



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulaciones de estrellas bosón-fermión

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
DANIEL SHEINBAUM FRANK

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA

2013





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Sheinbaum
Frank
Daniel
29761441
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
408025667

2. Datos del tutor

Dr.
Miguel
Alcubierre
Moya

3. Datos sinodal 1

Dr.
Dario
Núñez
Zúñiga

4. Datos sinodal 2

Dr.
Tonatiuh
Matos
Chassin

5. Datos sinodal 3

Dra.
Argelia
Bernal
Bautista

6. Datos sinodal 4

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

7. Datos del trabajo escrito

Simulación de estrellas bosón-fermión
94 p
2013

Agradecimientos

Al Dr. Miguel Alcubierre, inductor de imaginación, le agradezco el haberme inspirado a estudiar relatividad, así como el largo tiempo y el conocimiento que me confirió durante la realización de este trabajo.

A mis sinodales Dr. Tonatiuh Matos, Dr. Dario Núñez, Dra. Argelia Bernal y Dr. Jerónimo Cortez, les agradezco la revisión de esta tesis y sus comentarios sobre el trabajo realizado.

A mis padres Mayra y Julio, quienes siempre me han tenido fe y me dieron todo lo que pude desear y muchísimo más, les agradezco su inagotable paciencia y dedicación a su hijo tormentoso y enfermizo, lo mejor de mi proviene de ustedes. Les dedico éste y todos mis futuros trabajos, ya que estos son tan mérito suyo como mío.

A Tamara y Sergio, quienes siempre han sido para mi el ejemplo a seguir, les agradezco haberme enseñado como andar sobre el camino correcto. Su excelente ejemplo es indispensable para mi.

A Karina, por la felicidad que me provoca su existencia, por llenarme de besos y risas así como haberme dado un futuro que parecía irreal, le agradezco tolerar mis diálogos balbuceantes y escuchar mis ideas ridículas como si fueran interesantes. Le dedico también este trabajo.

A Dan Frank y la familia Frank Bolton por haberme dado un hogar muy divertido donde vivir y llenarlo de buenos tiempos.

A Katya, Joaquín, Jerónimo y Bernardo les agradezco todo lo que hicieron por mi en incontables ocasiones así como nuestras pláticas profundas y divertidas.

A mis abuelos Annie, Moises, Martha, Nathán, Carlos y Guadalupe por las cosas que aprendí de ellos y por haberme dado un sinnúmero de experiencias felices así como todo el apoyo que me brindaron. Sin ellos esto hubiera sido imposible.

A los Imaz Sheinbaum y los Garcia Sheinbaum les agradezco todas las risas y experiencias que hemos compartido.

A Maru, Javier e Ivan y la familia Musalem, quienes me volvieron parte de la familia y los considero como la mía.

A la Dra. Patricia Volkow Fernandez le agradezco todo lo que hizo por mi y por siempre sacarme de los distintos males que padecí.

A mis amigos Javier y Corinto, quienes me enseñaron a pensar mejor, les agradezco haber hecho la carrera excesivamente interesante y divertida así como los geniales momentos que pasamos juntos.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Introducción, 3+1 y Estrellas Bosón-Fermión	3
1.2. Notación y Convenciones	5
1.3. Relatividad General	5
1.4. Derivada de Lie	7
1.5. Simetría esférica	7
1.6. Formalismo 3+1	9
1.6.1. Curvatura Extrinseca	11
1.6.2. Constricciones	12
1.7. Campos Escalares	13
1.8. Fluidos	14
1.9. Estrellas Bosón-Fermión	17
1.10. Agujeros negros y colapso gravitacional	18
2. Métodos numéricos	21
2.1. Introducción a métodos numéricos	21
2.2. Diferencias finitas	21
2.3. Estabilidad, consistencia y convergencia	23
2.4. Análisis de convergencia	24
2.5. Método de la secante	26
2.6. Métodos de líneas	26
2.6.1. Método de Euler	27
2.6.2. Método Crank-Nicholson iterado	27
2.6.3. Método de Runge-Kutta	28
3. Datos iniciales	29
3.1. Datos Iniciales	29
3.2. Datos temporalmente simétricos	30
3.2.1. Espacio-tiempo estático esféricamente simétrico	30
3.3. Coordenadas polares de área	30
3.4. Datos iniciales de bosones	32
3.5. Datos iniciales de fermiones	33
3.6. Condición maximal de lapso	35
3.7. Condiciones a la frontera	35

3.7.1.	Condiciones en el origen	36
3.7.2.	Condiciones al infinito	36
4.	Ecuaciones de evolución y horizontes aparentes	39
4.1.	Ecuaciones de evolución en relatividad numérica	39
4.1.1.	Ecuaciones ADM	39
4.1.2.	Formulación BSSN	40
4.1.3.	BSSN en simetría esférica	43
4.2.	Ecuaciones de Euler	43
4.2.1.	Ecuaciones de Euler para relatividad general	43
4.2.2.	Ecuaciones de Euler en el formalismo 3+1	46
4.2.3.	Ecuaciones de Euler en simetría esférica	48
4.3.	Condiciones de norma	49
4.3.1.	Lapso maximal	49
4.3.2.	Lapso maximal en simetría esférica	50
4.3.3.	Estiramiento de las hiper-superficies	50
4.3.4.	Vector de corrimiento Gamma driver	51
4.4.	Horizontes aparentes	53
4.4.1.	Horizontes aparentes en simetría esférica	54
5.	Resultados: Datos iniciales	55
5.1.	Convergencia de datos iniciales	63
5.2.	Datos iniciales perturbados	63
5.3.	Análisis de estabilidad	64
6.	Resultados: Evoluciones	67
6.1.	Evolución: caso estable	67
6.2.	Evolución: caso inestable	72
6.3.	Evolución: caso inestable con vector de corrimiento	77
7.	Conclusiones	83

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción, 3+1 y Estrellas Bosón-Fermión

La relatividad numérica es un área de investigación en la cual se emplean grandes y diversas áreas de las matemáticas. Por una parte, la teoría general de la relatividad es enunciada en el lenguaje de la geometría pseudo-riemanniana, en la cual se han descubierto una serie de fenómenos como el colapso gravitacional que necesitan también de la topología diferencial para poderse explicar de forma generalizada. Cabe mencionar que gran parte del desarrollo de la geometría riemanniana, en general, ha sido por su relación con la relatividad general, ya que éstas son casi contemporáneas. En sí, el estudio de la geometría pseudo-riemanniana necesita del desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, la cual es por excelencia la principal herramienta de las matemáticas aplicadas.

La parte numérica es generalmente menospreciada por algunos miembros de la comunidad científica arguyendo falta de rigor matemático. Sin embargo, el surgimiento del análisis numérico en el siglo XIX y los teoremas presentados por algunos de los grandes matemáticos del siglo XX como Courant, Jordan, Lax y Von Neuman, entre otros, deberían bastar como clara evidencia del rigor matemático que tienen las simulaciones numéricas, siempre y cuando se haya hecho el análisis que le corresponde. También es normal que algunos investigadores consideren la parte numérica como un segundo plano, algo poco relevante en el camino para encontrar resultados, como si se pudiera cruzar a través de ésta rápidamente para llegar a las respuestas de los problemas planteados. Esta visión está, en mi opinión, muy equivocada. Para empezar, generalmente se necesita desarrollar nuevos métodos computacionales para resolver muchos de los problemas de interés actual. Esto ha sido una constante a lo largo de la historia de la computación científica, debido a que importantes métodos numéricos han surgido por la necesidad de resolver problemas de otras áreas a través de las simulaciones.

Aún para problemas sencillos hay que tener un conocimiento general de los métodos numéricos empleados, ya que se llega a utilizar muchos de estos, como se hará evidente a lo largo de este trabajo. Para derribar completamente la idea errada, bastan ca-

sos como el de la colisión de dos agujeros negros en órbita realizada por Pretorius[23], de lo cual era imposible obtener un resultado de un tratamiento analítico. También podemos mencionar los fenómenos críticos en el colapso gravitacional descubierto por Choptuik[10], el cual usando simulaciones numéricas realizó el descubrimiento de un nuevo fenómeno, ni remotamente predicho por ningún análisis teórico estandar. Por último mencionamos la investigación desarrollada por el grupo de relatividad numérica del *Instituto de Ciencias Nucleares* de la UNAM[21], el cual muestra el límite de las implicaciones del teorema de no pelo (un resultado analítico).

Específicamente el objetivo de este trabajo es la simulación computacional de los espacio-tiempos generados por estrellas bosón-fermión en simetría esférica. En términos de ecuaciones diferenciales parciales es el caso de las ecuaciones de Einstein acopladas a la ecuación de Klein-Gordon y a las ecuaciones TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) en simetría esférica.

Las razones para desarrollar este trabajo tienen tanto un carácter matemático como uno físico. Por el lado matemático, es un problema donde las ecuaciones involucradas tienen muchas simetrías y en general un comportamiento conocido cuando se está trabajando en simetría esférica, lo cual hace de este proyecto un buen primer problema a resolver para incursionar en relatividad numérica y en el análisis numérico, ya que no se necesita utilizar métodos numéricos complicados y es fácil desarrollarlo, pues el comportamiento de las soluciones da una primera idea si se ha hecho bien el trabajo o no. sin embargo es un trabajo donde se requiere conocimiento de las áreas matemáticas antes mencionadas y que permite desarrollarse en éstas.

La parte física es un poco más atractiva en cuanto a la investigación. Las Ecuaciones TOV son las que describen una estrella estática esféricamente simétrica formada por un fluido perfecto (un fluido sin flujo de calor y sin viscosidad), esto es una buena aproximación inicial a la materia que constituye a algunas de las estrellas y/o galaxias visibles en el universo. Las ecuaciones TOV representan la parte fermiónica en los datos iniciales de las estrellas de bosones y fermiones, esto es porque el fluido está hecho generalmente de átomos los cuales tienen protones, neutrones y electrones. Estos pertenecen a la familia de partículas elementales conocidas como fermiones, nombrados así por tener espín semi-entero y obedecer el modelo estadístico del físico E.Fermi, ganador del premio Nobel. La parte bosónica corresponde a la ecuación de Klein-Gordon y su solución, un campo escalar definido en todo el espacio-tiempo, representa el comportamiento colectivo de las partículas bosónicas. Algunos ejemplos de partículas bosónicas son los fotones, los núcleos de helio, los piones y los gravitones. Todos estos tienen espín entero y obedecen la estadística de N. Bose.

Esto es de interés ya que la materia tipo bosónica es una de las posibles candidatas a ser la materia oscura, 5 veces más abundante que la materia visible(fermiónica) en el universo y la que se cree que da la estructura que permite la formación de galaxias en el universo[2],[20]. En conjunto las estrellas de bosones y fermiones son un modelo que describe el comportamiento de distintos fenómenos astrofísicos como galaxias, siendo las estrellas los fermiones y los bosones la materia oscura así como

una configuración de una estrella hecha de fermiones (como todas las conocidas) y un halo de materia oscura a su alrededor.

1.2. Notación y Convenciones

En este trabajo se seguirá las convenciones del libro de Alcubierre [6] las cuales son las siguientes:

Las unidades de las ecuaciones que se utilizarán en este trabajo son $c = G = 1$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G la constante gravitacional de Newton.

Los índices de los tensores irán de 0 a 3, donde el 0 representa el índice asociado a la coordenada temporal. Índices griegos ($\mu, \nu, \sigma, \lambda$) correrán de 0 a 3 mientras que índices latinos (a, b, c, d) correrán de 1 a 3, es decir sólo representaran índices espaciales. Se utilizará la convención de la suma de Einstein donde índices repetidos, uno contravariante (A^μ) y uno covariante (B_μ) implican la suma sobre todos los índices ($A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$). La signatura del espacio-tiempo será $(-1, +1, +1, +1)$.

Las derivadas parciales se abreviarán como $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ donde μ quiere decir respecto a x^μ . Como es usual en geometría pseudo-riemanniana la derivada covariante (utilizando la conexión afín) se denotará ∇_μ . Para las derivadas covariantes en tres dimensiones espaciales se utilizará D_j y $\mathcal{L}_{\vec{V}}$ será la derivada de Lie respecto al campo vectorial \vec{V} . Éstas serán muy empleadas en el formalismo 3+1.

Finalmente se usará una convención más que no viene en [6], objetos geométricos y topológicos serán remarcados cuando se hable solamente del objeto matemático y no se trate de las componentes (*i.e* \mathbf{A} , sin componentes, $A_\lambda^{\mu\nu}$ con componentes).

1.3. Relatividad General

La teoría de la relatividad general postulada por Albert Einstein en 1915 [14] supone que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable pseudo-riemanniana (\mathbf{M}, \mathbf{g}) , con \mathbf{M} una variedad Hausdorff (donde el axioma de separación de Hausdorff es válido), sus cartas son $-C^\infty$, real y simplemente conexa. Suponemos que $\dim \mathbf{M} = 4$, este valor para la dimensión es consistente con la realidad física observada. La parte pseudo-riemanniana corresponde a $\mathbf{g} \equiv g_{\mu\nu}$ un campo tensorial $(0, 2)$ que sea al menos clase C^2 , simétrico (*e.g.* $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), no degenerado ($g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = 0 \forall B^\nu \iff A^\mu \equiv 0$), el cual está globalmente definido sobre \mathbf{M} . \mathbf{g} funge como *tensor métrico* sobre \mathbf{M} , lo que permite hablar de magnitudes en distancias y tiempos sobre \mathbf{M} . Al ser \mathbf{g} el tensor métrico suponemos que este solo depende de las coordenadas asociadas a las cartas que parametrizan a \mathbf{M} , es decir $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x^\nu)$. Esta definición de \mathbf{g} es independiente de las coordenadas elegidas. Además de lo anterior, (\mathbf{M}, \mathbf{g}) debe satisfacer el principio de equivalencia cuya formulación matemática presentamos a continuación:

$\forall p \in \mathbf{M}$, $\exists \{x^\alpha\}$ atlas coordenado de \mathbf{M} alrededor de p tal que $\mathbf{g}|_{(p, \{x^\alpha\})} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ también conocida como la métrica de Minkowski o métrica de espacio-tiempo plano.

Finalmente la última condición que debe satisfacer el espacio-tiempo son las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el *tensor de curvatura de Einstein* y $T_{\mu\nu}$ es conocido como el *tensor de energía-momento*, ambos simétricos ($G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$). Por definición

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el *tensor de curvatura de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma, \quad (1.3)$$

y su *traza*

$$R = R^\mu_\mu.$$

donde $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ es el *tensor de curvatura de Riemann* y se define como:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho. \quad (1.4)$$

Finalmente, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los coeficientes asociados a la *conexión de Levi-Civita*, también conocidos como *símbolos de Christoffel* y se definen como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}], \quad (1.5)$$

los cuales de aquí en adelante son simétricos. Por completés mencionamos que $g^{\alpha\beta}$ es la métrica *inversa* y se define como $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ con δ_ν^μ la *delta de Kronecker* entre μ y ν .

Por ser (\mathbf{M}, \mathbf{g}) pseudo-riemanniana, en ésta se satisfacen las *identidades de Bianchi*, las cuales en términos de $G_{\mu\nu}$ se escriben:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

lo que da 4 ecuaciones diferenciales de $g_{\mu\nu}$ por lo cual, realmente se tienen solamente 6 ecuaciones de Einstein independientes entre si.

Lo anterior tiene que ver con el principio de Covariancia general, el cual postula que las leyes físicas deben ser expresadas de forma independiente de las coordenadas, por lo que como se menciona en [6], una solución a las ecuaciones de Einstein debe entenderse como la clase de equivalencia de métricas 4-dimensionales que se relacionan entre si mediante una transformación de coordenadas (una reparametrización de (\mathbf{M}, \mathbf{g})).

$T^{\mu\nu}$ físicamente representa el flujo de la componente μ del 4-momento de la materia a lo largo de la superficie x^ν constante [24]. Físicamente se espera que $T^{\mu\nu}$ se conserve localmente, lo que se impone como $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Esto es lo que llevó a Einstein a formular sus ecuaciones en términos de \mathbf{G} , ya que con la igualdad entre \mathbf{G} y \mathbf{T} , las identidades de Bianchi implican la conservación local de \mathbf{T} (conservación local de energía y momento).

Un tratamiento mucho más amplio y completo de relatividad general y su tratamiento matemático puede consultarse en [22],[29],[9],[11] y [24].

1.4. Derivada de Lie

El concepto de la derivada de Lie de un tensor es una forma de describir un cambio en éste al cambiar de punto sobre la variedad, ya que la base del espacio tangente a la variedad en un punto en general no es la misma en cada punto. Sea \mathbf{M} una variedad diferencial y sea $\{\Phi_t\}$ una familia de difeomorfismos parametrizados por t .

La *Derivada de Lie* de un tensor $\Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$ a lo largo de un campo vectorial \vec{V} se define como:

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}\Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi_t^{-1}(\Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}(\Phi(p)) - \Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}(p))}{t} \right], \quad (1.7)$$

donde $p = x^\mu$ tal que $\vec{V} = V^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$. Esto significa que p pertenece a la curva integral de \vec{V} definida por t .

La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{V}}\Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} &= (V^\alpha \partial_\alpha) \Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \\ &\quad - (\partial_\beta V^{\mu_1}) \Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\beta\mu_2\dots\mu_m} - \dots - (\partial_\beta V^{\mu_m}) \Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\beta} \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\beta) \Sigma_{\beta\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} + \dots + (\partial_{\nu_n} V^\beta) \Sigma_{\nu_1\nu_2\dots\beta}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Para un vector U^ν su derivada de Lie a lo largo de V es :

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}U = V^\alpha \nabla_\alpha U^\mu - U^\alpha \nabla_\alpha V^\mu = [V, U]^\mu \quad (1.9)$$

y para el tensor métrico utilizando la conexión de Levi-Civita tenemos,

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu. \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones nos ayudarán mucho para las definiciones de 3+1 y la simetría esférica. Para más detalles sobre la derivada de Lie se puede consultar [6] y [9].

1.5. Simetría esférica

Un campo vectorial ξ^μ definido sobre (\mathbf{M}, \mathbf{g}) se denomina *campo de Killing* si :

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (1.11)$$

Que por definición claramente equivale a $\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu} = 0$.

Los campos de Killing definen simetrías en el espacio-tiempo y de igual manera, si queremos que el espacio-tiempo tenga simetrías, entonces suponemos que sobre este se pueden definir los campos de Killing que las representan. Intuitivamente la simetría esférica es fácil de visualizar, tómese \mathbb{S}^2 , la esfera en 2 dimensiones y parémonos en un punto p de ésta, luego apliquemos una rotación por el ángulo polar que nos lleve de p a q . Parados en q la esfera se ve idéntica, tanto por fuera como sobre ella a como se veía cuando estábamos parados en p . Si ahora aplicamos una rotación por el ángulo azimutal que nos lleve de q a r pasará exactamente lo mismo.

Un espacio-tiempo es esféricamente simétrico si sobre él se pueden definir 3 campos de Killing $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ y $U^{(3)}$ tales que:

$$[U^{(1)}, U^{(2)}] = U^{(3)}, \quad (1.12)$$

$$[U^{(2)}, U^{(3)}] = U^{(1)}, \quad (1.13)$$

$$[U^{(3)}, U^{(1)}] = U^{(2)}, \quad (1.14)$$

lo cual nos da el *Álgebra de Lie* asociada a $SO(3)$, el grupo de rotaciones en 3 dimensiones. Utilizaremos el siguiente resultado debido a Frobenius para incorporar con mayor fuerza la simetría esférica del espacio tiempo.

Teorema (Frobenius) 1 *Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Sea $T_p^m M$ un subespacio m -dimensional de $T_p^n M$ (espacio tangente de M en p) con $m < n$. Sea $W = \bigcup_{p \in M} T_p^m M$. W tiene curvas integrales asociadas que forman subvariedades m -dimensionales si $\forall V^\alpha, Z^\alpha \in W$, $[V, Z]^\alpha \in W$.*

Utilizando los vectores asociados al álgebra de Lie de $SO(3)$ para generar los subespacios tangentes $T_p^m M$ que conforman W podemos foliar al espacio-tiempo en 2-esferas como sus subvariedades. En particular por ser las subvariedades 2-esferas se puede probar que existen coordenadas x^a, x^b, x^i, x^j tales que la métrica del espacio-tiempo completo se puede escribir como:

$$ds^2 = g_{ab}(x^a, x^b)dx^a dx^b + f(x^a, x^b)\gamma_{ij}(x^i, x^j)dx^i dx^j, \quad (1.15)$$

con γ_{ij} la métrica de las 2-esferas en términos de las coordenadas x^i, x^j .

Escogemos coordenadas $(x^i, x^j) = (\theta, \phi)$ tales que la métrica de las 2-esferas se escribe

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.16)$$

y elegimos $(x^a, x^b) = (t, r)$ tales que podemos escribir la métrica del espacio-tiempo completo como

$$ds^2 = g_{00}(t, r)dt^2 + 2g_{0r}(t, r)drdt + A(t, r)dr^2 + r^2 B(t, r)d\Omega^2, \quad (1.17)$$

que corresponde a la métrica más general de un espacio-tiempo esféricamente simétrico[6] y con la que atacaremos el problema particular a resolver en este trabajo.

Para ver distintas versiones (y sus pruebas) del teorema de Frobenius, así como resultados de topología diferencial y cálculo en variedades útiles para la teoría de la relatividad y la física en general se recomienda al lector revisar [29]. Para ver con más detalle las ideas de esta sección se recomienda [9], que muestra estas ideas con gran claridad.

1.6. Formalismo 3+1

Si conectamos las definiciones anteriores con las ecuaciones de Einstein:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu}, \\
 G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \\
 R_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}, \\
 R &\equiv R_{\mu}^{\mu}, \\
 R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\rho}, \\
 \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}].
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Es fácil ver que las ecuaciones de Einstein son 10 ecuaciones en derivadas parciales a 2do orden acopladas no lineales con miles de términos. Incluso en el vacío las únicas soluciones exactas que se conocen son las que asumen la existencia de simetrías asociadas al espacio-tiempo. Por esto es indispensable el uso de recursos computacionales y el análisis numérico para encontrar soluciones más generales. El formalismo 3+1 es uno de varios caminos que se han desarrollado para formular los problemas de relatividad general, cada uno con sus ventajas y desventajas en la resolución numérica de problemas.

El formalismo 3+1 es el más empleado por la comunidad practicante de relatividad numérica. Existen diversos textos que presentan el formalismo 3+1 y su desarrollo, en este trabajo se seguirá sumamente de cerca el texto de Alcubierre, M. [6] y se seguirán las convenciones de su notación para la presentación de 3+1. Al lector interesado en ahondar mucho más profundo en el formalismo 3+1 se le recomienda que consulte ese texto.

Las ecuaciones de campo de Einstein como han sido presentadas hasta ahora están escritas en forma covariante, independiente de las coordenadas (observadores). Esta forma no distingue entre espacio y tiempo por lo que no es la expresión más óptima para resolver problemas en los que se conocen las condiciones iniciales de un sistema y se desea estudiar la evolución en el tiempo de éste, conocido en ecuaciones diferenciales parciales como el problema de Cauchy, para el cual se necesita una clara separación entre tiempo y espacio. El formalismo 3+1 separa al espacio-tiempo en 3 dimensiones de espacio mas 1 dimensión de tiempo, lo que nos permite tratar

muchos problemas en relatividad general como problemas de Cauchy.

Para hacer la separación en 3+1 necesitamos primero las siguientes definiciones :

Dominio de dependencia futura: Sea $A \subset \mathbf{M}$, $D^+(A) = \{\text{eventos } p \in \mathbf{M} \text{ que están completamente determinados por los eventos } q \in A \}$.

Dominio de dependencia pasada: Sea $A \subset \mathbf{M}$, $D^-(A) = \{\text{eventos } p \in \mathbf{M} \text{ que determinan completamente los eventos } q \in A \}$.

Globalmente hiperbólico: Un espacio-tiempo \mathbf{M} es globalmente hiperbólico si $\exists \Sigma \subset \mathbf{M}$, hiper-superficie espacialoide tal que la unión del futuro causal y pasado causal de ésta sea el espacio-tiempo completo, es decir $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = \mathbf{M}$. A Σ se le conoce como *superficie de Cauchy*.

Existen muchos ejemplos de espacio-tiempos que no son globalmente hiperbólicos tales como los que tienen una singularidad topológica desnuda (*i.e* sin *horizonte de eventos*). En adelante supondremos que todos los espacio-tiempos de los que hablemos son globalmente hiperbólicos.

Si \mathbf{M} es globalmente hiperbólico, se puede hacer una foliación de éste, en hiper-superficies espacialoides Σ 's tales que cada Σ sea una variedad pseudo-riemanniana en sí. A cada una de estas la relacionamos con el valor de un parametro t . Nótese que t no corresponde necesariamente al tiempo medido por algún observador.

Tómese dos hiper-superficies aledañas Σ_t y Σ_{t+dt} .

- El lapso de tiempo propio entre las dos hiper-superficies medido por los observadores que se mueven en la dirección normal a éstas, también conocidos como *observadores Eulerianos*:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (1.19)$$

Donde α se le llama la función de lapso.

- La relación entre las coordenadas de los observadores eulerianos y las líneas de coordenadas constantes:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^i) dt. \quad (1.20)$$

A $\beta^i = \vec{\beta}$ se le conoce como el 3-vector de corrimiento.

- Cada hiper-superficie es pseudo-riemanniana por lo que tiene su 3-métrica γ_{ij} con la cual se pueden medir distancias propias dentro de la hiper-superficie misma:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.21)$$

La foliación del espacio-tiempo no es única, es más, la manera de foliarlo es esencialmente cuestión de elección. Esto también ocurre con las líneas de coordenadas constantes. Por esto la función de lapso y el vector de corrimiento son libres y se les

conoce como funciones *de norma*.

En términos de estas cantidades podemos escribir las componentes del tensor métrico \mathbf{g} :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^k \beta_k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Con esto podemos escribir el intervalo como :

$$ds^2 = \left(-\alpha^2 + \beta_k \beta^k \right) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.24)$$

Sea n^μ el vector unitario normal a las hiper-superficies. En las coordenadas que utilizan a $\gamma_{ij}, \alpha, \vec{\beta}$ podemos escribir las componentes de n^μ como:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (1.25)$$

Al ser n^μ unitario y normal a las hiper-superficies Σ 's, éste corresponde a la 4-velocidad de los observadores eulerianos (por definición de estos y de 4-velocidad). En términos de $g_{\mu\nu}$ y n^μ podemos definir las cantidades anteriores, por ejemplo, la 3-métrica asociada a las hiper-superficies puede verse como la proyección de la 4-métrica sobre la hiper-superficie:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (1.26)$$

Notese que $\gamma_{\mu\nu}$ es un 4-tensor cuyas componentes temporales en coordenadas 3+1 son triviales y sus componentes espaciales son γ_{ij} . Es muy importante aclarar que la 3-métrica γ_{ij} tiene inversa γ^{ij} y que ésta en su carácter de métrica puede bajar y subir índices de 3-tensores, es decir, de tensores con índices latinos. Para definir α y $\vec{\beta}$ en términos de \vec{n} puede hacerse algo similar.

1.6.1. Curvatura Extrínseca

Cuando uno trabaja en geometría pseudo-riemanniana, usualmente se habla de propiedades intrínsecas de los objetos a estudiar y la curvatura dada por el tensor de Riemann da la curvatura intrínseca de éste. La curvatura extrínseca de un objeto es como se ve este en la variedad que está inmerso. Para dar un ejemplo sencillo tomemos un cilindro $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ inmerso en \mathbb{R}^3 claramente tiene curvatura extrínseca pero su curvatura intrínseca es cero.

