



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica de un gas cuántico de bosones
polares en un potencial de tres pozos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Oswaldo Puebla Cerezo

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Rosario Paredes Gutiérrez



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno:

Puebla

Cerezo

Osvaldo

55 82 59 37

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

407077357

2. Datos del tutor:

Dra.

Rosario

Paredes

Gutiérrez

3. Datos del sinodal 1:

Dra.

María de los Ángeles

Ortiz

Flores

4. Datos del sinodal 2:

Dr.

Darío

Nuñez

Zúñiga

5. Datos del sinodal 3:

Dr.

Víctor Manuel

Velázquez

Aguilar

6. Datos del sinodal 4:

Dr.

Genaro

Toledo

Sánchez

7. Datos del trabajo escrito:

Dinámica de un gas cuántico de bosones polares en un potencial de tres pozos

90 p.

2013

8. Palabras clave:

Bosones

Dipolares

Potencial de tres pozos

Agradecimientos

Quisiera agradecer principalmente a la Dra. Rosario Paredes Gutiérrez por darme la oportunidad de trabajar en este tema de tesis con ella. Agradezco la disposición, paciencia y tiempo que siempre tuvo para atender mis dudas y comentarios en la realización de este trabajo.

También agradezco a mis sinodales Dra. María de los Ángeles Ortiz Flores, Dr. Darío Nuñez Zuñiga, Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar y Dr. Genaro Toledo Sánchez, por el tiempo dedicado en la revisión de mi trabajo, así como sus sugerencias, opiniones y preguntas para el mejoramiento de esta tesis.

Agradezco el apoyo de mi familia pero sobre todo a mis padres Luciano Puebla Rosas y Carmen Cerezo Moratillo por brindarme la oportunidad de estudiar esta carrera y darme todo su apoyo. A mis hermanos Polo y Tavo, a la familia de la Luz Puebla y Puebla Salinas. A mis compañeros de carrera, principalmente a Benjamín Sánchez Padilla, Hernando Magallanes Gonzales, Omar Rodríguez Núñez, Sasha Zaldivar Corichi, Omar Piña Perez, que durante toda la carrera me apoyaron y sus aportaciones académicas.

Finalmente agradezco el apoyo del proyecto PAPIIT IN108812-2 de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México al momento de realizarse esta tesis.

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	3
1.1. Condensación de Bose-Einstein	3
1.2. Producción de átomos ultrafríos	5
1.2.1. Enfriamiento por efecto Doppler	8
1.2.2. Melaza óptica: El enfriamiento Sísifo	9
1.2.3. Enfriamiento por evaporación	11
1.3. Trampas de átomos ultrafríos	11
1.3.1. Trampas ópticas dipolares	12
1.3.2. Trampas Magnéto-Ópticas	14
1.4. Gases de Bose en Redes Ópticas de 1-D.	17
1.5. Gases Dipolares	18
2. Hamiltoniano de una gas dipolar de bosones en un potencial de tres pozos	23
2.1. La Mecánica Cuántica de N cuerpos	24
2.1.1. Bosones	26
2.2. Gas de Bosones ideal en un pozo de potencial	27
2.3. Interacción de contacto de partículas.	29
2.3.1. Teoría de dispersión general y bajas energías entre partículas	30

2.4. Gases Dipolares	36
3. Estados Estacionarios .	41
3.1. Estudio de los estados estacionarios.	48
3.2. Estados estacionarios con mínima energía	48
3.3. Estados estacionarios con máxima energía	52
3.4. Reducción del intervalo de valores de Λ y Λ_1	54
4. Evolución temporal.	57
4.1. Efecto del número de partículas.	61
4.1.1. Gas totalmente dipolar ($\Lambda=0.0$)	61
4.1.2. Variación del coeficiente de interacción dipolar Λ_1	66
4.2. Gas con interacciones de contacto y dipolares	68
4.3. Comparación entre las interacciones dipolar y de contacto.	73
5. Conclusiones.	79
A. Justificación del valor $\frac{1}{8}$ en el Hamiltoniano	83

Capítulo 1

Introducción

1.1. Condensación de Bose-Einstein

El trabajo teórico publicado en la década de los 20's escrito por S. Bose [1] y A. Einstein dio paso al estudio de sistemas a temperaturas cercanas al cero absoluto. En dicho trabajo se demostró que si el número de partículas de un sistema formado por átomos con espín total entero sin interacción se conserva, el total de las partículas realizarán una transición de fase a temperaturas suficientemente bajas tal que la mayor parte de ellas ocupará el estado base, ésta transición es llamada condensación de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés). La existencia del fenómeno de la condensación de Bose-Einstein es una consecuencia directa de la estadística que rige a las partículas bosónicas sin interacción: A temperatura diferente de cero, una fracción macroscópica de estas ocupa el estado base de una partícula. Esta fue la predicción realizada por Albert Einstein, adecuando para partículas materiales, el trabajo que Satyendra Nath Bose hizo al contabilizar el número de formas que tienen de distribuirse fotones como función de la energía.

De acuerdo a la Física Estadística, las propiedades termodinámicas de un gas ideal cuántico se determinan trabajando en el ensemble gran canónico a través de la función Gran Potencial

$$\Omega(V, T, \mu) = -k_B T \sum_p \ln (e^{(-\epsilon_p + \mu)/k_B T} - 1), \quad (1.1)$$

donde queda explícita la dependencia con la temperatura T y el potencial químico μ , en tanto que la dependencia en el volumen V permite considerar la geometría y dimensionalidad del sistema particular. En el caso de partículas contenidas en una caja en 3 dimensiones por ejemplo, se encuentra que

$$\frac{N}{V} = \frac{g_{3/2}(\mu/k_B T)}{\lambda^3} \quad (1.2)$$

siendo $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ y $g_{3/2}$ la función de Bose de 3/2 con argumento $\mu/k_B T$. Es importante enfatizar aquí que es precisamente el orden de esta función el que toma en cuenta el carácter geométrico y dimensional del potencial de confinamiento de los átomos. En efecto, $n = 3/2$ es característico de una caja en tres dimensiones. En general, la transición a la condensación de Bose se hace evidente siguiendo el comportamiento de $g_n(\mu/k_B T)$. El potencial químico, que es siempre negativo para bosones, toma su valor máximo en $\mu = 0$ a $T \neq 0$. Particularmente, el caso de átomos confinados en una caja de volumen V permite, a través de la ecuación (1.2), llegar a la conclusión que la existencia de la condensación de Bose es consecuencia de que la función de Bose toma un valor finito cuando el potencial químico alcanza su valor máximo. En la Figura (A.1) se ilustra la dependencia de $g_{3/2}$ como función de μ a una temperatura dada T . Se desprende de dicha figura la existencia de una temperatura crítica T_c a una densidad fija para la cual $\mu = 0$

$$\lambda^3(T_c) \frac{1}{g_{3/2}(0)} = \frac{N}{V}. \quad (1.3)$$

Es importante recalcar que la ecuación (1.2) es válida estrictamente para describir el número de partículas cuando $\mu \leq 0$. Dado que μ no puede tomar valores positivos, un decremento en la temperatura dará lugar a poblar ma-

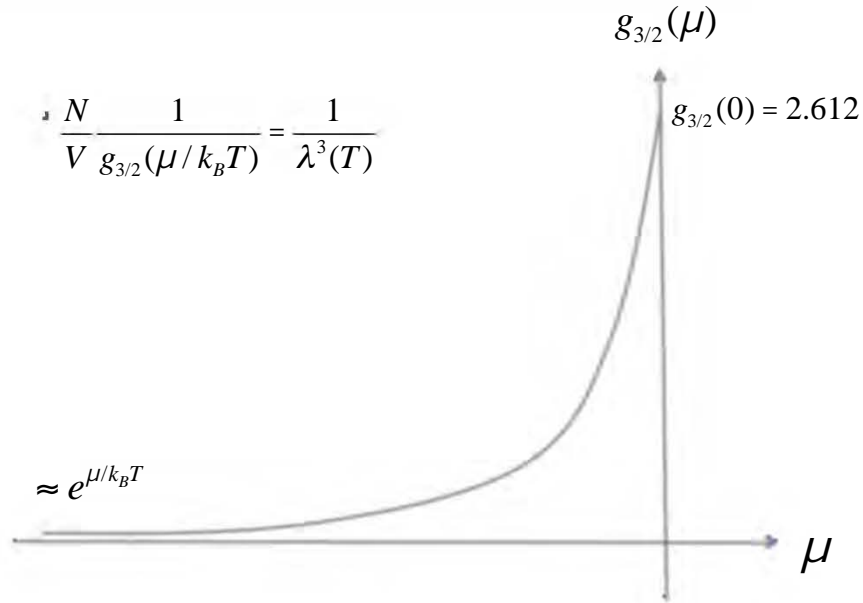


Figura 1.1: Se ilustra el comportamiento de la función de Bose $g_{3/2}$, como función del potencial químico μ .

croscópicamente el estado base de una partícula. Por lo tanto se afirma que potencial químico es la variable que determina la ocurrencia de la transición a la fase condensada.

1.2. Producción de átomos ultrafríos

El principal problema de la comprobación experimental de la existencia de un Condensado de Bose-Einstein, es que dicho estado solo puede observarse a temperaturas del orden de milésimas de μK . Y es hasta el año de 1995 con el experimento de Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle, Carl E. Wieman

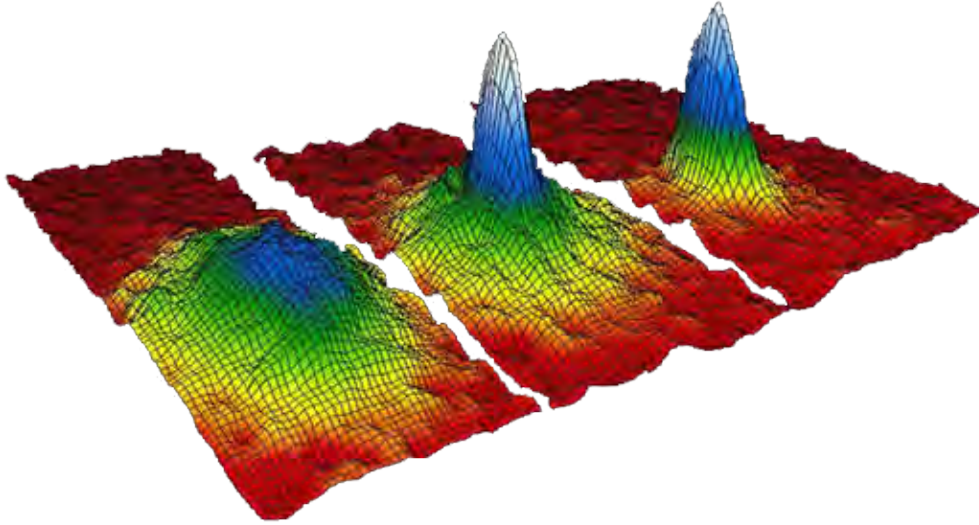


Figura 1.2: *En ésta imagen se observa la distribución de velocidades de una gas de bosones. La primera imagen corresponde a un gas sin condensación, la siguiente es un instante justo después de que se logra bajar por debajo de la T_c . La tercera imagen muestra un condensado con un menor número átomos, pero sigue siendo una fase de condensado. La altura de los picos representa el número de átomos en función de la velocidad, siendo el pico más alto a los átomos con energía cercana al cero.*

[2], que mediante el métodos de enfriamiento láser y confinamiento magnético, se logra el condensado. Pero para poder lograr ésta transición de B-E, se dieron grandes avances en las técnicas de desarrollo de trampas y enfriamiento de átomos. En cuestión de enfriamiento se aprovecharon las propiedades del LASER, ya que su gran intensidad y capacidad de direccionarlo ofrecen una densidad tanto de energía y momento a la que no se podría llegar con otras fuentes de luz convencionales. El desarrollo de éstos (ya sean continuos o de pulsos) fue una contribución de gran importancia como herramienta experimental.

La idea de enfriar átomos mediante el uso de la luz (originalmente pro-

puesta por T. W. Hänsch and A. L. Schawlow en 1975 pero llevada a cabo por V. I. Balykin and V. S. Letokhov hasta 1987) es debida a que la presión de la radiación puede afectar de manera mecánica sobre los átomos en este caso. Pero cabe mencionar que éstas teorías y técnicas pueden tener diferentes objetivos en específico como veremos a continuación. En el siguiente apartado se revisan algunos conceptos y funcionamiento del enfriamiento y confinamiento de los átomos.

La primera idea que llega a la mente de alguien cuando se habla de láseres es que son fuentes de luz muy concentradas las cuales pueden llegar a ser utilizados para cortar o calentar objetos. Pero gracias a efectos puramente cuánticos se puede lograr que los átomos disminuyan su velocidad al crear una interacción con el campo electromagnético de la luz láser, logrando que de manera efectiva se disminuya la temperatura de la muestra macroscópica. Esto es, se pueden crear diferentes efectos dependiendo tanto de las características de los láseres (longitud de onda, intensidad, polarización, etc) como de los átomos (elementos alcalinos en el caso de enfriamiento por bombeo óptico) que de forma beneficiosa se pueden utilizar en los experimentos. Principalmente podemos considerar 2 grados de libertad para un átomo: los internos (como son la estructura electrónica interna o el espín) y los externos (que son principalmente la posición y el momento del centro de masa).

Es muy importante tomar en cuenta el tipo de láser que se utiliza para los experimentos porque dependiendo de la interacción del campo eléctrico (en concreto el tipo de polarización) con los átomos se pueden alterar alguno de los 2 tipos de grados de libertad que se consideran para éstos. De cierta manera podemos recurrir al efecto Zeeman o al efecto Stark como un primer ejemplo de las consecuencias de ésta interacción.

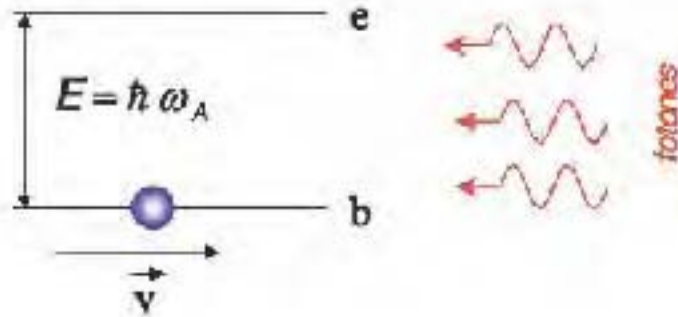


Figura 1.3: Modelo de un átomo de dos niveles que se mueve en una dimensión. En dirección contraria se mueven fotones los cuales al transferir momento al átomo, por lo que éste comienza a bajar su velocidad y por tanto la temperatura del gas de átomos.

1.2.1. Enfriamiento por efecto Doppler

Actualmente existen muchas técnicas de enfriamiento de átomos y es que como habíamos mencionado en los primeros párrafos de ésta introducción, con el tiempo se han perfeccionado las técnicas para desarrollar sistemas con temperaturas cada vez menores. El típico método de enfriamiento por láser se basa en el uso del efecto Doppler cuya principal idea física es la siguiente: La idea enfriamiento láser consiste en frenar a los átomos (alcalinos o hidrogenoides, ya que en su configuración electrónica presentan sólo un electrón en la última capa, son los que más regularmente se utilizan para éstos experimentos) de un gas con los fotones emitidos por una fuente láser. La esencia consiste en tratar a éste átomo como un sistema de 2 niveles b (base) y e (excitado) que se mueve en una sola dirección, y en dirección contraria se dirige hacia éste un haz de fotones que poseen la energía necesaria para poder ser absorbidos por el átomo, así que habrá un retroceso en el movimiento del átomos por efecto del momento del fotón absorbido. Tiempo después de absorberlo, el átomo emitirá un fotón con la misma energía pero puede ser emitido en cualquier dirección. Si éste proceso se repite varias veces en promedio la emisión de los fotones generará un cambio neto cero sobre el átomo,

por el carácter aleatorio de la emisión. Es por esto que el átomo pierde energía y por lo tanto un gas empieza a bajar su temperatura.

En la práctica se debe tomar en cuenta el efecto Doppler. Desde el sistema de referencia del átomo el fotón se dirige en dirección hacia éste, por lo que la frecuencia del fotón aumenta y por tanto la energía de ésta también lo hará. Es por ésta razón que en los experimentos se deben utilizar frecuencias por debajo de las necesarias para que un fotón sea absorbido por el átomo.

En los experimentos realizados [3] se utilizan una serie de 6 láseres (2 contrapropagándose en los 3 ejes cartesianos). Los átomos que son enfriados y contenidos en las intersecciones de los láseres, forman lo que comúnmente como “melaza óptica o enfriamiento Sísifo”. Las temperaturas típicas que se alcanzan en éstos sistemas son del orden de $T \approx 100 \mu K$.

1.2.2. Melaza óptica: El enfriamiento Sísifo

El límite de la temperatura Doppler puede ser llevado muy por debajo mediante el uso de un nuevo modelo llamado enfriamiento Sísifo o por gradiente de polarización, que lleva a $T \approx 10 \mu K$.

El principio físico que se utiliza en este tipo de enfriamiento es una ampliación del enfriamiento Doppler. Éste mecanismo de enfriamiento está basado en el bombeo óptico sobre los subniveles Zeeman del estado base (llamado así por el efecto Zeeman). Los procesos implicados en éste enfriamiento son el Desplazamiento Luminoso, el bombeo óptico y el gradiente de polarización explicados brevemente en [4].

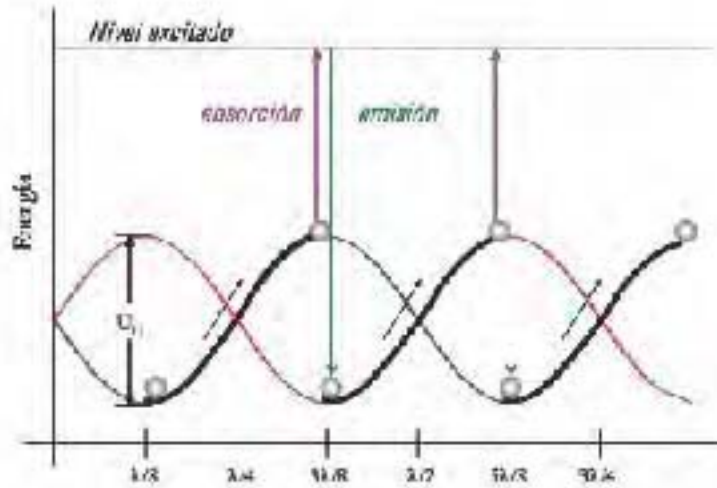


Figura 1.4: Esquema del enfriamiento Sísifo para átomos en 1-D. Se puede observar que conforme se avanza su posición absorbe fotones menos energéticos para llegar al estado excitado de los que emite para volver a su estado base.

Tomando el caso en 1-D, la manera en que funciona éste método es utilizando 2 láseres propagándose en dirección opuesta con polarizaciones perpendiculares, generando ondas estacionarias con un gradiente de polarización. La combinación de los 3 efectos anteriormente mencionados provocan que la energía de los átomos dentro de la melaza óptica dependa de la posición. Entonces si un átomo con cierta energía cinética se encuentra en un valle de las ondas estacionarias éste pierde cierta energía cinética tratando de “escalar” la cima del potencial inducido. Al llegar a la cima del potencial, éste es bombeado de nuevo a un valle donde si cuenta con suficiente energía cinética vuelve a repetirse éste proceso. Eventualmente la pérdida de energía cinética del total de átomos causara un descenso de la temperatura en el gas. Mediante éste enfriamiento se llegaron a obtener $T \approx 10\mu K$ en el año de 1988 [5].

1.2.3. Enfriamiento por evaporación

El enfriamiento por evaporación fue demostrado con átomos de hidrogeno atrapados magnéticamente (Hess 1987) ha sido una técnica de gran importancia para conseguir la condensación de Bose-Einstein en trampas magnéticas (Ketterle y van Druten, 1996).

