UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA EN SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
YESIKA CORREA JAIME

TUTOR
ISABEL PATRICIA AGUILAR JUÁREZ
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dra. Elizondo Cortés Mayra
Secretario:	Dr. Meza Puesto Jesús Hugo
Vocal:	M. I. Aguilar Juárez Isabel Patricia
1 er. Suplente:	Dra. Flores De La Mota Idalia
2 d o. Suplente:	M. C. Sánchez Cerón Jorge Eliecer

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Facultad de Ingeniería, México DF

TUTOR DE TESIS:

ISABEL PATRICIA AGUILAR JUÁREZ

FIRMA

Índice

Introducción 6

Objetivo.. 9

Capítulo 1 –Mercados Financieros 11

1.1. Introducción.. 11

1.2. Bolsa Mexicana de Valores (BMV) 12

1.2.1. Organismos Reguladores 14

1.2.2. Organismos Intermediarios.. 15

1.2.2.1. Casas de Bolsa 16

1.2.2.2. Sociedades de Inversión.. 17

1.2.3. Organismos de Apoyo.. 18

1.2.4. Participantes 19

1.3. Clasificación de los Mercados Financieros 21

1.3.1. Mercado de Valores 23

1.3.1.1. Sociedades de inversión.. 23

1.3.1.2. Mercado de Capitales 24

1.3.1.2.1. Mercado Primario... 25

1.3.1.2.2. Mercado Secundario... 26

1.3.1.3. Mercado de Dinero.. 26

1.3.1.3.1. Clasificación de Instrumentos en el Mercado de Dinero 28

1.3.1.3.2. Principales Instrumentos Financieros del Mercado de Dinero en México 30

1.3.2. Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER)... 30

1.3.2.1. Productos Derivados... 31

1.3.2.2. Ventajas de los Derivados Financieros 32

1.3.2.3. Tipos de Derivados Financieros... 33

Capítulo 2 - Teoría de Portafolios.. 35

2. Introducción.. 35

2.1. Rendimiento y Riesgo de un Activo Financiero.. 36

2.1.1. Rendimiento de un Activo financiero.. 37

2.1.2. Cálculo del Riesgo de un Activo Financiero 38

2.1.3. Rendimiento y Riesgo de un Portafolio 40

2.1.3.1. Rendimiento del Portafolio 40
2.1.3.2. Riesgo del Portafolio 40
2.2. El modelo de selección de carteras de Harry Markowitz 42
2.2.1. Carteras Eficientes 43
2.2.2. Cartera óptima 46
Capítulo 3 – Marco de referencia 48
3. Introducción 48
3.1. Métodos Alternativos para estimar el Riesgo 48
3.2. Métodos para la Optimización de Portafolios 52
3.2.1. Modelo MAD (Mean Absolute Deviation) 53
3.2.2. Modelo MAD Estocástico 55
3.2.2.1. Estimación de Escenarios a través de intervalos de confianza 56
3.2.2.2. Intervalo de confianza para la media 57
3.2.3. Modelo Minimax de Young 59
3.3. Medidas de desempeño de carteras de inversión 61
3.3.1. Índice de Sharpe 63
3.3.2. Índice de Treynor 64
3.3.3. Alfa de Jensen 66
4. Aplicación de los diferentes métodos de optimización de carteras de inversión 69
4.1. Método de Optimización de Markowitz (Media-Varianza) 71
4.2. Método de Optimización de Desviación Media Absoluta (MAD) 74
4.3. Método de Optimización de Desviación Media Absoluta Estocástico 78
4.3.1. Intervalos de confianza para los rendimientos de los precios de las acciones 78
4.4. Análisis estadístico de los Resultados 82
4.5. Medidas de desempeño 85
4.5.1. Introducción 85
4.5.2. Índice de Sharpe 87
4.5.3. Índice de Treynor 90
4.5.4. Alfa de Jensen 93
Conclusiones 96
Anexo I – Empresas que componen cada sector económico 99

Anexo II – Intervalos de confianza para el rendimiento promedio al 95% de confianza................103
Bibliografía...109

Introducción

En el campo de la teoría de selección de carteras, Harry Markowitz ocupa un lugar destacado. En 1952 publicó el artículo “Portfolio Selection[1]”, basado en su tesis doctoral. En dicho artículo planteaba un modelo de conducta racional del decisor para la selección de carteras de títulos y valores con liquidez inmediata[2]. El modelo planteado es considerado como un gran aporte a nivel teórico y es fundamental para todas las demás investigaciones realizadas posteriormente.

El tema desarrollado por Markowitz, se refiere a la selección de inversiones, es decir, al problema de cómo asignar los recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles para tal efecto.

Antes de que se popularizara el enfoque de Markowitz, la selección de inversiones implicaba un costoso proceso de recopilación y procesamiento de información muy diversa acerca de las empresas emisoras de activos, fundamentalmente acciones. Esta información consistía, entre otras cosas, de balances y estados financieros, situación de la empresa dentro de la industria y de ésta dentro de la economía en su conjunto, calidad de la gestión de la empresa, políticas de dividendos, etc.

El enfoque de Markowitz simplificó notablemente el problema de selección de inversiones al considerar los rendimientos de los activos como un proceso de optimización y centrarse exclusivamente en la estadística de los resultados de las empresas emisoras y, más específicamente, en tres parámetros básicos de estas estadísticas: media, varianza y covarianzas de las tasas de rendimiento de los activos.

[1] MARKOWITZ HARRY. *Portfolio Selection,* The Journal of Finance Vol. 7, No. 1, 1952, pp. 77-91
[2] En su modelo, la liquidez del título es inmediata al final del periodo de referencia.

Markowitz advirtió que el problema de selección de inversiones implicaba la noción central de incertidumbre o riesgo, lo cual significaba reconocer que cualquier inversión financiera tiene más de un resultado posible en términos de rendimiento y que en el mejor de los casos, sólo es posible conocer o inferir una distribución de probabilidades para el resultado de la misma. Si no existiera incertidumbre todos los inversionistas invertirían en el activo que ofreciera la más alta tasa de rendimiento, lo que equivale a decir que sólo podía existir un único activo de inversión. Por otro lado, si se considera sólo el valor esperado de los rendimientos, la inversión escogida sería aquel activo que tuviese el valor esperado más alto. En ambos casos, no se plantearía el problema de la diversificación de activos. Por otra parte, el contexto de incertidumbre en el que se da necesariamente el proceso de inversión, requiere incorporar alguna hipótesis del comportamiento del inversionista cuando se enfrenta a las opciones de inversión desconociendo con certeza el resultado futuro de las mismas.

Es fácil cuantificar el rendimiento esperado de una inversión si se conocen los valores iniciales y finales esperados de la misma. En cuanto al riesgo financiero, Markowitz plantea que una medida de él es la varianza (o desviación estándar) de los rendimientos. Puesto que normalmente no es posible encontrar activos que al mismo tiempo tengan los rendimientos esperados más altos y el riesgo más bajo, el inversionista se encuentra en un dilema entre rendimiento y riesgo que se resuelve dependiendo de la tasa personal a la que él está dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento. El análisis reconoce que no todos los inversionistas tienen el mismo grado de hostilidad al riesgo, y por lo tanto, la tasa a la que cada inversionista prefiere canjear más riesgo por más rendimiento es variable y subjetiva.

El planteamiento singular de Markowitz tuvo como pilares tres conceptos clave:

- El rendimiento de una inversión debe ser tratado como un fenómeno estocástico
- El inversionista típico actúa con aversión al riesgo

- El rendimiento esperado y el riesgo de los activos de inversión tienen medidas estadísticas en la media y la varianza de una distribución.

La simple observación de la literatura actual y de la práctica de la inversión financiera nos permite comprobar el profundo y duradero impacto de la innovación producida por el trabajo de Markowitz. Sin embargo, su contribución específica más notoria consistió en el desarrollo de un método de selección de inversiones estrictamente para un periodo, en un contexto de incertidumbre y para inversionistas con aversión al riesgo: el enfoque ahora conocido como “Media – Varianza”, el cual se describirá en los siguientes capítulos y se contrastará con algunos otros modelos que han ido surgiendo a lo largo del tiempo, los cuales han surgido debido a que el modelo de Media Varianza de Markowitz ante un número grande activos la resolución del problema puede ser tardar más tiempo.

Es posible comparar la eficiencia de diversas metodologías para la construcción de portafolios óptimos de inversión, usando medidas de desempeño de la cartera como son: índice de Sharpe, Alfa de Jensen y el índice de Treynor, los cuales evalúan rendimiento y riesgo de la cartera en conjunto con el rendimiento del mercado, con el fin de optar por aquella metodología que sea más eficiente en cada caso específico.

Objetivo

Uno de los métodos más representativos para la selección de carteras de inversión, es el modelo de Media Varianza propuesto por Markowitz, sin embargo a lo largo del tiempo se han desarrollado otros métodos de optimización los cuales surgen con el fin de poder mejorar el modelo de Markowitz, la finalidad de los mismos ha consistido en minimizar el tiempo de solución, dado que por tratarse de un modelo cuadrático resulta más complicado su uso, por otro lado los métodos alternativos que se proponen usar en el presente trabajo, son métodos que proponen soluciones lineales y su aplicación es más sencilla y reduce el tiempo de solución.

Por lo anterior el presente trabajo tiene como objetivo principal contrastar los resultados que ofrece el modelo de selección de carteras de Markowitz con modelos alternativos como son el modelo Mean Absolute Deviation (MAD) y MAD Estocástico. Asimismo se estudiarán distintas medidas de desempeño que pueden servir para determinar qué portafolio, de los generados con los distintos métodos, es preferible con respecto de los otros y por qué lo es.

Para ello se realizará una aplicación en la que se utilizarán los precios de las acciones de cada uno de los sectores económicos proporcionados por la Bolsa Mexicana de Valores, y se aplicarán cada uno de los diferentes modelos de optimización, a fin de determinar cuál es el método que proporciona mejores rendimientos y es más eficiente, además de verificar si existe diferencia estadísticamente significativa entre los resultados arrojados de cada modelo.

El presente trabajo se compone de 4 capítulos, mismos que se describen a continuación:

Capítulo 1.- En este capítulo se da una breve introducción sobre los Mercados Financieros, como están compuestos, sus principales funciones y su clasificación, así como también se describe brevemente el tipo de instrumentos financieros que se operan en cada uno.

Capítulo 2 – En este capítulo se describe la Teoría de Portafolios y el modelo propuesto por Harry Markowitz. Se introducen los conceptos de riesgo y rendimiento con el fin de entender la construcción del portafolio óptimo y la frontera eficiente.

Capítulo 3.- Se hace una revisión de la literatura en la que se describen algunas de las diferentes metodologías que han surgido a lo largo de los años a fin de poder compararlas con el trabajo de Markowitz. Se presenta además el marco teórico del trabajo.

Capítulo 4.- En este capítulo se realiza una aplicación de cada método para la optimización de portafolios, donde se compara cada método y se obtienen las medidas de desempeño para cada método.

Capítulo 1 –Mercados Financieros

1.1. Introducción

En este capítulo se muestra una visión general de cómo están conformados los diversos mercados financieros en México, así como su estructura y la forma de operar de cada uno de estos.

También se muestran los activos financieros disponibles en cada uno de los mercados financieros así como sus principales características.

En economía, un mercado financiero es un mecanismo que permite a los agentes económicos el intercambio de activos financieros. En general, cualquier mercado de materias primas podría ser considerado como un mercado financiero si el propósito del comprador no es el consumo inmediato del producto, sino el retraso del consumo en el tiempo.

Los mercados financieros están afectados por las fuerzas de oferta y demanda. Los mercados colocan a todos los vendedores en el mismo lugar, haciendo así más fácil encontrar posibles compradores.

Los mercados financieros son usados para reunir a aquellos que necesitan recursos financieros con aquellos que los tienen, y facilitan:

1) El aumento del capital (en los mercados de capitales).
2) La transferencia de riesgo (en los mercados de derivados).
3) El comercio internacional (en los mercados de divisas).

A continuación se muestra la descripción de los principales mercados como son la Bolsa mexicana de Valores (BMV) y el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER).

1.2. Bolsa Mexicana de Valores (BMV)

La Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V. es una entidad financiera, que opera por concesión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, con apego a la Ley del Mercado de Valores.

Derivado del seguimiento de las tendencias mundiales y de los cambios que se han dado en la legislación, la BMV concluyó con el proceso de desmutualizacion[3], convirtiéndose en una empresa cuyas acciones son susceptibles de negociarse en el mercado de valores bursátil, llevando a cabo el 13 de junio de 2008 la Oferta Pública Inicial de sus acciones representativas de su capital social.

En la Bolsa Mexicana de Valores se llevan a cabo las operaciones del mercado de valores organizado en México, siendo su objeto el facilitar las transacciones con valores y procurar el desarrollo del mercado, fomentar su expansión y competitividad, a través de las siguientes funciones:

- Establecer los locales, instalaciones y mecanismos que faciliten las relaciones y operaciones entre la oferta y demanda de valores, títulos de crédito y demás documentos inscritos en el Registro Nacional de Valores (RNV), así como prestar los servicios necesarios para la realización de los procesos de emisión, colocación en intercambio de los referidos valores;
- Proporcionar y mantener a disposición del público la información relativa a los valores inscritos en la BMV y los listados en el Sistema Internacional de Cotizaciones de la propia Bolsa, sobre sus emisores y las operaciones que en ella se realicen;

[3] Proceso de tendencia mundial, donde las Bolsas de valores se convierten de entidades no lucrativas administradas por sus miembros, a empresas (sociedades anónimas) con fines de lucro y controladas por accionistas.

- Establecer las medidas necesarias para que las operaciones que se realicen en la BMV por las casas de bolsa, se sujeten a las disposiciones que les sean aplicables;
- Expedir normas que establezcan estándares y esquemas operativos y de conducta que promuevan prácticas justas y equitativas en el mercado de valores, así como vigilar e imponer medidas disciplinarias y correctivas por su incumplimiento, obligatorias para las casas de bolsa y emisoras con valores inscritos en la BMV.

Solamente aquellas empresas que cubren con los requisitos que la propia BMV establece y que requieren recursos (dinero) para financiar su operación o proyectos de expansión, pueden obtenerlo a través del mercado bursátil, mediante la emisión de valores (acciones, obligaciones, papel comercial, etc.) que son puestos a disposición de los inversionistas (colocados) e intercambiados (comprados y vendidos) en la BMV, en un mercado transparente de libre competencia y con igualdad de oportunidades para todos sus participantes.

A continuación se muestra la estructura de la BMV

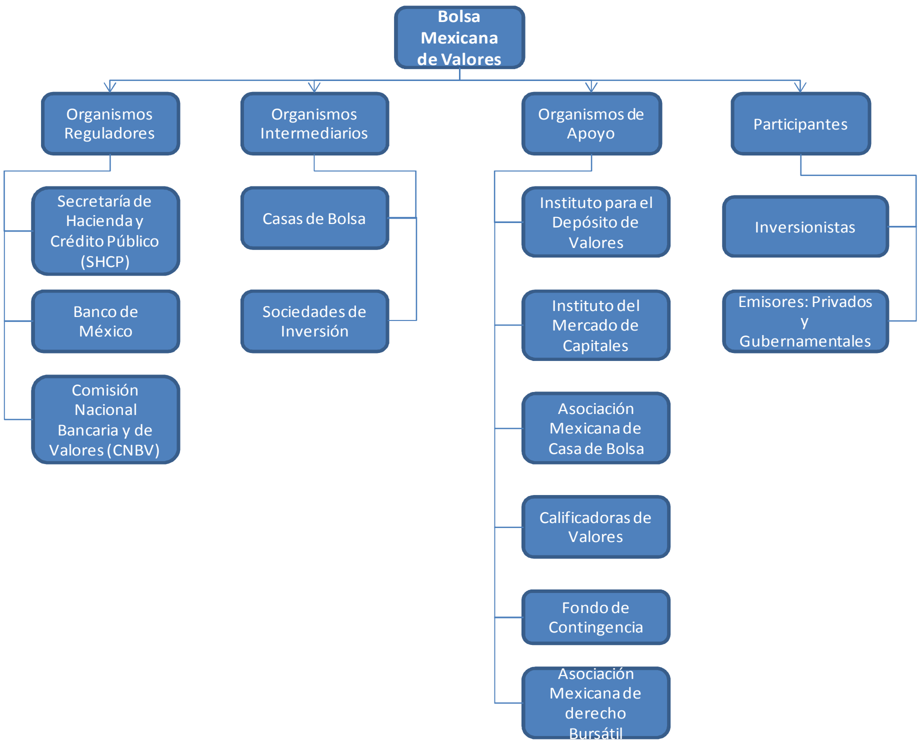


Tabla 1.2 – Estructura de la BMV

1.2.1. Organismos Reguladores

Dentro de los organismos Reguladores se encuentran algunas Autoridades que se encargan de establecer el marco normativo y regulatorio de la operación bursátil, tal y como se muestra en el cuadro 1.2, se encuentra la SHCP, el Banco de México y la CNVB. A continuación se mencionará brevemente las principales funciones que confieren a cada una de estas entidades.

a) Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP): La principal función que esta institución desempeña para el funcionamiento de la BMV es que funge como órgano regulador, tiene la facultad de establecer lineamientos y políticas de operación de las bolsas de valores, instituciones de depósito de valores y casas de bolsa. Otra de sus funciones es otorgar las licencias de operación a los distintos intermediarios bursátiles y bolsas de valores, así como sancionar administrativamente a aquellos que violen dichos lineamientos. Si se desea obtener más información sobre las funciones que competen a SHCP, se puede consultar su dirección electrónica: http://www.shcp.gob.mx/

b) Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV): Es un órgano desconcentrado de la SHCP. Supervisa el correcto funcionamiento de las operaciones realizadas en el mercado de Valores, esta supervisión incluye no sólo el monitoreo de las transacciones, sino también realiza periódicamente visitas de inspección a los intermediarios bursátiles, y estos también se encuentran obligados a proporcionar reportes de su situación financiera y económica. La principal finalidad es que el funcionamiento del Mercado de Valores sea eficiente, justo, transparente y líquido, con lo que también se procura reducir el riesgo sistemático. Si se desea obtener más información sobre las funciones que competen a CNVB se puede consultar su dirección electrónica http://www.cnbv.gob.mx

c) Banco de México (BANXICO): El Banco de México es una institución Pública cuya función principal es la de regular la oferta monetaria a través de la política fiscal y la política monetaria, teniendo como uno de sus objetivos contrarrestar los efectos de la inflación, mantener los precios estables, mantener un bajo desempleo y fomentar el aumento del PIB. A esta institución también le compete mantener bajo su control el correcto funcionamiento del mercado de valores mediante disposiciones que los participantes deben seguir, asegurándose de su cumplimiento y en caso de que sean imputados dichos lineamientos establece la sanción correspondiente mediante una multa. Si se desea obtener más información sobre las funciones que competen al Banco Central de México , se puede consultar su dirección electrónica: http://www.banxico.org.mx/

1.2.2. Organismos Intermediarios

Los organismos intermediarios son aquellas personas morales que se encargan de poner en contacto a las contrapartes que compran y venden valores, realizan las transacciones acordadas, brindan asesoría y llevan a cabo la administración de portafolios de inversión. En México existe la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles A.C (AMIB) en la cual se enlistan todas las casas de Bolsa.

Los intermediarios financieros se enlistan a continuación y entre los principales, organismos intermediarios podemos citar a las Casas de Bolsa y a las sociedades de inversión, las cuales se describirán con más detalle.

1) Instituciones de banca múltiple
2) Instituciones de banca de desarrollo
3) Casas de bolsa
4) Sociedades financieras de objeto limitado
5) Entidades de ahorro y crédito popular
6) Sociedades de inversión
7) Administradoras de Fondos para el Retiro (Afores)
8) Instituciones de seguros
9) Instituciones de fianzas

10) Arrendadoras financieras
11) Empresas de factoraje financiero
12) Almacenes generales de depósito
13) Casas de cambio
14) Uniones de crédito
15) Grupos financieros

1.2.2.1. Casas de Bolsa

La Casa de Bolsa es un intermediario bursátil a través del cual es posible vender o comprar valores. Los inversionistas que desean comprar o vender valores deben acudir a una Casa de Bolsa, donde un promotor (que es una persona que se encuentra registrada y autorizada por la CNBV para llevar a cabo operaciones de compra-venta de valores) le brinda al cliente información acerca de los valores disponibles en el mercado, que puedan responder a los intereses del propio inversionista, si al inversionista le interesa una oferta de precio de algún valor (ya sea para comprar o vender), entonces se firma el contrato de intermediación. En dicho contrato, intervienen por supuesto dos partes, las contrapartes de la operación que se realiza, es decir el comprador y el vendedor, ambos representados por su respectiva Casa de Bolsa.

La operación realizada debe ser registrada en el sistema SENTRA (Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación). Dos días hábiles posteriores el Indeval (Depósito Central de Valores de México) transfiere los valores accionarios de la Casa de Bolsa vendedora a la Casa de Bolsa compradora, transfiriendo también el importe de la operación de la Casa de Bolsa compradora a la Casa de Bolsa vendedora, siendo el inversionista el que debe liquidar dicho importe a su Casa de Bolsa representante más el pago de una comisión previamente acordada por dicha transacción.

Las funciones principales de la Casa de Bolsa son:

- La realización de operaciones de compra-venta de valores.
- Asesoría tanto a emisores de valores como a los inversionistas
- Registrar las operaciones correspondientes en el SENTRA.
- Percepción de fondos por dichas transacciones.

1.2.2.2. Sociedades de Inversión

Las sociedades de inversión también son conocidas como fondos, la razón de esto es que reúnen recursos monetarios de pequeños y medianos inversionistas hasta obtener un monto considerable con la finalidad de crear un portafolio de inversión, seleccionando diversos instrumentos financieros con la intención de minimizar los riesgos.

Si estas sociedades de inversión no existieran, sería imposible para algunos inversionistas acceder al mercado de valores, pues en la mayoría de los casos los montos mínimos exigidos para la adquisición de un instrumento financiero particular son elevados.

Otra ventaja que tienen las sociedades de inversión es precisamente que cuentan con personal altamente capacitado en el ámbito bursátil.

Las sociedades de inversión operan dentro de las mismas Casas de Bolsa, los Bancos y algunas Operadoras Independientes de inversión.

Las sociedades de inversión se clasifican en cuatro tipos:

a) **Sociedades de inversión de renta variable**.- Estas sociedades invierten tanto en instrumentos de renta variable como en instrumentos de deuda. El rendimiento está dado por la diferencia entre el precio de venta y el de compra. Las personas físicas que invierten en este tipo de sociedades están exentas del pago de impuestos, mientras que las personas morales no lo están.

b) **Sociedades de inversión en instrumentos de deuda**.- Tal y como su nombre lo dice estas sociedades sólo pueden invertir en instrumentos del mercado de deuda, por lo tanto se caracterizan por representar inversiones de bajo riesgo

c) **Sociedades de inversión de capitales (SINCAS**).- Se caracterizan por invertir los recursos de manera temporal en las empresas. También se conocen como fondos mutualistas, donde los pequeños y medianos inversionistas no requieren realizar una gran inversión, pues su capital aportado se junta con el de otros inversionistas y esto hace posible el recaudar cierto fondo e invertir en un portafolio diversificado obteniendo rendimientos proporcionales a la inversión.

d) **Sociedades financieras de objeto limitado (Sofoles)**.- Son sociedades anónimas facultadas para otorgar créditos, los cuales pueden ser créditos hipotecarios, automotrices, agroindustriales, intermediarios o distribuidores, microcréditos, pymes, bienes de capital y de transporte. Estas sociedades están reguladas por la Ley de Instituciones de Crédito y son supervisadas por la CNBV.

