como plataforma en la que se erigen todas las demás definiciones que son el sustento de este trabajo. En esta primera parte desarrollamos una definición intuitiva de cada uno de ellos y presentamos la manera en que se les agrupan: axiomas de orden, axiomas de preferencia y axiomas analíticos.

Posteriormente exponemos cómo se pueden representar a las preferencias de manera gráfica a través de las curvas de indiferencia. También explicamos que las preferencias que cumplen con los supuestos de estos axiomas pueden representarse por medio de un tipo especial de curvas que se les conoce como curvas de indiferencia regulares.

Más adelante explicamos cómo además de la forma gráfica, las preferencias del consumidor se pueden representar también numéricamente a través de las funciones de utilidad.

Finalmente planteamos algunas interrogantes acerca de la forma que asumen las preferencias de los consumidores y su relación con los axiomas. Aclaramos que esas preguntas serán respondidas en los siguientes capítulos.

1.2 LA UTILIDAD CARDINAL

A finales del siglo XVIII el filósofo inglés Jeremy Bentham introdujo un concepto que posteriormente fue utilizado de manera amplia por los economistas durante el siglo XIX: La utilidad.

El concepto de utilidad se usaba entonces para representar todas aquellas manifestaciones subjetivas de las personas al momento de consumir un bien o un servicio. Posteriormente, algunos autores trataron de profundizar el concepto de este filósofo inglés y darle un cuerpo teórico en otras disciplinas.

A partir de la propuesta de Bentham algunos economistas desarrollaron una teoría en la que el concepto de utilidad era el elemento fundamental. De acuerdo con la nueva concepción de los marginalistas -nombre con el que se conocería a esta corriente de la economía- el valor de los bienes no reside en la cantidad de trabajo necesario para producirlo, sino en la utilidad que dicho bien le reporta al consumidor y más aún, en la utilidad marginal que produce el bien al ser consumido por el individuo.

Este planteamiento representó un viraje total en la forma en que se analizaba la economía. No obstante, al igual que el concepto primigenio de Bentham, este nuevo enfoque de la economía se enfrentaría a una serie de obstáculos que tendrían que ser franqueados. Gravelle describe algunos de ellos, (Estos economistas…) «Pensaban que era posible hablar de una cantidad total de utilidad derivada de consumir una cantidad dada de bienes, de sustraer tales cantidades unas de otras y discutieron como estas diferencias cambiaban a medida que variaba el consumo».[1]

---

[1] ***Gravelle Hugh y Rees Ray.*** *Microeconomía, p. 80.*

En términos generales, esta primera versión de la utilidad es conocida como Teoría Cardinal de la Utilidad. Entre los elementos que postula es que la utilidad de las personas es aditiva y cuantificable. Según esta teoría, una persona obtiene cierta cantidad de utilidad al consumir cualquier bien o servicio. Esta utilidad estaría representada a través de unidades de satisfacción denominadas útiles, los cuales se pretendía que fueran medibles y que se pudieran sumar a la satisfacción derivada del consumo de otros bienes, independientemente de qué tipo de bienes se trate. De esta manera, por ejemplo, si el consumo de empanadas reporta a un individuo 4 útiles y el consumo de aguardiente reporta 6 útiles, la suma de ambos consumos daría como resultado 10 útiles. Además, la teoría cardinal de la utilidad presupone que es posible realizar comparaciones entre los niveles de utilidad o satisfacción de distintas personas.

Si bien los principales autores que trabajaron sobre la teoría, (Jevons, Menger y Walras) no desarrollaron está situación, de su análisis se desprende dicha posibilidad. «*Menger y Walras nunca abordaron esta cuestión, empero, sus análisis no dependen de la hipótesis de que puedan hacerse comparaciones interpersonales. Jevons argumentó que tales comparaciones eran imposibles; sin embargo, con un estilo característico de sus escritos, las llevó a cabo*».[2]

«Bentham sostenía que la sociedad debía intentar alcanzar el mayor provecho para el mayor número de personas y asumía que semejante política se podía hallar al maximizar una función de utilidad social agregada. Dado que la utilidad era vista como medible para algún tipo de criterio objetivo, también era considerada tanto comparable como aditiva entre los individuos. En otras palabras, Bentham creía que era posible decir que la persona A obtuvo más útiles del consumo de algún bien que la persona B. Además los “útiles” disfrutados por la persona A podían ser sumados a los útiles aprovechados por la persona B para encontrar la utilidad total de la sociedad».[3]

[2] ***Landreth y Colander.*** *Historia del pensamiento económico, p. 219.*
[3] ***Binger and Hoffman.*** *Microeconomics with calculus, p. 104. El original en inglés.*

Sin embargo, con el paso del tiempo los economistas se percataron de que esta nueva teoría presentaba diversos problemas. Entre los más importantes se encuentra el que la utilidad pueda medirse cardinalmente, situación que resulta cuando menos *incierta*. De hecho, ninguno de los autores que originalmente reivindicaban esta teoría postuló un mecanismo medianamente convincente para poder realizarlo.

Por otro lado, les fue imposible comprobar que personas distintas pudiesen comparar la utilidad derivada del consumo de ciertos bienes, incluso del mismo bien. Esta imposibilidad surge debido a que ambas personas pueden utilizar distintos criterios a la hora de calificar la utilidad que obtienen de dicho consumo. Como lo explica Varian «El problema estriba en que los economistas clásicos nunca describieron realmente como se medía la utilidad. ¿Cómo se supone que debemos cuantificar la cantidad de utilidad de las diferentes elecciones? ¿Es la utilidad lo mismo para una persona que para otra? ¿Qué quiere decir que una chocolatina me reporta el doble de utilidad que una zanahoria? ¿Tiene el concepto de utilidad un significado independiente que no sea el de ser lo que maximizan los individuos?»[4]

El problema que presenta la teoría cardinal de la utilidad pude ser planteado de la siguiente forma «Si una persona afirma que comer un filete le aporta una utilidad de cinco y otra afirma que el mismo filete le aporta una utilidad de cien no podemos saber cuál de los dos individuos concede más valor al filete porque ellos podrían estar empleando escalas muy distintas. De manera análoga, no tenemos manera de medir si el paso de la situación A a la situación B ofrece más utilidad a una persona que a otra».[5]

Al percatarse de los inconvenientes que acarreaba la teoría cardinal de la utilidad, los autores que retomaron estos conceptos se dieron a la tarea de desarrollar una teoría más consistente. Así, llegado el siglo XX los economistas fueron renunciando paulatinamente a los conceptos de cardinalidad en la teoría de la utilidad, la cual fue abandonada por

[4] ***Varian Hal R**. Microeconomía intermedia un enfoque actual, p. 55.*
[5] ***Nicholson Walter.** Teoría microeconómica, principios básicos y ampliaciones, p. 70.*

completo en la primara mitad del siglo pasado, aunque se mantuvieron muchas de las aportaciones que habían propuesto los primeros impulsores.

«Los representantes de esta teoría general del equilibrio… …renuncian a explicar y a hacer comprensibles las regularidades observadas mediante una teoría del valor psicológicamente fundada. Esto ahorra a tales teóricos muchas dificultades, sobre todo el problema insoluble de medir cuantitativamente los motivos que tienen las acciones económicas, es decir placer y displacer, y con ello cuantificarlos, además de hacer comprobaciones entre magnitudes sentimentales de diferentes sujetos, añadiéndolas finalmente a sumas sociales. A esta total despsicologización de la construcción teórica tiende Pareto mediante la deducción de un sistema de líneas de indiferencia, que sustituye la mensurabilidad de la urgencia de las necesidades por una fijación comprobada experimentalmente de series de posibles combinaciones de bienes por un sistema de índices de la ophélimité …»[6]

Pero como lo comentamos anteriormente, no todos los elementos de semejante teoría fueron desechados, muchos de ellos fueron conservados. «A principios del siglo veinte, la mayoría de los economistas se había percatado de la dificultad que implicaba la utilidad cardinal de Bentham. Por consiguiente, los supuestos de comparabilidad y aditividad fueron desechados de la teoría. Sin embargo un elemento de la utilidad cardinal se mantuvo».

«…podríamos decir que el consumidor obtiene una utilidad marginal decreciente al incrementar su consumo. Este fue el supuesto básico de la utilidad cardinal que fue conservado por los economistas de finales del siglo diecinueve y principios del veinte, a quienes se les conoce como marginalistas. Ellos usaron este supuesto para justificar la pendiente negativa de las curvas de demanda. »[7]

---

[6] ***Stavenhagen Gerhard.*** *Historia de las teorías económicas, p. 251.*
[7] ***Binger y Hoffman.*** *Op Cit, p. 105. El original en inglés.*

1.3 LA UTILIDAD ORDINAL

Desde finales del siglo XIX la mayoría de los economistas analizaba los conceptos propuestos por los fundadores de la teoría marginal. Sin embargo seguían latentes los problemas que traía consigo la teoría de la utilidad cardinal, de la cual no se habían podido desembarazar de una buena vez. En la medida que desarrollaban sus trabajos, se percataron que muchos de los planteamientos de los marginalistas eran válidos pero el problema seguía siendo la mesurabilidad de las utilidades.

Fue en 1907 cuando Vilfrido Pareto publica su Manual de Economía Política, en el cual enuncia su famoso óptimo de bienestar, pero al hacerlo también tomó prestado un elemento analítico fundamental en el desarrollo de la teoría ordinal de la utilidad: las curvas de indiferencia. Decimos que fue prestado dicho elemento analítico debido a que el primero en utilizarlo fue el economista británico Francis Ysidro Edgeworth en 1881 para plantear las utilidades de dos individuos representadas por dos bienes. No obstante Pareto le dio una nueva dimensión al concepto ya que planteó de manera abierta que la utilidad podía ser expuesta a través de la ordenación de opciones que provean mayor utilidad al consumidor en vez de la cardinalidad de dicha utilidad como se venía haciendo.

«Pareto no elaboró un aparato teórico completo basado en su nuevo concepto de la elección, pero le dio un impulso muy importante. Adoptó el concepto de “las curvas de indiferencia” que por primera vez había utilizado el economista inglés F Y Edgeworth en Mathematical Psychics (1881), para demostrar la posibilidad de formular una teoría sólo en base a escalas de preferencias. Pareto toma dos mercancías y muestra como el individuo deseará igualmente numerosas combinaciones de dichas mercancías. Todas estas combinaciones pueden disponerse en una curva de indiferencia a la que se le puede asignar un índice. También pueden disponerse en curvas a las que pueden asignarse índices más altos o más bajos otras combinaciones de las mismas mercancías más o menos deseables. Puede representarse el sistema individual de preferencias respecto a estas dos mercancías en un "mapa de indiferencia" que mostrará, por analogía con un mapa de niveles, los diferentes grados de satisfacción.» [8]

La nueva orientación que los economistas le dieron a la teoría de la utilidad se denominó teoría de la utilidad ordinal. La principal diferencia respecto a la utilidad cardinal era que, en vez de asignarle valores específicos y mesurables a los consumos de los individuos, ahora sería suficiente con ordenar cada uno de ellos respecto a las preferencias de cada consumidor. «En los últimos 40 años el enfoque de la utilidad cardinal para deducir curvas de demanda ha sido reemplazado por un método (que se remonta a Pareto y Edgeworth) que sólo necesita un ordenamiento de preferencias individuales de alternativas… Una función que proporcione únicamente un ordenamiento preferencial de alternativas se denomina una función de utilidad ordinal. Con una función así, conocemos que alternativa se juzga mejor o primera, cuál es la segunda, cuál es la tercera, etc».[9]

A partir de este análisis, la teoría de la utilidad no sólo precisó menos información, sino que surgió desde una concepción menos sicológica y subjetiva, asimismo reconsideró ciertos conceptos que le ocasionaban las más sensibles críticas. «Los economistas se han dado cuenta gradualmente de que lo único importante de la utilidad, en lo que a la elección se refiere, es si una cesta tiene mayor utilidad que otra y no el grado en que una utilidad es mayor que otra… Las preferencias del consumidor son la descripción fundamental para analizar la elección, y la utilidad no es más que una forma de describirlas».[10]

Posteriormente, durante la década de los treinta se dio un nuevo impulso a la teoría de la utilidad ordinal. Al plantear la propuesta de su teoría del valor subjetivo, Hicks y Allen desarrollan un método más sencillo para ordenar las preferencias ya que apelaron a una óptica concerniente con las relaciones de preferencia.

---

[8] **Roll Eric.** *Historia de las doctrinas económicas, p. 405.*
[9] **Asimakopolus A.** *Introducción a la teoría microeconómica, p. 100.*
[10] **Varian Hall R.** *Op Cit, p. 55.*

Tiempo después, Gerard Debreu, quien desarrolló su trabajo principalmente en el área de la teoría del equilibrio general, realizó una aportación fundamental a la teoría de la utilidad.

Desde principios de la década de los cincuentas, conjuntamente con Arrow, desarrolló un trabajo respecto a la existencia de un equilibrio en una economía competitiva. En ese trabajo expuso dos teoremas, el primero se refiere a que si todos los agentes de la economía están en equilibrio para un sistema de precios, esta economía está en situación óptima en sentido Pareto. El segundo explica que bajo ciertas condiciones, cuando una economía se encuentra en situación Pareto óptima, existe un sistema de precios para el que todos los agentes están en equilibrio.

Este trabajo significó un antecedente de uno de sus principales trabajos que divulgaría posteriormente. Fue en 1959 cuando Gerard Debreu publica una de sus obras fundamentales: Teoría del Valor. En esta obra esencial de la economía matemática, Debreu demuestra que los axiomas sobre las preferencias permiten la existencia de la función de utilidad. Con este trabajo, el autor «depuró la Teoría del Consumidor para establecer en cinco supuestos claros y concretos las condiciones que deben satisfacer las preferencias sobre el conjunto de elección para garantizar la existencia de una función de utilidad que represente las preferencias del consumidor sobre el conjunto de elección».[11]

Como hemos expuesto, la teoría de la utilidad ha sido enriquecida con las aportaciones de muchos economistas. Las herramientas matemáticas y analíticas que se le han ido incorporando permiten condensar en un reducido número de supuestos toda una teoría que es la base para buena parte de la economía actual. Sin embargo, a pesar de todos los cambios que ha sufrido, la moderna teoría de la utilidad mantiene la noción original con la que fue expuesta, solo que ahora su poder de explicación es más amplio, su precisión es más aguda y requiere de menos información.

[11] ***López Sánchez María Guadalupe.*** *Una aproximación al conjunto de elección. Tesis. p. 160.*

1.4 MODERNA TEORÍA DE LA UTILIDAD

En la actualidad, la mayoría de los libros de texto de economía abordan la teoría de la utilidad comenzando con el análisis del comportamiento de los consumidores, que también es conocido como la teoría del consumidor.

Generalmente la primera definición que advertimos es la que tiene que ver con todas aquellas mercancías que los individuos consumen, es decir las diferentes cantidades de bienes y servicios que están disponibles en el mercado para que sean adquiridas por los consumidores. Una cantidad específica de bienes y servicios que puede ser consumida por un individuo se denomina cesta de consumo.

En el mercado podemos hallar n cantidad de cestas de consumo disponibles independientemente de que puedan ser adquiridas por un individuo en particular. Es decir, que el hecho de que sean una alternativa disponible no significa que vayan a ser automáticamente adquiridas por los consumidores. Para que esto suceda, deben presentarse dos escenarios: El primero se conoce como el problema económico del consumidor, el cual consiste en que una cesta de consumo puede ser adquirida siempre y cuando su precio sea menor o igual a la restricción presupuestaria de cada individuo. El segundo aspecto es conocido como «el comportamiento racional del consumidor»[12], el cual dice que un individuo siempre elegirá la cesta de consumo que resulte la mejor de las alcanzables. ¿Cuál será el criterio de valoración que utilizará el consumidor para realizar esta tarea? Simplemente se guiará por sus preferencias.

Es posible modelar esta última situación a través del análisis de las preferencias del consumidor. Pero dada la dificultad de trabajar con tantas alternativas (ya que existen n

[12] ***Villar Antonio.*** *Lecciones de Microeconomía, p. 22.*

cestas de consumo) y debido a la ventaja que significa la utilización de gráficos, generalmente se plantea el comportamiento racional del consumidor utilizando únicamente dos bienes. Aunque por supuesto, siempre es posible utilizar el plano bidimensional para representar más de dos bienes. Por ejemplo, si tenemos dos opciones, x_1 y x_2, la primera alternativa, x_1 puede representar solamente un bien mientras que la segunda opción x_2, puede representar todos los demás bienes (que pueden ser 2, 5, 120, etc.) que conforman una cesta de consumo. Sin embargo lo más común es que una cesta de consumo esté compuesta únicamente por 2 bienes. Por lo tanto, siguiendo esta definición, el comportamiento racional del consumidor consiste en elegir las mejores cestas de consumo alcanzables dados dos bienes. En otras palabras, el consumidor ordenará las distintas cestas de consumo de tal manera que pueda determinar cuál es la mejor de acuerdo a sus preferencias.

Existen una serie de axiomas en la teoría de la utilidad que nos sirven para modelar este comportamiento. Son conocidos como los axiomas sobre las preferencias.

Los dos primeros axiomas determinan el comportamiento racional del consumidor. Nos referimos a los de Completitud y Transitividad. Hay otros dos que plantean el supuesto de que los consumidores prefieren cantidades mayores de bienes y servicios a cantidades menores. Estos son los de no saciedad local y monoticidad estricta y son conocidos como axiomas de conveniencia.[13] Finalmente existen dos axiomas que exponen una estructura analítica precisa que determina un tipo específico de preferencias. Estos son los axiomas de continuidad y el de convexidad estricta.

En su conjunto, todos los axiomas son pilares fundamentales en la teoría del consumidor ya que a través de ellos se modelan las curvas de indiferencia regulares, que es uno de los componentes esenciales para entender el comportamiento de los consumidores.

---

[13] ***Mas-Colell Andreu, Whinston Michael D, Green Jerry R**. Microeconomic Theory, p. 42. En este trabajo siempre se considerarán los supuestos más fuertes para definir los axiomas sobre las preferencias.*

1.5 AXIOMAS DE ORDEN

AXIOMA DE COMPLETITUD

El axioma número uno plantea que si «A y B son dos situaciones cualesquiera, el individuo siempre podrá especificar con exactitud una de las tres posibilidades siguientes:»

1. «A es preferible a B».

2. «B es preferible a A» o

3. «A y B son igual de atractivas».

«Por tanto, se supone que la indecisión no paraliza a los individuos; es decir, estos comprenden totalmente las dos alternativas y siempre son capaces de decidir cuál de las dos es la deseable. El supuesto también excluye la posibilidad de que un individuo pueda afirmar que A es preferido que B y también que B es preferido a A»[14]. Por lo tanto cuando aplicamos el axioma de completitud simplemente estamos diciendo que dos cestas de consumo se pueden comparar, o lo que es lo mismo, que un consumidor es capaz de elegir entre dos cestas de consumo.

[14] ***Nicholson Walter.*** *Op.Cit, p. 69. En el último ejemplo que se menciona de este axioma se está utilizando una relación de estricta preferencia el cual se simboliza como* $\succ$. *Esta no se debe confundirse con la relación de indiferencia que sí permite el caso de que A sea al menos tan preferido como B y que B sea al menos tan preferido como A. Teniendo como resultado que A es indiferente a B. En el siguiente capítulo se dará una explicación mucho más profunda del tema.*

AXIOMA DE TRANSITIVIDAD

El axioma de transitividad afirma que si un individuo se enfrenta a tres alternativas: X_1, X_2 y X_3, y decide que X_1 es preferible que X_2, y que X_2 es preferible que X_3, entonces también resolverá que $X_1,$ es preferible que X_3.

Desde el punto de vista del sentido común, el segundo axioma parece obvio, ya que lo único que plantea es que las decisiones de los individuos sean consistentes, debido a que, si se presentará el caso contrario, entonces quedaría en entredicho la lógica del comportamiento de los consumidores.

Por ejemplo: si un individuo tiene que decidir entre tres bienes, el primero es un mango, el segundo es una manzana y el tercero es un plátano. Entonces el consumidor decide que prefiere el mango a la manzana y que prefiere la manzana al plátano. Sin embargo si también decidiera que prefiere el plátano a la manzana, entonces podríamos pensar que el consumidor no tiene perfectamente claro ni las opciones ni las consecuencias de sus decisiones, debido a la incoherencia de estas.

Aunque en la mayoría de los casos las decisiones de los consumidores serán consistentes, también se pueden presentar situaciones como las descritas arriba. Si bien esos casos no son frecuentes, se llegan a presentar sobre todo cuando los individuos no poseen información completa o cuando la unidad de decisión es una familia o un grupo que decide por mayoría. Fuera de estas situaciones, en la mayoría de los casos se observa el axioma de transitividad.

Los dos primeros axiomas que hemos descrito: Completitud y Transitividad son conocidos como los axiomas de orden y son aplicables a cualquier conjunto de elección. Los que veremos enseguida plantean en términos generales que los individuos siempre prefieren elegir en un conjunto de oportunidades que sea lo más grande posible.[15] Estos son los axiomas de no saciedad local y el de monoticidad estricta.

1.6 AXIOMAS DE CONVENIENCIA[16]

AXIOMA DE NO SACIEDAD LOCAL.

Para explicar el axioma de no saciedad local primero tendríamos que revisar la idea que plantea el concepto de no saciedad. El pensamiento que nos viene a la mente cuando consideramos este concepto es la imposibilidad de satisfacer todos los deseos o apetencias que pueda tener un individuo. Asimismo el concepto está estrechamente relacionado con la noción económica de los bienes escasos respecto a las necesidades.

En el contexto de las preferencias, la no saciedad nos dice que dado una cesta de consumo elegida por un individuo, siempre existirá otra preferida. La no saciedad local sólo formaliza el concepto de una manera más precisa: nos dice que independientemente lo cerca que se encuentre la opción elegida por el consumidor, siempre encontraremos una cesta de consumo mejor.

[15] ***Villar Antonio.*** *Op. Cit, p. 31.*
[16] ***Mas-Colell Andreu, Whinston Michael D, Green Jerry R.*** *Op. Cit, p. 42. El término exacto que utiliza el autor para englobar a los axiomas de no saciedad local y monoticidad estricta es el de "Desirability assumptions", cuya traducción al español sería "Supuestos de conveniencia".*

Este axioma está estrechamente vinculado con el siguiente a través de una idea económica bastante común: más siempre es mejor que menos.

AXIOMA DE MONOTICIDAD ESTRICTA.

Este axioma nos plantea en términos intuitivos, como lo comentamos anteriormente, la noción de que consumir más es mejor que consumir menos. Pero para poder emplear esta idea primero necesitamos definir un cierto tipo de mercancía para la cual aplica este concepto.

Los bienes económicos son aquellas mercancías que producen satisfacción al consumidor, en contraposición con los males, que son simplemente aquellas que el consumidor no desea. Por lo tanto cuando abordamos la idea de más es mejor a menos, estamos pensando en bienes económicos, ya que los individuos siempre preferirán consumir mercancías que les generen satisfacción a aquellas que les produzcan lo contrario. En este sentido los individuos siempre se encontrarán en mejor posición al aumentar las cantidades de bienes económicos consumidos.

La aplicación de este axioma la podemos plantear de la siguiente manera: si un individuo está comparando dos cestas de consumo y la primera de ellas contiene cuando menos la misma cantidad de bienes económicos que la segunda, más uno de ellos, entonces debido a la monoticidad estricta, la primera cesta de consumo será preferida a la segunda.

Asimismo debido a este axioma, la única forma para que dos cestas de consumo puedan ser indiferentes es que posean más de algunos bienes y menos de otros, ya que si poseen más de todos los bienes serán estrictamente preferidas y si tienen menos de todos los bienes serán estrictamente no preferidas.

Los últimos dos axiomas que abordaremos son los axiomas de continuidad y el de convexidad estricta, los cuales plantean la estructura analítica para definir a un tipo específico de preferencias.

1.7 AXIOMAS ANALÍTICOS

AXIOMA DE CONTINUIDAD

El axioma de continuidad es un poco menos claro que los demás, pero en general lo que plantea es que cuando un consumidor tiene que elegir entre dos cestas de consumo x_1 y x_2; si el consumidor decide que x_1 es preferido a x_2, entonces todos los puntos que se encuentren convenientemente cerca de x_1 también serán preferidos a x_2.

A simple vista podríamos pensar que este axioma tiene que ver poco con la intuición. De hecho también es visto como un axioma bastante técnico ya que su planteamiento matemático desestima algunos tipos de conductas discontinuas en el límite. Pero en un esfuerzo por vincularlo a una explicación más acorde a la vida cotidiana, podemos decir que este axioma descarta la posibilidad de que un consumidor manifieste cambios bruscos o repentinos en sus preferencias.

AXIOMA DE CONVEXIDAD ESTRICTA.

El último axioma sobre las preferencias plantea una situación bastante común en la vida cotidiana: a la hora de consumir, los individuos prefieren la combinación de bienes a especializarse en uno solo.

Debido a los supuestos que plantea la convexidad estricta, si un consumidor tiene que decidir entre dos cestas de consumo, una vez que haya decidido e independientemente de cuál haya sido el resultado de su decisión, una combinación de ambas siempre será estrictamente preferida a cualquiera de las dos cestas en lo individual, las cuales llamaremos *"extremas".* Este concepto quedará más claro con un ejemplo. Si un individuo va a una cafetería y tiene que decidir entre dos bienes: Chocolate y pastel; independiente de que el consumidor se haya inclinado por cualquiera de las dos opciones, una combinación de ambos bienes será estrictamente preferido a consumir sólo pastel o sólo chocolate.

Si ese ejemplo lo trasladamos al consumo de una cantidad de bienes mayor sucede exactamente lo mismo. Un consumidor siempre preferirá cestas de consumo balanceadas a aquellas en la que haya cierta tipo de especialización por algún bien.

Hemos descrito las principales características de los axiomas sobre las preferencias. La importancia que estos tienen es excepcional para la teoría económica ya que a través de ellos se sintetiza toda la información necesaria para explicar el comportamiento de los consumidores. Asimismo el cumplimiento de los supuestos que plantean dichos axiomas posibilita la aplicación de una herramienta fundamental para el análisis económico: las curvas de indiferencia.

Este instrumento es de enorme importancia para la teoría económica ya que es la representación gráfica de la información contenida en los axiomas sobre las preferencias.

1.8 CURVAS DE INDIFERENCIA

La utilización de las curvas de indiferencia ha sido fundamental en la teoría económica ya que plasman gráficamente toda la información que representan los axiomas sobre las preferencias. Una definición formal de este concepto es el siguiente: las curvas de indiferencia son una representación geométrica de los puntos que simbolizan la combinación de bienes (o canastas de bienes)[17] frente a los cuales el consumidor se mantiene indiferente.

Como hemos comentado con anterioridad, generalmente se utilizan solo dos bienes para plantear el comportamiento del consumidor. Entonces si utilizamos sólo dos bienes en la definición de las curvas de indiferencia tenemos lo siguiente: las curvas de indiferencia simbolizan un nivel de satisfacción constante que adquiere un consumidor al elegir una cesta de consumo compuesta por dos bienes.

Este tipo de curvas tienen las siguientes particularidades:

1. Las combinaciones sobre las curvas de indiferencia más alejadas del origen son preferidas a la de las curvas de indiferencia más cercanas al origen.

[17] ***Miller Le Roy.*** *Microeconomía, p. 65*

2. Hay una curva de indiferencia que pasa por cada posible combinación de bienes

3. Las curvas de indiferencia no se pueden cortar.

4. Las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa.

5. Las curvas de indiferencia tienen una forma curvada hacia el origen.

Estas cinco características son la consecuencia de la aplicación de los seis axiomas que hemos descrito. El resultado que obtenemos de todo el proceso es una curva que asume la forma de hipérbolas equiláteras que son las que conocemos como curvas de indiferencia regulares.

Si las curvas de indiferencia representan gráficamente a las preferencias del consumidor, existe una forma de representarlas numéricamente. ¿Por qué quisiéramos representarlas de esa forma? Si bien es relativamente sencillo estudiar la teoría del consumidor desde la óptica de las preferencias, cuando el análisis avanza, generalmente se requiere hacer cálculos muy elaborados, por lo tanto es preciso valerse de un instrumento que facilite el trabajo. El instrumento que se utiliza para fungir esta labor son las funciones de utilidad, las cuales "asignan un número a todas las cestas de consumo posibles de tal manera que las que se prefieran tengan un número más alto que las que no se prefieran".[18]

Sin embargo nuestro estudio se limitará al análisis de las curvas de indiferencia desde el enfoque de las preferencias. Por lo tanto es válido hacernos las siguientes preguntas: ¿Por qué la absoluta mayoría de las curvas de indiferencia que vemos en los libros de

---

[18] ***Varian Hal R**. Op. Cit, p. 55.*

texto asumen una forma regular? ¿Qué hay de especial en esas curvas para que sean tan comunes? Y la más importante: ¿Qué es lo que propicia que las curvas asuman esa forma?

La información de los siguientes capítulos está orientada a responder estas interrogantes. En el primer capítulo planteamos la línea general de nuestro trabajo, presentando los conceptos de forma intuitiva para tener una visión global del problema. En las siguientes páginas revisaremos de manera profunda todos los supuestos sobre las preferencias, tanto en el ámbito matemático como en lo que respecta a la teoría económica. A partir de este análisis podremos identificar y comprender la evolución que sufren las preferencias de los consumidores en la medida en que aplicamos cada uno de los condicionantes que plantean los seis axiomas. Una vez que hayamos estudiado este proceso, entenderemos que las curvas de indiferencia regulares están condicionadas por la información que contenida en esos axiomas.

