



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE INTERPOLACIÓN CON
FUNCIONES DE BASE RADIAL EN EL
CRÁTER DEL CHICXULUB

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA:

JOSÉ RODRIGO ROJO GARCÍA

DIRECTOR: DR. LUIS MIGUEL DE LA CRUZ SALAS



MÉXICO D.F., CD, UNIVERSITARIA

2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicada a mi madre

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a mi familia quien me ha apoyado en todos los aspectos de mi vida y por haber creído en mí.

A la Preparatoria No 5 de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y su personal docente por la excelente preparación académica que se me brindó y la influencia que tuvo sobre mí en el área de las ciencias físico matemáticas.

A la Facultad de Ingeniería de la UNAM por brindarme una educación superior de calidad.

A mi director de tesis el Dr. Luis Miguel de la Cruz Salas por brindarme la oportunidad de integrarme a su proyecto y la confianza que tuvo en mí para dejarme proponer ideas sobre el rumbo del mismo, así como su infinita paciencia y enseñanzas. Agradezco al Dr. Carlos Ortiz Alemán por su grandiosa ayuda y sugerencias pues fueron decisivas en este proyecto.

A mi sinodal el Dr. Pedro González Casanova quien me brindó observaciones importantes y de quien he aprendido aún más sobre Funciones de Base Radial, al M.C. Mauricio Nava Flores y al Dr. Jaime Urrutia quienes me han orientado con las conclusiones del trabajo.

Al Instituto de Geofísica de la UNAM por brindarme un espacio para trabajar durante el proyecto y a los compañeros quienes hicieron agradable el ambiente.

A personal del Instituto Mexicano del Petróleo quienes hicieron en su momento algunas observaciones.

Al Proyecto PAPIIT TB100112 quien me brindó una beca para la realización de esta tesis.

A la Dirección General de Computo y Tecnologías de la Información de la UNAM (DGTIC) y en especial a Héctor de realidad virtual quien me apoyó en la visualización de la reconstrucción tridimensional.

A SAM y a mis amigos entrañables quienes me apoyaron en los momentos difíciles.

ÍNDICE

RESUMEN	5
ABSTRACT	6
INTRODUCCIÓN	7
1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	9
1.1 FUNCIONES DE BASE RADIAL (FBR)	9
1.1.1 DEFINICIÓN	9
1.1.2 FBR COMO MÉTODO INTERPOLADOR	11
1.1.3 GMRES	13
1.1.4 SOPORTE COMPACTO	15
1.1.5 ERROR DE INTERPOLACIÓN	17
2. ANTECEDENTES	18
2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS	18
2.2 ANTECEDENTES GEOLÓGICOS	18
2.3 ESTUDIOS PREVIOS	20
3. METODOLOGÍA	25
3.1 INTERPOLACIÓN DE DATOS SINTÉTICOS	25
3.1.1 ERROR DE INTERPOLACIÓN	26
3.2 PERFILES SÍSMICOS	26
3.2.1 RECOLECCIÓN DE PERFILES SÍSMICOS Y ESTANDARIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	26
3.2.2 INTERPRETACIÓN DE ESTRUCTURAS	28
3.3 INTERPOLACIÓN DE DATOS OBSERVADOS	33
4. RESULTADOS	34
4.1 DATOS SINTÉTICOS	34
4.2 DATOS OBSERVADOS	42
4.3 RECONSTRUCCIÓN 3D	55
5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN	64
6. CONCLUSIONES	66
7. RECOMENDACIONES	67
BIBLIOGRAFÍA	68
ANEXOS	71
PROGRAMAS Y SUBRUTINAS	71

RESUMEN

La interpolación ha sido una de las herramientas más utilizadas en el procesamiento de datos geofísicos, su utilidad radica en la creación de mallas para datos cuyas mediciones se hicieron de manera dispersa o bien para reconstrucciones geológicas que a su vez sirven en problemas de inversión, pues la geometría es un parámetro usado en el problema directo.

Actualmente existen diferentes métodos de interpolación, sin embargo puede ser difícil decidir cuál es la mejor opción. Es por esta razón que se han hecho diversos estudios de comparación entre varios métodos usando datos sintéticos, de donde se han determinado los beneficios que puede tener un método sobre otro. En este trabajo de tesis se analiza el método de interpolación conocido como Funciones de Base Radial para un conjunto de perfiles sísmicos del Cráter del Chicxulub en la Península de Yucatán.

Se hicieron pruebas con datos sintéticos para tener información cuantitativa sobre el comportamiento de los diferentes parámetros involucrados, así como la magnitud y forma del error. Se prosiguió con la interpolación de los datos reales y se tomó como punto de comparación un modelo geológico cuya interpretación se debe a diversos estudios de exploración.

Se obtuvieron resultados aceptables tanto en datos sintéticos como en los datos reales, los kernels que arrojaron los mejores resultados son GA, IQ e IMQ.

La herramienta computacional utilizada en este trabajo fue una serie de subrutinas programadas en Python, con la finalidad de usar un lenguaje libre y amigable para su implementación.

ABSTRACT

The interpolation has been one of the most used tools in processing geophysical data, its usefulness lies in creating meshes for data whose measurements were dispersed or to geological reconstructions which in turn serve to solve inverse problems, because the geometry is a parameter in the forward method.

There are different interpolation methods, but the decision about which one is the best option may be difficult. This thesis analyzes the interpolation method known as Radial Basis Functions for a set of seismic profiles for Chicxulub Crater on the Yucatan Peninsula.

Several test were made using synthetic data to get quantitative information on the behavior of the different parameters. and to know the size and shape of the error. Using this information, we continued with the interpolation of real data for comparing the results with a geological model whose interpretation is due to geophysical studies.

Acceptable results were obtained on synthetic and real data, the kernels with the best results are GA, IQ and IMQ.

The computational tool used in this work was a set of subroutines programmed in Python, in order to use a free and friendly programming language for the implementation.

INTRODUCCIÓN

El método de interpolación conocido como Funciones de Base Radial (FBR) tiene sus orígenes en un método conocido como Método Multicuádrico desarrollado por Hardy [11] en 1968 con la finalidad de interpolar datos topográficos y que sirviera como reconstructor de superficies en mapas de contorno. Este método fue usado ampliamente en cuestiones de topografía pero también se extendió su uso a hidrología, fotogrametría y geodesia, véase Wright [26].

El método multicuádrico fue modificado con el tiempo e incluso expandido a un dominio multidimensional y algunos autores como Franke [8] y Michelli [15] estudiaron las propiedades del método multicuádrico. El primero hizo un análisis empírico y comparó diversos métodos hasta entonces conocidos de interpolación encontrando resultados muy favorables para el método multicuádrico. Por otro lado, Michelli [15] comprobó la no singularidad del método. El método de interpolación de Funciones de Base Radial, fue introducido por Rippa [19] y tiene como caso particular al método multicuádrico.

Las Funciones de Base Radial, se han extendido a múltiples aplicaciones dentro de la propia matemática y otras ciencias, entre ellas podemos encontrar según Buhmann [3]: solución numérica a ecuaciones en derivadas parciales, como método de aproximación, trabajos que involucran redes neuronales, métodos de ondícula e interpolación. A su vez estos métodos han tenido gran aplicación en reconstrucción de imágenes médicas y cuerpos con topología arbitraria, problemas de mecánica de fluidos etc.

Aunque el método de FBR ha tenido resultados positivos sobre varios métodos, en exploración geofísica (interpolación de mallas) no es común usarse (posiblemente a su relativo escaso tiempo de aparición), generalmente se usan los métodos de Kriging, Distancia Inversa a una Potencia y Mínima Curvatura. Sin embargo Franke [8] menciona que el método multicuádrico es el más preciso de todos los métodos ensayados (uno de los métodos ensayados fue Distancia Inversa a una Potencia) y Caruso et al. [5] en un estudio de geofísica hecho con FBR nos hablan de las ventajas que puede tener FBR sobre Kriging.

En geofísica, una forma de corroborar la efectividad de un método de interpolación en una reconstrucción es que, los resultados puedan ser corroborables físicamente con un modelo del subsuelo y no solo quedarse con resultados efectivos que provienen de modelos matemáticos sintéticos. Es por ello que aquí se hace una corroboración de la efectividad del método de FBR tomando como punto de comparación una interpretación geológica previa. Como datos de prueba se usarán perfiles sísmicos del Cráter del Chicxulub ubicado en la Península de Yucatán, la razón es que dada la naturaleza del cráter y su asociación con la extinción masiva de especies en el límite Cretácico – Terciario (KT), se han hecho diversos estudios geofísicos y geológicos en la zona y la información que se tiene de la estructura del cráter es relativamente abundante como para corroborar la interpolación.

Una vez expuesto lo anterior, se plantean como objetivos de este trabajo los siguientes puntos.

- 1) Analizar si la interpolación con funciones de base radial es adecuada para una reconstrucción tridimensional utilizando perfiles sísmicos.
- 2) En caso de que el método sea considerado adecuado, ubicar cuál es la función de base radial (kernel) que se ajusta más a las evidencias geológicas y sus correspondientes parámetros.
- 3) Evaluar los beneficios en términos del tiempo de cómputo para los kernels óptimos.
- 4) Reconstruir el cráter.

La metodología en este trabajo de tesis consiste en comparar de manera cualitativa un modelo geológico con el generado por la interpolación con FBR. La secuencia de trabajo es la siguiente:

- 1) Diseño de una función sintética, sobre ella se realizarán diferentes pruebas con el método FBR y se analizarán los resultados según los parámetros usados.
- 2) Recopilación de secciones sísmicas en publicaciones referentes al Chicxulub.
- 3) Interpretación de las secciones basada en estudios previos, en las que se identificarán las diferentes estructuras existentes en el sitio.
- 4) Reconstrucción tridimensional con FBR a partir de las secciones interpretadas y usando diferentes parámetros.
- 5) Análisis de los parámetros óptimos y tiempo de cómputo.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1 FUNCIONES DE BASE RADIAL (FBR)

1.1.1 DEFINICIÓN

Se conocen como funciones de base radial al conjunto de las funciones ϕ que satisfacen la siguiente definición:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \rightarrow \phi(\|\mathbf{x}\|) \quad (1.1)$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\|\mathbf{x}\|$ es la norma (euclidiana) del espacio \mathbb{R}^n , es decir:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

De manera práctica y con fines de simplificar la notación se denomina $r_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$, cuya interpretación es la distancia del punto definido por el vector \mathbf{x} al punto \mathbf{x}_j y por convención $r = \|\mathbf{x}\|$, Existen una infinidad de funciones de base radial, solo algunas son utilizadas con frecuencia en las diversas aplicaciones.

A las funciones de base radial que comúnmente son ocupadas en el método de interpolación se les llama **kernel**s, a continuación en la **Tabla 1.1** se presentan los principales kernels utilizados en este trabajo de tesis y documentados por algunos autores como De la Cruz [7] y Wright [26].

Tipos	Kernel
FBR suave a trozos	
Smooth Splines (SS)	$\phi(r) = r^\beta, \beta = 1, 5, 9, \dots, 4N + 1$
FBR infinitamente suave	
Gaussiana (GA)	$\phi(r, c) = \exp(-c^2 r^2)$
Multicuádrica (MQ)	$\phi(r, c) = (r^2 + c^2)^{\beta/2}, \beta = 1, 5, 9, \dots, 4N + 1$
Inversa Multicuádrica (IMQ)	$\phi(r, c) = (r^2 + c^2)^{-\beta/2}, \beta = 1, 5, 9, \dots, 4N + 1$
Inversa Cuadrática (IQ)	$\phi(r, c) = (1 + (rc)^2)^{-1}$
FBR con soporte compacto	
(SC) $\phi(r, \rho) =$	$\begin{cases} \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^4 \left(1 + 4\frac{r}{\rho}\right) & \text{para } 0 \leq \frac{r}{\rho} \leq 1 \\ 0 & \text{para } \frac{r}{\rho} > 1 \end{cases}$

Tabla 1.1, Kernels más usados en interpolación de datos

El parámetro c es un número real distinto de cero y su elección puede depender de cada caso en particular.

1.1.2 FBR COMO MÉTODO INTERPOLADOR

Una de las aplicaciones más reconocidas de las FBR es la interpolación de datos. El método consiste en tomar una función discreta $\{f_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$ generada por los vectores fuente $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^n$ para proponer una función continua que sea combinación lineal de las FBR y que satisfaga las condiciones de interpolación, es decir:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \phi\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|\right) \quad (1.3)$$

Donde los λ_k son constantes reales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \cdots & \varphi_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

La ecuación 1.4 se puede escribir como sigue:

$$\boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \quad (1.5)$$

En la ecuación 1.4 se ha usado la siguiente definición: $\varphi_{jk} = \phi\left(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|\right)$.

La matriz del sistema es no singular ya que Micchelli [15] demuestra que los kernels con sus respectivos parámetros mostrados en la tabla 1.1 generan matrices positivas definidas y por tanto invertibles.

Nota: Esta construcción del método es válida para todos los kernels excepto (SC), más adelante se explicará su aplicación.

Una interpretación geométrica del método nos podría decir que cada punto es construido por funciones que dependen de la distancia que hay entre los puntos vecinos al punto por interpolar, como guía observe la Figura 1.1

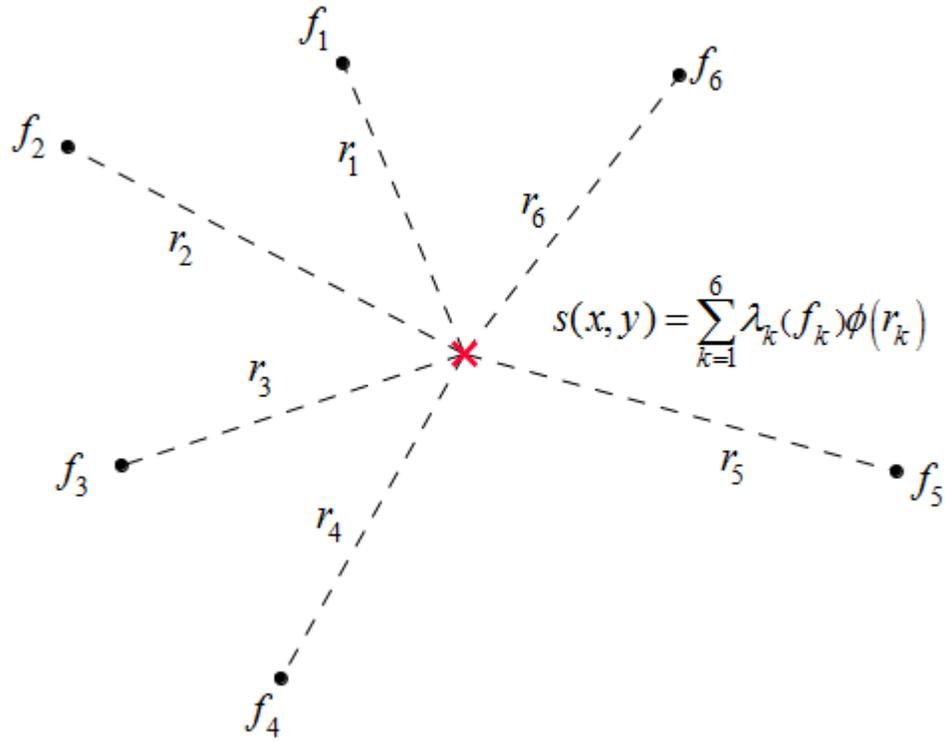


Figura 1.1 Representa esquemáticamente la construcción de cada punto interpolado a partir de funciones generadas por sus vecinos

1.1.3 GMRES

Dado que el método de FBR involucra un sistema lineal de ecuaciones que es de la forma $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde \mathbf{x} y \mathbf{b} pertenecen a \mathbb{R}^n y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es necesario utilizar un método para la resolución de \mathbf{x} , para este caso se propone usar el método GMRES (Generalized Minimal Residual) diseñado por Saad et al. [20].

GMRES es un método iterativo que ha tenido resultados favorables con matrices no-simétricas y no-dispersas, el algoritmo proviene de una familia de métodos llamados del Subespacio de Krylov los cuales se auxilian de un conjunto (o bien un espacio)

$$\kappa_r = \text{span} \{ \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{v} \}.$$

El método consiste en proponer una solución iterativa $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_k$, donde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ que es una solución inicial propuesta y \mathbf{z}_k surge de encontrar $\min_{\mathbf{z} \in \kappa_r} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})\|$, cuya estructura es similar a un problema de mínimos cuadrados.

Para encontrar la \mathbf{z}_k ideal, se desarrolla la función minimizadora de la siguiente manera.

$$\min_{\mathbf{z} \in \kappa_r} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})\| = \min_{\mathbf{z} \in \kappa_r} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A} \mathbf{z}\| \quad (1.6)$$

Donde \mathbf{r}_0 es el residuo para la iteración (0) definido como $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$.

Saad et al. [20] nos expone que encontrar el mínimo de la ecuación 1.6 es equivalente a encontrar el mínimo de la ecuación 1.7 y que $\mathbf{z}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k$ dando como solución del sistema

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k.$$

$$J(\mathbf{y}_k) = \|\beta \mathbf{v}_1 - \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k\| \quad (1.7)$$

Donde

- $\beta = \|\mathbf{r}_0\|$
- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta$
- \mathbf{V}_k es una matriz de orden $\mathbb{R}^{n \times k}$ cuyas columnas son un conjunto de vectores ortonormales $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.
- $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^k$

Dado que es necesario encontrar una base ortonormalizada, un método efectivo es usar el Método de Arnoldi que se basa en el Algoritmo de Ortonormalización de Gram-Schmidt. A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo.

Algoritmo de Arnoldi

2. Inicia: Escoger un vector inicial \mathbf{v}_1 con $\|\mathbf{v}_1\| = 1$

3. for $j = 1, 2, \dots$

$$h_{i,j} = (\mathbf{A} \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \dots, j$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+1} = \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} \mathbf{v}_i$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{\mathbf{v}}_{j+1}\|$$

$$\mathbf{v}_{j+1} = \hat{\mathbf{v}}_{j+1} / h_{j+1,j}$$

Una vez adaptado el algoritmo de Arnoldi al método GMRES, el pseudocódigo correspondiente es el siguiente.

Método GMRES

1. Inicia: Se tienen como entradas \mathbf{x}_0 y $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta$

2. for $j = 1, 2, \dots$

$$h_{i,j} = (\mathbf{A} \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \dots, j$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+1} = \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} \mathbf{v}_i$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{\mathbf{v}}_{j+1}\|$$

$$\mathbf{v}_{j+1} = \hat{\mathbf{v}}_{j+1} / h_{j+1,j}$$

3. Se calcula la solución

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k \quad \text{cuando } \mathbf{y}_k \text{ minimiza } J(\mathbf{y}_k)$$

Definición 1.1.3.1

Sea el sistema de ecuaciones $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, se dice que la matriz de coeficientes \mathbf{A} es dispersa si contiene un porcentaje alto de entradas iguales a cero. En caso contrario se le denomina no-dispersa o densa.

Observación

La matriz de coeficientes Φ del método de FBR es densa, pues generalmente las diagonales principales son las que contienen ceros y las demás entradas son distintas de cero.

El método tiene la ventaja de ser muy rápido y entrega resultados favorables en el caso de matrices densas, que es el caso del método FBR, véase De la Cruz [7].

Sin embargo, si la matriz es dispersa el método también funciona y resuelve el sistema en menor tiempo.

1.1.4 SOPORTE COMPACTO (SC)

La interpolación usando el kernel de SC funciona de manera similar a la de los demás, pues se debe resolver el sistema dado por la ecuación 1.5, y después evaluar en la ecuación 1.3, pero su importancia radica en la forma en la que esté definido el SC.

El SC tiene a ρ como parámetro cuya interpretación geométrica es la siguiente.

Supongamos que se tiene un conjunto de N puntos dispersos como en la figura 1.2 y ordenados según el subíndice dado. Se quiere calcular las entradas de la i -ésima fila de la matriz para un valor de ρ . Se traza un radio de longitud ρ y solo los puntos que estén dentro del radio serán usados para calcular las entradas según la ecuación de SC para $0 \leq r/\rho \leq 1$.

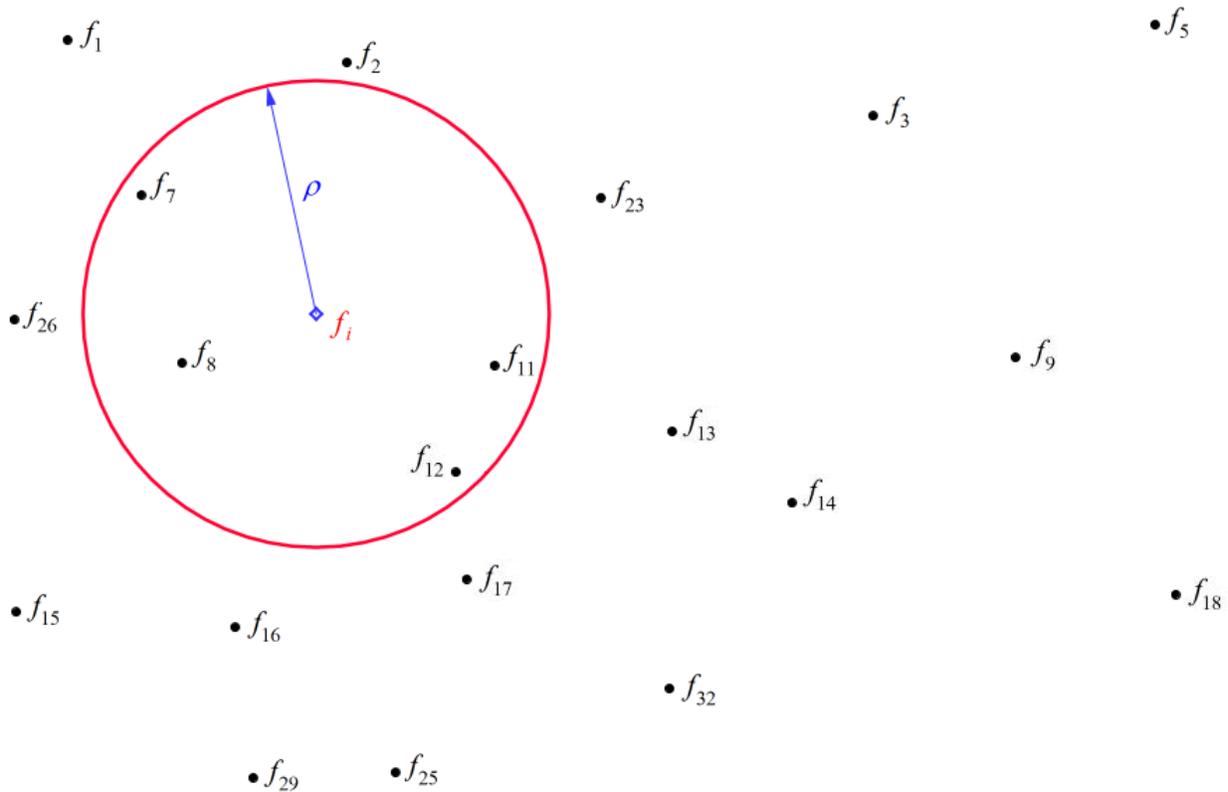


Figura 1.2 Interpretación geométrica del SC

Al calcular las entradas φ_{jk} de esta manera, aseguramos que la matriz sea dispersa si $\rho < L$, donde $L = (L_x^2 + L_y^2)^{1/2}$ con L_x y L_y como las longitudes máximas de los dominios en x y y respectivamente. En la figura 1.3 se aprecia un diagrama para una posible forma de la matriz φ .

En los problemas donde la cantidad de puntos disponibles es muy grande, la matriz de coeficientes tiene N^2 entradas y la mayor parte del tiempo de cómputo se utiliza en la resolución del sistema. Por tanto el kernel de SC otorga una ventaja con respecto a la cantidad de recursos utilizados.

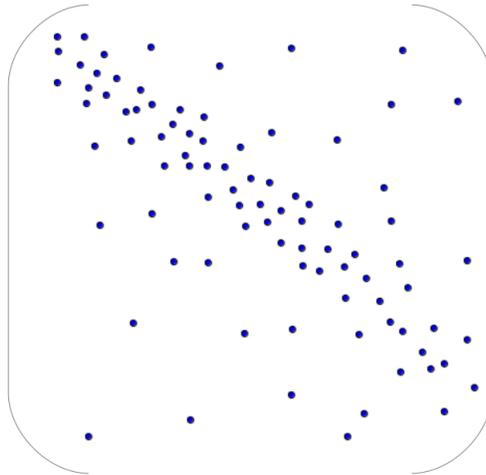


Figura 1.3 Representación esquemática de la matriz de SC

Aunque el método de FBR ha obtenido resultados aceptables en la interpolación de datos según Caruso et al. [5], o en la reconstrucción de imágenes, véase Gumerov et al. [10] y Skala et al. [22], se tiene el problema del tiempo de cómputo. Por ello, uno de los objetivos de este trabajo está encaminado en analizar el tiempo de cómputo.

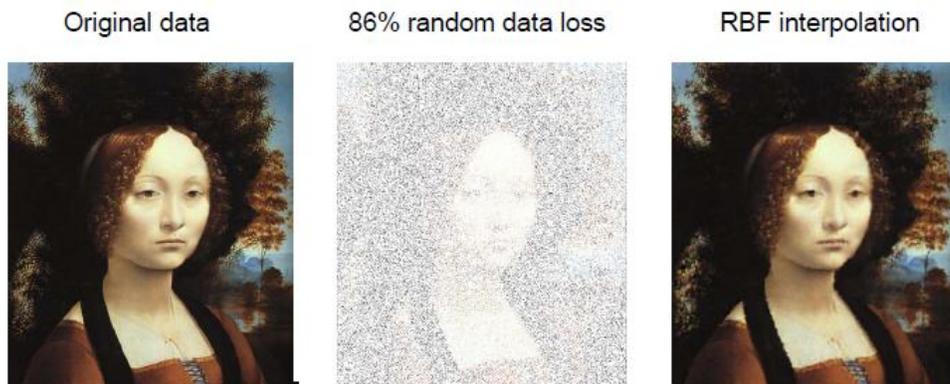


Figura 1.4 tomada de Gumerov et al. [10], Se muestra una imagen reconstruida con FBR. En la imagen izquierda se observa una imagen original, la del centro muestra la misma imagen con puntos extraviados que fueron escogidos aleatoriamente y por último la imagen derecha es la interpolada. Este experimento muestra el potencial que puede alcanzar el método.

1.1.5 ERROR DE INTERPOLACIÓN

Existen muchas definiciones de error para un conjunto de puntos, sin embargo se sugiere utilizar la siguiente definición matemática de error.

Definición 1.1.5.1

Sea $\mathbf{Z}^{M \times N}$ una función en una malla cuyas entradas son Z_{ij} y sea $\tilde{\mathbf{Z}}^{M \times N}$ una función interpolada con entradas \tilde{Z}_{ij} , el error relativo se define según la ecuación 1.8

$$e = \frac{1}{M \cdot N} \sum_j^N \sum_i^M |Z_{ij} - \tilde{Z}_{ij}| \quad (1.8)$$

Definición 1.1.5.2

El error matricial se define como una matriz $\mathbf{E}^{M \times N}$, tal que sus entradas son dadas por la expresión 1.9

$$E_{ij} = |Z_{ij} - \tilde{Z}_{ij}| \quad (1.9)$$

El error relativo tiene la ventaja de arrojar un solo valor numérico, aunque la desventaja que presenta es que pueden existir valores que son anómalos con respecto a la media en la interpolación y por tanto este número no reflejaría de manera absoluta la realidad. Aún con esta desventaja, podemos considerarlo para fines prácticos, un parámetro representativo del error.

El error matricial no es práctico pero tiene la ventaja de darnos una idea más clara de cómo es la función interpolada, pues nos puede indicar cuáles son los valores anómalos con respecto a la media.

2. ANTECEDENTES

2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL CHICXULUB

En la década de los años ochenta, Walter Álvarez descubrió una concentración anómala de Iridio en lo que actualmente se conoce como la línea K-T y junto con su padre Luis W. Álvarez asocia la extinción masiva del a finales del Cretácico con un impacto de asteroide.

Su teoría propone que grandes cantidades de Iridio provienen de la desintegración y esparcimiento de un asteroide por toda la Tierra, véase Álvarez et al. [1]. En 1981 una estructura cóncava en la Península de Yucatán se interpretó por Penfield y colaboradores [16] como un posible cráter de impacto y después se pudo correlacionar con la teoría de Álvarez, a este cráter se le denominó Chicxulub, el nombre de una localidad ubicada en el sitio de impacto interpretado.

2.2 ANTECEDENTES GEOÓGICOS

El cráter se ubica aproximadamente en las coordenadas 20° a 23° N de latitud y -88 a -91° de longitud, su centro esta ubicado aproximadamente en la línea de costa y tiene un radio estimado de 240 [Km].

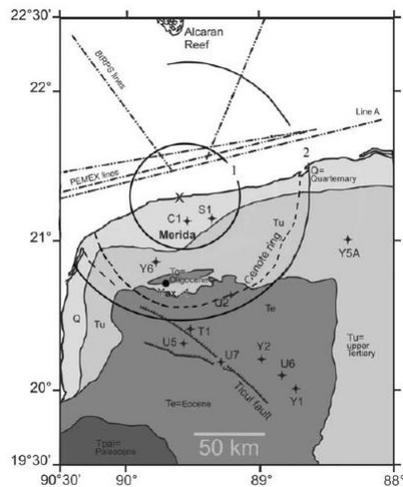


Figura 2.1 tomada de Stöeffler et al. [23], nos muestra el centro del cráter tocando la costa.

