UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CATEGORÍAS TRIANGULADAS

MODALIDAD DE EXÁMENES GENERALES
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MANUEL FLORES GALICIA

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

MÉXICO, D. F. 29 DE ABRIL DE 2013

Agradecimientos

Externo mi más sincera gratitud a mi asesor el Dr. Octavio Mendoza por permitirme trabajar con él, y sobre todo, agradezco su paciencia y todas sus enseñanzas matemáticas y de la vida, me han hecho crecer como persona, en verdad muchas gracias.

También quisiera agradecer al Dr. Christof Geiss por haberme dado la oportunidad de gozar una beca como parte del proyecto “Categorización de problemas combinatorios y topológicos: Los alcances de la Teoría de representaciones de álgebras”, auspiciado por el Conacyt, con número de proyecto 81948.

Agradezco al Instituto de Matemáticas UNAM por haberme brindado una beca de lugar con la cual obtuve diversos apoyos académicos durante el estudio de mi maestría y la elaboración del presente trabajo.

Doy las gracias a mi familia y amigos por todos sus ánimos.

Gracias C... y L..., son de otro mundo.

Índice general

Introducción

En [12], J. L. Verdier introduce las nociones de categoría triangulada y categoría derivada, basadas en ideas previas de su asesor doctoral A. Grothendiek, con el fin de “formalizar la hipercohomología”. En un inicio, sólo se usaron en el círculo cercano de Grothendieck, sin embargo hoy en día su uso se ha expandido a áreas como la geometría algebraica [7], álgebra homológica y la teoría de representaciones de álgebras [3].

Grothendieck, a principios de los años 60 del s. XX, inventa el concepto de categoría derivada para probar el teorema de las extensiones de la dualiadad de Serre [6], mientras que las construcciones esenciales las realizó Verdier, quien expuso un resumen de los resultados en 1963 [11].

Desde entonces, se han encontrado aplicaciones de las categorías trianguladas y categorías derivadas en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en la teoría de representaciones de grupos de Lie, en geometría algebraica, álgebra homológica y en teorías de representaciones de álgebras, incluso usando métodos recientes de ésta última área, ciertas categorías trianguladas se han vuelto más accesibles [3].

La categoría derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, provee una infraestructura para estudiar propiedades homológicas de $\mathcal{A}$. La idea principal para construirla se divide en dos pasos: en la primera etapa se considera la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, cuyos objetos son complejos en $\mathcal{A}$, y los morfismos son morfismos de complejos módulo homotopía; en el segundo paso, la categoría derivada se obtiene al localizar (respecto a los cuasi-isomorfismos) la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, proceso en el cual los morfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ que inducen isomorfismo en cohomología (cf.3.1.6), se convierten en isomorfismos en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, este proceso se refleja en la siguiente composición de funtores:

$$\mathcal{A} \to \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{A}).$$

Las categorías $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ resultan ser aditivas, pero no son necesariamente abelianas, a pesar de que $\mathcal{A}$ lo sea, sin embargo están equipadas con una estructura suplementaria muy útil, la cual consiste en una clase de diagramas: los triángulos distinguidos. Al axiomatizar dicha estructura, se da pie a la noción de categoría triangulada [12], cuyos triángulos distinguidos fungen el rol de las sucesiones exactas en las categroías abelianas.

El presente trabajo se divide en tres capítulos. En el Capítulo 1, se define una categoría triangulada como una categoría aditiva $\mathcal{C}$ junto con una autoequivalencia $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y una clase de triángulos distinguidos que verifican cuatro axiomas. También se enuncian y demuestran las propiedeades básicas de las categorías trianguladas y se definen los funtores triangulados como los funtores entre categorías trianguladas que preservan los triángulos distinguidos. El capítulo termina enunciando el teorema que afirma que un funtor triangulado es una equivalencia de categorías trianguladas si y sólo si es una equivalencia usual de categorías.

El Capítulo 2 comienza introduciendo el concepto de localización de categorías en general sobre una clase de morfismos cualquiera, para luego dar la definición de sistema multiplicativo con el cual se describirán los morfismos en la categoría localizante, y en particular, se estudiarán los sistemas multiplicativos en categorías trianguladas, y se enunciará el teorema central del capítulo, el cual sostiene que la localización de una categoría triangulada respecto a un sistema multiplicativo compatible con la triangulación, resulta ser una categoría triangulada, y además se muestra que el funtor de localización es triangulado. Por último, se abordan las nociones de subcategorías trianguladas localizantes y se presentan algunos resultados técnicos muy útiles para el Capítulo 3 sobre categorías derivadas.

En el tercer y último capítulo se estudia la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, que se construye a partir de la categoría de complejos $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ donde los morfismos están dados salvo homotopía. El fin principal es definir la categoría derivada de complejos $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, mediante el proceso de localización respecto a los cuasi-isomorfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Al principio del capítulo se dan los conceptos básicos para definir la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ y el funtor de cohomología. Después se especifican los triángulos distinguidos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, los cuales surgen del cono de un morfismo de complejos. Este nivel no es suficiente para generar una categoría triangulada, por lo que se usa la categoría homotópica, la cual, en efecto, resulta ser triangulada. Después se definen las subcategorías $\mathbf{K}^{*,*'}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{Ac}^*(\mathcal{A})$, donde $*, *' \in \{b, +, -, \emptyset\}$, y los funtores truncamiento $\tau^{\leqslant n}, \tau^{\geqslant n}$, para luego dar las nociones de las categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$, para $* \in \{b, +, -, \emptyset\}$. Se muestra una inmersión de la categoría $\mathcal{A}$ en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Finalmente, si $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ denota la clase de los objetos inyectivos de $\mathcal{A}$, se prueba que existe una equivalencia triangular entre $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ y $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos. Y si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos o proyectivos se exhibe una isomorfismo canónico entre $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(A, B[n])$.

Se requiere que el lector tenga familiaridad con conceptos básicos de la teoría de categorías y del álgebra homológica para entender con mayor soltura el presente trabajo, sin embargo, se pensó en un trabajo mayoritariamente autocontenido y en su defecto, se anotan referencias para consultarse. El fin último es acercar al lector a los conceptos de categorías derivadas, usando la herramienta provista por las categorías trianguladas en un contexto de localización, que se espera, así sea.

Capítulo 1

Categorías trianguladas

Las categorías trianguladas juegan un papel central en diversas áreas de las matemáticas, tales como el álgebra, la geometría y la topología, y surgen en la naturaleza como cocientes o localizaciones de estructuras más complejas. En este primer capítulo se exponen las nociones básicas sobre ellas, desde los axiomas que las definen hasta los conceptos de funtores triangulados. Empezamos a continuación con la definición en el sentido de Verdier [12].

1.1. Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Llamaremos funtor de traslación a un funtor covariante aditivo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, el cual es una equivalencia.

Dada una categoría aditiva $\mathcal{C}$ y un funtor de traslación $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, tenemos asociado, al par $(\mathcal{C}, T)$, la categoría de triángulos $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$, cuyos objetos son diagramas de la forma $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, que denotaremos como:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"'] & & Y, \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

o bien como $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$.

Un morfismo entre dos objetos η y μ de $\mathcal{T}$ es una terna $\varphi = (f, g, h)$ de morfismos en $\mathcal{C}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \eta : \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ \mu : & X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos en $\mathcal{T}$ se hace componente a componente. Esto es, $(f, g, h) \circ (f', g', h') = (ff', gg', hh')$. No es difícil ver que, de esta manera, $\mathcal{T}$ es, en efecto, una categoría.

Observación. Un morfismo (f, g, h) en $\mathcal{T}$ es un isomorfismo si y sólo si f, g y h son isomorfismos en $\mathcal{C}$.

Definición 1.1.1. Una categoría triangulada es una terna $(\mathcal{C}, T, \Delta)$, donde:

(i) $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor de traslación.

(ii) Δ es una subclase de $\mathrm{Obj}(\mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la categoría de triángulos asociada al par $(\mathcal{C}, T)$, cuyos objetos llamaremos triángulos distinguidos, los cuales satisfacen los siguientes axiomas:

TR1: (a) Δ es cerrado por isomorfismos en $\mathcal{T}$.

(b) Para todo morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{C}$ existe un triángulo distinguido de la forma $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX$.

(c) Para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, el triángulo $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to TX$ es distinguido.

TR2: $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ es un triángulo distinguido si y sólo si $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ es un triángulo distinguido.

TR3: Para cualesquiera triángulos (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') distinguidos y cualquier diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y',
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $h : Z \to Z'$ tal que (f, g, h) es un morfismo de triángulos, i. e. tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX.
\end{tikzcd}$$

TR4: Dados tres triángulos distinguidos:

$$\eta : \begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl] & \\
X \arrow[rr, "u"'] & & Y, \arrow[ul, "i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\mu : \begin{tikzcd}
& X' \arrow[dl, "j"'] & \\
Y \arrow[rr, "v"'] & & Z, \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\xi : \begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dl] & \\
X \arrow[rr, "vu"'] & & Z, \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

existen dos morfismos $f : Z' \to Y'$ y $g : Y' \to X'$ tales que:

(a) $(1_X, v, f) : \eta \to \xi$ es un morfismo en $\mathcal{T}$,

(b) $(u, 1_Z, g) : \xi \to \mu$ es un morfismo en $\mathcal{T}$, y

(c) $\phi : Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{T(i)\circ j} TZ'$ es un triángulo distinguido.

Los incisos (a), (b) y (c) se pueden visualizar en el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\eta : & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dashed, "f"] & TX \arrow[d, equal] \\
\xi : & X \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, dashed, "g"] & TX \arrow[d, "Tu"] \\
\mu : & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "Ti\circ j"] & TY \arrow[d, "Ti"] \\
 & & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ',
\end{tikzcd}
$$

o bien en el diagrama “tipo octaedro”:

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[dd, |->] \arrow[dr] & & Z \arrow[ll] \\
 & Y \arrow[ur, "v"] \arrow[dl] & \\
Z' \arrow[rr, |->] & & X \arrow[uu, "vu"'] \arrow[ul, "w"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X' \arrow[dd, |->] & & Z \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & Y' \arrow[ul, dashed] \arrow[dr, |->] & \\
Z' \arrow[rr, |->] \arrow[ur, dashed] & & X \arrow[uu, "vu"']
\end{tikzcd}
$$

$\mu \quad \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \quad \eta \qquad\qquad \circlearrowleft \quad \phi \quad \xi \quad \circlearrowleft$

donde el lado izquierdo es la“parte de arriba” y el derecho la “parte de abajo”.

Notación. Escribiremos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \ \Delta$, si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ es un triángulo distinguido.

Observación 1.1.2. Del axioma TR3, podemos deducir que si existen dos de los morfismos f, g y h, entonces el tercero existe, de manera que (f, g, h) es un morfismo en $\mathcal{T}$. Esto se sigue de TR2. Por ejemplo, si existen f y h, entonces tenemos el siguiente diagrama en Δ:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[r] \arrow[d, "Tf"] & TY \arrow[r] & TZ \arrow[d, "Th"] \\
Z' \arrow[r] & TX' \arrow[r] & TY' \arrow[r] & TZ',
\end{tikzcd}
$$

y por TR3 existe un morfismo $g' : TY \to TY'$ en $\mathcal{C}$ de manera que (h, Tf, g') es un morfismo en $\mathcal{T}$. Por ser T pleno, existe $g : Y \to Y'$ tal que $Tg = g'$. Finalmente, el hecho de que (f, g, h) es un morfismo en $\mathcal{T}$ se debe a que T es fiel.

1.2. Categoría triangulada opuesta

Dada una categoría triangulada $(\mathcal{C}, T, \Delta)$, obtenemos de manera natural una categoría triangulada opuesta $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ como sigue:

(a) El funtor de traslación $\tilde{T} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ es $\tilde{T} := T^{-1}$.

(b) $X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \ \in \ \tilde{\Delta}$ si y sólo si $T^{-1}X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \ \in \ \Delta$.

De esta manera, si $\mathcal{C}$ es triangulada, entonces $\mathcal{C}^{op}$ también lo es de manera canónica, y diremos que $\mathcal{C}^{op}$ es la categoría triangulada opuesta de $\mathcal{C}$. Además, para cada $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(M, \tilde{T}^n N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T^n M)$.

1.3. Propiedades básicas de las categorías trianguladas

La siguiente definición está motivada por el funtor de cohomología $H : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ (cf. 3.1.5), mismo que tiene sus inicios en la Topología algebraica.

Definición 1.3.1. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un funtor aditivo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos $F^n := F \circ T^n$. Decimos que F es un funtor cohomológico si para todo triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \ \Delta$, tenemos la siguiente sucesión exacta larga en $\mathcal{A}$:

$$\cdots \to F^n(X) \xrightarrow{F^n(u)} F^n(Y) \xrightarrow{F^n(v)} F^n(Z) \xrightarrow{F^n(w)} F^{n+1}(X) \to \cdots .$$

Antes de mostrar ejemplos de funtores cohomológicos, probaremos que la composición de dos morfismos consecutivos en un triángulo distinguido cualquiera es cero.

Lema 1.3.2. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \ \Delta$. Entonces $vu = 0$ y $wv = 0$.*

Demostración. Veamos primero que $vu = 0$. En efecto, por TR2, tenemos que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY \ \in \ \Delta$; y por TR3 existe $h : TX \to 0$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tv"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TZ.
\end{tikzcd}$$

Luego $Tv \circ (-Tu) = 0$, esto es $T(vu) = 0$. Por lo tanto, $vu = 0$. El hecho de que $wv = 0$ se sigue de TR2.

□

Ahora podemos mostrar dos ejemplos de funtores cohomológicos dada una categoría triangulada.

Proposición 1.3.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría triangulada. Entonces los funtores*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,-):\mathcal{C}\to \mathrm{Ab} \quad y \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,M):\mathcal{C}^{op}\to \mathrm{Ab}$$

son funtores cohomológicos.

Demostración. Sea $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$. Por TR2 es suficiente probar que para todo $M\in\mathcal{C}$ la siguiente sucesión es exacta:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,Y) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,Z), \tag{1.1}$$

donde $u_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,u)$.

De 1.3.2 tenemos que $vu=0$ y, por funtorialidad, $v_*u_*=0$. Esto muestra que $\mathrm{Im}(u_*)\subseteq \mathrm{Ker}(v_*)$.

Ahora, sea $\varphi\in\mathrm{Ker}(v_*)$, i. e. $v\varphi=0$. Por 1.1.2, tenemos que existe $\psi: M\to X$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & TM \arrow[d, dashed, "T\psi"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & TX,
\end{tikzcd}$$

de donde $\varphi = u\psi = u_*(\psi)$, lo cual prueba que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,-):\mathcal{C}\to\mathrm{Ab}$ es cohomológico.

La prueba, en el caso de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,M):\mathcal{C}^{op}\to\mathrm{Ab}$, se hace argumentado similarmente en la categoría triangulada opuesta. □

El siguiente resultado determina que los isomorfismos entre dos triángulos distinguidos están determinados por sólo dos isomorfismos en $\mathcal{C}$.