CAPÍTULO DOS

AXIOMAS DE ORDEN

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior comenzamos con una breve introducción a la historia de la Teoría de la Utilidad en la cual se definieron conceptos importantes que serán utilizados a lo largo de este capítulo.

A partir de esta exposición se introdujo el tema de los axiomas sobre las preferencias, el cual se explicó brevemente, ya que en los siguientes capítulos se haría un acercamiento mucho más profunda del mismo.

En este apartado expondremos de manera más concienzuda los dos primeros axiomas: completitud y transitividad. Iniciaremos con una revisión de las matemáticas fundamentales para poder abordar estos dos axiomas.

En primer lugar definiremos una serie de conceptos que serán de suma importancia tanto en este capítulo como en los siguientes, estos son: par ordenado, producto cartesiano, relación binaria y dominio e imagen de la relación binaria. Posteriormente abordaremos el tema de relaciones definidas en un conjunto y expondremos algunas de las propiedades que pueden asumir estas relaciones. Una vez que abordemos dichas propiedades, proseguiremos a definir dos conceptos que serán esenciales en el desarrollo de este capítulo, nos referimos a las clases de equivalencia y a las relaciones de orden. De este último se desprende la definición de preorden completo, uno de los conceptos nodales de este capítulo. La última parte de la revisión matemática es la de los elementos distinguidos de un conjunto ordenado, la cual nos servirá para los subsecuentes capítulos.

Una vez que hayamos revisado las definiciones matemáticas, procederemos a analizar el concepto de relaciones de preferencia, el cual es básico para la comprensión este capítulo ya que es un elemento esencial para entender los dos primeros axiomas sobre las preferencias. A través del análisis de este concepto llegamos a la conclusión de que una relación de preferencia no es más que un tipo especial de relación binaria de la cual se desprenden otros dos tipos de relaciones, la relación de indiferencia y la relación estricta de preferencia.

Posteriormente plantearemos una explicación de los primeros dos axiomas a través de la vinculación de los planteamientos de carácter intuitivo que expusimos en el primer capítulo junto con el rigor de los conceptos matemáticos que desarrollaremos en la primera parte del segundo capítulo. De esta manera se explica por qué estos dos axiomas representan las preferencias racionales del consumidor. Más adelante se profundizará tanto en la exposición de la relación de preferencia $\succsim$ como en la relación de preferencia estricta $\succ$, finalmente se explicara por qué esta última constituye un orden estricto.

2.2 LAS RELACIONES BINARIAS

En muchas ocasiones en las matemáticas se presenta la necesidad práctica de vincular a los elementos de dos conjuntos no necesariamente distintos. Existe una herramienta conceptual que nos permite llevar a cabo esta tarea con la formalidad necesaria, nos referimos a las Relaciones Binarias[1], las cuales juegan un papel de primera importancia en las matemáticas modernas.

Antes de iniciar el estudio de las Relaciones Binarias necesitamos aclarar una serie de conceptos que nos ayudarán a comprender las definiciones que desarrollaremos durante el presente capítulo. Los primeros conceptos que abordaremos serán el de Par Ordenado y el de Producto Cartesiano. Particularmente este último, además de ser otro elemento fundamental de las matemáticas, es esencial para entender uno de los temas más importantes del presente capítulo ya que las Relaciones Binarias son un subconjunto del Producto Cartesiano.

Par Ordenado.

Definición: Sean a, b, m, n, tales que $(a, b) = (m, n)$ si y sólo si $a = m$ y $b = n$. Entonces (a, b) es el Par Ordenado de a y de b.

Es de notarse que en esta definición es sumamente importante el orden en el que se presentan los elementos ya que si $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

[1] *Se toma como referencia base para el desarrollo de toda la parte matemática de este capítulo a:* ***Rojo Armando**. Algebra I. Capítulo 3.*

Ya que hemos definido a un Par Ordenado, ahora abordaremos otro importante concepto: el Producto Cartesiano.

Producto Cartesiano.

Definición: Dados dos conjuntos no vacíos A, B, se llama Producto Cartesiano de A por B, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde la primera componente a pertenece al conjunto A y la segunda componente b pertenece al conjunto B. Aquí nuevamente remarcamos la relevancia de respetar el orden. El símbolo que se utiliza es $A\,X\,B$ y se lee, A por B. Es decir:

$$A\,X\,B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$[2]

Una vez definidos tanto Par Ordenado como Producto Cartesiano ahora pasamos de lleno al concepto fundamental de este capítulo.

Relación Binaria.

Definición: Sean A y B dos conjuntos y $P(x, y)$ una propiedad relativa a los elementos $x \in A$ y $y \in B$, en ese orden. Entonces una relación binaria es definida como el conjunto R de los pares ordenados $(a, b) \in A\,X\,B$ donde la proposición $P(a, b)$ es verdadera.[3]

De esta definición se desprenden a su vez otras dos que podemos expresar de la siguiente forma.

[2] ***Bartle, Robert G.*** *Introducción al análisis Matemático de una variable, p. 5.*
[3] ***López Sánchez María Guadalupe.*** *Una aproximación al conjunto de elección. Tesis, p. 21.*

Definición: El par ordenado (x, y) pertenece a la Relación si y solo si la proposición $P(x, y)$ es verdadera.

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow P(x, y) \text{ es Verdadera.}$$

Definición: R es una relación entre los conjuntos A y B sí y sólo sí la Relación es un subconjunto del Producto Cartesiano, es decir:

$$R \text{ es una relación entre } A \text{ y } B \Leftrightarrow R \subset A\,X\,B$$

Ejemplo:

Si tenemos dos conjuntos A y B, donde el conjunto A está compuesto por animales identificados por los números $2, 4, 6, 8$ y B es el conjunto de alimentos identificados por los números $1, 3, 5, 7$. Es decir tenemos los conjuntos:

$$A = \{2,4,6,8\} \qquad \text{y} \qquad B = \{1,3,5,7\}$$

Donde los elementos del conjunto A están relacionados con los elementos del conjunto B por medio de la propiedad $P(x, y)$: x se alimenta de y.

En este caso el conjunto de los pares ordenados es el siguiente.

$$R = \{(4,1), (4,3), (6,3), (8,1)\}$$

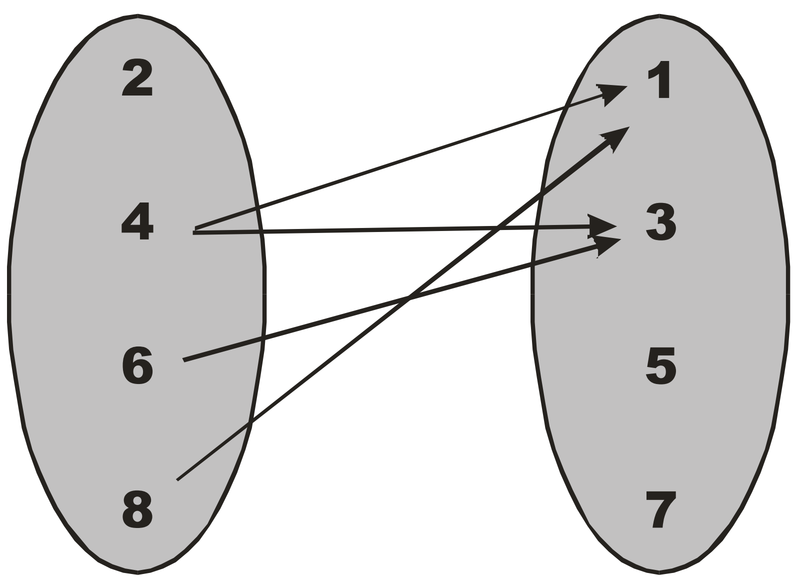
Existen varias formas de representar a las relaciones. Para el caso de conjuntos finitos se plantean las siguientes.

i. Por medio de diagramas de Venn.

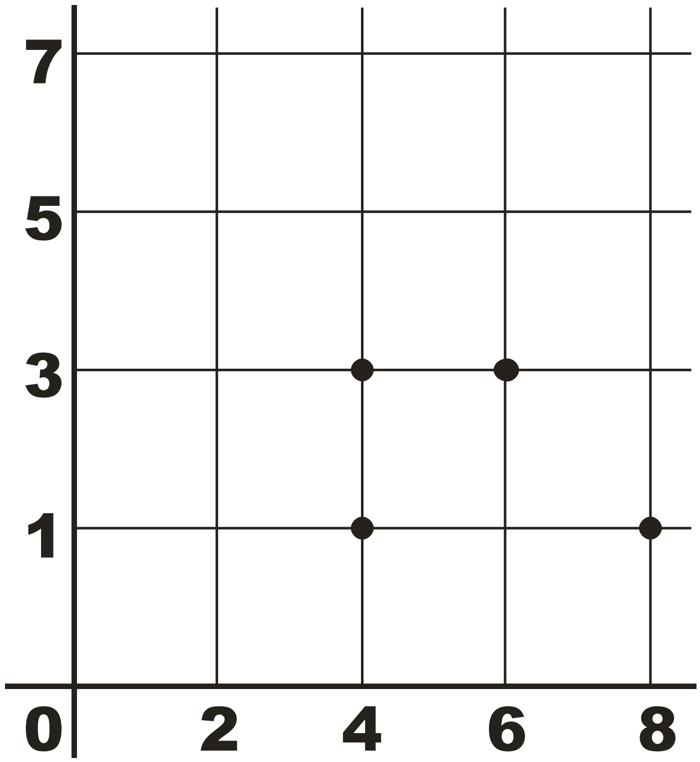
ii. Por medio de un plano cartesiano, donde el eje de las abscisas son los elementos del primer conjunto y el eje de las ordenadas son los elementos del segundo conjunto.

iii. Mediante una matriz. Para esta representación la primer columna son los elementos del primer conjunto y el primer renglón los del segundo; la matriz se conforma por 1 y 0 según el par ordenado pertenezca o no a la relación.

La representación del ejemplo anterior es:



Diagramas de Venn.



Representación en el Plano Cartesiano.

R	1	3	5	7
2	0	0	0	0
4	1	1	0	0
6	0	1	0	0
8	1	0	0	0

Representación en una Matriz.

Dominio Imagen y Relación Inversa

Si tenemos una Relación R entre los conjuntos A y B definiremos los siguientes conceptos:

Definición: Si $(x, y) \in R$ decimos que y es una imagen de x a través de R y que x es una preimagen de y por R.

Dominio de $\boldsymbol{R}$.

Definición: El dominio de R es la totalidad de los elementos de A que admiten imagen en B. Es decir:

$$D_R = \{x \in A/(x, y) \in R\}$$

Imagen de $\boldsymbol{R}$.

Definición: La imagen de R es el conjunto de los elementos de B que admiten un antecedente en A. Se puede expresar como:

$$I_R = \{y \in B/(x, y) \in R\}$$

Relación Inversa.

Definición: Una Relación Inversa de R es el subconjunto de $B\,X\,A$ el cual está definido por:

$$R^{-1} = \{(y,x)/(x,y) \in R\}$$

Ejemplo:

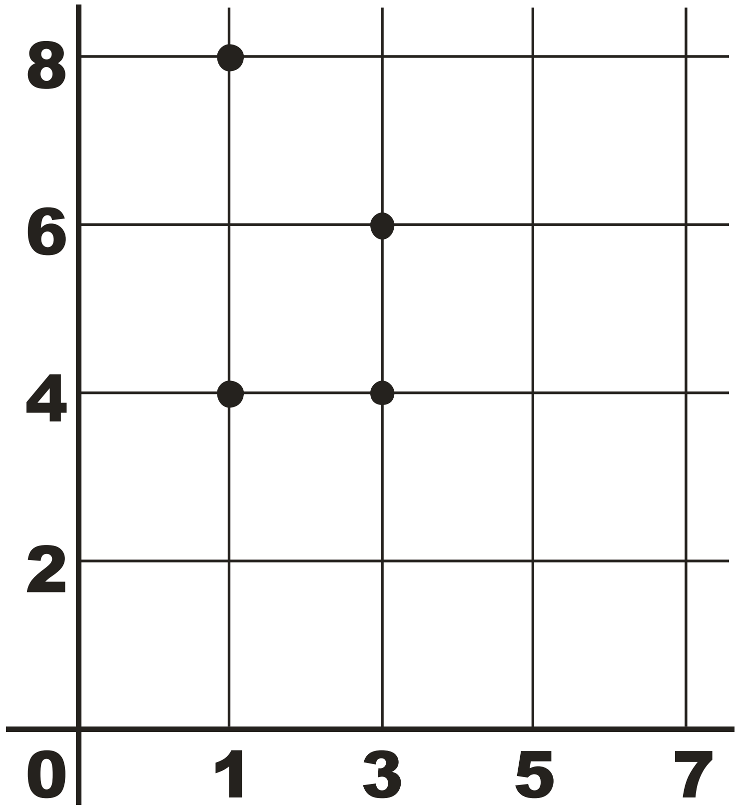
Retomando el ejemplo que vimos anteriormente donde teníamos los siguientes conjuntos:

$A = \{2,4,6,8\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$

Si aplicamos el concepto de Relación Inversa entonces tendríamos los siguientes pares ordenados:

$$R = \{(1,4),(3,4),(3,6),(1,8)\}$$

Ahora si lo representamos por medio de un Plano Cartesiano:



Representación en el plano de una relación inversa.

Relaciones definidas sobre un conjunto

Si tenemos los conjuntos A y B y una relación R entre ambos conjuntos, si además tenemos que $A = B$, entonces podemos decir que la relación R está definida en A y es a la vez un subconjunto de $A^2 = A\,X\,A$. En tal caso tenemos la siguiente definición:

Relación definida sobre un conjunto.

Definición: R es una relación definida en A, sí y sólo sí $R \subset A^2$.

Como también el conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo A^2 son subconjuntos de A^2, entonces estos dos también son relaciones definidas para cualquier conjunto A.

Si A tiene n elementos, entonces A^2 tiene n^2 elementos y el conjunto de partes de A^2 tiene $2^{(n^2)}$ elementos, es decir, existen $2^{(n^2)}$ subconjuntos de A^2 o relaciones en A.

2.3 PROPIEDADES QUE PUEDEN ASUMIR LAS RELACIONES DEFINIDAS SOBRE UN CONJUNTO

Si R es una relación definida en A, esto es, $R \subset A^2$. Entonces la relación R puede asumir cualquiera de las siguientes propiedades:

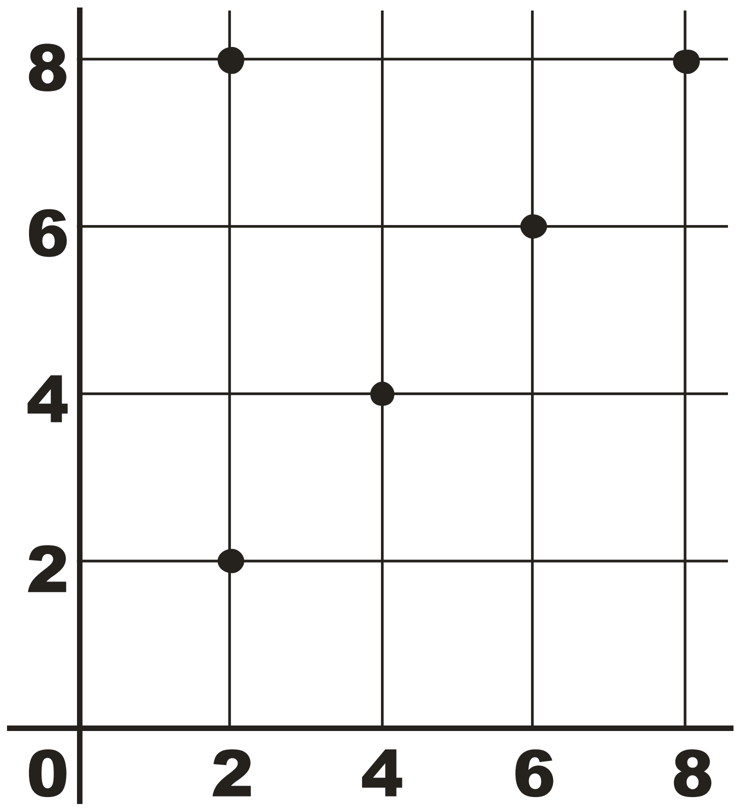
Reflexividad:

$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \forall\, x \in A \Longrightarrow (x, x) \in R$$

La característica fundamental de la Reflexividad es que todo elemento de A forma un par consigo mismo y el resultado pertenece a la relación. El ejemplo gráfico es la diagonal de A^2 donde dicha diagonal está formada por pares de componentes iguales y dicha diagonal está contenida en la Relación. Es decir:

$$D = \{(x,x)/x \in A\} \text{ y } R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow D \subset R$$

Ejemplo 1[4]: Sea A un conjunto tal que $A = \{2,4,6,8\}$, del cual se forman las siguientes relaciones: $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,8)\}$. Al graficar las relaciones definidas sobre A obtenemos una diagonal que está contenida en la relación, por lo tanto tenemos que R es una relación reflexiva.



Representación en el plano de una relación reflexiva.

[4] *Se utilizará el conjunto usado en el Ejemplo 1 para ilustrar los ejemplos de las demás Relaciones Definidas en un Conjunto.*

No reflexividad:

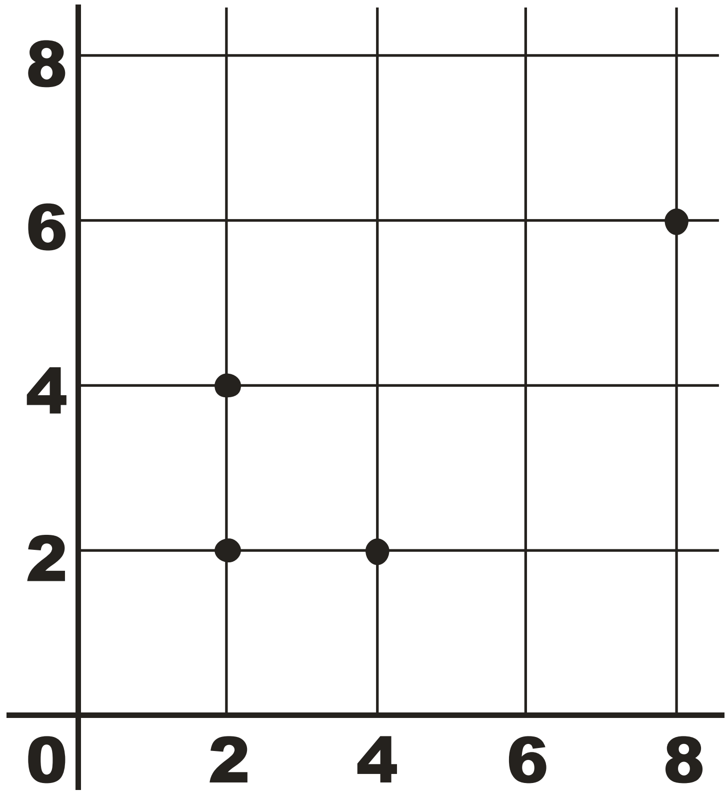
$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow \exists\, x \,/\, x \in A \ \wedge \ (x,x) \notin R$$

La no reflexividad consiste en la negación de la reflexividad. Esto significa que en la no reflexividad existe al menos un elemento de A el cual no está relacionado consigo mismo. Si esta propiedad la graficamos entonces tendríamos que la diagonal de A^2 no está contenida en la relación.

$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow R \cap D \neq D$$

Ejemplo 2: Si retomamos el conjunto de nuestro ejemplo anterior pero ahora definimos nuevas relaciones a partir de ese conjunto. $R = \{(2,2),(2,4),(4,2),(8,6)\}$. Entonces tenemos que:

$$R \text{ es no reflexiva ya que } 4 \in A \ \wedge \ (4,4) \notin R$$



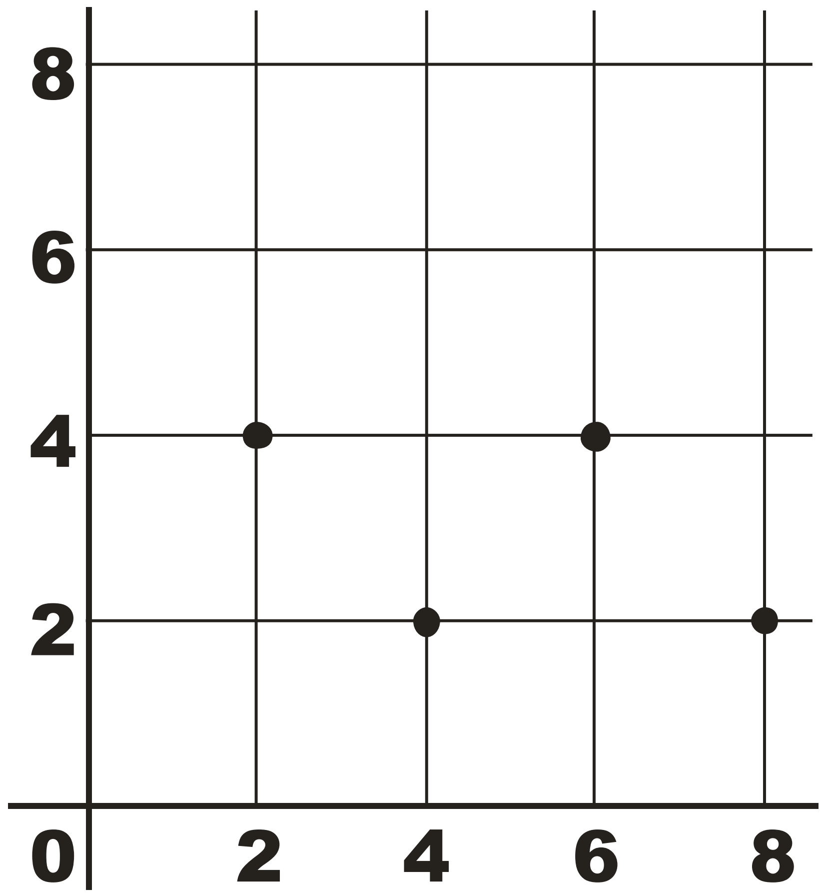
Representación en el plano de una relación no reflexiva.

Arreflexividad:

R es arreflexiva $\Leftrightarrow \forall\ x/x\ \in A \Longrightarrow (x,x) \notin R$

Esto significa que ninguna pareja en A^2 son elementos relacionados consigo mismos, lo que implica que ningún elemento de la diagonal A^2 pertenece a la relación. Es decir: R es arreflexiva $\Leftrightarrow R \cap D = \emptyset$

Ejemplo 3: Del Ejemplo 1 con otras nuevas relaciones tenemos lo siguiente: $R = \{(2,4),(4,2),(6,4),(8,2)\}$. Donde tenemos que ningún elemento forma pareja consigo mismo en la relación, por lo tanto R es arreflexiva.



Representación en el plano de una relación arreflexiva.

Simetría:

R es simétrica$\Leftrightarrow \forall\, x\ \forall\, y \in A/(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$

Esto significa que si un par ordenado pertenece a la relación entonces si invertimos los componentes, el par ordenado resultante también pertenece a la relación, lo que tiene como resultado que el gráfico en el plano cartesiano es simétrico respecto a la diagonal de A^2.

Ejemplo 4: Del Ejemplo 1 y determinando nuevas relaciones tenemos: $S = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$, entonces S es simétrica ya que al permutar cada uno de los componentes, los pares ordenados resultantes siguen perteneciendo a la relación.

No simetría:

$$R \text{ es no simétrica} \Leftrightarrow \exists x\ \exists y \ / \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$$

La no simetría es simplemente la negación de la simetría, sin embargo no impide que dos pares de componentes permutados pertenezcan a la relación, pero al mismo tiempo precisa que si exista un par en la relación y que el par resultante de la permutación de sus componentes no sea parte de la relación.

Ejemplo 5: Del Ejemplo 1 con nuevas relaciones tenemos: $N = \{(2,4), (4,2), (6,8)\}$. Entonces tenemos que N es No Simétrica ya que: $(6,8) \in N \wedge (8,6) \notin N$.

Asimetría:

$$R \text{ es asimétrica} \Leftrightarrow \forall x\ \forall y \ / \ (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$$

Lo que requiere esta definición es que si un par pertenece a una relación, entonces el par resultante de realizar la permutación de sus componentes no pertenece a la relación.

Ejemplo 6: Del Ejemplo 1 con nuevas relaciones tenemos $A = \{(2,4),(4,6),(2,6)\}$. Por tanto el resultado es que A es Asimétrica ya que ninguno de los pares que pertenece a la relación es una permutación de ellos mismos.

Antisimetría:

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow \forall x\ \forall y/\ (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y$$

En este caso, si tenemos un par ordenado (x,y) y lo permutamos (y,x) y el resultado sigue perteneciendo a la relación entonces tenemos que el componente x es igual al componente y.

Un buen ejemplo de antisimetría es el Ejemplo 1, ya que tenemos los pares $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,8)\}$, de los cuales, los cuatro primeros al permutarlos siguen perteneciendo a la relación por lo que tenemos que para los cuatro primeros se cumple que $x = y$. Por otro lado, un ejemplo de cuando no se cumple la antisimetría es el ejemplo 2, donde tenemos las siguientes relaciones $R = \{(2,2),(2,4),(4,2),(8,6)\}$, pero observamos que para el segundo y tercer par ordenado la proposición $x = y$ es falsa ya que:

$$(2,4) \in R \wedge (4,2) \in R \Longrightarrow 2 \neq 4$$

Transitividad:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \forall\ x\ \forall\ y\ \forall z\ /\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$$

La transitividad es una de las características más importantes que pueden asumir las relaciones. Esto significa que si un componente está relacionado con otro (incluso puede ser que sea el mismo) y este segundo componente a su vez está relacionado con un tercero, entonces como consecuencia tenemos que el primer componente está relacionado con el tercero. Podemos encontrar un ejemplo de transitividad en el Ejemplo 6 de Asimetría, donde tenemos los siguientes pares ordenados: $A = \{(2,4), (4,6), (2,6)\}$. Aquí podemos comprobar que

$$(2,4) \in A \wedge (4,6) \in A \Longrightarrow (2,6) \in A$$

No transitividad:

$$R \text{ es no transitiva} \Longleftrightarrow \exists\, x\, \exists\, y\, \exists z \,/\, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \notin R$$

La no transitividad es simplemente la negación de la transitividad, por lo tanto niega la sucesión lógica entre x, y y z. Ejemplo: Si tenemos un conjunto con los siguientes pares $V = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$. Observamos enseguida que esa relación no es transitiva ya que $(1,3) \in V \wedge (3,1) \in V \wedge (1,1) \notin V$.

Atransitividad:

$$R \text{ es atransitiva} \Longleftrightarrow \forall\, x\, \forall\, y\, \forall z \,/\, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \notin R$$

La diferencia que existe entre No transitividad y Atransitividad es que mientras que para la primera dentro de la relación pueden existir otros pares ordenados que no asuman la propiedad de la No transitividad, para la Atransitividad todos los pares de la relación deben cumplir con esta propiedad. Ejemplo: Si tenemos la siguiente relación $X = \{(1,2), (2,3)\}$. entonces X es Atransitiva porque

$$(1,2) \in X \wedge (2,3) \in X \Longrightarrow (1,3) \notin X$$

2.4 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una vez que hemos visto las propiedades que pueden asumir las relaciones sobre un conjunto, ahora revisaremos un tipo especial de relación binaria que es fundamental no sólo para el tema de las curvas de indiferencia sino para el álgebra en su conjunto, nos referimos a las Relaciones de Equivalencia, las cuales son representadas por medio del símbolo $\sim$.

Relación de Equivalencia.

Definición: Sea una relación R la cual es subconjunto del producto cartesiano A^2, es decir: $R \subset A^2$. La relación R es denominada Relación de Equivalencia si y sólo si satisfacen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

i. Reflexividad: Todo elemento de A es equivalente a sí mismo.

$$\forall x \;/\; x \in A \Longrightarrow \; x \sim x$$

ii. Simetría: Si un elemento es equivalente a otro entonces éste es equivalente al primero.

$$\forall\, x \;\forall\, y \;/\; x \sim y \Longrightarrow y \sim x$$

iii. Transitividad: Si un elemento es equivalente a otro y este es equivalente a un tercero, entonces el primero es equivalente al tercero.

$$\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z \,/\, x{\sim}y \wedge y{\sim}z \Longrightarrow x{\sim}z$$

A partir de esto se deduce que todo par que pertenezca a una relación de equivalencia se le llama equivalente y para representar dicha relación se utiliza el símbolo $\sim$. En el caso de una relación con el par ordenado $(a\,,b)$, si tenemos que $a \sim b$, la cual se lee a es equivalente a b, que significa que el par ordenado $(a\,,b)$ pertenece a la relación de equivalencia.

Ejemplo: En el conjunto $A = \{1,2,3\}$, tenemos la siguiente relación. $\sim\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$.

La reflexividad se identifica enseguida ya que los siguientes casos son verdaderos:

$$1{\sim}1{:}\,V;\;\; 2{\sim}2{:}\,V;\;\; 3{\sim}3{:}\,V$$

En el caso de la simetría tenemos lo siguiente:

$$1{\sim}2 \Longrightarrow 2{\sim}1\; es\; V$$

Finalmente la transitividad queda demostrada con el siguiente ejemplo:

$$1{\sim}1 \wedge 1 \sim 2 \Longrightarrow 1 \sim 2.$$

2.5 CLASES DE EQUIVALENCIA

Ahora definiremos un tipo especial de conjunto que nos servirá para determinar todos los elementos de un conjunto A que son equivalentes a un elemento dado. Dicho conjunto está contenido en A, por lo tanto el conjunto A debe ser distinto del vacío. El conjunto del que hablamos se denomina Clase de equivalencia.

Clase de equivalencia.

Definición: La clase de equivalencia del elemento $a \in A$ es el conjunto de todos los elementos de A equivalentes a a.