En un principio no se tenía conocimiento de la existencia del cráter pero existían algunos estudios de exploración superficial y algunos pozos hechos por parte de la compañía PEMEX, pues se consideraba que la zona era de interés petrolero, Mendoza [14].

Después del descubrimiento del cráter, se empezaron a hacer varios estudios y se consiguieron más pozos por parte de la Universidad Nacional Autónoma México (UNAM) y del International Continental Drilling Program (ICDP), los cuales al ser correlacionados con los de PEMEX, aportaron información sobre la estratigrafía del lugar y en general, de la geología en el cráter.

Los pozos perforados por PEMEX fueron nombrados Y1, Y2, Y4, Y5a Y6 (Yucatán 1, 2, 4, 5ª, 6), T1 (Ticul1), S1 (Sacapuc1) y C1 (Chicxulub1), mientras que los pozos hechos por la UNAM recibieron los nombres de U5, U6, U7 y del ICDP es el pozo Yax-1, Mendoza [14], Stöeffler et al. [23].

Stöffler y colaboradores [23] presentaron un análisis de las rocas del lugar dividiéndolas en cuatro etapas de formación, que son Basamento Pan Africano, carbonatos y sulfatos del Mesozoico, brechas y mega bloques Alóctonos (son las impactitas) y las rocas post-impacto del Cenozoico.

Dentro del basamento Pan Africano se tiene una composición cristalina, para el Mesozoico se tienen anhidritas, yesos y dolomías con carbonatos, en los alóctonos se tiene brechas de anhidrita y dolomía así como roca fundida y suevite (brecha de impacto polimíctica), finalmente se tienen rocas post impacto de dolomías y marl (magra calcárea).

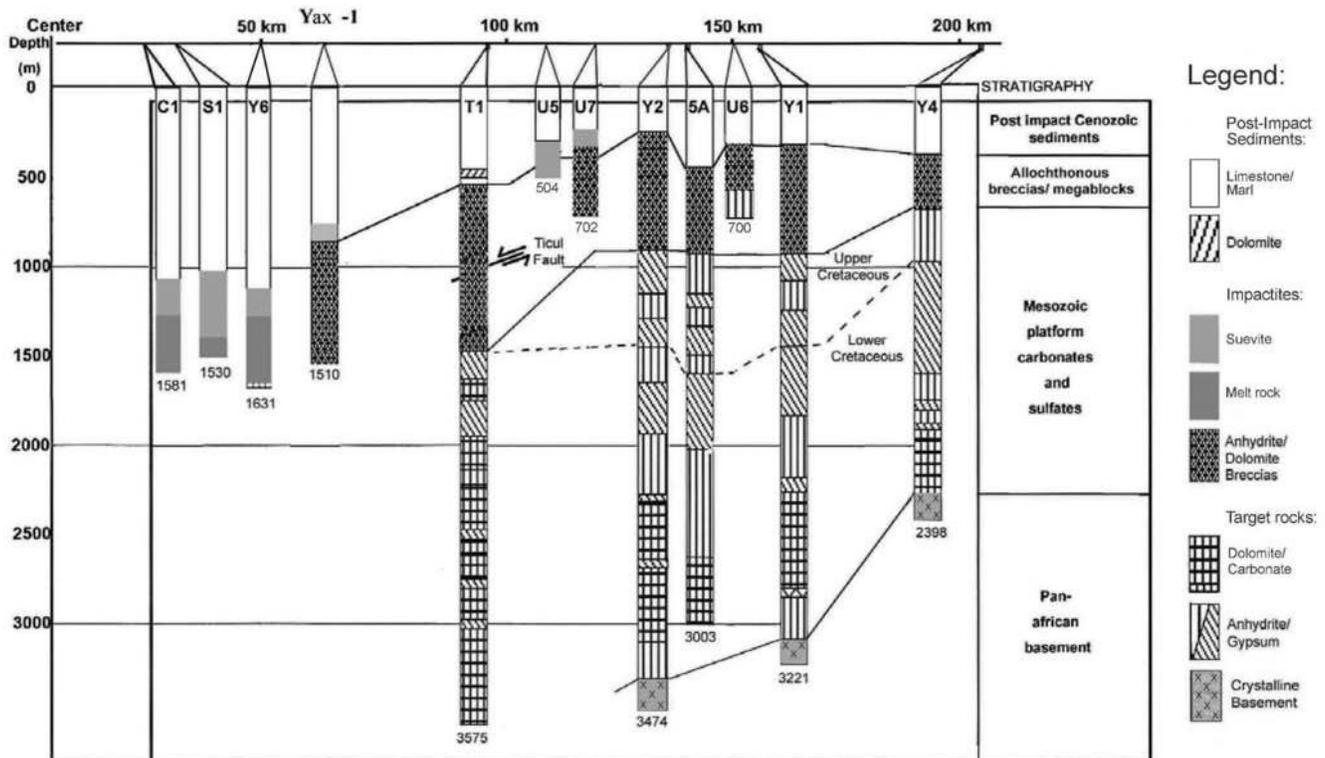


Figura 2.2 tomada de Stöffler et al. [23], muestra las diferentes columnas estratigráficas para los pozos

2.3 ESTUDIOS PREVIOS

Uno de los primeros estudios de relevancia fue hecho por Hildebrand [12], quien analizó datos de gravimetría y magnetometría. A partir de la anomalía de Bouger, interpretó la estructura del cráter como tipo "Peak Ring" con "Central Uplift". Donde el Peak Ring es una estructura en forma de anillo dentro del cráter que rodea un pico semejante a un cuerpo intrusivo, y a dicho cuerpo se le llama Central Uplift.

Hildebrand también correlacionó los registros de pozo con las anomalías magnéticas observadas, atribuyendo estas anomalías a la presencia de brechas.

Tiempo después, Sharpton y colaboradores [21] después de analizar datos de gravimetría descubrieron que en realidad se trata de una estructura de Peak Ring con múltiples anillos (Multiring) que rodean el Central Uplift. También se propuso un diámetro aproximado para el anillo central.

Más tarde Camargo y colaboradores [4] analizaron dos perfiles sísmicos el D92RP001 y el D92RP002. Estos perfiles se correlacionaron con los estudios previos de magnetometría y gravimetría confirmando la presencia del Central Uplift. Existe una interpretación de estos perfiles que muestra de manera clara la secuencia estratigráfica y la forma en la que están delimitadas las estructuras.

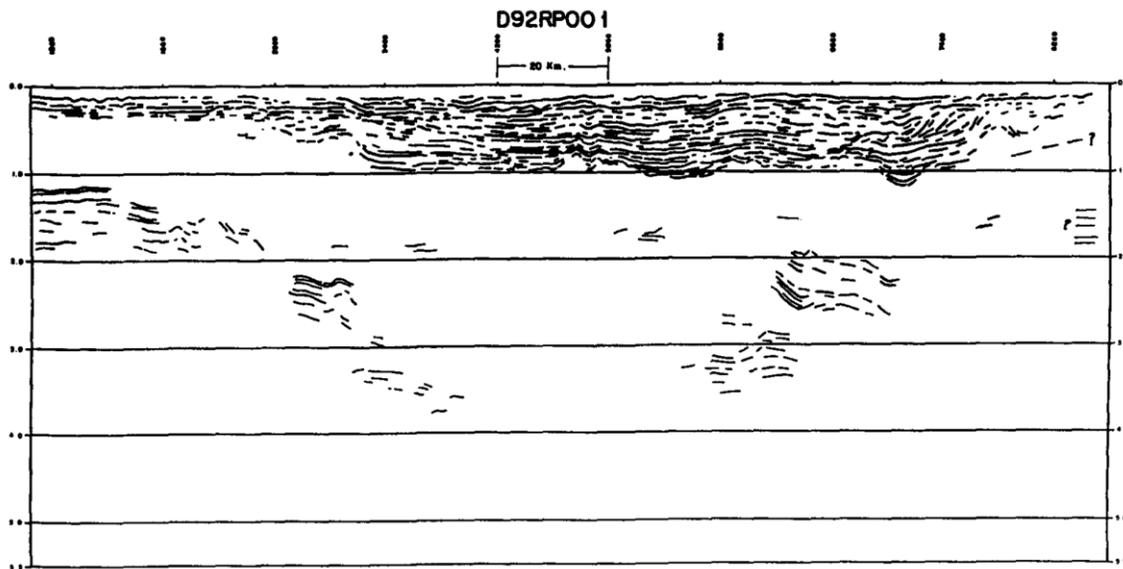


Figura 2.3 tomada de Camargo et al. [4], es la interpretación del perfil D92RP001 en su versión comprimida de baja frecuencia.

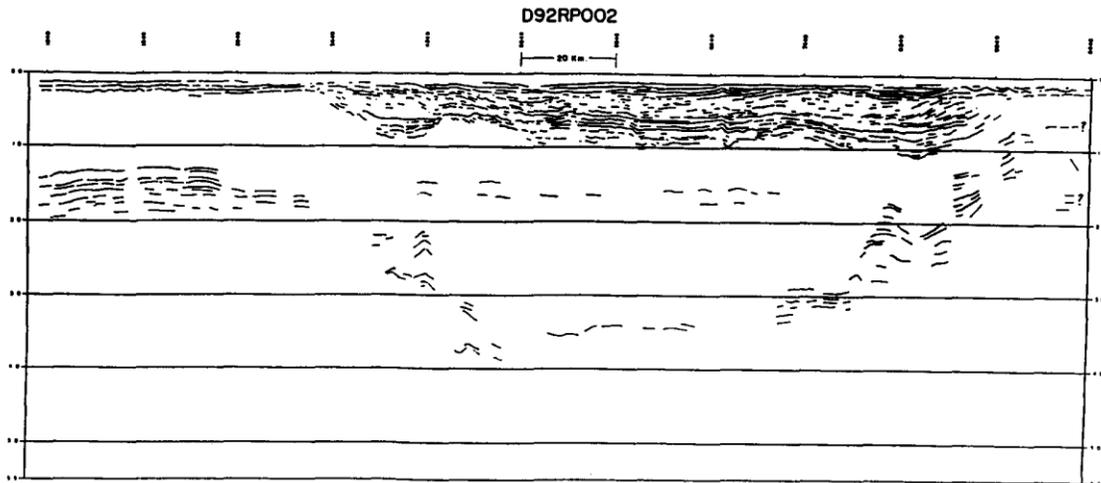


Figura 2.4 tomada de Camargo et al. [4], es la interpretación del perfil D92RP002 en su versión comprimida de baja frecuencia

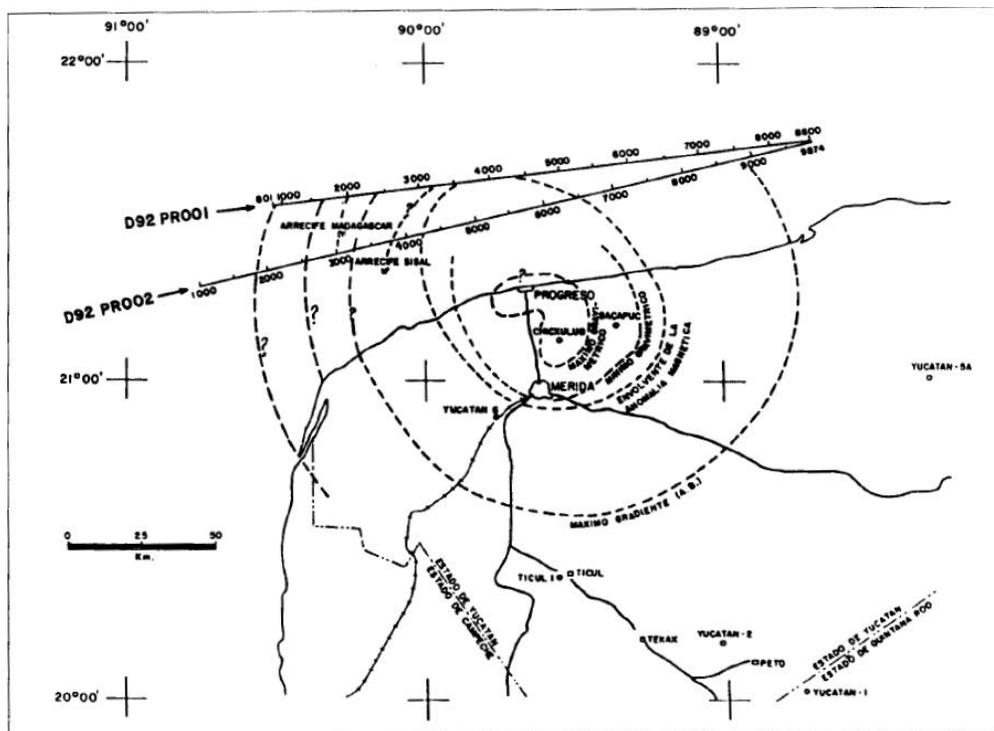


Figura 2.5 Tomada de Camargo et al. [4]. Croquis con los perfiles D92RP001 y el D92RP002

Nuevamente Hildebrand y colaboradores [13] analizaron datos de gravimetría, de magnetometría, rasgos topográficos, y los perfiles sísmicos D92RP001 y D92RP002, así como muestras en registros de pozo. Con estos datos se reinterpretaron las dimensiones, se propuso un nuevo diámetro para el cráter, y se resolvieron algunas incertidumbres, como es

el espesor de la roca fundida y algunas características de los anillos. Una aportación importante es que hay una interpretación geológica del sitio la cual se presenta en la Figura 2.6

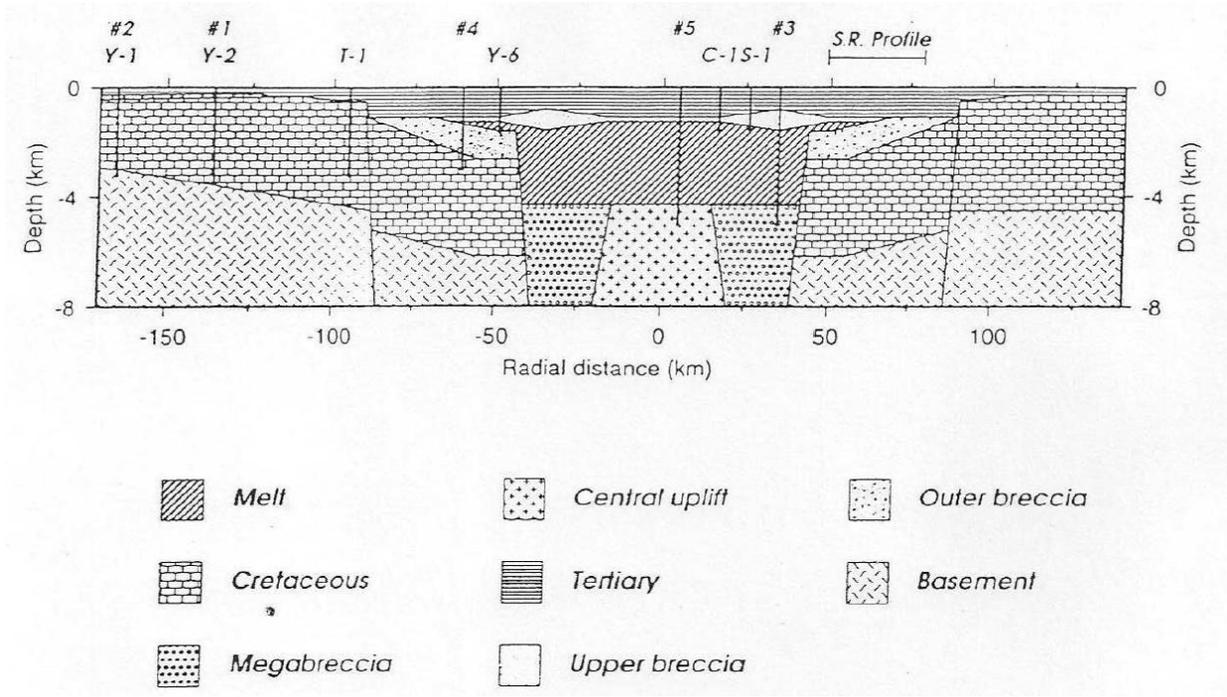


Figura 2.6 tomada de Hildebrand et al. [13], es la interpretación geológica del lugar

Otros datos de gran interés son los estudios hechos con exploración sísmica en la zona, la primera campaña importante fue hecha en 1996 por The British Institutions Reflection Profiling Syndicate (BIRPS) en el que se obtuvieron cuatro perfiles sísmicos los cuales son Chicx A-A1, B, C , véase Bell et al. [2].

Entre los resultados importantes obtenidos con este trabajo se tienen perfiles con alta resolución en los que se pueden definir estructuras importantes como el Peak Ring y se han podido diferenciar capas de rocas para su análisis estratigráfico.

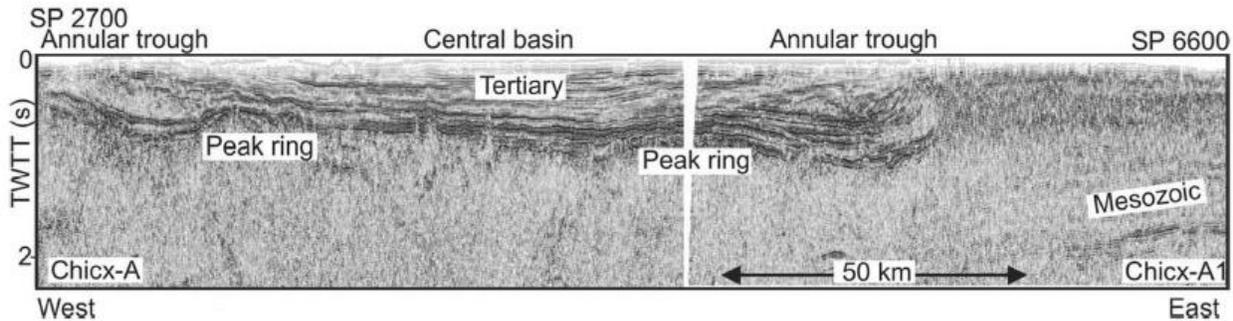


Figura 2.7 tomada de Bell et al. [2], un ejemplo de secciones sísmicas conseguidas en el sitio

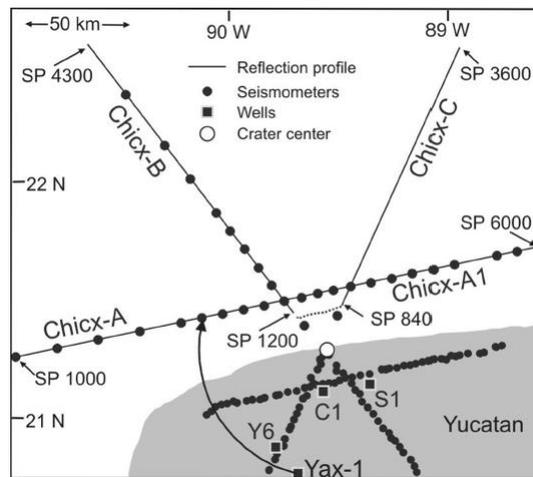


Figura 2.8 tomada de Bell et al. [2], un croquis con las secciones sísmicas

La segunda campaña importante se realizó en el 2005 por parte de la UNAM, en donde se obtuvieron 29 perfiles de reflexión sísmica con la finalidad de comprender mejor las estructuras existentes dentro del cráter, los perfiles han aportado mucha información pues a partir de su análisis se han detectado fallas escalonadas (slump blocks) las cuales se pueden ver en la figura 2.9

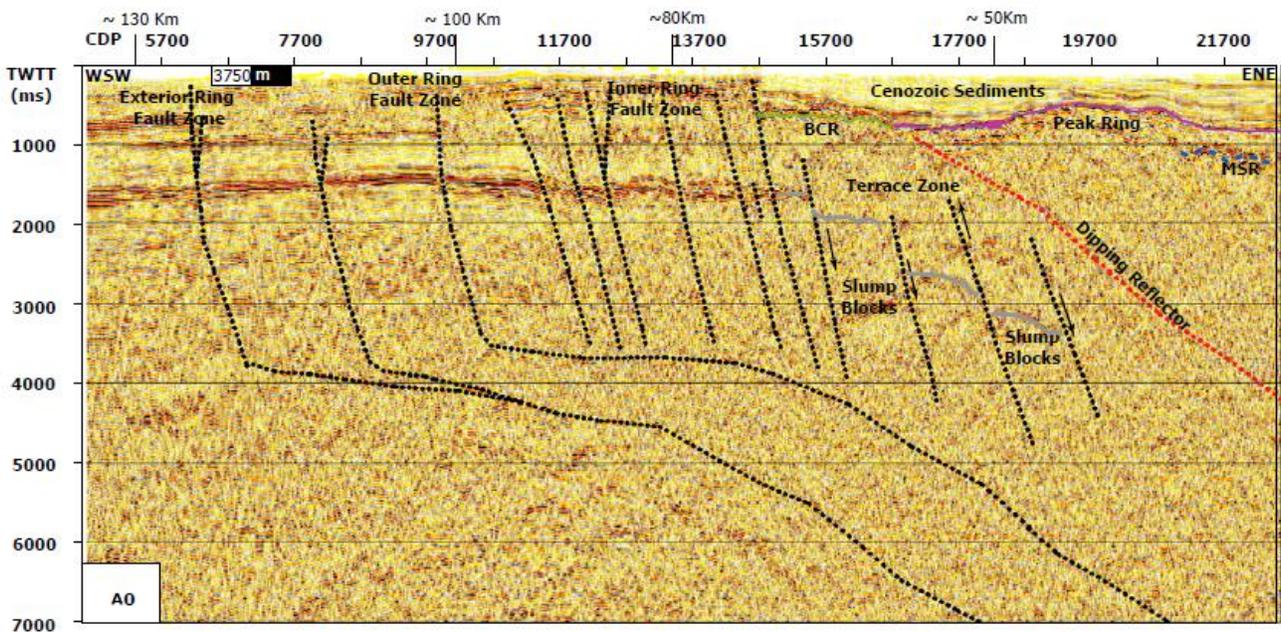


Figura 2.9 tomada de Mendoza [14], se detectaron fallas escalonadas en la segunda campaña.

Un tema frecuente dentro de los estudios hechos al cráter del Chicxulub es la asimetría de éste, pues existen diversas evidencias que lo corroboran. Urrutia y colaboradores [24] analizaron núcleos de roca entre Valladolid y Merida, con esto pudieron obtener información valiosa de la parte Este del cráter que pudo a su vez ser correlacionada con estudios de magnetometría y corroborar algunas asimetrías.

Algunos estudios indican que las asimetrías encontradas son producto de heterogeneidades previas al impacto, Collins y colaboradores [6] analizan la geometría de los depósitos expulsados, corroborando que la oblicuidad del impacto no fue significativa para causar una asimetría. Por otro lado Gulick y colaboradores [9] analizan datos sísmicos, corroborando asimetrías y concluyendo que se deben a heterogeneidades previas.

Más tarde Rebolledo y colaboradores [18] analizan datos de magnetometría en los que el modelo sugiere un sistema de fallas importantes que a su vez también revelan asimetrías importantes. También véase Urrutia et al. [25]

Con todos estos estudios previos se pueden generar diferentes modelos con propiedades del subsuelo, como por ejemplo: velocidad de onda P y onda S, densidad, estructuras geológicas, etc. Estas propiedades pueden ayudar en diferentes estudios geofísicos si se cuenta con dichos modelos, en este caso, las estructuras interpretadas por los autores ya mencionados servirán para comparar de manera cualitativa algunas propiedades del cráter con la interpolación.

Las propiedades que se pueden comparar son el espesor de los estratos, profundidad a la que se encuentran los contactos y algunas características geométricas específicas para cada unidad, como es el caso de las fallas escalonadas.

3. METODOLOGÍA

3.1 INTERPOLACIÓN DE DATOS SINTÉTICOS

Antes de trabajar con los datos del cráter, es necesario hacer una prueba con datos sintéticos y conocer el comportamiento de la interpolación con FBR. Para hacer esto se diseña una función sintética (de manera arbitraria) conocida popularmente como “Sombrero de Charro”, la cual está representada por la ecuación 3.1

$$f(x, y) = \frac{\cos((x^2 + y^2)/4.0)}{x^2 + y^2 + 3} \quad (3.1)$$

Una vez conocida la expresión, se procede a calcular una malla rectangular con un intervalo en el eje x de -5 a 5 y en el eje y de -5 a 5 de manera equiespaciada con 40 muestras en cada eje, dando en total una malla de 1600 puntos (estos valores se decidieron de manera arbitraria). La gráfica de la función se puede apreciar en la figura 3.1

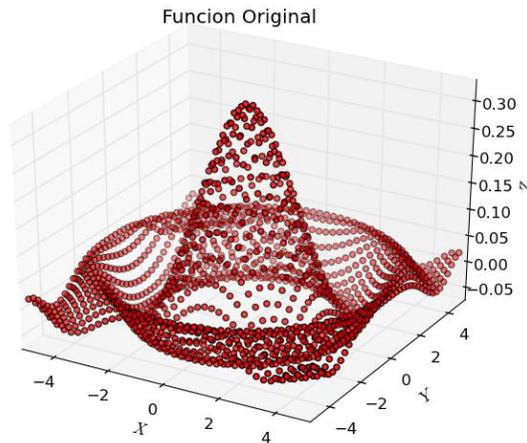


Figura 3.1 Función Sintética

Se eliminan datos de manera aleatoria en esta función sintética y se conserva solo un número “D” determinado de ellos y se procede a realizar la interpolación.

Se interpola la función para cada Kernel y se calcula un error variando los parámetros c , β y ρ/L para cada uno de ellos y se repite esto para diferentes valores de D, en este caso se escogieron de manera conveniente $D = 300, 500, 700$ y 900 puntos.

3.1.1 ERROR DE INTERPOLACIÓN

Para nuestro propósito es necesario calcular el error relativo para cierto valor de D con un kernel específico y diferentes valores de ρ respectivo(s) parámetro(s). Una vez hecho esto se grafica el resultado y se localiza de manera cualitativa y cuantitativa el o los parámetros que producen el menor error relativo. En el caso del kernel SC, el error relativo no solo dependería del parámetro ρ si no del tamaño de la malla, por lo tanto se propone usar el parámetro ρ/L

Esto sirve como punto de partida para graficar la función interpolada que tenga el parámetro con el menor error para un respectivo kernel y valor de D , se hace una comparación de manera cualitativa de los datos interpolados con la función original y después se calcula el error matricial y se grafica para ubicar valores anómalos.

Haciendo un análisis cuantitativo de los valores mínimos en el error relativo, podemos dar una conclusión empírica del comportamiento del error en cada caso. Es empírica porque al localizar el parámetro que nos entrega el menor error en cada kernel, no podemos asegurar que sea el mismo para cualquier función existente.

Para asegurar que un parámetro entrega el menor error posible en un kernel, sería necesario demostrarlo de una forma matemática rigurosa, a pesar de este hecho, se puede concluir cómo es el comportamiento del error cuando los parámetros toman valores “chicos” o “grandes”, es decir, si el error tiene un mínimo, máximo o se propaga.

De igual manera no se puede concluir cual es el kernel que otorga el menor error relativo para todas las funciones existentes, pues podría depender también de la naturaleza de la función. Sin embargo el experimento nos da una idea empírica de las ventajas que tiene uno sobre otro pues otro parámetro que se mide es el tiempo de cómputo que dependiendo de la naturaleza del problema puede ser muy valioso considerarlo.

3.2 PERFILES SÍSMICOS

Para poder hacer la reconstrucción es necesario usar perfiles sísmicos, en cada perfil se marcan los respectivos contactos y se interpolan los contactos correspondientes.

3.2.1 RECOLECCIÓN DE PERFILES SÍSMICOS Y ESTANDARIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Se cuenta con imágenes de perfiles sísmicos para la primer campaña de 1996 del BIRPS y la de 2005 por la UNAM reportadas por Bell et al. [2] y Mendoza [14] respectivamente, sin embargo se decidió que los perfiles de Camargo et al. [4] (D92RP001 y el D92RP002) son los únicos que se tomaran en cuenta para la reconstrucción del cráter.

Lo primero que se hizo fue cambiar el origen de coordenadas al punto -92° latitud y 20° longitud, una de las razones es que en la península de Yucatán cambia el huso UTM de 15Q a 16Q y por ello no es factible usar coordenadas UTM. Para ello se usó el croquis puesto por Camargo y se utilizó la escala incluida para hacer una conversión de grados a kilómetros, véase Figura 2.5.

El problema de usar los perfiles D92RP001 y el D92RP002 es que están muy juntos y aportan muy poca información para un dominio muy amplio, para arreglar dicho problema se supuso con fines prácticos que el cráter guardaba cierta simetría radial y se propusieron perfiles sintéticos. Estos perfiles sintéticos no son más que el D92RP002 con otras coordenadas, para escoger estas nuevas coordenadas de estos perfiles, se trazaron de manera simétrica al original con respecto al centro del cráter.

Nota: Aunque se haya supuesto simetría radial se debe recordar que los estudios de Collins et al. [6], Gulick et al.[9], Rebolledo et al. [18] y Urrutia et al.[24] y [25] hablan sobre asimetría en el cráter.