Lema 1.3.4. *Sean f, g y h como en el axioma* TR3. *Si dos de ellos son invertibles, entonces el tercero también lo es.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX.
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Al aplicar el funtor cohomológico $(Z',-):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z',-)$ en (1.2) obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
(Z',X) \arrow[r] \arrow[d, "{(Z',f)}"] & (Z',Y) \arrow[r] \arrow[d, "{(Z',g)}"] & (Z',Z) \arrow[r] \arrow[d, "{(Z',h)}"] & (Z',TX) \arrow[r] \arrow[d, "{(Z',Tf)}"] & (Z',TY) \arrow[d, "{(Z',Tg)}"] \\
(Z',X') \arrow[r] & (Z',Y') \arrow[r] & (Z',Z') \arrow[r] & (Z',TX') \arrow[r] & (Z',TY').
\end{tikzcd}$$

Luego, (Z',h) es invertible por el Lema del cinco. Por lo tanto, existe $\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z',Z')$ tal que $h\varphi = 1_{Z'}$.

Análogamente, aplicando el funtor $(-,Z):=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Z)$ en (1.2), existe $\psi\in(Z',Z)$ tal que $\psi h = 1_Z$. □

Lema 1.3.5. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$. Entonces, $Z \simeq 0$ si y sólo si u es invertible.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $Z \simeq 0$. Luego, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\wr"] & TX \arrow[d, "Tu"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[r, "v'"] & 0 \arrow[r, "w'"] & TY.
\end{tikzcd}$$

Es claro que los dos primeros cuadrados conmutan, la conmutatividad del tercero se sigue de 1.3.2. Por 1.3.4, concluimos que u es invertible.

($\Leftarrow$) Sea φ tal que $\varphi u = 1_X$. Por TR3 existe ψ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX,
\end{tikzcd}$$

y por 1.3.4, ψ es invertible. $\square$

Dado que una categoría aditiva $\mathcal{C}$ posee sumas directas finitas, podemos demostrar que la suma directa de dos triángulos distinguidos, en efecto, también lo es.

Lema 1.3.6. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ y $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z \xrightarrow{w'} TX'$ triángulos distinguidos. Entonces, $X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{v \oplus v'} Z \oplus Z' \xrightarrow{w \oplus w'} T(X \oplus X') \in \Delta$.*

Demostración. Por TR1 (b), tenemos que $X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{m} L \xrightarrow{n} T(X \oplus X') \in \Delta$. Luego, usando TR3, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "f"] & TX \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}"] \\
X \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}"] & Y \oplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & T(X \oplus X') \\
X' \arrow[r, "u'"'] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{X'} \end{pmatrix}"] & Y' \arrow[r, "v'"'] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y'} \end{pmatrix}"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] \arrow[u, dashed, "f'"'] & TX' \arrow[u, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{TX'}. \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

De (1.3), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X\oplus X' \arrow[r, "u\oplus u'"] \arrow[d, equal] & Y\oplus Y' \arrow[r, "v\oplus v'"] \arrow[d, equal] & Z\oplus Z' \arrow[r, "w\oplus w'"] \arrow[d, "(f,f')"] & T(X\oplus X') \arrow[d, equal] \\ X\oplus X' \arrow[r, "u\oplus u'"] & Y\oplus Y' \arrow[r, "m"] & L \arrow[r, "n"] & T(X\oplus X'). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, (f,f') es invertible, en virtud de 1.3.4, y el lema se sigue de TR1 (a).

$\square$

Un caso particular del resultado anterior es el siguiente.

Lema 1.3.7. *Sean $(\mathcal{C},T,\Delta)$ una categoría triangulada y $X\overset{u}{\to}Y\overset{v}{\to}Z\overset{w}{\to}TX\in\Delta$. Entonces, para cada par de objetos M,N en $\mathcal{C}$, se tiene que $M\overset{\binom{1_M}{0}}{\to}M\oplus N\overset{(0\ 1_N)}{\to}N\overset{0}{\to}TM$ está en Δ.*

Demostración. Se sigue al aplicar 1.3.6 a los triángulos $M\overset{1_M}{\to}M\to 0\to TM$ y $0\to N\overset{1_N}{\to}N\to 0$. $\square$

Lema 1.3.8. *Sean $(\mathcal{C},T,\Delta)$ una categoría triangulada y $X\overset{u}{\to}Y\overset{v}{\to}Z\overset{w}{\to}TX\in\Delta$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) $w=0$.

(b) *u es una sección, i. e. existe $\varphi:Y\to X$ tal que $\varphi u=1_X$.*

(c) *v es una retracción, i. e. existe $\psi:Z\to Y$ tal que $v\psi=1_Z$.*

(d) $Y\simeq X\oplus Z$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) y (c). Sea $w=0$. Luego, por TR3, existe φ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[r, "w=0"] \arrow[d, "0"] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX. \end{tikzcd}$$

De la misma forma, por TR3, existe ψ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\psi"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & TX \arrow[d, "-Tu"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w=0"'] & TX \arrow[r, "-Tu"'] & TY. \end{tikzcd}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea φ tal que $\varphi u = 1_X$. Luego, por TR3, tenemos el siguiente morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX. \end{tikzcd}$$

Por lo que $w = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Con ψ construyamos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0\,,1_Z)"] \arrow[d, "(u\,,\psi)"] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z. \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ a (1.4), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, (u, \psi))$ es un isomorfismo, en virtud del Lema de cinco. Por lo tanto, (u, ψ) es un isomorfismo.

(d) $\Rightarrow$ (a) Sea $\lambda = (u, \psi) : Y \to X \oplus Z$ un isomorfismo. Luego, por 1.3.7, tenemos el siguiente morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0\,,1_Z)"] \arrow[d, "(u\,,\psi)"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX. \end{tikzcd}$$

Por lo que $w = 0$.

$\square$

Lema 1.3.9. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$ y dos morfismos $f : W \to Y$, $g : Y \to W'$ en $\mathcal{C}$. Entonces, se satisface lo siguiente.*

(a) *$vf = 0$ si y sólo si existe $f' : W \to X$ tal que $uf' = f$. Más aun, f' es único si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, T^{-1}Z) = 0$.

(b) *$gu = 0$ si y sólo si existe $g' : Z \to W'$ tal que $g'v = g$. Más aun, g' es único si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, W') = 0$.

Demostración. (a) Aplicamos el funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, -)$ al triángulo $X \to Y \to Z \to TX$ y obtenemos la sucesión exacta $(W, T^{-1}Z) \to (W, X) \overset{(W,u)}{\to} (W, Y) \overset{(W,v)}{\to} (W, Z)$, de donde se sigue (a).

Si $(W, T^{-1}Z) = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(W, u) = 0$; por lo que f' es único en tal caso.

(b) se verfica de manera análoga aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, W')$ a $X \to Y \to Z \to TX$.

$\square$

Observación 1.3.10. La afirmación de 1.3.9 se puede representar en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "f'"'] & \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[dl, dashed, "g'"] \\
& W'. &
\end{tikzcd}$$

Lo anterior, nos dice que u es un seudo-kernel y v es un seudo-cokernel.

1.4. Funtores triangulados

Para comparar dos categorías trianguladas, se usan los funtores triangulados, los cuales preservan la estructura triangulada, es decir, preservan triángulos.

Definición 1.4.1. Sean $(\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1)$ y $(\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$ dos categorías trianguladas. Un funtor triangulado o exacto $(F, \theta) : (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1) \to (\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$, consiste de lo siguiente.

(FT1) Un funtor aditivo $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$.

(FT2) Un isomorfismo natural $\theta : FT_1 \to T_2F$, tal que si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T_1X \in \Delta_1$, entonces $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\theta \circ Fw} T_2FX \in \Delta_2$.

Definición 1.4.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$.

(a) Decimos $\mathcal{C}'$ es una categoría plena de $\mathcal{C}$, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$.

(b) Decimos que $\mathcal{C}'$ es una categoría estrictamente plena de $\mathcal{C}$, si es plena y además es cerrada por isomorfismos en $\mathcal{C}$, es decir, si $X \simeq Y$ en $\mathcal{C}$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, entonces $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$.

Las subestructuras trianguladas en una categoría triangulada están definidas como sigue.

Definición 1.4.3. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $\mathcal{C}'$ una subcategoría aditiva plena de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{C}'$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{C}$, si satisface las siguientes dos condiciones:

(a) Si $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, entonces TX y $T^{-1}X$ son objetos de $\mathcal{C}'$, es decir, $\mathcal{C}'$ es estable por T.

(b) Si $X \to Y \to Z \to TX \in \Delta$ y $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, entonces Z es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}'$.

Decimos que $\mathcal{C}'$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{C}$, si cumple (a) y (b), y además satisface la siguiente propiedad:

(c) Si $f : X \to Y$ se factoriza a través de un objeto de $\mathcal{C}'$ y existe un triángulo $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta$ con $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, entonces X y Y son isomorfos a objetos de $\mathcal{C}'$.

Observación. (1) La subcategoría triangulada $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ está dotada de una estructura triangulada $(\mathcal{C}', T', \Delta')$, donde $T' := T|_{\mathcal{C}'}$ y $\Delta' := \Delta|_{\mathcal{C}'}$, de tal modo que el funtor inclusión $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, es exacto, i. e. $(i, 1) : (\mathcal{C}', T', \Delta') \to (\mathcal{C}, T, \Delta)$ es un funtor triangulado.

(2) Asumiendo (a) y (b), la propiedad (c) es equivalente a:

(c') Todo sumando directo en $\mathcal{C}$ de un objeto de $\mathcal{C}'$ es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}'$.

En efecto, veamos que (c) implica (c'). Para ello, sea $X = X_1 \oplus X_2$ una suma directa en $\mathcal{C}$ con $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$. Luego, el morfismo $0 : T^{-1}X_2 \to X_1$ en $\mathcal{C}$ se factoriza a través de $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, y por 1.3.7, tenemos que $T^{-1}X_2 \xrightarrow{0} X_1 \to X \to X_2 \in \Delta$ con $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$. En virtud de (c), tenemos que $T^{-1}X_2$ y X_1 son isomorfos a objetos de $\mathcal{C}'$. Por lo tanto, X_1 y X_2 son isomorfos a objetos de $\mathcal{C}'$.

La implicación (c') $\Rightarrow$ (c) usa el axioma del octaedro.

(3) Asumiendo (a), la condición (b) es equivalente a decir que $\mathcal{C}'$ es cerrada por extensiones, es decir:

(b') Si $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta$ y $X, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, entonces Y es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}'$.

Veamos que (b) $\Rightarrow$ (b'). En efecto, por TR2, el triángulo $TZ^{-1} \to X \to Y \to Z$ está en Δ; y como $X, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, por (b) se sigue que $Y \simeq Y'$, con $Y' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$.

Análogamente, se prueba que (b') $\Rightarrow$ (b).

1.5. Categoría de funtores triangulados

En esta sección se estudian todos los funtores triangulados entre dos categorías trianguladas fijas. Se termina enunciando el teorema que afirma que un funtor es una equivalencia triangular si y sólo si es una equivalencia usual de categorías. Veamos las definiciones.

Sean $(\mathcal{C}_i, T_i, \Delta_i)$ categorías trianguladas, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

(a) Definimos la categoría de funtores triangulados de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$, que denotamos por $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, como sigue.

(a$_1$) Los objetos son los funtores triangulados $(F, \theta) : (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1) \to (\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$.

(a$_2$) Los morfismos son de la forma $\eta : (F, \alpha) \to (G, \beta)$, donde $\eta : F \to G$ es una transformación natural, tal que para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FT_1(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d, "\eta(T_1(X))"'] & T_2F(X) \arrow[d, "T_2(\eta(X))"] \\ GT_1(X) \arrow[r, "\beta(X)"'] & T_2G(X), \end{tikzcd}$$

es decir, $(T_2\eta) \circ \alpha = \beta \circ (\eta T_1)$.

La composición de morfismos en $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, es la composición natural de morfismos de funtores.

(b) Tenemos una asignación $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \times \mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \to \mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$ dada como sigue

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "(F,\alpha)"] \arrow[d, phantom, ""] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, "(F',\alpha')"] & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{C}_1 \arrow[rr, "(F'\circ F, \alpha'\circ\alpha)"] & & \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "(G,\beta)"'] \arrow[u, phantom, ""] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, "(G',\beta')"'] & \mathcal{C}_3 & \mapsto & \mathcal{C}_1 \arrow[rr, "(G'\circ G, \beta'\circ\beta)"'] & & \mathcal{C}_3 \arrow[from=1-1, to=2-1, phantom, "\eta\downarrow"] \arrow[from=1-2, to=2-2, phantom, "\theta\downarrow"] \arrow[from=1-6, to=2-6, phantom, "\theta\circ\eta\downarrow"] \end{tikzcd}$$

donde

$$F'F\,T_1 \overset{F'\alpha}{\to} F'\,T_2F \overset{\alpha' F}{\to} T_3F'F, \quad \alpha' \circ \alpha := (\alpha' F) \circ (F'\alpha)$$

$$F'F \overset{F'\eta}{\to} F'G \overset{\theta' G}{\to} T_3G'G, \quad \theta \circ \eta := (\theta\, G) \circ (F'\eta).$$

Veamos que, en efecto, $\theta \circ \eta : (F' \circ F, \alpha' \circ \alpha) \to (G' \circ G, \beta' \circ \beta)$ es un objeto en $\mathrm{Hom}_\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$, para lo cual, basta verificar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F'F\,T_1 \arrow[r, "\alpha'\circ\alpha"] \arrow[d, "(\theta\circ\eta)T_1"'] & T_3F'F \arrow[d, "T_3(\theta\circ\eta)"] \\ G'GT_1 \arrow[r, "\beta'\circ\beta"'] & T_3G'G. \end{tikzcd}$$

Es decir, veamos la igualdad:

$$T_3\,[(\theta\, G)(F'\eta)](\alpha' F)(F'\alpha) = (\beta' G)(G'\beta)[(\theta\, G)(F'\eta)\,T_1], \tag{1.5}$$

para ello, observamos que en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
F'FT_1 \arrow[r, dashed, "F'\alpha"] \arrow[d, dashed, "F'\eta T_1"] \arrow[dd, bend right, "\theta(FT_1)"'] & F'T_2F \arrow[r, equal] \arrow[d, "F'T_2\eta"] \arrow[dd, bend right, "\theta(T_2F)"'] & F'T_2F \arrow[r, dashed, "\alpha' F"] \arrow[d, "\theta(T_2F)"] & T_3F'F \arrow[d, "T_3(\theta F)"'] \arrow[dd, dashed, bend left, "T_3(F'\eta)"] \\
F'GT_1 \arrow[r, dotted, "F'\beta"] \arrow[dd, dashed, bend right, "\theta(GT_1)"'] & F'T_2G \arrow[dr, equal] \arrow[dd, bend right, "\theta(T_2G)"'] & G'T_2F \arrow[r, "\beta' F"'] \arrow[dl, equal] & T_3G'F \arrow[dd, bend left, "T_3(G'\eta)"] \\
G'FT_1 \arrow[r, dotted, "G'\alpha"] \arrow[d, "G'\eta T_1"] & G'T_2F \arrow[d, "G'T_2\eta"] & F'T_2G \arrow[r, "\alpha' G"] \arrow[d, "(\theta T_2)G"] & T_3F'G \arrow[d, dashed, "T_3(\theta G)"'] \\
G'GT_1 \arrow[r, dashed, "G'\beta"'] & G'T_2G \arrow[r, equal] & G'T_2G \arrow[r, dashed, "\beta' G"'] & T_3G'G
\end{tikzcd}
$$

la conmutatividad de las composiciones (con líneas punteadas) en el contorno, es consecuencia de la conmutatividad de todos los cuadrados en dicho diagrama. Esto muestra (1.5).