En este caso queremos estudiar la curvatura extrínseca de la hiper-superficie Σ inmersa en \mathbf{M} . Claramente la curvatura extrínseca se define en términos de como varía n^μ , el vector normal a Σ al transportarlo paralelamente de un punto a otro sobre Σ . Necesitamos definir el operador de proyección a las hiper-superficies P_σ^λ :

$$P_\sigma^\lambda = \delta_\sigma^\lambda + n^\lambda n_\sigma. \quad (1.27)$$

Con esto podemos dar la definición formal del *tensor de curvatura extrínseca*:

$$K_{\mu\nu} = -P_{\mu}^{\lambda} \nabla_{\lambda} n_{\nu} \quad (1.28)$$

Esta definición implica que $K_{\mu\nu}$ es simétrico e inmediatamente implica que $K_{\mu\nu} n^{\mu} = K_{\mu\nu} n^{\nu} = 0$ por lo que en las coordenadas del formalismo 3+1 solamente K_{ij} es no trivialmente cero. Se puede mostrar que:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

De lo que se obtiene :

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}. \quad (1.30)$$

Que es una ecuación de evolución de la 3-métrica γ_{ij} . Nótese que esta ecuación se satisface en todo espacio-tiempo aun si éste no satisface las ecuaciones de Einstein, por lo que esto es pura geometría en las coordenadas elegidas, falta las ecuaciones de evolución de K_{ij} que se presentarán en el capítulo IV.

1.6.2. Constricciones

Las constricciones de Einstein provienen de proyectar las ecuaciones de Einstein respecto n^{μ} y al operador de proyección \mathbf{P} . Las ecuaciones que obtendremos serán independientes del tiempo, es decir que deben satisfacerse a todo tiempo (y por eso el nombre de constricciones). Esto es a nivel analítico, a nivel numérico debido a que siempre hay errores asociados a las aproximaciones numéricas esto no será cierto. Se tendrá que vigilar como es que las simulaciones numéricas violan las constricciones y controlar que sea de un modo esperado.

Empezemos por una variante de las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* :

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 16\pi T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \quad (1.31)$$

Donde ${}^{(3)}R, K$ son el escalar del 3-tensor de Ricci y la traza de la curvatura extrínseca respectivamente.

Definimos $T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \equiv \rho_{ADM}$, esta es un escalar y corresponde a la densidad de energía local medida por los observadores eulerianos.

En las coordenadas del formalismo 3+1 obtenemos finalmente:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi \rho_{ADM} \quad (1.32)$$

conocida como constricción de *energía* o constricción *Hamiltoniana*.

Ahora utilícese una variante de las ecuaciones de *Codazzi-Mainardi*:

$$\gamma^{\alpha\mu} n^{\nu} G_{\nu\mu} = D^{\alpha} K - D_{\mu} K^{\alpha\mu} \quad (1.33)$$

Donde $D_\mu = P_\mu^\beta \nabla_\beta$ la proyección de la derivada covariante hacia la hiper-superficie. Definimos $-P^{\alpha\mu} n^\nu T_{\mu\nu} = j^\alpha$, donde j^α es la densidad de momento local medida por observadores eulerianos y obtenemos en las coordenadas 3+1:

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij}) = 8\pi j^i \quad (1.34)$$

Conocida como constricción de *momento*. Obsérvese que ambas constricciones no dependen explícitamente de las funciones de norma. Esto era de esperarse ya que las funciones de norma son relaciones entre hiper-superficies y las constricciones son ecuaciones que se deben satisfacer en cada hiper-superficie, independientemente de las relaciones entre éstas.

1.7. Campos Escalares

La ecuación de Klein-Gordon nombrada así por los físicos Oskar Klein y Walter Gordon, fue propuesta en 1926 con el interés de describir el comportamiento ondulatorio de electrones relativistas, sin éxito ya que no contabilizaba su espín. Los campos escalares fundamentales en la naturaleza fueron hipotéticos hasta el reciente (no del todo confirmado) descubrimiento del bosón de Higgs por el *Gran Colisionador de Hadrones* a mediados de 2012, Aún que el Higgs es un campo escalar real, su existencia puede considerarse como un paso en la dirección de los campos escalares complejos como los que se presentarán a continuación. Mientras tanto los campos complejos seguirán siendo una hipótesis.

El estudio de los campos escalares se realizó por primera vez en relatividad general a mediados de los años 50's por J. A. Wheeler. Hoy en día existen muchos trabajos sobre campos escalares tanto teóricos como numéricos, este trabajo seguirá el desarrollo realizado en [18], cuyo acercamiento al problema es el mismo que se plantea aquí, además de ser un trabajo relativamente reciente.

Un campo escalar se define como:

$$\phi(t, x^i) : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \longrightarrow \mathbb{F} \quad (1.35)$$

Donde a cada $p \in \mathbf{M}$ se la asocia un valor sobre el campo \mathbb{F} . Aquí se tomará a $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, el campo de los números complejos. Si se desea el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se puede consultar en [8].

Más aún, supondremos que la parte temporal del campo escalar es *harmónica* en el tiempo, lo que quiere decir que $\phi(t, x^i) = \phi_0(x^i) e^{i\omega t}$, donde $i^2 = -1$ (no confundir la i en $e^{i\omega t}$ con i de x^i), $\omega \in \mathbb{R}$ y $\phi^* = \phi_0(x^i) e^{-i\omega t}$ es su complejo conjugado ($\phi\phi^* = |\phi|^2$).

El tensor de energía-momento asociado al campo escalar se deduce de la siguiente forma:

Se define el lagrangiano $\mathcal{L}^B = -(\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi^* + m^2 |\phi|^2)$ donde $m = \frac{\mu}{\hbar}$ tiene unidades de 1 sobre metro. Utilizando que por definición $T_{\mu\nu}^B \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}^B}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}^B$ obtenemos:

$$T_{\mu\nu}^B = \frac{1}{2} [\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi^* + \nabla_\mu \phi^* \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} (\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi^* + m^2 |\phi|^2)] . \quad (1.36)$$

Como se probará en el capítulo III, las ecuaciones de conservación para el tensor de energía-momento anterior dan la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square\phi = m^2\phi \quad (1.37)$$

Donde $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ es conocido como *D'Alambertiano* ú operador de onda.

1.8. Fluidos

Se sabe por la existencia de los átomos que los objetos macroscópicos son un conjunto muy grande de átomos que tienen un comportamiento colectivo. Los fluidos son un tipo de comportamiento colectivo y en matemáticas así como en física se toma la aproximación que los fluidos son un *continuo* de materia. Esta aproximación es en general muy buena ya que se tiene el número de Avogadro N_A (10^{23} moléculas) en un volumen de alrededor de $10^{-18}m^3$.

Esto quiere decir que trataremos al continuo en términos de *elementos*, estos serán lo suficientemente chicos como para poder trabajar con ellos infinitesimalmente pero cada uno de ellos es un objeto macroscópico y tiene propiedades como presión, densidad y temperatura que podremos asignar a cada uno de estos, donde estas propiedades son los promedios estadísticos de las propiedades físicas como la energía y el momento de las partículas que lo conforman. En esta aproximación podemos asignar estas propiedades macroscópicas a cada punto del espacio-tiempo.

Los fluidos son un tipo particular de continuo, el cual '*fluye*', con *fluir* se refiere a que el continuo prácticamente no se opone a esfuerzos cortantes ejercidos por los objetos con los que colinda. Finalmente es una condición necesaria que el camino libre medio de entre las colisiones de las partículas sea mucho menor que el tamaño del sistema.

Las ecuaciones completas que describen un fluido perfecto, estático, esféricamente simétrico y autogravitante en relatividad general fueron obtenidas por primera vez por R.C. Tolman, R.J. Openheimer y su estudiante S. Volkoff en 1938, es por eso que estas ecuaciones llevan sus iniciales como nombre (TOV). En este trabajo utilizaremos las ecuaciones derivadas por ellos. La estabilidad de las estrellas conformadas por fluidos fue analizado por el premio nobel S. Chandrasekhar en 1934 y fué el primer trabajo en indicar que existe un límite de la masa de las estrellas para que éstas sean estables y que inevitablemente al superarlo se tendrá colapso gravitacional. Aquí se realizará el mismo análisis que Chandrasekhar.

El fluido '*perfecto*' es como se puede deducir de la definición que dimos de fluido, uno que no ejerce oposición alguna a los esfuerzos cortantes y no conduce calor. En términos de tensor de energía momento tendríamos localmente que existe un sistema de referencia donde $T^{0i} = T^{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ donde T^{0i} es el flujo de energía a través de la superficie $x^i = cte$, T^{i0} es la densidad de momento x^i cuya definición es equivalente a T^{0i} y T^{ij} es la densidad de momento x^i a través de la superficie $x^j = cte$. En términos físicos el fluido perfecto no tiene viscosidad ni flujo de calor.

Entonces el tensor de energía-momento de un fluido en un sistema localmente inercial debe verse como:

$$T_{\alpha\beta, local}^F = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Donde $\rho = T_{00}^F$ la densidad local del elemento de fluido y $P = T_{ii}^F$ La presión de elemento de fluido.

La manera de garantizar que se satisfaga esto localmente en \mathbf{M} para algún sistema de coordenadas es :

$$T_{\alpha\beta}^F = (\rho + P)u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (1.39)$$

Podemos simplificar este tensor separando la densidad de energía en términos de su energía cinética interna por unidad de masa ϵ y su parte correspondiente la masa en reposo de las partículas ρ_0 :

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon) \quad (1.40)$$

También nos es útil definir la entalpía específica del fluido h como :

$$h = 1 + \epsilon + P/\rho_0 \quad (1.41)$$

En términos de estas variables llegamos la versión final del tensor de energía-momento del fluido :

$$T_{\alpha\beta}^F = (\rho_0 h)u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (1.42)$$

Aunque tenemos el tensor de energía-momento del fluido nos falta aún una ecuación que relacione a la presión en términos de la densidad, para que el sistema de ecuaciones TOV quede cerrado. A esta ecuación $P = P(\rho_0, \epsilon)$ se le conoce como *ecuación de estado*.

Utilizando la formulación clásica de la primera ley de la termodinámica y la ecuación clásica de un gas ideal $pV = nkT$, donde pV es el trabajo realizado por el gas, k es la constante de Boltzmann, n el número de partículas del gas y T su temperatura, se obtiene :

$$P = (\gamma - 1)\rho_0\epsilon \quad (1.43)$$

Que se puede mostrar que para un proceso adiabático equivale a :

$$P = \kappa\rho_0^\gamma \quad (1.44)$$

Donde $\gamma = C_v/C_p$ es el *índice adiabático* y κ es una constante y al ser así el fluido que describe es *isentrópico*, es decir tiene la misma entropía en todo punto de \mathbf{M} .

Para deducir las ecuaciones TOV, tenemos un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico cuya fuente es un fluido perfecto, veremos en el capítulo III y IV que la conservación local de energía-momento $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^F = 0$, para este caso particular implica:

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P)\frac{d\Phi}{dr}, \quad (1.45)$$

con $\Phi = \ln\alpha$. De las ecuaciones de Einstein para la componente radial se tiene:

$$\begin{aligned} 8\pi T_{rr} &= \\ &= 8\pi P \frac{r}{r - 2m(r)} \\ &= G_{rr} \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{r - 2m(r)} \right) \frac{2m(r)}{r} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

lo que implica

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi P r^3}{r[r - 2m(r)]}, \quad (1.47)$$

donde $g_{rr} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$ y $m(r)$ representa la porción de la masa de la estrella contenida en ese radio. La componente temporal implica

$$\begin{aligned} 8\pi T_{00} &= \\ &= 8\pi\rho \\ &= G_{00} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (2m(r)), \end{aligned} \quad (1.48)$$

por lo que

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho r^3. \quad (1.49)$$

Las ecuaciones (1.45), (1.47) y (1.49) son conocidas como las ecuaciones TOV.

Las ecuaciones de evolución de un fluido conocidas como las *ecuaciones de Euler* serán introducidas en el capítulo IV. Para estudiar a profundidad los fluidos en relatividad especial se puede revisar [24]. Para estudiar todos los casos de las ecuaciones de Euler de la física Newtoniana a la relatividad general se puede consultar [6]. Sobre la derivación de las propiedades macroscópicas de los fluidos usando las propiedades estadísticas de sus partículas se puede consultar [19] que es una de las grandes obras de la mecánica estadística.

1.9. Estrellas Bosón-Fermión

Las estrellas Bosón-Fermión fueron estudiadas por primera vez por A.B.Henriques et al[3], en 1989, donde se estudiaron las configuraciones posibles de los distintos casos, para la construcción de datos iniciales en simetría esférica. Los casos estudiados por Henriques fueron fermiones correspondientes a las ecuaciones TOV y la ecuación de estado de Chandra Sekhar, mientras que los bosones conforman un campo escalar que no interactua con los fermiones, aun así, los bosones pueden interactuar [3] o no [4] consigo mismos. Las estrellas Bosón-Fermión siguen siendo un area poco explorada, probablemente por el hecho que las ecuaciones de Euler son complicadas cuando no se tiene un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Esto empeora si aunado se tiene que resolver las ecuaciones elípticas asociadas al D'Alambertiano de la ecuación de Klein-Gordon, por lo que la mayoría de los casos estudiados son en simetría esférica e incluso hay poca información sobre la evolución de éstas, o si pueden haber configuraciones estables con momento angular, lo que hace de este trabajo, aún que sencillo, una tarea interesante.

Para tener un espacio-tiempo de una estrella Bosón-Fermión hacemos la siguiente definición:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^B + T_{\mu\nu}^F. \quad (1.50)$$

Por otro lado haremos la siguiente suposición,

$$\nabla_\nu T^{B\mu\nu} = 0, \quad (1.51)$$

$$\nabla_\nu T^{F\mu\nu} = 0. \quad (1.52)$$

Esto quiere decir que los bosones y fermiones solo interactuan gravitacionalmente, es decir, las ecuaciones de movimiento a resolver son las ecuaciones de Euler y las de Klein-Gordon donde la diferencia respecto a los casos puros será la fuente del campo gravitacional (de la métrica),

$$\rho_{ADM} = \rho_F + \rho_B, \quad (1.53)$$

$$S_{ADM}^{ij} = S_F^{ij} + S_B^{ij}, \quad (1.54)$$

$$J_{ADM}^i = J_F^i + J_B^i, \quad (1.55)$$

que a su vez afectará las ecuaciones de movimiento.

La estabilidad de las estrellas Bosón-Fermión es difícil de definir teóricamente ya que no es trivial extender los resultados que se tiene en los casos puros[5],[27]. En este trabajo haremos un análisis similar y probaremos su eficacia.

Cabe mencionar que los espacio-tiempos de estrellas Bosón-Fermión pueden representar un gran número de objetos astrofísicos, por ejemplo, una galaxia(fermiones) con su halo de materia oscura(bosones), una galaxia(fermiones) con un imitador de agujero negro(estrella de bosones) así como la formación de un agujero negro supermasivo (colapso de materia fermiónica) en presencia de materia oscura(bosones).

Si se quiere revisar distintas configuraciones de estrellas Bosón-Fermión se puede consultar [3],[4],[5]. Si se desea consultar sobre configuraciones con momento angular se puede revisar en [13]. Para un análisis de estabilidad se puede consultar [27].

1.10. Agujeros negros y colapso gravitacional

Agujero negro es el nombre que acuñó J.A. Wheeler para un tipo de espacio-tiempo, en los que se forma un horizonte de eventos. Este tipo comportamiento ya era predicho en la primera solución analítica a las ecuaciones de Einstein encontrada por K.Schwarzschild en 1916, en la que $r = 2M$ forma un horizonte de eventos. sin embargo, la aceptación de que esto era lo que implicaba la solución a las ecuaciones de Einstein tardó casi 60 años. Fue hasta que M. Kruskal en 1962, reescribió la solución en términos de las cartas correctas que se comprobó la existencia del horizonte de eventos. Para definir formalmente un horizonte de eventos necesitamos las siguientes definiciones:

Espacio-tiempo conforme: Dado (\mathbf{M}, \mathbf{g}) espacio-tiempo podemos construir un espacio-tiempo conforme, $\bar{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}, \bar{\mathbf{g}})$ tal que

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

donde Ω es conocido como el *factor conforme* y es una función diferenciable que se vuelve cero en la frontera de $\bar{\mathbf{M}}$.

Infinito nulo futuro: Dadas las curvas nulas que se extienden infinitamente hacia el futuro en \mathbf{M} , éstas intersecan a la frontera de $\bar{\mathbf{M}}$ (por construcción de Ω). Esta región es conocida como Infinito nulo futuro j^+ .

Con esto podemos dar la definición formal de un horizonte de eventos, *Horizonte de eventos:* El horizonte de eventos un espacio-tiempo \mathbf{M} se define como:

$$\begin{aligned} H &= \partial (\bar{\mathbf{M}} - D^-(j^+)) , \\ &= \partial ([D^-(j^+)]^c) , \end{aligned} \quad (1.57)$$

en donde ∂A quiere decir la frontera de del conjunto A y A^c el complemento de A .

Esto quiere decir físicamente que el horizonte de eventos es el conjunto de puntos de \mathbf{M} , de los cuales puedes mandar rayos de luz hacia el futuro y estos no logran llegar a él, es decir, quedan atrapados.

Claramente esta definición de un horizonte de eventos, es de caracter global, debido a que se necesita conocer a todo el espacio-tiempo para poder determinar el horizonte de eventos. Una definición de caracter local con la que se puede trabajar en simulaciones numéricas y que está muy relacionada con la definición anterior es la de un *horizonte aparente*, la cual haremos formal en el capítulo IV, pero que, intuitivamente es una 2-superficie de la cual los rayos de luz que tratan de ser mandados

hacia fuera de ésta quedan atrapados. Con esto podemos presentar uno de los teoremas más espectaculares que existen en relatividad general debido a Roger Penrose, quién lo enunció en 1965,

Teorema (Penrose) 1 *Sea $(M, g_{\alpha\beta})$ un espacio-tiempo globalmente hiperbólico tal que $\exists \Sigma$ hiper-superficie no compacta y que $\forall p \in M$ el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ satisface $k^\mu k^\nu T^{\mu\nu} \geq 0 \forall k^\beta k_\beta = 0$ (conocida como la condición de energía nula). Más aún si $\exists C$ horizonte aparente $\subset M$. Entonces existe una geodésica nula dirigida hacia el futuro, tal que ésta es inextendible.*

Este teorema demuestra que si un espacio-tiempo contiene un horizonte aparente, el espacio-tiempo contiene una singularidad física.

Existen otra clase de teoremas llamados teoremas de *No-pelo*, en los cuales se prueba una proposición similar a la siguiente:

Teorema (No-pelo) 1 *Sea $(M, g_{\alpha\beta})$ un espacio-tiempo, no existe configuración estable en donde M tiene horizonte de eventos y un campo escalar ϕ , en el que $\phi \neq 0$ fuera del horizonte de eventos.*

Esto quiere decir que el agujero negro no puede tener 'pelo escalar'. Usualmente se utiliza este teorema como argumento en contra de que un campo escalar conforme la materia oscura, ya que casi toda galaxia contiene tanto materia oscura como un agujero negro en su centro. Este teorema sin embargo, no dice nada al respecto de cuanto tiempo puede durar el pelo escalar antes de ser tragado por el agujero negro y se ha probado en simulaciones numéricas que para algunos casos el tiempo puede ser cosmológico [15],[16].

Existen unas leyes que obedecen los agujeros negros llamados 'leyes de mecánica de agujeros negros', derivadas por S.Hawking en la cual se tiene que para un observador en infinito:

$$\delta A \geq 0, \quad (1.58)$$

donde δA es el incremento del área del horizonte aparente y es conocida como la 2da ley de la mecánica de agujeros negros. Podemos notar la similitud entre la 2da ley de agujeros negros y la segunda ley de la termodinámica, las cuales son parte de una sola cosa si se cree en la teoría cuántica de campos en espacios-tiempo curvos, desarrollada por Hawking.

En simetría esférica $M_H = \sqrt{A_h/16\pi}$ por lo que la masa de los horizontes aparentes debe ser ≥ 0 . Esta definición será útil en las simulaciones numéricas.

Si se desea revisar con más detalles las definiciones empleadas para la construcción de la definición de un agujero negro se puede consultar [6]. Para más información sobre el teorema de Penrose se puede consultar [29]. Finalmente, si se quiere ver con más detalle un teorema de no-pelo, se puede encontrar uno más general en [17] y los ejemplos donde el campo escalar dura establemente periodos cosmológicos en [16], [15].

Capítulo 2

Métodos numéricos

2.1. Introducción a métodos numéricos

En matemáticas (y cualquier área que las empleé) en general se llegan a sistemas de ecuaciones para los que no se tiene una solución analítica conocida ni un método general para resolverlas. Por esto se estudia su carácter cualitativo (*i.e* espacio fase en *EDO*) y la única alternativa que se tiene para conocer su comportamiento cuantitativo es empleando métodos numéricos que se aproximen a la solución analítica (muchas veces con la ayuda del comportamiento cualitativo). Es por esto que fue desarrollado a finales del siglo XIX el análisis numérico para relacionar las computaciones numéricas con las soluciones analíticas del problema que se está resolviendo. Con el surgimiento de las computadoras y su más que exponencial crecimiento en las últimas 3 décadas ha hecho de los métodos numéricos una herramienta indispensable en casi cualquier problema científico, incluso en áreas muy teóricas donde el pragmatismo no es la principal motivación de su desarrollo y más aún podría decirse que se ha vuelto tan indispensable como los métodos analíticos, convirtiéndose en el principal motor del desarrollo científico de estos tiempos.

La cantidad de métodos numéricos existentes es gigantesca, a tal grado que en este trabajo solo se presentarán los relevantes al formalismo 3+1 de la relatividad numérica y los que fue necesario implementar para obtener la solución del problema aquí presentado.

2.2. Diferencias finitas

En la teoría clásica de campos se quiere conocer el valor del campo para cada evento en el espacio-tiempo. Esto se logra generalmente resolviendo una ó varias ecuaciones diferenciales. Cuando se quiere resolver esto numéricamente se confronta uno de entrada con 2 problemas computacionales. El primero es que siendo el espacio-tiempo una variedad diferencial, este es un continuo y el número de eventos que lo compone tiene en cada entrada la cardinalidad de los reales, lo cual hace describir a un campo solo posible con infinita memoria computacional. La aproximación en diferencias finitas a este problema supone que el dominio computacional es de cardi-

alidad finita e introduce una malla que representa al dominio computacional, (*i.e* espacio-tiempo).

La distancia coordenada entre cada evento se puede dar como Δx^μ , esta puede ser diferente para cada μ y también puede ser distinta entre eventos (es decir una malla no uniforme). En este caso se trabajará distinguiendo Δt como la distancia coordenada temporal y se conoce como "paso de tiempo" mientras que Δx representará la separación coordenada espacial. La separación coordenada entre eventos no dependerá de estos por lo que la malla será uniforme.

El segundo problema es que al representar al espacio-tiempo como un dominio computacional finito con una separación coordenada dada entre eventos de éste, los operadores diferenciales no pueden evaluarse en ningún evento dado, ya que no hay eventos vecinos para cualquier vecindad abierta arbitraria y tomar límites no tiene sentido. La aproximación a esto utilizando diferencias finitas es regresar al origen algebraico de los operadores diferenciales, lo que convierte ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. La ventaja de las ecuaciones algebraicas es que son fáciles de resolver, mientras que una desventaja de esto es que se tiene una ecuación algebraica distinta para cada evento (distintas incógnitas, misma estructura).

Para hacer precisos los conceptos anteriores véase el siguiente ejemplo:

Sea $\psi \in D(\mathbf{M})$ una función escalar, para cada $(t, x) = (n\Delta t, m\Delta x)$ en la malla computacional se tiene:

$$\psi_m^n = \psi(n\Delta t, m\Delta x) \quad (2.1)$$

Para conocer $\partial_x \psi|_{(n\Delta t, m\Delta x)}$ podemos hacer la expansión en serie de Taylor de ψ_{m-1}^n alrededor de $(n\Delta t, m\Delta x)$:

$$\psi_{m-1}^n = \psi_m^n + \partial_x \psi_m^n (-\Delta x) + \frac{\partial_x^2 \psi_m^n}{2!} (-\Delta x)^2 + \dots + \frac{\partial_x^k \psi_m^n}{k!} (-\Delta x)^k + \dots \quad (2.2)$$

Al restarle ψ_m^n a la ecuación (3.2) y despejar se obtiene:

$$\partial_x \psi_m^n = \frac{\psi_m^n - \psi_{m-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.3)$$

Donde $O(\Delta x)$ son términos de orden superior a Δx (proporcionales a $\Delta x^2, \Delta x^3 \dots$).

Esto muestra que la aproximación que se ha hecho al operador ∂_x tiene un error asociado, conocido como *error de truncado* por haber truncado la serie de Taylor y se denota como τ_Δ . El error en éste caso se denomina error a primer orden en Δx .

Se puede hacer una mejor aproximación calculando la serie de Taylor de ψ_{m+1}^n al rededor de $(n\Delta t, m\Delta x)$:

$$\psi_{m+1}^n = \psi_m^n + \partial_x \psi_m^n (\Delta x) + \frac{\partial_x^2 \psi_m^n}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{\partial_x^k \psi_m^n}{k!} (\Delta x)^k + \dots \quad (2.4)$$

Y al restarle la ecuación (3.2), despejando se obtiene:

$$\partial_x \psi_m^n = \frac{\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.5)$$

Donde $|O(\Delta x^2)| < |O(\Delta x)|$ por lo que es una aproximación de segundo orden a $\partial_x \psi_m^n$. Esta aproximación a 2do orden es conocida como diferencia *centrada*, la aproximación que vimos a primer orden es conocida como diferencia *hacia atrás*.

La idea de diferencias finitas es hacer muy chíquita la separación entre los puntos de la malla (Δ) de tal manera que sea similar a tomar el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, sin embargo, como no se puede llegar a este caso se estima el error de la aproximación. No sólo ocurre que el error es menor entre mejor aproximación se tenga sino que también esto hace que para llegar a un margen de error deseado el número de puntos que tiene que representar al espacio-tiempo es mucho menor lo cual hace que las simulaciones sean más rápidas y se necesite menos memoria, por lo que es sumamente importante conocer y mejorar el orden de las aproximaciones.

Se puede definir otro error asociado a las diferencias finitas. Si ψ es el campo escalar anteriormente mencionado ψ está definido sobre \mathbf{M} y ψ_Δ es el campo escalar definido sobre la malla, entonces se define al *error de solución* como:

$$\epsilon_\Delta = \psi - \psi_\Delta \quad (2.6)$$

El cual es distinto de τ_Δ y solo puede ser evaluado en los puntos de la malla.

2.3. Estabilidad, consistencia y convergencia

Existen muchas maneras de aproximar en diferencias finitas una ecuación diferencial, pero no todas son útiles, para discernir entre éstas se desarrollaron los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad.

Una aproximación en diferencias finitas es *consistente* si :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tau_\Delta = 0 \quad (2.7)$$

Y si una aproximación es consistente se tiene:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tau_\Delta \sim \Delta^k \quad (2.8)$$

Donde k es el orden de la aproximación. Si una aproximación es consistente se esta resolviendo localmente la ecuación diferencial que se está aproximando, por lo que si una aproximación no es consistente entonces no se está resolviendo la ecuación deseada ni si quiera a nivel local!

Consistencia es una propiedad local lo cual la hace necesaria pero lejos de ser el requerimiento completo de una buena aproximación en diferencias finitas.

Una aproximación en diferencias finitas es *convergente* si:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \epsilon_{\Delta} = 0 \quad (2.9)$$

Lo que quiere decir que conforme se refine la malla la solución que se obtiene debe tender a la solución exacta en un tiempo finito. Esto hace que entre mayor sea el orden de la aproximación mucho mejor debe ser su parecido a la solución exacta.

Sea ψ_m^n el campo escalar definido sobre la malla, una aproximación en diferencias finitas es *estable* si:

$$\|\psi^n\| \leq K(t) \|\psi^0\| \quad \forall n \quad (2.10)$$

Donde :

$$\|\psi^n\| = \left[\Delta x \sum_m |\psi_m^n| \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

Es la norma L^2 (conocida como el valor cuadrático medio) de la aproximación en diferencias finitas y $|\psi_m^n|$ es el valor absoluto de ψ_m^n .

La definición de estabilidad pide que la solución esté acotada a todo tiempo por la norma inicial de la aproximación en diferencias finitas multiplicada por una constante que solo dependa de t . Esta definición es la versión numérica de bien planteado en el problema de Cauchy cuya definición es la siguiente:

Un problema de Cauchy está *bien planteado* si:

$$\|\psi(t, x)\| \leq \alpha e^{\nu t} \|\psi(0, t)\| \quad \forall t \quad (2.12)$$

Donde α y ν son constantes independientes de los datos iniciales.

