



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA PETROLERA Y GAS NATURAL
FACULTAD DE INGENIERÍA

SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN POZOS
MULTILATERALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
OMAR JARDINES ARCINIEGA

TUTOR PRINCIPAL
M.I. JOAQUÍN MENDIOLA SÁNCHEZ, I.M.P.

MÉXICO, D. F. MAYO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Nicolás López Rubén

Secretario: M. en C. Ortiz Ramirez Jaime

Vocal: M. I. Mendiola Sánchez Joaquín

1^{er}. Suplente: Dr. Ramírez Jaramillo Edgar

2^{do}. Suplente: Quim. Hernández Álvarez Rosa de Jesús

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto Mexicano del Petróleo

TUTOR DE TESIS:

M.I. Mendiola Sánchez Joaquín

FIRMA

DEDICATORIAS

DE MANERA MUY ESPECIAL

Primero y antes que nada quiero darte gracias a ti Señor como cada día por permitirme y guiarme a alcanzar nuevas metas, por hacerme un ser humano de bien, porque día a día me demuestras que estas presente en mi vida y por la dicha que me das al sentirme amado por mis seres queridos a quienes agradezco y hago partícipes en la culminación de esta bonita etapa en mi vida profesional.

A ti mi gran amor por tu confianza, tu apoyo y por ayudarme a crecer como ser humano. ***Te Amo, sigamos cumpliendo metas.***

A ti también mi pequeño que llegaste a iluminar mi vida y la de todos con los que convives, tú quien me das motivos para seguir creciendo cada día y de mejor manera; para quien espero ser el mejor ejemplo a seguir. ***Crezcamos juntos.***

A mis padres a quien nunca dejare de agradecer los valores y principios que me inculcaron, Papá gracias por tus ejemplos de honestidad, trabajo, honradez y esfuerzo para alcanzar las metas y porque tú eres definitivamente el mejor ejemplo a seguir. ***Te Amo, eres mi campeón.***

Mamá gracias por tus ejemplos de bondad, todo tú cariño, porque sabes que gracias a ti soy lo que soy y estoy donde estoy, porque día a día me demuestras que tu amor es infinito e incondicional, nunca me cansare de decirte. ***Te Amo y te lo debo Mami.***

A mis hermanos Gerardo, Gaby, Lucy Ceci y Cristian; quienes me recuerdan día a día los valores que mis padres me inculcaron, quienes me orientan, me apoyan y me aconsejan y para quienes espero ser un ejemplo como lo son ellos para mí. ***Para ustedes mi corazón y toda mi admiración.***

A ti mi ángel que se que me proteges y me bendices como lo hacías aquí, siempre estarás en mi corazón, en mi mente y en mis oraciones. ***Te extraño mucho y te mando mil besos ahí donde estés.***

A todos mis Tíos que han llenado de felicidad mi vida y han inculcado buenos valores en mi, les agradezco infinitamente el cariño que me han dado desde niño, los admiro y respeto mucho. ***Los quiero mucho.***

A mi suegra, a quien quiero y respeto mucho. ***Gracias de todo corazón.***

A mi primo Guadalupe Hernández Arciniega a quien le debo el cariño y obsesión hacia esta hermosa profesión. ***Muchas gracias.***

A todos los familiares y amigos que día a día con palabras de aliento, de forma directa e indirectamente me han ayudado a superar con éxito esta y otras etapas de mi vida. ***A todos ustedes infinitas gracias.***

AGRADECIMIENTOS

DE MANERA PROFESIONAL Y NO MENOS ESPECIAL

Al M. en I. Joaquín Mendiola Sánchez por su valioso tiempo, su confianza y todo el esfuerzo dedicado a este trabajo así también a todo su equipo de trabajo y comité de esta tesis que colaboro conmigo sin escatimar en tiempo ni recursos en la realización de este proyecto.

Al Ing. Abelardo Cordova Hernandez por esta valiosa oportunidad y por la orientación recibida sobre el tema que espero sea de gran ayuda para la realización de trabajos en esta noble área.

Al Ing. Carlos Francisco Rangel Hernández, por su confianza, por sus conocimientos compartidos y por el ejemplo de excelente ser humano y profesional que lo distingue. Un verdadero ejemplo a seguir.

Al Ing. Miguel Ángel Pérez Gálvez por su apoyo, por darme la oportunidad de crecer profesionalmente y por la confianza que ha depositado en mí en cada actividad encomendada, las cuales seguiré realizando de forma profesional y con la ética que me caracteriza.

Al M. en I. Roberto Franco Méndez García por toda la enseñanza brindada, por su apoyo en mi etapa profesional y por el ejemplo de liderazgo que lo reconoce.

Al Ing. Salvador Patlán Rodriguez, por su confianza, apoyo y ejemplo de profesionalismo, éxito y sabiduría con la humildad que lo caracteriza. Digno de toda mi admiración y respeto.

Al Ing. Miguel Sanchez Zamudio, por toda su experiencia técnica compartida, su amistad sincera y apoyo en mi desarrollo profesional.

Al Ing. Paula Escareño Beltran por su gran apoyo e interés en la realización de este Proyecto que estoy seguro ayudaran en la planeación y durante la perforación de Pozos Multilaterales en nuestra región.

Al Ing. Alfredo Morlet Andreu, al Ing. Tomás Arturo Rojas, al Ing. Carlos Guadalupe Paredes y al Ing. Jorge Leyva Rendón, por todo el apoyo brindado durante mi desarrollo profesional, y por toda la experiencia compartida. A todos ustedes de corazón mil gracias

A todos los gerentes y subgerentes quienes me dieron la oportunidad, el apoyo para realizar este posgrado y depositaron su confianza en mí para que de manera profesional ayude al crecimiento de esta hermosa empresa.

Así como a todos los ingenieros y amigos quienes de manera directa e indirecta me han apoyado para que esta pequeña etapa de mi vida profesional culmine exitosamente, a todos ustedes infinitas gracias y toda mi admiración.

RESUMEN

A la fecha la estabilidad mecánica en una unión multilateral es aun uno de los problemas más difíciles en la industria petrolera. Un pozo multilateral consiste de un pozo principal o madre con una o más laterales o ramas provenientes del pozo. Estas laterales o pozos secundarios son perforados para mejorar la productividad del pozo incrementando el área de drene y/o produciendo de formaciones aisladas.

Los pozos multilaterales pueden no solo mejorar la accesibilidad a diferentes zonas productoras y la recuperación de hidrocarburos, sino que también ahorran costos de perforación. Su efectividad ha sido validada en muchos campos de petroleros por todo el mundo. Sin embargo, los problemas emergen más frecuentemente con el incremento de perforaciones en las uniones multilaterales. A la fecha, la estabilidad mecánica de la unión multilateral aun representa uno de los problemas más difíciles de afrontar en la industria petrolera dada la compleja geometría, la estabilidad mecánica de la roca y la terminación del pozo.

La distribución de esfuerzos en una placa infinitamente grande e isotrópica, perforada por agujeros circulares ha atraído la atención de muchos puntos de vista tanto matemáticos como de ingeniería. Desafortunadamente casi todas las soluciones que existen son solo aplicables en condiciones libres de esfuerzos en los límites del agujero, lo cual no es siempre el caso en aplicaciones de ingeniería petrolera.

Esta Tesis presenta la solución explícita exacta para la distribución de esfuerzos en una placa infinita conteniendo dos agujeros circulares iguales o desiguales sometidos a esfuerzos de tensión generales dentro de un plano infinito y presiones internas dentro de los agujeros, siguiendo el enfoque propuesto por Green (1940) "Análisis General Biarmónico para una placa conteniendo dos agujeros circulares". La nueva solución general derivada ha sido verificada con soluciones publicadas para casos especiales. Además, algunos ejemplos numéricos son proveídos para ofrecer una idea de la complejidad de la interacción de parámetros.

CONTENIDO:

	Pagina
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABLAS	ix
LISTA DE GRAFICAS	x
CAPÍTULO I REVISIÓN DE LA LITERATURA	1
I.I ESTABILIDAD EN POZOS MULTILATERALES	1
I.II ANTECEDENTES	1
I.III VENTAJAS TÉCNICO-ECONÓMICAS	2
I.IV GRADOS DE COMPLEJIDAD	3
I.V IMPORTANCIA DE LA ESTABILIDAD DEL POZO	4
I.VI ESCENARIOS DE TERMINACIÓN DE POZOS MULTILATERALES	6
I.VII MODELADO DE ESTABILIDAD DEL POZO	10
I.VIII ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE UN POZO SIMPLE	11
I.IX ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PAR LA UNIÓN DE POZOS MULTILATERALES	13
I.IX.I PARA AGUJEROS IGUALES	14
I.IX.II PARA AGUJEROS DIFERENTES	14
I.X TEORÍA DE POROELASTICIDAD	15
I.XI TEORÍA DE POROPLASTICIDAD	16
I.XII CRITERIOS DE FALLA	17
I.XII.I CRITERIOS DE FALLA POR TENSIÓN	19
I.XII.II CRITERIOS DE FALLA POR COMPRESIÓN	19
I.XIII ESTABILIDAD DEL POZO	22
CAPÍTULO II PLANTEAMIENTO DEL MODELO ANALÍTICO	24
CAPÍTULO III ANÁLISIS DE RESULTADOS	50
CAPÍTULO IV CONCLUSIONES	81
APÉNDICES	83
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Escenario de Terminación Nivel 1 de acuerdo a la TAML.....	7
Figura 2. Escenario de Terminación Nivel 2 de acuerdo a la TAML.....	7
Figura 3. Escenario de Terminación Nivel 3 de acuerdo a la TAML.....	8
Figura 4. Escenario de Terminación Nivel 4 de acuerdo a la TAML.....	8
Figura 5. Escenario de Terminación Nivel 5 de acuerdo a la TAML.....	9
Figura 6. Escenario de Terminación Nivel 6 de acuerdo a la TAML.....	10
Figura 7. Diagrama de comportamiento de Esfuerzo contra Deformación de una muestra en una prueba uniaxial.....	18
Figura 8. Perfil de un Pozo Multilateral, dividido en sus 3 zonas principales.....	24
Figura 9. Esquema de un pozo multilateral y características para análisis.....	25
Figura 10. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para la unión de los pozos multilaterales. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 0^\circ$. Tabla 4.....	75
Figura 11. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para un solo pozo. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 0^\circ$. Tabla 5.....	76
Figura 12. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para la unión de los pozos multilaterales. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 90^\circ$. Tabla 6.....	78
Figura 13. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para un solo pozo. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 90^\circ$. Tabla 7.....	79

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Resultados Obtenidos por Ling para el Esfuerzo Tangencial en la pared del pozo.....	50
Tabla 2. Resultados obtenidos con nuestra solución.....	50
Tabla 3. Comparación de los resultados con los de la solución de Haddon.....	51
Tabla 4. Análisis de sensibilidad en el límite de ambos agujeros aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las graficas 5 y 19 así como de datos de laboratorio para A y B.....	75
Tabla 5. Análisis de sensibilidad para un solo agujero aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las graficas 5 y 19 así como de datos de laboratorio para A y B.....	76
Tabla 6. Análisis de sensibilidad en el límite de ambos agujeros aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las graficas 8 y 22 así como de datos de laboratorio para A y B.....	77
Tabla 7. Análisis de sensibilidad para un solo agujero aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las graficas 8 y 22 así como de datos de laboratorio para A y B.....	79

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Orientación de esfuerzos locales con $\alpha= 0$ grados, y $S1=1$, $S2=0.8$, $P1=0.6$ $a1=2$	52
Gráfica 2. Orientación de esfuerzos locales con $\alpha= 30$ grados, y $S1=1$, $S2=0.8$, $P1=0.6$ $a1=2$	53
Gráfica 3. Orientación de esfuerzos locales con $\alpha= 60$ grados, y $S1=1$, $S2=0.8$, $P1=0.6$ $a1=2$	53
Gráfica 4. Orientación de esfuerzos locales con $\alpha= 90$ grados, y $S1=1$, $S2=0.8$, $P1=0.6$ $a1=2$	54
Gráfica 5. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha= 0$ grados, $P1=P2=0.2$	55
Gráfica 6. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=30$ grados, $P1=P2=0.2$	56
Gráfica 7. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=60$ grados, $P1=P2=0.2$	57
Gráfica 8. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=90$ grados, $P1=P2=0.2$	57
Gráfica 9. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.7$, $\alpha=0$ grados, $P1=P2=0.2$	58
Gráfica 10. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.6$, $\alpha=0$ grados, $P1=P2=0.2$	59
Gráfica 11. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P1=0.2$, $P2=0.1$	60
Gráfica 12. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P1=0.2$, $P2=0.1$	60
Gráfica 13. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P1=0.2$, $P2=0$	61
Gráfica 14. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a1=a2=1$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P1=0.2$, $P2=0$	61
Gráfica 15. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a1=1$, $a2=0.5$, $S1=1$, $S2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P1=P2=0.2$	62

Gráfica 16. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	63
Gráfica 17. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	63
Gráfica 18. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	64
Gráfica 19. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	65
Gráfica 20. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=30$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	66
Gráfica 21. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=60$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	66
Gráfica 22. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=90$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	67
Gráfica 23. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.7$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	68
Gráfica 24. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.6$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	68
Gráfica 25. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$.	69
Gráfica 26. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$.	70
Gráfica 27. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0$.	70
Gráfica 28. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0$.	71
Gráfica 29. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	72
Gráfica 30. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$.	72

Gráfica 31. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1= P_2=0.2$ 73

Gráfica 32. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$ 73

CAPÍTULO I. REVISIÓN DE LA LITERATURA.