Definición 1.5.1. Un funtor triangulado $(F,\theta) : (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1) \to (\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$ se dice que es una equivalencia triangular, si existe un funtor triangulado (G,β) : $(\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2) \to (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1)$ tal que $(GF, \beta\alpha) \xrightarrow{\sim} (1_{\mathcal{C}_1}, 1_{T_1})$ y $(FG, \alpha\beta) \xrightarrow{\sim} (1_{\mathcal{C}_2}, 1_{T_2})$.

Enunciamos el siguiente resultado como complemento a la teoría de los funtores triangulados (cf. [7] Lemma 8.2). Básicamente lo que afirma es que un funtores entre dos cateogrías trianguladas es, en efecto un funtor triangulado.

Teorema 1.5.2. *Sea $(F,\alpha) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un funtor triangulado. Entonces, (F,α) es una equivalencia triangular si y sólo si $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es una equivalencia usual de categorías.*

Capítulo 2

Localización

La localización de una categoría arbitraria $\mathcal{B}$ respecto a una clase de morfismos $\mathcal{S}$ en $\mathcal{B}$, es el proceso en el cual los morfismos en $\mathcal{S}$ se transforman en isomorfismos en una categoría localizante $\mathcal{B}[S^{-1}]$ mediante un funtor universal.

En el caso de la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, se localiza sobre la clase de los cuasi-isomorfismos $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$ y la categoría derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ se define como la categoría localizante $\mathbf{K}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}(\mathcal{A})^{-1}]$.

En el caso triangulado, existen básicamente dos maneras de abordar la teoría de localización para una categoría triangulada $\mathcal{T}$. La que abordaremos en el presente trabajo es la localización de Verdier [12], en la cual se elige una subcategoría triangulada plena $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ y se construye un funtor universal exacto $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ que se anule en $\mathcal{S}$, y en efecto, la categoría cociente $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ se obtiene invirtiendo formalmente los morfismos σ en $\mathcal{T}$ tales que el cono de σ pertenece a $\mathcal{S}$. Por otro lado, está la localización de Bousfield, la cual que se puede estudiar en [9] [10].

2.1. Localización de una categoría

En esta sección se exhibe el proceso de localización de una categoría arbitraria $\mathcal{B}$, sobre una clase de morfismos S para obtener la categoría localizante $\mathcal{B}[S^{-1}]$, más aun, se da una descripción más detallada de los morfismos en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ mediante "tejados" cuando S es un sistema multiplicativo o localizante. El teorema de la existencia de la categoría y funtor localizantes es el siguiente.

Teorema 2.1.1. *Sean $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria y $S \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ una clase de morfismos cualquiera. Entonces, existen una categoría $\mathcal{B}[S^{-1}]$ y un funtor $Q = Q_S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}[S^{-1}]$ con la siguientes propiedades:*

(a) *$Q(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ para todo morfismo $f \in S$.*

(b) *Cualquier funtor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ que transforme morfismos en S en isomorfismos en $\mathcal{D}$, se factoriza de una única manera a través de $\mathcal{B}[S^{-1}]$, es decir,* *existe un único funtor $G : \mathcal{B}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q"'] & & \mathcal{D} \\ & \mathcal{B}[S^{-1}]. \arrow[ur, dashed, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 2.1.2. Al funtor Q_S se le llama funtor de localización y a $\mathcal{B}[S^{-1}]$ se le llama la categoría localizante respecto a $\mathcal{S}$.

Demostración. [de 2.1.1] Definimos $\mathrm{Obj}(\mathcal{B}[S^{-1}]) := \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$. Para definir los morfismos en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ procedemos como sigue.

(i) Introducimos la variable x_s por cada morfismo $s \in S$.

(ii) Construimos una gráfica orientada Γ dada por lo siguiente:

- los vértices Γ son los objetos de $\mathcal{B}$.
- las aristas de Γ son $\mathrm{Mor}(\mathcal{B}) \cup \{x_s : s \in S\}$; la arista $f : X \to Y$ está orientada de X a Y, y la arista x_s tiene los mismos vértices que la arista $s \in S$ pero con orientación opuesta.

(iii) Un camino en Γ es una sucesión finita de aristas tales que el final de una coincide con el inicio de la siguiente.

(iv) Consideramos dos tipos de relaciones en los caminos de Γ :

(R1) Dos flechas consecutivas en un camino se pueden reemplazar por su composición.

(R2) Las flechas $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x_s} X$ (resp. $Y \xrightarrow{x_s} X \xrightarrow{s} Y$) se pueden reemplazar por por $X \xrightarrow{id_X} X$ (resp. $Y \xrightarrow{id_Y} Y$).

(v) Consideremos las clases de caminos en Γ módulo las relaciones (R1) y (R2). Luego, un morfismo en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ es una clase de caminos en Γ con el mismo principio y mismo final.

La composición de morfismos en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ está inducida por la concatenación de caminos y luego tomar clases de equivalencia.

Ahora, definimos el funtor $Q : \mathcal{B} \to \mathcal{B}[S^{-1}]$ como la identidad en los objetos de $\mathcal{B}$, y un morfismo $X \to Y$ en $\mathcal{B}$ es mandado por Q a su clase correspondiente (de longitud 1) en $\mathcal{B}[S^{-1}]$. Claramente, si $s \in S$, entonces $Q(s)$ es un ismorfismo en $\mathcal{B}[S^{-1}]$ con morfismo inverso la clase de x_s.

Para la propiedad universal, supongamos que $F : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ es un funtor que cumple la propiedad (b) del teorema y construimos un funtor $G : \mathcal{B}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ tal que $F = G \circ Q$. En efecto, definimos $G(X) := F(X)$ para $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{B}[S^{-1}])$, $G(f) := F(f)$ si $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ y $G([x_s]) := F(s)^{-1}$ para $s \in S$. Es fácil verificar que G está bien definido y que es único. $\square$

Definición 2.1.3. Sean $\mathcal{B}$ una categoría arbitaria y Σ una subclase de $\mathrm{Mor}(\mathcal{B})$. Decimos que Σ admite un cálculo de fracciones a izquierda, si se satisface lo siguiente:

(IZ1) Si α, $\beta \in \Sigma$, entonces $\alpha \circ \beta \in \Sigma$ cada vez que esté definida la composición. Además, el morfismo identidad 1_X está en Σ, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

(IZ2) Cada par de morfismos $X' \xleftarrow{\sigma} X \xrightarrow{\alpha} Y$, con $\sigma \in \Sigma$ y $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$, se puede completar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[d, dashed, "\sigma'"] \\ X' \arrow[r, dashed, "\alpha'"'] & Y', \end{tikzcd}$$

donde $\sigma' \in \Sigma$ y $\alpha' \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$.

(IZ3) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(X, Y)$ y existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\alpha \circ \sigma = \beta \circ \sigma$, entonces existe $\tau \in \Sigma$, tal que $\tau \circ \alpha = \tau \circ \beta$.

Decimos que Σ admite un cálculo de fracciones a derecha, si se satisfacen las condiciones duales de (IZ1) a (IZ3).

Definición 2.1.4. Sean $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria. Un sistema multiplicativo (localizante) Σ de $\mathcal{B}$, es una subclase de $\mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ que admite un cálculo de fracciones a izquierda y a derecha. Más aun, se dice que el sistema multiplicativo Σ es saturado, si satisface la propiedad:

(ST) $s \in \Sigma$ si y sólo si existen $g, g' \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ tales que $g \circ s, s \circ g' \in \Sigma$.

En general, usando un sistema multiplicativo Σ podemos caracterizar los morfismos en la categoriá $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$. Para ello necesitamos los siguientes conceptos.

Definición 2.1.5. Sean $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria y S una clase de morfismos en $\mathcal{B}$.

(a) Un S-tejado (a izquierda) (s, f) es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

donde $s \in S$ y $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$. Invirtiendo las flechas se tiene un S-tejado a derecha.

(b) Dos S-tejados a izquierda (s, f) y (t, g) son equivalentes si existe un tercer tejado (r, h) que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & X''' \arrow[u, "r"] \arrow[d, "h"] & Y \\ & X'', \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

y escribiremos $(s, f) \sim (t, g)$. La definición para los tejados a derecha es dual.

Observación. La relación $\sim$ en los tejados es una relación de equivalencia. Una prueba puede leerse en [2] III.2.

Proposición 2.1.6. *Sean $\mathcal{B}$ una categoría cualquiera y Σ un sistema multiplicativo de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ se puede describir como sigue.*

(a) $\mathrm{Obj}(\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]) = \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

(b) *Un morfismo $X \to Y$ en $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ es la clase de equivalencia del tejado (s, f):*

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

El morfismo identidad $1_X : X \to X$ está dado por la clase de $(1_X, 1_X)$.

(c) *La composición de morfismos representados por los tejados (s, f) y (t, g) es la clase de (st', gf') obtenida usando el axioma $(\mathrm{IZ2})^{op}$:*

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, dashed, "t'"'] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "st'"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Demostración. El inciso (a) se sigue de la definición de $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ (cf. prueba de 2.1.1). Es rutina ver que la composición de morfismos dada en (c) está bien definida.

Entonces resta verificar que en efecto podemos ver a las clases de tejados como morfismos en $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$, para eso, sea $\tilde{\mathcal{B}}$ la categoría de Σ-tejados a izquierda: los objetos son $\mathrm{Obj}(\tilde{\mathcal{B}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ y los morfismos están dados por $\mathrm{Mor}(\tilde{\mathcal{B}}) =$

{clases de equivalencia de tejados}, con la composición dada en (c). Luego, lo que tenemos que ver es que $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$, para esto, probamos que $\tilde{\mathcal{B}}$ satisface la propiedad universal requerida.

Primero construimos un funtor $F : \mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}$. En objetos lo definimos como la identidad, y para un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{B}$, $F(f)$ se define como el tejado

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Es claro que si $s \in \Sigma$, entonces $F(s)$ es invertible en $\tilde{\mathcal{B}}$: el morfismo inverso $(F(s))^{-1}$ es la clase de

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X. \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $T : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ un funtor tal que si $s \in \Sigma$, entonces $T(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$. Veamos que existe un único funtor $G : \tilde{B} \to \mathcal{D}$ tal que $T = G \circ F$.

Supongamos que tal G existe, probemos que es único. Dado que $T = G \circ F$ y $F(X) = X$, tenemos que

$$T(X) = G(X), \quad \text{para } X \in \mathrm{Obj}(\tilde{\mathcal{B}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{B}). \tag{2.1}$$

Ahora sea φ un morfismo en $\tilde{\mathcal{B}}$ representado por el tejado (s, f), entonces $\varphi \circ (id, s) = (id, f)$, por lo que $\varphi \circ F(s) = F(f)$, al aplicar G tenemos que $G(\varphi) \circ T(s) = T(f)$, y dado que $T(s)$ es invertible, tenemos que

$$G(\varphi) = T(f) \circ (T(s))^{-1}, \quad \text{para } \varphi = \overline{(s, f)}. \tag{2.2}$$

La ecuaciones (2.1) y (2.2) muestran la unicidad y también la existencia de G. Es fácil ver que $G(\varphi)$ no depende del representante (s, f) de φ y que G es, en efecto, un funtor de $\tilde{B}$ en $\mathcal{D}$ tal que $T = G \circ F$. $\square$

Notación. Dado un sistema multiplicativo Σ, en una categoría $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_\Sigma := \mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ denota la categoría localizante respecto a Σ y

$$Q := Q_\Sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$$

es el funtor de localización.

2.2. Sistemas mutiplicativos en categorías trianguladas

El objetivo de esta sección es definir, en una categoría triangulada $\mathcal{C}$, los sistemas multiplicativos compatibles con la triangulación. Esto será básico para localizar categorías trianguladas. También se verificará que existe una biyección entre la clase de sistemas multiplicativos de $\mathcal{C}$ compatibles con la triangulación y la clase de subcategorías estrictamente plenas trianguladas de $\mathcal{C}$.

Definición 2.2.1. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ un categoría triangulada y Σ un sistema multiplicativo de $\mathcal{C}$. Decimos que Σ es compatible con la triangulación Δ de $\mathcal{C}$, si las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $T\Sigma = \Sigma$, esto es, Σ es estable por T.

(b) Si en el axioma TR3, los morfismos f y g pertenecen a Σ, entonces $h \in \Sigma$.

Notación. Sea $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada. Denotamos por $S_{\mathcal{C}}$ a la clase de subcategorías estrictamente plenas trianguladas de $\mathcal{C}$, y por $M_{\mathcal{C}}$ a la clase de sistemas multiplicativos de $\mathcal{C}$, que son compatibles con la triangulación Δ de $\mathcal{C}$.

Con esta notación, presentamos el siguiente resultado de Verdier.

Teorema 2.2.2. *Sea $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada. Entonces, existe una biyección $\varphi : S_{\mathcal{C}} \to M_{\mathcal{C}}$, dada por*

$$\varphi(\mathcal{C}') := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ \exists\ X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta,\ \textit{con}\ Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')\},$$

con inversa $\psi : M_{\mathcal{C}} \to S_{\mathcal{C}}$, dada por:

$$\psi(\Sigma) := \{Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \ : \ \exists\ X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta,\ \textit{con}\ f \in \Sigma.\}$$

Más aun, $\mathcal{C}'$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{C}$ si y sólo si $\varphi(\mathcal{C}')$ es saturado.

Demostración. Ilustraremos el uso del axioma del octaedro, probando únicamente que Σ satisface (IZ1). La prueba completa puede verse en [12].

Sean $\mathcal{C}'$ en $S_{\mathcal{C}}$, $\Sigma := \varphi(\mathcal{C}')$ y $u, v \in \Sigma$. Luego, por el axioma del octaedro tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "v \circ u"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & TX \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & TY \arrow[d] \\
 & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ'.
\end{tikzcd}$$

Dado que $Z', X' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, pues $u, v \in \Sigma$, y $Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \to TZ' \in \Delta$, tenemos que Y' es isomorfo a un objeto Y'' de $\mathcal{C}'$, ya que $\mathcal{C}'$ es cerrada por extensiones. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v\circ u"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "v\circ u"] & Z \arrow[r, "\gamma\circ\alpha"] & Y'' \arrow[r, "\beta\circ\gamma^{-1}"] & TX. \end{tikzcd}$$

El triángulo de arriba está en Δ, y el de abajo es un triángulo por el axioma TR1 (a). Por lo tanto, $v \circ u \in \Sigma$. $\square$

Notación. Dadas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ subcategorías trianguladas estrictamente plenas de $\mathcal{C}$, denotamos por $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ a $\varphi|_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, es decir, $\Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \ : \ \exists\ X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta|_{\mathcal{A}},\ \text{con } Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})\}$.