Con la definición de bien planteado se puede relacionar los conceptos de estabilidad y convergencia mediante el siguiente teorema

Teorema de equivalencia de Lax 1 *Dado un problema de Cauchy que esté bien planteado y una aproximación en diferencias finitas a éste que sea consistente, entonces estabilidad es condición necesaria y suficiente para que la aproximación sea convergente.*

Si se quieren ver ejemplos de diferencias finitas explícitas e implícitas se puede consultar [6],[30]. Para una definición mas completa de las diferencias finitas se recomienda [6].

2.4. Análisis de convergencia

En la sección (2.3) dimos la definición y la explicación del concepto de convergencia. En esta sección explicaremos un método para determinar si una aproximación

en diferencias finitas es convergente o no.

Es importante mencionar antes de explicar lo anterior, lo fundamental que es la convergencia. Si un sistema no es convergente no se está tendiendo a la solución analítica, por lo que tanto el caracter cuantitativo como el cualitativo será diferente y estaremos obteniendo un resultado del cual probablemente obtendremos conclusiones erróneas con efectos espúrios.

Para realizar el análisis de convergencia, primero tenemos que notar que se puede escribir la solución a una aproximación en diferencias finitas estable como:

$$\psi_{\Delta}(t, x^i) = \psi(t, x^i) + \sum_{j=1}^{\infty} e_j(t, x^i)(\Delta)^j. \quad (2.13)$$

Donde e_j son las funciones error asociadas al orden j de la aproximación en diferencias finitas y $\lim_{j \rightarrow \infty} (\Delta^j)e_j = 0$. Si una aproximación es de orden n se tiene que:

$$e_j(t, x^i) = 0 \quad \forall j < n. \quad (2.14)$$

Para cualquier análisis de convergencia es necesario utilizar 2 o más resoluciones distintas de la misma simulación numérica. Debido a esto la convergencia solo puede analizarse en los puntos donde ambas resoluciones coincidan así como que sean en el mismo tiempo físico. En el raro caso de conocer el valor analítico de la solución, podemos hacer el siguiente análisis para revisar convergencia:

Sea ψ_{Δ_1} y ψ_{Δ_2} las soluciones en diferencias finitas correspondientes a Δ_1 y Δ_2 respectivamente, de una aproximación en diferencias finitas estable de orden n tal que:

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) = r > 1. \quad (2.15)$$

Entonces podemos definir:

$$\epsilon_{\Delta_1} = \psi - \psi_{\Delta_1}, \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{\Delta_2} = \psi - \psi_{\Delta_2}. \quad (2.17)$$

Después tomamos la norma L^2 de ξ_{Δ_1} y ξ_{Δ_2} . Una vez hecho esto tomamos el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ de la razón de sus normas L^2 y obtenemos:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\|\epsilon_{\Delta_1}\|}{\|\epsilon_{\Delta_2}\|} = r^n \quad \forall t, x^i. \quad (2.18)$$

Cuando se realiza un análisis de convergencia a un ejemplo concreto donde se conoce el resultado analítico, podemos usar nuestros datos para tomar esta razón. Si el resultado es distinto de r^n quiere decir que algo está mal con nuestra aproximación, ya sea local o globalmente. En el caso particular de relatividad numérica, en el caso en que las simulaciones numéricas violen las restricciones, se conoce la solución

análitica de éstas (deben ser 0) por lo que podemos emplear este método para revisar la convergencia de nuestras simulaciones.

Este método es global, una manera de revisar convergencia local es a través de mapear a ϵ_{Δ_1} y ϵ_{Δ_2} en función de la posición y luego multiplicar a ϵ_{Δ_2} por r^n de tal manera que deben de coincidir en general ϵ_{Δ_1} y ϵ_{Δ_2} y así es posible revisar punto a punto la convergencia.

2.5. Método de la secante

Muchas veces se tiene dentro de las ecuaciones algebraicas que se dese resolver, una ecuación cuadrática o de orden mayor y para esto se tiene que encontrar la raíz que lleva a ésta. Existen muchos métodos para hacer esto con distintas ventajas y desventajas, en este caso se estudiará el método de la secante que tiene las siguiente ventajas y desventajas:

Supongase que la función $f \in \mathbb{R}$ a la que se desea encontrar su raíz es casi lineal en la región donde se sabe que ésta se encuentra. Dado esto, elegimos 2 valores arbitrarios de las raíces de la ecuación $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ tal que inicialmente suponemos que $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ y utilizamos la pendiente de la recta secante para hacer una mejor aproximación del intervalo mediante

$$\omega_{nueva} = \omega_2 - \left(\frac{f(\omega_2) - f(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \right) f(\omega_2), \quad (2.19)$$

luego se cierra el algoritmo recursivo pidiendo que

$$\omega_1 = \omega_2, \quad (2.20)$$

$$\omega_2 = \omega_{nueva}. \quad (2.21)$$

Se puede probar que la convergencia a la raíz de este método es mayor que lineal ya que es igual a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la proporción *aurea*. Una ventaja es que converge más rápido que los métodos lineales ya que su convergencia es semilineal (*i.e.* $\varphi > 1$) pero la desventaja es que existen distintos tipos de funciones para los cuales el método de la secante no siempre converge, más aún claramente este método es muy dependiente de los valores iniciales que se les da la raíces y que en la región que éstas acotan, la función sea muy lineal. Si se quiere ver con más detalle revíse [30].

2.6. Métodos de líneas

Supongase que se tiene una ecuación diferencial parcial a primer orden en t para ψ , un campo escalar :

$$\partial_t \psi = M(\psi) \quad (2.22)$$

Donde M es un operador diferencial espacial con orden k arbitrario. Si se aproxima M en diferencias finitas se puede reescribir la ecuación (2.22) como una EDO en t :

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \mathbf{M}\psi_m \quad (2.23)$$

Donde ψ_m ahora es el vector compuesto de todos los valores del escalar original ψ a lo largo del nivel espacial m de la malla computacional y \mathbf{M} una matriz.

Al convertir la ecuación (3.16) en una EDO, se está separando el operador espacial de temporal por lo que la aproximación algebraica a cada operador puede manejarse distintamente y la parte temporal se puede resolver numéricamente utilizando los métodos estandar del siglo XIX como los que se presentarán adelante.

2.6.1. Método de Euler

Sea un problema de valor inicial a primer orden:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(t, \psi(t)), \quad \psi(0) = \psi_0 \quad (2.24)$$

Sea $t_n = n\Delta t$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $\psi^n = \psi(t_n)$ y $\psi^{n+1} = \psi(t_{n+1})$ entonces el método de Euler hace la siguiente aproximación:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + f(t_n, \psi^n)\Delta t \quad (2.25)$$

Y el error asociado a éste es de orden $O(\Delta t)$. Se puede probar que este método es incondicionalmente inestable por lo que no es usado en práctica pero de él parten otros métodos que si son estables.

2.6.2. Método Crank-Nicholson iterado

Si se quiere mejorar el método de Euler, existen muchas formas de hacer esto, una de éstas es el método Crank-Nicholson iterado, el cual se expresa algebraicamente como:

$$\psi^* = \psi^n + f(t_n, \psi^n)\Delta t, \quad (2.26)$$

$$\psi^j = \psi^n + \frac{\Delta t}{2}[f(t_n, \psi^n) + f(t_n, \psi^{j-1})] \quad j = 2, \dots, N, \quad (2.27)$$

$$\psi^{n+1} = \psi^N. \quad (2.28)$$

La idea de éste método es tomar diferencias hacia adelante y redefinir la solución ψ^* y después promediar la nueva fuente con el paso anterior y el más reciente, haciendo esto iterativamente hasta el paso N . Se llama Crank-Nicholson iterado por que éste se convierte en el método Crank-Nicholson cuando $N \rightarrow \infty$.

La ventaja de éste método iterativo sobre el otro es que el último mencionado es implícito por lo que muchas veces se puede adaptar a distintos problemas. Se puede consultar [6] para revisar la simplificación del método al caso lineal y en [28] se demuestra que para que este método se estable solo debe iterarse 2 veces ya que el resto no mejora su estabilidad e incluso puede llegar a empeorarla.

2.6.3. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta fue desarrollado en el siglo XIX cuando aún no había computadoras, sin embargo para muchos problemas sencillos sigue siendo un excelente método numérico particularmente por que es muy sencillo de emplear. Tómese nuevamente un problema de valor inicial a primer orden igual que en el caso del método de Euler:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(t, \psi(t)), \quad \psi(0) = \psi_0 \quad (2.29)$$

E igual tenemos $t_n = n\Delta t$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $\psi^n = \psi(t_n)$ y $\psi^{n+1} = \psi(t_{n+1})$, agregamos a éstos una evaluación de las fuentes entre el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ de tal manera que la corrección a las fuentes es hasta orden 4, para hacer esto es necesario:

$$k_1 = f(t_n, \psi^n), \quad (2.30)$$

$$k_2 = f(t_n, \psi^n + k_1\Delta t/2), \quad (2.31)$$

$$k_3 = f(t_n, \psi^n + k_2\Delta t/2), \quad (2.32)$$

$$k_4 = f(t_n, \psi^n + k_3\Delta t/2), \quad (2.33)$$

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4). \quad (2.34)$$

Esto puede hacerse hasta un orden arbitrario. La idea de los métodos de Runge-Kutta, es reevaluar las fuentes en distintos puntos en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ de tal manera que se cancelen el mayor número de términos secundarios y la aproximación sea de mejor orden. Existe mejores aproximaciones con la misma idea de Runge-Kutta que pueden revisarse en [30] pero no serán necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 3

Datos iniciales

3.1. Datos Iniciales

Generar datos en relatividad numérica es un área de investigación en si, ya que existen muchas maneras de hacer esto, debido a la libertad de elección de las cartas coordenadas y las funciones de norma, las cuales producen distintos tipos de condiciones a la frontera y condiciones de evolución, lo que implica la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales mediante distintos métodos de análisis y por ende distintos métodos numéricos.

Como vimos en el capítulo I, queremos construir una hiper-superficie de Cauchy Σ que determine completamente al espacio-tiempo \mathbf{M} y podamos construir a éste evolucionando a Σ . Esto es claramente la idea del formalismo 3+1 ya que en la mayoría de los casos podemos definir a Σ pero no sabemos como es el espacio-tiempo en general.¹

Para determinar a Σ geoméricamente necesitamos conocer la 3-métrica y su curvatura extrínseca $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ que por sus simetrías en realidad en principio serían 12 cantidades independientes pero como vimos en la sección (1.6.2) estas deben satisfacer las ecuaciones de constricción que en las coordenadas 3+1 son:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho_{ADM}, \quad (3.1)$$

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij}) = 8\pi j^i. \quad (3.2)$$

Estas ecuaciones son 4 ecuaciones diferenciales parciales acopladas no lineales que dicen la relación de la geometría en Σ y los campos de materia definidos en ésta. En general se escogen algunos de los grados de libertad según lo que se sabe del problema y se obliga al resto a satisfacer las constricciones.

Existen muchos métodos generales para hacer esta separación, los más populares pueden consultarse en [6].

¹los casos en los que se conoce el espacio-tiempo general son las soluciones exactas como Minkowski, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom y Kerr-Newman entre otros, estos fungen bien como espacio-tiempos pruebas y se pueden utilizar para revisar que el código que uno está utilizando esté funcionando bien.

3.2. Datos temporalmente simétricos

Un problema de Cauchy es *temporalmente simétrico* si sobre la superficie de Cauchy las variables son independientes del tiempo. Debido a esto pedimos:

$$\vec{\beta}|_{t=0} = 0 \quad (3.3)$$

$$\partial_t \gamma_{ij}|_{t=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\partial_t \alpha|_{t=0} = 0. \quad (3.5)$$

Por lo que juntando ecuaciones (1.18),(2.4) y (2.5) llegamos a:

$$K_{ij}|_{t=0} = 0. \quad (3.6)$$

Esto hace que la constricción de momento se satisfaga trivialmente ($j^i|_{t=0} = 0$) y la constricción hamiltoniana se convierte en:

$${}^{(3)}R = 16\pi\rho_{ADM} \quad (3.7)$$

Si un espacio-tiempo es estático este es temporalmente simétrico.

3.2.1. Espacio-tiempo estático esféricamente simétrico

El espacio-tiempo que se estudiará no solo será temporalmente simétrico si no también será esféricamente simétrico por lo que la métrica de éste es la métrica general que se vió en la sección (1.5) e incorporando la ecuación (2.4) se expresa en el formalismo 3+1 como :

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2B(r)d\Omega^2 \quad (3.8)$$

En términos de A y B la constricción hamiltoniana se reduce a:

$$\begin{aligned} -\partial_r^2 \ln B + \frac{1}{r^2 B}(A - B) + \frac{1}{r}(\partial_r(\ln A - 3 \ln B)) \\ + \frac{(\partial_r \ln A)(\partial_r \ln B)}{2} - \frac{3(\partial_r \ln B)^2}{4} = 8\pi A \rho_{ADM} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico fué la primera solución exacta a las ecs. de Einstein presentada por K.Schwarzschild en 1916. Simplifica mucho las ecuaciones y existen un número de sistemas astrofísicos que éste puede describir bien en primera aproximación, sin embargo la mayoría de los sistemas astrofísicos como la órbita entre dos objetos compactos no pueden ser descritos así.

3.3. Coordenadas polares de área

Las coordenadas *polares de área* se definen en simetría esférica pidiendo 2 condiciones. La primera es la condición de *foliación polar*, la cual se impone sobre la componente polar de la curvatura extrínseca:

$$K_\theta^\theta = \partial_t K_\theta^\theta = 0 \Rightarrow K = K_r^r \quad \forall t, r \quad (3.10)$$

La parte de *área* viene de lo siguiente: Pensemos en el área las 2-esferas \mathbb{S}^2 embebidas (foliaciones de) (\mathbf{M}, \mathbf{g}) medidas por un observador:

$$\oint_{\mathbb{S}^2} dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 B(t, r) \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^2 B(t, r) \quad (3.11)$$

Donde hay que recordar que en el caso general B también depende de t . La condición de área es pedir que la coordenada r sea tal que el área de las esferas siempre sea $4\pi r^2$, lo que quiere decir:

$$B(r, t) \equiv 1 \quad \forall r, t \quad (3.12)$$

Con estas 2 condiciones la métrica en coordenadas polares de área queda:

$$ds^2 = -\alpha^2(t, r) + A(t, r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.13)$$

Y juntando ésta con una métrica estática llegamos a :

$$ds^2 = -\alpha^2(r) + A(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.14)$$

Esta es la métrica final en la que se desarrollará el resto de este trabajo y las simulaciones numéricas que se realicen.

En esta métrica obtenemos la versión final de la constricción hamiltoniana:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{A(1-A)}{r} + 8\pi A^2 r \rho_{ADM} \quad (3.15)$$

Donde hemos puesto a la hamiltoniana explícitamente como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden del coeficiente métrico radial A para mostrar que de ella obtendremos $A(r)$ integrando numéricamente en las simulaciones.

Por último, en estas coordenadas la definición de la masa ADM se reduce a

$$M_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{A(r)} \right). \quad (3.16)$$

Si empleamos esta definición en el caso de Schwarzschild, podemos ver que M del coeficiente métrico y M_{ADM} coinciden. Esta cantidad física es invariante y para espacio-tiempos asintóticamente planos es una invariante que podemos calcular en simulaciones numéricas y estudiar su comportamiento.

En relatividad numérica el uso de las coordenadas polares de área ha sido muy empleado en [10] pero tiene sus limitaciones ya que no puede penetrar horizontes de eventos [6]. Las coordenadas polares de área implican una condición en el lapso, pero ya que el espacio-tiempo es estático, esta condición es equivalente a la condición *maximal* que veremos más adelante. Si el lector desea revisar otros tratamientos de coordenadas polares de área puede revisar [18], [9] y [6].

3.4. Datos iniciales de bosones

Para un campo de Klein-Gordon, recordemos que se tiene el siguiente tensor de energía-momento derivado en (1.7):

$$T_{\mu\nu}^B = \frac{1}{2} [\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi^* + \nabla_\mu\phi^*\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi^* + m^2|\phi|^2)] . \quad (3.17)$$

Por ser $\phi(r, t)$ un campo escalar se tiene $\partial_\mu\phi = \nabla_\mu\phi$. También por ser ϕ armónico en el tiempo y que el espacio es esféricamente simétrico tenemos:

$$\partial_t\phi(r, t) = i\omega\phi(r, t) , \quad (3.18)$$

$$\partial_r\phi(r, t) = e^{i\omega t}\partial_r\phi_0(r) , \quad (3.19)$$

$$\partial_\phi\phi(r, t) = \partial_\theta\phi(r, t) = 0 , \quad (3.20)$$

$$|\phi|^2 = \phi_0^2 . \quad (3.21)$$

Por lo que con ellas y la ec. (1.13) del lapso se tiene:

$$\rho_B = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^B , \quad (3.22)$$

$$= n^\mu n^\nu \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* + m^2|\phi|^2) , \quad (3.23)$$

$$= \frac{\omega^2}{\alpha^2}\phi_0^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\phi_0^2 + \left(\frac{\partial_r\phi_0}{A}\right)^2 + m^2\phi_0^2 \right) , \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} + m^2\right)\phi_0^2 + \left(\frac{\partial_r\phi_0}{A}\right)^2 \right] . \quad (3.25)$$

$$S_B = S_B^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^B , \quad (3.26)$$

$$= g^{\mu\nu} \left[T_{\mu\nu}^B + n^\beta n_\nu T_{\mu\beta}^B + n^\alpha n_\mu T_{\alpha\nu}^B + n^\mu n^\nu \rho_B \right] , \quad (3.27)$$

$$= T_\mu^B{}^\mu + \rho_B , \quad (3.28)$$

$$= -\nabla_\nu\phi^*\nabla^\nu\phi - 2m^2\phi_0^2 + \rho_B , \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - m^2\right)\phi_0^2 - \left(\frac{\partial_r\phi_0}{A}\right)^2 \right] . \quad (3.30)$$

Donde S_B es la traza de tensor de *esfuerzos* puramente espacial que se definirá en el capítulo IV cuando se vean las ecuaciones de evolución.

Podría generarse la confusión de que ϕ dependa de t y tener un espacio-tiempo estático, resulta ser que al tener la condición armónica para el campo escalar, obtenemos cantidades físicas independientes de t y por eso la ecuación hamiltoniana no depende del tiempo cuando se sustituye ρ_B . El campo varía en el tiempo pero el espacio-tiempo no. Esta es una buena ejemplificación de la separación entre espacio-tiempo y campo.

Finalmente se hará el desarrollo de las ecuaciones de conservación:

$$\nabla_\mu T^{B\ \mu\nu} = 0, \quad (3.31)$$

$$= \{ \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi^* + \nabla^\mu \phi^* \nabla^\nu \phi) - \nabla^\nu [\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi^* + m^2 |\phi|^2] \}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} &= (\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi) \nabla^\nu \phi^* + (\nabla_\mu \nabla^\mu \phi^* - m^2 \phi^*) \nabla^\nu \phi \\ &\quad + [\nabla^\mu \phi (\nabla_\mu \nabla^\nu \phi^*) - \nabla_\alpha \phi (\nabla^\nu \nabla^\alpha \phi^*)] \\ &\quad + [\nabla^\mu \phi^* (\nabla_\mu \nabla^\nu \phi) - \nabla^\alpha \phi^* (\nabla^\nu \nabla_\alpha \phi)]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Al ser ϕ escalar, $\nabla^\nu \nabla^\alpha \phi = \nabla^\alpha \nabla^\nu \phi$ por lo que se tiene :

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi) \nabla^\nu \phi^* + (\nabla_\mu \nabla^\mu \phi^* - m^2 \phi^*) \nabla^\nu \phi = 0. \quad (3.34)$$

Aplicamos el conmutador de Lie respecto a $\nabla^\nu \phi$ y obtenemos:

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi) [\nabla^\nu \phi^*, \nabla^\nu \phi] = 0. \quad (3.35)$$

y como en general $\nabla^\nu \phi \neq \nabla^\nu \phi^*$ concluimos que:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (3.36)$$

la cual es la ecuación de Klein-Gordon presentada en el capítulo I. En el caso en que $\phi \in \mathbb{R}$ no es necesario tomar el conmutador ya que en general $\nabla^\nu \phi \neq 0$ e implica la misma ecuación.

La ecuación Klein-Gordon en un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico se tiene:

$$\frac{d^2 \phi_0}{dr^2} = A(r) \left(m^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) \phi_0 + \frac{(\partial_r A) \partial_r \phi_0}{2A} - 2 \frac{\partial_r \phi_0}{r} - \frac{(\partial_r \alpha) \partial_r \phi_0}{\alpha}. \quad (3.37)$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria de 2do orden no lineal. Más adelante se verán las condiciones de frontera que se impondrán y su relación con ω .

3.5. Datos iniciales de fermiones

Recuerdese el tensor de energía-momento para un fluido perfecto deducido en (1.8):

$$T_{\alpha\beta}^F = (\rho_0 h) u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (3.38)$$

En el caso de un fluido perfecto se tiene el siguiente valor para su densidad de energía visto por los observadores eulerianos:

$$\rho_F = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^F, \quad (3.39)$$

$$= (\rho_0 h)(u_\mu n^\mu)^2 - P, \quad (3.40)$$

$$= \rho_0 h W^2 - P. \quad (3.41)$$

Donde $W = u_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ donde $v = (\gamma^{ij} v_i v_j)^{\frac{1}{2}}$ es la 3-velocidad del elemento de fluido vista por los observadores de Euler.

Para la traza del tensor de esfuerzos del formalismo 3+1 tenemos:

$$S_F = S_F^\mu{}_\mu, \quad (3.42)$$

$$= T_\mu{}^\mu + \rho_F, \quad (3.43)$$

$$= \rho_0 h (W^2 - 1) + 3P. \quad (3.44)$$

Para un espacio-tiempo estático $W = 1$ ya que $v = 0$ por lo que $\rho_F = \rho_0 h - P$ y $S_F = 3P$.

De las ecuaciones de Euler en 3+1 (las cuales serán presentadas en el capítulo IV) se tiene la conservación de densidad de momento del fluido:

$$\partial_t S_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S_i = -D_k (\alpha S_i v^k) - D_i (\alpha P) - (\rho_0 h - P) D_i \alpha + \alpha K S_i. \quad (3.45)$$

Donde $S_i = \rho_0 h W v_i$ es la densidad de momento en la dirección i medida por los observadores de Euler del elemento de fluido en cuestión.

Para un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico tenemos:

$$\partial_t S_i = S_i = 0, \quad (3.46)$$

$$v_i = 0, \quad (3.47)$$

$$\beta_i = 0, \quad (3.48)$$

$$K = 0, \quad (3.49)$$

$$\partial_i = \delta_r^i \partial_i. \quad (3.50)$$

Por lo que la conservación de momento (balance de fuerzas) se reduce a:

$$\partial_r P = -\frac{\rho_0 h \partial_r \alpha}{\alpha}. \quad (3.51)$$

Y juntándola con la definición de h y la ecuación de estado (1.32) se llega finalmente a:

$$\frac{d\rho_0}{dr} = -\left(\frac{\rho_0}{\kappa \gamma \rho_0^{\gamma-1}} + \frac{\rho_0}{\gamma-1} \right) \frac{\partial_r \alpha}{\alpha}. \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) es una de las ecuaciones TOV. La ecuación final para ρ_0 no es más que la ecuación TOV acoplada a la ecuación de estado y reescrita en términos de ρ_0 . Más adelante se verá las condiciones a la frontera que se le impondrán a esta ecuación.

3.6. Condición maximal de lapso

Las funciones de norma son grados de libertad que dan las ecuaciones de Einstein, pueden elegirse como a uno le plazca, pero eso no necesariamente hace la resolución del problema más sencillo, incluso lo podría hacer más complicado eligiendo funciones de norma que no se adecúan al problema y que sean complicadas de resolver e incluso se pueden hacer elecciones triviales de estas que hacen al problema ya sea insoluble (*i.e* $\alpha = 0$ donde el tiempo no pasa) o que limite mucho el tiempo de las simulaciones numéricas (*i.e* $\alpha = 1$, lapso geodésico y el espacio-tiempo de Schwarzschild).

Un problema muy importante en relatividad numérica es la elección de funciones de norma que faciliten las simulaciones y el análisis físico del problema. Para esto se han desarrollado muchísimos tipos de estas. En este trabajo se utilizará el *lapso maximal*.

Utilizando un resultado que se obtendrá en el capítulo IV, tenemos que la evolución de la traza de curvatura extrínseca K para un espacio-tiempo general es:

$$\partial_t K = \beta^i \partial_i K - D_i D^i \alpha + \alpha [K^{ij} K_{ij} + 4\pi(\rho_{ADM} + S_{ADM})]. \quad (3.53)$$

Podemos siempre imponer la condición que el volumen de las hiper-superficies no cambie para los observadores eulerianos, lo cual se escribe matemáticamente como $K = \partial_t K = 0$ por lo que la ecuación anterior queda como:

$$D^i D_i \alpha = \alpha [K^{ij} K_{ij} + 4\pi(\rho_{ADM} + S_{ADM})]. \quad (3.54)$$

Esta es la ecuación del lapso maximal para el caso estático. El nombre máximo viene del hecho que cuando $K = 0$ el volumen de la hiper-superficie es máximo respecto a deformaciones de la hiper-superficie misma.

Esta condición queda muy *ad hoc* con un espacio-tiempo estático ya que en ese caso tenemos también $K^{ij} = 0$ por lo que la ecuación de lapso maximal se reduce a:

$$\gamma^{ij} D_i D_j \alpha = 4\pi\alpha(\rho_{ADM} + S_{ADM}). \quad (3.55)$$

Y finalmente en las coordenadas polares de área se obtiene:

$$\frac{d^2 \alpha}{dr^2} = 4\pi\alpha(\rho_{ADM} + S_{ADM}) + \frac{(\partial_r A) \partial_r \alpha}{2A} - 2 \frac{\partial_r \alpha}{r}. \quad (3.56)$$

Se puede notar que es muy similar a la ecuación de Klein-Gordon pero que tiene un término menos, esta es la diferencia entre el operador de onda en 4 dimensiones y 3. En el caso puramente fermiónico esta ecuación es equivalente a la ecuación TOV para $\Phi(r) = \ln \alpha^2$.

3.7. Condiciones a la frontera

El sistema de ecuaciones finales que se obtuvo son ecuaciones ordinarias de primer y segundo orden acopladas no lineales respecto a al radio. Tanto para las ecuaciones

de primer y segundo orden se necesitan condiciones en el origen ($r = 0$) como en infinito ($r = \infty$) de las funciones a encontrar y sus derivadas en el caso de segundo orden.

3.7.1. Condiciones en el origen

Las coordenadas esféricas son singulares en $r = 0$ por lo que esto puede producir que las cantidades físicas y las variables métricas tengan problemas de *regularización*, incluso aunque el origen no sea parte del espacio-tiempo como en el caso de un agujero negro.

En el caso analítico la métrica siempre es regular pero ésta tiene términos que van como $\frac{1}{r}$ los cuales debido a errores de truncación en el caso numérico son un desastre. La solución de esto para el caso numérico es imponerlo directamente y pedir que las cantidades físicas y geométricas estén bien definidas en el origen.

En coordenadas polares de área esto se hace pidiendo:

$$A(r)|_{r=0} = 1, \quad (3.57)$$

$$\left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (3.58)$$

$$\left. \frac{d\phi_0}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (3.59)$$

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (3.60)$$

Estas condiciones son conocidas como *condiciones de simetría* en el origen. Las ecuaciones para ρ_0, ϕ y α necesitan una condición inicial, la cual es:

$$\phi_0(r)|_{r=0} = \phi_0, \quad (3.61)$$

$$\rho_0(r)|_{r=0} = \rho_0, \quad (3.62)$$

$$\alpha(r)|_{r=0} = \alpha_0. \quad (3.63)$$

En este caso ϕ_0 y ρ_0 son parametros libres mientras que α_0 debe ser tal que se satisfaga la ecuación maximal, esto se hace utilizando la condición al infinito para éste.