Existen 601 sociedades de inversión disponibles en México, si se desea tener un despliegue de las sociedades de inversión puede consultar la siguiente dirección electrónica: http://www.apartados.hacienda.gob.mx/casfim/contenido/catalogo/xls/sector52.xls,

1.2.3. Organismos de Apoyo

Entre los organismos de apoyo son de gran importancia las Sociedades Calificadoras, pues proporcionan información que es de gran interés para los inversionistas, información relevante para la toma de decisiones sobre la elección de cierto instrumento, pues puede conocer un panorama completo de la empresa emisora de valores, incluyendo su situación económica, financiera y jurídica, así como un análisis de los riesgos que pudieran presentarse en el futuro. Esta información es dada a conocer al público en general a través de la BMV y por medio de los intermediarios bursátiles. Las empresas emisoras están obligadas a proporcionar información veraz y oportuna de reportes de su situación financiera e informar sobre cualquier acontecimiento relevante en cuanto a su operación, puesto que hay eventos que pudieran afectar el desempeño de sus valores.

Los organismos de apoyo se desglosan a continuación:

- Instituto para el Depósito de Valores. (INDEVAL)- En estas instituciones se depositan y administran los valores, en México el INDEVAL es la institución encargada de administrar estos depósitos.
- Instituto Mexicano del Mercado de Capitales
- Asociación Mexicana de Casa de Bolsa
- Sociedades Calificadoras de Valores.-Estas sociedades se encargan precisamente de otorgar una calificación con base en información histórica de la empresa, que permita hacer del conocimiento de los inversionistas el grado de riesgo relativo que tiene cada emisión.
- Fondo de contingencia
- Asociación Mexicana de Derecho Bursátil
- Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB).- Aquí se encuentran agrupadas todas las casas de Bolsa, AMIB se encarga de representar a éstas ante las autoridades y otros organismos nacionales e internacionales, así como también se encarga del estudio de asuntos de interés general para las Casas de Bolsa tal como el desarrollo de proyectos.

1.2.4. Participantes

Dentro de los participantes destacan los inversionistas y por supuesto los emisores de valores. Resulta interesante mencionar el por qué las personas se ven interesadas en realizar una inversión.

El público inversionista son aquellas personas físicas o morales que están dispuestas a invertir su dinero a cambio de obtener cierta ganancia. En las sociedades, existen personas (o empresas) que han tomado la decisión de invertir su dinero, en lugar de gastarlo. Esta decisión está basada en las expectativas de obtener un buen rendimiento, así como cierta compensación o pago por posponer el uso de ese dinero.

El público que invierte deja de gastar su dinero en ese momento, por lo tanto podemos asegurar que deja de obtener cierta utilidad (satisfacción obtenida por los bienes y servicios comprados), es decir, la decisión de compra es pospuesta, porque se pretende que invirtiendo el dinero se generará una mayor utilidad o satisfacción en el futuro de aquella utilidad que se obtendría al gastar el dinero en el presente.

Sin embargo, la decisión de invertir no es algo sencillo, puesto que existen diversas formas de inversión cada una con ventajas y desventajas diferentes, y por supuesto, el invertir también representa un riesgo.

Podría pensarse que lo más fácil y seguro es invertir en el Banco, o en la Bolsa de Valores, pero tampoco invirtiendo en la Bolsa de Valores o en el Banco se asegura tener un buen rendimiento. Existe una amplia diversificación de instrumentos de inversión tales como: títulos de deuda de emisión gubernamental, como Cetes, Ajustabonos, Bondes, Udibonos; títulos de deuda de emisión privada: letras giradas por bancos, pagares negociables y acciones bursátiles, donde cada una de estas ofrece diferentes rendimientos (tasas de interés), dependiendo del nivel de riesgo de la inversión. Además también se involucran otros factores relevantes para el inversionista, tales como el plazo de la inversión, ya que este puede ser a corto, mediano o largo plazo.

Se habla de nivel de riesgo, puesto que la tasa de interés depende no sólo del nivel de inflación, sino también del tipo de cambio y la situación financiera de la empresa o institución que esté respaldando la inversión, el no hacer una selección adecuada de éste tipo de títulos podría tener como consecuencia pérdidas económicas significativas. Es evidente que al tener una amplia diversificación de instrumentos de inversión el público inversionista se encuentra ante el problema de selección de dichos instrumentos, con la finalidad de disminuir su riesgo de pérdida. Aunque en la mayoría de los casos el inversionista suele acudir a un especialista que le resuelva este problema, resulta interesante mostrar cuales son las variables y cálculos matemáticos necesarios para realizar esta selección.

Los emisores de valores pueden ser Sociedades Anónimas, organismos públicos, entidades federativas, municipios y entidades financieras, que representados por una Casa de Bolsa ante la Bolsa Mexicana de Valores pueden poner a disposición del público inversionista diferentes instrumentos financieros (entre éstos se pueden mencionar las acciones, los títulos de deuda, entre otros), con la finalidad de que estos sean una fuente opcional de financiamiento, ya sea para su operación o para proyectos de expansión o de desarrollo. Aunque no cualquiera de estas instituciones puede emitir acciones, es necesario que cumplan con ciertos lineamientos establecidos por la BMV.

1.3. Clasificación de los Mercados Financieros

Las condiciones del mercado influyen en el comportamiento de los precios en general, en el desempeño de las organizaciones y de los instrumentos de inversión, por lo que es importante entender la estructura de los mercados. Hay muchas maneras de clasificar los mercados financieros, como se muestra en la siguiente figura: Hay muchas maneras de clasificar los mercados de acuerdo a la siguiente figura:

El siguiente cuadro muestra la clasificación de los mercados financieros

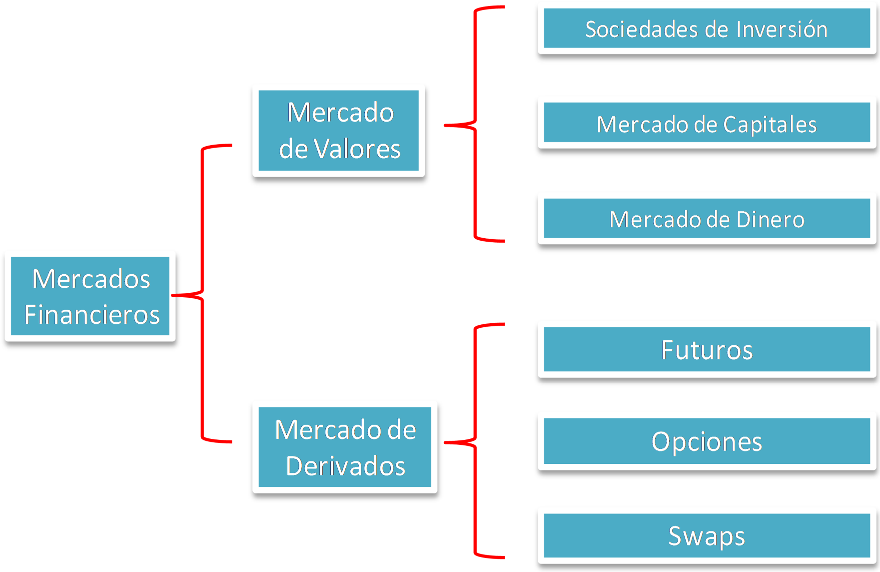


Figura 1.1 Mercados Financieros

En general se puede definir a los Mercados Financieros como Foros y conjuntos de reglas que permiten a los participantes realizar operaciones de inversión, financiamiento y cobertura, a través de diferentes intermediarios, mediante la negociación de diversos instrumentos financieros.

El propósito de los Mercados Financieros es la asignación eficiente del ahorro de una economía a las actividades productivas.

Los mercados financieros que integran el sistema financiero en México son: el mercado de Valores y el Mercado Mexicano de Derivados

1.3.1. Mercado de Valores

Los mercados de valores son un tipo de mercado de capitales en los que se negocian la renta variable y la renta fija de una forma estructurada, a través de la compraventa de valores negociables. Permite la canalización de capital a medio y largo plazo de los inversores a los usuarios

1.3.1.1. Sociedades de inversión

Las sociedades de inversión, mejor conocidas como fondos, son la forma más accesible para que los pequeños y medianos inversionistas puedan beneficiarse del ahorro en instrumentos bursátiles. El inversionista compra acciones de estas sociedades cuyo rendimiento está determinado por la diferencia entre el precio de compra y el de venta de sus acciones. Los recursos aportados por los inversionistas son aplicados por los fondos a la compra de una canasta de instrumentos del mercado de valores, procurando la diversificación de riesgos.

Estas instituciones forman carteras de valores o portafolios de inversión con los recursos que captan del público inversionista. La selección de estos valores se basa en el criterio de diversificación de riesgos. Al adquirir las acciones representativas del capital de estas sociedades, el inversionista obtiene ventajas tales como la diversificación de sus inversiones, principio fundamental para disminuir el riesgo y, la posibilidad de participar del Mercado de Valores en condiciones favorables sin importar el monto de los recursos aportados.

Para un inversionista pequeño o mediano, adquirir unitariamente instrumentos del mercado de valores, equivaldría a concentrar excesivamente su inversión. Ello, sin considerar que, en muchos casos, son elevados los montos mínimos exigidos para la compra de un instrumento bursátil en particular. En una sociedad de inversión, en cambio, los recursos del inversionista se suman a los de otros, lo que permite ampliar las opciones de valores bursátiles consideradas.

Adicionalmente, no todos los inversionistas cuentan con el tiempo o los conocimientos requeridos para participar por cuenta propia en el mercado de valores, por lo que dicha tarea y habilidad queda en manos de los profesionales que trabajan en las operadoras de sociedades de inversión, las cuales funcionan de manera independiente o como subsidiarias de intermediarios financieros.

En México, el público interesado en recibir asesoría e invertir en sociedades de inversión puede acudir con cualquiera de los intermediarios siguientes:

- Casas de bolsa.
- Bancos.
- Operadoras independientes de Sociedades de Inversión.

1.3.1.2. Mercado de Capitales

El Mercado de Capitales está conformado por una serie de participantes que compran y venden acciones e instrumentos de crédito con la finalidad de ofrecer una gama de productos financieros que promuevan el ahorro interno y fuentes de capital para las empresas. Los mercados de capitales son una fuente ideal de financiamiento por medio de la emisión de acciones, con el fin de mantener balanceada la estructura de capital de la empresa.

A los mercados de capitales concurren los inversionistas (personas naturales o jurídicas con exceso de capital) y los financistas (personas jurídicas con necesidad de capital).

Estos participantes del mercado de capitales se relacionan a través de los títulos valores, estos títulos valores pueden ser de renta fija o de renta variable.

Los Títulos de Renta Fija son los que confieren un derecho a cobrar unos intereses fijos en forma periódica, es decir, su rendimiento se conoce con anticipación.

Por el contrario, los Títulos de Renta Variable o acciones, son los que generan rendimiento o pérdida dependiendo de los resultados o circunstancias de la sociedad emisora y por tanto no puede determinarse anticipadamente al cierre del ejercicio social. Además los títulos de valores pueden ser de emisión primaria o secundaria.

1.3.1.2.1. Mercado Primario

El Mercado primario es aquel en el cual se colocan los títulos de primera emisión también conocidos como títulos primarios. Este es el mercado en el que la institución pública o privada genera nuevos recursos a través de dos maneras: la primera es a través de la emisión de títulos de deuda con vencimiento de corto plazo (obligaciones, papel comercial etc.) estos recursos están destinados a financiar el capital de trabajo, y la segunda es a través de la emisión de instrumentos de largo plazo (acciones), recursos que están destinados a la formación de capital social, creando así una infraestructura y fondos que no solo le permitan subsistir, sino crecer en su ramo.

El mercado primario cumple con la función de contactar tanto emisores como inversionistas, facilitando el flujo de las operaciones, ya que cuenta con los recursos necesarios y los agentes colocadores (casas de bolsa) quienes llevan a cabo la colocación de títulos emitidos entre los compradores iniciales, quienes posteriormente los colocan en el mercado secundario.

1.3.1.2.2. Mercado Secundario

El Mercado secundario es aquel en el que se llevan a cabo operaciones de venta y reventa de títulos. Aquí los inversionistas colocan los títulos comprados en oferta primaria a través de los intermediarios (casas de bolsa) para venderlos a otros inversionistas y de esta manera obtener la bursatilidad y liquidez requerida, o bien la inversión en otro instrumento que se adapte mejor a sus necesidades.

En el mercado secundario, las emisoras no obtienen financiamiento para sus proyectos ya que quedan desligadas de las transacciones que en este se cierren; sin embargo este mercado facilita la colocación de nuevas emisiones.

La emisión secundaria comienza cuando los instrumentos financieros o títulos valores que se han colocado en el mercado primario, son objeto de negociación. Estas negociaciones se realizan generalmente en las Bolsas de Valores

1.3.1.3. Mercado de Dinero

El objetivo principal del Mercado de Dinero es unir al conjunto de oferentes y demandantes de dinero, conciliando las necesidades del público ahorrador con los requerimientos de financiamiento para proyectos de inversión ó capital de trabajo por parte de empresas privadas, empresas paraestatales, Gobierno Federal y recientemente Gobiernos Estatales.

En general, se comercializan Instrumentos Financieros de corto plazo que cuentan con suficiente liquidez. Sin embargo, en los últimos años ha aumentado la participación de Instrumentos de mediano y largo plazo.

El año de 1978 marca el inicio del Mercado de Dinero Mexicano con la introducción de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES). Estos Títulos son Instrumentos de financiamiento de corto plazo del Gobierno Federal. Antes de esta fecha, se podría considerar como un Mercado muy elemental. Las empresas y el Gobierno obtenían recursos a través de créditos bancarios tradicionales y se tenía un acceso limitado a los Mercados Internacionales de Deuda. Por su parte la banca captaba ahorros por medio de Certificados de Depósitos (Cedes) y Pagarés de Ventanilla.

Un cambio de suma importancia para el Mercado de Dinero en México ocurrió con la colocación de Bonos en tasa de interés fija conocidos como M's.

Una mayor estabilidad macroeconómica, el compromiso del Banco de México de lograr la convergencia de inflación con los EUA y Canadá y la aparición de Inversionistas Institucionales, como los fondos de pensiones obligatorias (Afores) y las Sociedades de Inversión de Deuda han sido los ingredientes esenciales para el desarrollo del Mercado de Deuda Pública en el país. Así, el 27 de enero del año 2000, se realizó la primera colocación de Bonos en tasa fija a un plazo de 3 años; después a 5, 7, 10 y recientemente a 20 años, con intereses pagaderos cada 182 días.

De la misma manera como se hizo con el mercado de capitales, el mercado de dinero se puede dividir igualmente en: Mercado Secundario y Mercado Primario

a) Mercado Primario:

Lo constituyen las colocaciones nuevas. El Título es negociado directamente del emisor al inversionista, resultando un movimiento de efectivo para el primero, para cubrir una necesidad de financiamiento.

b) Mercado Secundario:

Es el mercado en el cual se ofertan y demandan Títulos o Valores que han sido emitidos y cuyo objetivo consiste en dar liquidez a sus tenedores mediante la sesión de dichos títulos o valores al comprador.

En el Mercado Secundario de Dinero pueden encontrarse las siguientes variantes de operatividad:

1) Operación en Directo:

Es la operación que consiste en comprar o vender títulos de deuda, asumiendo que el inversionista los conservará hasta su vencimiento (mismo día, 24 o 48 horas).

2) Venta Anticipada:

La compra/venta de Títulos antes del vencimiento de los mismos depende de la bursatilidad de dichos Títulos, otorgando liquidez a los Instrumentos (Mercado Secundario). Comúnmente, el rendimiento obtenido por el cliente difiere de lo considerado inicialmente (puede ser mayor o menor) por las condiciones de los Mercados en el momento de la venta.

3) Operación en Reporto:

Los Reportos son ventas de Títulos en el presente con un acuerdo obligatorio de recompra en el futuro, ya sea en una fecha preestablecida o abierta.

1.3.1.3.1. Clasificación de Instrumentos en el Mercado de Dinero

Existen diferentes formas de clasificar a los Instrumentos del Mercado de Dinero, las más importantes son:

a) Por su forma de Cotización

- **Instrumentos que cotizan a descuento –** Cuando el precio de compra está determinado a partir de una tasa de descuento que se aplica a su valor nominal; obteniéndose como rendimiento una ganancia de capital derivada del diferencial entre el valor de amortización (valor nominal) y su costo de adquisición (por ejemplo: CETES, Pagarés Bancarios, Papel Comercial, etc.).

- **Instrumentos que cotizan en Precio** - Cuando el precio de compra puede estar por arriba o bajo par (valor nominal), como resultado de sumar el valor presente de los pagos periódicos (intereses) que ofrezca devengar (por ejemplo: Bondes, Udibonos, Bonos Gubernamentales y Bancarios, etc.).

b) Por su forma de Colocación

- **Oferta Pública de Valores** - Se ofrecen Valores a través de algún medio de comunicación masivo al público en general, especificando cada una de las características de la emisión.

- **Subasta de Valores** - Es la venta de Valores que se hace al mejor postor. En México, los Valores Gubernamentales, del IPAB y de Banxico se colocan bajo el procedimiento de subastas. Sólo pueden presentar posturas y, por lo tanto, adquirir títulos en colocación primaria, para su distribución entre el público conforme al procedimiento de subastas: los Bancos, Casas de Bolsa, Compañías de Seguros, de Fianzas y Sociedades de Inversión del país. Adicionalmente el Banco de México, agente único de colocación y redención de Valores Gubernamentales, puede autorizar a otras entidades para tales efectos

- **Colocación Privada** - Declaración unilateral de voluntad del oferente, pero en este caso dirigida a persona determinada utilizando medios que no se califican como masivos, lo que la distingue de la oferta pública.

c) **Por su grado de Riesgo**, es decir la capacidad de pago del emisor y sus garantías de pago en caso de incumplimiento.
   - **Gubernamentales** - Estos instrumentos tienen la garantía del Gobierno Federal.
   - **Bancarios** - Instrumentos emitidos y con garantía del patrimonio mismo de las entidades financieras como Bancos, Casas de Bolsa, Arrendadoras Financieras, Empresas de Factoraje y Almacenes Generales de Depósito.
   - **Comerciales o Privados** - Estos Valores cuentan con el respaldo del patrimonio de la empresa si son quirografarios o con garantía específica.

1.3.1.3.2. Principales Instrumentos Financieros del Mercado de Dinero en México

Es importante mencionar que hasta el año 2002 algunas de las emisiones de los Valores de Deuda en México podían ser exentas fiscalmente para personas físicas, sin embargo todos los Instrumentos emitidos a partir de enero del año 2003 son gravables, es decir, los rendimientos obtenidos por la adquisición de estos Títulos en Reporto o Directo son acumulables al ingreso de personas físicas y morales.

Cabe mencionar que aún existen en circulación algunos instrumentos como Bonos Gubernamentales, Papeles Bancarios, Udibonos, PIC´s, CBIC´s y algunos corporativos emitidos antes de la fecha mencionada que resultan exentos para personas físicas.

1.3.2. Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER)

MEXDER es la Bolsa de Derivados de México, la cual inició operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de futuros sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de

Hacienda y Crédito Público (SHCP). Este hecho, constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano.

MexDer y su Cámara de Compensación (Asigna) son entidades autoreguladas que funcionan bajo la supervisión de las Autoridades Financieras (Secretaría de Hacienda y Crédito Público, Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores).

La importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el International Monetary Fund (IMF) y la International Finance Corporation (IFC), quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

1.3.2.1. Productos Derivados

Se denomina productos derivados a una familia o conjunto de instrumentos financieros, cuya principal característica es que están vinculados a un valor subyacente[4] o de referencia. Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio en productos agroindustriales (commodities), en condiciones de elevada volatilidad.

A partir de 1972 comenzaron a desarrollarse los instrumentos derivados financieros, cuyos activos de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. Los principales derivados financieros son: futuros, opciones, opciones sobre futuros, warrants y swaps.

[4] Los más utilizados para la emisión de contratos de derivados financieros son: acciones individuales, canastas de acciones, índices accionarios, tasas de interés y divisas.

1.3.2.2. Ventajas de los Derivados Financieros

La principal función de los derivados es servir de cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a:

- Portafolios accionarios.
- Obligaciones contraídas a tasa variable.
- Pagos o cobranzas en moneda extranjera a un determinado plazo.
- Planeación de flujos de efectivo, entre otros.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Los beneficios de los productos derivados, como los Futuros, son especialmente aplicables en los casos de:

- Importadores que requieran dar cobertura a sus compromisos de pago en divisas.
- Tesoreros de empresas que busquen protegerse de fluctuaciones adversas en las tasas de interés.
- Inversionistas que requieran proteger sus portafolios de acciones contra los efectos de la volatilidad.
- Inversionistas experimentados que pretendan obtener rendimientos por la baja o alza de los activos subyacentes.
- Empresas no financieras que quieran apalancar utilidades.
- Deudores a tasa flotante que busquen protegerse de variaciones adversas en la tasa de interés, entre otros.

1.3.2.3. Tipos de Derivados Financieros

Futuros

Es el compromiso entre dos partes por el cual, en una fecha futura, una de las partes se compromete a comprar algo y la otra a venderlo, aunque en el momento de cerrar el compromiso no se realiza ninguna transacción.

En la década de los noventa se negociaron contratos forward OTC (over the counter) sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados en forma interinstitucional, sin un marco operativo formal y fueron suspendidos a mediados de 1992.

A fines de 1994 entraron en vigor las normas de Banco de México para la operación de contratos forward sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre el índice nacional de precios al consumidor (INPC), sujetos a registro ante el banco central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta, para garantizar el control administrativo y de riesgo.

Warrants

El warrant es un contrato o instrumento financiero derivado que da al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar/vender un activo subyacente (acción, futuro, etc.) a un precio y en una fecha determinados. En términos de funcionamiento, los warrant se incluyen dentro de la categoría de las opciones.

Si un warrant es de compra recibe el nombre de call warrant. Si es de venta será un put warrant. El warrant, al igual que las opciones, dan al poseedor la posibilidad de efectuar o no la transacción asociada (compra o venta, según corresponda) y a la otra parte la obligación de efectuarla. El hecho de efectuar la transacción recibe el nombre de 'ejercer' el warrant.

Opciones

La opción es un derecho a comprar o vender algo en el futuro a un precio pactado, a diferencia de los futuros, en las opciones se requiere el desembolso de una prima en el momento de cerrar la operación. Las opciones además podrán ser opciones de compra. A continuación se muestran los tipos de opciones.

- **Europea –** Es aquella opción que tan solo se puede ejercer en su fecha de vencimiento.
- **Americana –** Es aquella opción que se puede ejercer en cualquier momento entre su fecha de contratación y de vencimiento.

Otra clasificación es la que viene dada en función del derecho que otorgan a comprar algo o a vender algo.

- **Opción call –** Opción de compra, este tipo de opciones como indica su nombre otorgan el derecho de compra a sus titulares.
- **Opción Put –** Opción de venta, es la opción contraria a la anterior, otorga a su titular el derecho de venta de un determinado activo en el momento del vencimiento.

Se mostraron solo algunos de los productos derivados operados en MEXDER, sin embargo cabe señalar que no son los únicos, por lo que si se requiere más información sobre Derivados Financieros puede consultar la dirección electrónica de MEXDER

http://www.mexder.com.mx/MEX/paginaprincipal.html

Capítulo 2 - Teoría de Portafolios

2. Introducción

Uno de los problemas existentes en la selección del portafolio de instrumentos financieros es precisamente la amplia gama de alternativas que existe en cuanto a los diferentes instrumentos de inversión, así como de las características de cada uno de ellos como son: Liquidez, Rendimiento, Riesgo y Plazo.

