



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÓNICAS CON GEOMETRÍA MODERNA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GALICIA RODRÍGUEZ FIDENCIO



DIRECTORA DE TESIS:
DOCTORA GARCÍA CAMPOS MONTSERRAT

2013

□



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Galicia
Rodríguez
Fidencio
58 55 36 38
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
302023318

2. Datos del tutor
Dra
Montserrat
García
Campos

3. Datos del sinodal 1
M. en C.
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

4. Datos del sinodal 2
Dr
Leobardo
Fernández
Román

5. Datos del sinodal 3
Dra
Isabel Alicia
Hubard
Escalera

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
José Antonio
Gómez
Ortega

7. Datos del trabajo escrito
Cónicas con Geometría Moderna
160 p
2013

CÓNICAS CON GEOMETRÍA MODERNA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tesis que para obtener el título de Matemático presenta:

Fidencio Galicia Rodríguez

Tutora: Dra. Montserrat García Campos

A mis padres y hermanos. A mi
esposa Mariela y a mi hija Ángela Sofía.

AGRADECIMIENTOS:

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a mi asesora, Montserrat García Campos, por su enorme paciencia y apoyo que me brindó para escribir este trabajo.

INTRODUCCIÓN:

El propósito de escribir esta tesis es presentar algunos temas de Geometría Moderna que, por lo general, no se ven en los cursos que se imparten en la Facultad de Ciencias. Vamos a usar un software de geometría dinámico conocido como CABRI II para realizar nuestras construcciones.

De todo estudiante de Geometría es bien conocido que el estudio de las secciones cónicas data de hace más de dos mil años. De hecho, es en la Antigua Grecia donde surge su estudio y fueron los grandes pensadores griegos los que acuñaron los nombres que actualmente conocemos de parábola, elipse e hipérbola.

Con el desarrollo posterior del Álgebra y su aplicación a la Geometría, actualmente se conocen diversas definiciones de las cónicas. Así, podemos definirlas desde la Geometría Euclidiana, la Geometría Afín y la Geometría Proyectiva.

En el presente trabajo utilizaremos las definiciones que todos conocemos desde nuestro curso de Geometría Analítica de bachillerato, combinaremos estas definiciones con los teoremas que se estudian en los cursos de Geometría Moderna que se imparten en la Facultad para obtener nuevas propiedades interesantes de las cónicas.

Llegados a este punto, mencionaré que los requisitos para abordar la lectura de este trabajo son los conocimientos adquiridos en los dos cursos de Geometría Moderna, Geometría Analítica y Álgebra Superior. Se usarán libremente los conceptos y teoremas de los dos cursos de Geometría Moderna, salvo, en el capítulo 2 de esta tesis haremos un paréntesis en el estudio de las cónicas para abordar algo de líneas y puntos isogonales que, por lo general, por falta de tiempo no alcanzan a estudiarse en los mencionados cursos. He de mencionar que en algunas partes de los capítulos 1 y 6 y en los apéndices haremos uso de la Geometría Analítica en las demostraciones de algunos teoremas en las que utilizaremos las propiedades más elementales de los determinantes y propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática adquiridas en un curso de Álgebra Superior, esto sin descuidar las deducciones sintéticas. Me han dicho que el uso de la Geometría Analítica parece estar algo fuera de lugar con el título de este trabajo, su uso en algunos teoremas ha sido mínimo tanto como nos fue posible, la razón de esto es que los teoremas en los que la empleamos son sencillos analíticamente (salvo los del capítulo 6) y que sintéticamente requerirían multitud de proposiciones precedentes para su demostración las cuales no forman parte central de este trabajo. La mayoría de los teoremas en los que empleamos la Geometría Analítica se demuestran sintéticamente con las proposiciones de los libros de Apolonio que mencionamos en la bibliografía. Después de todo, uno de mis sinodales me dijo “la Geometría Analítica también es Geometría Moderna”.

No es requisito haber cursado Geometría Proyectiva, en algún lugar se utilizará un teorema que depende de la definición proyectiva de cónica, sin embargo, se dará la referencia para su consulta.

Hemos de mencionar que la mayoría de los teoremas aquí ilustrados aparecen sin demostración en una página de internet que menciono en la bibliografía y a los cuáles nosotros nos hemos dedicado a elaborar nuestras propias demostraciones, utilizando exclusivamente material de Geometría Sintética, aunque suponemos que los matemáticos que los demostraron antes lo hicieron seguramente por algunos métodos parecidos a los nuestros.

Por último deseo expresar mi profundo agradecimiento a todos mis sinodales por haberme escuchado amablemente y leer mi trabajo, por sus útiles comentarios y crítica constructiva, muy en especial a mis sinodales la Doctora Isabel Alicia Hubard Escalera y el Doctor Leobardo Fernández Román quienes amablemente leyeron el trabajo varias veces y corrigieron muchas erratas sustanciales en demostraciones y en redacción y me hicieron notables sugerencias. Ahora bien, testarudo y necio como siempre he sido, no siempre sigo los consejos de quienes saben muchísimo más que yo. Por esta razón, si alguien encuentra algún desatino, falta o error, sepa que es exclusivamente mío.

CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN:.....	9
Capítulo 1.	14
Definiciones, construcciones y propiedades elementales de las cónicas.....	14
1.1 Parábola.	14
1.2 Elipse.	17
1.3 Hipérbola.....	24
Capítulo 2.	36
Líneas y Puntos Isogonales.....	36
2.1 Líneas y puntos Isogonales.....	36
2.2 Puntos de Brocard.....	37
2.3 Puntos de Fermat.....	38
2.4 Puntos Isodinámicos.	40
2.5 Puntos de Napoleón.....	42
2.6 Más teoremas sobre puntos isogonales.	44
2.7 Transformación isogonal con respecto a un triángulo.....	49
Capítulo 3.	55
Parábolas inscritas.....	55
3.1 Parábola tangente a cuatro líneas rectas dadas.	55
3.2 Parábola inscrita a un triángulo dado.	57
3.3 Una curiosidad geométrica de la parábola.	60
Capítulo 4.	64
Elipses inscritas y circunscritas.....	64
4.1 Elipses inscritas en un triángulo.....	64
4.2 Punto de Steiner.....	66
Capítulo 5.	71
Hipérbolas inscritas y circunscritas e hipérbolas equiláteras.	71
5.1 Hipérbolas Inscritas en un triángulo.	71
5.2 Hipérbolas Equiláteras.	73
Capítulo 6.	91
Cónica de Evans.....	91
6.1 Coordenadas Baricéntricas y Trilineales.	91
6.2 Área de un triángulo. Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia en coordenadas trilineales. Equivalencias de coordenadas baricéntricas.....	93

6.3 Coordenadas baricéntricas homogéneas y coordenadas trilineales homogéneas.....	104
6.4 Coordenadas trilineales homegéneas de algunos puntos notables del triángulo.....	107
6.5 Cónica de Evans.....	123
Apéndice A. Recta de Euler vía coordenadas trilineales.....	131
Apéndice B. Coordenadas trilineales homogéneas de otros puntos notables del triángulo....	133
Apéndice C: Diámetros de las Cónicas.....	143
Apéndice D: Fórmulas del Área de un triángulo e Identidades Trigonómicas.....	151
CONCLUSIONES:	157
BIBLIOGRAFÍA:.....	160

Capítulo 1.

Definiciones, construcciones y propiedades elementales de las cónicas.

En este capítulo vamos a dar la definición de cada una de las cónicas como la conocemos de nuestros cursos de Geometría Analítica. Veremos algunas de sus propiedades y daremos un método para construirlas.

Para las construcciones únicamente debemos estar familiarizados con el concepto de lugar geométrico y utilizaremos algunas de las construcciones básicas con regla y compás.

Existen distintas maneras de construir las cónicas; a lo largo del texto usaremos la que más convenga a cada uno de los teoremas que vamos a enunciar sin demostrar las equivalencias.

1.1 Parábola.

DEFINICIÓN 1: Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija, tales que el punto no está sobre la recta. El punto fijo se llama foco, y la recta fija, directriz.

Construcción 1: Por puntos. (Ver Figura 1)

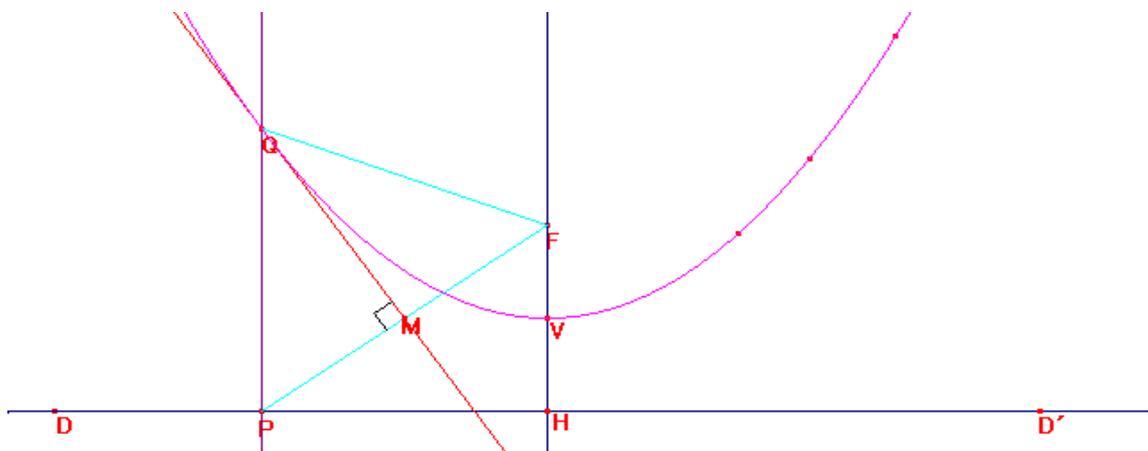


FIGURA 1

Sean F el foco (que no debe estar sobre la directriz), la directriz DD' y sea H sobre DD' tal que FH es perpendicular a DD' .

1. Se sitúa un punto V sobre FH de tal manera que $VH = VF$. Al punto V se le conoce como vértice de la parábola y por definición está sobre la curva.
2. Sean P cualquier punto sobre DD' y M el punto medio del segmento PF .
3. Sea Q el punto de intersección de la mediatriz de PF con la perpendicular a DD' que pasa por P .

Con los puntos anteriores hemos obtenido así un punto Q sobre la parábola, esto se puede verificar observando que, por construcción, el triángulo QPF es isósceles con $QP = QF$ de donde se sigue que Q está sobre la parábola.

De forma análoga se pueden determinar otros puntos de la parábola haciendo variar P sobre DD' . La unión de todos estos puntos es la parábola. ■

Recíprocamente, todo punto de la parábola se puede construir de la forma anterior. Para el recíproco véase el Apéndice C.

NOTA: Esto puede hacerse con el software, si movemos el punto P sobre DD' , obtenemos lo que se muestra en la Figura 1.

De la construcción 1 se desprende el siguiente:

COROLARIO C 1.1 La mediatriz del segmento PF es tangente a la parábola en el punto Q .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 2)

Supongamos que existe otro punto Q' en la mediatriz de PF de tal forma que Q' también está sobre la parábola. Sea P' el pie de la perpendicular de Q' a DD' . Notemos que $P \neq P'$.

Se tiene entonces que el triángulo $Q'PF$ es isósceles con $Q'P = Q'F$ pero por estar Q' en la parábola se sigue que si $Q'P'$ es una perpendicular a DD' entonces $Q'P' = Q'P$ lo cual es imposible. ■

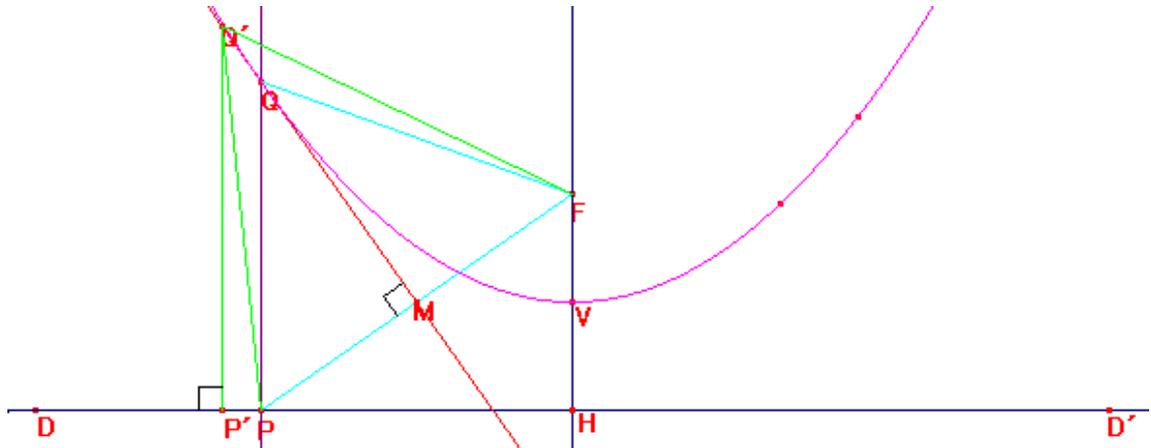


FIGURA 2

Ahora podemos enunciar el siguiente y útil:

COROLARIO C.1.2. Es posible construir una parábola dadas dos rectas que se intersecan y un punto no contenido en ellas de tal forma que el punto dado es el foco y las rectas dadas son rectas tangentes.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 3)

Dados el punto F y las rectas d y d' las cuales se intersecan en P . Construyamos los reflejados D y D' de F con respecto a d y d' , esto es, puntos D y D' tales que d y d' son, respectivamente, las medatrices de los segmentos FD y FD' .

Tracemos ahora la recta DD' y sean M y M' los puntos de intersección de las rectas perpendiculares a DD' desde D y D' con las rectas d y d' , respectivamente.

Observemos entonces que los triángulos MDF y $M'D'F$ son isósceles donde $MD = MF$ y $M'D' = M'F$ y de donde se sigue que M y M' están sobre la parábola que estamos buscando.

Usando la construcción 1 se puede completar la parábola. El Corolario C.1.1 garantiza que las rectas d y d' serán tangentes a la curva en M y M' respectivamente. ■

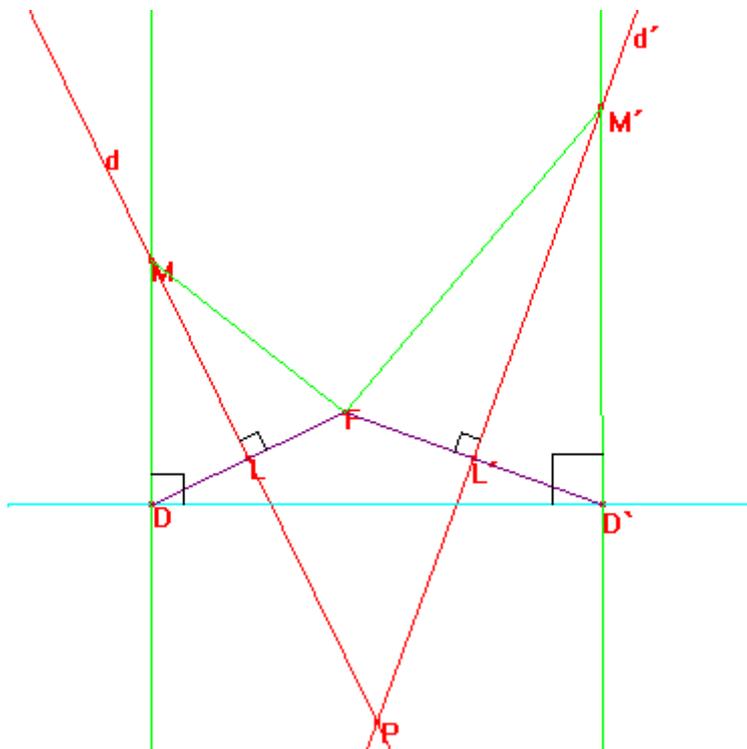


FIGURA 3

A continuación definiremos algunos elementos de la parábola.

Llamaremos *radio vector* a cualquier segmento de recta que una al foco con cualquier punto de la parábola, a la perpendicular desde el foco a la directriz le llamaremos *eje focal* o simplemente *eje de la parábola*, a cualquier cuerda que pase por el foco le llamaremos *cuerda focal* y finalmente le llamaremos *recta normal a la parábola* a la perpendicular a la recta tangente en el punto de contacto.

Veamos un último teorema referente a propiedades elementales de la parábola:

TEOREMA 1. Una recta normal a la parábola es bisectriz del ángulo comprendido entre el radio vector en el punto de contacto (distinto del vértice) y la recta paralela al eje focal en ese punto.

DEMOSTRACIÓN: (Ver figura 4)

Tenemos dada una parábola con eje focal e , una tangente t en un punto T , la recta normal n , la recta m que es paralela a e en T y la directriz d .

Vamos a probar que $\angle mTn = \angle nTF$.

Para ello sabemos por la construcción de una parábola que si A es el punto de intersección de m con d entonces A es el reflejado de F con respecto a t , más aún FA es perpendicular a t y el triángulo TAF es isósceles.

Por consiguiente tenemos que FA es paralelo a n y entonces se sigue que $\angle mTn = \angle mAF = \angle TAF = \angle TFA = \angle nTF$.

Por lo tanto $\angle mTn = \angle nTF$. ■

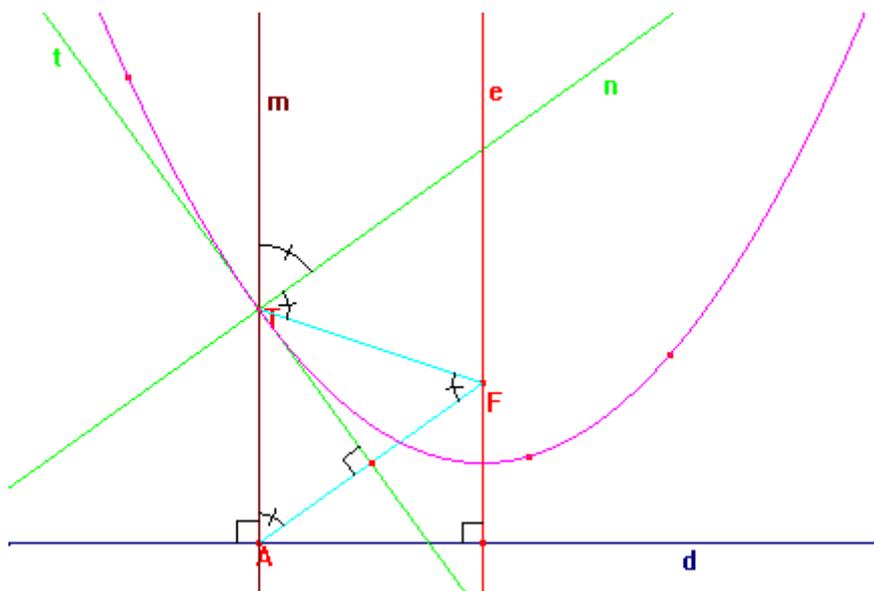


FIGURA 4

1.2 Elipse.

DEFINICIÓN 2. Una Elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una cantidad constante mayor que la distancia a los dos puntos fijos.

Construcción 2: Por puntos (Ver figura 5)

Sobre una recta cualquiera localizamos los puntos A y A' . Enseguida tomamos O el punto medio del segmento AA' y situamos los puntos F y F' tal que $OF = OF'$ y $OF < OA$.

La longitud del segmento AA' va a hacer el papel de la cantidad constante y los puntos F y F' van a ser los focos de la elipse.

1. Con radio OA y haciendo centro en F y en F' trazamos dos circunferencias cuyos puntos de intersección serán los puntos B y B' . Estos serán los primeros puntos de la curva. En efecto, por construcción se tiene que $BF = BF' = OA = OA'$ y por lo tanto $BF + BF' = AA'$ que es precisamente la definición de la elipse. Se obtiene una igualdad similar al considerar el punto B' .
2. Sea K un punto cualquiera entre O y F . Con radios AK y $A'K$ y haciendo centro en F y F' , respectivamente, se obtienen los puntos M y M' . Estos dos puntos también están sobre la curva que estamos buscando. En efecto, $MF' + MF = A'K + KA' = AA'$. Una igualdad similar se obtiene al considerar el punto M' .

Análogamente, haciendo variar K entre O y F , o bien, entre O' y F' , y repitiendo el paso anterior, se obtienen otros puntos de la elipse. ■

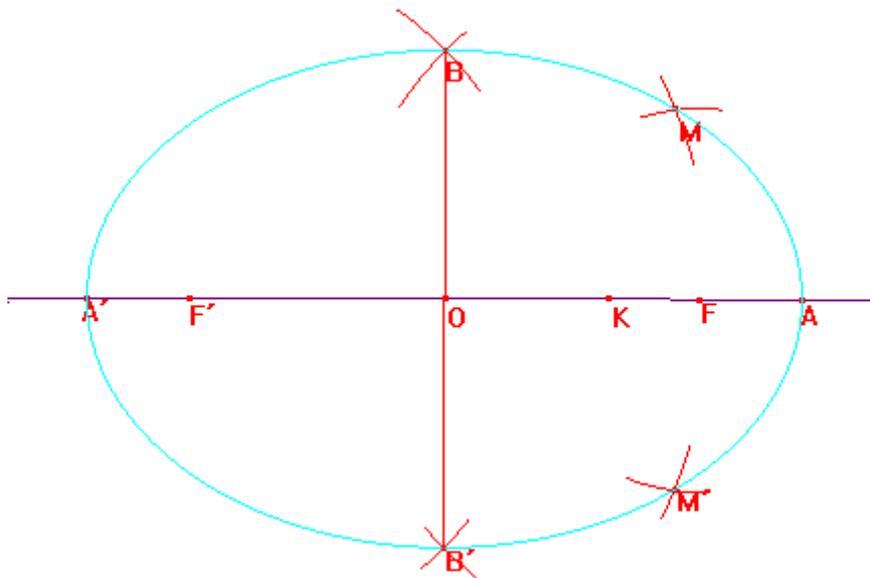


FIGURA 5

Recíprocamente, todo punto de la elipse se puede construir de la forma anterior. Para el recíproco véase el Apéndice C.

Antes de continuar con el siguiente teorema vamos a definir los elementos de la elipse. Al segmento AA' se le llama el *eje mayor de la elipse*, el segmento BB' se llama *eje menor de la elipse*, los puntos A y A' se llaman los *vértices de la elipse*, el segmento que une un foco con cualquier punto de la elipse se llama *radio vector*, finalmente a O se le llama *el centro de la elipse*.

TEOREMA 2. Sean F el centro de una circunferencia Ω de radio r , F' un punto en el interior de esta circunferencia y Q un punto sobre la circunferencia. Si m es la mediatriz del segmento QF' y P es el punto de intersección de m con QF , entonces el lugar geométrico

de P cuando Q se mueve sobre la circunferencia es una elipse de focos F y F' y eje mayor igual a r .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 6)

Si m es mediatriz del segmento $F'Q$, entonces el triángulo $PF'Q$ es isósceles y por consiguiente $PF' = PQ$. Entonces tenemos que $r = FQ = FP + PQ = FP + PF'$, lo que significa que P está en una elipse de focos F y F' y eje mayor igual a r .

Variando Q sobre la circunferencia Ω queda demostrado el teorema. ■

A la circunferencia Ω se le llama *una circunferencia principal de la elipse*. Existe otra circunferencia principal de la elipse cuando se considera el punto F' .

El teorema que acaba de probarse será de gran utilidad en los capítulos siguientes.

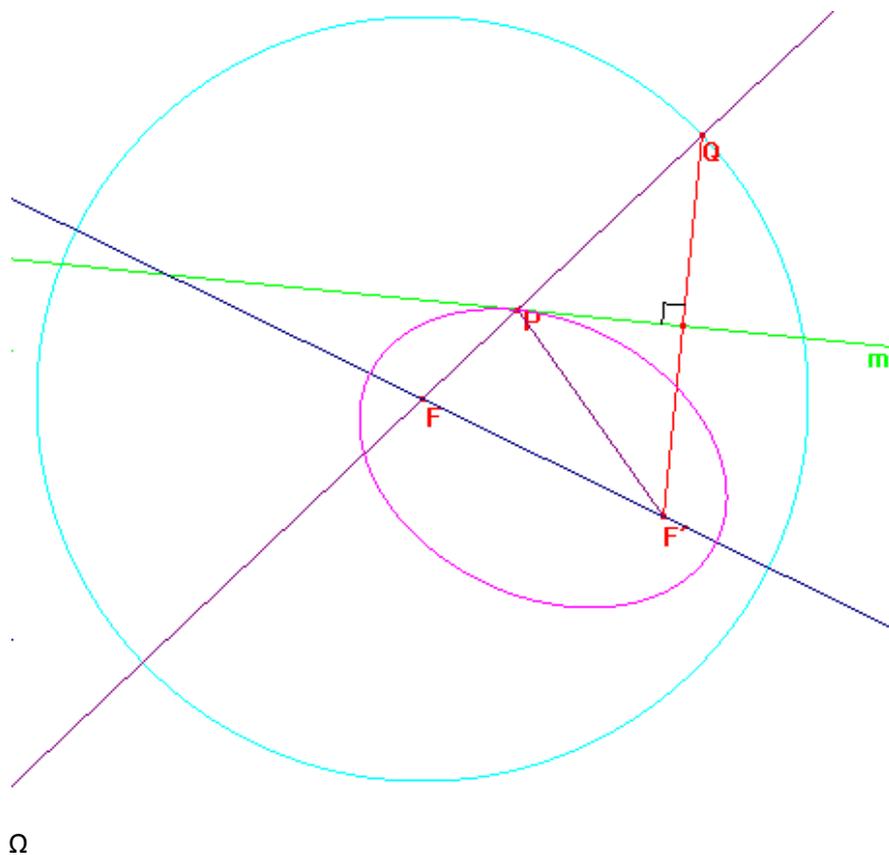


FIGURA 6

COROLARIO 2.1. En la figura 6 la recta m es tangente a la elipse. Además, si M es el punto de intersección entre el segmento $F'Q$ y m , entonces el lugar geométrico de M cuando Q se mueve sobre Ω , es una circunferencia que circunscribe a la elipse.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 7)

Supongamos que existe un punto R distinto de P en m tal que R también está sobre la elipse.

Como el triángulo $RF'Q$ es isósceles tenemos que $RF' = RQ$, como R está sobre la curva se tiene que $r = RF + RF' = RF + RQ > FQ = r$ lo cual es imposible.

Por lo tanto la recta m es tangente a la elipse.

Para la segunda parte del corolario sean O el centro de la elipse, A y A' los vértices, y sean S y S' los puntos donde el eje mayor interseca a la circunferencia principal.

Observemos que cuando Q recorre Ω , en algún momento Q coincide con S , es decir, el segmento $F'Q$ coincidirá con el segmento $F'S$ y como m se mantiene tangente a la curva se sigue que M coincidirá con A , es decir, A es el punto medio de $F'S$.

Análogamente, A' es el punto medio de $F'S'$.

Por lo tanto el lugar geométrico de M cuando Q recorre Ω es una circunferencia homotética a la circunferencia principal que tiene centro en F . La razón de homotecia es 1:2 y el centro de homotecia es F' . El centro de tal circunferencia es O y circunscribe a la elipse.

A la circunferencia que acabamos de construir la llamaremos *circunferencia auxiliar de la elipse*. ■

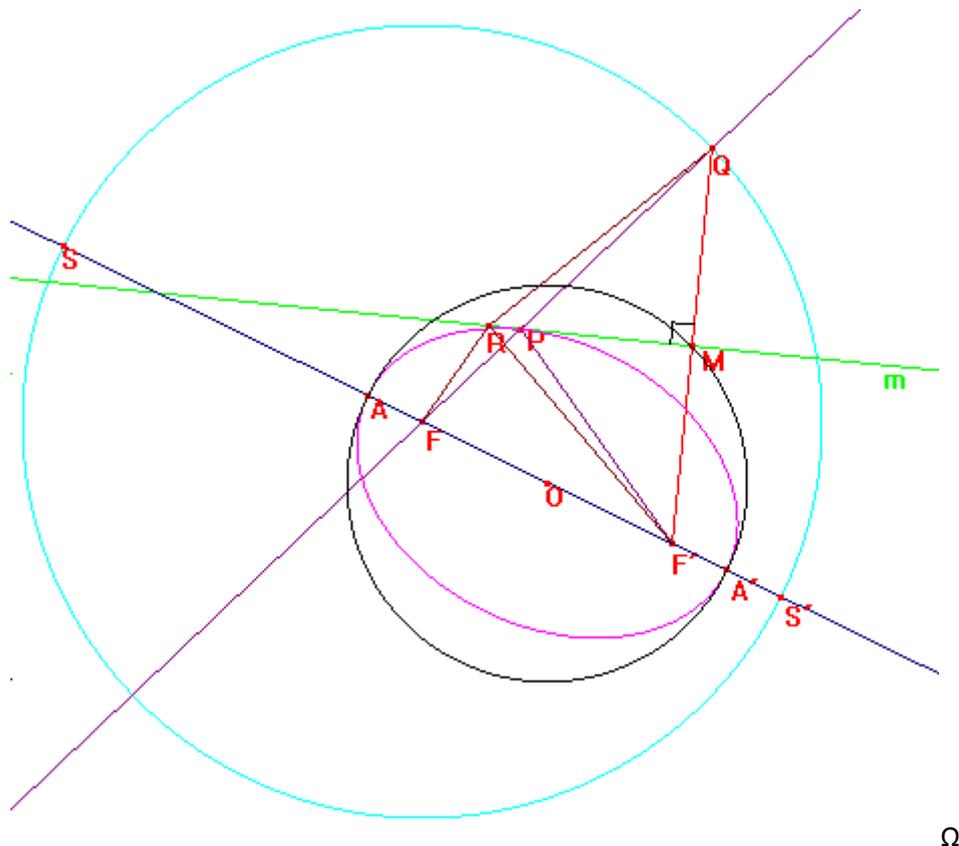


FIGURA 7

Del Corolario 2.1 y de las observaciones se desprende el siguiente resultado:

COROLARIO 2.2. Es posible construir las dos tangentes exteriores a una elipse desde un punto dado T exterior a la elipse.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 8)

Supongamos que nos dan una elipse de focos F y F' y un punto exterior a ella T .

Construyamos la circunferencia principal con centro en F y la circunferencia que tiene centro en T y radio TF' . Sean Q y Q' los puntos en que las dos circunferencias se intersecan.

Por último construyamos las mediatrices de los segmentos $F'Q$ y $F'Q'$, las cuales pasarán por T .

Tales mediatrices son las tangentes que estamos buscando. La prueba de que en efecto son tangentes a la elipse es inmediata del corolario anterior. ■

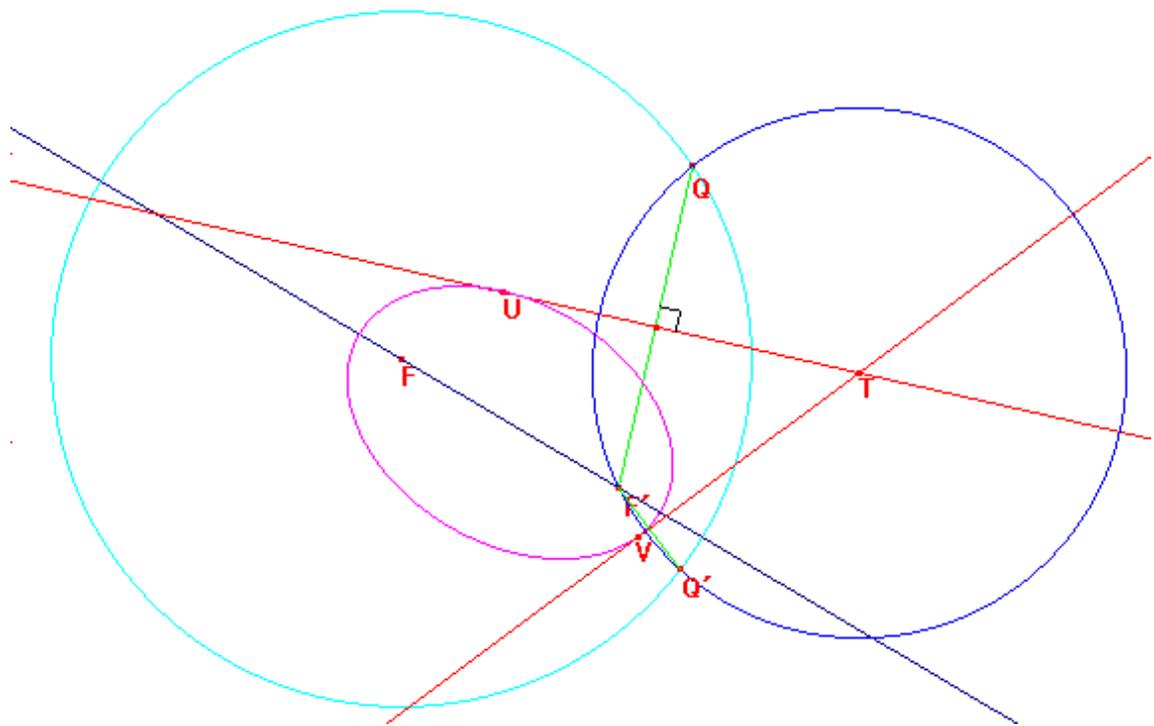


FIGURA 8

Observación: La construcción para la demostración anterior también se puede realizar dibujando la circunferencia principal con centro en F' en vez de F y después construir la circunferencia que tiene centro en T y radio TF y realizar el resto de las construcciones, como ya se explicó para el caso de la elipse.

A la recta perpendicular a una tangente de una elipse en el punto de contacto le llamaremos *recta normal de la elipse*.

COROLARIO 2.3. Una recta normal a una elipse es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto de contacto (distinto de cualquiera de los vértices).

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 9)

Supongamos que nos dan una elipse con circunferencia principal Ω con centro en F , la recta tangente t a la elipse y la recta normal correspondiente n cuyo punto de contacto es U . Sea Q sobre Ω el punto en la prolongación de FU .

Sabemos entonces por el teorema 2 que t es perpendicular al segmento $F'Q$, y como n es perpendicular a t se sigue que n es paralelo a $F'Q$.

Por consiguiente tenemos que $\angle FUn = \angle UQF'$ y $\angle nUF = \angle UF'Q$.

Pero también sabemos que el triángulo $UF'Q$ es isósceles, entonces, $\angle UF'Q = \angle UQF'$, por lo tanto $\angle FUn = \angle nUF'$ con lo que se demuestra el corolario. ■

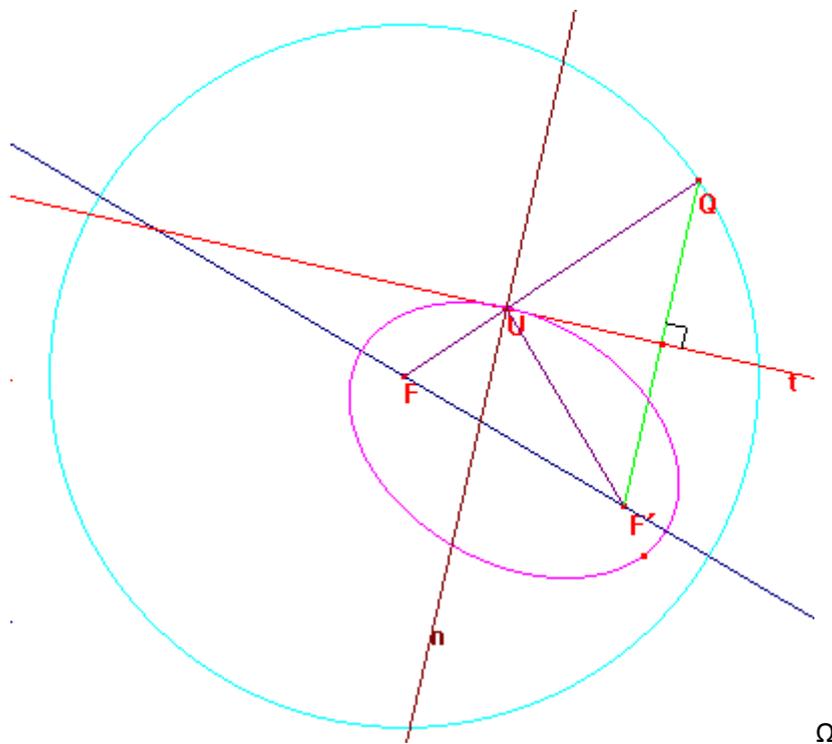


FIGURA 9

COROLARIO 2.4. Si tenemos una recta dada y dos puntos del mismo lado de ella tales que el segmento determinado por estos puntos no es paralelo a la recta dada, entonces es posible construir una elipse tal que la recta dada es la tangente a la elipse y los puntos dados son los focos de la elipse. Cuando ocurre que el segmento determinado por los dos puntos dados es paralelo a la recta dada entonces tenemos el caso trivial del cual no entraremos en discusión aquí.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 10)

Sean d la recta dada y F y F' los puntos dados.

Llamemos a N y N' las intersecciones de las perpendiculares desde F y F' con la recta d respectivamente. Si O es el punto medio de FF' , es fácil ver que $ON = ON'$.

Haciendo centro en O y tomando como radio a $ON = ON'$ construimos la circunferencia que pasa por N y N' .

Sean A y A' los puntos en que esta circunferencia toca a la recta determinada por F y F' .

Veamos que $AO > OF$. Si esto no fuera cierto se tendría que $AO \leq OF$ por lo cual tenemos dos posibilidades, $AO = OF$ o bien $AO < OF$. Si ocurre que $AO = OF$ entonces el cuadrilátero $FF'N'N$ es cíclico pero esto es imposible ya que ningún cuadrilátero (a menos que el cuadrilátero sea un rectángulo pero este no es el caso) con dos ángulos consecutivos de 90° puede ser cíclico.

Si tenemos ahora que $AO < OF$ entonces A estaría entre F y O por lo que la circunferencia cuyo centro es O y que pasa por N y N' intersectaría al segmento FN en un punto que llamaríamos Q y tal que Q está entre N y F , pero esto también es imposible ya que como $\angle FNN' = 90^\circ$ tendríamos que QN' sería diámetro de la circunferencia que tiene centro en O y que pasa por N y N' pero tal que O no está en el diámetro QN' .

Por lo tanto $AO > OF$.

De lo anterior y por los Corolarios 3.1 y 3.2 se sigue que la circunferencia que pasa por N, N', A' y A es la circunferencia auxiliar de la elipse que estamos buscando cuyo eje mayor es AA' .

Conociendo la longitud del eje mayor y los focos por la Construcción 2 podemos terminar de construir la elipse. ■

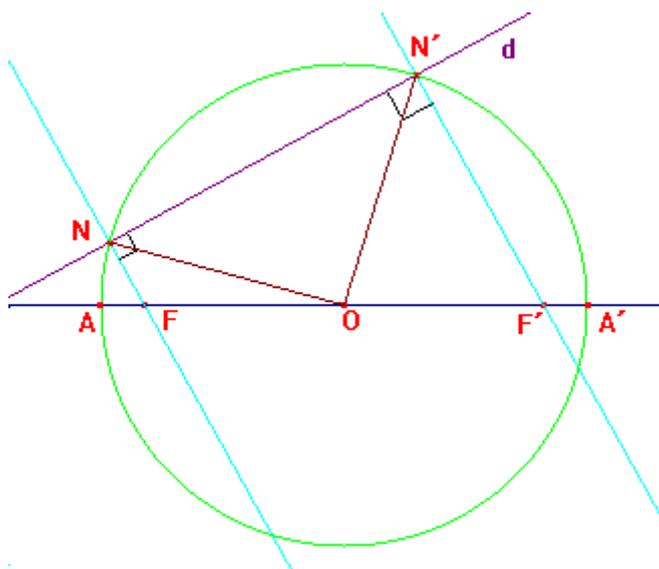


FIGURA 10

1.3 Hipérbola.

DEFINICIÓN 3. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una cantidad constante y menor que la distancia entre los dos puntos fijos.

Construcción 3: Por puntos (ver Figura 11)

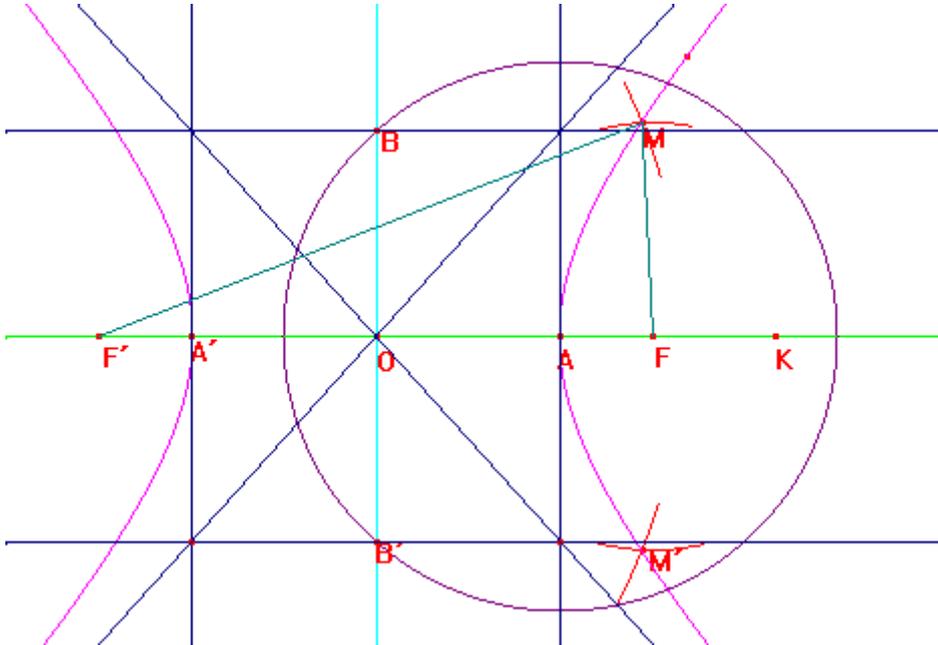


FIGURA 11

Sobre una recta cualquiera tomamos cualesquiera dos puntos F y F' y encontramos O , punto medio del segmento FF' . Sean A y A' dos puntos simétricos con respecto a O y en la misma recta sobre la que se encuentran F y F' tales que $AA' < FF'$.

La longitud del segmento AA' va a hacer el papel de la cantidad constante y los puntos F y F' van a ser los focos a los que se hace referencia en la definición.

1. Sea K un punto cualquiera fuera del segmento FF' pero sobre la recta que F y F' determinan, es decir, de manera que $OK > OF$.
2. Con radios KA y KA' , haciendo centro en F y F' respectivamente, se construyen dos circunferencias cuyas intersecciones determinan los puntos M y M' . Estos puntos están en la hipérbola que estamos construyendo puesto que $MF' - MF = A'K - AK = A'A$, que es precisamente la definición de hipérbola.

De manera análoga pueden determinarse más puntos sobre la curva variando K , ya sea a la derecha de F , o bien, a la izquierda de F' . ■

Recíprocamente, todo punto de la hipérbola se puede construir de la forma anterior. Para el recíproco véase el Apéndice C.

Al igual que para la parábola y la elipse vamos a definir algunos elementos importantes de la hipérbola.

El punto O se llama *centro de la hipérbola*, el *radio vector de la hipérbola* es aquel segmento de recta que une cualquier punto sobre la curva con cualquiera de sus focos, los puntos A y A' se llaman *vértices de la hipérbola*, por último, el segmento AA' se llama *eje focal*.

La hipérbola también tiene otro elemento llamado *el eje menor* que en el dibujo de la figura 11 está determinado por el segmento BB' y que se construye de la siguiente forma:

Con centro en A y radio OF , se dibuja una circunferencia que interseca a la perpendicular por O a la recta AA' en los puntos B y B' .

Por último vamos a mencionar otro elemento, se trata de las *asíntotas de la hipérbola*. Estas son un par de rectas que se obtienen dibujando las diagonales de un rectángulo definido por las tangentes a la curva en sus vértices A y A' y las perpendiculares al eje menor en los puntos B y B' .

Las asíntotas de la hipérbola cumplen muchas propiedades que no serán mencionadas en este trabajo; sin embargo, utilizaremos un resultado que con respecto a la hipérbola cumplen las asíntotas y cuya demostración la daremos en forma analítica y para el caso particular de las hipérbolas equiláteras las cuales se definen como aquellas cuyas asíntotas son perpendiculares. El lector interesado en consultar una demostración completa y sintética puede remitirse a [2]. Este resultado será enunciado a continuación:

TEOREMA 3: Los segmentos de recta que una secante (que no pase por el centro) a la hipérbola determina con la curva y sus asíntotas son iguales. (ver Figura 12).

En la figura tenemos una hipérbola con sus asíntotas y una secante n .

La secante toca a la hipérbola en los puntos A y D y a las asíntotas en B y C . Tenemos entonces que $AB = CD$.

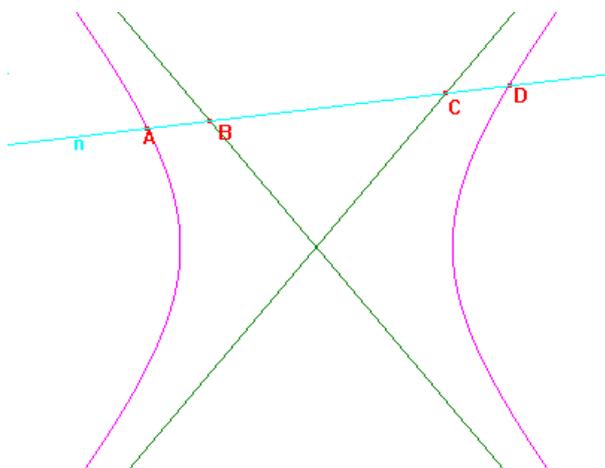


FIGURA 12

DEMOSTRACIÓN: (Del caso particular para hipérbolas equiláteras) (Ver figura 13)

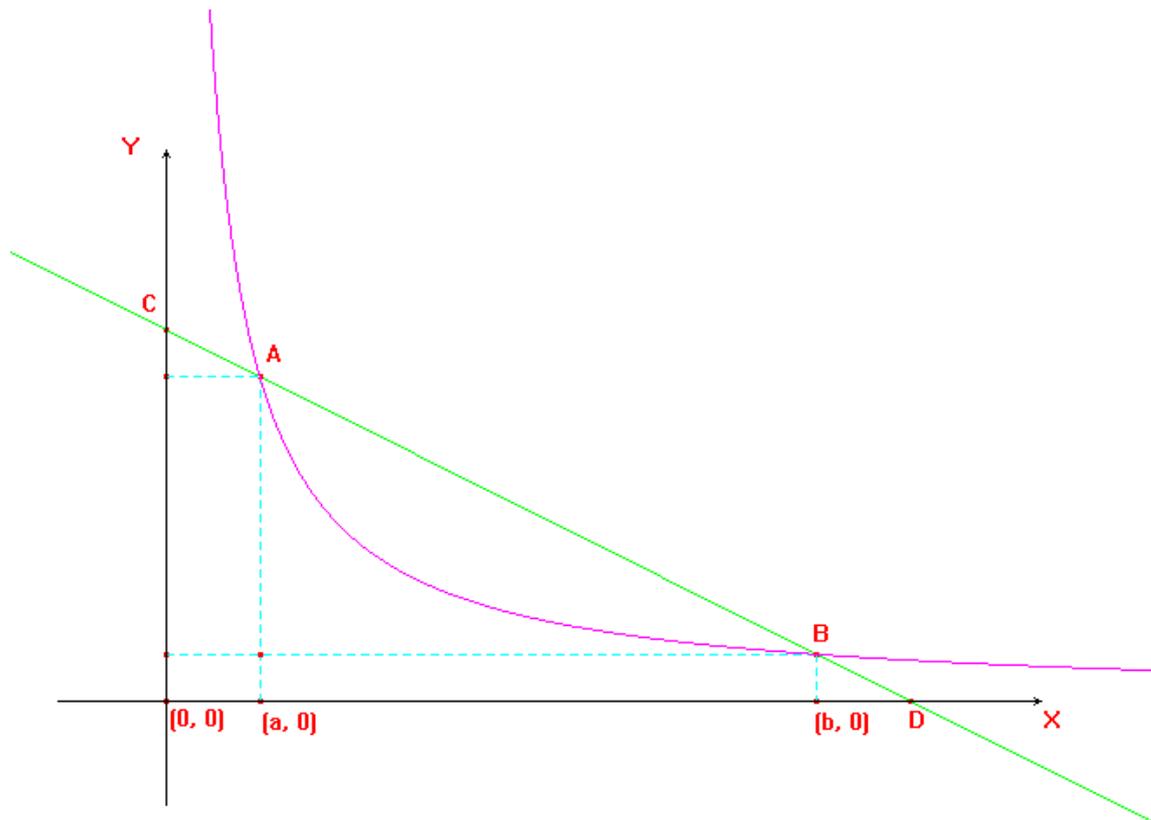


FIGURA 13

Consideremos una hipérbola equilátera que tenga por asíntotas a los ejes de coordenadas y cuya ecuación general es $xy = c$, $c \neq 0$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$ entonces obtenemos sobre la hipérbola equilátera puntos A y B de coordenadas $(a, \frac{c}{a})$ y $(b, \frac{c}{b})$ respectivamente. Si m es la pendiente de la recta determinada por los puntos A y B tenemos que

$$m = \frac{\frac{c}{b} - \frac{c}{a}}{b - a} = \frac{c \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)}{b - a} = \frac{c \left(\frac{a - b}{ab} \right)}{b - a} = \frac{c \left(\frac{-(b - a)}{ab} \right)}{b - a} = \frac{-c(b - a)}{ab(b - a)} = \frac{-c}{ab}.$$

Luego, la ecuación de la recta que pasa por A y B es

$$y - \frac{c}{a} = \frac{-c}{ab}(x - a) = \frac{-cx}{ab} + \frac{c}{b}.$$

o bien

$$y = \frac{-cx}{ab} + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) = \frac{-cx}{ab} + \frac{c(a + b)}{ab}.$$

Esta recta toca al eje Y en un punto C y al eje X en un punto D . Las coordenadas de C y D son $(0, \frac{c(a+b)}{ab})$ y $(a + b, 0)$ respectivamente.