3.7.2. Condiciones al infinito

Se quiere que los tipos de espacio-tiempos que generen estas ecuaciones sean tipo Schwarzschild, es decir que su comportamiento asintótico sea igual al de Schwarzschild. Para esto se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1 - \alpha}{r}, \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{d\phi_0}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} = -(m^2 - \omega^2)^{1/2} \phi. \quad (3.65)$$

La primera condición viene de pedir que $\alpha = 1 + O(r^{-1})$. Con esta ecuación podemos utilizar el hecho que si hacemos la reescalación:

$$\alpha \rightarrow \alpha / \alpha|_{r \rightarrow \infty} , \quad (3.66)$$

$$\omega \rightarrow \omega / \alpha|_{r \rightarrow \infty} . \quad (3.67)$$

La ecuación maximal para el lapso que igual (es lineal respecto a α), por lo que podemos poner cualquier valor para α_0 y luego reescalar α en todo el espacio-tiempo haciendo que se satisfaga la condición al infinito.

La segunda condición se pide ya que cuando $r \rightarrow \infty$ la ecuación de Klein-Gordon se convierte en:

$$\frac{d^2 \phi_0}{dr^2} \approx (m^2 - \omega^2) \phi_0 \quad (3.68)$$

Cuya solución general es:

$$\phi_0(r)|_{r \rightarrow \infty} \approx A(\omega)e^{-(m^2 - \omega^2)^{1/2}r} + B(\omega)e^{(m^2 - \omega^2)^{1/2}r} \quad (3.69)$$

Lo que se quiere es encontrar la ω tal que $B(\omega) = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esto es conocido como un problema de *eigenvalores*, donde se impone que el eigenvalor ω sea tal que ϕ_0 satisfaga la condición anterior. La razón por la que se pide esta condición es pedirle al campo escalar que no tenga nodos, es decir que los bosones que constituyen al campo estén en su estado *base* o *eigenestado*.

Numéricamente cuando se trata las coordenadas polares de área no se tiene en el dominio computacional el punto $r = \infty$ por lo que en realidad estas condiciones se cumplen aproximadamente, lo que se hace es escoger un radio lo suficientemente grande en el dominio para que éstas se satisfagan al orden deseado.

Si se quiere consultar unas coordenadas donde el infinito se compactifica al intervalo $[0, 1]$ y los métodos numéricos que se utilizan en ese caso se puede consultar [18]. Para consultar con mucho mayor detalle las condiciones de regularización de un espacio-tiempo esféricamente simétrico se recomienda revisar [6] y con más detalle el caso de las coordenadas polares de área en [18] con campo escalar.

Capítulo 4

Ecuaciones de evolución y horizontes aparentes

4.1. Ecuaciones de evolución en relatividad numérica

Las ecuaciones de evolución son una de las principales áreas de investigación en la relatividad numérica, ya que, para espacios-tiempos con cualidades muy diferentes, existen hasta el momento, distintas formulaciones en 3+1 que se adaptan mejor o peor a éstos y por ende son empleados a discreción en los distintos casos.

Las distintas formulaciones en 3+1 se distinguen entre si, por sus propiedades matemáticas y numéricas. Esto es evidente ya que físicamente todas deben resolver las ecuaciones de Einstein. Debido a que numéricamente siempre hay un error asociado a la aproximación que se utiliza para las simulaciones, siempre se violarán las ecuaciones de Einstein, lo importante es que sea de manera tal que difieran de la solución en un factor muy pequeño y que se mantenga así durante toda la evolución de nuestro espacio-tiempo. Esto último es conocido matemáticamente como un problema de Cauchy *bien-planteado* cuya definición dimos en el capítulo de métodos numéricos.

Desde el punto de vista analítico, es posible ver si una formulación de las ecuaciones de evolución en 3+1 son bien-planteadas a través del estudio de su *hiperbolicidad*, que conceptualmente quiere decir si su pasado causal es finito o no. Entre las distintas formulaciones se encuentran **ADM**, **ADM-York**, **BSSN**, Z_4 , **Bona-Massó**, **Kinder-Scheel-Teukolsky** y **NOR** entre otras. En este trabajo solo se expondrán las formulaciones ADM-York y BSSN.

4.1.1. Ecuaciones ADM

En el capítulo I encontramos las constricciones al contraer las ecuaciones de campo de Einstein 2 veces respecto a la 4-velocidad de los observadores eulerianos (constricción Hamiltoniana) y respecto al operador de proyección en las hipersuperficies y la 4-velocidad (constricción de momento). Nos queda solamente contraer las ecuaciones de Einstein dos veces respecto al operador de proyección hacia las hiper

superficies:

$$P_\mu^\alpha P_\nu^\beta G_{\mu\nu} = 8\pi P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

$$= 8\pi S_{\mu\nu} , \quad (4.2)$$

después, utilizando las ecuaciones de Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi y juntándolas con las ecuaciones anteriores se obtiene una ecuación de evolución para la curvatura extrínseca

$$\partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \left\{ {}^{(3)}R + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + 4\pi [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}] \right\} . \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones describen la evolución temporal de las seis componentes independientes de la curvatura extrínseca, las cuales en conjunto con la ecuación (1.18), dan la evolución total de los grados de libertad de las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones son conocidas como **ADM-York** porque son similares a las ecuaciones publicadas por primera vez en [1] que son las ecuaciones ADM originales pero reescritas por York en [31] donde hay que sumar un múltiplo de la restricción Hamiltoniana y hacer un cambio de variable para regresar a las ecuaciones originales.

Se puede probar que estas ecuaciones son debilmente hiperbólicas, lo que en términos de simulaciones computacionales las hace muy inestables. Es por esto que fué necesario desarrollar otras ecuaciones de evolución como las **BSSN**, sin embargo son el punto de partida de muchas formulaciones y por eso las presentamos aquí.

4.1.2. Formulación BSSN

La formulación BSSN (Baumgarte, Shapiro, Shibata y Nakamura) es una reformulación de las ecuaciones ADM que se realizó por primera vez por Shibata y Nakamura[26], pero no fue hasta 1998[7] que se mostró que era mucho más estable esta formulación en distintos espacios-tiempo ejemplo.

Dada una hiper-superficie Σ de nuestro espacio-tiempo, construimos una 3-métrica conforme a partir de la que ya teníamos asociada de la siguiente manera

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij} , \quad (4.4)$$

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma , \quad (4.5)$$

donde la elección del factor conforme para BSSN es tal que el determinante de la métrica conforme siempre es uno $\tilde{\gamma} = 1$. Si contraemos la ecuación (1.18) con la 3-métrica tenemos:

$$\gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K + 2D_i \beta^i , \quad (4.6)$$

utilizando un teorema de algebra lineal, el cual establece que dada una matriz simétrica se tiene que:

$$\gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} = \frac{\partial_t \gamma}{\gamma} , \quad (4.7)$$

por lo tanto de aquí obtenemos la ecuación de evolución para el determinante de la métrica:

$$\partial_t \gamma = \gamma (-2\alpha K + 2D_i \beta^i), \quad (4.8)$$

lo que implica la siguiente ecuación de evolución para ϕ :

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6} (\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \phi. \quad (4.9)$$

En la formulación BSSN se separa también a la curvatura extrínseca en su traza K y su parte sin traza A_{ij} , así como la misma transformación conforme en el caso anterior para la parte sin traza:

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3} K \gamma_{ij}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}, \quad (4.11)$$

de estas definiciones y de las ecuaciones ADM podemos dar la mayor parte de las ecuaciones de evolución BSSN:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \quad (4.12)$$

$$\partial_t \phi - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{A}_{ij} = & e^{-4\phi} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{ST} \\ & + \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\partial_t K - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (S + \rho), \quad (4.15)$$

donde ST quiere decir la parte *sin traza*. Hay que notar que en las ecuaciones de evolución que corresponden a la curvatura extrínseca aparecen derivadas covariantes respecto a la métrica usual, así como el tensor de Ricci correspondiente a ésta. La formulación BSSN describe a estas cantidades en términos de las conformes, utilizando unas nuevas variables $\tilde{\Gamma}^i$ tales que

$$\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (4.16)$$

ya que

$$\tilde{\Gamma}^i = e^{4\phi} \Gamma^i + 2\tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \phi, \quad (4.17)$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi, \quad (4.18)$$

donde \tilde{R}_{ij} es el tensor de Ricci asociado a la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} = & -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{lm} \partial_l \partial_m \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \partial_j) \tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k \tilde{\Gamma}_{(ij)k} \\ & + \tilde{\gamma}^{lm} \left(2\tilde{\Gamma}_{l(i} \tilde{\Gamma}_{j)km} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $Z_{(ij)} = \frac{1}{2} \{Z_{ij} + Z_{ji}\}$ es la parte simétrica del tensor \mathbf{Z} .

Podemos también representar las constricciones de Einstein en términos de las variables conformes como:

$$R = \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}K^2 + 16\pi\rho, \quad (4.20)$$

$$\partial_j \tilde{A}^{ij} = -\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} - 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K + 8\pi \tilde{j}^i, \quad (4.21)$$

donde $\tilde{j}^i = e^{4\phi} j^i$. Al expresar las cantidades físicas en términos de las $\tilde{\Gamma}$, solo necesitamos una ecuación de evolución para éstas y tendremos unas ecuaciones de evolución en 3+1 de las ecuaciones de Einstein. Utilizando igualmente la ecuación (1.18), (4.18) y añadiéndole un múltiplo de la constricción de momento(4.20) obtenemos una ecuación de evolución para éstas:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\ &+ 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{j}^i \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La razón por la que se añade un múltiplo de la constricción de momento al igual que en el caso ADM-York es que de lo contrario el sistema de ecuaciones es altamente inestable debido al término $\partial_j \tilde{A}^{ij}$ que queda eliminado en la ecuación de evolución de las $\tilde{\Gamma}^i$'s. Lo que hace que la formulación final de BSSN sea

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \quad (4.23)$$

$$\partial_t \phi - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{ST} \\ &+ \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\partial_t K - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (S + \rho), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \mathcal{L}_{\tilde{\beta}} \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k \\ &- 2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{j}^i \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

También existen razones teóricas para utilizar esta formulación. La primera de éstas es que al evolucionar por separado la parte sin traza de la curvatura extrínseca y su traza permite tener mas control sobre las condiciones de foliación de las hipersuperficies, ya que la mayoría de éstas depende de la traza de la curvatura extrínseca. La segunda y tal vez más importante es que las ecuaciones BSSN son fuertemente hiperbólicas lo que garantiza estabilidad en la evolución numérica, esto es particularmente importante ya que en relatividad se trabajan con espacios-tiempo con singularidades físicas y en estos casos es muy facil violar numéricamente las constricciones por lo que la evolución debe ser lo más estable posible (aún que no basta

que estas sean estables, hay que hacer un tratamiento analítico de las ecuaciones, así como un tratamiento numérico). Una debilidad de las ecuaciones BSSN es que las $\tilde{\Gamma}^i$ no son tensores por lo que no funciona igual cuando se hace un cambio de coordenadas. Si se desea consultar una formulación BSSN en coordenadas curvilineas puede consultarse en [21]. Si se desea ver un desarrollo más completo de las ecuaciones ADM, BSSN y otros formalismos se puede consultar en [6].

4.1.3. BSSN en simetría esférica

El uso de las ecuaciones BSSN en simetría esférica ha sido problemático, ya que éstas no están escritas de forma covariante y más aún se pide que el determinante de la métrica conforme sea uno, cuando en coordenadas curvilineas esto en general no es cierto. La formulación BSSN que utilizaremos para las simulaciones está escrita en simetría esférica y fue hecha en [12] y [21], pero, debido a que el formalismo necesario para presentarlas es muy extenso, omitiremos presentarlo en este trabajo. Cabe recordar que el carácter evolutivo de ambas formulaciones es el mismo, y que la diferencia es solamente la adecuación a las coordenadas espaciales curvi-líneas.

4.2. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler son las ecuaciones que describen la evolución de un fluido que no sufre esfuerzos cortantes, es decir, un fluido sin viscosidad, donde la viscosidad es la fricción entre las partículas que constituyen el fluido, como lo describimos en el capítulo 1. Estas ecuaciones fueron concebidas por primera vez por el físico-matemático Leonhard Euler en el siglo **XVII**, aun que claramente para un espacio-tiempo Newtoniano, aun así Leonhard Euler se considera el científico más prolífico que ha habido hasta nuestros días y conceptualmente al nivel físico las ecuaciones siguen siendo las mismas a pesar de llevar más de 250 años que fueron publicadas.

4.2.1. Ecuaciones de Euler para relatividad general

Dado el tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto:

$$T_{\alpha\beta}^F = (\rho_0 h) u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta}, \quad (4.28)$$

Podemos definir las siguientes cantidades:

$$W = -u^\mu n_\nu, \quad (4.29)$$

$$v^i = \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (4.30)$$

lo que implica

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.31)$$

Donde W es claramente el factor de Lorentz que los observadores de Euler asocian a un elemento de fluido con velocidad v^i donde $v^2 = \gamma_{ij}v^iv^j$. W y v ya habían sido mencionadas en el capítulo III cuando obtuvimos los datos iniciales del fluido. Dadas estas cantidades podemos definir otras que son centrales en las ecuaciones de evolución:

$$D = \rho_0 W, \quad (4.32)$$

$$S^\alpha = \rho_0 h W u^\alpha, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{E} = \rho_0 h W^2 - P - D, \quad (4.34)$$

Donde D es la densidad de masa en reposo, S^i es la densidad de momento en la dirección i introducida también en el capítulo III y \mathcal{E} es la diferencia entre la densidad de energía total y la densidad de masa en reposo ($\mathcal{E} = \rho_{ADM} - D$). Todas estas cantidades representan estas propiedades físicas solamente cuando son medidas por los observadores eulerianos. A través de las ecuaciones de conservación podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_\beta^{F\alpha} &= 0, \\ &= \partial_\alpha T_\beta^{F\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha T_\beta^{F\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu T_\mu^{F\alpha}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} \partial_\mu g_{\alpha\nu} \\ &= \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por lo que:

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} T_\beta^{F\alpha}) = \sqrt{-g} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu T_\mu^{F\alpha}, \quad (4.37)$$

En términos de nuestras nuevas variables:

$$T_\beta^{F\alpha} = \frac{u^\alpha S_\beta}{W} + P \delta_\beta^\alpha, \quad (4.38)$$

Y utilizando que $\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}$ llegamos a:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\alpha \sqrt{\gamma} \left[\frac{u^\mu S_\nu}{W} + P \delta_\nu^\mu \right] \right) &= \left[\frac{S_\nu U^\mu}{W} + P \delta_\nu^\mu \right] \partial_\mu (\alpha \sqrt{\gamma}) \\ &+ \alpha \sqrt{\gamma} \partial_\mu \left[\frac{S_\nu U^\mu}{W} + P \delta_\nu^\mu \right] \\ &= [S_\nu u^\mu + P \delta_\nu^\mu] \partial_\mu (\alpha \sqrt{\gamma}) \\ &+ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\frac{u^\mu}{W} \partial_\mu S_\nu + S_\nu \partial_\mu \left(\frac{u^\mu}{W} \right) + \partial_\mu (P \delta_\nu^\mu) \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ahora computamos la componente espacial en la dirección i y esto nos da la conservación de momento en en la dirección x^i y usando que $u^k = Wv^k - \frac{W\beta^k}{\alpha}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\alpha\sqrt{\gamma} \left[\frac{u^\mu S_i}{W} + P\delta_i^\mu \right] \right) &= \left[\frac{\alpha S_i}{W} u^\mu \partial_\mu \sqrt{\gamma} + P\partial_i (\alpha\sqrt{\gamma}) + \frac{\sqrt{\gamma} S_i}{W} u^\mu \partial_\mu \alpha \right] \\ &+ \alpha\sqrt{\gamma} \left[\frac{u^0}{\alpha u^0} \partial_t S_i + \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) \partial_k S_i + S_i \partial_\mu \left(\frac{u^\mu}{W} \right) + \partial_\mu (P\delta_i^\mu) \right], \\ &= \partial_t [S_i \sqrt{\gamma}] + \left(\alpha v^k - \beta^k \right) \partial_k [S_i \sqrt{\gamma}] + \partial_i (P\alpha\sqrt{\gamma}) \\ &+ \frac{\sqrt{\gamma} S_i}{W} u^\mu \partial_\mu \alpha + \alpha\sqrt{\gamma} S_i \partial_\mu \left(\frac{u^\mu}{W} \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

Haciendo un álgebra larga y utilizando que $W = \alpha u^0$ se puede mostrar que:

$$\alpha\sqrt{\gamma} S_i \partial_\mu \left(\frac{u^\mu}{W} \right) = -\frac{\sqrt{\gamma} S_i}{W} u^\mu \partial_\mu \alpha + S_i \sqrt{\gamma} \partial_k \left(\alpha v^k - \beta^k \right), \quad (4.41)$$

Por lo que podemos escribir la conservación de momento en la dirección i como:

$$\partial_t [S_i \sqrt{\gamma}] + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[S_i \left(\alpha v^k - \beta^k \right) \right] + \alpha P \delta_i^k \right\} = \alpha\sqrt{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\mu T_\mu^F{}^\alpha, \quad (4.42)$$

Haciendo un procedimiento similar en la componente temporal llegamos a la conservación de la energía expresada a través de una ecuación de evolución para \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \partial_t (\sqrt{\gamma} \mathcal{E}) + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[\mathcal{E} \left(\alpha v^k - \beta^k \right) + \alpha P v^k \right] \right\} \\ = \alpha^2 \sqrt{\gamma} \left(T^{F0\mu} \partial_\mu \ln \alpha - \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{F\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos conocer más sobre el comportamiento de los fluidos recordando que en general estos conservan el número de partículas. La conservación del número de partículas se puede expresar como:

$$\nabla_\nu (\rho_0 u^\nu) = 0, \quad (4.44)$$

Haciendo un procedimiento similar al caso de la conservación de energía-momento (y recordando que $\nabla_\nu (\rho_0 u^\nu) = \partial_\nu (\sqrt{-g} \rho_0 u^\nu)$) llegamos a una expresión de la conservación del número de partículas en términos de una ecuación de evolución para D :

$$\partial_t (\sqrt{\gamma} D) + \partial_k \left[\sqrt{\gamma} D \left(\alpha v^k - \beta^k \right) \right] = 0. \quad (4.45)$$

Cuya forma es la más simple de las ecuaciones anteriores. Con estas tres ecuaciones, la ecuación de estado que dimos en la introducción y las relaciones entre \mathcal{E} , D , S_i con ρ_0 , W y h podemos describir completamente la dinámica de un fluido no viscoso.

4.2.2. Ecuaciones de Euler en el formalismo 3+1

Las ecuaciones de Euler en relatividad general que presentamos en la sección anterior tienen el defecto de no estar expresadas de manera que sean 3-covariante así como involucrar términos como las Γ 's que no pueden ser empleadas directamente con las ecuaciones de Einstein en 3+1, por lo que en esta sección se presentarán las ecuaciones de Euler de tal manera que estén expresadas en el formalismo 3+1. Solo presentaremos el caso de la conservación de momento y el resto se puede llegar de un procedimiento análogo o uno más sencillo.

En la sección anterior vimos que la conservación de momento en la dirección i es:

$$\partial_t [S_i \sqrt{\gamma}] + \partial_k \left\{ \sqrt{\gamma} \left[S_i (\alpha v^k - \beta^k) \right] + \alpha P \delta_i^k \right\} = \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\mu T_\mu^F{}^\alpha, \quad (4.46)$$

Podemos ver que:

$$\alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\mu T_\mu^F{}^\alpha = \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\mu \left\{ \frac{u^\alpha S_\mu}{W} + P \delta_\mu^\alpha \right\}, \quad (4.47)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P \Gamma_{i\alpha}^\mu \delta_\mu^\alpha &= P \Gamma_{i\mu}^\mu \\ &= P \frac{\partial_i \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \\ &= P \frac{\partial_i (\alpha \sqrt{\gamma})}{\alpha \sqrt{\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

Y recordando que $S^\mu = \rho_0 h W u^\mu$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{u^\alpha S_\mu}{W} \Gamma_{i\alpha}^\mu &= \frac{1}{2} \frac{S^\mu u^\nu}{W} \partial_i g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 h u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

Por lo que:

$$\alpha \sqrt{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\mu T_\mu^F{}^\alpha = P \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma}) + \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\gamma} \rho_0 h u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu}, \quad (4.50)$$

Luego tenemos que:

$$\frac{1}{2} \alpha u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \alpha \left\{ u^0 u^0 \partial_i g_{00} + 2u^0 u^k \partial_i g_{0k} + u^j u^k \partial_i g_{kj} \right\} \quad (4.51)$$

De las definiciones de la métrica y $u^j = W v^j - W \frac{\beta^j}{\alpha}$ tenemos:

$$\frac{1}{2} \alpha \left[u^0 u^0 \partial_i g_{00} + 2u^0 W \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) \partial_i \beta_k \right] = W^2 \left[-\partial_i \alpha + v^k \partial_i \beta_k - {}^{(3)}\Gamma_{ik}^n \beta_n \frac{\beta^k}{\alpha} \right], \quad (4.52)$$

Y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha u^j u^k \partial_i \gamma_{kj} &= \left[u^k (u_n - u^0 \beta_n) \frac{1}{2} \gamma^{nj} \partial_i \gamma_{jk} \right], \\
&= \alpha \left[u^k (u_n - u^0 \beta_n)^{(3)} \Gamma_{ik}^n \right], \\
&= W^2 \left[{}^{(3)}\Gamma_{ik}^n \frac{u^k v_n}{u^0} \right] + W u^k \beta_n^{(3)} \Gamma_{ik}^n,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores llegamos a:

$$\frac{1}{2}\alpha u^\mu u^\nu \partial_i g_{\mu\nu} = W^2 \left[-\partial_i \alpha + v^k D_i \beta_k + {}^{(3)}\Gamma_{ik}^n \frac{u^k v_n}{u^0} \right], \tag{4.54}$$

Mientras que de la ecuación (1.31) de la evolución de la 3-métrica tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_t (\sqrt{\gamma} S_i) = \partial_t S_i - \alpha K S_i + S_i D_j \beta^j, \tag{4.55}$$

$$\tag{4.56}$$

Y también podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_k (\sqrt{\gamma} S_i (\alpha v^k - \beta^k)) &= \partial_k (S_i (\alpha v^k - \beta^k)) + (S_i (\alpha v^k - \beta^k)) \frac{1}{2} \gamma^{nj} \partial_k \gamma_{nj}, \\
&= \partial_k (S_i (\alpha v^k - \beta^k)) + {}^{(3)}\Gamma_{nk}^m S_i (\alpha v^k - \beta^k), \\
&= D_k (S_i (\alpha v^k - \beta^k)) + {}^{(3)}\Gamma_{ik}^n S_n (\alpha v^k - \beta^k),
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Por lo que juntando nuestras ecuaciones anteriores llegamos a que la conservación de momento en la dirección i implica:

$$\begin{aligned}
\partial_t S_i - \alpha K S_i + D_k (\alpha S_i v^k) - \beta^k D_k S_i + S_m (\alpha v^k - \beta^k) {}^{(3)}\Gamma_{ik}^m + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} P) \\
= \frac{P}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma}) + \rho_0 h W^2 \left[-\partial_i \alpha + v^k D_i \beta_k + {}^{(3)}\Gamma_{ik}^n \frac{u^k v_n}{u^0} \right],
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Y despejando llegamos a:

$$\partial_t S^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S^i + D_k \left[\alpha (S^i v^k + \gamma^{ik} P) \right] = -(\mathcal{E} + D) D^i \alpha + \alpha K S^i, \tag{4.59}$$

La cual es la forma final de la conservación de momento en la dirección i que está expresada completamente en cantidades del fluido y cantidades 3+1.

Las otras ecuaciones se transforman en un procedimiento similar y éstas son:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{E} - \beta^k \partial_k \mathcal{E} + D_k \left[\alpha v^k (\mathcal{E} + P) \right] &= (\mathcal{E} + P + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) \\
&+ \alpha K (\mathcal{E} + P)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\partial_t D - \beta^k \partial_k D + D_k (\alpha D v^k) = \alpha K D, \tag{4.61}$$

Por lo que las ecuaciones de Euler en formalismo 3+1 son:

$$\partial_t S^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S^i + D_k \left[\alpha \left(S^i v^k + \gamma^{ik} P \right) \right] = -(\mathcal{E} + D) D^i \alpha + \alpha K S^i, \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} - \beta^k \partial_k \mathcal{E} + D_k \left[\alpha v^k (\mathcal{E} + P) \right] &= (\mathcal{E} + P + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha) \\ &+ \alpha K (\mathcal{E} + P) \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\partial_t D - \beta^k \partial_k D + D_k \left(\alpha D v^k \right) = \alpha K D, \quad (4.64)$$

En donde las cantidades ADM están definidas en términos de S_i, \mathcal{E} y D como

$$\rho_{ADM} = \mathcal{E} + D, \quad (4.65)$$

$$j_{ADM}^i = S^i, \quad (4.66)$$

$$S_{ADM}^{ij} = \rho_0 h W^2 v^i v^j + \gamma^{ij} P. \quad (4.67)$$

Si se desea consultar más sobre estas ecuaciones y sus propiedades, así como el caso en relatividad especial y sus propiedades matemáticas como la hiperbolicidad, se puede consultar el capítulo VII de [6] (aun que se salta varios pasos algebraicos que aquí se muestran).

4.2.3. Ecuaciones de Euler en simetría esférica

Supongamos ahora que nuestro espacio-tiempo es esféricamente simétrico y partamos de la conservación de momento en 3+1,

$$\partial_t S^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S^i + D_k \left[\alpha \left(S^i v^k + \gamma^{ik} P \right) \right] = -(\mathcal{E} + D) D^i \alpha + \alpha K S^i, \quad (4.68)$$

Esto podemos reescribirlo directamente como

$$\begin{aligned} \partial_t S^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} S^i + \partial_k \left[\alpha \left(S^i v^k \right) \right] + \partial^i (\alpha P) + \alpha \left\{ v^k {}^{(3)}\Gamma_{lk}^i S^l + S^i {}^{(3)}\Gamma_{lk}^k v^l \right\} \\ = -(\mathcal{E} + D) D^i \alpha + \alpha K S^i. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Utilizando que en simetría esférica $S^i = (S^r, 0, 0)$, $v^i = (v^r, 0, 0)$, $\beta^i = (\beta^r, 0, 0)$ y que podemos reescribir el tensor de curvatura extrínseca como:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} AK_A & 0 & 0 \\ 0 & r^2 BK_B & 0 \\ 0 & 0 & r^2 B \sin^2 \theta K_B \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

la forma final queda como

$$\begin{aligned} \partial_t S^r &= S^r \partial_r \beta^r - \beta^r \partial_r S^r - \partial_r [\alpha (S^r v^r)] - \partial_r (\alpha P) - \frac{1}{A} \{ \partial_r (\alpha P) + \alpha v^r S^r \partial_r A - (\mathcal{E} + D) \partial_r \alpha \} \\ &- S^r v^r \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) + \alpha (K_A + 2K_B) S^r. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Este proceso es análogo para las otras ecuaciones de las que obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} = & \beta^r \partial_r \mathcal{E} - \partial_r [\alpha v^r (\mathcal{E} + P)] - \alpha (\mathcal{E} + P) \left\{ \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) + \frac{\partial_r A}{2A} \right\} \\ & + (\mathcal{E} + P + D) [\alpha (v^r)^2 K_A - v^r \partial_r \alpha] + \alpha (K_A + 2K_B) (\mathcal{E} + P), \end{aligned} \quad (4.72)$$

para la conservación de la densidad de energía en reposo y

$$\partial_t D = \beta^r \partial_r D - \partial_r (\alpha D v^r) - \alpha D \left\{ \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) + \frac{\partial_r A}{2A} \right\} + \alpha D (K_A + 2K_B). \quad (4.73)$$

Si se desea ver más sobre estas ecuaciones se puede consultar [6].

4.3. Condiciones de norma

Existe un gran número de condiciones de norma que han sido empleadas para la evolución de las ecuaciones de Einstein. Esto es incluso in area en relatividad numérica(como se mencionó en el capítulo III). Aquí presentaremos las funciones de norma que mejor se adecuan a la evolución de las estrellas bosón-fermión para los casos estables e inestables. Debido a que en las evoluciones se presentan horizontes aparentes nuestra elección será el lapso maximal y el vector de corrimiento gamma driver. La explicación de la elección de las condiciones de norma la presentaremos simultaneamente con éstas.