Existen algunos principios básicos para realizar la selección de instrumentos financieros con la finalidad de obtener un portafolio eficiente:

- ✓ Elegir entre la gran diversidad de instrumentos de inversión que existen y determinar qué proporción de la inversión debe destinarse a cada uno de los instrumentos financieros elegidos para obtener los máximos beneficios posibles, es decir, para obtener los máximos rendimientos, no es un proceso sencillo, sin embargo, se cuenta con distintos métodos que ayudan a tomar este tipo de decisión.

- ✓ El análisis de portafolio proporciona herramientas para realizar una selección óptima de los instrumentos de inversión. Entre los métodos empleados se encuentra “la teoría de portafolios Media-Varianza” conocida como el modelo de Markowitz. La selección óptima por supuesto que también está en función de los intereses y necesidades del inversionista.

- ✓ Otro de los puntos importantes no sólo es la selección óptima de los instrumentos de inversión sino también el realizar una evaluación del comportamiento del portafolio, es decir, evaluar los resultados y además darle un seguimiento, realizar las modificaciones que sean convenientes para seguir obteniendo los resultados esperados, a esto se le conoce como administración del portafolio.

La teoría de portafolios tiene más de 50 años y su implementación ha sido muy fructífera para obtener la maximización de los rendimientos, también ha sido de gran importancia para lograr la diversificación en la elección de los instrumentos.

2.1. Rendimiento y Riesgo de un Activo Financiero

Si se quiere comparar diferentes inversiones entre diversos activos financieros, se deberá calcular de la forma más aproximada posible el rendimiento de cada uno de ellos.

Si existiera un ambiente de certeza, el rendimiento que se espera obtener para cada activo coincidiría con el que realmente se obtendría, es decir, su valor esperado y por lo tanto, aquél título que proporcione la mayor ganancia esperada será el que se elija por encima de los otros activos.

Por desgracia, la existencia de la incertidumbre implica que el rendimiento de la inversión en pocas veces coincidirá con su valor esperado. Todos los activos financieros cotizados en el mercado de valores están sujetos a un riesgo; claro que a diferentes tipos de activos corresponderán diferentes tipos de riesgo. Sin embargo, el efecto del riesgo, sea cual sea su tipo, es siempre el mismo, los rendimientos obtenidos en la actualidad serán diferentes de los esperados por el inversor en el momento en que adquirió el activo.

Así que el inversor necesita poder cuantificar para cada activo tanto el rendimiento incierto como el nivel de dicha incertidumbre, antes de tomar una decisión sobre la inversión a efectuar. Una vez realizado lo anterior, según sea su actitud hacia las diferentes combinaciones rendimiento-riesgo, elegirá aquélla que mejor se adapte a sus deseos.

2.1.1. Rendimiento de un Activo financiero

El rendimiento del título i durante un período de tiempo t, está definido por la siguiente expresión:

$$R_{it} = \frac{d_{it} + P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \underbrace{\frac{d_{it}}{P_{it-1}}}_{\text{Ganancia por dividendos}} + \underbrace{\frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}}}_{\text{Ganancia por Capital}}$$

Donde

P_{it} =Precio del activo financiero i al final del periodo t

P_{it-1} =Precio del activo financiero i al comienzo del periodo t

R_{it} =Rendimiento del activo i en el periodo t

d_{it} = Dividendo recibido durante el periodo

El rendimiento de un activo financiero si es calculado ex-post (R_{it}), será conocido con certeza, lo que no ocurrirá si se obtiene ex-ante (E_{it}) debido, a la ya comentada aparición del riesgo, el cual se refleja en la variabilidad de los rendimientos esperados. Así que para cuantificar el rendimiento de un título en condiciones de incertidumbre tendremos que echar mano de las probabilidades, ya sean éstas objetivas o subjetivas, las cuales pueden ser obtenidas a través de datos históricos o simplemente por opiniones de expertos.

Una vez que disponemos de la distribución de probabilidad de los posibles rendimientos de un título determinado, calcularemos su valor esperado utilizando la esperanza matemática o media:

$$E_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_i$$

2.1.2. Cálculo del Riesgo de un Activo Financiero

El riesgo que puede afectar a los títulos puede ser de varias clases como, por ejemplo:

a) Incertidumbre de los dividendos (afecta a las acciones).
b) Riesgo de insolvencia (afecta a las obligaciones).
c) La inflación y los cambios de interés.
d) Variabilidad de los precios de mercado.

La idea de riesgo engloba dos nociones:

a) Incertidumbre ante el resultado y

b) Posibilidad de obtener un resultado negativo.

Por lo tanto, una buena definición de riesgo debería incluir una medida de ambas nociones. Estrictamente hablando, la desviación estándar cumple sólo la primera de las mismas, pero si la distribución de probabilidad es simétrica respecto a la media (como la distribución normal, por ejemplo), cuanto mayor sea la desviación estándar mayor será el riesgo de la inversión. Por ello, a pesar de sus limitaciones, la herramienta estadística utilizada para medir el riesgo de un título va a ser la desviación estándar debido a dos razones:

1) El rendimiento esperado y su desviación típica son las dos medidas necesarias para describir una distribución normal de probabilidad de dicho rendimiento de los títulos (si estos se ajustan a la distribución mencionada).
2) Los estudios empíricos realizados demuestran que las distribuciones de los precios de los títulos o a veces la de los rendimientos siguen una distribución normal o

lognormal o muy próxima a las mismas, aunque en algunos casos esto no se cumple, sin embargo en la práctica suele manejarle como si fuera lo más común.

De esta forma cuanto mayor sea la desviación estándar o la varianza del rendimiento de un título, mayor será su riesgo. La desviación estándar es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Por lo que la varianza se define de la siguiente manera:

$$\sigma^2{}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it} - \overline{R}i\right)^2$$

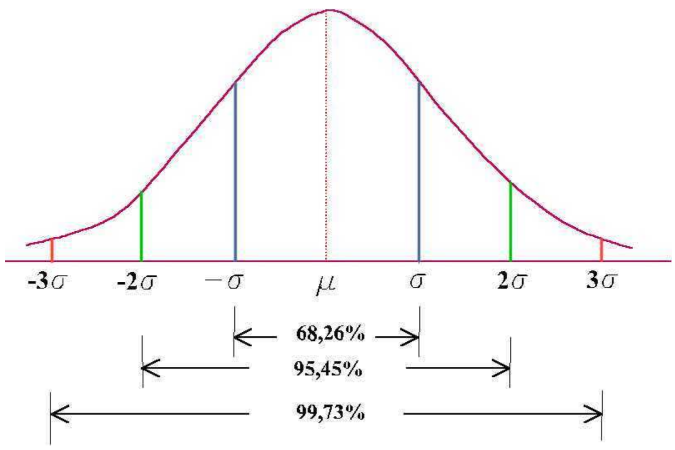
Dónde:

R_{it} - es el rendimiento del activo *i* en el periodo *t*

$\overline{R}i$ - Es el rendimiento promedio del activo *i* durante todo el periodo.

T – Es el número de periodos

Si la distribución es normal sabemos que la probabilidad de que el rendimiento obtenido caiga en el intervalo formado por la media, más o menos, una vez su desviación estándar es del 68%. Será del 95% si el intervalo se agranda a dos veces la desviación estándar y al 99,7% si el intervalo se agranda a tres veces.



Gráfica 1 – Distribución normal

Como se puede observar el cálculo del riesgo se basa en datos del pasado, lo que implica que el riesgo se va a mantener constante en el futuro. Esto no siempre se cumple y menos en los activos muy arriesgados que con el tiempo tienden a serlo menos, pero su cálculo así realizado, es más objetivo, lo que no quiere decir que sea más exacto.

2.1.3. Rendimiento y Riesgo de un Portafolio

Una vez que el inversor ya ha determinado el rendimiento y el riesgo de cada valor en particular, podrá pasar a calcular el rendimiento y el riesgo de las diversas combinaciones que haga de los mismos, es decir, de las carteras que pueda formar.

2.1.3.1. Rendimiento del Portafolio

El cálculo del rendimiento del portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos esperados de cada uno de los instrumentos que lo componen

$$Rp = X_1 R_1 + X_2 R_2 + ... + X_n R_n$$

Donde

X_n - Representa la proporción del capital que el inversor invierte en el activo n.

R_n - Es el rendimiento del activo n

Debiéndose cumplir que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$

2.1.3.2. Riesgo del Portafolio

El riesgo del portafolio es un poco más difícil de determinar, pero también se considera la variación que existe entre cada uno de los rendimientos reales obtenidos para el portafolio Rp y el valor del rendimiento promedio del portafolio Rp, mientras los rendimientos obtenidos se encuentren más alejados del valor del rendimiento promedio, se tendrá una mayor desviación ó variabilidad de los rendimientos, lo que representa por supuesto un mayor riesgo.

Por lo tanto la varianza del portafolio está dada por la siguiente fórmula:

$$\sigma_p^2 = X_1\sigma^2{}_1 + X_2\sigma^2{}_2 + ... + X_n\sigma^2{}_n + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_{n-1}X_n\sigma_{n-1(n)} = \sum\sum X_iX_j\sigma_{ij}$$

Donde

σ_{ij} - es la covarianza del rendimiento del activo i con el rendimiento del activo j

Recordar que la covarianza es una medida estadística de la relación entre dos variables aleatorias cualesquiera, esto es, mide de qué manera dos variables aleatorias, tales como los rendimientos de dos activos se “mueven conjuntamente”.

Un valor positivo de la covarianza indicará que ambos rendimientos tienden a moverse en el mismo sentido, mientras que uno negativo indicará que se mueven en sentidos opuestos. Por otro lado, un valor próximo a cero indicará una posible ausencia de relación entre ambos rendimientos.

La covarianza es igual al producto de las desviaciones típicas de los rendimientos multiplicado por el coeficiente de correlación entre ambos títulos ($\sigma_{AB} = \sigma_A \ \sigma_B \ \rho_{AB}$). El coeficiente de correlación reescala la covarianza para facilitar la comparación con los valores correspondientes de otros pares de variables aleatorias. Su valor oscilará entre -1 (correlación perfecta negativa) y 1 (correlación perfecta positiva).

Lo mismo que en el caso del rendimiento existía un vector de rendimientos esperados, en el caso del riesgo de una cartera se puede hablar de una matriz de covarianzas tal como la que se puede observar a continuación para el caso de tres activos:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

donde las diagonales son las varianzas de cada título, mientras que las covarianzas que se encuentran encima de dicha diagonal son las mismas que las que están debajo de ella, es decir, los dos lados de la matriz son simétricos (puesto que $\sigma_{13} = \sigma_{31}$); por ello, no hará falta calcular las seis covarianzas sino sólo tres de ellas.

En conjunto, para calcular la combinación rendimiento-riesgo de una cartera, según el procedimiento aquí empleado, hacen falta n esperanzas matemáticas del rendimiento, n varianzas y $(n^2-n)/2$ covarianzas. Por ejemplo, para formar una cartera que integre a unas 50 acciones ordinarias cotizadas en un mercado será necesario estimar: 1,225 covarianzas estimadas de la siguiente manera $((50)^2-50))/2$, más 50 rendimientos y 50 varianzas.

2.2. El modelo de selección de carteras de Harry Markowitz

Como se ha mencionado anteriormente la Teoría de Selección de Carteras fue desarrolladla por Harry Markowitz quién publicó su artículo "Portfolio Selection[5]" durante la década de los cincuenta. Su trabajo es la primera formalización matemática de la idea de la diversificación de inversiones, es decir, el riesgo puede reducirse sin cambiar el rendimiento esperado de la cartera, para ello se parte de los siguientes supuestos básicos en su modelo:

[5] MARKOWITZ HARRY. *Portfolio Selection,* The Journal of Finance Vol. 7, No. 1, 1952, pp. 77-91

1) El rendimiento de cualquier título o cartera es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversor. El rendimiento del título o cartera será medido a través de su esperanza matemática.

2) El riesgo de un título, o cartera, viene medido por la varianza (o desviación estándar) de la variable aleatoria representativa de su rendimiento.

3) El inversor preferirá aquellos activos financieros que tengan un mayor rendimiento para un riesgo dado, o un menor riesgo para un rendimiento conocido. A esta regla de decisión se la denomina conducta racional del inversor.

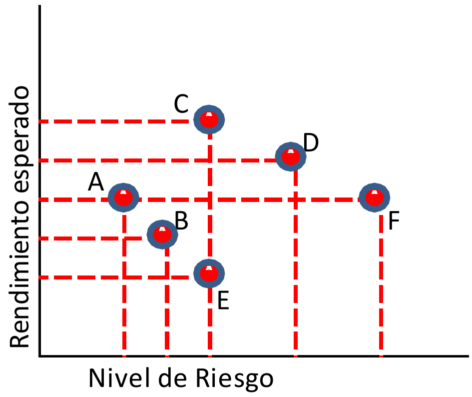
Esta teoría busca principalmente cuáles son las carteras que proporcionan el mayor rendimiento para un riesgo dado, al mismo tiempo que soportan el mínimo riesgo para un rendimiento conocido. A estas carteras se las denomina eficientes.

2.2.1. Carteras Eficientes[6]

Una cartera se denomina eficiente cuando proporciona el máximo rendimiento para un riesgo determinado, o el mínimo riesgo para un rendimiento establecido.

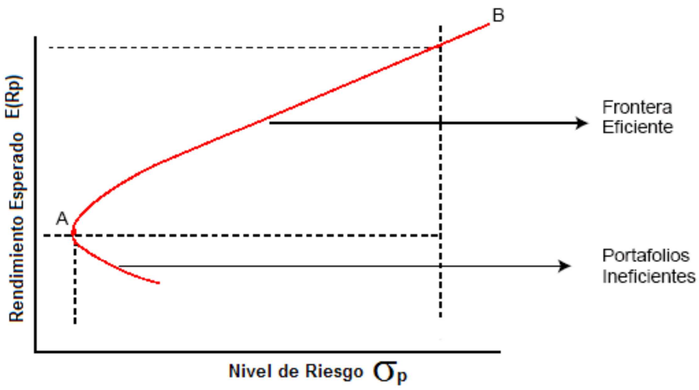
Como se observa en la siguiente gráfica, existen ciertas carteras que son preferibles sobre otras. Lo deseable es seleccionar aquella cartera que proporcione el mayor rendimiento posible, para un nivel de riesgo dado, de esta manera es preferible la cartera A sobre la cartera B, es preferible la cartera la cartera C sobre E, pues al mismo nivel de riesgo, la selección y proporción de la inversión en los instrumentos financieros de la cartera C presenta mayor rendimiento. También es preferible la cartera C sobre las carteras D y E.

[6] GORDON J ALEXANDER, WILLIAM SHARPE, JEFFERY V. BAILEY. *Fundamentos de inversiones: Teoría y práctica*,Pearson Education,2003, pp. 781



Gráfica 2.1 – Carteras eficientes

Sin embargo la selección entre los portafolios A y C no resulta del todo sencilla, pues al tener mayor rendimiento en el portafolio C también se incurre en mayor riesgo, la elección entre estos portafolios dependerá de las preferencias del inversor y de su aversión al riesgo. Si no existe otro portafolio que para el mismo nivel de riesgo proporcione mayor rendimiento que los portafolios A y C, entonces se dice que los portafolios A y C se encuentran en la frontera eficiente. Para cada nivel de riesgo siempre existirá algún nivel máximo de rendimiento esperado, estas carteras son los que se encuentran en la frontera eficiente, tal y como se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica 2.2 – Frontera eficiente

Se puede ver que a mayor nivel de riesgo se tiene un mayor rendimiento esperado. El problema principal es por supuesto el determinar a aquellos portafolios que se encuentran en la frontera eficiente.

El conjunto de carteras eficientes se puede determinar resolviendo los modelos cuadráticos y paramétricos de optimización, que se muestran a continuación.

Tabla 2.1 – Construcción de la frontera eficiente

	Modelo 1	Modelo 2
Función objetivo	$Max\ \mathrm{R_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot R_i$	$Min\,\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}$
Restricciones Paramétricas	$\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} = V^*$	$\mathrm{R_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot R_i = R^*$
Restricciones Presupuestarias	$\sum_{i=1}^{i=n} Xi = 1$	$\sum_{i=1}^{i=n} Xi = 1$
No negatividad	$\forall\ Xi > 0$	$\forall\ Xi > 0$

Donde *V** y *R** son los parámetros que varían, lo que implica ir dando valores a ambas variables para que el modelo al ser resuelto arroje como resultado cual es la mejor cartera para cada valor de ambas variables. Por lo tanto, el resultado de ambos programas será el conjunto de carteras eficientes, que tiene forma de curva cóncava y que recibe el nombre de frontera eficiente, por estar formada por la totalidad de las carteras eficientes.

El modelo de Markowitz supone que el rendimiento obtenido históricamente se mantendrá para el siguiente periodo, así como la varianza y la covarianza obtenidas para los instrumentos de inversión también se mantendrán para un futuro. Para obtener los valores del rendimiento y la varianza de cada uno de los instrumentos de inversión es necesario establecer un marco temporal para los datos históricos.

Supóngase que se toma el primer modelo presentado y se va variando la constante que representa el nivel de riesgo, obteniendo al resolver el programa el conjunto de proporciones *Xi* que maximizan el nivel de rendimiento esperado para cada nivel de riesgo dado, de esta manera las parejas obtenidas *(R,σ)* son las carteras que se encuentran en la frontera eficiente.

El conocer la frontera eficiente para el inversionista es ventajoso, puesto que de acuerdo a sus preferencias o aversión al riesgo elegirá su portafolio óptimo.

La solución a este tipo de modelos hoy en día puede realizarse con diversos paquetes, los cuales son relativamente sencillos de utilizar, tales como Lindo, Lingo, incluso Excel presenta una opción llamada Solver que también permite obtener la solución a los modelos presentados.

El modelo de Markowitz presenta la ventaja de que tanto analistas de inversiones, administradores de portafolios (instituciones como casas de bolsa ó sociedades de inversión) e incluso inversionistas particulares pueden emplear dicho modelo, pues hoy en día el software disponible facilita grandemente los cálculos.

2.2.2. Cartera óptima

Para determinar la cartera óptima se resuelve el siguiente problema de optimización, que considera la minimización de la varianza de la cartera.

$$Min\,\sigma_{\mathrm{p}}^{2} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$\text{Restricciones} \quad \mathrm{R}_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot R_i = R^*$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} Xi = 1$$

$\forall\ Xi > 0$ Esta restricción indica que no se permiten ventas en corto[7]

Para encontrar la combinación precisa de los n activos (el vector *X*) que produce el portafolio de mínima varianza global se plantea el siguiente problema de optimización restringida:

$$Min \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{p}}^{2}$$

$$\textbf{Sujeto a } \sum_{i=1}^{i=n} Xi = 1$$

Nótese que minimizamos la expresión $\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{p}}^{2}$ y no σ_{p}^{2} porque produce el mismo resultado y facilita la expresión y resolución matemática. Este problema de optimización se resuelve fácilmente mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange[8].

Por lo tanto la función lagrangeana es:

$$L = \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{p}}^{2} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_i X_k \sigma_{ik} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange

[7] Las ventas en corto se pueden considerar como ventas a crédito, por lo que se vende algo que no se tiene, esto daría origen a valores negativos para las proporciones invertidas en los activos.
[8] GEORGE B THOMAS. *Cálculo de varias variables*. Pearson Education, (2006), pp 544.

Capítulo 3 – Marco de referencia

3. Introducción

A continuación se describirán las diferentes metodologías para la medición del riesgo. Como se ha mencionado anteriormente, en el enfoque de Markowitz, el riesgo es tomado como la desviación estándar de los precios de los activos a lo largo de un intervalo de tiempo.

Además de las metodologías para estimar el riesgo, existen otras metodologías que también se describirán en este capítulo, las cuales se enfocan principalmente en la selección de activos a fin de obtener el portafolio óptimo que tenga el máximo rendimiento con un mínimo riesgo.

A continuación se describen los modelos que se utilizan únicamente para estimar el nivel de riesgo de un portafolio de activos financieros.

3.1. Métodos Alternativos para estimar el Riesgo

Como ya se ha mencionado, el riesgo es la posibilidad de que el rendimiento del portafolio sea distinto al rendimiento esperado. El modelo de Markowitz es sólo un apoyo para realizar la selección de los instrumentos de inversión que compondrán el portafolio, sin embargo, es necesario mencionar que la teoría existente sobre portafolios de inversión es muy amplia y el modelo de Markowitz no es el único empleado.

A continuación se mencionan brevemente cada uno de estos métodos alternativos de evaluación del riesgo, cabe señalar que ninguno de estos modelos tiene como objetivo la selección eficiente de activos, sino más bien, la medición de riesgo.

1. Método CAPM[9] (Capital Asset Pricing Model).- este método fue desarrollado por Sharpe en 1963 y se basa en el análisis de las variaciones de los precios con respecto a los precios del mercado considerando también cifras históricas. CAPM considera el riesgo sistemático, sin tratar a ningún instrumento aisladamente buscando de esta manera la compensación de los riesgos.

2. Método APT[10] (Arbitrage Pricing Theory).- este método fue diseñado por Stephen A. Ross, el cual no sólo considera que los indicadores de precio del mercado son el único factor determinante en el riesgo, sino que también considera a otros factores tales como la producción industrial, la inflación, las tasas de interés, el precio del petróleo, cambios en las reservas internacionales, entre otros. Sin embargo el método APT no es suficiente para tomar decisiones en cuanto al principal problema en la selección de un portafolio de inversión, es decir, no permite tomar la decisión de la proporción idónea que deben tener los instrumentos de inversión que compondrán al portafolio.

3. El VaR[11] (Value at Risk).- La medición del VAR requiere de fundamentos estadísticos, el VaR determina la cantidad máxima que es posible perder con un determinado nivel de confianza (95% de confianza o el 99%) y en un determinado periodo de tiempo.

---

[9] En la concepción de este modelo trabajaron en forma simultánea, pero separadamente, tres economistas principales: William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin, cuyas investigaciones fueron publicadas en diferentes revistas especializadas entre 1964 y 1966. El modelo de portafolio de Markowitz fue profundizado y enriquecido por los trabajos de **Sharpe**: *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk*, 1964; **Lintner**: *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, 1965; y *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*, 1965; y **Mossin**: *Equilibrium in a Capital Asset Market*, 1966. Cabe destacar que **Jack Treynor** escribió en 1961 un trabajo bastante pionero: *Toward a Theory of the Market Value of Risky Assets*, pero que no alcanzó a publicar. Sharpe, sin embargo, reconoce en su obra que tomó conocimiento del trabajo de Treynor. Por este **importante aporte para el desarrollo de la economía financiera**, William Sharpe recibió el Premio Nobel de Economía (en conjunto con Harry Markowitz y Merton Miller) el año 1990

[10] STEPHEN ROSS. *The arbitrage theory of capital asset princing,* Journal of Economic Theory ,1976.

[11] CAROL ALEXANDER. *Market Risk Analysis* , Volume IV, Value at Risk Models. Jhon Wiley & Sons, Ltd. USA 2008.

Normalmente los periodos usados para el cálculo del VaR son: un día, diez días o un año. Existen varias formas de realizar el cálculo del valor del VaR las cuales se enlistan a continuación y se da una breve explicación de cada una de ellas.

a. El método histórico - El método histórico toma una consideración importante, y es que asume que las condiciones pasadas seguirán ocurriendo en el futuro, por lo que se trabaja con datos históricos.

b. El método de varianza covarianza - El método de varianza covarianza.- Este método también es conocido como Delta Normal, considera que los rendimientos tienen una distribución normal, así que conociendo la media y varianza de esta distribución, es sencillo determinar el porcentaje de observaciones situadas por encima del 95%, el cual es el nivel de confianza.

c. El método de Simulación de Montecarlo – Este método data aproximadamente de 1994, se basa en la simulación por medio de la generación de números aleatorios los cuales se emplean para generar posibles escenarios. Un posible escenario se refiere a las distintas proporciones del monto total de la inversión que pueden tomar cada uno de los instrumentos de inversión, de esta manera se determina la posible pérdida o ganancia del portafolio bajo esas condiciones. Esta información es ordenada de tal manera que permita determinar un nivel de confianza específico.