Una manera de ejemplificar éste proceso es considerando el enfriamiento en una taza de café. Si queremos que la temperatura del café disminuya, debemos sustraer o evaporar las moléculas con mayor energía cinética, para que mediante una termalización los átomos, a través de colisiones elásticas, obtengan una temperatura menor a la que estaban.

Este método requiere una alta densidad de partículas para asegurar garantizar una tasa rápida de termalización, y una gran número inicial de partículas ya que una importante fracción de átomos atrapados es eliminada de la trampa por evaporación [4].

El problema en las trampas dipolares, es que los átomos quedan confinados muy estrechamente, como es el caso de las trampas cruzadas, se pueden alcanzar picos de altas densidades, pero el volumen de atrapamiento, y el número de partículas que son transferidas es reducido. Es por esto que se utilizan métodos de pre-enfriamiento con grandes ensembles en trampas dipolares.

1.3. Trampas de átomos ultrafríos

En las secciones anteriores se discutieron las diferentes técnicas con las que logran que los átomos empiecen a desacelerarse, lo que significa una disminución en la energía cinética de los mismo, es por ello que la temperatura del gas comienza a descender. Ahora se da una breve explicación de los métodos

y técnicas con las que se confina a dichos sistemas.

Existen 3 principales interacciones por las cuales pueden atraparse átomos neutros:

1. *Trampas de presión de radiación*: Usualmente tienen una profundidad de algunos Kelvin. El ensamble atómico es del rango de unos $10\mu K$.
2. *Trampas Magnéticas* : Se basan en la fuerza dependiente del estado del momento dipolar magnético en campo inhomogéneo. Son excelentes para enfriamiento por evaporación y la condensación de Bose-Einstein.
3. *Trampas ópticas dipolares* : Se basa en la interacción dipolar eléctrica con la luz “desintonizada”, la cual es mucho mas débil que las anteriormente mencionadas.

A continuación se presenta una revisión de los fundamentos físicos que permiten la realización de éstos confinamientos.

1.3.1. Trampas ópticas dipolares

La fuerza dipolar óptica surge de la interacción del momento dipolar atómico inducido con el gradiente de intensidad del campo de luz (Askaryan, 1962; Kazantsev, 1973; Cook,1979; Gordon and Ashkin, 1980) [4].

A continuación se deducen las ecuaciones básicas para un potencial dipolar y la tasa de dispersión considerando al átomo como un simple oscilador sujeto a un campo clásico de radiación. Cuando éste es sometido a un haz de luz láser, el campo eléctrico \vec{E} de éste induce un momento dipolar \vec{p} que oscila con una frecuencia ω . Así que escribimos $\mathbf{E}(r,t)=\hat{e}\tilde{E}(r) \exp(-i\omega t) + c.c.$ y $\mathbf{p}(r,t)=\hat{e}\tilde{p}(r) \exp(-i\omega t) + c.c.$, donde \hat{e} es un vector unitario de polarización, la amplitud \tilde{p} del momento dipolar esta relacionado de la siguiente manera:

$$\tilde{p} = \alpha\tilde{E} \tag{1.4}$$

donde α es la *polarizabilidad compleja* [4].

El potencial de interacción del momento dipolar inducido \vec{p} por el campo \vec{E} está dado por:

$$U_{dip} = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \mathbf{Re}(\alpha) \mathbf{I} \quad (1.5)$$

donde los signos “ $\langle \rangle$ ” denotan un promedio en el tiempo sobre los términos que oscilan ya que las oscilaciones del campo eléctrico de la luz tiene velocidades demasiado grandes, la intensidad del campo $I = 2\epsilon c |\vec{E}|^2$.

La energía absorbida por el oscilador en el campo (y re-emitada como radiación dipolar) está dada por:

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \mathbf{Im}(\alpha) \mathbf{I} \quad (1.6)$$

Por último si consideramos a la luz como un flujo de fotones $\hbar\omega$, la absorción puede ser interpretada en términos de dispersión de átomos en ciclos de absorción y emisión espontáneos. La correspondiente tasa de dispersión es:

$$\Gamma_{sc}(r) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \mathbf{Im}(\alpha) \mathbf{I} \quad (1.7)$$

Para calcular α , es decir, la polarizabilidad, el átomo es considerado dentro del modelo de Lorentz como si fuera un oscilador clásico, donde el electrón esta unido elásticamente al núcleo con una oscilación-propia ω_0 correspondiente la frecuencia de transición óptica. El resultado que se obtiene en ese marco es:

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma_\omega} \quad (1.8)$$

donde $\Gamma_\omega = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3}$ es el índice de amortiguamiento clásico debido a la pérdida de energía radiativa. Y sustituyendo se obtiene:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma_\omega} \quad (1.9)$$

introduciendo el índice de amortiguamiento de resonancias $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega^2)\Gamma$. En este caso de estudio las expresiones generales para la tasa de dispersión y el potencial dipolar son:

$$U_{dip}(r) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(r) \quad (1.10)$$

$$\Gamma_{sc}(r) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(r) \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones muestran diferentes características muy importantes para el atrapamiento dipolar [4]:

1. *Signo de la desintonización* Dependiendo del signo de Δ se pueden obtener una desintonización roja ($\Delta < 0$) en la cual existe una atracción de átomos dentro del campo de la luz o azul ($\Delta > 0$) en la cual la interacción dipolar repele los átomos para fuera del campo.
2. *Orden de magnitud con intensidad y desintonización* Para trampas dipolares ópticas regularmente se necesitan grandes desintonizaciones y altas intensidades para mantener la tasa de dispersión lo mas baja posible.

1.3.2. Trampas Magnéto-Ópticas

Este tipo de trampas, conocidas como MOT (por sus siglas en inglés Magneto-Optical Traps), utilizan una configuración como la de la figura (1.5). Los haces tienen polarizaciones circulares opuestas (σ^+ y σ^-), las espiras tienen corrientes opuestas, las cuales producen un campo magnético cuadrupolar. Como es bien sabido, la acción de un campo causa un desdoblamiento de los niveles energéticos de los átomos. Si el átomo tiene un momento magnético

\vec{F} y un número cuántico magnético m_F , que es la proyección del momento angular a lo largo de la dirección z , la energía debida a un campo magnético esta dada por:

$$E(m_F) = g\mu_B m_F B \quad (1.12)$$

donde g es el factor de Lande y μ_B es el magnetón de Bohr.

Como se muestra en la figura (1.5), en el punto medio de las espiras el campo $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ y cerca de éste punto se puede considerar que varía linealmente con la posición. Ahora analicemos el caso en la dirección z (y se puede extender a los ejes x y y porque debido a que $\text{div } \mathbf{B} = \mathbf{0}$).

Si un átomo con un momento $J = 0$ con transición a $J = 1$, esta sometido a un campo magnético, tiene un desdoblamiento de subniveles (llamado desdoblamiento Zeeman) $M_J = \pm 1$ $M_J = 0$. Los 2 haces con propagaciones opuestas a lo largo del eje z tienen polarizaciones opuestas (σ^+ y σ^-) y además tienen un frecuencia por debajo de la de resonancia atómica. Cómo podemos ver en las figs. 1.5 y 1.6 si un átomo se desplaza a la derecha el estado de ΔM_J se acercará a la frecuencia de resonancia atómica. El átomo en ese estado sólo puede absorber fotones con polarización σ^- , así que el fotón absorbido aplica una fuerza de dispersión sobre el átomo que lo hace retroceder hacia el centro de la trampa. Lo mismo sucede con los átomos que se desplazan a la izquierda, sólo que éstos absorben los átomos σ^+ [6].

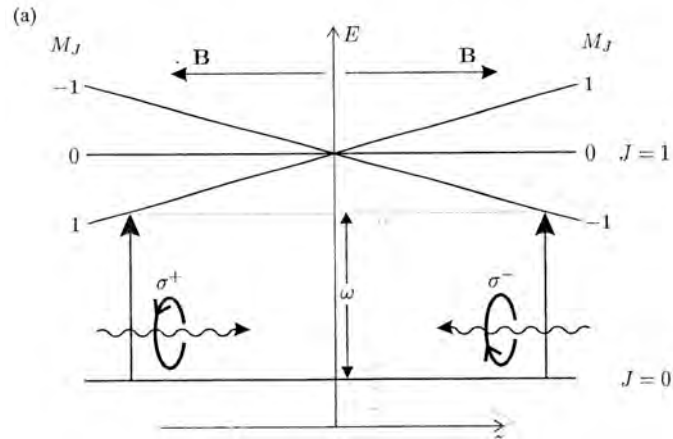


Figura 1.5: Diagrama en el cual se muestra que dependiendo de la posición de algún átomo, éste puede absorber los fotones con polarización positiva o negativa debido a las diferencias energéticas de los subniveles M_J .

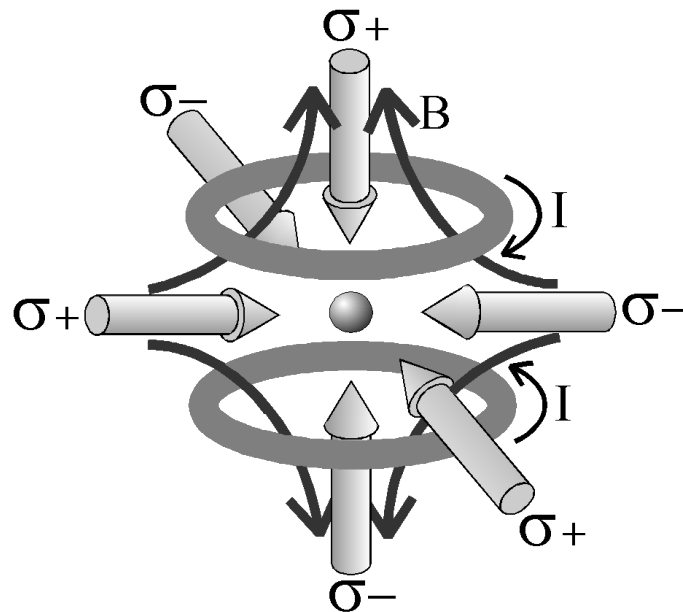


Figura 1.6: Esquema de una MOT, donde se muestran los rayos láser propagándose en las 3 direcciones de los ejes cartesianos con diferentes polarizaciones y las 2 bobinas que producen un campo magnético.

Matemáticamente podemos obtener [6] que la fuerza de una MOT puede ser descrita como:

$$F_{MOT} = -\alpha - \frac{\alpha \beta}{k} z \quad (1.13)$$

Esta es una ecuación de movimiento de un oscilador con una constante de restitución $\frac{\alpha\beta}{k}$. Bajo condiciones típicas de operación el átomo es sometido a un movimiento armónico simple sobreamortiguado [6]. Así que los átomos que se encuentran en la zona de intersección de los haces láser son desacelerados y la fuerza dependiente de la posición los empuja hacia el centro de la trampa armónica.

1.4. Gases de Bose en Redes Ópticas de 1-D.

La condensación de un gas ideal no ocurre a una temperatura finita en un sistema homogéneo en 1D y 2D. Sin embargo si es posible que ocurra en un sistema inhomogéneo en 2D. A pesar de que en el límite termodinámico para el caso de 1-D se predice que no es posible conseguir un BEC se demostró que con una trampa de átomos que sea lo suficientemente estrecha éste puede ser logrado [7]. Por otro lado vale la pena resaltar que experimentalmente dichos sistemas tienden a ser muy susceptibles a las excitaciones térmicas [9].

En la sección anterior se mencionaron algunas técnicas de enfriamiento y confinamiento de átomos, pero es importante mencionar que es sólo a través de una serie de procesos de enfriamiento por los cuales se puede alcanzar la temperatura para conseguir un gas de Bose condensado. Uno de los logros más importantes en materia de átomos ultrafríos ha sido ésta tarea, logrando por primera vez el confinamiento óptico de un BEC por grupo en MIT, Cambridge (Stamper-Kurn en 1998). Una vez que se ha conseguido el estado de la condensación de Bose se utilizan diferentes métodos de confinamiento como son las llamadas *trampas dipolares ópticas* para estudiar su subsecuen-

te evolución y propiedades.

Adicionalmente a la variedad de técnicas de atrapamiento y enfriamiento de átomos, se puede encontrar que debido a las diferentes configuraciones en que son colocados los láseres, es posible crear trampas en 1, 2 o 3 dimensiones y mas aún, se pueden producir trampas con geometrías variadas, a manera de investigar las diferentes propiedades que se quieran medir (estabilidad, coherencia de fase [10] y transiciones [11]).

Además de la importancia del hecho mismo de poder llegar a temperaturas tan cercanas al cero absoluto, los experimentos con gases de Bose y Fermi permiten reproducir fenómenos y predicciones que se presentan en el Estado Sólido, entre otros, la transición BEC-BCS, la localización de Anderson, el efecto Josephson [8]. En particular, en este último es posible observar la transición entre la fase superfluida a la fase de aislante Mott como lo sugirió Peter Zoller en 1998.

Pero todos los experimentos antes mencionados son realizados con átomos neutros por lo que se debe analizar lo que sucede en éste tipo de gases (en concreto con los átomos que tienen momento dipolar eléctrico o magnético) y si es que hay alguna alteración en las propiedades de éstos al momento de interactuar con los fotones de los láseres. La motivación de éste trabajo radica en el estudio de los gases dipolares en potenciales en 1-D.

1.5. Gases Dipolares

El interés de estudiar las interacciones en gases cuánticos, yace en el hecho de que interesantes propiedades se han predicho e incluso encontrado en éstos sistemas [12], [14], sobre todo en las interacciones dipolares, ya sean de carácter eléctrico o magnético. Pero en el caso muy especial de un BEC en

1-D, sabemos que la interacción entre partículas en un gas cuántico es un factor determinante en comportamiento de dichos sistemas. Es importante resaltar que debido a la capacidad de control, tanto del potencial externo, como de las interacciones entre los átomos es posible recrear el contexto adecuado para reproducir los escenarios propios de la Materia Condensada arriba citados. Recientes experimentos en los cuales se utilizan átomos de ^{52}Cr (debido a que tienen un momento dipolar muy grande $\mu = 6\mu_B$), han demostrado que mediante el uso de la resonancia de Feshbach se puede variar el parámetro a [14], llamado longitud de dispersión, aplicando un campo magnético B mediante la siguiente relación [13, 12]:

$$a = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.14)$$

donde a_{bg} es la longitud de dispersión de fondo y Δ es el ancho de resonancia del campo magnético. Este parámetro describe los choques o colisiones entre partículas en el límite de bajas energías y caracteriza su dispersión. Para medir la relativa fuerza de la interacción magnética dipolo-dipolo (MDDI por sus siglas en inglés) con la interacción de contacto se utiliza un cociente adimensional:

$$\epsilon_{dd} = \frac{\mu_0 \mu^2 m}{12\pi \hbar a} \quad (1.15)$$

donde m es la masa atómica, a es la longitud de dispersión de la onda-s (de la cual se hablará mas a detalle en el capítulo 2) y μ es el momento magnético. Dado que el ^{52}Cr tiene una longitud de dispersión de fondo en el caso totalmente polarizado $a \approx 100a_0$, siendo a_0 el radio de Bohr, se fija el valor de $\epsilon_{dd} \approx 0,16$. Pero para B aproximándose a $B_0 + \Delta$ la longitud de dispersión tiende a cero, por lo que hay un mejoramiento de ϵ_{dd} , es decir, se mejora la posibilidad de obtener un gas dominado por las interacciones MDDI.

Un BEC de Cromo, presenta ventajas experimentales importantes que com-

prueban algunas hipótesis teóricas que se suponen en el estudio de éste tipo de gases. Y es que no sólo se puede realizar un ajuste de la interacción de contacto de corto alcance mediante el uso de resonancias de Feshbach [15], sino que también se pueden estudiar el carácter anisotrópico y de largo alcance de la interacción dipolar. Esto es posible debido a la estructura electrónica única que presenta éste elemento en comparación con los otros elementos en condensados. Dadas sus propiedades electrónicas [12], su MDDI tiene un factor 36-veces más grande que para los átomos alcalinos.

Otro aspecto importante que se debe tomar en cuenta es la estabilidad de los gases dipolares cuánticos. Ya que debido a la a la anisotropía de la interacción dipolo-dipolo, la estabilidad de un BEC dipolar no solo depende de la fuerza de interacción de contacto, sino también de la geometría de atrapamiento. Utilizando una combinación del tipo de trampa (forma geométrica) y el tipo de orientación en los que se disponen los dipolos de las partículas es posible ajustar la longitud de dispersión a cero, obteniendo al final un gas puramente con interacciones dipolares [15].

Debido que a la interacción de contacto entre las partículas, a pesar de las temperaturas cercanas al cero absoluto en las que se encuentran, dependiendo del valor de a de la ecuación (1) se crea una estabilidad en el sistema. Aunque en el caso puramente dipolar, no solo se ha encontrado que cuando se llega a un punto crítico para la longitud de dispersión en la cual la forma del BEC cambia de geometría como una muestra de los efectos de la interacción dipolar, los resultados experimentales sostienen que usando una trampa del forma de “panqueque” es posible entrar al régimen de un gas de interacciones puramente dipolares [15]. Esta propiedad es de vital importancia para el estudio teórico, ya que la configuración de las partículas se podría limitar el tipo de interacción entre las partículas.

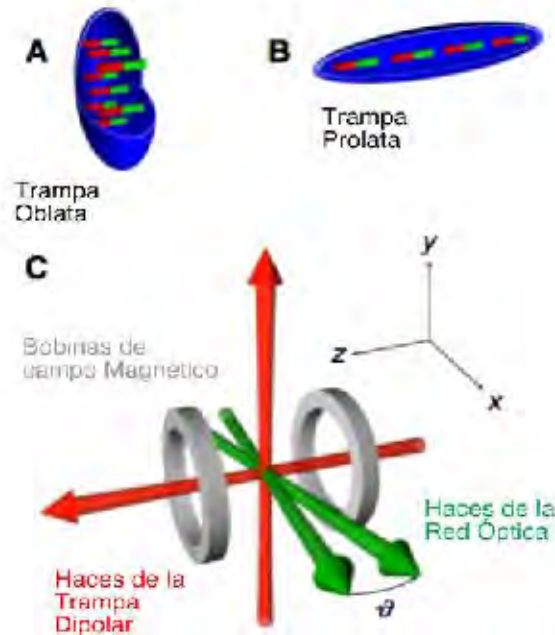


Figura 1.7: Esta es una imagen ilustrativa de la dependencia geométrica de una trampa óptica con respecto a la estabilidad de un BEC. La imagen 1A muestra una trampa con forma de esferoide oblato con dipolos que principalmente se repelen, mientras que en la trampa en forma de esferoide prolato (la comúnmente denominada “forma de cigarro”), donde las interacciones dipolares son principalmente atractivas. La imagen 1C muestra como es que se realiza una trampa magneto-óptica para estabilizar un gas puramente dipolar. Imagen tomada de [15]

El motivo de éste trabajo es tomar como base los experimentos en los cuales investigan ya sea la estabilidad de un BEC dipolar lo cual depende no solo de la interacción de contacto sino también de la geometría [12], la gran influencia que tienen los efectos polares en un ferrofluido cuántico y poder descubrir propiedades únicas en los ferrofluidos cuánticos [15] y por último estudian la dinámica de colapso de un BEC cuando a es disminuida por debajo de una a_{crit} .