De manera práctica los perfiles fueron nombrados D92RP002_ESTE, D92RP002_OESTE y D92RP002_SUR, la Figura 3.2 muestra un croquis con estos nuevos perfiles.

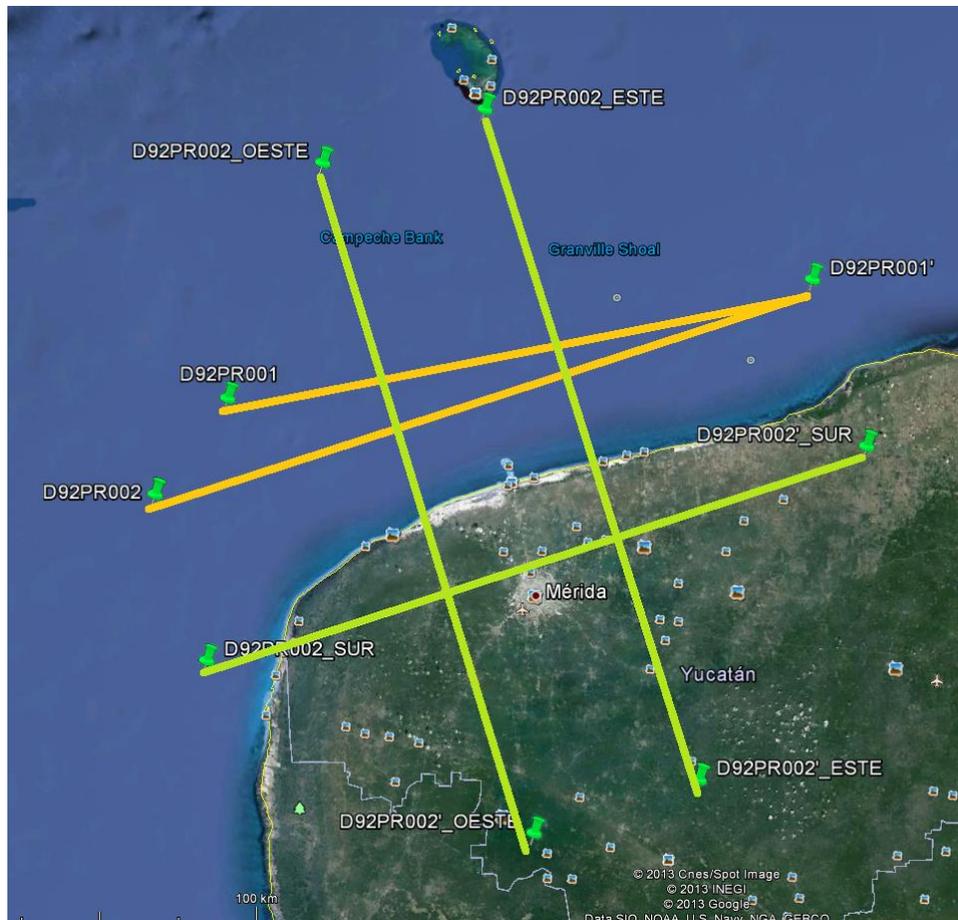


Figura 3.2 Los perfiles originales D92RP001 y D92RP002 son representados con naranja y los sintéticos con verde.

El segundo paso una vez ubicados los perfiles con las nuevas coordenadas es crear una función para representar los datos, esto es debido a que son rectas y las coordenadas se pueden calcular viendo las imágenes como una función $y=mx+b$.

3.2.2 INTERPRETACIÓN DE ESTRUCTURAS

Una vez que se tienen las coordenadas para cada perfil, es necesario ubicar los contactos de las secciones D92RP001 y D92RP002 tomando exclusivamente como modelo geológico la figura 2.6.

Las figuras 3.3 y 3.4 muestran los perfiles interpretados

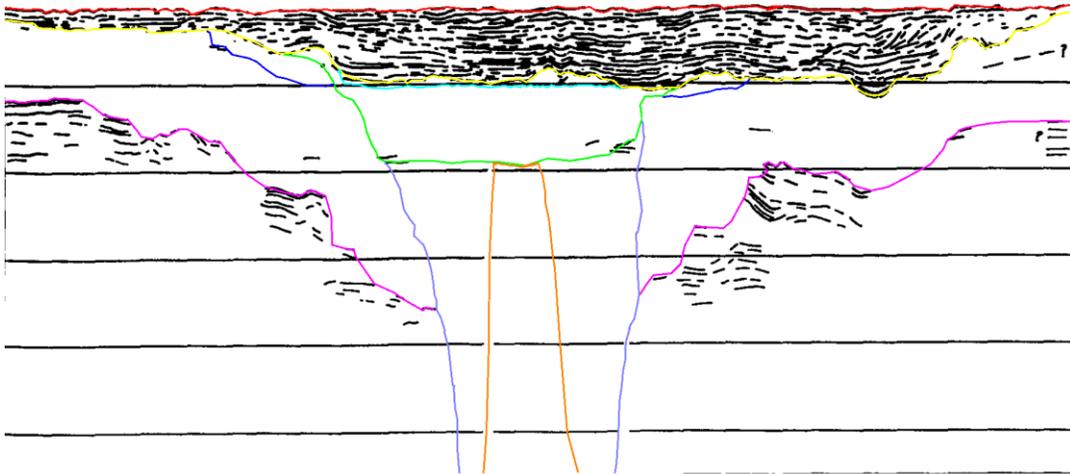


Figura 3.3 Perfil D92RP001 interpretado

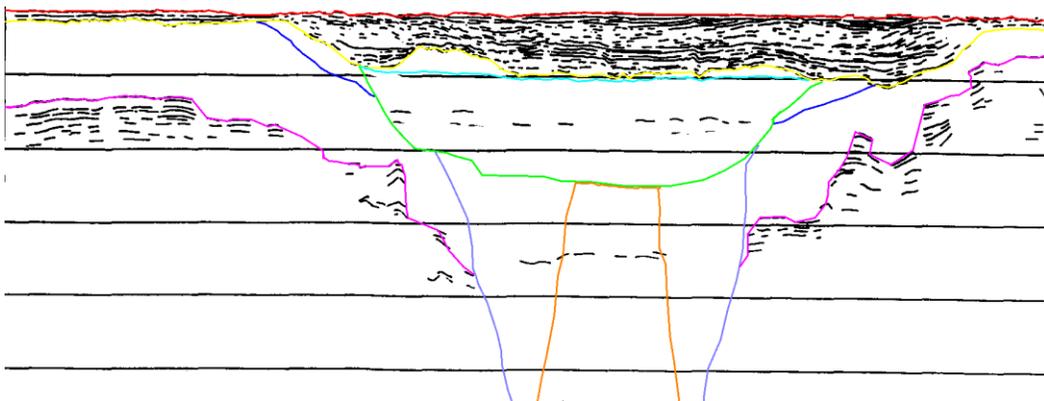


Figura 3.4 Perfil D92RP002 interpretado

Ya interpretados los perfiles, se digitalizaron los datos con python arrojando una matriz de pixeles en la que se puede distinguir una clave única de colores la cual se interpreta como un contacto, sin embargo los perfiles se encuentran en tiempo y dado que no se conocen velocidades de las rocas, es posible hacer el cálculo de manera aproximada de los espesores calculando un factor de escala, este factor se calcula dividiendo el espesor real promedio para cada estrato de la figura 2.6 entre el número de pixeles promedio que hay en cada estrato de los perfiles D92RP001 y D92RP002. Una vez que se tiene el factor de escala, este se multiplica por el número de pixeles que hay en cada estrato para todas las columnas de la matriz, este procedimiento nos arroja las profundidades de los contactos.

Las figuras 3.5 y 3.6 representan los contactos ya digitalizados en profundidad, mientras que las figuras 3.7 y 3.8 son una modificación de 3.5 y 3.6 respectivamente donde se representan las capas de roca.

En la tabla 3.1 se encuentra la cantidad de datos a interpolar por cada contacto.

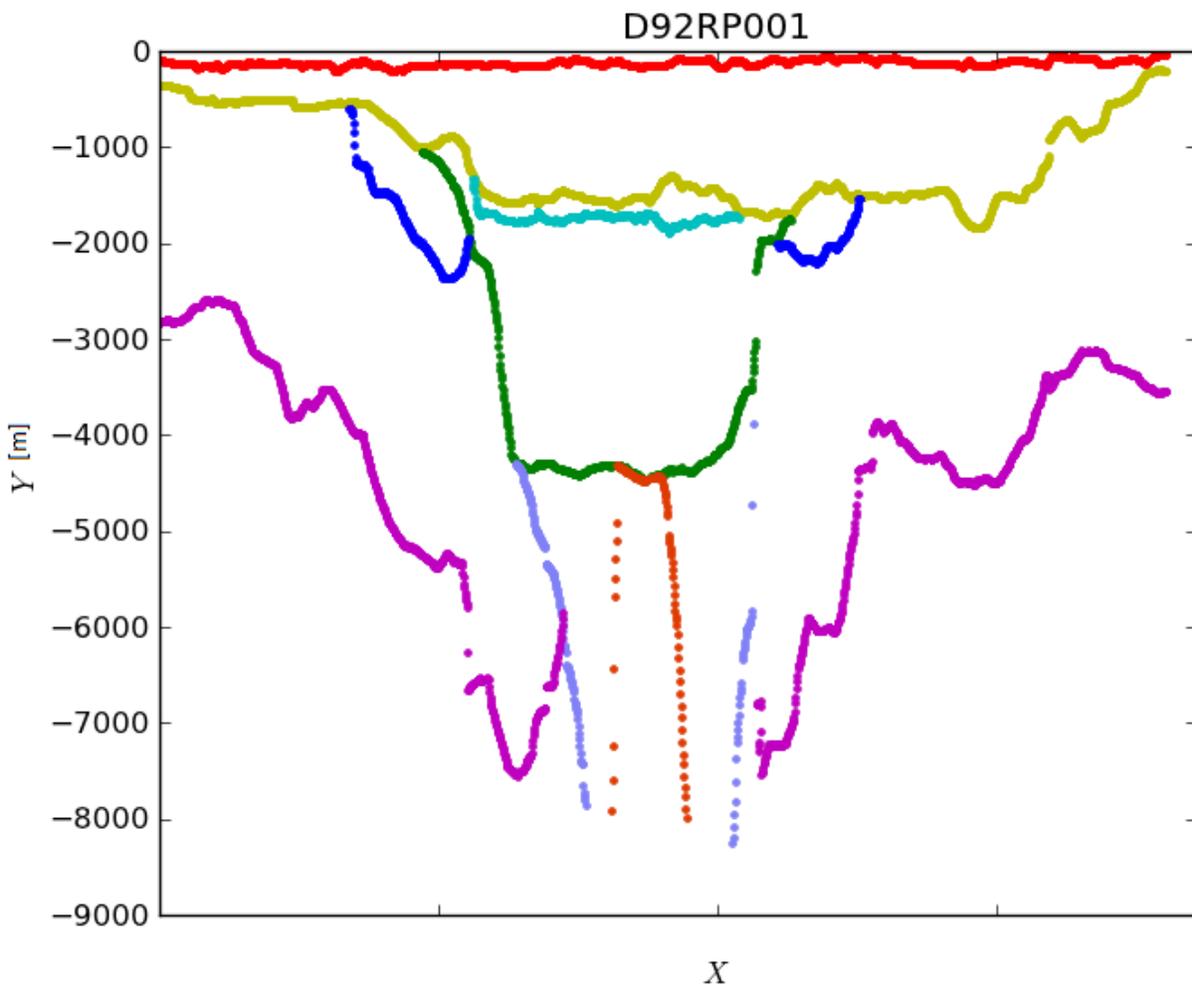


Figura 3.5 Perfil D92RP001, muestra los contactos digitalizados en profundidad

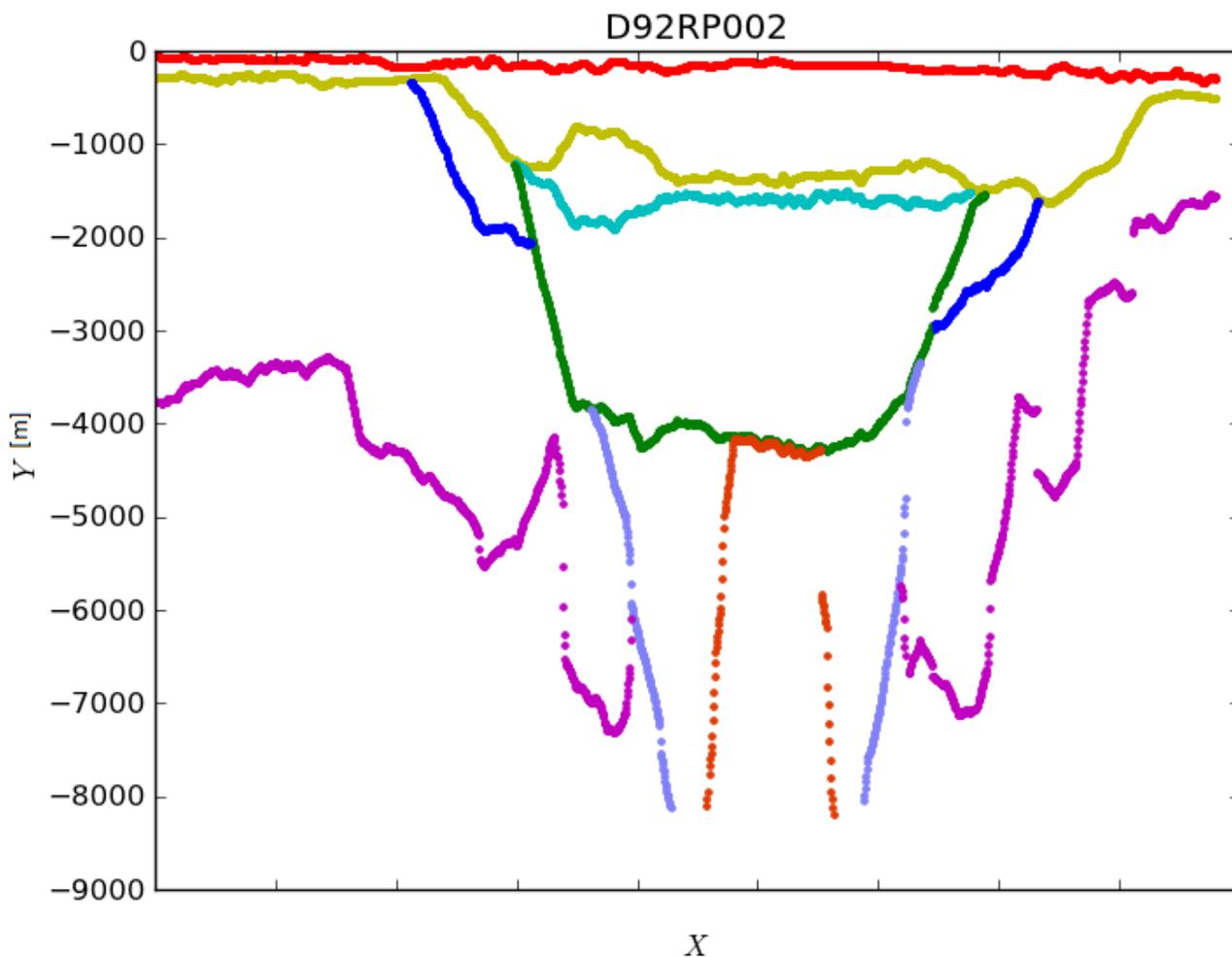


Figura 3.6 Perfil D92RP002, muestra los contactos digitalizados en profundidad

CONTACTOS	D92PR001	D92PR002	D92PR002_SUR	D92PR002_ESTE	D92PR002_OESTE	TOTAL
ROJO	1805	1761	1761	1761	1761	8849
AMARILLO	1804	1757	1757	1757	1757	8832
AZUL PASTEL	478	755	755	755	755	3498
AZUL MARINO	363	371	371	371	371	1847
VERDE	652	779	779	779	779	3768
VIOLETA	1458	1309	1309	1309	1309	6694
LILA	162	227	227	227	227	1070
NARANJA	125	210	210	210	210	965

Tabla 3.1 Datos a interpolar

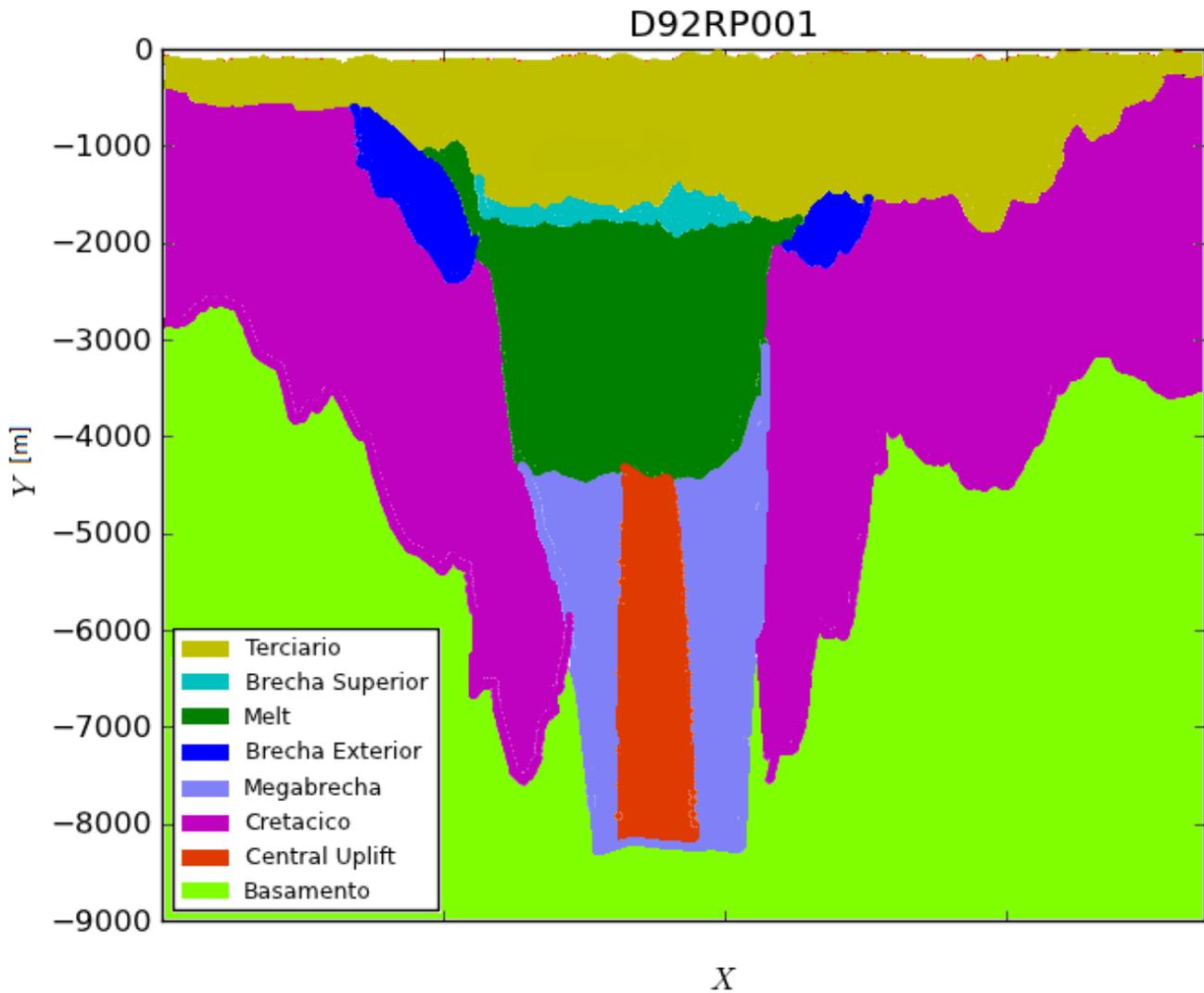


Figura 3.7 Perfil D92RP001, muestra las capas de roca a partir de sus contactos

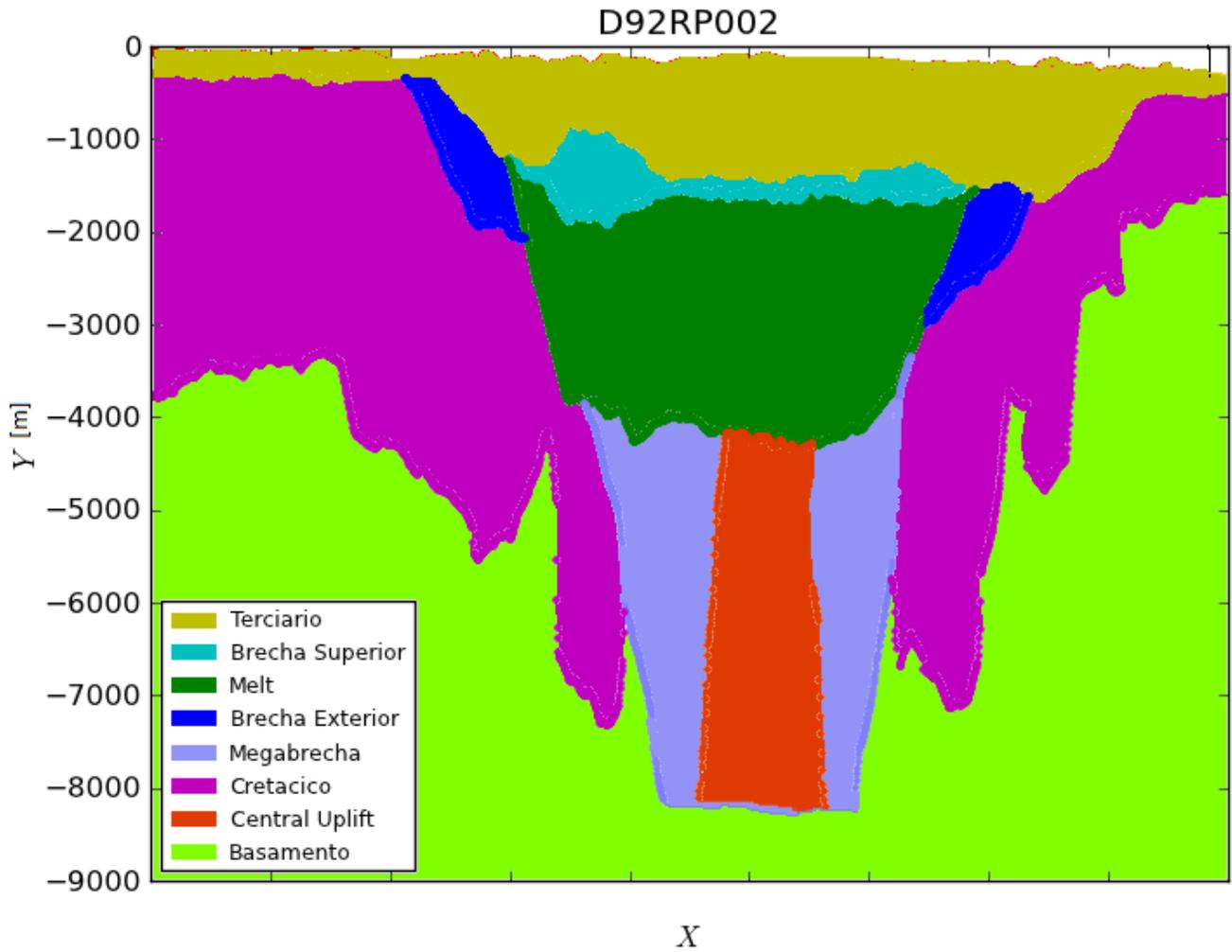


Figura 3.8 Perfil D92RP002, muestra las capas de roca a partir de sus contactos

3.3 INTERPOLACIÓN DE DATOS OBSERVADOS

Después del proceso de interpretar y digitalizar los contactos tanto para los perfiles originales como los que se generaron de manera sintética, se deben interpolar los respectivos contactos con FBR para cada Kernel variando los parámetros c , β y ρ/L

Dado que no hay un modelo numérico previo para comparar de manera cuantitativa los datos interpolados, no se puede calcular el error, pero se pueden analizar de manera cualitativa graficando para un mismo kernel y mismos parámetros todos los contactos en una imagen. Esto debido a que si el resultado está fuera de la realidad (profundidades anómalas), de manera inmediata se puede descartar su aplicación.

Una vez localizados los mejores parámetros para su respectivo kernel, se calcula el tiempo de cómputo y se elige aquel que visualmente sea más real. Haciendo esto se puede hacer una comparación con los datos sintéticos y de esta manera ver si se puede proponer un parámetro óptimo.

Finalmente una vez que se tenga el kernel óptimo se hace la reconstrucción con los contactos interpolados, la dinámica consiste primero en eliminar los datos que no están en el dominio real para cada capa, pues la interpolación se hizo para un dominio general. Una vez que se hayan filtrado los contactos, se prosigue a rellenar las capas siguiendo un orden estratigráfico.

4. RESULTADOS

4.1 DATOS SINTÉTICOS

Se calculó la interpolación con 300, 500, 700 y 900 puntos disponibles escogidos de manera aleatoria del arreglo original. Para cada conjunto de puntos, se realizó la interpolación usando diferentes kernels, variando sus parámetros correspondientes. Posteriormente, se midió el error relativo y se graficó contra los parámetros. De esta manera, se ubicaron los parámetros óptimos para cada kernel aplicados a este problema. Es necesario mencionar que las gráficas de error relativo tienen un comportamiento similar para cada conjunto de puntos.

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos con el menor error en cada caso. El error que se reporta es el relativo. De igual manera, se reporta un tiempo relativo, el cual se calcula como $T_r = T_c / T_{\min}$, donde T_r es el tiempo relativo, T_c es el tiempo de cómputo para un kernel determinado, y T_{\min} es el tiempo de cómputo mínimo obtenido con uno de los kernels. Por ejemplo, en la tabla 4.1 el tiempo mínimo se obtuvo con el kernel SC, con el parámetro 0.1768, por lo tanto es el tiempo de referencia.

Finalmente se tiene un número de código el cual fue asignado de manera arbitraria y representa tanto el kernel como su parámetro, con dicho número se pueden comparar los errores relativos para cada conjunto de datos en las interpolaciones.

300 puntos	Parámetros			Resultados		
Kernel	c	β	ρ/L	Error	Tr	# Código
SS		5		1.36E-03	2.5895	1
GA	0.8			4.82E-04	2.6288	2
MQ	1.8	1		7.59E-04	2.7157	3
	0.1	5		1.37E-03	2.7523	4
	4.6	9		9.29E-03	2.8043	5
IMQ	2.4	1		6.89E-04	2.7393	6
	2.9	5		6.13E-04	2.8533	7
	3.5	9		5.75E-04	2.7874	8
IQ	0.4			6.65E-04	2.6683	9
SC			0.1768	2.61E-03	1.0000	10

Tabla 4.1 muestra los kernels y parámetros con el menor error para 300 puntos interpolados

500 puntos	Parámetros			Resultados		
Kernel	c	β	ρ/L	Error	Tr	# Código
SS		5		7.30E-04	4.2227	1
GA	0.8			1.88E-04	4.2973	2
MQ	1.9	1		3.76E-04	4.3762	3
	0.1	5		7.31E-04	4.4189	4
	1.5	9		8.45E-03	4.4381	5
IMQ	2.5	1		3.39E-04	4.3915	6
	2.9	5		2.75E-04	4.4313	7
	3.5	9		2.53E-04	4.4361	8
IQ	0.4			3.10E-04	4.3053	9
SC			0.1344	1.50E-03	1.0000	10

Tabla 4.2 muestra los kernels y parámetros con el menor error para 500 puntos interpolados

700 puntos	Parámetros			Resultados		
Kernel	c	β	ρ/L	Error	Tr	# Código
SS		5		2.74E-04	6.0090	1
GA	0.9			4.60E-05	6.1050	2
MQ	2.2	1		1.13E-04	6.1983	3
	0.4	5		2.65E-04	6.2150	4
	2	9		7.36E-03	6.2703	5
IMQ	1.8	1		9.31E-05	6.2262	6
	2.6	5		7.12E-05	6.2449	7
	3	9		6.45E-05	6.2856	8
IQ	0.5			8.78E-05	6.1067	9
SC			0.1626	4.52E-04	1.0000	10

Tabla 4.3 muestra los kernels y parámetros con el menor error para 700 puntos interpolados

900 puntos	Parámetros			Resultados		
Kernel	c	β	ρ/L	Error	Tr	# Código
SS		5		3.04E-04	8.6286	1
GA	0.8			4.07E-05	8.8258	2
MQ	1.6	1		1.14E-04	8.9302	3
	0.3	5		2.86E-04	8.9625	4
	1.3	9		6.69E-03	8.9194	5
IMQ	2	1		9.14E-05	8.8261	6
	2.8	5		6.79E-05	8.9145	7
	3.6	9		6.30E-05	8.9578	8
IQ	0.5			8.55E-05	8.8429	9
SC			0.1344	4.87E-04	1.0000	10

Tabla 4.4 muestra los kernels y parámetros con el menor error para 900 puntos interpolados

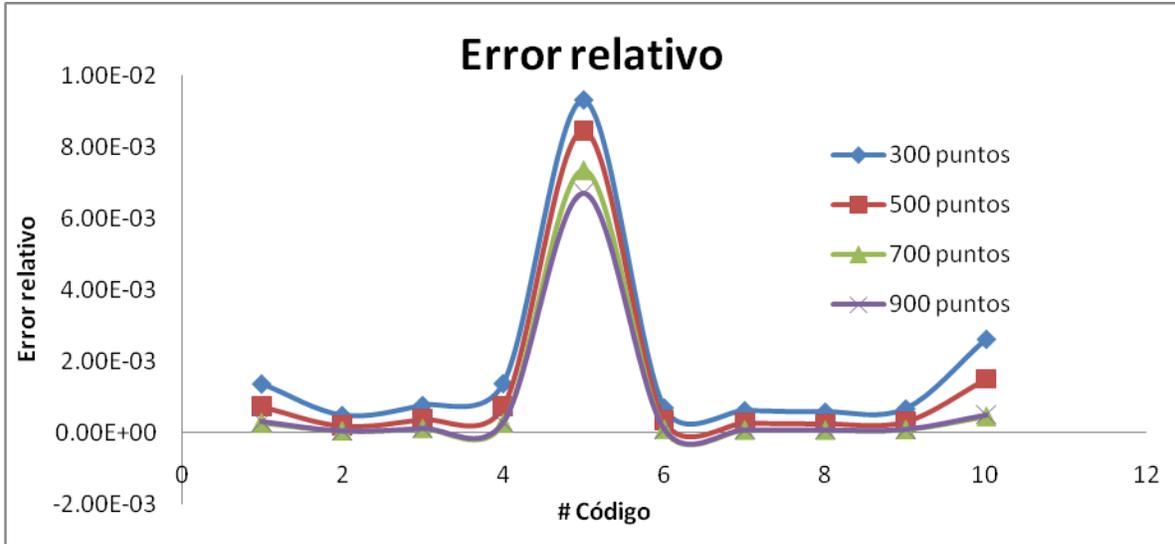


Figura 4.1 Gráfica del error relativo vs # Código

En la figura 4.1 se puede observar que los parámetros que otorgan el menor error son aproximadamente los mismos para los kernels y el error disminuye conforme se aumenta el número de puntos a interpolar (resultado que ya se esperaba). A continuación presentaré solo las gráficas correspondientes a la interpolación para 300 puntos pues es la más representativa.