4. Método de Situaciones Extremas - Método de Stress-Testing ó Método de Situaciones Extremas.- Este método precisamente simula situaciones extremas ó escenarios adversos lo que permite cuantificar los cambios probables en los rendimientos esperados del portafolio. Stress Testing puede ser implementado a

través de la Teoría de Valores Extremos (EVT) la cual se interesa por el estudio de las colas de la distribución de probabilidad y emplea métodos no paramétricos.

5. Algoritmos Genéticos - Otro método que permite determinar al portafolio óptimo es un método propuesto por Holland en 1975 conocido como Algoritmo Genético (GA). Este algoritmo también ha sido empleado para resolver diversos problemas de optimización industrial, los cuales son difíciles de resolver con los métodos conocidos y empleados tradicionalmente. Primeramente debe emplearse la simulación estocástica para calcular el rendimiento esperado y el riesgo, y posteriormente (GA) es empleado para determinar el portafolio óptimo. La explicación de cómo es que funciona el Algoritmo Genético es un poco compleja y debe manejarse una nueva definición del riesgo, distinta a la que se ha venido manejando en este capítulo, por lo cual sólo se hace una breve mención de su existencia.

6. Otros Modelos - Actualmente existen otros modelos que permiten tener una mejor proyección de los niveles de riesgo futuros, entre ellos se puede citar al modelo de heterocedasticidad asimétricos, el modelo GARCH[12] y GARCH asimétrico, así como también se puede mencionar que no sólo la distribución normal es empleada para modelar retornos, sino también la distribución T- Student, la cual presenta colas con mayor masa de probabilidad y por esto se representa mejor la distribución de rendimientos. Los modelos GARCH más difundidos fueron desarrollados en 1986 por Bollersler, también son conocidos como modelos generalizados auto regresivos de heterocedasticidad condicionada, los cuales fueron una generalización de los modelos GARCH desarrollados por Engle en 1982. Estos modelos emplean el método de máxima verosimilitud para realizar una estimación que permite determinar las proporciones de los instrumentos que maximizan los rendimientos.

[12] PHILLIPPE JORION. *Financial Risk Manager Handbook*, Segunda Edición, John Wiley & Sons, Inc, United States of America 2003.

Otros modelos que también pueden ser empleados y que consideran la trayectoria que han seguido los rendimientos es la estimación de modelos de series de tiempo, conocidos como ARIMA (p,d,q) ó modelos autorregresivos integrados de medias móviles con orden p, d y q, sin embargo estos modelos requieren de un uso especializado de software econométrico.

Cada uno de los métodos mencionados presenta sus respectivas ventajas y desventajas. Aunque tradicionalmente sea considerado que el promedio histórico de los rendimientos es en buen estimador del rendimiento futuro, los elementos que deben ser considerados al momento de diseñar un portafolio de inversión son muchos, entre ellos se puede mencionar la duración, la convexidad, deltas, gammas, el VAR, el tracking error, razón de información, teoría de valores extremos, los métodos de simulación, etc.

La complejidad y profundidad de cada uno de estos puntos impide que sean desarrollados en la presente tesis, sin embargo el lector debe estar consciente de esto y tener presente que existen factores importantes para diseñar un portafolio de inversión pero difíciles de considerar en tal estudio.

3.2. Métodos para la Optimización de Portafolios

Como se mencionó en el apartado anterior, hay distintos modelos que pueden estimar el riesgo de un portafolio de inversiones, sin embargo con estos modelos no es posible determinar las proporciones que debe de tener el portafolio de cada activo con el fin de minimizar el riesgo y maximizar la rentabilidad. Por esto es necesario mostrar y comparar los diferentes modelos que se usan como alternativa al modelo de media-Varianza propuesto por Harry Markowitz.

Los modelos que se mencionan a continuación tienen en común que son problemas de optimización y que tienen cierta definición homogénea del riesgo del portafolio, por lo que es posible compararlos directamente.

3.2.1. Modelo MAD (Mean Absolute Deviation)

El modelo MAD[13] propuesto por Konno y Yamazaki (1992), a diferencia del modelo de Media - Varianza (MV) de Markowitz no asume normalidad en el rendimiento de los activos. El modelo MAD también minimiza una medida de riesgo, donde la medida de riesgo en este caso es la Desviación Media Absoluta (MAD por sus siglas en inglés), para una desviación media absoluta grande el riesgo se incrementa.

La Desviación Media Absoluta se determina de la siguiente manera:

$$MAD_p = E\left[\left| R_p - r_p \right| \right]$$

Dónde:

R_p - Son los rendimientos del activo, pueden ser diarios, mensuales o anuales.

r_p - Es el rendimiento promedio del activo

Donde teóricamente es lo mismo que en el modelo de MV cuando los rendimientos de los precios de los activos son normalmente distribuidos. El modelo MAD es más fácil de implementar debido a que éste elimina la necesidad de calcular la matriz de varianzas y covarianzas

[13] KONNO HIROSHI, YAMAZAKI HIROAKI .*Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications*, Management Science Vol 37, No. 5, 1991, pp. 519 - 531

Como se ha mencionado, ambos modelos minimizan una medida de riesgo, sin embargo el modelo MAD intenta reducir la desviación media absoluta a diferencia de la varianza que minimiza el modelo MV.

A continuación se describe matemáticamente el modelo MAD

$$Min \frac{\sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{j_t} X_j \right|}{T}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j X_j \geq \varphi M_0$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = M_0$$

$$X_j \geq 0$$

Dónde:

a_{j_t} - Es el rendimiento mensual o anual del activo menos el rendimiento promedio $(R_p - r_p)$ del activo j para el tiempo T.

Las restricciones del modelo MAD son las mismas que en el modelo de Markowitz.

Cabe señalar que la formulación del modelo MAD no tiene una solución analítica y por lo tanto debe ser aproximadamente con una aproximación numérica.

3.2.2. Modelo MAD Estocástico

A continuación se describirá el modelo de la Desviación Media Absoluta pero de tipo estocástico, cabe señalar que el modelo MAD descrito en la sección anterior es un modelo de tipo determinista.

El modelo MAD estocástico toma en cuenta diversos escenarios con el fin de minimizar la distancia entre el rendimiento promedio y los rendimientos periódicos de cada activo, la formulación matemática se menciona a continuación:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\sum_{s=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jts} x_j\right|}{T}\right)$$

Sujeto a:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} r_{js} x_j\right) \geq \varphi\, Mo$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = Mo$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_j \leq \mu_j$$

Dónde:

x_j - Es la proporción del activo i a invertir del portafolio

r_{js} - Es el rendimiento promedio del activo j en el escenario s

Mo - Es el total del monto a invertir

φ - es el rendimiento mínimo que requiere el inversor

μ_j - Es la mínima cantidad a invertir en el activo j

a_{jts} - Es el rendimiento periódico menos el rendimiento promedio del activo j en el momento t en el escenario s $\left(r_{jts} - \bar{r}_{js}\right)$

T - Es el número de años

Cabe señalar que la restricción sobre el rendimiento mínimo es opcional, debido a que se puede restringir todavía más la inversión en cada uno de los activos dependiendo de las preferencias que se tengan sobre cada activo.

A continuación se muestra una propuesta para la construcción de escenarios de los rendimientos de los precios de las acciones, cabe señalar que no es la única metodología o manera de estimarlos.

3.2.2.1. Estimación de Escenarios a través de intervalos de confianza

A continuación se mostrará la manera de construir escenarios para los rendimientos de los precios de las acciones a través de intervalos de confianza, cabe señalar que esta no es la única manera de construir escenarios, sin embargo a fin de mostrar cómo debe ser desarrollada la metodología del modelo MAD se utilizarán los intervalos de confianza para la media de los rendimientos.

3.2.2.2. Intervalo de confianza para la media[14]

De una población de media μ y desviación estándar σ se pueden tomar muestras de n elementos, cada una de estas muestras tiene a su vez una media $\bar{x}$. Se puede demostrar que la media de todas las medias muestrales coincide con la media poblacional: $\mu_{\bar{x}} = \mu$.

Si además el tamaño de las muestras es lo suficientemente grande[15], la distribución de medias muestrales es prácticamente una distribución normal con media μ y desviación estándar dada por la siguiente expresión: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queda representada de la siguiente manera:

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, Si se estandariza se tiene lo siguiente: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z \sim N(0,1)$

En una distribución normal estándar puede calcularse fácilmente un intervalo dentro del cual caigan un determinado porcentaje de las observaciones, esto es, es posible encontrar Z_1 y Z_2 tales que $P[Z_1 \le Z \le Z_2] = 1 - \alpha$, donde $[(1-\alpha)\cdot 100]\%$ es el nivel de confianza deseado.

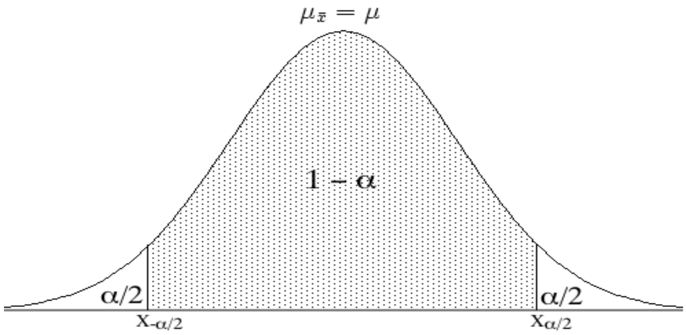
Se desea obtener una expresión tal que $P[\mu_1 \le \mu \le \mu_2] = 1 - \alpha$

En la distribución normal de medias se puede calcular el intervalo de confianza donde se encontrará la media poblacional si sólo se conoce una media muestral, con una confianza determinada. Habitualmente se manejan valores de confianza del 95% y 99%.

Se necesitará calcular los valores $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ y su valor simétrico en la distribución, $Z_{-\frac{\alpha}{2}}$ los cuales se muestran en la siguiente gráfica:

[14] MONTGOMERY C. DOUGLAS. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Jhon Wiley & Sons. Tercera Edición. Chapter 8, 2003. United States of America

[15] En la práctica se considera normal la distribución si n>30.



Gráfica 3.2 – Distribución normal

Por lo que $P\left[\bar{X} \geq X_{\alpha/2}\right] = P\left[Z \geq Z_{\alpha/2}\right] = \alpha/2$

Y de forma estandarizada se cumple que $Z_{-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2}$, por lo que

$$P\left[-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

Haciendo operaciones es posible despejar μ para obtener el intervalo:

$$P\left[\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

De lo cual se obtendrá el intervalo de confianza para la media.

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Las aproximaciones para el valor $Z_{\alpha/2}$ para los niveles de confianza del 95% y 99% son 1.96 y 2.576 respectivamente.

3.2.3. Modelo Minimax de Young

En 1988 Young[16] propuso en 1988 el modelo "Minimax" (MM) usando el mínimo rendimiento como medida de riesgo. El modelo MM es equivalente al modelo de Media Varianza de Markowitz si los rendimientos de los activos se distribuyen normal mutivariado. El modelo MM es un modelo de programación lineal, el cual se describe a continuación:

$$Max\, M_P$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{N} w_j y_{j_t} - M_P \geq 0, \quad \mathrm{t} = 1,2,3,...\mathrm{T}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_J \geq G, \quad \mathrm{t} = 1,2,3,...\mathrm{T}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \leq W, \quad \mathrm{t} = 1,2,3,...\mathrm{T}$$

$$w_j \geq 0, \qquad \mathrm{j} = 1,...N$$

Dónde:

y_{j_t} - Es el rendimiento del activo j en el periodo t

$\bar{y}_J$ - Es el rendimiento promedio del activo j

M_P - rendimiento mínimo del portafolio

G - Mínimo nivel de rendimiento

---

[16] YOUNG, M .*A Minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, Management Science, Vol 44, No. 5, 1988. pp 673-67

w_j - Es la proporción del activo

W - Es el total del monto a invertir

Young define M_P de la siguiente manera: $M_P = \min_t \sum_{j=1}^{N} w_j y_{jt}$

Por lo que el anterior modelo es equivalente al siguiente modelo:

$$Max\, E = \sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_j \geq H, \quad \text{t} = 1,........\text{T}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \leq W,$$

$$w_j \geq 0 \quad \text{j} = 1,.....\text{N}$$

H - Es el mínimo nivel del rendimiento del portafolio

El objetivo del modelo es maximizar el rendimiento esperado sujeto a que el rendimiento del portafolio exceda el mínimo nivel del rendimiento, H. Young muestra que el modelo minimax tiene ventajas lógicas si los rendimientos no se distribuyen normalmente y cuando los inversores tienen una fuerte aversión al riesgo. Además, el modelo minimax es un problema lineal, así que puede ser resuelto mucho más rápido que el modelo de Media Varianza.

Dentro de estos modelos determinísticos se encuentran los modelos de Teo y Cai[17], los cuales tienen ligeras diferencias con respecto de los modelos de optimización mencionados.

[17] CAI X, TEO KL, YANG XQ, ZHOU XY (2004). *Minimax portfolio optimization: empirical numerical study*. Vol 55, pp 65-72

3.3. Medidas de desempeño de carteras de inversión

El desempeño es un concepto habitual en la literatura relacionada con la gestión de carteras formadas por activos financieros. El desempeño de una cartera es un concepto relacionado al rendimiento de la misma. De esta manera, en un intento inicial de explicación del desempeño de un activo o de una cartera, podría hablarse de la rentabilidad ofrecida por los activos y las carteras.

Sin embargo esta identificación no es suficiente al observar el tratamiento que del desempeño se realiza en la literatura. De hecho, al hablar de desempeño no sólo se hace referencia al rendimiento de una inversión financiera sino también al nivel de riesgo que soporta. De esta manera, el estudio se confecciona con base en un análisis bidimensional de los dos elementos que se han estado analizando (Rendimiento y Riesgo) en el ámbito de los principales modelos de formación de carteras y de equilibrio de los mercados.

Con los dos componentes rentabilidad-riesgo el estudio de desempeño queda completo. Como se observará a continuación, destacados autores[18] han formulado diferentes índices denominados medidas de desempeño, con el objetivo de condensar los dos valores relevantes en un único valor. Dichas medidas surgen fundamentalmente a partir del CAPM[19], sin embargo, el tratamiento es notoriamente diferente, ya que, mientras el modelo de valoración de activos pretende demostrar un equilibrio a priori, las medidas de desempeño se utilizan para determinar la bondad de la gestión de las carteras en el pasado, por lo tanto, a posteriori.

[18] SHARPE (1966), JENSEN (1968), TREYNOR (1965)
[19] STEPHEN A. ROSS. The arbitrage theory of capital asset pricing theory, Journal of economic theory, Departments of Economics and Finance, University of Pensilvanya, 1973.

Precisamente, el objetivo de las medidas de desempeño es determinar la capacidad de los administradores de una cartera formada por activos financieros en base a su rentabilidad y a su nivel de riesgo.

Por otro lado, más importante que ofrecer una medida de desempeño para las carteras financieras, es determinar una clasificación de dichas carteras en base a la habilidad de los gestores. Por lo tanto, el objetivo es aplicar las medidas de desempeño a un conjunto de carteras para establecer un ranking de valoración de su gestión.

Para establecer una clasificación de valoración de la gestión de carteras financieras, existen algunos casos en los que es inmediato determinar si una cartera ha estado mejor gestionada que otra:

- Cuando una cartera presenta una rentabilidad media superior a otra y su nivel de riesgo es inferior o igual a ésta, se puede determinar que la primera cartera ha sido mejor gestionada que la segunda.

- Si una cartera soporta un riesgo inferior a otra y la rentabilidad media que ofrece es superior o igual a ésta, la primera cartera ha sido mejor gestionada, igualmente.

Para el resto de comparaciones que no se encuentran encuadrados en estos casos resulta necesario aplicar una expresión matemática que permita, a partir de los valores de rentabilidad media y de riesgo, obtener un determinado valor de desempeño para cada una de las carteras y, a partir de los valores obtenidos para cada una de ellas del conjunto analizado, diseñar una clasificación completa.

En este sentido, estas expresiones matemáticas deben considerar, al menos, a los dos elementos considerados relevantes, como lo es el rendimiento y el riesgo.

Manteniendo como es natural, la racionalidad de los inversores en sentido de Markowitz, es decir, que la rentabilidad media es un elemento deseado por el inversor y el riesgo no, cualquier medida que pretenda valorar el desempeño debe cumplir que se minimice el riesgo y se incremente la rentabilidad. Es decir, una cartera estará mejor gestionada conforme aumente la rentabilidad media que ofrezca y lo estará peor conforme crezca su riesgo medido de cualquiera de las maneras vista en los primeros capítulos.

A continuación se mostrarán algunas medidas de desempeño para valorar las carteras de inversión.

3.3.1. Índice de Sharpe [20]

El índice de desempeño propuesto por Sharpe (1966) es también denominado como ratio premio-variabilidad, siendo su expresión la siguiente:

$$Sp = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

La razón de su denominación es inmediata: el numerador de la expresión denota el exceso o prima de rentabilidad que la cartera *p* analizada reporta con respecto a la rentabilidad que el inversor puede obtener mediante activos sin riesgo R_f; mientras que el denominador es la desviación estándar de la variable aleatoria rentabilidad, indicador de la variabilidad de R_p. Este denominador es, por tanto, la raíz cuadrada de la varianza y, en consecuencia, la expresión contempla el riesgo total de la cartera.

El índice ofrece el exceso de rentabilidad sobre el rendimiento sin riesgo que la cartera ofrece por unidad de riesgo total. Este es el sentido financiero del índice de Sharpe. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor que este índice alcance para una cartera, mejor gestionada habrá estado ésta.

[20] BODIE KANE MARCUS *Investments*. McGraw Hill. Novena Edición. Nueva York, Estados Unidos, 2011.

Para demostrar que la expresión propuesta cumple con los requisitos esenciales de una medida de desempeño, a continuación se procede a realizar las derivadas parciales de dicha expresión sobre las dos componentes relevantes, con el fin de comprobar el signo que toman dichas derivadas parciales. En particular:

$$\frac{\delta S_p}{\delta \, \mathrm{E(R_p)}} = \frac{1}{\sigma_p} > 0$$

Esta afirmación no tiene ninguna falla, ya que siempre se cumplirá que la desviación típica sea positiva.

$$\frac{\delta S_p}{\delta \sigma_p} = -\frac{E(E_{Rp}) - R_f}{\sigma_p{}^2} < 0$$

En este caso, el cumplimiento del signo negativo viene condicionado a que el numerador sea positivo, cuestión que, en plena ortodoxia financiera, debe cumplirse, es decir $E(R_p)$ debe ser un valor superior a R_f para que el decisor financiero acepte una cartera formada por activos arriesgados.

Cumpliendo los requisitos especificados se puede aceptar el índice de Sharpe como expresión indicativa del desempeño de las carteras.

3.3.2. Índice de Treynor

Es un índice similar al construido por Sharpe, la medida de Treynor (1965) o índice de Premio-Volatilidad tiene la siguiente expresión:

$$T_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\beta_p}$$

Donde

Tp -Índice de Treynor.

$E(Rp)$ - Rentabilidad promedio del portafolio.

Rf -Tasa libre de riesgo.

β_p -Beta del portafolio.

En este caso, la prima de rentabilidad que la cartera p ofrece con respecto a R_f se relaciona con el parámetro β significativo del riesgo sistemático de la cartera de acuerdo con el modelo de mercado de Sharpe. Por lo tanto, el sentido financiero de este índice indica el exceso de rentabilidad de una cartera sobre el rendimiento sin riesgo que la cartera ofrece por unidad de riesgo sistemático. Similarmente al caso anterior, cuanto mayor sea el valor que el índice de Treynor tome para una cartera, mejor gestionada habrá estado ésta.

La razón de incluir el riesgo sistemático, se debe al hecho de que hay que suponer que los gestores de las carteras administran las mismas de forma eficiente, de tal manera que el riesgo específico habrá sido anulado y por tanto, únicamente hay que pensar en remunerar a los inversores financieros por el riesgo sistemático que soportan.

Se procede a realizar el análisis del signo de las derivadas parciales del índice de Treynor en función de los dos parámetros relevantes:

$$\frac{\delta \mathrm{T_p}}{\delta \mathrm{E(R_p)}} = \frac{1}{B_p} > 0$$

En este caso, la fiabilidad de que siempre concurra este signo no es total, al contrario de lo que ocurriría con el índice de Sharpe, ya que como se ha analizado anteriormente, cabe la posibilidad de que el parámetro β representativo del riesgo sistemático sea negativo, aunque ello no es habitual y mucho menos a largo plazo.

$$\frac{\delta \mathrm{T_p}}{\delta B_p} = -\frac{E(R_p) - R_f}{{B_p}^2} < 0$$

De nuevo el signo negativo de esta expresión exige que la prima de rentabilidad sea positiva sobre el rendimiento libre de riesgo, por lo que la conclusión es la misma que para el índice de Sharpe. No obstante, cumpliendo estas restricciones el índice de Treynor es aceptable como expresión indicativa del desarrollo del portafolio.

3.3.3. Alfa de Jensen[21]

La medida de desempeño propuesta por Jensen (1968), que a continuación se analiza, tiene una estructura notoriamente diferente a las dos anteriores. Su expresión parte de la SML (Security Market Line) analizada en el CAPM, tal que la rentabilidad esperada de una cartera es igual al rendimiento sin riesgo más una prima de rentabilidad por unidad de riesgo sistemático soportado, es decir:

$$E(R_p) = R_f + \lfloor E(R_M) - R_f \rfloor \cdot \beta_p$$

Sin embargo el valor ex post de rentabilidad del portafolio puede o no coincidir con el esperado. En función de que el portafolio supere, iguale o esté por debajo del rendimiento esperado.

Lo normal es que exista una diferencia entre la rentabilidad esperada y la realmente obtenida, en esta diferencia surge el sentido financiero de la alfa de Jensen como medida de desempeño.

$$E(R_p) = E(R_p)^* + J_p$$

Donde

$E(R_p)^*$ - Es el rendimiento obtenido del portafolio p

J_p - Es el índice de Jensen para el portafolio p

Desarrollando la expresión anterior se tiene la siguiente ecuación.

[21] BODIE KANE MARCUS, *Investments*. McGraw Hill. Novena Edición. Nueva York, Estados Unidos, 2011.

$$E(R_p) = R_f + \left[E(R_M) - Rf\right] \cdot \beta_p + J_p$$

Finalmente despejando a Jp se tiene el índice de Jensen de la cartera.

$$J_p = \left[E(R_p) - R_f\right] + \left[E(R_M) - R_f\right] \cdot \beta_p$$

Donde

$E(R_p)$ - Rendimiento esperado del portafolio.

R_f - Rendimiento de la tasa libre de riesgo.

$E(R_M)$ - Rendimiento esperado del mercado.

β_p - Beta del portafolio.

Como hemos podido constatar, de acuerdo con lo mostrado en este capítulo, existen diversas metodologías alternas a la propuesta de Media varianza de Markowitz, las cuales buscan establecer la composición de activos óptimos que minimicen el riesgo y maximicen la rentabilidad de la cartera. Estos métodos de optimización surgieron a partir de poder contar con métodos que fueran más eficientes en el tiempo de ejecución, además de poder medir el riesgo con un enfoque distinto al de la desviación estándar de Markowitz.

Las metodologías alternas que se revisaron fueron las de Desviación Media Absoluta (MAD), MAD estocástico y el método Minimax de Young, sin embargo esté último solo maximiza el rendimiento de la cartera, por lo que no se utilizará para la comparación de los diferentes métodos de optimización.