Capítulo 2

Hamiltoniano de una gas dipolar de bosones en un potencial de tres pozos

En Mecánica Cuántica, el estudio de un sistema microscópico se realiza principalmente mediante el Hamiltoniano que describe a dicho sistema. En éste se manifiestan además de la energía cinética todo tipo de interacciones que pueden darse, como son los potenciales de interacción, ya sean externos o internos. Como sabemos el estudio de sistemas con un número mayor a 2 cuerpos no tiene solución exacta o se utilizan métodos aproximados. Tal es el caso del problema a resolver en éste trabajo. Típicamente en los experimentos en los que se logra exitosamente llegar a un *BEC*, se atrapan alrededor de ($\approx 10^4$ átomos) [12, 14, 15, 17] las cuales están sometidos a interacciones tanto dipolares como de contacto. El estudio teórico de estos sistemas de muchas partículas se realiza o bien en el esquema de campo medio [19, 20, 21, 22] o dentro del esquema cuántico [23, 24]. Si se desea abordar el problema desde el contexto cuántico, la herramienta natural es el formalismo de segunda cuantización. En este capítulo se aborda dicho formalismo para después escribir los términos del Hamiltoniano en ésta descripción. Es

importante recalcar que si bien es cierto que los grados internos de libertad de los átomos de ^{52}Cr son determinantes para poder lograr la transición de fase a *BEC* en el análisis teórico que a continuación se expone, se considera a dichos átomos como partículas sin estructura interna, con un momento magnético o eléctrico dado. En la primera sección se discutirá la parte del Hamiltoniano en la que se integran la energía cinética y el potencial de confinamiento. Es por eso que en este capítulo se deduce un Hamiltoniano que pueda describir tanto los estados estacionarios como la dinámica de los gases cuánticos dipolares en 3 pozos de potencial en 1-D.

2.1. La Mecánica Cuántica de N cuerpos

Consideremos un gas de N partículas con masa m y espín s , cuyo Hamiltoniano es:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) + \sum_{i=1}^N V_{ext}(\vec{r}_i) \quad (2.1)$$

donde $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ es el potencial de interacción entre las partículas i y j y V_{ext} es un potencial externo que actúa solamente sobre la partícula i . Para este Hamiltoniano, la ecuación de Schrödinger esta dada por:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t) = H \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t) \quad (2.2)$$

donde $\Psi(t)$ es el estado del sistema de N -partículas. Usualmente lo que se propone es expandir la función de onda de varias partículas Ψ en un conjunto completo de funciones de onda de una partícula independientes del tiempo, que cumplen ciertas condiciones a la frontera. La base de funciones de onda que se escoja depende del tipo de problema, ya sea para describir un sólido o un sistema de electrones interactuando en un átomo.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N; t) = \sum_{E_1, \dots, E_N} C(E_1, \dots, E_N, t) \psi_{E_1}(x_1), \dots, \psi_{E_N}(x_N) \quad (2.3)$$

En éste caso, el sistema que se va a estudiar es un sistema de 3 pozos de potencial en 1-D simétricos. Se asume que los pozos de potencial V_{ext} que confinan a las partículas son lo suficientemente profundos para que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Existen n -niveles energéticos por debajo de las barreras de potencial entre los pozos.
2. Cada nivel energético esta igualmente espaciado.

Bajo esas suposiciones nuestra base serán las funciones de onda estacionarias $\phi_k(x) = \langle x|k\rangle$, $k = 0, \dots, n - 1$ que son los n estados ligados más bajos de una partícula en el potencial V_{ext} . Debido a éste potencial es una función par, las funciones de onda tienen una paridad definida. La otra base que se utilizará es la de las funciones localizadas $\psi_i(x) = \langle x|i\rangle$ donde i es el número de pozo del potencial [25, 26]. La razón por la cual se utilizan las funciones de onda localizadas de una partícula es porque experimentalmente la información a la que se tiene acceso es a la determinación del número de partículas en cada pozo.

Ya que el Hamiltoniano se puede dividir en los términos de energía cinética y potencial, es de suma importancia enfatizar que el operador de energía cinética únicamente actúa una a una sobre las funciones de onda de “una-partícula”, mientras que para la energía de interacción, involucra una mayor dificultad, porque dependiendo del tipo de sistema que se quiere describir, en el caso de los términos de interacción incluyen coordenadas de 2 o más partículas.

La función de onda de varias-partículas puede tener la siguiente propiedad:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t) = \pm \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N; t) \quad (2.4)$$

Lo que muestra la ecuación (2.4) es que dependiendo del tipo de partículas que se estén estudiando bosones o fermiones, la función de onda debe ser simétrica o antisimétrica bajo el intercambio de coordenadas para cualesquiera 2 partículas.

2.1.1. Bosones

Como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de éste trabajo es el estudio de un BEC confinado en un potencial de 3 pozos en 1-D, razón por la cuál se introducen los vectores de estado: $|n_1, n_2, \dots, n_\infty\rangle$, donde $|n_1\rangle$ significa que existen n_1 partículas en el estado 1, $|n_2\rangle$ existen n_2 en el estado 2 y así sucesivamente [29, 30]. Entonces ésta base debe cumplir con las propiedades de ortonormalidad y completas.

$$\langle n'_1, n'_2, \dots, n'_\infty | n_1, n_2, \dots, n_\infty \rangle = \delta_{n'_1, n_1} \delta_{n'_2, n_2} \dots \delta_{n'_\infty, n_\infty}; \text{ortonormalidad} \quad (2.5)$$

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_\infty} |n_1, n_2, \dots, n_\infty\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_\infty| = 1; \text{completas} \quad (2.6)$$

Y asociados a éstos estados de ocupación, los operadores independientes del tiempo llamados de creación y aniquilación (a^\dagger y a , respectivamente) los cuales satisfacen las reglas de conmutación siguientes:

$$[a_\kappa, a_{\kappa'}^\dagger] = \delta_{\kappa, \kappa'}; [a_\kappa, a_{\kappa'}] = [a_\kappa^\dagger, a_{\kappa'}^\dagger] = 0 \quad (2.7)$$

Con éstas bases podemos escribir un Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación, que actúan sobre la base de los vectores de estado. Cabe recalcar que todas las propiedades estadísticas y de operadores

se encuentran contenidas en los operadores de creación y aniquilación. El tratamiento detallado de cómo es que podemos llegar de la ecuación (1) a la ecuación final puede encontrarse en una variedad de libros, entre otros los que se encuentran en la referencias [28, 29] .

El Hamiltoniano (1) puede ser escrito en términos de operadores de creación y aniquilación y de las funciones de onda en los estados de la base completa:

$$\hat{H} = \sum_{i,j} a_i^\dagger \langle \phi_i | \hat{H}_0 | \phi_j \rangle a_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger \langle \phi_i \phi_j | \hat{U} | \phi_k \phi_l \rangle a_k a_l \quad (2.8)$$

Donde $\hat{H}_0 = T + V_{ext}$ que es la suma de la energía cinética T y el potencial externo V_{ext} que confina a los átomos en la trampa óptica. El término \hat{U} es la suma en este caso, de los potenciales de interacción de contacto u_{cont} y el de interacción dipolar u_{dd} .

En las siguientes secciones se estudiará por separado a los términos H_0 y U , de tal forma que finalmente podamos obtener un Hamiltoniano que represente al sistema descrito en la introducción.

2.2. Gas de Bosones ideal en un pozo de potencial

Ahora consideremos el caso más ideal en el cual tenemos un gas de átomos de Bose con masa m confinados en un potencial de 3 pozos en 1-D y dichas partículas no tienen interacción alguna. Para estudiar el caso ideal se tomarán las suposiciones de la primera sección del capítulo:

1. Se tomarán solamente las 3 energías $\epsilon_0, \epsilon_1, y \epsilon_2$ más bajas con sus respectivas funciones de onda estacionarias $\phi_0, \phi_1 y \phi_2$

Como no hay potencial de interacción de ningún tipo $\hat{V} = 0$. Así que podemos reescribir la ecuación (8) para el caso ideal de la siguiente manera:

$$\hat{H} = \sum_{i,j=0}^2 a_i^\dagger \langle \phi_i | \hat{H}_0 | \phi_j \rangle a_j \quad (2.9)$$

Para obtener una expresión más sencilla debemos recordar que:

$$\langle \phi_i | T + V_{ext} | \phi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_i(x) (T + V_{ext}) \phi_j^*(x) \quad (2.10)$$

La integral anterior se puede resolver mediante métodos numéricos [25]. Tomando éstos resultados podemos reescribir el Hamiltoniano (9) de la siguiente manera:

$$H_0 = \sum_{k=0}^2 \epsilon_k a_k^\dagger a_k = \epsilon_0 a_0^\dagger a_0 + \epsilon_1 a_1^\dagger a_1 + \epsilon_2 a_2^\dagger a_2 \quad (2.11)$$

donde ϵ_k es la energía del estado estacionario $\phi_k(x)$.

Podemos mediante una transformación lineal cambiar de la base de las funciones de onda ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 con los respectivos operadores de creación y aniquilación a_k (u operadores bosónicos) a la base de las funciones de 1-partícula localizadas ψ_1, ψ_2 y ψ_3 también con sus respectivos operadores bosónicos b_i . La transformación lineal que relaciona las bases $\{\phi_i, a_i\}$ y $\{\psi_i, b_i\}$ esta dada como sigue [27]:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2} [\psi_1(x) + \sqrt{2}\psi_2(x) + \psi_3(x)]; \quad a_1^\dagger = \frac{1}{2} [b_0^\dagger + \sqrt{2}b_1^\dagger + b_2^\dagger] \quad (2.12)$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} [\psi_0(x) - \psi_2(x)]; \quad a_2^\dagger = \frac{1}{2} [b_0^\dagger - b_2^\dagger] \quad (2.13)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2} [\psi_0(x) - \sqrt{2}\psi_1(x) + \psi_2(x)]; \quad a_3^\dagger = \frac{1}{2} [b_0^\dagger - \sqrt{2}b_1^\dagger + b_2^\dagger] \quad (2.14)$$

Tomando éstas transformaciones podemos reescribir el Hamiltoniano (11) de la siguiente manera:

$$H_0 = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}}(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_3 + b_3^\dagger b_2) \quad (2.15)$$

donde $\Delta = \epsilon_k - \epsilon_{k-1}$. Este Hamiltoniano sin interacción se puede interpretar de la siguiente manera. Cada uno de los b_i tienen asociados un pozo de potencial, por lo que se puede leer para el primer término de la suma que mientras se crea una partícula en el pozo 1, se aniquila una partícula en el pozo 2 y así sucesivamente en los siguientes términos de la suma. Es decir, las partículas van tuneleando entre los pozos, pero solo pueden hacerlo entre pozos adyacentes.

En principio debido a que no existen interacciones entre las partículas, éstas podrían tunelear libremente entre los pozos, incluso en una primera idea, el conjunto de partículas debería tunelear como un sola partícula. Pero el hecho de que en el Hamiltoniano H además de contar con el potencial externo V_{ext} , sea relevante la presencia de las interacciones, modificará las propiedades estacionarias y dinámicas del sistema bajo estudio. En lo que sigue se considera el término que representa la interacción U , tomando en cuenta que cada partícula sólo puede tomar los primeros 3 niveles energéticos dentro de los pozos.

2.3. Interacción de contacto de partículas.

A pesar de que en los en los experimentos para obtener un BEC de ^{52}Cr [17] son tales que los gases atómicos se encuentran a muy bajas temperaturas (en el capítulo anterior se mencionan temperaturas del orden de nK) y son muy

diluidos, las interacciones entre partículas aun son importantes, pues dan lugar a significativas repercusiones en el comportamiento de éstos sistemas como la existencia de diferentes fases. Sin embargo, como resultado de las bajas densidades a las que se encuentran solo las interacciones de contacto se presentan de manera efectiva entre pares de partículas. Además, dado que las energías involucradas en procesos de recombinación son muy diferentes a las que energías que poseen los átomos que colisionan, podemos tratarlas como partículas sin estructura interna, es decir, que la energía con que interactúan no es suficiente como para deformar la configuración electrónica ni el núcleo de los átomos.

2.3.1. Teoría de dispersión general y bajas energías entre partículas

Si se toma el problema mas general en el cual 2 partículas interactúan vía un potencial $u(r_1 - r_2)$ que sólo depende de las coordenadas relativas $r = r_1 - r_2$ entre éstas 2 partículas. La correspondiente ecuación de Schrödinger de 2 cuerpos se separa en una parte que describe el movimiento del centro de masa (cuyo comportamiento es de una partícula libre de masa $2M$) y otra parte describiendo el movimiento relativo (que se comporta como una sola partícula de masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$). Entonces podemos reducir el problema a la dispersión de una partícula en el campo $u(r)$ de un centro de masa fijo. Si tomamos una partícula libre que se mueve en sentido positivo a lo largo del eje z , representada como una onda plana $\Psi = e^{ikz}$. Las partículas dispersadas han de representarse, para distancia lejanas al campo, como una onda esférica divergente de la forma $f(\theta)e^{ik \cdot r}/r$ donde $f(\theta)$ es la llamada *amplitud de dispersión*. De forma que la solución exacta de la ecuación de Schrödinger con una energía potencial $u(r)$ debe tener a distancias grandes la forma asintótica:

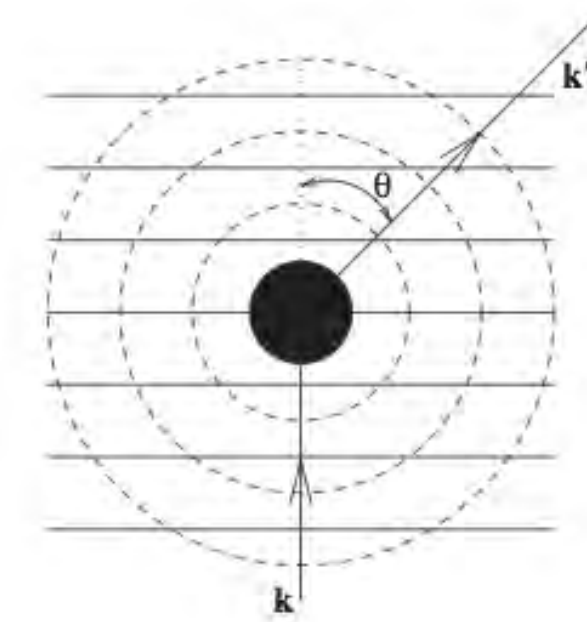


Figura 2.1: Representación esquemática de la dispersión entre 2 partículas vista desde el marco de referencia del centro de masa.

$$\Psi \approx e^{ikz} + f(\theta)e^{ikr}/r \quad (2.16)$$

Entonces se escribe la ecuación de Schrödinger para la función de onda relativa:

$$\left\{ \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{m} + u(|r|) \right\} \Psi(r) = E\Psi(r) \quad (2.17)$$

donde se suponen masas iguales. Si la separación entre átomos o partículas es muy grande, el potencial de interacción puede ser despreciado, así que la ecuación (2.17) se convierte una ecuación para una partícula libre. Ya que se asumen choques elásticos la energía se debe conservar.

Toda solución de la ecuación de Schrödinger en un campo central se puede

escribir como la suma de productos de armónicos esféricos por funciones radiales $R_l(r)$ que satisfacen la ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[\kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} u(r) \right] R_l = 0 \quad (2.18)$$

La forma asintótica de la función R_l es la onda estacionaria:

$$R_l \approx \text{constante} \times \frac{\text{sen}(\kappa r - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)}{r} \quad (2.19)$$

donde δ_l es una constante llamada *corrimiento de fase* que es función tanto de l como de κ .

Entonces la solución general a la ecuación anterior debe ser la suma del producto de funciones de la forma $R_l(r)P_l(\cos\theta)$ por tanto se escribe la solución asintótica de la forma:

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l P_l(\cos\theta) \frac{i}{2\kappa r} \left\{ \exp[-i(\kappa r - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)] - \exp[i(\kappa r - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)] \right\} \quad (2.20)$$

Y por último utilizando el desarrollo de la onda plan en ondas esféricas podemos llegar a que:

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\kappa} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [S_l - 1] P_l(\cos\theta) \quad (2.21)$$

donde $S_l = e^{2i\delta_l}$. Lo sobresaliente de $f(\theta)$ es que lleva toda la información de la colisión y como vimos anteriormente esta implícito que ésta información depende del corrimiento de fase δ_l . Es también conveniente utilizar las *amplitudes de dispersión parciales*

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad (2.22)$$

y debido a (2.21) podemos obtener una expresión en la cuál explícitamente

f depende de l :

$$f_l = \frac{1}{2i\kappa} [e^{2i\delta_l} - 1] \cong \delta_l/\kappa \quad (2.23)$$

La aproximación importante para nuestro estudio es cuando $\kappa \rightarrow 0$ debido a que los átomos se encuentran a muy bajas temperaturas. Es para éste caso que $l = 0$, ésta es la llamada dispersión de “onda-s”, por lo que despreciamos todos los demás términos de l y dependiente de θ se pierde. Conociendo esto se puede escribir la amplitud de dispersión total de la siguiente forma:

$$f(\theta) \cong f_0 = \delta_0/\kappa = -a \quad (2.24)$$

donde a es la llamada *longitud de dispersión*. Es precisamente el efecto de éste parámetro el que contiene toda la información de las interacciones de contacto de las partículas, y es éste mismo parámetro el que mediante resonancias de Feshbach, como se dijo en el capítulo anterior, se puede llegar a crear un gas de Bose sin interacciones de contacto según [15].

Por otro lado, la ecuación de Schrödinger para la dispersión por un potencial u en el espacio de las κ , es decir en el espacio de Fourier conduce a la conocida ecuación de *Lippman-Schwinger* :

$$T(\kappa', \kappa; E_\kappa) = \tilde{u}(\kappa' - \kappa) + \frac{1}{V} \sum_{\kappa''} u(\kappa' - \kappa'') \frac{1}{E_\kappa - e_{\kappa''}'' + i\delta} T(\kappa'', \kappa; E_\kappa) \quad (2.25)$$

donde \tilde{u} es la transformada de Fourier del potencial de la ecuación (2.8). Al llevar ésta ecuación a los límites donde $\kappa = 0, \kappa' = 0$, se obtiene una constante $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$. Esta es una constante de acoplamiento para la interacción de contacto de onda-s. Y es que se han reportado en trabajos [25, 26] mediante simulaciones que los BEC confinados en redes ópticas han mostrado que el tunelaje cuántico macroscópico es afectado principalmente cuando se varía la *longitud de dispersión*, es decir la fuerza de las interacciones de contacto

entre los bosones varían de débiles a fuertes.

Ahora supongamos que tenemos un gas de átomos de Bose de masa m , confinados en un potencial de 3 pozos simétricos de 1-D y existe solamente una interacción de contacto. Se deben considerar las siguientes suposiciones:

1. Las energías que tienen los átomos son demasiado pequeñas por lo que si es que llega a realizarse alguna interacción de contacto sólo puede suceder entre 2 partículas.
2. La interacción entre los pares de partículas puede ser modelada por el potencial $u_{cont}(x - x') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(x, x')$

A lo largo de la sección 1.3.1 se expuso la teoría de la dispersión a bajas temperaturas y el origen del parámetro a llamado *longitud de dispersión* pero es una explicación física la que nos podría dar un panorama de la importancia de éste. En [28] se da una explicación breve del significado físico de éste parámetro. El hecho de que éste parámetro pueda ser positivo o negativo se ve reflejado directamente en los experimentos para la estabilidad de los gases dipolares [15].

Entonces el término de interacción de contacto se escribe de la siguiente manera:

$$\sum_{i,j,k,l=0}^2 \langle \phi_i \phi_j | u_{cont} | \phi_k \phi_l \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (2.26)$$

entonces

$$\langle \phi_i \phi_j | u_{cont} | \phi_k \phi_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') u_{cont} \phi_k(x) \phi_l(x') \quad (2.27)$$

con

$$u_{cont}(x - x') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(x - x') \quad (2.28)$$

Así que la integral quedaría de la siguiente manera:

$$I_{i,j,k,l} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') u_{cont}(x-x') \phi_k(x) \phi_l(x) \quad (2.29)$$

Por lo que como podemos observar $I_{i,j,k,l}$ es solo un número, una constante pero que dependiendo que el signo de la *longitud de dispersión* puede ser positivo o negativo.