Gráfica de puntos disponibles

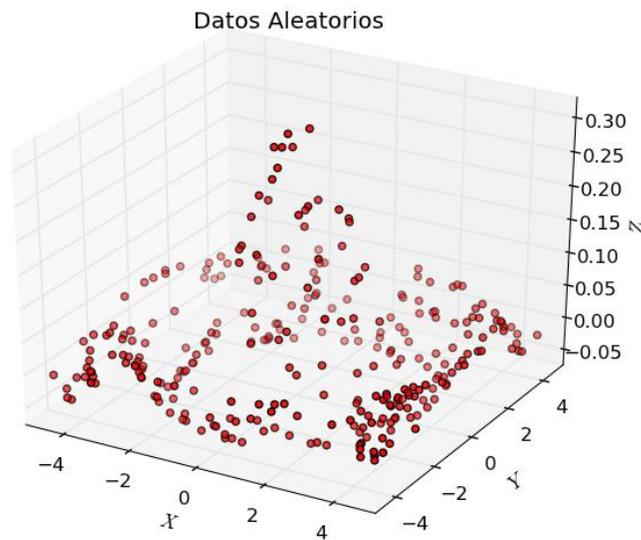


Figura 4.2 muestra los 300 datos dispersos que se interpolaron

Gráficas de error relativo

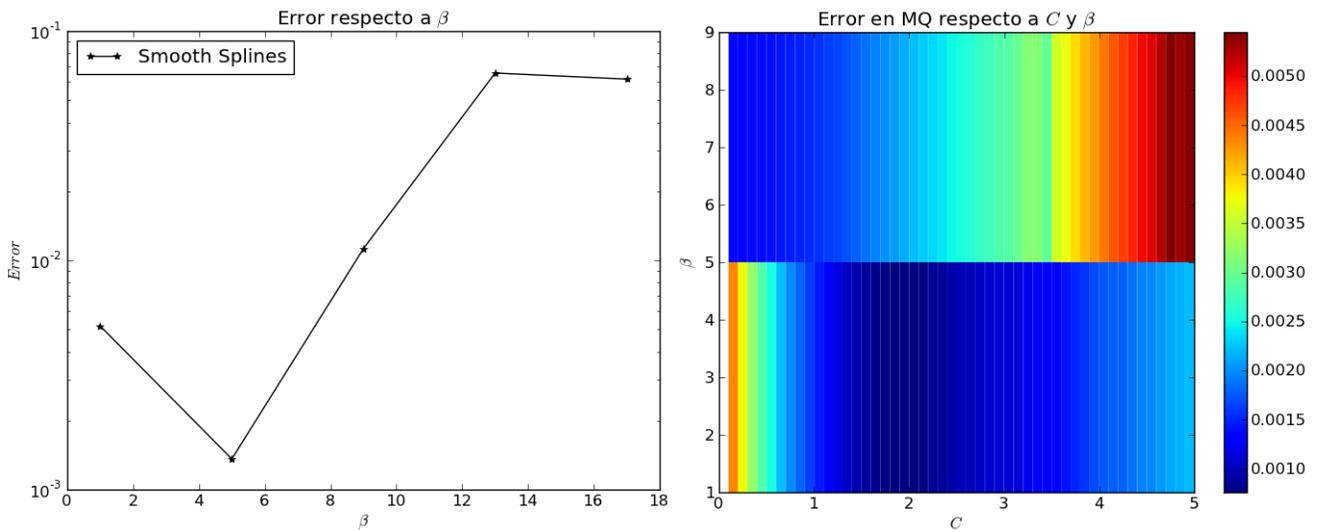


Figura 4.3 Gráfica de error relativo, a la izquierda los kernels que dependen de β y a la derecha para MQ

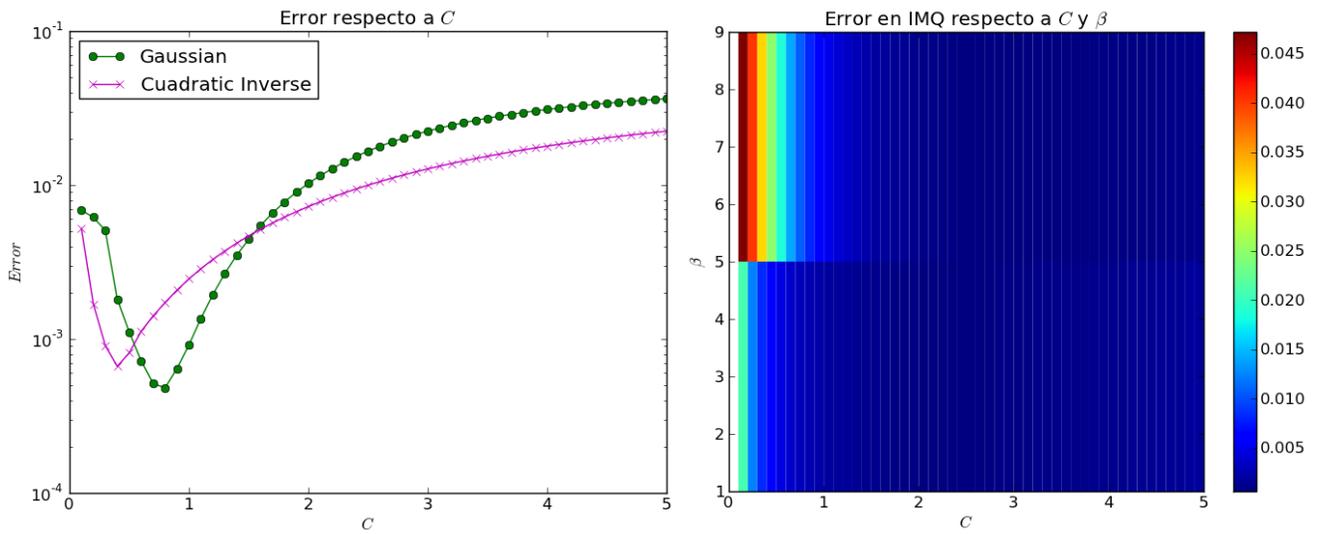


Figura 4.4 Gráfica de error relativo a la izquierda los que kernels que dependen de c y a la derecha para IMQ

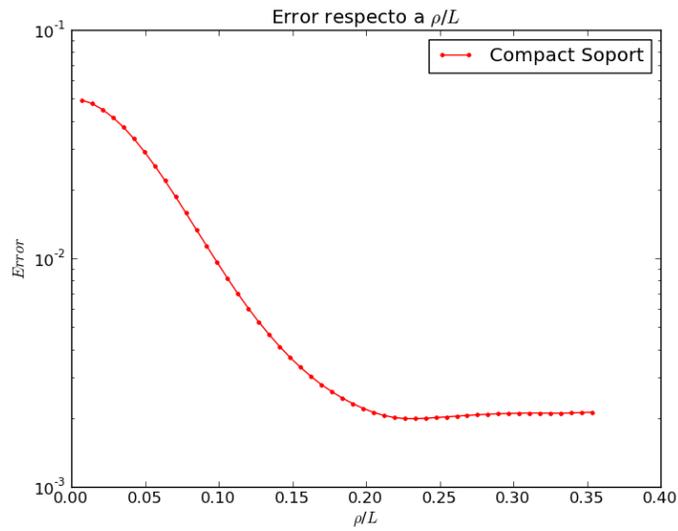


Figura 4.5 Gráfica de error relativo para SC

Interpolación con su respectivo error matricial

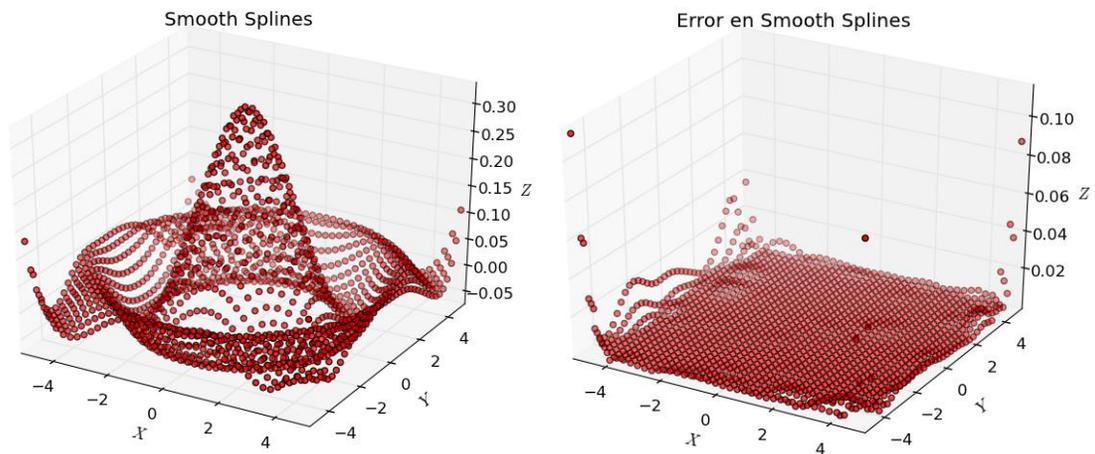


Figura 4.6 Interpolación y error matricial para SS con $\beta=5$

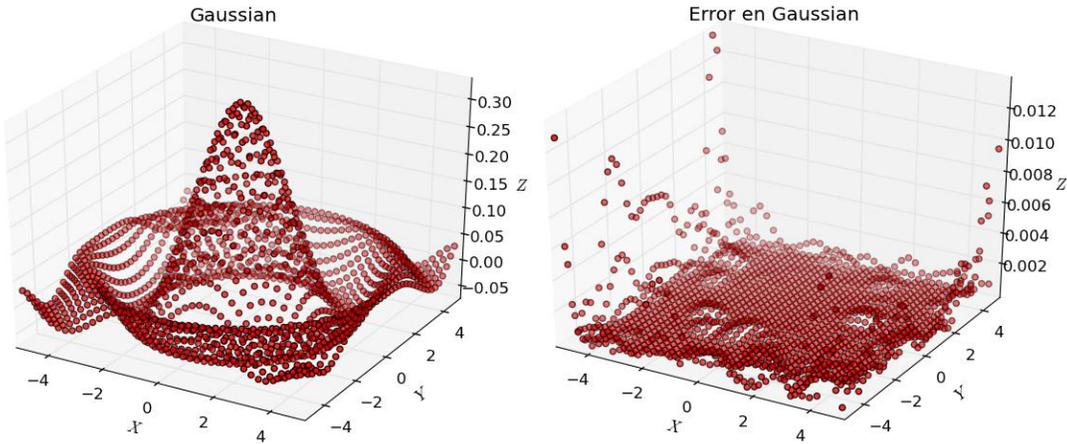


Figura 4.7 Interpolación y error matricial para GA con $c=0.8$

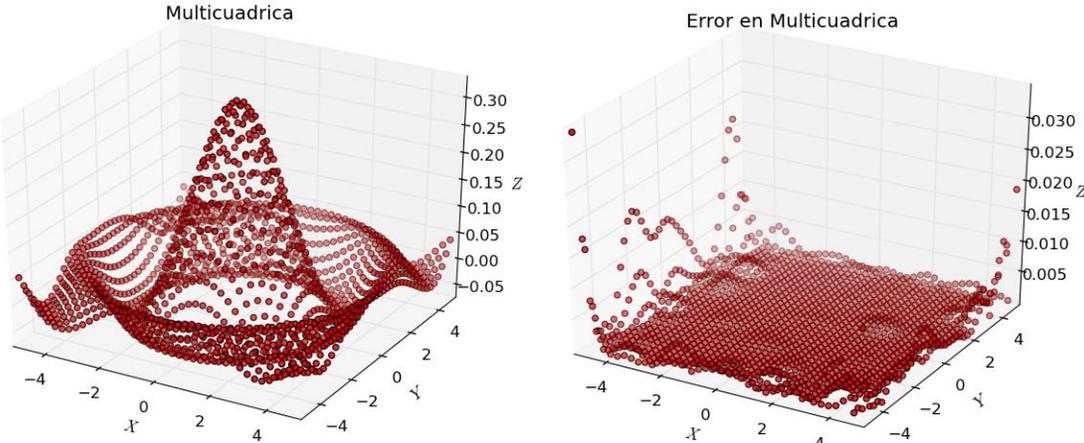


Figura 4.8 Interpolación y error matricial para MQ con $c=1.8$ y $\beta=1$

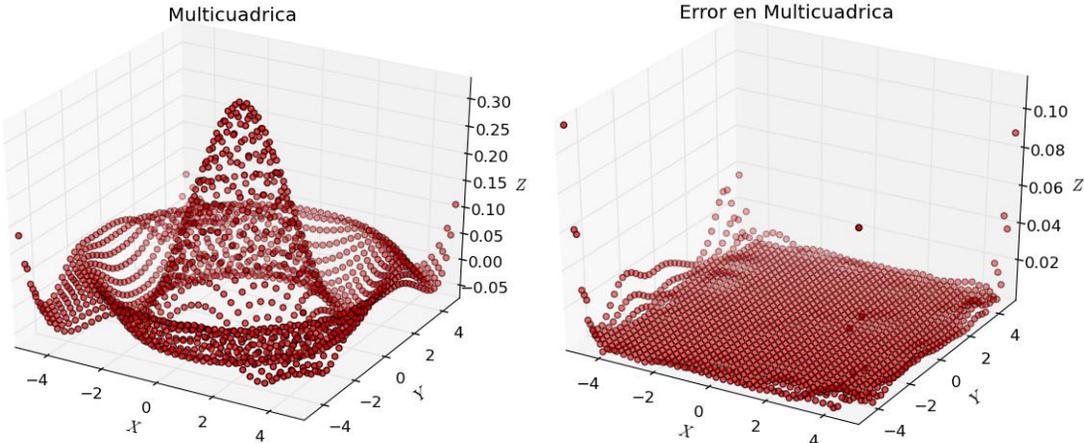


Figura 4.9 Interpolación y error matricial para MQ con $c=0.1$ y $\beta=5$

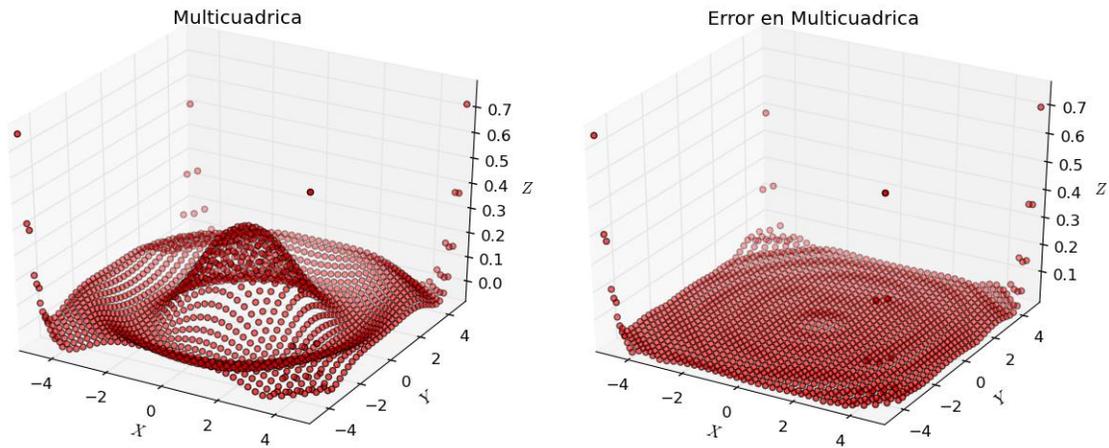


Figura 4.10 Interpolación y error matricial para MQ con $c=4.6$ y $\beta=9$

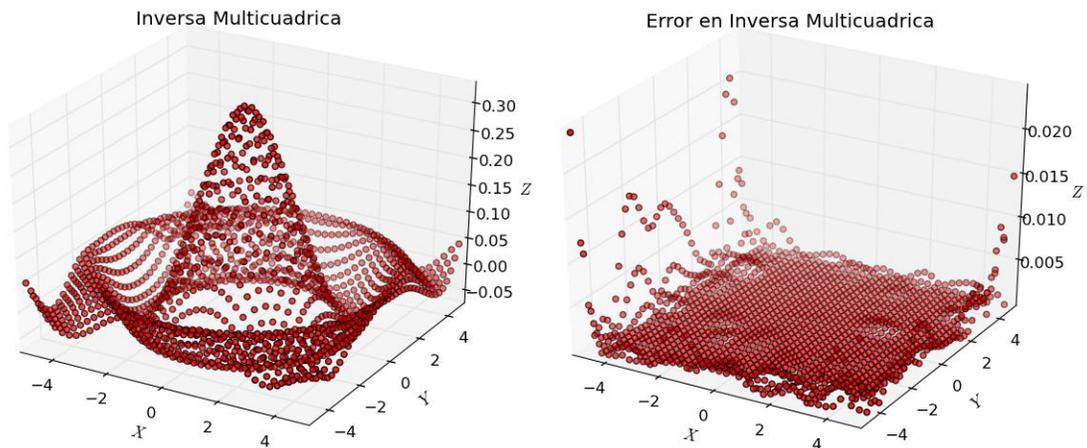


Figura 4.11 Interpolación y error matricial para IMQ con $c=2.4$ y $\beta=1$

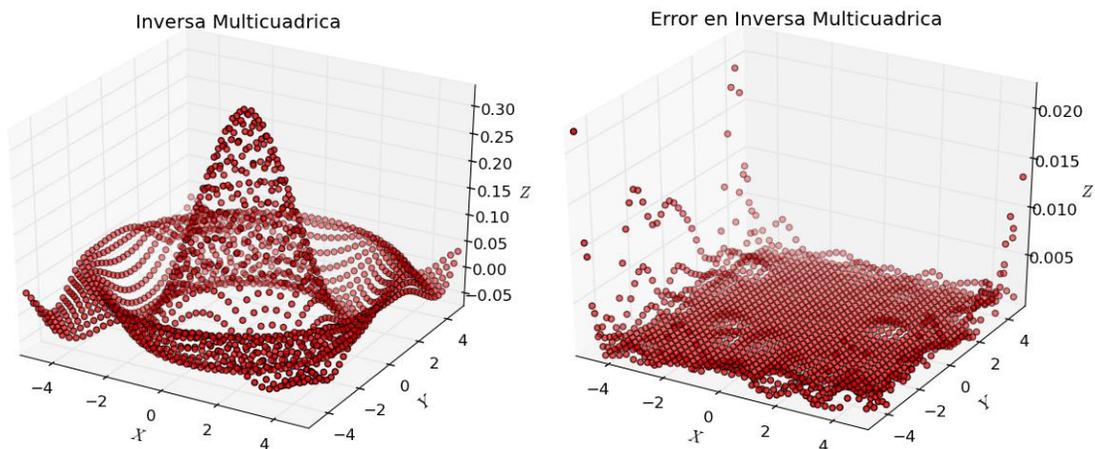


Figura 4.12 Interpolación y error matricial para IMQ con $c=2.9$ y $\beta=5$

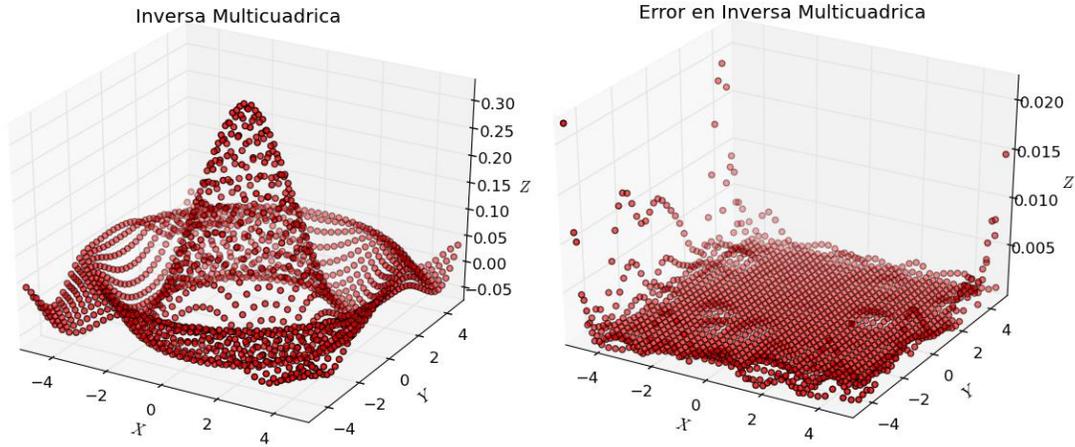


Figura 4.13 Interpolación y error matricial para IMQ con $c=3.5$ y $\beta=9$

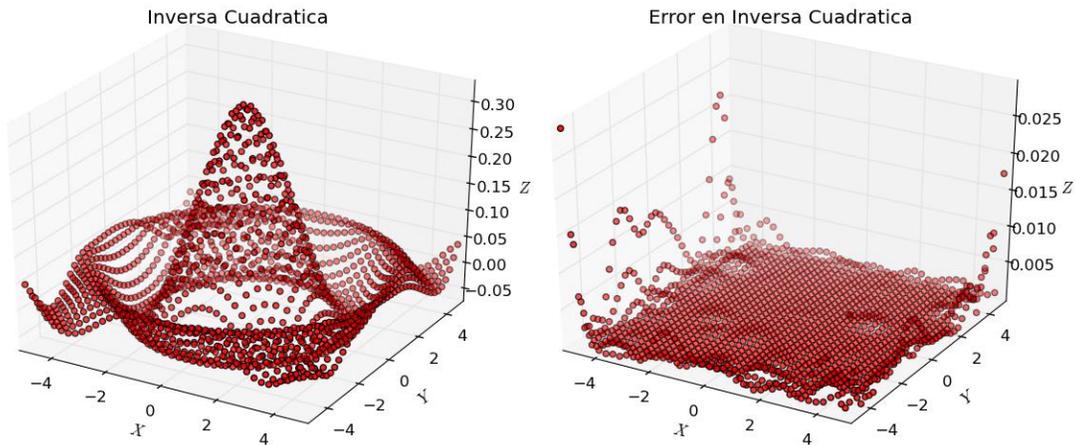


Figura 4.14 Interpolación y error matricial para IQ con $c=0.4$

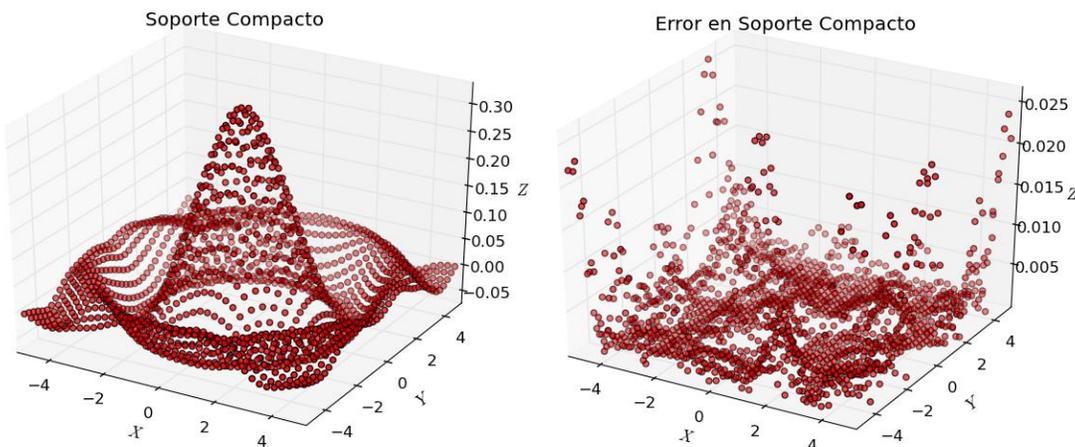


Figura 4.15 Interpolación y error matricial para IMQ con $p/L=0.1768$

4.2 DATOS OBSERVADOS

En esta sección se muestran los resultados de la interpolación de los contactos digitalizados. La interpolación se realizó de manera idéntica que con los datos sintéticos. Algunos resultados fueron bastante positivos, mientras que otros no se acercan al modelo geológico propuesto. A continuación se muestra en la tabla 4.5 los parámetros cuyas interpolaciones generan la reconstrucción más aceptable.

De igual manera se tiene medido el tiempo relativo.

Kernel	Parámetros			Resultado
	c	β	ρ/L	T_r
SS		1		1.0000
GA	0.8			1.7272
MQ	3.3	1		1.0918
IMQ	1.5	1		1.7988
IQ	0.8			1.1767
SC			0.075	1.1717

Tabla 4.5 muestra los kernels y parámetros cuya interpolación se acerca más a la realidad.

Las gráficas correspondientes a los parámetros de la tabla 4.5 se presentan a continuación, cada una tiene 4 vistas giradas a 90°.