Dado que el presente trabajo tiene como objetivo determinar cuál método de optimización de cartera de inversión es más eficiente, no solo en términos de maximización de los rendimientos sino también de proporcionar eficientes combinaciones de riesgo y rendimiento, a continuación se presenta una aplicación de cada método de optimización, aplicación que consiste en determinar los portafolios óptimos de acuerdo a los criterios de cada método utilizando la información de precio y rendimiento diarios, durante un mes de los títulos listados en la BMV, clasificados por sector, verificando así qué rendimiento y riesgo se obtiene por cada sector con cada método de optimización y determinando si existe alguna diferencia estadísticamente significativa entre los rendimientos de los portafolios.

Posteriormente se aplicarán algunas medidas de desempeño utilizando el rendimiento y riesgo obtenidos mediante cada uno de los métodos de optimización, esto con el objetivo de determinar la eficiencia de los métodos de optimización ante condiciones de mercado.

Capítulo 4 - Aplicación de los modelos de Optimización

4. Aplicación de los diferentes métodos de optimización de carteras de inversión

Para poder elegir el método de optimización de carteras con el que se obtiene mejores rendimientos, se realizará el siguiente análisis, en el cual se aplicará cada modelo de optimización durante un mes (abril 2013) de manera diaria a cada portafolio de acciones por sector económico, donde dicho sector es tomado a partir de la clasificación de primer nivel proporcionada por la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Sin embargo se considerará la información histórica a partir del mes de enero de 2010 a mayo de 2013, esto con el fin de contar con la información previa para la estimación de rendimientos y desviaciones estándar necesarias para la solución del problema de optimización de Markowitz.

Desde marzo de 2009 la BMV cuenta con una nueva clasificación sectorial. La nueva estructura considera cuatro niveles de clasificación, incorporando un total de 10 Sectores, 24 Sub-Sectores, 78 Ramos y 192 Sub-Ramos, la estructura del primer nivel está compuesta por los siguientes sectores:

SECTOR I – Energía

SECTOR II – Materiales

SECTOR III – Industrial

SECTOR IV – Servicios y bienes de consumo no básico

SECTOR V – Productos de consumo frecuente

SECTOR VI – Salud

SECTOR VII – Servicios Financieros

SECTOR VIII – Tecnología de la información

SECTOR IX – Servicios de telecomunicaciones

SECTOR X – Servicios públicos

En el Anexo I se puede ver las empresas que componen cada uno de los sectores económicos. Donde a manera de resumen se puede observar que para el sector de Energía hay solo una empresa que cotiza en la BMV, para el sector Salud son pocas las empresas que cotizan en la BMV, además de que no todas cuentan con información sobre los precios de sus acciones[22], y para los sectores económicos de Tecnologías de la Información y Servicios Públicos no se cuenta con empresas que coticen en este ramo. Por lo tanto, para realizar el análisis solo se utilizará la información de los siguientes seis sectores económicos: Materiales, Industrial, Servicios y Bienes de Consumo no Básico, Productos de Consumo Frecuente, Servicios Financieros y Telecomunicaciones.

Para obtener el rendimiento de cada sector se siguieron los siguientes pasos:

- Obtener el precio de las acciones de cada emisora desde la fecha donde se tenga información.
- Obtener el rendimiento anual de cada acción j que emite cada emisora por sector i

$$Rij = Ln(\frac{Pj_t}{Pj_{t-1}})$$

Donde

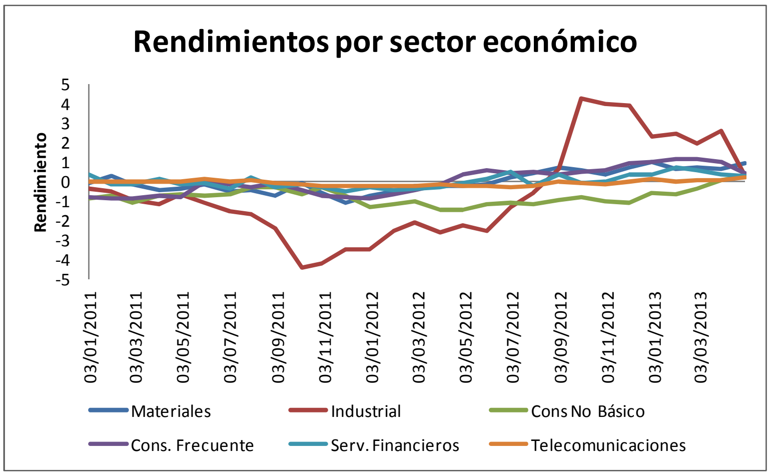
Pj_t - es el precio de la acción j al momento t t=1,…n

- Estandarizar cada uno de los rendimientos, es decir, a cada rendimiento se le resta su rendimiento promedio y es dividido entre su desviación estándar.
- Finalmente, obtener el promedio de cada uno de los rendimientos estandarizados con el fin de tener un solo rendimiento por sector.

La siguiente gráfica muestra los rendimientos logarítmicos estandarizados anuales a través del tiempo para cada sector, como se puede observar hay una alta correlación entre los

[22] Los precios de las acciones de cada sector económico son tomados del sitio web de Yahoo Finance (http://finance.yahoo.com/)

rendimientos por sector, además de que los rendimientos del sector industrial muestra movimientos abruptos a diferencia de los otros sectores.



Grafica 4.1- Rendimientos históricos por sector económico

A continuación se mostrará la aplicación de cada uno de los métodos de optimización, los cuales fueron estimados usando Microsoft Excel, con la herramienta Solver.

4.1. Método de Optimización de Markowitz (Media-Varianza)

Para realizar la aplicación del modelo de Markowitz se tomaron los rendimientos históricos diarios de los precios de las acciones diarios a partir del 1 de enero de 2012 al 30 Marzo de 2013, esto con fin de poder contar con los rendimientos y desviaciones estándar que se introducirán a priori para la estimación.

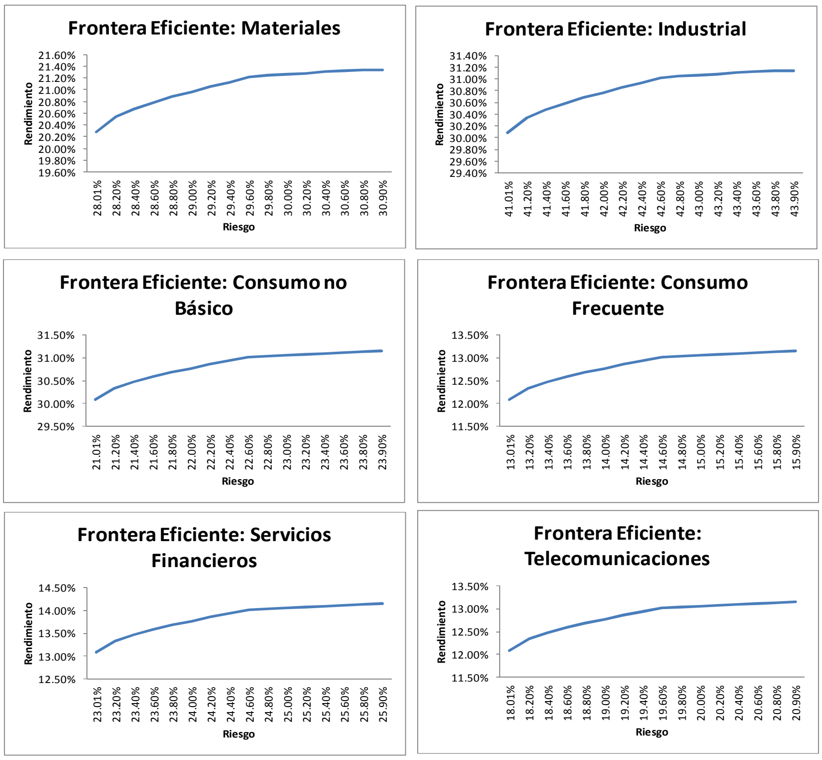
Posteriormente se aplicará el modelo de manera diaria durante un mes, tomando como fecha el 1 al 30 de Abril de 2013 , incorporando en cada día la información del día anterior, así hasta llegar hasta el último día del mes de abril, con lo cual se obtendrán los rendimientos y riesgo de cada portafolio óptimo durante un mes.

A continuación se muestra el rendimiento y desviación estándar promedio tomados a partir de los precios de acciones de cada sector económico, donde el sector industrial es el que presenta un mayor riesgo pero a su vez también es el que presenta un mayor rendimiento del 33%, el sector que presenta un riesgo menor es el de Consumo Frecuente, el cual también presenta un riesgo bajo. En el Anexo I se puede ver el detalle de cada acción.

Tabla 4.1- Rendimiento y desviación estándar por sector económico

Sector	Rendimiento	Desviación est.
Materiales	24%	23%
Industrial	33%	40%
Cons. No Básico	20%	12%
Consumo Frec.	12%	14%
Serv. Financieros	15%	25%
Telecomunicaciones	13%	18%

A continuación se muestran las fronteras eficientes construidas para cada sector económico, las cuales son el resultado de la optimización del problema de Markowitz presentado en la sección 2.2.1 de la tabla 2.1. Cabe señalar que para la construcción de la frontera eficiente solo se consideró la información histórica hasta marzo de 2013.



Gráfica 4.2 – Fronteras eficientes por sector económico

Con la información diaria del mes de abril se aplicó el modelo de Markowitz para cada día, obteniéndose la cartera óptima con sus respectivos valores de rendimiento y riesgo por cada uno de los sectores económicos, a continuación se presentan los rendimientos obtenidos para cada sector.

Tabla 4.2- Rendimientos diarios por sector, Modelo de Markowitz

	Rendimientos					
Fecha	Materiales	Industrial	Cons. No Básico	Consumo Frec.	Serv. Financieros	Telecomunicaciones
01-abr-13	20%	33%	23%	18%	17%	13%
02-abr-13	23%	29%	18%	18%	9%	11%
03-abr-13	21%	30%	21%	16%	10%	17%
04-abr-13	22%	28%	16%	11%	15%	21%
05-abr-13	29%	35%	18%	9%	12%	7%
08-abr-13	28%	33%	18%	18%	16%	20%
09-abr-13	23%	37%	22%	13%	10%	11%
10-abr-13	25%	39%	20%	12%	11%	20%
11-abr-13	30%	29%	21%	11%	20%	20%
12-abr-13	28%	40%	23%	18%	14%	10%
15-abr-13	21%	37%	19%	11%	18%	18%
16-abr-13	27%	25%	18%	8%	19%	17%
17-abr-13	23%	25%	22%	12%	14%	16%
18-abr-13	23%	40%	22%	14%	15%	18%
19-abr-13	21%	37%	22%	16%	17%	7%
22-abr-13	22%	35%	16%	10%	16%	9%
23-abr-13	21%	31%	18%	18%	18%	22%
24-abr-13	28%	36%	25%	10%	12%	15%
25-abr-13	23%	40%	17%	16%	14%	13%
26-abr-13	23%	38%	17%	10%	16%	16%
28-abr-13	21%	31%	23%	17%	17%	21%
29-abr-13	26%	30%	23%	12%	19%	10%
30-abr-13	30%	31%	21%	12%	19%	19%

El anterior cuadro presentó los rendimientos diarios obtenidos mediante la solución del modelo de Markowitz de manera diaria, por lo que para contrastar los resultados obtenidos mediante este método con otros es necesario estimar de igual manera los rendimientos óptimos de manera diaria con los otros métodos de optimización.

A continuación se muestran los resultados para el modelo MAD y MAD estocástico.

4.2. Método de Optimización de Desviación Media Absoluta (MAD)

Como se revisó anteriormente, el modelo de optimización MAD propuesto por Konno y Yamasaki, utiliza una medida de riesgo diferente a la que usa Markowitz, la cual es la Desviación Media Absoluta la cual viene dada por la siguiente expresión

$$MAD_p = E\left[\left| R_p - r_p \right| \right]$$

Donde

R_p - Son los rendimientos del activo, pueden ser diarios, mensuales o anuales.

r_p - Es el rendimiento promedio del activo

El modelo MAD descrito en la sección 3.2.1 minimiza la Desviación Media Absoluta entre el rendimiento promedio y los rendimientos esperados de la cartera.

Para dar solución al problema de optimización de MAD, se construyó una aplicación en Visual Basic de Excel, a fin de poder tener todas las iteraciones diarias y así obtener los rendimientos de las carteras óptimas por sector económico. El problema de MAD puede ser resuelto por casi cualquier programa de Optimización como LINDO[23], sin embargo se tomó la decisión de usar Excel con el fin de que sea más sencilla la ejecución de todos los portafolios de manera diaria.

Para plantear el problema MAD en Excel se utilizaron algunos datos como son los Rendimientos anuales por activo financiero y los rendimientos promedios por año, los cuales servirán para el cálculo de la Desviación Media Absoluta de los rendimientos, la cual es minimizada en el problema de optimización MAD.

[23] Software de Optimización: Programación Entera, Programación Lineal, Programación No Lineal, Programación Estocástica y Optimización Global.

A continuación se muestran cada uno de los rendimientos anuales por sector económico.

Tabla 4.3- Rendimientos anuales por sector

Sector	Rendimiento		
	2010	2011	2012
Materiales	25%	22%	23%
Industrial	35%	29%	33%
Cons. No Básico	18%	17%	20%
Consumo Frec.	15%	21%	22%
Serv. Financieros	18%	25%	19%
Telecomunicaciones	10%	13%	15%

Una vez estimados los rendimientos anuales se procede a determinar la medida de riesgo MAD, la cual se minimizará a fin de encontrar las carteras óptimas.

Para encontrar la solución óptima al problema MAD, es necesario encontrar la línea tangente a todo el conjunto de soluciones factibles de la frontera eficiente, sin embargo para el problema MAD no existe alguna fórmula para resolver esto. Así que se tomó la formula proporcionada por Bower Beth[24], proporcionada en uno de sus trabajos de investigación y la cual se muestra a continuación.

$$\tan\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(\bar{r}_i - r_f)}{\dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}\cdot X_j\right|}{T}}$$

Donde

x_i - Son las proporciones del activo *i*

$\bar{r}_i$ - Es el rendimiento promedio del activo *i*

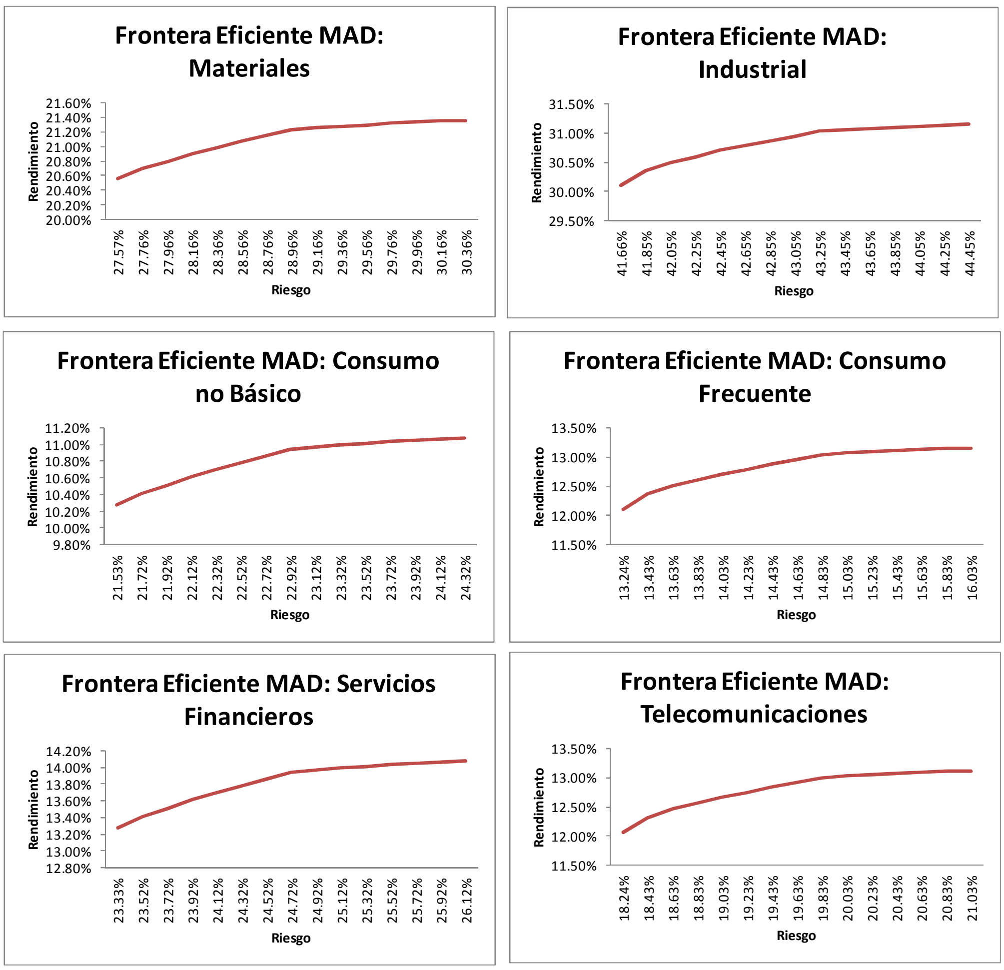
r_f - Es la tasa libre de riesgo

[24] BOWER BETH. *Portfolio Optimization: MAD VS Markowitz,* Millersville University,2005, pp 8

a_{jt} - Es el rendimiento periódico menos el rendimiento promedio del activo j en el momento t en el escenario s $\left(r_{jts} - \bar{r}_{js}\right)$

T - Es el número de años

Cabe señalar que cuando se intenta encontrar la solución óptima al problema de optimización, esta no es única, sin embargo en este trabajo se consideró para la optimización que los valores iniciales de las proporciones fueran al menos iguales que las de Markowitz, esto dado que el problema tiene una infinidad de soluciones. La tasa libre de riesgo que se utilizó fue la tasa de cetes diario para el mes de abril. Dado que el problema tiene muchas soluciones, se considerarán la primera iteración para la formación de la frontera eficiente.



Gráfica 4.3 – Fronteras eficientes por sector económico, modelo MAD

De acuerdo con los valores resultantes tras la optimización del modelo de MAD, se construyó la frontera eficiente, donde en comparación el modelo de Markowitz, el riesgo resulta ser ligeramente mayor mediante el modelo MAD, esto es difícil comparar dado que ambos modelos consideran una medida de riesgo diferente. Sin embargo, en cuanto a los rendimientos, el modelo MAD produce mayores rendimientos en la mayoría de los portafolios a excepción del sector de servicios financieros, en el que el rendimiento resultante es mayor con el modelo de Markowitz, aunque no en todos los puntos de la frontera eficiente se observa este comportamiento.

A continuación se mostrará los resultados diarios del modelo MAD durante cada día del mes de abril del año 2013.

Tabla 4.4- Rendimientos anuales por sector, Modelo MAD

	Rendimientos					
Fecha	**Materiales**	**Industrial**	**Cons. No Básico**	**Consumo Frec.**	**Serv. Financieros**	**Telecomunicaciones**
01-abr-13	19.95%	32.53%	25.36%	17.26%	16.33%	15.85%
02-abr-13	22.01%	31.25%	19.66%	17.89%	8.77%	11.66%
03-abr-13	19.23%	30.26%	22.79%	17.96%	9.66%	17.35%
04-abr-13	22.01%	26.20%	15.24%	13.02%	14.37%	19.85%
05-abr-13	30.12%	32.02%	16.25%	10.26%	11.96%	10.57%
08-abr-13	28.03%	34.25%	17.25%	16.85%	15.37%	19.25%
09-abr-13	24.02%	38.56%	22.36%	13.26%	9.91%	12.65%
10-abr-13	26.32%	41.24%	20.32%	11.26%	12.36%	21.56%
11-abr-13	31.85%	29.33%	22.33%	17.25%	22.21%	21.25%
12-abr-13	26.09%	41.24%	24.24%	17.53%	15.37%	10.96%
15-abr-13	20.33%	37.00%	18.24%	10.56%	19.24%	18.44%
16-abr-13	25.20%	24.24%	20.33%	11.02%	20.37%	16.86%
17-abr-13	21.02%	22.37%	24.26%	13.54%	15.24%	15.68%
18-abr-13	25.21%	37.96%	22.37%	16.24%	14.29%	17.24%
19-abr-13	9.23%	39.02%	21.65%	15.24%	19.14%	9.64%
22-abr-13	22.24%	34.27%	15.26%	9.56%	17.85%	9.85%
23-abr-13	32.54%	30.25%	17.24%	9.32%	17.26%	21.25%
24-abr-13	35.21%	36.25%	25.26%	9.86%	11.08%	16.27%
25-abr-13	38.25%	40.26%	25.37%	17.37%	15.50%	11.85%
26-abr-13	35.02%	39.33%	19.00%	10.24%	16.80%	15.53%
28-abr-13	33.02%	30.95%	25.36%	17.24%	17.15%	19.88%
29-abr-13	32.02%	31.21%	22.36%	11.37%	18.88%	8.10%
30-abr-13	31.00%	32.02%	19.85%	12.37%	18.23%	16.24%

La tabla anterior muestra los rendimientos diarios obtenidos a partir de resolver el modelo MAD, los cuales muestran similitudes con los resultados obtenidos mediante el modelo de

Markowitz, además de que se puede observar que en la mayoría de las veces los rendimientos obtenidos por el modelo MAD son mayores, sin embargo más adelante se contrastarán los diferentes resultados entre un método y otro.

4.3. Método de Optimización de Desviación Media Absoluta Estocástico

4.3.1. Intervalos de confianza para los rendimientos de los precios de las acciones

Como se vio anteriormente, para la aplicación del Modelo MAD Estocástico es necesaria la construcción de intervalos de confianza para la obtención de la media de los rendimientos de los precios de las acciones, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Se tomará un nivel de confianza del 95%, por lo que los cuantiles de la distribución normal estándar serán de 1.96. El número de años n será igual a 3.

Dado que los rendimientos promedios se calcularon de manera anual, entonces los intervalos de confianza serán construidos de la misma manera. Los rendimientos promedios que se utilizarán son los mostrados en la tabla 4.3. (Referentes al cuadro de MAD, de rendimientos anuales).

A continuación se muestran las desviaciones estándar y los rendimientos promedio por cada sector económico y año, las cuales servirán para calcular los intervalos de confianza para la media de cada año.

Tabla 4.5 – Desviaciones estándar y rendimientos promedio por año.