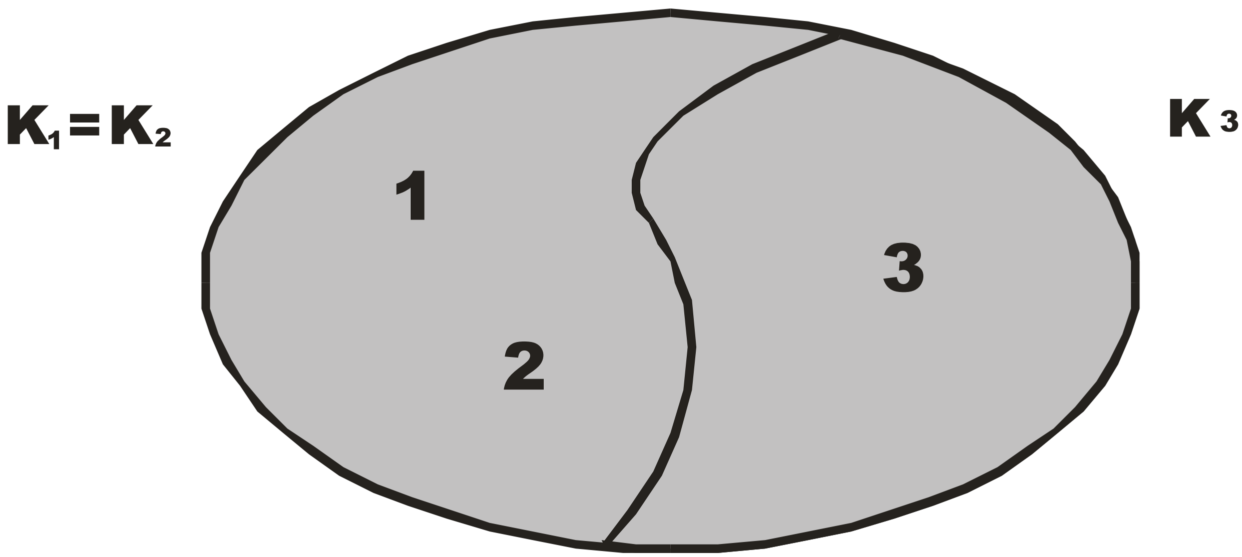
$$K_a = \{x \in A \;/\; x \sim a\}$$

Ejemplo: Si retomamos el ejemplo anterior con un conjunto que está compuesto por $A = \{1,2,3\}$, cuya relación de equivalencia está representada por $\sim\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. Entonces observamos que hay dos clases de equivalencia que son subconjuntos del conjunto A.

$$\boldsymbol{K_1 = \{1, 2\} = K_2}$$

$$\boldsymbol{K_3 = \{3\}}$$

Conjunto A



Esto es debido a que en la relación $\sim\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. podemos identificar las siguientes proposiciones respecto a los elementos 1 y 2:

$$1\sim 1: V; \quad 2\sim 2: V; \quad 1\sim 2: V; \quad 2\sim 1: V$$

$$1\sim 2 \Rightarrow 2\sim 1 \; es \; V$$

$$1\sim 1 \wedge 1\sim 2 \Rightarrow 1\sim 2 : V$$

Por lo tanto los elementos 1 y 2 son equivalentes y forman parte de la misma clase de equivalencia.

Por otro lado tenemos que para el elemento 3 sólo se cumple la siguiente proposición:

$$3 \sim 3 : V$$

Por lo tanto en el conjunto A, 3 es equivalente sólo consigo mismo, entonces forma una clase de equivalencia aparte.

Hasta el momento definimos lo que son las clases de equivalencia del conjunto A, pero en cierta forma lo hemos hecho de manera individual; es decir, identificando a cada clase de equivalencia una por una. Pero también podemos conceptualizar al conjunto que está conformado por todas las clases de equivalencia de A. Por ejemplo podemos elegir un único elemento de cada clase de equivalencia para que "represente" a su clase en un conjunto de Índices (I). Una vez que tenemos a todos estos "representantes" de las clases de equivalencia en el conjunto de Índices podemos definir al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de A, el cual recibe el nombre de Conjunto Cociente de A dado por la relación de equivalencia.

Conjunto Cociente de A dado por la relación de equivalencia.

Definición: Sea A un conjunto distinto del vacío, sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A, sea K_u la clase de equivalencia de $u \in A$ y sea I un Índice conformado por un representante de cada clase de equivalencia. Entonces el Conjunto Cociente de A dado por la relación de equivalencia queda definido como: $\frac{A}{\sim} = \{K_u \,/\, u \in I\}$.

El Cociente de A dado por la relación de equivalencia es considerado una partición del conjunto A, ya que los elementos que lo constituyen, que son las clases de equivalencia, son no vacías disjuntas de a pares (dos a dos) y su unión es el conjunto A.

Definición:

El conjunto $\frac{A}{\sim} = \{K_u \ / \ u \in A\}$ es una partición de A si y sólo si:

$$i) \ \forall u \ / \ u \in I \Longrightarrow K_u \neq \phi$$

$$ii) \ u \neq v \Longrightarrow K_u \cap K_v = \phi$$

$$iii) \ \forall a \in A, \exists u \in I \ / \ a \in K_u$$

En el primer caso significa que para todo elemento u, el cual pertenezca al conjunto de Índices, entonces significa que la clase de equivalencia K_u (la clase de equivalencia de la cual u es representante) es no vacía. En el segundo significa que si dos elementos del conjunto A no son equivalentes entonces la intersección entre sus respectivas clases de equivalencia es el conjunto vacío, o en palabras más sencillas, dos elementos del conjunto A son equivalentes sí y sólo sí pertenecen a la misma clase. Y el último implica que para todo elemento a que pertenezca al conjunto A existe un elemento u que pertenece al conjunto de índices tal que el primer elemento a pertenece a la clase de equivalencia K_u.

Ahora abordaremos el Teorema fundamental de las relaciones de equivalencia definidas en un conjunto no vacío, el cual nos permitirá verificar que toda relación de equivalencia definida en un conjunto no vacío determina su partición en clases de equivalencia.

Si ~ es una relación de equivalencia definida en el conjunto A, el cual es distinto del vacío $A \neq \emptyset$ entonces existe un subconjunto $I \subset A$ tal que cualquiera que sea u en I, existe $K_u \subset A$, de modo que se verifican las siguientes proposiciones.

$$i)\ u \in I \Longrightarrow K_u \neq \emptyset$$

$$ii)\ a{\sim}a' \ \Leftrightarrow a\ y\ a' \text{ pertenecen a la misma } K_u$$

$$iii)\ K_u \cap K_v \neq \emptyset \ \Longrightarrow K_u = K_v$$

$$iv)\ u \neq v \Longrightarrow K_u \cap K_v = \emptyset$$

$$v)\ \forall a \in A, \exists u \in I \ / \ a \in K_u$$

Lo que nos dicen los postulados de este teorema es que todo elemento del conjunto de Índices le corresponde una clase la cual es no vacía, en el segundo caso tenemos que dos elementos del conjunto A son equivalentes sí y sólo sí pertenecen a la misma clase, el tercero nos dice que si dos clases son disjuntas (es decir su conjunción es distinta al conjunto vacío), entonces son la misma clase, para el cuarto tenemos que elementos distintos del conjunto de Índices determinan clases disjuntas. Y finalmente, el último nos dice que todo elemento del conjunto A pertenece a una clase de equivalencia.

2.6 RELACIONES DE ORDEN

Ahora abordaremos un tema esencial el cual es bastante común no sólo para las matemáticas sino incluso en la vida cotidiana.

Cuando ordenamos a los elementos de un conjunto estamos aplicando un tipo específico de relación binaria. Esta relación es conocida como relación de orden u ordenación. De todas las propiedades que asumen este tipo de relaciones, la más importante es la transitividad, ya que siempre está presente en una relación de orden. Las demás pueden o no estar presentes, y de esto dependerá la forma en que serán catalogadas.

La primera definición que abordaremos será la de un Conjunto Ordenado y a partir de ella se desarrollarán los siguientes conceptos.

Conjunto Ordenado.

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación binaria sobre A (A, R). El conjunto A será un conjunto ordenado si y sólo si R satisface las siguientes propiedades: reflexividad, antisimetría y transitividad.

$$i)\ Es\ reflexiva\ si\ \forall a \in A \Longrightarrow (a,a) \in R$$

$$ii)\ Es\ antisimétrica\ si\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Longrightarrow a = b, \forall\ a,b \in A$$

$$iii)\ Es\ transitiva\ si\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R, \forall\ a,b,c \in A$$

Preorden.

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación binaria sobre A: (A,R). Entonces tenemos que R es un preorden sobre A si asume las propiedades de reflexividad y transitividad:

$$i)\ \ Es\ reflexiva\ si\ \forall a \in A\ \Longrightarrow (a,a) \in R$$

$$ii)\ \ Es\ transitiva\ si\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R, \forall\ a,b,c \in A$$

Ahora abordaremos un tema que es de suma importancia para nuestro estudio. Definiremos la propiedad que garantiza que los elementos de un conjunto puedan ser comparables. Esta propiedad es la linealidad o completitud y se define de la siguiente manera[5]:

Completitud.

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación binaria sobre A**.** La relación asume la linealidad o completitud sí y sólo sí:

[5] *Ver referencia en:* ***LÓPEZ SÁNCHEZ MARÍA GUADALUPE****. Op. Cit, p. 41.*

$$\forall\, a, b \in A \; donde \; a \neq b \implies (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

Preorden completo.

Definición: Sea A un conjunto preordenado, es decir, se verifica en A una relación binaria R que es Reflexiva y Transitiva. Si además, la relación cumple con ser completa entonces decimos que R es un preorden completo sobre A [6].

$$i) \; Es \; reflexiva \; si \; \forall a \in A \implies (a, a) \in R$$

$$ii) \; Es \; transitiva \; si \; (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R, \forall\, a, b, c \in A$$

$$iii) \; Es \; completa \; si \; \forall\, a, b \in A \; donde \; a \neq b \implies (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

Por otro lado si tenemos una relación de orden en un conjunto A y además tenemos elementos que son incomparables entonces estamos hablando de un Orden Parcial, es decir:

$$\exists a, \exists b \; / \; (a, b) \notin R \wedge \; (b, a) \notin R$$

[6] *Para referencia sobre Preorden y Preorden completo ver:* ***ELVIO ACCINELLI****. Elementos de topología y de la teoría de conjuntos en economía, p. 6.*

Orden Estricto.

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación binaria sobre A. R es una relación de orden estricto si y solo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

a) Arreflexividad: $a \in A \Longrightarrow (a,a) \notin R$

b) Asimetría: $(a,b) \in R \Longrightarrow (b,a) \notin R$

c) Transitividad: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R$

El signo de preceder

Sea A un conjunto y R una relación binaria definida en el conjunto A. Anteriormente se había expresado de esta manera $(a,b) \in R$ cuando dos elementos del conjunto A estaban identificados con la relación binaria R. Sin embargo existe un signo que expresa esa misma característica de una forma más breve, se trata de $\gtrsim$, que se identifica como el signo de preceder. En el anterior caso podemos expresarlo como $a \gtrsim b$ y se lee como a precede a b. (De manera alterna también se puede encontrar como $\succ$).

2.7 ELEMENTOS DISTINGUIDOS EN UN CONJUNTO ORDENADO

Sea A un conjunto ordenado y sea $\succ$ una relación de orden. En los conjuntos ordenados existen algunos elementos que se distinguen del resto debido a las características que poseen. A continuación los definiremos.

i. **Primer elemento:** El elemento $a \in A$ se llama primer elemento si y sólo si precede a todos los demás. $a \in A\ es\ el\ primer\ elemento \Leftrightarrow x \in A \Longrightarrow a \prec x$.

ii. **Último elemento:** El elemento $b \in A$ se llama último elemento si y sólo si todo elemento de A precede a b. $b \in A\ es\ el\ \text{ú}ltimo\ elemento \Leftrightarrow x \in A \Longrightarrow x \prec b$.

Se debe aclarar que no es necesario que todo conjunto ordenado tenga primer o último elemento ya que puede ocurrir que no posea ninguno o que sólo tenga primero y no último o viceversa.

iii. **Elementos minimales:** Sea $m \in A$ es un elemento minimal si y sólo si no existe un elemento distinto que le preceda: $m \in A\ es\ minimal \Leftrightarrow \forall x \in A \,/\, x \prec m \Longrightarrow m = x$.

iv. **Elementos maximales:** Sea $a \in A$ es un elemento maximal si y sólo si no existe en A un elemento distinto que lo siga: $n \in A\ es\ maximal \Leftrightarrow \forall\ x \in A \,/\, n \prec x \Longrightarrow x = n$.

Puede ocurrir que en un conjunto ordenado no existan elementos minimales o maximales y si existen pueden no ser únicos.

v. **Cotas inferiores:** Sea A un conjunto y sea X un subconjunto de A, $X \subset A$. El elemento $a \in A$ es una cota inferior del subconjunto X si precede a todo elemento del subconjunto X: $a \in A\ es\ cota\ inferior\ de\ X \subset A \Leftrightarrow x \in X \Longrightarrow a \prec x$.

vi. **Cotas superiores:** Sea A un conjunto y sea X un subconjunto de A, $X \subset A$. El elemento $b \in B$ es una cota superior del subconjunto $X \subset A$ si y sólo si sigue a todo elemento de X. $b \in A\ es\ cota\ superior\ de\ X \subset A \Leftrightarrow x \in X \Longrightarrow x \prec b$.

vii. **Supremo:** Sea A un conjunto y sea X un subconjunto de A, $X \subset A$. El elemento s $\in$ A es el supremo del subconjunto X sí y sólo sí es el primer elemento del conjunto de las cotas superiores.

viii. **Ínfimo:** Sea A un conjunto y sea X un subconjunto de A, $X \subset A$. El elemento $i \in A$ es el ínfimo del subconjunto X sí y sólo sí es el último elemento del conjunto de las cotas inferiores.

Conjunto bien ordenado.

Definición: Se denomina Conjunto Bien Ordenado a aquel conjunto que está definido por una relación de orden total y además todo subconjunto no vacío tiene primer elemento.

2.8 RELACIONES BINARIAS Y RELACIONES DE PREFERENCIA

Como se vio al inicio de este capítulo, una relación binaria es definida como un conjunto de pares ordenados (los cuales son un subconjunto del producto cartesiano) para los cuales una proposición P es verdadera. Esta definición aplica también para el primer concepto que se desarrollará es este apartado: Las relaciones de preferencia.

Las relaciones de preferencia son aquellas que utiliza el consumidor para caracterizar el criterio de valoración que despliega sobre las opciones de consumo[7]. Al igual que las relaciones binarias, las relaciones de preferencia, son representadas por el símbolo $\succsim$, el cual puede traducirse como “es al menos tan preferido como”.

Lo que veremos enseguida es que las relaciones de preferencia son un tipo especial de relaciones binarias. Podemos observar que en las relaciones de preferencia, las opciones de consumo que el individuo evalúa son presentadas en pares, los cuales se ordenan a través del criterio de valoración que el consumidor despliega sobre ellos. Este mismo criterio funge como una proposición que es verdadera para todos los pares que serán evaluados. Por lo tanto la relación de preferencia es un tipo de relación binaria. Para ser más específicos es una relación binaria definida sobre el conjunto de consumo X.

En el próximo capítulo se profundizará en la definición del conjunto de consumo. Por ahora basta con tener en cuenta que el conjunto de consumo representa todas las alternativas de consumo que un individuo pueda concebir[8].

La relación de preferencia $\succsim$ “es al menos tan preferido como” determina otras dos relaciones binarias que abordaremos enseguida.

La primera es la relación de indiferencia. Esta relación binaria es representada por el símbolo $\sim$, el cual se traduce como “es indiferente a”. La definición formal es la siguiente:

[7] ***Villar Antonio.*** *Lecciones de Microeconomía, p. 25.*
[8] ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Advanced Microeconomic Theory. Pag 4.El original en inglés.*

Relación de indiferencia.

Definición: Sea X un conjunto y sean $x_1 \; y \; x_2 \in X$. Si $\sim$ es una relación de indiferencia entonces se cumple $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \gtrsim x_2 \wedge x_2 \gtrsim x_1$.

La anterior definición trasladada al problema del consumidor significa que si al individuo se le presentan dos cestas de consumo frente a las cuales se muestra indiferente, entonces podemos concluir que el consumidor les otorga la misma valoración a ambas.

La siguiente relación que abordaremos se denomina "relación de preferencia estricta", y se representa con el símbolo $\succ$ el cual se lee como "es estrictamente preferido a".

Relación de preferencia estricta.

Definición: Sea X un conjunto y sean $x_1 \; y \; x_2 \in X$. Si $\succ$ es una relación de preferencia estricta entonces se cumple $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 \gtrsim x_2 \wedge x_2 \not\gtrsim x_1$.

Esta definición es bastante clara en su aplicación al problema del consumidor, ya que simplemente significa que frente a dos opciones de consumo, un individuo prefiere una de las alternativas por sobre la otra.

A partir de los anteriores conceptos podemos definir entonces los siguientes subconjuntos del conjunto de consumo X.

i. $\gtrsim (x_1)\colon \{x/x \in X \wedge x \gtrsim x_1\}$, Es el conjunto "al menos tan preferido como".

ii. $\succ(x_1):\{x/x \in X \wedge x \succ x_1\}$, Es el conjunto “estrictamente preferido a”.

iii. $\backsim(x_1):\{x/x \in X \wedge x \backsim x_1\}$, Es el conjunto “indiferente”.

iv. $\precsim(x_1):\{x/x \in X \wedge x_1 \succsim x\}$, Es el conjunto “no mejor que”.

v. $\prec(x_1):\{x/x \in X \wedge x_1 \succ x\}$, Es el conjunto “peor que”.[9]

2.9 AXIOMAS DE ORDEN

Formalmente hablando, el concepto de axioma define a la proposición matemática que se asume como tal ya que no está sujeta a comprobación. Aplicado al tema que nos concierne, la modelización axiomática nos sirve para especificar tanto la estructura como las propiedades de las preferencias, asimismo nos posibilita describir formalmente los elementos fundamentales del comportamiento del consumidor.

En este apartado desarrollaremos matemáticamente los supuestos que representan los dos primeros axiomas sobre las preferencias. La manera en que lo haremos será retomando los concepto intuitivos que vimos en el primer capítulo pero ahora estarán acompañados por todo el bagaje matemático que hemos aprendido en la sección anterior. El resultado que obtendremos será una explicación sencilla pero con la formalidad matemática necesaria.

[9] ***Ibíd,*** p. *4.*

Primer axioma: Completitud

$$\boldsymbol{Sea\ X\ un\ conjunto\ y\ sea\ \succsim una\ relación\ de\ preferencia\ sobre\ el\ conjunto\ X}\ .$$

$$\forall\ \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{se\ verifica\ x_1 \succsim x_2\ o\ bien\ x_2 \succsim x_1}.$$

Lo que nos expresa esta definición es que si un conjunto asume la propiedad de completitud entonces todos los elementos pertenecientes a ese conjunto son comparables o lo que es lo mismo, en un conjunto completo no existen elementos que sean incomparables. ¿Qué significado económico tiene esta situación? Retomando la explicación intuitiva que hicimos en el capítulo uno, podemos decir que si un consumidor tiene preferencias completas entonces comprende plenamente las dos alternativas que se le presentan y siempre será capaz de decidir cuál de las dos es la deseable, es decir el consumidor nunca quedará paralizado por la indecisión. Por lo tanto este axioma solamente formaliza la facultad que tiene un consumidor para poder hacer comparaciones entre los bienes que constituyen el conjunto de consumo.

Segundo axioma: Transitividad

$$\boldsymbol{Sea\ X\ un\ conjunto\ y\ sea\ \succsim una\ relación\ de\ preferencia\ sobre\ el\ conjunto\ X}\ .$$

$$\forall\ \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{si\ x_1 \succsim x_2\ \wedge\ x_2 \succsim x_3\ entonces\ x_1 \succsim x_3}.$$

El axioma de transitividad plantea que el comportamiento de un consumidor debe ser consistente. ¿Qué significa eso? Que las decisiones que tome un individuo de acuerdo a sus preferencias deben ser coherentes con la lógica del ordenamiento que ha establecido. Si nos movemos dentro del marco del sentido común, parecería que las preferencias transitivas es la única forma en que un consumidor puede proceder. Sin embargo existe la posibilidad de que las preferencias de los consumidores asuman algún tipo de forma cíclica, las cuales están teóricamente representadas por las relaciones de no transitividad y atransitividad. Estas situaciones se presentan en la vida cotidiana, como lo vimos en el capítulo uno; por ejemplo, cuando los individuos no poseen información completa o cuando la unidad de decisión es una familia o un grupo que decide por mayoría. No obstante, en la mayoría de los casos analizados por la economía, la transitividad es observada.

Cada uno de los axiomas que hemos visto hasta ahora representa una característica específica en las preferencias de los consumidores. Ahora procederemos a estudiarlos de manera conjunta y veremos que analizados de esta forma presentan características especiales tanto en el aspecto matemático como en las consecuencias en el comportamiento de los consumidores.

2.10 AXIOMAS DE ORDEN, RELACIONES DE PREFERENCIA Y PREÓRDENES COMPLETOS

Anteriormente afirmamos que las relaciones de preferencia que cumplen los axiomas uno y dos representan los axiomas de orden. Matemáticamente eso significa que bajo los axiomas uno y dos, las relaciones de preferencia constituyen un preorden completo sobre el conjunto de consumo. Para exponerlo detalladamente presentaremos una vez más el concepto de preorden completo y definiremos nuevamente los dos primeros axiomas sobre las preferencias.

Preorden completo.

Definición: Sea A un conjunto preordenado; es decir, se verifica en A una relación binaria R que es Reflexiva y Transitiva. Si además de esto, la relación también cumple con ser completa entonces decimos que R es un preorden completo sobre A.

$$i)\ Es\ reflexiva\ si\ \forall a \in A, (a,a) \in R$$

$$ii)\ Es\ transitiva\ si\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R, \forall\ a,b,c \in A$$

$$iii)\ Es\ completa\ si\ \forall\ a,b \in A\ donde\ a \neq b\ \Longrightarrow (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

Una relación de preferencia $\gtrsim$ bajo los axiomas uno y dos establecen lo siguiente:

$$Sea\ X\ un\ conjunto\ y\ sea\ \gtrsim una\ relación\ de\ preferencia\ sobre\ el\ conjunto\ X$$

$$\forall\ x_1, x_2 \in X, se\ verifica\ x_1 \gtrsim x_2\ o\ bien\ x_2 \gtrsim x_1.\ Es\ completa$$

$$\forall\ x_1, x_2, x_3 \in X, si\ x_1 \gtrsim x_2\ \wedge\ x_2 \gtrsim x_3\ entonces\ x_1 \gtrsim x_3.\ Es\ transitiva$$

Como podemos ver, la definición de un preorden completo precisa que la relación satisfaga tres propiedades: Reflexividad, transitividad y completitud; mientras que los dos primeros axiomas presentan solamente completitud y transitividad. Sin embargo se puede demostrar que si una relación (en este caso una relación de preferencia) asume las propiedades de completitud y transitividad entonces implica que también satisface la propiedad de reflexividad. A continuación desarrollaremos esa demostración[10].

Teorema:

Sea X un conjunto y sea $\succsim$ una relación de preferencia sobre el conjunto X. Si la relación $\succsim$ es completa y transitiva, entonces $\succsim$ también es reflexiva.

Demostración:

Por hipótesis sabemos que $\succsim$ es completa, entonces:

$$(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_1) \Longrightarrow (x_1 \succsim x_2 \vee x_2 \succsim x_1) \wedge (x_2 \succsim x_1 \vee x_1 \succsim x_2)$$

Entonces se plantean dos casos:

i. $x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \succsim x_1$. Por el axioma dos, la relación de preferencias $\succsim$ es transitiva, lo que implica que si $x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \succsim x_1 \Longrightarrow x_1 \succsim x_1$. Lo que significa que también es reflexiva.

ii. $x_2 \succsim x_1 \wedge x_1 \succsim x_2$. Por el axioma dos, la relación de preferencias $\succsim$ es transitiva, lo que implica que si $x_2 \succsim x_1 \wedge x_1 \succsim x_2 \Longrightarrow x_2 \succsim x_2$. Lo que significa que también es reflexiva.

[10] *Para ver referencia de la demostración ver:* ***LÓPEZ SÁNCHEZ MARÍA GUADALUPE****. Op. Cit, pp. 167, 168 y 169.*

Queda demostrado que bajo los axiomas uno y dos la relación de preferencia $\succsim$ constituye un preorden completo.

Una vez que hemos revisado el aspecto matemático, ahora abordaremos el significado económico.

Si las preferencias de un consumidor cumplen con los dos axiomas que acabamos de analizar, entonces se dice que las preferencias son racionales. ¿Qué significa que sean racionales? Simplemente que ambos axiomas presentan propiedades que permiten organizar de una manera coherente las decisiones de consumo que ha hecho un individuo. Es decir, posibilitan el establecimiento de una jerarquía que permite ordenar los bienes del más preferido hasta el menos preferido de acuerdo con las preferencias del consumidor.

Por lo tanto, los dos primeros axiomas son componentes esenciales del comportamiento racional del consumidor.

2.11 RELACIONES DE INDIFERENCIA Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Como vimos anteriormente, la relación de preferencia $\succsim$ determina otros dos tipos de relaciones binarias: La relación de indiferencia, representada por el símbolo $\sim$, y la relación de preferencia estricta, la cual es representada por $\succ$.

La primera de ellas explica que un consumidor que esté comparando dos cestas de consumo le otorgará la misma valoración a ambas, es decir se mostrará indiferente frente a las dos cestas, formalmente tenemos:

Relación de indiferencia.

Definición: Sea X un conjunto y sean $x_1 \; y \; x_2 \in X$. Se cumple una relación de indiferencia $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \gtrsim x_2 \wedge x_2 \gtrsim x_1$.

A simple vista podemos ver que las características que asume una relación de indiferencia son la completitud, transitividad y (como acabamos de demostrar) también la reflexividad. Pero también lleva implícita la propiedad de simetría (R es simétrica $\Leftrightarrow$ $\forall \, x \, \forall \, y \in A/(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$). Por lo tanto podemos establecer que una relación de indiferencia es también una relación de equivalencia. Como lo revisamos previamente, tanto las relaciones de equivalencia como las relaciones de indiferencia se identifican con el mismo signo $\sim$. Asimismo también comparten el concepto que determina a todos los elementos de un conjunto que son equivalentes a un elemento en particular, nos referimos a las **clases de equivalencia**, sólo que en el caso de las relaciones de indiferencia se conocen como **clases de indiferencia**. Su definición formal es la siguiente:

$$I_i(x'_i) = \{x_i \in X_i \; / \; x_i \sim x'_i\}$$

En economía tenemos un ejemplo conocido de este concepto. «Las curvas de indiferencia definidas sobre el conjunto de elección corresponden a las clases de equivalencia»[11]. Podemos verificar que las curvas de indiferencia son conjuntos no vacíos ($x_i \in I \Longrightarrow K_{x_i} \neq \emptyset.$); además si dos cestas de consumo son indiferentes entre sí entonces pertenecen a la misma curva de indiferencia ($x_i \sim x'_i \Leftrightarrow x_i \; y \; x'_i$ pertenecen a la misma K_u). Si la

[11] ***Ibíd,*** *p. 30.*

intersección de dos curvas de indiferencia es el conjunto vacío entonces estamos hablando de la misma curva de indiferencia ($K_{x_i} \cap K_{x'_i} \neq \emptyset \implies K_{x_i} = K_{x'_i}$) y las curvas de indiferencia no pueden cortarse entre sí ($x_i \neq x'_i \implies K_{x_i} \cap K_{x'_i} = \emptyset$). La definición formal de las curvas de indiferencia sintetiza todas estas propiedades: "Las curvas de indiferencia son una representación geométrica de los puntos que simbolizan la combinación de bienes frente a los cuales el consumidor se mantiene indiferente".

2.12 RELACIONES DE PREFERENCIA ESTRICTA Y ORDEN ESTRICTO

El segundo tipo de relación binaria que se desprende de las relaciones de preferencia es la que se denomina relación de preferencia estricta. Lo único que expresa esta relación es que frente a dos opciones de consumo las preferencias de un consumidor se inclinan explícitamente por una de ellas. El signo que utiliza para representarla es $\succ$ y se lee como "es estrictamente preferido a". Su definición formal es la siguiente:

Relación de preferencia estricta.

Definición: Sea X un conjunto y sean $x_1 \; y \; x_2 \in X$. Se cumple $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \not\succsim x_1$.

En la relación de preferencia estricta se definen algunas propiedades distintas a las de la relación de indiferencia. Para empezar no presenta ni completitud ni reflexividad. En vez de eso, exhibe dos propiedades diferentes: La de arreflexividad ($x_1 \not\succ x_1$) y la de asimetría $-$si $(x_1 \succ x_2) \Rightarrow (x_2 \not\succ x_1)$ $-$. Sin embargo, sigue manteniendo la transitividad ya que se cumple que si $x_1 \succ x_2 \; y \; x_2 \succ x_3 \Rightarrow x_1 \succ x_3$. Como se verificó anteriormente, si una relación sobre un conjunto presenta las propiedades de transitividad, arreflexividad y asimetría, entonces es una relación de orden estricto. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que la relación de preferencia estricta no es más que una relación de orden estricto, como lo formaliza la siguiente definición.

Orden Estricto.