4.3.1. Lapso maximal

Cuando se forma un horizonte de eventos en el espacio-tiempo que se está modelando, si se elige arbitrariamente a los observadores, en general, éstos tienden a cruzar el horizonte de eventos y eventualmente llegan a la singularidad desnuda que hay dentro (teorema de Penrose). Esto mata rápidamente a las simulaciones numéricas.

Queremos observadores (hiper-superficies) que nunca lleguen a la singularidad. Esto se logra deteniendo la evolución de los observadores cercanos a la singularidad.

La elección de norma que mejor satisface esto es el lapso maximal presentado en el capítulo III, donde pedimos $\partial_t K = K = 0$ y llegamos a:

$$D^i D_i \alpha = \alpha [K^{ij} K_{ij} + 4\pi(\rho_{ADM} + S_{ADM})]. \quad (4.74)$$

En el caso de un agujero negro de Schwarzschild, se puede probar que las hiper-superficies convergen a una hiper-superficie límite $r = 3M/2$ que está dentro del horizonte de eventos pero no llega a la singularidad en el caballito de batalla que se utilizó durante muchos $r = 0$ [6]. Esto quiere decir que el lapso maximal evade la singularidad física.

El lapso maximal fué el caballito de batalla para las simulaciones en relatividad numérica durante muchos años. Debido a que en 2 o más variables es una ecuación elíptica, el lapso maximal se ha vuelto una condición impráctica para estos casos, ya que consume el 90 % del tiempo de las simulaciones y existen condiciones de lapso hiperbólicas que son casi igual de buenas para evitar la singularidad como $1+log$ y el lapso *armónico*[6].

4.3.2. Lapso maximal en simetría esférica

Aun que en 2 o más variables el lapso maximal es una ecuación elíptica, en simetría esférica el lapso maximal se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Partiendo de

$$D^i D_i \alpha = \alpha [K^{ij} K_{ij} + 4\pi(\rho_{ADM} + S_{ADM})] , \quad (4.75)$$

y recordando que en simetría esférica la curvatura extrínseca se expresa como

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} AK_A & 0 & 0 \\ 0 & r^2 BK_B & 0 \\ 0 & 0 & r^2 B \sin^2 \theta K_B \end{pmatrix} , \quad (4.76)$$

llegamos a

$$\frac{d^2 \alpha}{dr^2} = \alpha(4\pi[\rho_{ADM} + S_{ADM}] + K_A^2 + 2K_B^2) + \frac{(\partial_r A) \partial_r \alpha}{2A} - 2 \frac{\partial_r \alpha}{r} . \quad (4.77)$$

Ésta es la ecuación que se debe satisfacer en cada paso de tiempo. Debemos notar que la solución a esta ecuación no siempre será la misma ya que rho_{ADM} , S_{ADM} , A , B , K_A y K_B cambian en el tiempo, por lo que podemos hablar de la evolución del lapso en el tiempo.

En simetría esférica resolver para el lapso maximal no representa comparativamente un mayor gasto de recursos computacionales, mientras que sigue siendo la mejor condición de norma en cuanto a evitar la singularidad física. Aun así existen algunos problemas que veremos a continuación. Si se desea ver con más cuidado el desarrollo del lapso maximal así como otras condiciones de foliación puede revisarse [6].

4.3.3. Estiramiento de las hiper-superficies

Las causas conocidas para el estiramiento de las hiper-superficies son dos. Una causa es debido a que cuando se tiene un agujero negro, las elecciones que se hacen respecto al lapso, son tales que éstas eviten que los observadores lleguen a la singularidad física, lo que hace que para los observadores Eulerianos el tiempo dentro del horizonte de eventos tenga un paso más lento respecto a cada hiper-superficie en la región del horizonte de eventos. Numéricamente esto hace que la separación entre hiper-superficies sea muy pequeña. Esto puede ser visto como un envolvimiento

de las hiper-superficies al rededor de la singularidad física. Esto genera en el caso discreto que la distancia espacial entre los observadores cercanos al horizonte crezca rápidamente conforme pasa el tiempo, lo que produce gradientes fuertes en la componente espacial de la 3-métrica. Este fenómeno de estiramiento de hiper-superficies eventualmente produce que cualquier simulación numérica falle.

Si se desea consultar más respecto al fenómeno de estiramiento de las hiper-superficies, puede consultarse los capítulos IV y VI de [6].

4.3.4. Vector de corrimiento Gamma driver

El vector de corrimiento es una elección de norma, lo que permite escogerlo de tal manera que facilite o nos permita obtener más información sobre nuestras simulaciones de un espacio-tiempo. La opción más sencilla de implementar es hacer $\beta^i = 0$, la cual funciona bastante bien en diversos tipos de espacio-tiempos, pero esta no es necesariamente la mejor opción. Por ejemplo, en el caso de los espacio-tiempos con la formación de horizontes aparentes, se tiene el fenómeno de estiramiento de las hiper-superficies que conforman al espacio-tiempo y la elección $\beta^i = 0$ no permite contrarrestar este efecto.

Las primeras elecciones de $\beta^i \neq 0$ fueron en el espíritu de la condición de lapso maximal, donde el vector de corrimiento satisface una ecuación diferencial parcial de tipo elíptica tal que los elementos de volumen de las hiper-superficies satisficieran algunas propiedades como *distorsión mínima* ó *esfuerzos mínimos*. Este tipo de condiciones elípticas son muy difíciles de resolver y consumen muchísimo tiempo de las simulaciones. No solo eso si no que, tampoco producen necesariamente algunos de los efectos deseados como curar el estiramiento de las hiper-superficies[6].

Dado esto uno puede pensar en que el vector de corrimiento satisfaga una ecuación de evolución que tienda a la solución elíptica. Esto es conocido como una condición *driver* por que se dirige la evolución del sistema al comportamiento de la solución elíptica.

Dentro de las condiciones driver para el vector de corrimiento existen las del tipo *parabólico*(una condición sobre la primera derivada en el tiempo) y el tipo *hiperbólico* que son de la forma:

$$\partial_t^2 \beta^i = \alpha \xi \left(D_j D^j \beta^i + \frac{1}{3} D^i D_j \beta^j - R_j^i \beta^j - 2D_j [\alpha A^{ij}] \right), \quad (4.78)$$

Donde $\xi > 0$, R_j^i son las componentes espaciales del Ricci de la 4-métrica y A^{ij} es la parte sin traza del tensor de curvatura extrínseca. Las condiciones de tipo hiperbólico tienen la ventaja de reaccionar rápidamente a cambios en el comportamiento del sistema y de no volver al sistema que se está resolviendo muy dependiente del comportamiento que éstas tengan.

Cuando uno quiere que la distorsión de elementos de volumen sea mínima, llegamos

a la siguiente condición sobre la 3-métrica conforme $\tilde{\gamma}$:

$$D_j (\partial_t \tilde{\gamma}^{ij}) = 0, \quad (4.79)$$

Esta condición es igual a primer orden en derivadas de la métrica a:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} &= 0, \\ &= \partial_t \tilde{\Gamma}^i, \end{aligned} \quad (4.80)$$

Esta última ecuación es sumamente útil cuando se utiliza en conjunto con las ecuaciones BSSN por que restringe a las $\tilde{\Gamma}^i$ (lo cual hace la evolución más sencilla) y se conoce como *gamma freezing*, ya que congela a las $\tilde{\Gamma}^i$. En este caso podemos imponer una condición sobre el 3-vector de corrimiento del tipo hiperbólico, haciendo que la evolución de este tienda al caso de Gamma freezing conocido como *Gamma Driver*, que tiene la forma:

$$\partial_t^2 \beta^i = \alpha^2 \xi \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta \partial_t \beta^i, \quad (4.81)$$

donde hemos agregado un término disipativo, ya que en la práctica el vector de corrimiento oscila fuertemente y esto genera problemas en las simulaciones numéricas. Notemos que el parametro η debe ser mayor que cero para que el cumpla su caracter de término disipativo. Más aún, si se hace un análisis dimensional de η notamos que:

$$[\eta] = m^{-1}. \quad (4.82)$$

Por lo que para que cumpla bien su función debe escogerse su valor dependiendo de las características del sistema que se está resolviendo. Un buen criterio es que $\eta \approx \frac{1}{M_{ADM}}$ para tener evoluciones estables.

En simetría esférica tenemos

$$\partial_t^2 \beta^r = \alpha^2 \xi \partial_t \tilde{\Gamma}^r - \eta \partial_t \beta^r. \quad (4.83)$$

Explicaremos a continuación la manera en que la condición Gama driver cura el estiramiento de las hiper-superficies. Inicialmente ($t = 0$), el vector de corrimiento puede tener el valor inicial que sea, usualmente se toma como cero. Conforme evoluciona la simulación y comienza el estiramiento, el vector de corrimiento reacciona comenzando a jalar puntos de la región de la hiper-superficie cercana al origen, la cual es asintóticamente plana, lo que restituye a la hiper-superficie de los puntos que han sido tragados por el horizonte de eventos, así como disminuye la separación entre estos que había generado el estiramiento.

Una de las desventajas de la condición Gamma driver es que no es 3-covariante por lo que al igual que cuando se usa la formulación BSSN, debe ser modificada cuando se cambia de coordenadas.

El vector de corrimiento Gamma driver ha permitido evoluciones estables muy largas de horizontes aparentes, incluso para el caso de colisiones de agujeros negros.

Si se quiere más información sobre las distintas condiciones que se han empleado sobre el vector de corrimiento, igualmente puede consultarse en [6].

4.4. Horizontes aparentes

Vimos en el capítulo I la definición de un agujero negro y lo que es su horizonte de eventos en el caso en que el espacio-tiempo es asintóticamente plano. Sin embargo esta definición no es muy útil en el formalismo 3+1, ya que ésta es una condición global sobre el espacio-tiempo, por lo que no se puede determinar el horizonte de eventos hasta haber terminado la simulación. Esto es problemático debido a que no se puede extraer información durante la evolución así como no es posible aplicar tratamientos para evitar la singularidad física que hay dentro de éste.

Por fortuna, Roger Penrose concibió la definición de un *horizonte aparente*. Para definir rigurosamente un horizonte aparente, necesitamos las siguientes definiciones:

Físicamente, un horizonte aparente es la superficie más externa al origen sobre la cual, cualquier rayo de luz que es emitido dentro de ésta (o en su interior) queda atrapado y no logra salir de la superficie.

Supongamos que existe una superficie \mathbf{S} de 2 dimensiones, inmersa en una hipersuperficie Σ . Podemos definir un 4-vector espacialoide \vec{s} normal unitario, que apunta en la dirección saliente a \mathbf{S} . También podemos definir el 4-vector temporaloide \vec{t} , tal que \vec{t} es normal unitario, que apunta hacia el futuro de \mathbf{S} . Con estas definiciones podemos definir:

$$\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{s} + \vec{t}) . \quad (4.84)$$

Claramente $l^\alpha l_\alpha = 0$ por su definición e igualmente por ésta, \vec{l} es un 4-vector nulo saliente de \mathbf{S} .

Dado que \mathbf{S} es una subvariedad de \mathbf{M} , por lo que la métrica de \mathbf{M} , $g_{\mu\nu}$ induce una métrica $B_{\mu\nu}$ sobre \mathbf{S} ,

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu - s_\mu s_\nu . \quad (4.85)$$

Podemos definir la expansión Θ de las geodésicas nulas, salientes de \mathbf{S} como

$$\begin{aligned} \Theta &= -\frac{1}{2} B^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\vec{l}} B_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} B^{\mu\nu} (\mathcal{L}_{\vec{t}} B_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\vec{s}} B_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.86)$$

pero tenemos que,

$$\mathcal{L}_{\vec{s}} B_{\mu\nu} = -2X_{\mu\nu} . \quad (4.87)$$

Donde claramente $X_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura extrínseca de \mathbf{S} inmersa en Σ . Debido a esto podemos reexpresar a Θ como

$$\Theta = D_i s^i - K + K_{ij} s^i s^j , \quad (4.88)$$

donde hemos usado las definiciones de \vec{s} , \vec{t} , \mathbf{B} y $K_{\mu\nu}$.

Para que \mathbf{S} sea un horizonte aparente, primero pedimos que los elementos de área a lo largo de \vec{t} no cambien, es decir

$$\begin{aligned}\Theta &= D_i s^i - K + K_{ij} s^i s^j \\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.89}$$

después para que \mathbf{S} sea un horizonte aparente, tenemos que pedir que ésta sea la superficie más externa que satisfaga $\Theta = 0$, ya que puede haber muchas hiper-superficies internas que vuelvan a cumplir esta condición.

Si desea ver con mayor detalle el desarrollo para encontrar horizontes aparentes se puede consultar [6]. Si se desea conocer más información sobre las técnicas empleadas en este desarrollo se puede consultar [29] y [22].

4.4.1. Horizontes aparentes en simetría esférica

Recordando que una métrica general de las hiper-superficies de un espacio-tiempo esféricamente simétrico es

$$dl^2 = A(t, r)dr^2 + r^2 B(t, r)d\Omega^2.\tag{4.90}$$

En este caso tenemos:

$$s^i = (1/\sqrt{A}, 0, 0)\tag{4.91}$$

por lo que podemos reescribir la ecuación para la expansión Θ de las geodésicas nulas salientes de un horizonte aparente como

$$\begin{aligned}\Theta &= \partial_r s^r + {}^{(3)}\Gamma_{jr}^j s^r - (\gamma^{ij} K_{ij}) + K_{rr} (s^r)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_r A}{A^{3/2}} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial_r A}{A} + \frac{4}{r} + \frac{2\partial_r B}{B} \right\} \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{2K_{\theta\theta}}{r^2 AB} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2 BA},\end{aligned}\tag{4.92}$$

por lo que encontrar a el horizonte aparente se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r B}{B} \right) + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2 AB} = 0.\tag{4.93}$$

De esta manera podemos revisar en cada hiper-superficie si se ha formado un horizonte aparente, simultaneamente con el desarrollo de las simulaciones. Esta ecuación no debe tomarse como una ecuación diferencial para la componente angular de la métrica B , sino una ecuación algebraica que se satisface para $r = r_{hor}$ donde r_{hor} es la posición del horizonte aparente.

Capítulo 5

Resultados: Datos iniciales

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas, así como las características de los parámetros empleados en éstas. Las simulaciones fueron hechas con el código *Ollinsphere 2.0*, el cual fue desarrollado por el Dr. Miguel Alcubierre y el grupo de relatividad numérica del departamento de gravitación en el *Instituto de Ciencias Nucleares* de la **UNAM**.

Para construir los datos iniciales que representan un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico y en coordenadas polares de área de una estrella bosón-fermión, donde estos sólo interactúan gravitacionalmente, incorporamos una rutina al código *Ollinsphere 2.0* llamada *idata_fluidboson2.f90*. A través de un archivo de parámetros, en el formato que utiliza *Ollinsphere 2.0*, el usuario le provee a la rutina *idata_fluidboson2.f90* los valores de los siguientes parámetros:

$$\{\Delta r, C_p, \kappa, \gamma, \rho_0(r=0), m, \phi_0(r=0), \omega_1, \omega_2\}, \quad (5.1)$$

donde Δr es el tamaño de nuestra malla espacial, C_p es el parámetro de Courant que determina el tamaño de nuestra malla temporal (en relación a la espacial) que fue presentado en el capítulo II. κ, γ , son la constante del fluido isentrópico y el índice adiabático del fluido, m, ω_1, ω_2 son el parámetro masa en la ecuación de Klein-Gordon y los valores iniciales para el algoritmo recursivo que encontrará a la velocidad de fase en el plano complejo del campo escalar. $\rho_0(r=0)$ y $\phi_0(r=0)$ son el valor central de la densidad de energía en reposo de los fermiones y el valor central del campo escalar bosónico respectivamente. Todos estos parámetros fueron presentados en los capítulos I, II y III.

Provista de estos parámetros, la rutina resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{A(1-A)}{r} + 8\pi A^2 r \rho_{ADM}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} = 4\pi\alpha(\rho_{ADM} + S_{ADM}) + \frac{(\partial_r A)\partial_r\alpha}{2A} - 2\frac{\partial_r\alpha}{r}, \quad (5.3)$$

$$\frac{d^2\phi_0}{dr^2} = A(r) \left(m^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) \phi_0 + \frac{(\partial_r A)\partial_r\phi_0}{2A} - 2\frac{\partial_r\phi_0}{r} - \frac{(\partial_r\alpha)\partial_r\phi_0}{\alpha}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d\rho_0}{dr} = - \left(\frac{\rho_0}{\kappa\gamma\rho_0^{\gamma-1}} + \frac{\rho_0}{\gamma-1} \right) \frac{\partial_r\alpha}{\alpha}, \quad (5.5)$$

$$\rho_{ADM} = \rho_0 \left(1 + \frac{\kappa\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} + m^2 \right) \phi_0^2 + \left(\frac{\partial_r\phi_0}{A} \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

$$S_{ADM} = -3\kappa\rho_0^\gamma + \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - m^2 \right) \phi_0^2 - \left(\frac{\partial_r\phi_0}{A} \right)^2 \right], \quad (5.7)$$

utilizando el método de Runge-Kutta de 4to orden para resolver las ecuaciones diferenciales y el método de la secante para encontrar la ω que satisface las condiciones de frontera mencionadas en el capítulo III. Ambos métodos estudiados en el capítulo II.

Esto quiere decir que se resuelven las ecuaciones diferenciales para cada valor de ω hasta que la diferencia entre las soluciones sea menor que una tolerancia ε dada.

En todas las simulaciones tomamos

$$\kappa = 1, \quad (5.8)$$

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad (5.9)$$

$$m = 1. \quad (5.10)$$

Donde γ es el índice adiabático presentado en el capítulo I y $\gamma = 5/3$ corresponde a un fluido no-relativista. El coeficiente κ es una función de la masa de las partículas, el índice adiabático y la densidad de entropía específica del fluido, por lo que, $\kappa = 1$ corresponde a un fluido isentrópico [6],[25]. $m = \frac{\mu}{\hbar} = 1$ corresponde a una masa bosónica del orden de 10^{-42} kg.

Esta elección tiene otra ventaja, dados estos valores de los parámetros, el comportamiento crítico de estabilidad, el cual veremos en los siguientes párrafos, aparece para valores centrales $\rho_0(0)$ y $\phi_0(0)$ de la misma magnitud!

Cuando tenemos una estrella puramente fermiónica, se puede ver que la densidad de la estrella disminuye rápidamente del valor central hasta llegar al radio correspondiente a la frontera de la estrella. El radio de la estrella es el radio para el cual la densidad se vuelve 0.

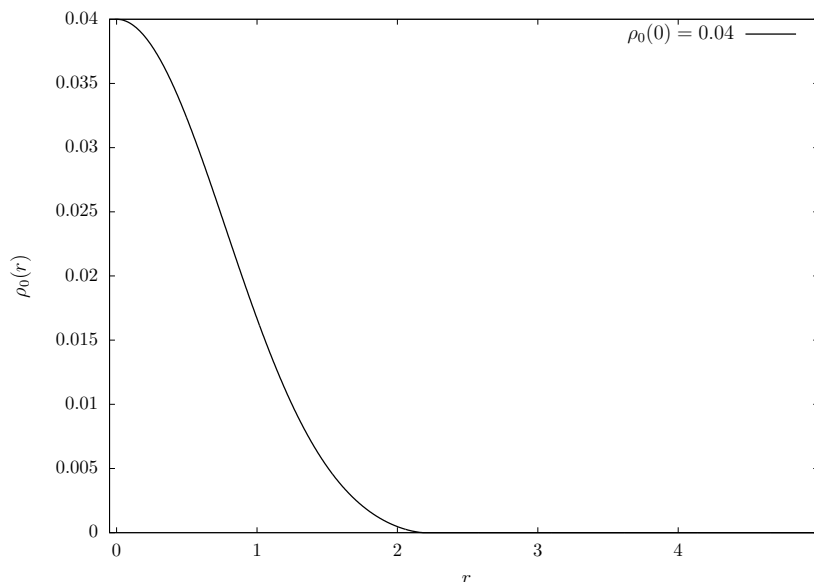


Figura 5.1: La densidad de energía en reposo del fluido ρ_0 vs r , caso puramente fermiónico, con $\rho_0(0) = 0,04$. $r_{max} = 40$ usando $\Delta r = 0,0025$. El radio de la estrella está en 2,18879.

La figura 5.1 muestra un caso puramente fermiónico ($\phi_0(r = 0)$) hasta $r = 5$ aunque la simulación fue hecha hasta $r_{max} = 40$, ya que este será el radio empleado en las simulaciones de los casos mixtos. También se puede observar que alrededor de $r = 2,2$, la densidad de la estrella se hace 0, por lo que la densidad es continua en $r = 2,2$ pero su derivada es discontinua.

Cuando tenemos una estrella puramente bosónica, como se muestra en la figura (5.2), el comportamiento del campo escalar está determinado por su valor central $\phi_0(0)$ y el eigenvalor ω que corresponde al estado base de los bosones, el cual es característico por no tener nodos (nunca cruzar el eje radial).

Podemos ver también el lapso maximal, para los casos puros. Al comparar la figura(5.3I) con (5.3II) podemos ver que el corrimiento al rojo gravitacional es más intenso en (5.3I) cuando se está en el interior de la estrella pero se tiene un rápido decaimiento hacia un espacio-tiempo plano al salir de ésta. En cambio, para la parte bósónica (5.3II) el corrimiento gravitacional no es tan intenso pero el decaimiento hacia Minkowski conforme incrementa r es mucho más lento.

En el caso del coeficiente métrico radial (figuras 5.4I y 5.4II), ocurre algo similar al lapso.

Podemos estudiar el comportamiento de los datos iniciales cuando se varían $\rho_0(0)$ y $\phi_0(0)$, así como la diferencia entre el comportamiento de ρ_0 , ϕ_0 , α y A para los casos puros y mixtos:

En los casos puramente fermiónicos (ver 5.5I), conforme $\rho_0(0)$ aumenta, se tiene un

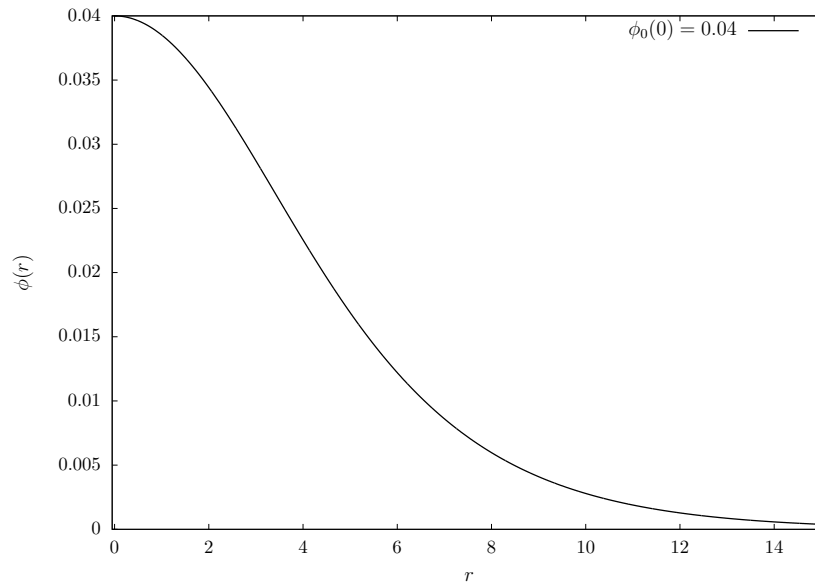


Figura 5.2: La componente real del campo escalar ϕ_0 vs r con $\phi_0(0) = 0,04$ y $\rho_0(0) = 0$, que es el caso puramente bosónico ($\omega = 0,9271$).

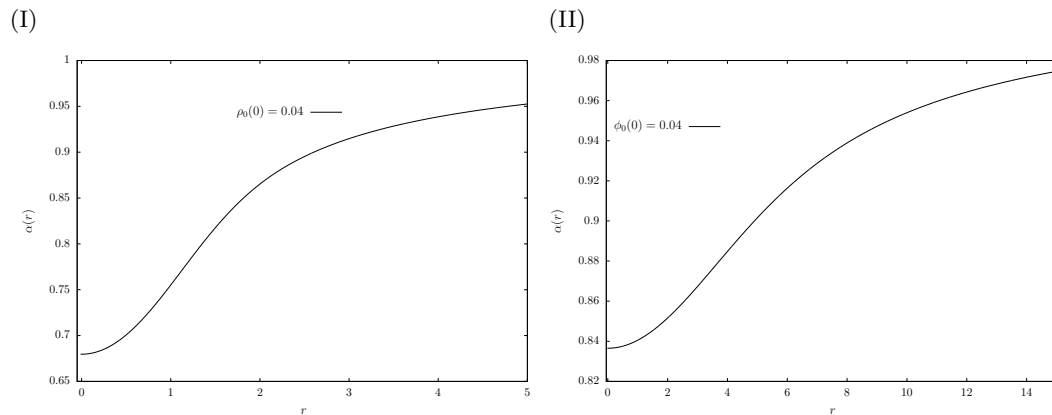


Figura 5.3: I) la función de lapso para el caso puramente fermiónico con $\rho_0(0) = 0,04$ y II) para el caso puramente bosónico con $\phi_0(0) = 0,04$. Podemos notar que para el mismo valor central en los casos puros, el tiempo pasa más lento dentro de la estrella fermiónica que en la bosónica.

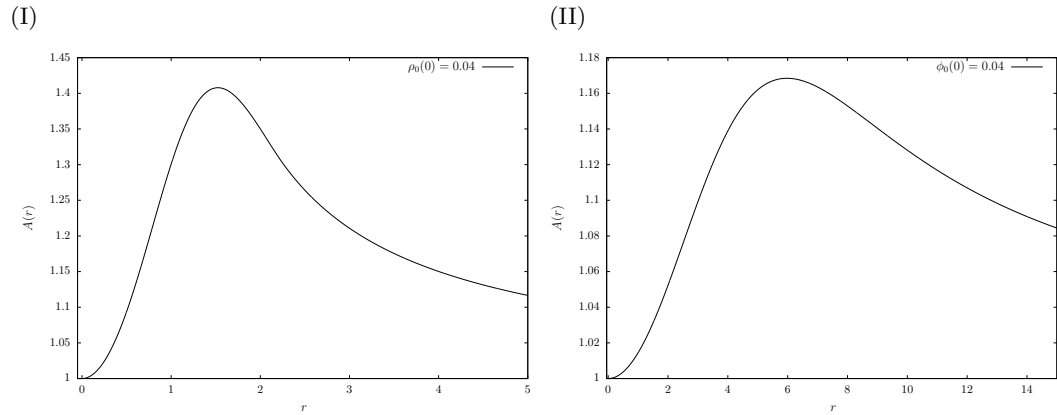


Figura 5.4: Métrica radial $A(r)$: Al igual que en el caso del lapso, el efecto gravitacional es más intenso en el caso fermiónico I) que en el bosónico II) cuando se está dentro del interior de la estrella.

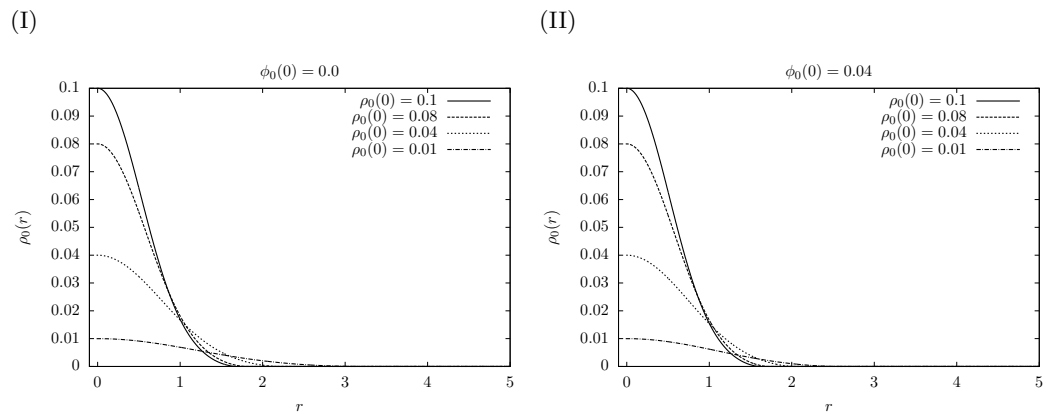


Figura 5.5: I) casos puramente fermiónicos. $r_{min} = 1,677714$ corresponde a $\rho_0(0) = 0,1$ y $r_{max} = 3,127816$ a $\rho_0(0) = 0,01$. II) estrellas bósón-fermión con $\phi_0(0) = 0,04$, $r_{min} = 1,608817$ y $r_{max} = 2,523502$. Los radios del caso mixto son menores que en el caso puro.