Gráficas sobre interpolación de contactos

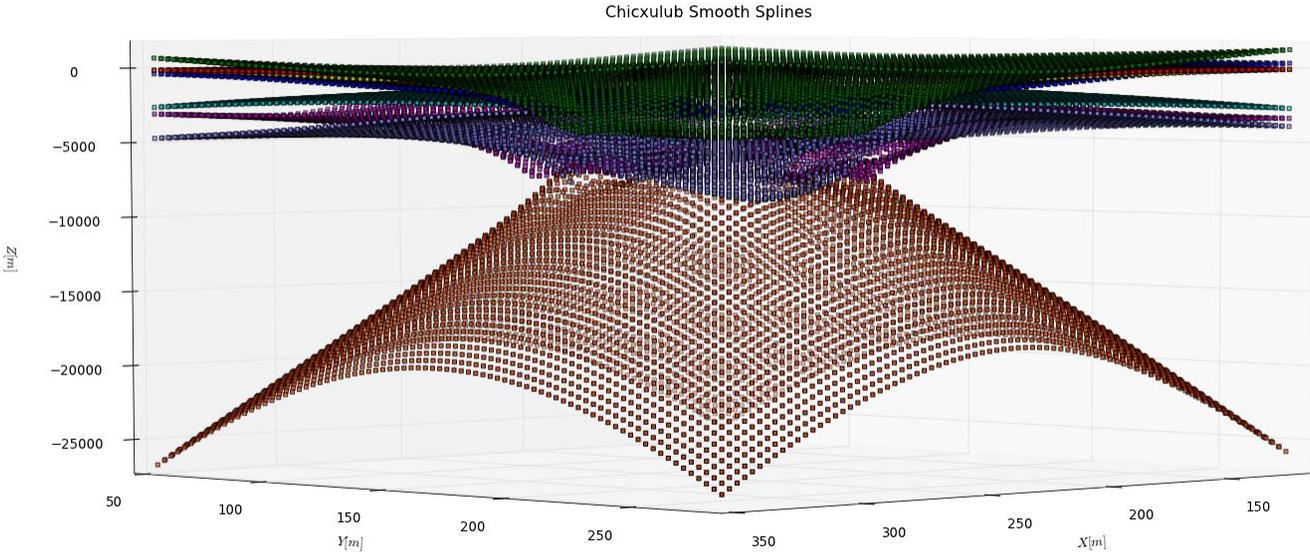


Figura 4.16 Interpolación con SS, vista 1 para $\beta=1$

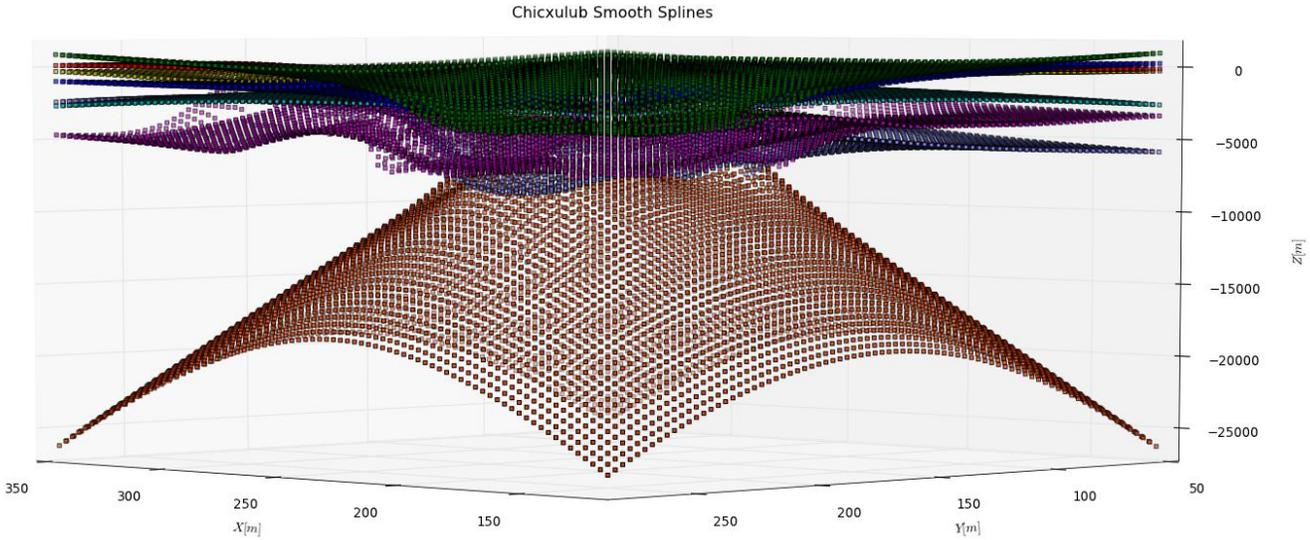


Figura 4.17 Interpolación con SS, vista 2 para $\beta=1$

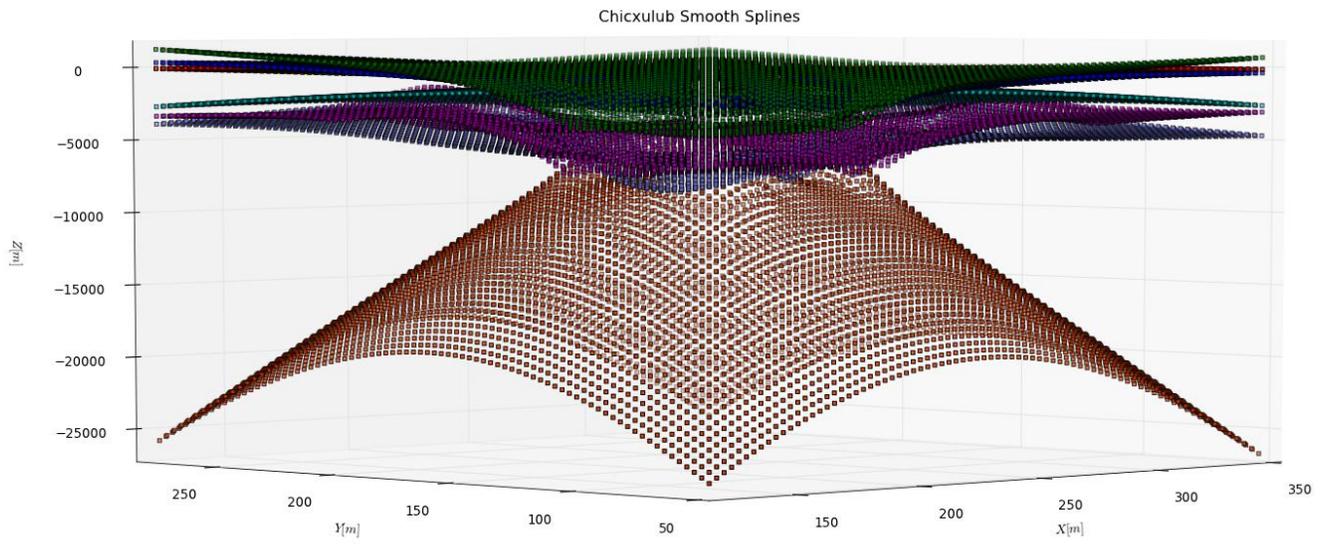


Figura 4.18 Interpolación con SS, vista 3 para $\beta=1$

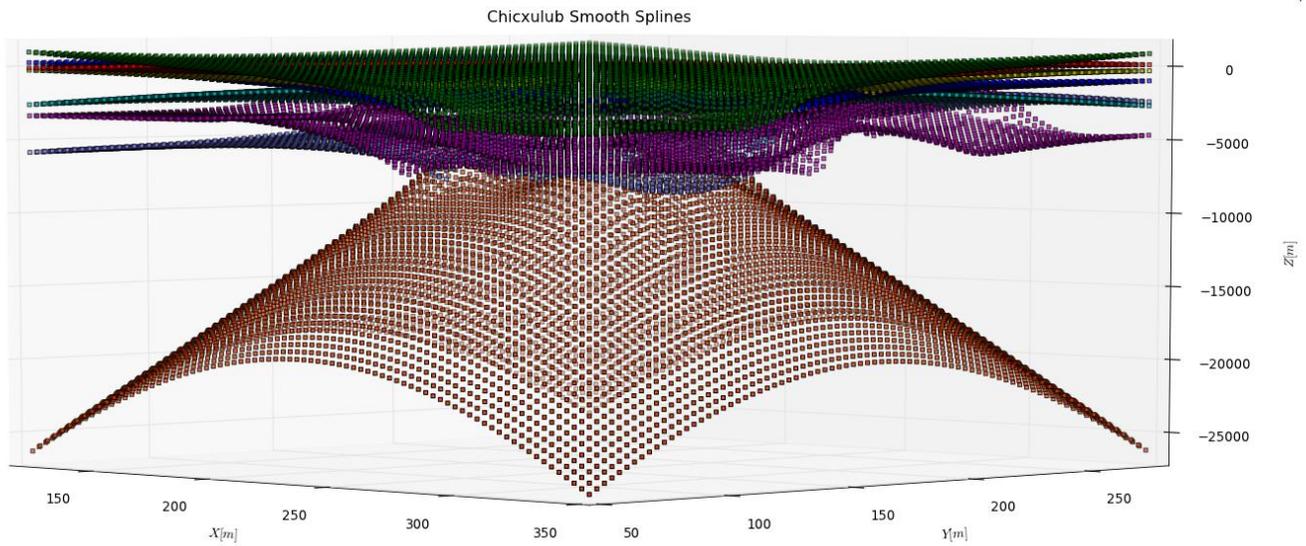


Figura 4.19 Interpolación con SS, vista 4 para $\beta=1$

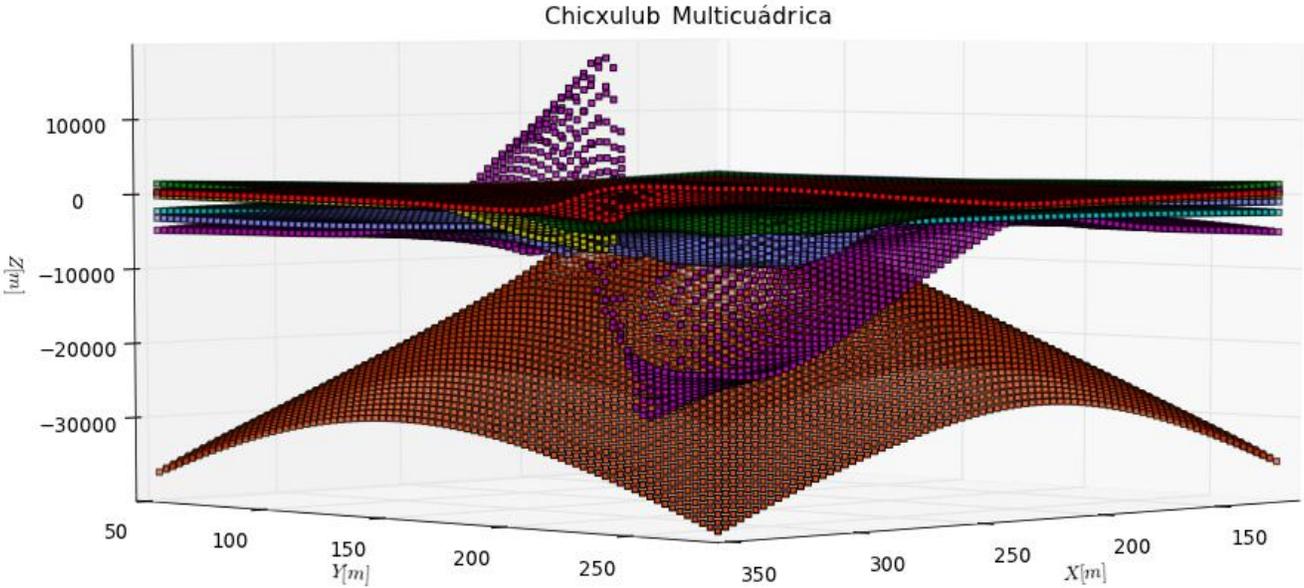


Figura 4.20 Interpolación con MQ, vista 1 para $c=3.3$ y $\beta=1$

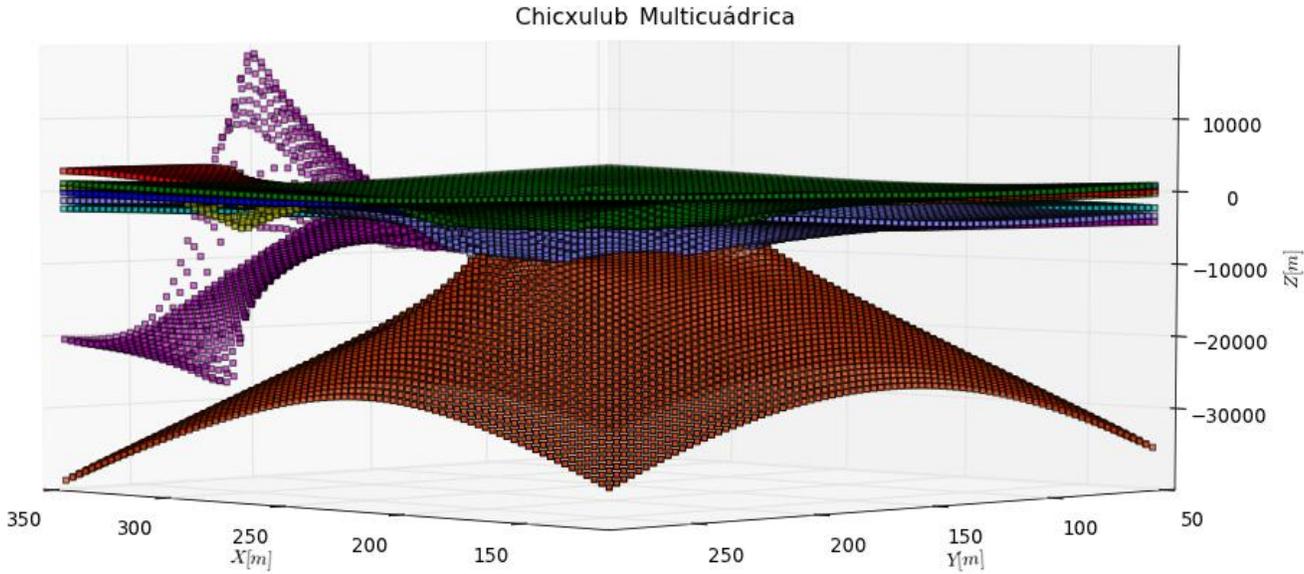


Figura 4.21 Interpolación con MQ, vista 2 para $c=3.3$ y $\beta=1$

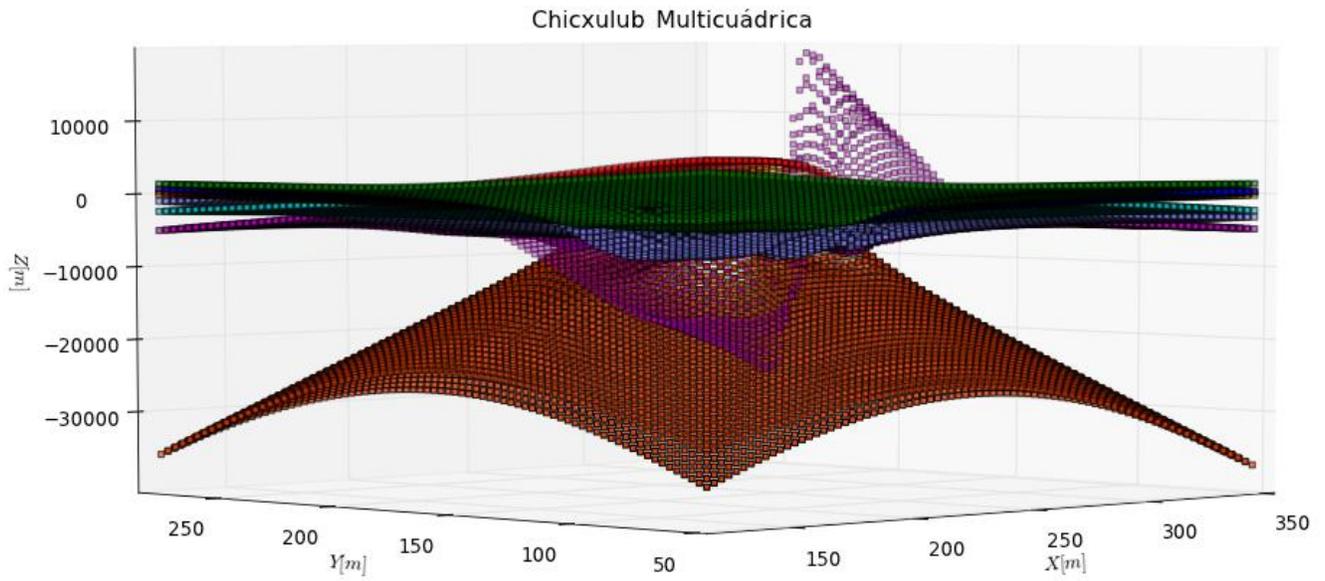


Figura 4.22 Interpolación con MQ, vista 3 para $c=3.3$ y $\beta=1$

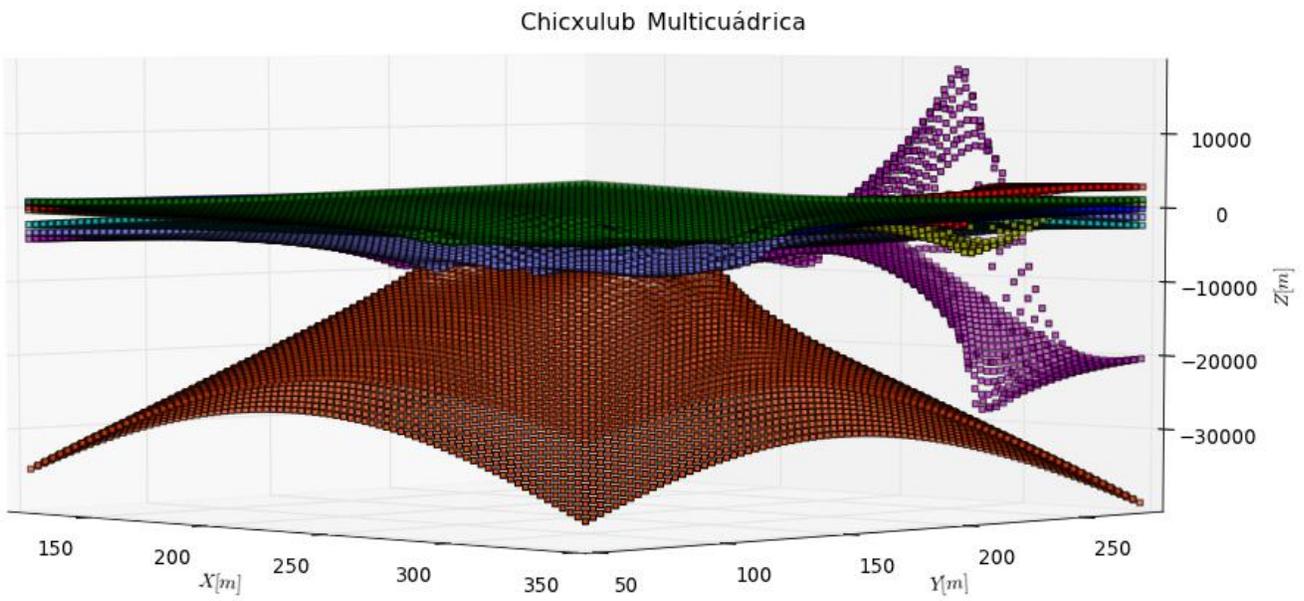


Figura 4.23 Interpolación con MQ, vista 4 para $c=3.3$ y $\beta=1$

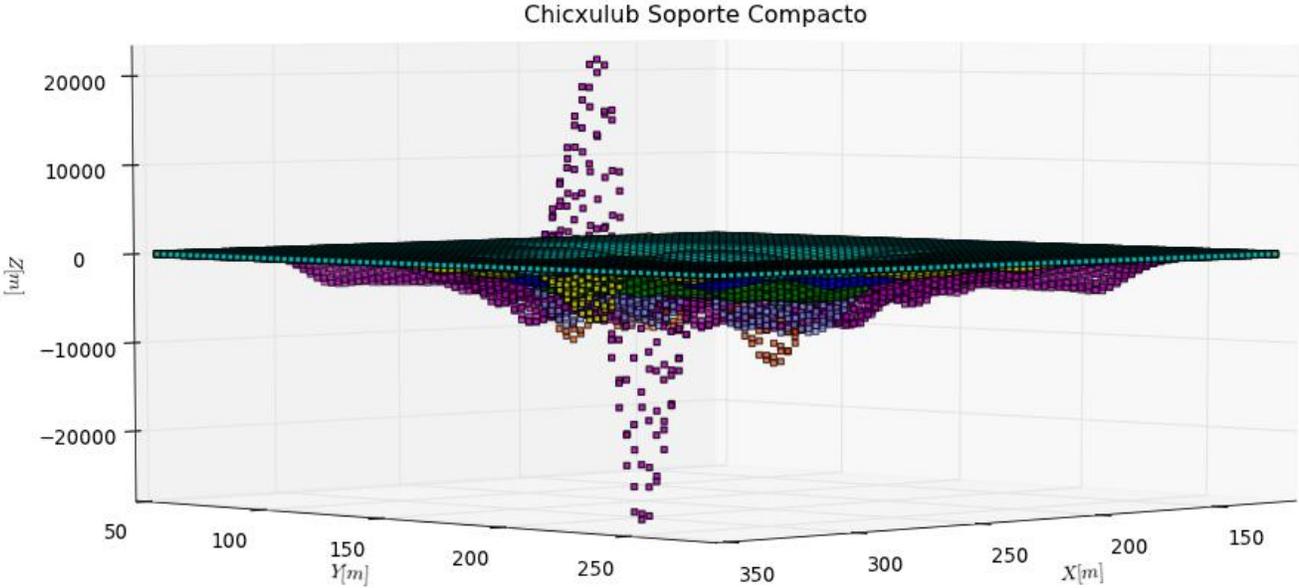


Figura 4.24 Interpolación con SC, vista 1 para $\rho/L=0.075$

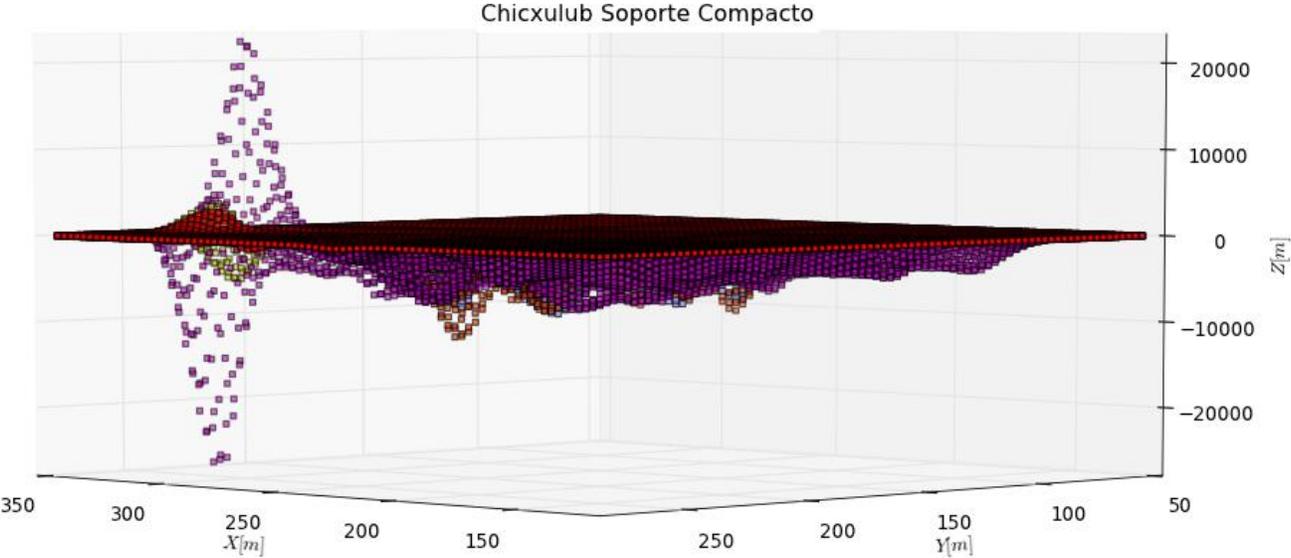


Figura 4.25 Interpolación con SC, vista 2 para $\rho/L=0.075$

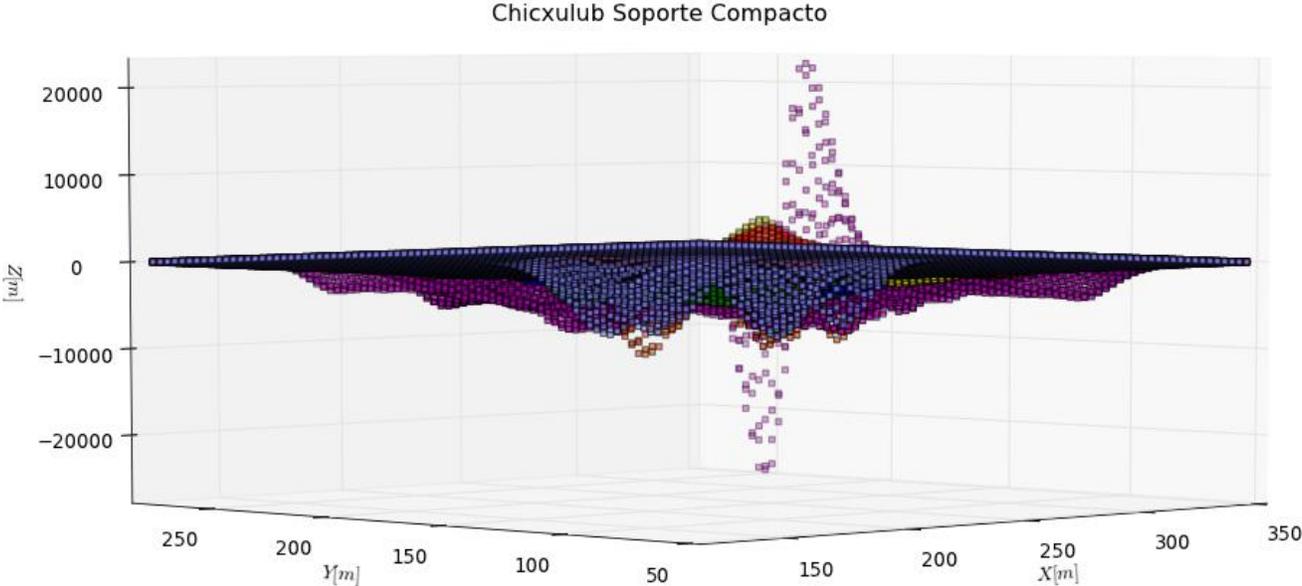


Figura 4.26 Interpolación con SC, vista 3 para $p/L=0.075$

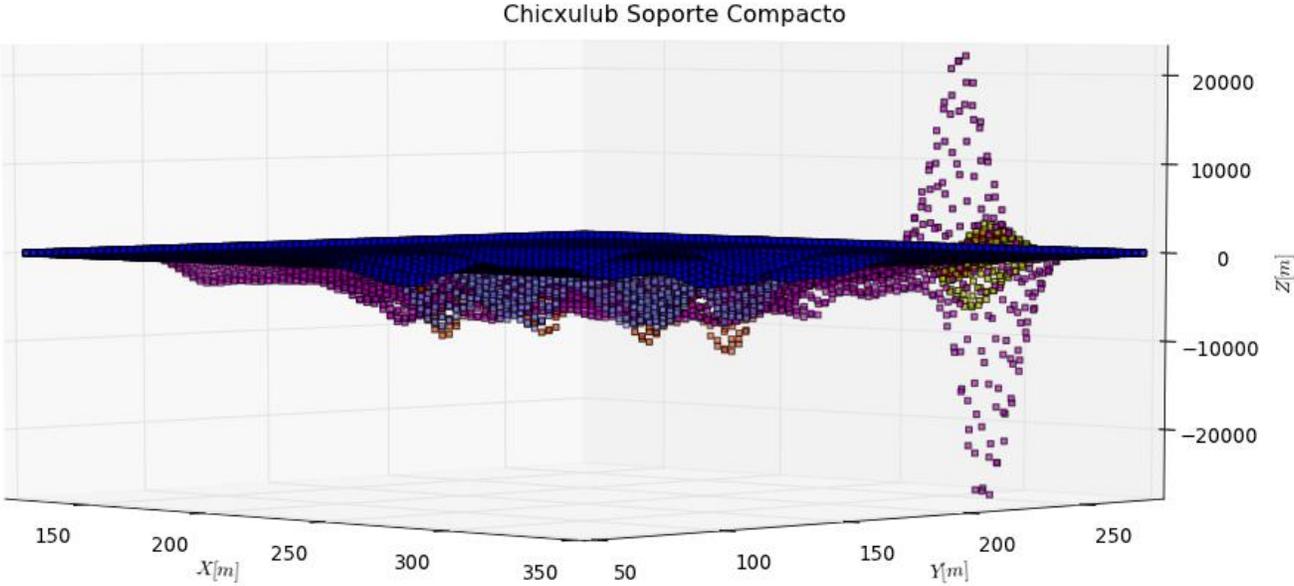


Figura 4.27 Interpolación con SC, vista 4 para $p/L=0.075$

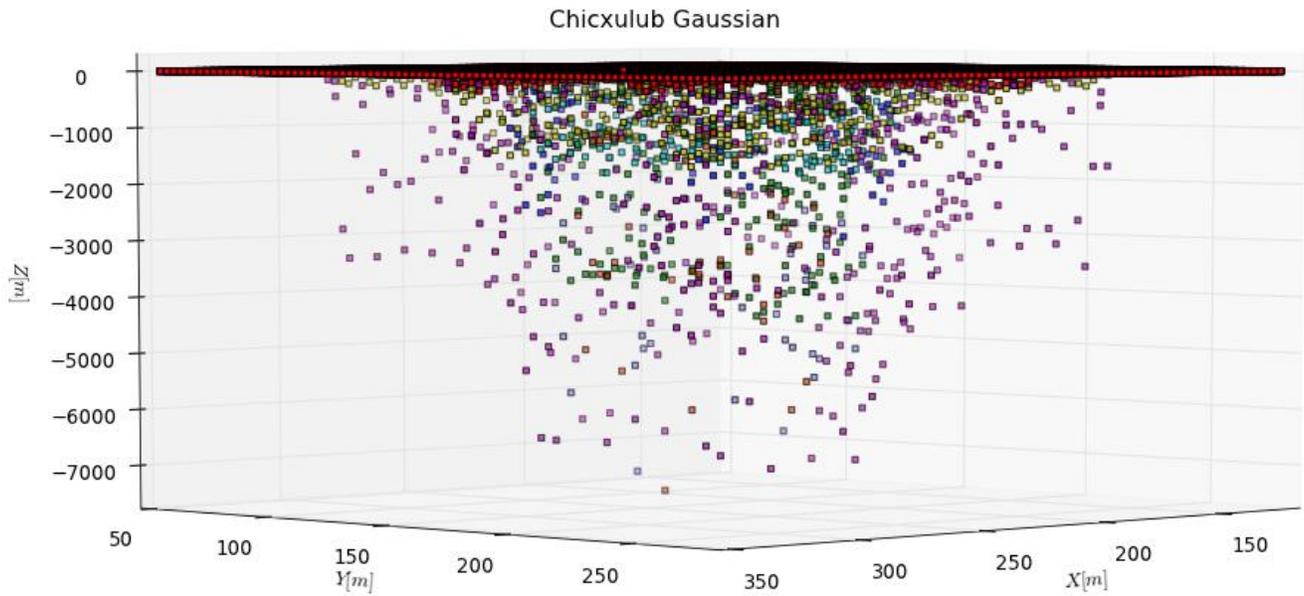


Figura 4.28 Interpolación con GA, vista 1 para $c=0.8$

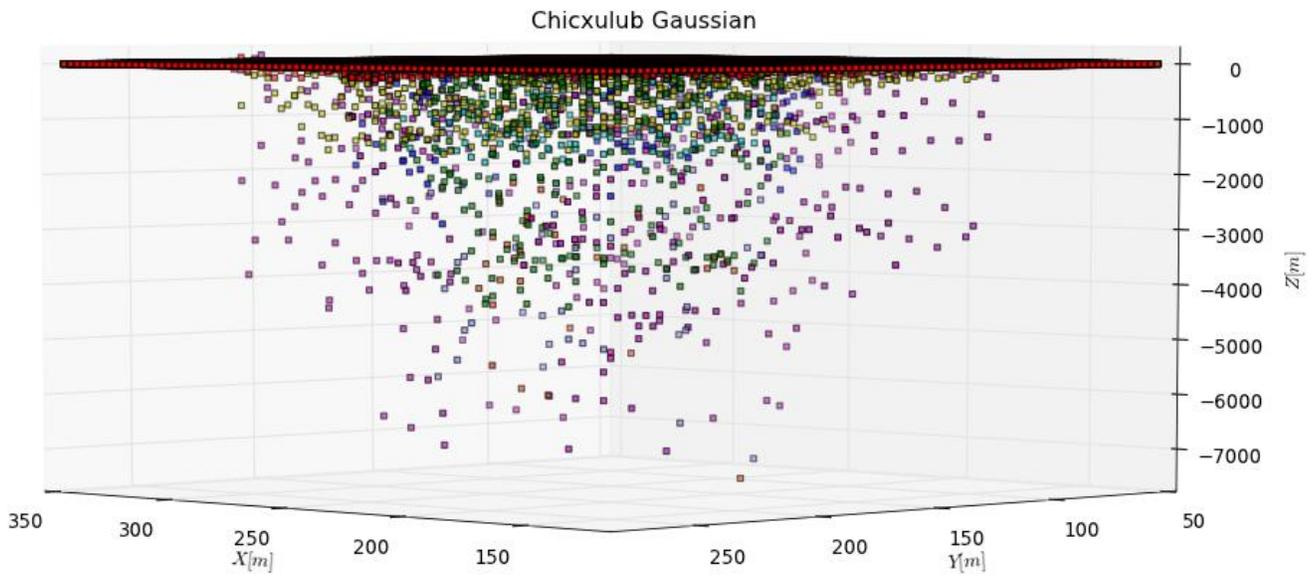


Figura 4.29 Interpolación con GA, vista 2 para $c=0.8$

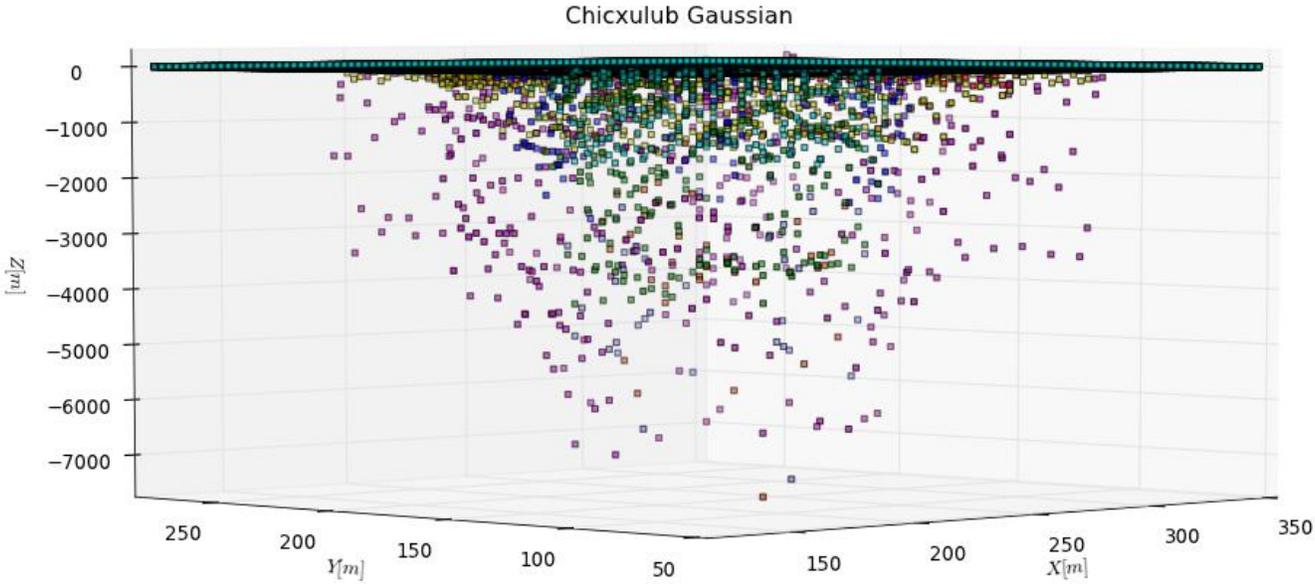


Figura 4.30 Interpolación con GA, vista 3 para c=0.8