Definición: Sea A un conjunto y sea R una relación binaria sobre A. $\boldsymbol{R}$ **es una relación de orden estricto** si y solo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

a) **Arreflexividad:** $a \in A \Longrightarrow (a, a) \notin R$

b) **Asimetría:** $(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R$

c) **Transitividad:** $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R$

En matemáticas el ejemplo más común de una relación de orden estricto es la relación de mayor y menor que en los números reales. En economía, concretamente en el caso del comportamiento del consumidor, una relación de preferencias estricta se presenta cuando un individuo compara dos cestas de consumo; si la primera contiene cuando menos la misma cantidad de bienes que la segunda más uno de ellos, entonces será estrictamente preferida a la segunda. Esta situación se expondrá con mayor detalle en el siguiente capítulo, una vez que se haya profundizado en la explicación de los axiomas sobre las preferencias restantes.

CAPÍTULO TRES

CONJUNTO DE CONSUMO, AXIOMAS ANALÍTICOS Y AXIOMAS DE CONVENIENCIA

3.1 INTRODUCCIÓN

El tercer capítulo es uno de los más importantes de esta tesis. Aquí se exponen algunos de los conceptos que serán determinantes en los resultados del trabajo, asimismo se realizan algunos ejercicios y demostraciones que nos ayudarán a comprender a cabalidad los temas que en él se desarrollan.

La primera parte del capítulo es una revisión de una serie de conceptos matemáticos que utilizaremos a lo largo del texto. Primero comenzamos con un breve repaso del concepto de funciones, su clasificación y algunos ejemplos. El siguiente tópico que revisamos es el de espacios vectoriales, cuya relevancia se pone de manifiesto cuando entramos en el siguiente tema: Elementos de topología. Este apartado juega un papel central en el capítulo, ya que aquí definimos algunos de los conceptos fundamentales para la obra en su conjunto: bola o vecindad, conjunto abierto, conjunto cerrado, punto límite, frontera de un conjunto, conjunto convexo, etc. En la última parte de la sección matemática repasamos el tema de sucesiones.

En la segunda parte del capítulo nos valemos de todos los pertrechos matemáticos que revisamos para emplearlos en el ambiente de la teoría del consumidor. Lo primero que hacemos es definir al conjunto de consumo como el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$, después se examinan sus características: es un conjunto cerrado, convexo y el cero pertenece al conjunto.

Posteriormente nos damos a la tarea de analizar los axiomas sobre las preferencias. Si bien en el primer capítulo habían sido organizados de acuerdo a sus características - axiomas de conveniencia y axiomas analíticos- ahora se utiliza la forma tradicional de los libros de texto, por lo tanto el orden en el que se exponen es el siguiente, continuidad, no saciedad local, monoticidad estricta y convexidad estricta.

En cada uno de ellos se abordan los supuestos tanto desde la óptica de las matemáticas como de la teoría económica. Se hace un esfuerzo por presentar el contenido de cada uno de una manera sencilla y asequible pero sin perder la formalidad.

Finalmente es importante comentar que para facilitar la comprensión del supuesto de convexidad estricta se realiza un ejercicio en $\mathbb{R}^2$ el cual se retomará en el siguiente capítulo.

3.2 FUNCIONES

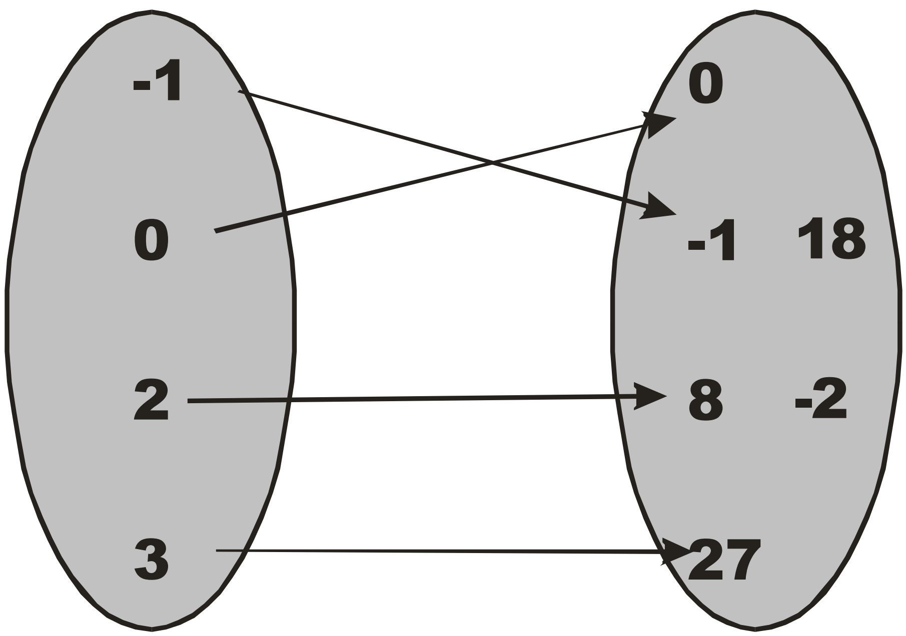
Definición: Sean A y B conjuntos. Entonces una función de A a B es un conjunto $\int$ de pares ordenados en $A \; X \; B$ tal que para cada $a \in A$ existe una $b \in B$ única con $(a, b) \in \int$. (En otras palabras, si $(a, b) \in \int \; y \; (a, b') \in \int$, entonces $b = b'$).[1]

[1] **Bartle Robert G.** *Introducción al análisis matemático de una variable, p. 6.*

En esta definición identificamos que la función $\int$ tiene a A como dominio y a B como codominio. Asimismo podemos apreciar que todo elemento del dominio A tiene un correspondiente que se denomina Imagen en el codominio B el cual es único, es decir no pueden existir dos pares ordenados distintos con el mismo primer componente.

Ejemplo:

Sean dos conjuntos $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 8\ 18, 27\}$ y sea $\int$ una función definida como: $(x, y) \in \int \Leftrightarrow y = x^3$. Entonces tenemos: $\int = \{(0,0), (-1,-1), (2,8), (3,27)\}$. Lo anterior lo podemos expresar a través de un Diagrama de Venn:



Diagramas de Venn que muestra una función.

Clasificación de funciones

Función Inyectiva.

Definición: $\int: A \Longrightarrow B$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \,\forall\, x' \in A \,/\, x \neq x' \Longrightarrow \int(x) \neq \int(x')$.

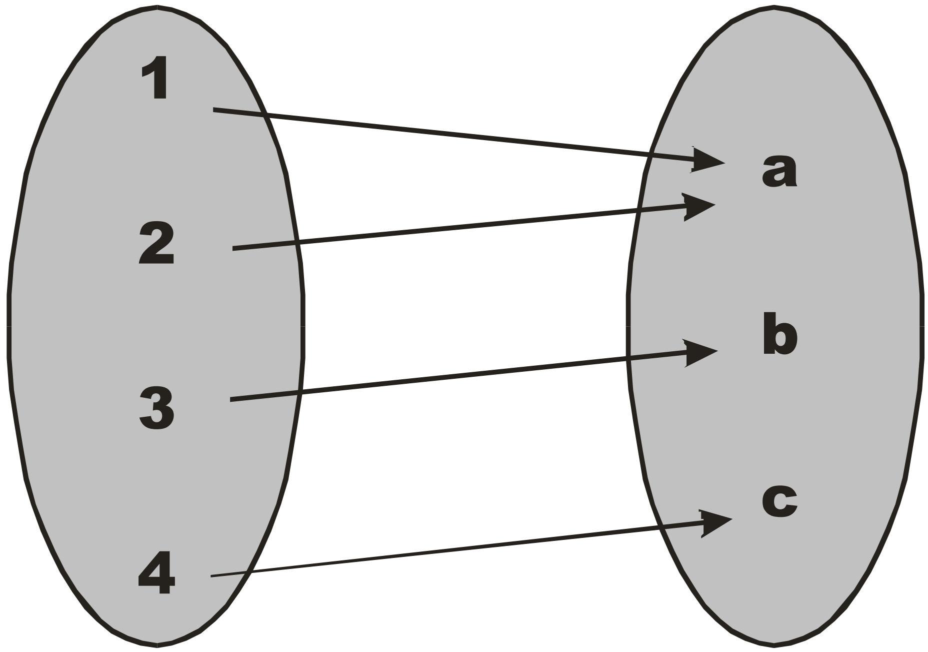
Esto quiere decir que si tenemos una función que es inyectiva entonces dos elementos distintos del dominio no pueden tener la misma imagen.

El diagrama que acabamos de ver es un ejemplo de una función inyectiva, porque a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B, de tal forma que en el conjunto A no existen dos o más elementos con la misma imagen. Podemos observar también que existen elementos en el codominio que no corresponden con ningún elemento del dominio, sin embargo esta situación no representa ningún problema porque se ajusta perfectamente a la definición.

Función sobreyectiva.

Definición: $\int: A \Longrightarrow B\ es\ sobreyectiva\ \Leftrightarrow \forall\, y \in B, \exists\, x \in A \,/\, y = \int(x)$.

En el caso de las funciones sobreyecivas, el conjunto de las imágenes se identifica con el codominio de la función. También lo podemos expresar diciendo que la función de $\int: A \Longrightarrow B$ es sobreyectiva porque está aplicada sobre todo el codominio. En el siguiente ejemplo tenemos dos conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$, la función que se genera a partir de ambos conjuntos $\int: A \Longrightarrow B$ es un ejemplo de una función sobreyectiva porque cada elemento del conjunto B es imagen de cuando menos un elemento del conjunto X. $\int = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$.

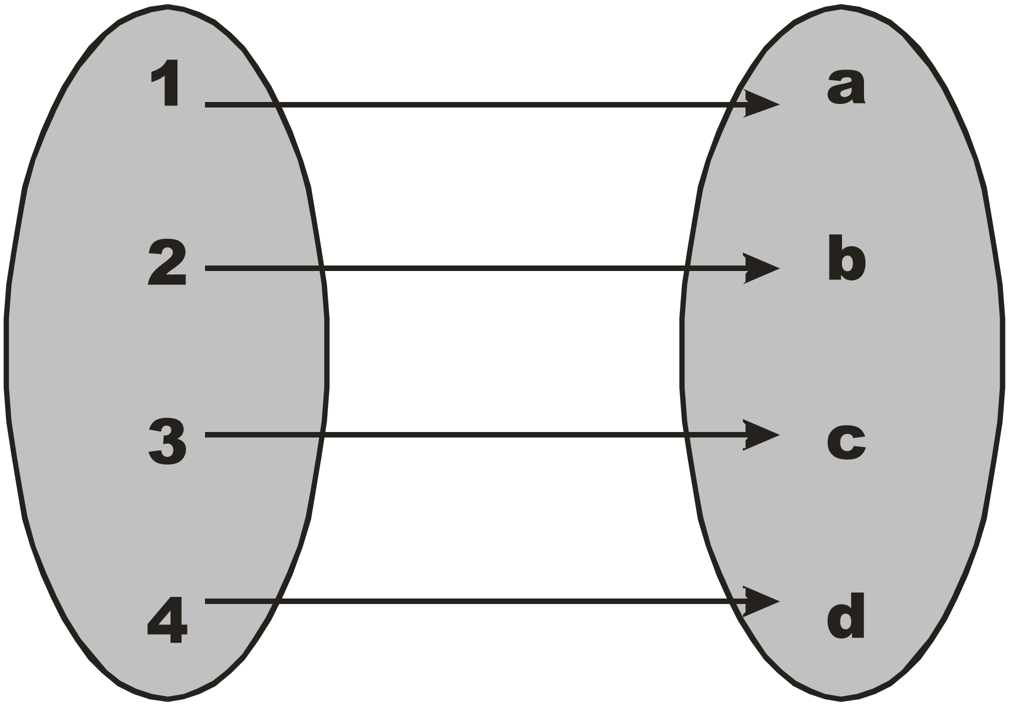


Ejemplo de una función sobreyectiva.

Función biyectiva.

Definición: $\int: A \Longrightarrow B\ es\ biyectiva \Leftrightarrow \int es\ inyectiva\ \ y\ \ \int es\ sobreyectiva.$

La función A en B es biyectiva cuando es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. ¿Qué significa esto? Como podemos ver en el siguiente ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\ \}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ designamos a la función $\int: A \Longrightarrow B$ como biyectiva porque cada elemento del dominio tiene una imagen distinta en el codominio, además, a cada elemento del conjunto A le corresponde un elemento del conjunto B. $\int = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$.



Ejemplo de una función biyectiva

3.3 ESPACIOS VECTORIALES

Suma y multiplicación por escalar.

Definición: Sea V un conjunto equipado con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por escalar. La suma es una regla que asocia dos elementos cualesquiera u y v de V con un tercero, la suma de u y v representada por $u + v$. La multiplicación por escalar es una regla que asocia cualquier escalar (real) c y cualquier elemento u de V con otro de V, el múltiplo escalar de u por c, el cual está representado por cu. Ese conjunto V, se denomina espacio vectorial (real) si las dos operaciones cumplen las propiedades siguientes -llamadas axiomas- de un espacio vectorial.[2]

Axiomas de un Espacio Vectorial[3]

i. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (cerradura bajo la suma).

ii. Para todo x, y y z en V, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa de la suma de vectores).

iii. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V, x + 0 = 0 + x = x$ (el 0 se llama vector cero o idéntico aditivo).

iv. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$ (-x se llama inverso aditivo de x).

v. Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$ (ley conmutativa de la suma de vectores).

vi. Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

---

[2] ***Nakos George y Joyner David.*** *Algebra Lineal. Capítulo 4, p. 236.*
[3] ***Grossman I. Stanley.*** *Algebra Lineal. Capítulo 4, p. 293.*

vii. Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (primera ley distributiva).

viii. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (segunda ley distributiva).

ix. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x. Para cada vector $x \in V, 1x=x$.

3.4 ELEMENTOS DE TOPOLOGÍA

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

«Un punto en el espacio bidimensional es un par ordenado de números reales (x_1,x_2). Análogamente, un punto en un espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales: (x_1,x_2,x_3). Es, pues, adecuado considerar una n-pla ordenada de números reales y referirnos a ella como un punto en el espacio n-dimensional».

Espacio Euclídeo n-dimensional.

«**Definición:** Sea $n>0$ un entero. Un conjunto ordenado de n números reales $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ se llama punto n dimensional o vector con n componentes». «El número x_k

se llama k-ésima coordenada del punto x o k-ésima componente del vector x. El conjunto de todos los puntos n-dimensionales se llama Espacio Euclídeo n-dimensional o simplemente n-espacio, y se designa por $\mathbb{R}^n$».[4]

Espacios Métricos.

Definición: Un espacio métrico es un conjunto M no vacío de objetos (los cuales son llamados puntos) dotado de una función d de $M\ X\ M$ en $\mathbb{R}$ (que se denomina métrica del espacio o distancia) que satisface las siguientes cuatro propiedades:

i. $d(x,x) = 0$

ii. $d(x,y) > 0\ si\ x \neq y$

iii. $d(x,y) = d(y,x)$

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Bola o Vecindad.

Definición: Sea a un punto en R^n y sea ε un número positivo dado. Se denomina vecindad o bola con centro en a y radio ε $-B_\varepsilon(a)-$ al conjunto de todos los puntos x de $\mathbb{R}^n$ tales que

[4] ***Apostol Tom M****. Análisis matemático, pp. 57 y 58. Se toma como referencia base para el desarrollo de todo el apartado de Elementos de topología a:* ***Apostol Tom M.*** *Análisis matemático. Capítulo 3,* ***Rudin Walter.*** *Principios de análisis matemático. Capítulo 2 y* ***Bartle Robert G.*** *Introducción al análisis matemático de una variable.*

$$\|x - a\| < \varepsilon$$

También se puede expresar como:

$$\forall x \in R^n \;/\; d(a, x) \; < \varepsilon$$

Lo que expresa esta definición es que una bola $B_\varepsilon(a)$ consta de todos los puntos x cuya distancia a a es menor que ε. Para poner un ejemplo en cada una de las tres primeras dimensiones, en $\mathbb{R}^1$ sería un intervalo abierto con centro en a, en $\mathbb{R}^2$ es una figura circular, mientras que en $\mathbb{R}^3$ es una esfera con centro en a y radio ε.

Punto interior.

Definición: Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y suponga que $a \in S$. Entonces a se denomina punto interior de S si existe una bola abierta con centro en a y radio ε, $B_\varepsilon(a)$, la cual está contenida en S, es decir: $\exists \varepsilon > 0 \;/\; B_\varepsilon(a) \subset S$.

***int S*.**

Definición: Designamos como $int\, S$ al conjunto de todos los puntos interiores del conjunto S.

Conjunto Abierto.

Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. S es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores, es decir $int\, S = S$.

Proposición I. Conjuntos Abiertos:

- La unión de cualquier colección finita o infinita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

- La intersección de cualquier número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. [5]

Conjunto Cerrado.

Definición: Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento es abierto. Asimismo un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es abierto si su complemento es cerrado.

Existen por lo menos otras dos formas de especificar a los conjuntos cerrados, sin embargo para poder plantearlas es necesario desarrollar otras definiciones.

Punto límite.

Definición: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces x se llama punto límite (alternativamente punto de acumulación) de S si cada bola $B_\varepsilon(x)$ contiene por lo menos un punto de S distinto de x.

[5] ***Villar Antonio.*** *Lecciones de microeconomía, pp. 421.*

Punto aislado.

Definición: Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Si un punto $p \in S$ y p no es punto límite de S, entonces p es llamado punto aislado de S.

Conjunto Cerrado.

Definición: Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos límite.

Punto exterior.

Definición: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, x es un punto exterior de A si la bola con centro en x y radio ε está contenida en el complemento de A, es decir: $\exists \varepsilon > 0 \ / \ B_\varepsilon(x) \subset A^c$.

Exterior del conjunto A.

Definición: Sea A un conjunto. Entonces se define el exterior del conjunto A ($extA$) como el conjunto de todos los puntos exteriores de A.

Frontera de un conjunto.

Definición: Sea S un conjunto tal que $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea x un punto de $\mathbb{R}^n$. Entonces x es el punto frontera de S si: $\forall \epsilon > 0 \wedge B_\varepsilon(x) \ / \ B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(x) \cap extS \neq \emptyset$. Es decir, un punto x se llama punto frontera de S si cada bola $B_\varepsilon(x)$ contiene por lo menos un punto de S y por lo menos un punto del complemento de S.

El conjunto de todos los puntos frontera de S se denomina frontera de S y se designa por δS.

Conjunto cerrado a partir del concepto de Punto Frontera.

Definición: Sea S un conjunto tal que $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea δS la frontera de S. El conjunto S es cerrado si contiene a su frontera: $S\ es\ cerrado \Leftrightarrow \delta S \subset S$.[6]

Proposición II. Conjuntos Cerrados:

- La intersección de cualquier colección finita o infinita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

- La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.[7]

Teorema: Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son tanto cerrados como abiertos.

Demostración.

Sea x un punto en $\mathbb{R}^n$, es decir: $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces toda bola con centro en x y radio ε estará contenida en $\mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n$. Lo que significa que $int\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, de tal forma $\mathbb{R}^n$es abierto. Asimismo el conjunto $\emptyset$ es abierto ya que por vacuidad cumple con la definición.

Ahora para demostrar que los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son cerrados.

[6] ***Madden Paul.*** *Concavidad y optimización en economía, p. 325.*
[7] ***Villar Antonio.*** *Op. Cit, p.421.*

A partir del concepto de frontera sabemos que un conjunto es cerrado si contienen a su frontera. Sabemos que la frontera del conjunto $\mathbb{R}^n$ es el conjunto vacío: $\delta\mathbb{R}^n = \emptyset$. Pero el conjunto vacío es a la vez un subconjunto del conjunto $\mathbb{R}^n$, $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$. Eso significa que el conjunto $\mathbb{R}^n$ contiene a su frontera: $\delta\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

También sabemos que el conjunto vacío es el complemento del conjunto $\mathbb{R}^n$: $[\mathbb{R}^n]^c = \emptyset$. Por la demostración que acabamos de tener arriba, tenemos que el conjunto $\mathbb{R}^n$ es abierto, lo que implica que su complemento es cerrado. Entonces concluimos que el conjunto vacío es cerrado.[8]

Conjunto compacto.

Definición: Sea S con conjunto de $\mathbb{R}^n$, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$. Se dice que S es un conjunto compacto si existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $S \subset B_\varepsilon(x)$, es decir, si el conjunto S está completamente contenido en una bola con centro en x radioε. [9]

Combinación convexa.

Definición: Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sean $x_1, x_2 \in S$ y sea λ cualquier valor de $\mathbb{R}$ entre 0 y 1, $\lambda \in [0,1]$. Decimos que z es una combinación convexa de x_1 y x_2 si:

$$z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

Para algún número λ entre 0 y 1.

[8] *Para ver la referencia de esta demostración revisar:* ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Advanced Microeconomic Theory, pp. 420, 421, 423.*
[9] ***Ibíd,*** *p. 423.*

Lo que nos expresa esta definición es que una combinación convexa no es otra cosa más que el promedio ponderado de dos puntos cualquiera del conjunto S.

Conjuntos Convexos.

Definición: Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sean $x_1, x_2 \in S$ y sea λ cualquier valor λ de $\mathbb{R}$ entre 0 y 1, $\lambda \in [0,1]$. Entonces $S \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si para todo $x_1, x_2 \in S$ y para todo $\lambda \in [0,1]$ tenemos que:

$$\forall x_1, x_2 \in S\ y\ \forall \lambda \in [0,1];\ \ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S.$$

La definición expresa que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si para cualquier par de puntos del conjunto S, todas las combinaciones convexas que se puedan generar de ese par están contenidas en el conjunto S.

Proposición III. Conjuntos convexos:

- La intersección de una colección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

3.5 SUCESIONES

Sucesión.

Definición: «Una sucesión en un conjunto S es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y cuyo codominio está contenido en el conjunto S».

Sucesión en $\mathbb{R}$.

Definición: «Una sucesión en $\mathbb{R}$ o sucesión de números reales es una función definida en el conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ de de los números naturales cuyo codominio está contenido en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales».

«En otras palabras, una sucesión en $\mathbb{R}$ le asigna a cada número natural $n = 1,2,\ldots$ un número real determinado de manera única. Si $X: \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión, el valor de X en n se denotará en general por el símbolo x_n …»

Sucesión convergente.

Definición: «Se dice que una sucesión $X = (x_n)$ en $\mathbb{R}$ converge a $x \in \mathbb{R}$, o en otras palabras x es el límite de (x_n), si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq K(\varepsilon)$ los términos x_n satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$.

Si una sucesión tiene límite se dice que es convergente; »[10]

---
[10] ***Bartle, Robert G.*** *Op. Cit, pp. 66 y 68.*

3.6 HIPÓTESIS SOBRE EL CONJUNTO DE CONSUMO $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}$

En el capítulo uno, al introducirnos a la teoría del consumidor, describíamos como los individuos pueden hallar en el mercado todo un conjunto de bienes y servicios que se encuentran disponibles independientemente de que puedan ser adquiridos por los consumidores. La cantidad y variedad de bienes y servicios es tan grande como el individuo lo pueda concebir. Designamos como cestas de consumo a una cantidad específica de bienes y servicios que pueden ser adquiridas por un consumidor. Ahora definiremos al conjunto de todas las cestas que pueden ser consumidas por los individuos, el cual es representado a través de X y se denomina conjunto de consumo.

La forma más común de modelizar al conjunto de consumo X es igualándolo al ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$,[11] es decir $X = \mathbb{R}_+^n$. Veamos como lo podemos definir.

Al principio del capítulo revisamos como el conjunto $\mathbb{R}^n$ se define como el conjunto ordenado de todos los puntos n-dimensionales, el cual se denomina como espacio euclídeo n-dimensional. A partir de este concepto podemos identificar a cada uno de los puntos de $\mathbb{R}_+^n$ como un vector n-dimensional no negativo que se representa por $\boldsymbol{x_i} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir:

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \, x_i \geq 0, i = 1,2,3, \dots, n\}$$[12]

Ahora analicemos sus características, las cuales representan uno de los aspectos más interesantes del conjunto de consumo, no sólo por la importancia que tiene en sí misma la

[11] ***Varian Hal R.*** *Análisis microeconómico, p. 113.*
[12] ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Op. Cit, p. 411.*

cabal comprensión de X, sino además porque dichas cualidades facilitan el análisis del comportamiento del consumidor. Concretamente nos referimos a las siguientes características:

- $0 \in X$.
- X es un conjunto cerrado.
- X es un conjunto convexo.

El cero pertenece al conjunto de consumo: $\mathbf{0} \in \boldsymbol{X}$.

Como sabemos el cero es un número que no es ni positivo ni negativo. Anteriormente vimos que cuando definimos $\mathbb{R}_+^n$, lo que hacemos es descartar la parte negativa de $\mathbb{R}^n$. El segmento que nos queda al hacer esto es la parte positiva junto con el cero. Lo que significa que el cero es parte del conjunto $\mathbb{R}_+^n$, es decir $0 \in \mathbb{R}_+^n$. Posteriormente, cuando igualamos $X = \mathbb{R}_+^n$, expresamos que las cestas de consumo que nos interesan son únicamente las cestas positivas y las nulas. Esta situación es bastante clara ya que cuando los individuos adquieren cestas de consumo, sólo pueden hacerlo en cantidades positivas –o a lo sumo pueden no adquirir ninguna en absoluto, cuando su consumo es igual a cero -. Por lo tanto, en lo que respecta al conjunto X, sólo los valores positivos y nulos son relevantes, mientras que los valores negativos carecen de sentido y quedan descartados.

El conjunto de consumo es un conjunto cerrado.

Para definir a $X = \mathbb{R}_+^n$ como un conjunto cerrado primero debemos recordar el concepto de punto frontera y posteriormente la definición de un conjunto cerrado a partir del criterio de frontera de un conjunto. De acuerdo a lo que hemos visto, un punto x se llama frontera de un conjunto S si cada bola $B_\varepsilon(x)$ contiene por lo menos un punto de S y por lo menos un punto del complemento de S. Por otro lado, un conjunto S es cerrado si y sólo si contiene a su frontera. A partir de estos conceptos podemos definir a la frontera del conjunto $\mathbb{R}_+^n$ de la siguiente manera:

$$\delta\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n \;/\; x_i = 0, para\ algún\ i\} \subset \mathbb{R}_+^n$$[13].

Lo que nos dice esta definición es que, por un lado, el cero es la frontera del conjunto $\mathbb{R}_+^n$, lo que es fácil comprobar ya que si generamos una bola con centro en 0 y radio épsilon $B_\varepsilon(0)$, entonces dicha bola tendrá por lo menos un punto del conjunto $\mathbb{R}_+^n$ y por lo menos un punto del conjunto $[\mathbb{R}_+^n]^c$. Por otro lado lo que también nos dice es que el cero está contenido en ese mismo conjunto. De acuerdo a la definición de conjunto cerrado, deducimos que si $\mathbb{R}_+^n$ contiene a su frontera entonces es un conjunto cerrado. Sin embargo, a diferencia de $\mathbb{R}^n$ que es un conjunto tanto abierto como cerrado, $\mathbb{R}_+^n$ sólo es cerrado, ya que para que fuese también un conjunto abierto necesitaría que todos sus puntos fueran puntos interiores, pero esto no puede suceder ya que ninguno de los puntos de la frontera de $\mathbb{R}_+^n$ puede satisfacer ese requisito.

El conjunto de consumo es un conjunto convexo.

En el capítulo uno analizamos de manera intuitiva el significado de la convexidad. Ahí vimos a través de ejemplos lo que representaba este concepto en la vida cotidiana. Posteriormente, ya en este capítulo planteamos la definición de convexidad desde una óptica más formal. Retomemos esa definición para comenzar nuestro análisis. Sea S un

[13] ***Madden Paul.*** *Op. Cit, p. 328.*

conjunto de $\mathbb{R}^n$, sean $x_1, x_2 \in S$ y sea $\lambda \in [0,1]$. Se dice que S es un conjunto convexo si todas las combinaciones convexas que se puedan generar de un par de puntos $x_1, x_2 \in S$ están contenidas en el conjunto S, es decir:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \text{ ; } \forall \lambda \in [0,1] \text{ y } \forall x_1, x_2 \in S$$

¿Qué quiere decir exactamente esta definición? Para descifrarla podríamos comenzar por hacer un pequeño ejercicio en $\mathbb{R}$ para ver cómo funciona[14]. Primero igualemos la fórmula $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ a z para que represente una combinación convexa. Después debemos multiplicar x_2 por cada uno de los valores dentro del paréntesis. Posteriormente factorizamos λ y el resultado que obtendremos será una ecuación que expresa una combinación convexa:

$$z = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$$

Ahora imaginémonos que la expresión $(x_1 - x_2)$ es una distancia y que el punto x_2 es el punto de partida de esa distancia, asimismo asignemos valores a los puntos x_1, x_2 de tal forma que tengamos $x_1 = 10$ y $x_2 = 4$. Finalmente retomemos nuevamente la idea de que $\lambda \in [0,1]$. Una vez definidos nuestros supuestos podemos empezar a hacer las operaciones respectivas. Primero supongamos que $\lambda = 1$ y sustituyamos todos los valores en la combinación convexa z:

$$z = 4 + 1(10-4) \Rightarrow z = 4 + 1(6) \Rightarrow \boldsymbol{z = 10}$$

[14] *Para ver la referencia de este ejercicio revisar* ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Op. Cit, p. 412.*

Si realizamos el mismo procedimiento cuando λ asume determinados valores obtendremos lo siguiente:

- Cuando $\lambda = 1 \Longrightarrow z = 10$
- Cuando $\lambda = 0 \Longrightarrow z = 4$
- Cuando $\lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow z = 7$
- Cuando $\lambda = \frac{1}{4} \Longrightarrow z = 5.5$

¿Qué podemos ver en estos resultados? Lo primero que observamos es que los valores propuestos para λ siempre se ubicaron entre 0 y 1. También podemos señalar que ninguno de los resultados que obtuvimos fue mayor que 10 ni menor que 4. Pues bien, podemos decir que los resultados de este pequeño ejercicio son un ejemplo de lo que constituye un conjunto convexo, ya que si consideramos al intervalo $[10,4]$ de la recta real como un conjunto, entonces podemos comprobar que los resultados de la combinación de los valores $x_1 = 10$ y $x_2 = 4$ se localizaron en algún punto entre esos dos valores, siempre y cuando elijamos un valor para λ entre 0 y 1, que no es sino otra forma de expresar la definición de un conjunto convexo.