Este capítulo tiene principalmente dos propósitos. Primeramente presenta una revisión de la literatura que es relevante en la solución a los problemas de estabilidad de pozos tanto en un pozo simple como en un multilateral. Nos provee la oportunidad de comparar lo que se ha hecho en esta área. Segundo revisa la importancia de escoger un modelo constitutivo apropiado así como un criterio de falla adecuado para analizar los problemas de estabilidad del pozo.

I.I ESTABILIDAD EN POZOS MULTILATERALES.

Un pozo multilateral consiste en un pozo principal o madre con uno o más agujeros ramificados, los cuales son perforados para incrementar la productividad del pozo al incrementar el área de drene. También son usados para poder producir de diferentes formaciones aisladas.

La utilización de esta técnica es definir un pozo multilateral como aquel que a partir de una misma boca de pozo se accede con dos o más ramas, a uno o varios horizontes productivos.

Hasta la fecha no se ha encontrado una manera de clasificar al tipo de pozo multilateral ya que la forma y variedad está solo limitada a nuestra imaginación y a las características de nuestros yacimientos. Así podemos tener:

- Vertical y horizontal al mismo yacimiento.
- Vertical y horizontal a distintos yacimientos.
- Dos o más dirigidos al mismo o distinto horizonte productivo.
- Horizontal con dos o más ramas.
- Vertical y varios horizontales a distintos yacimientos.

La estructura final de un pozo multilateral será función del yacimiento y de los recursos tecnológicos disponibles.

I.II ANTECEDENTES

La simulación de estabilidad del pozo tiene el propósito de predecir la redistribución de esfuerzos o presiones alrededor del pozo como resultado de la perforación, terminación u operaciones de producción. Los elementos más

importantes necesarios para simular los problemas geomecánicos son el modelo del comportamiento constitutivo de la roca y un apropiado criterio de falla. Los modelos de comportamiento constitutivo usados para predecir la estabilidad de pozo, van desde aquellos que usan la teoría de elasticidad a modelos más complejos que toman en cuenta además las teorías de plasticidad, porosidad de los materiales, temperaturas y efectos debido al paso del tiempo. La comparación de esfuerzos obtenidos al usar algunos de estos modelos constitutivos con un adecuado criterio de falla de roca determinan si la roca alrededor del pozo tiene probabilidades de fallar o no, Fonseca^[16] y McLean y Addis^[27] incluyen en sus artículos una clasificación de los modelos de estabilidad de pozo para propósitos específicos debido a algunos rasgos especiales.

I.III VENTAJAS TÉCNICO-ECONÓMICAS.

Los primeros pozos multilaterales fueron perforados en U.R.S.S. en la década de los 50`s. En 1995, a raíz de la proliferación de los pozos y del estancamiento del precio del crudo, las empresas petroleras se vieron en la necesidad de extraer más petróleo por pozo. En este sentido los pozos horizontales pueden producir de 3 a 5 veces más que los pozos verticales en el mismo campo.

Es ahí donde se produce el auge de esta nueva tecnología. Por caso en E.U.A. Desde 1986 hasta 1989 se perforaron sólo 7 pozos mientras que en 1990 se perforaron aproximadamente 85 pozos; en la actualidad, uno de cada quince equipos es para perforación de pozos horizontales, habiendo llegado, en los años 1994 y 1998, a representar uno de cada diez.

En general, los pozos horizontales tienen un costo de 1,2 a 2,5 veces más que los pozos verticales en el mismo campo; por ello, en muchas zonas se recurre a la determinación de pozos verticales como pozos horizontales puesto que ello implica una reducción del costo del 12 hasta el 56 % por metro, si lo comparamos con un nuevo pozo horizontal.

Entre las ventajas de esta nueva técnica, podemos agregar que en E.U.A. La utilización de pozos horizontales han incrementado las reservas comprobadas.

Los pozos multilaterales son útiles por las siguientes razones:

- Son muy rentables para la producción de horizontes múltiples delgados, ya que los bloques hacen las veces de fracturas mecánicas extensas.
- En yacimientos donde hay un solo horizonte productor de gran espesor y con gran anisotropía vertical.
- En yacimientos donde el gradiente de fractura vertical es mayor que el horizontal y la fractura se genera horizontalmente.
- En pozos costa fuera donde el traslado de una plataforma es muy significativo en el costo total del pozo.
- En yacimientos marginales donde es imperativo reducir los costos de producción.
- Con el advenimiento de la cultura por el cuidado del medio ambiente, este tipo de pozos reducen considerablemente el impacto ambiental (menos locaciones, menos aparatos de bombeo, menor ruido, menor cantidad de líneas de transporte, menos caminos, etc.).
- También se reducen costos de horas de equipo, tuberías, instrumentos, supervisión, etc.

I.IV GRADOS DE COMPLEJIDAD.

Generalmente las empresas productoras de petróleo requieren 3 condiciones ideales de este tipo de tecnologías:

- 1) Conectividad del pozo principal con cada uno de los ramales.
- 2) Posibilidad de reingresar a los ramales en forma selectiva.
- 3) Sello hidráulico entre el pozo principal y los ramales en la medida en que alguna de estas condiciones no sea indispensable, el proyecto decrece en complejidad y costo.

Es así que nacen los distintos grados de complejidad para los multilaterales, a los que podemos dividir en 5 niveles:

- Pozo principal y laterales en agujero descubierto.
- Pozo principal ademado y laterales en agujero descubierto.
- Pozo principal ademado y cementado
- Laterales ademados pero no cementados.
- Pozo principal y laterales ademados con sello hidráulico en las uniones a través de cementación.

Debido a los efectos de la geometría, el pozo lateral e incluso el pozo principal se pueden perder produciendo enormes pérdidas y retrasos en la producción esperada.

Los pozos multilaterales no solo pueden mejorar el acceso y la recuperación sino también reducir los costos de la perforación.

Su efectividad ha sido validada en varios campos alrededor del mundo, sin embargo aparecen nuevos problemas asociados, la estabilidad mecánica representa el reto más importante.

Se mostrará el efecto de la orientación relativa de la junta en el estado de esfuerzos y la relación de diámetros del agujero principal-lateral y el impacto en la distribución de esfuerzos en la junta, la estabilidad y en la terminación del pozo.

I.V IMPORTANCIA DE LA ESTABILIDAD DEL POZO.

El análisis de la estabilidad del pozo ha sido tema del estudio y de discusión por un tiempo largo. La integridad del pozo desempeña un papel importante en muchas operaciones durante la perforación, la terminación y la producción de los pozos.

El origen de los problemas la estabilidad del pozo ocurre principalmente a través de cambios en el estado original de los esfuerzos debido al retirar la roca durante la perforación, interacciones entre la roca y los fluidos al perforar o de la terminación del pozo, los cambios de temperatura, o los cambios de presiones diferenciadas que ocurren en el fondo del pozo.

Para el caso particular de la perforación, la ayuda proporcionada originalmente por la roca se sustituye por la presión del fluido de perforación; esto crea la

perturbación y la redistribución de esfuerzos alrededor del pozo que puede conducir a las inestabilidades mecánicas. Estas inestabilidades pueden causar el cierre del pozo (reducción del diámetro) o falla compresiva que causan derrumbes.

En situaciones severas, el cierre del agujero puede causar pegadura de la tubería y pérdida del pozo.

Las causas de la inestabilidad se han clasificado en mecánicas o químicas. Una cantidad significativa de investigación se ha centrado en estos dos aspectos de la inestabilidad.

Aunque existe una cantidad significativa de artículos relacionados con la estabilidad del pozo, la mayoría de ellos tratan el estudio de la estabilidad en la vecindad del pozo para un solo agujero. Cuando obran simultáneamente dos agujeros, la interferencia que un agujero lateral causa en la alteración en el estado de esfuerzos alrededor del agujero principal es particularmente interesante. Sin embargo, información sobre la investigación conducida en un panorama multilateral donde están dos agujeros interactivos es limitado. Por lo tanto, la revisión de la literatura se enfocó en el estado de área específica de pozos multilaterales: la estabilidad de la junta entre el pozo principal y el agujero lateral.

Durante los años pasados, se ha puesto en ejecución la arquitectura de pozos multilaterales como una nueva técnica para aumentar productividad así como perforar ramas secundarias a partir de un pozo existente. La evolución de la tecnología multilateral ha creado una amplia gama de los panoramas de las terminaciones de pozos. Hogg^[20] reconoce eso aunque estos nuevos panoramas han traído nuevas expectativas en la administración de los yacimientos, y también creó una nueva serie de obstáculos y de riesgos. Para desarrollar una mejor comprensión de los usos de los pozos multilaterales, capacidades, y equipo requerido, se creó un foro de la industria de petróleo para el Avance Técnico de Pozos Multilaterales (**TAML**), y fue desarrollado un esquema multilateral de clasificación.

I.VI ESCENARIOS DE TERMINACIÓN DE POZOS MULTILATERALES.

Según Hogg^[20], varios factores deben ser considerados cuando se planea un pozo multilateral. Primero, como la meta del multilateral es incrementar la recuperación de hidrocarburos, es crucial tener una buena comprensión de comportamiento del yacimiento. En segundo lugar, la estabilidad del pozo desempeña un papel importante; las características geológicas de la roca deben ser consideradas. Además de considerar si la junta es inicialmente competente, el sistema de la terminación debe ser diseñado para la vida del pozo. Una consideración final para el diseño de la terminación multilateral debe ser la necesidad de las reparaciones futuras que requieren reingreso en el lateral o agujero principal con el propósito de limpiezas periódicas, estimulaciones, o cualquier otra clase de reparación.

Es interesante observar eso aunque el perforar desempeña un papel muy importante adentro la actividad multilateral, el esquema multilateral de la clasificación se basa en la terminación más que en características de perforación.

TAML categoriza la terminación multilateral en niveles en función del riesgo y de la complejidad. La meta de terminaciones multilateral es alcanzar una unión con integridad mecánica e hidráulica aumentando de acuerdo con el nivel de complejidad.

Según la clasificación de TAML, hay seis niveles de terminación multilateral. El sistema más simple es el nivel 1, consistiendo en ramas perforados a partir del agujero abierto. Porque se requiere poco o nada de equipo de la terminación, no hay ayuda mecánica o aislamiento hidráulico. La ventaja de este sistema es su bajo costo y simplicidad. Sin embargo, la carencia de la tubería limita la instalación del equipo de terminación, y por consiguiente, no hay ningún control de producción. Además, esta clase de terminación se limita a las formaciones competentes capaces a proporcionar la estabilidad de la perforación.

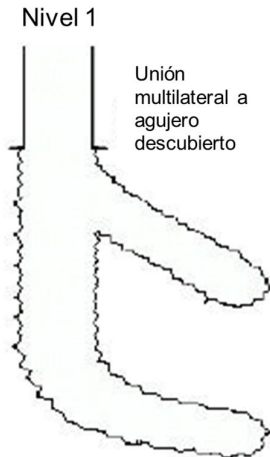


Figura 1. Escenario de Terminación Nivel 1, de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

El paso siguiente en complejidad es el nivel 2. En este nivel, el agujero principal se adema mientras que el lateral es en agujero descubierto o con un liner. La presencia de tubería en el agujero principal ayuda a reducir el riesgo de la perforación como derrumbes.

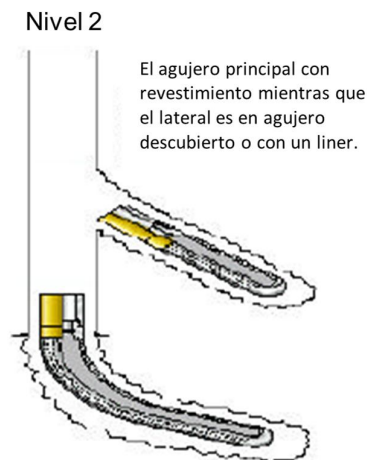


Figura 2. Escenario de Terminación Nivel 2 de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

El nivel siguiente de la terminación es el nivel 3. Este panorama requiere de agujero principal que se ademará y cementará; en el pozo del lateral se coloca liner pero sin cementar. La ventaja principal de esta terminación es la ayuda mecánica dado por la tuberías en el área de la junta. Por lo tanto, la junta está parcialmente protegida contra derrumbamiento. Es importante comentar eso

aunque la ayuda mecánica se da, allí no existe ningún aislamiento hidráulico en la junta.