Los siguientes conceptos servirán para caracterizar a algunos sistemas multiplicativos de una categoría triangulada compatibles con la triangulación, cuando se tiene un funtor triangulado, esto se estudiará en 2.2.4.

Definición 2.2.3. Para un funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías aditivas, se definen las siguientes clases de objetos y morfismos.

(a) $\Sigma(F) := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ F(f) \text{ es invertible en } \mathcal{D}\}$.

(b) $\mathrm{Ker}(F)$ es la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ con objetos $\mathrm{Obj}(\mathrm{Ker}(F)) := \{X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \ : \ F(X) \simeq 0\}$.

Proposición 2.2.4. *Sea $(F, \theta) : (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1) \to (\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$ un funtor triangulado. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Ker}(F)$ *es una subcategoría triangulada gruesa estrictamente plena de $\mathcal{C}_1$.*

(b) $\Sigma(F)$ *es un sistema multiplicativo, compatible con Δ_1, saturado en $\mathcal{C}_1$.*

(c) $\varphi(\mathrm{Ker}(F)) = \Sigma(F)$, *donde φ está definido en 2.2.2.*

Demostración. (a) Dado que $\theta : FT_1 \to T_2F$ es un isomorfismo natural, tenemos las siguientes equivalencias: $FX \simeq 0 \Leftrightarrow T_2FX \simeq 0 \Leftrightarrow FT_1X \simeq 0$.

Veamos que $\mathrm{Ker}(F)$ es cerrada por extensiones. En efecto, consideremos $X \to Y \to Z \to T_1X \in \Delta_1$, con $FX \simeq 0$ y $FZ \simeq 0$. Al aplicar F al triángulo anterior, se tiene que $0 \to FY \to 0 \to 0 \in \Delta_2$; y por 1.3.5, concluimos que $FY \simeq 0$. Por lo tanto, $Y \in \mathrm{Ker}(F)$.

(c) Tenemos que $\varphi(\mathrm{Ker}(F)) = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_1) \ : \ \exists\ X \to Y \to Z \to T_1X \in \Delta_1,\ \text{con } FZ \simeq 0\}$. De 1.3.5, tenemos que $\varphi(\mathrm{Ker}(F)) \subseteq \Sigma(F)$. Veamos que $\Sigma(F) \subseteq \varphi(\mathrm{Ker}(F))$.

Sea $f \in \Sigma(F)$, i. e. $F(f)$ es invertible en $\mathcal{C}_2$. Por TR1 (b), existe $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T_1X \in \Delta_1$. Como $F(f)$ es invertible, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}_2$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, equal] & FY \arrow[r] \arrow[d, equal] & FZ \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\eta"] & T_2FX \arrow[d, equal] \\ FX \arrow[r, "F(f)"] & FY \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & T_2FX, \end{tikzcd}$$

y por el axioma TR3 y 1.3.4, existe η invertible, por lo que $FZ \simeq 0$. Por lo tanto, $f \in \varphi(\operatorname{Ker}(F))$.

(b) es consecuencia de (c) y 2.2.2. □

Trabajando con funtores cohomológicos también se puede caracterizar un sistema multiplicativo, compatible con la triangulación.

Definición 2.2.5. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un funtor cohomológico. Se define lo siguiente.

(a) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \Sigma(F^i) := \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ FT^i(f) \text{ es invertible } \forall i \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(F^i)$ es la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son

$$\operatorname{Obj}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(F^i)\right) := \{X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}) \ : \ FT^i(X) = 0, \ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposición 2.2.6. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un funtor cohomológico. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(F^i)$ *es una subcategoría triangulada gruesa estrictamente plena de $\mathcal{C}$.*

(b) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \Sigma(F^i)$ *es un sistema multiplicativo, compatible con Δ, saturado en $\mathcal{C}$.*

(c) $\varphi\left(\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(F^i)\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \Sigma(F^i)$*, donde φ se definió en 2.2.2.*

Demostración. Es análoga a 2.2.4 □

2.3. Localización de categorías trianguladas

Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y Σ un sistema multiplicativo compatible con Δ. Usando que $T\Sigma = \Sigma$ y la propiedad universal del funtor de localización $Q = Q_\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ (cf. 2.1.1), tenemos que existe un único funtor $T_\Sigma : \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \to \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, dado por $T_\Sigma\overline{(s,f)} := Q(T(f))Q(T(s))^{-1}$ (cf. prueba de 2.1.6), que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \arrow[d, dashed, "T_\Sigma"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "Q"'] & \mathcal{C}(\Sigma^{-1}). \end{tikzcd}$$

Además, T_Σ resulta ser un funtor de traslación, es decir, una autoequivalencia.

Definición 2.3.1. Sean $\mathcal{T}_\Sigma$ la categoría de triángulos asociada al par $(\mathcal{C}(\Sigma^{-1}), T_\Sigma)$ y $\Delta_\Sigma := \{\eta \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}_\Sigma) \ : \ \exists \mu \in \Delta$ y $\eta \simeq Q(\mu)$ en $\mathcal{T}_\Sigma\}$. Se define también $\hat{\Sigma} := \Sigma(Q) := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ Q(f)$ es invertible $\}$.

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado central en la teoría de localización de categorías trianguladas.

Teorema 2.3.2. *Sea $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y Σ un sistema multiplicativo compatible con Δ. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $(\mathcal{C}(\Sigma^{-1}), T_\Sigma, \Delta_\Sigma)$ *es una categoría triangulada.*

(b) $(Q, 1) : (\mathcal{C}, T, \Delta) \to (\mathcal{C}(\Sigma^{-1}), T_\Sigma, \Delta_\Sigma)$ *es un funtor triangulado.*

(c) *Todo funtor triangulado (resp. cohomológico) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ en una categoría triangulada (resp. abeliana) $\mathcal{C}'$, tal que $\Sigma \subseteq \Sigma(F)$, se factoriza de una única manera por $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ y un funtor triangulado (resp. cohomológico) $G : \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \to \mathcal{C}'$.*

(d) $\hat{\Sigma}$ *es el menor sistema (compatible con Δ) multiplicativo saturado de $\mathcal{C}$ que contiene a Σ.*

Demostración. Cf. [12] p. 121. □

Observación. Sea $\alpha = \overline{(s, f)} \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}])$, con $s \in \Sigma$. Entonces, α es invertible si y sólo si $f \in \hat{\Sigma}$. En efecto, si $\alpha = Q(f)Q(s)^{-1}$, entonces α es invertible si y sólo si $Q(f)$ es invertible, i. e. $f \in \hat{\Sigma}$.

Existe una estrecha relación entre localización y cocientes en el contexto de categorías trianguladas. Veamos como sucede.

Definición 2.3.3. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $\mathcal{B}$ una subcategoría triangulada estrictamente plena de $\mathcal{C}$ y $\Sigma(\mathcal{B}) := \Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ el sistema multiplicativo asociado a $\mathcal{B}$. Se define $\mathcal{C}/\mathcal{B} := \mathcal{C}(\Sigma[\mathcal{B}]^{-1})$ y se dirá que $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ es la categoría cociente de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{B}$. El funtor canónico $Q_\mathcal{B} := Q_{\Sigma(\mathcal{B})} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B} := \mathcal{C}(\Sigma[\mathcal{B}]^{-1})$ será llamado funtor de paso al cociente.

Teorema 2.3.4. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, $\mathcal{B}$ una subcategoría triangulada gruesa estrictamente plena de $\mathcal{C}$ y $Q_\mathcal{B} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ el funtor canónico. Entonces, se satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Ker}(Q_\mathcal{B})$ *es la subcategoría triangulada gruesa estrictamente plena más pequeña de $\mathcal{C}$ que contiene a $\mathcal{B}$.*

(b) *Todo funtor triangulado (resp. cohomológico) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ en una categoría triangulada (resp. abeliana) $\mathcal{C}'$, tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Ker}(F)$, se factoriza de una única manera por $Q_\mathcal{B} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ y un funtor triangulado (resp. cohomológico) $G : \mathcal{C}/\mathcal{B} \to \mathcal{C}'$.*

Demostración. (a) Veamos primero que $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker}(Q_{\mathcal{B}})$.

En efecto, recordamos que $\mathcal{C}/\mathcal{B} = \mathcal{C}(\Sigma[\mathcal{B}]^{-1})$, $\Sigma(\mathcal{B}) = \{f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ \exists\, X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX \in \Delta$ con $Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})\}$. Ahora, sea $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$. Luego por TR1 y TR2, $0 \xrightarrow{0} B \xrightarrow{1} B \to 0$ está en Δ, por lo que $0 \in \Sigma(\mathcal{B})$. Entonces $0 = Q(0)$ es invertible en $\mathcal{C}/\mathcal{B}$. Por lo tanto, dado que $0 \xrightarrow{Q(0)=0} QB \xrightarrow{1} QB \to 0$ es un triángulo distinguido en $\mathcal{C}/\mathcal{B}$, concluimos, de 1.3.5, que $QB \simeq 0$.

Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría triangulada gruesa estrictamente plena de $\mathcal{C}$ que contenga a $\mathcal{B}$. Veamos que $\operatorname{Ker}(Q_{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{A}$. Para ello, sea $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $QX \simeq 0$. Probaremos que $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$.

En efecto, $QX \simeq 0$ implica que $Q(1_x) = 0$, por lo que existe $s \in \Sigma(\mathcal{B})$ tal que $s1_X = 0$. Por lo tanto, existe $X \xrightarrow{s=0} Y \to Z \to TX$ en Δ, con $Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$, y por TR2 tenemos que $T^{-1}Y \to T^{-1}Z \to X \xrightarrow{0} Y$ está en Δ. Por 1.3.8, $T^{-1}Y \oplus X \simeq T^{-1}Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ y como $T^{-1}Y \oplus X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$, pues $\mathcal{A}$ es estrictamente plena y como $T^{-1}Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B}) \subseteq \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ es isomorfo a un objeto de $\mathcal{A}$, concluimos que $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$, ya que $\mathcal{A}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{C}$.

(b) Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor triangulado tal que $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker}(F)$. Aplicando 2.3.2 (c), basta verificar que $\Sigma(\mathcal{B}) \subseteq \Sigma(F)$.

En efecto, sea $f \in \Sigma(\mathcal{B})$, entonces $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX$ está en Δ, donde $Z \in \mathcal{B}$, por lo que $FX \xrightarrow{F(f)} FY \to FZ \to T'F(X)$ está en Δ' y $FZ \simeq 0$, pues $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker}(F)$. Luego, por 1.3.5, tenemos que $F(f)$ es invertible en $\mathcal{C}'$, y por ende $f \in \Sigma(F)$. $\square$

2.4. Subcategorías trianguladas localizantes

Los siguientes conceptos son esenciales para entender las definiciones de las categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ en el siguiente capítulo.

Definición 2.4.1. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ subcategorías trianguladas estrictamente plenas de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a derecha si todo morfismo $B \to X$, con $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ y $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$, admite una factoriazación $B \to B' \to X$, con $B' \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Sean $Q_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $Q_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ los funtores canónicos. Por 2.3.4 sabemos que existe un único funtor triangulado $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Q_1"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "Q_2"] \\
\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{C}/\mathcal{B},
\end{tikzcd}$$

donde $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ es el funtor inclusión.

El siguiente resultado permitirá definir un reticulado de categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ (cf. 3.6.1). Con él, se probará que la composición de los funtores canónicos

$$\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) \xrightarrow{i} \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}^+(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$$

es una equivalencia de categorías trianguladas si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos (cf 3.9.7).

Proposición 2.4.2. *Sean $\Sigma_\mathcal{C}(\mathcal{B})$ y $\Sigma_\mathcal{A}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$ los sistemas multiplicativos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$, asociados respectivamente a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\Sigma_\mathcal{A}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = \Sigma_\mathcal{C} \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$.

(b) *$\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a derecha si y sólo si para todo morfismo $s : X \to X'$, con $s \in \Sigma$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, existe $t : X' \to X''$ tal que $ts \in \Sigma_\mathcal{A}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$.)*

(c) *Si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a derecha, entonces $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ es fiel y pleno.*

Demostración. Sea $s : X \to X'$, con $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ y $s \in \Sigma_\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Luego existe un triángulo (X, X', Z, s, s', f) en Δ, tal que $Z \in \mathcal{B}$ y $TX \in \mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ una subcategoría $\mathcal{B}$-localizante a derecha, existe una factorización $Z \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{h} TX$ de f, con $B' \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Por TR1 (b) y TR2, podemos completar a h a un triángulo en $\Delta|_\mathcal{A}$ de la forma (X, X'', B', r, u, h), y por TR3, existe un morfismo $t : X' \to X''$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, dashed, "t"] & Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "r"] & X'' \arrow[r, "u"] & B' \arrow[r, "h"] & TX,
\end{tikzcd}$$

por lo que $r = ts \in \Sigma_\mathcal{A}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$.

Veamos el recíproco. Sea $f : B \to X$ un morfismo con $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$. Por TR1 (b), completamos f a un triángulo de la forma (B, X, Z, f, s, v), dado que $TB \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, por TR2, concluimos que $s \in \Sigma_\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Por hipótesis, existe $t : Z \to X''$ tal que $ts \in \Sigma_\mathcal{A}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$, esto es, tenemos un triángulo en $\Delta|_\mathcal{A}$ de la forma (X, X'', W, ts, u, w) donde $X'' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Por TR2, el triángulo $(T^{-1}W, X, X'', -Tw, ts, u)$ está en $\Delta|_\mathcal{A}$. De 1.3.2, tenemos que $sf = 0$, de donde se sigue que $(ts)f = 0$. Finalmente, por 1.3.9, existe $\alpha : B \to T^{-1}W$ tal que $-Tw \circ \alpha = f$, véase el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "f"] & & \\
T^{-1}W \arrow[r, "-Tw"'] & X \arrow[r, "ts"'] & X'' \arrow[r, "u"'] & W.
\end{tikzcd}$$

(c) Supongamos que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a derecha. Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Entonces $\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\theta X, \theta Y)$, se define como sigue: sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X,Y)$, i. e. $\alpha = \overline{(f,s)}$ es la clase del tejado:

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y, \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$; entonces $\theta(\alpha) = Q_2(s)^{-1} \circ Q_2(f)$.

Veamos que θ es inyectiva. Supongamos que $\theta(\alpha) = 0$. Entonces $Q_2(f) = 0$, por lo que existe $u : Z \to Z'$ en $\Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, con $uf = 0$; por el inciso (b), existe $t : Z' \to Z''$ tal que $tu \in \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Por lo tanto, $(f,s) \sim (tuf, tus) = (0, tus)$, ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "tu"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "tuf"'] \arrow[dr, "tuf"'] & Z'' \arrow[d, equal] & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "tus"] \arrow[dl, "tus"] \\
& Z'', &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\alpha = \overline{(0, tus)} = 0$.