Si bien el anterior ejercicio lo realizamos en $\mathbb{R}$, podemos generalizar el ejemplo en cualquier dimensión y obtendremos los mismos resultados. Al final del capítulo abordaremos nuevamente el concepto de convexidad pero con algunas de sus variantes, como la convexidad estricta. Por lo pronto, aprovechando la facilidad de trabajar en la recta real, podemos reinterpretar la definición de un conjunto convexo para hacerla más intuitiva. Podemos decir que un conjunto en $\mathbb{R}$ es convexo si para cualquier par de puntos pertenecientes al conjunto, el segmento que los une está enteramente contenido en él.

Finalmente diremos que una característica visible en los conjuntos convexos es que “se comportan de una manera amable”. Es decir, los conjuntos convexos no tienen formas raras, no tienen hoyos, y sus contornos son suaves. Ejemplos de conjuntos convexos son figuras geométricas como triángulos, círculos, cuadrados o los polígonos tradicionales.[15]

3.7 AXIOMAS ANÁLITICOS Y AXIOMAS DE CONVENIENCIA

En este apartado analizaremos los axiomas sobre las preferencias del tercero al sexto. En el capítulo uno hicimos una breve introducción a todos los axiomas. En esa explicación los agrupamos de acuerdo a sus características para que su exposición fuera más clara. De esta manera pudimos ver que los dos primeros representan los axiomas de orden. Los supuestos de continuidad y de convexidad estricta engloban los axiomas analíticos y que la no saciedad local y la monoticidad estricta constituyen los axiomas de conveniencia.

Sin embargo no se seguirá la misma lógica para el análisis de los axiomas que haremos enseguida. Más bien utilizaremos la exposición tradicional que la literatura económica hace sobre el tema, ya que es probable que los lectores de este texto estén familiarizados con esa forma. Sin embargo la razón principal por la que la ocuparemos es porque este tipo de exposición facilitará en mucho el análisis que haremos sobre la evolución de las formas que asuman las preferencias de los consumidores en el cuarto capítulo. De tal manera que si a partir de ahora abordamos el asunto desde esta perspectiva, entonces

[15] ***Ibíd,*** *p. 414.*

será mucho más sencilla la presentación que hagamos en el último capítulo. Por lo tanto el orden de los axiomas del tres al seis será el siguiente: continuidad, no saciedad local, monoticidad estricta y convexidad estricta.

3.8 TERCER AXIOMA: CONTINUIDAD

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x} \in \mathbb{R}_{+}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{el\ conjunto\ es\ al\ menos\ tan\ preferido}\ \succsim (\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{y\ el\ conjunto\ no\ mejor\ que}\ \precsim (\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{son\ cerrados\ en}\ \mathbb{R}_{+}^{\boldsymbol{n}}.$$

Como vimos de manera intuitiva en el capítulo uno, lo que nos expresa el axioma de continuidad es que si un individuo debe decidirse entre dos cestas de consumo: la cesta x_1 y la cesta x_2; si éste finalmente decide que la cesta x_1 es preferida a x_2, entonces todas las cestas de consumo que se encuentren cerca de x_1 también serán preferidos a x_2. Esta explicación aunque simple, nos ayudó a tener una idea general del axioma de continuidad, sin embargo ahora profundizaremos nuestra exposición utilizando todo el bagaje matemático que revisamos en la primera parte de este capítulo.

Anteriormente vimos que podemos definir a los siguientes conjuntos de X de la siguiente forma:

I. $\succsim (x_1)\colon \{x/x \in X \wedge x \succsim x_1\}$, Es el conjunto "al menos tan preferido como".

II. $\succ (x_1)\colon \{x/x \in X \wedge x \succ x_1\}$, Es el conjunto "estrictamente preferido a".

III. $\backsim (x_1): \{x/x \in X \wedge x \backsim x_1\}$, Es el conjunto “indiferente”.

IV. $\precsim (x_1): \{x/x \in X \wedge x_1 \succsim x\}$, Es el conjunto “no mejor que”.

V. $\prec (x_1): \{x/x \in X \wedge x_1 \succ x\}$, Es el conjunto “estrictamente menos preferido”.

De acuerdo a lo que expresa el tercer axioma, para que las preferencias del consumidor sean continuas, se precisa que los conjuntos $\succsim (x)$, “al menos tan preferido” y el $\precsim (x)$ “no mejor que” sean cerrados. De acuerdo a lo que revisamos al inicio del capítulo, una de las propiedades que tienen los conjuntos cerrados es que “la intersección de cualquier colección finita o infinita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado”. Por lo tanto, al intersectar los conjuntos cerrados “al menos tan preferido” y el “no mejor que” obtendremos un conjunto que también será cerrado, nos referimos al conjunto indiferente $\sim (x)$. Lo anterior se expresa de la siguiente manera: $\succsim (x) \cap \precsim (x) = \ \sim (x)$.

Por otro lado, en la primera parte de este capítulo también vimos que un conjunto es abierto si y sólo si su complemento es cerrado. Si aplicamos esta definición al conjunto “al menos tan preferido” $\succsim (x)$, entonces tenemos que su complemento –el conjunto “estrictamente menos preferido”- es un conjunto abierto, es decir $[\succsim (x)]^c = \prec (x)$. Asimismo, el complemento del conjunto “no mejor que” $\precsim (x)$, el cual se define como el conjunto “estrictamente preferido a”, también es un conjunto abierto: $[\precsim (x)]^c = \succ (x)$,[16]

Ahora podemos preguntarnos ¿Por qué es tan relevante para el axioma de continuidad identificar a los conjuntos cerrados y diferenciarlos de los conjuntos abiertos? La

[16] ***López Sánchez María Guadalupe.*** *Una aproximación al conjunto de elección. UNAM. Tesis, pp. 170 y 171.*

importancia reside en el hecho de que al hacerlo podemos descartar posibles zonas de indiferencia respecto a una cesta de consumo x. Veamos cómo opera esto.

Supongamos que tenemos dos cestas que pertenecen al conjunto de consumo X: $y, x \in X$. Ahora supongamos que estas cestas observan preferencias continuas, las cuales se manifiestan de la siguiente manera: $y \succsim x$ donde la cesta y es el punto frontera del conjunto $\succsim (x)$, el cual es cerrado. Como sabemos, los conjuntos cerrados incluyen a su frontera, por lo tanto tenemos que $y \in \succsim (x)$. Recordando la definición de este concepto, tenemos que un punto p se llama punto frontera de S si cada bola $B_\varepsilon(p)$ contiene por lo menos un punto s del conjunto S y por lo menos un punto z del complemento de S. Si esto lo adaptamos a nuestro ejemplo tenemos que si la cesta de consumo y es el punto frontera del conjunto "al menos tan preferido" $\succsim (x)$ (el cual es cerrado y por lo tanto incluye a su frontera, es decir a la misma cesta y), entonces para toda bola con centro en y y radio $\varepsilon: B_\varepsilon(y)$ e independientemente de su tamaño, siempre existirá una cesta s que será al menos tan preferida que x porque está ubicada en el conjunto $\succsim (x)$ que es cerrado, asimismo siempre tendremos por lo menos una cesta z estrictamente menos preferida que x; es decir, $z \prec x$ debido a que estará ubicada en el complemento del conjunto $\succsim (x)$, $[\succsim (x)]^c = \prec (x)$, el cual es abierto. Esta explicación nos permite identificar expresamente al conjunto cerrado, donde la cesta y es indiferente, y al conjunto donde esta misma cesta es estrictamente preferida, el cual es un conjunto abierto. De esta forma al delimitar cada uno de los conjuntos que pertenecen a X se cancelan posibles zonas de indiferencia.

Existe además otra explicación por la cual se requiere que el conjunto indiferente $\sim(x)$ sea cerrado. Pero para ello necesitamos exponerlo a partir del concepto de punto límite.

En el primer capítulo vimos a grandes rasgos que gracias al tercer axioma algunas conductas discontinuas son desestimadas en el límite. Eso significa, por ejemplo, que para que una sucesión de puntos dentro de un conjunto S sea convergente, es decir para que no se comporte de manera discontinua, se necesita que el límite de esa sucesión sea un punto contenido en el mismo conjunto S. Para que esto sea posible se requiere que el conjunto S sea un conjunto cerrado. Ahora traslademos esta exposición al contexto del conjunto de consumo X.

Supongamos al conjunto indiferente $\sim(x)$, el cual es cerrado y pertenece a X: $\sim(x) \in X$. Ahora supongamos que en ese conjunto existe una cesta de consumo x la cual es un punto límite de $\sim(x)$. Si recordamos la definición de un conjunto cerrado a partir del concepto de punto límite, entonces tenemos que un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos límite. Por lo tanto cuando exista una secuencia de cestas de consumo (x_n) en el $\sim(x)$ tal que su límite es la cesta x, ese límite pertenecerá al conjunto indiferente: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \sim(x)$ debido a que el conjunto indiferente $\sim(x)$ es un conjunto cerrado.

¿Qué sucedería si el conjunto indiferente no fuese cerrado? Lo que ocurriría es que una sucesión de cestas de consumo (x_n) podría converger a una cesta de un conjunto distinto en vez de encontrar su límite dentro del mismo conjunto indiferente. Es decir que sería posible tener zonas de indiferencia respecto a una cesta $x \in \sim(x)$, las cuales se encontrarían fuera del conjunto indiferente lo que descarta la continuidad de las preferencias.

Por lo tanto es indispensable que el conjunto indiferente sea cerrado ya que esta situación garantiza que toda sucesión de cestas de consumo (x_n) dentro de $\sim(x)$ sea convergente, es decir, asegura que toda sucesión de cestas en el conjunto indiferente encontrará su límite en una cesta ubicada dentro de ese mismo conjunto. Una implicación que tenemos de esta situación es que el límite de una sucesión de cestas indiferentes entre sí, es también una cesta indiferente.[17]

[17] ***Ibíd,*** *pp. 209 y 210.*

3.9 CUARTO AXIOMA: NO SACIEDAD LOCAL

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x \in X\ y\ para\ todo\ \varepsilon} > 0\ existe\ alguna\ \boldsymbol{x^* \in B_\varepsilon(x) \cap X}$$

$$\boldsymbol{tal\ que\ \ x^* \succ x}.$$

Cuando consideramos el concepto de no saciedad local, la idea que probablemente nos venga a la cabeza sea la de la imposibilidad de satisfacer todos los deseos que tenga un individuo. Sin embargo la idea básica que nos expresa este axioma es que una vez que hemos elegido un punto, siempre será posible encontrar otro que sea estrictamente preferido, independientemente de lo cerca que se encuentre el punto original. Si lo queremos expresar de una manera un poco más formal podemos decir que si a un punto p que pertenezca a $\mathbb{R}^n_+$ le fijamos una pequeña distancia en su entorno, entonces siempre podremos encontrar otro punto que sea estrictamente preferido al original.

Aplicado a las preferencias del consumidor, la anterior explicación nos dice que si un individuo elige una cesta de consumo x que pertenece al conjunto de consumo X y si además tenemos una bola con centro en x y radio ε que está intersectada con el conjunto de consumo X: $B_\varepsilon(x) \cap X$, entonces siempre podremos encontrar otra cesta de consumo que identificamos como x^*, que pertenece a la intersección de la bola con centro en x y radio ε y el conjunto X, la cual es estrictamente preferida a la cesta de consumo original. Debemos subrayar que esto sucede al margen del tamaño de del radio y de la bola que se interseca con el conjunto X, ya que por muy pequeña que sea siempre encontraremos en ella otra cesta estrictamente preferida.

En la exposición que hicimos del axioma anterior, explicamos que los supuestos que plantea la continuidad permiten descartar posibles zonas de indiferencia subrayando la distinción entre los conjuntos abiertos y cerrados de X. En el caso del axioma de no saciedad local también desestima esta opción pero dentro del mismo conjunto indiferente.

Lo que significa que *el conjunto indiferente nunca es más ancho que un punto singular*[18]. En otras palabras, el cuarto axioma descarta la posibilidad de que existan conjuntos indiferentes gruesos.

Para comprobar que no es posible planteemos el caso contrario. Supongamos que tenemos un conjunto indiferente que es grueso, el cual contiene a dos cestas de consumo x y x^*. Si aplicamos el supuesto que expresa el axioma de no saciedad local, entonces para toda cesta x que pertenezca al conjunto X habrá una bola con centro en x y radio ϵ intersectado con el conjunto X: $B_\varepsilon(x) \cap X$ en la cual siempre encontraremos otra cesta de consumo x^* tal que será estrictamente preferida que x: $x > x^*$, pero eso no es posible porque tanto la cesta x^* como la x se encuentran dentro del conjunto indiferente $\sim(x)$ lo que implica que ambas cestas tendrían que ser indiferentes entre sí, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se descarta la posibilidad de que los conjuntos indiferentes puedan ser gruesos.

3.10 QUINTO AXIOMA: MONOTICIDAD ESTRICTA

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x, x^* \in X, si\ x \geq x^*\ entonces\ x \gtrsim x^*. Mientras\ que}$$

$$\boldsymbol{si\ x \gg x^*\ entonces\ x \succ x^*}.$$

La idea intuitiva que nos ofrece el concepto de monoticidad es que la condición de un consumidor mejora si aumentan las cantidades consumidas de todas las mercancías. Concretamente lo que nos plantea es que si tenemos dos cestas de consumo x y x^* las cuales pertenecen al conjunto de consumo X, si la primer cesta tiene al menos la misma cantidad de bienes que la segunda, entonces la cesta x será al menos tan preferido que la

[18] ***Gravelle Hugh y Rees Ray.*** *Microeconomía, p. 77.*

x^*, es decir $x \gtrsim x^*$. Pero si la cantidad de todas y cada una de las mercancías que componen la cesta x es mayor que la cantidad de todas y cada una de las mercancías que contiene la cesta x^*, entonces la cesta x, será estrictamente preferida que x^*, lo cual se expresa como $x \succ x^*$.

Es importante que nos detengamos un momento a analizar el tipo de restricciones que introduce el axioma de monoticidad estricta, ya que a partir de ellas se generan cambios fundamentales en la ordenación de las preferencias del consumidor.

Hasta el momento ninguno de los axiomas que hemos visto había postulado alguna restricción que condicione las preferencias del individuo respecto a las cantidades de bienes contenidas por las cestas de consumo. Es decir, antes de la monoticidad estricta, un individuo perfectamente hubiera podido elegir una cesta de consumo, cuya composición tuviera menos de alguna mercancía o incluso hubiese podido decidirse por una cesta que tuviera menos de todas las mercancías, sin que por ello hubiera contravenido ninguno de los supuestos que plantean los primeros cuatro axiomas sobre las preferencias.

Pero esta situación cambia sustancialmente cuando introducimos a nuestro análisis las restricciones que supone el quinto axioma. Los supuestos que postula la monoticidad estricta modifican radicalmente la estructura axiomática que conocíamos hasta el momento pues condicionan las preferencias del consumidor de tal forma que éste siempre tenga que decidirse por las cestas de consumo que tengan más mercancías sobre aquellas que tengan menos.

Sin embargo debe existir un incentivo que propicie que los consumidores siempre estén dispuestos a consumir más que menos. Es decir, para que esta lógica pueda funcionar es necesario que las mercancías consumidas por los individuos constituyan bienes económicos. Como vimos en el capítulo uno, los bienes económicos son aquellas mercancías que producen satisfacción al consumidor, en contraposición con los males, que son simplemente aquellas que el consumidor no desea. Por lo tanto, uno de los supuestos más importantes que subyace en la noción de la monoticidad estricta es que las cestas de consumo están conformadas de bienes económicos. Partiendo de este supuesto, los individuos siempre se encontrarán en mejor posición al aumentar las cantidades de bienes económicos consumidos.

En este punto cabe hacer una aclaración. Siempre es posible redefinir el concepto de bien económico si se presenta el caso de que las cestas de consumo estén conformadas por males, de tal manera que nos podamos ajustar nuevamente a los lineamientos de la monoticidad estricta.

Veamos el caso de un individuo tenga que elegir entre cestas de consumo que están constituidas por mercancías que cualquier persona identifica como nocivas, como es el caso del estrés, la basura o el smog. Es claro que en estas circunstancias el quinto axioma es completamente inoperante ya que nadie querría consumir más de una mercancía considerada como perjudicial. Lo que debemos de hacer entonces, es redefinir el concepto de bien económico de tal forma que el bien deseable sea identificado como la ausencia de la mercancía perjudicial.[19] Una vez que hemos hecho esta reconsideración, es fácil asumir que la aspiración de los consumidores no será la adquisición de mayores cantidades de cestas con este tipo de mercancías, sino por el contrario, intentarán deshacerse por completo de ellas. De tal manera que al disminuir la cantidad de estrés, de smog o de basura, simultáneamente mejorará la situación del consumidor.

Para finalizar es importante no pasar por alto dos aspectos que son relevantes en el análisis de este axioma. Por un lado tenemos que la monoticidad estricta implica la no saciedad local. Por lo tanto cuando se cumple el axioma número cinco, automáticamente hemos satisfecho también el axioma de no saciedad local. Por otro lado, debemos comentar un poco acerca de la forma particular que asumen las preferencias de los

[19] ***Varian Hal R.*** *Op. Cit, p. 115.*

consumidores cuando unimos los supuestos que plantea la monoticidad estricta junto con los que postulan los demás axiomas que hemos visto hasta el momento.

Para ver cómo funciona esto veamos un ejemplo. Supongamos que un consumidor tiene preferencias que cumplen con los supuestos que plantean los cinco primeros axiomas. Esto quiere decir que dichas preferencias garantizan la conducta racional del consumidor, son continuas, descartan la existencia de conjuntos indiferentes que sean gruesos y condicionan la elección de cestas de consumo que tengan más bienes.

Pero fijemos nuestra atención en los dos últimos axiomas para poder entender cabalmente la transformación que sufren las preferencias. Debido a los condicionantes que impone el axioma de no saciedad local, los conjuntos indiferentes invariablemente deben ser delgados, lo que significa que no puede haber dos cestas con exactamente el mismo número de mercancías. Si después añadimos los supuestos de la monoticidad estricta nos encontramos con que los consumidores siempre elegirán canastas que posean un mayor número de bienes. A partir de esta situación tenemos que si dos cestas tienen exactamente la misma cantidad de mercancías entonces se trata de la misma cesta, si una cesta posee más de todas las mercancías entonces será estrictamente preferida y si tiene menos de todos los bienes será estrictamente menos preferida.

La consecuencia evidente que nos acarrea esta situación es que la única alternativa que existe para que dos cestas puedan ser indiferentes entre sí es que contengan más de algunos bienes y menos de otros, de tal forma que la carencia y el exceso de bienes se compensen mutuamente. La forma en que se expresa gráficamente esta situación es a través de una curva delgada con pendiente negativa, la cual representa a todas las cestas de consumo que son indiferentes entre sí.

3.11 SEXTO AXIOMA: CONVEXIDAD ESTRICTA

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x_1, x_2} \in \boldsymbol{X\ y\ para\ todo\ \lambda} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}).$$

$$\boldsymbol{Si\ x_1 \neq x_2\ y\ x_1 \succsim x_2\ entonces\ \lambda x_1} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x_2} \succ \boldsymbol{x_2}.$$

Para desarrollar el contenido de este axioma utilizamos básicamente las mismas herramientas que usamos para exponer el tema de los conjuntos convexos. Pero si nos fijamos con mayor detenimiento en las definiciones, nos percataremos que saltan a la vista al menos dos diferencias que hacen distinto el concepto de convexidad que desarrollamos en apartados anteriores respecto a la convexidad estricta que ahora estamos planteando. La primera tiene que ver con al valor de λ, ya que en la convexidad estricta lambda puede asumir cualquier valor en el intervalo de 0 a 1, excepto el 0 y el 1 porque se trata de un intervalo abierto. Mientras tanto, la convexidad se define en un intervalo cerrado, por lo tanto en ella sí es posible elegir los valores extremos 0 y 1 para λ. La segunda hace referencia a la última relación de preferencia que se presenta entre la combinación convexa y la segunda cesta de consumo, ya que la convexidad utiliza la relación de preferencia “al menos tan preferido como” $\succsim$, en tanto que en la convexidad estricta se usa la “estrictamente preferido a” $\succ$.

Si bien es necesario saber cuáles son las diferencias formales entre ambas definiciones, lo realmente importante es saber cuáles son las consecuencias de estas diferencias desde un punto de vista analítico. Es decir, conocer cuáles serán los efectos que tendrán sobre el comportamiento del consumidor. Esto es lo que analizaremos en este apartado y al hacerlo plantearemos los últimos condicionantes que describen la forma que pueden adoptar las preferencias de los consumidores.

Primero veamos cómo se comportan las preferencias de los consumidores bajo la convexidad. La definición formal es básicamente la misma que ya habíamos revisado, sólo que adaptada a este entorno:

$$Para\ todo\ x_1, x_2 \in X\ y\ para\ todo\ \lambda \in [0,1].\ Si\ \ x_1 \gtrsim x_2\ entonces\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \gtrsim x_2$$

Cuando identificamos el conjunto X al principio del capítulo, explicamos en qué consiste la convexidad y desarrollamos un ejemplo en $\mathbb{R}$, donde comprobamos que el resultado de la combinación de dos valores, siempre se localizó en algún punto entre esos dos valores. Si este resultado lo trasladamos al contexto de las preferencias del consumidor entonces tenemos que cualquier cesta de consumo en un intervalo en $\mathbb{R}$ puede ser “al menos tan preferido” como las cestas originales. La consecuencia geométrica de esta situación es que en las preferencias convexas existen “tramos rectos”.[20] Esto se debe por un lado, a que cuando las preferencias asumen esta característica, λ puede incluir los valores “extremos” del intervalo entre 0 y 1 y por otro lado a que se utiliza la relación de preferencia $\gtrsim$ para comparar el resultado de la combinación convexa. Así en el ejercicio que hicimos para unas preferencias que son convexas, una vez que sustituimos los valores de las cestas e hicimos todas las operaciones, el resultado que obtuvimos fue que el valor de una cesta es al menos tan preferido como ella misma.

Como ya desarrollamos un ejercicio para demostrar esta proposición cuando abordamos el conjunto X, no lo repetiremos. Sin embargo, para ayudar a aclarar las diferencias entre la convexidad y la convexidad estricta, desarrollaremos otro ejercicio que nos servirá tanto para explicar esta última como para contrastar las diferencias entre ambos conceptos.

[20] ***Ibíd,*** *p. 116.*

Convexidad estricta.

En el capítulo uno explicamos de manera informal el sexto axioma sobre las preferencias al plantear que si un consumidor tiene que decidir entre dos cestas de consumo, una vez que haya decidido e independientemente de cuál haya sido el resultado de su decisión, una combinación de ambas siempre será estrictamente preferida a cualquiera de las dos cestas en lo individual, las cuales llamamos *"extremas".*

En términos formales el axioma de convexidad estricta nos dice que para todo par de cestas x_1, x_2 que pertenezcan al conjunto de consumo X y para todo valor λ de $\mathbb{R}$ que sea mayor que 0 y menor que 1, $\lambda \in (0,1)$, si la cesta x_1 es distinta a la x_2 y la cesta x_1 es al menos tan preferida que la cesta x_2, entonces el resultado de cualquier combinación convexa de ambas cestas será estrictamente preferido a la cesta x_2, consecuentemente se dice que las preferencias de un consumidor son estrictamente convexas.

Si esta idea la generalizamos para todos los consumos que hagan los individuos entonces podemos decir que los consumidores siempre preferirán la combinación de bienes a especializarse en uno solo, lo cual es una idea bastante usual en la vida cotidiana.

Desarrollemos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ para comprobar matemáticamente esta noción.[21]

Supongamos que tenemos unas preferencias que cumplen con la convexidad estricta, lo que significa que:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ y\ \forall\lambda \in (0,1).\ Si\ x_1 \neq x_2\ y\ x_1 \succsim x_2\ entonces\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \succ x_2$$

[21] *Para ver la referencia del ejemplo revisar* ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Op. Cit, p. 413.*

Como el ejercicio será con vectores en $\mathbb{R}^2$, significa que $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ y $x_2 = (x_2^1, x_2^2)$.

Ahora, si le damos valores a esos vectores tenemos que:

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2) \Longrightarrow \boldsymbol{x_1} = (\mathbf{2}, \mathbf{6})$$

$$x_2 = (x_2^1, x_2^2) \Longrightarrow \boldsymbol{x_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$$

Una vez que tenemos todos los elementos, comencemos a trabajar con la combinación convexa $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ que será el resultado con el que comparemos a la segunda cesta. Lo que debemos de hacer es acomodar z en términos de los vectores $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ y $x_2 = (x_2^1, x_2^2)$, es decir:

$$z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \Longrightarrow$$

$$z = \lambda(x_1^1, x_1^2) + (1-\lambda)(x_2^1, x_2^2) \Longrightarrow$$

$$z = \lambda x_1^1, \lambda x_1^2 + [(1-\lambda)x_2^1, (1-\lambda)x_2^2] \Longrightarrow$$

$$z = (\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1\ , \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2)$$

$$\mathit{Este\ es\ el\ resultado\ de\ la\ combinación\ convexa.}$$

Ahora debemos sustituir los valores de los vectores $x_1, x_2 \in X$ en la combinación convexa así como los valores que asumirá lambda. De acuerdo con la definición de convexidad estricta lambda puede asumir cualquier valor entre 0 y 1 excepto 0 y 1, es decir $\lambda \in (0,1)$. Sin embargo, para contrastar resultados veamos que sucede cuando lambda alcanza los valores extremos 0 y 1, $\lambda \in [0,1]$.

Cuando $x_1 = (x_1^1, x_1^2) \Rightarrow x_1 = (2,6), x_2 = (x_2^1, x_2^2) \Rightarrow x_2 = (7,1)\ y\ \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$

$$Si\ x_1 \gtrsim x_2 \Rightarrow [\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1, \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2] \succ x_2 \Rightarrow$$

$$[(1)(2) + (1-1)7, (1)(6) + (1-1)(1)] \succ (7,1) \Rightarrow$$

$$[2+0, 6+0] \succ (7,1) \Rightarrow (2,6) \succ (7,1)$$

Pero este resultado es una contradicción porque el supuesto del que partimos fue que: $x_1 \gtrsim x_2$, es decir: $(2,6) \gtrsim (7,1)$

Y lo que obtuvimos fue:

$$Si\ (2,6) \gtrsim (7,1) \Rightarrow (2,6) \succ (7,1)$$

Lo cual es claramente falso.

Lo mismo sucede cuando lambda asume el valor 0, $\lambda = 0$.

$$Si\ x_1 \gtrsim x_2 \Longrightarrow [\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1, \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2] \succ x_2 \Longrightarrow$$

$$[(0)(2) + (1-0)7, (0)(6) + (1-0)(1)] \succ (7{,}1) \Longrightarrow$$

$$[0+7, 0+1] \succ (7{,}1) \Longrightarrow (7{,}1) \succ (7{,}1)$$

Lo que también es un resultado falso ya que un valor no puede ser estrictamente preferido a ese mismo valor.

A través de este ejercicio comprobamos que la convexidad estricta excluye la posibilidad de que lambda pueda alcanzar los valores extremos del intervalo entre 0 y 1. Pero ahora veamos qué es lo que sucede cuando se trata de un valor intermedio, por ejemplo ½ (0.5).

Cuando $x_1 = (x_1^1, x_1^2) \Longrightarrow x_1 = (2{,}6), x_2 = (x_2^1, x_2^2) \Longrightarrow x_2 = (7{,}1)\ y\ \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$$Si\ x_1 \gtrsim x_2 \Longrightarrow [\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1, \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2] \succ x_2 \Longrightarrow$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(1-\frac{1}{2}\right)7, \left(\frac{1}{2}\right)(6) + (1-\frac{1}{2})(1)\right] \succ (7{,}1) \Longrightarrow$$

$$\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)7, 3+\left(\frac{1}{2}\right)(1)\right] \succ (7,1) \Longrightarrow (4.5,3.5) \succ (7,1)$$

Lo cual es verdadero ya que la combinación estricta de las cestas originales es estrictamente preferida a cualquiera de las cestas “extremas”. [22]

En términos geométricos, esta situación nos dice que las preferencias que cumplen los supuestos de todos los axiomas, incluido el de convexidad estricta, deben tener una curvatura ligeramente opuesta al origen; además, excluye la posibilidad de que existan tramos lineales en este tipo de preferencias. Una consecuencia directa que tenemos de estos resultados es que la curva resultante sólo puede ser tangente en un punto respecto a una línea recta (por ejemplo una recta presupuestaria).[23]

Asimismo la convexidad estricta asegura que la razón de cambio a la que un consumidor está dispuesto a intercambiar una mercancía por alguno de los bienes restantes del conjunto de consumo sea decreciente. Eso significa que si una persona tiene mucho del bien a, entonces estaría dispuesta a renunciar a una cantidad relativamente grande de ese bien para poder adquirir otro bien, por ejemplo el bien b, del cual posee una cantidad relativamente pequeña. Pero eso sucedería sólo en el primer intercambio, ya que en la medida en que vaya adquiriendo una mayor cantidad del bien b, entonces estará dispuesto a renunciar a una cantidad cada vez menor del bien a. En otras palabras y usando la jerga económica convencional, el supuesto de la convexidad estricta garantiza una tasa marginal de sustitución decreciente.[24]

Una vez que hemos analizado todos los axiomas sobre las preferencias, el siguiente paso es examinar la evolución de sus formas geométricas. Por lo tanto, lo que haremos será

[22] *Veremos una versión gráfica de este mismo ejemplo en el siguiente capítulo.*
[23] ***Villar Antonio.*** *Op. Cit, p. 30.*
[24] ***López Sánchez María Guadalupe.*** *Op. Cit, p. 188.*

analizar los cambios en un gráfico en $\mathbb{R}^2$ que sufren las preferencias de los consumidores en la medida en que les incorporamos cada uno de los supuestos que plantean los seis axiomas que acabamos de revisar. Esta labor la realizaremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO CUATRO

FORMACIÓN DE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA A PARTIR DE LOS AXIOMAS SOBRE LAS PREFERENCIAS [1]

4.1 INTRODUCCIÓN

Entramos al último capítulo de este trabajo que es al mismo tiempo la conclusión de todo nuestro recorrido.