De la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos que

$$AC^2 = a^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{c(a+b)}{ab}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{c}{b} - \frac{c}{a}\right)^2 = a^2 + \left(-\frac{c}{b}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Por otra parte también tenemos que

$$BD^2 = (b - (a+b))^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Comparando las igualdades anteriores se concluye que $AC = BD$. ■

El siguiente teorema nos da otra forma de construir una hipérbola.

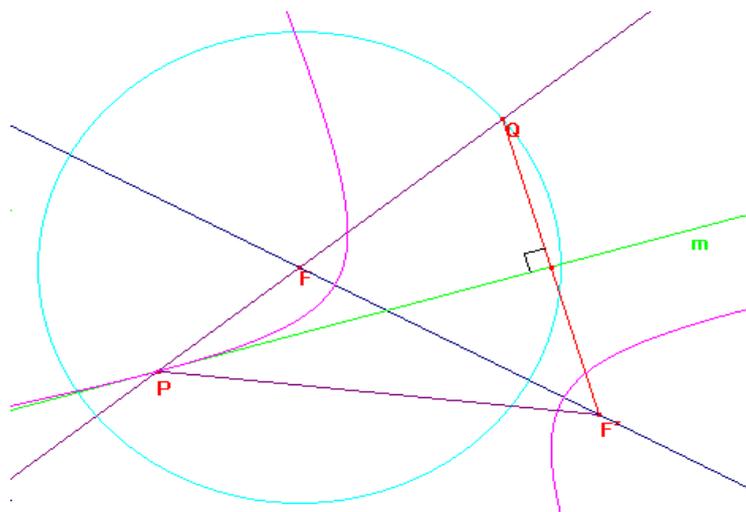
TEOREMA 4: . Sean F el centro de una circunferencia de radio r , F' y Q un punto en el exterior y sobre la circunferencia respectivamente. Si m es la mediatriz del segmento QF' y P es el punto de intersección de m con QF , entonces, el lugar geométrico de P cuando Q se mueve sobre la circunferencia es una hipérbola de focos F y F' y eje mayor igual a r .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 14)

Sea Ω la circunferencia dada con radio r y sea Q un punto sobre Ω .

Sea m la mediatriz del segmento $F'Q$, entonces el triángulo $PF'Q$ es isósceles y por consiguiente $PF' = PQ$. Entonces tenemos que $r = FQ = PQ - PF = PF' - PF$, lo que significa que P está en una hipérbola de focos F y F' y eje mayor igual a r .

Variando Q sobre la circunferencia Ω queda demostrado el teorema. ■



Ω FIGURA 14

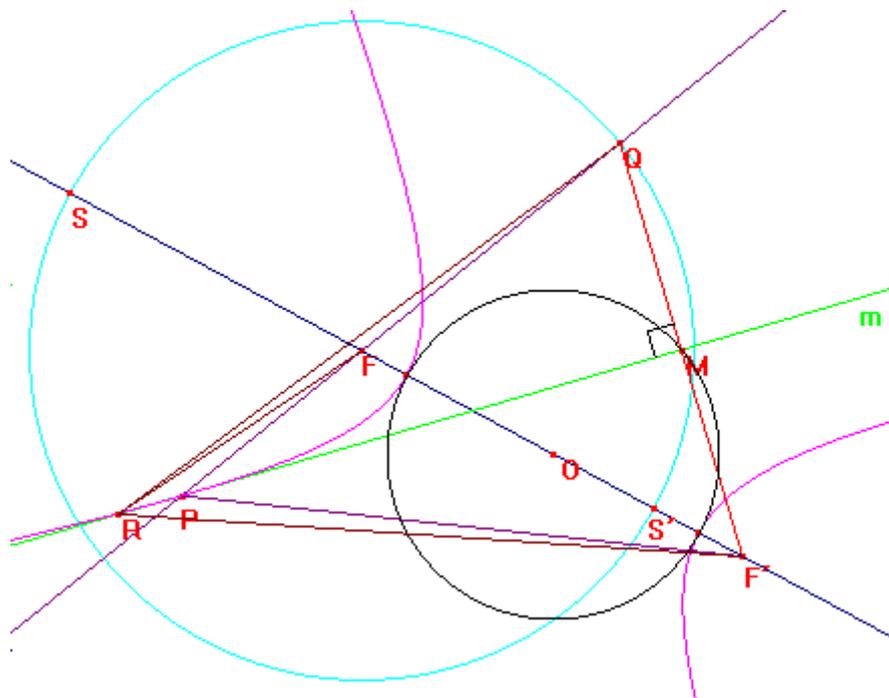
A la circunferencia Ω se le llama *una circunferencia principal de la hipérbola*. Existe otra circunferencia principal de la hipérbola que tiene centro en F' .

El teorema que acaba de probarse es de gran utilidad para algunos resultados de los capítulos siguientes.

Existen corolarios a este teorema similares a los corolarios, 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 que se demostraron para la elipse y que enunciaremos y demostraremos a continuación.

COROLARIO 4.1. En la figura 14 del teorema anterior se puede observar que la recta m es tangente a la hipérbola. También, si M es el punto de intersección entre el segmento $F'Q$ con m , entonces el lugar geométrico de M cuando Q se mueve sobre Ω , es una circunferencia que circunscribe a la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 15)



Ω FIGURA 15

Supongamos que existe un punto R distinto de P en m tal que R también está sobre la hipérbola.

Como el triángulo $RF'Q$ es isósceles tenemos que $RF' = RQ$, como R está sobre la curva se tiene que $r = RF' - RF = RQ - RF < FQ = r$ lo cual es imposible.

Por lo tanto la recta m es tangente a la hipérbola.

Para la segunda parte del corolario sean O el centro de la hipérbola y los puntos A y A' los vértices. Sean también S y S' los puntos donde el eje focal interseca a la circunferencia principal Ω que tiene centro en F .

Observemos que cuando Q recorre Ω , en algún momento Q coincide con S , es decir, el segmento $F'Q$ coincidirá con el segmento $F'S$ y como m se mantiene tangente a la curva se sigue por lo tanto que M coincidirá con A ; es decir, A es el punto medio de $F'S$.

Análogamente, A' es el punto medio de $F'S'$.

Por lo tanto el lugar geométrico de M cuando Q recorre Ω es una circunferencia de centro O que circunscribe a la hipérbola.

A la circunferencia que circunscribe a la hipérbola la llamaremos *circunferencia auxiliar de la hipérbola*. ■

Observación: La circunferencia principal también puede tener centro en F' . El diámetro de la circunferencia principal es r , lo que significa que la circunferencia auxiliar y la circunferencia principal están en razón de homotecia 1:2 con centro de homotecia en F' .

Del corolario anterior y de las observaciones se desprende el siguiente resultado:

COROLARIO 4.2. Es posible construir las tangentes a una hipérbola desde un punto dado T exterior a ella y distinto del centro de la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 16)

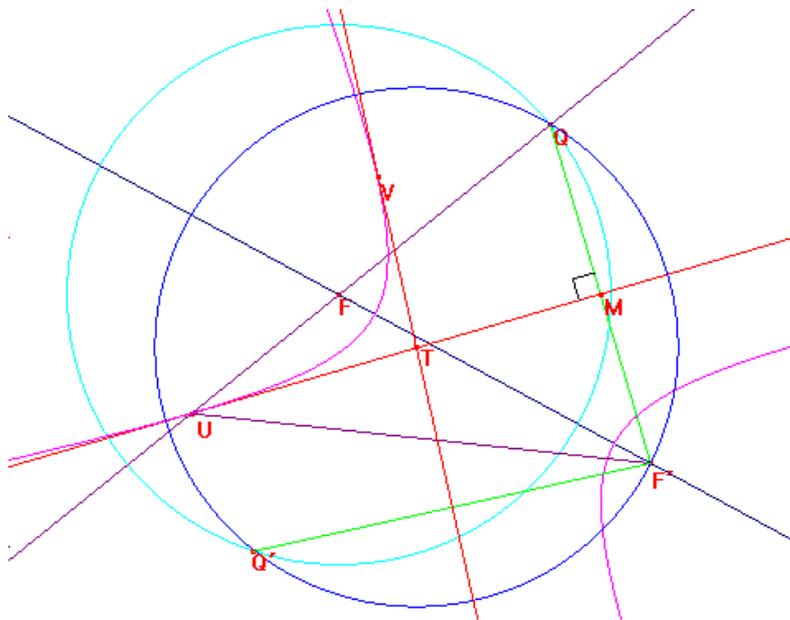


FIGURA 16

Supongamos que nos dan una hipérbola de focos F y F' y un punto exterior a ella T .

Construyamos la circunferencia principal con centro en F y la circunferencia que tiene centro en T y radio TF' . Sean Q y Q' los puntos en que las dos circunferencias se intersecan.

Por último construyamos las mediatrices de los segmentos $F'Q$ y $F'Q'$, las cuales sabemos pasarán por T .

Tales mediatrices son las tangentes que estamos buscando, la prueba de que en efecto son tangentes a la hipérbola es inmediata del corolario anterior. ■

Observación: La construcción también puede hacerse dibujando la circunferencia principal con centro en F' en vez de F y después construir la circunferencia que tiene centro en T y radio TF y realizar el resto de las construcciones como ya se hizo.

Llamaremos a la recta perpendicular a una tangente a una hipérbola en el punto de contacto *recta normal de la hipérbola*.

COROLARIO 4.3. Una recta normal a la hipérbola es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto de contacto (distinto de cualquiera de los vértices).

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 17)

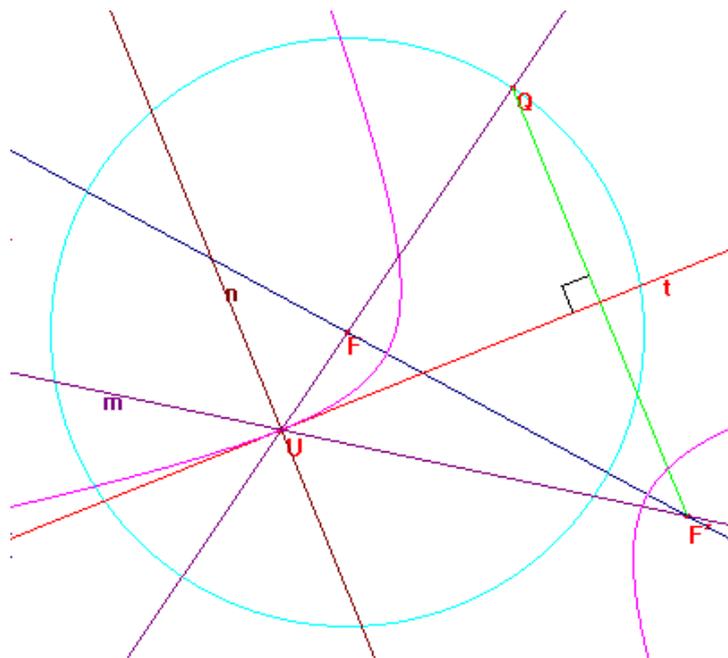


FIGURA 17

Supongamos que nos dan una hipérbola con circunferencia principal Ω con centro en F tangente t y normal n cuyo punto de contacto es U y sea Q sobre Ω el punto en la prolongación de FU .

Entonces, por el Teorema 6, tenemos que t es perpendicular al segmento $F'Q$ y como n es perpendicular a t se sigue que n es paralelo a $F'Q$.

Por consiguiente tenemos que $\angle nUF = \angle UQF'$ y $\angle mUn = \angle QF'U$.

Pero también sabemos que el triángulo $UF'Q$ es isósceles; entonces $\angle QF'U = \angle UQF'$ y por lo tanto $\angle nUF = \angle mUn$ lo que demuestra el corolario. ■

COROLARIO 4.4. Es posible construir una hipérbola dados una recta y dos puntos uno de cada lado de la recta tales que esta es tangente a la hipérbola y los puntos dados son los focos.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 18)

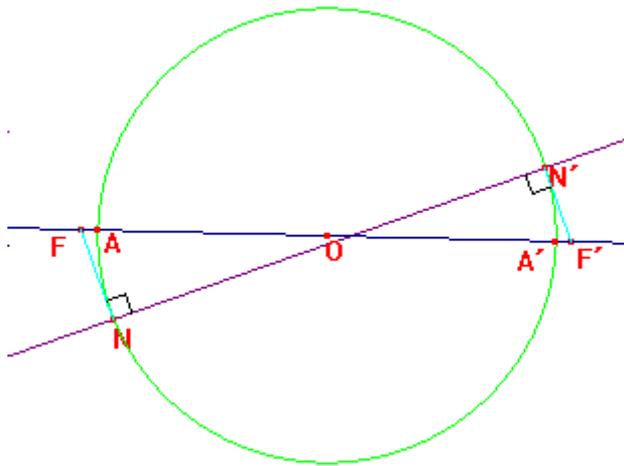


FIGURA 18

Sean d la recta y F y F' los puntos dados.

Sean N y N' las intersecciones de las perpendiculares desde F y F' a la recta d respectivamente, si O es el punto medio de FF' se sigue que la circunferencia de centro O y radio ON también pasará por ON' .

Sean A y A' las intersecciones de la recta FF' con esta circunferencia. De manera similar como en la elipse se argumenta que $OA < OF$.

De los Corolarios 6.1 y 6.2 se sigue que la circunferencia que pasa por N' , N , A y A' es la circunferencia auxiliar de la hipérbola que estamos buscando cuyo eje mayor es AA' .

Conociendo la longitud del eje mayor y los focos por el Teorema 4 podemos terminar de construir la hipérbola. ■

Vamos a definir de manera más elemental e intuitiva el concepto de perspectividad y proyectividad, no demostraremos todos los hechos y lo que daremos son explicaciones intuitivas. Para mayores detalles consultar [8], [16] y [17].

Sean π y π' (Figura 19) dos planos fijos dados en el espacio euclidiano que incluya el punto y la línea al infinito. Sea E un punto fijo que no esté ni en π ni en π' .

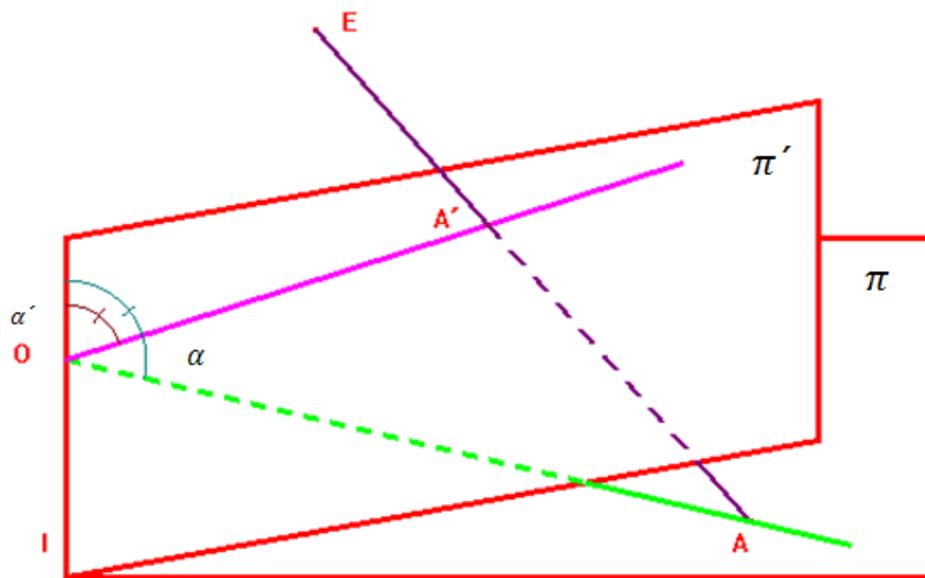


FIGURA 19

Sea A' un punto cualquiera, ordinario o al infinito, del plano π' . Entonces la recta EA' cortará al plano π en un punto único, ordinario o al infinito, A de π . En esta forma el plano π' se proyecta sobre el plano π . En efecto, como los distintos puntos de π' tienen distintas imágenes en π , la proyección es una transformación del conjunto de todos los puntos del plano π' sobre el conjunto de todos los puntos del plano π . Los puntos que están en la recta de intersección de los planos π' y π son puntos invariantes de la transformación.

Una transformación como la que se acaba de definir se llama *perspectividad*, el punto E se llama *centro* de la perspectiva. Si E es un punto ordinario del espacio, la perspectiva se llama *perspectividad central*; si E es un punto al infinito, la perspectiva se llama *perspectividad paralela*. La recta de intersección de π' y π se llama *eje de perspectiva*.

Puede probarse que una perspectiva transforma una recta de π' en una recta de π .

Será conveniente, para simplificar los dibujos, que nos quedáramos en el plano.

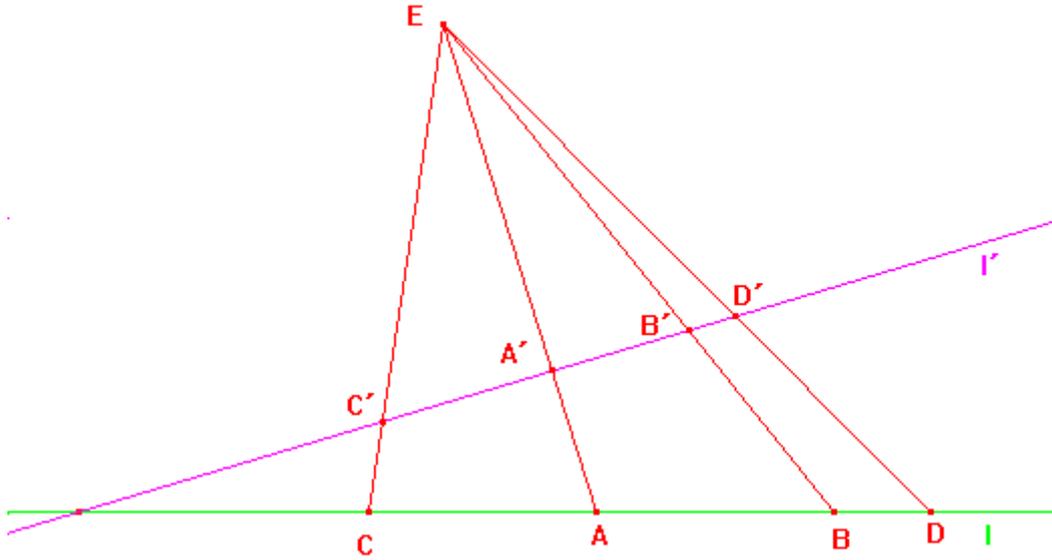


FIGURA 20

La figura 20 es una sección transversal de la situación que hemos considerado. El punto E es el centro de perspectiva, l' es una recta del plano π' , l es su imagen en π .

Diremos que la composición de dos o más perspectivas es una proyectividad.

En el curso de Geometría Moderna definimos la razón cruzada de cuatro puntos A, B, C, D en una recta como el cociente $\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$ y la denotamos con el símbolo $\{ABCD\}$. Demostramos que si teníamos una situación como la que ilustra la figura 20 entonces $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$. Por lo tanto diremos que la razón cruzada de cuatro puntos en una recta es invariante bajo perspectivas y proyectividades.

Para finalizar este capítulo vamos a enunciar unos resultados que pueden consultarse en [16] y que, por lo general son estudiados cuando se analizan las propiedades proyectivas de las cónicas, pero al tratarse de una propiedad entre puntos sobre una cónica, también podemos verla como una propiedad métrica que relaciona dichos puntos mediante su razón cruzada. Además estos resultados serán utilizados posteriormente.

TEOREMA 5. Dados cuatro puntos A, B, C y D en una cónica, la razón cruzada de las rectas que determinan con un quinto punto O también sobre la cónica, no depende del punto O . (Ver figura 21)

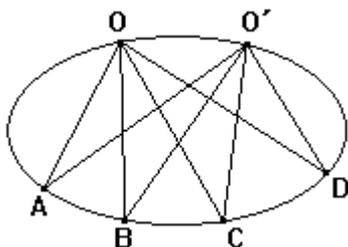


FIGURA 21

Sean A, B, C y D puntos sobre una cónica, para cualesquiera puntos O y O' sobre la cónica se tiene que:

$O\{ABCD\} = O'\{ABCD\}$, donde la llave denota la razón cruzada de los haces de rectas que tienen vértices en O y O' .

COROLARIO 5.1. Toda cónica es el lugar geométrico de las intersecciones de rectas correspondientes de dos haces con vértices O y O' , donde la correspondencia está dada por una proyectividad.

Una demostración de estos resultados puede consultarse en [16].

Hasta ahora hemos utilizado la palabra cónica sin haber dado una definición precisa de la palabra cónica.

Una primera observación es que las curvas estudiadas en este trabajo se conocen como secciones cónicas o simplemente cónicas; entonces una definición de cónica puede ser la siguiente:

DEFINICIÓN 4: Una cónica es una curva que se obtiene al seccionar un cono doble circular recto con un plano.

Y las diferentes curvas, ya sean elipse, parábola o hipérbola se obtienen de acuerdo al ángulo que forman el plano de corte y el eje del cono.

Esta definición es burda y está lejos de ser formal; sin embargo, quisimos mencionarla al final del capítulo, pues no es propósito de este trabajo estudiar las cónicas y sus propiedades a partir del cono del que se obtienen sino las propiedades de las curvas planas. Si el lector está interesado en ver una demostración de que los cortes que se obtienen del cono son precisamente las curvas que acabamos de mencionar, puede hacerlo en [2] y en [8].

Capítulo 2.

Líneas y Puntos Isogonales.

En este capítulo consideraremos algunos tópicos importantes de las de líneas isogonales y puntos isogonales que nos servirán para continuar con nuestro estudio de las secciones cónicas.

Cabe mencionar que lo que se verá en este capítulo, por lo general, no son temas que se traten en los cursos de Geometría Moderna. Estos temas son muy amplios, es por eso que aquí sólo estudiaremos los que necesitamos para continuar nuestro estudio de las cónicas.

2.1 Líneas y puntos Isogonales.

DEFINICIÓN 5: Dos líneas que pasan por el vértice de un ángulo son líneas conjugadas isogonales, o simplemente isogonales con respecto a ese ángulo, si la bisectriz del ángulo dado es también la bisectriz del ángulo formado por las dos líneas.

TEOREMA 6. Si tres líneas, cada una por uno de los vértices de un triángulo, son concurrentes; sus isogonales con respecto a los ángulos del triángulo son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 22)

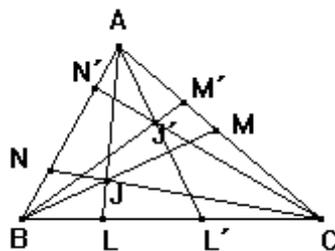


FIGURA 22

Sean AL , BM y CN las líneas concurrentes en un punto J y sean AL' , BM' , y CN' las isogonales de AL , BM y CN respectivamente. Entonces tenemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \angle BAL = \angle L'AC, \text{ y } \angle BAL' = \angle LAC, \quad \angle CBM = \angle M'BA, \text{ y } \angle CBM' = \angle MBA, \\ \angle NCB = \angle ACN', \text{ y } \angle ACN = \angle N'CB. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Ceva en su forma trigonométrica sabemos que

$$\frac{\sin ACN}{\sin NCB} \cdot \frac{\sin BAL}{\sin LAC} \cdot \frac{\sin CBM}{\sin MBA} = 1$$

Sustituyendo los ángulos que son iguales tenemos que:

$$\frac{\sin N'CB}{\sin ACN'} \cdot \frac{\sin L'AC}{\sin BAL'} \cdot \frac{\sin M'BA}{\sin CBM'} = 1$$

Y por lo tanto AL' , BM' y CN' son concurrentes en un punto que vamos a llamar J' . ■

DEFINICIÓN 6: Los puntos J y J' se llaman puntos conjugados isogonales o simplemente puntos isogonales del triángulo ABC .

Gran parte de la teoría de este tipo de puntos será utilizada en nuestro trabajo de cónicas.

2.2 Puntos de Brocard.

En un triángulo ABC , (Ver figura 23) vamos a considerar la circunferencia que pasa por A y es tangente a BC en B , la circunferencia que pasa por B y es tangente a CA en C , y la circunferencia que pasa por C y es tangente a AB en A . Si llamamos R al segundo punto de intersección de las dos primeras circunferencias, tenemos por ángulos semi-inscritos que $\angle BAR = \angle CBR = \angle ACR$. De estas igualdades entre ángulos se sigue que la tercera circunferencia también pasa por R .

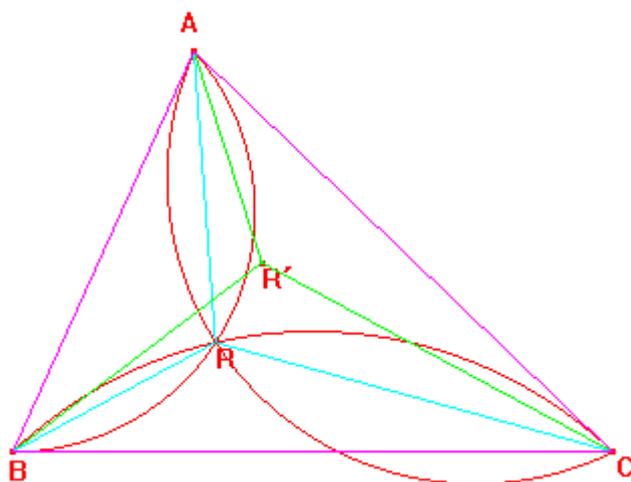


FIGURA 23.

De manera análoga, si consideramos otras tres circunferencias la primera de las cuales pasa por A y es tangente a BC en C , la segunda que pasa por B y sea tangente a CA en A y la tercera que pasa por C y sea tangente a AB en B , entonces encontramos un punto R' tal que $\angle R'AC = \angle R'CB = \angle R'BA$.

Hemos obtenido dos puntos R y R' tales que si se trazan líneas de los vértices del triángulo a ellos, los ángulos que estas líneas forman con los lados del triángulo son iguales.

Al punto R se le conoce como el *punto positivo de Brocard* y a R' como el *punto negativo de Brocard*.

TEOREMA 7: Los puntos de Brocard R y R' son puntos conjugados isogonales del triángulo.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 24)

Supongamos que nos dan un triángulo ABC con sus puntos de Brocard R y R' . Unamos R a los vértices del triángulo y hagamos que BR toque a la paralela por A al lado BC en un punto D .

Entonces, como AD es paralelo a BC se tiene que $\angle RBC = \angle DBC = \angle ADB = \angle ADR$.

Por la construcción del punto positivo de Brocard sabemos que $\angle RBC = \angle RCA$. Por lo tanto, $\angle RCA = \angle ADR$ y se sigue entonces que los puntos A', R, C, D son concíclicos. Por consiguiente tenemos también que $\angle ARD = \angle ACD$, y como AD es paralela a BC se tiene que $\angle CAD = \angle ACB$.

De estas dos últimas igualdades de ángulos tenemos que los triángulos ABC y DCA son semejantes, entonces $\angle CDA = \angle BAC$.

Por otra parte, si AF y DE son perpendiculares a BC tenemos que $AF = DE$; entonces:

$$\operatorname{ctg} RBC = \frac{BE}{DE} = \frac{BF + FC + CE}{DE} = \frac{BF}{AF} + \frac{FC}{AF} + \frac{CE}{AF} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ctg} RBC = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \quad (1)$$

De manera análoga haciendo una construcción similar utilizando el punto R' y observando la simetría de la ecuación (1) tenemos que:

$$\operatorname{ctg} R'AC = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \quad (2)$$

Finalmente de las ecuaciones (1) y (2) se sigue que $\angle RBC = \angle R'AC$; pero por construcción del punto positivo de Brocard sabemos que $\angle RBC = \angle RAB$. Por lo tanto se sigue que $\angle RAB = \angle R'AC$ es decir, R y R' son isogonales. ■

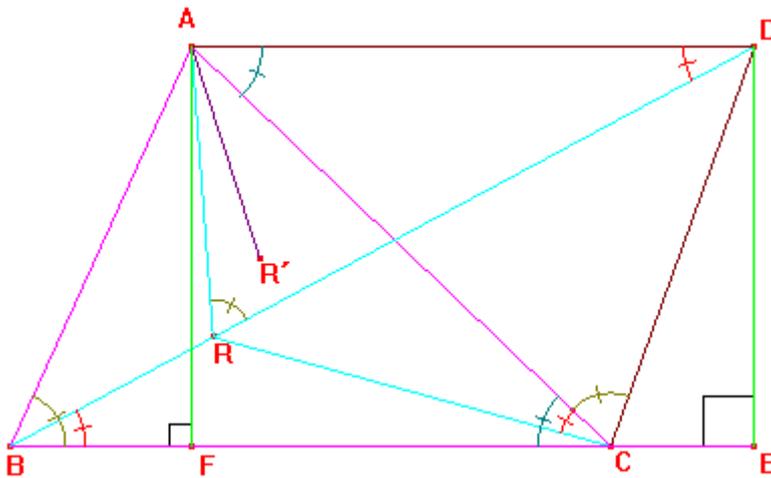


FIGURA 24

2.3 Puntos de Fermat.

TEOREMA 8. Si construimos exteriormente triángulos equiláteros ABC' , BCA' y CAB' sobre los lados AB , BC y CA respectivamente de un triángulo ABC que no sea equilátero

(puesto que en los triángulos equiláteros coinciden la mayoría de sus puntos notables), entonces AA' , BB' y CC' son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 25)

Construyamos los circuncírculos de los triángulos ABC' y CAB' y supongamos que su segundo punto de intersección es F .

Vamos a probar que el circuncírculo del triángulo BCA' también pasa por F .

Sabemos que $\angle C'FA = \angle BAC' = 60^\circ$, pero además el cuadrilátero $AC'BF$ es cíclico, entonces $\angle BFC' = \angle BAC' = 60^\circ$ y $\angle C'BA = \angle C'FA = 60^\circ$. Por consiguiente $\angle BFA = 120^\circ$.

De manera análoga, para el cuadrilátero $CB'AF$ se prueba que $\angle AFC = 120^\circ$.

Como $\angle BFA + \angle CFB + \angle AFC = 360^\circ$, se sigue que $\angle CFB = 120^\circ$. Como $\angle BA'C = 60^\circ$ se tiene que $\angle CFB + \angle BA'C = 180^\circ$ y por consiguiente el cuadrilátero $BA'CF$ es cíclico.

A partir de esto veamos que las ternas de puntos (A, F, A') , (B, F, B') y (C, F, C') son colineales. Esto se sigue inmediatamente de lo anterior porque $\angle BFA + \angle BFA' = 180^\circ$ y por consiguiente la terna (A, F, A') está sobre una recta. De manera análoga se tiene el mismo hecho para el otro par de ternas y esto demuestra el teorema. ■

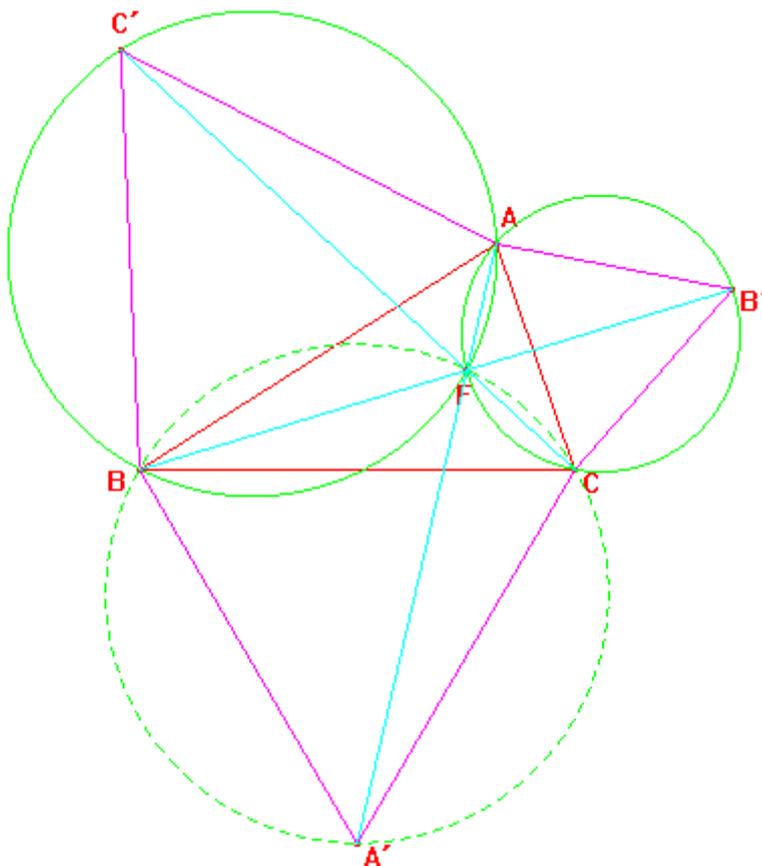


FIGURA 25

Al punto F al que se refiere el teorema anterior se le conoce como *primer punto de Fermat*.

Existe un punto F' llamado *segundo punto de Fermat* cuya existencia se demuestra de manera análoga al primero, considerando esta vez, los triángulos equiláteros construidos interiormente sobre los lados del triángulo ABC . Puede demostrarse fácilmente que el segundo punto de Fermat está fuera del triángulo.

Ambos puntos de Fermat serán utilizados en algunas propiedades atractivas de cónicas inscritas que se tratarán más adelante.

2.4 Puntos Isodinámicos.

TEOREMA 9: Si U, V y W y U', V' y W' son los puntos donde las bisectrices internas y externas intersecan respectivamente a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC , entonces las circunferencias que tienen como diámetros a los segmentos UU', VV' y WW' pertenecen a una familia de circunferencias coaxiales de las que se intersecan en dos puntos

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 26)

Consideremos la siguiente figura construida de acuerdo a las hipótesis del teorema.

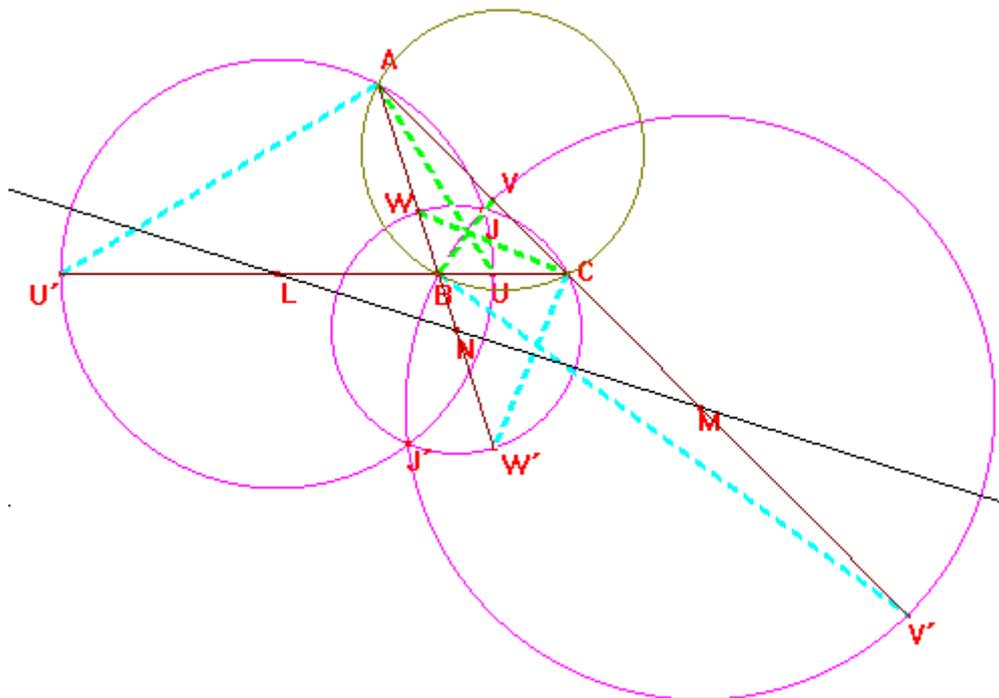


FIGURA 26

Sabemos que la bisectriz interior y la respectiva bisectriz exterior de un ángulo son perpendiculares; entonces la circunferencia que tiene por diámetro a UU' pasa por A , la circunferencia que tiene de diámetro a VV' pasa por B y la circunferencia que tiene de diámetro a WW' pasa por C .

Supongamos que L , M y N son respectivamente los centros de cada una de estas circunferencias. También supongamos que J y J' son los puntos de intersección de la circunferencia que tiene centro en L y la circunferencia que tiene centro en M . Vamos a demostrar que la circunferencia que tiene su centro en N también pasa por J .

Sabemos que el lugar geométrico de los puntos cuyas razones de distancias a dos puntos fijos es una constante, es una circunferencia, llamada circunferencia de Apolonio. Si consideramos como los dos puntos fijos a cada una de las parejas de vértices del triángulo ABC resulta que tenemos tres circunferencias de Apolonio las cuales resultan ser las circunferencias que construimos en la figura 26. Para ver que esto es cierto consideremos por ejemplo la circunferencia cuyo centro es L . Por el teorema de la bisectriz aplicado a la bisectriz interna AU tenemos que:

$$\frac{BU}{CU} = \frac{AB}{AC}.$$

Por el teorema de la bisectriz aplicado a la bisectriz externa AU' tenemos que:

$$\frac{BU'}{CU'} = \frac{AB}{AC}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{BU}{CU} = \frac{BU'}{CU'}.$$

Con lo que se sigue que A también es punto de la circunferencia que tiene su centro en L .

Resultados análogos se deducen para las circunferencias cuyos centros son M y N , es decir, las circunferencias que construimos en la figura 26 son las circunferencias de Apolonio de los vértices del triángulo ABC .

De lo anterior y de nuestra suposición de que J es un punto que está en la circunferencia cuyo centro es L y en la circunferencia cuyo centro es M se tiene que:

$$\frac{JA}{JC} = \frac{BA}{BC} \text{ y también } \frac{JB}{JC} = \frac{BA}{CA}$$

Dividiendo estas igualdades tenemos que

$$\frac{\frac{JA}{JC}}{\frac{JB}{JC}} = \frac{\frac{BA}{BC}}{\frac{BA}{CA}}$$

Es decir,

$$\frac{JA}{JB} = \frac{CA}{CB}$$

Por lo tanto la circunferencia que tiene su centro en N también pasa por J .

Para ver que esta circunferencia también tiene su centro sobre LM , observemos primero que $\angle BAU = \angle UAC$ porque AU es bisectriz del $\angle BAC$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\text{sen } U'AB}{\text{sen } BAU}}{\frac{\text{sen } U'AC}{\text{sen } CAU}} &= \frac{\text{sen } CAU \text{ sen } U'AB}{\text{sen } BAU \text{ sen } U'AC} = \frac{\text{sen } (-UAC) \text{ sen } U'AB}{\text{sen } BAU \text{ sen } U'AC} = -\frac{\text{sen } U'AB}{\text{sen } U'AC} \\ &= -\frac{\text{sen } (90 - BAU)}{\text{sen } (90 + BAU)} = -\frac{\cos BAU}{\cos BAU} = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{sen } U'AB}{\text{sen } BAU} = -\frac{\text{sen } U'AC}{\text{sen } CAU}$$

Y esto quiere decir que B y C son conjugados armónicos con respecto a U' y U .

De manera análoga se demuestra que C y A son conjugados armónicos o puntos inversos con respecto a V' y V y que A y B son conjugados armónicos o puntos inversos con respecto a W' y W .

Esto significa que cada una de las circunferencias cuyos centros son L , M y N , son ortogonales al circuncírculo del triángulo ABC .

Por lo tanto, sabemos que si tres circunferencias son ortogonales a una cuarta circunferencia, y las tres primeras tienen un punto en común J , entonces las tres primeras también tienen un segundo punto en común que llamaremos J' y pertenecen a una familia de circunferencias coaxiales de las que se intersecan en dos puntos, y esto demuestra el teorema. ■

A los puntos J y J' se les llama *puntos isodinámicos del triángulo ABC* .

Se puede observar que de los dos puntos isodinámicos uno está dentro y el otro fuera del triángulo ABC . Por comodidad vamos a decir que J es el *primer punto isodinámico* y que J' es el *segundo punto isodinámico*.

2.5 Puntos de Napoleón.

TEOREMA 10. De la figura 25 del Teorema 8, sean U , V y W son los circuncentros de los triángulos equiláteros; entonces el triángulo UVW es equilátero y está en perspectiva con el triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver figura 27)

Sean U , V y W los circuncentros de los triángulos equiláteros $BA'C$, $CB'A$ y $AC'B$ respectivamente. Primero vamos a demostrar que el triángulo UVW es equilátero.

Sean X el punto de intersección del lado VW con AA' y Y el punto de intersección del lado UV con CC' .

Observemos que AA' es el eje radical de la circunferencia que pasa por A, C', B y la que pasa por C, B', A , y que CC' es el eje radical de la circunferencia que pasa por B, A', C y la que pasa por C, B', A ; entonces, VW es perpendicular a AA' y UV es perpendicular a CC' .

Esto significa que el cuadrilátero $XFVY$ es cíclico, además sabemos que $\angle XFY = \angle AFC = 120^\circ$ y por lo tanto $\angle XVY = 60^\circ$.

De manera análoga se prueba que $\angle VWU = \angle WUV = 60^\circ$ y por lo tanto el triángulo UVW es equilátero.

Vamos ahora a probar que el triángulo UVW está en perspectiva con el triángulo ABC , es decir, vamos a probar que los segmentos AU, BV y CW son concurrentes, para esto vamos a usar el teorema de Ceva en su forma trigonométrica. Sean L, M, N los puntos donde los segmentos AU, BV y CW intersecan respectivamente a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC . Entonces probar que AU, BV y CW concurren es lo mismo que probar que:

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1$$

Para esto observemos que $\angle ACN = \angle ACW$, $\angle NCB = \angle WCB$, $\angle BAL = \angle BAU$, $\angle LAC = \angle UAC$, $\angle CBM = \angle CBV$, $\angle MBA = \angle VBA$, $\angle CAW = \angle VAB$, $\angle WBC = \angle ABU$, $\angle UCA = \angle BCV$ y además de que $AW = WB$, $BU = UC$, $CV = VA$.

Aplicando la ley de los senos al triángulo AWC , tenemos que:

$$\frac{\text{sen } ACW}{AW} = \frac{\text{sen } CAW}{WC}$$

Es decir,

$$\text{sen } ACW = \frac{AW}{WC} \text{sen } CAW$$

De manera análoga obtenemos las siguientes expresiones:

$$\text{sen } WCB = \frac{WB}{WC} \text{sen } WBC$$

$$\text{sen } BAU = \frac{BU}{AU} \text{sen } ABU$$

$$\text{sen } UAC = \frac{UC}{AU} \text{sen } UCA$$

$$\text{sen } CBV = \frac{CV}{BV} \text{sen } BCV$$

$$\text{sen } VBA = \frac{VA}{BV} \text{sen } VAB$$

Usando estas relaciones y las igualdades anteriores de ángulos y segmentos tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} &= \frac{\text{sen } ACW}{\text{sen } WCB} \frac{\text{sen } BAU}{\text{sen } UAC} \frac{\text{sen } CBV}{\text{sen } VBA} \\ &= \frac{\frac{AW}{WC} \text{sen } CAW}{\frac{WB}{WC} \text{sen } WBC} \frac{\frac{BU}{AU} \text{sen } ABU}{\frac{UC}{AU} \text{sen } UCA} \frac{\frac{CV}{BV} \text{sen } BCV}{\frac{VA}{BV} \text{sen } VAB} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto AU , BV y CW son concurrentes en un punto Q y los triángulos ABC y UVW están en perspectiva desde Q . ■

Al punto Q le vamos a llamar *primer punto de Napoleón*.

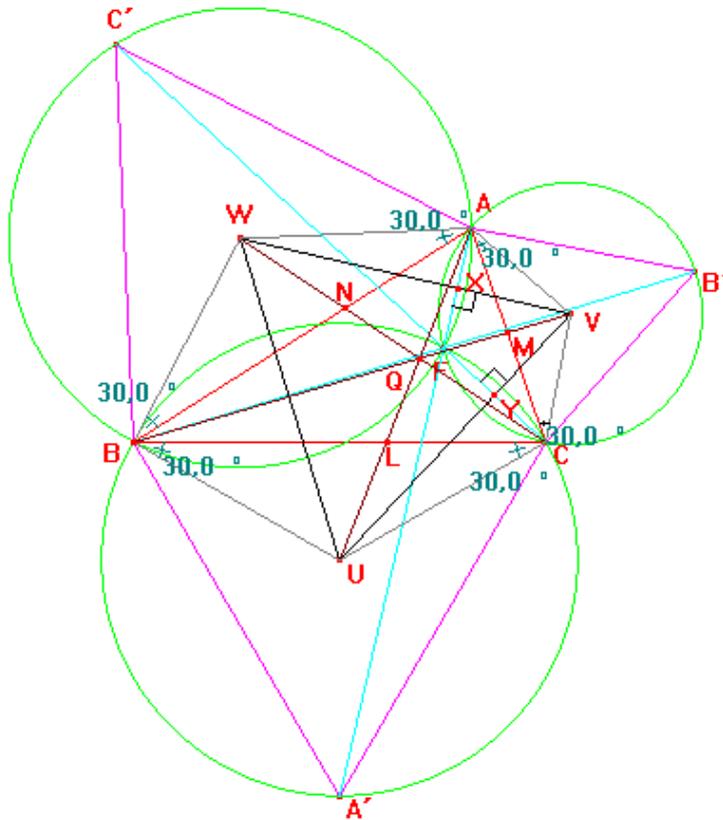


FIGURA 27

De manera análoga que para el primer punto de Napoleón, se demuestra que existe un segundo triángulo equilátero $U'V'W'$ y un punto Q' si en vez de construir los triángulos equiláteros exteriormente éstos se construyen interiormente.