Veamos que θ es suprayectiva. Sea $\beta = \overline{(g,s)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(\theta X, \theta Y)$, esto es, β es la clase del tejado:

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y, \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

donde $s \in \Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. Por (b), existe $t : Z \to Z'$ tal que $ts \in \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) \subseteq \Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. Por lo tanto, $(g,s) \sim (tg, ts)$ ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "t"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "tg"'] \arrow[dr, "tg"'] & Z' \arrow[d, equal] & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "ts"] \arrow[dl, "ts"] \\
& Z'. &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\beta = \overline{(tg, ts)} = Q_2(ts)^{-1} \circ Q_2(tg)$. Finalmente, escribiendo $\alpha = \overline{(tg, ts)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(X,Y)$, tenemos que $\theta(\alpha) = Q_2(ts)^{-1} \circ Q_2(tg) = \beta$. $\square$

Definición 2.4.3. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ subcategorías trianguladas estrictamente plenas de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a izquierda si $\mathcal{A}^{op}$ es $\mathcal{B}^{op}$-localizante a derecha.

Observación. Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, y $\mathcal{B}$ una subcategoría triangulada estrictamente plena de $\mathcal{C}$. Entonces se tiene lo siguiente.

(a) $\Sigma_{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{B}^{op}) = (\Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}))^{op}$. Esto se sigue del axioma TR2, ya que $\Sigma_{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{B}^{op}) = \{f^{op} \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op}) \ : \ \exists\, X \overset{f^{op}}{\to} Y \overset{g^{op}}{\to} Z \overset{w^{op}}{\to} \tilde{T}Y \in \tilde{\Delta},\ \text{con } Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})\}$, luego $f^{op} \in \Sigma_{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{B}^{op})$ si y sólo si $Y \overset{f}{\to} X \overset{-Tw}{\to} TZ \overset{-Tg}{\to} TY \in \Delta$.

(b) Dado un sistema multiplicativo Σ de $\mathcal{C}$, se tiene un isomorfismo canónico $\mathcal{C}^{op}[(\Sigma^{op})^{-1}] \overset{\sim}{\to} (\mathcal{C}[\Sigma^{-1}])^{op}$. En efecto, $Q_{\Sigma}^{op} : \mathcal{C}^{op} \to (\mathcal{C}[\Sigma^{-1}])^{op}$ es solución al problema universal de $\mathcal{C}^{op}[(\Sigma^{op})^{-1}]$, donde $Q_{\mathcal{C}}^{op}(f) := (Q_{\Sigma}(f))^{op}$.

Luego, de (a) y (b) tenemos la proposición dual.

Proposición 2.4.4. *Sean $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada, y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ subcategorías trianguladas estrictamente plenas de $\mathcal{C}$.*

(a) *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

  (i) *$\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a izquierda.*

  (ii) *Todo morfismo $B \longleftarrow X$, con $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, admite una factorización $B \longleftarrow B' \longleftarrow X$, con $B' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.*

  (iii) *Para todo morfismo $X \overset{s}{\longleftarrow} X'$ con $s \in \Sigma_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ existe $X' \overset{t}{\longleftarrow} X''$ tal que $st \in \Sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.*

(b) *Si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}$-localizante a izquierda, entonces $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$ es fiel y pleno.*

Capítulo 3

La categoría derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$

Cualquier proposición formulada en el lenguaje de las categoría derivadas da lugar a afirmaciones formuladas en lenguajes más tradicionales como el de la cohomología de grupos, filtraciones, sucesiones espectrales, etcétera, que por supuesto, se pueden probar, frecuentemente, sin mencionar explícitamente las categorías derivadas, por lo que uno se pregunta ¿por qué debemos esforzarnos en usar este lenguaje más abstracto? La respuesta, según B. Keller [7], radica en que la simplicidad del fenómeno, escondido por la notación del lenguaje antiguo, se vuelve claro en el nuevo. Empecemos con las definiciones.

3.1. La categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$

La conceptos básicos de complejos, categoría homotópica de complejos, funtor de cohomología, cuasi-isomorfismos y complejos acíclicos son definidos a continuación.

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Definimos lo siguiente.

(a) Un $\mathcal{C}$-objeto graduado es una sucesión $X^\bullet = \{X^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde cada X^i es un objeto de $\mathcal{C}$, al cual llamamos componente de grado i.

(b) Dado dos $\mathcal{C}$-objetos graduado $X^\bullet$ y $Y^\bullet$, un morfismo graduado de grado p de $X^\bullet$ a $Y^\bullet$ es de la forma $u = \{u^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, Y^{i+p})\}_{i\in\mathbb{Z}}$. A la clase de todos los morfismos graduados de grado p de $X^\bullet$ a $Y^\bullet$ la denotamos por $\mathrm{Hom}^p(X^\bullet, Y^\bullet)$.

La composición de morfismos graduados está dada como sigue:

$$\mathrm{Hom}^p(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathrm{Hom}^q(Y^\bullet, Z^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{p+q}(X^\bullet, Z^\bullet)$$

con regla de correspondencia $(u, v) \mapsto vu$, donde $(vu)^i$ es la composición $X^i \xrightarrow{u^i} Y^{i+p} \xrightarrow{v^{i+p}} Z^{i+p+q}$.

(c) Un complejo de objetos de $\mathcal{C}$ es un par $(X^\bullet, d_{X^\bullet})$, donde $X^\bullet$ es un $\mathcal{C}$-objeto graduado y $d_{X^\bullet} \in \mathrm{Hom}^1(X^\bullet, X^\bullet)$ es tal que $d^2_{X^\bullet} = 0$. Por lo que un complejo es de la forma: $\cdots \to X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}_{X^\bullet}} X^0 \xrightarrow{d^0_{X^\bullet}} X^1 \xrightarrow{d^1_{X^\bullet}} X^2 \to \cdots$. A los morfismos $d^i_{X^\bullet}$ se les llama diferenciales.

Definición 3.1.2. Denotamos por $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ a la categoría de complejos de $\mathcal{C}$, cuyos objetos son los complejos $(X^\bullet, d_{X^\bullet})$ en $\mathcal{C}$, y los morfismos $(X^\bullet, d_{X^\bullet}) \to (Y^\bullet, d_{Y^\bullet})$ son los morfismos $u \in \mathrm{Hom}^0(X^\bullet, Y^\bullet)$ tales que $d_{Y^\bullet} \circ u = u \circ d_{X^\bullet}$.

Notación. Para simplificar, escribiremos $X^\bullet$ en lugar de $(X^\bullet, d_{X^\bullet})$.

Observación. (i) La categoría $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ es aditiva. Más aun, si $\mathcal{C}$ es abeliana, entonces $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ es abeliana.

(ii) El funtor $c_0 : \mathcal{C} \to \mathbf{C}(\mathcal{C})$, dado por $X \mapsto c_0(X)^\bullet : \cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots$, donde X está en grado 0, es aditivo, fiel y pleno.

Definición 3.1.3. Sean $f, g : X^\bullet \to Y^\bullet$ dos morfismos en $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Decimos que f es homotópico a g, si existe $k \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $f - g = k\, d_{X^\bullet} + d_{Y^\bullet}\, k$, y lo denotaremos por $f \sim g$.

Ahora, definiremos la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{C}.)$ Para ello, sea $\mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet) := \{f : X^\bullet \to Y^\bullet \text{ en } \mathbf{C}(\mathcal{C}) \ : \ f \sim 0\}$. Entonces, $\mathcal{H}$ es un ideal en $\mathbf{C}(\mathcal{C})$, es decir, satisface lo siguiente:

(i) $\mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$ es un subgrupo de $\mathbf{C}(\mathcal{C})(X^\bullet, Y^\bullet)$ para cualesquiera $X^\bullet, Y^\bullet$.

(ii) Si los morfismos $W^\bullet \xrightarrow{h} X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet$ están en $\mathbf{C}(\mathcal{C})$, donde $f \in \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$, entonces $gf \in \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Definición 3.1.4. La categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{C}) := \mathbf{C}(\mathcal{C})/\mathcal{H}$ consta de lo siguiente.

(a) Los objetos son $\mathrm{Obj}(\mathbf{K}(\mathcal{C})) := \mathrm{Obj}(\mathbf{C}(\mathcal{C}))$.

(b) Los mofismos son $\mathbf{K}(\mathcal{C})(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathbf{C}(\mathcal{C})(X^\bullet, Y^\bullet) \,/\, \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Observación. (a) El funtor canónico $q : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathbf{K}(\mathcal{C})$, definido como la identidad en objetos y $q(f) := f + \mathcal{H}(X^\bullet, Y^\bullet)$ para un morfismo $f : X^\bullet \to Y^\bullet$, es aditivo y pleno. Más aun, resuelve el siguiente problema universal (cf. 2.1.1): para todo funtor $F : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}'$, con $\mathcal{C}'$ una categoría aditiva, y con la propiedad de que si $f \sim 0$, entonces $F(f) = 0$ (i. e. $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Ker}(q)$), existe un único funtor $\tilde{F} : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}'$ tal que $\tilde{F} \circ q = F$, esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(\mathcal{C}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathcal{C}' \\ & \mathbf{K}(\mathcal{C}). \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

(b) La categoría $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ es aditiva (cf. [2] Lemma III.1.2). En general, $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ no es abeliana, aunque $\mathcal{C}$ lo sea.

Definición 3.1.5. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ se define un funtor aditivo $H^i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, llamado funtor de cohomología, como sigue.

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[d, "f"'] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \mapsto & H^i(X^\bullet) \arrow[d, "H^i(f)"] \\ Y^\bullet & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} & & H^i(Y^\bullet), \end{tikzcd}$$

donde $H^i(X^\bullet) := \operatorname{Ker}(d_X^i) \,/\, \operatorname{Im}(d_X^{i-1})$ y $H^i(f)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Im}(d_X^{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f^i|_{\operatorname{Im}(d_X^{i-1})}"] & \operatorname{Ker}(d_X^i) \arrow[r] \arrow[d, "f^i|_{\operatorname{Ker}(d_X^i)}"] & H^i(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "H^i(f)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Im}(d_Y^{i-1}) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_Y^i) \arrow[r] & H^i(Y^\bullet) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definición 3.1.6. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

(a) Se dice que un morfismo $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es un cuasi-isomorfismo, si $H^i(f)$ es invertible para toda $i \in \mathbb{Z}$.

(b) Un complejo $X^\bullet$ es acíclico si $H^i(X^\bullet) \simeq 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Observación. El funtor H^i se puede extender a $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, y dicha extensión $\tilde{H}^i$, será denotada también por H^i, esto es, $\tilde{H}^i := H^i : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. En efecto, sea $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ tal que $f \sim 0$. Es suficiente ver que $H^i(f) = 0$, lo cual es cierto, pues si $f^i = k^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}k^i$, entonces $H^i(f)(x + \operatorname{Im}(d_X^{i-1})) = f^i(x) + \operatorname{Im}(d_Y^{i-1}) = d_Y^{i-1}(k^i(x)) + \operatorname{Im}(d_Y^{i-1}) = 0$.

3.2. Triángulos distinguidos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$

Se definen los términos cono y cilindro de un morfismo de complejos, con los cuales se precisarán los triángulos distinguidos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, mismos que proveerán de una estructura triangulada a la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Definición 3.2.1. Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, $X^\bullet \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ y $n \in \mathbb{Z}$. Se define un nuevo complejo $X^\bullet[n]$ como sigue: $X^i[n] := X^{i+n}$ con diferenciales $d_{X^\bullet[n]} := (-1)^n d_{X^\bullet}$. Dado $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, el morfismo $f[n] : X^\bullet[1] \to Y^\bullet[1]$ está dado por $f^i[n] := f^{i+n}$. Luego, tenemos un funtor $T := [\ ] : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}(\mathcal{A})$ de traslación, esto es, T es una autoequivalencia aditiva de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$.

Definición 3.2.2. Dado un morfismo $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ se definen los siguientes dos complejos asociados a f.

(a) **Cono de** f: $\mathrm{C}(f)^i := X^i[1] \oplus Y^i$, esto es $\mathrm{C}(f) := X^\bullet[1] \oplus Y^\bullet$ como objetos graduados. Las diferenciales están dadas por $d^i_{\mathrm{C}(f)}(x^{i+1}, y^i) = (-d^{i+1}_X(x^{i+1}), f^{i+1}(x^{i+1}) + d^i_Y(y^i))$, o en su forma matricial:

$$d_{\mathrm{C}(f)} := \begin{pmatrix} d_{X^\bullet[1]} & 0 \\ f^\bullet[1] & d_{Y^\bullet} \end{pmatrix}.$$

(b) **Cilindro de** f: $\mathrm{Cyl}(f) := X^\bullet \oplus \mathrm{C}(f)$. Las diferenciales están dadas por $d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(x^i, x^{i+1}, y^i) = (d^i_X(x^i) - x^{i+1}, -d^{i+1}_X(x^{i+1}), f^{i+1}(x^{i+1}) + d^i_Y(y^i))$, o en su forma matricial:

$$d_{\mathrm{Cyl}(F)} := \begin{pmatrix} d_{X^\bullet[1]} & -1 & 0 \\ 0 & d_{X^\bullet[1]} & 0 \\ 0 & f^\bullet[1] & d_{Y^\bullet} \end{pmatrix}.$$

Ahora veamos algunas propiedades de los complejos cono y cilindro.

Lema 3.2.3. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces para todo morfismo $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ existe un diagrama conmutativo con filas exactas de la forma:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r, "\overline{P}_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{C}(f) \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, equal] & X^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{C}(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet, & & &
\end{tikzcd}$$

tal que:

(a) $\beta\alpha = 1_{Y^\bullet}$ *y* $\alpha\beta \sim 1_{\mathrm{Cyl}(f)}$,

(b) $\overline{P}_1\beta \sim P_1$.

Demostración. Definimos los morfismos del diagrama en el lema como sigue: $\overline{P}_1(y^i) = (0, y^i)$, $P_1(x^i, x^{i+1}, y^i) = (x^{i+1}, y^i)$, $P_2(x^{i+1}, y^i) = x^{i+1}$, $\overline{f}(x^i) = (x^i, 0, 0)$, $\alpha(y^i) = (0, 0, y^i)$, $\beta(x^i, x^{i+1}, y^i) = f(x^i) + y^i$, o en su forma matricial:

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^\bullet[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1_{X^\bullet[1]} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} 1_{X^\bullet} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} f & 0 & 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $\beta\alpha = 1_{Y^\bullet}$. Para la homotopía entre $\alpha\beta$ y $1_{\mathrm{Cyl}(f)}$, definimos $h^i : \mathrm{Cyl}(f)^i \to \mathrm{Cyl}(f)^{i-1}$ como $h^i(x^i, x^{i+1}, y^i) := (0, x^i, 0)$.

La homotopía entre P_1 y $\overline{P}_1\beta$, está definida por $s^i : \mathrm{Cyl}(f)^i \to \mathrm{Cyl}(f)^{i-1}$, $s^i(x^i, x^{i+1}, y^i) = (x^i, 0)$, por lo que $P_1^i - \overline{P}_1^i\beta^i = s^{i+1}d^{i+1}_{\mathrm{Cyl}(f)} + d^{i-1}_{\mathrm{C}(f)}s^i$. □

Definición 3.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Los triángulos distinguidos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ son diagramas de la forma $X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{\overline{P}_1} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{P_2} X^\bullet[1]$, donde $\overline{P}_1$ y P_2 son los morfismos de 3.2.3.

Resaltamos que los triángulos distinguidos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ no inducen una estructura de categoría triangulada en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, pero sí en la categoría homotópica de complejos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

El siguiente resultado establece que el funtor de cohomología es, en efecto, un funtor cohomológico en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, en el sentido de 1.3.1.