Hasta el momento hemos concentrado todos nuestros esfuerzos al análisis de un tipo especial de preferencias del consumidor. Nos referimos a aquellas que satisfacen los supuestos que plantean los seis axiomas que hemos revisado. Estas preferencias son conocidas como regulares.

Asimismo vimos que las preferencias pueden ser representadas gráficamente a través de una poderosa herramienta que se denomina curvas de indiferencia, las cuales definimos

[1] *La mayoría de los gráficos que se utilizan en este apartado han sido tomados de* ***Jehle Geoffrey A y Reny Philip J.*** *Advanced Microeconomic Theory. Capítulo I.*

como la representación geométrica de los puntos que simbolizan la combinación de bienes (o canastas de bienes) frente a los cuales el consumidor se mantiene indiferente. [2]

La forma que asumen las curvas de indiferencia regulares son las más comunes y son de hecho, con las que inician prácticamente todos los manuales de economía. Sin embargo es necesario mencionar que éstas no son únicas. Las preferencias dependen de los gustos de los consumidores, los cuales cambian en función de cada individuo. Por lo tanto existen un sinnúmero de preferencias distintas a las regulares y la forma en que éstas pueden ser representadas a través de curvas de indiferencia es también inmensa. Todo depende de los supuestos que satisfagan las distintas preferencias de los consumidores. En la primera parte de este capítulo veremos dos de sus ejemplos más característicos –sustitutos y complementos perfectos-, primero desde su perspectiva matemática y después desde la económica. Posteriormente dedicaremos todo un subtema aparte para analizar un tema esencial en este capítulo: las preferencias regulares.

Abordaremos este tema desde la perspectiva geométrica, la generación de las hipérbolas equiláteras a partir de las secciones cónicas y la generación de la ecuación de la hipérbola. Más adelante trazamos un breve estudio de las hipérbolas equiláteras así como el análisis de la función Cobb-Douglas y su gráfica.

Finalmente en la última parte del capítulo abordamos la formación de las curvas de indiferencia a partir de los axiomas sobre las preferencias. En él graficamos la evolución de las preferencias de un consumidor en la medida en que se les incorporan cada uno de los axiomas. Paso a paso analizamos como cada supuesto impone una nueva restricción que moldea las preferencias de tal manera que se altera completamente su forma inicial hasta alcanzar la de las hipérbolas equiláteras.

[2] ***Miller Le Roy.*** *Microeconomía, p. 65*

4.2 LAS PREFERENCIAS DE LOS CONSUMIDORES

Sustitutos perfectos

El nombre de esta forma de preferencias del consumidor proviene del tipo de relación que existe entre ciertos bienes. Se dice que dos bienes son sustitutos perfectos si un consumidor está dispuesto a intercambiarlos a una tasa constante. Si tenemos dos bienes a y b, y una persona tiene preferencias de este tipo, entonces para poder acceder a una unidad del bien a el individuo debe renunciar a una unidad del bien b si la tasa de cambio es de uno a uno. Evidentemente también puede presentarse el caso de que la persona en cuestión decida cambiar no uno sino dos o más bienes de a por uno sólo de b. Aquí lo realmente importante no es que el intercambio se de uno a uno, sino que la tasa de cambio sea constante.

La fórmula general para este tipo de preferencias es la siguiente:

$$\alpha x + \beta y = C$$

Donde α y β son dos constantes positivas, mientras que C es una constante cualquiera.

A partir de esa fórmula podemos deducir claramente que la representación gráfica de estas preferencias, su curva de indiferencia particular, es una línea recta con pendiente negativa. Si consideramos un mapa completo de curvas de indiferencia entonces nos encontraremos con líneas rectas paralelas con pendiente negativa.

A diferencia de lo que vimos en el anterior capítulo, donde las preferencias que cumplían con todos los supuestos de los seis axiomas tenían una razón de cambio decreciente, en este tipo de preferencias está situación queda descartada porque su tasa de cambio permanece constante a lo largo de toda la curva de indiferencia. El ejemplo característico de este tipo de preferencias es cuando se tienen dos distintas marcas de un producto que es básicamente el mismo. Puede tratarse de dos marcas de aceite comestible que tengan las mismas características. Ambos tienen los mismos componentes y ambos sirven para cocinar, por lo tanto a algunas personas les puede parecer lo mismo consumir uno que otro.

En el siguiente gráfico se muestran las curvas de indiferencia que representan unas preferencias del tipo sustitutos perfectos.

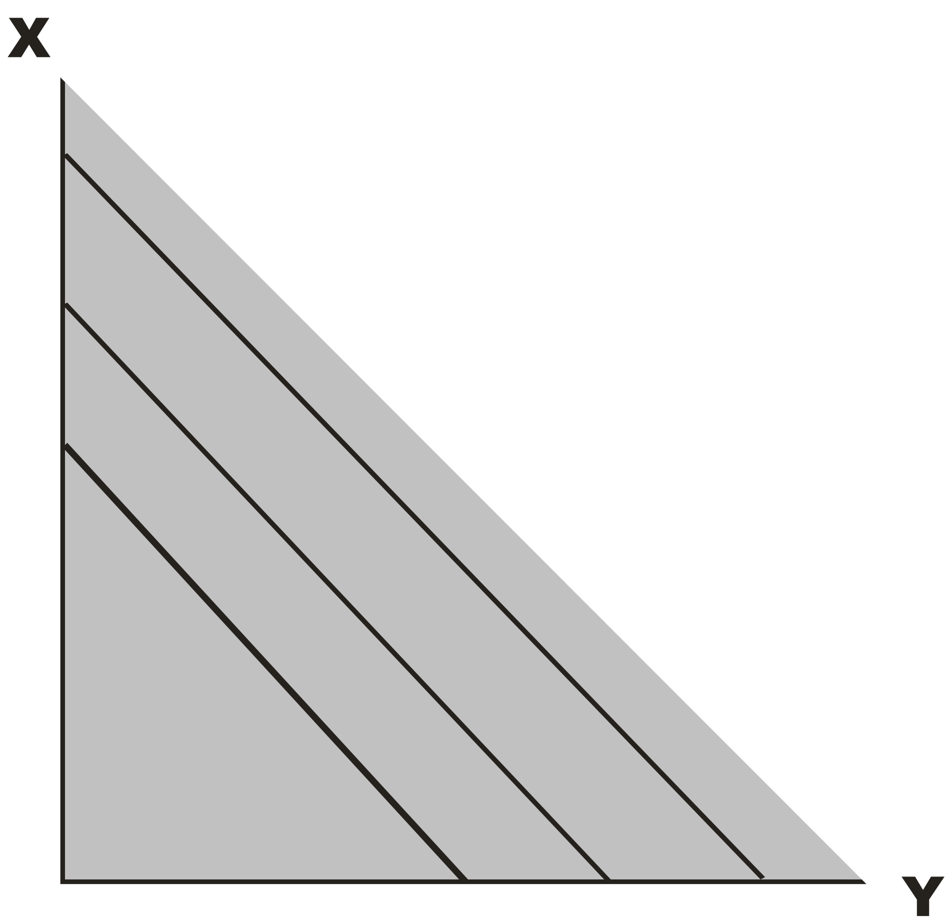


Gráfico I que representa las preferencias de bienes sustitutos perfectos.

Complementos perfectos

El caso contrario de los sustitutos perfectos son los bienes conocidos como complementos perfectos. La característica principal de este tipo de bienes es que siempre se consumen juntos, por lo que se podría decir que de alguna manera se complementan. Existen muchos ejemplos de mercancías con estas características, uno de ellos podría ser el consumo de café negro y azúcar, ya que existen muchas personas que consumen estos dos bienes sólo de manera simultánea, lo que significa que para ellas no tendría ningún valor una cantidad extra de azúcar sin más café, asimismo, es muy probable que no consuman más café sin una cantidad extra de azúcar. Pero el ejemplo paradigmático de este tipo de bienes son los zapatos. Los individuos que usan calzado siempre lo hacen en ambos pies, pues carece de sentido o al menos parecería extraño, llevar puesto sólo un zapato.

La ecuación que describe estas preferencias es la siguiente:

$$C = min(\alpha x, \beta y)$$

Donde nuevamente α y β son parámetros positivos, mientras que el operador min indica que el punto óptimo es aquel en donde no existe exceso de ninguno de los dos bienes:

$$\alpha x = \beta y$$

La forma que asume este tipo de preferencias es una especie de L donde el vértice indica el punto en que los bienes son consumidos en una proporción fija. En el caso de los zapatos, la proporción en que el individuo siempre preferirá consumirlos será en pares, ya que de nada le sirve si adquiriera sólo un zapato derecho extra o sólo un izquierdo más. Enseguida mostramos la representación gráfica de los complementos perfectos.

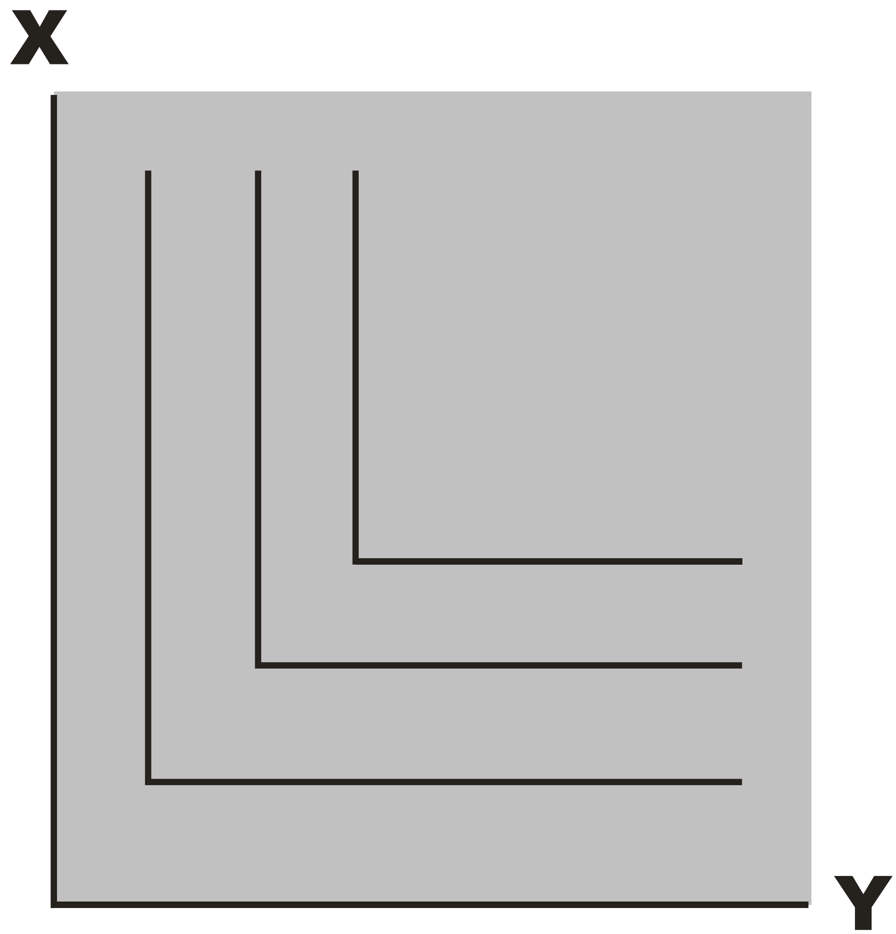


Gráfico II que representa las preferencias de bienes complementos perfectos.

Preferencias Regulares

Este tipo de preferencias son las conocidas y las más ampliamente usadas es economía. Debido a este hecho es que decidimos hacerlas el centro de nuestro trabajo. En términos matemáticos las preferencias regulares constituyen hipérbolas equiláteras pero también son conocidas en el ambiente económico como Cobb-Douglas.

En el siguiente apartado profundizaremos el estudio de este tipo de preferencias en el aspecto puramente geométrico. Posteriormente revisaremos las etapas para construir su respectivo gráfico de acuerdo a su significado económico.

4.3 PREFERENCIAS REGULARES: UNA APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA

Las secciones cónicas

Las secciones cónicas fueron estudiadas ampliamente por los antiguos griegos. Tradicionalmente se le atribuye a Apolonio de Pérgamo el descubrimiento de sus propiedades a partir de su libro “Las cónicas”. Es en este libro donde se aplican por primera vez los términos parábola, elipse e hipérbola tal y como los conocemos ahora. Enseguida daremos un breve repaso de la forma en que se obtienen cada una de estas curvas a partir del corte de un plano.

Un cono circular recto de dos mantos es una superficie que se obtiene al girar una recta ℓ sobre un eje. Al formar esta figura se pueden identificar varias de sus partes. En la parte superior se forma un círculo que tiene un centro al cual llamaremos O. También hay un punto que queda fijo al girar la recta ℓ que se conoce como vértice del cono, el cual identificaremos como V. Cada recta que pasa por V y que se encuentra en la superficie se llama generatriz del cono. La recta perpendicular que cruza el centro del círculo O y que pasa por vértice del cono V se conoce como eje del cono.

El ángulo α formado por el eje del cono y cualquiera de las generatrices se llama semiángulo central del cono.[3]

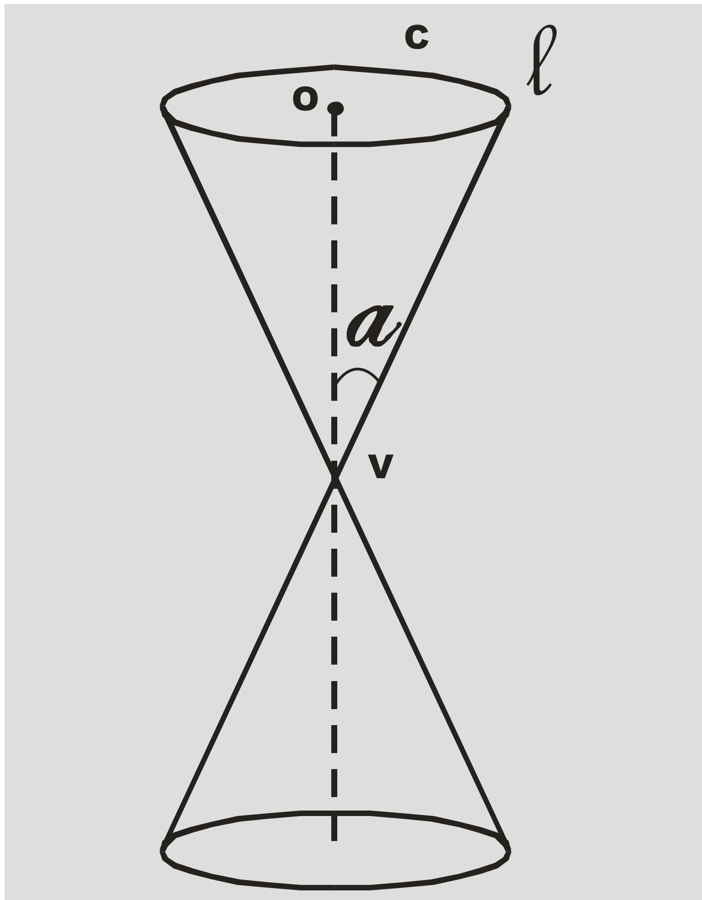


Gráfico III que representa la figura a partir de la cual se desprenden las secciones cónicas.

Las curvas que se obtienen al cortar el cono de dos mantos con un plano se conocen como secciones cónicas.

[3] ***Oteyza Elena, et al.*** *Geometría analítica, p. 136*

Las Hipérbolas

Supongamos que α es el semiángulo central del cono y que el plano forma un ángulo $0 \leq \beta \leq 90°$ con el eje del cono, entonces si $0 < \beta < \alpha$ la cónica originada al corte se denomina $hipérbola$.

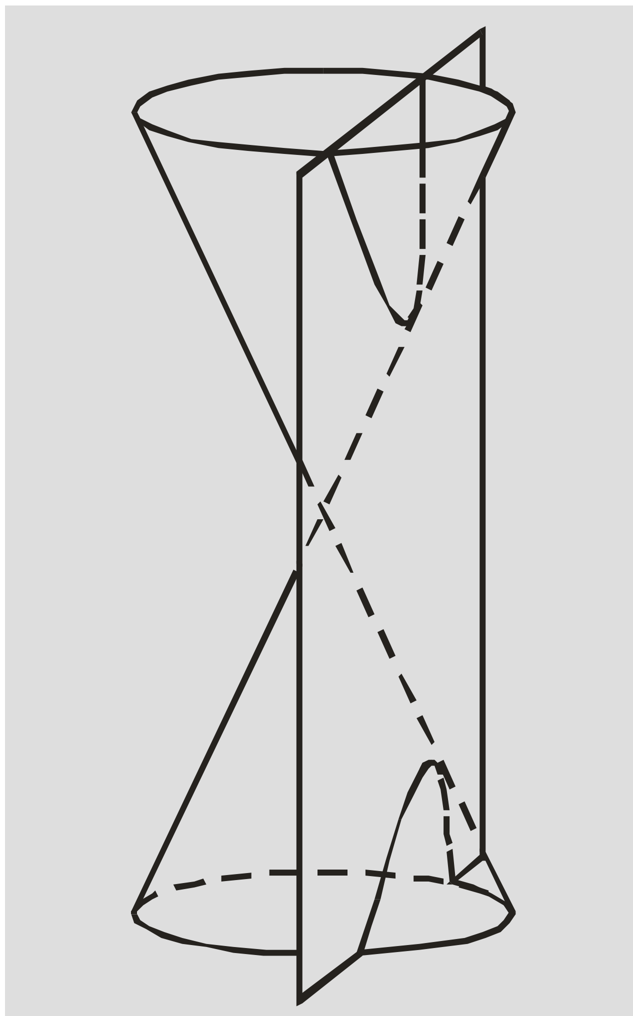


Gráfico IV que representa el corte del plano que genera las hipérbolas.

La palabra hipérbola proviene del vocablo griego que significa exceso. Nuevamente debemos referirnos al libro de “Las cónicas” de Apolonio de Pérgamo como el primer estudio acerca del tema. Matemáticamente una hipérbola se define como el conjunto de puntos geométricos cuyas distancias a dos puntos fijos tiene una diferencia constante. Con esto queremos decir que tomamos la diferencia de la distancia mayor menos la distancia menor. Los dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama centro de la hipérbola.[4]

La línea que contiene a los focos se denomina eje transversal, es en este eje donde se localizan los focos. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje transversal se llama eje conjugado. La hipérbola consiste en dos curvas separadas, llamadas ramas, que son simétricas respecto al eje transversal, al eje conjugado y al centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola con el eje transversal son los vértices, V_1 y V_2 de la hipérbola.[5]

Las asíntotas de la hipérbola son las líneas rectas que se aproximan a las ramas de las hipérbolas en la medida en que se extienden indefinidamente pero que nunca se tocan. El origen del vocablo proviene del griego que significa "aquello que no cae". Las asíntotas no forman parte propiamente de las hipérbolas pero sirven de guía para graficarla.

La ecuación de la hipérbola

Supongamos que el eje transversal coincide con el eje X y la distancia del centro a un foco es c, entonces un foco estará a $F_1 = (-c, 0)$ y el otro a $F_2 = (c, 0)$. Ahora supongamos también que la diferencia constante desde cualquier punto P sobre la hipérbola a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$. Entonces podemos expresar la distancia de P a los focos como:

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$$

[4] ***Ibíd,*** *p. 296.*
[5] ***Sullivan Michael.*** *Trigonometría y Geometría Analítica, p. 329.*

Si expresamos la anterior ecuación por medio de la fórmula de la distancia y la trabajamos algebraicamente entonces tenemos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(cx-a^2)^2=\left(\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2ca^2x+a^4=a^2[(x-c)^2+y^2]$$

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Ahora supongamos que $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2/a^2b^2 = a^2b^2/a^2b^2$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

El resultado que obtenemos no es otra cosa que la ecuación de la hipérbola con centro en $(0,0)$, focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y vértices en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Abajo mostramos su gráfica que es un ejemplo de una hipérbola horizontal con centro en el origen y con focos en el eje X.

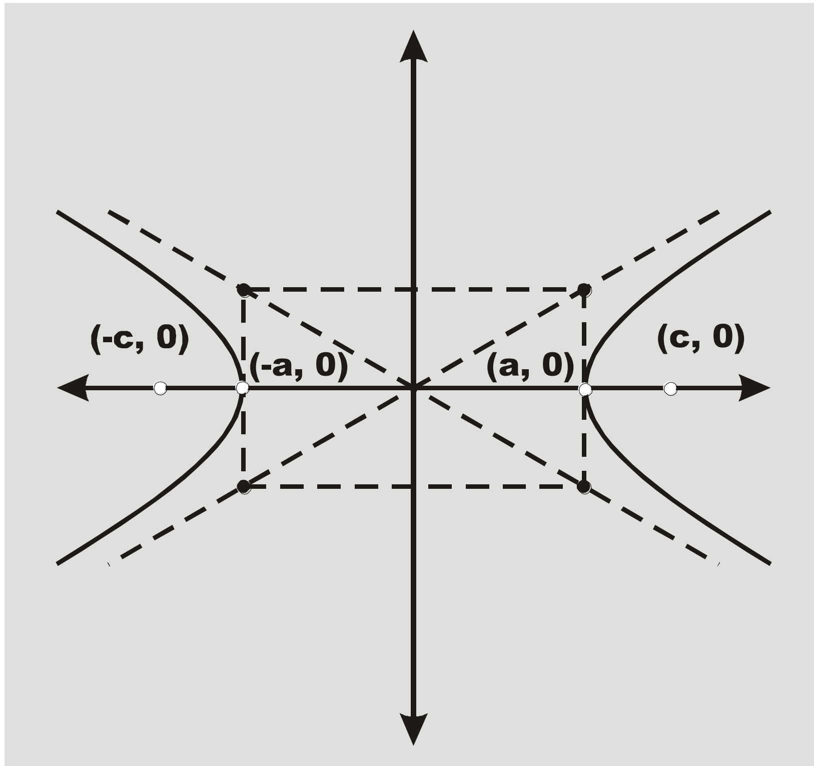


Gráfico V de una hipérbola horizontal con centro en el origen y focos en el eje X.

Las hipérbolas equiláteras[6]

Una hipérbola equilátera es una figura geométrica perteneciente a las secciones cónicas cuyo centro son las coordenadas $(0,0)$ y cuyas asíntotas son los ejes coordenados, los cuales acompañan a las curvas pero nunca las tocan.

A partir de la ecuación original de las cónicas podemos determinar la que define a las hipérbolas equiláteras.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

[6] Los conceptos de este apartado fueron tomados del curso de Microeconomía en la Especialidad de Teoría Económica del ciclo 2009-2010 en el Posgrado de Economía de la UNAM impartido por la Profra. María Guadalupe López Sánchez.

Si igualamos algunos de los coeficientes a cero tenemos lo siguiente:

$$A = C = D = E = 0$$

$$(0)x^2 + Bxy + (0)y^2 + (0)x + (0)y + F = 0$$

$$Bxy + F = 0$$

Al graficar este resultado tenemos:

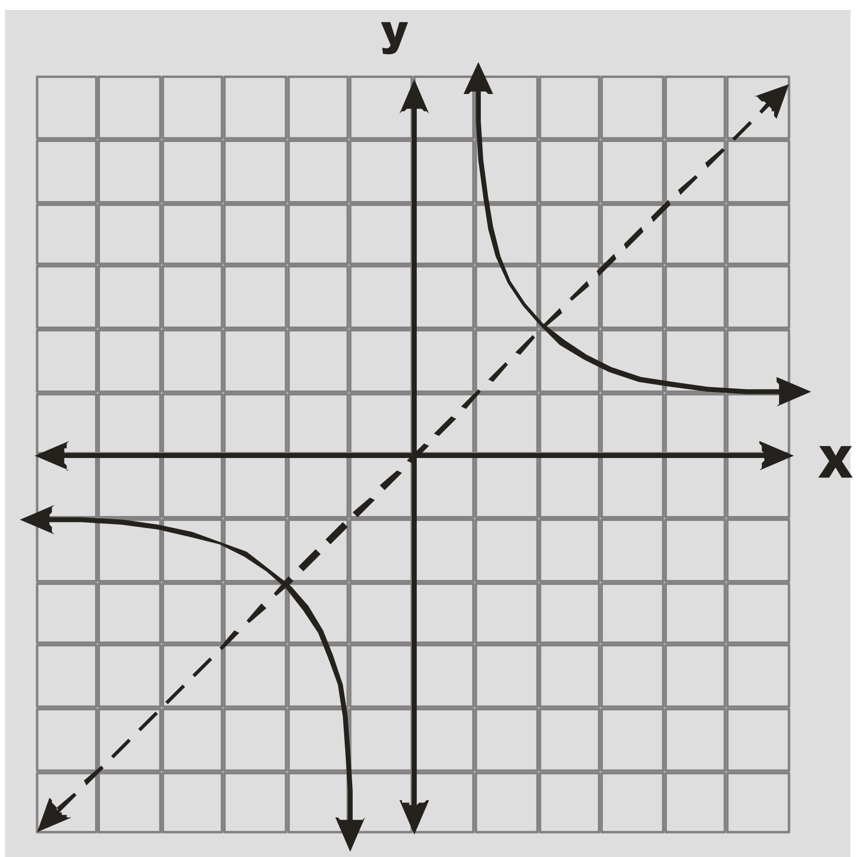


Gráfico VI que representa las hipérbolas equiláteras.

Ahora si de la anterior ecuación despejamos y lo que obtenemos es lo siguiente:

$$Bxy + F = 0$$

$$y = \frac{-F}{Bx} = \frac{-F}{B}\ \frac{1}{x}$$

Trabajaremos posteriormente con esta última ecuación, pero momentáneamente regresemos a la expresión $Bxy + F = 0$ la cual puede asumir diversas formas, ahora desarrollaremos una de ellas en la que introducimos exponentes α y β en x y en y.

$$Bx^{\alpha}y^{\beta} + F = 0$$

La suma de α y β puede dar como resultado cualquier número, no precisamente 1, las únicas características que deben cumplir son las siguientes:

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$

- $\alpha \neq 0\ \ y\ \ \beta \neq 0$

Trabajemos algebraicamente esta última ecuación desde su forma original hasta que finalizamos el despeje de y.

$$Bx^{\alpha}y^{\beta} + F = 0$$

$$Bx^{\alpha}y^{\beta} = -F \implies y^{\beta} = \frac{-F}{Bx^{\alpha}} \implies y^{\beta} = \frac{-F}{\beta} * \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$(y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}} = (\frac{-F}{\beta} * \frac{1}{x^{\alpha}})^{\frac{1}{\beta}} \implies y = (\frac{-F}{\beta})^{\frac{1}{\beta}} * (\frac{1}{x^{\alpha}})^{\frac{1}{\beta}}$$

En este punto podemos reducir algunos términos de la siguiente manera. Como en última instancia tanto$(\frac{-F}{\beta})$ como $\frac{1}{\beta}$ son constantes, entonces podemos sustituir toda la expresión $(\frac{-F}{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ por la letra G que representa una sola constante, el resultado que obtendríamos sería el siguiente:

$$y = G * (\frac{1}{x^{\alpha}})^{\frac{1}{\beta}}$$

Debemos detenernos en este punto para analizar un aspecto muy importante que se presenta en esta ecuación. Acabamos de decir que G representa una constante. Entonces podríamos preguntarnos ¿Qué sucede si hacemos cada vez más grande a G? Cuando la constante G crece, es decir pasa de de G a G^* lo que sucede es que la curva que describe a la hipérbola se desplaza del centro hacia la parte superior derecha del cuadrante. Entonces si graficamos la ecuación original e incrementamos la constante G, volvemos a graficar y volvemos a incrementar G y así sucesivamente lo que obtenemos será un conjunto de hipérbolas equiláteras que se alejan cada vez más del centro. Si graficamos esas curvas solamente en el primer cuadrante nos encontraremos con algo que nos será muy familiar, pues hallaremos que ese conjunto de hipérbolas equiláteras no es otra cosa más que una familia de curvas de indiferencia, como las que hemos estudiado en los capítulos anteriores.