Al punto Q' le vamos a llamar el *segundo punto de Napoleón*.

2.6 Más teoremas sobre puntos isogonales.

Vamos ahora a enunciar y demostrar unos teoremas concernientes a algunos puntos notables del triángulo y a los puntos estudiados en este capítulo.

TEOREMA 11: El circuncentro y el ortocentro son puntos isogonales del triángulo.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 28)

Sea ABC un triángulo con su circunferencia circunscrita, su circuncentro O y su ortocentro H . Sean D el pie de la altura por A y E la otra intersección de AO con la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Observemos que $\angle ABC = \angle ABD = \angle AEC$, porque subtienden el mismo arco de circunferencia, también como AD es altura del triángulo ABC y $\angle ECA$ subtiende una semicircunferencia se sigue que $\angle BDA = \angle ECA = 90^\circ$.

Por lo tanto $\angle BAD = \angle EAC$ y entonces O y H son isogonales. ■

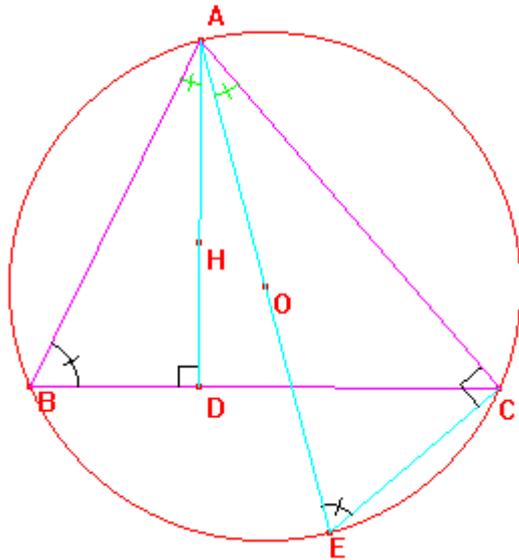


FIGURA 28

TEOREMA 12: El primer punto isodinámico y el primer punto de Fermat son puntos isogonales del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver figura 29) Tenemos un triángulo ABC con punto de Fermat F y en el que se han construido exteriormente los triángulos equiláteros $BA'C$, $CB'A$ y $BC'A$.

Vamos a prolongar los lados de los triángulos equiláteros de manera que R sea la intersección de $C'B$ con $B'C$, S sea la intersección de $A'C$ con AC' y que T sea la intersección de $B'A$ con BA' .

Podemos construir el primer punto isodinámico J como en el Teorema 9, pero aquí lo construiremos de otra manera que, para nuestros propósitos en el estudio de elipses será más adecuada que la construcción dada en el Teorema 9.

Observemos que como BR es la prolongación de $C'B$, entonces $\angle ABR = 120^\circ$ y como $\angle CB'A = 60^\circ$ se sigue que el cuadrilátero $ABRB'$ es cíclico. Entonces $\angle BAR = \angle BB'R = \angle FB'C$.

También sabemos que el cuadrilátero $AFCB'$ es cíclico, entonces $\angle FB'C = \angle FAC = \angle A'AC$ y por lo tanto tenemos que $\angle BAR = \angle A'AC$, lo que quiere decir que AR y AA' son isogonales.

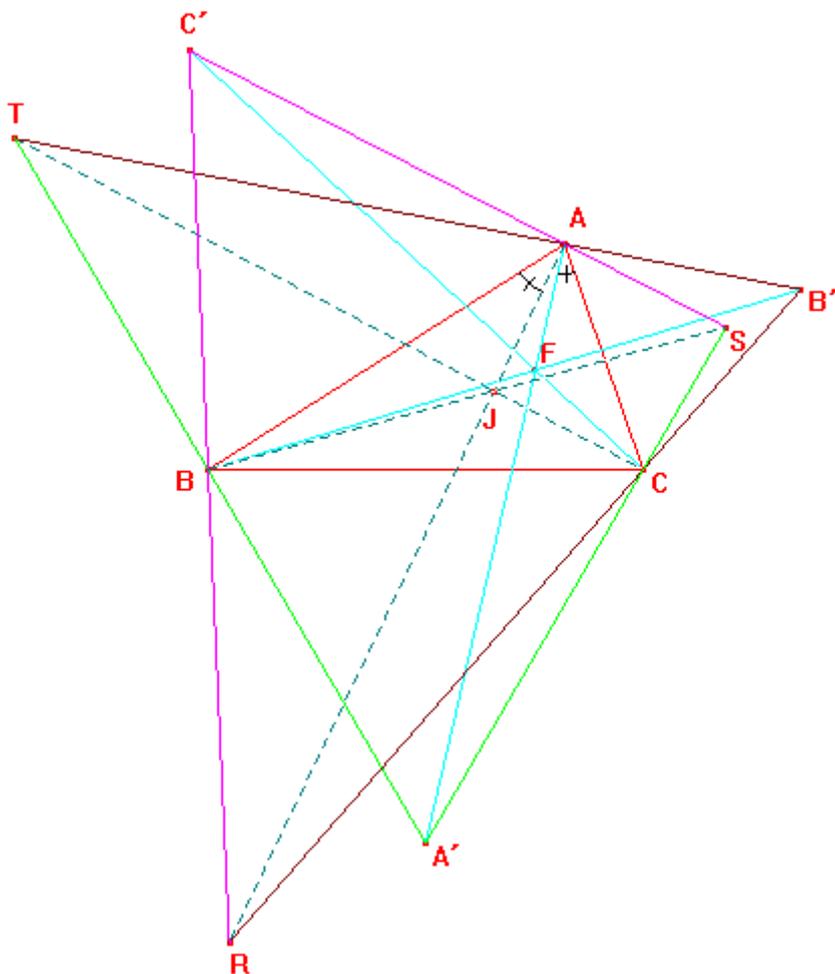


FIGURA 29

Ahora como AT es prolongación de $B'A$ se sigue que $\angle CAT = 120^\circ$ y como $\angle BA'C = 60^\circ$ se sigue que el cuadrilátero $CATA'$ es cíclico. Entonces $\angle TCA = \angle TA'A = \angle BA'F$.

Pero el cuadrilátero $CFBA'$ también es cíclico, entonces $\angle BA'F = \angle BCF = \angle BCC'$ y por lo tanto tenemos que $\angle TCA = \angle BCC'$, lo que quiere decir que CT y CC' son isogonales.

Por último, como CS es la prolongación de $A'C$ entonces $\angle BCS = 120^\circ$, y además como $\angle AC'B = 60^\circ$ se sigue que el cuadrilátero $BCSC'$ es cíclico. Entonces $\angle SBC = \angle SC'C = \angle AC'F$.

También el cuadrilátero $BFAC'$ es cíclico, entonces $\angle AC'F = \angle ABF = \angle ABB'$, y por lo tanto tenemos que $\angle SBC = \angle ABB'$, es decir, BS y BB' son isogonales.

Ahora como AA' , BB' y CC' son concurrentes, se sigue que AR , BS y CT también son concurrentes en un punto que vamos a llamar J .

Falta ver que J en efecto es el primer punto isodinámico.

Observemos que $\angle CA'A = \angle CA'F = \angle CBF = \angle CBB' = \angle SBA = \angle JBA$, es decir, $\angle CA'A = \angle JBA$ y, como sabemos que $\angle BAR = \angle A'AC$, se sigue que el triángulo ABJ es semejante al triángulo $AA'C$; entonces:

$$\frac{JB}{CA'} = \frac{BA}{A'A} \quad (1)$$

También observemos que $\angle BA'A = \angle BA'F = \angle BCF = \angle JCA$, es decir; $\angle BA'A = \angle JCA$ y como $\angle BAA' = \angle JAC$ se sigue que el triángulo ABA' es semejante al triángulo AJC , entonces:

$$\frac{JC}{BA'} = \frac{CA}{A'A} \quad (2)$$

Dividiendo la igualdad (1) entre la igualdad (2) tenemos que:

$$\frac{\frac{JB}{CA'}}{\frac{JC}{BA'}} = \frac{\frac{BA}{A'A}}{\frac{CA}{A'A}}$$

Esto es:

$$\frac{JB \ BA'}{JC \ CA'} = \frac{BA \ A'A}{CA \ AA'}$$

Usando segmentos dirigidos y recordando que $BA' = A'C$ porque el triángulo $BA'C$ es equilátero concluimos que:

$$\frac{JB}{JC} = \frac{BA}{CA} \quad (3)$$

De manera análoga obtenemos las relaciones:

$$\frac{JC}{JA} = \frac{CB}{AB} \quad (4)$$

$$\frac{JA}{JB} = \frac{AC}{BC} \quad (5)$$

Las igualdades (3), (4) y (5) son la conclusión del Teorema 9, por lo tanto J es el primer punto isodinámico y esto demuestra el teorema. ■

Existe un teorema similar al anterior, considerando ahora el segundo punto de Fermat y el segundo punto isodinámico. La construcción es la misma que la de la figura 27 pero considerando los triángulos equiláteros construidos interiormente.

De lo anterior se sigue que J' y F' también son puntos isogonales del triángulo ABC .

Vamos ahora enunciar y a demostrar un teorema que será parte fundamental en el estudio de los capítulos posteriores.

TEOREMA 13: Si bajamos perpendiculares de cada uno de dos puntos conjugados isogonales a los lados de un triángulo, los seis pies de estas perpendiculares están en una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une los dos puntos isogonales.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 30)

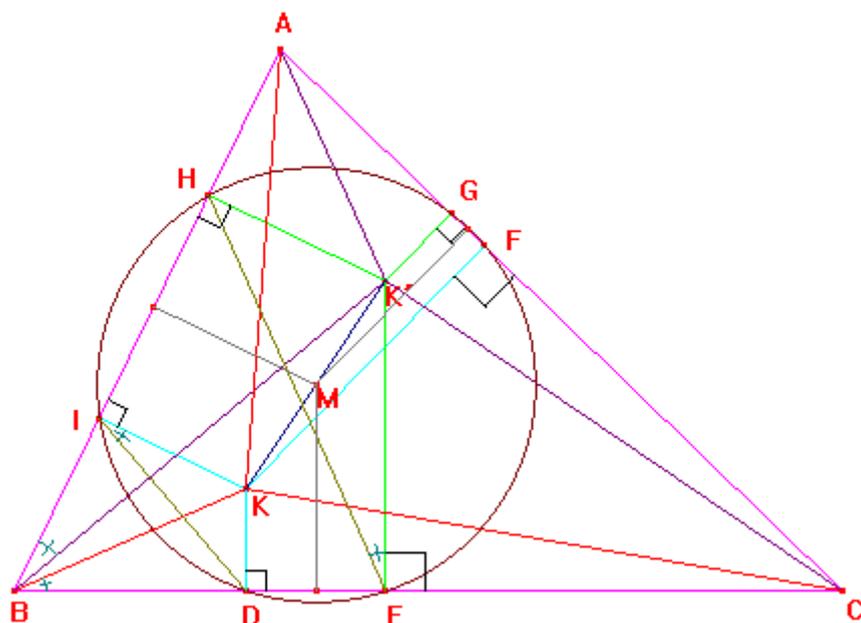


FIGURA 30

Sea ABC un triángulo con dos puntos isogonales K y K' , sean D , F e I los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo desde K y sean E , G y H los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo desde K' . Sea además M el punto medio de KK' .

Vamos a demostrar primero que D , E , F , G , H , e I son puntos concíclicos.

Consideremos el cuadrilátero $DEHI$.

Observemos que los cuadriláteros $HBEK'$ e $IBDK$ son cíclicos, esto es porque $\angle BIK = \angle BHK' = \angle KDB = \angle K'EB = 90^\circ$.

Entonces tenemos que $\angle K'EH = \angle K'BH$ y $\angle DBK = \angle DIK$, pero por hipótesis BK y BK' son isogonales, es decir, $\angle K'BH = \angle DBK$ y por lo tanto $\angle DIK = \angle K'EH$.

Por consiguiente observamos que $\angle DIH = \angle DIK + 90^\circ$ y que $\angle CEH = \angle K'EH + 90^\circ$, entonces $\angle DIH = \angle CEH$.

Por lo tanto el cuadrilátero $DEHI$, es cíclico.

Con un razonamiento como el anterior se demuestra que los cuadriláteros $DEFG$ y $FGHI$, son cíclicos.

Ahora debemos probar que los tres cuadriláteros anteriores están inscritos en la misma circunferencia. Para ver esto observemos que los trapecios $KDEK'$, $KFGK'$ y $K'IHK$ tienen ángulos rectos, y como los tres comparten el mismo lado KK' , se sigue que las mediatrices de los segmentos DE , FG y HI son concurrentes en el punto medio M de KK' .

Por lo tanto, los cuadriláteros $DEHI$, $DEFG$ y $FGHI$, están inscritos en la misma circunferencia; es decir, hemos probado que los puntos D , E , F , G , H , e I son concíclicos en

una circunferencia que tiene su centro en el punto medio de KK' , que es lo que queríamos probar. ■

2.7 Transformación isogonal con respecto a un triángulo.

En geometría y en otras áreas de las matemáticas es común que para facilitar el estudio de los conceptos sea necesario hacer *transformaciones* que, a grandes rasgos, son funciones entre dos conjuntos que cumplen alguna propiedad dada. Así, en geometría, por ejemplo, sabemos hacer rotaciones, traslaciones, homotecias, inversiones y composiciones de estas operaciones como algunos ejemplos de transformaciones.

En este capítulo introduciremos la llamada *Transformación isogonal con respecto a un triángulo*, para lo cual daremos la siguiente:

DEFINICIÓN 7: Dado un triángulo fijo ABC y una figura Ω en el plano, llamaremos la transformada isogonal de Ω con respecto al triángulo ABC a la figura Ω' formada por todos los puntos isogonales de Ω .

TEOREMA 14: La transformación isogonal con respecto a un triángulo ABC cumple las siguientes propiedades:

- (1) Deja invariante el incentro I del triángulo ABC .
- (2) Transforma el circuncentro O en el ortocentro H y recíprocamente.
- (3) Cualquier punto de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC (distinto de los vértices) se transforma en un punto de la recta al infinito; es decir, la transformada isogonal de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC es la recta al infinito y recíprocamente.
- (4) Dos puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC se transforman en dos puntos al infinito en direcciones perpendiculares y recíprocamente.
- (5) La transformada isogonal de cualquier recta (que no coincida con los lados del triángulo ABC) es una cónica que pasa por los vértices del triángulo. Más aún, es una elipse, una parábola, o bien, una hipérbola, de acuerdo con que la recta no toque, sea tangente, o bien, corte en dos puntos a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .
- (6) La transformada isogonal de un diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC es una hipérbola equilátera.

DEMOSTRACIÓN:

- (1) Es inmediata pues las transformadas isogonales de las bisectrices del triángulo ABC son ellas mismas.
- (2) Es el resultado del Teorema 13
- (3) (Ver Figura 31) Sea D un punto en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Para encontrar el isogonal de D con respecto a ABC trazamos los segmentos AD , BD y CD .

Sean X y Y los puntos donde las isogonales de AD y CD tocan otra vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Tenemos entonces que $\angle BAD = \angle XAC$ y que $\angle DCB = \angle ACY$, pero el cuadrilátero $ABDC$ es cíclico, lo que significa que $\angle BAD = \angle DCB$, es decir, $\angle XAC = \angle ACY$. Por lo tanto AX es paralela a CY .

De manera análoga puede verse que la recta isogonal de BD también es paralela a AX y CY . Por lo tanto, AX, BZ y CY se intersecan en el punto al infinito.

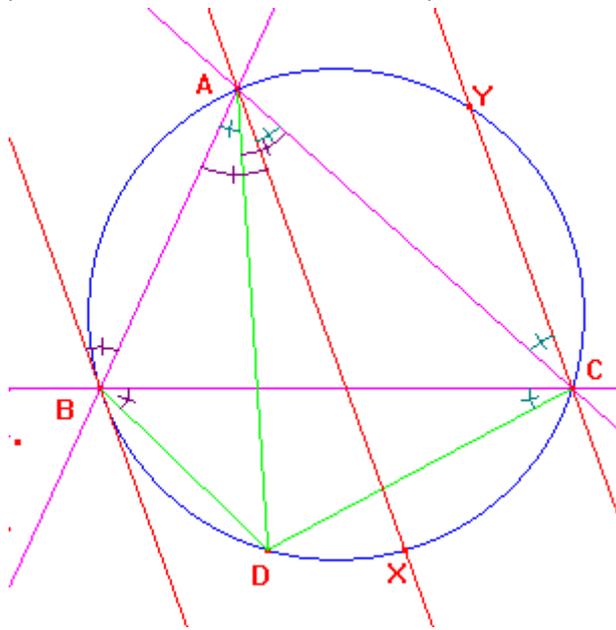


FIGURA 31

- (4) (Ver Figura 32) Sean E y F dos puntos diametralmente opuestos con respecto a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y cuyo centro es O .

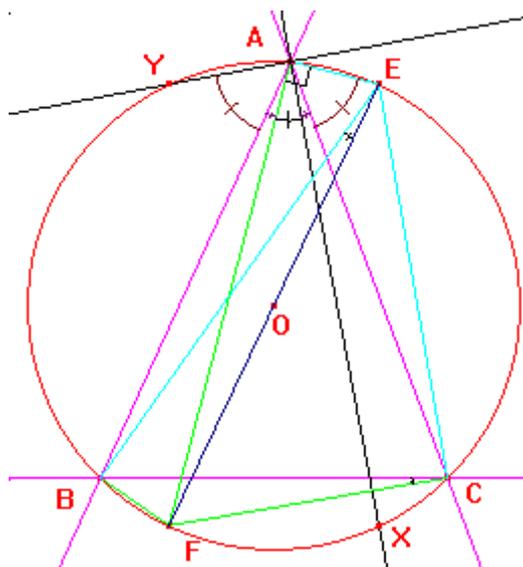


FIGURA 32

Sean X y Y los puntos donde las respectivas isogonales de AF y AE tocan otra vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Tenemos entonces que $\angle BAF = \angle XAC$

y $\angle YAB = \angle CAE$. De estas igualdades tenemos que $90^\circ = \angle FAE = \angle FAX + \angle XAC + \angle CAE = \angle FAX + \angle BAF + \angle YAB = \angle YAX$. Por lo tanto tenemos que AY es perpendicular a AX .

De manera análoga se demuestra que las isogonales de BF y BE y las de CF y CE también son perpendiculares y esto prueba la afirmación del inciso 4.

- (5) (Ver Figura 33) Sean ABC un triángulo con su circunferencia circunscrita y sea d la recta dada.

Caso (i) d no toca a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Tomemos tres puntos arbitrarios X, Y y Z sobre d y construyamos sus respectivos puntos isogonales X', Y' y Z' .

Si proyectamos la recta d al infinito entonces por el inciso (3) los puntos X', Y' y Z' quedarán sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

De las propiedades de la razón cruzada en una circunferencia sabemos que $B\{Z'Y'X'C\} = A\{Z'Y'X'C\}$. Por lo tanto, como la razón cruzada se conserva bajo proyecciones, tenemos que si regresamos la recta d a su posición original se sigue cumpliendo que $B\{Z'Y'X'C\} = A\{Z'Y'X'C\}$.

Usando el corolario 5.1 del teorema 5 se ha probado que la transformada isogonal de una recta que no coincide con los lados del triángulo es una cónica que en este caso es una elipse que pasa por A, B y C .

Caso (ii) d es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en T (Ver Figura 34). Por el inciso (3) el transformado isogonal de T será el punto al infinito, por lo tanto la cónica que se obtiene tendrá una dirección al infinito, es decir, será una parábola.

Caso (iii) d corta en los puntos X y Y a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC (Ver Figura 33). Los transformados isogonales de X y Y serán puntos al infinito, por lo tanto la cónica que se obtiene será una hipérbola, cuyas direcciones asintóticas serán los puntos al infinito en que X y Y se transforman.

- (6) El resultado de este inciso en el que la transformada isogonal de un diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC es una hipérbola equilátera, se obtiene aplicando conjuntamente los incisos (4) y (5). ■

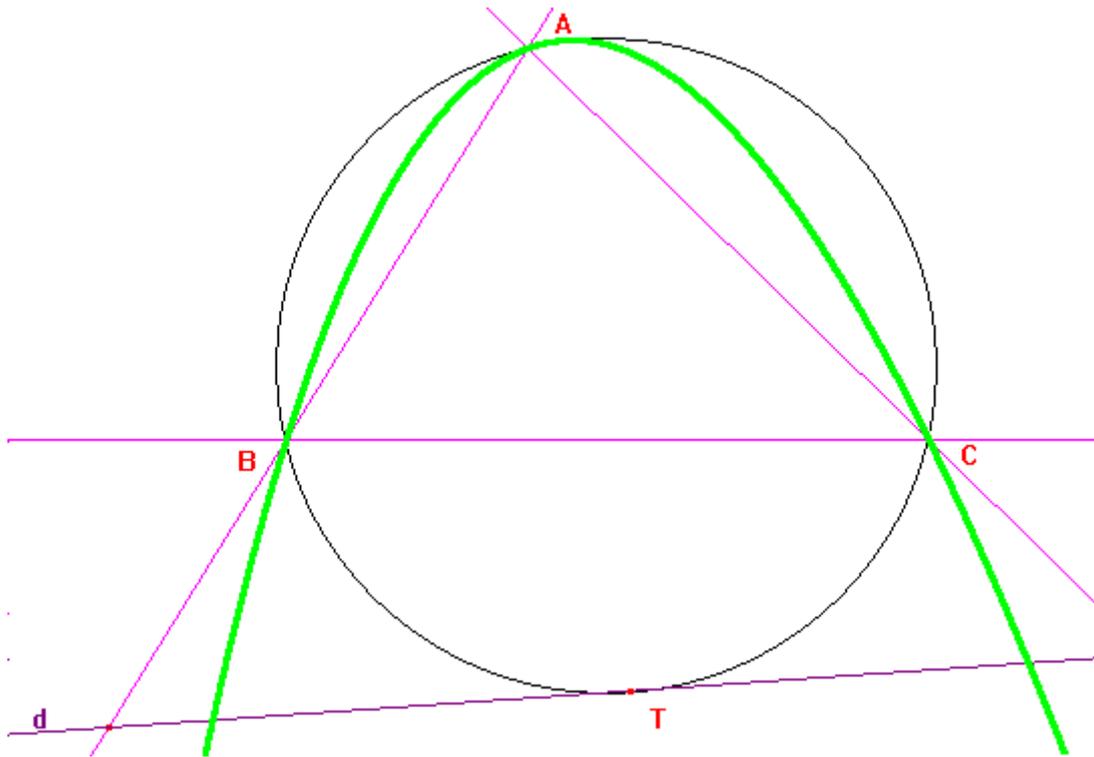


FIGURA 34

&

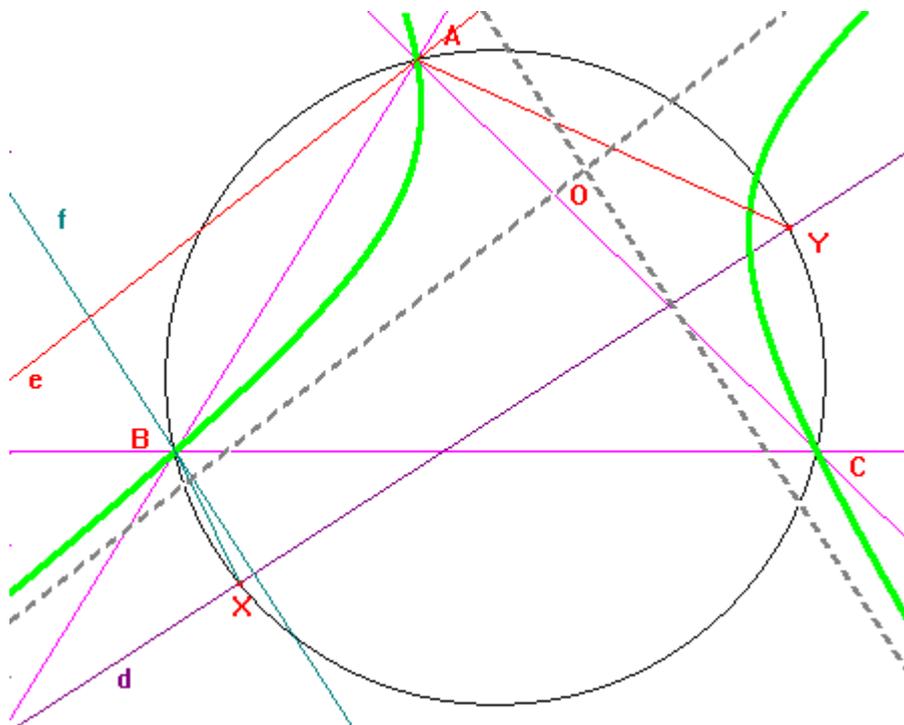


FIGURA 35

Capítulo 3.

Parábolas inscritas.

En este capítulo vamos a demostrar la existencia de algunas parábolas inscritas en un triángulo dado.

Utilizaremos las propiedades de una recta tangente a una parábola junto con resultados de la geometría del triángulo como los referentes a la Recta de Simson y la Recta de Euler.

3.1 Parábola tangente a cuatro líneas rectas dadas.

TEOREMA 15: Dadas cuatro líneas rectas tales que cualesquiera dos de ellas no son paralelas y tres de ellas son no concurrentes, entonces las cuatro circunferencias circunscritas a los cuatro triángulos formados por las cuatro rectas son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 36)

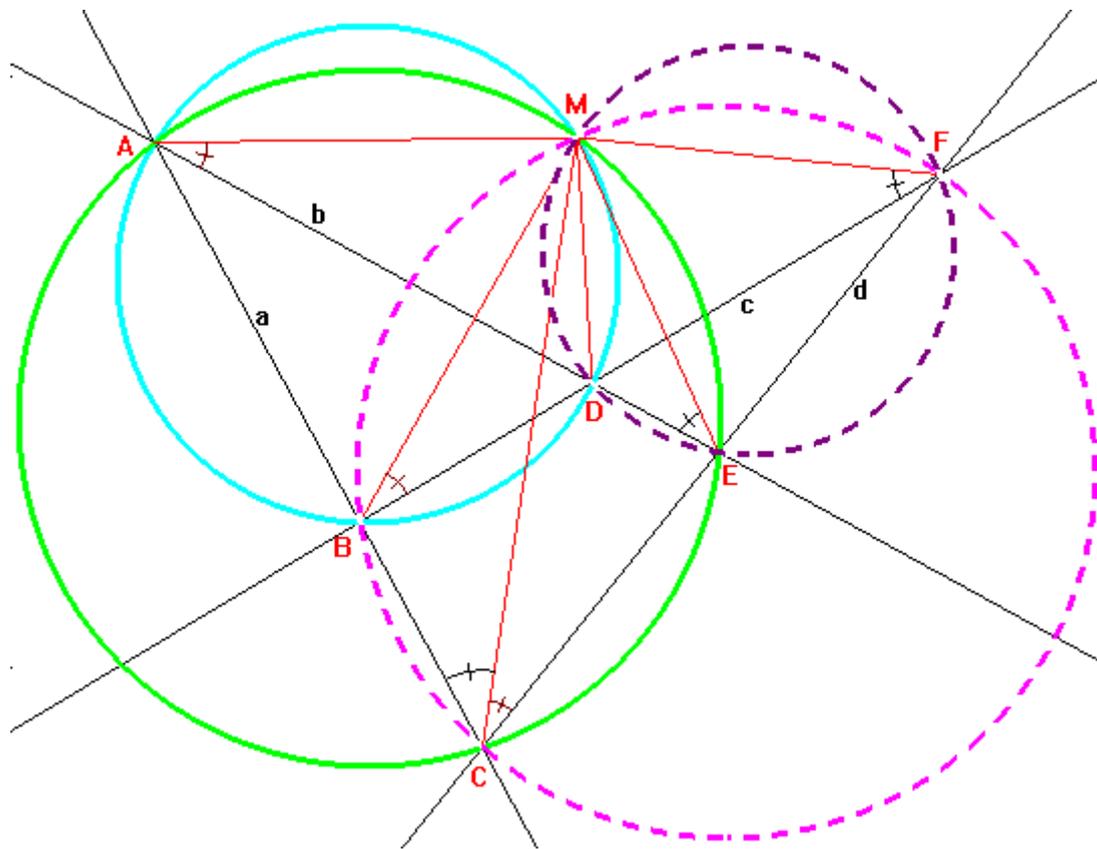


FIGURA 36

Sean a , b , c y d las cuatro rectas dadas tales que $A = a \cap b$, $B = a \cap c$, $C = a \cap d$, $D = b \cap c$, $E = b \cap d$ y $F = c \cap d$, supongamos que el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACE es M . Vamos a demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos FBC y FDE , también pasan por M .

Sabemos que los cuadriláteros $ABDM$ y $ACEM$ son cíclicos, tenemos entonces que $\angle MBF = \angle MBD = \angle MAD = \angle MAE$ y que $\angle MCF = \angle MCE = \angle MAE$.

Por lo tanto, $\angle MBF = \angle MCF$ y entonces el cuadrilátero $BCMF$ es cíclico.

Ahora, usaremos el hecho de que los cuadriláteros $ACEM$ y $BCFM$, son cíclicos.

Sabemos que $\angle DEM = \angle AEM = \angle ACM = \angle BCM = \angle BEM = \angle DFM$, es decir, $\angle DEM = \angle DFM$. Por lo tanto el cuadrilátero $DEFM$ también es cíclico y esto demuestra el teorema. ■

Al punto M al que se refiere el teorema anterior se le conoce como *Punto de Miquel*.

TEOREMA 16: En la figura 36 del teorema anterior, la línea de Simson de los triángulos ABD , ACE , FBC y FDE , con respecto a M es la misma. Más aún, existe una parábola con foco M y tangente a las rectas a, b, c y d tal que esta línea de Simson es tangente en su vértice.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 37)

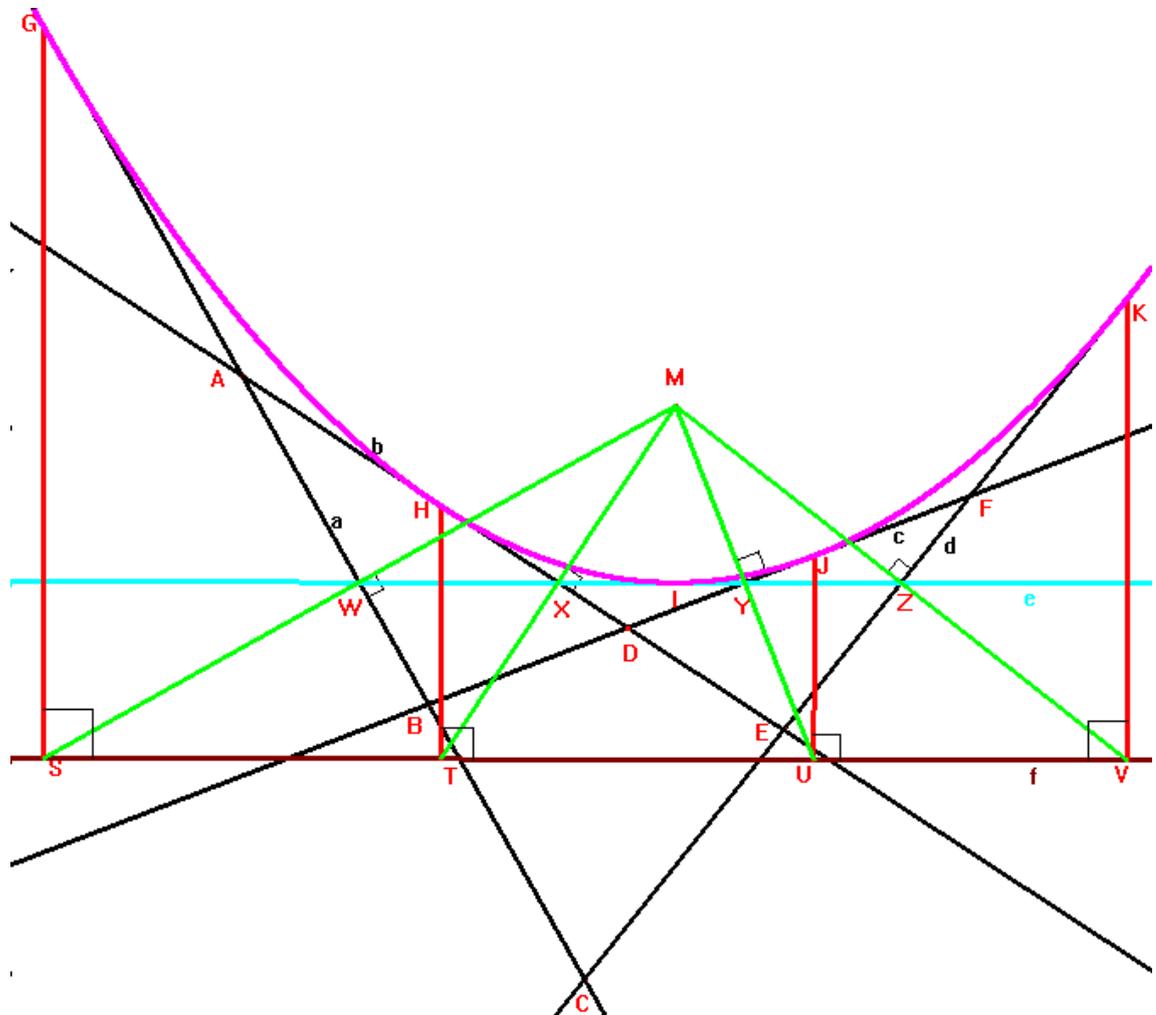


FIGURA 37

Tenemos las cuatro rectas, a, b, c y d y el punto de Miquel M . Vamos a demostrar primero que la línea de Simson para los cuatro triángulos con respecto a M es la misma.

Sean W, X, Y y Z los pies de las perpendiculares desde M a las rectas a, b, c y d respectivamente.

Como el cuadrilátero $ABDM$ es cíclico entonces la línea de Simson para el triángulo ABD con respecto a M es la que pasa por los puntos W, X y Y .

También sabemos que el cuadrilátero $ACEM$ es cíclico, entonces la línea de Simson del triángulo ACE con respecto a M es la que pasa por los puntos W, X y Y .

Asimismo, el cuadrilátero $DEFM$ es cíclico, entonces la línea de Simson del triángulo DEF con respecto a M es la que pasa por los puntos X, Y y Z .

Por último el cuadrilátero $BCFM$ también es cíclico, entonces la línea de Simson del triángulo BCF es la que pasa por los puntos W, Y y Z .

Observemos que estas cuatro líneas de Simson tienen cada una dos puntos en común, por lo tanto son la misma y así queda demostrada la primera parte del teorema.

Vamos a llamar e a la línea de Simson que acabamos de obtener. Entonces vamos a probar ahora que existe una parábola tangente a las líneas a, b, c, d y e .

Sean S, T, U y V puntos sobre MW, MX, MY y MZ respectivamente tales que $MW = WS, MX = XT, MY = YU, MZ = ZV$. Se sigue entonces del teorema de Thales que S, T, U y V son colineales en una recta que vamos a llamar f y que es paralela a e .

Sean G, H, J y K los puntos en que las perpendiculares a f desde S, T, U y V , intersecan a las rectas a, b, c y d , respectivamente. Entonces por la construcción del corolario 1.2, se sigue inmediatamente que existe una parábola tangente a cada una de las rectas a, b, c y d con foco en M .

También es claro ver que si I es el vértice de la parábola entonces e es tangente a la curva en este punto y así hemos demostrado el teorema. ■

3.2 Parábola inscrita a un triángulo dado.

Vamos a estudiar la parábola inscrita en un triángulo dado, entenderemos por parábola inscrita a un triángulo dado como aquella que es tangente a los tres lados del triángulo, observaremos que los elementos de tales parábolas están estrechamente relacionados con las rectas y puntos notables del triángulo que ya conocemos. Para empezar enunciaremos y probaremos el siguiente resultado:

TEOREMA 17. Si d es una recta que pasa por el ortocentro de un triángulo ABC y si d es tal que no es paralela a los lados del triángulo ABC , entonces las tres rectas que se obtienen de reflejar la recta d con respecto a los lados AB, BC y CA del triángulo ABC son concurrentes en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 38)

Sea el triángulo ABC con ortocentro H y sea d la recta que pase por H y que no sea paralela a los lados del triángulo ABC . Sean A', B' y C' los puntos donde las alturas AL, AM y AN , tocan otra vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC respectivamente.

Sabemos entonces que $HL = LA'$, $HM = MB'$ y $HN = NC'$, por consiguiente las reflejadas de d con respecto a los lados del triángulo pasarán por A' , B' y C' .

Sean X, Y y Z los puntos en que d toca respectivamente a los lados BC, CA y AB .

Entonces $A'X$ es la reflejada de d con respecto a BC ; $B'Y$ es la reflejada de d con respecto a CA y $C'Z$ es la reflejada de d con respecto a AB .

Sea F el punto donde $B'Y$ toca otra vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Vamos a demostrar que $A'X$ y $C'Z$ también pasan por F .

Observemos que como $HM = MB'$ y BB' es perpendicular a CA entonces los triángulos $CB'H$ y $YB'H$ son isósceles; por consiguiente $\angle FB'C = \angle YB'C = \angle YHC$.

De la misma manera, como $HN = NC'$ y CC' es perpendicular a AB , se tiene que el triángulo $ZC'H$ también es isósceles y por consiguiente $\angle ZC'N = \angle ZHN$. Como $\angle ZHN = \angle YHC$ porque son opuestos por el vértice se concluye que y por lo tanto $C'Z$ pasa por F .

De manera análoga, como $HL = LA'$ y AA' es perpendicular a BC , se sigue que los triángulos $CA'H$ y $XA'H$ son isósceles, por consiguiente $\angle YHC = \angle CA'F = \angle CA'X$ y por lo tanto $A'X$ también pasa por F y esto demuestra el teorema. ■

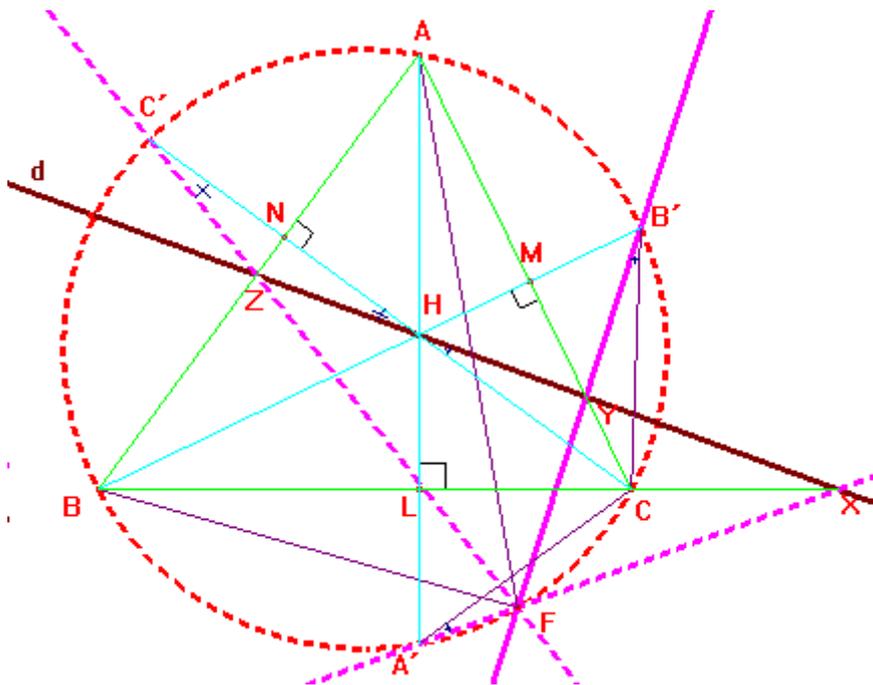


FIGURA 38

TEOREMA 18: En la figura 38 del teorema anterior, F es el foco y d es la directriz de una parábola inscrita en el triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 39)

Sean U, V y W puntos sobre la recta d tales que FU es perpendicular a BC , FV es perpendicular a CA y FW es perpendicular a AB .

Como el triángulo XHA' es isósceles $HL = LA'$ y FU es paralela a $A'H$ se sigue que el triángulo XUF también es isósceles y por lo tanto U es el reflejado de F respecto a BC .

Como el triángulo YHB' es isósceles y $HM = MB'$ y FV es paralela a HB' se sigue que el triángulo YFV también es isósceles y por lo tanto V es el reflejado de F con respecto a CA .

De manera análoga, considerando que el triángulo ZHC es isósceles y $HN = NC'$ se demuestra que el triángulo ZFW también es isósceles y por lo tanto W es el reflejado de F con respecto a AB .

Usando la construcción y el resultado del corolario 1.2, si I, J y K son los puntos donde las perpendiculares a d desde U, V y W intersecan a BC, CA y AB respectivamente, entonces sabemos que existe una parábola tangente a las rectas BC, CA y AB con foco F y directriz d ; es decir, existe una parábola inscrita al triángulo ABC y esto demuestra el teorema. ■

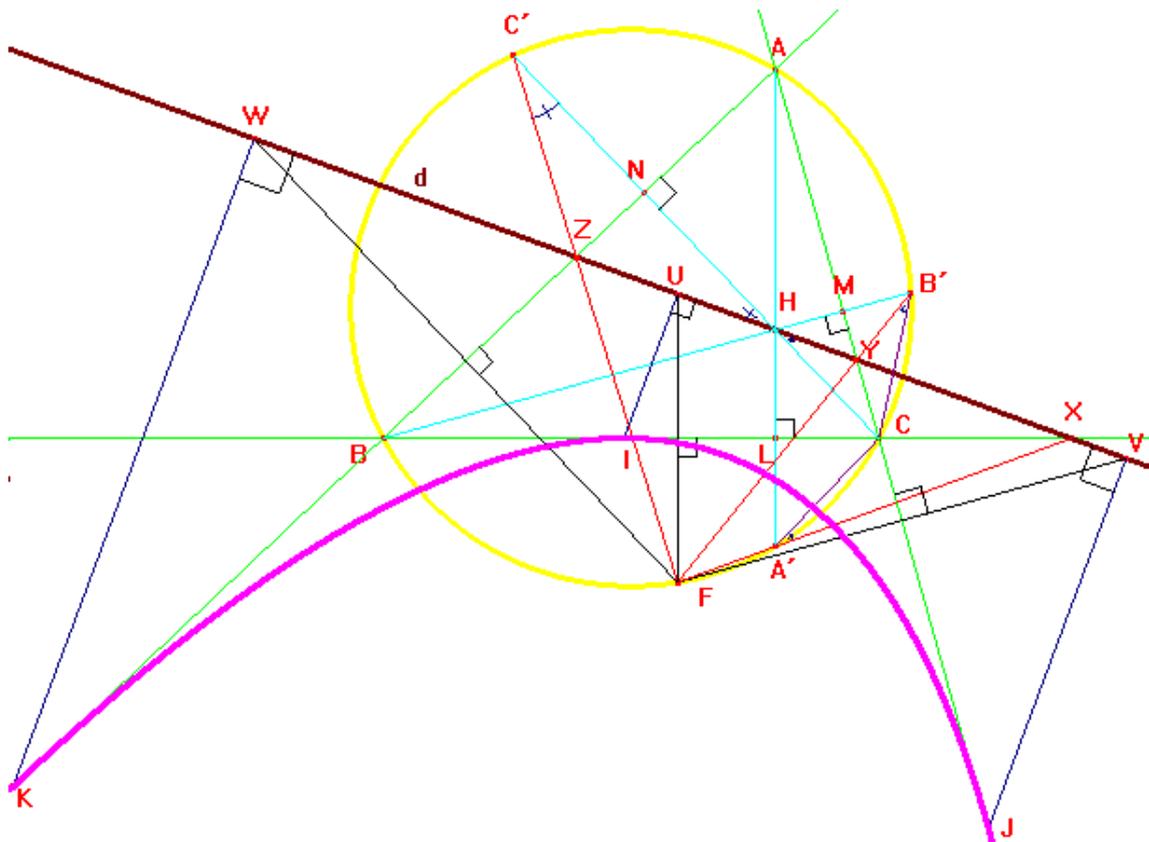


FIGURA 39

Del teorema anterior se desprende el siguiente resultado:

COROLARIO 18.1 Dado un triángulo ABC y su recta de Euler, existe una parábola inscrita al triángulo cuya directriz es la recta de Euler del triángulo. A esta parábola se le conoce como *Parábola de Kiepert*.

3.3 Una curiosidad geométrica de la parábola.

A continuación vamos a estudiar una propiedad bastante curiosa de la parábola que, naturalmente, tiene que ver con las propiedades de sus tangentes.

Vamos a empezar con demostrar el siguiente lema:

LEMA 1. El área de un trapecio rectángulo, es decir, un trapecio que tiene dos ángulos rectos, es igual al producto de la longitud de la perpendicular trazada desde el punto medio del lado que es perpendicular a los lados paralelos por el lado opuesto.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 40)

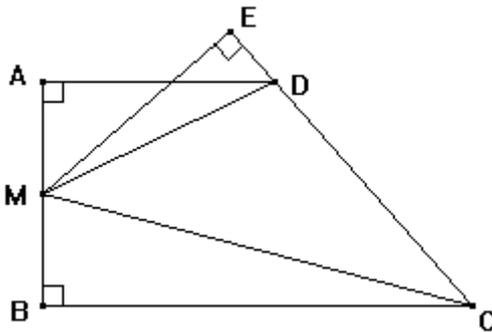


FIGURA 40

Tenemos un trapecio $ABCD$. Sea M el punto medio de AB y sea E un punto sobre CD tal que ME es perpendicular a CD .

Vamos a denotar al área de un polígono colocando sus vértices entre paréntesis. Entonces vamos a probar que:

$$(ABCD) = (ME)(CD)$$

Primero observemos que:

$$(ABCD) = (AMD) + (DMC) + (MBC) \quad (1)$$

Pero sabemos que

$$(AMD) = \frac{(AD)(AM)}{2}; \quad (DMC) = \frac{(CD)(ME)}{2}; \quad (MBC) = \frac{(BC)(MB)}{2}$$

Sustituyendo estas igualdades en (1) y usando que $AM = MB$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{(AD)(AM)}{2} + \frac{(CD)(ME)}{2} + \frac{(BC)(AM)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(AD)(AM) + (CD)(ME) + (BC)(AM)] \end{aligned}$$

Entonces;

$$\begin{aligned}
 2(ABCD) &= AM(AD + BC) + (CD)(ME) = \frac{2AM(AD + BC)}{2} + (CD)(ME) \\
 &= \frac{AB(AD + BC)}{2} + (CD)(ME) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Sin embargo sabemos que la fórmula para calcular el área de un trapecio es:

$$(ABCD) = \frac{AB(AD + BC)}{2}$$

Sustituyendo en (2) tenemos que:

$$2(ABCD) = (ABCD) + (CD)(ME)$$

Es decir,

$$(ABCD) = (CD)(ME)$$

y esto demuestra el lema. ■

TEOREMA 19: Sean S y R dos puntos simétricos con respecto al foco y situados en una cuerda focal paralela a la directriz de una parábola dada. Si M y N son los pies de las perpendiculares trazadas desde S y R respectivamente a una tangente t a la parábola, entonces el trapecio $SMNR$ tiene área constante mientras t se mueve sobre la curva.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 41)

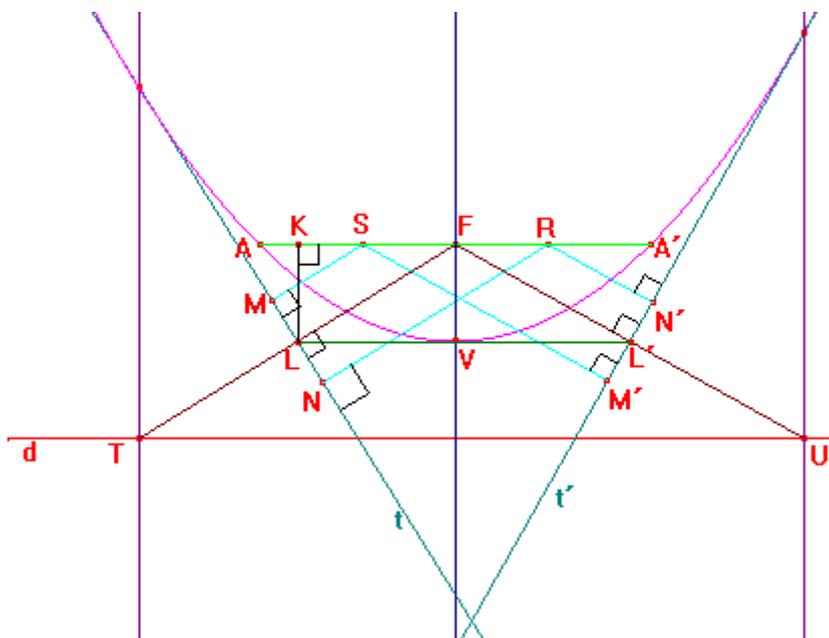


Figura 41

Sean AA' la cuerda focal y S y R dos puntos simétricos respecto al foco F de una parábola con directriz d y cuya tangente es t y sobre la cual hemos localizado los puntos M y N como se nos pide en la hipótesis del teorema.