Al igual que en el caso del gas de bosones ideal, haremos una transformación lineal para obtener una expresión del término de interacción de contacto en términos de las funciones de onda localizadas. Tomando la suma inicial:

$$\sum_{i,j,k,l=0}^2 I_{i,j,k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (2.30)$$

Pero antes de realizar la sustitución en todos los términos de la suma, hay que recalcar algunas propiedades importantes de las funciones de onda estacionarias:

1. Dado que ϕ_0 y ϕ_2 son funciones pares y ϕ_1 es función impar, entonces los términos que tengan un número impar de términos con ϕ_1 son cero.
2. Recordar que $a_i a_j = a_j a_i$ y lo mismo para $a_i^\dagger a_j^\dagger = a_j^\dagger a_i^\dagger$

Realizando la transformación lineal para utilizar la base b_k^\dagger, b_k los cuales estan asociados con funciones de onda localizada $\psi_i(x)$

$$U_{cont} = I(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3) \quad (2.31)$$

donde

$$I = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int \psi_i^4(x) dx \text{ con } i = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

El potencial efectivo que describe las interacciones entre partículas muestra que éstas se pueden dar entre dos partículas del mismo pozo e incluso podría llegar a afectar la dinámica del sistema aunque las partículas no se encuentren en el mismo pozo debido a la *lonitud de dispersión* a . El parámetro $\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ modula las fuerza de las interacciones e incluso influye directamente en la estabilidad del gas de bosones en los experimentos.

2.4. Gases Dipolares

La energía de interacción entre 2 dipolos \mathbf{D} esta dada por la siguiente ecuación [31]:

$$u_{dd}(r) = D^2 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} \quad (2.33)$$

donde θ es el ángulo entre los \mathbf{r} y \mathbf{D} . Dependiendo del tipo de dipolo que se maneje, ya sea eléctrico o magnético tenemos que D^2 puede tener los siguientes valores:

$$D^2 = \begin{cases} \frac{d^2}{4\pi\epsilon_0} & \text{dipolo eléctrico} \\ \frac{\mu_0\mu^2}{4\pi} & \text{dipolo magnético} \end{cases} \quad (2.34)$$

donde d y μ son los momentos dipolares eléctrico y magnético respectivamente, ϵ_0 y μ_0 son las constantes de permitividad y permeabilidad respectivamente. La interacción puede ser atractiva o repulsiva dependiendo de la orientación de los dipolos (si $\theta = \pi/2$ tenemos el caso de repulsión total y si $\theta = 0$ tenemos el caso de atracción total). Otra propiedad importante de la interacción dipolar es que es de tipo anisotrópica y de largo alcance, así que en nuestro Hamiltoniano tendremos un término parecido al de interacción de contacto, solo que tendrá un término extra, el cuál analizaremos como es que afecta los resultados ya obtenidos por [25].

Para obtener el término de interacción dipolar para el Hamiltoniano pri-

mero debemos obtener el coeficiente que modula la interacción dipolar. Es decir tenemos que

$$\langle \phi_i \phi_j | u_{dd} | \phi_k \phi_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') u_{dd} \phi_k(x) \phi_l(x') \quad (2.35)$$

pero como ya hemos dicho antes, el gas se encuentra demasiado diluido, por lo supondremos que la interacción dipolar también sólo será entre pares de partículas. Suponiendo esto y tomando que la interacción u_{dd} está dada por la ecuación (33) entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') u_{dd} \phi_k(x) \phi_l(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') D^2 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} \phi_k(x) \phi_l(x') \end{aligned} \quad (2.36)$$

En esta última ecuación el ángulo θ que se forma entre el vector de posición que une a los dipolos y el vector de momento dipolar. La condición para que experimentalmente se pueda acceder a gases puramente dipolares es que los dipolos estén alineados con un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{2}$, caso en el que la interacción es totalmente de repulsión. Además para garantizar que el gas es estable es necesario el restringir a una geometría prolata en la que los dipolos están alineados. Es por eso que podemos eliminar la dependencia angular dentro de la integral, así que la manera más sencilla de escribir la integral es:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') D^2 \frac{1 - 3 \cos \theta}{r^3} \phi_k(x) \phi_l(x') \\ &= D^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') \frac{1}{(x - x')^3} \phi_k(x) \phi_l(x') \end{aligned} \quad (2.37)$$

Así obtenemos que el coeficiente de interacción está dado por:

$$\langle \phi_i \phi_j | u_{dd} | \phi_k \phi_l \rangle = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') \frac{1}{(x-x')^3} \phi_k(x) \phi_l(x') \quad (2.38)$$

Ahora al igual que en el término u_{cont} utilizaremos la transformación lineal que lleva de la base $\{\phi_i, a_i, a_i^\dagger\}$ a la base $\{\psi_i, b_i, b_i^\dagger\}$. Definimos:

$$\mathcal{I}_{i,j,k,l} = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_i^*(x) \phi_j^*(x') \frac{1}{(x-x')^3} \phi_k(x) \phi_l(x') \quad (2.39)$$

Así que la suma de interacción dipolar queda de la siguiente forma:

$$\sum_{i,j,k,l=0}^2 \langle \phi_i \phi_j | u_{dd} | \phi_k \phi_l \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l = \sum_{i,j,k,l=0}^2 \mathcal{I}_{i,j,k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (2.40)$$

Al momento de calcular las transformaciones lineal realizamos las mismas consideraciones que en el caso de contacto, salvo un pequeño cambio:

1. Las interacciones pueden darse tanto en el mismo pozo como en pozos distintos, incluso entre los pozos 1 y 3, aunque dichas interacciones serán reguladas por un coeficiente adicional para atenuar dichas interacciones (Ver Apéndice A).

Una vez realizada la transformación lineal el término de interacción dipolar queda de la siguiente forma:

$$U_{dd} = \mathcal{I}(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 + b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3) \quad (2.41)$$

con

$$\mathcal{I} = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_i^*(x) \psi_j^*(x') \frac{1}{(x-x')^3} \psi_k(x) \psi_l(x') \quad (2.42)$$

debido a que la base ψ_i es la base de las funciones localizadas, podemos escoger las funciones que describan una función de onda muy localizada (como puede ser una Gaussiana) de forma que podemos garantizar que dicha integral sea un número real. Así que finalmente podemos reescribir el término de interacción dipolar de la siguiente forma:

$$U_{dd} = \mathcal{I}(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 + b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3) \quad (2.43)$$

De esta forma, hemos deducido un Hamiltoniano que de manera teórica, desde el esquema cuántico, con el cual se pretende describir el comportamiento de un gas de Bose un potencial de 3 pozos sometido a los efectos de la interacción dipolar entre átomos en 1D. El Hamiltoniano completo escrito en forma completa es:

$$H = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_3 + b_1^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_2 \right) + U_0 \left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 \right) + U_1 \left(\left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 \right) + b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} \left(b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3 \right) \right) \quad (2.44)$$

Donde $U_0 \equiv I$ y $U_1 \equiv \mathcal{I}$ que son 2 parámetros como valores numéricos, justificado en la deducción anterior.

En éste y el capítulo anterior se estudiaron los elementos tanto teóricos

como experimentales que fundamentan el trabajo de estudio que se desarrollará durante los siguientes 2 capítulos. Analizaremos tanto los estados estacionarios ó eigenvectores con sus respectivas energías ó eigenvalores, como la evolución temporal de algunos estados iniciales $|\Psi(0)\rangle$ que podrían ser de particular interés. Dicho estudio se llevará a cabo variando los parámetros sobre los que se tienen control en los experimentos directa o indirectamente, como son:

1. El número total de partículas N_t .
2. El coeficiente de interacción de contacto U_0 .
3. El coeficiente de interacción dipolar U_1 .
4. El estado inicial $|\Psi(0)\rangle$.

Capítulo 3

Estados Estacionarios .

En el capítulo anterior se dedujo el Hamiltoniano H con el cuál, se describirá un gas de Bose interactuante atrapado en un potencial de 3 pozos. Como se mencionó, el sistema tiene interacciones entre pares de partículas dentro de un mismo pozo de dos tipos, de contacto y dipolares, y mientras que entre pozos diferentes las interacciones entre pares son sólo dipolares Dicho Hamiltoniano es el siguiente:

$$H = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_3 + b_1^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_2 \right) + U_0 \left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 \right) \\ + U_1 \left(\left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 \right) + b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} \left(b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3 \right) \right)$$

éste resultado se obtuvo tomando en cuenta el efecto de las colisiones a bajas temperaturas, las interacciones dipolares (eléctricas o magnéticas) dentro del contexto de segunda cuantización.

Para este capítulo, bajo las hipótesis discutidas en el anterior capítulo, estudiaremos los valores $\langle n_{i=1,2,3} \rangle$ los cuales representan el número de expec-

tación de partículas en cada pozo en los estados estacionarios de la matriz H . En otras palabras, se analizará el valor de expectación de la población de partículas en cada pozo en los eigenestados del Hamiltoniano H .

Para comenzar el estudio de los estados estacionarios describiremos de manera general la construcción de las matrices con las cuales se estudiará nuestro sistema. La base que usamos para describir el comportamiento de las partículas en los pozos de potencial es la de Fock, definida por los estados $\{|n_1, |n_2, |n_3\rangle\}$, donde cada entrada representa el número de partículas en cada pozo. El operador de número en dicha base esta definido de la siguiente forma:

$$\hat{n}_i = b_i^\dagger b_i$$

donde b_i^\dagger y b_i son los operadores de creación y aniquilación asociados a la base ψ_i que son la base de funciones localizadas para los pozos de potencial. Una vez que ya escogimos la base adecuada para describir nuestro sistema procedemos a crear la matriz del Hamiltoniano. Cabe recordar que los operadores de creación operan sobre dicha base de la siguiente forma:

$$b_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle \quad i = 1, 2, 3$$

y el de aniquilación:

$$b_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle \quad i = 1, 2, 3$$

Entonces los elementos o entradas de la matriz del Hamiltoniano estarán definidas cuando aplicamos los operadores anteriores sobre la base de Fock. Entonces con ésta base lo que estamos describiendo al estado $|\Psi\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle$ es que físicamente el pozo i contiene n_i partículas, siempre guardando la relación de que la suma total debe ser N_t . Entonces si sabemos que existen N_t partículas indistinguibles de naturaleza bosónica, el número de estados

diferentes será $\Omega = \frac{(N_t+1)(N_t+2)}{2}$, en otras palabras Ω es el número de formas en las que se pueden encontrar repartidas las N_t partículas entre los 3 pozos. Esta cantidad define el tamaño del espacio de la base de vectores que son necesarios para describir nuestro sistema.

La manera en que colocaremos los coeficientes en las entradas serán:

1. **Términos no diagonales** Son los términos debido a la energía cinética de las partículas.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \langle n_1, n_2, n_3 | b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_3 + b_1^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_2 | n_1, n_2, n_3 \rangle = \\
& -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left[\langle n_1, n_2, n_3 | b_2^\dagger b_1 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \langle n_1, n_2, n_3 | b_2^\dagger b_3 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \right. \\
& \left. \langle n_1, n_2, n_3 | b_1^\dagger b_2 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \langle n_1, n_2, n_3 | b_3^\dagger b_2 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle \right] = \\
& -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(n_2+1)n_1} (\delta_{n_1-1, n'_1} \delta_{n_2+1, n'_2} \delta_{n_3, n'_3}) + \sqrt{(n_2+1)n_3} (\delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2+1, n'_2} \delta_{n_3-1, n'_3}) \right. \\
& \left. \sqrt{(n_1+1)n_2} (\delta_{n_1+1, n'_1} \delta_{n_2-1, n'_2} \delta_{n_3, n'_3}) + \sqrt{(n_3+1)n_2} (\delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2-1, n'_2} \delta_{n_3+1, n'_3}) \right]
\end{aligned}$$

2. **Términos diagonales** Estos términos corresponden a las interacciones tanto de contacto como dipolares. Para simplificar el cálculo sabemos que si obtenemos los términos de contacto dipolar obtenemos además los de contacto ya que el dipolar tiene un término adicional al de contacto.

$$\begin{aligned}
& \langle n_1, n_2, n_3 | b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 + \\
& b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle \\
& = \langle n_1, n_2, n_3 | b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \langle n_1, n_2, n_3 | b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \\
& \langle n_1, n_2, n_3 | b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \langle n_1, n_2, n_3 | b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \\
& \langle n_1, n_2, n_3 | b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle + \frac{1}{8} \langle n_1, n_2, n_3 | b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3 | n'_1, n'_2, n'_3 \rangle
\end{aligned}$$

Operando b y b^\dagger sobre los *kets* $|n'_1, n'_2, n'_3\rangle$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
& = (n_1 - 1)(n_1)(\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3}) + (n_2 - 1)(n_2)(\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3}) + \\
& (n_3 - 1)(n_3)(\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3}) + (n_1)(n_2)(\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3}) \\
& + (n_2)(n_3)(\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3}) + \frac{n_1 n_3}{8} (\delta_{n_1, n'_1}, \delta_{n_2, n'_2}, \delta_{n_3, n'_3})
\end{aligned}$$

Donde

$$\delta_{n_i, n'_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_i = n'_i \\ 0 & \text{si } n_i \neq n'_i \end{cases}$$

Entonces una vez que tenemos las condiciones para colocar cada coeficiente en la matriz, procedemos a crearla de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1\Omega-4} & C_{1\Omega-3} & C_{1\Omega-2} & C_{1\Omega-1} & C_{1\Omega} \\ & C_{22} & & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & \\ C_{\Omega 1} & \dots & & & & C_{\Omega\Omega-2} & C_{\Omega\Omega-1} & C_{\Omega\Omega} \end{pmatrix}$$

Donde $C_{11} = \langle 0, 0, Nt | 0, 0, Nt \rangle$, $C_{12} = \langle 0, 1, Nt - 1 | 0, 0, Nt \rangle$
 \dots $C_{1\Omega} = \langle Nt, 0, N0 | 0, 0, Nt \rangle$ \dots $C_{\Omega\Omega} = \langle Nt, 0, 0 | Nt, 0, 0 \rangle$

Una vez que se ha construido el Hamiltoniano H asignando adecuadamente sus posiciones a través de las $\delta_{n, n'}$, procedemos a obtener los estados estacionarios (vectores propios de H) y sus respectivas energías (valores propios de H) y éstos valores dependen directamente de N_t, U_0 y U_1 . En forma explícita tenemos

$$H(U_0, U_1) |\phi_n(U_0, U_1)\rangle = \epsilon_n(U_0, U_1) |\phi_n(U_0, U_1)\rangle \quad (3.1)$$

Ahora el análisis se realizará por medio de el número de población o partículas en cada pozo, representado por los valores de expectación $\langle n_i \rangle$ donde n_i es una matriz que describe el número de partículas en dicho pozo. Estas matrices se construyen en la misma base que la que se uso para representar al Hamiltoniano, pero ya que los vectores base son ortonormales y que además si queremos representar en número de partículas en cada pozo con los estados $|n_1, n_2, n_3\rangle$.

Es importante recalcar que las matrices que representarán cada uno de los pozos es diagonal (por la propiedad de ortonormalidad) y que por lo tanto las únicas entradas se encontrarán en la diagonal. Así que los mismos estados base nos indican las entradas en cada matriz.

Es por ésto que la construcción de cualquiera de los 3 pozos $\langle N_i \rangle$ está dada en general por:

$$N_i = \left(\frac{1}{N_t} \right) \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\Omega\Omega} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde los valores de $C_{11} = \langle 0, 0, N_t | 0, 0, N_t \rangle$, $C_{22} = \langle 0, 1, N_t - 1 | 0, 1, N_t - 1 \rangle$, $C_{33} = \langle 1, 0, N_t - 1 | 1, 0, N_t - 1 \rangle \dots C_{\Omega\Omega} = \langle N_t, 0, 0 | N_t, 0, 0 \rangle$ dependen del número de partículas y el pozo que estamos describiendo, las entradas de las matrices cambian. Por ejemplo con 5 partículas N_1 será:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Una vez construidas las matrices de los operadores de población de cada

pozo pasaremos a redefinir los coeficientes de las interacciones de contacto y dipolar U_0 y U_1 respectivamente, de la siguiente manera:

$$\Lambda = \frac{U_0}{\Delta}; \quad \Lambda' = \frac{U_1}{\Delta}$$

Ahora realizaremos un análisis de los valores de expectación del número de partículas en cada pozo, utilizando los vectores propios de la matriz H y las matrices N_i creadas para describir las poblaciones en cada uno de los pozos. Una ventaja de éste Hamiltoniano es que para estudiarlo sólo es necesario estudiar el pozo 1 y 2, ya que debido a su simetría los pozos 1 y 3 tienen el mismo comportamiento así que con conocer cualquiera de los 2 por simetría conoceremos los datos del otro.

Debido a que en la literatura se ha abordado el estudio del gas de Bose con interacciones de contacto dentro del mismo pozo, pondremos especial atención en el estudio del gas considerando las interacciones dipolares, podremos tomar valores ≈ 0 para Λ ya que es el parámetro de interacción de contacto para poder estudiar la fase dipolar del BEC. Esta aproximación se puede realizar debido a los resultados obtenidos en [15].

Dado que la dimensión de la matriz H depende del número de partículas o átomos (siendo dicha dimensión $\Omega \times \Omega$), se utilizará un programa de computadora que permita realizar operaciones con matrices de dimensiones muy grandes (en este caso Mathematica 8). Vale la pena resaltar que cálculos con números de partículas similares a los logran atrapar y condensar en los laboratorios (que son del orden de $\approx 10^3$ átomos) son impracticables. El número máximo de partículas que se estudiará eson $N_t = 50$ y se tratará de extrapolar los resultados obtenidos para números mayores.

3.1. Estudio de los estados estacionarios.

Por construcción, las energías y estados propios de H dependen de los parámetros Λ y Λ_1 razón por la cual los diagramas de fase tienen como únicos parámetros a éstos. Como se ha mencionado antes, el número de estados estacionarios es Ω , entonces, conforme el número de partículas crece, el número de diagramas que se tendrían que presentar crecería de la misma forma. Es por esto que acotaremos los resultados para los estados con mínima y máxima energía. De ésta forma podremos interpolar los datos para energías intermedias.

Considerando que podemos encontrar 4 diferentes configuraciones iniciales en que nuestro sistema puede tener estados iniciales, es decir, los diferentes signos que pueden tener nuestros coeficientes de interacción, serán incluidos en el diagrama de fases llegando incluso a los regímenes de interacción ultrafuerte (valores de Λ , $\Lambda_1 \approx 4$).

También se tomará en cuenta el cambio de las fases posibles debido al incremento o disminución en el número de partículas (30 y 50 partículas), de tal forma que podamos concluir en algún momento si éste estudio de los estados estacionarios se puede extrapolar al caso de 100 o más partículas, el cual se encuentra restringido por el cómputo.