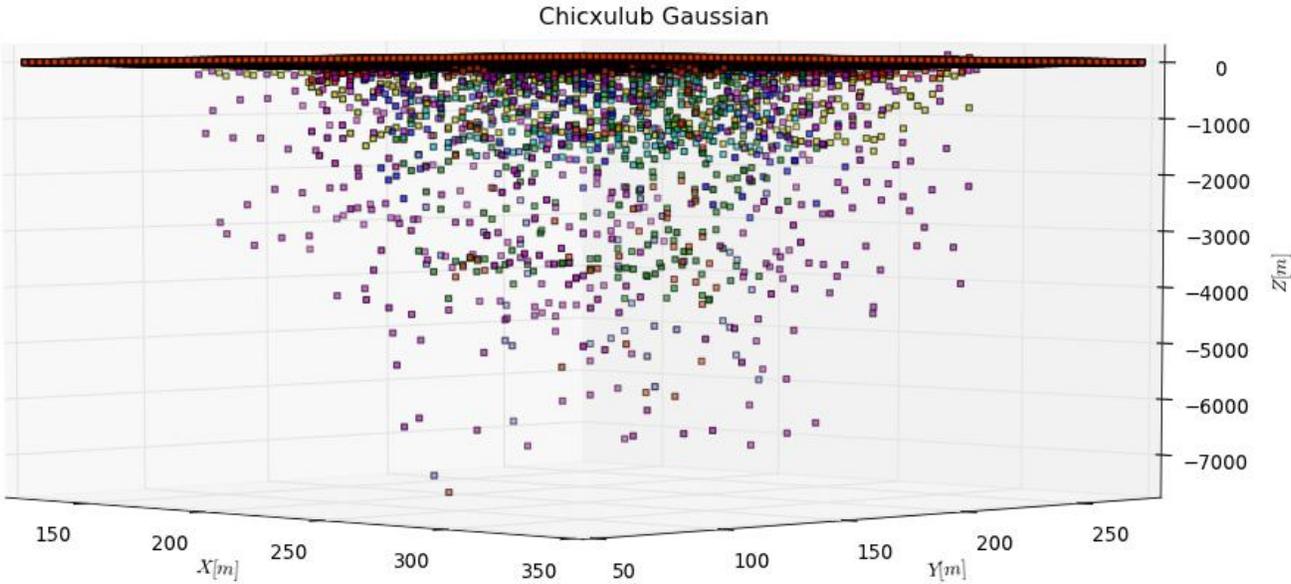


Figura 4.31 Interpolación con GA, vista 4 para c=0.8

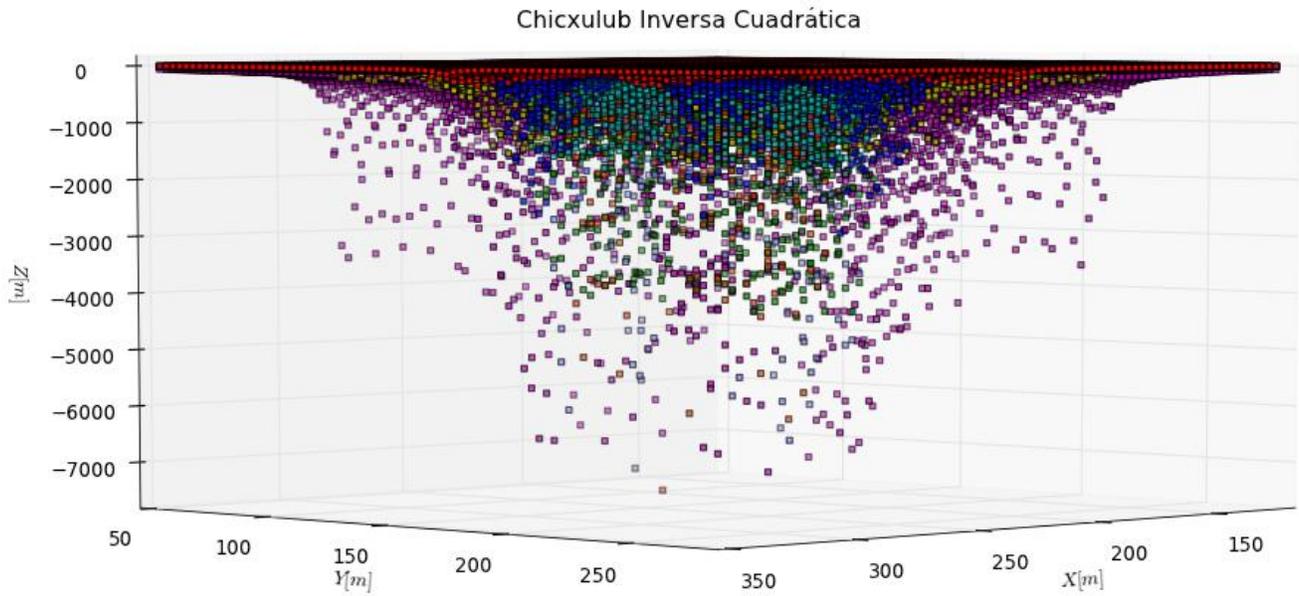


Figura 4.32 Interpolación con IQ, vista 1 para $c=0.8$

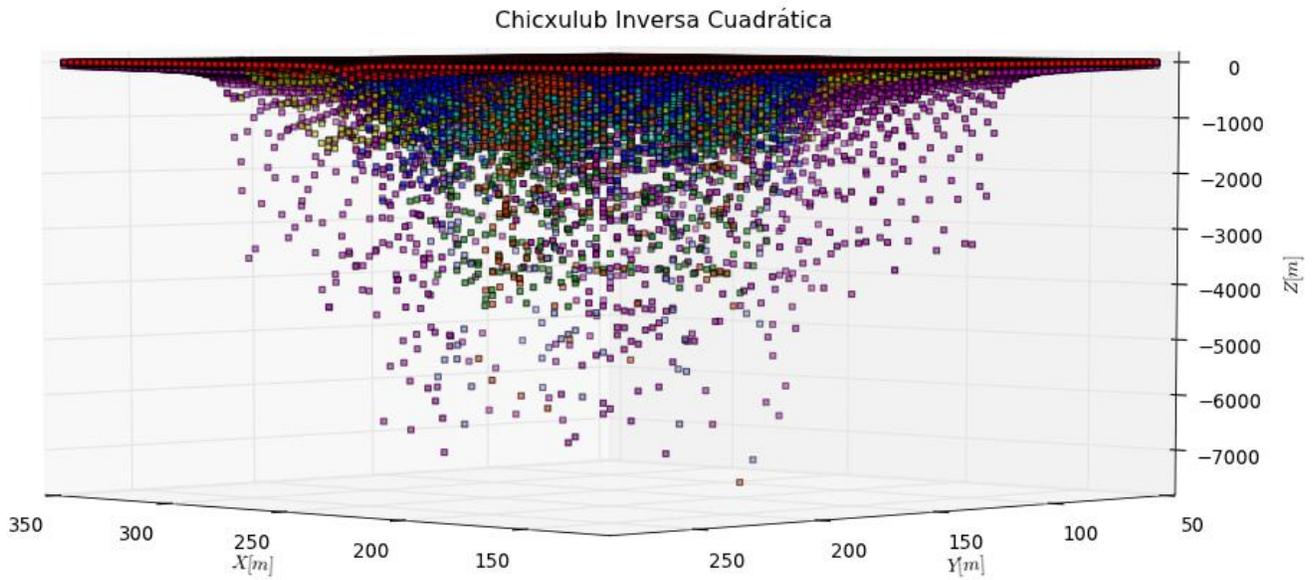


Figura 4.33 Interpolación con IQ, vista 2 para $c=0.8$

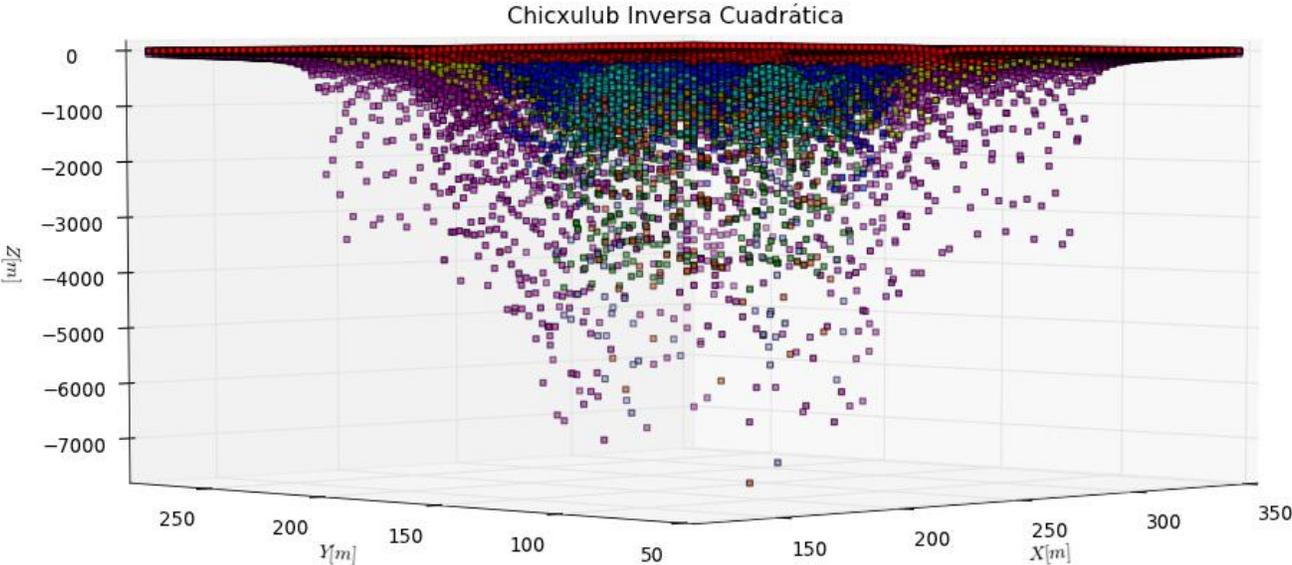


Figura 4.34 Interpolación con IQ, vista 3 para $c=0.8$

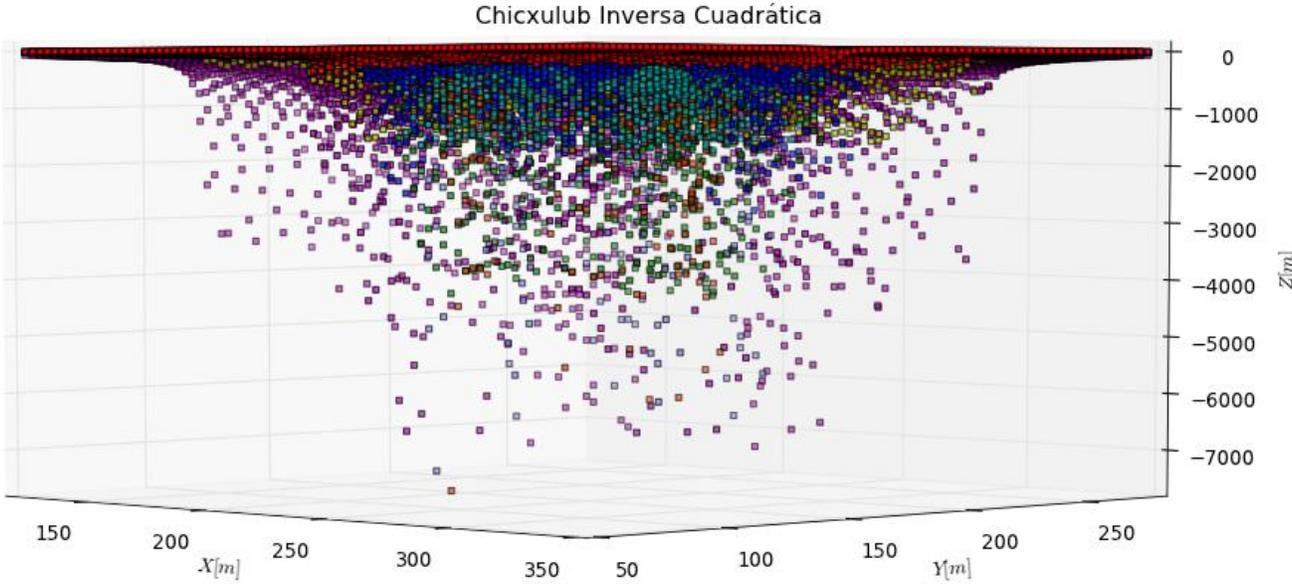


Figura 4.35 Interpolación con IQ, vista 4 para $c=0.8$

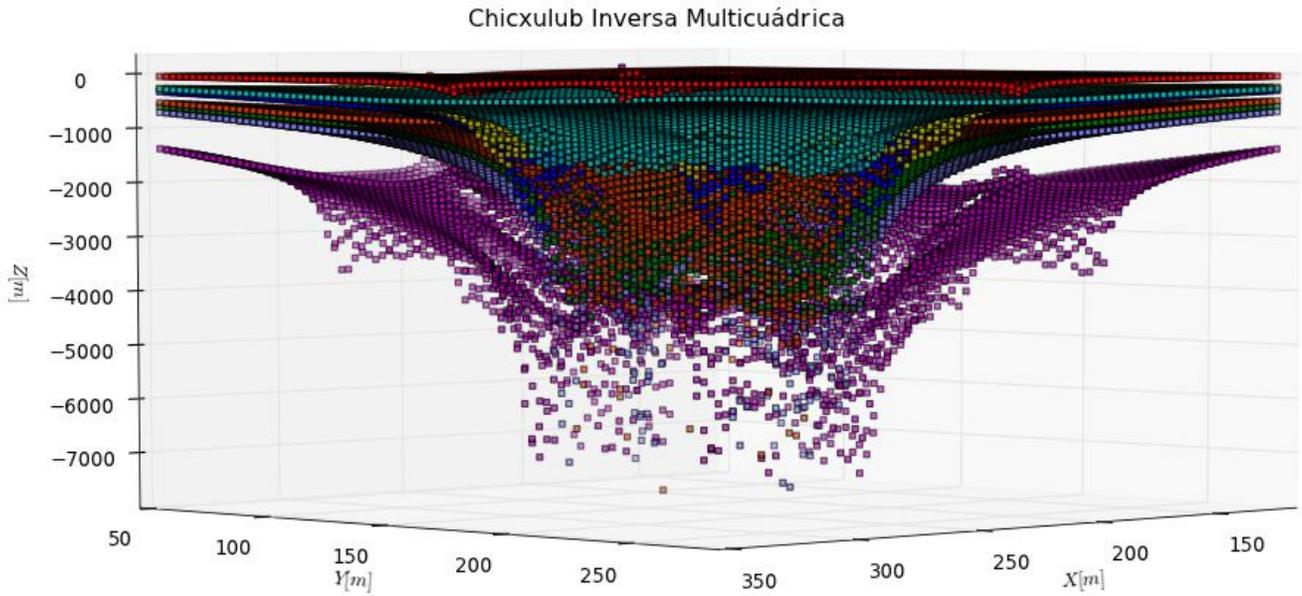


Figura 4.36 Interpolación con IMQ, vista 1 para $c=1.5$ y $\beta=1$

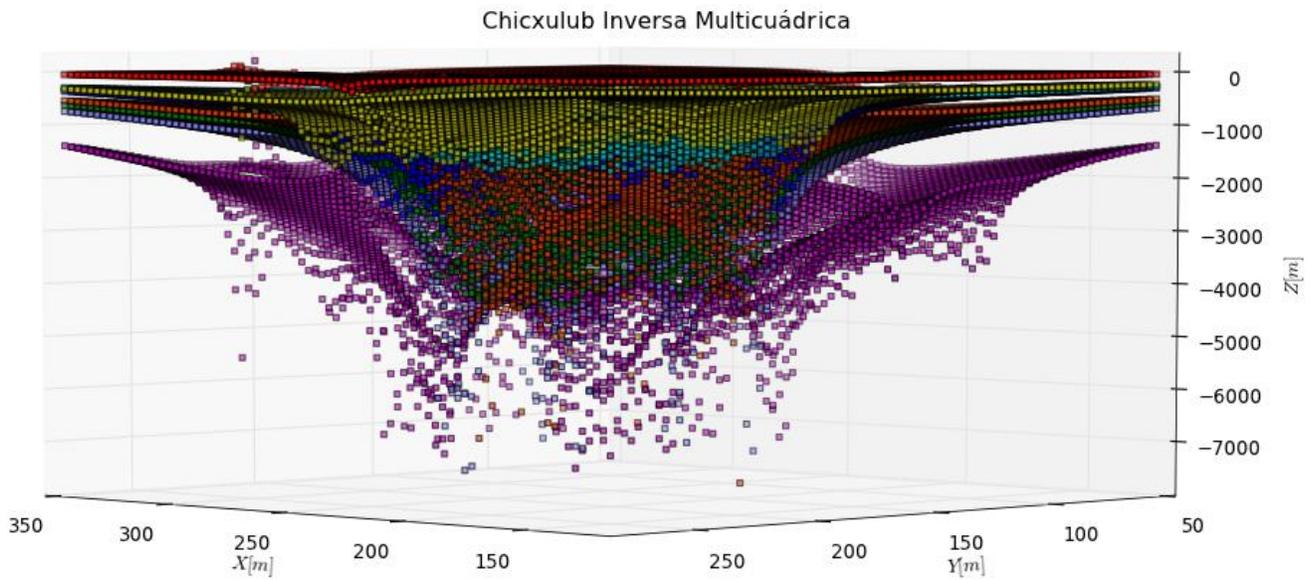


Figura 4.37 Interpolación con IMQ, vista 2 para $c=1.5$ y $\beta=1$

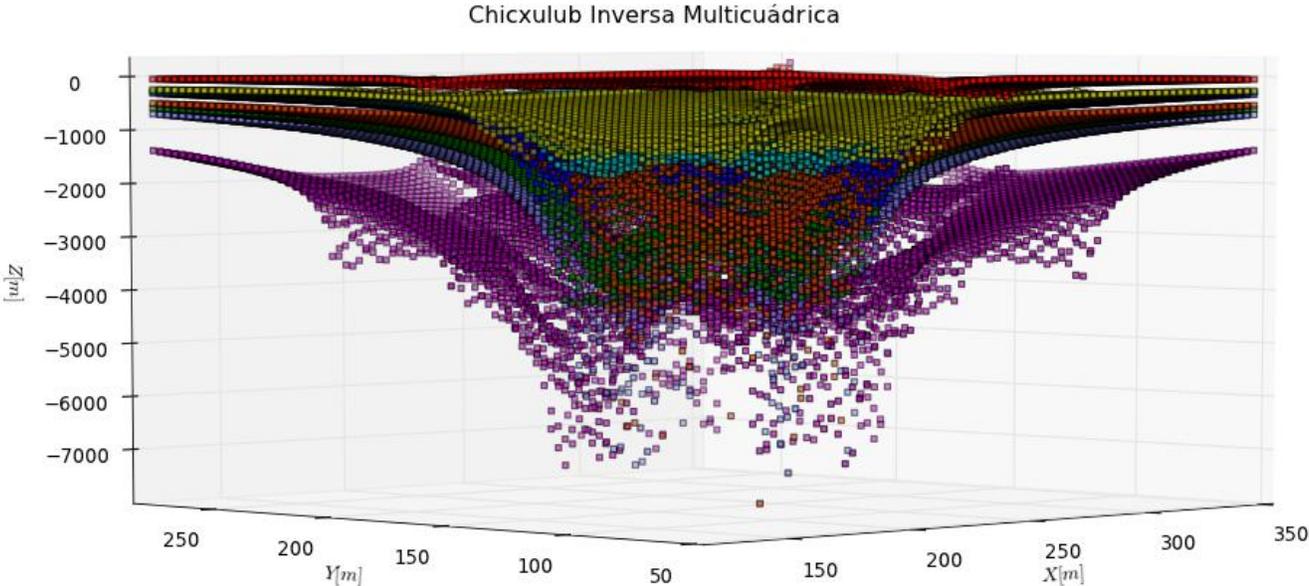


Figura 4.38 Interpolación con IMQ, vista 3 para $c=1.5$ y $\beta=1$

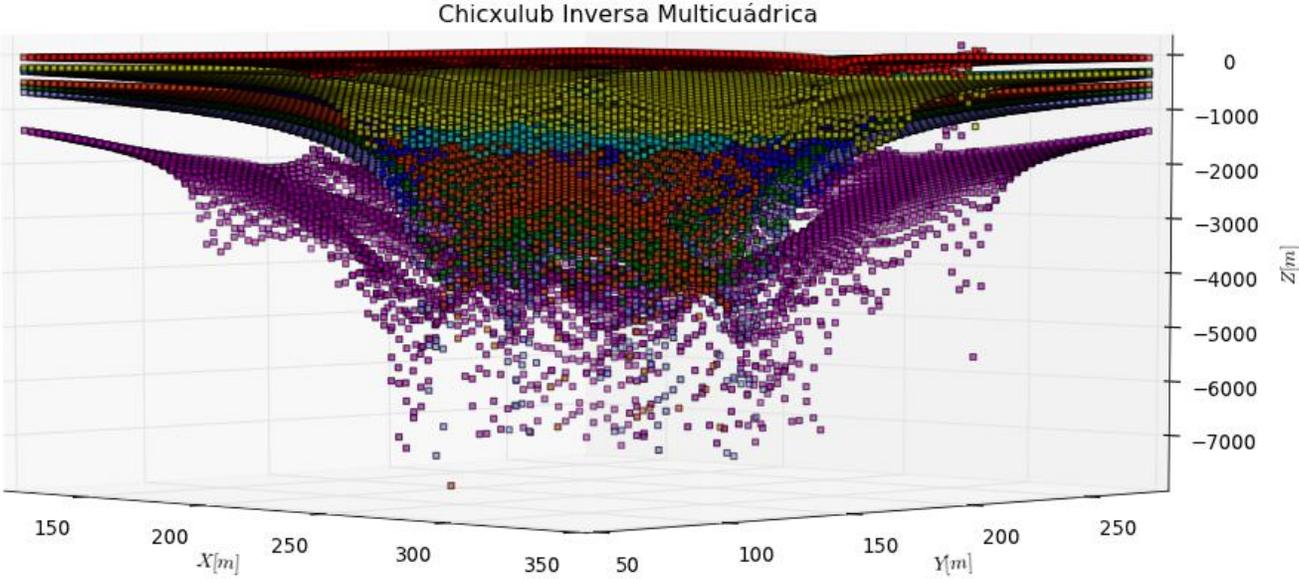


Figura 4.39 Interpolación con IMQ, vista 4 para $c=1.5$ y $\beta=1$

4.3 RECONSTRUCCIÓN 3D

En la sección anterior observamos de manera cualitativa que el kernel IMQ es el que reconstruye de mejor manera los contactos geológicos, véanse figuras 4.36- 4.39. Además, en la comparación con datos sintéticos, se puede observar que el error de este kernel es de los más bajos, sobre todo cuando aumenta el número de puntos. Por esta razón IMQ es el único para el cual se hizo la reconstrucción. El resultado se presenta en las figuras siguientes.

Nota: Los tres ejes coordenados se encuentran en unidades de metros [m]

Estratos Reconstruidos

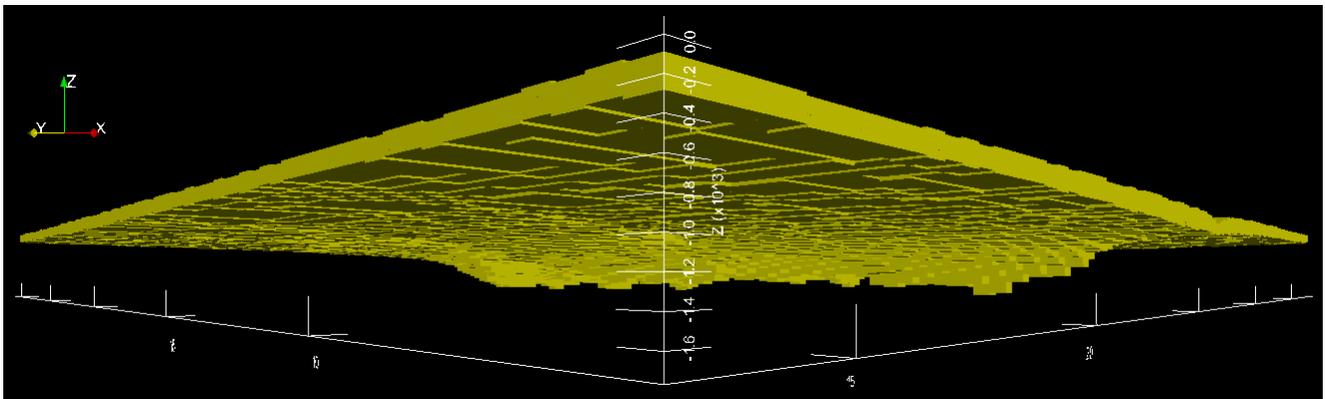


Figura 4.40 Capa Terciaria con vista de perfil.