Lema 3.2.5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, para el triángulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{\overline{P}_1} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{P_2} X^\bullet[1]$, se tiene la siguiente sucesión exacta larga en $\mathcal{A}$:*

$$\cdots \to H^n(X^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(\overline{P}_1)} H^n(\mathrm{C}(f)) \xrightarrow{H^n(P_2)} H^{n+1}(X^\bullet) \to \cdots .$$

Demostración. Por 3.2.3, tenemos la sucesión exacta corta $0 \to Y^\bullet \xrightarrow{\overline{P}_1} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{P_2} X^\bullet[1] \to 0$, la cual induce la sucesión exacta larga:

$$\cdots \to H^n(Y^\bullet) \xrightarrow{H^n(\overline{P}_1)} H^n(\mathrm{C}(f)) \xrightarrow{H^n(P_2)} H^n(X^\bullet[1]) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(Y^\bullet) \to \cdots ,$$

dado que $H^n(X^\bullet[1]) = H^{n+1}(X^\bullet)$, basta ver que $\delta^n = H^{n+1}(f)$.

En efecto, sea $\overline{x}^{\,n+1} = x^{n+1} + \mathrm{Im}(d^n_X) \in H^n(X^\bullet[1])$, $x^{n+1} \in \mathrm{Ker}(d^{n+1}_X)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \delta^n(\overline{x}^{\,n+1}) &= (\overline{P}_1^{\,n+1})^{-1}(d^n_{\mathrm{C}(f)}(P_2^n)^{-1}(x^{n+1})) + \mathrm{Im}(d^n_Y) \\ &= f(x^{n+1}) + \mathrm{Im}(d^n_Y), \end{aligned}$$

ya que $(x^{n+1}, 0) \in (P_2^n)^{-1}(x^{n+1})$, y $\overline{P}_1^{\,n+1} \circ d^n_{\mathrm{C}(f)}(x^{n+1}, 0) = \overline{P}_1^{\,n+1}(0, f(x^{n+1})) = f(x^{n+1})$, pues x^{n+1} es un cociclo. Por lo tanto, $\delta^n(\overline{x}^{\,n+1}) = H^n(f)(\overline{x}^{\,n+1})$. □

3.3. Triángulos distinguidos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$

En esta sección extendemos algunas las definiciones de la sección 3.2, a la categoría homotópica de complejos, y con esto verificar que $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es triangulada.

Proposición 3.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, el funtor de traslación $T = [\ ] : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}(\mathcal{A})$ se extiende a $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sean $q : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{A})$ el funtor canónico y $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}(\mathcal{A}))$ tal que $f \sim 0$. Entonces, $Tf \sim 0$ y $qTf \sim 0$. Luego, por propiedad universal, existe un único funtor $\tilde{T}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{K}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\tilde{T}"] \\ \mathbf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "q"'] & \mathbf{K}(\mathcal{A}) \end{tikzcd} .$$

De esta manera, T induce un funtor de traslación $\tilde{T} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{A})$. □

Notación. Designaremos por la misma letra T al funtor inducido por el funtor de traslación T en la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, esto es, $T := \tilde{T} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Definición 3.3.2. Un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es un triángulo isomorfo a uno de la forma $X^\bullet \overset{q(f)}{\to} Y^\bullet \overset{q(\overline{P}_1)}{\to} \mathrm{C}(f) \overset{q(P_2)}{\to} X^\bullet[1]$. Denotaremos por Δ a la familia de triángulos distinguidos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Teorema 3.3.3. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *La terna $(\mathbf{K}(\mathcal{A}), T = [-], \Delta)$ es una categoría triangulada.*

(b) *El funtor cohomológico en grado cero $H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, es un funtor cohomológico (en el sentido de 1.3.1).*

Demostración. (a) Una prueba puede ser consultada en [1].

(b) Es fácil verificar que $H^0 \circ T^i$ es el funtor cohomología en grado i. Luego, por 3.2.5, tenemos el resultado. □

Observación 3.3.4. Dado un morfismo $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, el triángulo $X^\bullet \xrightarrow{q(\overline{f})} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{q(P_1)} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{q(P_1)} X^\bullet[1]$ es distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Esto se sigue de que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "f"] & Y^\bullet \arrow[r, "\overline{P_1}"] & \mathrm{C}(f) \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X^\bullet \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "P_1"'] \arrow[u, "\beta"'] & \mathrm{C}(f) \arrow[r, "P_2"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

y β es invertible en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, cf. 3.2.3.

3.4. Subcategorías trianguladas en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$

Con el fin de definir las categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$, para $* \in \{b, +, -, \emptyset\}$, se distinguen las siguientes subcategorías en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$.

Definición 3.4.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Definimos las siguientes subcategorías plenas de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$:

(a) $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}) := \{X^\bullet \in \mathbf{C}(\mathcal{A}) \ : \ \exists\, n_0 = n_0(X^\bullet) > 0 \text{ tal que } X^i = 0\ \forall\, i,\ |i| > n_0\}$.

(b) $\mathbf{C}^+(\mathcal{A}) := \{X^\bullet \in \mathbf{C}(\mathcal{A}) \ : \ \exists\, n_0 = n_0(X^\bullet) \text{ tal que } X^i = 0\ \forall\, i < n_0\}$.

(c) $\mathbf{C}^-(\mathcal{A}) := \{X^\bullet \in \mathbf{C}(\mathcal{A}) \ : \ \exists\, n_0 = n_0(X^\bullet) \text{ tal que } X^i = 0\ \forall\, i > n_0\}$.

(d) $\mathbf{C}^\emptyset(\mathcal{A}) := \mathbf{C}(\mathcal{A})$.

Sea $* \in \{b, +, -, \emptyset\}$. Denotamos por $\mathbf{C}^{*,b}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{C}^{*,+}(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{C}^{*,-}(\mathcal{A})$) a la subcategoría plena de $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ definida por los objetos $X^\bullet \in \mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ para los cuales existe $n_0 = n_0(X^\bullet)$ con $H^i(X^\bullet) = 0$ para $|i| > |n_0|$ (resp. $i < n_0$, resp. $i > n_0$).

Se definen las subategorías plenas de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ denotadas por $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$, $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$ y $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, obtenidas de los objetos de $\mathbf{C}^b(\mathcal{A}), \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ y $\mathbf{C}^-(\mathcal{A})$ respectivamente. Análogamente se designa por $\mathbf{K}^{*,b}(\mathcal{A}), \mathbf{K}^{*,+}(\mathcal{A}), \mathbf{K}^{*,-}(\mathcal{A})$ a las subategorías plenas de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ definidas por los objetos de $\mathbf{C}^{*,b}(\mathcal{A}), \mathbf{C}^{*,+}(\mathcal{A}), \mathbf{C}^{*,-}(\mathcal{A})$ respectivamente.

Designamos por $\mathrm{Ac}^*(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ definida por los complejos acíclicos de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ y por $\mathrm{Qis}^*(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ definida por los cuasi-isomorfismos de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$.

Lema 3.4.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *El siguiente diagrama es un reticulado de subcategorías trianguladas, inducido por la inclusión:*

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & & \\
 & \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & \\
\mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}^{\emptyset,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}(\mathcal{A}). \\
 & \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}^{\emptyset,-}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & \\
 & & \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

(b) *Las siguientes inclusiones corresponden a subcategorías estrictamente plenas:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A}) & & \\
\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & & \mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & \\
 & \mathbf{K}^{,b}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}(\mathcal{A}). \\
\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A}) \arrow[dr, hook] & & \mathbf{K}^{,-}(\mathcal{A}) \arrow[ur, hook] & \\
 & \mathbf{K}^{-}(\mathcal{A}) & &
\end{tikzcd}$$

(c) $\mathrm{Ac}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ *es una subcategoría triangulada gruesa y estrictamente plena para cada* $* \in \{b, +, -, \emptyset\}$*. El sistema multiplicativo saturado de* $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ *asociado a* $\mathrm{Ac}^*(\mathcal{A})$*, es decir* $\sum_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})} \mathrm{Ac}^*(\mathcal{A})$ *(cf. 2.2.2) es igual a* $\mathrm{Qis}^*(\mathcal{A})$ *los cuasi-isomorfismos en* $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$.

Demostración. (a) Puede verse en [12] Cap. III.

(b) Se sigue de (a), pues la condición de "ser objeto" de $\mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A})$ se preserva por isomorfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

(c) Por 3.3.3, el funtor $H^0 : \mathbf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ es cohomológico, luego el resultado se sigue al aplicar 2.2.6, dado que $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \Sigma(H^i) = \mathrm{Qis}^*(\mathcal{A})$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ker}(H^i) = \mathrm{Ac}^*(\mathcal{A})$.

□

3.5. Funtores truncamiento

Para comparar las subcategorías $\mathbf{K}^{*,*'}(\mathcal{A})$, con $*, *' \in \{b, +, -\emptyset\}$, definimos los siguientes funtores.

Definición 3.5.1. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Definimos el funtor truncamiento $\tau^{\leqslant n} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^-(\mathcal{A})$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "f"'] & & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "d_X^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"] & \mathrm{Ker}(d_X^n) \arrow[r] \arrow[d, "f^n|_{\mathrm{Ker}(d_X^n)}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
Y^\bullet & \longmapsto & \cdots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r, "d_Y^{n-2}"'] & Y^{n-1} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_Y^n) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $i^n_{X^\bullet}$ al morfismo inclusión de $\tau^{\leqslant n}(X^\bullet)$ en $X^\bullet$.

Lema 3.5.2. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *El morfismo $i^n_{X^\bullet} : \tau^{\leqslant n}(X^\bullet) \to X^\bullet$ induce isomorfismos $H^i(\tau^{\leqslant n}(X^\bullet)) \to H^i(X^\bullet)$ para $i \leqslant n$.*

(b) *$H^i(\tau^{\leqslant n}(X^\bullet)) = 0$ para $i > n$.*

(c) *La transformación $i^n : \tau^{\leqslant n} \to 1_{\mathbf{C}(A)}$ es natural.*

(d) *Si $f \sim 0$, entonces $\tau^{\leqslant n}(f) \sim 0$.*

(e) *El funtor $\tau^{\leqslant n}$ se extiende de manera única a la categoría homotópica, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de funtores:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\tau^{\leqslant n}"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{C}^-(\mathcal{A}) \arrow[d, "q^-"] \\
\mathbf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "\overline{\tau}^{\leqslant n}"'] & \mathbf{K}^-(\mathcal{A}),
\end{tikzcd}$$

donde $q^- := q|_{\mathbf{C}^-(\mathcal{A})}$. Además, $q \circ i^n : \tau^{\leqslant n} \to 1_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}$ es una transformación natural. Por simplicidad escribiremos $\tau^{\leqslant n} = \overline{\tau}^{\leqslant n} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$.

Definición 3.5.3. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Definimos el funtor truncamiento $\tau^{\geqslant n} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathrm{Coker}(d_X^{n-1}) \arrow[r, "\overline{d}_X^n"] \arrow[d, "\overline{f}^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"] & \cdots \\
Y^\bullet & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r, "\overline{d}_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r, "d_Y^{n+1}"'] & Y^{n+2} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

(with $\longmapsto$ between the f column and the rest)

Denotamos por j^n_X al morfismo de $X^\bullet$ en $\tau^{\geqslant n}(X^\bullet)$ inducido por Coker.

Lema 3.5.4. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *El morfismo $j^n_{X^\bullet} : X^\bullet \to \tau^{\geqslant n}(X^\bullet)$ induce isomorfismos $H^i(X^\bullet) \to H^i(\tau^{\geqslant n}(X^\bullet))$ para $i \geqslant n$.*

(b) *$H^i(\tau^{\geqslant n}(X^\bullet)) = 0$ para $i < n$.*

(c) *La transformación $j^n : 1_{\mathbf{C}(A)} \to \tau^{\geqslant n}$ es natural.*

(d) *Si $f \sim 0$, entonces $\tau^{\geqslant n}(f) \sim 0$.*

(e) *El funtor $\tau^{\geqslant n}$ se extiende de manera única a la categoría homotópica, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de funtores:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\tau^{\geqslant n}"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{C}^+(\mathcal{A}) \arrow[d, "q^+"] \\ \mathbf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "\overline{\tau}^{\geqslant n}"'] & \mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \end{tikzcd}$$

donde $q^+ := q|_{\mathbf{C}^+(\mathcal{A})}$. Además, $q \circ i^n : 1_{\mathbf{K}(\mathcal{A})} \to \tau^{\geqslant n}$ es una transformación natural. Por simplicidad escribiremos $\tau^{\geqslant n} = \overline{\tau}^{\geqslant n} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^+(\mathcal{A})$.

Definición 3.5.5. Sea $X^\bullet \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$. Se define $\alpha = \alpha(X^\bullet) := \inf\{i \in \mathbb{Z} : H^i(X^\bullet) \neq 0\}$ y $\beta = \beta(X^\bullet) := \sup\{i \in \mathbb{Z} : H^i(X^\bullet) \neq 0\}$.

Observación. Es claro de la definición que $-\infty < \alpha(X^\bullet)$ si $X^\bullet \in \mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A})$; y que $\beta(X^\bullet) < +\infty$ si $X^\bullet \in \mathbf{K}^{\emptyset,-}(\mathcal{A})$.

Definición 3.5.6. Con la notación anterior se definen las siguientes asignaciones:

$$\tau^+ : \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A})) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^+(\mathcal{A})) \text{ como } X^\bullet \mapsto \tau^{\geqslant \alpha}(X^\bullet),$$
$$\tau^- : \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{\emptyset,-}(\mathcal{A})) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^+(\mathcal{A})) \text{ como } X^\bullet \mapsto \tau^{\leqslant \beta}(X^\bullet),$$

así como los morfismos:

$$j^+_{X^\bullet} : X^\bullet \to \tau^+(X^\bullet), \quad j^+_{X^\bullet} := q(j^{\alpha(X^\bullet)}_{X^\bullet}) \quad \text{y}$$
$$i^-_{X^\bullet} : \tau^-(X^\bullet) \to X^\bullet, \quad i^-_{X^\bullet} := q(i^{\beta(X^\bullet)}_{X^\bullet}).$$

Lema 3.5.7. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces se satisface lo siguiente.*

(a) *Si $X^\bullet \in \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A}))$ y $Y^\bullet \in \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{\emptyset,-}(\mathcal{A}))$, entonces $j^+_{X^\bullet}$ y $i^-_{Y^\bullet}$ son cuasi-isomorfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.*

(b) *Por restricción de τ^+ y τ^- obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{\emptyset,b}(\mathcal{A})) \arrow[r, "\tau^+"] \arrow[d, "\tau^-"'] & \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})) \arrow[d, "\tau^-"] \\ \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})) \arrow[r, "\tau^+"] & \mathrm{Obj}(\mathbf{K}^{b}(\mathcal{A})). \end{tikzcd}$$

Demostración. Se sigue de 3.5.2 y 3.5.4. □

Proposición 3.5.8. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Las subcategorías trianguladas $\mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}(\mathcal{A})$ son $\mathrm{Ac}(\mathcal{A})-$localizantes a derecha y a izquierda.*

(b) *Las subcategorías trianguladas* $\mathbf{K}^{+,*}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}(\mathcal{A})$ *son* $\mathrm{Ac}(\mathcal{A})-$*localizantes a izquierda.*

(b)^{op} *Las subcategorías trianguladas* $\mathbf{K}^{-,*}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}(\mathcal{A})$ *son* $\mathrm{Ac}(\mathcal{A})-$*localizantes a izquierda.*

(c) *La subcategoría triangulada* $\mathbf{K}^{b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A})$ *es* $\mathrm{Ac}^{+}(\mathcal{A})-$*localizante a izquierda.*

(c)^{op} *La subcategoría triangulada* $\mathbf{K}^{b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{-}(\mathcal{A})$ *es* $\mathrm{Ac}^{-}(\mathcal{A})-$*localizante a derecha.*

(d) *La subcategoría triangulada* $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A})$ *es* $\mathrm{Ac}^{+}(\mathcal{A})-$*localizante a derecha y a izquierda.*

(e) *La subcategoría triangulada* $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{-}(\mathcal{A})$ *es* $\mathrm{Ac}^{-}(\mathcal{A})-$*localizante a derecha y a izquierda.*

Demostración. Por 3.4.2 sabemos que $\Sigma_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})}(\mathrm{Ac}^{+}(\mathcal{A})) = \mathrm{Qis}^*(\mathcal{A})$.