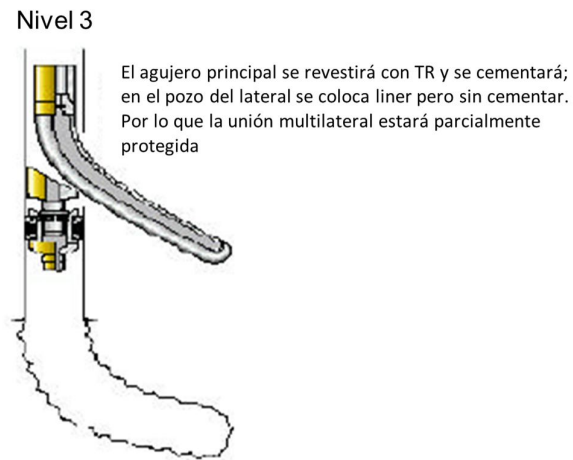


Figura 3. Escenario de Terminación Nivel 3 de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

El nivel 4 es exactamente igual, sin embargo, la diferencia es que ambos agujeros están ademados y cementados. Por esta razón, está considerado que la junta está protegida mecánicamente contra derrumbes. Sin embargo, no hay aislamiento hidráulico completo en la junta puesto que el cemento puede ser incapaz apoyar la presión diferencial grande, o la podía fallar en un cierto plazo con aumentos de la presión del “drawdown” o contrapresión.

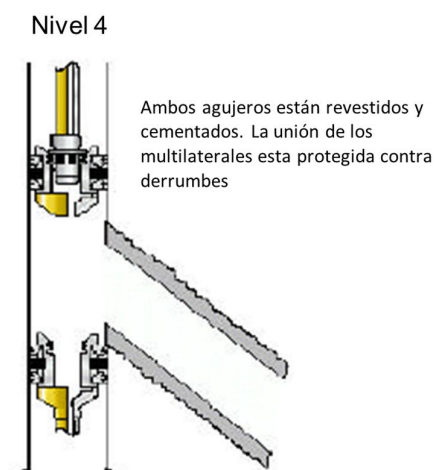


Figura 4. Escenario de Terminación Nivel 4 de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

Solamente los niveles 5 y 6 proporcionan integridad de presión en la junta y solamente el nivel 6 proporciona integridad mecánica e hidráulica completa. La terminación del nivel 5 requiere una configuración compleja de los empaques para proporcionar integridad de presión.

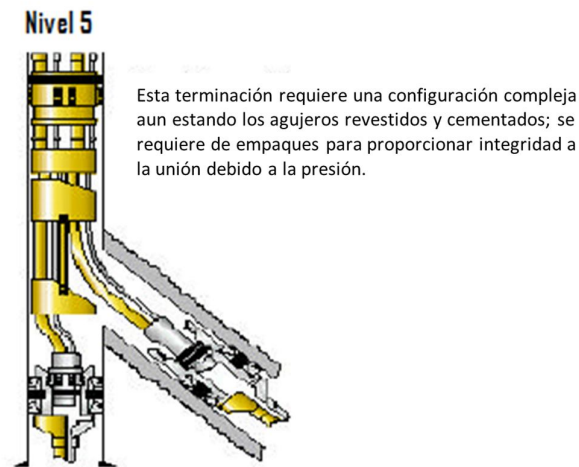


Figura 5. Escenario de Terminación Nivel 5 de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

En este caso, se ademan ambos agujeros y los empaques, el aislamiento proporcionan tres puntos que sellan en el pozo. Dos de los tres están en el área de la junta en el agujero principal; el primero está arriba, y el segundo abajo. El tercero está en el lateral, debajo de la junta. Este arreglo permite el aislamiento de la junta, y consecuentemente, un mejor aislamiento hidráulico alcanzado cuando el equipo de la terminación funciona conjuntamente con el cemento. Finalmente, es importante comentar que la integridad de presión está alcanzada con equipo de terminación.

La característica principal de la terminación del nivel 6 es que la integridad mecánica y la integridad hidráulica en la junta se alcanzan usando una junta pre-armada. Así la integridad hidráulica se obtiene a través de la tubería más que con equipo de terminación. Esta condición trae algunas ventajas sobre los niveles más bajos, ayuda a prevenir y reducir los problemas relacionados con la calidad del trabajo de cementación.

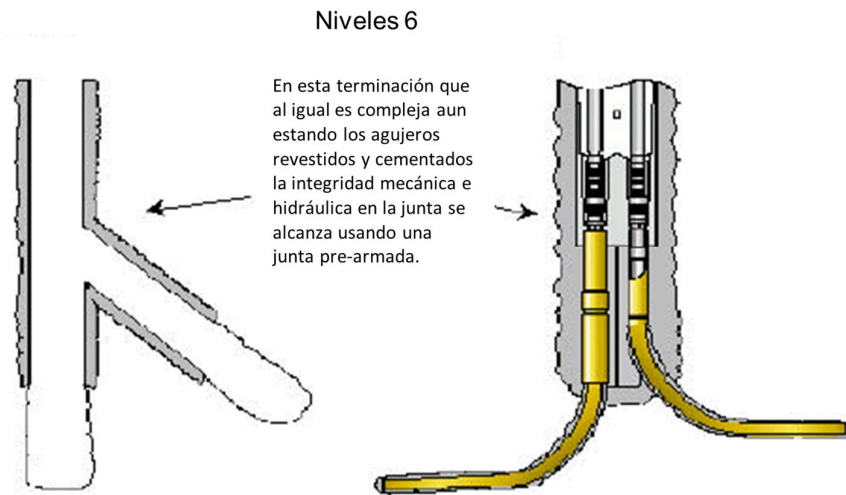


Figura 6. Escenario de Terminación Nivel 6 de acuerdo con el Avance Técnico de Pozos Multilaterales TAML.

I.VII MODELADO DE ESTABILIDAD DEL POZO.

La simulación de la estabilidad del pozo tiene el propósito de predecir la redistribución de esfuerzos alrededor del pozo como resultado de perforar, de la terminación, o de operaciones de producción. Los elementos más importantes necesitados para simular los problemas geomecánicos son el modelo constitutivo del comportamiento de la roca y el criterio apropiado de falla. Los modelos constitutivos del comportamiento comprenden éstos que usan la teoría de la elasticidad a modelos más complejos que consideran las teorías de plasticidad, porosidad de los materiales, la temperatura, y los efectos dependientes del tiempo.

Los pozos convencionales están diseñados tomando en cuenta los posibles criterios de falla, como son la fractura en la pared del pozo debido a los esfuerzos de tensión y colapso del agujero por los esfuerzos de corte.

La estabilidad de un pozo depende de muchos factores, entre ellos destacan, el tipo de formación, la presión de poro, la presión interna generada por el fluido de control, propiedades de poro elasticidad de la roca y propiedades hidráulicas del pozo y su geometría. Para un solo pozo la estabilidad, así como la distribución de esfuerzos en torno a la vecindad del pozo usando las

características de poro elasticidad de la roca de la formación, se han abordado utilizando métodos analíticos y numéricos por Absouleiman and Cui^[12]; Cui I., Cheng A.H.-D.^[11], and Absouleiman I.^[3]

I.VIII ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE UN POZO SIMPLE.

Un intento por formular de forma analítica el problema de la estabilidad de pozos fue hecho por Bradley^[6]. El uso las ecuaciones de Kirsch^[25] combinada con la solución propuesta por Fairhurst^[15] para desarrollar expresiones analíticas de distribución de la tensión alrededor de perforaciones inclinadas usando la teoría elástica lineal. Charlez^[8] explica que las ecuaciones de Kirsch^[25] fueron formuladas para calcular las tensiones en una placa infinita sujeta a un estado de tensión inicial. La solución de Kirsch^[25] dice que la presencia de un agujero circular en el centro de la placa produce una alteración dentro de la placa solida por la condición de tensión inicial. Ya que las ecuaciones de Kirsch^[25] se derivan de la suposición de que una roca es isotrópica y homogénea, las ecuaciones de Bradley^[6] mantienen esta condición. La condición del plano de tensión es también supuesta, indicando que el componente de tensión paralelo al eje del pozo es insignificante comparada a los componentes de tensión radial y tangencial. Además Bradley^[6] supuso que no había interacción entre el fluido de perforación y el fluido de formación in situ.

Bratli^[7] inicialmente investigó problemas de arenamiento, el cual ocurre durante la producción de arenas poco consolidadas. Ellos se enfocaron en los mecanismos que desestabilizan a la arena detrás de perforaciones abiertas y extendió este análisis teórico de tensión a pozos cilíndricos para estudiar la estabilidad. Debido a que ellos supusieron la existencia de material pobremente consolidado, consideraban que la falla se localizaba en una zona alrededor del pozo, conocida como la zona plástica.

Ellos analizaron el comportamiento de la tensión de la roca en esta región donde ocurre la alta concentración de tensión efectiva.

Aadnoy y Chenevert^[2] y Aadnoy^[1] usan el enfoque de Bradley^[6] para hacer un análisis detallado acerca de cómo la inclinación de la perforación puede

influenciar la estabilidad de la perforación. Ellos consideraron dos diferentes criterios de falla compresiva para analizar el colapso de perforación: Los criterios de Van Mises y Jaeger^[36], el primero toma en cuenta la tensión principal intermedia mientras que el segundo la revoca. El criterio de Jaeger^[23], el cual es una extensión del criterio de Mohr-Coulomb, y sirve para rocas sedimentarias laminadas porque considera la existencia de un plano de debilidad que puede afectar el comportamiento de la roca. McLean y Addis^[27] también usan la solución de Bradley^[6], pero ellos enfocan su análisis seleccionando un criterio de falla apropiado para calcular las densidades de fluidos de perforación segura. Ellos descubrieron que cuando se usa un modelo constitutivo elástico lineal, los criterios que no considera la influencia de tensión principal intermedia, tienen probabilidad de subestimar la fuerza de la roca.

Previa investigación fue conducida considerando que la roca es homogénea e isotrópica. Aadnoy^[1] y Ong y Roegregers^[28] intentan proveer un mejor entendimiento de los efectos de las propiedades anisotrópicas de la roca sobre la estabilidad del pozo. Las suposiciones que ellos hicieron son que la roca se comporta como formación elástica lineal, una condición de tensión de plano prevalece, y no hay interacción entre los fluidos de formación in situ y los fluidos de perforación. Para describir completamente el comportamiento mecánico de la roca, el número de constantes elásticas que Ong y Roegregers^[28] sugieren son cinco: 2 módulos de elasticidad, 2 relaciones de Poisson y 1 modulo de corte o cizalla. Ellos concluyeron que la anisotropía, influencia fuertemente la estabilidad de la roca, especialmente cuando las inclinaciones del pozo son altas u horizontales

Detournay y Cheng^[14] presentaron soluciones analíticas para un pozo circular dentro de una formación homogénea e isotrópica, la cual tiene un comportamiento lineal y de acuerdo a la teoría poroelástica.

Estas soluciones fueron los primeros intentos para formular los problemas dependientes del paso del tiempo originados por el proceso de difusión a través del medio poroso relacionado a la conductividad hidráulica de la roca. Estas soluciones están restringidas a la condición donde el eje del pozo coincide con la dirección de la tensión principal vertical.

I.IX ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA LA UNIÓN DE POZOS MULTILATERALES.

La distribución de esfuerzos en una placa infinita con dos agujeros iguales o desiguales ha sido estudiada por muchos investigadores a través de diferentes enfoques. Jeffery^[24], sentó las bases para la tensión y tendencia del plano en coordenadas bipolares, las cuales fueron usadas por Ling^[26] para resolver el problema de en una placa infinita con dos agujeros iguales o desiguales bajo esfuerzos generales en un campo. Iwaki y Miyao^[22], expandieron la solución de Ling a dos agujeros desiguales en una placa infinita bajo esfuerzos de tensión de campo y presión interna o abertura uniforme sobre las paredes de los agujeros. Para más de dos hoyo circulares iguales, Howland y Knight^[21], resolvieron una clase de configuraciones periódicas aprovechando la invariante de algunas transformaciones de coordenada. Un año después Green^[17] descubrió un método general usando transformaciones de coordenadas para calcular la distribución de esfuerzos en una placa infinitamente grande conteniendo cualquier número de agujeros de cualquier tamaño bajo tensiones aplicadas en un campo infinito. Aunque la solución de Green^[17] es analíticamente poderosa, no fue acompañada de muchos ejemplos y resultados numéricos debido a las limitaciones de la computación de esos días.

La técnica de cartografía fue usada también exitosamente por Haddon^[18] para resolver dos agujeros iguales o desiguales bajo esfuerzos en un solo eje. El método alternativo de Schwartz^[31] de aproximaciones sucesivas ha sido también usado exitosamente por Ting^[34] y su equipo, Ukadgaonker y Patil^[35], y muchos otros para la solución de varias configuraciones. Un tratado comprehensivo en la materia fue copilado por Savin^[30]. Desafortunadamente, a excepción de la investigación de Iwaki y Miyao^[22], todas las soluciones exactas que existen, son aplicables a condiciones libres de esfuerzos en los límites del agujero, lo cual no es siempre el caso en problemas de Ingeniería Petrolera.

En un intento por descubrir un rango de aplicaciones más extenso, esta tesis presenta la solución explícita exacta para la distribución de esfuerzos en una placa infinita conteniendo dos agujeros circulares iguales o desiguales

sometidos a esfuerzos generales dentro de un plano infinito y presiones internas dentro de los agujeros.