3.2. Estados estacionarios con mínima energía

Para el caso en que tenemos el estado estacionario con mínima energía podemos observar que existen 4 principales regiones, las cuales pueden observarse en las gráficas 3.1 y 3.2. El código de color señala las diferentes fases que puede tener el sistema; de negro a blanco significa ir de oscilaciones coherentes o de Josephson a un régimen de auto-atrapamiento en el que los átomos permanecen confinados en el sitio en el que iniciaron. Es pertinente aclarar

que el estado de oscilaciones coherentes es también conocido como estado “superfluido”. En la primera es posible distinguir de manera muy clara que el estado estacionario $|0, Nt, 0\rangle$:

1. $-4 < \Lambda < \Lambda_1 < 0$
2. $-4 < \Lambda_1 < -2\Lambda < 0$
3. $0 < \Lambda_1 < -\Lambda < 4$

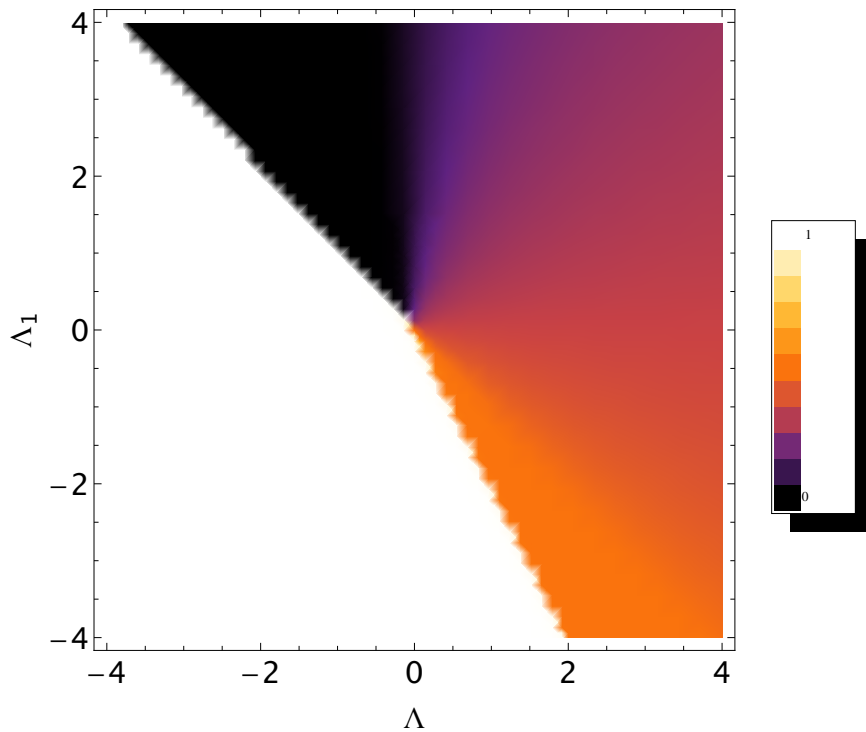


Figura 3.1: Valores de $\langle n_2 \rangle$ como función de Λ y Λ_1 para el estado estacionario con mínima energía para 50 partículas.

y también podemos encontrar el estado de Fock $|\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$ con la aclaración de que mas bien sería $[\frac{N_t}{3}]$ (los corchetes indican parte entera), o sea que se

presenta un estado estacionario en el que el total de las partículas se reparte en la misma proporción entre los 3 pozos. El sistema puede presentar ésta fase la región de valores Λ y Λ_1 :

1. $0 < \Lambda, \Lambda_1 < 4$
2. $0 < \Lambda, \Lambda_1 < -\Lambda$

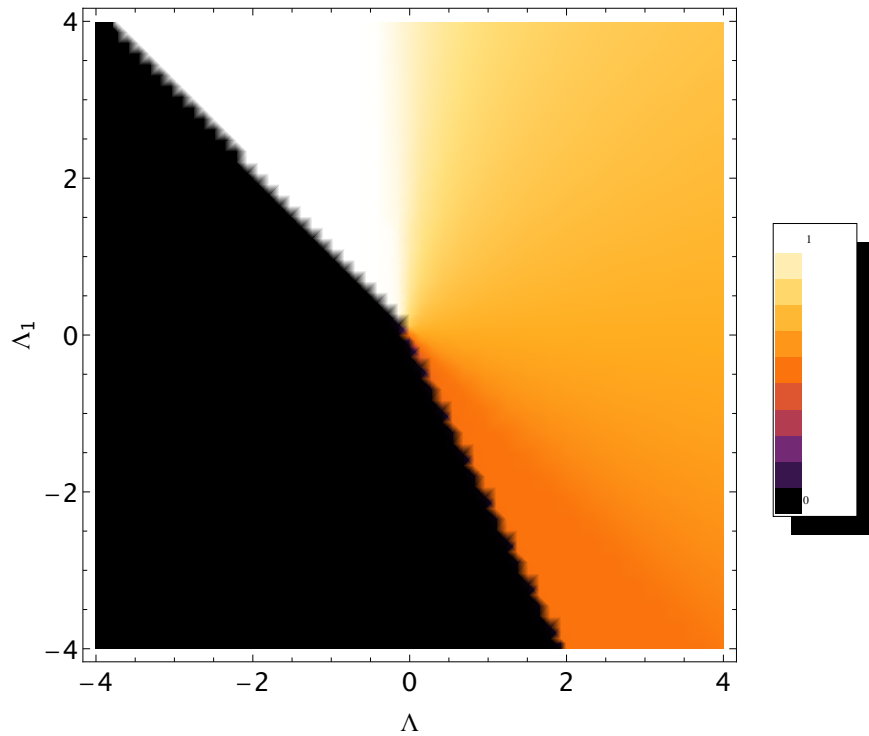


Figura 3.2: Valores de $\langle n_1 + n_3 \rangle$ como función de Λ y Λ_1 para el estado estacionario con mínima energía para 50 partículas.

La tercera fase es cuando la cantidad de partículas N_t se reparte entre los pozos 1 y 3 dado por el estado de Fock $|\frac{N_t}{2}, 0, \frac{N_t}{2}\rangle$, con una probabilidad nula de encontrar una sola partícula en el pozo 2. Esta se puede observar para valores para en el intervalo(fig 3.2):

1. $0 < \Lambda_1$ y $\Lambda < \Lambda_1$

Por último existe una fase interesante en la región de valores Λ y Λ_1 ya que el número de expectación de partículas para $\langle n_1 + n_3 \rangle \langle n_1 + n_3 \rangle \approx$ es de 0.5 (fig 3.2), es decir que la mitad de las partículas se mantienen en el pozo 2 y que el resto se reparten entre los pozos 1 y 3. Los valores aproximados están en el intervalo

1. $-2 \Lambda_1 < \Lambda < -\Lambda_1$ con $0 < \Lambda$

3.3. Estados estacionarios con máxima energía

En el caso de estados estacionarios con mayor energía, los que sucede es que el sistema presenta exactamente la misma estructura de fases pero con la energía de dicho estado es de signo contrario.

Esto se debe a que el Hamiltoniano H es simétrico y por tanto los valores propios se duplican, si tomamos el valor absoluto de todos. Para los casos de máxima energía (figs. 3.3, 3.4) y mínima energía (3.1, 3.2) podemos observar los diagramas de fase simplemente fueron rotados, producto del cambio de signo, sin perder la cantidad y el tipo de fases a las que el sistema puede acceder dado un estado inicial.

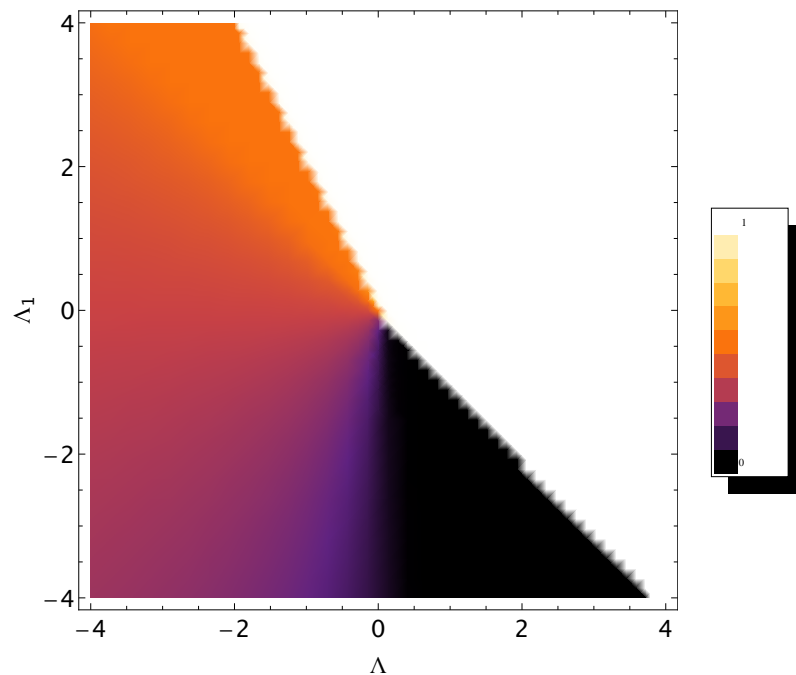


Figura 3.3: Valores de $\langle n_2 \rangle$ como función de Λ y Λ_1 para el estado estacionario con máxima energía para 50 partículas.

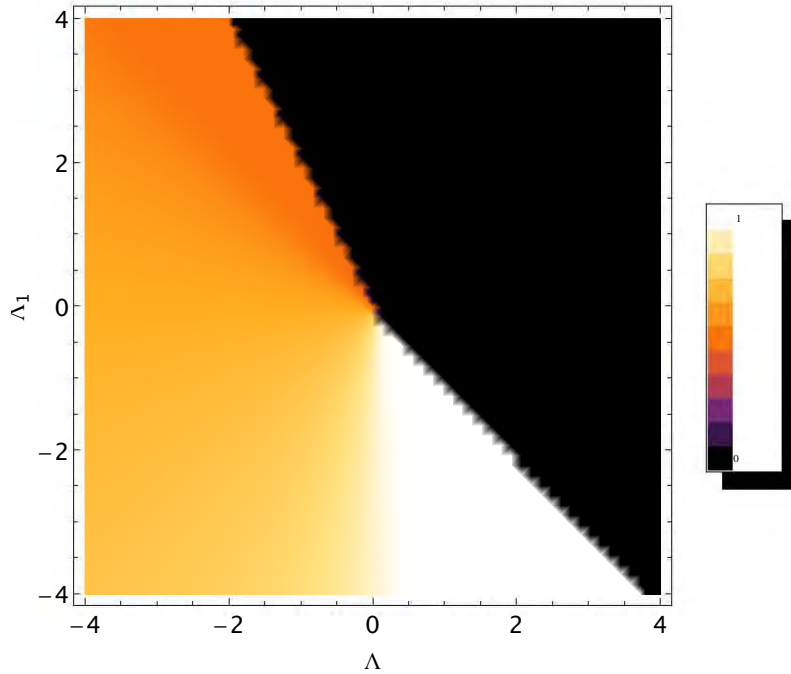


Figura 3.4: Valores de $\langle n_1 + n_3 \rangle$ como función de Λ y Λ_1 para el estado estacionario con máxima energía para 50 partículas.

Es relativamente fácil deducir de las gráficas que el signo de las interacciones toma un papel relevante en las fases que puede tomar el sistema en una evolución temporal, que es el siguiente paso en el estudio de nuestro sistema. Ya que en la evolución temporal tenemos 4 variables (número de partículas N_t , estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ coeficientes de interacción $\{\Lambda, \Lambda_1\}$ y el tiempo de evolución τ) trataremos de limitar el intervalo de posibles valores para cada uno.

3.4. Reducción del intervalo de valores de Λ y Λ_1

En la sección anterior se observaron las 4 diferentes fases que puede presentar el sistema para un número fijo de partículas. Ahora que si se reduce el intervalo de Λ y Λ_1 el sistema puede seguir presentando dichas fases, como se muestra a continuación.

Las dos gráficas (fig. 3.5) siguientes demuestran que el intervalo de valores para Λ y Λ_1 puede ser reducido de manera significativa, limitando el intervalo de dichas variables. Este resultado es relevante en el siguiente capítulo para el cuál al agregar 2 nuevas variables que son el tiempo τ y el estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ ya que la cantidad de parámetros y los intervalos de valores de los mismos puede hacer que el estudio de evolución temporal sea demasiado largo tal vez infructuoso en algunos casos.

Como mencionamos al inicio, la intención de éste capítulo es mostrar las diferentes fases que puede presentar el sistema variando los parámetros de interacción de contacto y dipolar, acotando los resultados por los estados con máxima y mínima energía.

En este capítulo se muestra que los posibles estados estacionarios a los que puede acceder el sistema son 4, tomando en cuenta que dichos resultados se pueden interpolar a las energías a las que puede acceder el sistema y basados en éstos resultados podremos predecir que en la evolución temporal podremos encontrar fases de autoatrapamiento y oscilaciones de los valores de expectación alrededor de los estados estacionarios, dependiendo del estado inicial, ya que será la energía con que el sistema inicie.

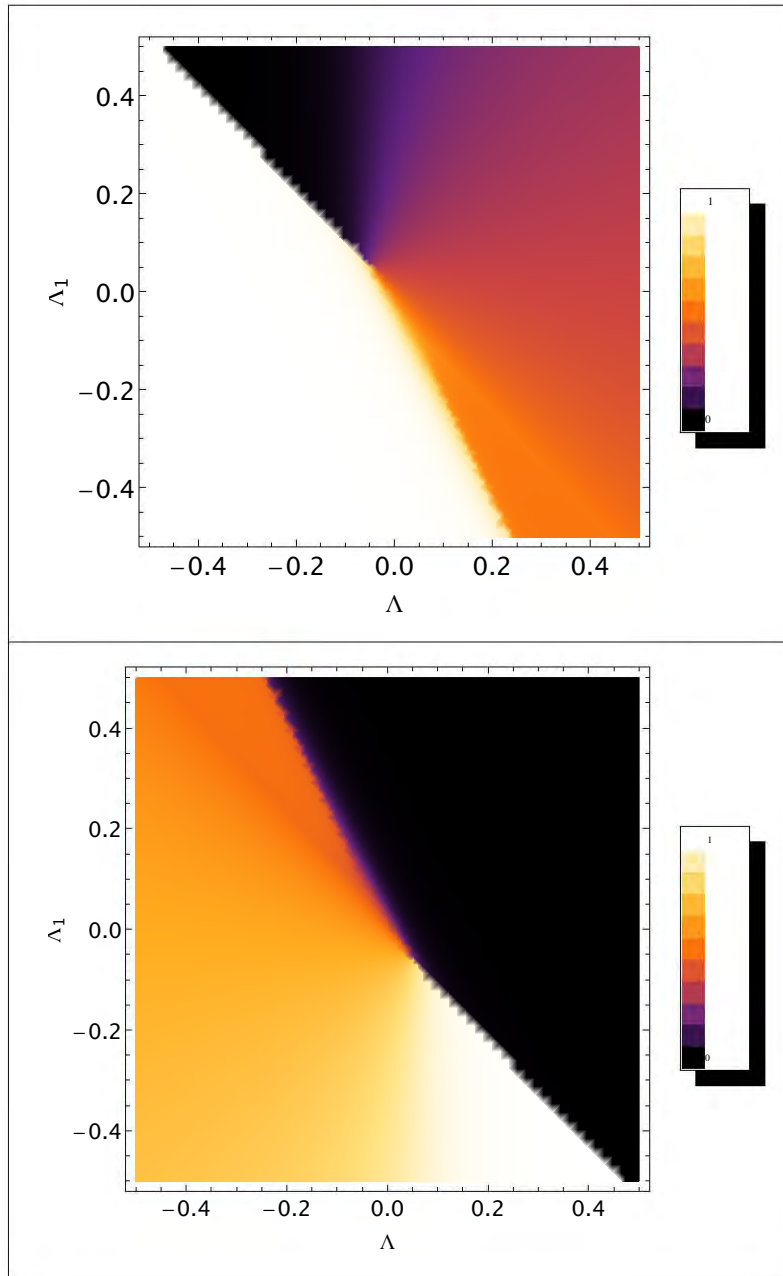


Figura 3.5: Diagrama de fases de $\langle N_2 \rangle$ con el estado estacionario de mínima energía (panel superior) y $\langle N_1 + N_3 \rangle$ con el estado estacionario de máxima energía (panel inferior) en el intervalo de valores $[-0.5, 0.5]$ para Λ y Λ_1 .

Vale la pena resaltar que el análisis aquí presentado es una mejora a los cálculos conocidos en la literatura en el sentido que se estudia la dependencia con el número de partículas. Además se consideró una geometría de confinamiento diferente, tal que la interacción entre dipolos y la forma de la trampa garantizan la estabilidad del gas cuántico.

Capítulo 4

Evolución temporal.

En el capítulo anterior se realizó un estudio de los estados estacionarios del Hamiltoniano H deducido en el capítulo 2 para valores de Λ y Λ_1 en el intervalo de valores $[-4, 4]$, dicho análisis se hizo considerando solamente los estados estacionarios que tienen la menor y la mayor energía del sistema. En este capítulo se estudiará la dinámica del sistema para condiciones iniciales dadas. Particularmente se analizará la influencia del tamaño del sistema en su evolución temporal y trataremos de extrapolar los resultados.

Debido a que el número de estados del sistema se escala cuadráticamente con el número de partículas ($\Omega = \frac{(N_t+1)(N_t+2)}{2}$ donde N_t es el número total de partículas) que se encuentran contenidos en el sistema, sólo escogeremos 3 estados iniciales que pudieran tener mayor relevancia para éste sistema. Una consideración esencial es que el número de partículas total es constante, o sea que $N_t = N_1 + N_2 + N_3$, ésta condición quiere decir que una vez condensado y atrapado en un potencial, el número partículas polares (^{52}Cr como se ha mencionado anteriormente) permanece constante durante toda la evolución temporal dentro de la trampa. Esto puede ser justificado debido a que de forma práctica las partículas ocupan los niveles menos energéticos de la trampa, esto es los de la primera banda, y se puede suponer que ninguna

partícula escapa.

Para realizar la evolución temporal de algún estado $|\Psi(0)\rangle$ debemos recordar lo siguiente:

Sea un estado inicial:

$$|\Psi(0)\rangle = |n_1^0, n_2^0, n_3^0\rangle \quad (4.1)$$

donde N_i^0 denotan el número de partículas que hay inicialmente en el pozo i -ésimo al tiempo 0. Cualquier estado arbitrario puede ser expresado como una superposición de los vectores propios de la matriz H $\{|\psi_n\rangle\}$ como sigue:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega} C_n |\psi_n\rangle \quad (4.2)$$

Si multiplicamos por la izquierda por algún estado $|\psi_m\rangle$ obtendremos el siguiente resultado:

$$\langle\psi_m|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega} C_n \langle\psi_m|\psi_n\rangle \quad (4.3)$$

pero como la base es ortonormal:

$$\langle\psi_m|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega} C_n \delta_{n,m} = C_m \quad (4.4)$$

De modo que podemos escribir la evolución temporal de un estado arbitrario $|\Psi(0)\rangle$ como:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\Psi(0)\rangle \quad (4.5)$$

Esta última ecuación se puede escribir de la siguiente forma, suponiendo que se ha diagonalizado H :

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right) \sum_{n=0}^{\Omega} \langle\psi_n|\Psi(0)\rangle |\psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega} \langle\psi_n|\Psi(0)\rangle \exp\left(\frac{-i\epsilon_n t}{\hbar}\right) |\psi_n\rangle \quad (4.6)$$

donde ϵ_n es el n valor propio asociado al ψ_n ya que el operador de evolución está actuando sobre dichos estados estacionarios. Y dado que el capítulo anterior ya habíamos obtenidos los vectores y valores propios de H , podemos conocer la evolución temporal de cualquier estado inicial $|\Psi(0)\rangle$. En concreto, serán los valores esperados del número de partículas lo que estudiaremos como función del tiempo, analizaremos la evolución temporal de los números de ocupación para algunos estados iniciales que no son estacionarios. Cabe mencionar que debido al incremento del orden de $\approx N_t^2$ del número de posibles estados del sistema sólo podremos estudiar algunos.

El estudio del valor de expectación para algún pozo N_i con $i = 1, 2, 3$ para algún $\tau \geq 0$ puede ser escrito:

$$\langle n_i(\tau) \rangle = \langle \Psi(\tau) | n_i(\tau) | \Psi(\tau) \rangle \quad (4.7)$$

donde definimos a como $\tau \equiv \Delta t$ para trabajar en términos unidades adimensionales.

Para el análisis de la evolución temporal tendremos 3 parámetros principalmente: N_t que es el número total de partículas, $\Lambda = \frac{U_0}{\Delta}$ que es el coeficiente que modula las interacciones de contacto y $\Lambda' = \frac{U_1}{\Delta}$ que modula las interacciones dipolares.

Al igual que en el capítulo anterior, se utilizará el mismo programa de manejo de matrices para realizar la evolución temporal, así como las gráficas de los valores esperados de partículas en cada uno de los pozos. Cabe mencio-

nar que tanto la matriz H como los vectores propios están escritos en la base de Fock ($\{|n_1^i, n_2^i, n_3^i\rangle\}$ con $i = 1, 2, 3$). Dichos vectores de estado etiquetan el número de partículas que hay en cada pozo. Por ejemplo, si tomamos el estado $|N_t, 0, 0\rangle$ quiere decir físicamente que todas las partículas se encuentran en el pozo 1.