Sea T el reflejado de F respecto a t , sabemos entonces que si L es el punto de intersección del segmento FT con la directriz d entonces L es punto medio de FT y, si F es punto medio del segmento SR entonces L también es punto medio del segmento MN .

Construyamos cualquier otra tangente t' sobre la cual localizamos las proyecciones M' , L' y N' de los puntos S , F y T respectivamente. Sea U el reflejado de F respecto a t' .

De la misma manera, si L es punto medio de MN , entonces L' es punto medio de $M'N'$. Vamos a demostrar la igualdad de áreas $(SMNR) = (SM'N'R)$.

Como L es punto medio de MN y L' es punto medio de $M'N'$ entonces en el triángulo FTU tenemos que el segmento LL' es paralelo al segmento TU y, por lo tanto, es paralelo al segmento AA' . Esto significa que si LK es la perpendicular desde L al segmento AA' entonces se sigue del Lema 1 que:

$$(SMNR) = (SR)(LK) = (SM'N'R)$$

y esto demuestra el teorema. ■

Capítulo 4.

Elipses inscritas y circunscritas.

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de las elipses inscritas y circunscritas en un triángulo. Diremos que una elipse es inscrita en un triángulo ABC si es tangente a los lados del triángulo ABC . Diremos que una elipse es circunscrita a un triángulo ABC si pasa por los vértices del triángulo ABC .

Utilizaremos la teoría de líneas y puntos isogonales que desarrollamos en el capítulo 2 y veremos sorprendentes propiedades de las elipses.

4.1 Elipses inscritas en un triángulo.

TEOREMA 20. Cualquiera dos puntos isogonales dentro un triángulo son los focos de una elipse inscrita en éste.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 42)

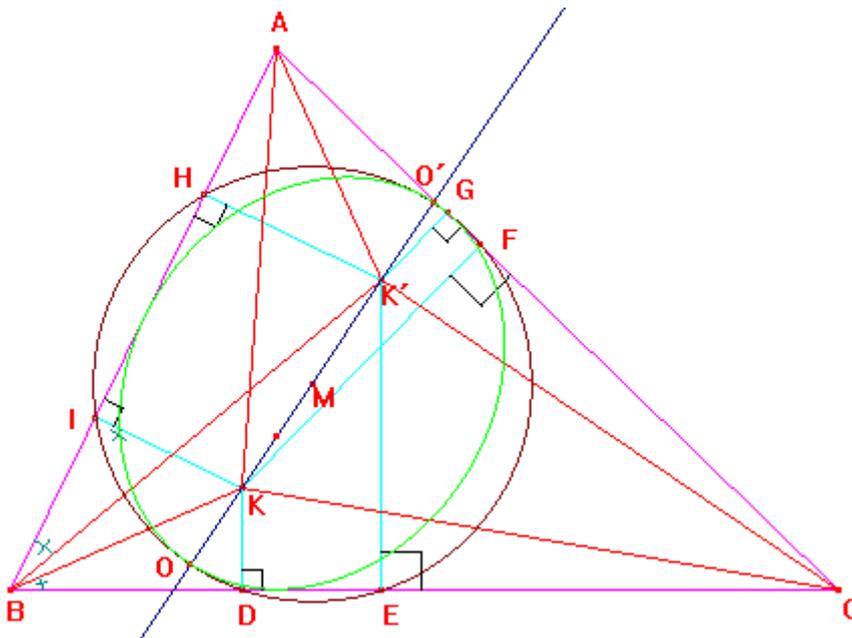


FIGURA 42

Sean ABC un triángulo y K y K' dos puntos isogonales de éste. Sean D , F e I las respectivas proyecciones de K a los lados del triángulo ABC y E , G y H las respectivas proyecciones desde K' y sea M el punto medio del segmento KK' .

Del Teorema 13 sabemos que los puntos D , E , F , G , H e I son concíclicos y la circunferencia en que están es la que tiene su centro en M .

Si O y O' son los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta que pasa por K y K' y usando que H e I son las proyecciones desde K' y K , respectivamente, al lado AB del triángulo ABC , se sigue del Corolario 2.4 que podemos construir una única elipse con eje mayor igual a OO' , centro en M y focos K y K' , tangente a los lados AB , BC y CA y cuya

circunferencia auxiliar es la que tiene centro en M y pasa por H e I . La unicidad de esta elipse es clara, el Corolario 2.4 nos permite construir una elipse por cada lado del triángulo ABC , si hubiera tres elipses, ellas tendrían el mismo centro, los mismos focos y la misma circunferencia auxiliar, por lo tanto tendrían el mismo eje mayor y por lo tanto son una misma. ■

A continuación enunciaremos algunos corolarios, que sin la teoría hasta aquí estudiada serían difíciles de demostrar.

COROLARIO 20.1. Si H , O y G son el ortocentro, el circuncentro y el baricentro respectivamente de un triángulo acutángulo ABC ; entonces, H y O son isogonales y por lo tanto existe una elipse de focos H y O y centro G inscrita al triángulo y cuya circunferencia auxiliar es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC . (Ver Figura 43)

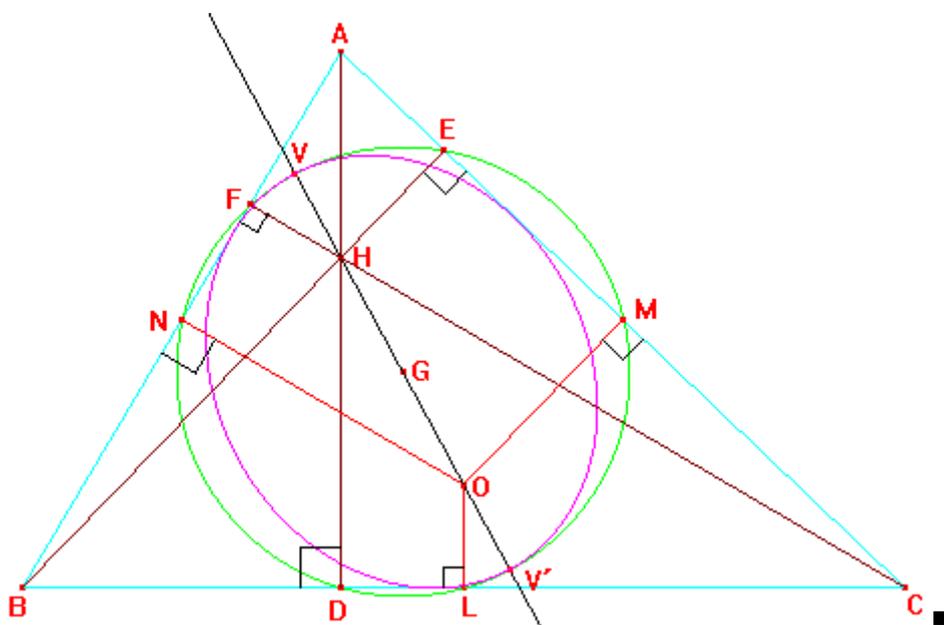


FIGURA 43

La elipse del corolario anterior se conoce como *la elipse inscrita de Steiner*.

COROLARIO 20.2. Existe una elipse inscrita en un triángulo ABC cuyos focos son los puntos de Brocard. Esta elipse se conoce como *elipse inscrita de Brocard*. (Ver figura 44)

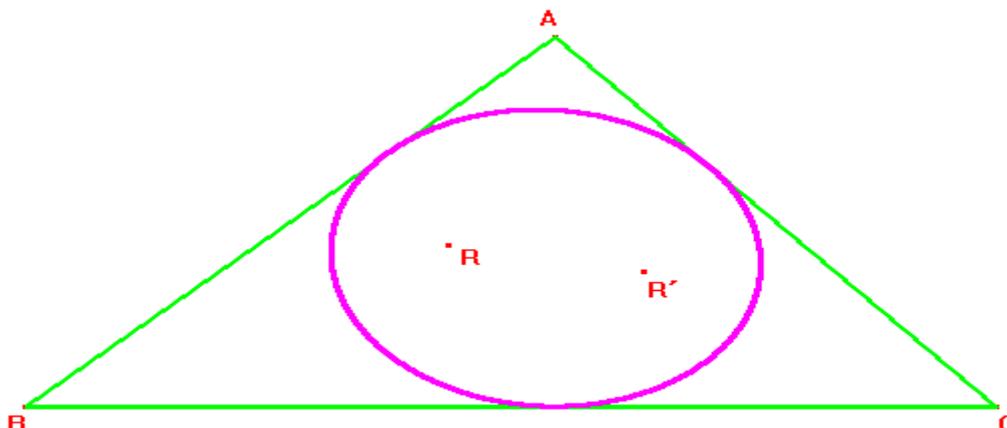


FIGURA 44

COROLARIO 20.3. Existen dos elipses inscritas a un triángulo ABC , la primera de las cuales tiene como focos al primer punto de Fermat y al primer punto isodinámico y la segunda tiene como focos al segundo punto de Fermat y al segundo punto isodinámico. Estas elipses son conocidas como *elipses de Simons*. (Ver figura 45)

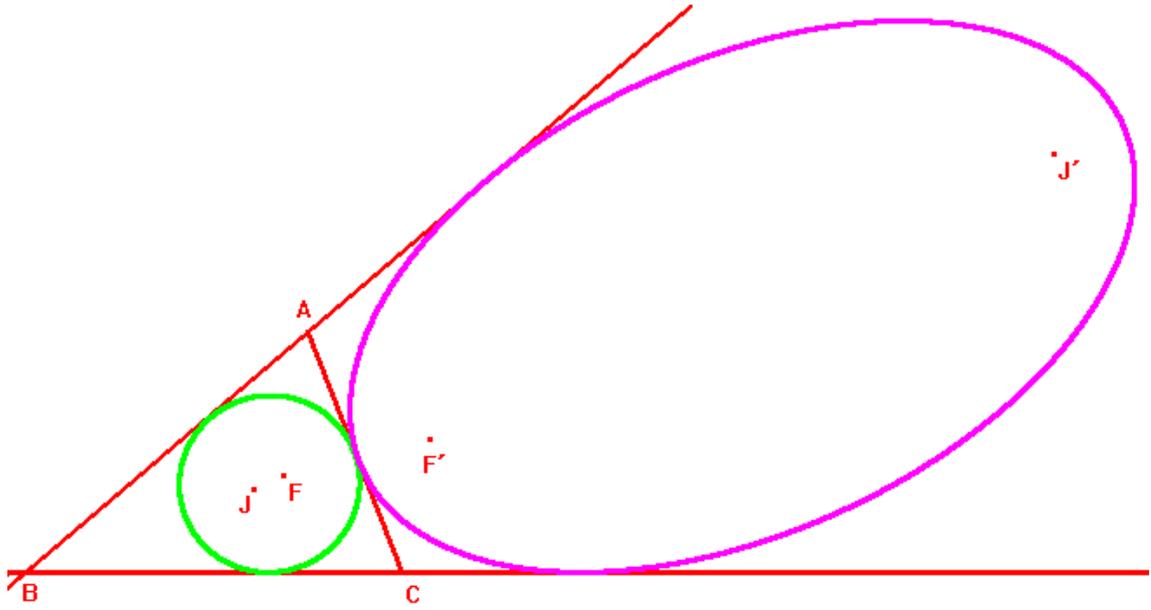


FIGURA 45

4.2 Punto de Steiner

A continuación construiremos un punto que nos será de gran utilidad para construir una elipse circunscrita a un triángulo dado ABC .

TEOREMA 21. Si construimos las circunferencias que pasan por un vértice de un triángulo y por los simétricos de los otros dos vértices con respecto al baricentro, entonces estas circunferencias son concurrentes en un punto que además está sobre la circunferencia circunscrita del triángulo.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 46)

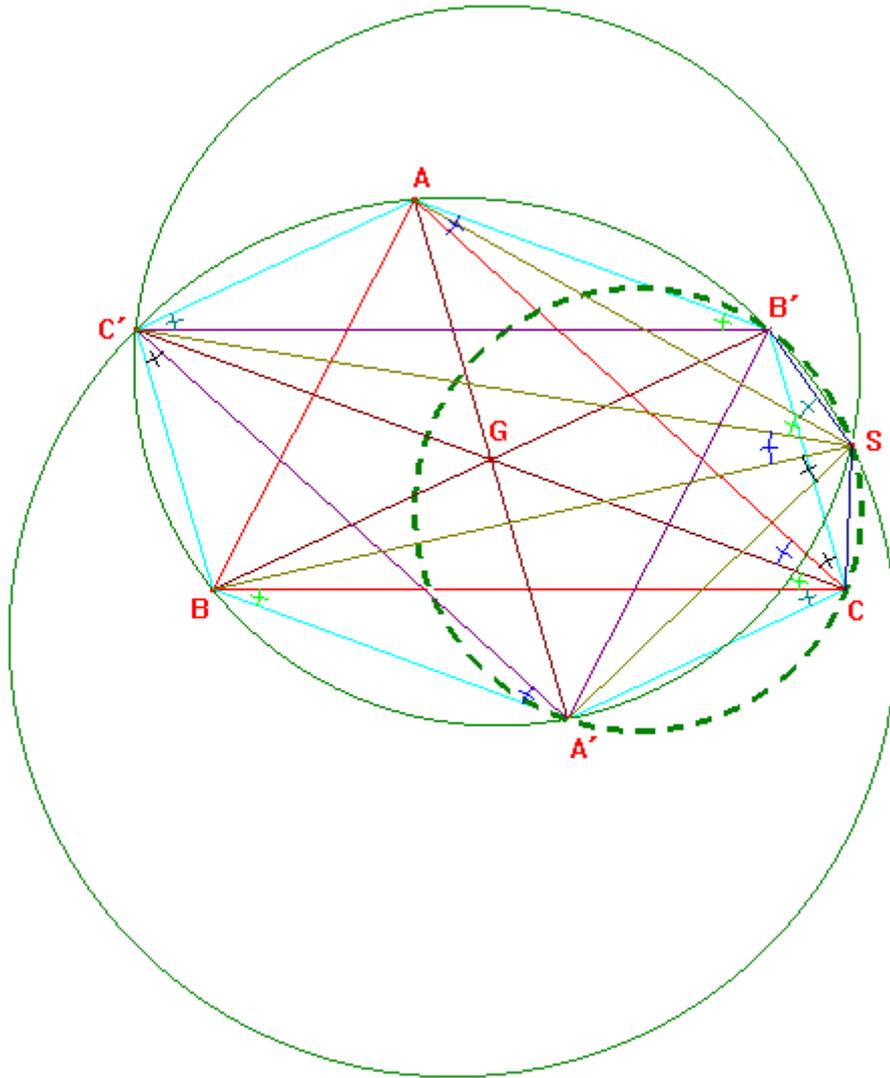


FIGURA 46

Sea ABC un triángulo con baricentro G y sean A' , B' y C' los puntos simétricos de los vértices A , B y C respecto a G .

Supongamos que la circunferencia que pasa por los puntos A , C' y B' corta a la circunferencia que pasa por los puntos B , A' y C' en un punto S . Vamos a demostrar que la circunferencia que pasa por los puntos C , B' y A' también pasa por S .

Tenemos que los cuadriláteros $AC'SB'$ y $BA'SC'$ son cíclicos y además como G es punto medio de los segmentos AA' , BB' y CC' se sigue que los siguientes conjuntos de segmentos son paralelos:

$C'A$ y $A'C$, BA y $A'B'$, AB' y BA' y CC' , $C'B'$ y BC ; BC' y $C'B$.

De lo anterior tenemos las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle B'SA = \angle AC'B' = \angle BCA', \text{ es decir, } \angle B'SA = \angle BCA' \quad (1)$$

$$\angle ASC' = \angle AB'C' = \angle CBA' = \angle C'CB, \text{ es decir, } \angle ASC' = \angle C'CB \quad (2)$$

$$\angle C'SB = \angle C'A'B = \angle B'AC = \angle ACC', \text{ es decir, } \angle C'SB = \angle ACC' \quad (3)$$

$$\angle BSA' = \angle BC'A' = \angle B'CA, \text{ es decir, } \angle BSA' = \angle B'CA \quad (4)$$

Por consiguiente de las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se sigue que $\angle B'SA' = \angle A'CB'$, es decir, la circunferencia que pasa por C, B' y A' también pasa por S .

Ahora, para ver que S también está sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC observemos que de las ecuaciones (2) y (3) se sigue la igualdad de los ángulos $\angle ASB$ y $\angle ACB$ por lo que la afirmación es inmediata. ■

Las circunferencias del teorema anterior se llaman *Circunferencias de Steiner* y el punto en que concurren se conoce como el *Punto de Steiner* del triángulo ABC .

A continuación vamos a demostrar que los puntos A, B, C, A', B', C' y S del teorema anterior, están en una elipse conocida como la *Elipse circunscrita de Steiner*.

Para esto recordemos (Ver [6] y [8]) que si tenemos un hexágono inscrito en una cónica, el Teorema de Pascal afirma que las intersecciones de lados opuestos son colineales.

TEOREMA 22. Dado un triángulo ABC , su punto de Steiner S y su baricentro G , existe una elipse circunscrita al triángulo que pasa por S, A', B' y C' , donde los puntos A', B' y C' son, respectivamente los puntos simétricos de los vértices del triángulo con respecto a G .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 47)

Construimos una figura como la del teorema 21, donde S es el punto de Steiner del triángulo ABC .

Como los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lados paralelos se sigue del Teorema de Pascal que los puntos A, B, C, A', B' y C' están en una elipse.

Para ver que S está en esta elipse utilizaremos las igualdades de ángulos dadas por las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) que se obtuvieron en la demostración del teorema 21. Tenemos entonces que:

$$S\{B'ABA'\} = \frac{\text{sen } B'SB}{\text{sen } BSA'} \cdot \frac{\text{sen } B'SA'}{\text{sen } A'SA} = \frac{\text{sen } A'CA}{\text{sen } ACB} \cdot \frac{\text{sen } A'CB'}{\text{sen } B'CB} = C\{A'BAB'\}$$

Pero sabemos que la permutación de puntos $A', B, A, B' \rightarrow B', A, B, A'$ conserva la razón cruzada. Por lo tanto, $S\{B'ABA'\} = C\{B'ABA'\}$, lo que por el Teorema 5 y su corolario significa que S está sobre la elipse. ■

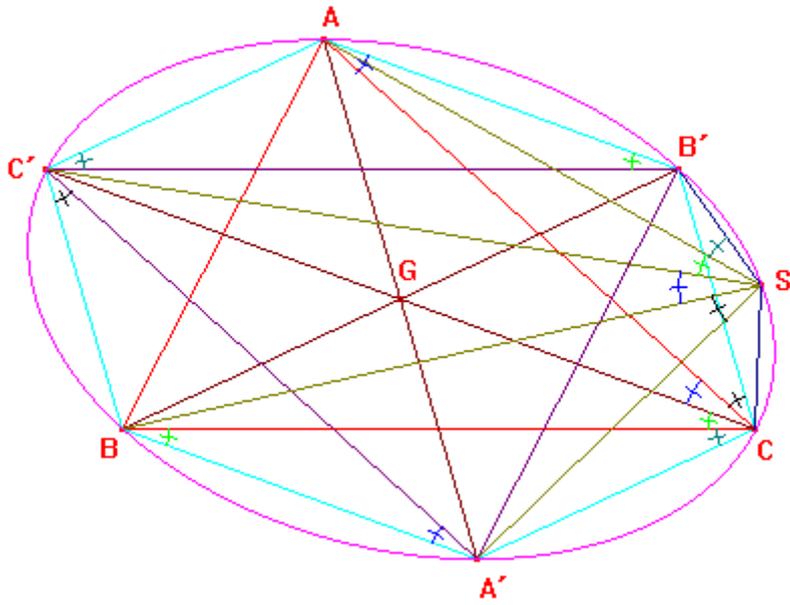


FIGURA 47

Capítulo 5.

Hipérbolas inscritas y circunscritas e hipérbolas equiláteras.

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las hipérbolas inscritas y circunscritas en triángulos. Diremos que una hipérbola es inscrita en un triángulo ABC si es tangente a los lados del triángulo ABC . Diremos que una hipérbola es circunscrita a un triángulo ABC si pasa por los vértices del triángulo ABC . Volveremos a utilizar la teoría de líneas y puntos conjugados isogonales de un triángulo, la línea de Simson y la circunferencia de los nueve puntos. Aunque mencionaremos las hipérbolas no equiláteras, centraremos más nuestro estudio en las hipérbolas equiláteras.

5.1 Hipérbolas Inscritas en un triángulo.

TEOREMA 23. Existe una hipérbola inscrita en un triángulo cuyos focos son dos puntos isogonales fuera de este.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 48)

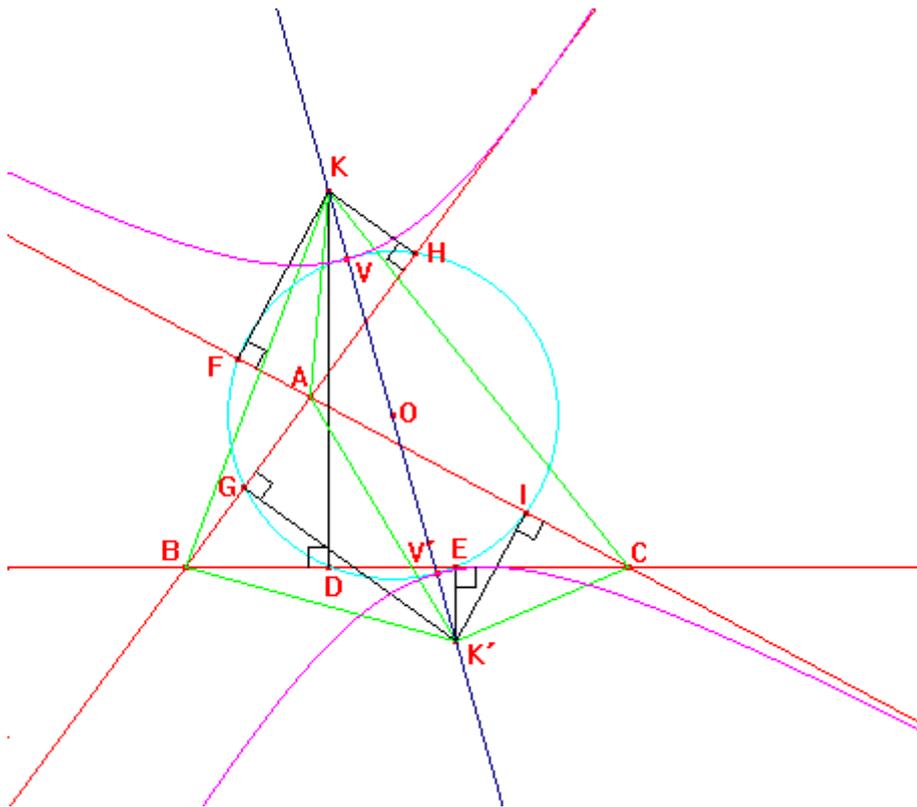


FIGURA 48

Sean K y K' dos puntos conjugados isogonales respecto a un triángulo ABC y fuera de éste. Sean, respectivamente, D , F y H y E , I y G las proyecciones desde K y K' a los lados del triángulo ABC .

Si O es el punto medio de KK' , sabemos por el Teorema 13 que los puntos D, E, F, G, H e I están en una circunferencia de centro en O . Sean V y V' los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta KK' . Sabemos entonces por el Corolario 4.4 que podemos construir una única hipérbola con focos K y K' , centro en O , vértices V y V' y tangente a los segmentos AB, BC y CA y cuya circunferencia auxiliar es la que pasa por los puntos D, E, F, G, H e I . La unicidad de esta hipérbola se justifica igual que en el Teorema 20 para la elipse. Esto demuestra el teorema. ■

COROLARIO 23.1. Existe una hipérbola tangente a los tres lados de un triángulo obtusángulo ABC cuyos focos son el ortocentro y el circuncentro, su circunferencia auxiliar es la circunferencia de los nueve puntos y su eje mayor es la recta de Euler del triángulo. ■

(Ver figura 49)

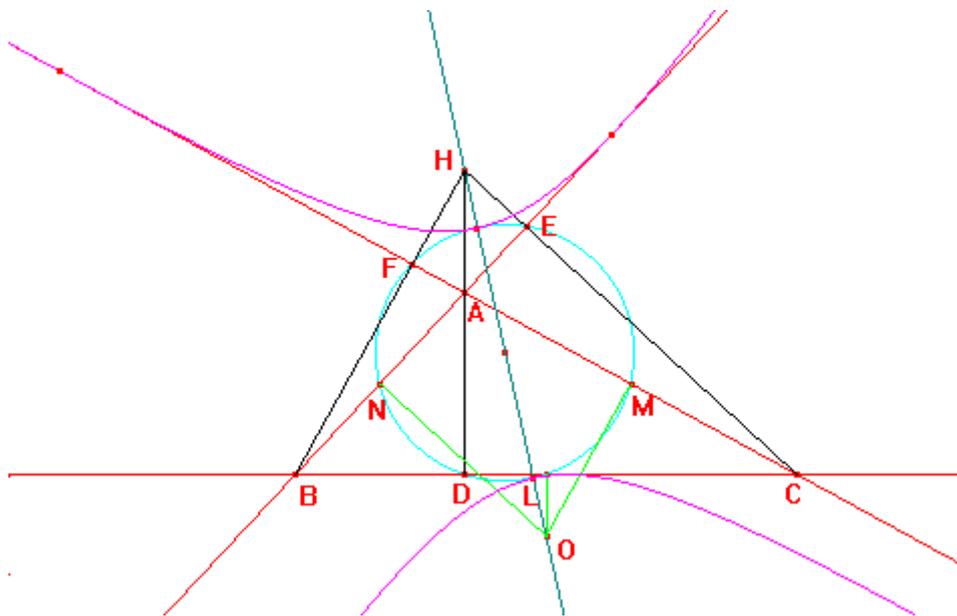


FIGURA 49

A continuación vamos a seguir estudiando las propiedades de las hipérbolas pero para ello necesitamos las definiciones de *diámetro*, *cuerda* y *diámetro conjugado de la cuerda* de una hipérbola.

DEFINICIÓN 8. Un *diámetro* de una hipérbola es cualquier recta secante que pase por el centro de la curva, una *cuerda* de una hipérbola es una recta secante que no pasa por su centro y el *diámetro conjugado de una cuerda* es la recta que pasa por el centro y el punto medio del segmento que la cuerda determina con las asíntotas de la curva. (Ver Figura 50)

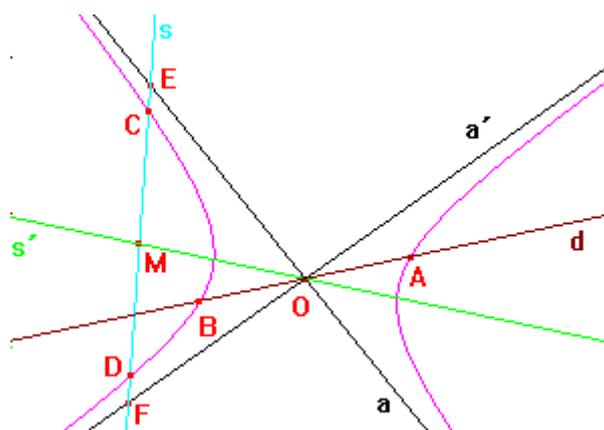


FIGURA 50

En la figura podemos observar una hipérbola con centro O y asíntotas a y a' . Hemos construido un diámetro d que toca a la curva en los puntos A y B , una cuerda s que toca a la curva en los puntos C y D y el diámetro conjugado s' de s que pasa por O y el punto medio M de CD .

Observemos además, que si s toca a las asíntotas a' y a en los puntos E y F respectivamente, entonces se sigue del Teorema 3 que $EC = DF$ y por lo tanto tenemos que M es punto medio de EF .

5.2 Hipérbolas Equiláteras.

A continuación los teoremas que se enuncian tratarán exclusivamente de hipérbolas equiláteras. Trataremos este tipo de curvas circunscritas a triángulos y utilizaremos las propiedades de la circunferencia de los nueve puntos y de las líneas de Simson.

TEOREMA 24. En una hipérbola equilátera una cuerda y su diámetro conjugado están igualmente inclinados con respecto a sus asíntotas.

DEMOSTRACIÓN: (Ver figura 51)

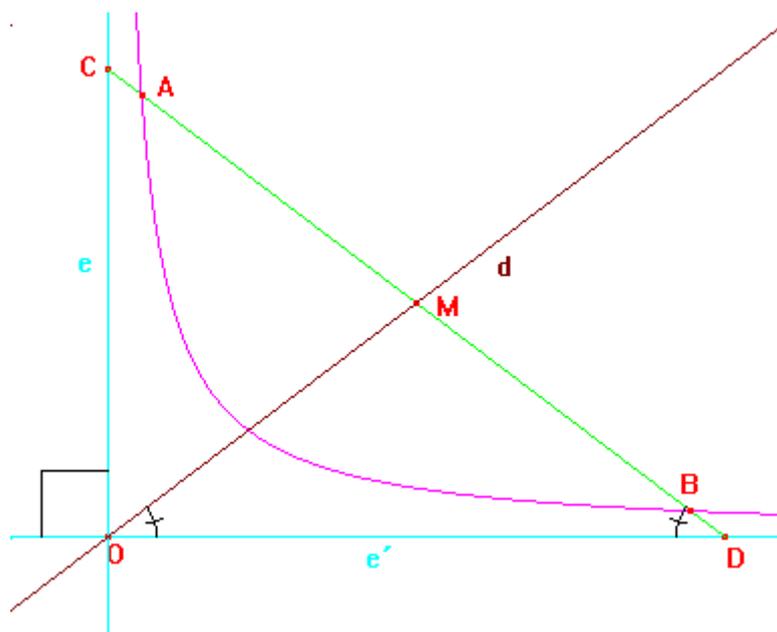


FIGURA 51

Tenemos una hipérbola equilátera con asíntotas e y e' . Sabemos que en una hipérbola equilátera sus asíntotas son perpendiculares. Sea AB una cuerda de la hipérbola, si M es el punto medio de AB , entonces OM es el diámetro conjugado de AB .

Por la observación a la Definición 5 sabemos que si C y D son los puntos donde la cuerda AB toca a las asíntotas e y e' entonces M es punto medio de CD .

Como el triángulo COD es un triángulo rectángulo se sigue que $MC = MO = MD$, es decir, los triángulos MOD y MOC son triángulos isósceles.

Por lo tanto $\angle MOD = \angle MDO$ y $\angle MOC = \angle MCO$ y el teorema queda demostrado. ■

TEOREMA 25. La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera pasa por el centro de la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 52)

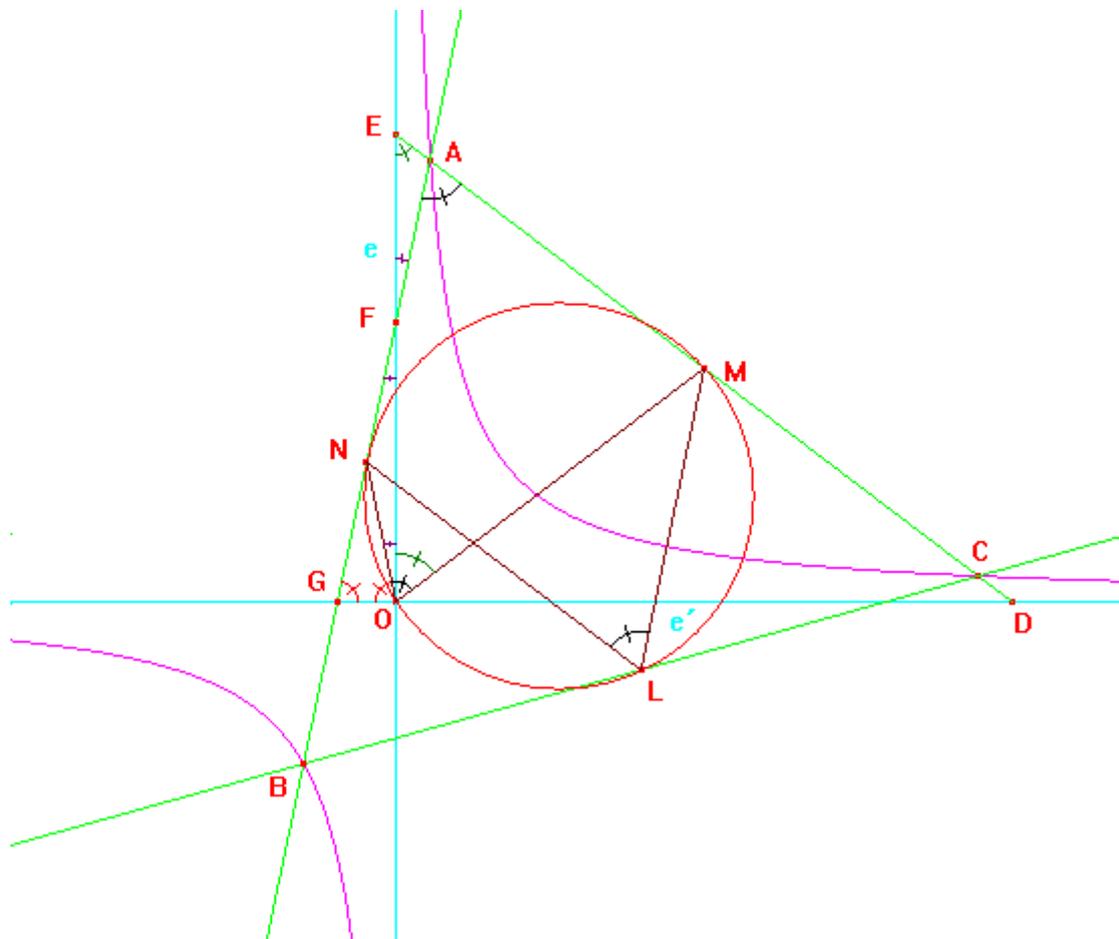


FIGURA 52

Nos dan una hipérbola equilátera con centro O , asíntotas e y e' , y un triángulo ABC inscrito en la hipérbola.

Sean L, M y N los puntos medios del triángulo ABC ; D y E los puntos en que el lado CA toca a las asíntotas e' y e , y sean F y G los puntos en que el lado AB toca a las asíntotas e y e' .

Del teorema anterior se sigue que ON es diámetro conjugado de AB y que OM es diámetro conjugado de CA . Por lo tanto se sigue que $\angle NOF = \angle NFO = \angle EFA$, es decir,

$$\angle NOF = \angle EFA \quad (1)$$

y que:

$$\angle OEM = \angle EOM \quad (2).$$

Pero además en el triángulo EFA se tiene que:

$$\angle EFA + \angle FEA = \angle NAM \quad (3).$$

Por otra parte se tiene que:

$$\angle NOF + \angle EOM = \angle NOM \quad (4).$$

Pero de (1) y (2) se sigue que $\angle NOF + \angle EOM = \angle EFA + \angle OEM = \angle EFA + \angle FEA = \angle NAM$ por consiguiente de (3) y (4) se sigue que:

$$\angle NAM = \angle NOM \quad (5).$$

Ahora, como L, M y N son los puntos medios del triángulo ABC se sigue que el cuadrilátero $ANLM$ es un paralelogramo. Entonces $\angle NAM = \angle NLM$, por lo tanto de (5) se tiene que $\angle NOM = \angle NLM$ que es suficiente para probar que el cuadrilátero $NOLM$ es cíclico y la circunferencia que lo circunscribe es precisamente la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC . ■

TEOREMA 26. El ortocentro de un triángulo inscrito en una hipérbola equilátera se encuentra sobre ésta.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 53)

Del Teorema de Pascal sabemos que en todo hexágono $ABCDEF$ inscrito en una cónica los tres puntos de intersección $H = AB \cap DE$, $I = BC \cap EF$, $K = CD \cap FA$ son colineales.

Supongamos que el triángulo ABC está inscrito en una hipérbola equilátera. Consideremos el hexágono $ABCDEF$ inscrito en la hipérbola en el que E y F son los puntos al infinito de la hipérbola y el punto D lo elegimos de tal forma que AB y CD sean perpendiculares. Entonces se cumplen:

- (1) Al ser E y F puntos al infinito, el punto I , de intersección de los lados EF y BC también estará en el infinito; lo que quiere decir que BC y HK son paralelas.
- (2) Los lados DE y FA contiguos a EF , que es la recta al infinito, serán respectivamente paralelos a las dos asíntotas. Como la hipérbola es equilátera, dichos lados serán perpendiculares.

- (3) De la construcción de D tenemos que AB es perpendicular a CD y por lo tanto, AH es perpendicular a DK .
- (4) Del inciso (2) tenemos que DE es perpendicular a FA , entonces AK es perpendicular a DH .
- (5) De los incisos (3) y (4) se sigue que A es la intersección de las dos alturas del triángulo DHK , por lo que AD también será perpendicular a HK y a su paralela BC . Por lo tanto D es el punto de intersección de las dos alturas del triángulo ABC , y pertenece a la hipérbola. ■

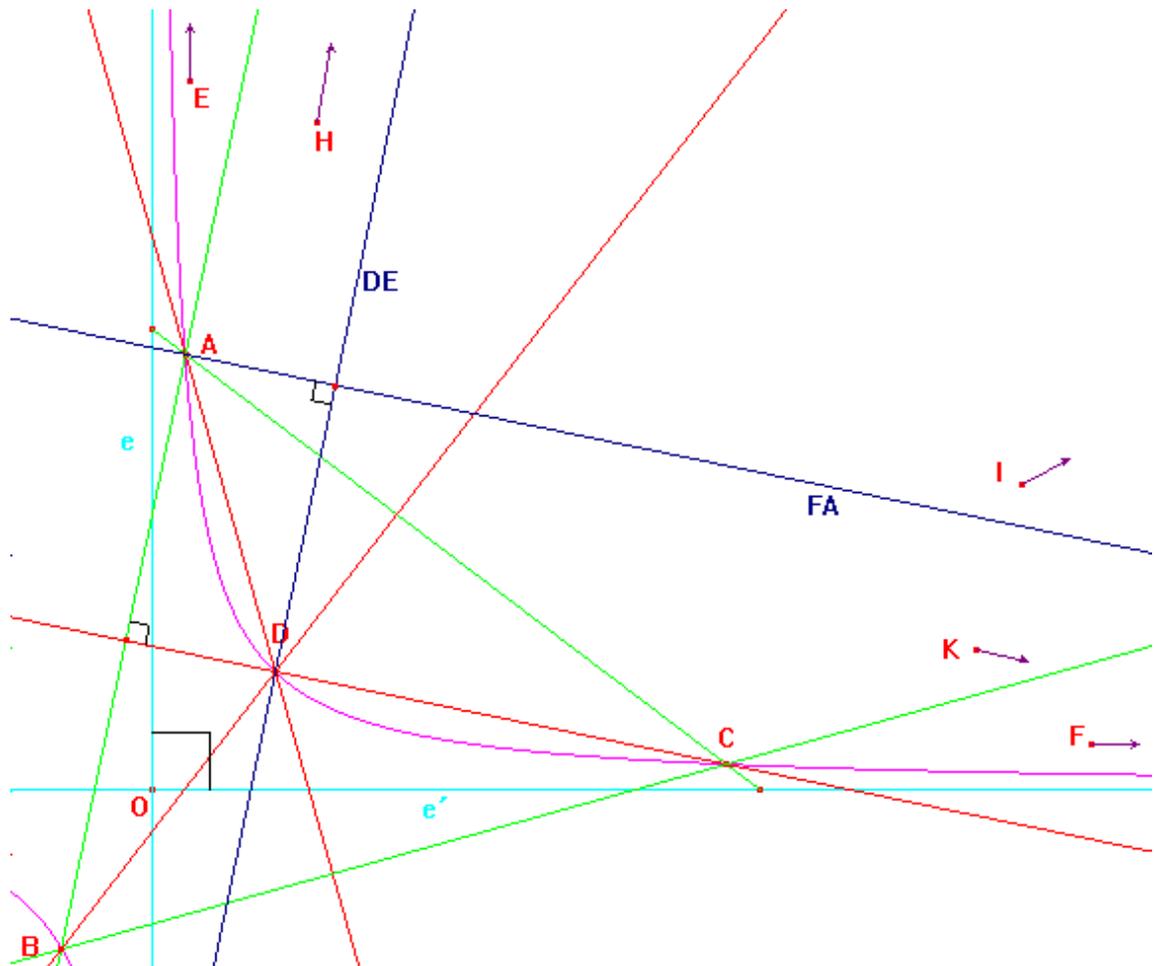


FIGURA 53

OTRA DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 54)

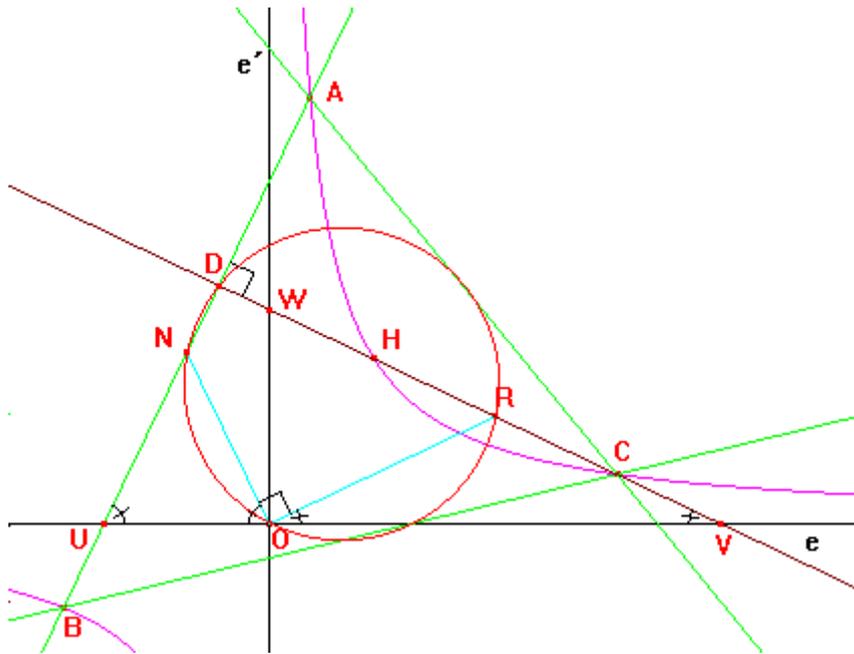


FIGURA 54

Tenemos en la figura 54 una hipérbola equilátera con centro O , asíntotas e y e' . Sea H el ortocentro de un triángulo ABC inscrito en la hipérbola equilátera.

Sea D el pie de la altura desde C al lado AB del triángulo ABC y sean N el punto medio de AB y R el punto medio de CH .

Sean también $U = AB \cap e$, $V = CD \cap e$ y $W = CD \cap e'$.

Sabemos que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por R, D, N y O y que además $\angle CDN = 90^\circ$; como el cuadrilátero $RDNO$ es cíclico se sigue que $\angle NOR = 90^\circ$ y entonces $\angle CDN = \angle NOR$ (1).

Como N es punto medio de AB tenemos entonces que ON es diámetro conjugado de AB , de lo cual tenemos que $\angle NUO = \angle UON$ (2).

Para el triángulo DUV y usando las igualdades (1) y (2) tenemos que:

$$180^\circ = \angle DUV + \angle UVD + \angle VDU = \angle NUO + \angle OVR + \angle CDN = \angle UON + \angle OVR + \angle NOR.$$

$$\text{Es decir, } 180^\circ = \angle UON + \angle OVR + \angle NOR \quad (3).$$

Por otra parte observemos que:

$$180^\circ = \angle UON + \angle NOR + \angle ROV \quad (4)$$

De las igualdades (3) y (4) se concluye que: $\angle ROV = \angle OVR$.

Por lo tanto, se tiene que OR y VD están igualmente inclinados con respecto a la asíntota e ; es decir, OR es diámetro conjugado de VW .

Al ser R punto medio de CH y al estar C sobre la hipérbola, se sigue que H también está sobre la hipérbola. ■

DEFINICIÓN 9: Sea P un punto cualquiera dentro de un triángulo ABC que no esté sobre los lados. El triángulo pedal del triángulo ABC con respecto a P es el triángulo formado por los pies de las perpendiculares desde P a los lados de ABC . La circunferencia circunscrita del triángulo pedal se llama circunferencia pedal.

TEOREMA 27: Si una hipérbola equilátera se circunscribe a un triángulo ABC y si D es un punto cualquiera en ella, entonces la circunferencia pedal con respecto a D pasa por el centro de la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 55)

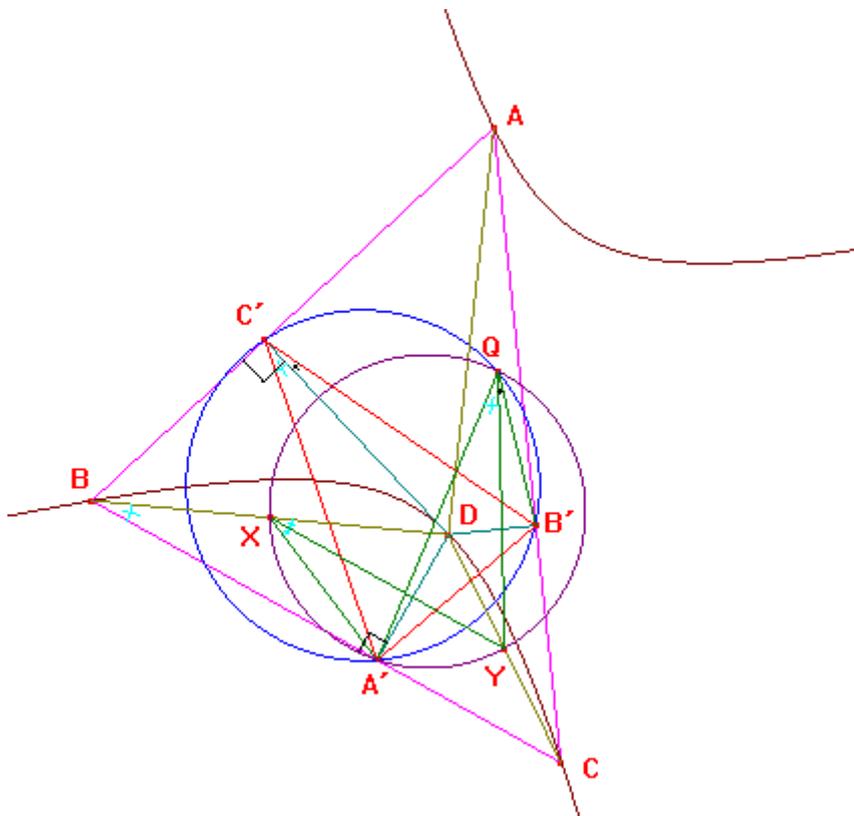


FIGURA 55

Sea $A'B'C'$ el triángulo pedal con respecto a D , y sean X y Y los puntos medios de los segmentos BD y CD respectivamente y sea Q el centro de la hipérbola.