I.IX.I PARA AGUJEROS IGUALES.

La solución analítica para una placa infinita con dos agujeros bajo esfuerzos de plano generales ha sido derivada por Ling^[26]. La solución de Ling^[26] se puede considerar como un caso especial cuando ambas presiones son cero y cuando ambos agujeros circulares son de igual tamaño. Los resultados obtenidos durante el desarrollo de este trabajo muestran que las dos soluciones dan resultados idénticos para el esfuerzo tangencial en el límite del agujero. Es también evidente en los resultados que la solución recién derivada converge a la solución clásica de Kirsch^[25] para un solo agujero cuando los dos agujeros están muy apartados uno del otro.

Ling^[26] también provee factores de concentración de esfuerzo tangencial cuando los dos agujeros circulares son tangenciales el uno con el otro. Desafortunadamente, esos factores no pueden ser verificados ya que las series en la solución recién derivada no convergen cuando los dos agujeros son tangenciales. Sin embargo, esta limitación no obstaculiza la aplicación porque los agujeros tangenciales son físicamente imposibles.

I.IX.II PARA AGUJEROS DIFERENTES.

La solución analítica para un plano infinito con dos agujeros desiguales bajo esfuerzos de tensión en un plano de un solo eje ha sido derivada por Haddon^[18], usando una técnica de cartografía conforme. La solución de Haddon^[18] se aplica cuando no hay presión dentro de los agujeros y cuando el esfuerzo principal en el infinito es cero.

La solución para dos agujeros desiguales bajo esfuerzos de tensión en un eje infinito, presión interna y esfuerzo de corte uniforme en el límite de un agujero se ha derivado de Iwaki y Miyao^[22], usando coordenadas bipolares. El desarrollo de las ecuaciones muestra la tensión máxima tangencial en el límite de los agujeros obtenida de una solución recién derivada cuando solo hay presión interna dentro del agujero secundario. Los resultados son consistentes con los reportados anteriormente. La solución de Iwaki y Miyao^[22] es

equivalente a la solución recién derivada pero solo puede ser extendida a más de dos agujeros circulares en el plano. Por otra parte. Este método de solución puede extenderse para cubrir cualquier número de agujeros de cualquier tamaño. Como se muestra originalmente por Green^[17].

I.X TEORÍA DE POROELASTICIDAD

El comportamiento de una roca porosa saturada sometida a carga, puede ser significativamente influenciado por la interacción entre el fluido que se encuentra a presión en el poro y la deformación de la matriz rocosa. Dos mecanismos que desempeñan un papel fundamental en la interacción entre el líquido intersticial y la roca porosa:

- a) Un aumento de la presión de poro induce una dilatación de la roca
- b) La compresión de la roca no monotónica causa un aumento de la presión de poro; continúa la deformación de la roca en forma progresiva.

Es Biot^[4] quien por primera vez desarrollo la teoría lineal de poroelasticidad que es compatible con estos dos mecanismos básicos. Se diferencia de las teorías desacopladas que han evolucionado a partir del trabajo anterior de Terzaghi^[33] en los siguientes aspectos:

- a) Un mecanismo de generación de presión de poro se caracteriza por el coeficiente correspondiente de Skempton^[32].
- b) El esfuerzo que rige la deformación de los sólidos porosos, se caracteriza por el coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot (α)
- c) La presión de Poro es la ley de difusión, acoplada al ritmo de cambio de la deformación volumétrica.

Biot^[4] desarrollo la primera teoría sobre la base de algunas suposiciones como la isotropía de la formación, la reversibilidad del fluido contenido en los poros. Posteriormente Biot, generalizo su teoría continuando con anisotropía y medio compresible.

Un medio poroelástico puede ser totalmente definido por cinco parámetros del material: 2 constantes elásticas, un parámetro de flujo y dos parámetros de esfuerzo de difusión. Las constantes elásticas son las mismas que en la clásica

teoría de la elasticidad, lo que podría ser el módulo de corte, la relación de Poisson $G(v)$. El flujo que obedece la Ley de Darcy y que se caracteriza por la conductividad hidráulica (κ), una función intrínseca de la permeabilidad (κ_D), y viscosidad dinámica del fluido (μ). Los otros dos parámetros que se incluyen son el coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot (α) y el coeficiente de presión de poro de Skempton^[32].

I.XI TEORÍA DE POROPLASTICIDAD.

La poroplasticidad es la respuesta de un medio poroso, puede ser simulado incorporando un modelo de plasticidad. Muchos modelos de plasticidad se han propuesto en el sólidos y mecánica de rocas, Charlez y Roates^[9], Veeken et al.^[37]. Con el nombre de “Camara de Arcilla” o “Cam Clay” se desarrolló un modelo a mediados de los años 60`s por Burland y Roscoe. Aunque fue desarrollado para los materiales de arcilla normalmente consolidada, la versión fue modificada posteriormente, adaptada para otros materiales como rocas sedimentarias por Veeken et al.^[37]. La elastoplasticidad es un enfoque que incorpora elemento finito, endurecimiento y ablandamiento por deformación fue desarrollado por Veeken et al.^[37] para la predicción de la estabilidad de pozos. El modelo de “Cam Clay” fue utilizado para describir el comportamiento poroplástico de la roca sólida y el grano se suponía elástico y plásticamente incompresible.

Modificando el modelo de “Cam Clay” se describe el comportamiento inelástico del material mediante una función de rendimiento.

$$\left(\frac{p}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{q}{Ma}\right)^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots(1.1)$$

Eso depende del primer esfuerzo invariante denominado “P”

$$p = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \dots\dots\dots(1.2)$$

Y el esfuerzo equivalente Mises, denominado “q”

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \dots\dots\dots(1.3)$$

Donde:

P= Esfuerzo principal

q= Esfuerzo equivalente Mises

M= Depende de la línea de estado crítico

a= Parámetros de endurecimiento de la roca

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ = Componentes del esfuerzo principal

I.XII CRITERIOS DE FALLA.

El criterio de falla es uno de los elementos necesarios para poder realizar un análisis de estabilidad.

Una vez que se han determinado los esfuerzos alrededor del agujero es necesario compararlos con la resistencia de la formación. En los puntos donde el estado de esfuerzos exceda la resistencia de la formación (ya sea por tensión o por compresión) es donde se considera se iniciará la falla. La inestabilidad del agujero durante la perforación puede ser atribuida al cierre del agujero. Estos cierres dependen de las tensiones fuera del campo y la respuesta de la tendencia de esfuerzos de la formación ya mencionados. El agujero puede causar problemas de atrapamientos. El máximo cierre permitido para la mayoría de los análisis es del 2% del radio del agujero.

Es aquí donde se necesita un criterio de falla adecuado que permita determinar con un alto grado de confiabilidad cuando se presentará una falla en el agujero independientemente del tipo que sea.

La mayoría de los criterios están expresados en términos de los esfuerzos principales, es por esto que los esfuerzos en la pared del agujero (σ_r , σ_θ y σ_z) se deben convertir a esfuerzos principales (σ_1 , σ_2 y σ_3). Uno de estos actúa perpendicularmente al agujero y está dado simplemente por la presión del pozo, Pw. Los dos restantes se determinan por la transformación del esfuerzo tangencial, σ_θ , del esfuerzo axial, σ_z y del esfuerzo de corte, $\tau_{\theta z}$ (ver Fig. 2.3), a esfuerzos principales. De esta manera, los esfuerzos principales pueden ser expresados como:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \\ \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \\ P_w \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Para poder definir con claridad algunos aspectos de la mecánica de una falla se presenta una gráfica de esfuerzo aplicado contra deformación axial de una muestra sometida a una prueba uniaxial (Fig. 7), la cual representa un resultado típico obtenido en una prueba de este tipo.

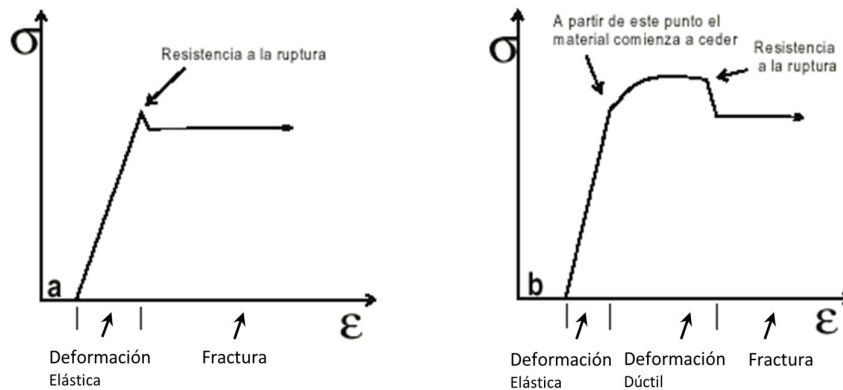


Figura 7. Diagrama de comportamiento esfuerzo contra deformación de una muestra en una prueba uniaxial. En la práctica la región dúctil puede ser muy pequeña. “a” representa un cuerpo elástico puro, y “b” muestra un cuerpo con un comportamiento inicialmente elástico hasta un esfuerzo diferencial límite a partir de ahí sufre una deformación dúctil hasta llegar a la ruptura

Región elástica: Si el esfuerzo es liberado en esta fase, la muestra recuperará su estado original.

Punto de cedencia: Es el punto después del cuál ocurrirán cambios permanentes, es decir, la muestra no volverá a su estado original una vez liberado el esfuerzo.

Resistencia uniaxial a la compresión: El esfuerzo máximo.

Región dúctil: Es la región en la cual la muestra experimenta una deformación permanente sin perder la capacidad de resistir cargas.

Región de ruptura: Es la región en la cual la capacidad de la muestra a resistir el esfuerzo disminuye rápidamente conforme se incrementa la deformación.

I.XII.I CRITERIOS DE FALLA POR TENSIÓN.

Se considera que el inicio de una falla por tensión ocurre cuando el esfuerzo mínimo efectivo en la pared del agujero se hace menor a la resistencia de la formación a la tensión. Por lo tanto el criterio de falla por tensión tiene la forma:

$$\sigma_3' \leq -|\sigma_t| \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

Donde σ_t es resistencia a la tensión de la roca y el esfuerzo principal mínimo efectivo está dado por el esfuerzo principal mínimo menos la presión de poro, esto es:

$$\sigma_3' = \sigma_3 - p_p \quad \dots\dots\dots(1.6)$$

En algunos casos, la P_w requerida para iniciar el Fracturamiento en la pared del agujero es menor que el esfuerzo principal menor. En estos casos el fracturamiento por tensión solo se propagará a una pequeña distancia de la pared del agujero resultando en una pérdida de fluidos mínima, la cual no constituirá realmente un problema. Por esto, cuando se inicia una fractura por tensión también se debe verificar si esta se propaga. Asumiendo que el esfuerzo horizontal mínimo es menor que el esfuerzo de sobrecarga, entonces el criterio de propagación puede ser expresado como:

$$P_w \geq \sigma_h \quad \dots\dots\dots(1.7)$$

I.XII.II CRITERIOS DE FALLA POR COMPRESIÓN

Existen varios criterios de falla que pueden ser usados para definir la falla compresiva del material, tales como los de: Ducker-Prager, Mohr Coulomb, Wu-Hudson y Hoek Brown. Se define que la Falla compresiva del material ocurre cuando las tensiones en un punto dentro de la pared del agujero alcanzan la superficie de falla definida por el criterio de Mohr Coulomb.

Estos pueden clasificarse en 4 categorías:

Categoría A: Lineal y con efecto del esfuerzo principal intermedio;

Categoría B: Lineal y sin efecto del esfuerzo principal intermedio;

Categoría C: No lineal y con efecto del esfuerzo principal intermedio;

Categoría D: No lineal y sin efecto del esfuerzo principal intermedio.

A continuación mencionaremos algunos de los criterios usados comúnmente:

Criterio de Drucker-Prager (categoría A),

$$\tau_{oct} = \tau_0 + k_m(\sigma_{oct} - p_f) \quad (1.8)$$

Criterio de Mohr-Coulomb (categoría B),

$$\sigma_1 - p_f = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\sigma_3 - p_f) + \frac{2S_0 \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (1.9)$$

Criterio de Wu-Hudson (categoría C),

$$q' = A + Bp' + cp'^2 \quad (1.10)$$

Criterio de Hoek-Brown (categoría D),

En las ecuaciones (3.16) a (3.19), $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ son los esfuerzos principales, p_f es la presión de poro, τ_0 , m , S_0 , ϕ , A , B , C , n , σ_c los parámetros materiales y

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{n\sigma_c}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} n^2 \sigma_c^2 + 4n\sigma_c (\sigma_1 + 2\sigma_3 - 3p_f) / 3 + 4\sigma_c^2} \quad (1.11)$$

$$q' = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.12)$$

$$p' = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - p_f \quad (1.13)$$

Después de realizar pruebas triaxiales con diferentes presiones de confinamiento, uno puede ajustar los puntos experimentales con cualquiera de las ecuaciones (1.8) a (1.11) y de esta manera obtener los parámetros materiales utilizados en ellas.