Tomaremos como el estados iniciales $|\Psi(0)\rangle = |N_t, 0, 0\rangle$, $|\Psi(0)\rangle = |0, N_t, 0\rangle$ y $|\Psi(0)\rangle = |\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$, es decir que supongamos que todas las partículas están inicialmente en el pozo de la izquierda, en pozo de en medio del arreglo ó que en promedio todos los pozos tengan el mismo número de partículas. Así que una vez fijado el estado inicial, procedemos a utilizar el programa para ver el comportamiento de los valores esperados de población de partículas para cada uno de los pozos conforme evoluciona en el tiempo. Debido a la conservación del número de partículas total N_t partículas estudiaremos los pozos $\langle N_1 \rangle$ y $\langle N_2 \rangle$ y por completez sabremos lo que sucede en $\langle N_3 \rangle$

Como hemos mencionado antes tenemos 3 parámetros que podemos variar. Pero un aspecto importante que debemos tomar en cuenta es el tiempo en que la computadora tarda en obtener los valores y vectores propios además de la evolución temporal del estado $|\Psi(0)\rangle$. Es por eso que primero revisaremos el efecto que tiene el número de partículas sobre el sistema.

El análisis que a continuación se presenta se realizó para todos los estados iniciales arriba mencionados . Sin embargo para mostrar los rasgos que caracterizan la evolución temporal como función de los parámetros, se presentarán solamente gráficas ilustrativas cada vez que cualitativamente los resultados sean equivalentes. Como ya hemos mencionado, los cálculos numéricos nos permiten únicamente llegar a un máximo de 100 partículas.

4.1. Efecto del número de partículas.

Una vez que hemos fijado los 3 estados iniciales $|\Psi(0)\rangle$ a estudiar, analizaremos el efecto que tiene el número de partículas sobre la trampa de 3 pozos que hemos elegido en éste trabajo. En trabajos previos [25, 26] se estudiaron 3 diferentes configuraciones de trampas, variando el coeficiente de interacción de contacto Λ y el número de partículas N_t , cuya descripción teórica está dada por el siguiente Hamiltoniano:

$$\tilde{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_3 + b_1^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_2 \right) + \Lambda \left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + b_3^\dagger b_3^\dagger b_3 b_3 \right)$$

Por lo que si en nuestro Hamiltoniano tomamos a $\Lambda_1=0$ debemos obtener los mismos resultados. Con base en base los estudios anteriores, se toma un intervalo de valores para Λ y Λ_1 , en los cuales los estados iniciales propuestos presentan propiedades notables.

4.1.1. Gas totalmente dipolar ($\Lambda=0.0$)

Ya que los experimentos indican que podemos estudiar un gas puramente dipolar [15] procederemos a estudiar la evolución temporal para el hamiltoniano deducido en el capítulo 2, pero con la omisión de los términos de interacción de contacto y utilizando valores de Λ_1 entre 0.1 y 0.001.

Como ejemplo representativo para mostrar la existencia de la fase de *Auto – atrapamiento* se considera al estado inicial $\Psi(0) = |0, N_t, 0\rangle$. Se observa que el estado auto-atrapado o localización de las partículas en la condición inicial, ocurre para un valor de Λ_1 constante a medida que número de partículas se incrementa (fig. 4.1), es decir, las partículas dejan de oscilar entre los pozos conforme el número de estas aumenta hasta llegar a un N_{crit} que depende del valor de Λ_1 en el cual se quedan prácticamente todas en el

mismo pozo en el que iniciaron.

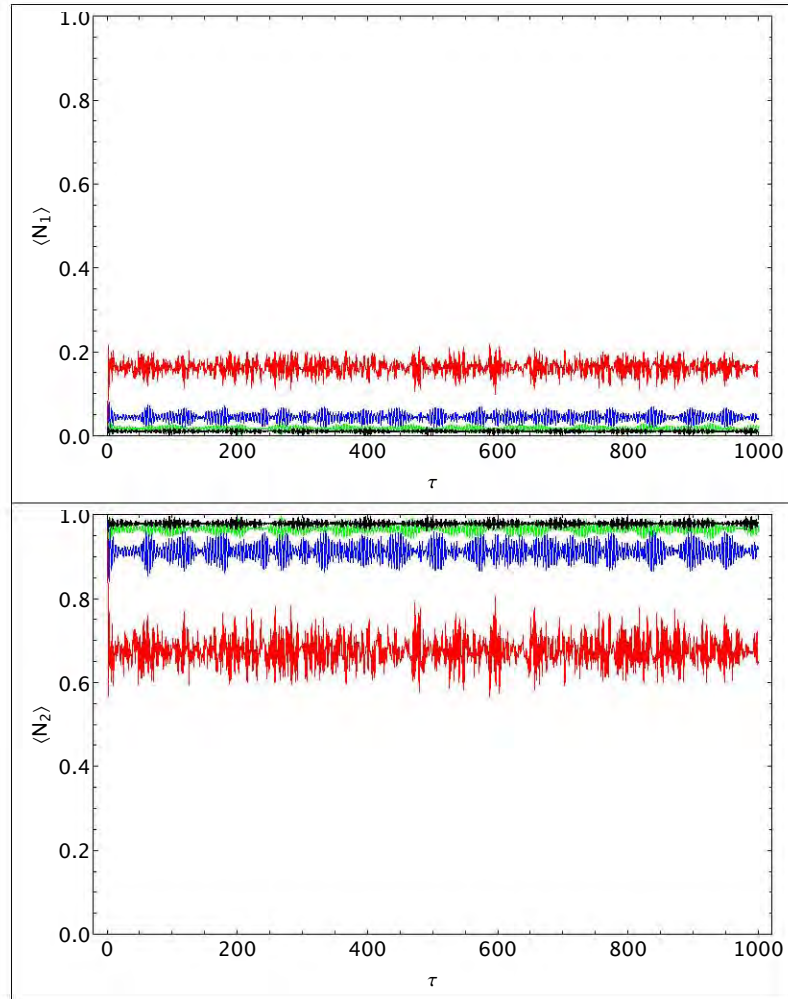


Figura 4.1: Evolución temporal de $\langle N_1 \rangle$ (panel superior) y $\langle N_2 \rangle$ (panel inferior) del estado inicial $|0, N_t, 0\rangle$ con $\Lambda_1 = 0.1$ para $N_t = 30$ (rojo), 50 (azul), 80 (Verde) y 100 (negro).

Para 100 partículas encontramos que 0.1 es un valor crítico para que el sistema muestre la fase de *Auto – atrapamiento*. Mientras que para un número menor de partículas el sistema no presenta dicha fase. Este resultado cumple

para cualquiera de los estados iniciales propuestos, mostrando que para el fenómeno de *Auto – atrapamiento* no existe una dependencia con el estado inicial.

Si ahora tomamos el estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |Nt, 0, 0\rangle$ y estudiamos nuevamente la evolución temporal de los mismos pozos para un valor de $\Lambda_1 = 0.01$, considerando los mismos números de partículas que el caso anterior, podemos observar que existe un cambio de fase del *Auto – atrapamiento* al de *Superfluidéz*, donde el número de partículas llega a oscilar alrededor de un estado estacionario $\langle N_{i=1,2,3} \rangle = \frac{Nt}{3}$ (fig. 4.2). El tiempo de relajamiento es el tiempo que tarde el sistema en alcanzar el estado de equilibrio. Para cualquier interacción diferente de cero la población de partículas en cada pozo oscila hasta alcanzar un valor constante, en el que permanece por un periodo de tiempo, después del cual reaparecen las oscilaciones. A este fenómeno se le conoce como recurrencias inducidas por el tamaño finito del sistema bajo estudio.

Ahora que ya encontramos la fase de *Auto – atrapamiento* para 100 partículas, estudiaremos el efecto que provocan los términos de interacción no local en la evolución temporal para algún valor en el que el sistema se encuentra en la fase de *Superfluidéz*.

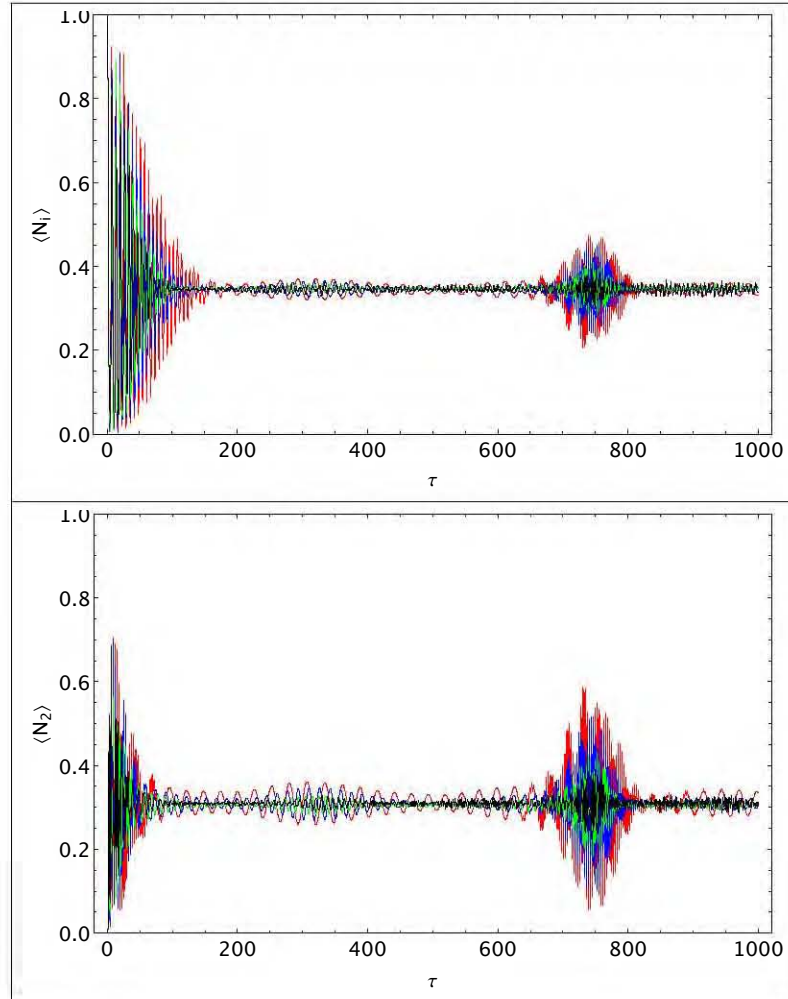


Figura 4.2: Evolución temporal de $\langle N_1 \rangle$ (panel superior) y $\langle N_2 \rangle$ (panel inferior) del estado inicial $|N_t, 0, 0\rangle$ con $\Lambda_1 = 0.01$ para $N_t = 30, 50, 80$ y 100 partículas. La fase de Superfluidez aparece para valores menores de 0.1 del coeficiente de interacción dipolar. Para este caso el número de partículas en promedio es igual en los 3 pozos.

En otras palabras se quiere explorar el término de interacción que tiene contribuciones de largo alcance o no locales. Dichos términos solo están presentes en la descripción de la interacción dipolar. En particular nos referimos al

término $b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_2 b_3^\dagger b_3 + \frac{1}{8} (b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3)$ que describe las interacciones entre partículas que no se encuentran en el mismo pozo.

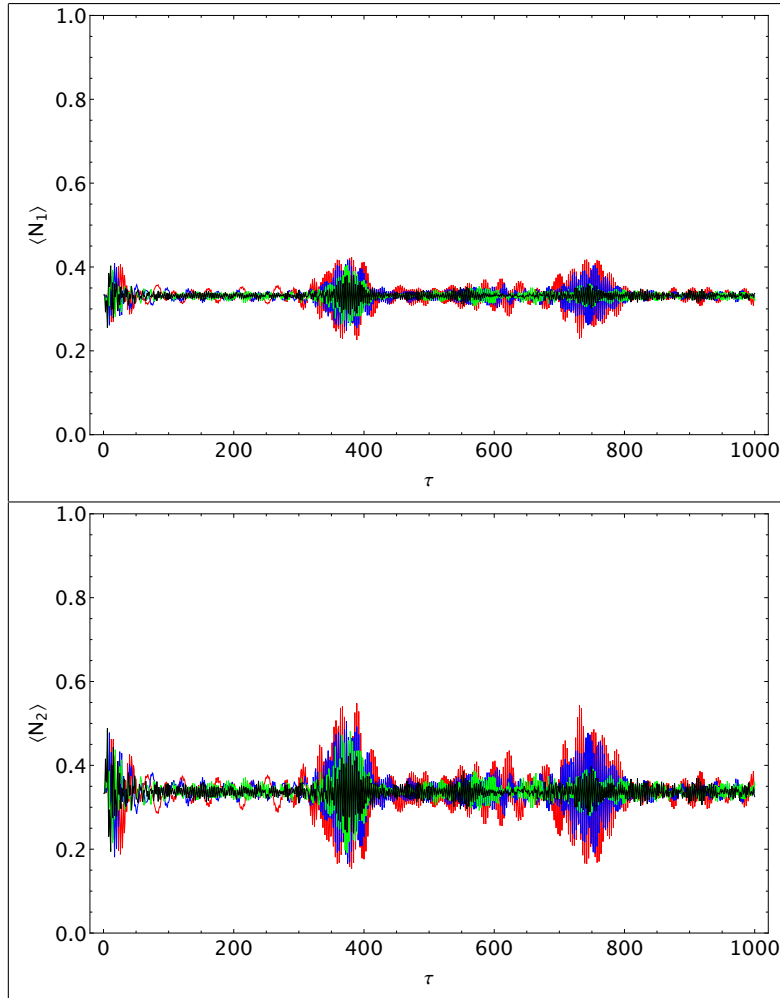


Figura 4.3: Evolución temporal de $\langle N_1 \rangle$ y $\langle N_2 \rangle$ (paneles superior e inferior respectivamente), para $\Lambda_1=0.01$ para 30, 50, 80 y 100 partículas con el estado inicial $|\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$. Ambas gráficas tienen el estado inicial $|N_t, 0, 0\rangle$.

Esta contribución da lugar a observar la dependencia del tiempo de relajamiento como función del número de partículas. Conforme el número de partículas aumenta, el tiempo de relajamiento es menor y que al igual que

en [26] después de un cierto tiempo el sistema *recurre* y éstas se presentan en un tiempo menor conforme es menor el número de partículas (figs. 4.2 y 4.3). Aún más, la amplitud de las oscilaciones en las recurrencias del sistema disminuyen conforme el número de partículas crece, tal comportamiento se puede apreciar claramente para los estados iniciales $|N_t, 0, 0\rangle$ y $|\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$ (fig. 4.3), siendo congruente con los resultados anteriores de localización.

4.1.2. Variación del coeficiente de interacción dipolar Λ_1

Todavía en el régimen dipolar, tomaremos valores menores a 0.1 para saber cómo es que influye una interacción menor de las partículas en el sistema, a fin de tratar de parametrizar en la medida de lo posible cada variable para que a futuro se tome como referencia en trabajos teóricos o incluso en experimentos.

Ahora bien para $N_t=100$, cuando Λ_1 toma valores de 0.01 y 0.001 (fig. 4.4), el tiempo de relajamiento se escala en un orden de magnitud. En lo que respecta a las oscilaciones, durante los periodos de recurrencia se observa un coherencia mayor para $\Lambda_1 = 0.001$ en relación a $\Lambda_1 = 0.01$, incluso se puede distinguir una frecuencia de oscilación al igual que una envolvente.

En resumen, la evolución temporal del sistema bajo estudio, posee una alta sensibilidad tanto a cambios en el valor de Λ_1 , como en el número de partículas.

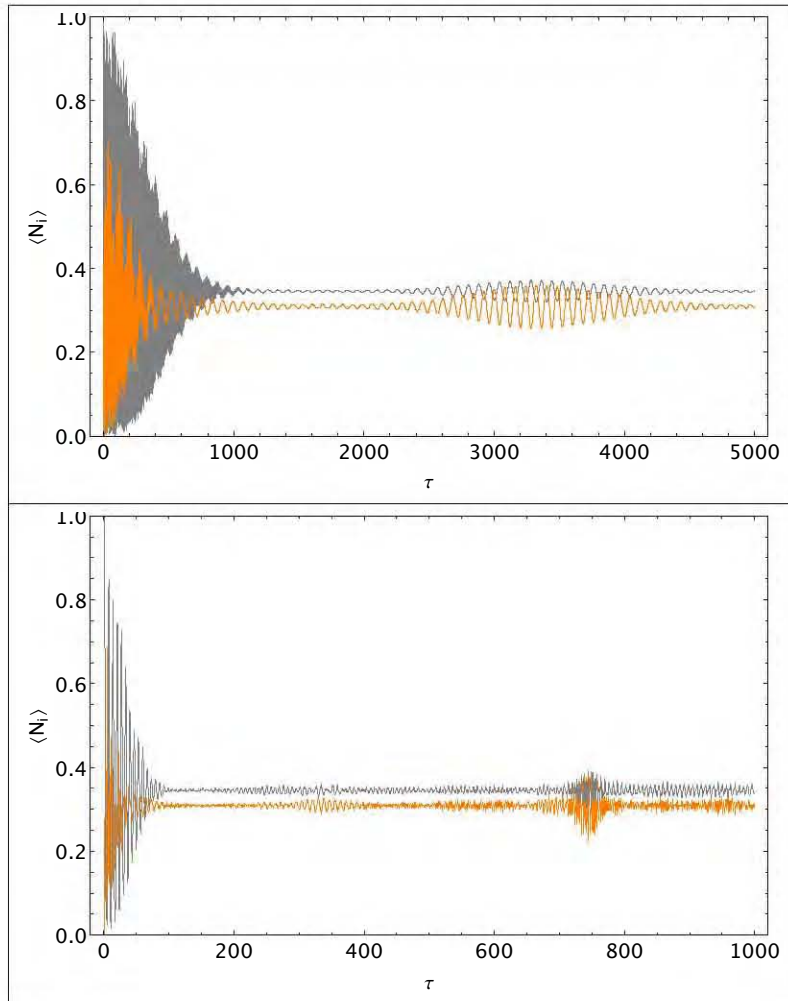


Figura 4.4: Gráficas de la evolución temporal de los pozos $\langle N_1 \rangle$ y $\langle N_2 \rangle$ (naranja y gris respectivamente) con el estado inicial es $|N_t, 0, 0\rangle$ y $N_t=100$. Conforme disminuye el valor de Λ_1 las oscilaciones de la partículas entre los pozos aumenta tanto en frecuencia como en amplitud. Además el tiempo de relajamiento aumenta de manera considerable.

Esto quiere decir que para un valor de Λ_1 fijo, en el régimen de *Superfluides* se observa que entre menor número de partículas la cantidad de éstas que oscilan entre los pozos es mayor. Es decir que tienen una mayor libertad de

movimiento entre los pozos, siendo confirmando con un razonamiento común, dado que al existir un número menor de partículas, el número de interacciones es menor y por tanto tienen mayor libertad de *tunear*.

4.2. Gas con interacciones de contacto y dipolares

Ahora cambiando la hipótesis, se incluyen las interacciones de contacto pero con un valor pequeño. Si fijamos un valor de Λ_1 10 ó 100 veces mayor que Λ para verlo como una perturbación del sistema debida a colisiones entre pares de partículas, podemos observar que se tienen los mismos resultados como si no existiera interacción de contacto.

En la sección anterior encontramos que para 100 partículas el valor 0.1 es en el cual aparece la fase de *Auto – atrapamiento*, y si agregamos la interacción de contacto obtenemos los mismos resultados no importando el estado inicial (fig. 4.5).

Si ahora tomamos el mismo valor para dos coeficientes de interacción $\Lambda_1 = 0.01$, el sistema sigue sin presentar una fase de *Auto – atrapamiento* (fig. 4.6).