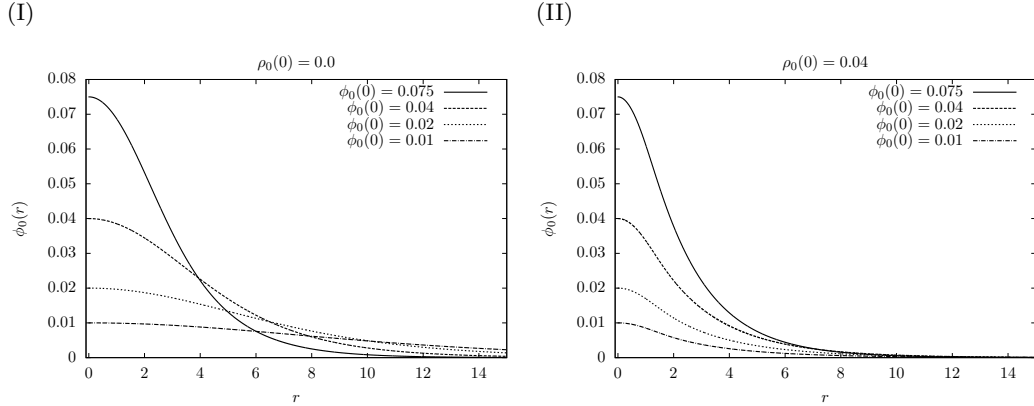


Figura 5.6: I) conforme $\phi_0(0)$ aumenta, el decaimiento exponencial se acelera para los casos puramente bosónicos. II) El comportamiento asintótico es el mismo para las estrellas bosón-fermión con $\rho_0(0) = 0,04$, independientemente de $\phi_0(0)$.

radio más chico para la estrella correspondiente. Los casos de estrellas bosón-fermión con $\phi_0(0) = 0,04$ (figura 5.5II), se tiene el mismo comportamiento pero debido a la interacción gravitacional con la componente bosónica, los radios son aún menores que en los casos puramente fermiónicos. El efecto es más notorio conforme menor es la densidad, ya que $\Delta r_{max} = 0,604314!$ Mientras que $\Delta r_{min} = 0,0688974$, que es un orden de magnitud menor que Δr_{max} .

Cuando comparamos los casos puramente bósónicos(fig 5.6I), podemos ver que entre mayor sea $\phi_0(0)$, es notoriamente más acelerado el comportamiento de decaimiento exponencial, siendo $\phi_0(0) = 0,075$, el valor de nuestra gráfica que más rápido decae. Sin embargo, en los casos mixtos (fig 5.6II) con $\rho_0(0) = 0,04$, llegan al mismo comportamiento asintótico alrededor de $r = 8$, independiente del valor central del campo escalar.

El comportamiento de la métrica radial para los distintos casos se puede ver en las figuras (5.7I), (5.7II), (5.7III) y (5.7IV), donde podemos ver que su comportamiento está dominado por la componente fermiónica para toda r hasta $r = 5$.

El dominio de la componente fermiónica hasta $r = 5$ también puede ser observado en el lapso en las figuras (5.8I),(5.8II),(5.8III) y (5.8IV).

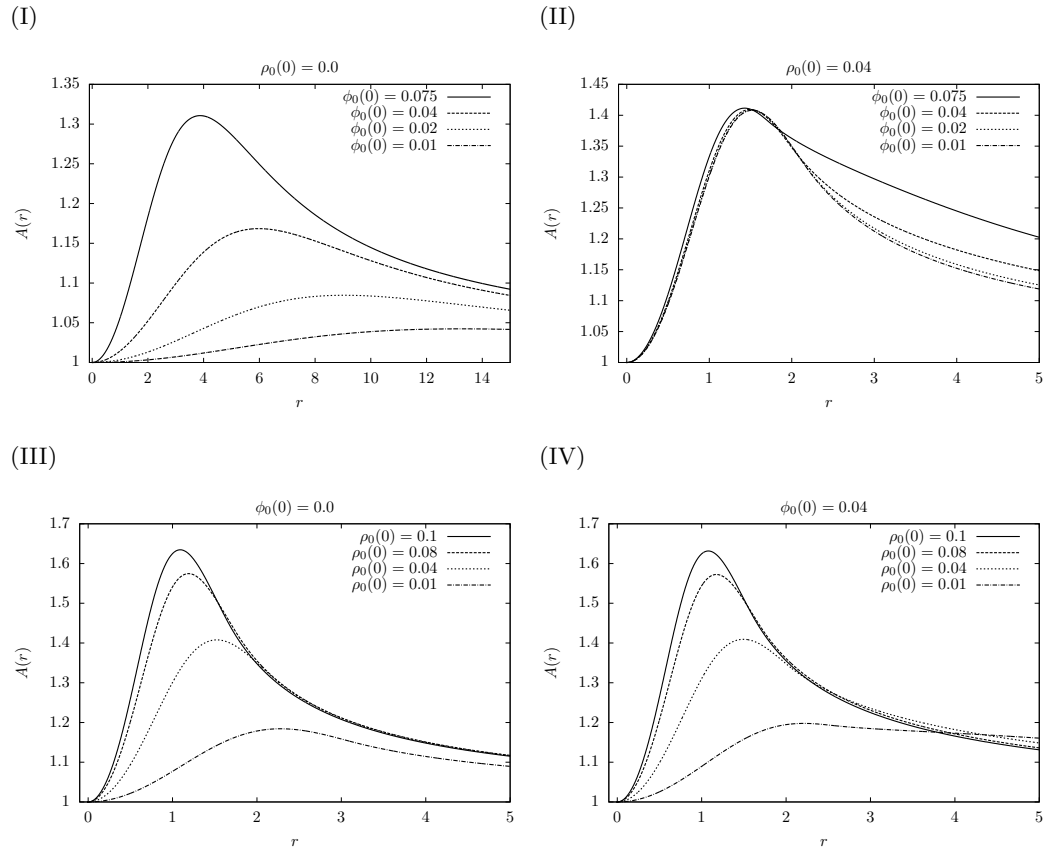


Figura 5.7: Métrica radial para los casos I) puramente bósónico, el efecto gravitacional es mayor conforme $\phi_0(0)$ aumenta. II) $\rho_0(0) = 0,04$ está dominada por la componente fermiónica. III) puramente fermiónicos, mayor efecto gravitacional conforme se tiene mayor ρ_0 . IV) estrellas bosón-fermión con $\phi_0(0) = 0,04$ sufre cambios mínimos respecto a la parte bosónica.

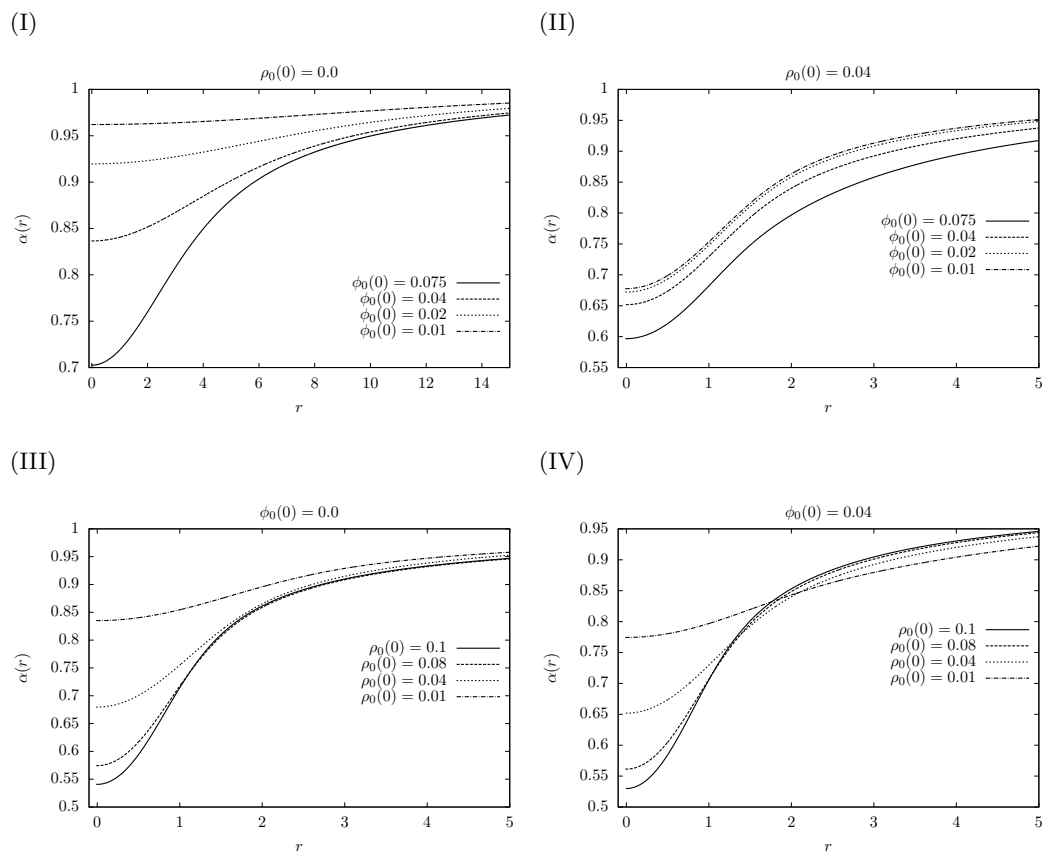


Figura 5.8: Función de lapso para los casos I) Puramente bosónico. II) Estrellas bosón-fermión con $\rho_0(0) = 0,04$. III) Puramente fermiónico. IV) Estrellas bosón-fermión con $\phi_0(0) = 0,04$. El corrimiento al rojo gravitacional está dominado por la componente fermiónica hasta $r = 5$.

5.1. Convergencia de datos iniciales

Es indispensable confirmar que nuestros datos iniciales converjan. Para verificar esto, podemos utilizar la constricción hamiltoniana, la cual analíticamente es indénicamente cero, pero al ser nuestros datos una aproximación numérica, estos violan la constricción hamiltoniana, con la que se le puede asociar un error a la simulación.

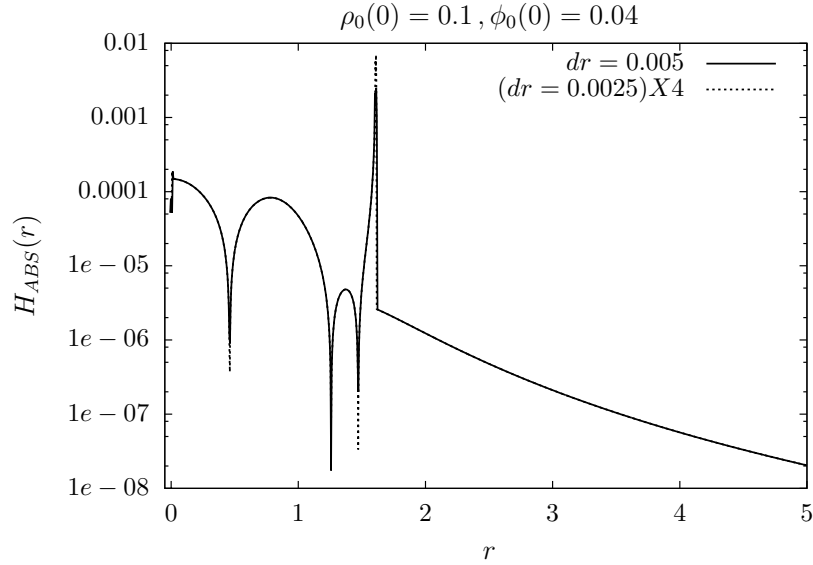


Figura 5.9: El valor absoluto de la constricción hamiltoniana de $r = 0$ a $r = 5$ correspondiente al caso $\rho_0(0) = 0,1$ $\phi_0(0) = 0,04$ con $dr_1 = 0,005$ y $dr_2 = 0,0025 = \frac{1}{2}dr_1$. La gráfica está en escala logarítmica. Se multiplica x 4 los datos correspondientes a dr_2 . La convergencia es claramente a 2do orden.

El error asociado a la simulación debe converger a 2do orden, ya que este es el orden de nuestros datos iniciales. Obtenemos que la convergencia es exacta a 2do orden como se puede observar en 5.9 y 5.10.

5.2. Datos iniciales perturbados

Nuestras simulaciones estudiarán casos estables e inestables bajo perturbaciones en la densidad fermiónica $\rho_0(r)$ de la siguiente forma:

$$\rho_0(r) = \rho_0(r) + a_0 e^{-\frac{r^2}{s_0^2}}, \quad (5.11)$$

que corresponde a una perturbación radial gaussiana. Usualmente se exige que $a_0 \ll 1$ y s_0 determina el radio al que decae la perturbación. Una vez que obtenemos los datos iniciales, debemos hacer esta perturbación y resolver nuevamente

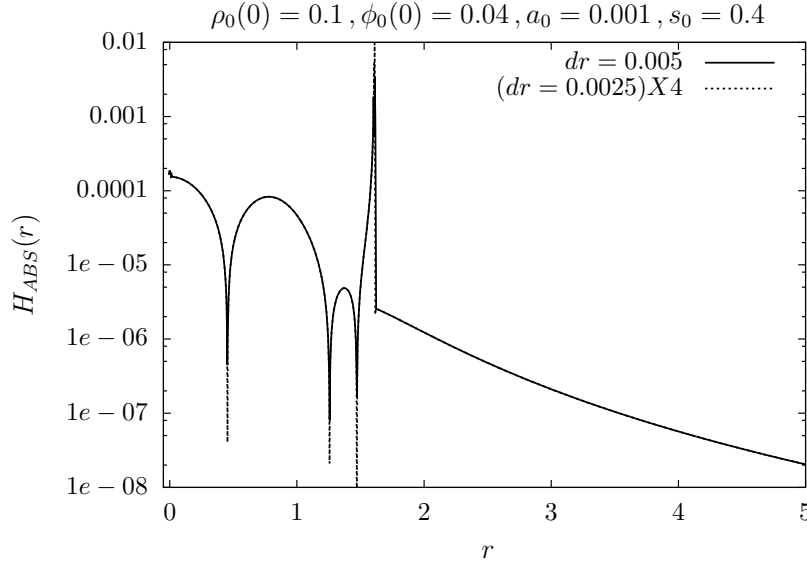


Figura 5.10: Valor absoluto de la constricción Hamiltoniana en escala logarítmica para el caso perturbado hasta $r = 5$ con $\rho_0(0) = 0,1$, $\phi_0(0) = 0,04$, $a_0 = 0,001$ y $s_0 = 0,4$, $dr_1 = 0,005$ y $dr_2 = 0,0025 = \frac{1}{2}dr_1$. La convergencia es a 2do orden.

la constricción Hamiltoniana para garantizar que nuestros datos iniciales siguen satisfaciendo las ecuaciones de Einstein.

5.3. Análisis de estabilidad

Una vez teniendo certeza de la convergencia de los datos iniciales, podemos estudiar a la masa ADM que definimos en el capítulo III como función de la densidad central fermiónica. Así, variando $\phi_0(0)$, podemos estudiar el comportamiento de la masa ADM en las estrellas bosón-fermión.

Como se puede ver en la figura (5.11), $M_{ADM} \max = 0,66$ correspondiente a $\phi_0(0) = 0,075$ y $\rho_0(0) = 0$, el cual es un estado bosónico puro. El comportamiento observado en (fig 5.11) es consistente con el observado en [3], a pesar de utilizar una ecuación de estado diferente.

En el caso en el que se tiene un espacio-tiempo estático podemos calcular la masa de la estrella fermiónica M_F , integrando la componente fermiónica de la densidad de energía $\rho_F = \rho_0 h W^2 - P$ hasta el radio de la estrella.

$$M_F = \int_0^{r_{estrella}} 4\pi \rho_F r^2 dr. \quad (5.12)$$

Con esto, podemos calcular la masa de la estrella fermiónica y estudiar sus propiedades de estabilidad en función de $\rho_0(0)$ y $\phi_0(0)$.

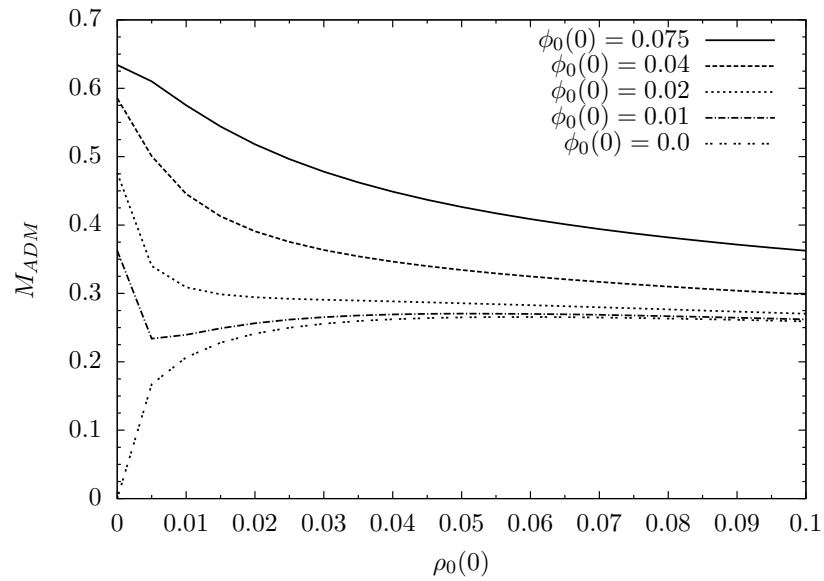


Figura 5.11: M_{ADM} vs $\rho_0(0)$. El valor máximo corresponde al estado puramente bosónico y este decae conforme aumenta $\rho_0(0)$, excepto en el caso puramente fermiónico, donde el comportamiento se invierte.

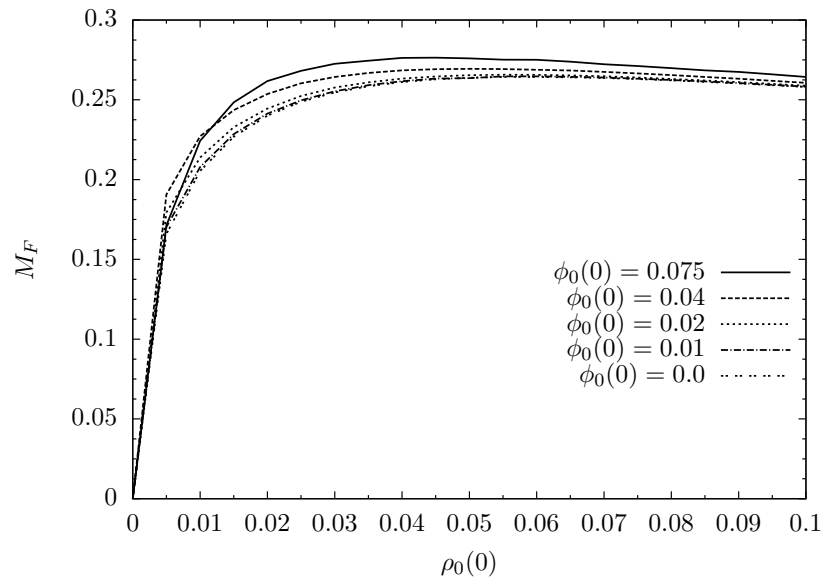


Figura 5.12: M_F vs $\rho_0(0)$. El valor de M_F crece conforme incrementa $\rho_0(0)$, hasta que llega a un valor máximo en $\rho_0(0) \approx 0,055$ y luego empieza a decaer. Los valores en los que decae son la rama inestable, mientras que los valores donde M_F es creciente, son la rama estable. Se tienen 20 puntos con $\Delta\rho_0(0) = 0,005$.

En la figura (5.12) se pueden observar la rama estable e inestable de la componente fermiónica. La rama inestable corresponde a la que conforme aumenta $\rho_0(0)$, M_F disminuye. La rama estable corresponde al comportamiento contrario. Hay que notar que conforme aumenta $\phi_0(0)$, M_F incrementa sus valores pero mantiene el mismo comportamiento. Incluso el valor crítico ($\rho_0(0) \approx 0,55$) es independiente de $\phi_0(0)$.

Con esto se puede concluir el estudio de los datos iniciales y dar pie al estudio de la estabilidad en la evolución.

Capítulo 6

Resultados: Evoluciones

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos de las evoluciones de estrellas bosón-fermión para los casos estable, inestable e inestable con vector de corrimiento. Escogemos los valores correspondientes según la figura (5.12) que encontramos en el capítulo anterior. Estas evoluciones permitirán determinar si este análisis es correcto, así como estudiar las propiedades de la materia y la métrica en los distintos casos.

6.1. Evolución: caso estable

Si consideramos el caso $\rho_0(0) = 0,04$, $\phi_0(0) = 0,04$ podemos ver en la figura (5.12) que esta configuración de parámetros se encuentra en la rama estable. Perturbamos los datos iniciales utilizando (5.11) con $a_0 = 0,001$ y $s_0 = 0,4$. Ya que nuestro código es convergente a 2do orden, realizamos las simulaciones con $dr_1 = 0,005$, $dr_2 = 0,0025$ y $C_p = 0,5$ por lo que la perturbación asociada a nuestros valores de a_0 y s_0 es mayor que el error numérico y tenemos completo control sobre la manera en la que el sistema fue perturbado. Utilizamos el método Iterative-Crank-Nicholson para hacer la integración correspondiente a la parte temporal.

Como vimos en el capítulo IV, nuestra formulación de las ecuaciones de Euler en 3+1 está en términos de las variables \mathcal{E} , D y S_r conocidas como cantidades conservadas. Para obtener las variables primitivas ρ_0 , P , y v^r de las cantidades conservadas, el código utiliza una rutina llamada *fluidprimitive.f90*, la cual utiliza el método de Newton-Raphson para invertir las ecuaciones. Para hacer esto es indispensable que las cantidades conservadas numéricamente sean distintas de cero para todo radio (aunque analíticamente lo sean). Debido a esto agregamos una "atmósfera" fuera de la estrella, es decir, agregamos un valor muy pequeño a la densidad, lo que permite invertir las ecuaciones numéricamente y obtener ρ_0 , P , y v^r de \mathcal{E} , D y S_r . En nuestras simulaciones $\rho_{atmos} = 10^{-10}$.

El campo escalar que hemos utilizado en este trabajo es de la forma $\phi(t, r) = \phi_0(r)e^{i\omega t}$ por lo que su evolución debe ser armónica en el tiempo, que es lo que se observa en la figura (6.1).

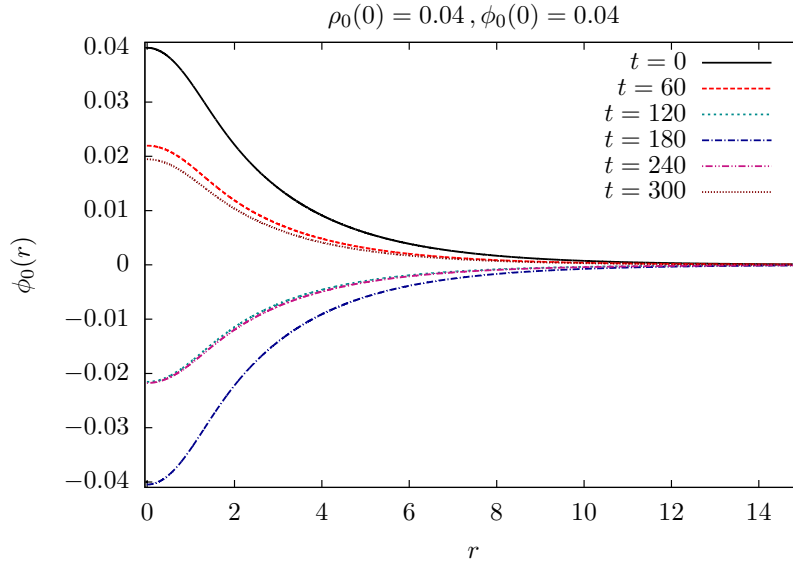


Figura 6.1: La evolución del campo escalar $\phi_0(r)$ en el caso $\rho_0(0) = 0,04$, $\phi_0(0) = 0,04$ perturbado. La evolución es armónica en el tiempo y la perturbación no afecta el comportamiento del campo escalar.

La evolución fue realizada de $t = 0$ a $t = 300$, en esta sección mostramos la evolución de ϕ , ρ_0 , A , B y α a $t = 0, 60, 120, 180, 240$ y 300 . Esto se muestra en las figuras (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) y (6.5).

En la figura (6.2) podemos apreciar que la evolución de $\rho_0(r)$, la densidad del fluido, cuando es perturbada, produce un comportamiento oscilatorio de poca variación entre el máximo del caso no perturbado $\rho_0(r = 0) = 0,04$ y un nuevo máximo de $\rho_0(r = 0) = 0,045$, así como también oscilan los puntos cercanos a $r = 0$, aún así las soluciones rápidamente llegan a la misma y el radio de la estrella es el mismo $\forall t$.

La evolución de la componente radial de la 3-métrica puede observarse en (fig 6.3), donde se puede ver que ésta tiene un comportamiento oscilatorio de poca variación, donde el máximo respecto al radio se hace menor respecto al tiempo, oscilando entre 1,4 y 1,45, que corresponde al máximo en $r = 0$.

El caso de la componente angular de la métrica $B(r)$ tiene un comportamiento similar como se muestra en (fig 6.4). Cabe mencionar que la oscilación es relativamente pequeña, comparada con el resto de las variables de la simulación, ya que la componente angular de la métrica oscila entre 1 y 0,99, alejándose muy poco de la solución estática $B = 1$.

La evolución del lapso maximal (fig 6.5), igual que la parte espacial de la métrica, tiene un comportamiento oscilatorio entre 0,65 y $\approx 0,63$.

Es difícil apreciar de la gráfica anterior el comportamiento del lapso, por lo que po-

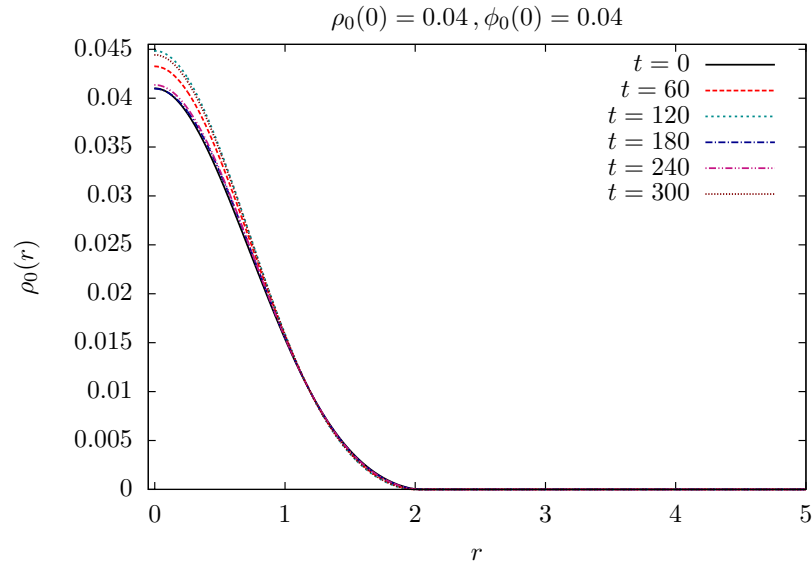


Figura 6.2: La evolución de la densidad del fluido $\rho_0(r)$ para el caso $\rho_0(0) = 0,04$, $\phi_0(0) = 0,04$ perturbado. La densidad en $r = 0$ oscila entre $0,04$ [$t = 0, 120, 240$] y $0,045$ [$t = 60, 180, 300$] en un proceso estable ($dr = 0,0025$, $dt/dr = 0,5$).

demos estudiar el comportamiento de éste en $r = 0$, el cual mostramos en la figura (6.6). En ésta se puede apreciar el comportamiento periódico en $r = 0$, donde la solución se asemeja a la forma $D \cos pt$ para algún D, p , con máximos en $t \approx 0, 120$ y mínimo en $t \approx 60$.

Para finalizar el análisis del caso estable, podemos revisar la convergencia de la constricción Hamiltoniana (en valor absoluto y escala logarítmica) para $t = 120, 300$. La convergencia es evidentemente de 2do orden [figuras (6.7I), (6.7II)] así como podemos notar que el error es muy pequeño ($\approx 10^{-6}$).