Como DA' es perpendicular a BC y DC' es perpendicular a AB se sigue que el cuadrilátero $C'BA'D$ es cíclico y por lo tanto $\angle A'BD = \angle A'C'D$, pero observemos también que XY es paralela a BC , entonces $\angle A'BD = \angle YXD$ y como DA es perpendicular a BC se sigue que también lo es con XY en el punto medio de DA . De lo anterior se sigue que $\angle YXD = \angle YXA'$.

Por lo tanto de estas igualdades de ángulos se tiene que $\angle A'C'D = \angle YXA'$ (1).

Ahora bien, como el triángulo DBC es inscrito a una hipérbola equilátera, sabemos que el centro Q , de la hipérbola, se encuentra sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo DBC . Tal circunferencia es la que pasa por los puntos X, A', Y' y, por consiguiente, también pasará por Q .

De lo anterior se sigue que el cuadrilátero $XA'Y'Q$ es cíclico y entonces $\angle YXA' = \angle YQA'$. Por lo tanto de la ecuación (1) se tiene que $\angle A'C'D = \angle YQA'$ (2).

De manera semejante puede probarse que $\angle DC'B' = \angle B'QY$ (3).

Finalmente, de (2) y (3) se concluye que $\angle A'C'B' = \angle B'QA'$ y por lo tanto la circunferencia pedal respecto a D también pasa por Q . ■

TEOREMA 28: Sea ABC un triángulo cuyos circuncentro y ortocentro son O y H respectivamente. Si D es un punto en la circunferencia circunscrita de ABC , entonces las líneas de Simson de los puntos P y Q diametralmente opuestos, con respecto a la circunferencia circunscrita de ABC , determinados por la paralela desde O a la isogonal de AD , son paralelas a DP y DQ respectivamente. Más aún, tales líneas de Simson se intersecan en el punto medio de HD .

DEMOSTRACIÓN: (ver Figura 56)

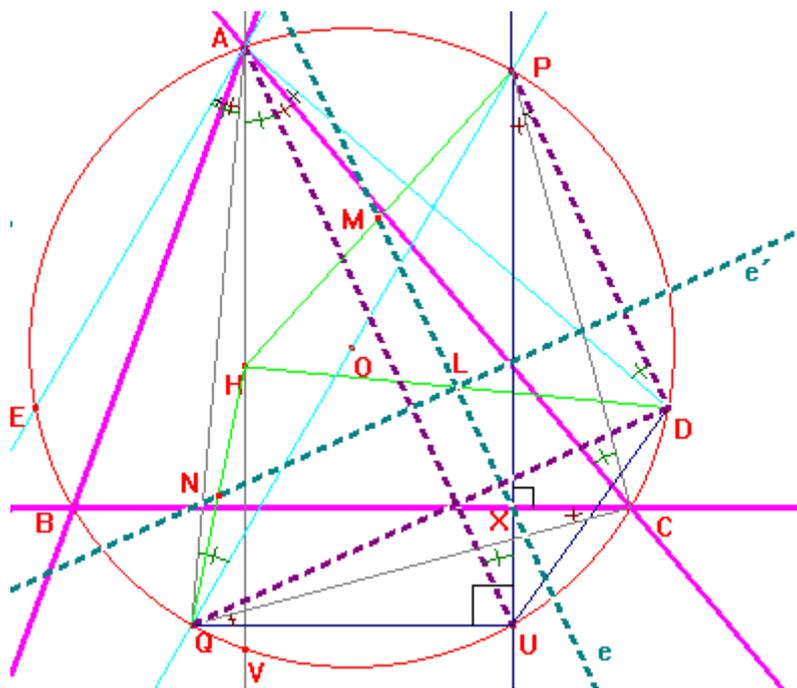


FIGURA 56

Hemos dibujado la Figura 56 de acuerdo a las hipótesis.

Sea AE la isogonal de AD y desde O trazamos la paralela a AE determinando puntos diametralmente opuestos P y Q .

Sean U y V los puntos donde la perpendicular desde P a BC y la altura por A tocan de nuevo a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Como AD y AE son isogonales tenemos que $\angle EAB = \angle CAD$, pero $\angle CAD = \angle CPD$ porque subtienden el arco \widehat{CD} . Por lo tanto, $\angle EAB = \angle CPD$ (1).

Observemos que el triángulo PQU es un triángulo rectángulo donde QU es perpendicular a PU , y como PU es perpendicular a BC se sigue que QU y BC son paralelas.

De lo anterior tenemos que $\angle BCQ = \angle CQU$ (2).

Pero $\angle BCQ = \angle BAQ$ porque subtienden el arco \widehat{BQ} y $\angle CQU = \angle UPC$ porque subtienden el arco \widehat{CU} .

Combinando las igualdades anteriores con la igualdad (2) tenemos que $\angle BAQ = \angle UPC$ (3).

Ahora, de (1) y (3) se tiene que $\angle EAQ = \angle EAB + \angle BAQ = \angle CPD + \angle UPC = \angle UPD$, es decir, $\angle EAQ = \angle UPD$ (4).

Por otra parte, como AE y PQ son paralelas tenemos que $\angle EAQ = \angle AQP$ (5),

Pero $\angle AQP$ y $\angle AUP$ subtienden el arco \widehat{AP} , luego $\angle AQP = \angle AUP$, entonces, de la igualdad (5) se tiene que $\angle EAQ = \angle AUP$ (6).

Por lo tanto, (4) y (6) se concluye que $\angle UPD = \angle AUP$ y por consiguiente se tiene que UA es paralela a DP .

Si e es la línea de Simson de P , sabemos entonces que e es paralela a UA y por lo tanto es paralela a DP .

De manera análoga se puede demostrar que si e' es la línea de Simson de Q , entonces e' es paralela a DQ .

Falta ver que si L es el punto medio de HD entonces e y e' pasan por H . Para esto sabemos que si M es el punto medio de HP , entonces e pasa por M , pero como e es paralela a DP se sigue que e pasa por L . De manera similar, si N es el punto medio de HQ y usando que e' es paralela a DQ tenemos que e' pasa por L . ■

TEOREMA 29: Las líneas de Simson de dos puntos P y Q diametralmente opuestos en la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC son paralelas a las isogonales de QA , QB , QC y PA , PB , PC con respecto al triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 57)

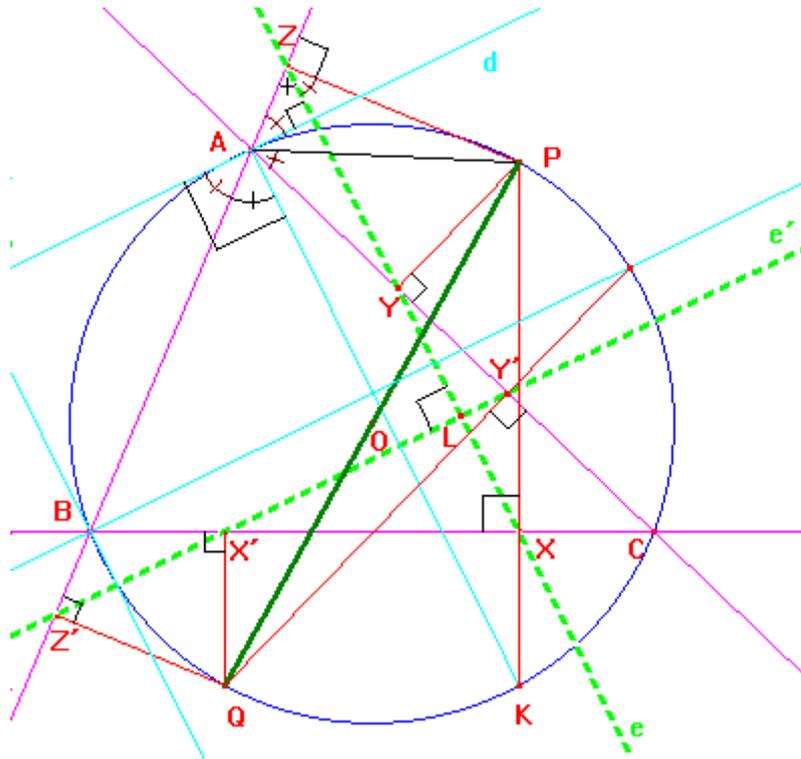


FIGURA 57

Sean ABC un triángulo y P y Q dos puntos en su circunferencia circunscrita. Sean e y e' las líneas de Simson de P y Q respectivamente.

Es suficiente probar, por ejemplo, que si d es la isogonal de PA , entonces e' es paralela a d .

Sean X y Z los pies de las perpendiculares desde P a AB y BC por los que pasa e . Si K es el punto donde PX corta otra vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC , sabemos entonces que AK es paralela a e . De lo anterior tenemos que $\angle BAK = \angle BZX$ (1).

Y como d y PA son isogonales se sigue que $\angle YAP = \angle dAB = \angle ZAd$, pero observemos que el cuadrilátero $YAZP$ es cíclico, entonces $\angle YAP = \angle YZP$.

Por lo tanto, $\angle YZP = \angle ZAd = \angle dAB$ (2).

De (1) y (2) se sigue que $90^\circ = \angle BZX + \angle YZP = \angle BZX + \angle ZAd = \angle BAK + \angle dAB$, lo que significa que d y e , son perpendiculares, pero como P y Q son diametralmente opuestos, sabemos que e y e' son perpendiculares. Por lo tanto d y e' son paralelas.

De manera análoga se prueba que e es paralela a alguna de las isogonales de QA, QB o bien QC . ■

TEOREMA 30: Las asíntotas de una hipérbola equilátera circunscrita a un triángulo ABC son líneas de Simson de dos puntos diametralmente opuestos P y Q en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 58)

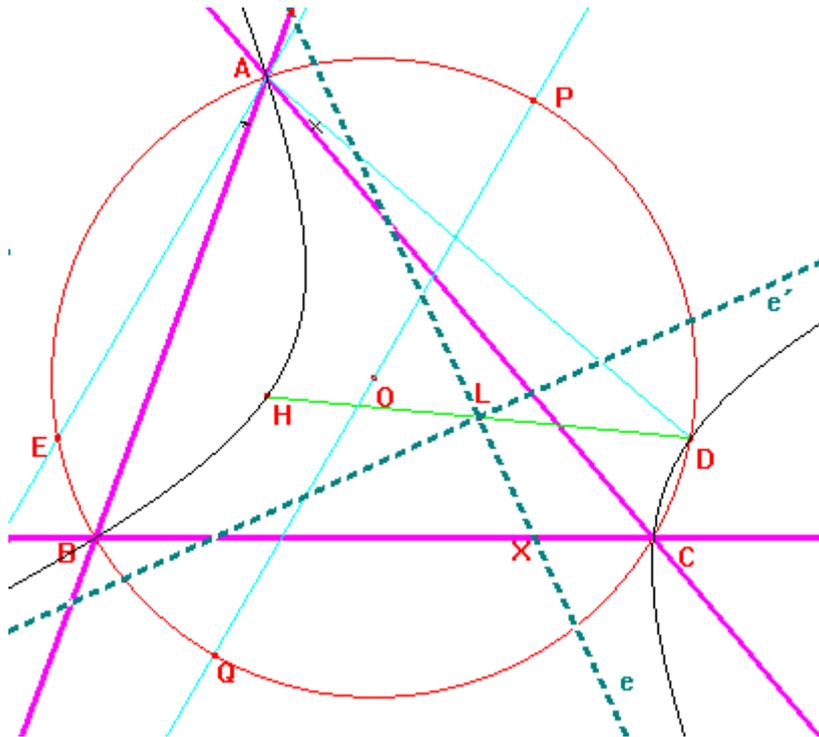


FIGURA 58

Es claro que si una hipérbola equilátera se circunscribe a un triángulo ABC , entonces la circunferencia circunscrita de éste tocará a la hipérbola en un cuarto punto D .

Sabemos por el Teorema 25 que si L es el centro de la hipérbola, entonces L está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC . También sabemos que si H es ortocentro de ABC entonces la circunferencia de los nueve puntos y la circunferencia circunscrita de ABC son homotéticas desde H con razón de homotecia 1:2. Por lo que el simétrico de H respecto a L encuentra sobre la circunferencia circunscrita de ABC .

Como la hipérbola, por ser equilátera, pasa por H , entonces se sigue que el simétrico de H respecto a L está en la hipérbola. Entonces, del párrafo anterior se sigue que D es precisamente el simétrico de H .

Del Teorema 14 sabemos que la hipérbola equilátera es la transformada isogonal de un cierto diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Sabiendo que el isogonal de D respecto a ABC es el punto al infinito en la dirección de la isogonal de AD , se sigue que el diámetro que estamos buscando se obtiene trazando una paralela por el centro de la circunferencia circunscrita de ABC a la isogonal de AD .

Si P y Q son los extremos del diámetro que acabamos de determinar, sabemos por el Teorema 14 que las direcciones asintóticas de la hipérbola son los puntos al infinito en que P y Q se convierten mediante la transformación isogonal respecto a ABC .

Si e y e' son las líneas de Simson respecto a P y Q , sabemos por el teorema anterior que e y e' son paralelas a las direcciones asintóticas de Q y P respectivamente.

Finalmente, usando el Teorema 28, concluimos que e y e' pasan por L , y por lo tanto e y e' son las asíntotas de la hipérbola. ■

El conocido teorema de Feurebach que se estudia en Geometría Moderna afirma que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a cada una de las circunferencias, inscrita y excritas. El punto de contacto de la circunferencia de los nueve puntos con la circunferencia inscrita se conoce como punto de Feuerbach.

Con esto enunciamos el siguiente:

TEOREMA 31: La hipérbola equilátera circunscrita a un triángulo ABC y que pasa por el incentro tiene su centro en el punto de Feuerbach. Tal hipérbola se conoce como la hipérbola de Feuerbach.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 59)

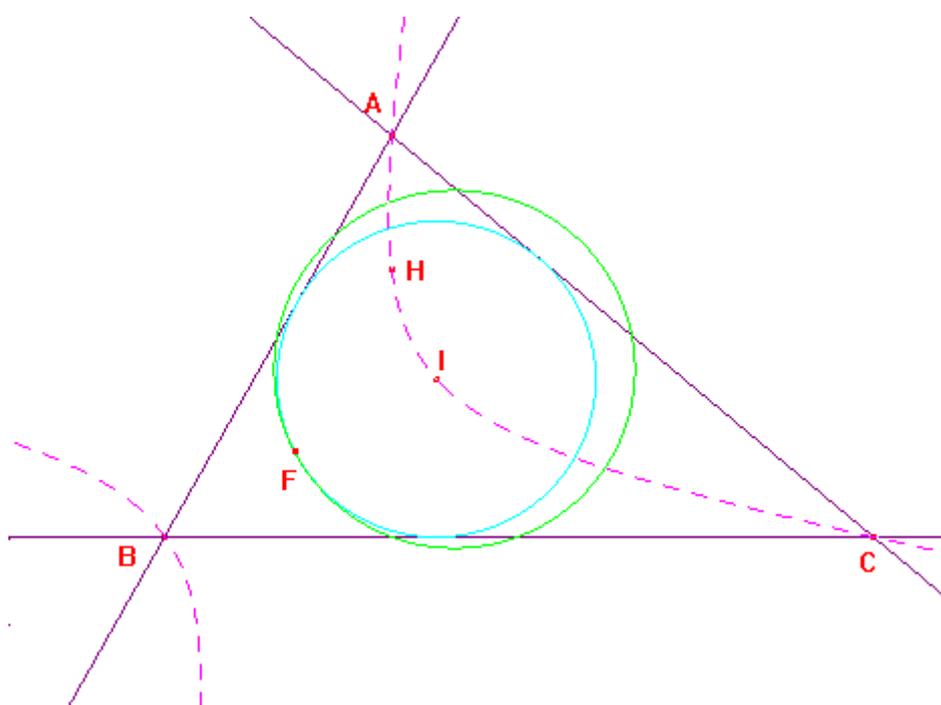


FIGURA 59

Sabemos que la hipérbola, por ser equilátera, pasa por el ortocentro y tiene su centro en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC .

Por hipótesis, la hipérbola pasa por el incentro I de ABC , y por el Teorema 27 el centro de la hipérbola estará en la circunferencia pedal de I , pero como sabemos, la circunferencia pedal de I es la circunferencia inscrita de ABC .

Como la circunferencia de los nueve puntos y la circunferencia inscrita son tangentes en el punto de Feuerbach, se sigue que este punto es el centro de la hipérbola. ■

En el Teorema 21 construimos el punto de Steiner de un triángulo ABC mediante la reflexión de los vértices respecto al baricentro G y construyendo las circunferencias que

pasan por cada vértice y por los reflejados de los otros dos (a tales circunferencias les llamamos circunferencias de Steiner)

Vamos a dar otra construcción del punto de Steiner que nos será útil para el siguiente teorema que tratará acerca de una hipérbola cuyo centro será el punto de Steiner.

Los detalles de la nueva construcción del punto de Steiner de un triángulo ABC se exponen a continuación:

TEOREMA 32: Sea ABC un triángulo con baricentro G y sea UVW el triángulo que se obtiene de trazar rectas paralelas desde cada vértice de ABC a su lado opuesto. Entonces, la circunferencia pedal de G con respecto al triángulo UVW pasa por el punto de Steiner del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver figura 60)

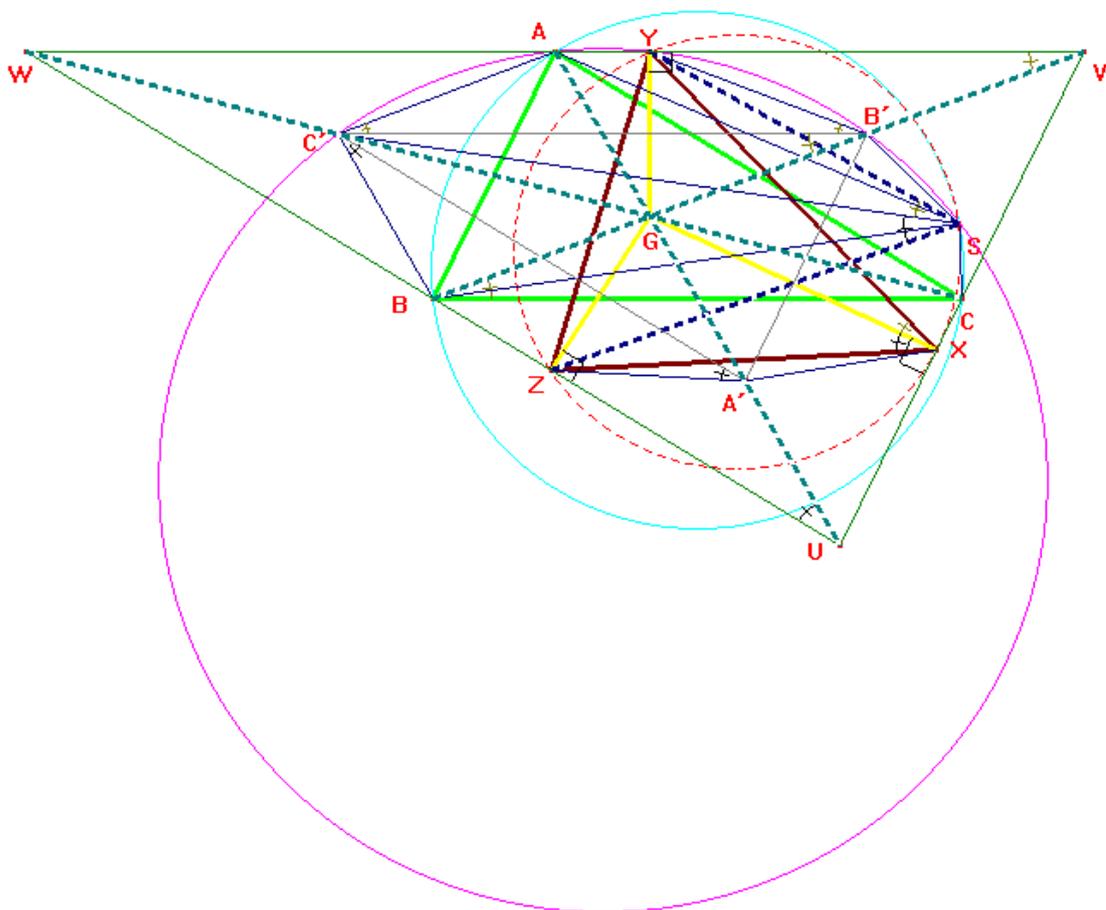


FIGURA 60

En la figura hemos construido el triángulo ABC con baricentro G y punto de Steiner S . También hemos construido el triángulo pedal XYZ de G con respecto al triángulo UVW .

Supongamos que el punto Y se encuentra sobre VW , el punto Z sobre WU y que el punto X se encuentra sobre UV .

Sean B' y C' los reflejados de B y C respecto de G .

Sabemos que la circunferencia que pasa por A, C' y B' es una circunferencia de Steiner y por lo tanto también pasará por S .

Como los lados del triángulo ABC son paralelos a los del triángulo UVW , tenemos entonces que ABC es triángulo medial de UVW y se sigue que G también es baricentro de UVW y las medianas de ABC son medianas de UVW .

Por la propiedad de que el baricentro divide a una mediana en la razón 2: 1 tenemos que si G es punto medio de $C'C$ entonces C' es punto medio de WG . De la misma manera B' es punto medio de VG . Por lo tanto, $B'C'$ es paralelo a VW .

También, como A es punto medio de VW tenemos que $C'A$ es paralelo a GV , por consiguiente tenemos que $AC'B'V$ es un paralelogramo.

De lo anterior tenemos las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle AC'B' = \angle YVB' = \angle YVG = \angle AVB' = \angle AVG = \angle C'B'G \quad (1).$$

Por otra parte, como GY es perpendicular a VW tenemos que $B'C'$ es mediatriz de GY , es decir, $\angle C'B'G = \angle YB'C'$ (2).

De las igualdades (1) y (2) tenemos que $\angle AC'B' = \angle YB'C'$, es decir, el trapecio $AC'B'Y$ es un trapecio isósceles, por lo tanto es un cuadrilátero cíclico.

Hasta aquí hemos probado que Y está sobre la circunferencia de Steiner que pasa por A, B', C' , como tal circunferencia también pasa por el punto de Steiner S , se sigue que el cuadrilátero $YB'SC'$ es cíclico.

$$\text{Por lo tanto } \angle YB'C' = \angle YSC' \quad (3).$$

Observemos también que como GX es perpendicular a UV , se tiene que el cuadrilátero $GXYV$ es cíclico, esto quiere decir que $\angle YVG = \angle YXG$ (4)

$$\text{De las igualdades (1), (3) y (4) se concluye que } \angle YSC' = \angle YXG \quad (5).$$

De manera análoga puede probarse que el cuadrilátero $BC'A'U$ es un paralelogramo y que la circunferencia de Steiner que pasa por B, A', C' también pasa por Z

Haciendo el análisis anterior y usando que el cuadrilátero $GXUZ$ es un cuadrilátero cíclico podemos probar que $\angle ZXG = \angle ZSC'$ (6).

De las igualdades (5) y (6) se tiene que $\angle ZXY = \angle YSZ$. Por lo tanto, la circunferencia pedal de G con respecto al triángulo UVW pasa por S . ■

TEOREMA 33: La hipérbola equilátera circunscrita a un triángulo ABC y que pasa por el baricentro tiene su centro en el punto de Steiner del triángulo medial de ABC . Tal hipérbola se conoce como Hipérbola de Kiepert.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 61)

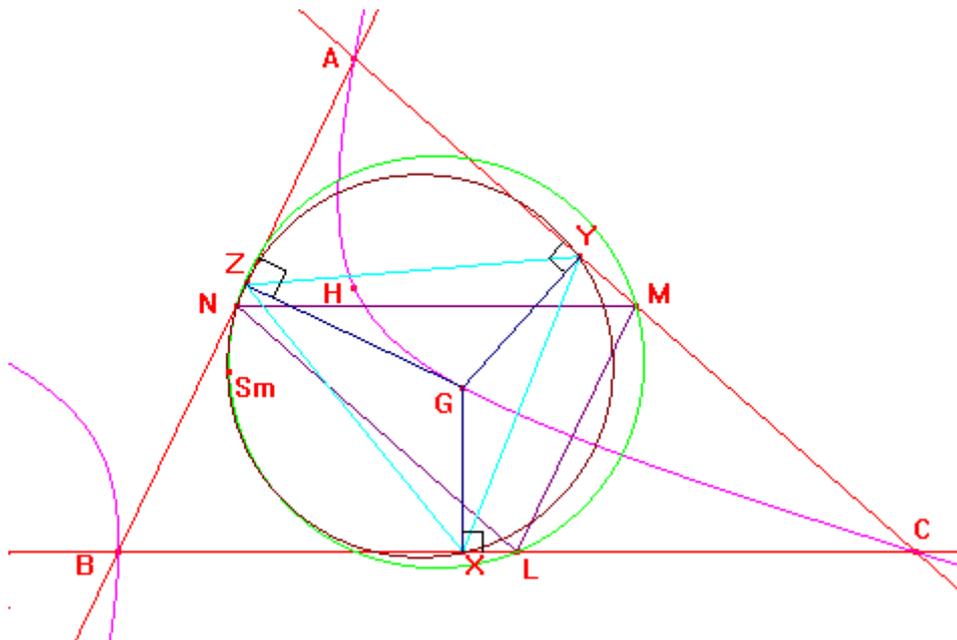


FIGURA 61

En la figura hemos construido un triángulo ABC y una hipérbola equilátera que pasa por su baricentro. Del Teorema 25 sabemos que el centro de la hipérbola se encuentra en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC , es decir, el centro de la hipérbola se encuentra en la circunferencia circunscrita del triángulo medial LMN .

Pero por el Teorema 27 también sabemos que el centro de la hipérbola se encuentra sobre la circunferencia pedal de G . Como G también es el baricentro del triángulo LMN , del teorema anterior se sigue que si XYZ es el triángulo pedal de ABC respecto a G , entonces la circunferencia circunscrita de XYZ pasará por el punto de Steiner Sm del triángulo LMN .

Finalmente, como Sm pertenece a la circunferencia circunscrita de LMN , se ha demostrado el teorema. ■

En el Teorema 17 construimos un punto que llamamos F reflejando la recta de Euler con respecto a los lados del triángulo ABC . Vimos que las reflejadas de la recta de Euler concurren en F y que este punto se encuentra sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Sabemos que si O es el circuncentro del triángulo ABC , entonces O es el ortocentro del triángulo medial LMN , también sabemos que si O' es el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC , entonces O' se encuentra sobre la recta de Euler del triángulo ABC .

De lo anterior se sigue que la recta de Euler de los triángulos ABC y LMN es la misma. Vamos a llamar F' al punto de concurrencia de las reflejadas de la recta de Euler con respecto a los lados del triángulo medial LMN . Es claro que F' se encuentra en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC .

En el siguiente teorema vamos a demostrar que la hipérbola equilátera circunscrita a un triángulo ABC y que pasa por el circuncentro de ABC tiene su centro en F' .

TEOREMA 34: La hipérbola equilátera circunscrita a un triángulo ABC y que pasa por el circuncentro de ABC tiene su centro en F' , donde F' es el punto de concurrencia de las reflejadas de la recta de Euler del triángulo ABC con respecto a su triángulo medial. Tal hipérbola se conoce como Hipérbola de Jerabek.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 62)

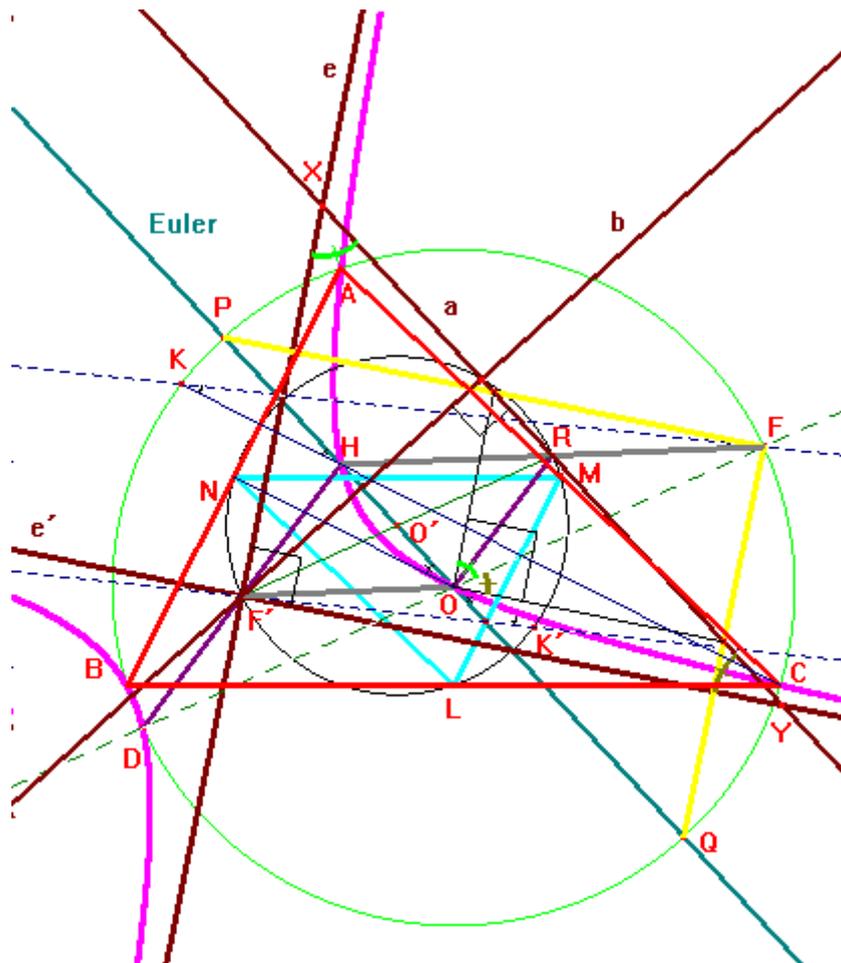


FIGURA 62

En la Figura 62 hemos construido un triángulo ABC con su ortocentro H y su circuncentro O . También hemos construido el triángulo medial LMN y la recta de Euler.

Sean P y Q dos puntos diametralmente opuestos sobre la recta de Euler. Sabemos que si NO es la mediatriz del lado AB del triángulo ABC , entonces NO es altura del triángulo medial LMN .

Sabemos entonces que si K' es el punto donde NO toca otra vez a la circunferencia de los nueve puntos de ABC , entonces LM es mediatriz de OK' .

Sabemos que la reflejada de la recta de Euler respecto al lado LM del triángulo LMN pasará por K' . Sea F' el punto en el que tal reflejada cortará de nuevo a la circunferencia de los nueve puntos de ABC . Del Teorema 17 se sigue que las reflejadas de la recta de Euler con respecto a MN y NL también pasarán por F' .

Si D es el punto en el que la prolongación del segmento HF' interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC , sabemos entonces que $HF' = F'D$ (1).

Por otra parte, sea K el punto donde la altura CH del triángulo ABC interseca de nuevo a la circunferencia circunscrita de ABC . Sabemos entonces que AB es mediatriz de HK y que por lo tanto la reflejada de la recta de Euler con respecto al lado AB del triángulo ABC pasa por K .

Sea F el punto donde tal reflejada interseca de nuevo a la circunferencia circunscrita de ABC . Del Teorema 17 se sigue que las reflejadas de la recta de Euler con respecto a BC y CA también pasarán por F .

Si R es el punto donde HF interseca a la circunferencia de los nueve puntos de ABC , sabemos que $HR = RF$ (2).

También sabemos que como O' es el punto medio de HO se sigue que $HO' = O'O$ (3).

De (1), (2) y (3) se sigue que R, O' y F' son colineales y por lo tanto también lo son F, O y D , es decir, FD es un diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC .

Construyamos las siguientes líneas de Simson del triángulo ABC :

1. e y e' son las líneas de Simson de los puntos P y Q respectivamente y sabemos que se cortan en un punto sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC .
2. a es la línea de Simson del punto F .
3. b es la línea de Simson del punto D .

De lo anterior tenemos las siguientes observaciones:

- (a) Como F y D son puntos diametralmente opuestos tenemos que a y b son perpendiculares. De igual manera, como P y Q son diametralmente opuestos se tiene que e y e' son perpendiculares.
- (b) Sabemos que el ángulo entre a y e es igual a la mitad del ángulo central $\angle POF$, de manera análoga, el ángulo entre a y e' es igual a la mitad del ángulo central $\angle FOQ$. De lo anterior se sigue que $\angle ae + \angle ae' = 90^\circ$.
- (c) b pasa por F' .

Usando la primera parte del inciso (a) y el inciso (b) se sigue que el ángulo entre e y b es el mismo que el ángulo entre a y e' , por lo tanto $\angle ae + \angle eb = 90^\circ$ (4).

De manera análoga se ve que $\angle ae' + \angle e'b = 90^\circ$ (5).

Por lo tanto, usando la segunda parte del inciso (a), las ecuaciones (4) y (5) y el inciso (b) se tiene que el punto de intersección de e y e' es F' .

Finalmente, usando los Teoremas 14, 16 y 30, sabemos que la transformada isogonal de la recta de Euler con respecto al triángulo ABC es una hipérbola equilátera circunscrita a ABC que pasa por H y O y cuyas asíntotas son las rectas de Simson con respecto a P y Q , es decir, las asíntotas de la hipérbola equilátera son las líneas e y e' que construimos.

Como e y e' se intersecan en F' , se sigue que F' es el centro de la hipérbola y el teorema queda demostrado. ■

Capítulo 6.

Cónica de Evans.

Este capítulo es el más abstracto de los seis en el sentido de que deduciremos algunas propiedades analíticas de los dos puntos de Fermat, los dos puntos isodinámicos y los dos puntos de Napoleón. Introduciremos los conceptos de coordenadas baricéntricas y trilineales. Sin embargo, a pesar de lo abstracto, las propiedades analíticas que encontraremos se deducirán con geometría sintética. Nuestro objetivo es demostrar la bella propiedad de que los dos puntos de Fermat, los dos puntos isodinámicos y los dos puntos de Napoleón están en una cónica llamada *Cónica de Evans*.

6.1 Coordenadas Baricéntricas y Trilineales.

DEFINICIÓN 10: La posición de un punto P en el plano de un triángulo fijo ABC puede determinarse mediante los tres números $x_1 = \frac{(BCP)}{(ABC)}$, $x_2 = \frac{(CAP)}{(ABC)}$, $x_3 = \frac{(ABP)}{(ABC)}$, donde la notación entre paréntesis denota el área de un triángulo.

El triángulo ABC se llama triángulo de referencia, y los números (x_1, x_2, x_3) reciben el nombre de *coordenadas baricéntricas absolutas de P* .

DEFINICIÓN 11: La posición de un punto P en el plano de un triángulo fijo ABC , puede determinarse por las distancias α, β, γ de P a los lados BC, CA, AB del triángulo, siendo α, β, γ positivas o negativas según que P esté o no del mismo lado de BC que A , de CA que B y de AB que C , respectivamente. El triángulo ABC se llama triángulo de referencia y los números (α, β, γ) son las *coordenadas trilineales absolutas de P* .

TEOREMA 35: Sean (x_1, x_2, x_3) las coordenadas baricéntricas absolutas de un punto P con respecto a un triángulo de referencia ABC , entonces $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Es inmediato de la definición de coordenadas baricéntricas absolutas que

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{(BCP)}{(ABC)} + \frac{(CAP)}{(ABC)} + \frac{(ABP)}{(ABC)} = \frac{(BCP) + (CAP) + (ABP)}{(ABC)} = \frac{(ABC)}{(ABC)} = 1 \blacksquare$$

TEOREMA 36: Si Δ representa el área del triángulo de referencia ABC y a, b, c , las longitudes de los lados BC, CA, AB , entonces para un punto cualquiera P del plano del triángulo se tiene que $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 63)

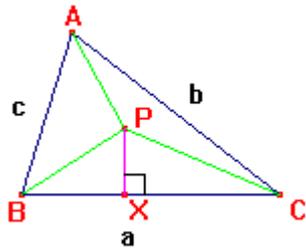


FIGURA 63

Sea α la longitud de la perpendicular PX desde P al lado a del triángulo ABC . Entonces

$$(PBC) = \frac{a\alpha}{2}.$$

De manera análoga se demuestra que $(PCA) = \frac{b\beta}{2}$ y $(PAB) = \frac{c\gamma}{2}$.

Sumando estas igualdades tenemos que

$$\frac{a\alpha}{2} + \frac{b\beta}{2} + \frac{c\gamma}{2} = (PBC) + (PCA) + (PAB) = (ABC) = \Delta$$

O equivalentemente

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta \blacksquare$$

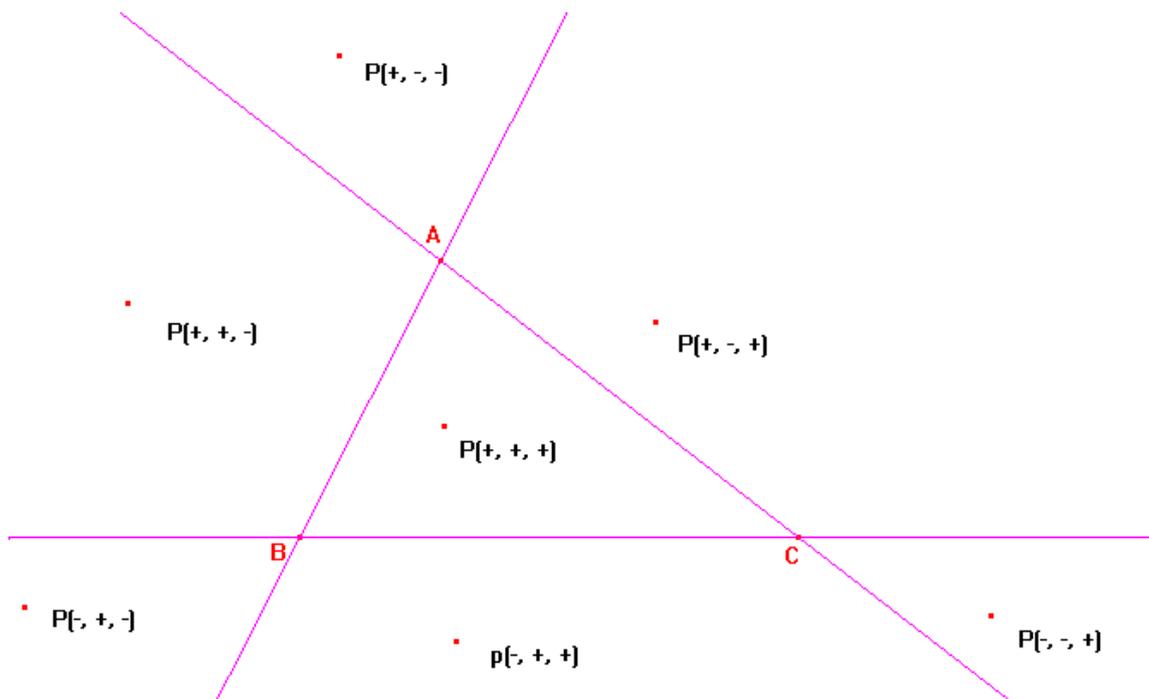


FIGURA 64

Según la definición de coordenadas trilineales, la figura 64 muestra los signos de las coordenadas trilineales absolutas en las siete regiones del plano que las rectas del triángulo de referencia determinan.

El siguiente teorema nos muestra cómo pasar de coordenadas baricéntricas a trilineales y viceversa.

TEOREMA 37: Si (α, β, γ) son las coordenadas trilineales absolutas y (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas baricéntricas absolutas del mismo punto P , entonces ambos tipos de coordenadas se relacionan por las ecuaciones $x_1 = \frac{a\alpha}{2\Delta}$, $x_2 = \frac{b\beta}{2\Delta}$, $x_3 = \frac{c\gamma}{2\Delta}$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 65)

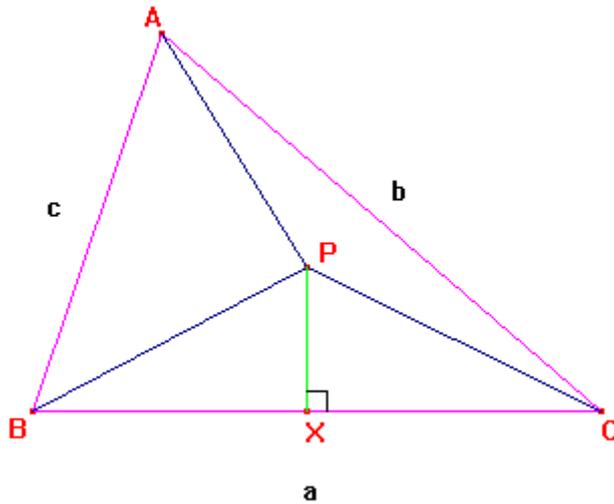


FIGURA 65

En la figura 65 sea $\alpha = PX$ la primera coordenada trilineal absoluta de P .

Por la definición de coordenadas baricéntricas absolutas tenemos que

$$x_1 = \frac{(BCP)}{(ABC)} \quad (1)$$

Pero

$$(BCP) = \frac{a\alpha}{2}$$

Sustituyendo en (1) tenemos que

$$x_1 = \frac{a\alpha}{2(ABC)} = \frac{a\alpha}{2\Delta}$$

De manera análoga se obtienen las otras igualdades. ■

6.2 Área de un triángulo. Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia en coordenadas trilineales. Equivalencias de coordenadas baricéntricas.

Recordemos que en un sistema oblicuo de coordenadas XY las coordenadas (x, y) de un punto P se determinan, como en las coordenadas rectangulares, mediante las proyecciones paralelas a los ejes (Ver Figura 66)

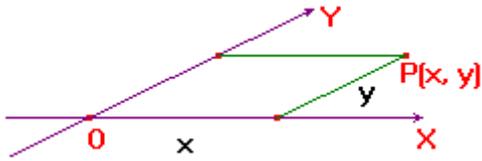


FIGURA 66

Enseguida vamos a deducir las coordenadas rectangulares a partir de las coordenadas oblicuas. Para esto, nos auxiliaremos de la siguiente figura (Figura 67):

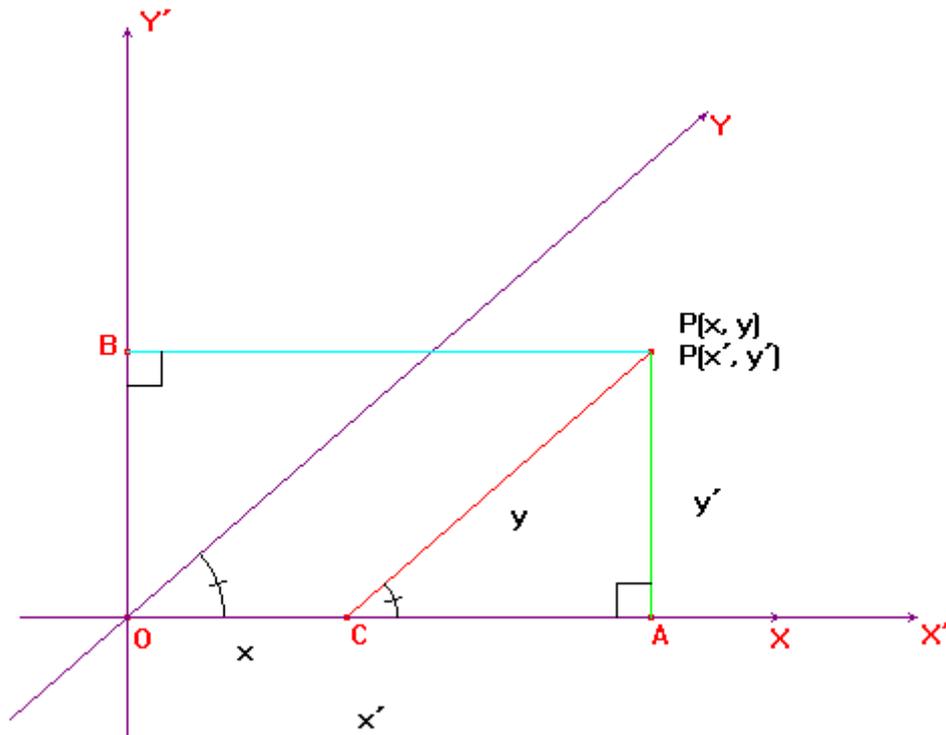


FIGURA 67

Hemos dibujado unos ejes de coordenadas oblicuos XY y unos ejes de coordenadas rectangulares $X'Y'$ los cuales tienen el mismo origen O y el eje X coincide con el eje X' .

Sean $x = OC$ y $y = CP$ las coordenadas oblicuas de un punto P respecto a los ejes oblicuos XY y $x' = OA$ y $y' = AP$ las coordenadas del mismo punto P respecto a los ejes rectangulares $X'Y'$. Sea también ω el ángulo entre los ejes oblicuos.

Observamos en el triángulo rectángulo PCA que

$$\text{sen } \omega = \frac{y'}{y}$$

Es decir, $y' = y \text{ sen } \omega$ (1).

También observemos que

$$CA = x' - x$$

Pero en el triángulo rectángulo PCA se observa que

$$\cos \omega = \frac{CA}{y}$$

Es decir, $CA = y \cos \omega$. Luego $x' - x = y \cos \omega$, por lo tanto

$$x' = x + y \cos \omega \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) nos permitirán transformar las coordenadas rectangulares en coordenadas oblicuas.

Del curso de Geometría Analítica 1 sabemos que si tenemos los puntos $P(x'_1, y'_1), Q(x'_2, y'_2), R(x'_3, y'_3)$, dados en coordenadas rectangulares $X'Y'$, entonces el área del triángulo PQR está dada por

$$(PQR) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Vamos ahora a encontrar el área del mismo triángulo cuando pasamos a un sistema oblicuo de coordenadas XY .

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en la fórmula anterior y desarrollando el determinante tenemos que

$$\begin{aligned} (PQR) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \cos \omega & y_1 \operatorname{sen} \omega & 1 \\ x_2 + y_2 \cos \omega & y_2 \operatorname{sen} \omega & 1 \\ x_3 + y_3 \cos \omega & y_3 \operatorname{sen} \omega & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [x_1 y_2 \operatorname{sen} \omega + y_1 y_2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega + x_2 y_3 \operatorname{sen} \omega + y_2 y_3 \operatorname{sen} \omega \cos \omega \\ &\quad + x_3 y_1 \operatorname{sen} \omega + y_3 y_1 \operatorname{sen} \omega \cos \omega - x_2 y_1 \operatorname{sen} \omega - y_1 y_2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega \\ &\quad - x_1 y_3 \operatorname{sen} \omega - y_1 y_3 \operatorname{sen} \omega \cos \omega - y_2 x_3 \operatorname{sen} \omega - y_2 y_3 \operatorname{sen} \omega \cos \omega] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega [x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto el área de un triángulo en coordenadas oblicuas es

$$(PQR) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

Vamos ahora a deducir a partir de las coordenadas trilineales absolutas las coordenadas oblicuas cuando colocamos, por ejemplo, el sistema oblicuo de tal manera que su origen es el vértice B del triángulo de referencia y los ejes coincidentes con los lados AB y BC . (Ver Figura 68)

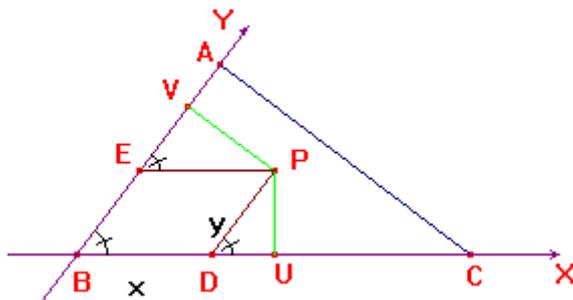


FIGURA 68

En la figura 68 sean $\alpha = PU$ y $\gamma = PV$ la primera y la tercera coordenadas trilineales absolutas de un punto P con respecto al triángulo de referencia ABC . Sean $x = BD = PE$, $y = PD$ las coordenadas oblicuas del mismo punto P con respecto a los ejes XY .