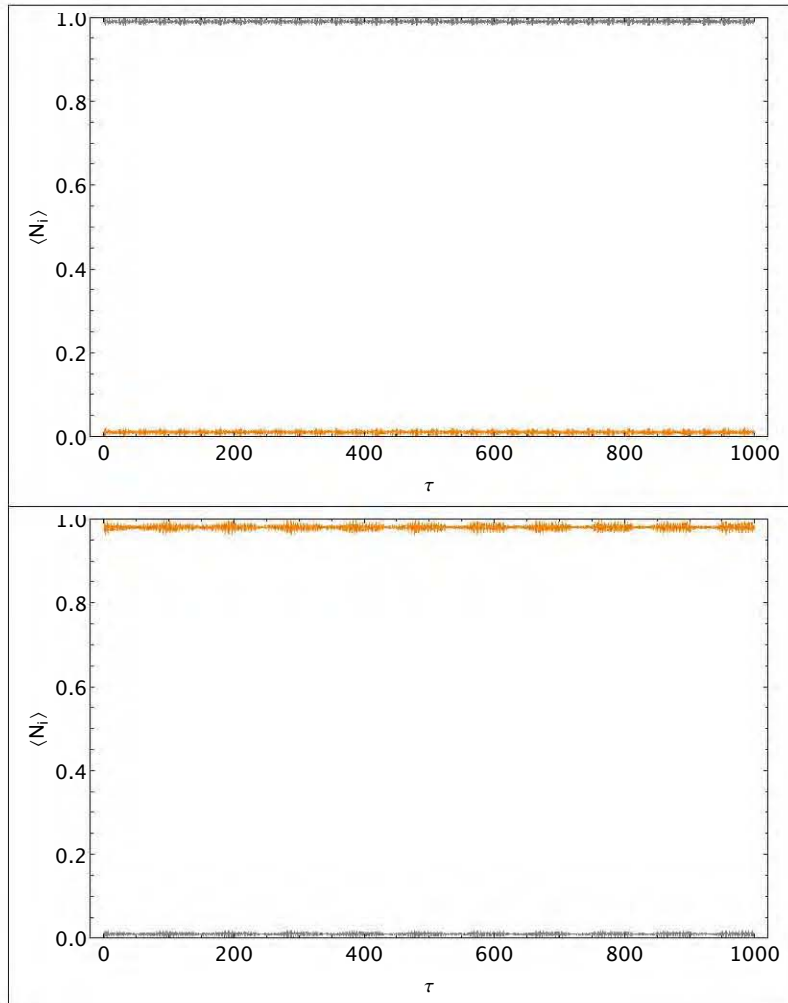


Figura 4.5: Evolución temporal del número de población $\langle N_1 \rangle$ (gris) y $\langle N_2 \rangle$ (naranja) con los estados iniciales $|N_t, 0, 0\rangle$ (panel superior) y $|0, N_t, 0\rangle$ (panel inferior) para 100 partículas con valores de $\Lambda_1=0.1$ y $\Lambda=0.001$.

Por último para el caso en que los coeficientes de interacción son del mismo orden de magnitud pero muy pequeños, del orden de 0.001 (fig. 4.7), se sigue comprobando que a medida que los coeficientes de interacción disminuyen, el sistema tarda un tiempo mayor para llegar a oscilar alrededor de un estado estacionario, es decir, el tiempo de relajamiento aumenta.

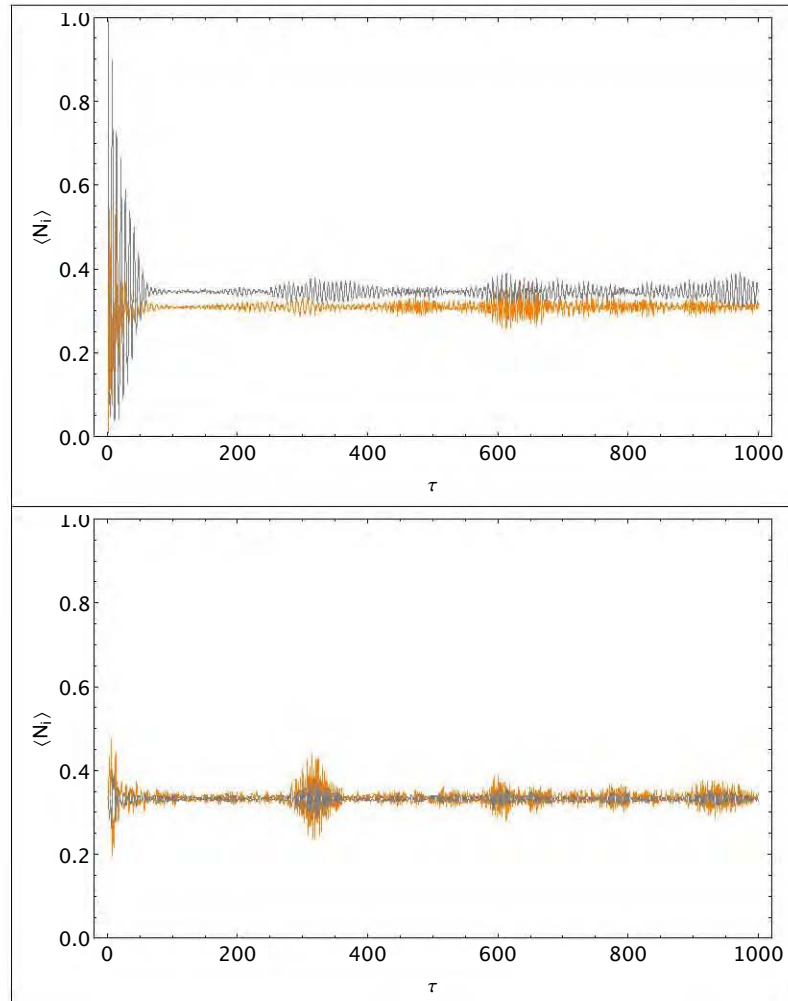


Figura 4.6: Para los estados iniciales $|\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$ (panel inferior), $|\frac{N_t}{3}\rangle$ y $|N_t, 0, 0\rangle$ (panel superior) el sistema presenta la fase de Superfluidez con valores $\Lambda=0.01$ y $\Lambda=0.001$.

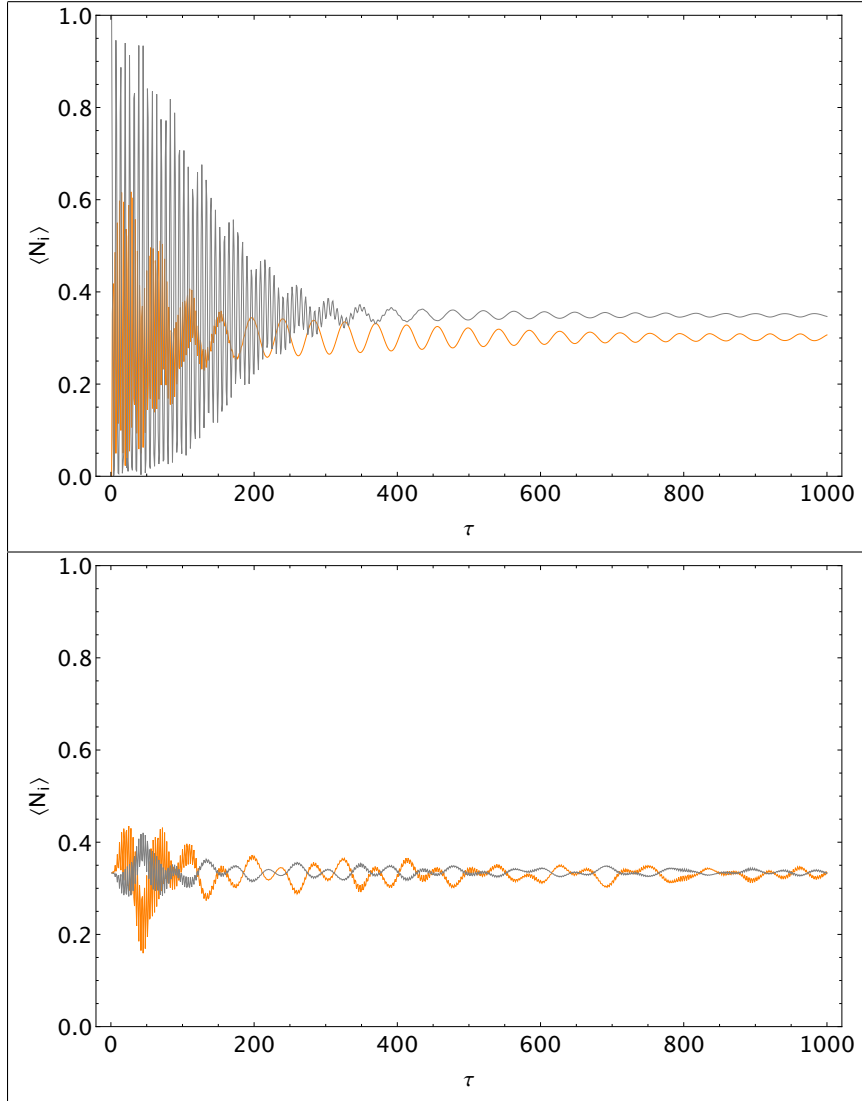


Figura 4.7: El tiempo de relajamiento en cualquiera de los estados iniciales $|N_t, 0, 0\rangle$ ó $|\frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}, \frac{N_t}{3}\rangle$ sigue alargándose conforme el valor de la interacción dipolar disminuye, sin importar el estado inicial.

Finalmente hay que agregar un detalle en nuestro sistema, que es el hecho de que para 100 partículas con valores menores $\Lambda_1 = 0.1$ (fig. 4.7), los estados estacionarios que se alcanzan en cada pozo dependen fuertemente del estado

inicial. Esta característica se exhibe en la fig. 4.8.

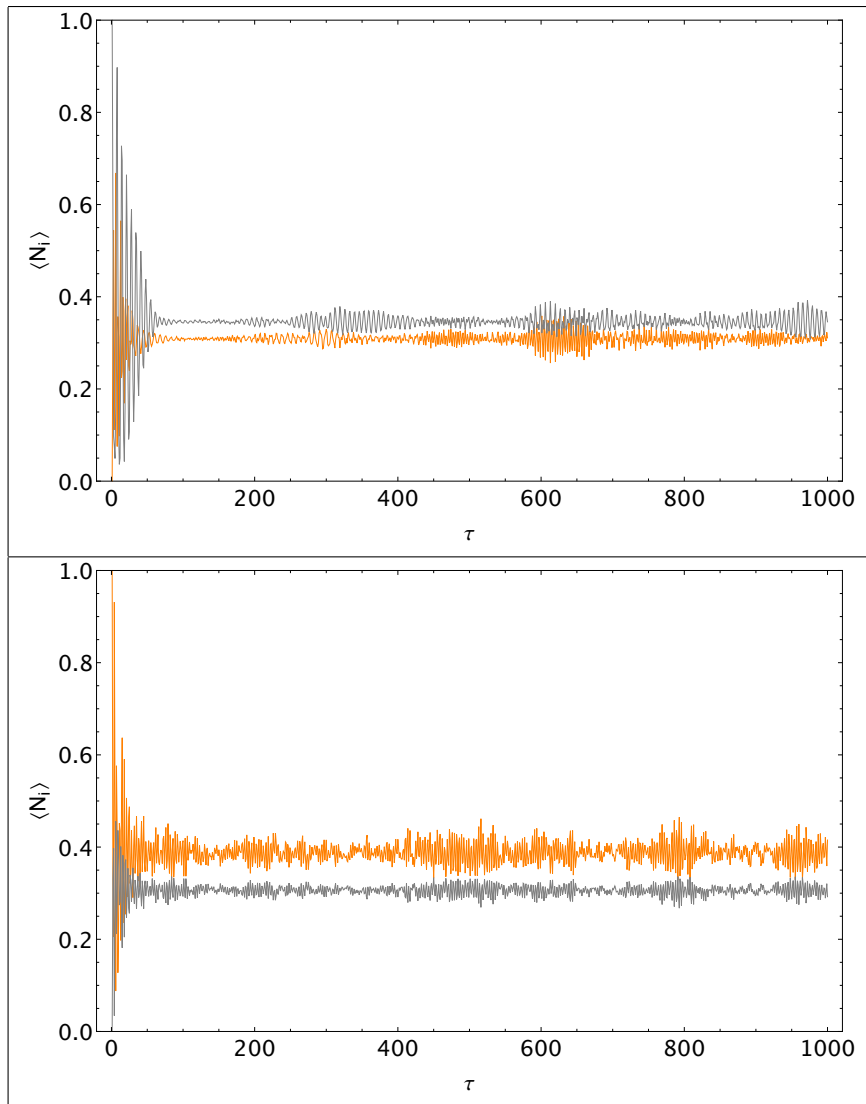


Figura 4.8: Si el total de partículas comienza en el pozo 1 (parte panel de la figura), en promedio el número de partículas que se encontrarán en dicho pozo será mayor que en el pozo 2, mismo caso sucede cuando tomamos el estado inicial $|0, N_t, 0\rangle$ (panel inferior).

4.3. Comparación entre las interacciones dipolar y de contacto.

Una vez dados los parámetros para los cuales existe el *Auto – atrapamiento* de las partículas en un pozo determinado de nuestro sistema para $N_t=100$, estudiaremos el caso de 30 para comparar los resultados con [25, 26] .

Para comparar la evolución temporal para los casos en los que solo se tiene interacción de contacto o solamente interacción dipolar se tomaron los siguientes casos:

1. $\Lambda = 0.1$ y $\Lambda_1 = 0$ (fig. 4.9 panel superior)
2. $\Lambda = 0$ y $\Lambda_1 = 0.1$ (fig. 4.9 panel inferior)

la fase de *Auto – atrapamiento* que se presentaba en las interacciones puramente de contacto, desaparece cuando se considera únicamente la contribución dipolar, mostrando el carácter no local de dicha interacción. Vale la pena resaltar que los términos de pozos contiguos son determinantes en éste caso.

Al disminuir el valor de los coeficientes, el sistema presenta una fase de *Superfluidéz* (fig. 4.10) en ambos casos, una vez más mostrando ese tiempo más largo de relajamiento característico de la interacción dipolar con amplitudes de oscilación mayores a las de contacto.

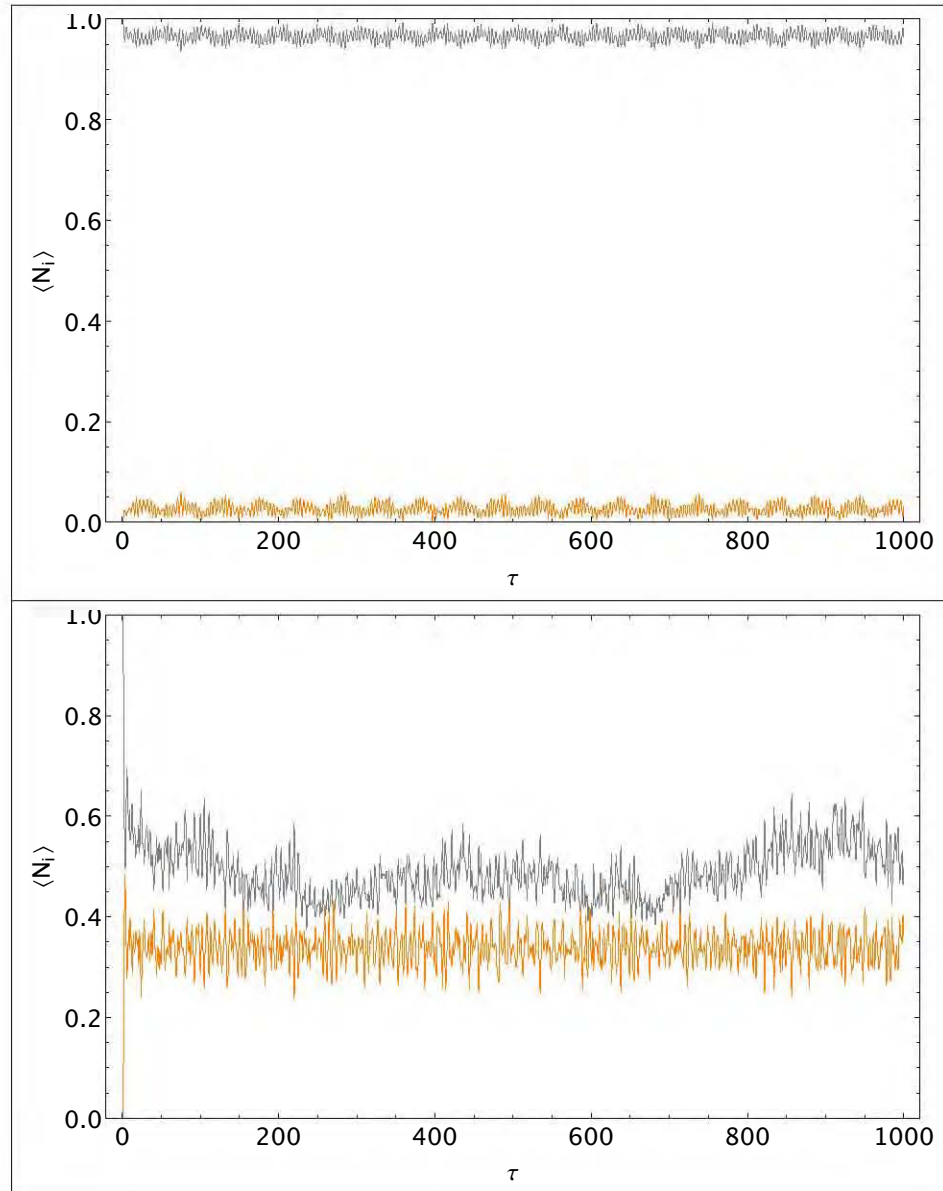


Figura 4.9: En el caso de interacción únicamente de contacto se observa Auto-atrapamiento para un valor de $\Lambda = 0.1$ con $N_t = 30$. Mientras que para el caso totalmente dipolar ($\Lambda_1 = 0.1$) se observa una fase de Superfluidez.