El análisis de estabilidad para M_F resultó adecuado en el caso estable, veamos qué sucede en el caso inestable.

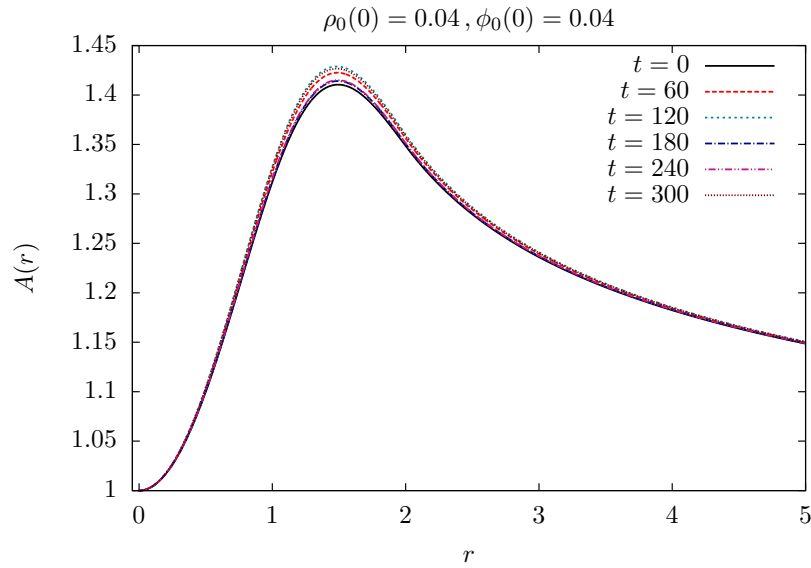


Figura 6.3: La evolución correspondiente a la métrica radial $A(r)$. La componente radial de la métrica en $r = 0$ oscila entre 1,45 [$t=60, 120, 240$] y 1,4 [$t=0, 180, 300$] de manera estable ($dr = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

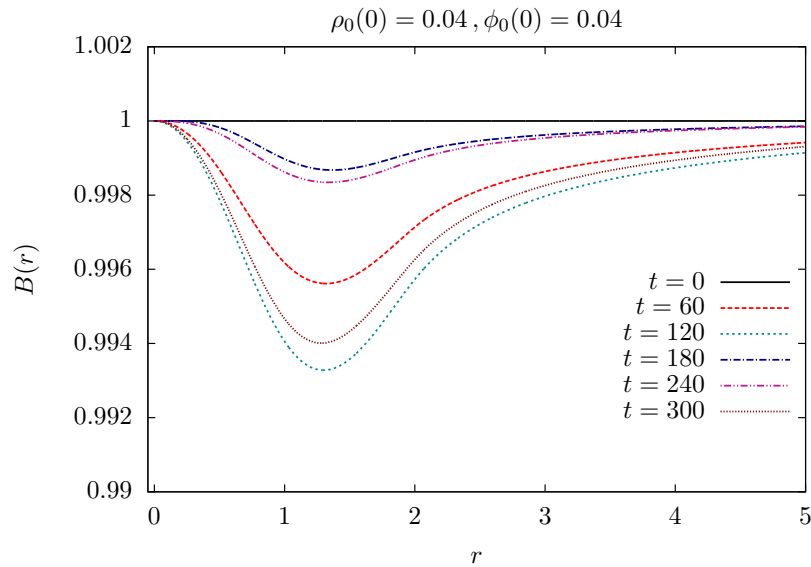


Figura 6.4: La evolución correspondiente a la métrica angular $B(r)$, para el caso $\rho_0(0) = 0,04, \phi_0(0) = 0,04$ perturbado. Oscila entre 1 y 0,99 para todo r , entre $r = 0$ y $r = 5$ ($dr = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

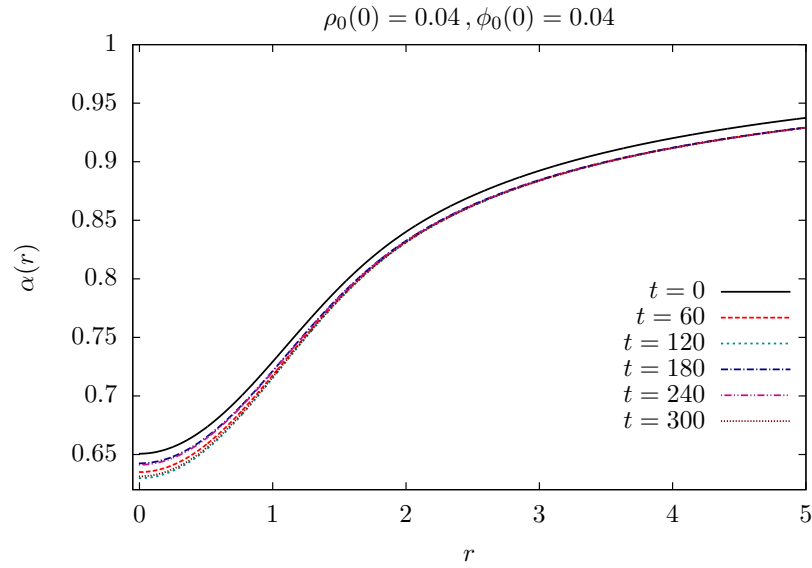


Figura 6.5: La evolución del lapso $\alpha(r)$, para el caso $\rho_0(0) = 0,04$, $\phi_0(0) = 0,04$ perturbado. El lapso oscila en $r = 0$ entre $0,65$ [$t=0, 180, 240$] y $0,63$ [$60, 120, 300$] en forma estable ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

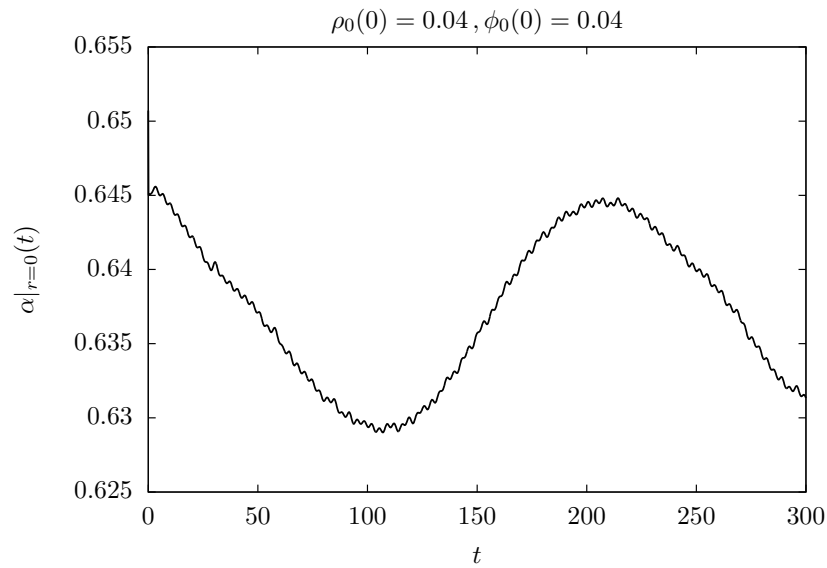


Figura 6.6: La evolución del lapso α en $r = 0$, máximo $\approx 0,645$ y min $\approx 0,628$.

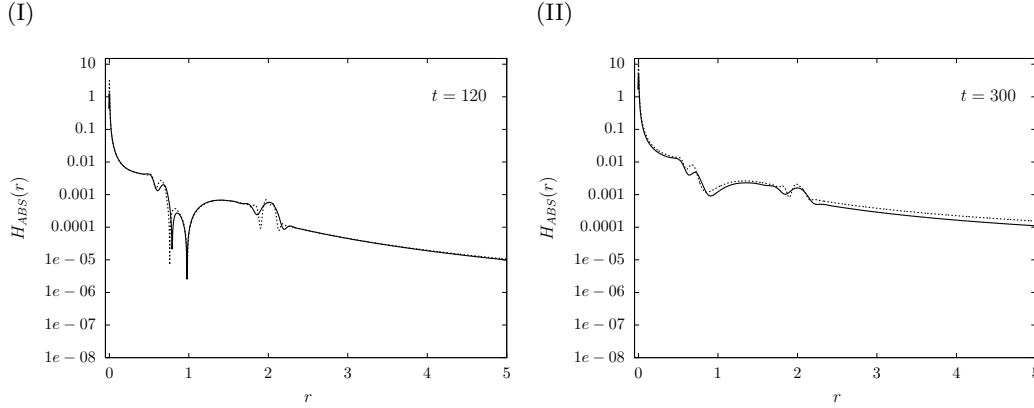


Figura 6.7: El valor absoluto de la constricción hamiltoniana, en escala logarítmica para los tiempos correspondientes. En el caso $\rho_0(0) = 0,04$, $\phi_0(0) = 0,04$, perturbado estable con $dr_1 = 0,005$, $dr_2 = 0,0025(X4)$, $dt/dr = 0,5$. La convergencia es claramente a 2do orden.

6.2. Evolución: caso inestable

Si consideramos el caso $\rho_0(0) = 0,1$, $\phi_0(0) = 0,04$ podemos ver que esta configuración de parámetros corresponde a la rama inestable de (5.12). Perturbamos los datos iniciales utilizando la ecuación (5.11) con $a_0 = 0,001$ y $s_0 = 0,4$ para tener control sobre la perturbación del sistema.

La evolución fue realizada de $t = 0$ a $t = 40$. En las figuras (6.8), (6.9), (6.10), (6.11) mostramos ϕ , ρ_0 , A , B y α a $t = 0, 10, 20, 30$ y 40 .

En la figura (6.8) vemos la evolución del campo escalar $\phi_0(r)$, en $[t = 0, 10, 20]$ el comportamiento del campo escalar es igual que en el caso estable. En $t = 30$, la parte del campo escalar que está en el interior de $r = 1$, está congelada y sólo oscila la parte del campo que se encuentra fuera de $r = 1$. En $t = 40$ la parte del campo que está adentro de $r = 2$ está congelada y sólo los puntos correspondientes a $r > 2$ siguen oscilando. La amplitud de la oscilación es menor conforme se avanza en el tiempo para $t > 30$. También podemos observar que se tiene un nuevo mínimo $\phi_0 \approx 0,07$ en $r = 0$ el cual permanece congelado. El congelamiento de la solución puede ser observado debido a la superposición de $t = 30$ y $t = 40$ en $r = 1$.

La evolución temporal de la densidad del fluido $\rho_0(r)$, correspondiente a $\rho_0(0) = 0,1$, $\phi_0(0) = 0,04$ perturbado (fig 6.9). La densidad central va creciendo, a la vez que el radio de la estrella disminuye hasta que en $t = 30$ la componente fermiónica alcanza su densidad central máxima de $\rho_0(0) \approx 0,9$ y se queda estática hasta $t = 40$.

La evolución de la componente radial de la métrica $A(r)$ (fig 6.10), El comportamiento de la componente radial es el mismo que en el caso estable hasta $t = 20$. En $t = 30$ ésta empieza a crecer debido al fenómeno de estiramiento de las hiper-

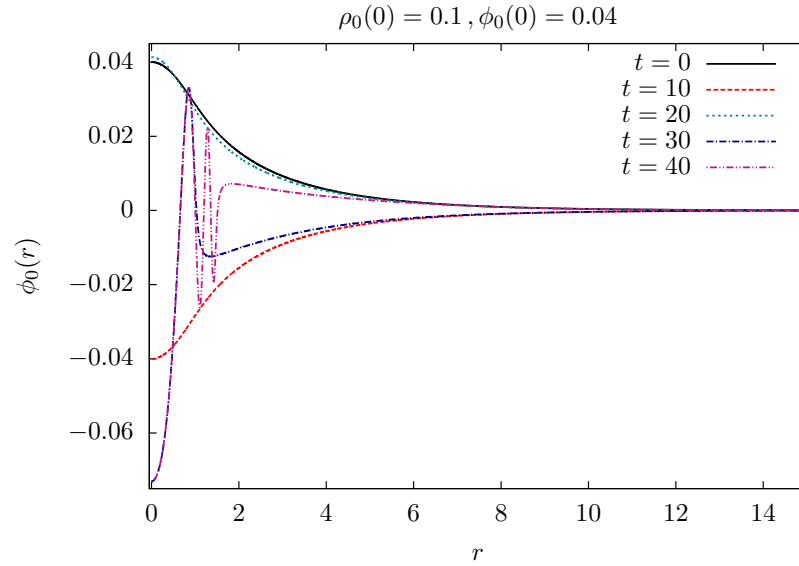


Figura 6.8: Evolución del campo escalar $\phi_0(r)$, en $[t = 0, 10, 20]$ igual al caso estable. A partir de $t = 30$ una parte se congela (dentro de $r = 1$) y el resto oscila. La región congelada aumenta con t ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

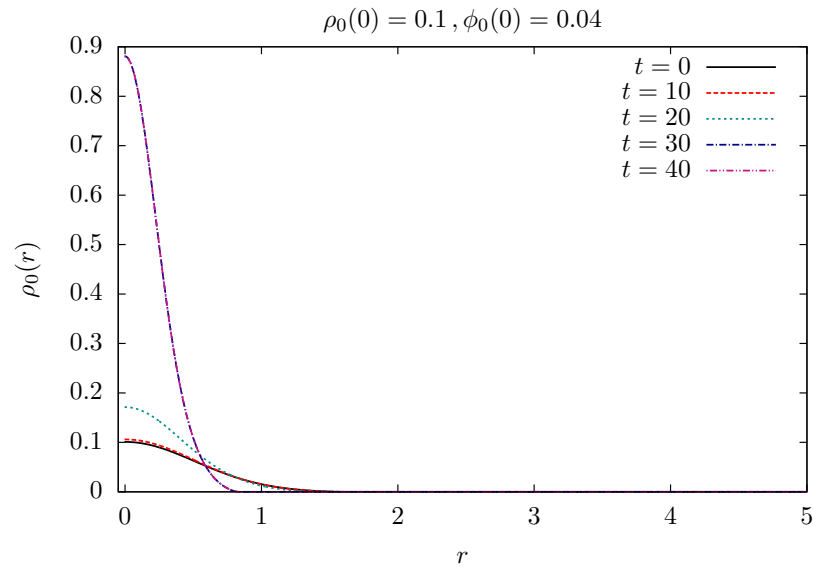


Figura 6.9: La evolución temporal de la densidad del fluido $\rho_0(r)$. La densidad central llega a un máximo $\rho_0(r = 0) \approx 0,9$, a la vez que el radio de la estrella disminuye. En $t = 30$ se queda estática hasta $t = 40$ ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

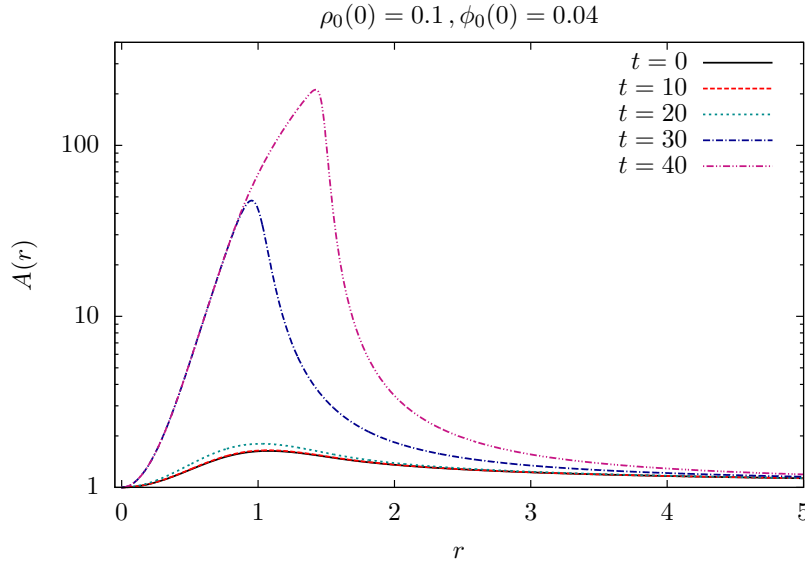


Figura 6.10: La componente radial de la métrica $A(r)$ en escala logarítmica. Igual al caso estable hasta $t = 20$. En $t = 30$ ésta empieza a crecer. El máximo crece de 1,4 en $t = 0$ a 400 en $t = 40$. El estiramiento de las hiper-superficies es evidente $r \leq 5$ ($dr = 0,0025, C_p = 0,5$).

superficies. La métrica crece de 1,4 en $t = 0$ a 400 en $t = 40$. La figura (6.10) está en escala logarítmica para poder apreciar el estiramiento. El estiramiento genera enormes gradientes en la evolución de $A(r)$ y eventualmente mata nuestra simulación.

La evolución de la componente angular de la métrica $B(r)$ se muestra en la figura (6.11). El comportamiento es el mismo que en el caso estable hasta $t = 20$. En $t = 30$ ésta, contrario a la componente radial, empieza a decrecer. A diferencia de la componente radial, el cambio no es comparable, ya que ésta solo pasa de 1 en $t = 0$ a 0,2 en $t = 40$ y $r \leq 5$, lo que no genera problemas con la simulación.

En el caso del lapso $\alpha(r)$, el corrimiento al rojo gravitacional va incrementando hasta que en $t = 30$ el lapso colapsa ($\alpha = 0$) para $r < 1$ y continúa colapsando hasta $t = 40$ $\alpha = 0 \forall r < 1,5$. El colapso del lapso maximal es una característica de la formación de horizontes aparentes en ausencia de vector de corrimiento por lo que revisaremos si hay formación o no de éstos.

La constricción hamiltoniana evaluada en $t = 10$ y $t = 40$. La convergencia es claramente a 2do orden en $t = 10$. En $t = 40$ la convergencia es a 2do orden pero tiene algunos problemas entre $r = 2$ y $r = 3$, aun así, el error es muy pequeño $\approx 10^{-6}$ así que la convergencia sigue siendo a 2do orden.

Si hacemos una búsqueda de un horizonte aparente, encontramos que se forma uno en $t \approx 25$, lo que, con la conjetura de censura cósmica, implica que se forma un agujero negro.

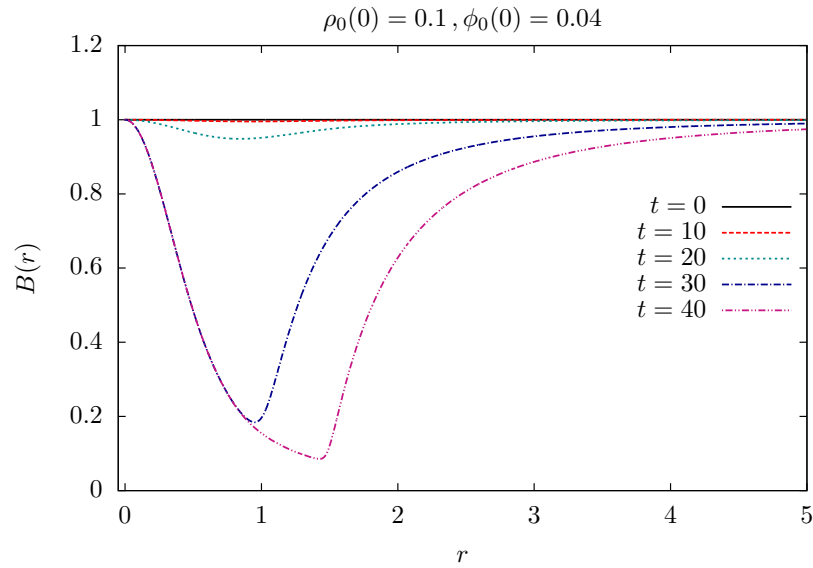


Figura 6.11: La componente angular de la métrica $B(r)$. Hasta $t = 20$ igual al caso estable. En $t = 30$ empieza a decrecer con máximo = 1 en $t = 0$ a un máximo $\approx 0,2$ en $t = 40$ y $r \leq 5$ ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

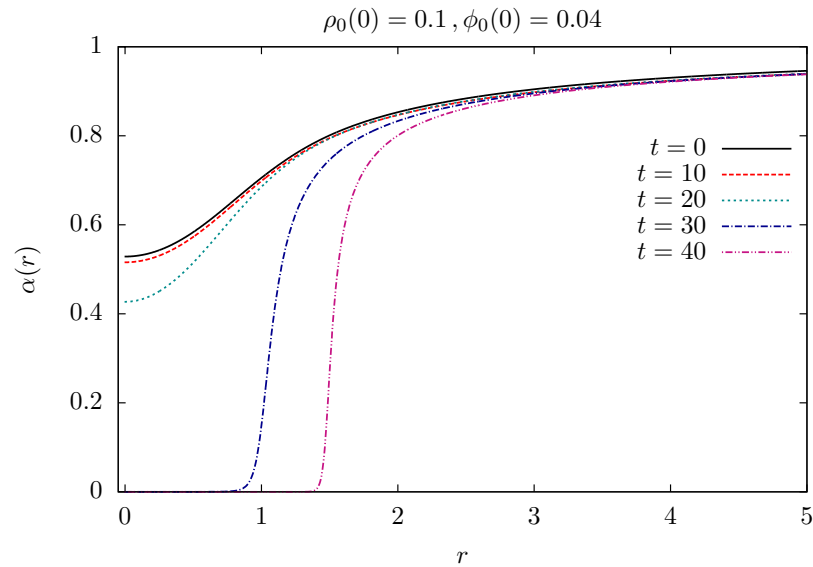


Figura 6.12: La evolución temporal del lapso. El mínimo decae hasta que en $t = 30$ el lapso colapsa ($\alpha = 0$) para $r < 1$. Esto continúa hasta $t = 40$ $\alpha = 0 \forall r < 1,5$ ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

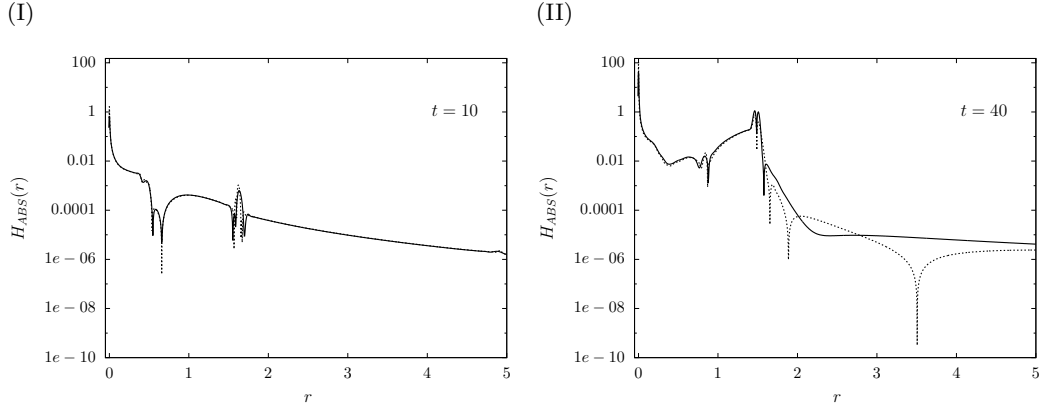


Figura 6.13: La constricción hamiltoniana en $t = 0, 40$ y $t = 40$. La convergencia es a 2do orden ($dr_1 = 0,005$, $dr_2 = 0,0025(X4)$, $C_p = 0,5$).

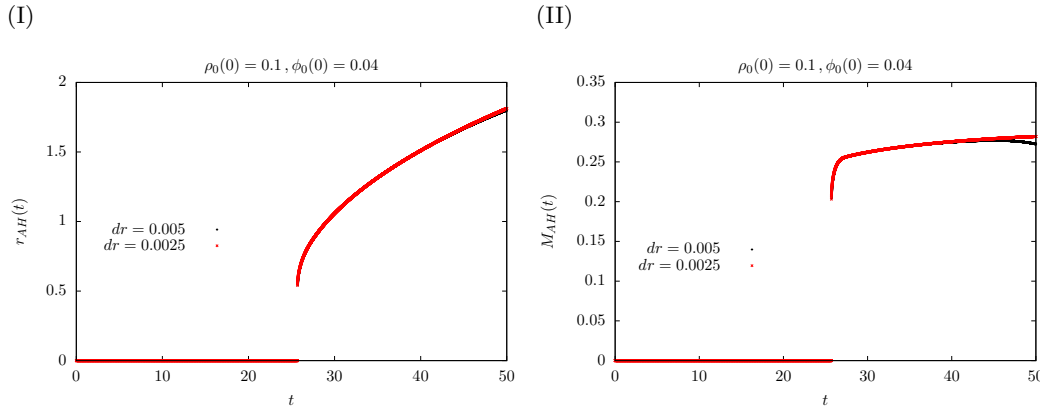


Figura 6.14: El radio del horizonte aparente $r_{Ah}(t)$ y la masa del horizonte aparente $M_{AH}(t)$. El radio y la masa son cero hasta que se forma el primer horizonte aparente $t \approx 25$. Después de esto, ambos crecen desmedidamente. Estos resultados son confiables hasta $t \approx 40$.

Mostramos el comportamiento del radio del horizonte y su masa en función del tiempo a distintas resoluciones. El crecimiento del radio del horizonte aparente explica el colapso del lapso, así como el estiramiento de las hiper-superficies y el congelamiento del campo escalar dentro del radio del horizonte. El comportamiento del radio es igual en las distintas resoluciones. La masa crece desmedidamente, lo que implica error numérico en las simulaciones. Este comportamiento empeora a mayor resolución! Por lo que la simulación es confiable hasta $t \approx 40$.

Hemos visto que el análisis de estabilidad funciona también para el caso inestable, ya que parámetros correspondientes a la rama inestable produjeron horizontes aparentes en $t \approx 25$. Es necesario emplear un vector de corrimiento distinto de cero para intentar obtener más información en la evolución del espacio-tiempo.

6.3. Evolución: caso inestable con vector de corrimiento

Volvamos a considerar el caso $\rho_0(0) = 0,1$, $\phi_0(0) = 0,04$. Perturbamos los datos iniciales utilizando (5.12) con $a_0 = 0,001$ y $s_0 = 0,4$ para tener control sobre la perturbación del sistema.

Escogemos un vector de corrimiento que inicialmente es cero pero evoluciona de acuerdo a la ecuación presentada en el capítulo IV conocida como "gamma driver". Tomamos $\xi = \frac{3}{4}$ y ya que $\eta \simeq \frac{1}{M_{ADM}} \simeq 3$.

La evolución fue realizada de $t = 0$ a $t = 300$, en las figuras (6.15), (6.16), (6.17), (6.18), (6.19), (6.20) y (6.21) mostramos la evolución de ϕ , ρ_0 , A , B , α y β respectivamente. Los tiempos que se muestran son particulares en cada caso para dar una imagen completa del comportamiento de nuestras variables durante la evolución.

El campo escalar $\phi_0(r)$ tiene el mismo comportamiento que en el caso estable hasta que en $t \approx 25$ se forma el horizonte aparente. A diferencia del caso donde no había vector de corrimiento (donde el campo empezaba a congelarse), el campo oscila $\forall r$, pero poco a poco va perdiendo amplitud como se aprecia en (fig 6.15). Al igual que en el caso inestable, se llega a un mínimo $\approx 0,07$.