(a) Sean $s \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, $s : X \to X'$ con $X \in \mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A})$, luego $X' \in \mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A})$, y escribiendo $t = 1_{X'}$, $X'' = X'$ se tiene la propiedad, pues $\mathrm{Ac}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A})$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[dr] & X' \arrow[d, dashed, "t"] \\ & X''. \end{tikzcd}$$

(b) Sea $s : X \to X'$ un morfismo en $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, con $X \in \mathbf{K}^{+,*}(\mathcal{A})$, entonces $X' \in \mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A})$ si $* = \emptyset, +$ o $X' \in \mathbf{K}^{\emptyset,b}(\mathcal{A})$ si $* = -, b$, luego $\tau^{+}X' \in \mathbf{K}^{+}(\mathcal{A})$ si $* = \emptyset, +$ o $\tau^{+}X'\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ si $* = -, b$. Por lo tanto $\tau^{+}X' \in \mathbf{K}^{+,*}(\mathcal{A})$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[dr] & X' \arrow[d, "j^{+}_{X'}"] \\ & \tau^{+}X' \end{tikzcd}$$

donde $j^{+}_{X'} \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$.

(c) Sea $s : X' \to X$ un morfismo en $\mathrm{Qis}^{+}(\mathcal{A})$, donde $X \in \mathbf{K}^{b}(\mathcal{A})$, entonces $X' \in \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$, por lo que $\tau^{-}X' \in \mathbf{K}^{b}(\mathcal{A})$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "s"'] \\ & \tau^{-}X' \arrow[u, "i^{-}_{X'}"'] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

donde $i^{-}_{X'} \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$.

(d) Sea $s : X \to X'$ un morfismo en $\mathrm{Qis}^{+}(\mathcal{A})$, donde $X \in \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$, entonces $X' \in \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$, por lo que basta tomar la identidad en X'.

(e) Se muestra de manera análoga a (d). $\square$

3.6. Las categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$

Ya se han construido todas la herramientas necesarias para definir las categorías derivadas $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$. Antes, mostramos el siguiente resultado que es esencial para visualizar la relación entre ellas.

Teorema 3.6.1. *Usando 3.5.8 tenemos que las inclusiones naturales de las categorías trianguladas en 3.4.2 (a) inducen las equivalencias e inmersiones naturales de las siguientes categorías trianguladas:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \dfrac{\mathbf{K}^+(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})} \arrow[dr, hook] & & \\
 & \dfrac{\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \dfrac{\mathbf{K}^{\emptyset,+}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}(\mathcal{A})} \arrow[dr, hook] & \\
\dfrac{\mathbf{K}^b(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^b(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \dfrac{\mathbf{K}^{\emptyset,b}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \dfrac{\mathbf{K}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}(\mathcal{A})}. \\
 & \dfrac{\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^-(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \dfrac{\mathbf{K}^{\emptyset,-}(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] & \\
 & & \dfrac{\mathbf{K}^-(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^-(\mathcal{A})} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se sigue de 2.4.2 y su dual, y de 3.5.4. Por ejemplo, la subcategroía $\mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ es $\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$-localizante a izquierda y tenemos la inclusión $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^b(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$, y para verificar que es una equivalencia, basta ver que el funtor natural es denso.

En efecto, sea $X^\bullet \in \mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$, entonces $i^-_{X^\bullet} \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$ y $\tau^- X^\bullet \in \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$, por lo que $i^-_{X^\bullet}$ es invertible en $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$. $\square$

Definición 3.6.2. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Se definen las categorías derivadas de $\mathcal{A}$ como $\mathrm{D}^*(\mathcal{A}) := \mathbf{K}^{\emptyset,*}(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}(\mathcal{A})$, para $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$.

Observación. Un triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ es un triángulo de Δ_Σ, donde $\Sigma = \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$ (cf. 2.3.2).

3.7. Sucesiones exactas y triángulos distinguidos

Verdier [12] afirmó que los triángulos distinguidos en una categoría triangulada juegan el papel de la sucesiones exactas en una categoría abeliana. En esta sección formalizamos esta idea.

Definición 3.7.1. Se dice que una sucesión exacta corta $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es semi-escindida si cada sucesión exacta corta $0 \to X^i \to Y^i \to Z^i \to 0$ en $\mathcal{A}$ se escinde para $i \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.7.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Toda sucesión exacta corta semi-escindida $\eta : 0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ induce un triángulo $X^\bullet \to Y^\bullet \to Z \xrightarrow{\delta(\eta)} X^\bullet[1]$ distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Recíprocamente, todo triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es isomorfo a uno de esta forma.*

(b) *Toda sucesión exacta corta en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ induce un triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Recíprocamente, todo triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ es isomorfo a uno de esta forma.*

Demostración. Sea $\eta : 0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ una sucesión exacta corta en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. Usaremos 3.2.3 y la notación de este resultado. Entonces, f induce el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbf{C}(f) \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde es fácil ver que ρ dado por $\rho^i(x^{i+1}, y^i) := g(y^i)$, es un morfismo de complejos.

Veamos que ρ es una cuasi-isomorfismo. En efecto, como g es un epimorfismo tenemos la sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Ker}(\rho) \to \mathbf{C}(f) \xrightarrow{\rho} Z^\bullet \to 0$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$. Por el lema de la serpiente en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\rho) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\rho) \to 0,$$

dado que β es epimorfismo, $\mathrm{Coker}(\beta) = 0$, y tenemos que $\mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\rho)$ es un ismorfismo.

Al aplicar el funtor H^i a la sucesión $0 \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\beta} Y^\bullet \to 0$ y dado que $H^i(\beta)$ es invertible para toda i, obtenemos que $\mathrm{Ker}(\beta)$ es acíclico, de donde $\mathrm{Ker}(\rho)$ es acíclico y por lo tanto ρ es un cuasi-isomorfismo.

Ahora, al aplicar los funtores canónicos $\mathbf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{q} \mathbf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathrm{D}(\mathcal{A})$ al diagrama (3.1), tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(q(\overline{f}))"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "Q(q(P_1))"] \arrow[d, "Q(q(\beta))"] & \mathbf{C}(f) \arrow[r, "Q(q(P_2))"] \arrow[d, "\overline{\beta}:=Q(q(\rho))"] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "Q(q(f))"'] & Y \arrow[r, "Q(q(g))"'] & Z \arrow[r, "Q(q(P_2))\overline{\beta}^{-1}"'] & X^\bullet[1].
\end{tikzcd}$$

Por 3.3.4 la sucesión en la parte superior del diagrama anterior es un triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, y como $Q(q(\beta))$ y $\overline{\beta}$ son isomorfismos, la sucesión en la parte inferior es también un triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Por lo tanto, η induce un triángulo distinguido en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$.

Supongamos que η es semi-escindida, esto es, existen $X^i \xleftarrow{\eta^i_{X^\bullet}} Y^i \xleftarrow{\eta^i_{X^\bullet}} Z^i$ tales que $1_{Z^i} = g^i\eta^i_{Z^\bullet}$, $1_{X^i} = \eta^i_{X^\bullet}f^i$ y $f^i\eta^i_{X^\bullet} + \eta^i_{Z^\bullet}g^i = 1_{Y^i}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Definimos dos morfismos de complejos $\mathbf{C}(f) \xleftarrow{\theta} Z^\bullet \xrightarrow{\delta} X^\bullet[1]$ como $\delta^i = -\eta^{i+1}_{X^\bullet}d^i_{Y^\bullet}\eta^i_{Z^\bullet}$ y $\theta^i(z^i) = (\delta^i(z^i), \eta^i_{Z^\bullet}(z^i))$. Luego, es rutina mostrar que $\rho \circ \theta = 1_{Z^\bullet}$ y $\theta \circ \rho \sim 1_{\mathbf{C}(f)}$, para la homotopía $b^i : \mathbf{C}(f)^i \to \mathbf{C}(f)^{i-1}$ está dado por $b^i(x^{i+1}, y^i) = (\eta^i_{X^\bullet}y^i, 0)$ y se verifica que $1^i_{\mathbf{C}(f)} - (\theta \circ \rho)^i = b^{i+1}d^i_{\mathbf{C}(f)} + d^{i-1}_{\mathbf{C}(f)}b^i$.

Así, de 3.1 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbf{C}(f) \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "\rho"] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "\delta"] & X^\bullet[1],
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

dado que $\delta = P_2 \circ \theta$, tenemos que $\delta\rho = P_2 \circ (\theta \circ \rho) \sim P_2$, y aplicando el funtor $q : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{A})$ a (3.2), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q(\overline{f})"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "q(P_1)"] \arrow[d, "q(\beta)"] & \mathbf{C}(f) \arrow[r, "q(P_2)"] \arrow[d, "q(\rho)"] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "q(f)"] & Y \arrow[r, "q(g)"] & Z \arrow[r, "q(\delta)"] & X^\bullet[1],
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión de la parte superior es un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, además $q(\beta)$ y $q(\rho)$ son isomorfismos, por lo que la sucesión de la parte inferior también es un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, llamamos a esta última sucesión ξ, la cual da lugar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q(f)"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "q(g)"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "q(f)"] & Y \arrow[r, "q(\overline{P}_1)"] & Z \arrow[r, "q(\overline{P}_2)"] & X^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

de donde la sucesión de la parte inferior resulta ser un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Consideremos la sucesión exacta corta semi-escindida $\eta : 0 \to X^\bullet \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{P_1} \mathbf{C}(f) \to 0$, donde los morfismos

$$X^i \xleftarrow{\eta^i_{X^\bullet}} \mathrm{Cyl}(f)^i \xleftarrow{\eta^i_{\mathbf{C}(f)}} \mathbf{C}(f)^i$$

están dados por $\eta^i_{X^\bullet}(x^i, x^{i+1}, y^i) = x^i$ y $\eta^i_{\mathbf{C}(f)}(x^{i+1}, y^i) = (0, x^{i+1}, y^i)$. Por lo visto anteriormente, $X^\bullet \xrightarrow{q(\overline{f})} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{q(P_1)} \mathbf{C}(f) \xrightarrow{q(\delta)} X^\bullet[1]$ es un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Veamos que $\delta = \delta(\eta) = P_2$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\delta^i(x^{i+1}, y^i) &= -\eta^{i+1}_{X^\bullet}\, d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}\, \eta^i_{\mathbf{C}(f)}(x^{i+1}, y^i) \\
&= -\eta^{i+1}_{X^\bullet}\, d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(0, x^{i+1}, y^i) \\
&= -\eta^{i+1}_{X^\bullet}(-x^{i+1}, -d^{i+1}_{X^\bullet}, f(x^{i+1}) + d^i_{Y^\bullet}(y^i)) \\
&= x^{i+1} = P_2(x^{i+1}, y^i).
\end{aligned}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\overline{P}_1"] & \mathbf{C}(f) \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, equal] & X^\bullet[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "P_1"] \arrow[u, "\beta"] & \mathbf{C}(f) \arrow[r, "\delta=\delta(\eta)"] & X^\bullet[1].
\end{tikzcd}$$

Dado que $\overline{P}_1\beta \sim P_1$, al aplicar el funtor q al diagrama anterior, tenemos que $q(\beta)$ es un isomorfismo y concluimos que η induce un triángulo distinguido en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ isomorfo a ξ. □

3.8. La inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$

El funtor cohomológico $H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ se extiende a la categoría derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, ya que si $f \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, entonces $H^0(f)$ es invertible en $\mathcal{A}$, luego por 2.3.2 existe un único funtor cohomológico $\tilde{H}^0 : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ tal que $\tilde{H}^0 \circ Q = H^0$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^0"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{A} \\
\mathrm{D}(\mathcal{A}). \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{H}^0"'] &
\end{tikzcd}$$

Para simplificar, escribiremos $\tilde{H}^0 = H^0 : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Definición 3.8.1. Denotaremos por $\mathrm{D}_0(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ cuyos objetos son los $X^\bullet \in \mathrm{Obj}(\mathrm{D}(\mathcal{A}))$ tales que $H^i(X^\bullet) = 0$ para $i \neq 0$.

Definición 3.8.2. Denotaremos por $i_0 : \mathcal{A} \to \mathrm{D}(\mathcal{A})$ a la composición de los funtores $\mathcal{A} \xrightarrow{c_0} \mathbf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{q} \mathbf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathrm{D}(\mathcal{A})$, donde $c_0 : \mathcal{A} \to \mathbf{C}(\mathcal{A})$ está dado por $X \mapsto c_0(X)^\bullet = \cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots$, con X en grado 0.

Observación. Es fácil ver que $i_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{D}_0(\mathcal{A})$.

Proposición 3.8.3. *Los funtores* $H^0 : \mathrm{D}_0(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ *y* $i_0 : A \to \mathrm{D}_0(\mathcal{A})$ *son cuasi-inversos entre sí, es decir,* $H^0 \circ i_0 \simeq 1_{\mathcal{A}}$ *y* $i_0 \circ H^0 \simeq 1_{D_0(\mathcal{A})}$.

Demostración. Las funciones inducidas por i_0 y H^0 en los conjutos de morfismo son $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{i_0} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(c_0(X)^\bullet, c_0(Y^\bullet)) \xrightarrow{H^0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Un elemento de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ es de la forma

$$\overline{(s,f)} = \begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ c_0(X)^\bullet & & c_0(Y)^\bullet \end{tikzcd}$$

y $H^0\overline{(s,f)} = H^0(f)H^0(s)^{-1}$ (cf. 2.1.6 y su prueba).