De los criterios mencionados podemos decir:

Generalmente, los criterios de falla que no consideran la influencia del esfuerzo principal intermedio (categorías B o D) son conservadores en la predicción de la estabilidad del agujero, particularmente cuándo se utilizan con modelos lineales elásticos. Aunque las verdaderas pruebas triaxiales muestran los efectos del esfuerzo principal intermedio, los criterios de falla que incorporan el efecto de éste (categorías A o C) tienden a sobre predecir la resistencia de la formación y la estabilidad del agujero.

En la mayoría de los casos es adecuada la aplicación de criterios de falla lineales. Sin embargo, para formaciones muy débiles o con presiones de confinamiento mayores a 14 MPa, son necesarios los criterios de falla no lineales.

Bradley^[6] desarrollo un análisis de estabilidad utilizando el criterio de falla de Drucker Prager. Esta solución elástica que hace caso omiso de los efectos de presión de poro y deformación de la roca; se comparó con la solución de poroelasticidad considerando que depende del tiempo, fluido en los poros e interacción de la matriz sólida. Se concluyó que debido al efecto de presión de poro, la “nube de esfuerzos” se modificó a partir de su contraparte estática. Esto demuestra que la nube de soluciones elásticas no estiman los posibles fallos.

Más tarde se desarrollo la solución para pozo inclinado por Cui et al. En 1999; se utilizo para examinar dos tipos de fallas iniciadas en la pared del pozo:

- a) Fracturamiento de pozos y la pérdida de circulación de lodo debido a la resistencia a la tensión tangencial efectiva; el esfuerzo excede la resistencia del material.
- b) El cierre del pozo o colapso debido a un exceso de esfuerzo compresivo.

El Fracturamiento del pozo fue descrito por la resistencia a la tensión de la roca. Para la falla de corte, el criterio de falla de Drucker Prager fue adoptado por Desai and Siriwardana^[13]. Ambos modos de falla tanto Fractura como Colapso se examinaron como funciones del tiempo, ángulo de inclinación,

esfuerzo in situ, presión de poro inicial in situ, presión de lodo y propiedades poromecánicas del material.

I.XIII ESTABILIDAD DEL POZO

Para realizar un análisis de sensibilidad y calibración de nuestro modelo es necesario investigar el colapso en la unión de los multilaterales, por lo que se empleara el criterio de falla de Drucker-Prager, el cual es un modelo dependiente de la presión para determinar si un material ha sido deformado o colapsado.

Este criterio de falla se originó para estudiar la deformación plástica de los suelos, se han aplicado muchas variantes como roca, hormigón, polímeros, espumas y otros materiales que dependen de una presión para ser deformados.

El criterio de falla de Drucker-Prager tiene la forma

$$\sqrt{J_2} = A + BI_1 \dots\dots\dots (1.14)$$

O bien

$$\sqrt{J_2} - BI_1 - A = 0 \dots\dots\dots (1.15)$$

Donde I_1 es la primera invariante del tensor de esfuerzos de Cauchy y J_2 es la segunda invariante de la desviación del tensor de esfuerzos de Cauchy. Para la condición de deformación plana, los parámetros A y B están relacionados con la cohesión del material c y el ángulo de fricción interna ϕ , como se muestra a continuación:

El modelo de Druker-Prager puede ser escrita en términos de los esfuerzos principales como:

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots\dots\dots (1.16)$$

Donde:

$$B = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \dots\dots\dots (1.17)$$

$$A = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \dots\dots\dots (1.18)$$

Siendo A y B variantes de la roca que predomine en la zona perforada donde se realice el análisis de estabilidad, obteniendo sus valores de ángulo de fricción interna " ϕ " y cohesión " c " en pruebas de laboratorio.

Siendo que la falla ocurre en la pared del pozo si la tensión de colapso efectiva da valores negativos

$$\sigma_{coll} = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(-\sqrt{J_2} + BI_1 - A \right)^2 < 0 \dots\dots\dots (1.19)$$

Dónde:

θ = Es el ángulo alrededor del agujero.

CAPÍTULO II. PLANTEAMIENTO DEL MODELO ANALÍTICO.

Es presentada una solución analítica para los esfuerzos en la junta y su alrededor para analizar la estabilidad en un pozo multilateral.

En la Fig. 8. Se presenta el perfil de un pozo multilateral y las zonas principales en las que se divide para su estudio así como la zona de interés para el planteamiento de este modelo y las diferentes distancias entre el pozo principal y el secundario hasta una distancia tal que los esfuerzos alrededor de estos se comportan como si fueran dos pozos principales independientes.

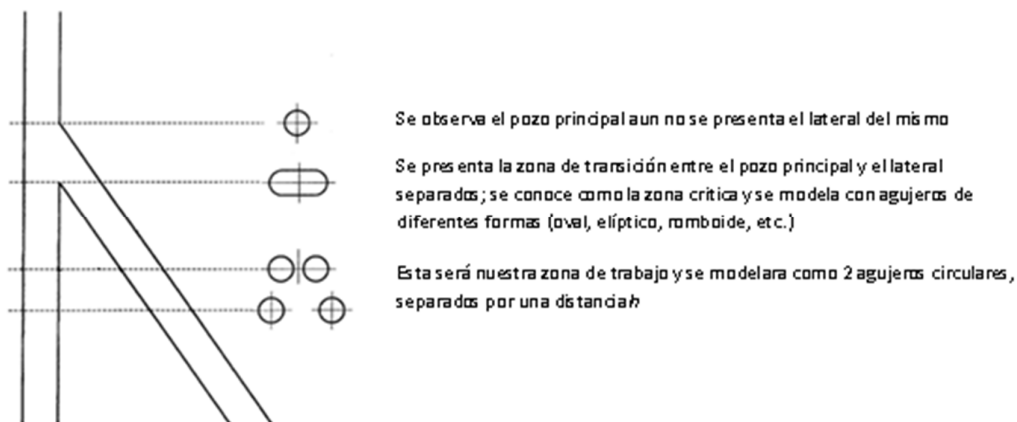


Fig. 8 Perfil de un Pozo Multilateral, dividido en sus tres zonas principales.

El modelo considera el agujero principal y el pozo lateral como dos agujeros circulares en un plano infinito con varias relaciones de diámetro y separación variable.

El sistema es sujeto a un estado de esfuerzos horizontales mínimo y máximo, presión de pozo y pesos de lodo.

Un esquema del problema es presentado en la Fig. 9. Los dos pozos se modelan como dos agujeros circulares en un plano bidimensional infinito. Sus centros y radios son O_1 y O_2 y a_1 y a_2 respectivamente. La distancia de centro a centro entre los pozos se define como h . Las presiones del fluido de control dentro de los pozos son denotadas por P_1 y P_2 . S_H y S_h son los esfuerzos principales mayor y menor dentro del campo de esfuerzos, el eje Y es el ángulo que S_H hace con la línea de centro a centro. Un sistema de coordenadas cartesiano es atado a cada pozo, con el cual el origen coincide

con el centro de pozo. El eje X se alinea a lo largo de la línea de centro a centro con dirección positiva apuntando hacia el otro pozo. Un sistema coordenadas polares es también atado a cada pozo. Coordenadas polares no dimensionales y parámetros no dimensionales importantes son definidos.

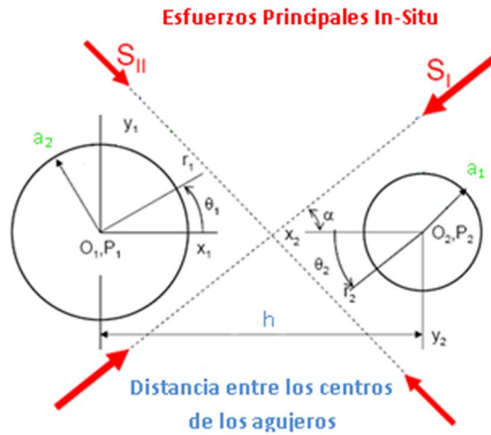


Fig. 9 Muestra de forma esquemática el problema que analizaremos.

Desarrollo del Modelo Analítico

En este método analítico trabajaremos con funciones de Green^[5] para llegar a la solución de los esfuerzos en un plano infinito para un pozo circular o para 2 agujeros circulares.

Se aplica un sistema de coordenadas polares a cada agujero, empleando coordenadas polares adimensionales, como se muestra en el apéndice para definir los siguientes parámetros.

$$\rho_1 = \frac{r_1}{h} \quad y \quad \rho_2 = \frac{r_2}{h} \dots\dots\dots (2.1)$$

Y planteando cada número complejo como un vector, entonces:

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = h e^{i\alpha} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = h \dots\dots\dots (2.3)$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad entre h

$$\rightarrow \frac{r_1}{h} e^{i\theta_1} + \frac{r_2}{h} e^{i\theta_2} = \frac{h}{h} \dots\dots\dots (2.4)$$

Recordando que $\rho_1 = \frac{r_1}{h}$ y $\rho_2 = \frac{r_2}{h}$

$$\rightarrow \rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} = 1 \dots\dots\dots (2.5)$$

Aplicando la Serie de Taylor para logaritmos a nuestra ecuación anterior.

$$\ln(\rho_2 e^{i\theta_2}) = \ln(1 - \rho_1 e^{i\theta_1}) \dots\dots\dots (2.6)$$

Esto recordando que: $\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} = 1$

$$\rightarrow \ln(1 - \rho_1 e^{i\theta_1}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (\rho_1 e^{i\theta_1})^k \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\ln(1 - \rho_1 e^{i\theta_1}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k e^{ik\theta_1} \dots\dots\dots (2.8)$$

Recordando que: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow \ln(1 - \rho_1 e^{i\theta_1}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k [\cos(k\theta_1) + i \operatorname{sen}(k\theta_1)] \dots\dots\dots (2.9)$$

Aplicando la multiplicación y separando términos:

$$\rightarrow \ln(1 - \rho_1 e^{i\theta_1}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k \cos(k\theta_1) - i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k \operatorname{sen}(k\theta_1) \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\therefore \ln \rho_2 + \ln(e^{i\theta_2}) = \ln \rho_2 + i\theta_2 \dots\dots\dots (2.11)$$

Eliminando el logaritmo con el exponencial ya que son funciones inversas; recordamos que se trata de una igualdad por lo que cada termino debe ser igual a su parte de la Ecuación.

$$\rightarrow \ln \rho_2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k \cos(k\theta_1) \dots\dots\dots (2.12)$$

$$\rightarrow \theta_2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) \rho_1^k \operatorname{sen}(k\theta_1) \dots\dots\dots (2.13)$$

Aplicando el **Binomio Generalizado de Newton** $(1 - x)^{-n}$, en nuestra ecuación y recordando que: $\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} = 1$

$$\rightarrow (\rho_2 e^{i\theta_2})^{-n} = (1 - \rho_1 e^{i\theta_1})^{-n} \dots\dots\dots (2.14)$$

$$(\rho_2 e^{i\theta_2})^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (\rho_1 e^{i\theta_1})^k \dots\dots\dots (2.15)$$

$$(\rho_2 e^{i\theta_2})^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k e^{ik\theta_1} \dots\dots\dots (2.16)$$

$$(\rho_2 e^{i\theta_2})^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k [\cos(k\theta_1) + i \operatorname{sen}(k\theta_1)] \dots\dots\dots (2.17)$$

$$(\rho_2 e^{i\theta_2})^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) + i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k \operatorname{sen}(k\theta_1) \dots\dots (2.18)$$

Recordando las propiedades trigonométricas

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

Entonces de la Ecuación (2.18), obtenemos:

$$\rho_2^{-n} e^{-i\theta_2 n} = \rho_2^{-n} [\cos(-n\theta_2) + i \operatorname{sen}(-n\theta_2)] \dots\dots\dots (2.19)$$

$$\rho_2^{-n} e^{-i\theta_2 n} = \rho_2^{-n} \cos(n\theta_2) - i \rho_2^{-n} \operatorname{sen}(n\theta_2) \dots\dots\dots (2.20)$$

Recordando que es una igualdad y la parte real debe ser igual a su parte real así como la parte imaginaria debe ser igual a la parte imaginaria, entonces de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\rho_2^{-n} \cos(n\theta_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) \dots\dots\dots (2.21)$$

$$\rho_2^{-n} \operatorname{sen}(n\theta_2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_1^k \operatorname{sen}(k\theta_1) \dots\dots\dots (2.22)$$

Por lo que entonces nuestra siguiente ecuación se plantea como:

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)i\theta_2} \dots\dots\dots (2.23)$$

La podemos descomponer de la siguiente forma.

$$\frac{1}{\rho_2^n e^{(n+2)i\theta_2}} * \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2} = \frac{\rho_2^2}{\rho_2^{n+2} e^{(n+2)i\theta_2}} \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\rightarrow \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 e^{i\theta_2})^{n+2}} = \frac{\rho_2^2}{(1-\rho_1 e^{i\theta_1})^{n+2}} = \rho_2^2 * \left(\frac{1}{(1-\rho_1 e^{i\theta_1})^{n+2}} \right) \dots\dots\dots (2.25)$$

Aplicando Ley de Cosenos a nuestro planteamiento

$$\rho_2^2 = \rho_1^2 + 1 - 2\rho_1 \cos\theta_1 \dots\dots\dots (2.26)$$

Entonces aplicando a nuestra Ecuación.