Sector Económico	Desviación estándar		
	2010	2011	2012
Materiales	21.36%	24.57%	22.82%
Industrial	45.62%	38.45%	35.12%
Cons. No Básico	15.88%	11.66%	13.65%
Consumo Frec.	18.61%	15.07%	11.30%
Serv. Financieros	25.94%	28.46%	27.85%
Telecomunicaciones	19.55%	21.25%	16.27%

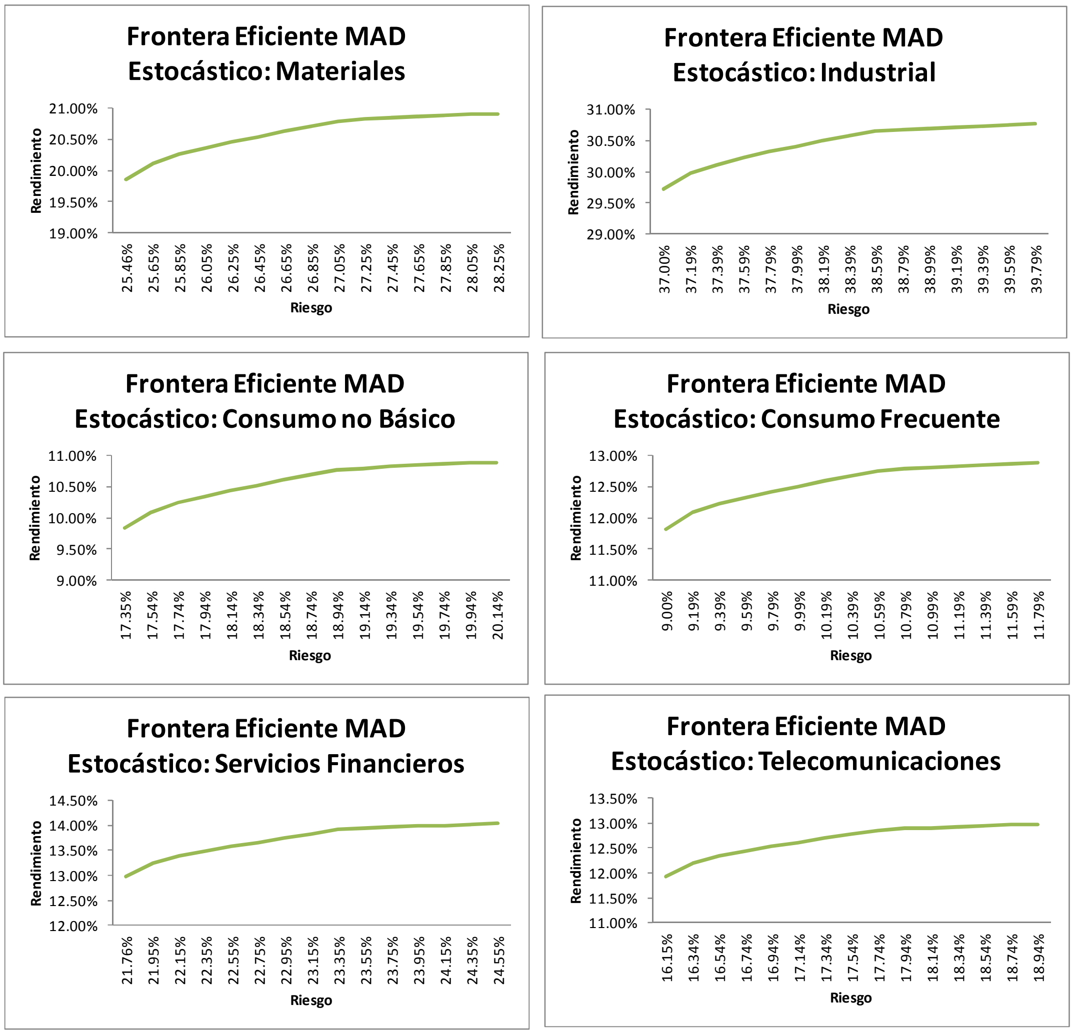
En el Anexo II se presentan los intervalos al 95% de confianza para los rendimientos de cada acción y cada año, los cuales servirán como escenarios para la estimación del modelo MAD estocástico, el cual considera diferentes escenarios para su estimación.

Para la estimación del modelo MAD estocástico es necesario estimar la medida MAD para el rendimiento promedio como para lado izquierdo y derecho del intervalo de confianza estimado para el rendimiento promedio.

Una vez estimada cada medida MAD, la medida MAD general será estimada mediante la suma de cada MAD individual y dividida entre el número de años, que en este caso son tres años.

Cabe señalar que al igual que el modelo MAD determinista, el modelo MAD estocástico presenta muchas soluciones, por lo que se tomará la primera solución obtenida mediante la optimización, además de que los valores iniciales se tomaron de igual manera que en los anteriores métodos de optimización.

A continuación se presentan las fronteras eficientes para cada uno de los sectores económicos, donde se puede ver que por lo general se obtienen rendimientos menores para todos los sectores económicos con respecto del modelo de Markowitz y del modelo MAD determinista, además de que el riesgo también es menor.



Gráfica 4.3 – Fronteras eficientes por sector económico, modelo MAD

A continuación se muestran los resultados tras resolver el problema de optimización de manera diaria para cada día del mes de abril, esto con el fin de poder comparar los rendimientos que proporciona cada uno de los métodos y ver si alguna diferencia estadísticamente significativa entre el uso de un método u otro, y así poder determinar que método proporciona mayores rendimientos y cuál es el más eficiente en términos de algunas medidas de desempeño de la cartera.

Tabla 4.6- Rendimientos diarios del modelo MAD Estocástico

	Rendimientos					
Fecha	**Materiales**	**Industrial**	**Cons. No Básico**	**Consumo Frec.**	**Serv. Financieros**	**Telecomunicaciones**
01-abr-13	18.07%	31.96%	22.09%	16.54%	15.24%	10.56%
02-abr-13	18.96%	28.37%	16.83%	17.31%	11.54%	10.91%
03-abr-13	19.54%	29.65%	20.98%	15.41%	11.52%	15.83%
04-abr-13	19.98%	25.47%	16.85%	12.33%	14.52%	20.85%
05-abr-13	23.56%	31.07%	16.52%	10.58%	10.95%	8.57%
08-abr-13	25.24%	33.25%	17.63%	17.56%	17.23%	19.88%
09-abr-13	22.87%	36.59%	20.55%	12.82%	10.67%	10.74%
10-abr-13	27.65%	38.55%	18.59%	11.85%	10.63%	18.63%
11-abr-13	29.87%	28.99%	19.96%	10.93%	18.59%	18.68%
12-abr-13	23.55%	38.47%	22.58%	16.46%	13.20%	9.66%
15-abr-13	19.26%	36.91%	18.51%	10.67%	16.35%	16.23%
16-abr-13	26.25%	24.01%	17.01%	10.85%	15.80%	18.54%
17-abr-13	22.37%	23.59%	20.65%	11.08%	14.80%	18.74%
18-abr-13	19.25%	38.57%	21.53%	12.65%	16.85%	18.06%
19-abr-13	22.56%	36.93%	20.97%	14.56%	15.96%	8.52%
22-abr-13	21.02%	33.61%	16.81%	9.85%	14.33%	8.74%
23-abr-13	20.33%	30.38%	17.87%	16.35%	17.96%	20.82%
24-abr-13	26.25%	35.96%	24.58%	10.26%	11.52%	13.63%
25-abr-13	22.24%	37.58%	16.96%	15.87%	13.65%	12.84%
26-abr-13	21.90%	36.81%	16.85%	11.52%	17.52%	15.96%
28-abr-13	20.30%	30.96%	20.68%	16.85%	18.52%	18.85%
29-abr-13	23.25%	29.80%	20.65%	10.55%	17.52%	10.85%
30-abr-13	30.57%	30.01%	17.25%	10.56%	18.05%	18.96%

Al ver los rendimientos diarios, si se aprecia una tendencia en que los rendimientos son más bajos que los rendimientos proporcionados mediante el modelo de Markowitz y el modelo MAD determinista, además de que este método es el que proporciona los rendimientos bajos de los tres métodos de optimización de carteras.

A continuación se compararán los rendimientos de cada método mediante un aprueba t, la cual indicará si existe alguna diferencia entre las medias entre los rendimientos entre un método y otro.

4.4. Análisis estadístico de los Resultados

Para la determinar si existe alguna diferencia estadística entre los rendimientos estimados con el modelo de Markowitz, MAD y MAD estocástico, se aplicó una prueba t[25] para muestras independientes, la cual consiste en probar si la media de los rendimientos mediante el método de Markowitz es igual a la media de los rendimientos calculada por alguno de los métodos MAD, es decir:

$$Ho: \mu_{\text{Markowitz}} = \mu_{\text{MAD}} \text{ o equivalente, } Ho: \mu_{\text{Markowitz}} - \mu_{\text{MAD}} = 0$$

A continuación se presentan los resultados de la aplicación de la prueba t para cada sector económico, comparando en primera instancia el modelo de Markowitz con el modelo MAD determinista.

Tabla 4.7- Prueba t para Markowitz vs MAD determinista

Sector	Estadístico t	P(T<=t) una cola	Valor crítico de t (una cola)	P(T<=t) dos colas	Valor crítico de t (dos colas)
Materiales	-0.25850	0.39861	1.68023	0.79722	2.01537
Industrial	-0.08828	0.46503	1.68107	0.93006	2.01669
Consumo no Básico	-0.95648	0.17215	1.68195	0.34430	2.01808
Consumo Frecuente	-0.28959	0.38675	1.68023	0.77349	2.01537
Servicios Financieros	-0.40136	0.34507	1.68107	0.69014	2.01669
Telecomunicaciones	-0.22569	0.41126	1.68107	0.82251	2.01669

El siguiente cuadro muestra los resultados de la prueba t para el modelo de Markowitz y el modelo MAD estocástico.

Sector	Estadístico t	P(T<=t) una cola	Valor crítico de t (una cola)	P(T<=t) dos colas	Valor crítico de t (dos colas)
Materiales	1.45714	0.07609	1.68023	0.15218	2.01537
Industrial	0.67632	0.25119	1.68023	0.50238	2.01537
Consumo no Básico	1.20073	0.11821	1.68107	0.23643	2.01669
Consumo Frecuente	0.31821	0.37595	1.68195	0.75190	2.01808
Servicios Financieros	0.25056	0.40167	1.68107	0.80334	2.01669
Telecomunicaciones	0.19291	0.42396	1.68023	0.84792	2.01537

[25] RICHARD J. LARSEN, MORRIS L. MARX. *An introduction to mathematical statistics and its applications*, Prentice Hall, 5ta Edición, 2001, EUA Boston

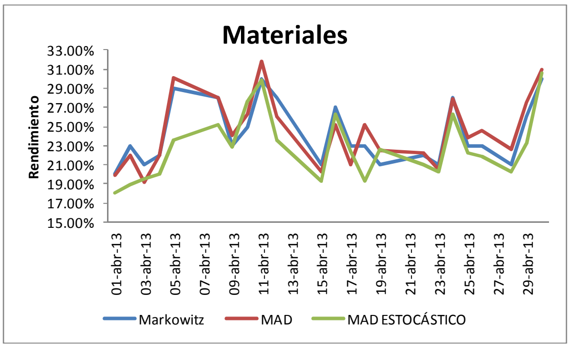
Como se puede ver en los anteriores cuadros, las probabilidades asociadas a cada estadístico tanto de una cola como de dos colas son mayores al nivel de significancia de 0.05, lo cual indica que no hay alguna evidencia estadística para determinar que existe alguna diferencia entre los rendimientos estimados con el método de Markowitz y los modelos MAD, a pesar de que en el siguiente cuadro se puede ver que en general los rendimientos promedio de cada sector económico son mayores con los obtenidos con los métodos MAD.

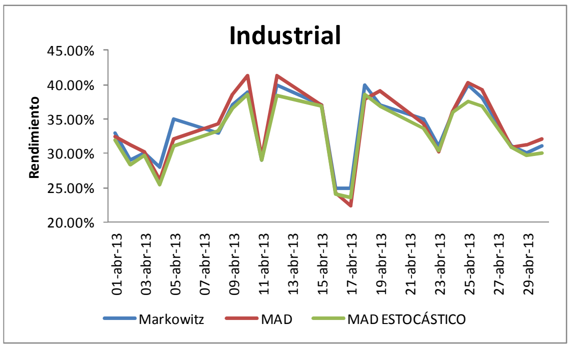
El modelo MAD estocástico es el que presenta menores rendimientos, sin embarga se guarda la consistencia por sector económico.

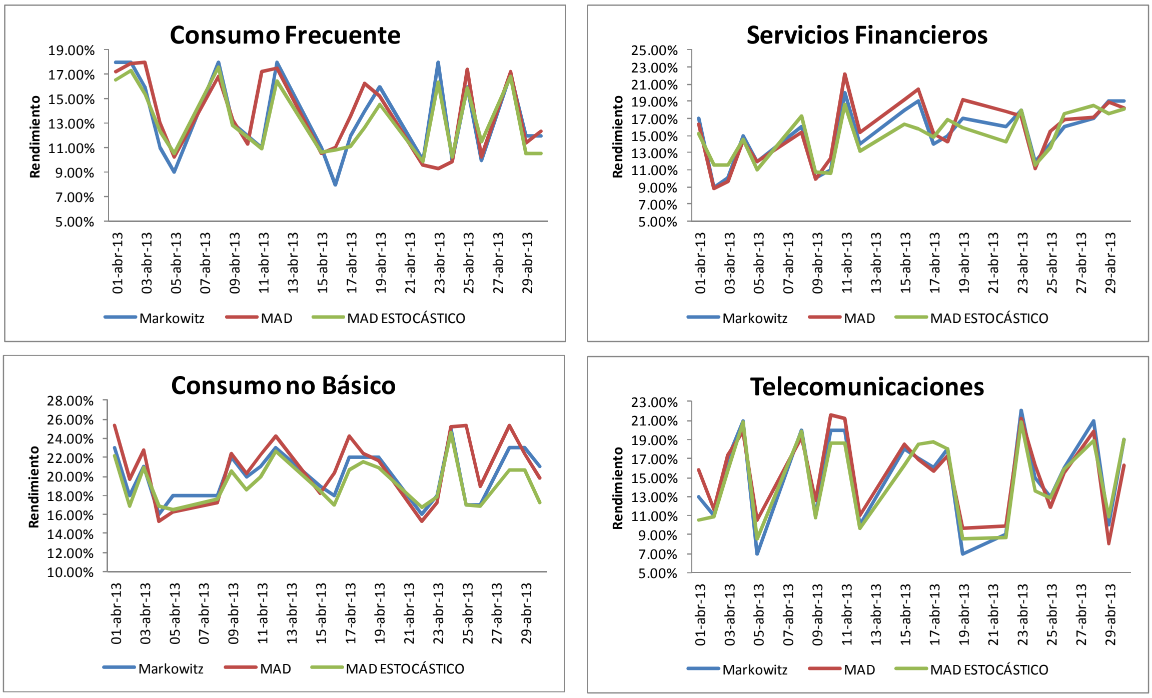
Tabla 4.8- Rendimientos promedio por sector económico y modelo

	Rendimientos Promedio		
Sector	**Markowitz**	**MAD**	**MAD Estocástico**
Materiales	24.26%	24.52%	22.82%
Industrial	33.43%	33.57%	32.50%
Consumo No Básico	20.13%	20.97%	19.26%
Consumo Frecuente	13.48%	13.76%	13.19%
Servicios Financieros	15.13%	15.53%	14.91%
Telecomunicaciones	15.26%	15.56%	15.00%

A continuación se presentan las gráficas de los rendimientos diarios por cada sector económico estimados a partir de la optimización de cada modelo presentado.







Gráfica 4.4 – Rendimientos diarios por sector económico y modelo de optimización.

A continuación se presentan algunas medidas de desempeño de carteras a fin de tener más a elementos para poder decidir que método es el más conveniente para usar en la construcción de carteras de inversión.

4.5. Medidas de desempeño

4.5.1. Introducción

El desempeño es un concepto habitual en la literatura relacionada con la gestión de carteras formadas por activos financieros. El desempeño de una cartera es un concepto relacionado al rendimiento de la misma. De esta manera, en un intento inicial de explicación del desempeño de un activo o de una cartera, podría hablarse de la rentabilidad ofrecida los activos y de las carteras.

Sin embargo esta identificación no es suficiente al observar el tratamiento que del desempeño se realiza en la literatura. De hecho, al hablar de desempeño no sólo se hace referencia al rendimiento de una inversión financiera sino también al nivel de riesgo que soporta. De esta manera, el estudio se confecciona en base a un análisis bidimensional de los dos elementos que se han estado analizando (Rendimiento y Riesgo) en el ámbito de los principales modelos de formación de carteras y de equilibrio de los mercados.

Con los dos componentes rentabilidad-riesgo el estudio de desempeño queda completo. Como se observará a continuación, destacados autores[26] han formulado diferentes índices denominados medidas de desempeño, con el objetivo de condensar los dos valores relevantes en un único valor. Dichas medidas surgen fundamentalmente a partir del CAPM[27], sin embargo, el tratamiento es notoriamente diferente, ya que, mientras el modelo de valoración de activos pretende demostrar un equilibrio a priori, las medidas de desempeño se utilizan para determinar la bondad de la gestión de las carteras en el pasado, por lo tanto, a posteriori.

[26] SHARPE (1966), JENSEN (1968), Treynor (1965)
[27] STEPHEN A. ROSS (1973). *The arbitrage theory of capital asset pricing theory",* Journal of economic theory, Departments of Economics and Finance, University of Pensilvanya,

Precisamente, el objetivo de las medidas de desempeño es determinar la capacidad de los administradores de una cartera formada por activos financieros en base a su rentabilidad y a su nivel de riesgo.

Por otro lado, más importante que ofrecer una medida de desempeño para las carteras financieras, es determinar una clasificación de dichas carteras en base a la habilidad de los gestores. Por lo tanto, el objetivo es aplicar las medidas de desempeño a un conjunto de carteras para establecer un ranking de valoración de su gestión.

Para establecer una clasificación de valoración de la gestión de carteras financieras, existen algunos casos en los que es inmediato determinar si una cartera ha estado mejor gestionada que otra:

- Cuando una cartera presenta una rentabilidad media superior a otra y su nivel de riesgo es inferior o igual a ésta, se puede determinar que la primera cartera ha sido mejor gestionada que la segunda.

- Si una cartera soporta un riesgo inferior a otra y la rentabilidad media que ofrece es superior o igual a ésta, la primera cartera ha sido mejor gestionada, igualmente.

Para el resto de comparaciones que no se encuentran encuadrados en estos casos resulta necesario aplicar una expresión matemática que permita, a partir de los valores de rentabilidad media y de riesgo, obtener un determinado valor de desempeño para cada una de las carteras y, a partir de los valores obtenidos para cada una de las carteras del conjunto analizados, diseñar una clasificación completa.

En este sentido, estas expresiones matemáticas deben considerar, al menos, a los dos elementos considerados relevantes, como lo es el rendimiento y el riesgo.

Manteniendo, como es natural, la racionalidad de los inversores en sentido de Markowitz, es decir, que la rentabilidad media es un elemento deseado por el inversor y el riesgo no, cualquier medida que pretenda valorar el desempeño debe cumplir que se minimice el riesgo y se incremente la rentabilidad. Es decir, una cartera estará mejor gestionada conforme aumente la rentabilidad media que ofrezca y lo estará peor conforme crezca su riesgo medida de cualquiera de las maneras vista en los primeros capítulos.

A continuación se mostrarán algunas medidas de desempeño para valorar las carteras de inversión.

4.5.2. Índice de Sharpe[28]

El índice de desempeño propuesto por Sharpe (1966) es también denominado como ratio premio-variabilidad, siendo su expresión la siguiente:

$$Sp = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

La razón de su denominación es inmediata: el numerador de la expresión denota el exceso o prima de rentabilidad que la cartera *p* analizada reporta con respecto a la rentabilidad que el inversor puede obtener mediante activos sin riesgo R_f; mientras que el denominador es la desviación típica de la variable aleatoria rentabilidad, indicador de la variabilidad de R_p. Este denominador es, por tanto, la raíz cuadrada de la varianza y, en consecuencia, la expresión contempla el riesgo total de la cartera.

[28] BODIE KANE MARCU. *Investments*. McGraw Hill. Novena Edición. Nueva York, Estados Unidos,2011

El índice ofrece el exceso de rentabilidad sobre el rendimiento sin riesgo que la cartera ofrece por unidad de riesgo total. Este es el sentido financiero del índice de Sharpe. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor que este índice alcance para una cartera, mejor gestionada habrá estado ésta.

Para demostrar que la expresión propuesta cumple con los requisitos esenciales de una medida de desempeño, a continuación se procede a realizar las derivadas parciales de dicha expresión sobre las dos componentes relevantes, con el fin de comprobar el signo que toman dichas derivadas parciales. En particular:

$$\frac{\delta S_p}{\delta \mathrm{E(R_p)}} = \frac{1}{\sigma_p} > 0$$

Esta afirmación no tiene ninguna falla, ya que siempre se cumplirá que la desviación típica sea positiva.

$$\frac{\delta S_p}{\delta \sigma_p} = -\frac{E(E_p) - R_f}{\sigma_p{}^2} < 0$$

En este caso, el cumplimiento del signo negativo viene condicionado a que el numerador sea positivo, cuestión que, en plena ortodoxia financiera, debe cumplirse, es decir $E(R_p)$ debe ser un valor superior a R_f para que el decisor financiero acepte una cartera formada por activos arriesgados.

Cumpliendo los requisitos especificados se puede aceptar el índice de Sharpe como expresión indicativa del desempeño de las carteras.

A continuación se muestra el cálculo del índice de Sharpe para los portafolios óptimos de cada uno de los métodos empleados.

Se utilizará como tasa libre de riesgo la tasa de rendimiento promedio de los Cetes a 28 días del año 2013, la cual tiene un valor de 3.72%.

En el siguiente cuadro se observa el índice de Sharpe para los portafolios óptimos de cada uno de los modelos a excepción del modelo Minimax, el cual no tiene una medida de riesgo y solamente se vuelve en problema de maximización de rendimiento

Tabla 4.17 – Índice de Sharpe

Sector	Método	Rendimiento	Riesgo	Sharpe
Materiales	Markowitz	24.26%	29.49%	0.6964
	MAD	24.52%	28.96%	0.7183
	MAD Estocástico	22.82%	26.85%	0.7113
Industrial	Markowitz	33.43%	42.49%	0.6993
	MAD	33.57%	43.05%	0.6932
	MAD Estocástico	32.50%	38.39%	0.7497
Consumo no básico	Markowitz	20.13%	22.49%	0.7295
	MAD	20.97%	22.92%	0.7525
	MAD Estocástico	19.26%	18.74%	0.8290
Consumo Frecuente	Markowitz	13.48%	14.49%	0.6732
	MAD	13.76%	14.63%	0.6860
	MAD Estocástico	13.19%	10.39%	0.9118
Servicios Financieros	Markowitz	15.13%	24.49%	0.4658
	MAD	15.53%	24.72%	0.4779
	MAD Estocástico	14.91%	23.15%	0.4833
Telecomunicaciones	Markowitz	15.26%	19.49%	0.5920
	MAD	15.56%	19.63%	0.6029
	MAD Estocástico	15.00%	17.54%	0.6431

Como se puede observar en el cuadro anterior, el índice de Sharpe es mayor que cero en cada uno de los modelos, lo que indica que los tres portafolios se encuentran bien gestionados, obteniéndose rendimientos muy superiores al rendimiento mínimo que ofrece el mercado, reflejado por la tasa de Cetes a 28 días.

El índice de Sharpe es una medida de desempeño que explica el exceso de rendimiento por unidad de riesgo en una inversión. Para los decisores e inversores un índice de Sharpe alto siempre será mejor debido a que proporcionará mayor rendimiento por el riesgo asumido.

Por lo tanto, se puede ver en el cuadro anterior que en general el modelo que ofrece un índice de Sharpe más alto es el método MAD estocástico, en casi todos los sectores económicos, a excepción del sector industrial, donde el modelo MAD determinista da un valor más alto. A pesar de que anteriormente se probó que no había una diferencia estadísticamente significativa mediante la prueba de t para muestras independientes, solo se consideró el rendimiento de la cartera, por lo que al comparar de manera conjunta el riesgo y el rendimiento, junto con la tasa de mercado, se puede decir que el modelo que ofrece mejores resultados es el modelo MAD estocástico en términos de eficiencia, esto con respecto del índice de Sharpe.

A continuación se analizarán otros índices que también se utilizan para verificar el desempeño de la cartera.

4.5.3. Índice de Treynor

Es un índice similar al construido por Sharpe, la medida de Treynor (1965) o índice de Premio-Volatilidad tiene la siguiente expresión:

$$T_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\beta_p}$$

Donde

Tp -Índice de Treynor.

$E(Rp)$ - Rentabilidad promedio del portafolio.

Rf -Tasa libre de riesgo.

β_p -Beta del portafolio.