Veamos que $H^0 \circ i_0 = id$. En efecto,

$$(X \xrightarrow{f} Y) \quad \xmapsto{i_0} \quad \begin{tikzcd} & c_0(X)^\bullet \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "q(c_0(f))"] & \\ c_0(X)^\bullet & & c_0(Y)^\bullet \end{tikzcd} \quad \xmapsto{H^0} (X \xrightarrow{f} Y).$$

Ahora, verificamos que $i_0 \circ H^0 = id$. En efecto,

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ c_0(X)^\bullet & & c_0(Y)^\bullet \end{tikzcd} \quad \xmapsto{H^0} \quad (X \xrightarrow{H^0(f)H^0(s)^{-1}} Y)$$

$$(X \xrightarrow{H^0(f)H^0(s)^{-1}} Y) \quad \xmapsto{i_0} \quad \begin{tikzcd} & c_0(X)^\bullet \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "q(c_0(H^0(f)H^0(s)^{-1}))"] & \\ c_0(X)^\bullet & & c_0(Y)^\bullet. \end{tikzcd}$$

Falta mostrar que $(s, f) \sim (\,1\,, q(c_0(H^0(f)H^0(s)^{-1}))\,)$, para ello, usaremos que $\tau^{\geqslant 0} \circ \tau^{\leqslant 0} = q \circ c_0 \circ H^0 : \mathbf{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}_0(\mathcal{A})$, donde $\mathbf{K}_0(\mathcal{A})$ es la subcategoría plena de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ con objetos $X^\bullet$ tales que $H^i(X^\bullet) = 0$ para $i \neq 0$.

Dado que $s \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, el complejo $Z^\bullet$ está en $\mathbf{K}_0(\mathcal{A})$, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{K}_0(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
c_0(X)^\bullet \arrow[d, equal] & Z^\bullet \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] & c_0(Y)^\bullet \arrow[d, equal] \\
\tau^{\leqslant 0}c_0(X)^\bullet \arrow[d, equal] & \tau^{\leqslant 0}Z^\bullet \arrow[l, "\tau^{\leqslant 0}s"'] \arrow[r, "\tau^{\leqslant 0}f"] \arrow[u, "i^0_{Z^\bullet}"'] \arrow[d, "j^0_{\tau^{\leqslant 0}Z^\bullet}"] & \tau^{\leqslant 0}c_0(Y)^\bullet \arrow[d, equal] \\
\tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}c_0(X)^\bullet & \tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}Z^\bullet \arrow[l, "\tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}s"'] \arrow[r, "\tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}f"] & \tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}c_0(Y)^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Luego, como $\tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0} = q\circ c_0\circ H^0$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{K}_0(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
& Z^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
c_0(X)^\bullet \arrow[dr, equal] & \tau^{\leqslant 0}Z^\bullet \arrow[l, "\tau^{\leqslant 0}s"'] \arrow[r, "\tau^{\leqslant 0}f"] \arrow[u, "i^0_{Z^\bullet}"'] \arrow[d, "\alpha"] & c_0(Y)^\bullet \\
& c_0(X)^\bullet \arrow[ur, "q(c_0(H^0(f)H^0(s)^{-1}))"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha := (\tau^{\leqslant 0}\circ\tau^{\geqslant 0})\circ(j^0_{\tau^{\leqslant 0}_{Z^\bullet}})$. Por lo tanto $(s,f)\sim(\,1\,,\,q(c_0(H^0(f)H^0(s)^{-1}))\,)$.

Veamos que i_0 es denso. Para esto, sea $X^\bullet\in \mathrm{D}_0(\mathcal{A})$, entonces tenemos los siguientes morfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$:

$$q\circ c_0(H^0(X^\bullet)) = \tau^{\geqslant 0}\circ\tau^{\leqslant 0}(X^\bullet) \xleftarrow{j^0_{\tau^{\leqslant 0}_{X^\bullet}}} \tau^{\leqslant 0}(X^\bullet) \xrightarrow{i^0_{X^\bullet}} X^\bullet,$$

dado que $H^i(X^\bullet)=0$ si $i\neq 0$, tenemos que $j^0_{\tau^{\leqslant 0}_{X^\bullet}}$ y $i^0_{X^\bullet}$ son morfismos en $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, y por lo tanto $i_0(H^0(X^\bullet))\simeq X^\bullet$ en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. $\square$

Notación. Para $X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, denotamos por $\overline{X}$ a $i_0(X)\in\mathrm{Obj}(\mathrm{D}(\mathcal{A}))$.

3.9. Resoluciones inyectivas y proyectivas de complejos

En esta última sección, se caracteriza la categoría derivada en términos de resoluciones inyectivas o proyectivas y se finaliza demostrando que los grupos $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(\overline{A},\overline{B}[n])$ son canónicamente isomorfos. A continuación recordamos algunas definiciones.

Definición 3.9.1. Sea $\mathcal{B}$ una categoría. Decimos que un objeto I en $\mathcal{B}$ es inyectivo si para todo monomorfismo $\alpha: A\to A'$ y cualquier morfismo $f: A\to I$

en $\mathcal{B}$, existe $f' : A' \to I$ que hace conmutar el siguiente diagrama diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & A' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & I. \end{tikzcd}$$

Definición 3.9.2. Sea $\mathcal{B}$ una categoría. Decimos que un objeto P en $\mathcal{B}$ es proyectivo si para todo epimorfismo $\alpha : A \to A'$ y cualquier morfismo $f : P \to A'$ en $\mathcal{B}$, existe $f' : P \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & A'. \end{tikzcd}$$

Notación. La subcategoría plena de $\mathcal{A}$ formada por los objetos inyectivos (resp. proyectivos) de $\mathcal{A}$ será denotada por $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$).

Definición 3.9.3. Denotaremos por $\mathbf{C}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$; $\mathbf{C}^-(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})$ (resp. $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$; $\mathbf{K}^-(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})$) a la subcategoría plena de $\mathbf{C}^+(\mathcal{A})$; $\mathbf{C}^-(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$; $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$) cuyos objetos son los complejos $X^\bullet$ tales que $X^i \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$; $X^i \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.9.4. Sea $X^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{C}^-(\mathcal{A})$). Una resolución inyectiva (resp. proyectiva) de $X^\bullet$ está dada por un cuasi-isomorfismo $X^\bullet \to I^\bullet$ (resp. $P^\bullet \to X^\bullet$) en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, donde $I^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ (resp. $P^\bullet \in \mathbf{C}^-(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})$).

Definición 3.9.5. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

(a) Decimos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos si para todo $X \in \mathcal{A}$, existe un monomorfismo $X \to I$, donde $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$.

(b) Decimos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos si para todo $X \in \mathcal{A}$, existe un epimorfismo $P \to X$, donde $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Lema 3.9.6. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto $X^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ admite una resolución inyectiva.*

(b) *Si $s : I^\bullet \to X^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, con $I^\bullet \in \mathbf{C}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$, entonces existe un morfismo de complejos $t : X^\bullet \to I^\bullet$ tal que $ts \sim 1_{I^\bullet}$.*

(c)^{op} *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto $X^\bullet \in \mathbf{C}^-(\mathcal{A})$ admite una resolución proyectiva.*

(b)^{op} *Si $P^\bullet \xleftarrow{s} X^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, con $P^\bullet \in \mathbf{C}^-(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$, entonces existe un morfismo de complejos $X^\bullet \xleftarrow{t} P^\bullet$ tal que $st \sim 1_{P^\bullet}$.*

Demostración. La prueba de (a) se puede consultar en [1], Teorema 7.5 en la página 62.

(b) Consideremos el triángulo $I^\bullet \to X^\bullet \to \mathbf{C}(s) \xrightarrow{P_2} I^\bullet[1]$ (cf. 3.2.3), luego, si s es un cuasi-isomorfismo, entonces $C^\bullet := \mathbf{C}(s)$ es cíclico por 3.2.5.

Ahora bien, dado que $C^\bullet$ acíclico y $I^\bullet[1] \in \mathbf{C}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})$, el morfismo $P_2 : C^\bullet \to I^\bullet[1]$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es homotópico a 0.

Sea $\tilde{k} = (k,t)$ la homotopía entre P_2 y 0, es decir, $P_2 = \tilde{k}\, d_{C^\bullet} + d_{I^\bullet[1]}\, \tilde{k}$, donde $\tilde{k}^i : C^i = I^{i+1} \oplus X^i \to I^i$ está dada por $\tilde{k}^i = (k^i, t^i)$, y $k^i : I^{i+1} \to I^i$, $t^i : X^i \to I^i$, también recordamos que $k : I^\bullet[1] \to I^\bullet$ y $t : X^\bullet \to I^\bullet$.

Por otro lado, como $P_2 = (1,0) = (1_{I^\bullet[1]}, 0)$ y $d_{C^\bullet} = \begin{pmatrix} d_{I^\bullet[1]} & 0 \\ s[1] & d_{X^\bullet} \end{pmatrix}$ (cf. 3.2.3), tenemos que

$$\begin{aligned} (1_{I^\bullet[1]}, 0) &= (k,t) \begin{pmatrix} d_{I^\bullet[1]} & 0 \\ s[1] & d_{X^\bullet} \end{pmatrix} + d_{I^\bullet[1]}(k,t) \\ &= (k\, d_{I^\bullet[1]} + t\, s[1], t\, d_{X^\bullet}) + (d_{I^\bullet[1]}\, k, d_{I^\bullet[1]}\, t), \end{aligned}$$

por lo que $1_{I^\bullet[1]} = k\, d_{I^\bullet[1]} + t\, s[1] + d_{I^\bullet[1]}\, k$ y $0 = t\, d_{X^\bullet} + d_{I^\bullet[1]}\, t$. Finalmente, estas dos igualdades muestran que $t\, s \sim 1_{I^\bullet[1]}$ y que $t : X^\bullet \to I^\bullet$ es un morfismo de complejos. $\square$

Teorema 3.9.7. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Si $I^\bullet \in \mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})$, entonces el morfismo canónico $Q : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$ es invertible para todo $X^\bullet \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$.*

(a)^{op} *Si $P^\bullet \in \mathbf{K}^-(\mathcal{P}_\mathcal{A})$, entonces el morfismo canónico $Q : \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, X^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, X^\bullet)$ es invertible para todo $X^\bullet \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$.*

(b) *La composición de los funtores canónicos*

$$\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) \xrightarrow{i} \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}^+(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$$

es un funtor fiel y pleno. Más aun, si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces $Q \circ i : \mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^+(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$ es una equivalencia de categorías trianguladas.

(b)^{op} *La composición de los funtores canónicos*

$$\mathbf{K}^-(\mathcal{P}_\mathcal{A}) \xrightarrow{i} \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}^-(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^-(\mathcal{A})$$

es un funtor fiel y pleno. Más aun, si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $Q \circ i : \mathbf{K}^-(\mathcal{P}_\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^-(\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^-(\mathcal{A})$ es una equivalencia de categorías trianguladas.

(c) *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos o inyectivos, entonces existe un isomorfismo canónico $\partial^n : \mathrm{Ext}^n_\mathcal{A}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(\overline{A}, \overline{B}[n])$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y cualesquiera objetos A, B en $\mathcal{A}$.*

Demostración. (a) Veamos que Q es inyectiva. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$ tal que $Q(f) = 0$, entonces existe $t : I^\bullet \to Z^\bullet$, $t \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A},)$ con $tf = 0$. Por 3.9.6 (b) tenemos que $f = 0$.

Para ver que Q es suprayectivo, sea $\alpha = \overline{(f,s)}$, con $s \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$. Por 3.9.6 (b), existe $t : Z^\bullet \to I^\bullet$ tal que $ts = 1_{I^\bullet}$ y en particular $t \in \mathrm{Qis}(\mathcal{A})$, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Z^\bullet \arrow[d, "t"] & \\
X^\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "tf"'] & I^\bullet \arrow[d, equal] & I^\bullet \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, equal] \\
 & I^\bullet &
\end{tikzcd}$$

con el cual mostramos que $(f,s) \sim (tf,1)$, y por lo tanto, $Q(tf) = \overline{(tf,1)} = \alpha$.

(b) Usaremos 2.4.2, para esto definimos $\mathrm{Ac}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) := \mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) \cap \mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$, y es fácil verificar que $\mathrm{Ac}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})$ es $\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})$-localizante a derecha. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q"] \\
\dfrac{\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})} \arrow[r, hook, "\theta"] & \dfrac{\mathbf{K}^+(\mathcal{A})}{\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A})}.
\end{tikzcd}$$

Por 2.4.2 (a) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})}(\mathrm{Ac}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})) &= \mathrm{Mor}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})) \cap \Sigma_{\mathbf{K}^+(\mathcal{A})}(\mathrm{Ac}^+(\mathcal{A}) \\
&= \mathrm{Mor}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})) \cap \mathrm{Qis}^+(\mathcal{A}),
\end{aligned}$$

y por 3.9.6 (b), la última intersección consta de morfismos invertibles en $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})/\mathrm{Ac}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A}) = \mathbf{K}^+(\mathcal{I}_\mathcal{A})$ y $Q' = id$. Por 2.4.2 (c), $\theta = Q \circ i$ es fiel y pleno.

Más aun, si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, por 3.9.6 (a) concluimos que $Q \circ i$ es denso.

(c) Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y sean A, B objetos en $\mathcal{A}$. Consideremos una resolución proyectiva de A $\cdots \to P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} A \to 0$ y sea $P_A := \cdots \to P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{0} 0 \to 0 \to \cdots$, por lo que P_A y A son cuasi-isomorfos (identificamos A con $c_0(A)$). Considerando la sucesión

$$0 \to (P^0, B) \xrightarrow{(d^{-1},B)} (P^{-1}, B) \xrightarrow{(d^{-2},B)} (P^{-2}, B) \to \cdots$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_\mathcal{A}(A,B) &:= \mathrm{Ker}(d^{-n-1}, B)/\mathrm{Im}(d^{-n}, B) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(P_A, B[n])/\mathcal{H}(P_A, B[n]) =: \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(P_A, B[n]).
\end{aligned}$$

Finalmente, por el inciso (a)^{op}, tenemos que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(P_A, B[n])$ $\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(P_A, B[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(\overline{A}, \overline{B}[n])$.

$\square$

Bibliografía

[1] A. Borel et al. *Algebraic D-modules.* Perspectives in Mathematics 2, Academic Press, Boston, 1987.

[2] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. *Methods of homological algebra.* 2nd ed. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] D. Happel. *Triangulated categories in the Representation Theory of finite dimensional algebras.* London Math. Soc. Lecture Note Series 119. Cambridge Univ. Press, 1988.

[4] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Springer LNM 20, 1966.

[5] T. Holm, P. Jørgensen. *Triangulated categories: definitions, properties, and examples.* London Math. Soc. Lecture Note Series 375. Cambridge Univ. Press, 2010, 1-51.

[6] L. Illusie *Catégories dérivées et dualité: travaux de J. L. Verdier.* Ens. Math. (2) 36, 1990, 369-391.

[7] B. Keller. *Derived categories and their uses.* Chapter of the Handbook of algebra, Vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier 1996.

[8] H. Krause. *Derived categories, resolutions, and Brown representability.* arXiv:math/0511047 [math.KT]

[9] H. Krause. *Localization theory for triangulated categories.* arXiv:0806.1324 [math.CT]

[10] A. Neeman. *Triangulated categories.* Annals of Mathematics studies. Princeton Univ. Press 148, 2001.

[11] J. L. Verdier *Catégories dérivées, état 0.* SGA 4 1/2, Springer LNM 569, 1977, 262-311.

[12] J. L. Verdier. *Des Catégories Dérivées, Des Catégories Abéliennes.* Astérisque 239, 1996.