$$\rho_2 e^{i\theta_2} = 1 - \rho_1 e^{i\theta_1} \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\rho_2 e^{i\theta_2} = (1 - \rho_1 \cos\theta_1) - (\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1) \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\rightarrow \rho_2 = \sqrt{(1 - \rho_1 \cos\theta_1)^2 + (\rho_1 \sen\theta_1)^2} \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\rho_2 = \sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1^2 \cos^2\theta_1 + \rho_1^2 \sen^2\theta_1} \dots\dots\dots (2.30)$$

$$\rho_2 = \sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1^2 (\cos^2\theta_1 + \sen^2\theta_1)} \dots\dots\dots (2.31)$$

Recordando que siempre que el ángulo, es decir θ sea el mismo entonces:

$$\cos^2\theta + \sen^2\theta = 1$$

$$\rho_2^2 = \sqrt{1 - 2\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1^2 \cancel{\cos^2\theta_1} + \rho_1^2 \cancel{\sen^2\theta_1}} \dots\dots\dots (2.32)$$

$$\therefore \rho_2^2 = \rho_1^2 + 1 - 2\rho_1 \cos\theta \dots\dots\dots (2.33)$$

$$(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos\theta_1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+2+k-1}{k} (\rho_1 e^{i\theta_1})^k \dots\dots\dots (2.34)$$

Recordando que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sen\theta \dots\dots\dots (2.35)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sen(-\theta) \dots\dots\dots (2.36)$$

$$\rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sen\theta \dots\dots\dots (2.37)$$

Por consiguiente:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \dots\dots\dots (2.39)$$

Por lo que sustituyendo la ecuación (2.39) en la ecuación (2.34), obtenemos:

$$\rho_2^2 = 1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \left[\frac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2} \right] * \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\rho_2^2 = [1 + \rho_1^2 - \rho_1 e^{i\theta_1} - \rho_1 e^{-i\theta_1}] * \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\rho_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^{k+1} e^{(k+1)\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^{k+1} e^{(k-1)\theta_1 i} \dots\dots\dots (2.42)$$

Por lo cual simplificando la ecuación (2.42), recordando que todas las series con límites que tienden al infinito pueden escribirse de diferentes formas variando el límite inferior.

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} - \rho_1 e^{-i\theta_1} + \binom{n+1}{0} \rho_1^0 e^0 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k-1} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+2}{k+1} \rho_1^{k+2} \dots \quad (2.43)$$

Recordando que siempre que $\binom{m}{0} = 1$; entonces simplificamos nuestro 1er término con el 3er término y el 2º término con el 4º, para obtener:

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1} \right] \rho_1^k e^{k\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k+2}{k+1} - \binom{n+k+1}{k} \right] \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} - \rho_1 e^{-i\theta_1} + 1 \dots \quad (2.44)$$

Simplificando entonces la primer parte de nuestra Ecuación

$$\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1} = \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!} - \frac{(n+k)!}{(n+k)-(k-1)!(k-1)!} \dots \quad (2.45)$$

$$= \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!} - \frac{(n+k)!}{(n+1)!(k-1)!} \dots \quad (2.46)$$

$$= \frac{(n+k+1)(n+k)!}{(n+1)!k!} - \frac{(n+k)!}{(n+1)!(k-1)!} * \frac{k}{k} \dots \quad (2.47)$$

$$= (n+k+1) \frac{(n+k)!}{(n+k)!k!} - k \frac{(n+k)!}{(n+1)!k!} \dots \quad (2.48)$$

$$= [(n+k+1) - k] \left(\frac{(n+k)!}{(n+1)!k!} \right) = (n+1) \left[\frac{(n+k)!}{(n+1)!k!} \right] \dots \quad (2.49)$$

$$= \frac{(n+k)!}{n!k!} = \binom{n+k}{k} \dots \quad (2.50)$$

Simplificando la segunda parte de nuestra Ecuación.

$$\binom{n+k+2}{k+1} - \binom{n+k+1}{k} = \frac{(n+k+2)!}{(n+1)!(k+1)!} - \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!} * \frac{(k+1)}{(k+1)} \dots \quad (2.51)$$

$$= \frac{(n+k+2)(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} - \frac{(k+1)(n+k+1)!}{(n+1)!k!(k+1)} \dots \quad (2.52)$$

$$= (n+k+2) \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} - (k+1) \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \dots \quad (2.53)$$

$$= [(n+k+2) - (k+1)] \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} = (n+1) \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \dots \quad (2.54)$$

$$= \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} = \binom{n+k+1}{k+1} \dots \quad (2.55)$$

Finalmente sustituyendo ambos términos a nuestra Ecuación.

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} - \rho_1 e^{-i\theta_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+0}{0} \rho_1^0 e^{0\theta_1 i} \dots (2.56)$$

Absorbiendo el último término ya que su valor es 1

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} - \rho_1 e^{-i\theta_1} \dots (2.57)$$

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_1^k e^{k\theta_1 i} - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} e^{k\theta_1 i} \right] - \rho_1 e^{-i\theta_1} \dots (2.58)$$

Simplificando y separando parte Real y parte Imaginaria

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \binom{n+k}{k} \rho_1^k [\cos(k\theta_1) + i \operatorname{sen}(k\theta_1)] - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} [\cos(k\theta_1) + i \operatorname{sen}(k\theta_1)] \right\} - \rho_1 [\cos(-\theta_1) + i \operatorname{sen}(-\theta_1)] \dots (2.59)$$

Recordando las identidades trigonométricas mencionadas anteriormente

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} \cos(k\theta_1) \right] - \rho_1 \cos \theta_1 + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} \cos(k\theta_1) \right] + i \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 \right\} \dots (2.60)$$

Por lo que finalmente tenemos:

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \rho_2^{-n} \{ \cos[-(n+2)\theta_2] + i \operatorname{sen}[-(n+2)\theta_2] \} \dots (2.61)$$

$$\rho_2^{-n} e^{-(n+2)\theta_2 i} = \rho_2^{-n} \cos(n+2)\theta_2 - i \rho_2^{-n} \operatorname{sen}(n+2)\theta_2 \dots (2.62)$$

Entonces nuevamente separando la parte Real con su parte Real y la parte Imaginaria con su parte Imaginaria, obtenemos:

$$\rho_2^{-n} \cos(n+2)\theta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} \cos(k\theta_1) \right] - \rho_1 \cos \theta_1 \dots (2.63)$$

$$\rho_2^{-n} \operatorname{sen}(n+2)\theta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[- \binom{n+k}{k} \rho_1^k \cos(k\theta_1) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_1^{k+2} \cos(k\theta_1) \right] - \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 \dots (2.64)$$

Finalmente las ecuaciones obtenidas anteriormente son exactamente iguales difiriendo únicamente en el subíndice de la constante. Las fórmulas para transformación del sistema de coordenadas (ρ_1, θ_1) y para el sistema (ρ_2, θ_2) se obtienen a partir de estas ecuaciones por permutaciones

La solución del esquema del cual ya se habló en la sección del método de solución que se emplea en este desarrollo, lo repetiremos aquí para aclararlo. En primer lugar se consideran esfuerzos infinitos S_1 y S_2 , estas se expanden en 3 componentes se amplió en tres componentes S_{xx} , S_{yy} y S_{xy} . Teniendo dos centros con presión de O_1 y O_2 tomando en cuenta que existe la función de esfuerzos de Airy para cuando no hay agujeros que esta expresada como:

$$\phi_0 = h^2 \left[P_1 \lambda_1^2 \ln \rho_1 + P_2 \lambda_2^2 \ln \rho_2 + \frac{S_{xx}}{2} \rho_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{S_{yy}}{2} \rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{S_{xy}}{2} \rho_1^2 \sin 2\theta_1 \right] \dots\dots\dots (2.65)$$

ϕ_0 Por homología de nuestras ecuaciones y por el planteamiento que venimos considerando durante el desarrollo, tiene una forma similar cuando se expande alrededor del agujero 2. La función del esfuerzo de Airy adicional debe producir cero esfuerzos y un valor único de tensiones y desplazamientos.

Por lo tanto la que llamaremos función final del esfuerzo de Airy y emplearemos para la solución es la superposición de funciones individuales del esfuerzo de Airy. Se representa como continuación:

$$\phi_f = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 \dots\dots\dots (2.66)$$

Esta función se puede expresar en términos de ρ_1 y θ_1 , utilizando formulas de transformación a coordenadas polares vista anteriormente, por lo tanto los esfuerzos en torno al agujero principal se derivan de la siguiente forma:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_f}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_f}{\partial \theta_1^2} \right) \dots\dots\dots (2.67)$$

Sustituyendo la Función del esfuerzo de Airy final en la ecuación anterior.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{1}{\rho_1^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta_1^2} \right) \right] \dots\dots\dots (2.68)$$

Separando términos y al final los sumamos

$$\rightarrow \sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \theta_1^2} \right) + \sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \theta_1^2} \right) + \sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \theta_1^2} \right) \dots (2.69)$$

$$\rightarrow \sigma_{rr}^0 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \theta_1^2} \right) \dots (2.70)$$

Tenemos la Ecuación de la Función de Esfuerzos de Airy

$$\phi_0 = h^2 \left[P_1 \lambda_1^2 \ln \rho_1 + P_2 \lambda_2^2 \ln \rho_2 + \frac{S_{xx}}{2} \rho_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{S_{yy}}{2} \rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{S_{xy}}{2} \rho_1^2 \sin 2\theta_1 \right] \dots (2.71)$$

Ahora sustituyendo el valor de ρ_2 obtenido anteriormente; en la ecuación anterior.

$$\ln \rho_2 = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \rho_1^k \cos(k\theta_1) \dots (2.72)$$

$$\therefore \phi_0 = h^2 \left[P_1 \lambda_1^2 \ln \rho_1 - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \rho_1^k \cos(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} \rho_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{S_{yy}}{2} \rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{S_{xy}}{2} \rho_1^2 \sin 2\theta_1 \right] \dots (2.73)$$

Derivando parcialmente con respecto a ρ_1

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} = h^2 \left[P_1 \frac{\lambda_1^2}{\rho_1} - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^k \rho_1^{k-1} \cos(k\theta_1) + S_{xx} \rho_1 \sin^2 \theta_1 + S_{yy} \rho_1 \cos^2 \theta_1 + S_{xy} \rho_1 \sin(2\theta_1) \right] \dots (2.74)$$

Ahora sustituyendo el valor de $\frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1}$ obtenido en la ecuación anterior en la

Ecuación de σ_{rr}

$$\rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} = \frac{P_1 \lambda_1^2}{\rho_1^2} - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{k-2} \cos(k\theta_1) + S_{xx} \sin^2(\theta_1) + S_{yy} \cos^2(\theta_1) + S_{xy} \sin(2\theta_1) \dots (2.75)$$

Aún falta el segundo término pero para facilitar la expresión con continuamos con que:

$$\rightarrow \sigma_{rr}|_{\rho_1=\lambda_1} = P_1 \dots (2.76)$$

Entonces evaluando, obtenemos:

$$\left. \frac{1}{h^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\lambda_1} = P_1 - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} \cos(k\theta_1) + S_{xx} \text{sen}^2 \theta_1 + S_{yy} \cos^2 \theta_1 + S_{xy} \text{sen}(2\theta_1) \quad (2.77)$$

Para transformar cosenos cuadrados a términos múltiples ocupamos las siguientes identidades.