En este caso, la prima de rentabilidad que la cartera p ofrece con respecto a Rf se relaciona con el parámetro β significativo del riesgo sistemático de la cartera de acuerdo con el modelo de mercado de Sharpe. Por lo tanto, el sentido financiero de este índice indica el exceso de rentabilidad de una cartera sobre el rendimiento sin riesgo que la cartera ofrece por unidad de riesgo sistemático. Similarmente al caso anterior, cuanto mayor sea el valor que el índice de Treynor tome para una cartera, mejor gestionada habrá estado ésta.

La razón de incluir el riesgo sistemático, se debe al hecho de que hay que suponer que los gestores de las carteras administran las mismas de forma eficiente, de tal manera que el riesgo específico habrá sido anulado y por tanto, únicamente hay que pensar en remunerar a los inversores financieros por el riesgo sistemático que soportan.

Se procede a realizar el análisis del signo de las derivadas parciales del índice de Treynor en función de los dos parámetros relevantes:

$$\frac{\delta \mathrm{T_p}}{\delta \mathrm{E(R_p)}} = \frac{1}{B_p} > 0$$

En este caso, la fiabilidad de que siempre concurra este signo no es total, al contrario de lo que ocurriría con el índice de Sharpe, ya que como se ha analizado anteriormente, cabe la posibilidad de que el parámetro β representativo del riesgo sistemático sea negativo, aunque ello no es habitual y mucho menos a largo plazo.

$$\frac{\delta \mathrm{T_p}}{\delta B_p} = -\frac{E(R_p) - R_f}{B_p^{\ 2}} < 0$$

De nuevo el signo negativo de esta expresión exige que la prima de rentabilidad sea positiva sobre el rendimiento libre de riesgo, por lo que la conclusión es la misma que para el índice de Sharpe. No obstante, cumpliendo estas restricciones el índice de Treynor es aceptable como expresión indicativa del desarrollo del portafolio.

Al igual que para el índice de Sharpe se tomará la tasa libre de riesgo como la tasa de cetes a 28 días y las betas estimadas en la sección del CAPM. En el siguiente cuadro se muestran las estimaciones del índice de Treynor para cada portafolio óptimo de los modelos usados.

Tabla 4.18 – Índice de Treynor

Sector	Método	Rendimiento	Beta por sector	Treynor
Materiales	Markowitz	24.26%	0.2736	0.7506
	MAD	24.52%	0.2695	0.7719
	MAD Estocástico	22.82%	0.2605	0.7330
Industrial	Markowitz	33.43%	0.3099	0.9590
	MAD	33.57%	0.3145	0.9489
	MAD Estocástico	32.50%	0.2955	0.9740
Consumo no básico	Markowitz	20.13%	0.2726	0.6021
	MAD	20.97%	0.2562	0.6732
	MAD Estocástico	19.26%	0.2255	0.6891
Consumo Frecuente	Markowitz	13.48%	0.4256	0.2293
	MAD	13.76%	0.4357	0.2304
	MAD Estocástico	13.19%	0.3937	0.2406
Servicios Financieros	Markowitz	15.13%	0.5896	0.1935
	MAD	15.53%	0.5624	0.2101
	MAD Estocástico	14.91%	0.5320	0.2103
Telecomunicaciones	Markowitz	15.26%	0.4695	0.2458
	MAD	15.56%	0.4456	0.2656
	MAD Estocástico	15.00%	0.4201	0.2686

EL índice de Treynor permite analizar o cuantificar hasta qué punto el rendimiento de una cartera de activos compensa al inversor por asumir cierto riesgo. El índice permite medir la relación entre rendimiento y riesgo. Un índice de Treynor más alto será aquel que proporciona un mayor rendimiento para un mismo nivel de riesgo, y por lo tanto, el más conveniente para el inversor.

En la tabla anterior se observa que el índice de Treynor más alto es el proporcionado por el método MAD estocástico en la mayoría de los sectores, solo en el sector materiales el método MAD muestra un índice mayor, por lo que se puede decir que de manera general que el método MAD estocástico es más eficiente que el modelo MAD determinista y el modelo de Markowitz.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos mediante otro índice para medir el desempeño de la cartera como lo es la alfa de Jensen.

4.5.4. Alfa de Jensen[29]

La medida de desempeño propuesta por Jensen (1968), que a continuación se analiza, tiene una estructura notoriamente diferente a las dos anteriores. Su expresión parte de la SML (Security Market Line) analizada en el CAPM, tal que la rentabilidad esperada de una cartera es igual al rendimiento sin riesgo más una prima de rentabilidad por unidad de riesgo sistemático soportado, es decir:

$$E(R_p) = Rf + [E(R_M) - Rf] \cdot \beta_p$$

Sin embargo l valor ex post de rentabilidad del portafolio puede o no coincidir con el esperado. En función de que el portafolio supere, iguale o esté por debajo del rendimiento esperado.

Lo normal es que exista una diferencia entre la rentabilidad esperada y la realmente obtenida, en esta diferencia surge el sentido financiero de la alfa de Jensen como medida de desempeño.

$$E(R_p) = E(R_p)^* + Jp$$

Donde

$E(R_p)^*$ - Es el rendimiento obtenido del portafolio p

Jp - Es el índice de Jensen para el portafolio p

Desarrollando la expresión anterior se tiene la siguiente ecuación.

[29] BODIE KANE MARCUS *Investments*. McGraw Hill. Novena Edición. Nueva York, Estados Unidos ,2011.

$$E(R_p) = Rf + [E(R_M) - Rf] \cdot \beta_p + Jp$$

Finalmente despejando a Jp se tiene el índice de Jensen de la cartera.

$$Jp = [E(R_p) - Rf] + [E(R_M) - Rf] \cdot \beta_p$$

Donde

$E(R_p)$ - Rendimiento esperado del portafolio.

Rf - Rendimiento de la tasa libre de riesgo.

$E(R_M)$ - Rendimiento esperado del mercado.

β_p - Beta del portafolio.

Cabe señalar que como rendimiento del mercado se usará el rendimiento promedio del IPC durante los últimos 5 años, el cual es de 0.1655.

En el siguiente cuadro se puede observar el cálculo del índice de Jensen para cada uno de los portafolios óptimos estimados a partir de los diferentes modelos usados en este trabajo.

Tabla 4.19 – Alfa de Jensen

Sector	Método	Rendimiento	Beta por sector	Jensen
Materiales	Markowitz	24.26%	0.2736	0.2405
	MAD	24.52%	0.2695	0.2426
	MAD Estocástico	22.82%	0.2605	0.2244
Industrial	Markowitz	33.43%	0.3099	0.3369
	MAD	33.57%	0.3145	0.3388
	MAD Estocástico	32.50%	0.2955	0.3257
Consumo no básico	Markowitz	20.13%	0.2726	0.1991
	MAD	20.97%	0.2562	0.2054
	MAD Estocástico	19.26%	0.2255	0.1843
Consumo Frecuente	Markowitz	13.48%	0.4256	0.1522
	MAD	13.76%	0.4357	0.1563
	MAD Estocástico	13.19%	0.3937	0.1452
Servicios Financieros	Markowitz	15.13%	0.5896	0.1898
	MAD	15.53%	0.5624	0.1903
	MAD Estocástico	14.91%	0.5320	0.1802
Telecomunicaciones	Markowitz	15.26%	0.4695	0.1757
	MAD	15.56%	0.4456	0.1755
	MAD Estocástico	15.00%	0.4201	0.1667

En el cuadro anterior se observa que los índices de Jensen de los tres modelos son positivos, lo que indica que los tres portafolios se encuentran bien gestionados de acuerdo a su desempeño de tener un riesgo menor y una rentabilidad alta.

El modelo de MAD es el que genera valores mayores de la alfa de Jensen, lo que significa que en consideración de la beta del mercado y el rendimiento del mercado, medido por el IPC, el modelo MAD no muestra tantas diferencias entre los rendimientos obtenidos de la cartera y los que se podrían de tener dado el rendimiento del IPC.

Los tres métodos son consistentes y arrojan resultados similares, sin embargo las diferentes medidas de riesgo que considera cada uno, tiene como resultado que se obtengan diferencias entre la utilización de un método y otro.

Por lo tanto, comparando el modelo de Markowitz con el modelo MAD y el MAD estocástico, se puede decir que el método que genera mayores rendimientos es el método de MAD estocástico, además de que es el método que en términos del riesgo de la cartera, es el que ofrece mejores resultados, esto de acuerdo con los resultados obtenidos con los índices de Sharpe y Treynor, sin embargo si lo que se desea es comparar los métodos de optimización usando el riesgo de la cartera y el riesgo del mercado, el modelo MAD ofrece mejores resultados, tras haber obtenido mejores valores en la alfa de Jensen.

Conclusiones

Como se vio anteriormente, hay diversos modelos que miden explícitamente el riesgo de activos financieros, sin embargo hay modelos de optimización que permiten además de medir el riesgo, seleccionar aquellos activos que tengan rendimientos atractivos y que permitan optimizar el rendimiento de una cartera de activos de inversión.

Dentro de esos métodos se revisaron diversos modelos de optimización como son:

- ✓ Media Varianza de Markowitz
- ✓ MAD (Mean Absolute Deviation)
- ✓ MAD Estocástico

Los modelos revisados anteriormente, surgieron a partir de la aparición del Modelo de Markowitz de Media Varianza, tratando de incorporar diferentes enfoques pero guardando un mismo objetivo, el cual es tener la cartera de activos que proporcionen el mayor rendimiento con el mínimo riesgo, aunque estos métodos alternativos consideran una medida diferente de riesgo.

La aparición de estos modelos tratan de cubrir algunas de las deficiencias del modelo de Markowitz, dentro de las cuales se encuentran que el tiempo de resolución del problema de optimización de Markowitz, es más tardado que los otros modelos de optimización, dado que el modelo de Media – Varianza es un modelo cuadrático que usa la matriz de varianzas y covarianzas para medir el riesgo entre los distintos activos financieros que componen la cartera, en tanto que los otros modelos son problemas lineales de optimización , lo cual genera menor tiempo de resolución, sin embargo esto no es del todo una desventaja ya que al considerar el grado de variación conjunta de dos activos financieros mediante el uso de la matriz de varianzas y covarianzas, el modelo captura las variaciones conjuntas que pudieran tener dos activos financieros, información valiosa que no consideran los demás modelos. En este trabajo no se consideró realizar un análisis sobre el tiempo de ejecución de la resolución de cada método de optimización, ya que hay autores como: Mei You, Hiroshi Inoue y Jianming Shi que en su trabajo publicado denominado *"Portfolio optimization problems with linear programming models"*, prueban que el tiempo de ejecución del modelo de Markowitz ante una muestra grande de activos financieros es mayor que en los modelos MAD y los modelos de Teo y Cai. Hay otros trabajos como los de Bower[30], Konno[31], Weng Hoe[32], los cuales coinciden que el hecho de incluir la matriz de varianzas y covarianzas afecta el tiempo de resolución del problema de optimización.

Otro de los problemas que presenta el modelo de Markowitz es asumir que el mercado se comportará como en el pasado, al usar datos históricos para la estimación de los rendimientos y las volatilidades, sin embargo esta problemática no es resuelta por ninguno de los modelos de optimización anteriormente mencionados.

Para determinar qué modelo de optimización es más eficiente y es el que ofrece mejores rendimientos, se realizó la aplicación de cada método de optimización considerando los rendimientos históricos a partir de enero 2010 a mayo de 2013, considerando la información histórica de los rendimientos, para posteriormente aplicar cada método de manera diaria, tomando los precios diarios durante el mes de abril del 2013 de las acciones que cotizan en la BMV por cada sector económico.

Los resultados que se obtuvieron tras la aplicación de cada método de optimización fue que no existe diferencia estadísticamente significativa entre los rendimientos obtenidos por los tres métodos analizados, esto de acurdo con la prueba t de muestras independientes que se aplicó a los rendimientos diarios de cada modelo. Cabe señalar, que el modelo MAD determinista es el que proporciona rendimientos mayores, aunque no significativamente mayores.

---

[30] BETH BOWER, PAMELA WENTZ .*Portfolio optimization: MAD vs Markowitz*,(2006.

[31] HIROSHI KONNO, HIROAKI YAMASAKI. *Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market*. Management Science, Vol. 37, No. 5, 1991.

[32] LAM WENG HOE, JAMAN SAIFUL HAFIZAH, ISA ZAIDI. *An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization*. Business and Economics Horizons, Vol 1, 2010. pp 39-45.

Para analizar de manera conjunta el rendimiento y riesgo del modelo, se utilizaron algunas medidas de desempeño de la cartera como son: el índice de Sharpe, índice de Treynor y la alfa de Jensen, de los cuales el modelo MAD Estocástico obtuvo mejores resultados con respecto del índice de Treynor y el índice de Sharpe, esto dado que al considerar la Desviación Media Absoluta y los intervalos de confianza el riesgo es menor, por lo que resulta conveniente usar este método cuando se tomen desviaciones sobre la medida de riesgo de los rendimientos de los activos.

Por otro lado, la alfa de Jensen mostró mejores resultados para el método MAD determinista, puesto que en general este método proporciona un mejor equilibrio entre riesgo y rendimiento, además de que el rendimiento obtenido es comparable con el del mercado.

Por lo que si se desea obtener mayores rendimientos teniendo en cuenta el riesgo de los rendimientos de los activos, el modelo MAD estocástico podría ser una buena opción, pero si lo que se requiere es tener un equilibrio entre rendimiento y riesgo de la cartera con el rendimiento del mercado, el modelo MAD determinista es una buena opción.

Por lo tanto, los modelos MAD son una buena opción si se requiere construir carteras de inversión, ya que proporcionan mejores resultados que el modelo de Markowitz, además de que el tiempo de ejecución de cada uno es mucho menor que con el modelo de Markowitz.

Anexo I – Empresas que componen cada sector económico

Sector Materiales			
Clave de la emisora	**Razón Social**	Rendimiento	Desv. Estándar
AHMSA	ALTOS HORNOS DE MEXICO, S.A. DE C.V.	23%	17%
ALPEK	ALPEK, S.A.B. DE C.V.	29%	28%
AUTLAN	COMPAÑIA MINERA AUTLAN, S.A.B. DE C. V.	26%	15%
CEMEX	CEMEX, S.A.B. DE C.V.	30%	28%
CMOCTEZ	CORPORACION MOCTEZUMA, S.A.B. DE C.V.	26%	20%
COLLADO	G COLLADO, S.A.B. DE C.V.	22%	26%
CONVER	CONVERTIDORA INDUSTRIAL, S.A.B. DE C.V.	22%	22%
CYDSASA	CYDSA, S.A.B. DE C.V.	23%	23%
FRES	FRESNILLO PLC	25%	25%
GCC	GRUPO CEMENTOS DE CHIHUAHUA, S.A.B. DE C.V.	28%	21%
GMEXICO	GRUPO MEXICO, S.A.B. DE C.V.	25%	27%
ICH	INDUSTRIAS CH, S.A.B. DE C.V.	24%	27%
MEXCHEM	MEXICHEM, S.A.B. DE C.V.	28%	19%
MFRISCO	MINERA FRISCO, S.A.B. DE C.V.	21%	19%
PAPPEL	BIO PAPPEL, S.A.B. DE C.V.	20%	30%
PE&OLES	INDUSTRIAS PEÑOLES, S. A.B. DE C. V.	20%	23%
POCHTEC	GRUPO POCHTECA, S.A.B. DE C.V.	20%	18%
QBINDUS	Q.B. INDUSTRIAS, S.A. DE C.V.	29%	18%
SIMEC	GRUPO SIMEC, S.A.B. DE C.V.	26%	15%
TEAK	PROTEAK UNO, S.A.P.I.B. DE C.V.	21%	25%
TEKCHEM	TEKCHEM, S.A.B. DE C.V.	24%	28%
TS	TENARIS S.A.	28%	20%
VITRO	VITRO, S.A.B. DE C.V.	22%	30%
Promedio		**24%**	**23%**

Sector Servicios y bienes de Consumo no Básico			
Clave de la emisora	**Razón Social**	Rendimiento	Desv. Estándar
ALSEA	ALSEA, S.A.B. DE C.V.	20%	10%
ARISTOS	CONSORCIO ARISTOS, S.A. DE C.V.	21%	11%
CIDMEGA	GRUPE, S.A.B. DE C.V.	17%	11%
CIE	CORPORACION INTERAMERICANA DE ENTRETENIMIENTO, S.A.B. DE C.V.	25%	11%
CMR	CMR, S.A.B. DE C.V.	18%	13%
EDOARDO	EDOARDOS MARTIN, S.A.B. DE C.V.	16%	13%
ELEKTRA	GRUPO ELEKTRA, S.A.B. DE C.V.	18%	14%
GFAMSA	GRUPO FAMSA, S.A.B. DE C.V.	16%	10%
GOMO	GRUPO COMERCIAL GOMO, S.A. DE C.V.	23%	10%
GPH	GRUPO PALACIO DE HIERRO, S.A.B. DE C.V.	20%	14%
HILASAL	HILASAL MEXICANA S.A.B. DE C.V.	21%	11%
IASASA	INDUSTRIA AUTOMOTRIZ, S.A. DE C.V.	18%	12%
LIVEPOL	EL PUERTO DE LIVERPOOL, S.A.B. DE C.V.	24%	12%
POSADAS	GRUPO POSADAS, S.A.B. DE C.V.	18%	11%
REALTUR	REAL TURISMO S.A. DE C.V.	20%	14%
SANLUIS	SANLUIS CORPORACION, S.A.B. DE C. V.	21%	11%
SPORT	GRUPO SPORTS WORLD, S.A.B. DE C.V.	17%	11%
VASCONI	GRUPO VASCONIA S.A.B.	24%	11%
Promedio		20%	12%

Sector Industrial			
Clave de la emisora	**Razón Social**	Rendimiento	Desv. Estándar
ACCELSA	ACCEL, S.A.B. DE C.V.	40%	37%
AEROMEX	GRUPO AEROMÉXICO, S.A.B. DE C.V.	27%	39%
ALFA	ALFA, S.A.B. DE C.V.	39%	36%
ARA	CONSORCIO ARA, S.A.B. DE C.V.	27%	43%
ASUR	GRUPO AEROPORTUARIO DEL SURESTE, S.A.B. DE C.V.	37%	35%
CERAMIC	INTERNACIONAL DE CERAMICA, S.A.B. DE C.V.	31%	36%
DINE	DINE, S.A.B. DE C.V.	35%	41%
GAP	GRUPO AEROPORTUARIO DEL PACIFICO, S.A.B. DE C.V.	32%	35%
GCARSO	GRUPO CARSO, S.A.B. DE C.V.	27%	36%
GEO	CORPORACION GEO, S.A.B. DE C.V.	33%	40%
GISSA	GRUPO INDUSTRIAL SALTILLO, S.A.B. DE C.V.	33%	44%
GMD	GRUPO MEXICANO DE DESARROLLO, S.A.B.	37%	44%
GMDR	GMD RESORTS, S.A.B.	38%	43%
GSANBOR	GRUPO SANBORNS, S.A.B. DE C.V.	32%	42%
HOGAR	CONSORCIO HOGAR, S.A.B. DE C.V.	26%	38%
HOMEX	DESARROLLADORA HOMEX, S.A.B. DE C.V.	30%	40%
ICA	EMPRESAS ICA, S.A.B. DE C.V.	30%	40%
IDEAL	IMPULSORA DEL DESARROLLO Y EL EMPLEO EN AMERICA LATINA, S.A.B. DE C.V.	40%	44%
INCARSO	Inmuebles Carso, S.A.B. de C.V.	36%	37%
KUO	GRUPO KUO, S.A.B. DE C.V.	26%	44%
LAMOSA	GRUPO LAMOSA, S.A.B. DE C.V.	35%	41%
OHLMEX	OHL MEXICO, S.A.B. DE C.V.	25%	38%
OMA	GRUPO AEROPORTUARIO DEL CENTRO NORTE, S.A.B. DE C.V.	33%	37%
PASA	PROMOTORA AMBIENTAL, S.A.B. DE C.V.	38%	43%
PINFRA	PROMOTORA Y OPERADORA DE INFRAESTRUCTURA, S.A.B. DE C.V.	30%	43%
SARE	SARE HOLDING, S.A.B. DE C.V.	39%	35%
TMM	GRUPO TMM, S.A.	30%	39%
URBI	URBI DESARROLLOS URBANOS, S.A.B. DE C.V.	33%	40%
VESTA	CORPORACIÓN INMOBILIARIA VESTA, S.A.B. DE C.V.	25%	37%
Promedio		**33%**	**40%**

Sector Servicios de Consumo Frecuente			
Clave de la emisora	**Razón Social**	Rendimiento	Desv. Estándar
AC	ARCA CONTINENTAL, S.A.B. DE C.V.	9%	9%
AGRIEXP	AGRO INDUSTRIAL EXPORTADORA, S.A. DE C.V.	13%	19%
BACHOCO	INDUSTRIAS BACHOCO, S.A.B. DE C.V.	16%	10%
BAFAR	GRUPO BAFAR, S.A.B. DE C.V.	9%	17%
BIMBO	GRUPO BIMBO, S.A.B. DE C.V.	9%	17%
CHDRAUI	GRUPO COMERCIAL CHEDRAUI, S.A.B. DE C.V.	10%	18%
COMERCI	CONTROLADORA COMERCIAL MEXICANA, S.A.B. DE C.V.	14%	18%
CULTIBA	ORGANIZACIÓN CULTIBA, S.A.B. DE CV	9%	16%
FEMSA	FOMENTO ECONÓMICO MEXICANO, S.A.B. DE C.V.	12%	15%
GIGANTE	GRUPO GIGANTE, S.A.B. DE C.V.	10%	20%
GMACMA	GRUPO MAC MA, S.A.B. DE C.V.	12%	10%
GMODELO	GRUPO MODELO, S.A.B. DE C.V.	11%	19%
GRUMA	GRUMA, S.A.B. DE C.V.	14%	14%
HERDEZ	GRUPO HERDEZ, S.A.B. DE C.V.	10%	5%
KIMBER	KIMBERLY - CLARK DE MEXICO S.A.B. DE C.V.	15%	6%
KOF	COCA-COLA FEMSA, S.A.B. DE C.V.	16%	9%
MASECA	GRUPO INDUSTRIAL MASECA, S.A.B. DE C.V.	10%	13%
MINSA	GRUPO MINSA, S.A.B. DE C.V.	11%	16%
NUTRISA	GRUPO NUTRISA, S.A.B. DE C. V.	12%	16%
SAVIA	SAVIA, S.A. DE C.V.	9%	5%
SORIANA	ORGANIZACION SORIANA, S.A.B. DE C.V.	13%	20%
WALMEX	WAL - MART DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.	11%	8%
Promedio		**12%**	14%

Sector Servicios Financieros			
Clave de la emisora	**Razón Social**	Rendimiento	Desv. Estándar
ACTINVR	CORPORACION ACTINVER, S.A.B. DE C.V.	20%	18%
BBVA	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA, S.A.	13%	35%
BOLSA	BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.B. DE C.V.	19%	23%
C	CITIGROUP INC.	10%	21%
COMPARC	COMPARTAMOS, S.A.B. DE C.V.	18%	27%
CREAL	CREDITO REAL, S.A.B. DE C.V., SOFOM, E.N.R.	15%	22%
FIBRAMQ	DEUTSCHE BANK, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	17%	29%
FIHO	DEUTSCHE BANK MÉXICO, S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE, DIVISIÓN FIDUCIARIA	17%	32%
FINAMEX	CASA DE BOLSA FINAMEX, S.A.B. DE C.V.	10%	24%
FINDEP	FINANCIERA INDEPENDENCIA, S.A.B. DE C.V. SOFOM, E.N.R.	13%	23%
FINN	DEUTSCHE BANK MÉXICO. S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE, DIVISIÓN FIDUCIARIA	10%	18%
FUNO	DEUTSCHE BANK MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	15%	26%
GBM	CORPORATIVO GBM, S.A.B. DE C. V.	11%	30%
GENSEG	GENERAL DE SEGUROS, S.A.B.	20%	29%
GFINBUR	GRUPO FINANCIERO INBURSA, S.A.B. DE C.V.	15%	27%
GFINTER	GRUPO FINANCIERO INTERACCIONES, S.A. DE C.V.	15%	33%
GFMULTI	GRUPO FINANCIERO MULTIVA S.A.B.	18%	34%
GFNORTE	GRUPO FINANCIERO BANORTE, S.A.B DE C.V.	16%	18%
GFREGIO	BANREGIO GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.	18%	22%
GNP	GRUPO NACIONAL PROVINCIAL, S.A.B.	16%	26%
GPROFUT	GRUPO PROFUTURO, S.A.B. DE C.V.	19%	32%
INVEX	INVEX CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.	16%	27%
LASEG	LA LATINOAMERICANA SEGUROS, S.A.	18%	33%
MONEX	HOLDING MONEX, S.A.P.I.B. DE C.V.	16%	27%
PROCORP	PROCORP, S.A. DE C.V., SOCIEDAD DE INV. DE CAPITAL DE RIESGO	11%	29%
PV	PEÑA VERDE S.A.B.	17%	35%
Q	QUALITAS COMPAÑIA DE SEGUROS, S.A. DE C.V.	11%	17%
QC	QUÁLITAS CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.	18%	23%
SAN	BANCO SANTANDER, S.A.	11%	17%
SANMEX	GRUPO FINANCIERO SANTANDER MEXICO, S.A.B. DE C.V.	11%	28%
TERRA	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A., INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE	10%	26%
VALUEGF	VALUE GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.	20%	33%
Promedio		**15%**	**26%**

Sector Telecomunicaciones			
Clave de la emisora		Rendimiento	Desv. Estándar
AMX	AMERICA MOVIL, S.A.B. DE C.V.	16%	24%
AXTEL	AXTEL, S.A.B. DE C.V.	6%	11%
AZTECA	TV AZTECA, S.A.B. DE C.V.	15%	20%
CABLE	EMPRESAS CABLEVISION, S.A. DE C.V.	9%	30%
MAXCOM	MAXCOM TELECOMUNICACIONES, S.A.B. DE C.V.	18%	13%
MEGA	MEGACABLE HOLDINGS, S.A.B. DE C.V.	11%	17%
QUMMA	GRUPO QUMMA, S.A. DE C.V.	10%	17%
RCENTRO	GRUPO RADIO CENTRO, S.A.B. DE C.V.	21%	15%
TLEVISA	GRUPO TELEVISA, S.A.B.	8%	16%
Promedio		**13%**	**18%**

Anexo II – Intervalos de confianza para el rendimiento promedio al 95% de confianza.