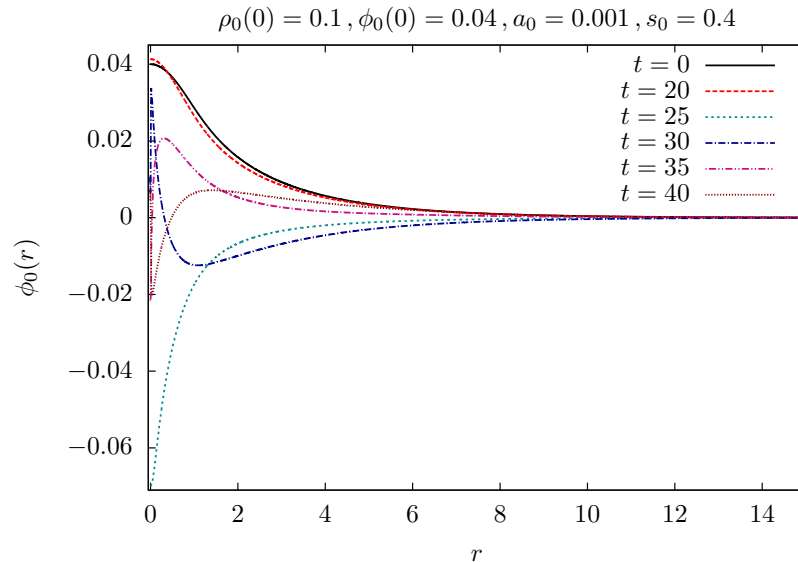


Figura 6.15: La evolución del campo escalar en $t = 0, 20, 25, 30, 35$, y 40 . ($dr = 0,0025$, $dt/dr = 0,5$). Igual al caso estable hasta $t \approx 25$, luego va perdiendo amplitud. ϕ_0 mínimo $\approx 0,07$

Evolución de $\phi_0(r)$ hasta $t = 300$ (fig 6.16). A esta escala es mucho más evidente que la amplitud va disminuyendo hasta que en $t = 300$ el campo escalar parece haberse desvanecido completamente. Esto es debido a que el vector de corrimiento es un tipo de excisión, por lo que nuestra coordenada $r = 0$ no corresponde a la

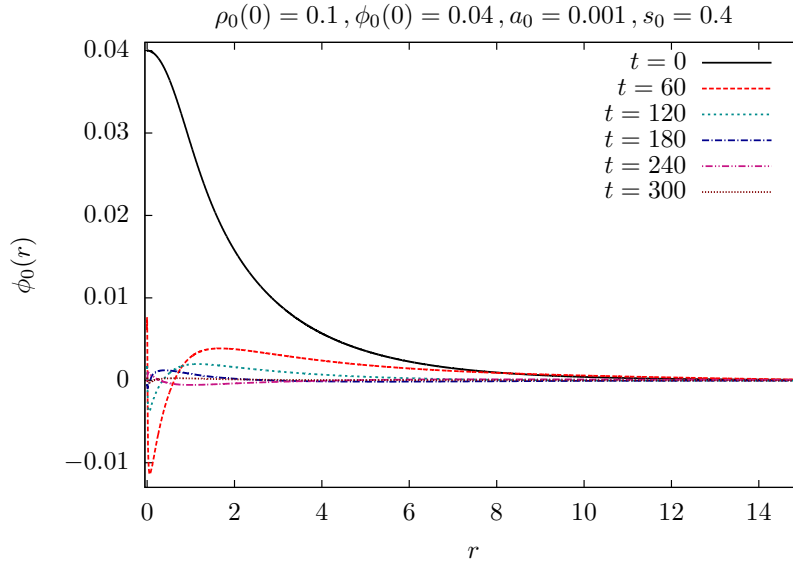


Figura 6.16: Evolución del campo escalar $\phi_0(r)$ para $t = 0, 60, 120, 180, 240, 300$. El campo escalar se desvanece en $t = 300$ ($dr = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

singularidad física como en el caso de Schwarzschild, sino a una superficie límite y el campo escalar poco a poco cruza esta superficie y desaparece de la simulación.

La densidad del fluido $\rho_0(r)$. La densidad central va aumentando y $t = 26$ (cuando se forma el primer horizonte aparente) alcanza su valor máximo de $\rho_0(0) \approx 0,85$. Para tiempos posteriores, la densidad disminuye hasta casi desaparecer alrededor de $t = 31$. Al igual que el campo escalar, esto es debido a la excisión producida por el vector de corrimiento, pero a diferencia de éste, el proceso es mucho más rápido.

La razón principal de implementar el "gamma driver", es evitar que se formen gradientes gigantescos en la evolución de la componente radial de la métrica (fig 6.18).

Podemos observar en la figura (6.18) se congela el crecimiento de la componente radial, incluso después de haberse formado un horizonte aparente. Esto es el efecto que deseábamos del "gamma driver". Así podemos ver que el vector de corrimiento cumplió su cometido hasta tiempos largos, ya que la componente métrica llega a un estado estacionario con un valor muy cercano a su valor inicial ($A_{max}|_{t=300} - A_{max}|_{t=0} \approx 0,5$).

La evolución de la componente angular de la métrica $B(r)$ en $t = 0, 60, 120, 180, 240, 300$ representada en la figura (6.19). Podemos observar que la componente angular llega a un mínimo de 0,905 en $t = 60$, en el cual permanece durante el resto de la evolución hasta $t = 300$. Al igual que en el caso de la componente radial, la evolución se vuelve estacionaria y la diferencia entre el estado inicial y el final es un orden de magnitud menor que en el caso inestable sin vector de corrimiento.

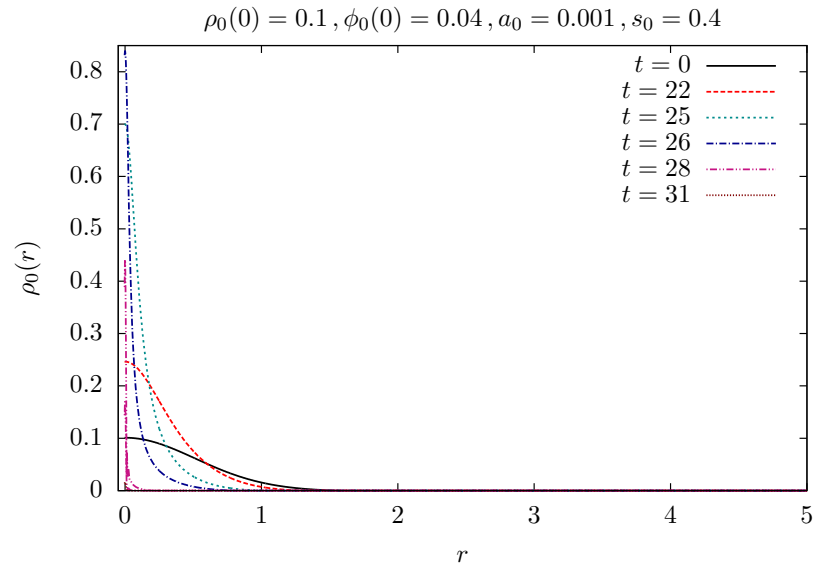


Figura 6.17: La densidad del fluido $\rho_0(r)$. La densidad central hasta llegar a $\rho_0(0) = 0,85$ en $t = 26$. En $t = 31$ $\rho_0(r) \ll 0,01$ ($dr = 0,0025$, $C_p = 0,5$).

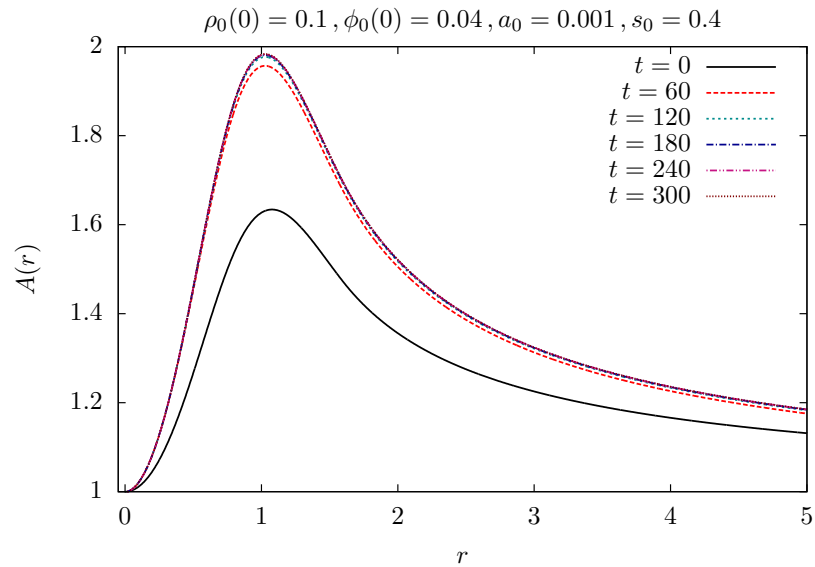


Figura 6.18: La evolución de la componente radial de la métrica $A(r)$ para $t = 0, 60, 120, 180, 240$ y $t = 300$. A partir de $t = 120$ la componente radial de la métrica, se queda en un valor estacionario con valor máximo de 1,99 hasta $t = 300$ ($dr = 0,0025$, $dt/dr = 0,5$).

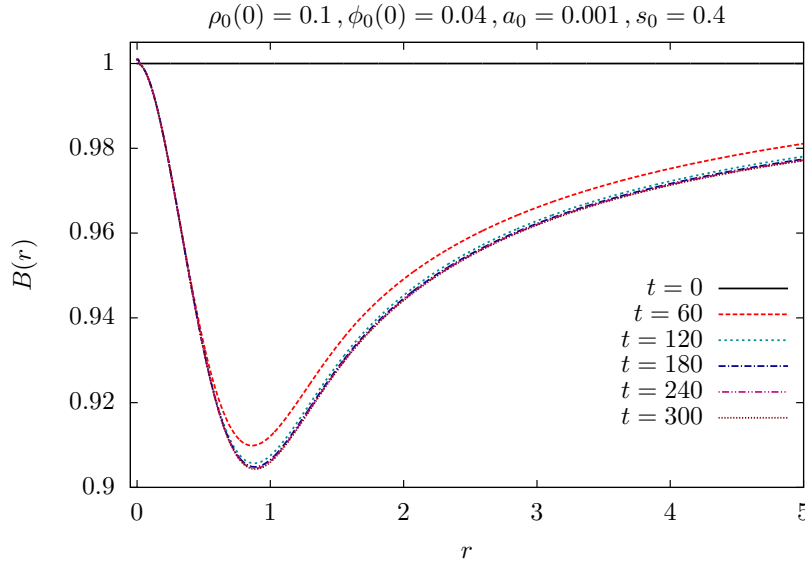


Figura 6.19: La componente angular de la métrica $B(r)$ llega a un mínimo de 0,905 en $t = 60$. El comportamiento es estacionario hasta $t = 300$ ($dr = 0,0025$, $dt/dr = 0,5$).

En (fig 6.20) mostramos la evolución del lapso $\alpha(r)$. Debido a la presencia del vector de corrimiento, la ecuación de lapso maximal se ve modificada con un término $\beta^i \partial_i K$, que es el que produce el comportamiento semilineal cerca del origen. El "gamma driver" cura el colapso del lapso (salvo en el origen donde no debe ser cuadrado) debido a que "toma" observadores de la región asintóticamente plana y los empuja hacia el interior horizonte aparente.

En la gráfica (6.21) podemos ver la evolución del vector de corrimiento con la condición "gamma driver". Inicialmente, el vector es cero, conforme crecen las componentes espaciales de la métrica, el vector de corrimiento crece proporcionalmente y cuando éstas llegan a un comportamiento estacionario, éste también se vuelve estacionario (por lo que a partir de $t = 30$ éste casi no crece).

Verificamos la convergencia de la constricción Hamiltoniana, la cual se puede observar en las figuras (6.22I) y (6.22II).

Podemos estudiar las propiedades de los horizontes aparentes que se forman durante la evolución con vector de corrimiento. El horizonte aparente se forma en $t \approx 25$ igual que en el caso anterior, pero en este caso el radio del horizonte aparente (fig 6.23I) tiende a un valor asintótico de $r_{AH} = 0,5$ mientras que la masa (fig 6.23II) tiende asintóticamente al valor de la masa ADM. Esto quiere decir que para el vector de corrimiento "gamma driver", el horizonte aparente tiene un tamaño límite, lo cual es lo que esperaríamos si la solución tiende a un estado estacionario debido al teorema de no-pelo. Ya que la masa del horizonte aparente tiende a la masa ADM, podemos concluir que la energía en nuestro espacio-tiempo se conserva globalmente

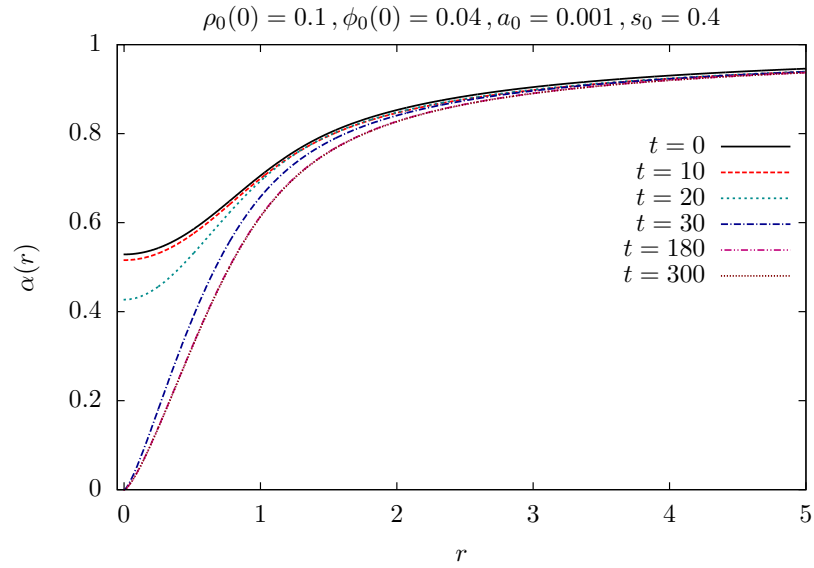


Figura 6.20: La evolución del lapso maximal $\alpha(r)$. Tiene un comportamiento semi-lineal alrededor de $r = 0$ en $t = 300$ ($dr = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

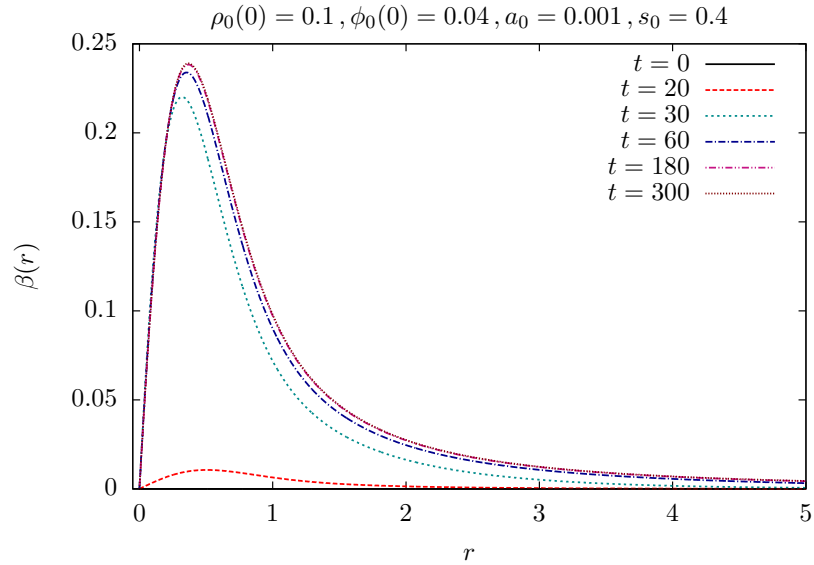


Figura 6.21: Evolución del vector de corrimiento $\beta(r)$. A partir de $t = 30$ el comportamiento es casi estacionario. Llega a un máximo $\approx 0,23$ ($dr = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

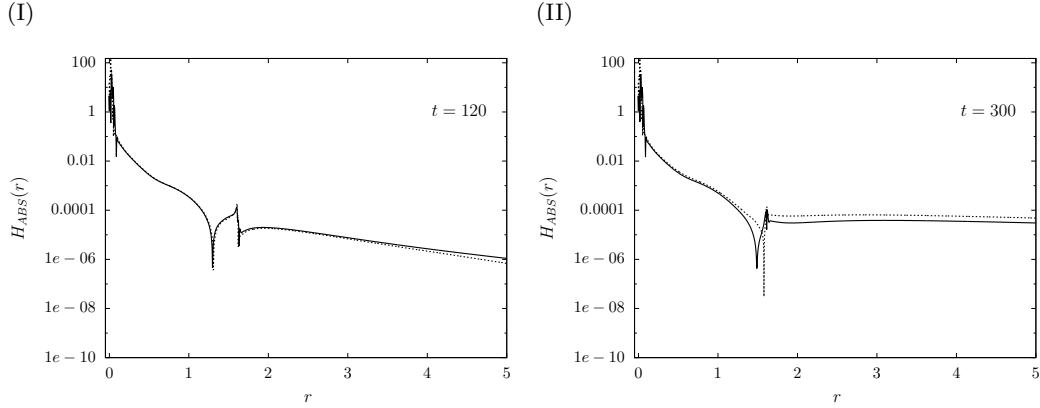


Figura 6.22: La convergencia del valor absoluto de la constricción hamiltoniana en escala logarítmica para $t = 120, 300$. La convergencia es claramente a 2do orden ($dr_1 = 0,005, dr_2 = 0,0025(X4), dt/dr = 0,5$).

con una buena aproximación, así como el hecho de que tenemos un comportamiento de un espacio-tiempo estacionario asintóticamente. Podemos concluir algo similar partiendo de que se cumple la 2nda ley generalizada de la termodinámica. Estos resultados son iguales a distintas resoluciones lo que garantiza que no es un efecto numérico.

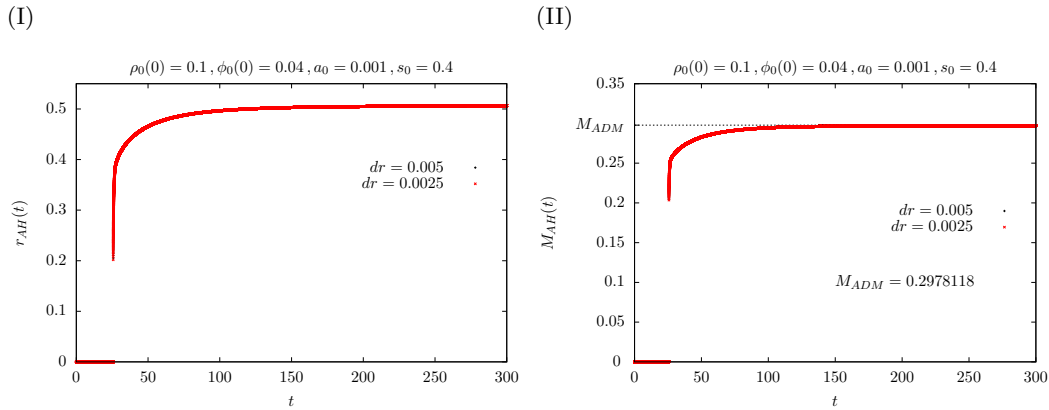


Figura 6.23: El horizonte aparente se forma en $t \approx 25$ igual que en el caso anterior, pero en este caso el radio del horizonte aparente I) tiende a un valor asintótico de $r_{AH} = 0,5$. II) La masa del horizonte aparente tiende asintóticamente a $M_{ADM} \approx 0,2978$ ($dr_1 = 0,005, dr_2 = 0,0025, dt/dr = 0,5$).

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis presentamos una gran gama de conceptos y técnicas indispensables para hacer tratable un problema de relatividad general en su formulación más sencilla y que a la vez, le pudieramos extraer contenido físico y matemático de interés. Partimos de la relatividad general, planteada como una ecuación tensorial en una variedad pseudo-Riemanniana en 4 dimensiones. Vistas así, las ecuaciones de Einstein no distinguen entre espacio y tiempo, por lo que utilizamos conceptos de topología diferencial y geometría Riemanniana para replantear estas ecuaciones en el formalismo 3+1, el cual hace una fuerte distinción entre espacio y tiempo. Esto nos permitió plantear las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy.

También vimos la formulación matemática de agujeros negros, campos escalares y fluidos, así como estrellas bosón-fermión. Con estos conceptos y el de simetría esférica pudimos plantear matemáticamente el problema de datos iniciales y evolución de estrellas bosón-fermión, es decir, la evolución de las ecuaciones de Euler y la de Klein-Gordon en simetría esférica.

Para simular estos espacios-tiempo en una computadora fue necesario introducir métodos numéricos y algoritmos computacionales tales como los métodos de líneas para convertir nuestras ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas y el método de la secante para encontrar el eigenvalor asociado a nuestro campo escalar. Una vez presentadas las herramientas, hicimos 5 estudios diferentes. El primero fue generar los datos iniciales de una estrella bosón-fermión, de lo cual fue necesario valerse de todo lo que presentamos en la tesis. Este proceso es particularmente complicado ya que primero tiene que entenderse el problema como un problema de eigenvalores asociado a la frecuencia correspondiente al estado base que se obtiene dado un valor central específico del campo escalar, el cual se deduce de la ecuación de Klein-Gordon. Después, se tiene que diseñar un algoritmo que busque eficientemente dicho eigenvalor, lo cual definitivamente debe considerarse como un proceso arduo.

Una vez hecho esto pudimos hacer un estudio comparativo entre las propiedades de los datos iniciales correspondientes a los estados puramente bosónico ó fermiónico con los datos iniciales de valores mixtos. En este tipo de análisis se puede hacer un registro de parámetros muy extenso, lo cual ya fue hecho en diversas ocasiones. Aún

así, pudimos observar resultados interesantes como el hecho que el comportamiento cercano al origen está en su mayoría determinado por la componente fermiónica de la estrella mixta, así como que el comportamiento asintótico está determinado por la componente bosónica. Logramos obtener un resultado ya conocido en [3], donde se establece que la configuración de máxima masa corresponde al estado puramente bosónico. Una posible explicación a esto podría ser la energía de amarre que pierde un sistema gravitacional al mantenerse en equilibrio gravitacional, causando que aunque haya más materia en un caso que en otro, esta materia extra provoque una pérdida de energía gravitacional. Utilizando herramientas matemáticas pudimos generar una gráfica que determina para ciertos valores centrales del campo escalar, las ramas estables e inestables de la densidad central para el fluido contra la masa fermiónica. Encontramos que a nuestra resolución, el punto crítico era independiente del campo escalar, pero que, la masa y los radios de las estrellas fermiónicas sí se veían afectados. En particular entre mayor fuera el campo escalar, mayor es la masa de la componente bósónica, así como menor será su radio. Esto desde el punto de vista físico puede entenderse de la siguiente manera: Si tienen materia fermiónica rodeada por materia bosónica, la materia fermiónica queda atrapada y la única alternativa que tiene es compactarse, como si unas paredes oscuras nos presionaran (gravitacionalmente) en todas direcciones, sólo le quedaría a uno hacerse más chico para tratar de evitar la presión (gravitacional) de las paredes oscuras. Que el punto crítico sea independiente del campo escalar es seguramente debido a que nuestro estudio de parámetros no es lo suficientemente extenso así como seguramente, no tiene la resolución necesaria.

Lo novedoso de este trabajo fue el estudio de la evolución de estos estados estables e inestables. Implementando una rutina en el código Ollinsphere 2, encontramos que efectivamente un caso que se encontraba en nuestra rama estable tolera perturbaciones controladas en la densidad fermiónica y oscila ligeramente alrededor de su estado inicial a lo largo de una evolución muy larga ($t = 300$). Por otro lado, una combinación de parámetros que se encontraba en la rama inestable forma un horizonte aparente y la evolución no es lo suficiente estable para estudiar un poco el comportamiento del campo escalar en presencia del horizonte aparente, donde el colapso del lapso y el estiramiento de las hiper-superficies no permite extraer mucha información física del sistema.

Así que implementamos el vector de corrimiento conocido como "gamma driver", que nos permitió extender la evolución del caso inestable hasta tiempos muy largos $t = 300$ (comparable con el caso estable) con la suficiente certeza respecto a su comportamiento, debido al análisis de convergencia que realizamos para todos los casos. En esta norma pudimos extraer información física, por ejemplo, que el horizonte aparente se traga rápidamente al fluido que lo generó mientras que el proceso para absorber el campo escalar es comparativamente mucho más tardado que el otro. Esto permite especular como se ha hecho anteriormente si el campo escalar puede fungir como materia oscura, a pesar del teorema de no-pelo. Respecto a los casos estudiados en esta tesis, estos podrían servir como una comparación entre uno de los distintos modelos de creación de agujeros negros supermasivos correspondiente

a el colapso de un fluido primitivo en contraste con el modelo de materia oscura de campo escalar. Esto podría poner constricciones a la compatibilidad entre los modelos, ya que las configuraciones de estrellas bosón-fermión permitidas por las constricciones de Einstein modifican la frecuencia del campo escalar, lo que hace diferente el caso de colapso gravitacional con campo escalar a un caso en el que se tiene inicialmente un agujero negro con campo escalar. Sin duda alguna se tienen que hacer más simulaciones. En particular podría ser de especial interés que la relación de la masa del agujero negro que se forma respecto a la masa bósónica, sea la misma razón que la de la materia oscura con los agujeros negros supermasivos ($\approx 10^{-4}$) y de ahí ver si es posible generar configuraciones estables con tal relación de masa. Estas son las posibles extensiones que considero plausibles, al trabajo aquí realizado, en el futuro cercano.

Bibliografía

- [1] S. Desser , C.W. Misner and R. Arnowitt. The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1962.
- [2] A.Bernal and F.Siddharta. Scalar field dark matter: head-on interaction between two structures. *Phys.Rev. D*, 2006.
- [3] A.B.Henriques, A.Liddle, and R.G. Moorehouse. Combined boson-fermion stars. *Physics Letters B*, 1989.
- [4] A.B.Henriques, A.Liddle, and R.G. Moorehouse. Combined boson-fermion stars: Configurations and stability. *Nuclear Physics B*, 1990.
- [5] A.B.Henriques, A.Liddle, and R.G. Moorehouse. Stability of boson-fermion stars. *Physics Letter B*, 1990.
- [6] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2007.
- [7] T. Baumgarte and S.Shapiro. On the numerical integration of einstein's field equations. *Phys. Rev. D*, 1998.
- [8] Steven L. Liebling. Carlos Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Rev. Relativity*, 2012.
- [9] Sean M. Carroll. *Lecture notes on General Relativity*. December 1993.
- [10] Matthew W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Physical Review Letters*, page 70:90, 1993.
- [11] J.A. Wheeler. C.W. Misner, K.S. Thorne. *Gravitation*. W.H Freeman and Co., 1973.
- [12] D.Brown. Covariant formulations of bssn and the standard gauge. *Phys. Rev. D*, 2009.
- [13] C.M.G de Sousa and V. Silveira. Slowly rotating boson fermion stars. *Int.J.Mod.Phys.D10*, 2001.
- [14] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. 1915.

- [15] J.Barranco, A.Bernal, JC.Degollado, A.Diez-Tejedor, M.Megevand, M.Alcubierre, D. Nunez, and O.Sarbach. Schwarzschild black holes can wear scalar wigs. *Physical Review Letters*, 2012.
- [16] J.Barranco, A.Bernal, JC.Degollado, A. Diez-Tejedor, M.Megevand, M.Alcubierre, D.Nunez, and O.Sarbach. Are black holes a serious threat to scalar field dark matter models? *Physical Review Letters D*, 2011.
- [17] J.Bekenstein. Novel no-scalar hair theorem for black holes. *Phys.Rev.D*, 1995.
- [18] Chai W. Lai. *A Numerical study of Boson stars*. PhD thesis, University of British Columbia, 2004.
- [19] E. Lifschitz. L.D. Landau. *Statistical Mechanics*, volume 5 of *Course of theoretical physics*. Pergamon Press, third edition, 1980.
- [20] M.Alcubierre, F.Siddharta, T.Matos, D.Nunez, and L. Urena-Lopez. Scalar field dark matter and galaxy formation. *Dark Matter in Astro- and Particle Physics*, 2002.
- [21] Miguel Alcubierre Martha D. Mendez. 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *arxiv*, 2010.
- [22] Roger Penrose. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Industrial and Applied Mathematics, third edition, 1987.
- [23] Frans Pretorius. Evolution of binary black hole spacetimes. *Physical Review Letters*, 2005.
- [24] Bernard F. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press, second edition, 2009.
- [25] Matthew W. Choptuik. Scott C. Noble. Type II critical phenomena in neutron star collapse. *Phys.Rev.D78:064059*, 2008.
- [26] M. Shibata and T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, 1995.
- [27] S.Valdez-Alvarado, C.Palenzuela, D.Alic, and L.A.Lopez-Urena. Dynamical evolution of fermion-boson stars. *arXiv:1210.2299 [gr-qc]*, 2012.
- [28] Saul A. Teukolsky. On the stability of the iterated Crank-Nicholson method in numerical relativity. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9909026v1>, February 2008.
- [29] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [30] W.T Vetterling W.H. Press, S.A Teukolsky and B.P Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, third edition, 2007.
- [31] James W. York. Kinematics and dynamics of general relativity. *Sources of gravitational radiation*, pages 83–126, 1979.