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

Por lo tanto sustituyendo estas identidades trigonométricas, obtenemos:

$$\left. \frac{1}{h^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\lambda_1} = P_1 - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} \cos(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} [1 - \cos(2\theta_1)] + \frac{S_{yy}}{2} [1 + \cos(2\theta_1)] + S_{xy} \text{sen}(2\theta_1) \quad (2.78)$$

Derivando la segunda parte de Nuestra Ecuación con respecto a θ_1

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} = h^2 \left[-P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \rho_1^k [-\text{sen}(k\theta_1)k] + S_{xx} \rho_1^2 \text{sen}(\theta_1) - \cos(\theta_1) + S_{yy} \rho_1^2 \cos(\theta_1) (-\text{sen}\theta_1) + S_{xy} \rho_1^2 \cos(2\theta_1) \right] \quad (2.79)$$

Simplificamos antes de Derivar, recordando que:

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)$$

$$\text{sen}(\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta)$$

$$\text{sen}'(2\theta) = \cos(2\theta) 2$$

$$\therefore \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} = h^2 \left[P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^k \text{sen}(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} (\rho_1^2 \text{sen}(2\theta_1)) - \frac{S_{yy}}{2} (\rho_1^2 \text{sen}(2\theta_1) + S_{xy} \rho_1^2 \cos(2\theta_1)) \right] \quad (2.80)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} = h^2 \left[P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^k k \cos(k\theta_1) + S_{xx} \rho_1^2 \cos(2\theta_1) - S_{yy} \rho_1^2 \cos(2\theta_1) - 2 S_{xy} \rho_1^2 \text{sen}(2\theta_1) \right] \quad (2.81)$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} = P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{k-2} k \cos(k\theta_1) + S_{xx} \cos(2\theta_1) - S_{yy} \cos(2\theta_1) - 2 S_{xy} \text{sen}(2\theta_1) \quad (2.82)$$

Evaluando esta última Ecuación para cuando ρ_1 tiende a λ_1

$$\rightarrow \left. \frac{1}{h^2} \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} \right|_{\rho_1=\lambda_1} = P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} k \cos(k\theta_1) + S_{xx} \cos(2\theta_1) - S_{yy} \cos(2\theta_1) - 2 S_{xy} \sin(2\theta_1) \quad (2.83)$$

$$\rightarrow \left. \frac{1}{h^2} \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} \right|_{\rho_1=\lambda_1} = P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} k \cos(k\theta_1) + S_{xx} \cos(2\theta_1) - S_{yy} \cos(2\theta_1) - 2 S_{xy} \sin(2\theta_1) \quad (2.84)$$

Finalmente sumando ambos términos, para obtener la Ecuación σ_{rr}

$$\rightarrow \sigma_{rr}^0 \Big|_{\rho_1=\lambda_1} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \theta_1^2} \right) \Big|_{\rho_1=\lambda_1} = P_1 - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} k \cos(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} (1 - \cos(2\theta_1)) + \frac{S_{yy}}{2} (1 + \cos(2\theta_1)) + S_{xy} \sin(2\theta_1) + P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-2} k \cos(k\theta_1) + S_{xx} \cos(2\theta_1) - S_{yy} \cos(2\theta_1) - 2 S_{xy} \sin(2\theta_1) \quad (2.85)$$

$$= P_1 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) + P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \lambda_1^{k-2} \cos(k\theta_1) + \left(-\frac{S_{xx}}{2} + \frac{S_{yy}}{2} + S_{xx} - S_{yy} \right) \cos(2\theta_1) + S_{xy} \sin(2\theta_1) \quad (2.86)$$

Entonces simplificando, obtenemos:

$$= P_1 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} [P_2 \lambda_2^2 (k-1) \lambda_1^{k-2}] \cos(k\theta_1) + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \cos(2\theta_1) - S_{xy} \sin(2\theta_1) \quad (2.87)$$

Aplicando el método de Igualación a series. Y comparando término con término.

$$\sigma_{rr1}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} {}^1U_k \sin(k\theta_1) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^1S_k \cos(k\theta_1) \quad (2.88)$$

$${}^1U_2 = -S_{xy} \quad (2.89)$$

$${}^1S_0 = P_1 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \quad (2.90)$$

$${}^1S_2 = P_2 \lambda_2^2 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \quad (2.91)$$

$${}^1S_k = (k-1) P_2 \lambda_2^2 \lambda_1^{k-2} \quad \text{para } k = 3, 4, 5, \dots \quad (2.92)$$

Ahora obteniendo

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_f}{\partial \rho_1^2} \quad (2.93)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right) - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right) - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.94)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} = h^2 \left[P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{k-2} \text{sen}(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} \rho_1 \text{sen}(2\theta_1) - \frac{S_{yy}}{2} \rho_1 \text{sen}(2\theta_1) + S_{xy} \rho_1 \cos(2\theta_1) \right] \dots (2.95)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right) = h^2 \left[P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \text{sen}(k\theta_1) + \frac{S_{xx}}{2} \text{sen}(2\theta_1) - \frac{S_{yy}}{2} \text{sen}(2\theta_1) + S_{xy} \cos(2\theta_1) \right] \dots (2.96)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right) = -P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \text{sen}(k\theta_1) + \left(\frac{S_{xy} - S_{xx}}{2} \right) \text{sen}(2\theta_1) - S_{xy} \cos(2\theta_1) \dots (2.97)$$

Evaluando para cuando ρ_1 tiende a λ_1

$$-\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right) \Big|_{\rho_1=\lambda_1} = -P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \lambda_1^{k-2} \text{sen}(k\theta_1) + \left(\frac{S_{xy} - S_{xx}}{2} \right) \text{sen}(2\theta_1) - S_{xy} \cos(2\theta_1) \dots (2.98)$$

Aplicamos nuevamente Igualación de Series

$$\sigma_{r\theta_1}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} {}^1T_k \text{sen}(k\theta_1) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^1V_k \cos(k\theta_1) \dots (2.99)$$

Donde sus factores son:

$${}^1V_2 = -S_{xy} \dots (2.100)$$

$${}^1T_0 = P_1 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \dots (2.101)$$

$${}^1T_2 = -P_2 \lambda_2^2 - \left(\frac{S_{xx} + S_{xy}}{2} \right) \dots (2.102)$$

$${}^1T_k = -(k-1) P_2 \lambda_2^2 \lambda_1^{k-2} \quad \text{para } k = 3, 4, 5, \dots \dots (2.103)$$

Aplicando SIMETRÍA con las Ecuaciones (2.12), (2.13), (2.21), (2.22), (2.63), (2.64); obtenemos las siguientes Ecuaciones:

$$\ln \rho_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \rho_2^k \cos(k\theta_2) \dots (2.104)$$

$$\theta_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) \rho_2^k \text{sen}(k\theta_2) \dots (2.105)$$

$$\rho_1^{-n} \cos(n\theta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_2^k \cos(k\theta_2) \dots (2.106)$$

$$\rho_1^{-n} \text{sen}(n\theta_1) = -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_2^k \text{sen}(k\theta_2) \dots (2.107)$$

$$\rho_1^{-n} \cos(n+2)\theta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_2^k \cos(k\theta_2) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \cos(k\theta_2) \right] - \rho_2 \cos \theta_2 \quad (2.108)$$

$$\rho_1^{-n} \sin(n+2)\theta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} \rho_2^k \cos(k\theta_2) - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \cos(k\theta_2) \right] - \rho_2 \sin \theta_2 \quad (2.109)$$

Entonces la Ecuación de Airy para el pozo 2, estará dada como:

$$\phi_0 \equiv h^2 \left[P_2 \lambda_2^2 \ln \rho_2 + P_1 \lambda_1^2 \ln \rho_1 + \frac{S_{xx}}{2} \rho_2^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{S_{yy}}{2} \rho_2^2 \cos^2 \theta_2 + \frac{S_{xy}}{2} \rho_2^2 \sin 2\theta_2 \right] \quad (2.110)$$

De manera Análoga por el planteamiento del problema; reemplazando los subíndices obtenemos de forma simétrica las siguientes Soluciones:

Proponiendo:

$$\sigma_{rr_2}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} {}^2U_k \sin(k\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^2S_k \cos(k\theta_2) \quad (2.111)$$

Donde sus factores son:

$${}^2U_2 = -S_{xy} \quad (2.112)$$

$${}^2S_0 = P_2 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \quad (2.113)$$

$${}^2S_2 = P_1 \lambda_1^2 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \quad (2.114)$$

$${}^2S_k = (k-1) P_1 \lambda_1^2 \lambda_2^{k-2} \quad \text{para } k = 3, 4, 5, \dots \quad (2.115)$$

Utilizando el mismo criterio obtenemos la siguiente:

$$\sigma_{r\theta_2}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} {}^2T_k \sin(k\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^2V_k \cos(k\theta_2) \quad (2.116)$$

Donde sus factores son:

$${}^2V_2 = -S_{xy} \quad (2.117)$$

$${}^1T_0 = P_1 + \left(\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \right) \quad (2.118)$$

$${}^2T_2 = -P_1 \lambda_1^2 - \left(\frac{S_{xx} + S_{xy}}{2} \right) \quad (2.119)$$

$${}^2T_k = -(k-1) P_1 \lambda_1^2 \lambda_2^{k-2} \quad \text{para } k = 3, 4, 5, \dots \quad (2.120)$$

La Función de Airy Adicional Propuesta para el Pozo 1, finalmente nos quedara expresada como:

$$\phi_1 = {}^1A_0 \ln \rho_1 + {}^1B_0 \theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [{}^1A_n \rho_1^{-n} \cos(n\theta_1) + {}^1B_n \rho_1^{-n} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [{}^1C_n \rho_1^{-n} \cos((n+2)\theta_1) + {}^1D_n \rho_1^{-n} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.121)$$

Entonces, si aplicamos el valor de ϕ_1 a nuestra ecuación del esfuerzo radial (2.67) planteada para el caso 1

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} \right) \quad (2.67)$$

Derivando ϕ_1 con respecto a ρ_1

$$\therefore \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} = \frac{{}^1a_0}{\rho_1} + \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n \rho_1^{-(n+1)} \cos(n\theta_1) + {}^1B_n n \rho_1^{-(n+1)} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-n {}^1C_n \rho_1^{-(n+1)} \cos((n+2)\theta_1) - n {}^1D_n \rho_1^{-(n+1)} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.122)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} = \frac{{}^1a_0}{\rho_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) + {}^1B_n n \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-{}^1C_n n \rho_1^{-(n+2)} \cos((n+2)\theta_1) - {}^1D_n n \rho_1^{-(n+2)} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.123)$$

$$\therefore \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} = {}^1B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n \rho_1^{-n} \sin(n\theta_1) + {}^1B_n n \rho_1^{-n} \cos(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-{}^1C_n (n+2) \rho_1^{-n} \sin((n+2)\theta_1) - {}^1D_n (n+2) \rho_1^{-n} \cos((n+2)\theta_1)] \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n^2 \rho_1^{-n} \cos(n\theta_1) - {}^1B_n n^2 \rho_1^{-n} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-{}^1C_n (n+2)^2 \rho_1^{-n} \cos((n+2)\theta_1) - {}^1D_n (n+2)^2 \rho_1^{-n} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.125)$$

$$\frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n^2 \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) - {}^1B_n n^2 \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-{}^1C_n (n+2)^2 \rho_1^{-(n+2)} \cos((n+2)\theta_1) - {}^1D_n (n+2)^2 \rho_1^{-(n+2)} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.126)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} = \frac{{}^1a_0}{\rho_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} [-{}^1a_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) - {}^1B_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1)] + \sum_{n=0}^{\infty} [-{}^1C_n [n + (n+2)^2] \rho_1^{-(n+2)} \cos((n+2)\theta_1) - {}^1D_n [n + (n+2)^2] \rho_1^{-(n+2)} \sin((n+2)\theta_1)] \quad (2.127)$$

Simplificando

$$l = n + 2 \quad n = l - 2$$

$$n \rightarrow 0 \quad l = 2$$

$$n \rightarrow \infty \quad l \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_1^2} = \\ & \frac{1A_0}{\rho_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-1A_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) - 1B_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1) \right] + \\ & \sum_{l=2}^{\infty} \left[-1C_{l-2} [l^2 + (l-2)] \rho_1^{-l} \cos(l\theta_1) - \right. \\ & \quad \left. 1D_{l-2} [l^2 + (l-2)] \rho_1^{-l} \sin(l\theta_1) \right] \dots \dots \dots (2.128) \end{aligned}$$

Agrupamos términos del coseno en uno solo y los del seno también en uno solo. Y evaluando para cuando ρ_1 tiende a λ_1

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1 |_{\rho_1=\lambda_1} &= \frac{1a_0}{\lambda_1^2} - 2 \ 1a_1 \lambda_1^{-3} \cos(\theta_1) - 2 \ 1B_1 \lambda_1^{-3} \sin(\theta_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \left[1a_n n(n+1) \lambda_1^{-(n+2)} + \right. \\ & \left. 1C_{n-2} [n^2 + (n-2)] \lambda_1^{-n} \right] \cos(n\theta_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \left[1B_n [n(n+1)] \lambda_1^{-(n+2)} + \right. \\ & \left. 1D_{n-2} [n^2 + (n-2)] \lambda_1^{-n} \right] \sin(n\theta_1) \dots \dots \dots (2.129) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1a_0}{\lambda_1^2} - 2 \ 1a_1 \lambda_1^{-3} \cos(\theta_1) - 2 \ 1B_1 \lambda_1^{-3} \sin(\theta_1) \right] - \sum_{n=2}^{\infty} \left[1a_n n(n+1) \lambda_1^{-(n+2)} + \right. \\ & \left. 1C_{n-2} [n^2 + (n-2)] \lambda_1^{-n} \right] \cos(n\theta_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \left[1B_n [n(n+1)] \lambda_1^{-(n+2)} + \right. \\ & \left. 1D_{n-2} [n^2 + (n-2)] \lambda_1^{-n} \right] \sin(n\theta_1) \dots \dots \dots (2.130) \end{aligned}$$

Ahora obtenemos de la misma forma la ecuación para el esfuerzo de corte (2.94), para el caso 1.

$$\sigma_{r\theta}^1 = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right) \dots \dots \dots (2.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} &= \frac{1B_0}{\rho_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-1A_n n \rho_1^{-(n+1)} \sin(n\theta_1) - 1B_n n \rho_1^{-(n+1)} \cos(n\theta_1) \right] + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1C_n (n+2) \rho_1^{-(n+1)} \sin(n+2)\theta_1 - 1D_n (n+2) \rho_1^{-(n+1)} \cos(n+2)\theta_1 \right] \dots \dots \dots (2.131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} \right) &= \\ & \frac{1B_0}{\rho_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-1A_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1) - 1B_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) \right] + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1C_n (n+2)(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \sin(n+2)\theta_1 - \right. \\ & \left. 1D_n (n+2)(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \cos(n+2)\theta_1 \right] \dots \dots \dots (2.132) \end{aligned}$$