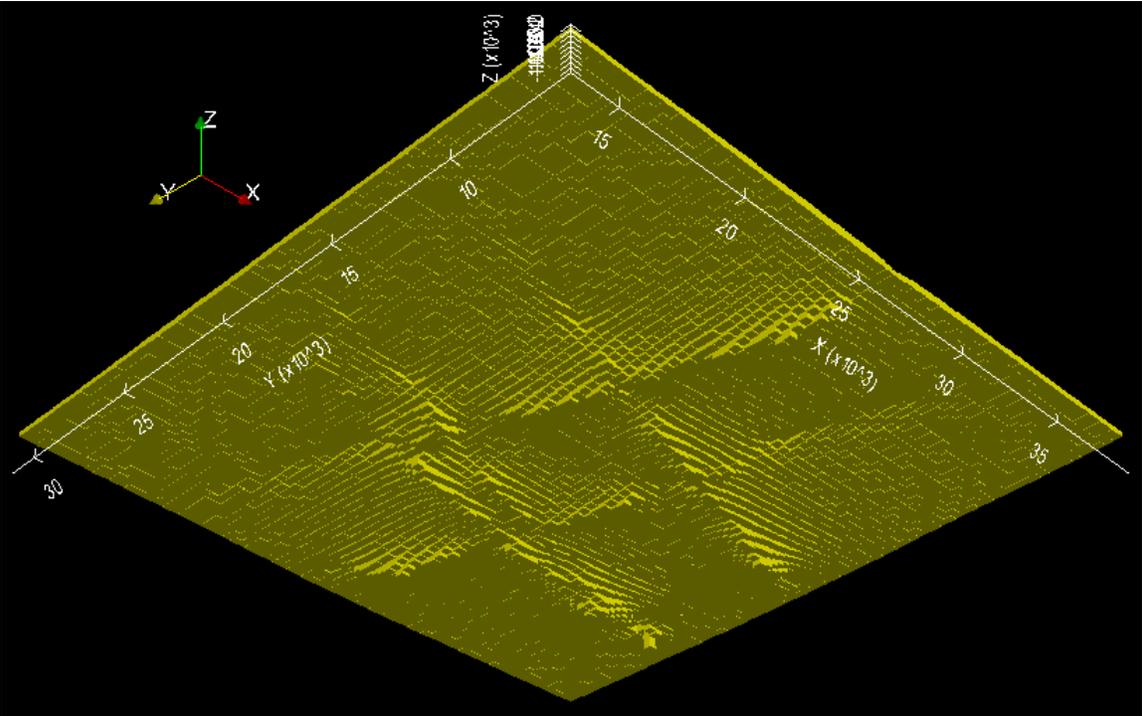


Figura 4.41 Capa Terciaria con vista inferior.

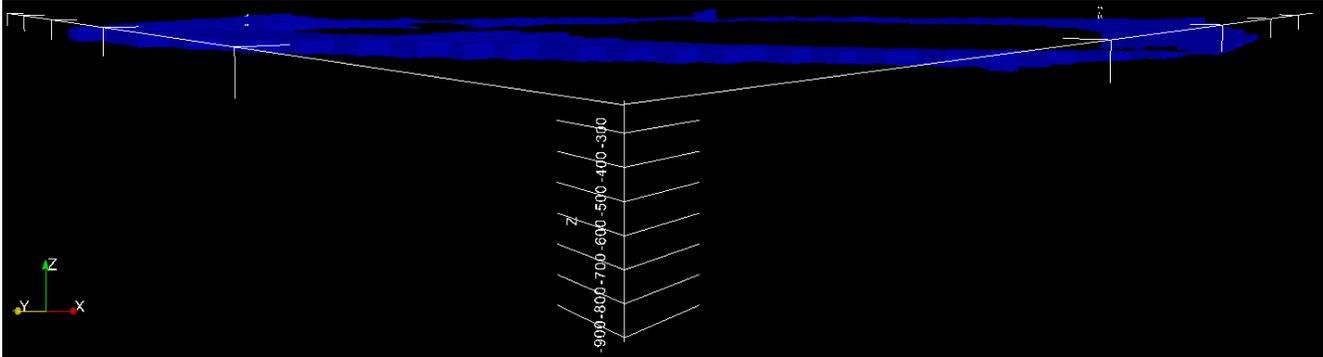


Figura 4.42 Brecha Exterior con vista de perfil.

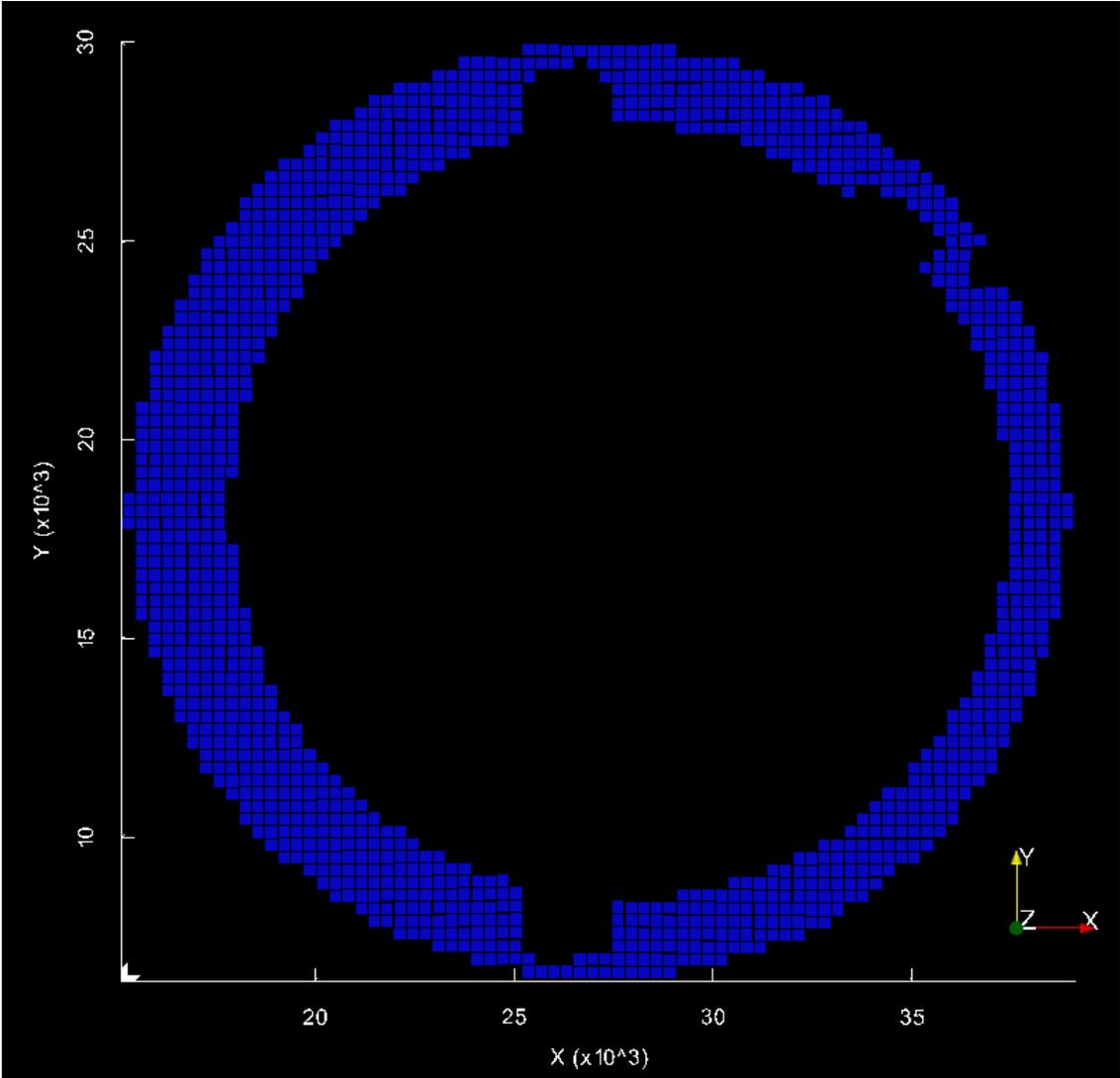


Figura 4.43 Brecha Exterior con vista inferior.

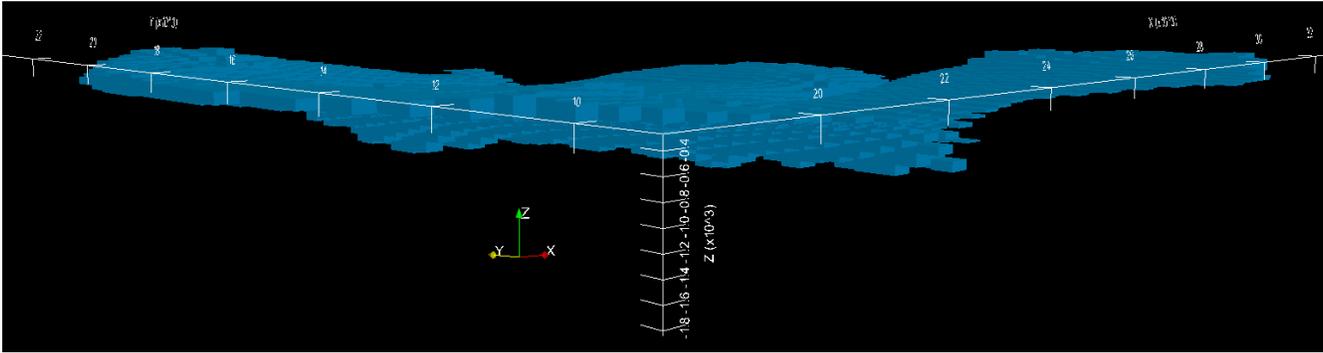


Figura 4.44 Brecha Superior con vista de perfil.

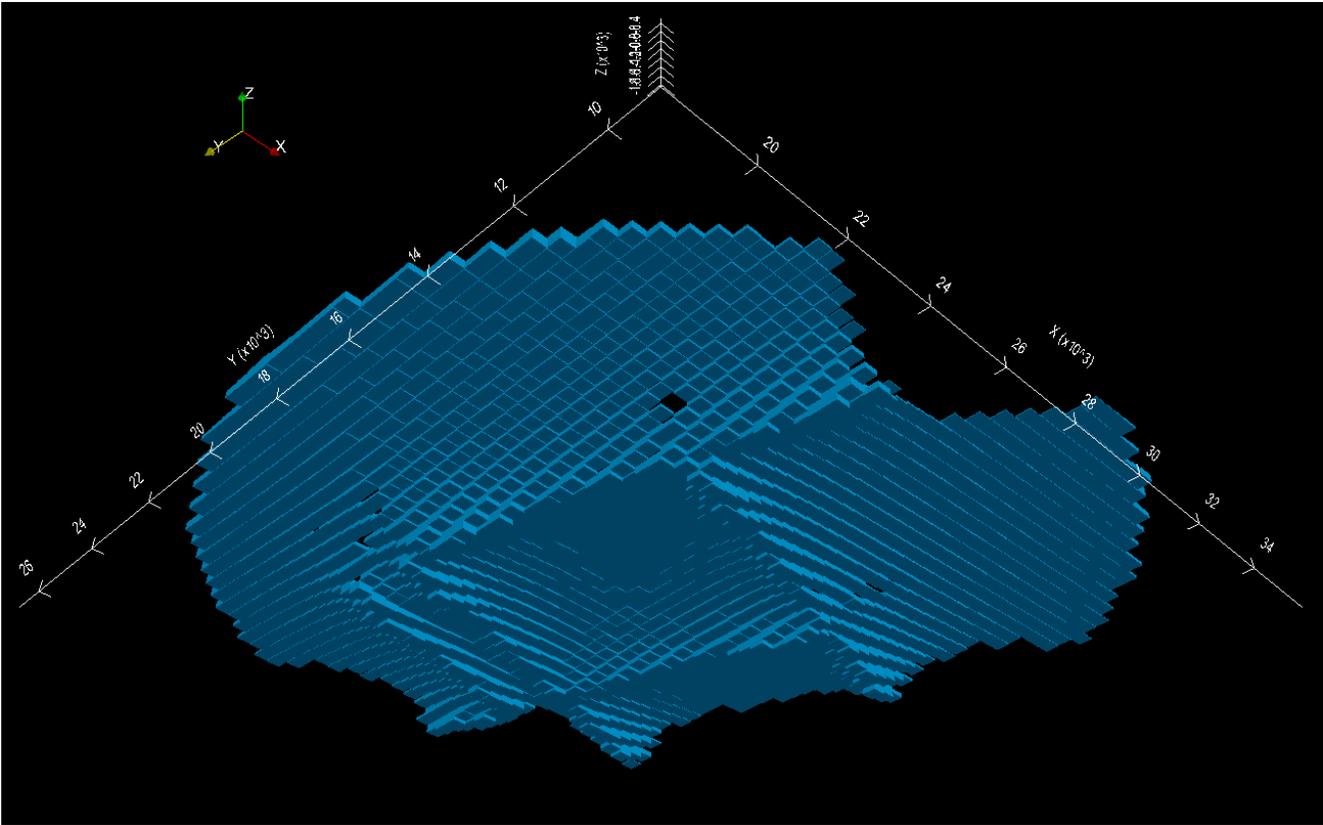


Figura 4.45 Brecha Superior con vista inferior.

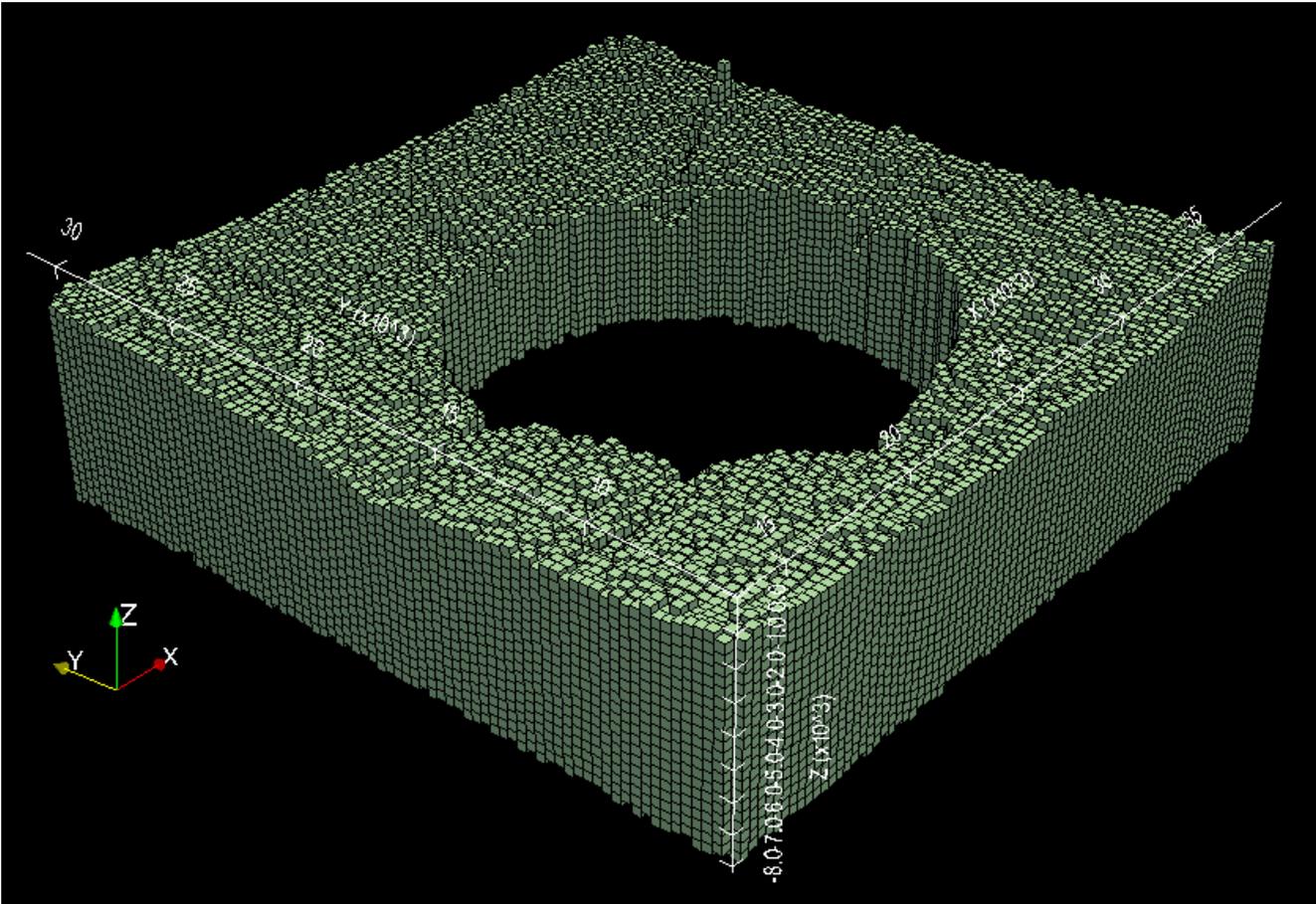


Figura 4.51 Basamento con vista superior.

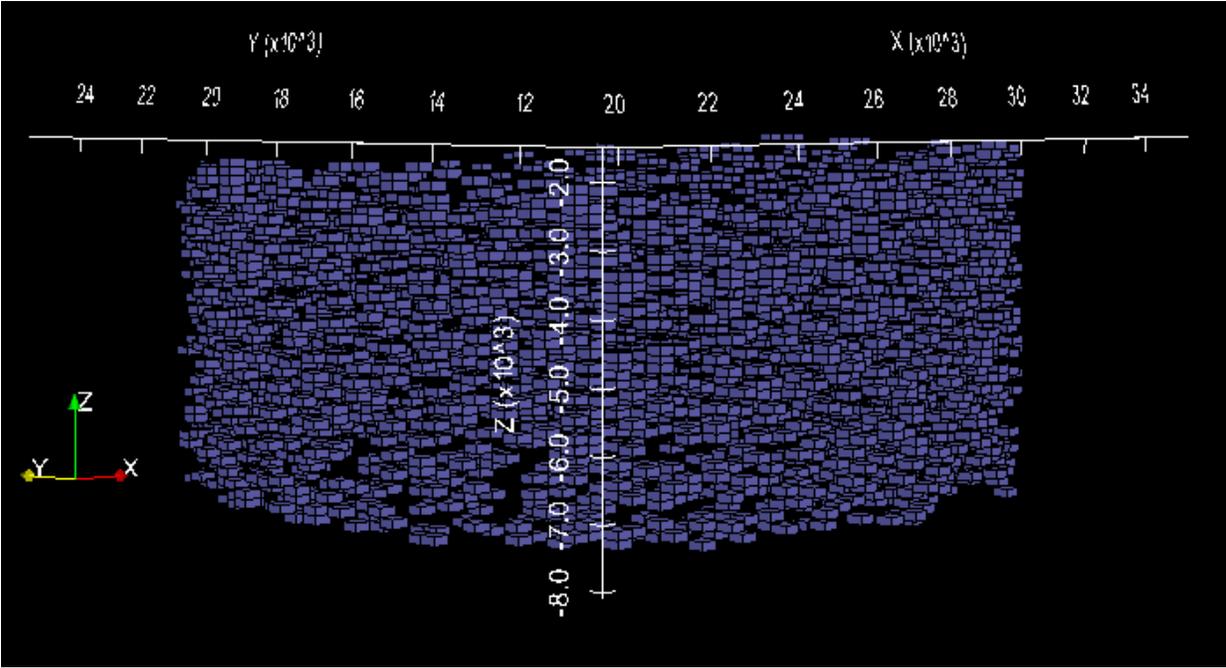


Figura 4.46 Megabrecha con vista de perfil.

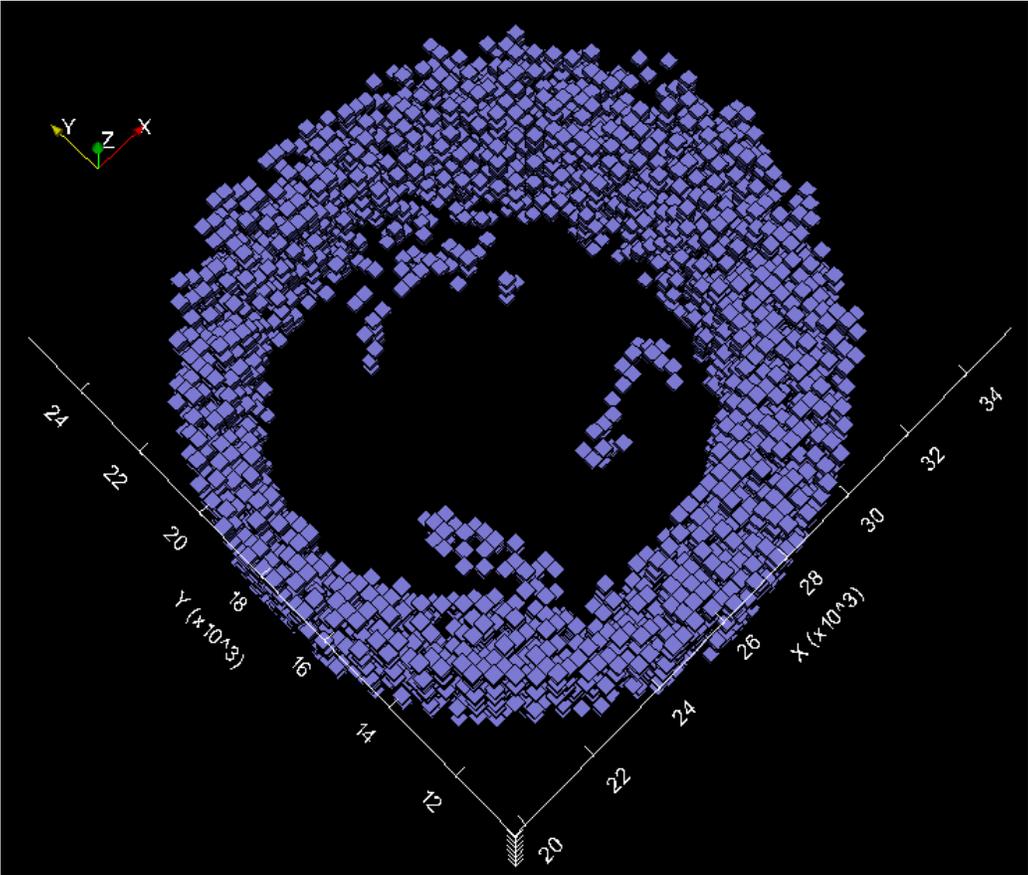


Figura 4.47 Megabrecha con vista inferior.

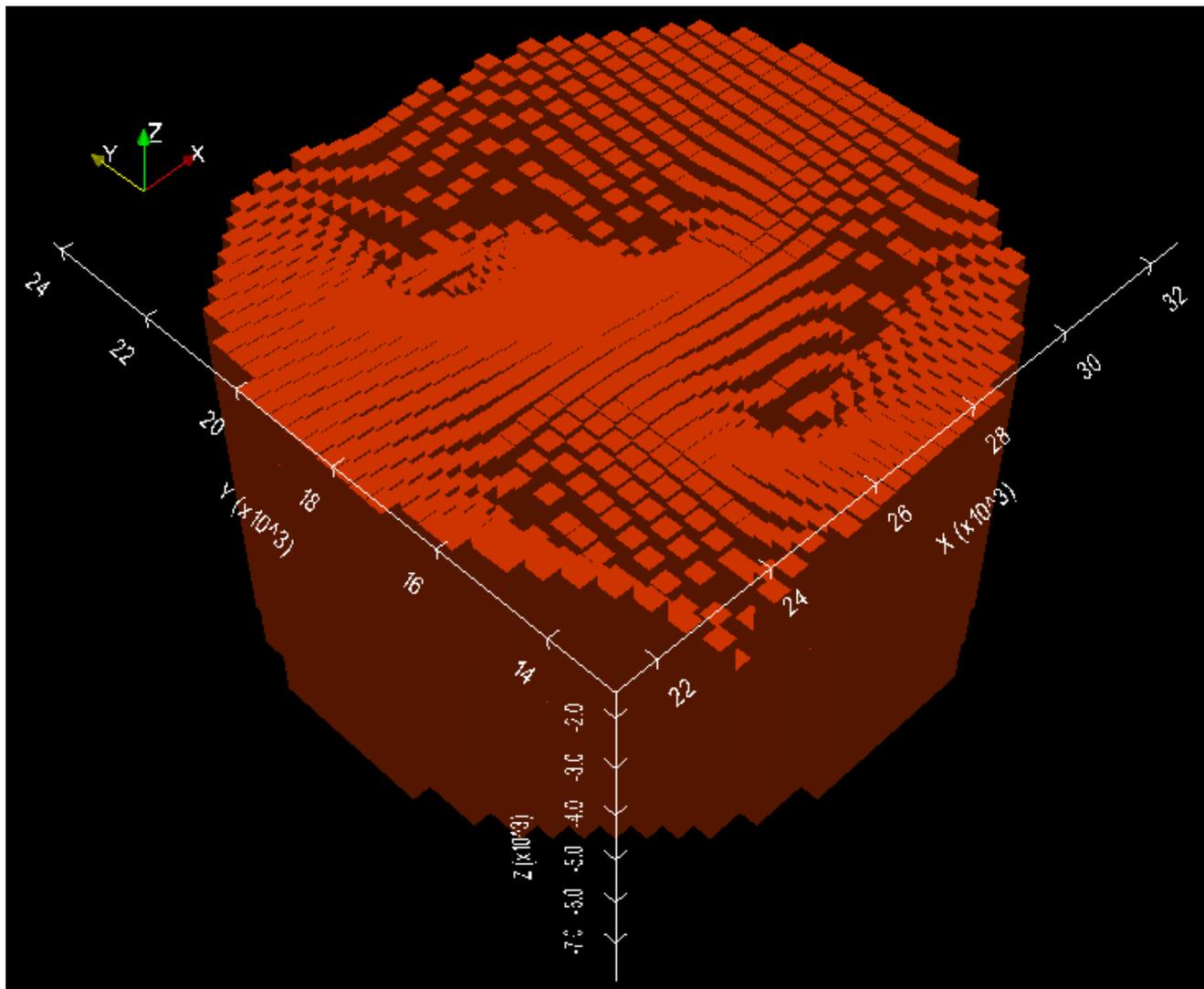


Figura 4.48 Central Uplift con vista superior

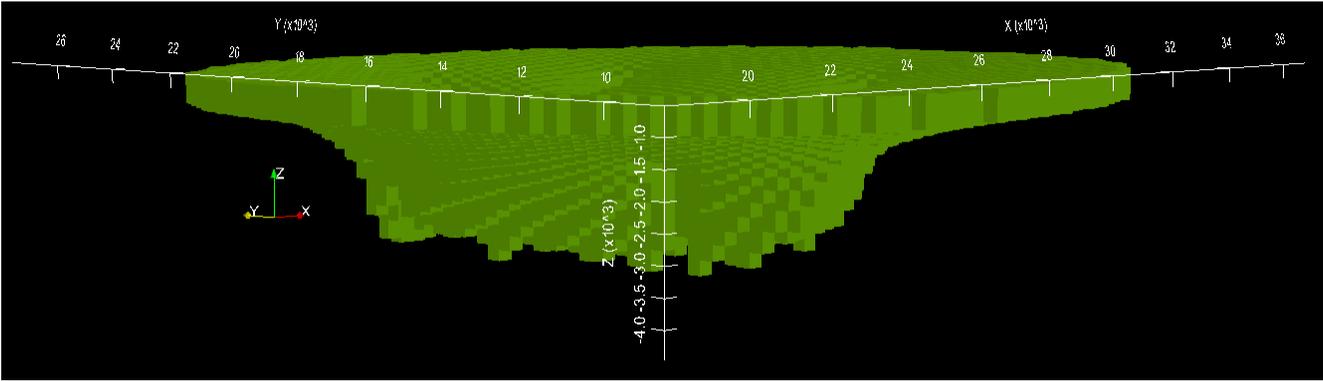


Figura 4.49 Melt con vista de perfil.