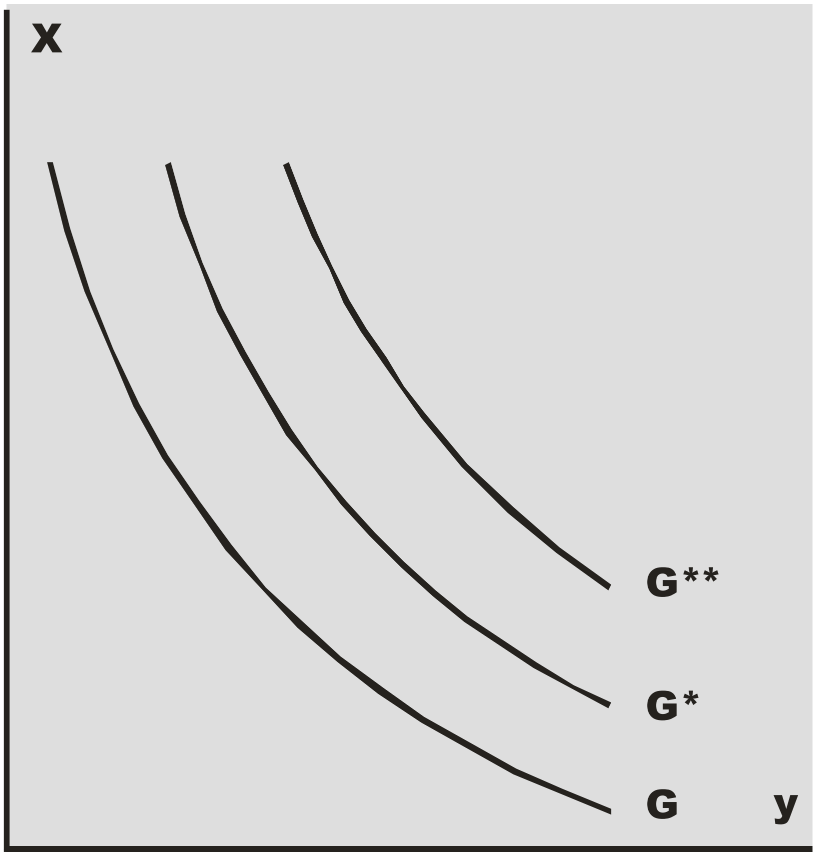


Gráfico VII que representa una familia de curvas de indiferencia regulares.

Función Cobb-Douglas

La función Cobb-Douglas se desarrolló alrededor de 1927 para expresar algunas estimaciones que Paul H. Douglas, un economista y senador de los Estados Unidos, había hecho respecto a la distribución de la renta nacional entre el trabajo y el capital en Estados Unidos. El matemático Charles W. Cobb determinó que existía una función con esas características. La función que obtuvieron fue la siguiente:

$$q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

En términos generales nosotros podemos expresar esta función como el tipo específico de hipérbolas equiláteras de la forma $u(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ tal que está definida para $x, y \in (0,\infty) \subset \mathbb{R}$ y $\forall \bar{u}(x,y) > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$.

Cuando $\alpha + \beta = 1$ se puede manipular de tal manera que se puede plantear de diversas formas:

- $\alpha + \beta = 1$
- $\alpha = 1 - \beta$
- $\beta = 1 - \alpha$
- $x^{\alpha}y^{\beta} = u(x,y)$
- $x^{\alpha}y^{1-\alpha} = u(x,y)$

Por lo general el tamaño relativo de α y β expresa la importancia relativa que un individuo concede a cada uno de los bienes. Ahora trabajaremos algebraicamente la función con la que empezamos el análisis de las hipérbolas equiláteras, para obtener la función Cobb-Douglas.

$$Bx^{\alpha}y^{\beta} + F = 0$$

$$Bx^{\alpha}y^{\beta} = -F \implies x^{\alpha}y^{\beta} = \frac{-F}{B}$$

Nuevamente cambiamos la constante $\frac{-F}{B}$ por C y obtenemos lo siguiente:

$$x^{\alpha}y^{\beta} = C$$

Veamos el caso en que $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff \alpha = \beta$; $x^{\alpha}y^{\beta} = C$ donde $C = 1$ y $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 1 \implies y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$(y^{\frac{1}{2}})^2 = (\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})^2 \implies y = \frac{1}{x}$$

La forma que adquiere esta ecuación es la siguiente:

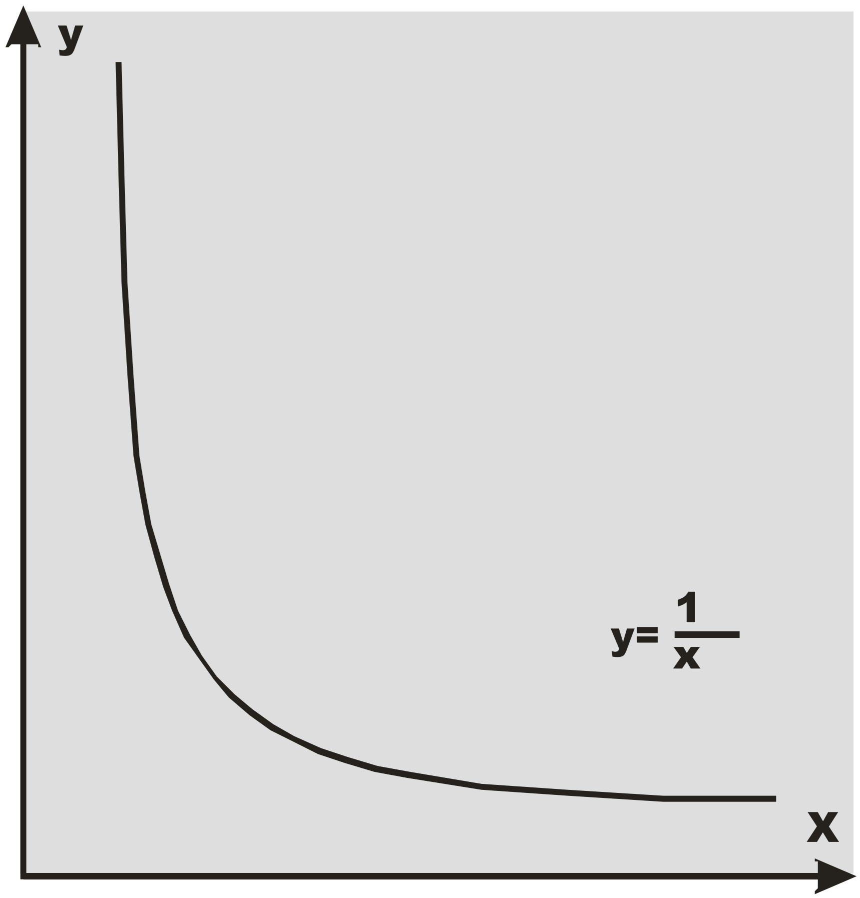


Gráfico VIII que representa una función del tipo Cobb-Douglas.

La función del tipo Cobb-Douglas es una de las que se usan con mayor frecuencia en economía. No sólo para exponer funciones de producción, sino también en la teoría del consumidor ya que se utilizan para expresar un tipo especial de preferencias: Las preferencias regulares.

Una vez que hemos aprendido el concepto geométrico de las curvas de indiferencia regulares, ahora necesitamos saber cómo se construyen desde el enfoque de la teoría económica, es decir, necesitamos saber cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que las preferencias del consumidor asuman esta forma. Nuestro siguiente paso será analizar la evolución gráfica que experimentan estas preferencias en la medida que incorporamos los supuestos de cada uno de los seis axiomas.

4.4 GRÁFICA DE LAS PREFERENCIAS QUE SATISFACEN LOS AXIOMAS DE ORDEN

Matemáticamente los dos primeros axiomas sobre las preferencias, Completitud y Transitividad, son conocidos como los axiomas de orden. Formalmente los definimos de la siguiente manera:

Completitud

$$\boldsymbol{Sea\ X\ un\ conjunto\ y\ sea\ \gtrsim una\ relación\ de\ preferencia\ sobre\ el\ conjunto\ X}\ .$$

$$\forall\ \boldsymbol{x_1, x_2} \in \boldsymbol{X, se\ verifica\ x_1 \gtrsim x_2\ o\ bien\ x_2 \gtrsim x_1}.$$

Transitividad

$$\boldsymbol{Sea\ X\ un\ conjunto\ y\ sea\ \gtrsim una\ relación\ de\ preferencia\ sobre\ el\ conjunto\ X}\ .$$

$$\forall\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3} \in \boldsymbol{X, si\ x_1 \gtrsim x_2}\ \wedge\ \boldsymbol{x_2 \gtrsim x_3\ entonces\ x_1 \gtrsim x_3}.$$

En el caso de la completitud lo que explica es que si un conjunto adopta este supuesto, entonces todos sus elementos son comparables entre sí. Gracias a esta característica los consumidores jamás se verán paralizados por la indecisión a la hora de elegir entre dos productos ya que la completitud les permite discernir plenamente de entre ambas, la que sea la más deseable.

El axioma de transitividad plantea que el comportamiento de un consumidor debe ser consistente. Lo que significa que las decisiones que tome un individuo de acuerdo a sus preferencias deben ser coherentes con la lógica del ordenamiento que ha establecido.

Como vimos en el segundo capítulo, si las preferencias de los individuos cumplen con los axiomas de orden entonces podemos decir que son racionales. Las personas organizan de manera coherente sus decisiones de consumo de tal forma que pueden establecer una jerarquía que les permite ordenar los bienes del más preferido hasta el menos preferido de acuerdo a sus preferencias.

¿Cómo podemos expresar esta situación de manera gráfica?

Supongamos que tenemos una sesta de consumo x que pertenece al conjunto de consumo $X,\ x \in X$. Si además las preferencias de un consumidor $\boldsymbol{C}$ están representadas por tres subconjuntos del conjunto $X,$ que identificamos como los conjuntos estrictamente preferido a $x,\ \succ(x),$ el estrictamente no preferido a $x,\ \prec(x)$ y finalmente el conjunto indiferente a $x,\ \sim(x)$. Si graficamos todos estos elementos en el plano bidimensional y suponemos que este conjunto de preferencias satisfacen plenamente los axiomas de continuidad y transitividad, entonces nos encontraremos con lo siguiente:

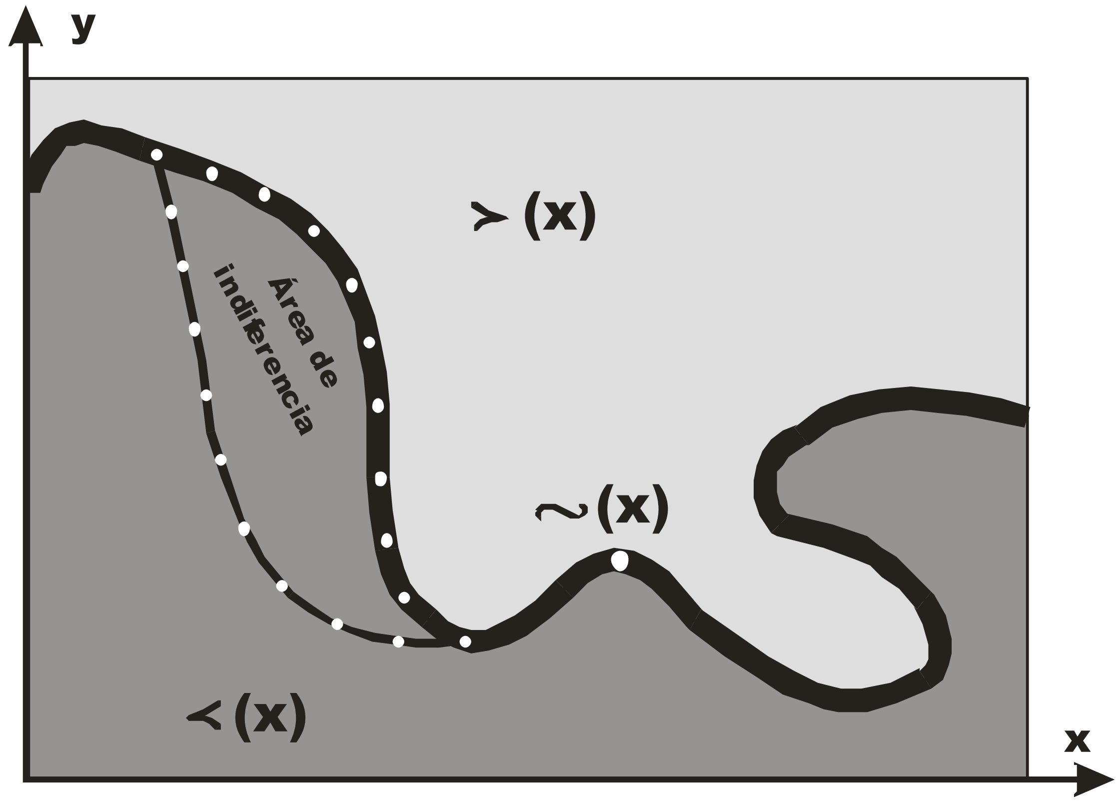


Gráfico IX que muestra las preferencias que satisfacen los axiomas de orden.

La gráfica que representa a estas preferencias se parece muy poco a las gráficas de preferencias que estamos acostumbrados a ver en los libros. Podemos apreciar que su estructura es realmente peculiar ya que la línea que la describe tiene un trazo muy grueso, también que posee una forma bastante irregular, con áreas enteras de indiferencia, así como quiebres y dobleces a lo largo de toda la curva.

Sin embargo por extraña que nos parezca esta curva de indiferencia, la forma que adquiere es perfectamente coherente con el supuesto que hemos elaborado en el sentido de que las preferencias del consumidor satisfacen plenamente las condicionantes de los dos primeros axiomas. Veamos por qué.

La completitud exige que el consumidor sea capaz de comparar dos cestas cualesquiera. En la estructura que hemos propuesto hasta ahora, esta situación es factible en todo momento ya que, por ejemplo, podemos comparar la cesta de consumo x con cualquier otra cesta en cualquiera de los tres subconjuntos que representan cada una de las preferencias. Al poder confrontar un par de cestas de cualquier conjunto, los individuos siempre podrán determinar cuál de las dos es la más deseable, desestimando la posibilidad de que la indecisión los paralice. Por otro lado la transitividad exige que una vez que el consumidor ha tomado una decisión, esta debe ser coherente con la lógica del ordenamiento que ha establecido. Esta condición también es satisfecha ya que si el consumidor compara a la cesta de consumo x con otras dos que pertenezcan ya sea al conjunto estrictamente menos preferido, indiferente, o estrictamente preferido, a través de la relación de preferencia $\succsim$, el resultado que obtendremos será enteramente consistente con el sentido de estas preferencias.

Hasta ahora hemos aplicado solamente dos axiomas a las preferencias del consumidor y el resultado que obtuvimos es el de una curva de indiferencia bastante rara. Veamos que sucede cuando aumentamos el número de condicionantes a estas preferencias.

4.5 GRÁFICA DE LAS PREFERENCIAS QUE SATISFACEN LOS AXIOMAS HASTA LA CONTINUIDAD

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{el\ conjunto\ es\ al\ menos\ tan\ preferido\ } \succsim (\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{y\ el\ conjunto\ no\ mejor\ que\ } \precsim (\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{son\ cerrados\ en\ } \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}.$$

La exposición intuitiva que utilizamos para abordar este axioma explicaba que cuando un consumidor tiene que elegir entre dos cestas de consumo x_1 y x_2; si el consumidor decide que x_1 es preferido a x_2, entonces todas las cestas que se encuentren convenientemente cerca de x_1 también serán preferidos a x_2.

La definición formal del tercer axioma nos dice que las preferencias del consumidor son continuas si y sólo si los conjuntos $\succsim (x)$, “al menos tan preferido” y el $\precsim (x)$ “no mejor que” son cerrados. A partir de una de las propiedades de los conjuntos cerrados -que nos dice que el resultado de la intersección de dos conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado- llegamos a la primera deducción importante durante el estudio de este axioma: el conjunto indiferente también es un conjunto cerrado debido a que es el resultado de la intersección de los conjuntos $\succsim (x)$ y $\precsim (x)$, es decir $\succsim (x) \cap \precsim (x) = \sim (x)$.

En el tercer capítulo tuvimos la oportunidad de estudiar a los conjuntos $\succsim (x)$, “al menos tan preferido” y al $\sim(x)$ “indiferente” a partir de los conceptos de punto límite y punto frontera. De esta manera, partiendo del supuesto de que el conjunto indiferente es cerrado, vimos que toda sucesión de cestas dentro $\sim(x)$ es convergente ya que tienen un límite que pertenece al mismo conjunto indiferente, lo que significa que el límite de una sucesión de cestas indiferentes entre sí, es también una cesta indiferente. En ese mismo análisis confirmamos que si una cesta es el punto frontera del conjunto $\succsim (x)$ “al menos tan preferido”, entonces para toda bola con centro en y y radio ε: $B_\varepsilon(y)$ e independientemente de su tamaño, siempre existirá una cesta s que será al menos tan preferida que x y una cesta z que será estrictamente menos preferida a x.

Ambas explicaciones nos permitieron identificar expresamente a los conjuntos cerrados y diferenciarlos de los que son abiertos. A través de esta delimitación nos fue posible desestimar la existencia de posibles zonas de indiferencia. Ahora veamos cómo podemos aplicar lo anterior a las preferencias de nuestro consumidor $\boldsymbol{C}$.

En el Gráfico IX podíamos observar un área considerablemente grande que contiene el símbolo $\sim(x)$, la cual identificamos como una zona de indiferencia. Esa zona de indiferencia entre los conjuntos estrictamente preferido $\succ(x)$, el indiferente $\sim(x)$, y el estrictamente no preferido $\prec(x)$, posibilita la manifestación de conductas discontinuas "en el límite" por parte del consumidor, es decir que "en el límite" un consumidor considera como igualmente preferidas a cestas de consumo que en otro caso no tendrían la misma valoración. Esta situación permite que una cesta x que pertenece al conjunto indiferente $x \in \sim(x)$, pueda ser indiferente respecto a otras cestas que no pertenecen a ese mismo conjunto, o que una sucesión de cestas de consumo x_n pueda converger a una cesta de un conjunto distinto en vez de encontrar su límite dentro del mismo conjunto indiferente.

Para poder descartar este tipo de conductas así como las extensas áreas de indiferencia que son una de sus expresiones necesitamos el axioma de continuidad. Si a las preferencias del consumidor $\boldsymbol{C}$ -las cuales satisfacen los primeros dos axiomas- le agregamos el supuesto de que cumpla también el de continuidad, entonces el gráfico que las representa se modifica de manera sustancial. Concretamente veremos que desaparece la extensa zona de indiferencia que se presentaba entre los conjuntos indiferente $\sim(x)$, el estrictamente preferido $\succ(x)$ y el estrictamente no preferido, $\prec(x)$, como se muestra en el Gráfico X que presentamos enseguida.

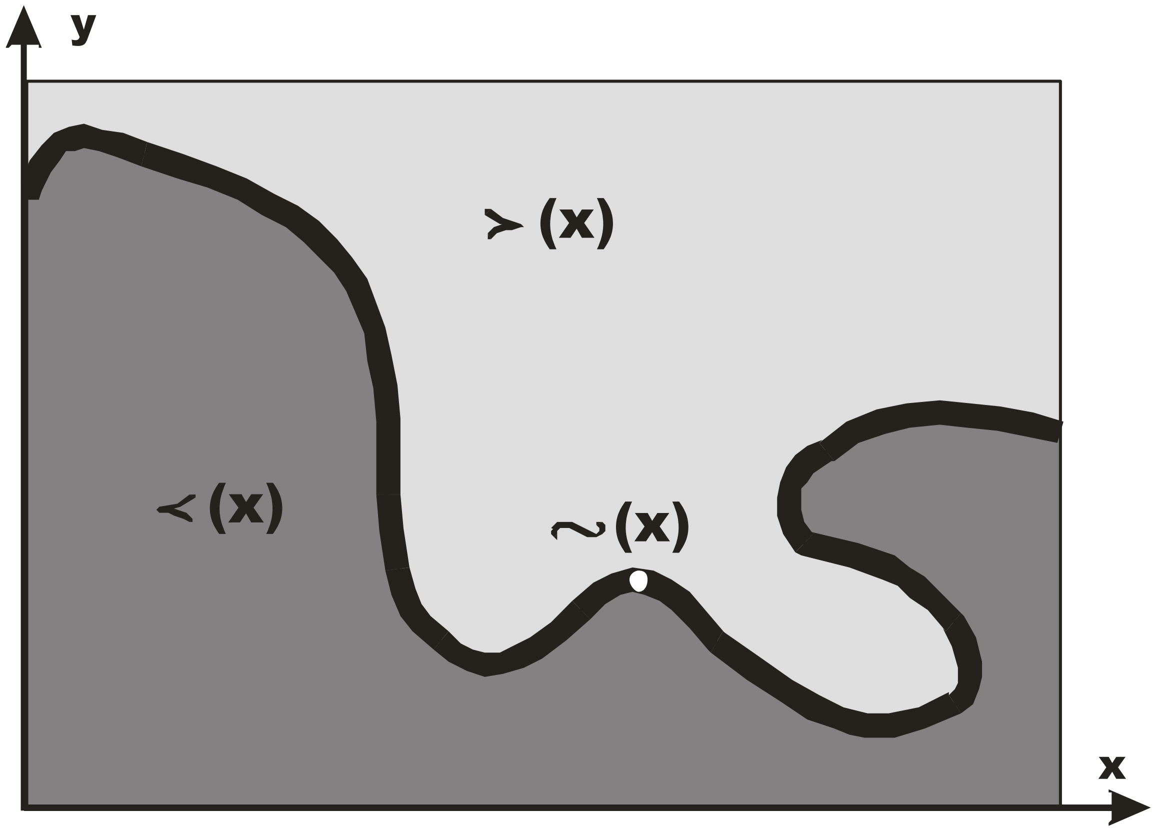


Gráfico X que muestra las preferencias que satisfacen los tres primeros axiomas.

4.6 GRÁFICA DE LAS PREFERENCIAS QUE SATISFACEN LOS AXIOMAS HASTA LA NO SACIEDAD LOCAL

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x} \in \boldsymbol{X\ y\ para\ todo\ \varepsilon} > 0\ existe\ alguna\ \boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{B_\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{tal\ que\ \ x^* \succ x}.$$

El axioma de no saciedad local nos dice que si un individuo elige una cesta de consumo x que pertenece al conjunto de consumo X, si además tenemos una bola con centro en x y radio ε que está intersectada con el conjunto de consumo X: $B_{\varepsilon}(x) \cap X$, entonces siempre podremos encontrar otra cesta de consumo que identificamos como x^{*}, que pertenece a la intersección de la bola con centro en x y radio ε y el conjunto X, la cual es estrictamente preferida a la cesta de consumo original. Debemos subrayar que esto sucede al margen del tamaño de del radio y de la bola que se interseca con el conjunto X, ya que por muy pequeña que sea siempre encontraremos en ella otra cesta estrictamente preferida.

La principal conclusión que podemos obtener de la aplicación de este axioma es que se descarta la posibilidad de que el conjunto indiferente sea grueso ya que cuando las preferencias satisfacen la no saciedad local entonces aquel nunca podrá ser más ancho que un punto singular.[7] Apliquemos esta conclusión a nuestro ejercicio.

La última modificación que sufrieron las preferencias del consumidor $\boldsymbol{C}$ fue cuando se eliminaron las zonas de indiferencia a partir de la aplicación del tercer axioma (del supuesto de la continuidad). Vayamos nuevamente al Gráfico X pero ahora dirijamos nuestra atención a la curva que representa al conjunto indiferente $\sim(x)$. Podemos observar que es una línea continua que tiene un trazo bastante grueso. Eso significa que dentro de ese conjunto cabe más de una cesta de consumo (o más de un punto singular), como se puede ver en la imagen.

[7] ***Gravelle Hugh y Rees Ray.*** *Microeconomía, p. 77.*

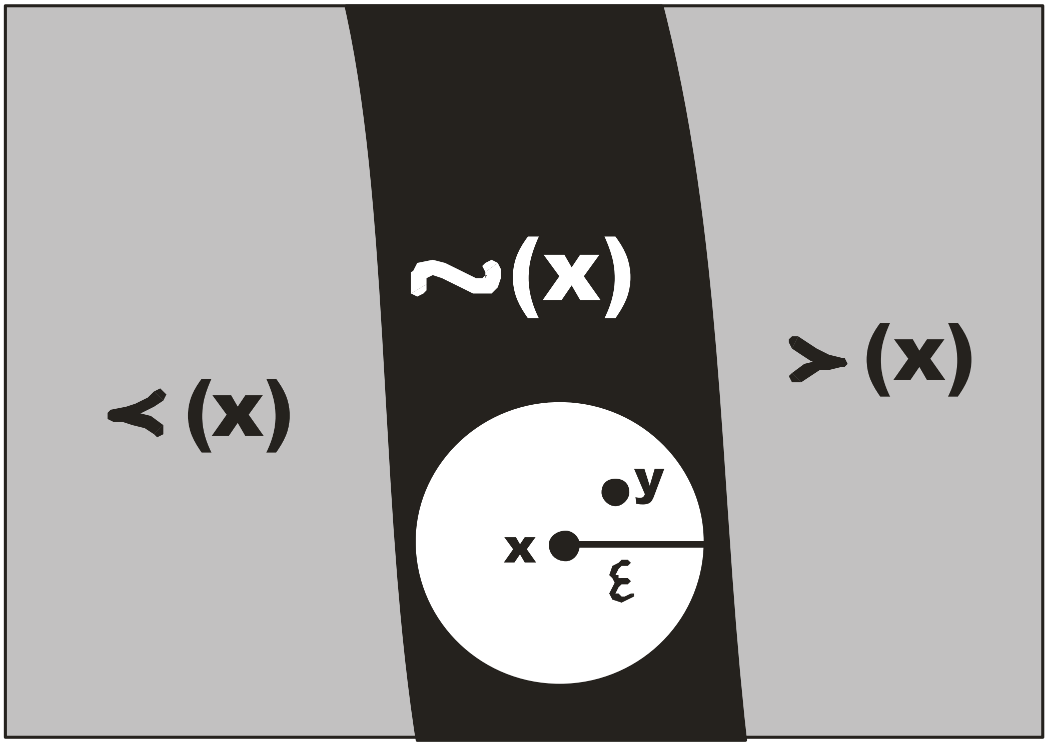


Gráfico XI que muestra a un conjunto indiferente grueso.

Pero esta situación se modifica completamente cuando incorporamos a las preferencias del consumidor $\boldsymbol{C}$ el axioma de no saciedad local , debido a que este supuesto nos dice que una vez que el consumidor se ha decidido por una cesta -por ejemplo la cesta x que pertenece al conjunto indiferente- e independientemente de lo cerca que se encuentre la opción elegida, siempre podremos encontrar otra cesta que sea estrictamente preferida. La consecuencia que obtenemos es que el conjunto indiferente $\sim(x)$ no puede ser grueso ya que si partimos del supuesto de que incluso la cesta más cercana a x es estrictamente preferida, entonces todas las cestas que rodean a x, incluso las más cercanas, deben ubicarse en un conjunto distinto a al conjunto indiferente $\sim(x)$, reduciendo la anchura de este a la de un punto singular, es decir no mayor a la de la cesta x, como se muestra en el Gráfico XII.

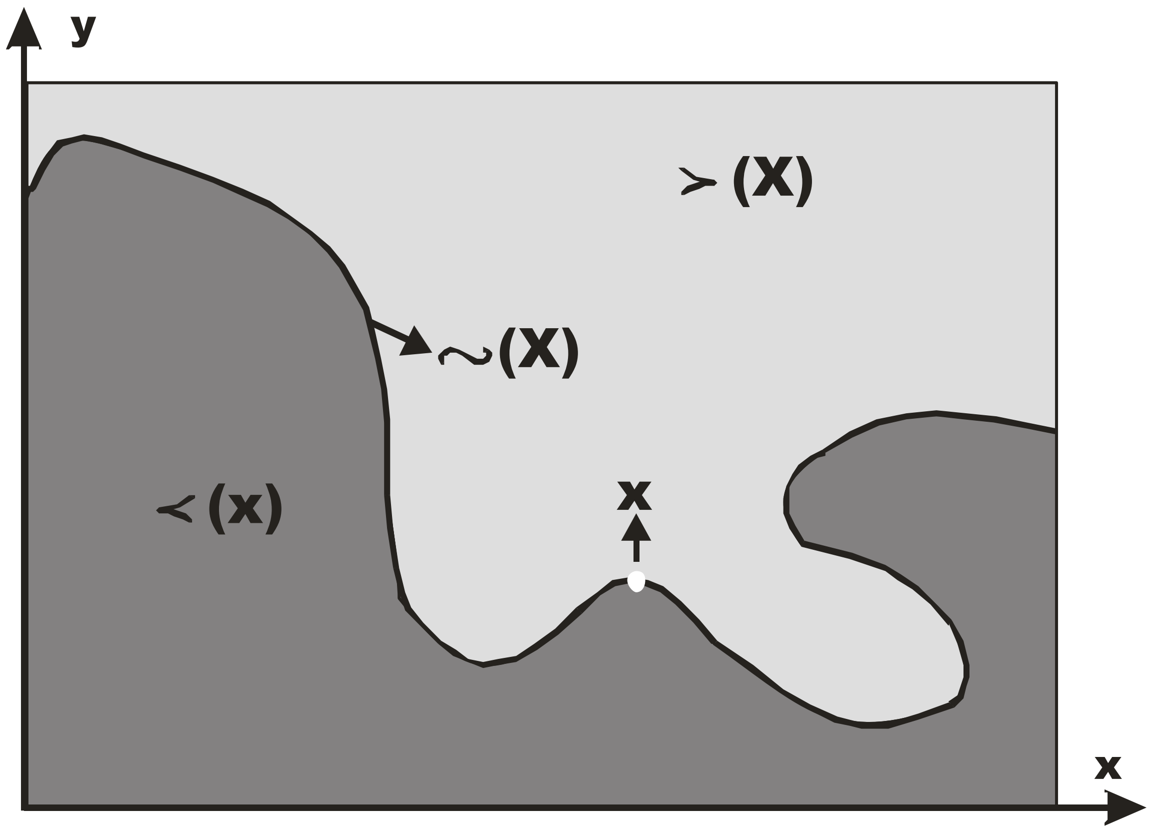


Gráfico XII que representa a las preferencias que satisfacen los cuatro primeros axiomas.