Observemos que como PD es paralela a AB y PE es paralela a BC entonces

$$\angle B = \angle VEP = \angle PDU$$

Entonces $\text{sen } B = \frac{\alpha}{y}$, o bien

$$y = \alpha \csc B \quad (1)$$

Además $\text{sen } B = \frac{y}{x'}$, o bien

$$x = \gamma \csc B \quad (2)$$

Podemos entonces utilizar las ecuaciones (1) y (2) para pasar de coordenadas oblicuas a coordenadas trilineales absolutas, por ejemplo, utilizando el sistema oblicuo de coordenadas de la figura 68 y haciendo $\omega = \angle B$ y sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en (*) encontraremos el área de un triángulo en coordenadas trilineales absolutas.

Así, si $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ son las coordenadas trilineales de P, Q, R entonces

$$\begin{aligned} (PQR) &= \frac{1}{2} \text{sen } B \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{sen } B \begin{vmatrix} \gamma_1 \csc B & \alpha_1 \csc B & 1 \\ \gamma_2 \csc B & \alpha_2 \csc B & 1 \\ \gamma_3 \csc B & \alpha_3 \csc B & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{sen } B [\alpha_2 \gamma_1 \csc^2 B + \gamma_2 \alpha_3 \csc^2 B + \gamma_3 \alpha_1 \csc^2 B - \alpha_1 \gamma_2 \csc^2 B \\ &\quad - \alpha_3 \gamma_1 \csc^2 B - \alpha_2 \gamma_3 \csc^2 B] \\ &= \frac{1}{2} \text{sen } B \csc^2 B [\alpha_2 \gamma_1 + \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 - \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_3 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_3] \\ &= \frac{1}{2} \csc B \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto el área de un triángulo en coordenadas trilineales es

$$(PQR) = \frac{1}{2} \csc B \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix}$$

O bien, si usamos la propiedad de que el determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta, podemos escribir la fórmula anterior como

$$(PQR) = \frac{1}{2} \csc B \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (**)$$

Si queremos que aparezcan las coordenadas trilineales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ utilizaremos el Teorema 36 pero antes de proceder recordaremos una demostración de la ley de los senos, de la cual existen muchas pero la que vamos a presentar nos será especialmente útil.

TEOREMA 38 (Ley de los senos) En todo triángulo ABC de lados a, b, c y respectivos ángulos opuestos A, B, C se tiene que $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d$, donde d es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 69)

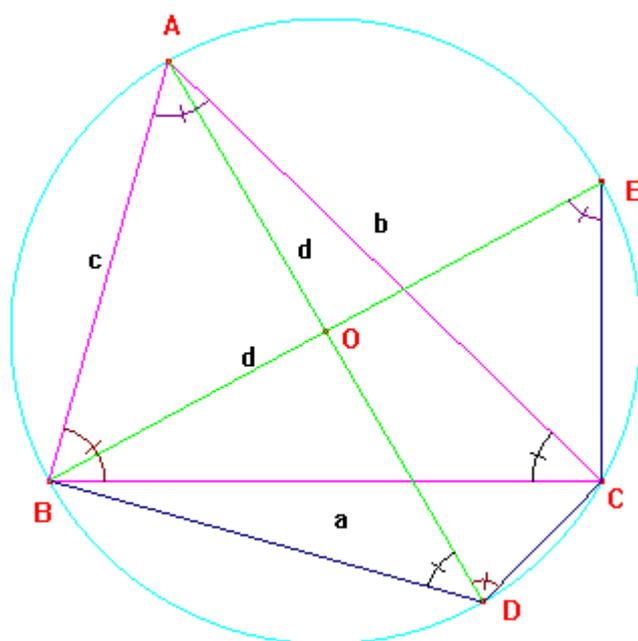


FIGURA 69

En la figura 69 tenemos un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Tracemos los diámetros $d = AD$ y $d = BE$.

Observemos que $\angle A = \angle BEC$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle ADB$ y que además los triángulos ABD y ADC son rectángulos porque AD y BE son diámetros.

Entonces

$$\sin B = \frac{b}{d}, \sin C = \frac{c}{d}, \sin A = \frac{a}{d}$$

Despejando d de cada una de las igualdades anteriores se sigue inmediatamente el resultado. ■

También utilizaremos el siguiente resultado:

TEOREMA 39. Si (α, β, γ) son las coordenadas trilineales de un punto P con respecto a un triángulo de referencia ABC , entonces $\alpha \operatorname{sen} A + \beta \operatorname{sen} B + \gamma \operatorname{sen} C = \frac{2\Delta}{d}$, donde Δ es el área del triángulo de referencia y d es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia.

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema 36 sabemos que $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta$.

Por la ley de los senos tenemos que $a = d \operatorname{sen} A, b = d \operatorname{sen} B, c = d \operatorname{sen} C$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación anterior tenemos que

$$ad \operatorname{sen} A + \beta d \operatorname{sen} B + \gamma d \operatorname{sen} C = 2\Delta$$

Entonces

$$\alpha \operatorname{sen} A + \beta \operatorname{sen} B + \gamma \operatorname{sen} C = \frac{2\Delta}{d} \quad \blacksquare$$

Ahora utilizaremos de nuevo la fórmula (**), haremos uso de una propiedad elemental de los determinantes que consiste en que al multiplicar una fila por un escalar el determinante no se altera.

Por la fórmula (**) tenemos que

$$(PQR) = \frac{1}{2} \operatorname{csc} B \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{csc} B \frac{2\Delta}{d} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{csc} B}{2} \frac{2\Delta}{d} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{2\Delta}{d} & \frac{2\Delta}{d} & \frac{2\Delta}{d} \end{vmatrix}$$

Por lo tanto

$$(PQR) = \frac{\operatorname{csc} B}{2} \frac{2\Delta}{d} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{2\Delta}{d} & \frac{2\Delta}{d} & \frac{2\Delta}{d} \end{vmatrix} \quad (***)$$

Como $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ son las coordenadas trilineales absolutas de los puntos P, Q, R respectivamente, entonces cumplen con el teorema 38, es decir,

$$\alpha_1 \operatorname{sen} A + \beta_1 \operatorname{sen} B + \gamma_1 \operatorname{sen} C = \frac{2\Delta}{d}$$

$$\alpha_2 \operatorname{sen} A + \beta_2 \operatorname{sen} B + \gamma_2 \operatorname{sen} C = \frac{2\Delta}{d}$$

$$\alpha_3 \operatorname{sen} A + \beta_3 \operatorname{sen} B + \gamma_3 \operatorname{sen} C = \frac{2\Delta}{d}$$

Sustituyendo estas igualdades en (***) y desarrollando el determinante tenemos que

$(PQR) =$

$$\begin{aligned} & \frac{\csc B}{2 \frac{2\Delta}{d}} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 \sin A + \beta_2 \sin B + \beta_3 \sin C & \alpha_2 \sin A + \beta_2 \sin B + \gamma_2 \sin C & \alpha_3 \sin A + \beta_3 \sin B + \gamma_3 \sin C \end{vmatrix} \\ &= \frac{\csc B}{2 \frac{2\Delta}{d}} [\alpha_1 \gamma_2 \alpha_3 \sin A + \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 \sin B + \alpha_1 \gamma_2 \gamma_3 \sin C + \alpha_3 \gamma_1 \alpha_2 \sin A + \alpha_3 \gamma_1 \beta_2 \sin B \\ &+ \alpha_3 \gamma_1 \gamma_2 \sin C + \alpha_2 \gamma_3 \alpha_1 \sin A + \alpha_2 \gamma_3 \beta_1 \sin B + \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1 \sin C - \alpha_2 \gamma_1 \alpha_3 \sin A \\ &- \alpha_2 \gamma_1 \beta_3 \sin B - \alpha_2 \gamma_1 \gamma_3 \sin C - \alpha_1 \gamma_3 \alpha_2 \sin A - \alpha_1 \gamma_3 \beta_2 \sin B - \alpha_1 \gamma_3 \gamma_2 \sin C \\ &- \alpha_3 \gamma_2 \alpha_1 \sin A - \alpha_3 \gamma_2 \beta_1 \sin B - \alpha_3 \gamma_2 \gamma_1 \sin C] = \\ & \frac{\csc B}{2 \frac{2\Delta}{d}} [\alpha_1 \gamma_2 \beta_3 \sin B + \alpha_3 \gamma_1 \beta_2 \sin B + \alpha_2 \gamma_3 \beta_1 \sin B - \alpha_2 \gamma_1 \beta_3 \sin B - \alpha_1 \gamma_3 \beta_2 \sin B \\ &- \alpha_3 \gamma_2 \beta_1 \sin B] \\ &= \frac{\csc B}{2 \frac{2\Delta}{d}} \sin B [\alpha_1 \gamma_2 \beta_3 + \alpha_3 \gamma_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_3 \beta_1 - \alpha_2 \gamma_1 \beta_3 - \alpha_1 \gamma_3 \beta_2 \\ &- \alpha_3 \gamma_2 \beta_1] = \frac{d}{4\Delta} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente:

TEOREMA 40. Si P, Q, R tienen coordenadas trilineales absolutas $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ y $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ respectivamente, y si d es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia, entonces el área del triángulo PQR está dada por

$$(PQR) = \frac{d}{4\Delta} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

COROLARIO 40.1. Sean P, Q, R tres puntos con coordenadas trilineales absolutas $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, respectivamente, son colineales si y sólo si el determinante del teorema 39 se anula.

TEOREMA 41. La ecuación en coordenadas trilineales de la circunferencia circunscrita al triángulo de referencia ABC es $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 70)

En la figura 70 tenemos un triángulo ABC con su circunferencia circunscrita y un punto P sobre ella.

Sean $\alpha = PX, \beta = PY, \gamma = PZ$ las coordenadas trilineales de P con respecto al triángulo de referencia ABC .

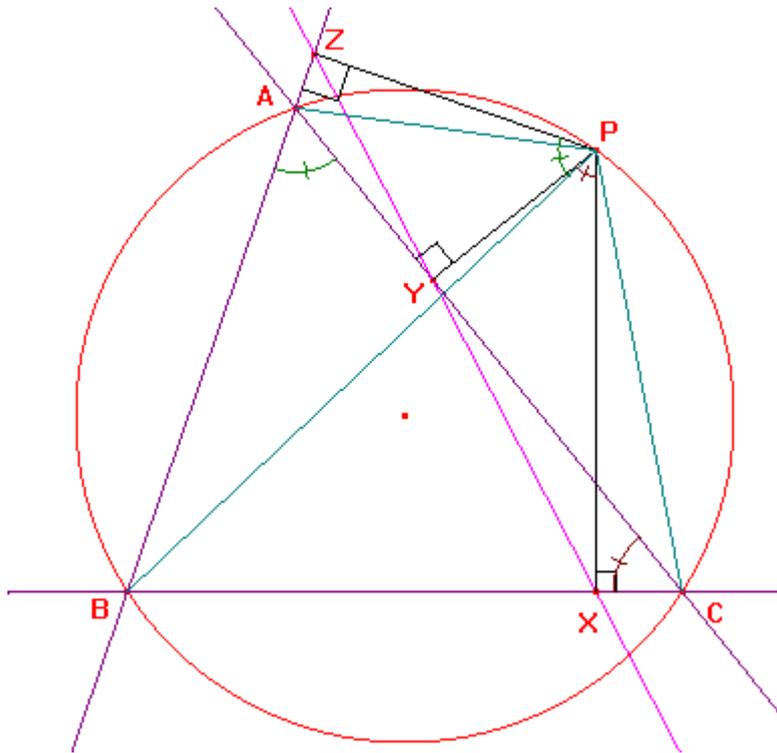


FIGURA 70

Por el Teorema de Simson sabemos que X, Y, Z son colineales y por la definición de coordenadas trilineales absolutas tenemos que la coordenada $\beta = PY$ es negativa.

Observemos también que como los cuadriláteros $AYPZ$ y $YXCP$ son cíclicos entonces $\angle A = \angle ZPY$ y $\angle C = \angle YPX$.

También, por la colinealidad de X, Y, Z tenemos que

$$(PZX) = (PZY) + (PYX) \quad (1)$$

Vamos a calcular cada una de estas áreas por separado considerando además que β es negativa:

$$(PZY) = -\frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{sen} A \quad (2)$$

$$(PYX) = -\frac{1}{2}\alpha\beta \operatorname{sen} C \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (PZX) &= \frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} (A + C) = \frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} (180^\circ - B) \\ &= \frac{1}{2}\alpha\gamma [\operatorname{sen} 180^\circ \cos B - \cos 180^\circ \operatorname{sen} B] = \frac{1}{2}\alpha\gamma - (-1)\operatorname{sen} B \\ &= \frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} B \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(PZX) = \frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} B \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) tenemos que

$$\frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{sen} A - \frac{1}{2}\alpha\beta \operatorname{sen} C$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{sen} A + \frac{1}{2}\alpha\gamma \operatorname{sen} B + \frac{1}{2}\alpha\beta \operatorname{sen} C = 0$$

$$\beta\gamma \operatorname{sen} A + \alpha\gamma \operatorname{sen} B + \alpha\beta \operatorname{sen} C = 0$$

$$a\beta\gamma \operatorname{sen} A + a\alpha\gamma \operatorname{sen} B + a\alpha\beta \operatorname{sen} C = 0$$

$$\frac{a\beta\gamma \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} + \frac{a\alpha\gamma \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} + \frac{a\alpha\beta \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = 0$$

Por la ley de los senos sabemos que $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Sustituyendo en la última igualdad tenemos que

$$a\beta\gamma + \frac{b\alpha\gamma \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} B} + \frac{c\alpha\beta \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} C} = 0$$

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0 \quad \blacksquare$$

Los siguientes teoremas muestran otra forma útil de calcular las coordenadas baricéntricas absolutas:

TEOREMA 42. Si las transversales AD, BE y CF del triángulo de referencia ABC son concurrentes un punto P , entonces las coordenadas baricéntricas absolutas de P son $x_1 = \frac{PD}{AD}$, $x_2 = \frac{DE}{BE}$ y $x_3 = \frac{PF}{CF}$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 71)

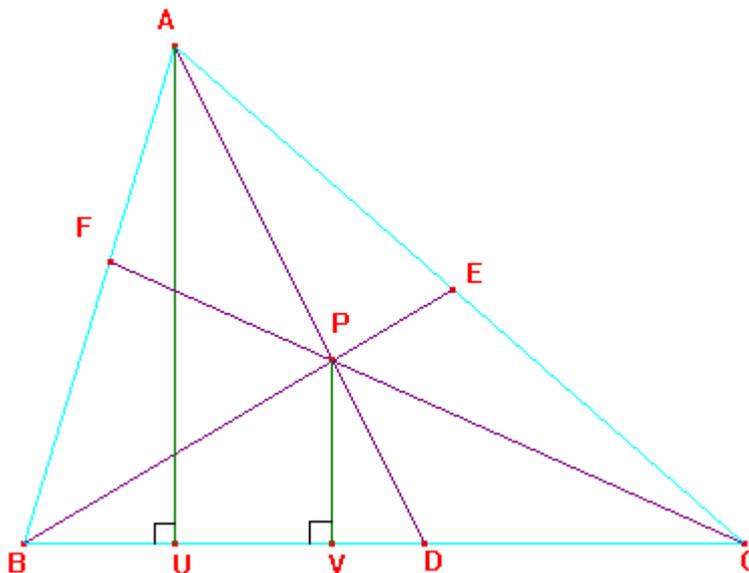


FIGURA 71

En la figura 71 tenemos que AD, BE, CF son concurrentes en P .

Sean AU la altura por A del triángulo ABC y PV la altura del triángulo PBC .

Sabemos por definición de coordenadas baricéntricas absolutas que $x_1 = \frac{(PBC)}{(ABC)}$ (1)

Pero $(PBC) = \frac{PV \cdot BC}{2}$ y $(ABC) = \frac{AU \cdot BC}{2}$. Sustituyendo en (1) tenemos que $x_1 = \frac{PV}{AU}$ (2).

Observemos que por construcción, los triángulos AUD y PVD son semejantes, entonces $\frac{PV}{AU} = \frac{PD}{AD}$. Comparando esta igualdad con (2) se sigue que $x_1 = \frac{PD}{AD}$.

De manera análoga se pueden demostrar las otras igualdades. ■

TEOREMA 43. Si las transversales AD, BE y CF del triángulo ABC son concurrentes un punto P , entonces $\frac{PD}{AD} = \frac{1}{1 + \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}}$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 72)

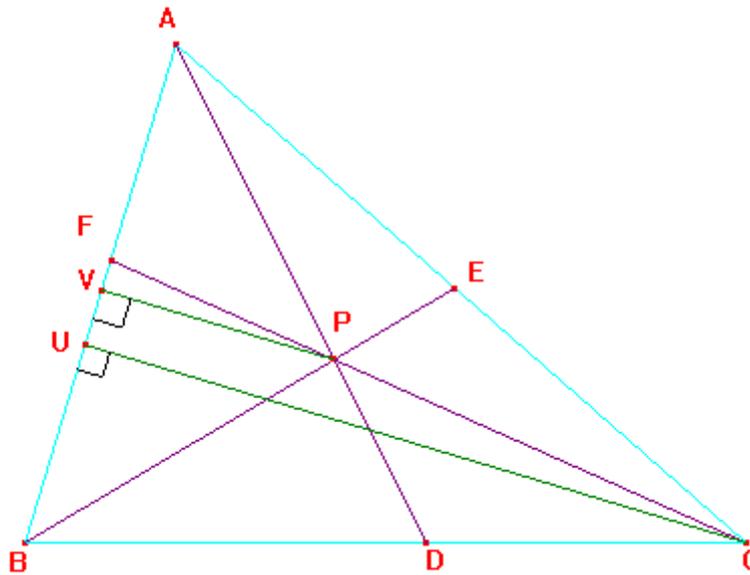


FIGURA 72

En la figura 72 tenemos que AD, BE, CF son concurrentes en P .

Sean CU la altura por C del triángulo ABC y PV la altura del triángulo PAB .

Tenemos las siguientes áreas de triángulos:

$$(CAF) = \frac{AF \cdot CU}{2} \quad (1)$$

$$(PAF) = \frac{AF \cdot PV}{2} \quad (2)$$

$$(CFB) = \frac{FB \cdot CU}{2} \quad (3)$$

$$(PFB) = \frac{FB \cdot PV}{2} \quad (4)$$

De (1) y (3) se sigue que

$$\frac{(CAF)}{(CFB)} = \frac{\frac{AF \cdot CU}{2}}{\frac{FB \cdot CU}{2}} = \frac{AF}{FB} \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{(CAF)}{(CFB)} \quad (5)$$

Análogamente se demuestra usando (2) y (4) que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{(PAF)}{(PFB)} \quad (6)$$

De (5) y (6) se sigue que

$$AF(CFB) = FB(CAF) \quad (7)$$

$$AF(PFB) = FB(PAF) \quad (8)$$

Restando (8) de (7) tenemos que

$$\begin{aligned} AF(CFB) - AF(PFB) &= FB(CAF) - FB(PAF) \Rightarrow AF[(CFB) - (PFB)] \\ &= FB[(CAF) - (PAF)] \Rightarrow AF(PBC) = FB(PCA) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{AF}{FB} = \frac{(PCA)}{(PBC)} \quad (9)$$

De manera análoga, considerando la altura por B del triángulo ABC y la altura del triángulo PCA podemos demostrar que

$$\frac{AE}{EC} = \frac{(PAB)}{(PBC)} \quad (10)$$

Sumando (9) y (10) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} &= \frac{(PCA)}{(PBC)} + \frac{(PAB)}{(PBC)} = \frac{(PCA) + (PAB)}{(PBC)} = \frac{(ABC) - (PBC)}{(PBC)} = \frac{(ABC)}{(PBC)} - \frac{(PBC)}{(PBC)} \\ &= \frac{(ABC)}{(PBC)} - 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{(ABC)}{(PBC)} - 1 \Rightarrow 1 + \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{(ABC)}{(PBC)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}} = \frac{(PBC)}{(ABC)} \quad (11) \end{aligned}$$

En el Teorema 42 vimos que

$$\frac{(PBC)}{(ABC)} = \frac{PD}{AD}$$

Sustituyendo en (11) se concluye finalmente que

$$\frac{PD}{AD} = \frac{1}{1 + \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{AC}} \quad \blacksquare$$

6.3 Coordenadas baricéntricas homogéneas y coordenadas trilineales homogéneas.

Hasta este momento hemos estudiado las coordenadas baricéntricas y trilineales absolutas, a continuación definiremos el concepto de coordenadas baricéntricas y trilineales homogéneas. En algunos cálculos, el empleo de este nuevo tipo de coordenadas resulta más ventajoso que el uso de las coordenadas absolutas, además simplifica las expresiones de muchos puntos notables del triángulo.

Diremos, como en la Geometría Analítica en \mathbb{R}^3 que dos puntos dados en coordenadas baricéntricas o trilineales son iguales si y sólo si sus entradas son iguales.

De lo anterior se motiva la siguiente:

DEFINICIÓN 12. Sean (u_1, u_2, u_3) un punto dado en coordenadas baricéntricas o trilineales. Diremos que (u_1, u_2, u_3) está relacionado con (u_1', u_2', u_3') y escribiremos $(u_1, u_2, u_3) \sim (u_1', u_2', u_3')$ si existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(u_1, u_2, u_3) = (tu_1', tu_2', tu_3')$.

TEOREMA 44. \sim es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN:

Reflexividad: Para $t = 1$ tenemos que $(u_1, u_2, u_3) = (u_1', u_2', u_3')$, y entonces $(u_1, u_2, u_3) \sim (u_1, u_2, u_3)$.

Simetría: Supongamos que $(u_1, u_2, u_3) \sim (u_1', u_2', u_3')$, entonces $(u_1, u_2, u_3) = (tu_1', tu_2', tu_3')$, es decir, $u_i = tu_i'$, luego, $u_i' = \frac{1}{t}u_i$. Finalmente se tiene que $(u_1', u_2', u_3') \sim (u_1, u_2, u_3)$.

Transitividad: Supongamos que $(u_1, u_2, u_3) \sim (u_1', u_2', u_3')$ y que además $(u_1', u_2', u_3') \sim (u_1'', u_2'', u_3'')$. Entonces $u_i = t_1 u_i'$ y $u_i' = t_2 u_i''$. Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $u_i = t_1 t_2 u_i''$. Hagamos $t = t_1 t_2$, entonces $u_i = t u_i''$, por lo tanto $(u_1, u_2, u_3) \sim (u_1'', u_2'', u_3'')$ \blacksquare

DEFINICIÓN 13. Si (u_1, u_2, u_3) es un punto en coordenadas baricéntricas o trilineales absolutas y además $(u_1, u_2, u_3) = (tu_1', tu_2', tu_3')$, diremos que los números u_1', u_2' y u_3' son las coordenadas *baricéntricas o trilineales homogéneas*, a t se le llama constante de proporcionalidad.

Para diferenciar entre coordenadas absolutas y homogéneas escribiremos como siempre las coordenadas absolutas entre paréntesis y separadas por una coma y las coordenadas homogéneas entre paréntesis y separadas mediante dos puntos. Así, por ejemplo, si (u_1, u_2, u_3) son las coordenadas absolutas, trilineales o baricéntricas, y si $(u_1, u_2, u_3) = (tu_1', tu_2', tu_3')$, entonces $(u_1' : u_2' : u_3')$ son las coordenadas homogéneas trilineales o baricéntricas.

La ventaja de las coordenadas homogéneas es que, por lo general, contienen expresiones mas sencillas y mas manejables como veremos más adelante que las coordenadas absolutas.

La desventaja es que en coordenadas homogéneas ya no son válidos (aunque si nos seguirán siendo útiles), por ejemplo, los Teoremas 35, 36, 37, 38, 43. Sin embargo, son válidos el Corolario 40.1 y el Teorema 40. El buen observador podrá darse cuenta de que los teoremas que ya no son válidos en coordenadas homogéneas son de carácter métrico, mientras que el Corolario 40.1 que trata de una colinealidad de puntos y el Teorema 41 que llega a una ecuación homogénea no son de carácter métrico.

Por lo tanto, cuando de trate de demostrar, por ejemplo, la colinealidad de puntos, el Teorema 44 muestra que podemos elegir, en lugar de las coordenadas absolutas de un punto, cualquier representante de éstas dado en coordenadas homogéneas.

TEOREMA 45. Si las coordenadas baricéntricas de un punto son proporcionales a (l, m, n) , entonces las coordenadas baricéntricas de su conjugado isogonal, para el triángulo de referencia, son proporcionales a $(\frac{a^2}{l}, \frac{b^2}{m}, \frac{c^2}{n})$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 73)

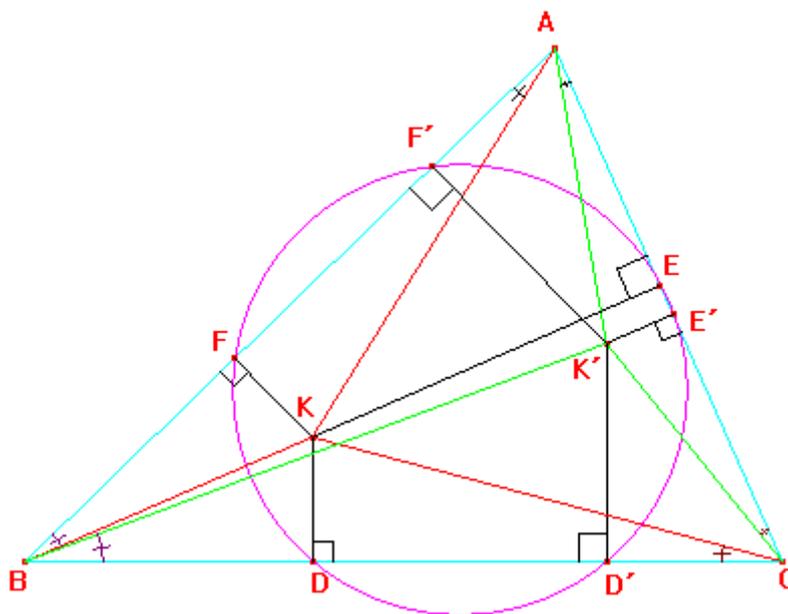


FIGURA 73

En la figura 73 hemos dibujado el triángulo de referencia ABC y dos puntos isogonales K y K' . Sean D, E, F los pies de las perpendiculares desde K a los lados del triángulo de referencia y D', E', F' los pies de las perpendiculares desde K' a los lados del triángulo de referencia.

Como K y K' son isogonales entonces tenemos las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle K'BD = \angle KFB, \angle KBD = \angle K'F'B$$

De estas igualdades y usando el hecho de que KD y $K'D'$ son perpendiculares a BC y KF y $K'F'$ son perpendiculares a AB se sigue que las parejas triángulos KBD , $K'BF'$ y $K'BD$, KBF son semejantes.

De lo anterior tenemos que

$$\frac{BD}{BF'} = \frac{K'D'}{KF} = \frac{K'B}{KB} \quad (1)$$

$$\frac{BD}{BF'} = \frac{KD}{K'F'} = \frac{KB}{K'B} \quad (2)$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que (l, m, n) son las coordenadas baricéntricas absolutas de K . Esto es, por definición de coordenadas absolutas de K que $l = \frac{(KBC)}{\Delta}$, $m = \frac{(KCA)}{\Delta}$, $n = \frac{(KAB)}{\Delta}$.

También por definición de coordenadas baricéntricas absolutas de K' tenemos que

$$x_1 = \frac{(K'BC)}{\Delta} = \frac{a \cdot K'D'}{2\Delta} \quad (3)$$

De (2) se sigue que

$$\frac{K'B}{KB} = \frac{K'F'}{KD}$$

Luego, por (1) se tiene que

$$\frac{K'F'}{KD} = \frac{K'D'}{KF} \quad (4)$$

Despejando $K'D'$ y sustituyendo en (3) tenemos que

$$x_1 = \frac{a \cdot KF \cdot K'F'}{2\Delta \cdot KD} \quad (5)$$

Observemos que

$$(KBC) = \frac{a \cdot KD}{2} \Rightarrow KD = \frac{2(KBC)}{a}$$

Sustituyendo en (5) tenemos que

$$x_1 = \frac{a \cdot KF \cdot K'F'}{2\Delta \frac{2(KBC)}{a}} = \frac{a^2 KF \cdot K'F'}{4\Delta(KBC)} = \frac{a^2 \Delta KF \cdot K'F'}{4\Delta^2(KBC)} = \frac{a^2}{l} \left(\frac{KF \cdot K'F'}{4\Delta^2} \right)$$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{a^2}{l} \left(\frac{KF \cdot K'F'}{4\Delta^2} \right)$$

De manera análoga, podemos deducir que

$$x_2 = \frac{b^2}{m} \left(\frac{KD \cdot K'D'}{4\Delta^2} \right) \quad y \quad x_3 = \frac{c^2}{n} \left(\frac{KE \cdot K'E'}{4\Delta^2} \right)$$

La igualdad (4) muestra que

$$KF \cdot K'F' = KD \cdot K'D'$$

Luego, puede demostrarse que

$$KF \cdot K'F' = KD \cdot K'D' = KE \cdot K'E'$$

De lo anterior se sigue que la constante de proporcionalidad es

$$x_1 = \frac{KF \cdot K'F'}{4\Delta^2}$$

Por lo tanto las coordenadas baricéntricas homogéneas de K' son

$$K' = \left(\frac{a^2}{l} : \frac{b^2}{m} : \frac{c^2}{n} \right) \quad \blacksquare$$

6.4 Coordenadas trilineales homogéneas de algunos puntos notables del triángulo.

A continuación encontraremos las coordenadas trilineales de algunos de los puntos notables del triángulo, incluyendo los puntos de Fermat, los puntos isodinámicos y los puntos de Napoleón.

TEOREMA 46. La coordenadas trilineales homogéneas del baricentro del triángulo de referencia son $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)$ o bien $(\csc A : \csc B : \csc C)$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 74)

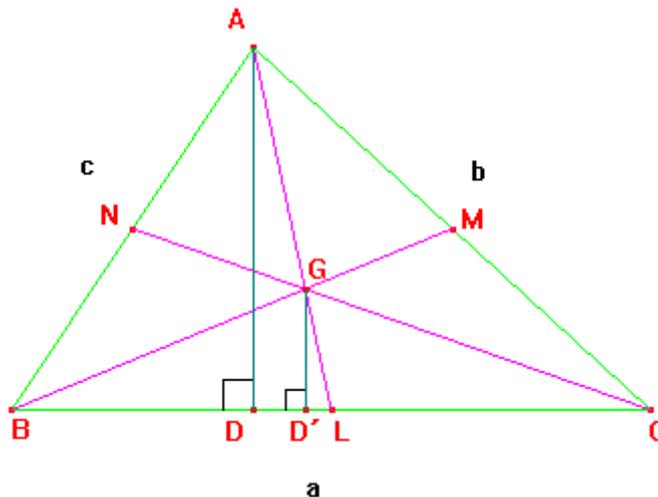


FIGURA 74

En la figura 74 tenemos el triángulo de referencia ABC con sus medianas AL, BM, CN y su baricentro G . Sean AD la altura por A del triángulo ABC y $\alpha = GD'$ la altura del triángulo GBC .

Tenemos por construcción que los triángulos $GD'L$ y ADL son semejantes, luego

$$\frac{GL}{AL} = \frac{\alpha}{AD} \quad (1)$$

Pero sabemos que por ser G el baricentro se tiene que $AL = 3GL$, entonces

$$\frac{GL}{AL} = \frac{GL}{3GL} = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo en (1) tenemos que

$$\frac{\alpha}{AD} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

Por otra parte el área del triángulo de referencia es

$$\Delta = (ABC) = \frac{a \cdot AD}{2}$$

Despejando AD y sustituyendo en (2) tenemos que

$$AD = \frac{2\Delta}{a} \Rightarrow \frac{\alpha}{\frac{2\Delta}{a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\Delta}{3a}$$

De manera análoga se demuestra que si β y γ son las otras coordenadas trilineales absolutas de G entonces

$$\beta = \frac{2\Delta}{3b} \quad y \quad \gamma = \frac{2\Delta}{3c}$$

Por lo tanto la constante de proporcionalidad es $\frac{2\Delta}{3}$ y las coordenadas trilineales homogéneas de G son

$$G = \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)$$

Para ver que también podemos elegir como representante de G a $(\csc A : \csc B : \csc C)$ recordemos que la ley de los senos dice

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

Entonces

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{sen } B}{b \text{ sen } A}, \quad \frac{1}{b} = \frac{\text{sen } C}{c \text{ sen } B}, \quad \frac{1}{c} = \frac{\text{sen } A}{a \text{ sen } C}$$

Por lo tanto es claro que la nueva constante de proporcionalidad es

$$t = \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas de G también pueden escribirse como

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen} A} : \frac{1}{\operatorname{sen} B} : \frac{1}{\operatorname{sen} C}\right) = (\operatorname{csc} A : \operatorname{csc} B : \operatorname{csc} C) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 47. Las coordenadas trilineales homogéneas del circuncentro del triángulo de referencia son $(\cos A : \cos B : \cos C)$

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 75)

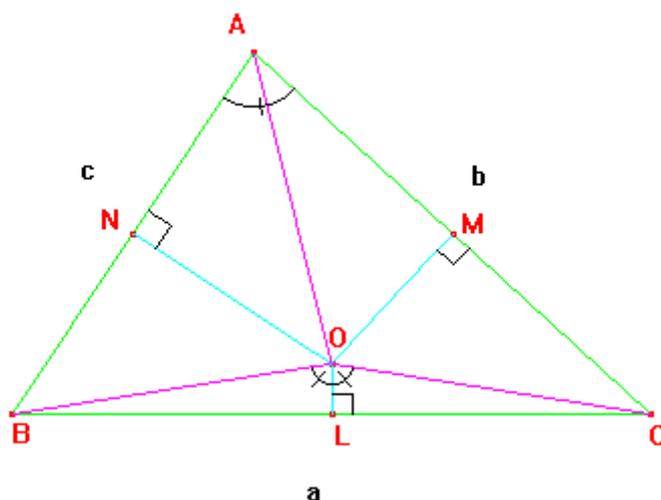


FIGURA 75

En la figura 75 tenemos el triángulo de referencia ABC con circuncentro O y mediatrices OL, OM, ON . Sea $\alpha = OL$ la primera coordenada trilineal absoluta de O .

Sabemos que el ángulo A es la mitad del ángulo central que subtende el mismo arco. Como O es el circuncentro, entonces el ángulo central es $\angle COB$, luego $\angle A = \frac{1}{2} \angle COB$.

Como el triángulo COB es isósceles y OL es mediatriz del triángulo ABC se sigue que $\angle A = \angle BOL = \angle LOC$.

De lo anterior y del triángulo rectángulo OLC tenemos que

$$\operatorname{ctg} A = \frac{OL}{LC} = \frac{\alpha}{\frac{a}{2}}$$

Despejando α tenemos que

$$\alpha = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} A = \frac{a \cos A}{2 \operatorname{sen} A}$$

De manera análoga, si β y γ son las otras coordenadas trilineales absolutas de O , se tiene que

$$\beta = \frac{b \cos B}{2 \operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{c \cos C}{2 \operatorname{sen} C}$$

Por la ley de los senos es claro que la constante de proporcionalidad es

$$t = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} C}$$

Por lo tanto, las coordenadas trilineales homogéneas del circuncentro son

$$(\cos A : \cos B : \cos C) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 48: Las coordenadas trilineales homogéneas del ortocentro del triángulo de referencia son $(\cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B)$, o bien $(\sec A : \sec B : \sec C)$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 76)

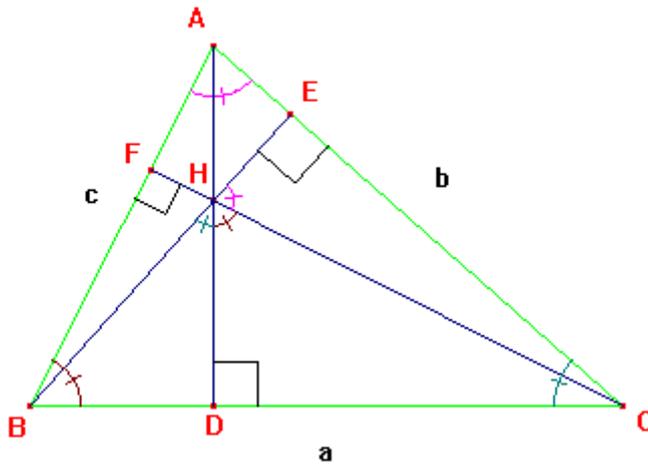


FIGURA 76

En la figura 76 tenemos el triángulo de referencia con sus alturas AD, BE, CF y su ortocentro H .

Sean $\alpha = HD, \beta = HE, \gamma = HF$ las coordenadas trilineales absolutas de H .

Sabemos que el cuadrilátero $AFHE$ es cíclico y que por lo tanto $\angle A + \angle FHE = 180^\circ$, pero $\angle FHE + \angle EHC = 180^\circ$, entonces $\angle A = \angle EHC$.

De manera análoga se demuestra que $\angle B = \angle DHC$ y $\angle C = \angle BHD$.

Observemos que los triángulos HBD y CBE son semejantes, esto es porque ambos tienen un ángulo recto y el ángulo $\angle C = \angle BHD$.

De lo anterior tenemos que

$$\frac{BH}{a} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH = \frac{a \cdot BD}{BE} \quad (1)$$

Para el triángulo rectángulo HBD se tiene que

$$\cos C = \frac{\alpha}{BH} \Rightarrow \alpha = \cos C \cdot BH \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\alpha = \cos C \frac{a \cdot BD}{BE} \quad (3)$$

Para el triángulo rectángulo ABD tenemos que

$$\cos B = \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = c \cos B$$

Sustituyendo en (3) se obtiene

$$\alpha = \cos C \frac{ac \cos B}{BE} \quad (4)$$

Finalmente, del triángulo rectángulo BEA se sigue que

$$\operatorname{sen} A = \frac{c}{BE}$$

Sustituyendo en (4) obtenemos la primera coordenada trilineal absoluta de H

$$\alpha = \frac{a \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A}$$

De manera análoga se obtienen las otras coordenadas trilineales absolutas de H

$$\beta = \frac{b \cos A \cos C}{\operatorname{sen} B} \quad y \quad \gamma = \frac{c \cos A \cos B}{\operatorname{sen} C}$$

Por la ley de los senos se observa que la constante de proporcionalidad es

$$t = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas de H son

$$(\cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B)$$

Para ver que también podemos elegir a $(\sec A : \sec B : \sec C)$ como representante de coordenadas trilineales homogéneas de H podemos escribir

$$\cos B \cos C = \frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos A}$$

$$\cos A \cos C = \frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos B}$$

$$\cos A \cos B = \frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos C}$$

De lo anterior se sigue que la nueva constante de proporcionalidad es

$$t = \cos A \cos B \cos C$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas de H son

$$\left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}\right) = (\sec A : \sec B : \sec C) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 49. Las coordenadas trilineales homogéneas del primer punto de Fermat son

$$(\csc(A + 60^\circ) : \csc(B + 60^\circ) : \csc(C + 60^\circ))$$

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 77)

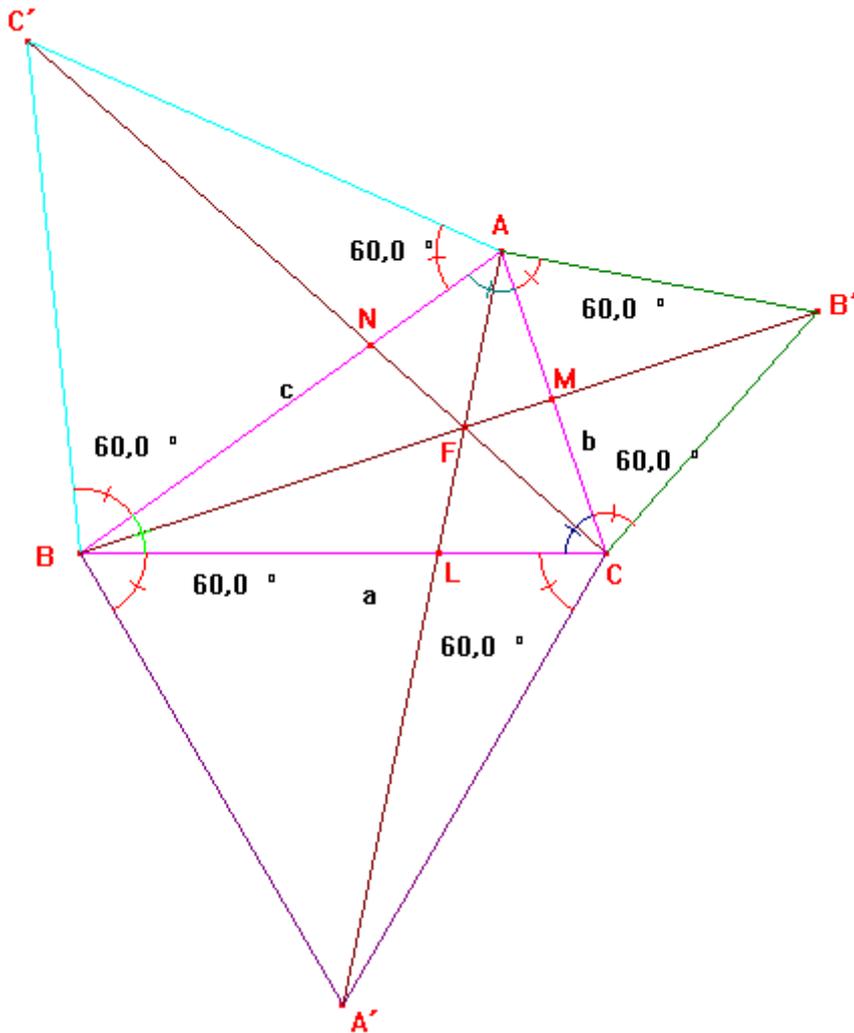


FIGURA 77

En la figura 77 hemos construido un triángulo ABC con triángulos equiláteros $AC'B$, $BA'C$ y $CB'A$, también hemos construido el primer punto de Fermat F del triángulo ABC .

Antes de encontrar las coordenadas trilineales homogéneas del primer punto de Fermat, será necesario encontrar primero las coordenadas baricéntricas absolutas del primer punto de Fermat, para lo cual haremos uso de los teoremas 42 y 43 y después del teorema 37 para transformar de coordenadas baricéntricas absolutas a trilineales absolutas.

Por el teorema 42 sabemos que la primera coordenada baricéntrica absoluta de F es

$$x_1 = \frac{FL}{AL}$$

Luego, por el teorema 43 se sigue que

$$\frac{FL}{AL} = \frac{1}{1 + \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}} \quad (1)$$

Por el teorema generalizado de la bisectriz aplicado al triángulo equilátero $AC'B$ y usando que $AC' = C'B$ se tiene

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC' \operatorname{sen} AC'N}{C'B \operatorname{sen} NC'B} = \frac{\operatorname{sen} AC'N}{\operatorname{sen} NC'B} \quad (2)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo $AC'C$ tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} AC'N}{b} = \frac{\operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{C'C} \Rightarrow \operatorname{sen} AC'N = \frac{b \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{C'C} \quad (3)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo $BC'C$ tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} NC'B}{a} = \frac{\operatorname{sen} (B + 60^\circ)}{C'C} \Rightarrow \operatorname{sen} NC'B = \frac{a \cdot \operatorname{sen} (B + 60^\circ)}{C'C} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) se sigue que

$$\frac{AN}{NB} = \frac{\frac{b \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{C'C}}{\frac{a \cdot \operatorname{sen} (B + 60^\circ)}{C'C}} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen} (B + 60^\circ)} \quad (5)$$

Ahora, aplicando el teorema generalizado de la bisectriz al triángulo $CB'A$ y usando que $CB' = B'A$ se tiene

$$\frac{AM}{MC} = \frac{B'A \operatorname{sen} AB'M}{CB' \operatorname{sen} MB'C} = \frac{\operatorname{sen} AB'M}{\operatorname{sen} MB'C} \quad (6)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo ABB' tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} AB'M}{c} = \frac{\operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{BB'} \Rightarrow \operatorname{sen} AB'M = \frac{c \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{BB'} \quad (7)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo CBB' tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen} MB'C}{a} = \frac{\operatorname{sen} (C + 60^\circ)}{BB'} \Rightarrow \operatorname{sen} MB'C = \frac{a \cdot \operatorname{sen} (C + 60^\circ)}{BB'} \quad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6) se sigue que

$$\frac{AM}{MC} = \frac{\frac{c \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{BB'}}{\frac{a \cdot \operatorname{sen} (C + 60^\circ)}{BB'}} = \frac{c \cdot \operatorname{sen} (A + 60^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen} (C + 60^\circ)} \quad (9)$$

Por lo tanto, sustituyendo (5) y (9) en (1) encontramos la primera coordenada baricéntrica absoluta de F

$$\frac{FL}{AL} = \frac{1}{1 + \frac{b \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)} + \frac{c \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(C + 60^\circ)}}$$

Haciendo las operaciones en esta igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{FL}{AL} &= \frac{1}{\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + b \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)\text{sen}(B + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)}} \\ &= \frac{1}{\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + b \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)\text{sen}(B + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)}} \\ &= \frac{1}{\text{sen}(A + 60^\circ)} \left[\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)}{\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)}{\text{sen}(A + 60^\circ)} + b \cdot \text{sen}(C + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)} \right] \\ &= \frac{1}{\text{sen}(A + 60^\circ)} \left[\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)}{\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + b \cdot \text{sen}(C + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ)}{\text{sen}(A + 60^\circ)}} \right] \\ &= \frac{1}{\text{sen}(A + 60^\circ)} \left[\frac{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + b \cdot \text{sen}(C + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ)} \right] \\ &= \frac{a}{\text{sen}(A + 60^\circ)} \left[\frac{\text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ)}{a \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(C + 60^\circ) + b \cdot \text{sen}(C + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ) + c \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)\text{sen}(A + 60^\circ)} \right] \end{aligned}$$

De manera análoga y por la simetría de las expresiones, se obtienen expresiones similares para las otras coordenadas baricéntricas absolutas de F . Hagamos igual a t a toda la expresión dentro del último corchete. Por lo tanto las coordenadas baricéntricas absolutas de F son

$$\left(\frac{at}{\text{sen}(A + 60^\circ)}, \frac{bt}{\text{sen}(B + 60^\circ)}, \frac{ct}{\text{sen}(C + 60^\circ)} \right)$$

Por el Teorema 37 sabemos que si $\frac{at}{\text{sen}(A + 60^\circ)}$ es la coordenada baricéntrica absoluta, entonces la coordenada trilineal absoluta es $\frac{at}{\text{sen}(A + 60^\circ)} = \frac{a\alpha}{2\Delta}$.

Por lo tanto, la coordenada trilineal absoluta es

$$\alpha = \frac{2\Delta t}{\text{sen}(A + 60^\circ)}$$

Por lo tanto, las coordenadas trilineales absolutas de F son

$$\left(\frac{2\Delta t}{\text{sen}(A + 60^\circ)}, \frac{2\Delta t}{\text{sen}(B + 60^\circ)}, \frac{2\Delta t}{\text{sen}(C + 60^\circ)} \right)$$

Para obtener las coordenadas trilineales homogéneas de F simplemente observamos que la constante de proporcionalidad es $t' = 2\Delta t$.