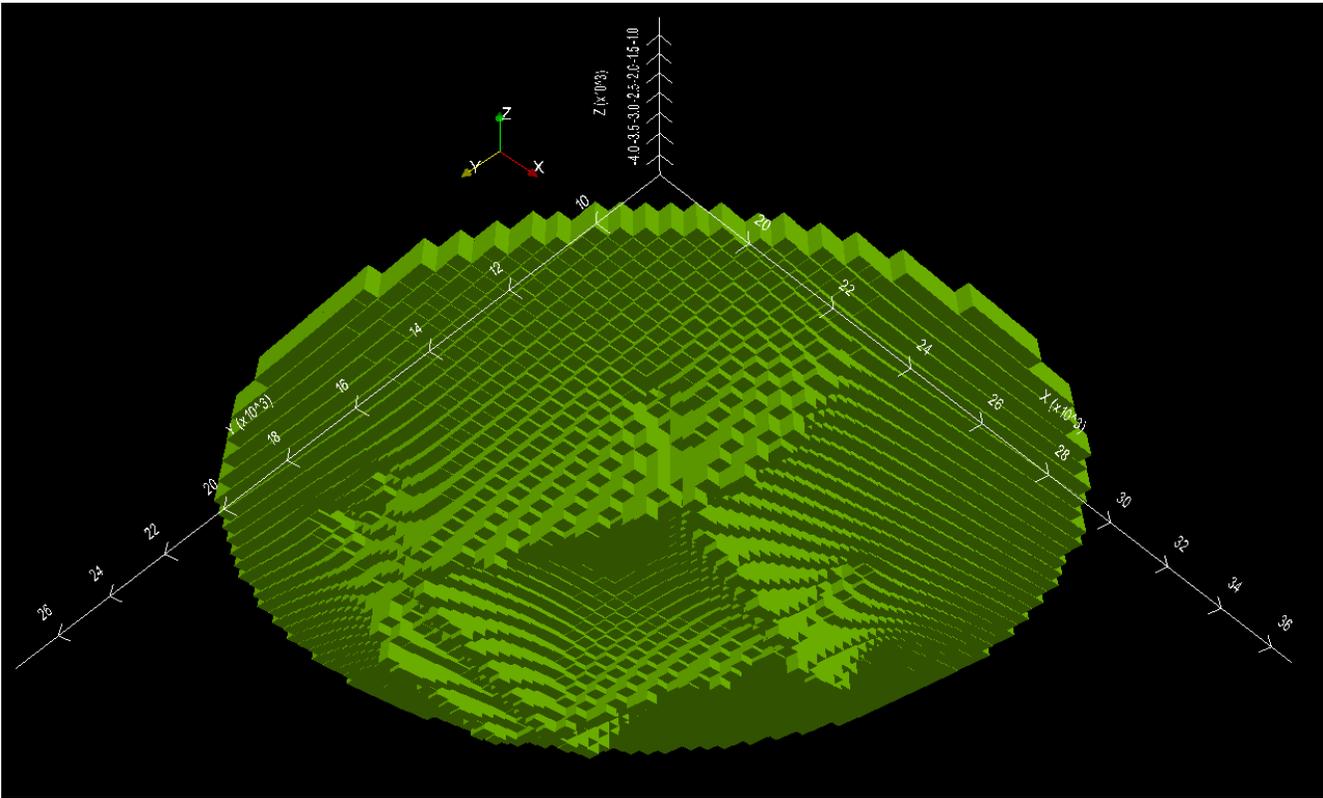


Figura 4.50 Melt con vista inferior.

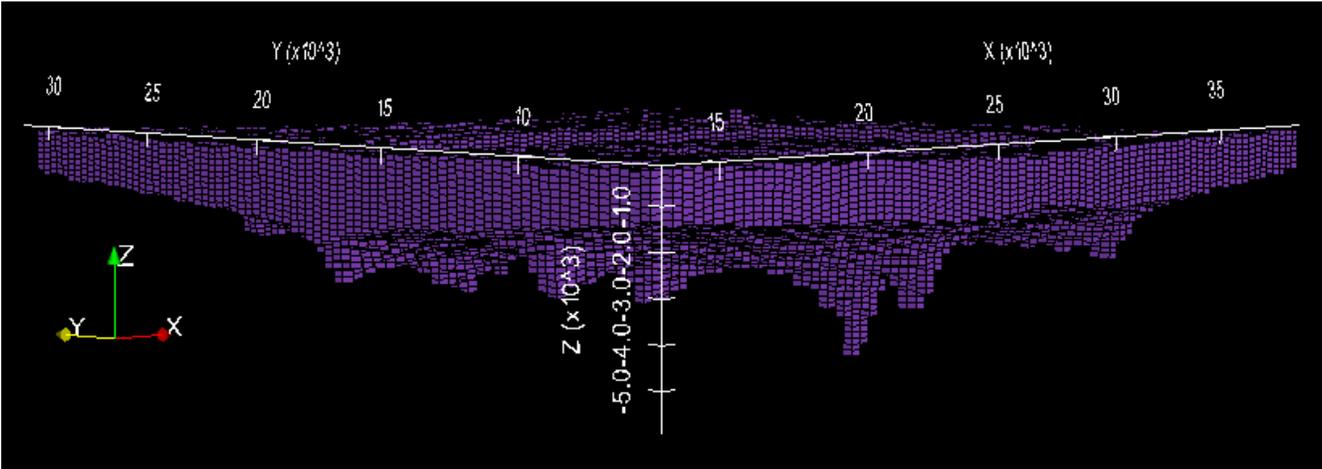


Figura 4.51 Cretácico con vista de perfil.

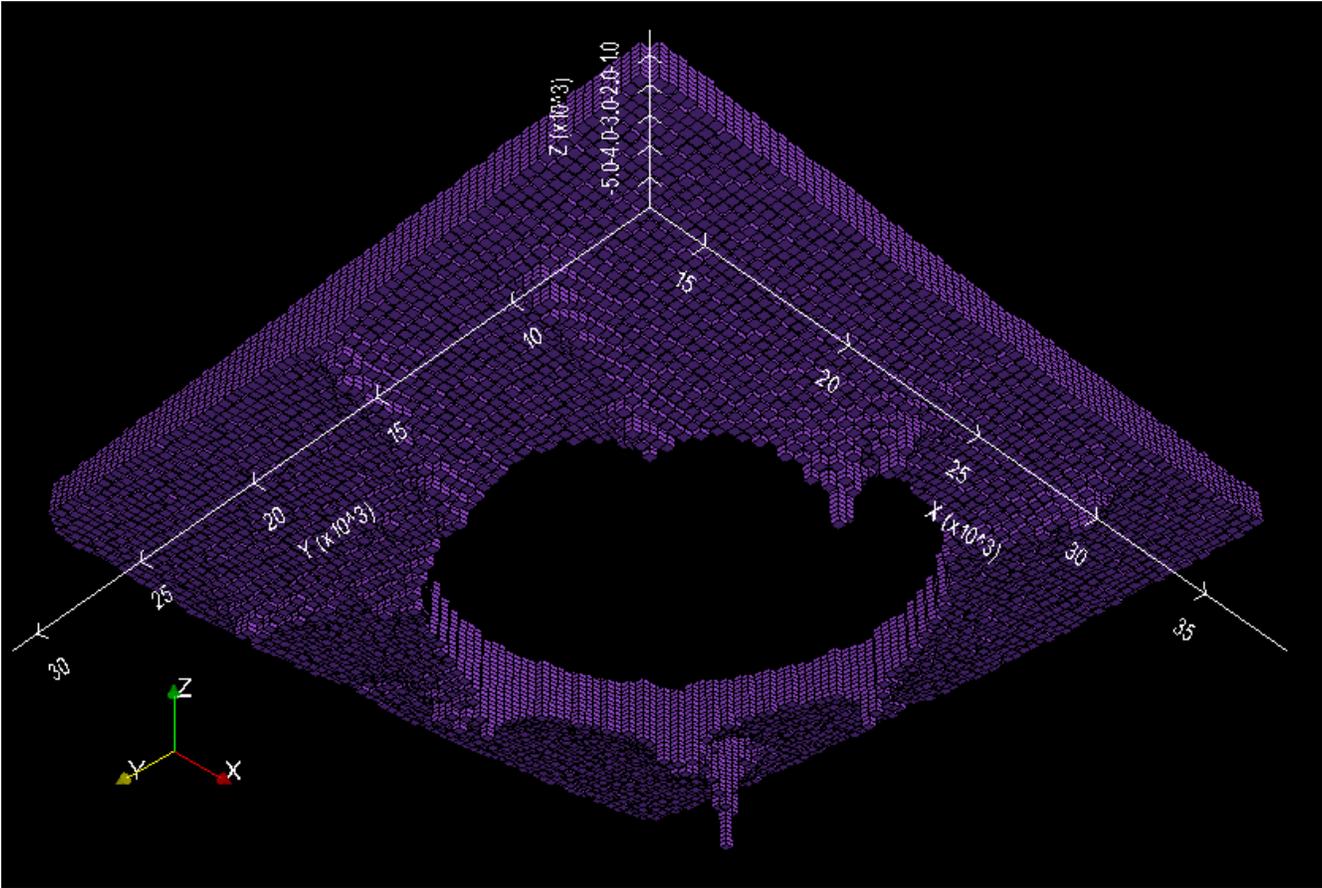


Figura 4.52 Cretácico con vista inferior.

5. ANÁLISIS y DISCUSIÓN

5.1 DATOS SINTÉTICOS

En todas las interpolaciones se pueden observar resultados satisfactorios, pues el error relativo mínimo en cada una es menor del orden de 1% y además se puede corroborar cualitativamente con las imágenes interpoladas, pues se aproximan de manera satisfactoria a la función original. Sin embargo con el error matricial se puede observar que todas tienen un error de borde pues en esta región del dominio no hay información suficiente para que la función pueda interpolar de manera adecuada.

En los kernels que dependen exclusivamente de c ó β se tiene que el error tiene un mínimo local y depende de la magnitud del respectivo parámetro, es decir si el parámetro es relativamente pequeño se tiene un buen margen de error, mientras que si se vuelve grande éste se propaga. Para el caso de aquellas que dependen de c y β de manera simultánea, se tienen regiones con menor error, en el caso de MQ hay un aumento del error mientras más grande sean los parámetros c y β , mientras que en IMQ pasa lo contrario. Y finalmente para SC se tiene que a partir de un cierto valor del parámetro ρ/L el error se vuelve constante, esto nos indica que con un radio pequeño de datos se puede tener la función con el mínimo error.

A partir de la figura 4.1 se puede observar que el comportamiento del error es el mismo cuando se comparan los kernels en un mismo número de datos y es por ello que se puede concluir que los kernels que proporcionan el menor error son IMQ, IQ y GA.

Otro factor importante por analizar es el tiempo de cómputo, pues su comportamiento para diferentes kernels en un mismo número de datos se conserva, en las tablas 4.1 - 4.4 se tiene que con excepción de SC los kernels mantienen un tiempo de cómputo del mismo rango para un cierto número de datos, sin embargo el tiempo de cómputo si depende de los parámetros, pues mientras más grandes sean los parámetros (para todos los kernels) mayor será éste.

5.2 DATOS OBSERVADOS

En el caso de los datos observados se tienen pocos resultados que podríamos considerar favorables, en este caso se tiene que el kernel cuya interpolación se asemeja más a las evidencias geológicas del cráter es IMQ con los parámetros $c = 1.5$ y $\beta = 1$, seguido de los kernels IQ y GA con $c = 0.8$ para ambos.

Se puede apreciar según la tabla 4.5 que el tiempo de cómputo para estos 3 parámetros es aproximadamente el mismo, y por la misma razón el resultado más favorable es el otorgado por IMQ.

6. CONCLUSIONES

Dado que se obtuvieron resultados aceptables con algunos kernels tanto para datos sintéticos como para datos reales, se puede decir que el método de FBR como interpolador es adecuado para una reconstrucción tridimensional de estructuras cóncavas o convexas como es el caso del cráter.

Los kernel cuyo resultado fue más aceptable es IMQ tanto en datos reales como sintéticos, sin embargo se pueden considerar aceptables GA e IQ en los datos sintéticos y teniendo en cuenta que en todos tanto para datos sintéticos como reales, se puede alcanzar un resultado favorable con parámetros pequeños. Sin embargo esto no implica que otros kernels cuyos resultados no fueron benéficos en los datos reales, generen resultados desfavorables para otro tipo de problemas más específicos.

Con respecto al tiempo de cómputo se tiene que para los datos sintéticos varía de manera semejante que para los parámetros óptimos con excepción de SC, sin embargo en los datos reales se tiene una variación muy pequeña entre todos los kernels, esto es debido a que los datos dispersos no están distribuidos de manera estadísticamente uniforme por ser líneas de perfil, por tanto en SC el radio de búsqueda puede aumentar y por tanto el tiempo de cómputo aumenta. Sin embargo como los kernels óptimos solo son GA, IQ e IMQ, el tiempo de cómputo invertido en cualquiera de los tres parámetros es aceptable.

Finalmente en la reconstrucción se tiene una secuencia de estratos muy cercana a las evidencias geológicas del lugar según el modelo de la Figura 2.6, dando resultados favorables para todas las capas, lo que vuelve a corroborar la aplicabilidad del método.

7. RECOMENDACIONES

Se sugiere como primera técnica de optimización el usar un preconditionador específico para el sistema de ecuaciones, uno de ellos es el preconditionador Wavelet el cual transforma la matriz densa en una dispersa en el dominio de la ondícula, para más detalles véase Press et al. [17]

Una vez preconditionada la matriz de coeficientes, se recomienda paralelizar todos los procesos posibles, algunas librerías en diferentes lenguajes traen paralelizado el algoritmo GMRES, también se sugiere hacer una descomposición de dominio, es decir, hacer una partición del dominio y resolver para cada subconjunto de datos.

Con respecto a la aplicación del método se sugiere usarse en estructuras cóncavas o convexas, pues generalmente guardan propiedades de simetría, por ejemplo: cuencas, domos salinos, etc.

Aunque en este proyecto solo se haya utilizado para la interpolación de contactos, también se podría utilizar para interpolar datos de gravimetría o magnetometría con IMQ, pues las anomalías en algunos casos pueden ser cóncavas y con simetría. Se espera que los parámetros tengan un comportamiento similar en dichos casos, sin embargo sería necesario hacer pruebas semejantes a las de este proyecto para asegurar eso.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Álvarez L. W., Álvarez W., Asaro F., and Michel H. V. Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction. *Science* 208:1095–1108., 1980.
- [2] Bell C., Morgan J. V., Hampson G. J., and Trudgill B. Stratigraphic and sedimentological observations from seismic data across the Chicxulub impact basin. *Meteoritics & Planetary Science*, Vol. 39, N. 7, 1-10, 2004.
- [3] Buhmann M. *Radial Basic Functions, Theory and Implementations*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Camargo, C. A. Z., Suarez, G. R., Evidencia sísmica del cráter de impacto de Chicxulub (in Spanish). *Boletín de la Asociación Mexicana de Geofísicos de Exploración*, v. XXXIV, pp. 1-28. 1994.
- [5] Caruso et al. “Utilización de RBFS para la interpolación de Datos Batimétricos”. *Mecánica Computacional Vol XXVIII*, pp. 2373-2383, 2009.
- [6] Collins G.S., Morgan J., Barton P., Christeson G.L., Gulick S., Urrutia-Fucugauchi J., Warner M., Wünnemann K., 2008, Dynamic modeling suggest terrace zone asymmetry in the Chicxulub crater is caused by target heterogeneity. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 270, 221-230.
- [7] De la Cruz L. M., “MQ-RBF Meshless Method for Solving CFD problems using an Object-Oriented Approach”. *Computational Engineering Group, STFC-CSED Daresbury Laboratory and UNAM*, 2008.
- [8] Franke, R., Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Math. Comp.*, 38(157):292–300, 1982.
- [9] Gulick S., Barton P., Christeson G., Morgan J., MacDonald M., Mendoza K., Urrutia-Fucugauchi J., Vermeesch P., Warner M., 2008, Importance of pre-impact crustal structure for the asymmetry of the Chicxulub impact crater. *Nature Geoscience*, v. 1, p. 131-135.
- [10] Gumerov, N.A., Duraiswami, R., Fast radial basis function interpolation via preconditioned Krylov iteration, *SIAM J. Sci. Comput.* 29 (5) 1876–1899, 2007
- [11] Hardy, R.L., “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces”. *J. Geophys. Res.*, 176:1905–1915, 1971.
- [12] Hildebrand A. R., Penfield G.T., Kring D.A., Pilkington M., Camargo-Zanoguera A., Jacob-sen S.B., Boynton W.V., Chicxulub Crater: A possible Cretaceous/Tertiary boundary impact crater on the Yucatan Peninsula, Mexico. *Geology*, 19, 867-871 , 1991.

- [13] Hildebrand, A. R., M. Pilkington, M. Connors, C. Ortiz-Aleman, and R. E. Chavez, Size and structure of the Chicxulub Impact crater on the Yucatan Peninsula, Mexico, *Nature*, 376, 415 – 417, 1995
- [14] Mendoza Cervantes, K. “Mapeo de la estructura del anillo central al interior del cráter de impacto de Chicxulub con base en perfiles sísmicos de reflexión 2D”. Posgrado en Ciencias de la Tierra UNAM., 2006
- [15] Micchelli C. Interpolation of scattered data, distance matrices and conditionally positive definite function. *Constr. Approx.*, 2:11–22, 1986.
- [16] Penfield G. T., Camargo-Zanoguera A., 1981, Definition of a major igneous zone in the central Yucatan platform with aeromagnetism and gravity, in: Technical Program, Abstracts and Bibliographies, 51st Annual Meeting, p. 37, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- [17] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [18] Rebolledo-Vieyra M., Urrutia-Fucugauchi, J., Lopez-Loera H., 2010, Aeromagnetic anomalies and structural model of the Chicxulub multiring impact crater, Yucatan, Mexico. *Rev. Mex. Ciencias Geol.*, 27, 185-195
- [19] Rippa, S. , Interpolation and smoothing of scattered data by radial basis functions, Master's thesis, Tel Aviv University, Israel, 1984.
- [20] Saad, Y. and Schultz, M.H. "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856-869, 1986
- [21] Sharpton V.L., Burke K., Camargo-Zanoguera A., Hall S., Marin L., Urrutia-Fucugauchi J., Chicxulub multiring impact basin: Size and other characteristics derived from gravity analysis. *Science*, 261, 1564-1567, 1993.
- [22] Skala,V., “Incremental Radial Basis Function Computation for Neural Networks”, WSEAS Transactions on Computers, Issue 11, Volume 10, pp. 367-378, 2011.
- [23] Stöeffler D., Artemieva N.A., Ivanov B.A., Hecht L., Kenkemann T., Schmitt R.T., Tagle R.A., Geofísica Wittmann A. Origin and emplacement of the impact formations at Chicxulub, Mexico, as revealed by the ICDP deep drilling at Yaxcopoil-1 and by numerical modeling. *Meteorit. Planet. Sci.*, 39, 1035-1067, 2004.
- [24] Urrutia-Fucugauchi J., Chávez-Aguirre J.M., Pérez-Cruz L., de la Rosa J.L., 2008. Impact ejecta and carbonate sequence in the eastern sector of Chicxulub crater. *Comptes Rend. Geosci.*, 341, 801-810.

- [25] Urrutia-Fucugauchi, J., Camargo-Zanoguera, A., Pérez-Cruz, L. and Pérez-Cruz, G., The Chicxulub multi-ring crater, Yucatán carbonate platform, Gulf of Mexico, *Geofísica Internacional* 50(1):99–127, 2011.
- [26] Wright, G.B., “Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments”, University of Colorado, Thesis, 2003.

ANEXOS

SUBROUTINAS Y SCRIPTS

El siguiente apartado contiene algunos scripts con las subrutinas utilizadas dentro de este proyecto de tesis, todo fue hecho en python. Debe mencionarse que se usó para GMRES una subrutina ya incluida en la librería SCIPY.

SCRIPT 8.1.1 “ERROR.py”

```
#####
#
#####SUBROUTINA ERROR REL#####

#Esta subrutina calcula el error relativo

# Librerias auxiliares

from numpy import shape

def ERROR(Z1,Z2):
    #Numero de datos
    N=shape(Z1)
    n=N[0]
    m=N[1]
    #Diferencia
    error=0.0
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            c=abs(Z1[i][j]-Z2[i][j])
            error=c+error
    error=error/(n*m)
    return error
```

SCRIPT 8.1.2 “NORM_DIF.py”

```
#####  
#  
#####SUBROUTINA NORM_DIF#####  
  
#Esta subrutina genera la NORMA L2 de la diferencia de dos vectores  
  
# Librerias auxiliares  
  
from numpy import dot, sqrt  
  
def NORM_DIF(X,Y):  
    #Diferencia  
    dif=X-Y  
    #Producto punto  
    r=dot(dif,dif)  
    #Cosntantes auxiliares  
    r=sqrt(r)  
    return r
```

SCRIPT 8.1.3 “KERNELS_FBR.py”

```
#####  
#  
#####KERNELS#####  
  
#Este Script contiene subrutinas de los Kernels usados  
#en el Metodo de Interpolacion con Funciones de Base Radial  
  
# Librerias auxiliares  
  
from math import log, exp, sqrt  
  
#####  
#FBR SUAVEZ A TROZOS  
#  
#####  
  
# 1) SMOOTH SPLINES (SS)  
  
def SS(r,betha):  
    #betha debe ser impar y positivo  
    phi=1.0  
    for i in range(betha):  
        phi=r*phi  
    return phi  
  
#####  
#FBR INFINITAMENTE SUAVEZ  
#  
#####  
  
# 3) GAUSSIANA (GA)  
  
def GA(r,c):  
    #c debe ser real  
    cr=c*r  
    cr=-(cr*cr)  
    phi=exp(cr)  
    return phi
```

#####

4) MULTICUADRICA (MQ)

```
def MQ(r,c,betha):
    #c debe ser real
    #betha debe ser impar y positivo
    c=c*c
    r=r*r
    r=r+c
    r=sqrt(r)
    phi=1.0
    for i in range(betha):
        phi=r*phi
    return phi
```

#####

5) INVERSA MULTICUADRICA (IMQ)

```
def IMQ(r,c,betha):
    #c debe ser real
    #betha debe ser impar y positivo
    c=c*c
    r=r*r
    r=r+c
    r=sqrt(r)
    phi=1.0
    for i in range(betha):
        phi=r*phi
    phi=1.0/phi
    return phi
```

#####

6) INVERSA CUADRATICA (IQ)

```
def IQ(r,c):
    #c debe ser real
    c=(r*c)
    c=c*c
    phi=(1.0+c)
    phi=1.0/phi
    return phi
```

#####

7) SOPORTE COMPACTO (CS)

```
def CS(r,rho):  
    # rho debe ser real y positivo  
    r=r/rho  
    phi=(1.0-r)  
    phi=phi*phi*phi*phi  
    phi=phi*(1.0 + 4.0*r)  
    return phi
```

SCRIPT 8.1.4 “MATRIX_FBR.py”

```
#####
#
#####MATRIX#####

#Este Script contiene subrutinas de los Matrices de coeficientes usadas en
# el Metodo de Interpolacion con Funciones de Base Radial

# Librerias auxiliares

from numpy import zeros, ones, savetxt
from NORM_DIF import *
from KERNELS_FBR import *

##### MATRICES DE COEFICIENTES #####

#####
#FBR SUAVEZ A TROZOS
#
#####

# 1) SMOOTH SPLINES (SS)

def MATRIXSS(N,XY,betha):
    #Matriz base
    PHI=ones((N,N))
    #Construccion
    for i in range(N):
        PHI[i][i]=0.0
        for j in range(i):
            r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
            PHI[i][j]=SS(r,betha)
            PHI[j][i]=PHI[i][j]
    return PHI
```

```
#####
#FBR INFINITAMENTE SUAVEZ
#
#####
```

3) GAUSSIANA (GA)

```
def MATRIXGA(N,XY,c):
    #Matriz base
    PHI=ones((N,N))
    #Construccion
    for i in range(N):
        for j in range(i):
            r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
            PHI[i][j]=GA(r,c)
            PHI[j][i]=PHI[i][j]
    return PHI
```

```
#####
```

4) MULTICUADRICA (MQ)

```
def MATRIXMQ(N,XY,c,betha):
    #Matriz base
    PHI=ones((N,N))
    #Construccion
    for i in range(N):
        t=1.0
        for m in range(betha):
            t=c*t
            PHI[i][i]=t
        for j in range(i):
            r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
            PHI[i][j]=MQ(r,c,betha)
            PHI[j][i]=PHI[i][j]
    return PHI
```

```
#####
```

5) INVERSA MULTICUADRICA (IMQ)

```
def MATRIXIMQ(N,XY,c,betha):
    #Matriz base
```

```

PHI=ones((N,N))
#Construccion
for i in range(N):
    t=1.0
    for m in range(betha):
        t=c*t
    PHI[i][i]=1.0/t
    for j in range(i):
        r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
        PHI[i][j]=IMQ(r,c,betha)
        PHI[j][i]=PHI[i][j]
return PHI

```

#####

6) INVERSA CUADRATICA (IQ)

```

def MATRIXIQ(N,XY,c):
    #Matriz base
    PHI=ones((N,N))
    #Construccion
    for i in range(N):
        for j in range(i):
            r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
            PHI[i][j]=IQ(r,c)
            PHI[j][i]=PHI[i][j]
    return PHI

```

#####

7) SOPORTE COMPACTO (CS)

```

def MATRIXCS(N,XY,rho):
    #Delimitar los puntos
    #Matriz base
    PHI=zeros((N,N))
    #Construccion
    c=-1
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            c=c+1
            r=NORM_DIF(XY[i,0:2],XY[j,0:2])
            if r/rho <= 1.0:
                PHI[i][j]=CS(r,rho)
    return PHI

```

SCRIPT 8.1.5 "SOL_FBR.py"

```
#####
##### SOL FBR #####

#Este Script contiene subrutinas para la resolucion de la Interpolacion con
#funciones de base radial

# Librerias auxiliares

from numpy import zeros, ones
from NORM_DIF import *
from KERNELS_FBR import *
from MATRIX_FBR import *
import scipy.sparse.linalg

##### RESOLUCION DE INTERPOLACION #####

#####
#FBR SUAVEZ A TROZOS
#
#####

# 1) SMOOTH SPLINES (SS)

def SOL_SS(XY,f,B,betha):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)
    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXSS(Nxy,XY,betha)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
    S=ones(N)
    for i in range(N):
        s=0.0
        X1=B[i,:]
        for j in range(Nxy):
            X2=XY[j,:]
            r=NORM_DIF(X1,X2)
            phi=SS(r,betha)
```

```

        s=(LAMBDA[j]*phi)+s
        S[i]=s
    SOLUCION=zeros((N,3))
    SOLUCION[:,0:2]=B
    SOLUCION[:,2]=S
    return SOLUCION

```

```

#####
#FBR INFINITAMENTE SUAVEZ
#
#####

```

3) GAUSSIANA (GA)

```

def SOL_GA(XY,f,B,c):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)

    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXGA(Nxy,XY,c)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
    S=ones(N)
    for i in range(N):
        s=0.0
        X1=B[i,:]
        for j in range(Nxy):
            X2=XY[j,:]
            r=NORM_DIF(X1,X2)
            phi=GA(r,c)
            s=(LAMBDA[j]*phi)+s
        S[i]=s
    SOLUCION=zeros((N,3))
    SOLUCION[:,0:2]=B
    SOLUCION[:,2]=S
    return SOLUCION

```

#####

4) MULTICUADRICA (MQ)

```
def SOL_MQ(XY,f,B,c,betha):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)
    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXMQ(Nxy,XY,c,betha)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
    S=ones(N)
    for i in range(N):
        s=0.0
        X1=B[i,:]
        for j in range(Nxy):
            X2=XY[j,:]
            r=NORM_DIF(X1,X2)
            phi=MQ(r,c,betha)
            s=(LAMBDA[j]*phi)+s
        S[i]=s
    SOLUCION=zeros((N,3))
    SOLUCION[:,0:2]=B
    SOLUCION[:,2]=S
    return SOLUCION
```

#####

5) INVERSA MULTICUADRICA (IMQ)

```
def SOL_IMQ(XY,f,B,c,betha):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)
    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXIMQ(Nxy,XY,c,betha)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
```

```

S=ones(N)
for i in range(N):
    s=0.0
    X1=B[i,:]
    for j in range(Nxy):
        X2=XY[j,:]
        r=NORM_DIF(X1,X2)
        phi=IMQ(r,c,betha)
        s=(LAMBDA[j]*phi)+s
    S[j]=s
SOLUCION=zeros((N,3))
SOLUCION[:,0:2]=B
SOLUCION[:,2]=S
return SOLUCION

```

#####

6) INVERSA CUADRATICA (IQ)

```

def SOL_IQ(XY,f,B,c):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)
    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXIQ(Nxy,XY,c)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
    S=ones(N)
    for i in range(N):
        s=0.0
        X1=B[i,:]
        for j in range(Nxy):
            X2=XY[j,:]
            r=NORM_DIF(X1,X2)
            phi=IQ(r,c)
            s=(LAMBDA[j]*phi)+s
        S[i]=s
    SOLUCION=zeros((N,3))
    SOLUCION[:,0:2]=B
    SOLUCION[:,2]=S
    return SOLUCION

```

#####

7) SOPORTE COMPACTO (CS)

```
def SOL_CS(XY,f,B,rho):
    #Numero de datos (filas)
    Nxy=len(XY)
    N=len(B)
    #Reserva espacio en memoria para el sistema de ec
    LAMBDA=ones(Nxy)
    #Importa matriz de coeficientes
    PHI=MATRIXCS(Nxy,XY,rho)
    LAMBDA=scipy.sparse.linalg.gmres(PHI,f)
    LAMBDA=LAMBDA[0]
    #Interpolacion
    S=zeros(N)
    for i in range(N):
        s=0.0
        X1=B[i,:]
        for j in range(Nxy):
            X2=XY[j,:]
            r=NORM_DIF(X1,X2)
            if r/rho <= 1.0:
                phi=CS(r,rho)
                s=(LAMBDA[j]*phi)+s
        S[i]=s
    SOLUCION=zeros((N,3))
    SOLUCION[:,0:2]=B
    SOLUCION[:,2]=S
    return SOLUCION
```