Sector Materiales				
Clave de la emisora	**Intervalo 95%**	**2010**	**2011**	**2012**
AHMSA	Izquierdo	13.4%	15.80%	17.82%
	Promedio	23.0%	25.42%	27.44%
	Derecho	32.6%	35.0%	37.1%
ALPEK	Izquierdo	13.2%	15.75%	10.83%
	Promedio	29.0%	31.59%	26.67%
	Derecho	44.8%	47.4%	42.5%
AUTLAN	Izquierdo	17.5%	23.01%	26.21%
	Promedio	26.0%	31.50%	34.70%
	Derecho	34.5%	40.0%	43.2%
CEMEX	Izquierdo	14.2%	10.26%	13.68%
	Promedio	30.0%	26.10%	29.52%
	Derecho	45.8%	41.9%	45.4%
CMOCTEZ	Izquierdo	14.7%	20.77%	19.08%
	Promedio	26.0%	32.09%	30.40%
	Derecho	37.3%	43.4%	41.7%
COLLADO	Izquierdo	7.3%	11.15%	11.62%
	Promedio	22.0%	25.86%	26.33%
	Derecho	36.7%	40.6%	41.0%
CONVER	Izquierdo	9.6%	6.96%	12.86%
	Promedio	22.0%	19.41%	25.31%
	Derecho	34.4%	31.9%	37.8%
CYDSASA	Izquierdo	10.0%	12.18%	6.44%
	Promedio	23.0%	25.19%	19.45%
	Derecho	36.0%	38.2%	32.5%
FRES	Izquierdo	10.9%	13.45%	9.73%
	Promedio	25.0%	27.60%	23.88%
	Derecho	39.1%	41.7%	38.0%
GCC	Izquierdo	16.1%	18.66%	13.61%
	Promedio	28.0%	30.54%	25.49%
	Derecho	39.9%	42.4%	37.4%
GMEXICO	Izquierdo	9.7%	15.22%	13.36%
	Promedio	25.0%	30.50%	28.64%
	Derecho	40.3%	45.8%	43.9%
ICH	Izquierdo	8.7%	5.37%	11.59%
	Promedio	24.0%	20.65%	26.87%
	Derecho	39.3%	35.9%	42.1%
MEXCHEM	Izquierdo	17.2%	11.80%	14.57%
	Promedio	28.0%	22.55%	25.32%
	Derecho	38.8%	33.3%	36.1%
MFRISCO	Izquierdo	10.2%	12.90%	16.79%
	Promedio	21.0%	23.65%	27.54%
	Derecho	31.8%	34.4%	38.3%
PAPPEL	Izquierdo	3.0%	1.38%	4.41%
	Promedio	20.0%	18.35%	21.38%
	Derecho	37.0%	35.3%	38.4%
PE&OLES	Izquierdo	7.0%	11.95%	12.86%
	Promedio	20.0%	24.96%	25.87%
	Derecho	33.0%	38.0%	38.9%
QBINDUS	Izquierdo	18.8%	16.55%	17.27%
	Promedio	29.0%	26.73%	27.45%
	Derecho	39.2%	36.9%	37.6%
SIMEC	Izquierdo	17.5%	20.05%	23.27%
	Promedio	26.0%	28.54%	31.76%
	Derecho	34.5%	37.0%	40.2%
TEKCHEM	Izquierdo	8.2%	3.88%	9.60%
	Promedio	24.0%	19.72%	25.44%
	Derecho	39.8%	35.6%	41.3%
VITRO	Izquierdo	5.0%	8.70%	7.01%
	Promedio	22.0%	25.67%	23.98%
	Derecho	39.0%	42.6%	41.0%

Sector Industrial				
Clave de la emisora	Intervalo 95%	2010	2011	2012
ACCELSA	Izquierdo	19.34%	15.29%	17.92%
	Promedio	40.27%	36.22%	38.85%
	Derecho	61.21%	57.15%	59.78%
AEROMEX	Izquierdo	4.96%	8.38%	7.49%
	Promedio	27.03%	30.45%	29.56%
	Derecho	49.10%	52.52%	51.63%
ALFA	Izquierdo	18.78%	17.53%	15.52%
	Promedio	39.15%	37.90%	35.89%
	Derecho	59.52%	58.27%	56.26%
ARA	Izquierdo	2.95%	0.60%	4.45%
	Promedio	27.28%	24.93%	28.78%
	Derecho	51.61%	49.26%	53.11%
ASUR	Izquierdo	17.50%	17.09%	14.99%
	Promedio	37.30%	36.89%	34.79%
	Derecho	57.10%	56.69%	54.59%
CERAMIC	Izquierdo	11.31%	14.43%	15.83%
	Promedio	31.68%	34.80%	36.20%
	Derecho	52.05%	55.17%	56.57%
DINE	Izquierdo	12.71%	10.01%	11.47%
	Promedio	35.91%	33.21%	34.67%
	Derecho	59.11%	56.41%	57.87%
GAP	Izquierdo	12.38%	19.16%	16.90%
	Promedio	32.18%	38.96%	36.70%
	Derecho	51.98%	58.76%	56.50%
GCARSO	Izquierdo	6.64%	9.31%	11.61%
	Promedio	27.01%	29.68%	31.98%
	Derecho	47.38%	50.05%	52.35%
GEO	Izquierdo	10.94%	13.02%	6.43%
	Promedio	33.58%	35.65%	29.06%
	Derecho	56.21%	58.28%	51.69%
GSANBOR	Izquierdo	8.28%	9.10%	13.25%
	Promedio	32.04%	32.86%	37.01%
	Derecho	55.81%	56.62%	60.77%
HOGAR	Izquierdo	4.96%	1.17%	-0.12%
	Promedio	26.46%	22.67%	21.38%
	Derecho	47.96%	44.17%	42.88%
HOMEX	Izquierdo	7.67%	13.36%	6.87%
	Promedio	30.30%	35.99%	29.50%
	Derecho	52.93%	58.62%	52.13%
ICA	Izquierdo	7.71%	15.27%	12.78%
	Promedio	30.35%	37.90%	35.41%
	Derecho	52.98%	60.53%	58.04%
IDEAL	Izquierdo	15.83%	13.66%	10.13%
	Promedio	40.73%	38.56%	35.03%
	Derecho	65.62%	63.46%	59.93%
INCARSO	Izquierdo	15.66%	17.67%	18.77%
	Promedio	36.60%	38.60%	39.70%
	Derecho	57.53%	59.53%	60.63%
LAMOSA	Izquierdo	12.24%	8.00%	10.60%
	Promedio	35.43%	31.20%	33.80%
	Derecho	58.63%	54.40%	57.00%
OHLMEX	Izquierdo	3.81%	-1.80%	1.00%
	Promedio	25.31%	19.70%	22.50%
	Derecho	46.81%	41.20%	44.00%
URBI	Izquierdo	11.09%	6.60%	11.99%
	Promedio	33.72%	29.23%	34.62%
	Derecho	56.35%	51.86%	57.25%
VESTA	Izquierdo	4.44%	8.52%	7.52%
	Promedio	25.38%	29.45%	28.45%
	Derecho	46.31%	50.38%	49.38%

Sector Servicios y bienes de Consumo no Básico				
Clave de la emisora	**Intervalo 95%**	**2010**	**2011**	**2012**
ALSEA	Izquierdo	14.42%	17.79%	19.23%
	Promedio	20.08%	23.45%	24.89%
	Derecho	25.73%	29.11%	30.55%
ARISTOS	Izquierdo	15.53%	13.25%	17.79%
	Promedio	21.75%	19.47%	24.01%
	Derecho	27.98%	25.69%	30.23%
CIDMEGA	Izquierdo	10.82%	16.80%	16.73%
	Promedio	17.04%	23.02%	22.95%
	Derecho	23.26%	29.24%	29.17%
CIE	Izquierdo	19.49%	22.51%	23.32%
	Promedio	25.71%	28.73%	29.54%
	Derecho	31.93%	34.95%	35.76%
CMR	Izquierdo	11.26%	12.10%	16.38%
	Promedio	18.61%	19.46%	23.74%
	Derecho	25.97%	26.82%	31.10%
EDOARDO	Izquierdo	9.22%	10.86%	13.84%
	Promedio	16.58%	18.22%	21.20%
	Derecho	23.93%	25.58%	28.56%
ELEKTRA	Izquierdo	10.30%	17.93%	16.12%
	Promedio	18.22%	25.85%	24.04%
	Derecho	26.14%	33.77%	31.96%
GFAMSA	Izquierdo	11.10%	13.68%	15.08%
	Promedio	16.76%	19.34%	20.74%
	Derecho	22.42%	25.00%	26.40%
GOMO	Izquierdo	17.60%	22.79%	19.80%
	Promedio	23.26%	28.45%	25.46%
	Derecho	28.91%	34.11%	31.12%
GPH	Izquierdo	12.96%	14.51%	17.74%
	Promedio	20.89%	22.43%	25.66%
	Derecho	28.81%	30.35%	33.58%
HILASAL	Izquierdo	15.70%	13.68%	16.12%
	Promedio	21.93%	19.90%	22.34%
	Derecho	28.15%	26.12%	28.56%
LIVEPOL	Izquierdo	17.62%	21.22%	23.82%
	Promedio	24.41%	28.01%	30.61%
	Derecho	31.20%	34.80%	37.40%
POSADAS	Izquierdo	12.12%	16.89%	18.02%
	Promedio	18.34%	23.11%	24.24%
	Derecho	24.57%	29.33%	30.46%
REALTUR	Izquierdo	13.02%	15.17%	11.51%
	Promedio	20.94%	23.09%	19.43%
	Derecho	28.86%	31.01%	27.35%
SANLUIS	Izquierdo	15.07%	19.18%	16.87%
	Promedio	21.29%	25.40%	23.09%
	Derecho	27.51%	31.62%	29.31%

Sector Servicios de Consumo Frecuente				
Clave de la emisora	**Intervalo 95%**	**2010**	**2011**	**2012**
BACHOCO	Izquierdo	11.15%	16.92%	13.62%
	Promedio	16.80%	22.58%	19.28%
	Derecho	22.46%	28.24%	24.94%
BAFAR	Izquierdo	-0.20%	5.47%	2.56%
	Promedio	9.42%	15.09%	12.18%
	Derecho	19.03%	24.71%	21.80%
BIMBO	Izquierdo	0.08%	3.83%	2.26%
	Promedio	9.70%	13.45%	11.88%
	Derecho	19.32%	23.07%	21.50%
CHDRAUI	Izquierdo	0.58%	2.01%	3.35%
	Promedio	10.76%	12.19%	13.53%
	Derecho	20.95%	22.37%	23.71%
COMERCI	Izquierdo	3.97%	8.04%	5.12%
	Promedio	14.16%	18.22%	15.30%
	Derecho	24.34%	28.40%	25.48%
FEMSA	Izquierdo	4.39%	4.66%	6.29%
	Promedio	12.88%	13.15%	14.78%
	Derecho	21.37%	21.64%	23.27%
GIGANTE	Izquierdo	-1.04%	-2.24%	0.57%
	Promedio	10.28%	9.08%	11.89%
	Derecho	21.59%	20.40%	23.21%
GMACMA	Izquierdo	6.90%	5.59%	8.15%
	Promedio	12.56%	11.25%	13.81%
	Derecho	18.22%	16.91%	19.47%
GMODELO	Izquierdo	0.75%	3.57%	5.07%
	Promedio	11.50%	14.32%	15.82%
	Derecho	22.25%	25.07%	26.57%
GRUMA	Izquierdo	7.04%	8.39%	3.37%
	Promedio	14.96%	16.31%	11.29%
	Derecho	22.88%	24.23%	19.21%
HERDEZ	Izquierdo	7.66%	9.22%	11.19%
	Promedio	10.49%	12.05%	14.02%
	Derecho	13.32%	14.88%	16.85%
KIMBER	Izquierdo	11.70%	10.23%	8.23%
	Promedio	15.10%	13.62%	11.62%
	Derecho	18.49%	17.01%	15.01%
KOF	Izquierdo	11.67%	14.71%	14.25%
	Promedio	16.77%	19.80%	19.34%
	Derecho	21.86%	24.89%	24.43%
MASECA	Izquierdo	2.95%	6.98%	8.31%
	Promedio	10.31%	14.34%	15.67%
	Derecho	17.66%	21.70%	23.03%
NUTRISA	Izquierdo	3.09%	5.55%	2.16%
	Promedio	12.14%	14.60%	11.21%
	Derecho	21.20%	23.65%	20.26%
SORIANA	Izquierdo	2.26%	4.04%	-0.34%
	Promedio	13.58%	15.36%	10.98%
	Derecho	24.89%	26.68%	22.30%
WALMEX	Izquierdo	6.94%	9.57%	8.14%
	Promedio	11.46%	14.10%	12.67%
	Derecho	15.99%	18.63%	17.20%

Sector Servicios Financieros				
Clave de la emisora	Intervalo 95%	2010	2011	2012
ACTINVR	Izquierdo	7.39%	12.09%	10.31%
	Promedio	20.97%	25.67%	23.89%
	Derecho	34.54%	39.25%	37.47%
BBVA	Izquierdo	2.94%	1.63%	5.83%
	Promedio	13.12%	11.81%	16.01%
	Derecho	23.31%	21.99%	26.19%
BOLSA	Izquierdo	1.82%	4.23%	7.07%
	Promedio	19.93%	22.34%	25.18%
	Derecho	38.03%	40.45%	43.29%
COMPARC	Izquierdo	1.07%	3.59%	6.62%
	Promedio	18.04%	20.56%	23.59%
	Derecho	35.02%	37.53%	40.56%
FINAMEX	Izquierdo	-3.07%	1.79%	0.57%
	Promedio	10.51%	15.37%	14.15%
	Derecho	24.09%	28.95%	27.73%
FINDEP	Izquierdo	-3.69%	-6.41%	-3.19%
	Promedio	13.29%	10.56%	13.78%
	Derecho	30.26%	27.53%	30.75%
GBM	Izquierdo	-0.30%	2.01%	2.13%
	Promedio	11.58%	13.89%	14.01%
	Derecho	23.46%	25.77%	25.89%
GFINBUR	Izquierdo	4.22%	1.35%	0.46%
	Promedio	15.53%	12.67%	11.78%
	Derecho	26.85%	23.99%	23.10%
GFINTER	Izquierdo	-0.66%	1.72%	3.09%
	Promedio	15.74%	18.13%	19.50%
	Derecho	32.15%	34.54%	35.91%
GFMULTI	Izquierdo	2.85%	-0.65%	-1.33%
	Promedio	18.69%	15.19%	14.51%
	Derecho	34.53%	31.03%	30.35%
GFNORTE	Izquierdo	-1.12%	0.78%	2.07%
	Promedio	16.42%	18.32%	19.61%
	Derecho	33.96%	35.86%	37.15%
GFREGIO	Izquierdo	7.94%	10.30%	13.03%
	Promedio	18.70%	21.05%	23.78%
	Derecho	29.45%	31.80%	34.53%
GNP	Izquierdo	8.12%	10.41%	10.58%
	Promedio	16.60%	18.90%	19.07%
	Derecho	25.09%	27.39%	27.56%
GPROFUT	Izquierdo	6.68%	3.33%	5.81%
	Promedio	19.13%	15.78%	18.26%
	Derecho	31.57%	28.23%	30.71%
INVEX	Izquierdo	1.87%	4.76%	5.57%
	Promedio	16.02%	18.91%	19.72%
	Derecho	30.16%	33.06%	33.87%
MONEX	Izquierdo	6.42%	11.31%	10.49%
	Promedio	16.61%	21.49%	20.67%
	Derecho	26.79%	31.67%	30.85%
PROCORP	Izquierdo	-3.43%	-4.72%	-0.39%
	Promedio	11.84%	10.56%	14.89%
	Derecho	27.12%	25.84%	30.17%

Sector Telecomunicaciones				
Clave de la emisora	**Intervalo 95%**	**2010**	**2011**	**2012**
AMX	Izquierdo	3.23%	4.73%	5.82%
	Promedio	16.81%	18.31%	19.40%
	Derecho	30.39%	31.89%	32.98%
AXTEL	Izquierdo	0.51%	4.34%	5.71%
	Promedio	6.73%	10.56%	11.93%
	Derecho	12.96%	16.78%	18.15%
AZTECA	Izquierdo	4.42%	-0.01%	3.43%
	Promedio	15.73%	11.31%	14.75%
	Derecho	27.05%	22.63%	26.07%
CABLE	Izquierdo	-7.60%	-3.94%	-0.99%
	Promedio	9.38%	13.03%	15.98%
	Derecho	26.35%	30.00%	32.95%
MAXCOM	Izquierdo	10.98%	9.32%	11.96%
	Promedio	18.34%	16.68%	19.32%
	Derecho	25.69%	24.04%	26.68%
MEGA	Izquierdo	1.98%	3.20%	4.47%
	Promedio	11.60%	12.82%	14.09%
	Derecho	21.22%	22.44%	23.71%
QUMMA	Izquierdo	0.52%	3.16%	4.04%
	Promedio	10.13%	12.78%	13.66%
	Derecho	19.75%	22.40%	23.28%
QUMMA	Izquierdo	0.93%	3.64%	5.55%
	Promedio	10.55%	13.26%	15.17%
	Derecho	20.17%	22.88%	24.79%
TLEVISA	Izquierdo	-0.48%	3.67%	1.36%
	Promedio	8.58%	12.72%	10.41%
	Derecho	17.63%	21.77%	19.46%

Bibliografía

MARKOWITZ HARRY. *Portfolio Selection* , The Journal of Finance, Vol 7, No. 1, 1952, pp. 77- 91.

GORDON J ALEXANDER, WILLIAM SHARPE, JEFFERY V. BAILEY. *Fundamentos de inversiones: Teoría y práctica,* Pearson Education. 2003. pp.781.

GEORGE B THOMAS. *Cálculo de varias variables*, Pearson education. 2006, pp. 544

STEPHEN ROSS. *The arbitrage theory of capital asset pricing*, Journal of Economic Theory ,1976.

CAROL ALEXANDER. *Market Risk Analysis*, Volume IV Value at Risk Models. Jhon Wiley & Sons, Ltd. USA,2008.

PHILLIPPE JORION. *Financial Risk Manager Handbook*. Segunda Edición, John Wiley & Sons, Inc, United States of America, 2003.

KONNO HIROSHI, YAMAZAQUI HIROAKI. *Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications*, Management Science Vol 37, No. 5, 1991. pp 519 – 531

MONTGOMERY C. DOUGLAS. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Jhon Wiley & Sons. Tercera Edición, 2003, Chapter 8, United States of America

YOUNG, M .*A Minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, Management Science, Vol 44, No. 5, 1988. pp. 673-673.

CAI X, TEO KL, YANG XQ, ZHOU XY. *Minimax portfolio optimization: empirical numerical study*. Journal of Search,Vol 55, 2004, pp. 65-72.

STEPHEN A. ROSS. *The arbitrage theory of capital asset pricing theory*, Journal of economic theory, Departments of Economics and Finance, University of Pensilvanya, 1973.

BODIE KANE MARCUS. *Investments*. McGraw Hill. Novena Edición. Nueva York, Estados Unidos,

RICHARD J. LARSEN, MORRRIS L. MARRX, *An introduction to mathematical statistics and its applications*. Prentice Hall, 5ta Edición, EUA Boston (2001).

BETH BOWER, PAMELA WENTZ ,*Portfolio optimization: MAD vs Markowitz*, Management Science, 2006.

BOWER BETH. *Portfolio Optimization*: MAD VS Markowitz, Millersville University, 2005, pp 8

HIROSHI KONNO, HIROAKI YAMASAKI .*Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market*. Management Science, Vol. 37, 1991, No. 5

LAM WENG HOE, JAMAN SAIFUL HAFIZAH, ISA ZAIDI ,*An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization*. Bussiness and Economics Horizons, Vol. 1, 2010, pp. 39-45

CAI X, TEO KL, YANG XQ, ZHOU XY. *Portfolio Optimization under a minimax rule*, Management Science, Vol. 46, 2000. pp. 957-972.

NÖEL AMENC, VÉRONIQUE LE SOURD *Portfolio Theory and performance Analysis*,John Wiley & Sons. Inglaterra ,2003.

YAHOO FINANZAS, *Precios de las Acciones que cotizan en la bolsa mexicana de Valores*, Abril 2013, http://mx.finanzas.yahoo.com/

SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO, *Mercados Financieros*, octubre 2012, http://www.shcp.gob.mx/

SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO, *Sociedades de Inversión,* octubre 2012, http://www.apartados.hacienda.gob.mx/casfim/contenido/catalogo/xls/sector52.xls,

Comisión Nacional Bancaria y de Valores. *Funciones de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores*, noviembre 2012, http://www.cnbv.gob.mx

Banco de México, *Funciones del Banco de México*, noviembre 2012 http://www.banxico.org.mx/

MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS, *Derivados Financieros*, noviembre 2012 http://www.mexder.com.mx/MEX/paginaprincipal.html