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas de F son

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\text{sen}(A + 60^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(B + 60^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(C + 60^\circ)} \right) \\ & = (\text{csc}(A + 60^\circ) : \text{csc}(B + 60^\circ) : \text{csc}(C + 60^\circ)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 50. Las coordenadas trilineales homogéneas del segundo punto de Fermat F' , con respecto al triángulo ABC son $(\text{csc}(A - 60^\circ) : \text{csc}(B - 60^\circ) : \text{csc}(C - 60^\circ))$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 78)

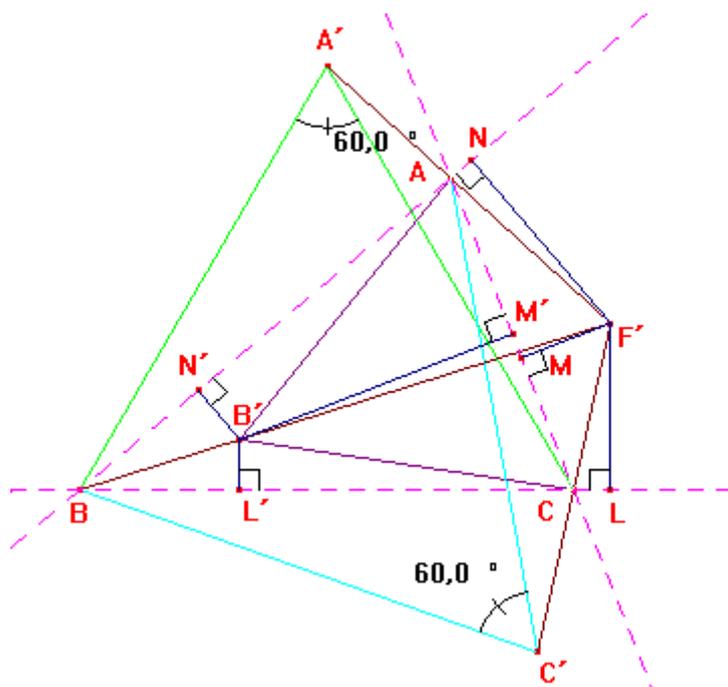


FIGURA 78

Recordemos que el segundo punto de Fermat F' puede construirse dibujando triángulos equiláteros interiormente sobre los lados del triángulo ABC .

En la figura 78 hemos construido el triángulo ABC con triángulos equiláteros $AC'B$, $BA'C$ y $CB'A$, también hemos construido el segundo punto de Fermat F' del triángulo ABC .

Por B' trazamos las perpendiculares BL' , BM' , BN' a los lados BC , CA , AB del triángulo ABC . Sean $\alpha = F'L$, $\beta = FM$, $\gamma = F'N$ las coordenadas trilineales absolutas de F' .

Observemos que por construcción, los triángulos $B'BL'$ y $F'BL$ son semejantes, entonces

$$\frac{\alpha}{B'L'} = \frac{BF'}{BB'} \quad (1)$$

También los triángulos $B'BN'$ y $F'BN$, entonces

$$\frac{\gamma}{B'N'} = \frac{BF'}{BB'} \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2) tenemos que

$$\frac{\frac{\alpha}{B'L'}}{\frac{\gamma}{B'N'}} = \frac{\frac{BF'}{BB'}}{\frac{BF'}{BB'}} \Rightarrow \frac{\alpha \cdot B'N'}{\gamma \cdot B'L'} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{B'L'}{B'N'} \quad (3)$$

Pero observemos en el triángulo rectángulo $B'LC'$ que $\angle B'CL' = \angle C - 60^\circ$ y en el triángulo rectángulo $B'NN'$ que $\angle B'NN' = \angle A - 60^\circ$, entonces

$$\text{sen}(A - 60^\circ) = \frac{B'N'}{B'A} \Rightarrow B'N' = B'A \text{sen}(A - 60^\circ) \quad (4)$$

También

$$\text{sen}(C - 60^\circ) = \frac{B'L'}{CB'} \Rightarrow B'L' = CB' \text{sen}(C - 60^\circ) \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3) y usando que $CB' = B'A$ porque el triángulo $CB'A$ es equilátero tenemos que

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{CB' \text{sen}(C - 60^\circ)}{B'A \text{sen}(A - 60^\circ)} = \frac{\text{sen}(C - 60^\circ)}{\text{sen}(A - 60^\circ)} \quad (6)$$

De manera análoga se obtienen las igualdades

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{sen}(B - 60^\circ)}{\text{sen}(C - 60^\circ)} \quad (7) \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{sen}(A - 60^\circ)}{\text{sen}(B - 60^\circ)} \quad (8)$$

De las igualdades (6), (7) y (8) se sigue que

$$\alpha \cdot \text{sen}(A - 60^\circ) = \beta \cdot \text{sen}(B - 60^\circ) = \gamma \cdot \text{sen}(C - 60^\circ) \quad (9)$$

O bien

$$\alpha = \frac{\beta \cdot \text{sen}(B - 60^\circ)}{\text{sen}(A - 60^\circ)}, \quad \beta = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(C - 60^\circ)}{\text{sen}(B - 60^\circ)}, \quad \gamma = \frac{\alpha \cdot \text{sen}(A - 60^\circ)}{\text{sen}(C - 60^\circ)}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales absolutas de F' son

$$\left(\frac{\beta \cdot \text{sen}(B - 60^\circ)}{\text{sen}(A - 60^\circ)}, \frac{\gamma \cdot \text{sen}(C - 60^\circ)}{\text{sen}(B - 60^\circ)}, \frac{\alpha \cdot \text{sen}(A - 60^\circ)}{\text{sen}(C - 60^\circ)} \right)$$

Para calcular las coordenadas trilineales homogéneas de F' las igualdades (9) nos dicen que la constante de proporcionalidad es

$$t = \alpha \cdot \text{sen}(A - 60^\circ) = \beta \cdot \text{sen}(B - 60^\circ) = \gamma \cdot \text{sen}(C - 60^\circ)$$

Por lo tanto, las coordenadas trilineales homogéneas de F' son

$$\left(\frac{1}{\text{sen}(A - 60^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(B - 60^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(C - 60^\circ)} \right) \\ = (\text{csc}(A - 60^\circ) : \text{csc}(B - 60^\circ) : \text{csc}(C - 60^\circ)) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 51. Las coordenadas trilineales homogéneas del primer punto isodinámico J con respecto al triángulo de referencia ABC son $(\text{sen}(A + 60^\circ) : \text{sen}(B + 60^\circ) : \text{sen}(C + 60^\circ))$

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema 12 sabemos que el primer punto de Fermat y el primer punto isodinámico son isogonales con respecto al triángulo ABC , y además, por el Teorema 45 sabemos que si (l, m, n) son las coordenadas baricéntricas de un punto, entonces las coordenadas baricéntricas de su isogonal son proporcionales a $\left(\frac{a^2}{l}, \frac{b^2}{m}, \frac{c^2}{n}\right)$.

En el Teorema 49 demostramos que las coordenadas baricéntricas absolutas de F son

$$\left(\frac{at}{\text{sen}(A + 60^\circ)}, \frac{bt}{\text{sen}(B + 60^\circ)}, \frac{ct}{\text{sen}(C + 60^\circ)} \right)$$

Aplicando el Teorema 45 podemos obtener un representante para las coordenadas baricéntricas homogéneas de J , a saber

$$\left(\frac{\frac{a^2}{at}}{\text{sen}(A + 60^\circ)} : \frac{\frac{b^2}{bt}}{\text{sen}(B + 60^\circ)} : \frac{\frac{c^2}{ct}}{\text{sen}(C + 60^\circ)} \right)$$

O bien

$$\left(\frac{a^2 \text{sen}(A + 60^\circ)}{at} : \frac{b^2 \text{sen}(B + 60^\circ)}{bt} : \frac{c^2 \text{sen}(C + 60^\circ)}{ct} \right)$$

Por el Teorema 37 sabemos que $x_1 = \frac{a\alpha}{2\Delta}$, entonces

$$\frac{a^2 \text{sen}(A + 60^\circ)}{at} = \frac{a\alpha}{2\Delta} \Rightarrow \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(A + 60^\circ)}{t} = \alpha$$

De manera análoga se demuestra que

$$\beta = \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(B + 60^\circ)}{t} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(C + 60^\circ)}{t}$$

Si elegimos a $t' = \frac{2\Delta}{t}$ como constante de proporcionalidad, podemos concluir que las coordenadas trilineales homogéneas de J son

$$(\text{sen}(A + 60^\circ) : \text{sen}(B + 60^\circ) : \text{sen}(C + 60^\circ)) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 52. Las coordenadas trilineales homogéneas del segundo punto isodinámico J' con respecto al triángulo ABC son $(\text{sen}(A - 60^\circ) : \text{sen}(B - 60^\circ) : \text{sen}(C - 60^\circ))$.

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que el segundo punto de Fermat y el segundo punto isodinámico son puntos conjugados isogonales con respecto al triángulo ABC . Entonces, para demostrar este teorema procederemos de manera similar que en el Teorema 51.

Por el Teorema 50 sabemos que la primera coordenada trilineal homogénea del segundo punto de Fermat es $\text{csc}(A - 60^\circ)$, por lo tanto podemos elegir como primera coordenada baricéntrica homogénea del segundo punto de Fermat a $x_1 = \frac{a \cdot \text{csc}(A - 60^\circ)}{2\Delta}$. De aquí que la primera coordenada baricéntrica homogénea del segundo punto isodinámico es

$$\frac{\frac{a^2}{a \cdot \text{csc}(A - 60^\circ)}}{2\Delta} = \frac{a^2 2\Delta}{a \cdot \text{csc}(A - 60^\circ)} = \frac{2a\Delta}{\text{csc}(A - 60^\circ)}$$

Por lo tanto la primera coordenada trilineal homogénea del segundo punto isodinámico es

$$\frac{2a\Delta}{\text{csc}(A - 60^\circ)} = \frac{a\alpha}{2\Delta} \Rightarrow \alpha = \frac{4\Delta^2}{\text{csc}(A - 60^\circ)}$$

De manera similar podemos obtener

$$\beta = \frac{4\Delta^2}{\text{csc}(B - 60^\circ)} \quad y \quad \gamma = \frac{4\Delta^2}{\text{csc}(C - 60^\circ)}$$

Haciendo $t = 4\Delta^2$, la constante de proporcionalidad se concluye que las coordenadas trilineales homogéneas del segundo punto isodinámico son

$$\left(\frac{1}{\text{csc}(A - 60^\circ)} : \frac{1}{\text{csc}(B - 60^\circ)} : \frac{1}{\text{csc}(C - 60^\circ)} \right) \\ = (\text{sen}(A - 60^\circ) : \text{sen}(B - 60^\circ) : \text{sen}(C - 60^\circ)) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 53. Las coordenadas trilineales homogéneas del primer punto de Napoleón, con respecto al triángulo ABC son $(\text{csc}(A + 30^\circ) : \text{csc}(B + 30^\circ) : \text{csc}(C + 30^\circ))$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 79)

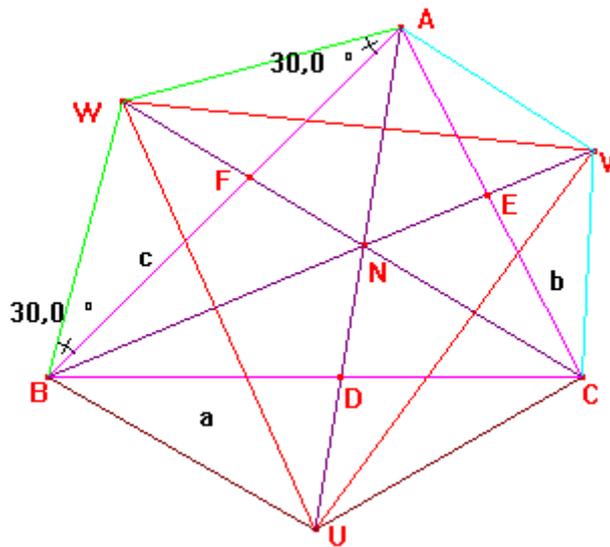


FIGURA 79

Recordemos que el primer punto de Napoleón es el centro de perspectiva del triángulo formado por los circuncentros de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre el triángulo ABC con el triángulo ABC .

Otra manera equivalente de construir el primer punto de Napoleón es como en la figura 79, donde hemos construido triángulos isósceles AWB, BUC, CVA sobre los lados AB, BC, CA del triángulo ABC . Los triángulos isósceles los dibujamos de tal manera que sus ángulos iguales son de 30° . Es claro que los puntos U, V, W son circuncentros de triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los lados del triángulo ABC . De esta manera, el primer punto de Napoleón N se obtiene como punto de intersección de los segmentos AU, BV, CW .

Por el teorema generalizado de la bisectriz aplicado al triángulo AWB y observando que $AW = WB$ tenemos que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AW \operatorname{sen}(AWF)}{WB \operatorname{sen}(FWB)} = \frac{\operatorname{sen}(AWF)}{\operatorname{sen}(FWB)} \quad (1)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo AWC tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(AWF)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{WC} \Rightarrow \operatorname{sen}(AWF) = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{WC} \quad (2)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo CWB tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(FWB)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B + 30^\circ)}{WC} \Rightarrow \operatorname{sen}(FWB) = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)}{WC} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se sigue que

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{b \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{WC}}{\frac{a \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)}{WC}} = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)} \quad (4)$$

Por el teorema generalizado de la bisectriz aplicado al triángulo CVA y observando que $CV = VA$ tenemos que

$$\frac{AE}{EC} = \frac{VA \operatorname{sen}(AVE)}{CV \operatorname{sen}(EVC)} = \frac{\operatorname{sen}(AVE)}{\operatorname{sen}(EVC)} \quad (5)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo AVB tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(AVE)}{c} = \frac{\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{BV} \Rightarrow \operatorname{sen}(AVE) = \frac{c \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{BV} \quad (6)$$

Por la ley de los senos aplicada al triángulo CVB tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(EVC)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(C + 30^\circ)}{BV} \Rightarrow \operatorname{sen}(EVC) = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(C + 30^\circ)}{BV} \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5) se sigue que

$$\frac{AE}{EC} = \frac{\frac{c \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{BV}}{\frac{a \cdot \operatorname{sen}(C + 30^\circ)}{BV}} = \frac{c \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen}(C + 30^\circ)} \quad (8)$$

Por el Teorema 43 se tiene que

$$\frac{AN}{ND} = \frac{1}{1 + \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}} \quad (9)$$

Sustituyendo (4) y (8) en (9) se sigue que

$$\frac{ND}{AD} = \frac{1}{1 + \frac{b \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)} + \frac{c \cdot \operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen}(C + 30^\circ)}}$$

Realizando las operaciones como en el Teorema 49 se obtiene que

$$\frac{ND}{AD} = \frac{a}{\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}$$

$$\left[\frac{\operatorname{sen}(B + 30^\circ)\operatorname{sen}(C + 30^\circ)\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{a \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)\operatorname{sen}(C + 30^\circ) + b \cdot \operatorname{sen}(C + 30^\circ)\operatorname{sen}(A + 30^\circ) + c \cdot \operatorname{sen}(B + 30^\circ)\operatorname{sen}(A + 30^\circ)} \right]$$

De manera análoga y por la simetría de las expresiones, se obtienen expresiones similares para las otras coordenadas baricéntricas absolutas de N . Hagamos igual a t a toda la expresión dentro del corchete. Por lo tanto las coordenadas baricéntricas absolutas de N son

$$\left(\frac{at}{\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}, \frac{bt}{\operatorname{sen}(B + 30^\circ)}, \frac{ct}{\operatorname{sen}(C + 30^\circ)} \right)$$

Por el Teorema 37 sabemos que si $\frac{at}{\operatorname{sen}(A+30^\circ)}$ es la coordenada baricéntrica absoluta, entonces la coordenada trilineal absoluta es $\frac{at}{\operatorname{sen}(A+30^\circ)} = \frac{a\alpha}{2\Delta}$.

Por lo tanto, la coordenada trilineal absoluta es

$$\alpha = \frac{2\Delta t}{\text{sen}(A + 30^\circ)}$$

Por lo tanto, las coordenadas trilineales absolutas de N son

$$\left(\frac{2\Delta t}{\text{sen}(A + 30^\circ)}, \frac{2\Delta t}{\text{sen}(B + 30^\circ)}, \frac{2\Delta t}{\text{sen}(C + 30^\circ)} \right)$$

Para obtener las coordenadas trilineales homogéneas de N simplemente observamos que la constante de proporcionalidad es $t' = 2\Delta t$.

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas de N son

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\text{sen}(A + 30^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(B + 30^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(C + 30^\circ)} \right) \\ & = (\text{csc}(A + 30^\circ) : \text{csc}(B + 30^\circ) : \text{csc}(C + 30^\circ)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 54. Las coordenadas trilineales homogéneas del segundo punto de Napoleón, con respecto al triángulo ABC son $(\text{csc}(A - 30^\circ) : \text{csc}(B - 30^\circ) : \text{csc}(C - 30^\circ))$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 80)

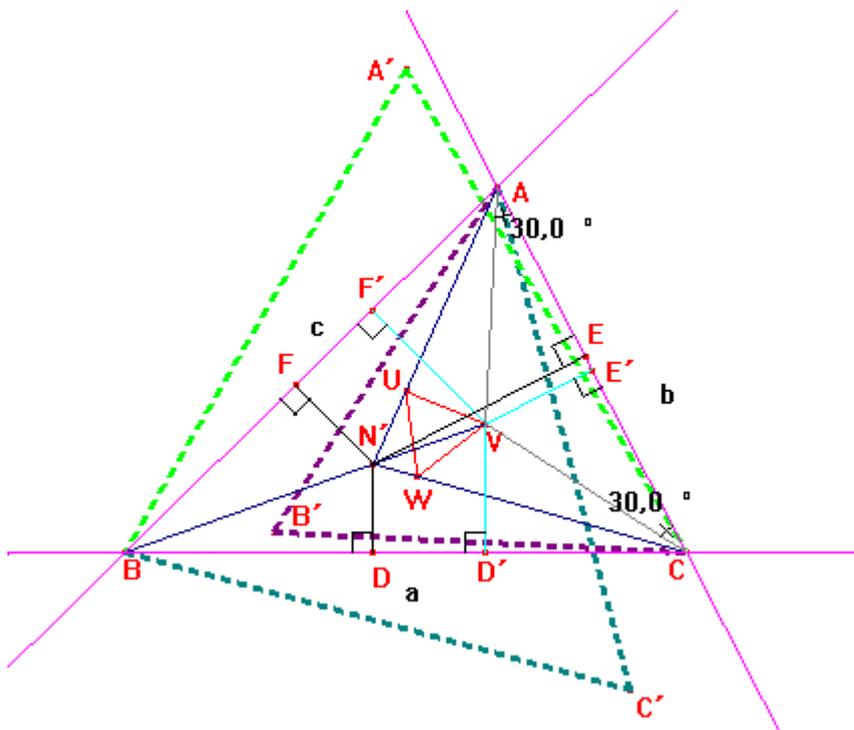


FIGURA 80

Sabemos que el segundo punto de Napoleón N' es el centro de perspectiva del triángulo ABC y del triángulo formado por los centros de los triángulos equiláteros dibujados interiormente sobre los lados del triángulo ABC .

En la figura 80, U es el centro del triángulo equilátero $A'BC$, V es el centro del triángulo equilátero $B'CA$ y W es el centro del triángulo equilátero $C'AB$.

Sean $\alpha = N'D$, $\beta = N'E$, $\gamma = N'F$ las coordenadas trilineales absolutas de N' con respecto al triángulo ABC . Sean VD' , VE' , CF' las perpendiculares desde V a los lados BC , CA , AB del triángulo ABC .

De la construcción anterior se tiene que las parejas de triángulos $N'BD$; VBD' y $N'FB$; $VF'B$ son semejantes y que además $\angle VCE' = \angle VAE' = 30^\circ$.

De la semejanza de los triángulos tenemos que

$$\frac{\alpha}{VD'} = \frac{BN'}{BV} \quad (1)$$

$$\frac{\gamma}{VF'} = \frac{BN'}{BV} \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2) tenemos que

$$\frac{\frac{\alpha}{VD'}}{\frac{\gamma}{VF'}} = \frac{\frac{BN'}{BV}}{\frac{BN'}{BV}} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot VF'}{\gamma \cdot VD'} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{VD'}{VF'} \quad (3)$$

Por otra parte tenemos que

$$\text{sen}(C - 30^\circ) = \frac{VD'}{CV} \Rightarrow VD' = CV \text{sen}(C - 30^\circ) \quad (4)$$

$$\text{sen}(A - 30^\circ) = \frac{VF'}{VA} \Rightarrow VF' = VA \text{sen}(A - 30^\circ) \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3) y observando que $CV = VA$ porque el triángulo CVA es isósceles se sigue que

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{CV \text{sen}(C - 30^\circ)}{VA \text{sen}(A - 30^\circ)} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\text{sen}(C - 30^\circ)}{\text{sen}(A - 30^\circ)} \quad (6)$$

De manera análoga se obtienen las igualdades

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{sen}(B - 30^\circ)}{\text{sen}(C - 30^\circ)} \quad (7) \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{sen}(A - 30^\circ)}{\text{sen}(B - 30^\circ)} \quad (8)$$

De las igualdades (6), (7) y (8) tenemos que

$$\alpha \cdot \text{sen}(A - 30^\circ) = \beta \cdot \text{sen}(B - 30^\circ) = \gamma \cdot \text{sen}(C - 30^\circ) \quad (9)$$

O bien

$$\alpha = \frac{\beta \cdot \text{sen}(B - 30^\circ)}{\text{sen}(A - 30^\circ)}, \quad \beta = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(C - 30^\circ)}{\text{sen}(B - 30^\circ)}, \quad \gamma = \frac{\alpha \cdot \text{sen}(A - 30^\circ)}{\text{sen}(C - 30^\circ)}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales absolutas de N' son

$$\left(\frac{\beta \cdot \text{sen}(B - 30^\circ)}{\text{sen}(A - 30^\circ)}, \frac{\gamma \cdot \text{sen}(C - 30^\circ)}{\text{sen}(B - 30^\circ)}, \frac{\alpha \cdot \text{sen}(A - 30^\circ)}{\text{sen}(C - 30^\circ)} \right)$$

Para calcular las coordenadas trilineales homogéneas de N' las igualdades (9) nos dicen que la constante de proporcionalidad es

$$t = \alpha \cdot \text{sen}(A - 30^\circ) = \beta \cdot \text{sen}(B - 30^\circ) = \gamma \cdot \text{sen}(C - 30^\circ)$$

Por lo tanto, las coordenadas trilineales homogéneas de N' son

$$\left(\frac{1}{\text{sen}(A - 30^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(B - 30^\circ)} : \frac{1}{\text{sen}(C - 30^\circ)} \right) \\ = (\text{csc}(A - 30^\circ) : \text{csc}(B - 30^\circ) : \text{csc}(C - 30^\circ)) \quad \blacksquare$$

6.5 Cónica de Evans.

A continuación enunciaremos y demostraremos el último teorema de esta tesis y su corolario. La demostración está a nuestro alcance usando el Corolario 40.1.

TEOREMA 55. Las ternas de puntos notables del triángulo $\{H, N, J\}$, $\{H, N', J'\}$, $\{O, F', N'\}$, $\{O, F, N\}$, $\{G, J, F'\}$, y $\{G, J', F\}$ son ternas de puntos colineales.

DEMOSTRACIÓN:

Veamos primero que $\{H, N, J\}$ es una terna colineal. Por el Corolario 40.1, veremos que el

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \\ \text{csc}(A + 30^\circ) & \text{csc}(B + 30^\circ) & \text{csc}(C + 30^\circ) \\ \text{sen}(A + 60^\circ) & \text{sen}(B + 60^\circ) & \text{sen}(C + 60^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Vamos a homogeneizar los elementos de la primera columna, los resultados que obtengamos serán análogos para las otras dos columnas.

Tenemos que

$$\cos B \cos C \sim -4 \cos B \cos C. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{csc}(A + 30^\circ) &= \frac{1}{\text{sen}(A + 30^\circ)} \sim \frac{\text{sen}(A + 30^\circ)\text{sen}(B + 30^\circ)\text{sen}(C + 30^\circ)}{\text{sen}(A + 30^\circ)} \\ &= \text{sen}(B + 30^\circ)\text{sen}(C + 30^\circ) \\ &= -\frac{1}{2}[\cos(B + C + 60^\circ) - \cos(B - C)] \sim \cos[(B + C) + 60^\circ] \\ &\quad - \cos(B - C) \\ &= \cos(B + C) \cos 60^\circ - \text{sen}(B + C)\text{sen} 60^\circ - \cos B \cos C - \text{sen} B \text{sen} C \\ &= \frac{1}{2} \cos(B + C) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(B + C) - \cos B \cos C - \text{sen} B \text{sen} C \\ &= \frac{1}{2} \cos B \cos C - \frac{1}{2} \text{sen} B \text{sen} C - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \text{sen} C \\ &\quad - \cos B \cos C - \text{sen} B \text{sen} C \sim \cos B \cos C - \text{sen} B \text{sen} C - \sqrt{3} \text{sen} B \cos C \\ &\quad - \sqrt{3} \cos B \text{sen} C - 2 \cos B \cos C - 2 \text{sen} B \text{sen} C \\ &= -\cos B \cos C - 3 \text{sen} B \text{sen} C - \sqrt{3} \text{sen} B \cos C - \sqrt{3} \cos B \text{sen} C. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\csc(A + 30^\circ) \sim -\cos B \cos C - 3\operatorname{sen}C\operatorname{sen}B - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C. \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A + 60^\circ) &= \operatorname{sen}([180^\circ - (B + C)] + 60^\circ) \\ &= \frac{\operatorname{sen}[(180^\circ - (B + C)] + \sqrt{3} \cos[(180^\circ - (B + C)]}{2} \sim \operatorname{sen}(B + C) \\ &\quad - \sqrt{3} \cos(B + C) = \operatorname{sen}B \cos C + \cos B \operatorname{sen}C \\ &\quad - \sqrt{3} \cos B \cos C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C \\ &\quad - 3 \cos B \cos C + 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{sen}(A + 60^\circ) \sim \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C - 3 \cos B \cos C + 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C. \quad (3)$$

Se sigue entonces que (1) es combinación lineal de (2) y (3) pues al sumar (2) y (3) se obtiene (1).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula.

Veamos que $\{G, J, F'\}$ es una terna colineal. Como en el caso anterior veremos que el

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}A} & \frac{1}{\operatorname{sen}B} & \frac{1}{\operatorname{sen}C} \\ \operatorname{sen}(A + 60^\circ) & \operatorname{sen}(B + 60^\circ) & \operatorname{sen}(C + 60^\circ) \\ \csc(A - 60^\circ) & \csc(B - 60^\circ) & \csc(C - 60^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Tenemos que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}A} \sim \frac{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A} = \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim -4\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\operatorname{sen}A} \sim -4\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \quad (4)$$

De la ecuación (3) tenemos que

$$\operatorname{sen}(A + 60^\circ) \sim -\sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C + 3 \cos B \cos C - 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C. \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\csc(A - 60^\circ) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(A - 60^\circ)} \sim \frac{\operatorname{sen}(A - 60^\circ)\operatorname{sen}(B - 60^\circ)\operatorname{sen}(C - 60^\circ)}{\operatorname{sen}(A - 60^\circ)} \\
&= \operatorname{sen}(B - 60^\circ)\operatorname{sen}(C - 60^\circ) \\
&= -\frac{1}{2}[\cos(B + C - 120^\circ) - \cos(B - C)] \sim \cos[(B + C) - 120^\circ] \\
&\quad - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= \cos(B + C) \cos 120^\circ + \operatorname{sen}(B + C)\operatorname{sen}120^\circ \\
&\quad - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= -\frac{1}{2}\cos(B + C) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(B + C) - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= -\frac{1}{2}\cos B \cos C + \frac{1}{2}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}B \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B \operatorname{sen}C \\
&\quad - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim -\cos B \cos C + \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C \\
&\quad + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C - 2\cos B \cos C - 2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = \\
&\quad -3\cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\csc(A - 60^\circ) \sim -3\cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C. \quad (6)$$

Se sigue entonces que (4) es combinación lineal de (5) y (6) pues al sumar (5) y (6) se obtiene (6).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula.

Veamos que $\{O, F, N\}$ es una terna colineal. Como en el caso anterior veremos que el

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \csc(A + 60^\circ) & \csc(B + 60^\circ) & \csc(B + 60^\circ) \\ \csc(A + 30^\circ) & \csc(B + 30^\circ) & \csc(C + 30^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Tenemos que

$$\cos A = \cos[180^\circ - (B + C)] = -\cos(B + C) \sim 2\cos(B + C).$$

Por lo tanto

$$\cos A \sim 2\cos(B + C) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\csc(A + 60^\circ) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(A + 60^\circ)} \sim \frac{\operatorname{sen}(A + 60^\circ)\operatorname{sen}(B + 60^\circ)\operatorname{sen}(C + 60^\circ)}{\operatorname{sen}(A + 60^\circ)} \\
&= \operatorname{sen}(B + 60^\circ)\operatorname{sen}(C + 60^\circ) \\
&= -\frac{1}{2}[\cos(B + C + 120^\circ) - \cos(B - C)] \sim \cos[(B + C) + 120^\circ] \\
&\quad - \cos(B - C) \\
&= \cos(B + C)\cos 120^\circ - \operatorname{sen}(B + C)\operatorname{sen}120^\circ - \cos B \cos C \\
&\quad - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= -\frac{1}{2}\cos(B + C) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(B + C) - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= -\frac{1}{2}\cos B \cos C + \frac{1}{2}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B \operatorname{sen}C \\
&\quad - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim -\cos B \cos C + \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&\quad - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C - 2\cos B \cos C - 2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim \\
&\quad - 3\cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C \sim \\
&\quad + 3\cos B \cos C + \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\csc(A + 60^\circ) \sim 3\cos B \cos C + \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C \quad (8).$$

De la ecuación (2) tenemos que

$$\csc(A + 30^\circ) \sim -\cos B \cos C - 3\operatorname{sen}C\operatorname{sen}B - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C. \quad (9).$$

Se sigue entonces que (7) es combinación lineal de (8) y (9) pues al sumar (8) y (9) se obtiene (7).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula.

Veamos que $\{O, F', N'\}$ es una terna colineal. Como en el caso anterior veremos que el

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \csc(A - 60^\circ) & \csc(B - 60^\circ) & \csc(C - 60^\circ) \\ \csc(A - 30^\circ) & \csc(B - 30^\circ) & \csc(C - 30^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Tenemos por la ecuación (7) que

$$\cos A \sim -2\cos(B + C) \quad (10)$$

También por la ecuación (6) tenemos que

$$\csc(A - 60^\circ) \sim -3\cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C. \quad (11)$$

Para $\csc(A - 30^\circ)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\csc(A - 30^\circ) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(A - 30^\circ)} \sim \frac{\operatorname{sen}(A - 30^\circ)\operatorname{sen}(B - 30^\circ)\operatorname{sen}(C - 30^\circ)}{\operatorname{sen}(A - 30^\circ)} \\
&= \operatorname{sen}(B - 30^\circ)\operatorname{sen}(C - 30^\circ) \\
&= -\frac{1}{2}[\cos(B + C - 60^\circ) - \cos(B - C)] \sim \cos[(B + C) - 60^\circ] \\
&\quad - \cos(B - C) \\
&= \cos(B + C) \cos 60^\circ + \operatorname{sen}(B + C)\operatorname{sen}60^\circ - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \\
&= \frac{1}{2}\cos B \cos C - \frac{1}{2}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}B \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B \operatorname{sen}C \\
&\quad - \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \sim \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C \\
&\quad + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C - 2\cos B \cos C - 2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = -\cos B \cos C \\
&\quad - 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C \sim \cos B \cos C \\
&\quad + 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\csc(A - 30^\circ) \sim \cos B \cos C + 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C. \quad (12)$$

Se sigue entonces que (10) es combinación lineal de (11) y (12) pues al sumar (11) y (12) se obtiene (10).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula.

Veamos que $\{H, N', J'\}$ es una terna colineal. Como en el caso anterior veremos que el

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \\ \csc(A - 30^\circ) & \csc(B - 30^\circ) & \csc(C - 30^\circ) \\ \operatorname{sen}(A - 60^\circ) & \operatorname{sen}(B - 60^\circ) & \operatorname{sen}(C - 60^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Por la ecuación (1) se sigue que

$$\cos B \cos C \sim 4 \cos B \cos C. \quad (13)$$

También por la ecuación (12) tenemos que

$$\csc(A - 30^\circ) \sim \cos B \cos C + 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C. \quad (14)$$

Para $\operatorname{sen}(A - 60^\circ)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A - 60^\circ) &= \operatorname{sen}[180^\circ - (B + C) - 60^\circ] = \operatorname{sen}[120^\circ - (B + C)] \\
&= \operatorname{sen}120^\circ \cos(B + C) - \cos 120^\circ \operatorname{sen}(B + C) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \frac{1}{2}\operatorname{sen}B \cos C \\
&\quad + \frac{1}{2}\cos B \operatorname{sen}C \sim \sqrt{3}\cos B \cos C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \operatorname{sen}B \cos C \\
&\quad + \cos B \operatorname{sen}C \sim 3\cos B \cos C - 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C \\
&\quad + \sqrt{3}\cos B \operatorname{sen}C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{sen}(A - 60^\circ) \sim 3\cos B \cos C - 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C \quad (15)$$

Se sigue entonces que (13) es combinación lineal de (14) y (15) pues al sumar (14) y (15) se obtiene (13).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula.

Por último, veamos que $\{G, J', F\}$ es una terna colineal. Como en el caso anterior veremos

$$\text{que el determinante } \begin{vmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}A} & \frac{1}{\operatorname{sen}B} & \frac{1}{\operatorname{sen}C} \\ \operatorname{sen}(A - 60^\circ) & \operatorname{sen}(B - 60^\circ) & \operatorname{sen}(C - 60^\circ) \\ \operatorname{csc}(A + 60^\circ) & \operatorname{csc}(B + 60^\circ) & \operatorname{csc}(C + 60^\circ) \end{vmatrix} \text{ se anula.}$$

Por la ecuación (4) se tiene que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}A} \sim -4\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \quad (16)$$

De la ecuación (15) se sigue que

$$\operatorname{sen}(A - 60^\circ) \sim 3\cos B \cos C - 3\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C + \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C \quad (17)$$

Por último, de la ecuación (8) se sigue que

$$\operatorname{csc}(A + 60^\circ) \sim -3 \cos B \cos C - \operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \sqrt{3}\operatorname{sen}B \cos C - \sqrt{3} \cos B \operatorname{sen}C \quad (18)$$

Se sigue entonces que (16) es combinación lineal de (17) y (18) pues al sumar (17) y (18) se obtiene (16).

Como se obtienen resultados análogos para las otras dos columnas, se sigue por lo tanto que la primera fila del determinante es combinación lineal de las otras dos filas. Luego, el determinante se anula. ■

COROLARIO 55.1. (Ver Figura 81). Los dos puntos de Fermat, los dos puntos isodinámicos y los dos puntos de Napoleón están en una cónica llamada *Cónica de Evans*. La cónica de Evans tiene como una de sus rectas de Pascal a la recta de Euler del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 81)

Por el teorema anterior, probamos que las ternas de puntos notables del triángulo $\{H, N, J\}$, $\{H, N', J'\}$, $\{O, F', N'\}$, $\{O, F, N\}$, $\{G, J, F'\}$ y $\{G, J', F\}$ son ternas de puntos colineales, que tomadas de dos en dos, en ese orden, se intersecan en H , O y G , respectivamente.

Por lo tanto, por el Teorema de Pascal y utilizando el hecho de que H , O y G están en la recta de Euler tenemos probado el corolario. ■

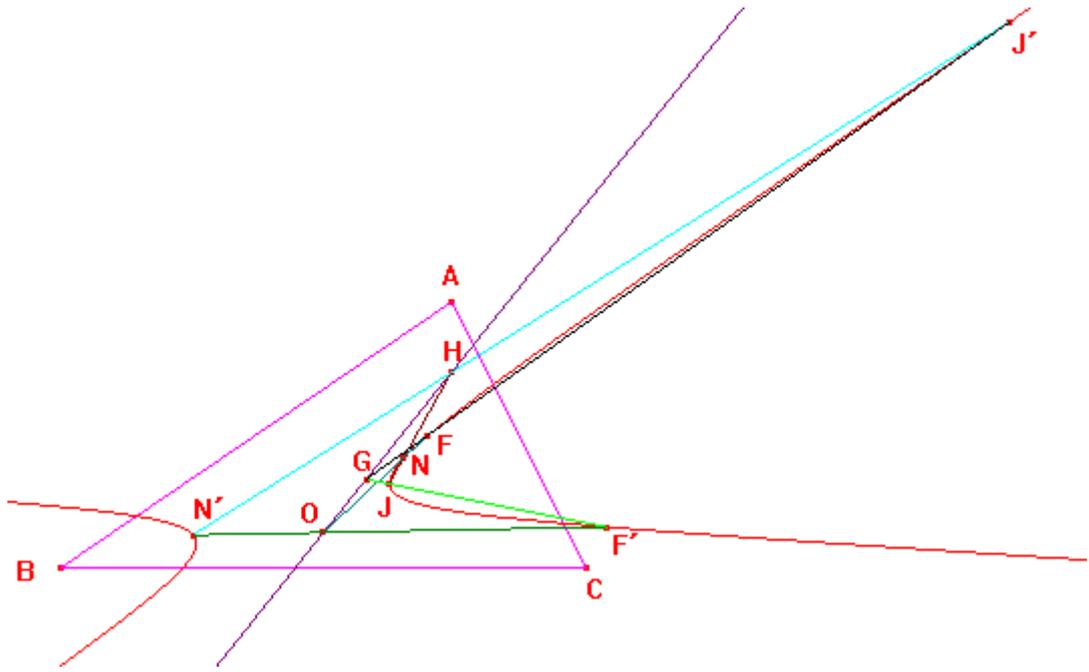


FIGURA 81

Apéndice A. Recta de Euler vía coordenadas trilineales.

A continuación daremos una prueba de que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo ABC están alineados usando las coordenadas trilineales.

TEOREMA A1: En un triángulo ABC el ortocentro H , el baricentro G y el circuncentro O están alineados. La recta en que están se conoce como Recta de Euler del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN:

El ortocentro tiene coordenadas trilineales homogéneas

$$(\cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B)$$

El baricentro tiene coordenadas trilineales homogéneas

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen} A} : \frac{1}{\operatorname{sen} B} : \frac{1}{\operatorname{sen} C}\right) \sim (\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B) \sim$$

$$(-\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C : -\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C : -\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)$$

El circuncentro tiene coordenadas trilineales homogéneas

$$(\cos A : \cos B : \cos C)$$

$$= (\cos(180^\circ - [B + C]) : \cos(180^\circ - [A + C]) : \cos(180^\circ - [A + B]))$$

$$= (-\cos[B + C] : -\cos[A + C] : -\cos[A + B]) \sim (\cos[B + C] : \cos[A + C] : \cos[A + B])$$

Por lo tanto

$$\begin{vmatrix} \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \\ \frac{1}{\operatorname{sen} A} & \frac{1}{\operatorname{sen} B} & \frac{1}{\operatorname{sen} C} \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \\ -\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C & -\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C & -\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ \cos[B + C] & \cos[A + C] & \cos[A + B] \end{vmatrix}$$

Por la identidad trigonométrica $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, observamos que en el segundo determinante, la tercera fila es suma de la primera con la segunda, y por lo tanto ese determinante se anula y H , G y O están alineados. ■

Apéndice B. Coordenadas trilineales homogéneas de otros puntos notables del triángulo.

Hasta aquí hemos estudiado los puntos notables del triángulo necesarios para nuestro estudio de las secciones cónicas. Ahora estudiaremos las coordenadas trilineales de algunos otros puntos notables igualmente importantes.

Comenzaremos con el siguiente:

TEOREMA B1: Las líneas que unen los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los vértices opuestos del triángulo ABC son concurrentes. El punto de concurrencia se llama punto de Gergonne del triángulo ABC y se denotará por Ge .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 1B)

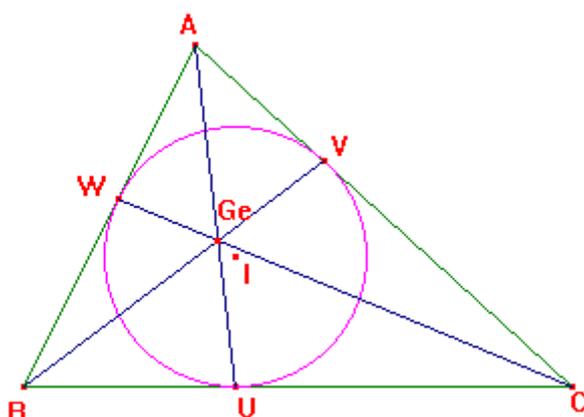


FIGURA 1B

En la figura 1B tenemos un triángulo ABC con su circunferencia inscrita cuyos puntos de contacto con los lados AB , BC y CA del triángulo ABC son U , V y W .

Sabemos por propiedades de las tangentes a una circunferencia desde un punto dado que

$VA = AW$, $WB = BU$ y $UC = CV$. Luego, por el teorema de Ceva se sigue que

$$\frac{AW}{WB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{AW}{BU} \cdot \frac{BU}{CV} \cdot \frac{CV}{AW} = 1$$

Por lo tanto las cevianas AU , BV y CW son concurrentes en Ge . ■

Para calcular las coordenadas trilineales del punto de Gergonne necesitamos primero el siguiente:

TEOREMA B2: Si U , V y W son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita sobre los lados BC , CA y AB del triángulo ABC , entonces $AW = s - a$, $BU = s - b$ y $UC = s - c$, donde s es el semiperímetro del triángulo ABC . ($s = \frac{a+b+c}{2}$).

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 2B)

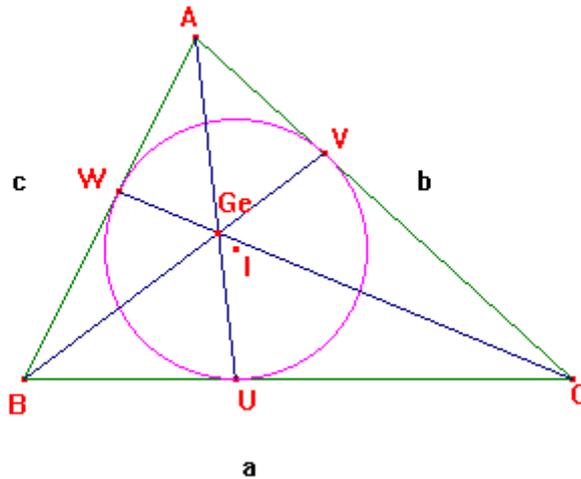


FIGURA 2B

En la figura 2B sean U, V y W los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo ABC .

Por lo que observamos en el teorema anterior sabemos que

$$AW = VA, WB = BU \text{ y } UC = CV.$$

Entonces

$$2AW + 2BU + 2UC = a + b + c = 2s,$$

es decir,

$$AW + BU + UC = s.$$

Pero

$$BU + UC = a$$

Por lo tanto

$$AW = s - a.$$

Las otras igualdades se obtienen de manera análoga. ■

TEOREMA B3: Las coordenadas trilineales homogéneas del punto de Gergonne son $(\sec^2 \frac{A}{2} : \sec^2 \frac{B}{2} : \sec^2 \frac{C}{2})$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figuras 3B y 3B')

Calcularemos primero las coordenadas baricéntricas homogéneas $(x_1 : x_2 : x_3)$ de Ge .

Calcularemos siempre las primeras coordenadas, las otras dos se calculan de manera análoga.

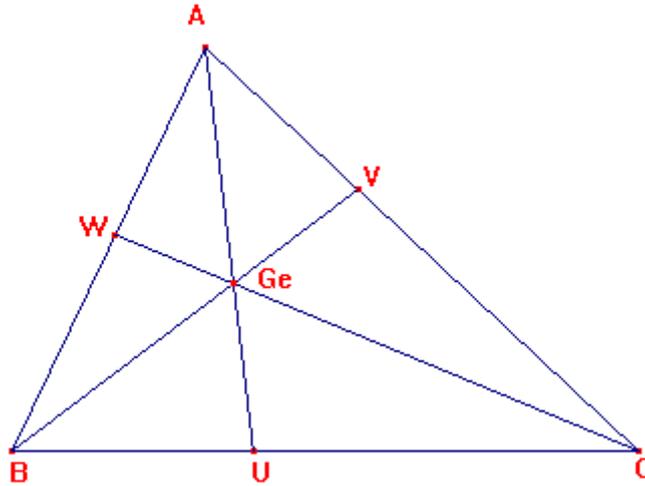


FIGURA 3B

En la figura 3B tenemos un triángulo ABC con su punto de Gergonne Ge .

Por los Teoremas 42 y 43 y por el Teorema 2B tenemos que

$$\begin{aligned}
 x_1 = \frac{GeU}{AU} &= \frac{1}{1 + \frac{AW}{WB} + \frac{AV}{VC}} = \frac{1}{1 + \frac{s-a}{s-b} + \frac{s-a}{s-c}} \\
 &= \frac{1}{\frac{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}{(s-b)(s-c)}} \\
 &= \frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)} \\
 &= \frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 &= \frac{1}{\frac{s-a}{s-b} + \frac{s-a}{s-c}} \sim \frac{1}{s-a}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto las coordenadas baricéntricas homogéneas del punto de Gergonne son

$$\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c} \right).$$

Por el Teorema 37 sabemos que $x_1 = \frac{a\alpha}{2\Delta}$, entonces

$$\frac{1}{s-a} = \frac{a\alpha}{2\Delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2\Delta}{a(s-a)} \sim \frac{1}{a(s-a)}.$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas del punto de Gergonne son

$$\left(\frac{1}{a(s-a)} : \frac{1}{b(s-b)} : \frac{1}{c(s-c)} \right).$$

Consideremos ahora la figura 4B en la que tenemos un triángulo ABC con su incentro I , inradio r , y las cevianas AU , BV y CW que concurren en el punto de Gergonne Ge .

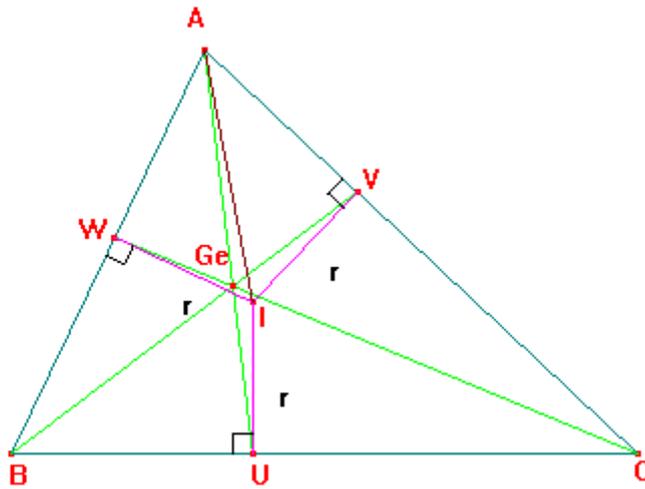


FIGURA 4B'

Sabemos que U, V y W son los pies de las perpendiculares desde I a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC . Entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$AI^2 = AW^2 + r^2 \quad (1).$$

Por otra parte conocemos las fórmulas del inradio y la de Herón para calcular el área de un triángulo. A saber:

$$\Delta = rs, \quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} rs &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) y recordando que $AW = s - a$ tenemos que

$$\begin{aligned} AI^2 &= (s-a)^2 + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{s(s-a)^2 + (s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= \frac{(s-a)[s(s-a) + (s-b)(s-c)]}{s} \\ &= \frac{(s-a)[s^2 - sa + s^2 - sc - sb + bc]}{s} \\ &= \frac{(s-a)[2s^2 - s(a+b+c) + bc]}{s} = \frac{(s-a)(2s^2 - 2s^2 + bc)}{s} \\ &= \frac{bc(s-a)}{s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$AI^2 = \frac{bc(s-a)}{s} \quad (2).$$

Por otra parte, usando (2) y el hecho de que AI es bisectriz del ángulo A tenemos que

$$\begin{aligned} \sec \frac{A}{2} = \frac{AI}{AW} &\Rightarrow \left(\sec \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{AI^2}{AW^2} = \frac{\frac{bc(s-a)}{s}}{(s-a)^2} = \frac{bc(s-a)}{s(s-a)^2} = \frac{bc}{s(s-a)} \\ &= \frac{abc}{sa(s-a)} \sim \frac{1}{a(s-a)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, las coordenadas trilineales homogéneas del punto de Gergonne también pueden escribirse como

$$\left(\sec^2 \frac{A}{2} : \sec^2 \frac{B}{2} : \sec^2 \frac{C}{2} \right). \quad \blacksquare$$

Vamos ahora a encontrar las coordenadas trilineales de otro punto notable del triángulo y para ello necesitamos la siguiente:

DEFINICIÓN B1: Sean P y P' dos puntos en el lado BC de un triángulo ABC tales que $BP' = PC$. Diremos que las líneas AP' y AP son líneas isotómicas con respecto al triángulo ABC . Obsérvese que lo anterior significa que $BP = P'C$.