4.3 Comparación entre las interacciones dipolar y de contacto. 75

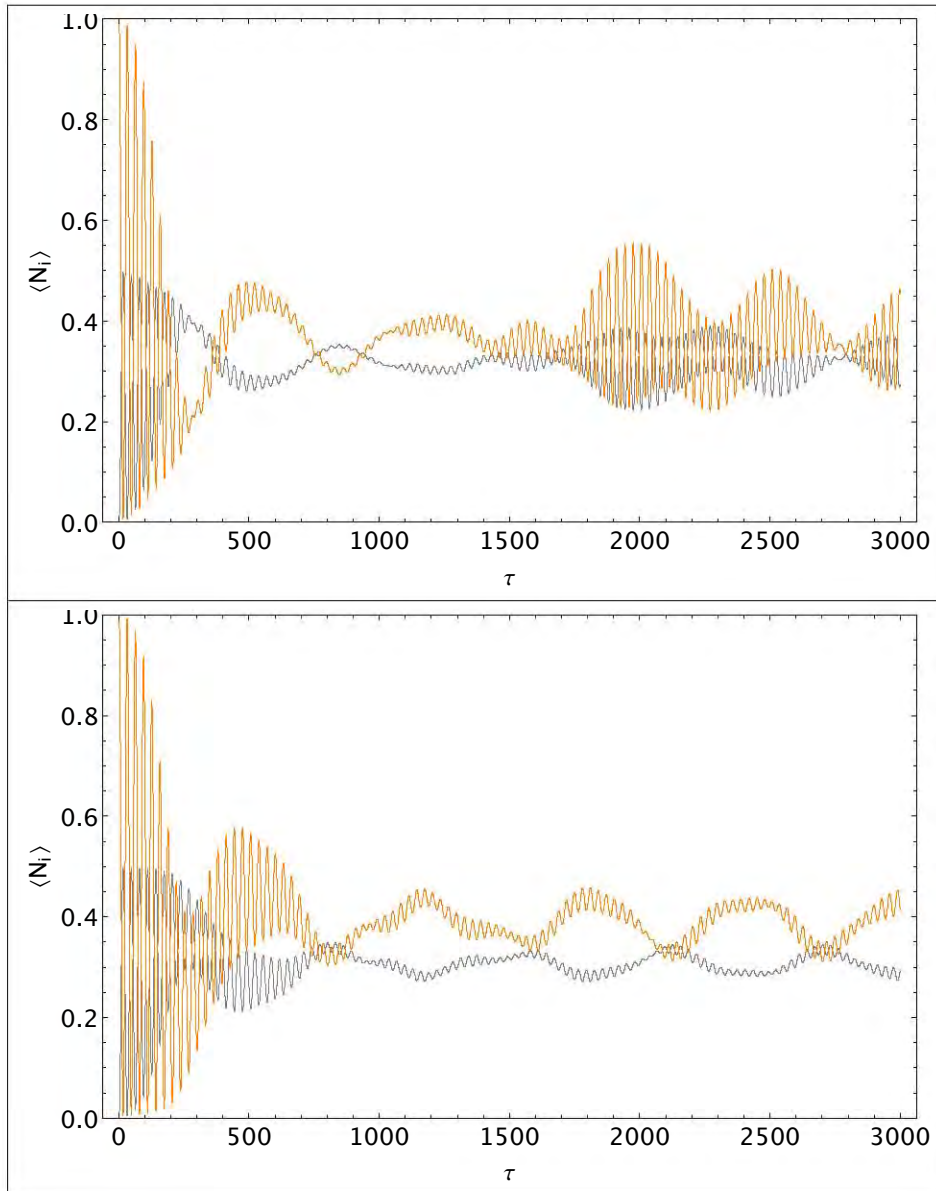


Figura 4.10: Evolución temporal de los pozos 1 (gris) y 2 (naranja) con el mismo estado inicial considerando interacción de contacto $\Lambda = 0.01$ y $\Lambda_1 = 0$ (panel superior) y dipolar $\Lambda = 0$ y Λ_1 (panel inferior).

Para finalizar el estudio de éste sistema, se hizo un análisis de la dependencia del producto entre el número de partículas N_t y el coeficiente que caracteriza la interacción, con el objetivo de determinar un valor crítico de dicho producto para el cual se observa la fase de *Auto – atrapamiento* en el sistema. De manera ilustrativa se muestran dos ejemplos para valores de $N_t=30, 50$ con valores de $\Lambda_1=0.3$ y 0.2 respectivamente (fig. 4.11).

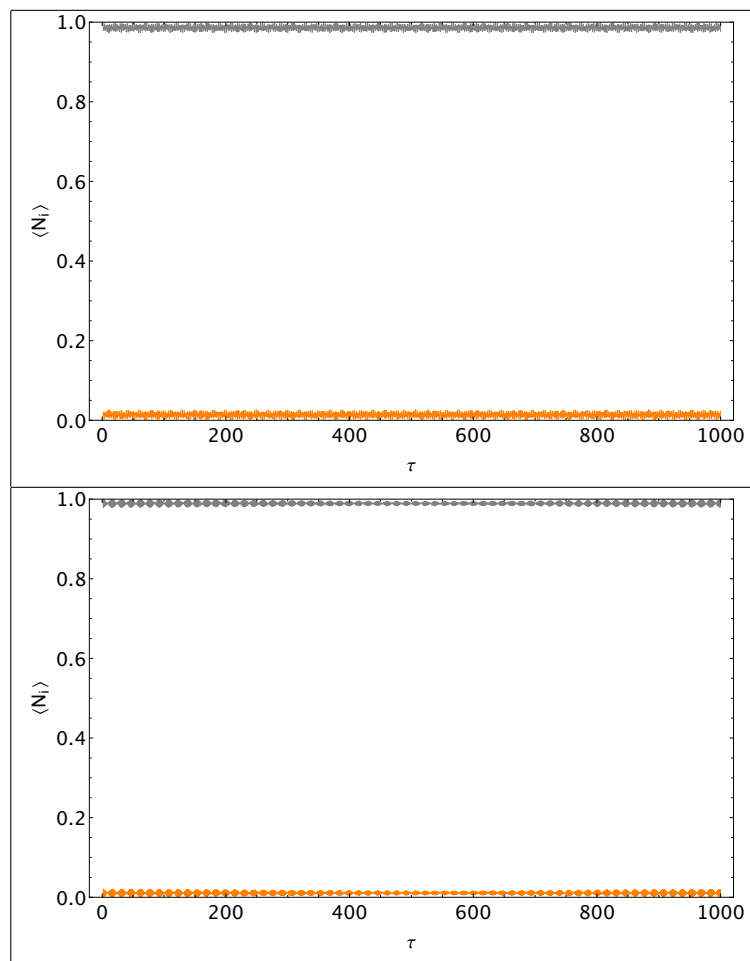


Figura 4.11: Figuras de la evolución temporal de los pozos 1 $\langle N_1 \rangle$ (gris) y $\langle N_2 \rangle$ en las que se muestra la fase de *Auto – atrapamiento* para los casos de $N_t = 30$ (panel superior) y $N_t = 50$ (panel inferior).

4.3 Comparación entre las interacciones dipolar y de contacto. 77

Por lo que si producto del número de partículas N_t y el coeficiente de interacción dipolar Λ_1 es $\approx < 10$, el sistema presentará *Superfluides* y para cantidades mayores de esa relación presentará *Auto – atrapamiento*.

Es importante recalcar que se considera que el sistema se encuentra en la fase de *Auto – atrapamiento* cuando el porcentaje de partículas que tunelean a través de los pozos es menor al 5%, es decir, que cuando los valores de expectación de población en cada pozo sea superior en todo momento a 0,95.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este trabajo de tesis las actividades realizadas fueron las siguientes:

1. En el capítulo 1 se hizo una revisión de las principales técnicas de enfriamiento con las cuales puede llegar a crearse un BEC en un experimento real. En particular, se hizo énfasis en las consideraciones que deben tenerse para lograr un condensado de átomos de ^{52}Cr ya que tienen un momento dipolar magnético muy grande en comparación con otros átomos ($6 \mu_b$). Además las diferentes configuraciones de trampas magneto-ópticas en las cuales se pueden construir sistemas de pozos en 1-D.
2. En el capítulo 2 se revisó el formalismo de la Segunda Cuantización, herramienta con la cual se lleva a cabo el estudio de sistemas de muchos cuerpos. Dentro del mismo capítulo también se exploró la teoría de interacciones entre partículas a bajas energías ya que las temperaturas que se llegan a alcanzar en éstos pueden ser del orden de nK . El objetivo principal en este capítulo fue el establecimiento de un Hamiltoniano para representar el sistema en consideración, encontrando que está compuesto de 3 términos: el de tunelaje entre pozos adyacentes, el debido a las interacciones de contacto locales, y la contribución que

considera las interacciones dipolares.

3. En el capítulo 3 se estudiaron los estados estacionarios del Hamiltoniano arriba descrito. Debido a que el tamaño de la matriz H depende del número de partículas, y por tanto el número de estados estacionarios también, se acotaron los resultados con los estados estacionarios con máxima y mínima energía, suponiendo que podemos interpolar y que las fases a las que el sistema puede acceder también están acotadas por éstos.
4. Finalmente en el capítulo 4 se estudió la evolución temporal del sistema, en particular se analizó el comportamiento temporal de la población de partículas en los pozos n_1 , n_2 y n_3 como función de los parámetros. Para éste propósito se consideraron diferentes estados iniciales $|\Psi(0)\rangle$ y se variaron los coeficientes que modulan la interacción de contacto y dipolar. Además se estableció la dependencia con el número de partículas N_t .

Para un sistema de Bosones dipolares confinados en 3 pozos en 1-D las interacciones pueden ser determinantes. Debido a que se tratan de sistemas reales, la dependencia del tipo de interacción entre las partículas o átomos influye de manera importante tanto para confinarlos en una trampa en un experimento de laboratorio como para estudiarlos teóricamente. Mediante la lectura de trabajos experimentales se llegó a la conclusión de que las interacciones repulsivas son las que facilitan la estabilidad de los condensados en las trampas. Es por esto que se determinó que en nuestro Hamiltoniano dichas interacciones fueran del mismo signo y de signo contrario al término de la energía de *tunelaje* o cinética.

Aún así, en el capítulo 3 se crearon diagramas de fase en los que los coeficientes de interacción Λ y Λ_1 toman valores entre 4 y -4 para 50 partículas (debido a las restricciones computacionales) con los estados . Se obtuvo que

aún reduciendo el intervalo a $[-0.5, 0.5]$ el sistema sigue accediendo a todas las posibles fase. Con este resultado en mente se incrementó y disminuyó el número de partículas en éste mismo intervalo para lo poder observar posibles fases que no se presentara en el caso de 50 partículas, llegando a la conclusión de que el sistema puede sólo tener éstas 4 fases en los estados estacionarios lo que por resultado nos dice que los dos parámetros que determinan el tipo de oscilación y el estado estacionario al que llegarán. Quizá el resultado más interesante es que tanto en todos los diagramas de fase para los estados estacionarios con máxima y mínima energía se muestra que existe un estado inicial y un par de valores para Λ y Λ_1 en las que el efecto Josephson se observa claramente entre los pozos 1 y 3.

Finalmente en el capítulo 4, lo que se hizo fue un análisis enfatizándonos en el gas puramente dipolar, para un valor fijo del coeficiente de interacción dipolar, al incrementarse el número de partículas hace que éstas empiezan a dejar de oscilar entre los pozos que se encuentran inicialmente, llegando a un par de valores críticos Λ_1 y N_t en el las partículas se confinan en su totalidad. En cuanto al estudio de la fase de *Superfluides*, fijando ahora N_t el efecto que se observa es que a menor coeficiente de interacción dipolar el sistema toma un tiempo mayor en llegar al estado estacionario al que llega a oscilar. Comparando con los resultados en los que se toman en cuenta únicamente interacciones de contacto [25, 26] para el caso de 30 partículas debido a los términos de interacción entre pozos en el caso dipolar, el coeficiente de interacción debe ser mayor que en el caso de la interacción puramente de contacto.

Se encontró que existe un valor crítico en el producto entre el número de partículas y el coeficiente que regula las interacciones dipolares entre partículas para el cual existe una transición de la fase de superfluides a la fase de auto-atrapamiento.

Apéndice A

Justificación del valor $\frac{1}{8}$ en el Hamiltoniano

El término de nuestro Hamiltoniano con el cuál queremos describir las interacciones no locales, que son las dipolares, tienen términos cruzados adicionales, es decir, operadores de creación y aniquilación de diferentes pozos multiplicados.

Pero el último término el cual describe las interacciones de mayor alcance tiene la forma:

$$\frac{1}{\alpha} b_1^\dagger b_1 b_3^\dagger b_3$$

donde el parámetro α depende de la geometría de $V_{ext}(x)$. Dicho parámetro está definido de como el cociente:

$$\alpha = \frac{E(\sigma_x, l)}{E(\sigma_x, 2l)} \quad (\text{A.2})$$

donde $E(\sigma_x, l)$ es la energía de interacción entre dos nubes Gaussianas con amplitud σ_x a lo largo del eje x separadas por una distancia l . Ahora, ya que en los experimentos reales tenemos nubes de 3 dimensiones, supongamos que σ_y, σ_z son tan pequeños que son despreciables ya que como hemos dicho en

el tomamos el caso de 1D, entonces la energía E sólo dependerá de σ_x y l .

Bajo éstas suposiciones tomemos un par de densidades atómicas Gaussianas:

$$n_1(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \delta(y) \delta(z)$$

$$n_1(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \delta(y - l) \delta(z)$$

con A la constante de normalización. Ahora calculando la energía de interacción dipolar obtenemos que

$$E(\sigma_x, l) \int dx dx' \frac{\exp[-(x^2 + x'^2)/\sigma_x^2]}{[(x + x' + l)]^{3/2}} \quad (\text{A.3})$$

por lo que podemos observar que el cociente α depende de l/σ . Dicha dependencia se puede observar con mayor detalla en la fig. A.1[18]:

donde claramente podemos observar que si $l \gg \sigma_x$ el cociente tiende a 8. Dado nuestra base $\{\phi\}$ son funciones de onda localizadas y que además los pozos 1 y 3 se encuentran separados de manera tal que cumplen las condiciones anteriores podemos escribir el factor $1/8$ en la interacción entre pozos extremos.

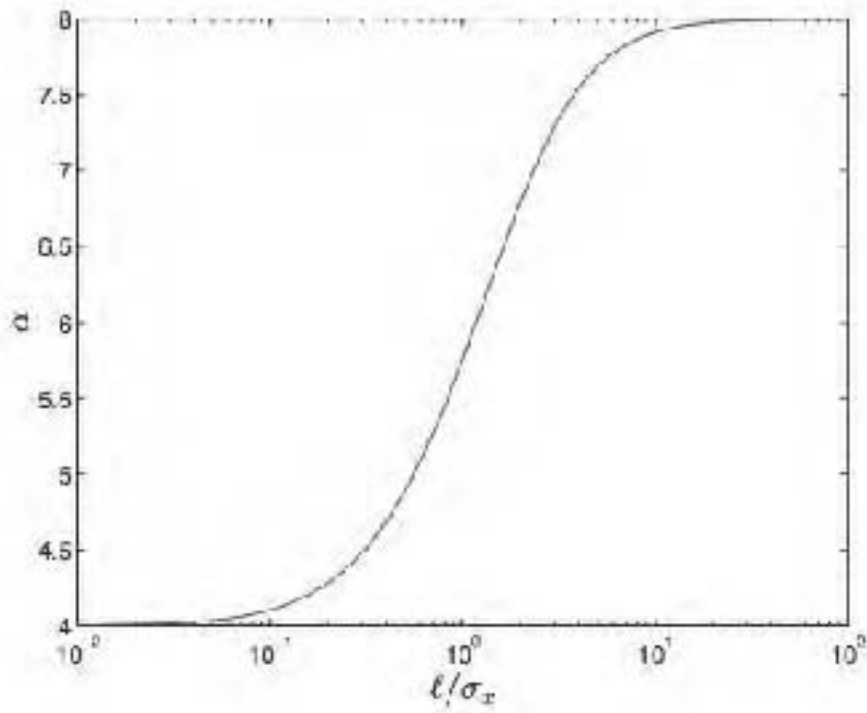


Figura A.1: Gráfica que muestra la dependencia de α con el cociente l/σ_x .

Bibliografía

- [1] S. Bose, “ Planck’s Law and light quantum Hypothesis ” American Journal of Physics Vol.44 No.11, November 1976.
- [2] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/
- [3] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, A. Ashkin, “Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure” Phys. Rev. Lett. 55, 48-51 (1985).
- [4] R. Grimm, M. Weidemüller, Y. Ovchinnikov, “Advances In Atomic, Molecular and Optical Physics: Optical Dipole Traps for Neutral Atoms ”, Volume 42, 2000, Pages 95-170.
- [5] A. Ibarra-Durán, “ Por debajo del límite Doppler: El enfriamiento Sisi-fo”.
- [6] H. Metcalf, P. Van Der Straten, “ Laser cooling and trapping ”
- [7] W. Ketterle, N. J. van Druten, “ Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions ”, Phys. Rev. A 54, 656-660 (1996).
- [8] H.M. Rosenberg. , “The Solid State” . Oxford University Press, 1988, New York.
- [9] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, T. Esslinger, “ Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1-D Gas ”, Phys. Rev. Lett. 91, 250402 (2003)

-
- [10] D. M. Gangardt¹ and G. V. Shlyapnikov, “ Stability and Phase Coherence of Trapped 1D Bose Gases ”, *Phys. Rev. Lett.* 90, 010401 (2003).
- [11] D. Clément, N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, and M. Inguscio , “ Exploring Correlated 1D Bose Gases from the Superfluid to the Mott-Insulator State by Inelastic Light Scattering ” *Phys. Rev. Lett.* 102, 155301 (2009).
- [12] T. Lahaye, T. Koch, B. Fröhlich, M. Fattori, J. Metz, A. Griesmaier, S. Giovanazzi, T. Pfau, “ Strong Dipolar Effects in a Quantum Ferrofluid ”, *Nature*. 2007 Aug 9;448(7154):672-5.
- [13] M. Veda, “Fundamentals and New Frontiers of BEC” (World Scientific Publishing Co. 2010).
- [14] T. Lahaye, J. Metz, B. Fröhlich, T. Koch, M. Meister, A. Griesmaier, T. Pfau, H. Saito, Y. Kawaguchi, and M. Ueda, “ d-Wave Collapse and Explosion of a Dipolar Bose-Einstein Condensate ” *Phys. Rev. Lett.* 101, 080401 (2008).
- [15] T. Koch, T. Lahaye, J. Metz, B. Fröhlich, A. Griesmaier, T. Pfau, “ Stabilizing a Purely Dipolar Quantum Gas Against Collapse”, *Nature Physics* 4, 218 - 222 (2008).
- [16] J. Werner, A. Griesmaier, S. Hensler, A. Simoni, E. Tiesinga, J. Stuhler, and T. Pfau, “ Observation of Feshbach resonances in an ultracold gas of ^{52}Cr ”, *Phys. Rev. Lett.* 94, 183201(2004).
- [17] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, and T. Pfau, “ Bose-Einstein Condensation of Chromium ”, *Phys. Rev. Lett.* 94, 160401 (2005).
- [18] T. Lahaye, T. Pfau, L. Santos, “ Mesoscopic Ensembles of Polar Bosons in Triple-Well Potencial ”, *Phys. Rev. Lett.* 104, 170404 (2010).

-
- [19] K. Nemoto, C. A. Holmes, G. J. Milburn, W. J. Munro, “Quantum dynamics of three coupled atomic Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* 63, 013604 (2000).
- [20] E. M. Graefe, H. J. Korsh, D. Witthaut, “ Mean-field dynamics of a Bose-Einstein condensate in a time-dependent triple-well trap: Nonlinear eigenstates, Landau-Zener models, and stimulated Raman adiabatic passage ”, *Phys. Rev. A* 73, 013617 (2006).
- [21] S. Mossmann and C. Jung, “ Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential”, *Phys. Rev. A* 74, 033601 (2006).
- [22] “Transistorlike behavior of a Bose-Einstein condensate in a triple-well potential”, *Phys. Rev. A* 75, 013608 (2007).
- [23] F. Trimborn, D. Witthaut, H. J. Korsch “Exact number-conserving phase-space dynamics of the M-site Bose-Hubbard model”, *Phys. Rev. A* 043631 (2008).
- [24] D. Yamamoto, I. Danshita, C. A. R. Sa? de Melo “Dipolar bosons in triangular optical lattices: Quantum phase transitions and anomalous hysteresis ”, *Phys. Rev. A* 85, 021601(R) (2012).
- [25] R. Paredes, “ Tunnelling of Ultracold Bose Gases in Multiple Wells” , *Phys. Rev. A* 73, 033616 (2006).
- [26] R.Paredes, “ Dynamics of an Interaction Bose-Einstein Condensate in a Three-Well Potencial”, *Laser Physics*, Vol. 16 Issue 12, pp 1714-712 (2006)
- [27] M. E. Rose, “Elementary Theory of Angular Momentum”(Jhon Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, 1967).
- [28] Dr. Victor Romero Rochin, “Notes on second suantization and Bose gases at low temperaures”, (IFUNAM, México D.F. 2009).

- [29] A. L.Fetter and J. D. Walecka, “Quantum Theory of Many-Particle Systems”(McGraw-Hill, New York, 1971).
- [30] H. T. C. Stoof, K. B. Gubbels and D. B. M. Dickerscheid, “Ultracold Quantum Fields”(World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010).
- [31] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”(John Wiley & Sons, Inc. USA, 1999).
- [32] M. Köhl, T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, T. Esslinger, “Applied physics B: Lasers and Optics: 1-D Bose Gases in an Optical Lattice”, Volume 79, Number 8 (2004), 1009-1012.