4.7 GRÁFICA DE LAS PREFERENCIAS QUE SATISFACEN LOS AXIOMAS HASTA LA MONOTICIDAD ESTRICTA

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x, x^* \in X, si\ x \geq x^*\ entonces\ x \succsim x^*. Mientras\ que}$$

$$\boldsymbol{si\ x \gg x^*\ entonces\ x \succ x^*.}$$

Lo que nos plantea el axioma cinco es que si tenemos dos cestas de consumo x y x_1 las cuales pertenecen al conjunto de consumo $X,$ si la primer cesta tiene al menos la misma cantidad de bienes que la segunda, entonces la cesta x será al menos tan preferido que la $x_1,$ es decir $x \gtrsim x_1$. Pero si la cantidad de todas las mercancías que componen la cesta x es mayor que todas las mercancías que contiene la cesta $x_1,$ entonces la cesta $x,$ será estrictamente preferida que x_1, lo cual se expresa como $x \succ x_1$.

El resultado que obtenemos al aplicar este axioma es que el consumidor siempre tendrá que optar por las cestas de consumo que contengan más mercancías, relegando aquellas que tengan menos.

Para que podamos aplicar cabalmente esta definición, existe una condición que debemos tener en cuenta. Nos referimos a que los consumidores deben elegir entre cestas de consumo que estén constituidas por bienes económicos. Como vimos anteriormente, los bienes económicos son aquellas mercancías que producen satisfacción al consumidor. Si efectivamente las cestas de consumo están constituidas por bienes económicos, entonces al aplicar los cuatro axiomas anteriores más el supuesto de monoticidad estricta se presenta la siguiente situación: si dos cestas tienen exactamente la mismas mercancías entonces se trata de la misma cesta, si una cesta posee más de todas las mercancías entonces será estrictamente preferida y si tiene menos de todos los bienes será estrictamente menos preferida. La siguiente imagen expresa gráficamente esta idea.

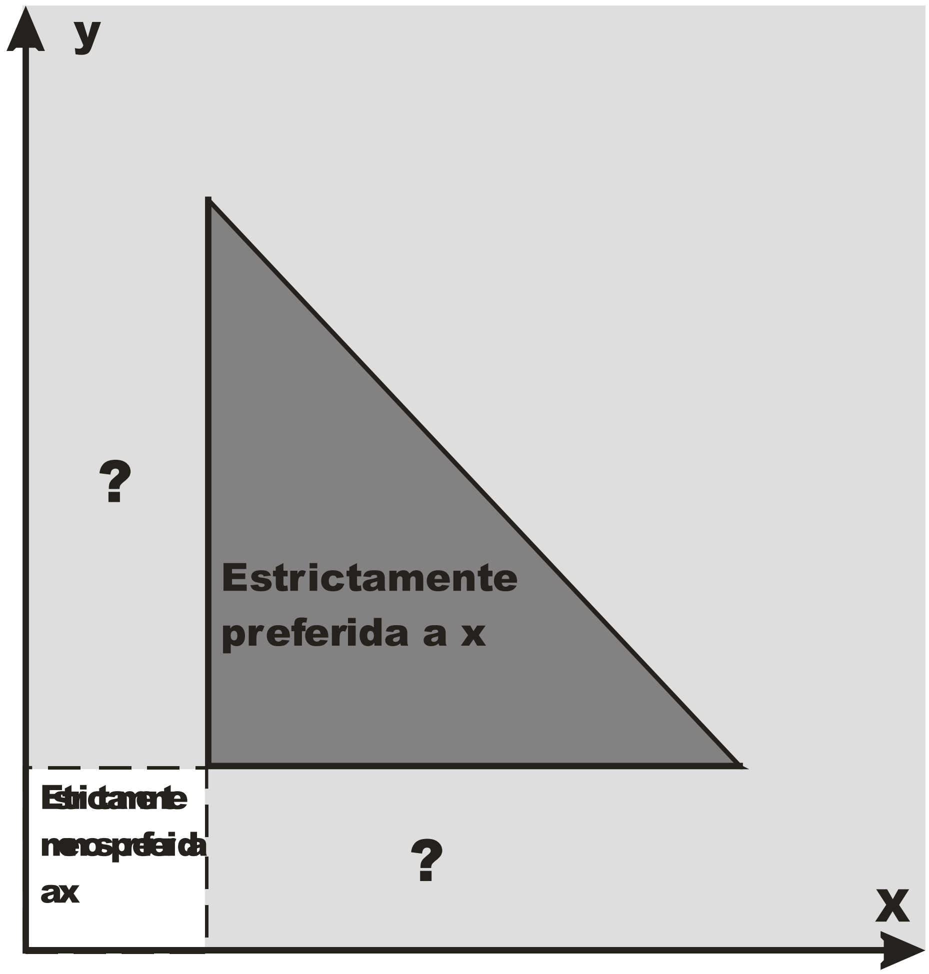


Gráfico XIII que muestra las zonas en que se ubican las cestas que son estrictamente preferidas y las que son estrictamente menos preferidas a x.

Regresando a nuestro ejercicio, hasta el momento las preferencias del consumidor C satisfacen los primeros cuatro axiomas. Su representación gráfica ha descartado las zonas de indiferencia y el trazo de la curva es ahora delgado, pero aún sigue manteniendo una forma un tanto indefinida.

Si aplicamos a las preferencias de C los criterios que hemos visto hasta el momento entonces podremos identificar el área donde se ubicaran las cestas que son estrictamente preferidas y las que son estrictamente menos preferidas a x. Pero aun faltaría determinar algo muy importante. Necesitamos encontrar a las cestas que son indiferentes a x. Para poder localizarlas debemos buscar en las áreas en las que aparece el signo de interrogación, ya que en estas zonas se encuentran las cestas de consumo que contienen más de algunos bienes y menos de otros tomando como referencia la cesta x. El conjunto de todas las cestas de consumo que son indiferentes entre sí es aquel en donde el exceso y la escasez de bienes se compensan mutuamente. La forma en que se expresa gráficamente esta situación es a través de una curva delgada con pendiente negativa que representa al conjunto de todas las cestas que son indiferentes a x, como lo muestra a continuación el Gráfico XIV.

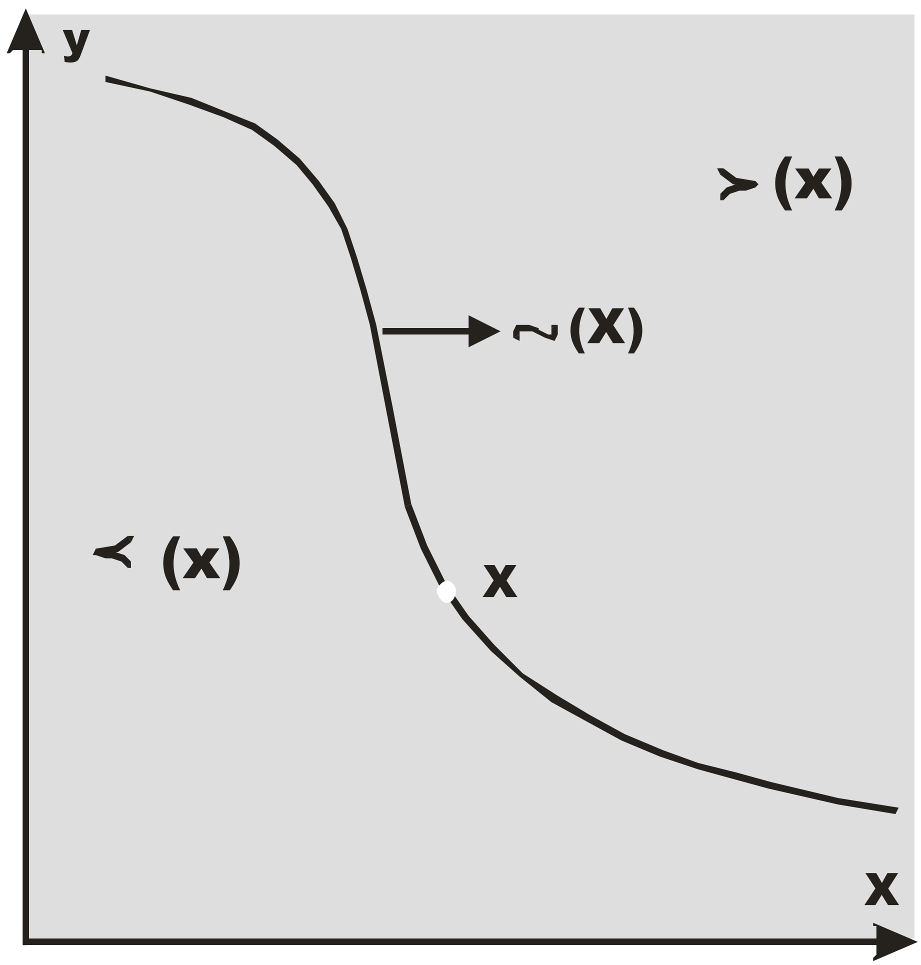


Gráfico XIV que muestra las preferencias que satisfacen los cinco primeros axiomas.

En esta última imagen podemos ver que se va definiendo cada vez más la forma que asumirá la curva de indiferencia que representa a las preferencias de nuestro consumidor C. Las características que posee hasta el momento la acercan cada vez más a la forma de las de las curvas de indiferencia regulares. Sin embargo aun no está completo el trabajo. Aún nos falta añadirle una propiedad a las preferencias de nuestro consumidor para que puedan alcanzar finalmente la forma de una hipérbola equilátera. Esa característica es la que abordaremos a continuación.

4.8 GRÁFICA DE LAS PREFERENCIAS QUE SATISFACEN LOS AXIOMAS HASTA LA CONVEXIDAD ESTRICTA

$$\boldsymbol{Para\ todo\ x_1, x_2 \in X\ y\ para\ todo\ \lambda \in (0, 1).}$$

$$\boldsymbol{Si\ x_1 \neq x_2\ y\ x_1 \succsim x_2\ entonces\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \succ x_2.}$$

En términos formales el axioma de convexidad estricta nos dice que para todo par de cestas x_1, x_2 que pertenezcan al conjunto de consumo X y para todo valor λ de $\mathbb{R}$ que sea mayor que 0 y menor que 1, $\lambda \in (0,1)$, si la cesta x_1 es distinta a la x_2 y la cesta x_1 es al menos tan preferida que la cesta x_2, entonces el resultado de cualquier combinación convexa de ambas cestas será estrictamente preferido a la cesta x_2, consecuentemente se dice que las preferencias de un consumidor son estrictamente convexas. De manera más simple, podemos interpretar la definición anterior de la siguiente manera: a la hora de consumir, los individuos prefieren la combinación de bienes en vez de especializarse en uno solo.

Hasta el axioma cinco, las preferencias de C habían adquirido una serie de características que iban perfilando cada vez más su forma: una línea delgada, continua, sin baches o sobresaltos, con una pendiente negativa y en la que se han delimitado perfectamente a los conjuntos que representan a las diferentes preferencias. Si ahora añadimos el supuesto que implica el axioma número seis veremos que las preferencias alcanzarán su forma definitiva: una curva en la que la parte media del "arco" se sitúa ligeramente opuesta al origen. Esto se debe a que el resultado que obtenemos de la combinación convexa siempre será estrictamente preferido a las cestas originales. Más adelante explicaremos esto a través de un ejemplo. Por ahora sólo subrayamos que la convexidad estricta descarta por completo la existencia de tramos lineales en su representación gráfica, a diferencia de la convexidad que si lo permite. En la siguiente imagen podemos ver un ejemplo de ambos casos.

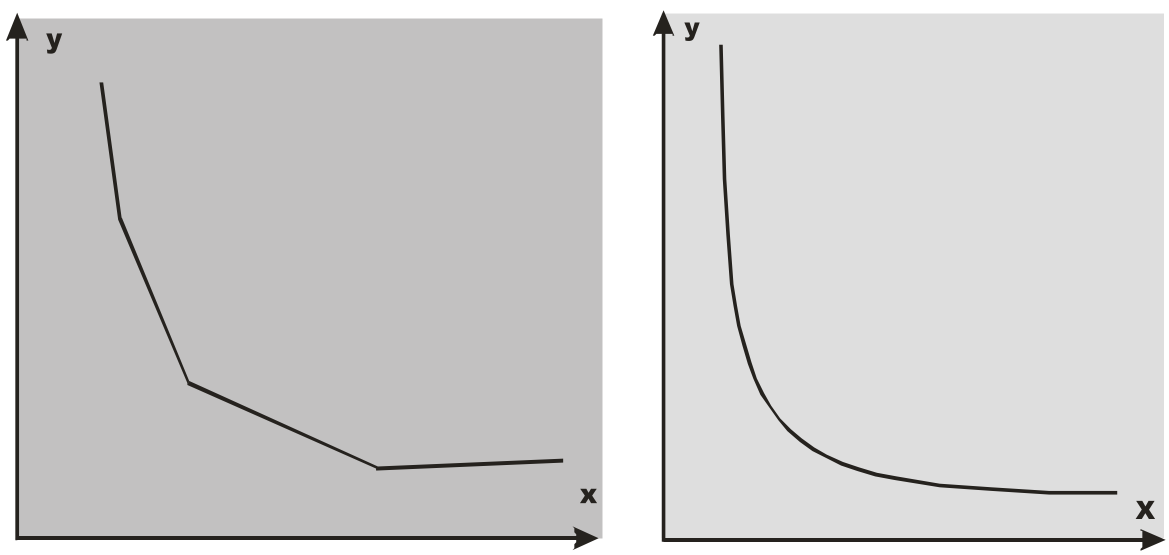


Gráfico XV que muestra un ejemplo de preferencias que satisfacen la convexidad y otro que asumen la convexidad estricta.

En el capítulo anterior hicimos un ejercicio en $\mathbb{R}^2$ para comprobar matemáticamente la convexidad estricta. Ahora retomaremos ese ejercicio para fines gráficos. Lo utilizaremos para confirmar que las preferencias que cumplen con los supuestos de los cinco axiomas que hemos revisado más el axioma de convexidad estricta asumen la forma de las curvas de indiferencia regulares.

Los supuestos de los que partimos en el ejercicio fue que teníamos unas preferencias que cumplían con la convexidad estricta:

$$\forall\ x_1, x_2 \in X\ y\ \forall\lambda \in (0,1).\ Si\ x_1 \neq x_2\ y\ x_1 \succsim x_2\ entonces\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \succ x_2$$

Asimismo teníamos dos vectores que identificábamos como $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ y $x_2 = (x_2^1, x_2^2)$

Los valores que asumían esos vectores eran los siguientes:

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2) \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = (\mathbf{2}, \mathbf{6})$$

$$x_2 = (x_2^1, x_2^2) \Rightarrow \boldsymbol{x_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$$

Después trabajamos algebraicamente la combinación convexa de tal forma que igualamos z en términos de los vectores $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ y $x_2 = (x_2^1, x_2^2)$, obteniendo el siguiente resultado:

$$z = (\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1\ , \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2)$$

Luego sustituimos los valores de los vectores x_1, x_2 así como los valores que asumirá lambda λ. Cuando utilizamos los valores extremos de 0 y 1 para lambda (situación no permitida por la convexidad estricta pero que lo hicimos sólo para contrastar los valores alcanzados) comprobamos que los resultados que obtuvimos eran falsos debido a que el primero expresaba que $(2,6) \succ (7,1)$, lo cual no es incorrecto porque partimos del supuesto de que $(2,6) \succsim (7,1)$. La inexactitud del segundo resultado fue aún más evidente ya que declaraba que $(7,1) \succ (7,1)$, y ciertamente un valor no puede ser estrictamente preferido a ese mismo valor.

Con los anteriores resultados confirmamos la imposibilidad de usar valores extremos del intervalo entre 0 y 1 para lambda en el marco de la convexidad estricta.

Sin embargo cuando lamba asume el valor intermedio de ½ (0.5) nos encontramos con un resultado completamente distinto Veamos por qué:

Cuando $x_1 = (x_1^1, x_1^2) \implies x_1 = (2,6), x_2 = (x_2^1, x_2^2) \implies x_2 = (7,1)\ y\ \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$$Si\ x_1 \succsim x_2 \implies [\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1, \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2] \succ x_2 \implies$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(1-\frac{1}{2}\right)7, \left(\frac{1}{2}\right)(6) + (1-\frac{1}{2})(1)\right] \succ (7,1) \implies$$

$$\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)7, 3 + \left(\frac{1}{2}\right)(1)\right] \succ (7,1) \implies (4.5,3.5) \succ (7,1)$$

Al graficar los resultados tenemos lo siguiente:

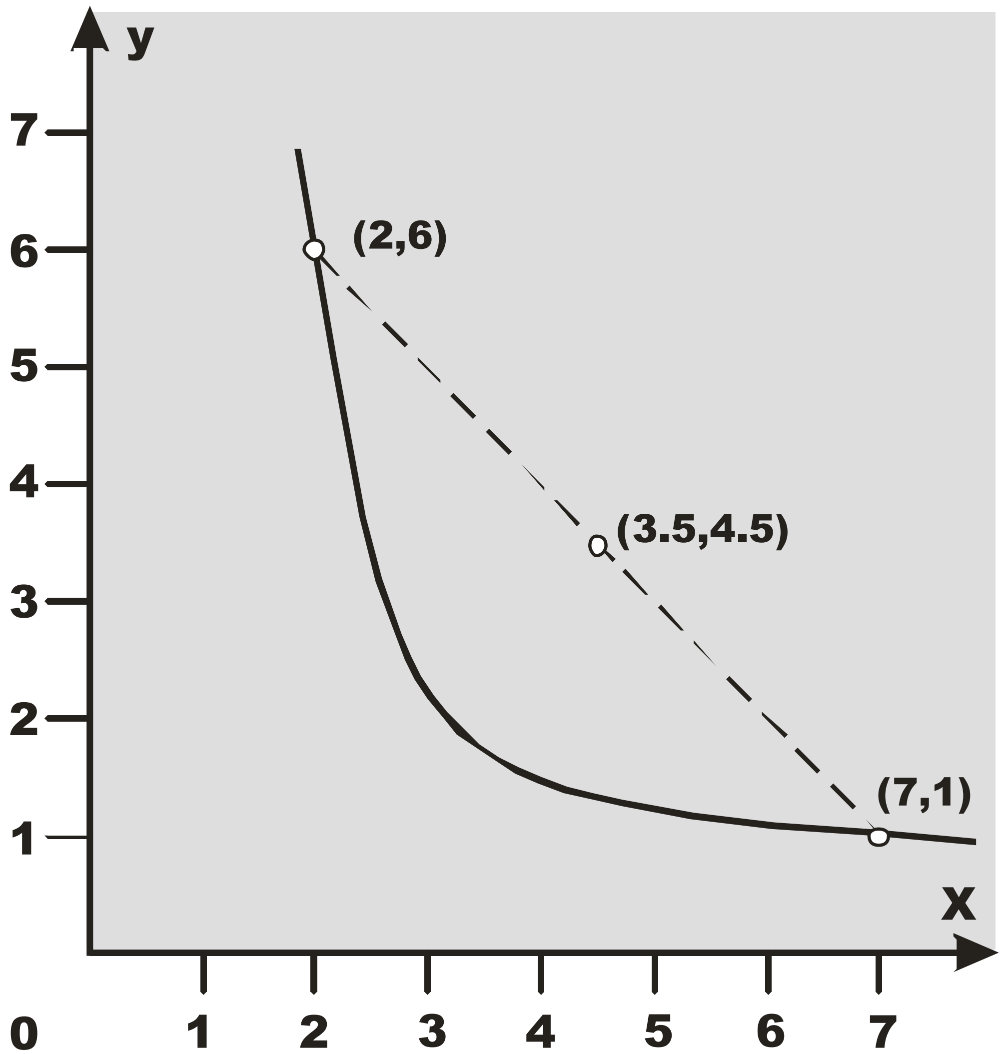


Gráfico XVI que muestra unas preferencias que satisfacen los seis axiomas.

Al ver esta imagen inmediatamente nos percatamos por qué no es posible incluir los valores extremos de lamba (0 y 1) en la combinación convexa; sus resultados se sitúan sobre la curva de indiferencia, lo que implica que ambos son indiferentes a las cestas de consumo originales y no estrictamente preferidos como lo requiere la definición. Pero existe otra situación en el gráfico VI que es mucho más importante. Cuando lambda asume valores intermedios, el resultado que obtenemos se ubica en la parte interior de la curva.

Anteriormente ofrecimos una interpretación sencilla del axioma número seis: a la hora de consumir, los individuos prefieren la combinación de bienes en vez de especializarse en uno solo. En la imagen anterior podemos confirmar de forma gráfica esta aseveración: cuando los consumidores combinan bienes en el contexto de la convexidad estricta, simplemente mejoran su posición. Podemos ver fácilmente que el resultado de la combinación convexa se sitúa en una cesta ubicada por encima y a la derecha de x, lo que significa que será estrictamente preferida ya que contiene más de todas las mercancías. Al alcanzar una cesta más alta, el consumidor también alcanza una curva de indiferencia superior mejorando automáticamente su situación. Se puede apreciar fácilmente esta idea en la siguiente imagen.

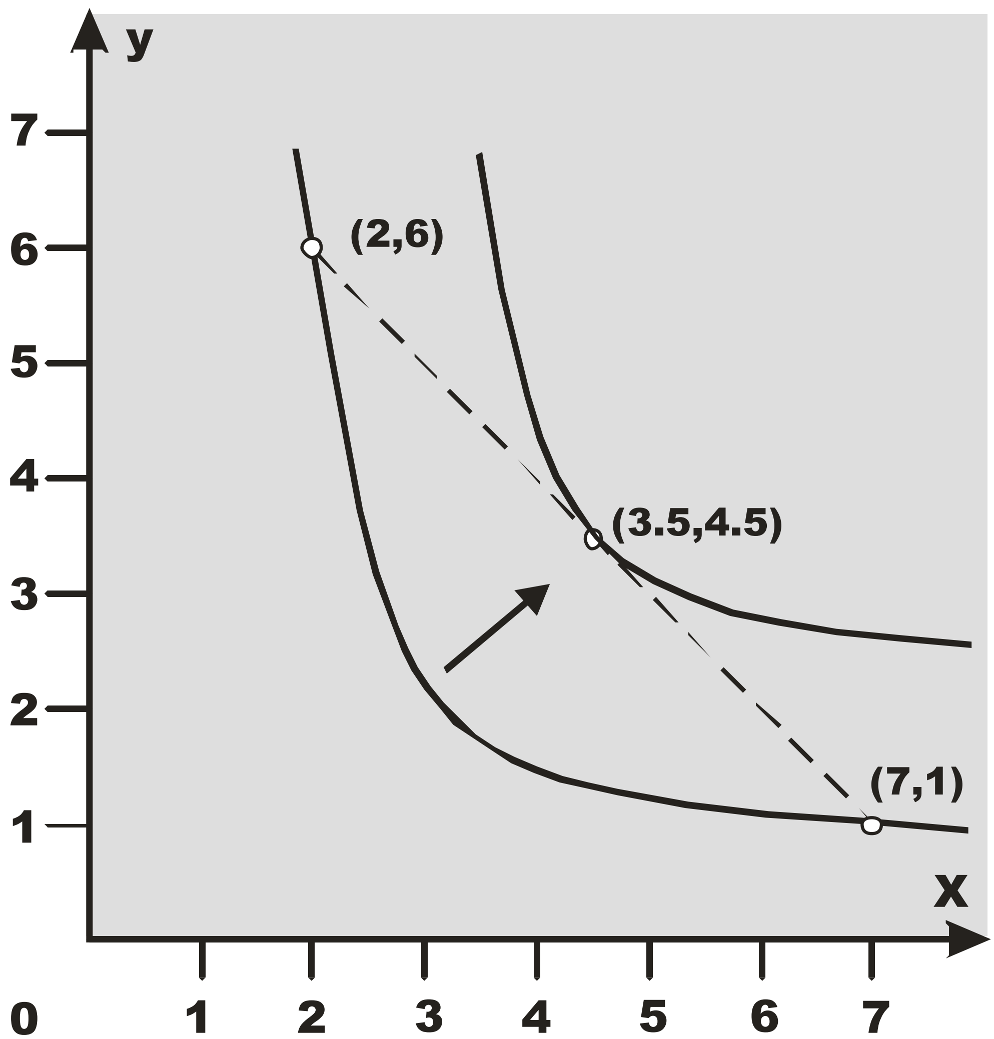


Gráfico XVII que muestra como una combinación convexa alcanza una curva de indiferencia mayor.

Con este paso finalmente alcanzamos el objetivo que nos habíamos fijado en nuestra labor. La gráfica anterior presenta todas las características que hemos descrito durante el trabajo. Esas curvas de indiferencia representan unas preferencias que son racionales debido a que cumplen con los axiomas de orden, son continuas ya que garantizan una regularidad topológica, asimismo la anchura de cada curva es no mayor a la de un punto individual porque satisface la no saciedad local, también tienen una pendiente negativa porque obedece el supuesto de monoticidad estricta y finalmente tienen una forma curvada hacia el origen porque asume la convexidad estricta.

El objetivo que nos fijamos al principio de la obra fue describir paso a paso las transformaciones que sufren las preferencias de los consumidores en la medida en que se les añadían los supuestos de los axiomas. Con la incorporación del la convexidad estricta hemos alcanzado su forma definitiva. De tal manera que hemos confirmado que cuando las preferencias de los consumidores asumen los seis axiomas sobre las preferencias, estás son representadas por medio de curvas de indiferencia que adquieren la forma de hipérbolas equiláteras.

BIBLIOGRAFÍA

1. Apostol Tom M. Análisis matemático. Editorial Reverté. España. 2002.
2. Asimakopolus A. Introducción a la teoría microeconómica. Oxford University Press. España. 1983.
3. Bartle Robert G. Introducción al análisis matemático de una variable. Limusa Wiley 3ª Ed. México. 2010.
4. Bernal Torres Cesar Augusto. Metodología de la investigación para administración, economía, humanidades y ciencias sociales. Pearsons Educación. 2ª Ed. México 2006.
5. Binger R Brian and Hoffman Elizabeth. Microeconomics with calculus. Harper Collins Publishers, United States of America. 1988.
6. De Gortari Elí. El método de las ciencias, nociones elementales. Editorial Grijalbo.12ª Ed. México. 1979.
7. Debreu Gerard. Teoría del valor. Antoni Bosch editor. España. 1973.
8. Ekeund Robert B y Hébert Robert F. Historia de la teoría económica y de su método. McGraw Hill. 3ª Ed. España 1992.
9. Elvio Accinelli. Elementos de topología y de la teoría de conjuntos en economía, parte I. Nota docente número 10. Universidad de la República. Uruguay. http://decon.edu.uy/publica/Notas/Nota10.pdf. 12 de noviembre de 2011.
10. Gide Carlos y Rist Carlos. Historia de las doctrinas económicas. Instituto editorial Reus. 3ª Ed. España. 1960.
11. Gravelle Hugh y Rees Ray. Microeconomía. Alianza Editorial. España 1984.
12. Grossman Stanley I. Algebra lineal. McGraw-Hill. 5ª Ed. México 1996.
13. Henri Denis. Historia del pensamiento económico. Ediciones Ariel. España. 1996.
14. Jehle Geoffrey A and Reny Philip J. Advanced microeconomic theory. Editorial Addison Wesley. 2ª Ed. Estados Unidos. 2001
15. Landreth Harry y David C Colander. Historia del pensamiento económico. Compañía Editorial Continental. Sexta reimpresión. México 2006
16. López Sánchez María Guadalupe. Una aproximación al conjunto de elección. Tesis para obtener el título de Licenciado en Economía. Universidad Nacional Autónoma de México. México DF. 2008.

17. Madden Paul. Concavidad y optimización en economía. Alianza Editorial. España 1987.
18. Mas-Colell Andreu, Whinston Michael D, Green Jerry R. Microeconomic theory. Oxford University Press In. Estados Unidos. 1995.
19. Miller Roger Le Roy. Microeconomía. Mc Graw Hill. México. 1988.
20. Nakos George, Joyner David. Álgebra lineal con aplicaciones. International Thomson Editores. México. 1999.
21. Nicholson Walter. Teoría microeconómica principios básicos y aplicaciones. Cengage Learning editores. 9ª ed. Mexico. 2007.
22. Oteyza Elena, Lam Emma, Hernández Carlos, Carrillo Angel, Ramírez Arturo. Geometría analítica. Pearsons Educación. 2ª Ed. México. 2005.
23. Perloff Jeffrey M. Microeconomía. Pearsons Educación. 3ª Ed. España. 2004.
24. Rojo Armando. Algebra tomo I. Editorial El Ateneo. 4ª Ed. México. 1975.
25. Roll Eric. Historia de las doctrinas económicas. Fondo de Cultura Económica. México. 1975.
26. Roux Dominique. Los premios nobel de economía. Ediciones Akal. España. 2006
27. Rudin Walter. Principios de análisis matemático. Mc Graw Hill. 2ª Ed. España 1966.
28. Seymour Lipschutz. Teoría de conjuntos y temas afines. McGraw Hill. México 1992.
29. Stavenhagen Gerhard. Historia de las teorías económicas. Librería El Ateneo editorial. Argentina. 1959.
30. Sullivan Michael. Trigonometría y geometría analítica. Pearsons Educación. 4ª Ed. México. 1997.
31. Varian Hal R. Análisis microeconómico. Antoni Bosch Editor. 3ª Ed. España. 1992.
32. Varian Hal R. Microeconomía intermedia un enfoque actual. Antoni Bosch Editor. 5ª Ed. España 1999.
33. Villar Antonio. Lecciones de microeconomía. Antoni Bosch Editor. España. 1999.