TEOREMA B4: Si las cevianas AP, BQ y CR de un triángulo ABC son concurrentes, entonces las isotómicas AP', BQ' y CR' también son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 4B)

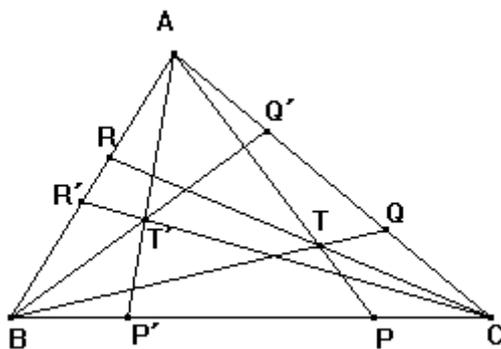


FIGURA 4B

En la figura 4B tenemos las cevianas AP, BQ y CR de un triángulo ABC concurrentes en T y sus respectivas isotómicas AP', BQ' y CR' . Por el Teorema de Ceva tenemos que

$$\frac{AR'}{R'B} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} = \frac{RB}{AR} \cdot \frac{PC}{BP} \cdot \frac{QA}{CQ} = 1$$

La última igualdad es cierta puesto que las primeras isotómicas son concurrentes. De lo anterior se sigue que AP', BQ' y CR' son concurrentes en un punto T' ■

Lo anterior motiva la siguiente:

DEFINICIÓN B2: Si el punto de concurrencia de tres cevianas de un triángulo es T , y si el punto de concurrencia de las cevianas isotómicas en el mismo triángulo es T' , entonces diremos que T y T' son isotómicos con respecto a ese triángulo.

Denotaremos como Na al punto isotómico del punto de Gergonne Ge de un triángulo ABC .

En punto Na se llama punto de Nagel del triángulo ABC .

TEOREMA B5: Las coordenadas trilineales homogéneas del punto de Nagel son

$$\left(\csc^2 \frac{A}{2} : \csc^2 \frac{B}{2} : \csc^2 \frac{C}{2} \right).$$

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 5B)

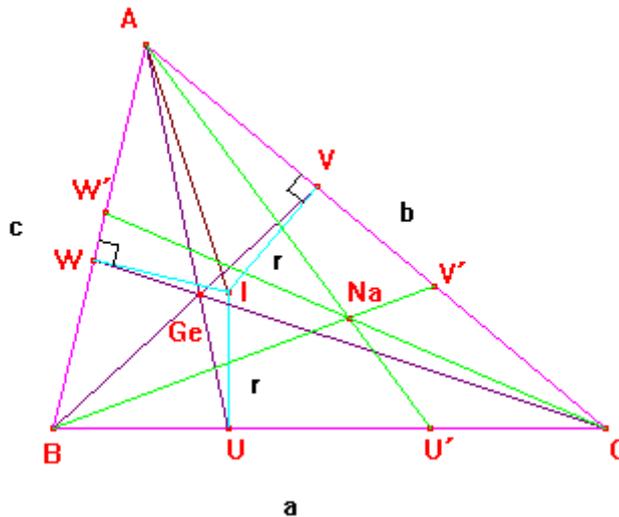


FIGURA 5B

En la figura 5B tenemos un triángulo ABC con su incentro I e inradio r , su punto de Gergonne Ge y su isotómico, el punto de Nagel Na . Calcularemos como antes, la primera coordenada baricéntrica homogénea y después la primera coordenad trilineal homogénea. Las otras coordenadas se calculan de manera análoga.

Por los Teoremas 42, 43 y 2B y usando que Ge y Na son isotómicos tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{NaU'}{AU'} = \frac{1}{1 + \frac{AW'}{W'B} + \frac{AV''}{V'C}} = \frac{1}{1 + \frac{s-b}{s-a} + \frac{s-c}{s-a}} = \frac{1}{1 + \frac{(s-b) + (s-c)}{s-a}} \\ &= \frac{1}{\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{s-a}} = \frac{s-a}{(s-a) + (s-b) + (s-c)} \sim (s-a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas baricéntricas homogéneas del punto de Nagel son

$$(s-a : s-b : s-c).$$

Por el Teorema 37 sabemos que $x_1 = \frac{a\alpha}{2\Delta}$, entonces

$$\alpha = \frac{2\Delta x_1}{a} = \frac{2\Delta(s-a)}{a} \sim \frac{s-a}{a}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales homogéneas del punto de Nagel son

$$\left(\frac{s-a}{a} : \frac{s-b}{b} : \frac{s-c}{c}\right).$$

Por otra parte, observamos que

$$\begin{aligned} \csc^2 \frac{A}{2} &= \frac{AI}{IW} = \frac{AI}{r} \Rightarrow \csc^2 \frac{A}{2} = \frac{AI^2}{r^2} = \frac{\frac{bc(s-a)}{s}}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{bc(s-a)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{abc(s-a)}{a(s-a)(s-b)(s-c)} \sim \frac{(s-a)}{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas baricéntricas del punto de Nagel también pueden escribirse como

$$\left(\csc^2 \frac{A}{2} : \csc^2 \frac{B}{2} : \csc^2 \frac{C}{2}\right). \quad \blacksquare$$

Ahora calcularemos las coordenadas trilineales homogéneas del centro de la circunferencia de los nueve puntos, este centro lo denotaremos por C_9 . Para ello necesitamos primero el siguiente:

LEMA B1: Sean a y b las bases de un trapezio, uno de cuyos lados no paralelos es perpendicular a a y b (un trapezio rectángulo). Si se divide este trapezio en dos trapezios mediante una paralela trazada desde los puntos medios de los lados no paralelos del trapezio, entonces la longitud c de la paralela es la semisuma de las bases del trapezio.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura L1B)

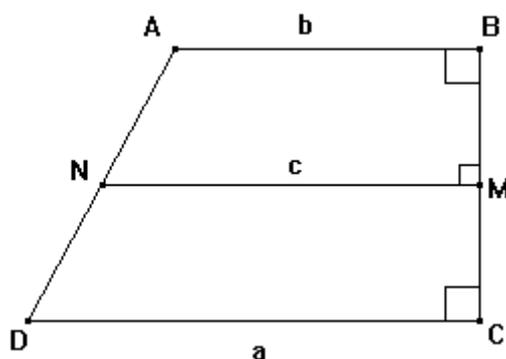


FIGURA L1B

En la figura L1B tenemos un trapecio $ABCD$ donde $a = DC$, $b = AB$ y $c = NM$, donde M es punto medio de BC y N es el punto medio de AD .

Queremos demostrar que

$$c = \frac{a + b}{2}$$

La demostración se hará usando áreas como sigue:

$$(ABCD) = (ABMN) + (NMCD) \quad (1)$$

Pero

$$(ABCD) = \frac{(a + b)CB}{2} \quad (2)$$

$$(ABMN) = \frac{(b + c)MB}{2} \quad (3)$$

$$(NMCD) = \frac{(a + c)CM}{2} \quad (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) y observando que $MB = CM$ y que $\frac{CB}{2} = CM$ porque M es punto medio de CB tenemos que

$$(a + b)CM = \frac{(b + c)CB}{2} + \frac{(a + c)CM}{2} \Rightarrow \frac{b + c}{2} + \frac{a + c}{2} \Rightarrow$$

$$a + b = \frac{a + b + 2c}{2} \Rightarrow 2(a + b) = (a + b) + 2c \Rightarrow a + b = 2c \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}. \blacksquare$$

TEOREMA B6: Las coordenadas trilineales homogéneas de $C9$ son

$$(\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B)).$$

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 6B)

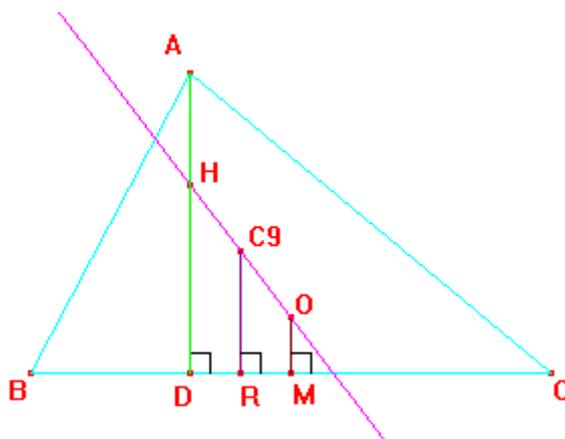


FIGURA 6B

En la figura 6B tenemos un triángulo ABC con su ortocentro H , su circuncentro O y su centro de su circunferencia de los nueve puntos $C9$.

Hemos trazado también la altura HD , la mediatriz OM y la perpendicular $C9R$ al lado BC del triángulo ABC .

Sabemos que $C9$ es el punto medio de HO y por lo tanto, R es punto medio de DM , luego, el trapecio $HDMO$ es un trapecio rectángulo y por el Lema B1 tenemos que la primera coordenada trilineal absoluta de $C9$ es

$$\alpha = C9R = HM + OM \quad (1).$$

Por los Teoremas 47 y 48 sabemos que las coordenadas trilineales absolutas del circuncentro y el ortocentro son

$$OM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} A \quad \text{y} \quad HM = \frac{a \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A}$$

Sustituyendo en (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{2} \operatorname{ctg} A + \frac{a \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \cos A}{2 \operatorname{sen} A} + \frac{a \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \cos A + 2a \cos B \cos C}{2 \operatorname{sen} A} \\ &= \frac{a \cos(180^\circ - [B + C]) + 2a \cos B \cos C}{2 \operatorname{sen} A} \\ &= \frac{-a \cos(B + C) + 2a \cos B \cos C}{2 \operatorname{sen} A} \\ &= \frac{-a \cos B \cos C + a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + 2a \cos A \cos C}{2 \operatorname{sen} A} \\ &= \frac{a \cos B \cos C + a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{a \cos(B - C)}{2 \operatorname{sen} A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto las coordenadas trilineales absolutas del centro de la circunferencia de los nueve puntos son

$$\left(\frac{a \cos(B - C)}{2 \operatorname{sen} A}, \frac{b \cos(C - A)}{2 \operatorname{sen} B}, \frac{c \cos(A - B)}{2 \operatorname{sen} C} \right).$$

Utilizando la ley de los senos para homegeneizar, concluimos que las coordenadas trilineales homogéneas del centro de la circunferencia de los nueve puntos son

$$(\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B)) \quad \blacksquare$$

Apéndice C: Diámetros de las Cónicas.

En el Capítulo 5 definimos un diámetro de una hipérbola como cualquier recta que pasa por su centro. Esta definición puede extenderse de manera análoga para la elipse y con una ligera modificación para la parábola. Así, diremos que si tenemos una elipse o una hipérbola diremos que un diámetro de ellas es cualquier recta que pasa por su centro (Ver figuras 1C y 2C).

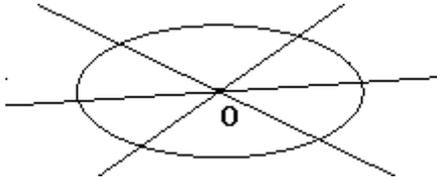


FIGURA 1C

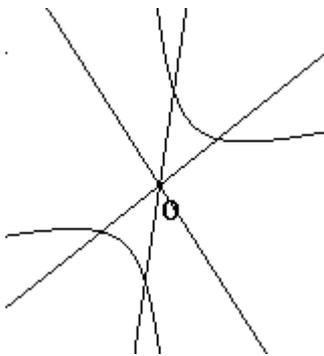


FIGURA 2C

En algunos textos se acostumbra a convenir que una parábola tiene centro en el infinito sobre el eje de la parábola, o bien que es como una elipse con uno de sus focos al infinito, diremos nosotros entonces que el eje de la parábola es uno de sus diámetros y que los demás diámetros de la parábola son rectas paralelas a su eje (Ver figura 3C).

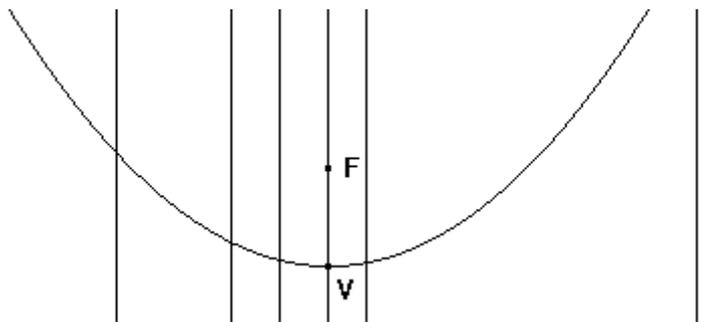


FIGURA 3C

El siguiente teorema acerca de los diámetros es una caracterización más de las secciones cónicas, la demostración que daremos es analítica, excluimos la demostración sintética por ser demasiado larga y porque requiere estudiar en orden las diez primeras proposiciones de Apolonio que aparecen y pueden consultarse en [2].

TEOREMA C1: Los puntos medios de las cuerdas paralelas de cualquier cónica están en un diámetro de la cónica.

DEMOSTRACIÓN:

Para simplificar y evitar calculos tediosos demostraremos el teorema para el caso de la parábola, los otros casos se demuestran análogamente.

Sin pérdida de generalidad consideremos la ecuación canónica más sencilla de la parábola (ver [12]) que es $y^2 = 4px$ (1).

Sea m la pendiente común de cualquier sistema de cuerdas paralelas de la parábola y no paralelas al eje de la parábola (en cuyo caso tendrían pendiente 0 y ecuaciones $y = k$, k constante); entonces, la ecuación de cada una de estas cuerdas es $y = mx + b$ (2).

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) tenemos que:

$$(mx + b)^2 - 4px = 0$$

o sea,

$$m^2x^2 + 2(mb - 2p)x + b^2 = 0.$$

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación cuadrática anterior, entonces tales soluciones son las abscisas de los extremos de una de las cuerdas de la parábola. Por propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática sabemos que $x_1 + x_2 = -\frac{2(mb-2p)}{m^2}$, por lo tanto la abscisa del punto medio de la cuerda es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{(mb - 2p)}{m^2}.$$

Para encontrar la ordenada del punto medio de la cuerda sustituimos la abscisa que encontramos en (2) y tenemos:

$$y = m\left(-\frac{mb - 2p}{m^2}\right) + b = -b + \frac{2p}{m} + b = \frac{2p}{m}.$$

Luego las coordenadas de los puntos medios de la cuerda son:

$$\left(\frac{2p - mb}{m^2}, \frac{2p}{m}\right).$$

Observemos que para cada b se obtendrán todos los puntos medios del sistema de cuerdas paralelas de la parábola, pero para cada b la ordenada $\frac{2p}{m}$ siempre permanece constante, por lo tanto los puntos medios del sistema de cuerdas son colineales en una recta paralela al eje de la parábola, es decir, están en un diámetro de la parábola. ■

Los siguientes teoremas nos permiten construir con regla y compás todos los elementos de una cónica cuando se conoce únicamente la curva.

TEOREMA C2: Dada una parábola se pueden construir todos sus elementos con regla y compás. Foco, eje, directriz y vértice.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 4C)

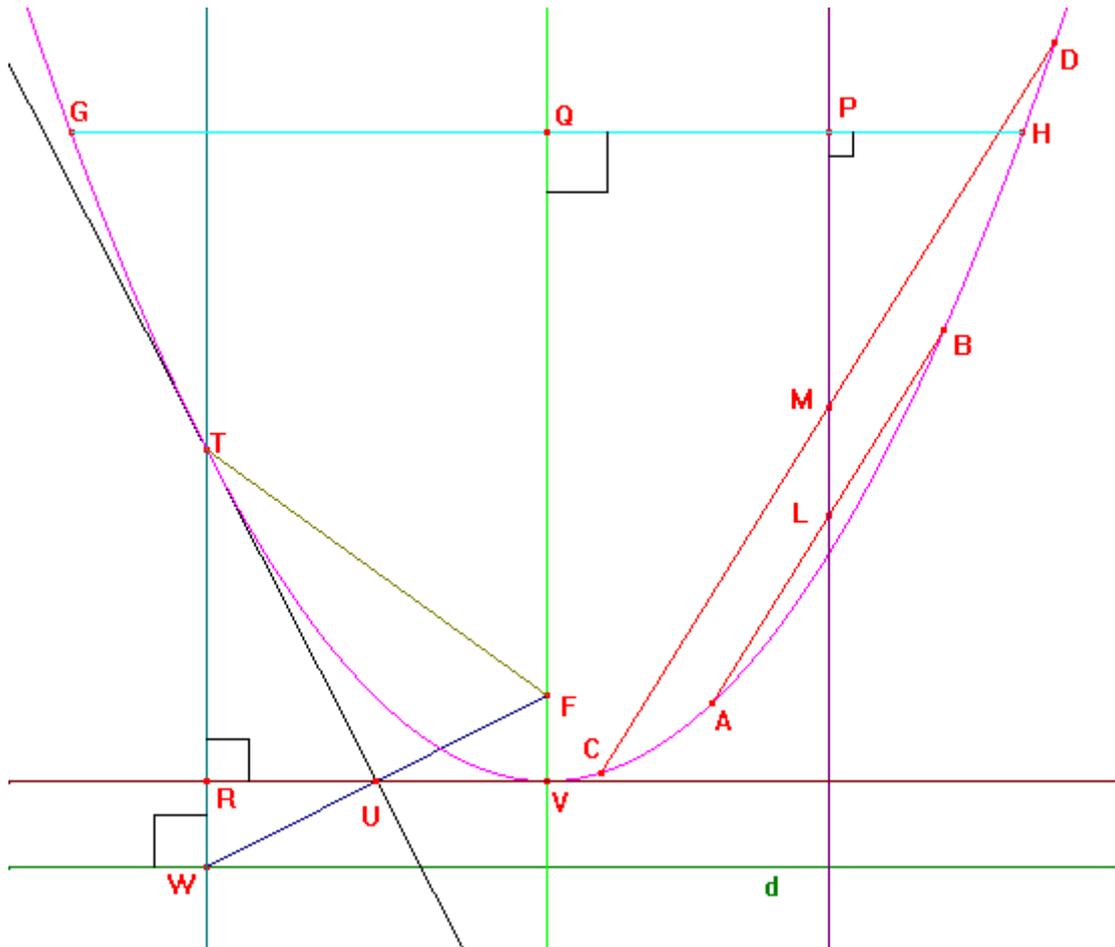


FIGURA 4C

En la figura 4C nos dan una parábola.

Sean AB y CD dos cuerdas paralelas de la parábola que tienen puntos medios a L y M respectivamente.

Por el teorema anterior la recta LM es un diámetro de la parábola, el cual es paralelo a su eje. Para construir el eje de la parábola elegimos un punto cualquiera P sobre la recta LM desde el cual construimos la cuerda GH de la parábola de tal forma que GH sea perpendicular a LM . Por lo tanto el eje de la parábola es la mediatriz de GH .

Sea V la intersección de la mediatriz de GH con la parábola, entonces V es el vértice de la parábola. La tangente a la parábola en V es la perpendicular a por V al eje de la parábola.

Sea T un punto cualquiera de la parábola distinto de V , sea R el pie de la perpendicular desde T a la tangente a la parábola por V y sea U el punto medio de RV . Tracemos la recta TU y sea F la intersección del eje de la parábola con la perpendicular a TU que pasa por U . Por último sea W el reflejado de F con respecto a la recta TU y sea d la recta paralela a RV por W .

Afirmamos que d es la directriz de la parábola, TU es la tangente a la parábola en T y que F es el foco de la parábola. Veamos por qué es esto así:

En la figura 5C tenemos una elipse.

Sean XY y ZW parte de un sistema de cuerdas paralelas a la elipse y sean $X'Y'$ y $Z'W'$ parte de un sistema de cuerdas paralelas a la misma elipse distinto del primero. Sean L, M, L' y M' los puntos medios de las cuerdas $XY, ZW, X'Y'$ y $Z'W'$ respectivamente.

Sea O la intersección de las rectas LM y $L'M'$, por el Teorema C1 sabemos que LM y $L'M'$ son diámetros de la elipse que pasan por el centro de la elipse, luego, O es el centro de la elipse.

Con centro en O tracemos una circunferencia que corte a la elipse en cuatro puntos P, Q, R y S . Por simetría de la elipse se sigue que $PQRS$ es un rectángulo cuyos pares de lados opuestos forman cada uno, parte de un sistema de cuerdas paralelas a la elipse. Por lo tanto, las mediatrices de los lados del rectángulo $PQRS$ son diámetros perpendiculares de la elipse, lo cual quiere decir que la mediatriz de PQ y RS es el eje mayor de la elipse y la mediatriz de QR y SP es el eje menor de la elipse.

Sean A y A' los extremos del eje mayor y B y B' los extremos del eje menor, entonces A y A' son los vértices de la elipse.

Con centro en B y radio AO trazamos una circunferencia. Sean F y F' las intersecciones de esta circunferencia con el eje mayor de la elipse, observamos por construcción que $AO = BF = BF' = OA'$ por lo tanto $BF + BF' = AA'$ por lo cual se sigue que F y F' son los focos de la elipse. ■

Veamos ahora otra propiedad relacionada con el teorema que acaba de probarse.

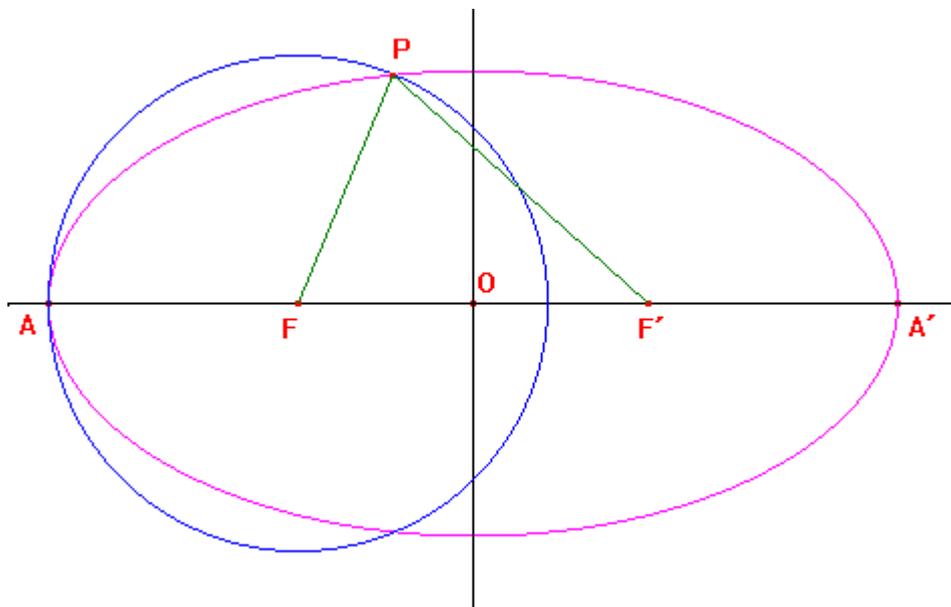


FIGURA 6C

TEOREMA C4: Si tenemos una elipse donde A y A' son sus vértices y F y F' son sus focos, entonces la circunferencia que tiene como radio a FA es tangente a la elipse en A .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 6C)

El teorema anterior permite construir los elementos de la elipse dada.

Supongamos que la circunferencia que tiene radio FA toca a la elipse en otro punto P , entonces $FA = FP$ y por definición de elipse tenemos que $PF + PF' = AA'$ y también que $PF' = FA'$.

Sabemos que en el triángulo $PF'F$ se tiene que $FF' + PF > PF'$, entonces $FF' + PF > FA'$. Por lo tanto, $AF' > FA'$ lo cual es imposible ya que ambos segmentos son iguales. ■

En otras palabras, el Teorema 6C afirma que si P está en la elipse, entonces nunca ocurre que $PF = AF$.

De manera análoga puede probarse que si P está sobre la elipse, entonces nunca ocurre que $PF < AF$.

De lo anterior se concluye que si P está sobre la elipse entonces siempre ocurre que $PF > AF$.

Estas observaciones permiten construir una elipse por puntos cuando son dados su eje mayor y sus focos (Ver Figura 7C), ya que si P está sobre la elipse y $PF > AF$, entonces haciendo centro en A y radio PF se construye una circunferencia que interseca al eje mayor en un punto K de tal forma que $AK > AF$ y entonces la circunferencia que tiene centro en F y que pasa por P tendrá radio igual a AK y la circunferencia que tiene centro en F' y que pasa por P tendrá radio $A'K$. Esto demuestra el recíproco de la construcción por puntos de la elipse dada en el Capítulo 1.

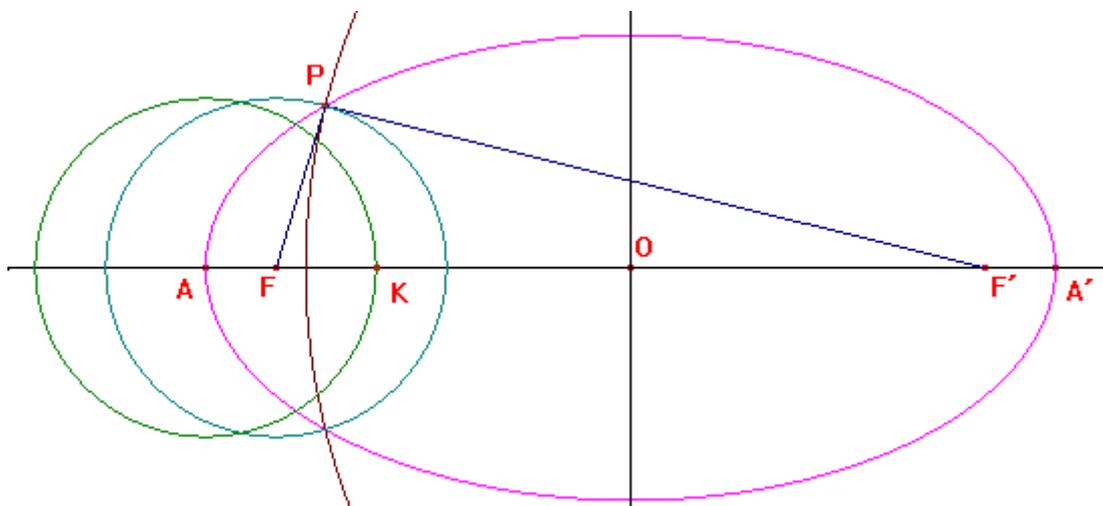


FIGURA 7C

TEOREMA C5: Dada una hipérbola se pueden construir todos sus elementos con regla y compás. Centro, focos, ejes y vértices.

La demostración del Teorema C5 es análoga a la del Teorema C3.

TEOREMA C6: Si tenemos una hipérbola donde A y A' son sus vértices y F y F' son sus focos, entonces la circunferencia que tiene como radio a FA es tangente a la hipérbola en A .

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 8C)

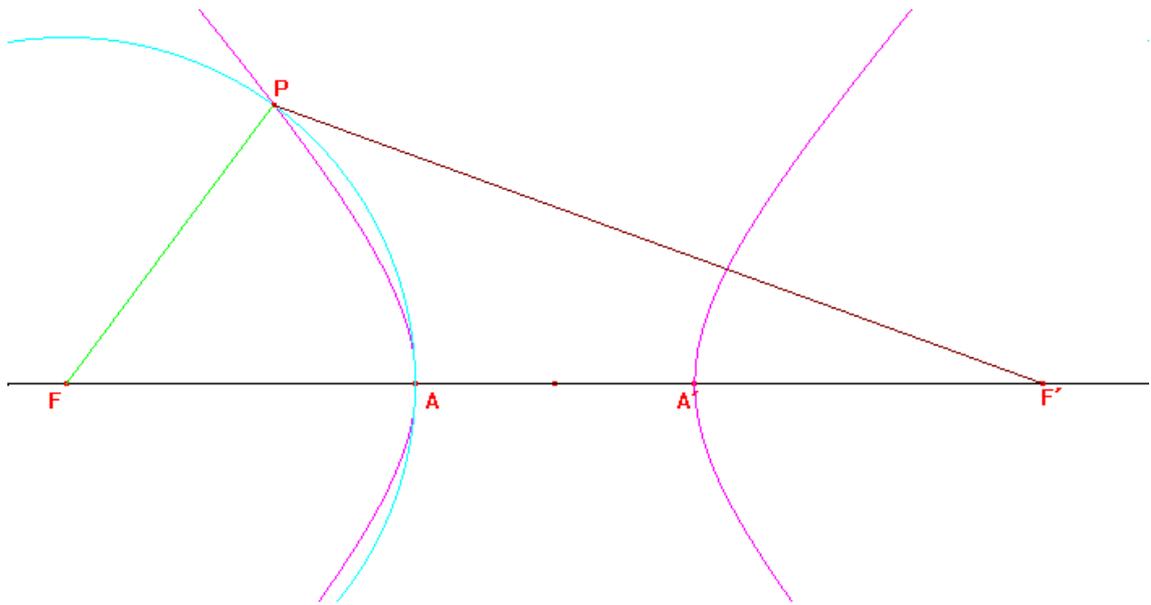


FIGURA 8C

El teorema anterior permite construir los elementos de la hipérbola.

Supongamos que la circunferencia que tiene radio FA interseca a la hipérbola en algún otro punto P , entonces tenemos que $PF = FA$ y por lo tanto por la definición de hipérbola se tiene que $AA' = PF' - PF = PF' - FA$, entonces $PF' = AA' + FA = FA'$. En el triángulo $PF'F$ tenemos que $PF + PF' > FF'$, entonces $FA + PF' > FF'$, o sea, $PF' > FF' - FA = AF'$, es decir, $FA' > AF'$ lo cual es imposible. ■

En otras palabras el teorema que acabamos de demostrar nos dice que si P es un punto de la hipérbola, entonces FP nunca es igual a FA .

De manera análoga se demuestra que si P es un punto de la hipérbola entonces nunca ocurre que $FP < FA$.

De las observaciones anteriores se sigue que siempre ocurre que si P es un punto de la hipérbola, entonces siempre ocurre que $FP > FA$.

Así como en la elipse, el teorema anterior y las observaciones nos dan un método para construir la hipérbola por puntos cuando se conocen los focos y la longitud AA' . Como la demostración es análoga a la que se hizo para la elipse ya no la haremos aquí. Esto demuestra el recíproco de la construcción por puntos que hicimos para la hipérbola en el Capítulo 1.

Apéndice D: Fórmulas del Área de un triángulo e Identidades Trigonómicas.

A continuación se da una lista de fórmulas del área de un triángulo e identidades trigonómicas, algunas de las cuales fueron utilizadas en este trabajo. Demostraremos sólo algunas de ellas. En la discusión de las identidades trigonómicas del ángulo doble se incluye un comentario algo fuera de lugar con el título de esta tesis pero pensamos en incluirlo como una curiosidad.

Área de un triángulo.

1. Si ABC es un triángulo en el que son conocidos los lados consecutivos a y b y el ángulo en C comprendido entre a y b entonces $(ABC) = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$.
DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 1D)

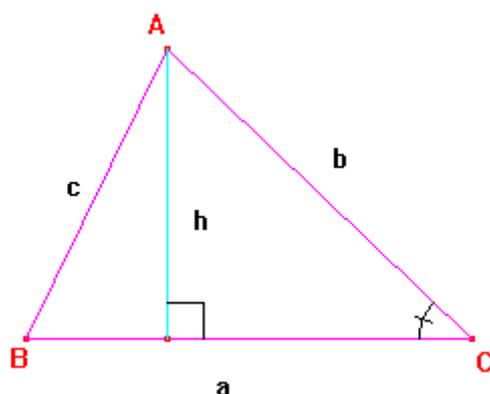


FIGURA 1D

En la figura 1C tenemos un triángulo ABC con altura h . Sabemos que $(ABC) = \frac{ah}{2}$. Pero $\operatorname{sen} C = \frac{h}{b}$, luego $h = b \operatorname{sen} C$. Sustituyendo en la fórmula para el área del triángulo tenemos que $(ABC) = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. ■

2. Si ABC es un triángulo, entonces $(ABC) = rs$, donde r y s son el inradio y el semiperímetro del triángulo ABC respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 2D)

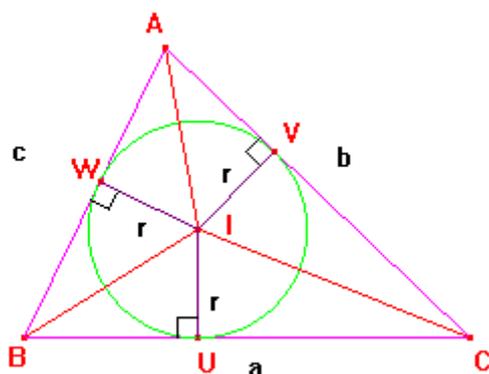


FIGURA 2D

En la figura 2D tenemos un triángulo ABC con su incentro I y su inradio r . Observemos que los triángulos IBC , ICA e IAB tienen cada uno como altura a r . Por lo tanto

$$(ABC) = (IBC) + (ICA) + (IAB) = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} = rs.$$

Por lo tanto $(ABC) = rs$. ■

3. Fórmula de Herón. Si ABC es un triángulo con lados a, b , y c , entonces $(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Donde s es como en el inciso anterior el semiperímetro del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN:

En la figura del inciso anterior sean $\angle IAW = \frac{A}{2}$, $\angle IBU = \frac{B}{2}$ y $\angle ICU = \frac{C}{2}$.

Además es claro que $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$ y como el triángulo IBU es rectángulo entonces se sigue que $\angle UIB = \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$, por lo que $tg \frac{A}{2} = \frac{r}{BU} = ctg \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$ (1)

Multiplicando ambos miembros de (1) por $tg \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$ tenemos que:

$$tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = 1 \quad (2)$$

Por el Teorema 2B del Apéndice B sabemos que $AW = s - a$, $BU = s - b$ y $CV = CU = s - c$.

Combinando la igualdad (2), la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos (fórmula 5 de la sección de suma y diferencia de dos ángulos), el Teorema 2B y la fórmula del área del triángulo obtenida en el inciso anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= tg \left(\frac{A}{2} \right) \left[\frac{tg \left(\frac{B}{2} \right) + tg \left(\frac{C}{2} \right)}{1 - tg \left(\frac{B}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right)} \right] \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{B}{2} \right) + tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right)}{1 - tg \left(\frac{B}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right)} \\ \Leftrightarrow 1 - tg \left(\frac{B}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right) &= tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{B}{2} \right) + tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= tg \left(\frac{B}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right) + tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{B}{2} \right) + tg \left(\frac{A}{2} \right) tg \left(\frac{C}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{r}{BU} \frac{r}{CU} + \frac{r}{AW} \frac{r}{BU} + \frac{r}{AW} \frac{r}{CU} \\ \Leftrightarrow 1 &= r^2 \left(\frac{1}{BU \cdot CU} + \frac{1}{AW \cdot BU} + \frac{1}{AW \cdot CU} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= r^2 \left(\frac{AW + CU + BU}{BU \cdot CU \cdot AW} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= r^2 \left(\frac{s - a + s - c + s - b}{(s - a)(s - b)(s - c)} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= r^2 \left(\frac{3s - [a + b + c]}{(s - a)(s - b)(s - c)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 = r^2 \left(\frac{3s - 2s}{(s-a)(s-b)(s-c)} \right) \\
&\Leftrightarrow 1 = r^2 \left(\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} \right) \\
&\Leftrightarrow r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c) \\
&\Leftrightarrow r(ABC) = (s-a)(s-b)(s-c) \\
&\Leftrightarrow (ABC) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r} \\
&\Leftrightarrow (ABC) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\frac{(ABC)}{s}} \\
&\Leftrightarrow (ABC)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Suma y diferencia de dos ángulos.

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$.
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$.
3. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$.

DEMOSTRACIÓN: (Ver Figura 3D)

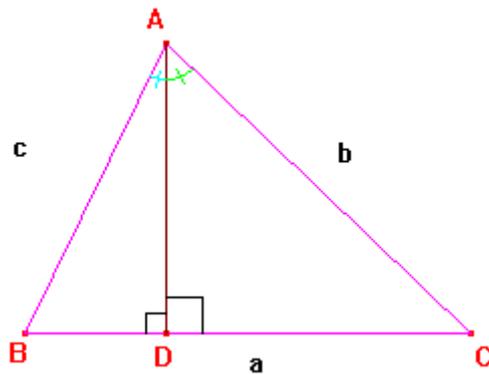


FIGURA 3D

En la figura 3D tenemos un triángulo ABC con su altura AD y sus lados $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$. Sean $\alpha = \angle DAB$ y $\beta = \angle DAC$. Entonces $\alpha + \beta = \angle BAC$. Por lo tanto usando la fórmula para el área del triángulo obtenida en el inciso 1 de fórmulas para área tenemos que:

$$(ABC) = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad (1)$$

Pero los triángulos ABD y ACD son triángulos rectángulos, entonces tenemos que:

$$BD = c \operatorname{sen} \alpha \text{ y } DC = b \operatorname{sen} \beta \quad (2).$$

Además:

$$AD = c \cos \alpha \text{ y } AD = b \cos \beta \quad (3).$$

Usando (2) y (3) y la fórmula del área del triángulo en función de la base y la altura tenemos que:

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{a \cdot AD}{2} = \frac{AD(BD + DC)}{2} = \frac{AD \cdot BD + AD \cdot DC}{2} = \frac{AD \cdot BD}{2} + \frac{AD \cdot DC}{2} \\ &= \frac{bc \operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{2} + \frac{bc \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{2} \\ &= \frac{bc}{2} (bc \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + bc \cos \alpha \operatorname{sen} \beta). \quad (4) \end{aligned}$$

Comparando (1) y (4) y cancelando el término semejante $\frac{bc}{2}$ tenemos el resultado. ■

4. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$.
5. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.
6. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Argumento doble.

1. $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$.

DEMOSTRACIÓN:

En la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ hacemos $A = \alpha = \beta$ y tenemos el resultado. ■

2. $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A = 2 \cos^2 A - 1$.

DEMOSTRACIÓN: (Sólo la primera igualdad)

En la fórmula $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ hacemos $A = \alpha = \beta$ y tenemos el resultado. ■

Dicho sea de paso con estas fórmulas se obtienen de una manera sencilla las ternas pitagóricas. Sea un triángulo rectángulo cuyos catetos son números enteros a y b con $a > b > 0$ (Ver figura 4D)

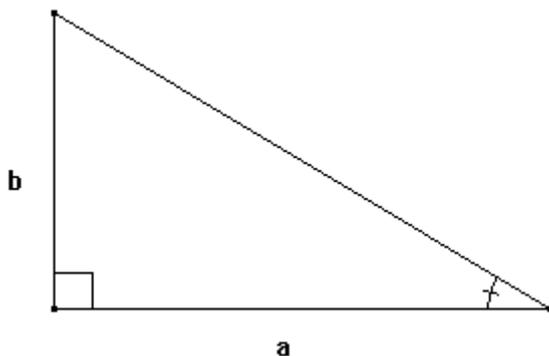


FIGURA 4D

Por el teorema de Pitágoras la hipotenusa de este triángulo rectángulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Si ϕ es el ángulo comprendido entre la hipotenusa y el lado a se tiene que $\operatorname{sen} \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Por las identidades trigonométricas del ángulo doble se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\phi &= \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \\ \operatorname{cos} 2\phi &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Por lo que existe un triángulo rectángulo con un ángulo de 2ϕ con cateto opuesto a 2ϕ igual a $2ab$, cateto adyacente a 2ϕ igual a $a^2 - b^2$ e hipotenusa igual a $a^2 + b^2$. Pero esto son precisamente las fórmulas para las ternas pitagóricas. ■

$$3. \operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}.$$

Argumento mitad.

$$1. \operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} A}{2}}.$$

$$2. \operatorname{cos} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} A}{2}}.$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1 - \operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{cos} A}.$$

Fórmulas de transformación en producto y en suma.

$$1. \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)].$$

$$2. \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)].$$

$$3. \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A + B) + \operatorname{cos}(A - B)].$$

$$4. \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A + B) - \operatorname{cos}(A - B)].$$

$$5. \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(u - v).$$

$$6. \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u - v).$$

$$7. \operatorname{cos} u + \operatorname{cos} v = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(u - v).$$

$$8. \operatorname{cos} u - \operatorname{cos} v = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u - v).$$

CONCLUSIONES:

Los teoremas aquí desarrollados se demostraron combinando el método sintético y el método analítico, algunas de estas demostraciones constituyen un verdadero derroche de esfuerzo y tiempo al pasar horas enteras, en algunas, e incluso meses en otras, en observar las figuras hasta dar con todas las demostraciones.

Es natural pensar que existan pruebas usando los métodos de las Geometrías Euclidianas y Proyectiva Analíticas, incluso más sencillas. Cada geómetra elige el método que prefiera. Sin embargo, el uso de uno u otro método ha sido objeto de discusión desde la aparición de los métodos analíticos.

Los geómetras sintéticos critican a los analíticos por el empleo de un lenguaje, muchas veces poco elegante y que hace perder ese espíritu geométrico y esa belleza estética. Por otra parte, los geómetras analíticos critican a los sintéticos por su incapacidad de llegar a resultados más profundos por la carencia de las herramientas poderosas del Álgebra y el Análisis. Un ejemplo claro de tal incapacidad del método sintético es que es prácticamente imposible, o al menos sumamente difícil probar el siguiente teorema:

“ Hay $\frac{5!}{2} = 60$ maneras posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una cónica, y, por el teorema de Pascal, a cada hexágono le corresponde una recta de Pascal. Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados puntos de Steiner, que a su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas rectas de Plucker. Las rectas de Pascal también concurren de tres en tres en otro conjunto de puntos llamados puntos de Kirkman, de los cuales hay 60. Correspondiendo a cada punto de Steiner, hay tres puntos de Kirkman tales que los cuatro están sobre una recta, llamada recta de Cayley. Hay 20 de estas rectas de Cayley, que pasan de cuatro en cuatro por 15 puntos, llamados puntos de Salomón”

La dificultad principal para demostrar este teorema por el método sintético es la de dibujar tantos puntos y rectas.

El tiempo ha dado la razón a los analíticos en cuanto a la potencia de los métodos, aunado al enorme desarrollo del Álgebra, la Teoría de Grupos, Anillos, Campos y Módulos, el Análisis, los números complejos y la Topología, que constituyen las herramientas de la Geometría Analítica Moderna.

Con este enorme arsenal y la invención de diversos sistemas de coordenadas ha sido posible la solución de muchos problemas geométricos que por el método sintético hubiera sido imposible.

En lo particular, también estoy de acuerdo en muchos aspectos con los métodos analíticos, de hecho, el teorema 7 y su corolario los tomé de [11] que es un libro puramente analítico y cuya redacción y demostración es más entendible que la del mismo teorema que aparece en [6] que es un libro sintético. Sin embargo, el objetivo de esta tesis siempre fue el de proporcionar demostraciones sintéticas de los teoremas, y esto es porque simplemente el método sintético está siendo olvidado cada vez más, es evidente que muchos compañeros de nuestra facultad no toman el segundo curso de Geometría

Moderna influidos por recomendaciones y comentarios jocosos de aquellos que yo mismo he escuchado y que incluso han llegado a decir que la Geometría Sintética no sirve de nada y que la investigación moderna actual de basa en los métodos analíticos. Pienso que, aunque la investigación geométrica actual y de renombre es la que se basa en los métodos analíticos, la Geometría Sintética no debe olvidarse, pues a fin de cuentas, el método sintético, fue el primer método utilizado y constituye la esencia misma de la Geometría, es por eso que decidí que mi tesis fuera así, con dibujos, colores y belleza estética.

BIBLIOGRAFÍA:

LIBROS:

- [1] Altshiller, N. *College Geometry*. Barnes and Noble, 1925.
- [2] Apollonius of Perga, *Treatise on Conic Sections*. Cambridge, At the University Press, 1986.
- [3] Bulajich, R. Gómez Ortega, J. A., *Desigualdades*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas UNAM., 2002.
- [4] Bulajich, R. Gómez Ortega, J. A., *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas UNAM., 2002.
- [5] Caballero, A., Martínez, L., *Geometría Analítica*, Esfinge, 1989.
- [6] Cárdenas, S., *Dos o Tres Trazos*, Temas de Matemáticas para Bachillerato, Instituto de Matemáticas, UNAM., 2003.
- [7] Evans, L., *A Conic Through Six Triangle Centers*, Forum Geometricorum, Volume 2., 2002.
- [8] Eves, H. *Estudio de las Geometrías*. TOMO 1. UTHEA., 1985.
- [9] Eves, H. *Estudio de las Geometrías*. TOMO 2. UTHEA., 1985.
- [10] Hernández, A. *Monge; Libertad, Igualdad, Fraternidad y Geometría*, S. L. Nívola Libros y Ediciones, 2002.
- [11] Kimberling, C. *Central Points, and Central Lines in the Plane of a Triangle*, Mathematics Magazine, Volume 67, No. 3, pp. 163-187., Mathematical Association of America., 1994.
- [12] Lehmann, C. *Geometría Analítica*, LIMUSA., 1989.
- [13] Moreno, R. *Plucker y Poncelet*, Dos Modos de Entender la Geometría, S. L. Nívola Libros y Ediciones, 2005.
- [14] Niles, A. *Trigonometría Plana*, LIMUSA, 2002.
- [15] Olabarrieta, L. *Ejercicios de Geometría Moderna*, El Mensajero del Corazón de Jesús, 1944.
- [16] Ramírez, A., Seade, J., *Introducción a la Geometría Avanzada*, Las Prensas de Ciencias. Facultad de Ciencias, UNAM., 2002.
- [17] Seidenberg, A. *Elementos de Geometría Proyectiva*, Compañía Editorial Continental, S. A., 1962.
- [18] Shively, L. *Introducción a la Geometría Moderna*, CECSA., 1977.

[19] Whitwort, W. *Trilinear Coordinates*, Deighton Bell and Company. Osmania University., 1866.

[20] Yiu, P. *The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry*, Int, J. Math. Educ. Sci. Technol., Volume 31., 2000.

PÁGINAS ELECTRÓNICAS:

http://nonio.mat.uc.pt/pensas_en02/experdescgeomet/06transformaciones/isogonaltrasf.html

<http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/portada.html>

<http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/trilin.html>

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Steiner_es.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Steiner_p.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Steiner_c.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Wallace_h.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Kiepert_pa.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Fermat_p.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_isodinamics_p.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Evans_co.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Napoleo_p.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Jerabek_h.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Stammler_h.html

http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/definicions/d_Simmons_e.html