Simplificando para obtener un solo termino con coseno y uno solo para el seno

$$l = n + 2 \quad n = l - 2$$

$$n \rightarrow 0 \qquad l = 2$$

$$n \rightarrow \infty \qquad l \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} \right) = \frac{{}^1B_0}{\rho_1^2} + 2 {}^1A_1 \rho_1^{-3} \sin(\theta_1) - 2 {}^1B_1 \rho_1^{-3} \cos(\theta_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-{}^1A_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \sin(n\theta_1) - {}^1B_n n(n+1) \rho_1^{-(n+2)} \cos(n\theta_1) \right] + \sum_{l=2}^{\infty} \left[-{}^1C_{l-2} l(l-1) \rho_1^{-l} \sin l \theta_1 - {}^1D_l l(l-1) \rho_1^{-l} \cos l \theta_1 \right] \dots (2.133)$$

Evaluando para cuando ρ_1 tiende a λ_1

$$-\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_1} \right) \Big|_{\rho_1=\lambda_1} = \frac{1}{h^2} \left[-\frac{{}^1B_0}{\lambda_1^2} + 2 {}^1A_1 \lambda_1^{-3} \sin(\theta_1) - 2 {}^1B_1 \lambda_1^{-3} \cos(\theta_1) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-{}^1A_n n(n+1) \lambda_1^{-(n+2)} + {}^1C_{l-2} l(l-1) \lambda_1^{-n} \right] \sin(n\theta_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \left[-{}^1B_n n(n+1) \lambda_1^{-(n+2)} + {}^1D_{n-2} n(n-1) \lambda_1^{-n} \right] \cos(n\theta_1) \dots (2.134)$$

Entonces sustituimos los valores de las ecuaciones (2.104), (2.105), (2.106), (2.107), (2.108) y (2.109) los cuales se dedujeron análogamente de las ecuaciones (2.12), (2.13), (2.21), (2.22), (2.63) y (2.64) por simetría en nuestra Ecuación de la Función de Airy Adicional Propuesta para el Pozo 1:

$$\therefore \phi_1 = {}^1A_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} \right) \rho_2^k \cos(k\theta_2) \right) + {}^1B_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} \right) \rho_2^k \sin(k\theta_2) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[{}^1A_n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_2^k \cos(k\theta_2) - {}^1B_n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_2^k \sin(k\theta_1) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[{}^1C_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \right) \cos(k\theta_2) - \rho_2 \sin \theta_2 \right] - {}^1D_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \right) \sin(k\theta_2) - \rho_2 \sin \theta_2 \dots (2.135)$$

Agrupando término a término solo los cosenos.

$$* \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ {}^1A_n \left(-\frac{1}{k} \right) \right\} \rho_2^k \cos(k\theta_2) \dots (2.136)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}^1A_n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \rho_2^k \cos(k\theta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \rho_2^k \right] \cos(k\theta_2) \right\} \dots (2.137)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \right] \rho_2^k \cos(k\theta_2) \right\} \dots (2.138)$$

$$* \sum_{n=0}^{\infty} \left[{}^1C_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \right) \cos(k\theta_2) - \rho_2 \cos \theta_2 \right] \dots (2.139)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[{}^1C_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \right) \cos(k\theta_2) \right] - \sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \rho_2 \cos \theta_2 \dots (2.140)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} {}^1C_n \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \rho_2^{k+2} \right] \cos(k\theta_2) \right\} - \sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \rho_2 \cos \theta_2 \dots (2.141)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right) \rho_2^k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right) \rho_2^{k+2} \right\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos \theta_2 \dots (2.142)$$

Agrupando y Simplificando todos los términos.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 \right\} \rho_2^k \cos(k\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \right\} \rho_2^k \cos(k\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos(\theta_2) \dots (2.143)$$

Acomodando todos los términos a $k = 1$ hasta $k = \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 \right\} \rho_2^k \cos(k\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \right\} \rho_2^k \cos(k\theta_2) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} {}^1A_n \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} {}^1C_n \right) \rho_2^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos(\theta_2) \dots (2.144)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 \rho_2^k + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \right] \rho_2^k + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos(\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n \right) \rho_2^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1A_n \right) \dots (2.145)$$

De la misma forma agrupamos los términos que tienen seno en sus argumentos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 \rho_2^k \text{sen}(k\theta_2) \dots (2.146)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{\infty} {}^1B_n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_2^k \operatorname{sen}(k\theta_2) = \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n \right\} \rho_2^k \operatorname{sen}(k\theta_2) \dots\dots\dots (2.147)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} \left[{}^1D_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho_2^k - \binom{n+k+1}{k+1} \rho_2^{k+2} \right) \operatorname{sen}(k\theta_2) - \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2 \right] \\
& \dots\dots\dots (2.148)
\end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \operatorname{sen}(k\theta_2) + \\
& \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \dots\dots\dots (2.149)
\end{aligned}$$

Reagrupando los términos que contienen seno en su argumento.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 \rho_2^k \operatorname{sen}(k\theta_2) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} {}^1B_n \right] \rho_2^k \operatorname{sen}(k\theta_2) - \right. \\
& \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \operatorname{sen}(k\theta_2) + \right. \\
& \left. \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \right\} \dots\dots\dots (2.150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 \rho_2^k - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n \right) \rho_2^k - \right. \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \operatorname{sen}(k\theta_2) + \\
& \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \dots\dots\dots (2.151)
\end{aligned}$$

Por lo tanto Agrupando finalmente todos los términos seno mas todos los cosenos para formar nuevamente la Ecuación de la Función de Estrés de Airy.

 $\phi_1 =$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 \rho_2^k + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n \right] \rho_2^k + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \right. \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos(\theta_2) + \\
& \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1A_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n \right) \rho_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 \rho_2^k - \right. \\
& \left. \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k + \right. \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \operatorname{sen}(k\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \dots\dots\dots (2.152)
\end{aligned}$$

Para obtener:

$$\sigma_{rr}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_2} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \theta_2^2} \right) \dots\dots\dots (2.153)$$

Derivando ϕ_1 con respecto a ρ_2 , tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] k \rho_2^{k-1} - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] (k+2) \rho_2^{k+1} \Big\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \cos(\theta_2) - \\
& 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n \right) \rho_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] k \rho_2^{k-1} + \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] (k+2) \rho_2^{k+1} \right\} \sin(k\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \sin(\theta_2)
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Ahora para obtener el segundo término:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] k \rho_2^{k-2} - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] (k+2) k \rho_2^k \Big\} \cos(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2^{-1} \cos(\theta_2) - \\
& 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] k \rho_2^{k-2} + \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] (k+2) \rho_2^k \right\} \sin(k\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2^{-1} \sin(\theta_2)
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Ahora obtenemos la segunda derivada de ϕ_1 con respecto a θ_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_2^2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \Big\} (-k^2 \cos(k\theta_2)) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \cos(\theta_2) + \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k + \right. \\
& \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} (-k^2 \sin(k\theta_2)) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \sin(\theta_2)
\end{aligned} \tag{2.156}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_2^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_2^2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^{k-2} - \right. \\
& \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^k \Big\} (-k^2 \cos(k\theta_2)) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2^{-1} \cos(\theta_2) + \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^{k-2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^k \} (-k^2 \sin(k\theta_2)) - (\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n) \rho_2^{-1} \sin(\theta_2) \dots (2.157)$$

Finalmente Reagrupando para obtener $\sigma_{rr}^1|_2$ y evaluamos para cuando ρ_2 tiende a λ_2

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1|_2|_{\rho_2=\lambda_2} = & \frac{1}{h^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k}\right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] k(1-k)\lambda_2^{k-2} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] (k+2 - \right. \\ & \left. k^2)\lambda_2^k \right\} \cos(k\theta_2) - 2(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k}\right) {}^1B_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] k(1-k)\lambda_2^{k-2} + \right. \\ & \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] (k+2 - k^2)\lambda_2^k \right\} \sin(k\theta_2) \dots (2.158) \end{aligned}$$

Por lo cual para obtener:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right) \dots (2.159)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k}\right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^k - \right. \\ & \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} (-k \sin(k\theta_2)) + (\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n) \rho_2 \sin(\theta_2) + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k}\right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k + \right. \\ & \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} k \cos(k\theta_2) + (\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n) \rho_2 \cos(\theta_2) \dots (2.160) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k}\right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] \rho_2^{k-1} - \right. \\ & \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+1} \right\} - k \sin(k\theta_2) - (\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n) \sin(\theta_2) + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k}\right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^{k-1} + \right. \\ & \left. \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+1} \right\} k \cos(k\theta_2) + (\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n) \cos(\theta_2) \dots (2.161) \end{aligned}$$

Finalmente Derivando la Ecuación anterior con respecto a ρ_2 y Evaluando para cuando ρ_2 tiende a λ_2

$$\frac{1}{\rho_2^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta_2^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] (-k(k-1)) \lambda_2^{k-2} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] (-k(k+1)) \lambda_2^k \right\} \text{sen}(k\theta_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] (k(k-1)) \lambda_2^{k-2} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] (k(k+1)) \lambda_2^k \right\} \text{cos}(k\theta_2) \dots\dots\dots(2.162)$$

Finalmente Reagrupando para obtener $\sigma_{r\theta}$ y evaluamos para cuando ρ_2 tiende a λ_2

$$\sigma_{r\theta} |_{\rho_2=\lambda_2} = \frac{1}{h^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1C_n \right] - k(1-k) \lambda_2^{k-2} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] k(k+1) \lambda_2^k \right\} \text{sen}(k\theta_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] k(k+1) \lambda_2^{k-2} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] k(k+1) \lambda_2^k \right\} \text{cos}(k\theta_2) \right\} \dots\dots\dots(2.163)$$

Ahora para ϕ_2

$$\phi_2 = {}^2A_0 \ln \rho_2 + {}^2B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [{}^2A_n \rho_2^{-n} \text{cos}(n\theta_2) + {}^2B_n \rho_2^{-n} \text{sen}(n\theta_2)] + \sum_{n=1}^{\infty} [{}^2C_n \rho_2^{-n} \text{cos}(n+2)\theta_2 + {}^2D_n \rho_2^{-n} \text{sen}(n+2)\theta_2] \dots\dots\dots(2.164)$$

Sustituyendo los valores de \ln , ρ_2 , θ_2 , etc.

$$\phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(-\frac{1}{k} \right) {}^2A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^2A_n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^2C_n \right] \rho_1^k + \left[\right] \rho_2 - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1C_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \text{cos}(k\theta_2) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) \rho_2 \text{cos}(\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1A_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1C_n \right) \rho_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right) {}^1B_0 \rho_2^k - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} {}^1B_n \right] \rho_2^k - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} {}^1D_n \right] \rho_2^k + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} {}^1D_n \right] \rho_2^{k+2} \right\} \text{sen}(k\theta_2) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \right) \rho_2 \text{sen}(\theta_2) \dots\dots\dots(2.165)$$

Las siguientes series son propuestas para definir las constantes A, B, C y D de las ecuaciones de esfuerzos radiales y de corte, para ambos casos

$${}^1A_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^1A_n^{(p)}, \quad {}^1B_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^1B_n^{(p)}, \quad {}^1C_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^1C_n^{(p)}, \quad {}^1D_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^1D_n^{(p)}$$

$${}^2A_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^2A_n^{(p)}, \quad {}^2B_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^2B_n^{(p)}, \quad {}^2C_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^2C_n^{(p)}, \quad {}^2D_n = \sum_{p=0}^{\infty} {}^2D_n^{(p)}$$

$${}^1A_0^{(0)} = h^2 \lambda_1^2 (P_1 - {}^1S_0) \dots\dots\dots (2.166)$$

$${}^1A_n^{(0)} = \frac{h^2 [(n+2) {}^1T_n - n {}^1S_n] \lambda_1^{n+2}}{2n(n+1)} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.167)$$

$${}^1B_0^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (2.168)$$

$${}^1B_n^{(0)} = -\frac{h^2 [(n+2) {}^1V_n + n {}^1U_n] \lambda_1^{n+2}}{2n(n+1)} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.169)$$

$${}^1C_n^{(0)} = -\frac{h^2 [{}^1S_{n+2} - {}^1T_{n+2}] \lambda_1^{n+2}}{2(n+1)} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.170)$$

$${}^1D_n^{(0)} = \frac{h^2 [{}^1U_{n+2} + {}^1V_{n+2}] \lambda_1^{n+2}}{2(n+1)} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.171)$$

$${}^2A_0^{(0)} = h^2 \lambda_2^2 (P_2 - {}^2S_0) \dots\dots\dots (2.172)$$

$${}^2A_n^{(0)} = \frac{h^2 [(n+2) {}^2T_n - n {}^2S_n] \lambda_2^{n+2}}{2n(n+1)} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.173)$$

$${}^2B_0^{(0)} = 0 \dots\dots\dots (2.174)$$

$${}^2B_n^{(0)} = -\frac{h^2 [(n+2) {}^2V_n + n {}^2U_n] \lambda_2^{n+2}}{2n(n+1)} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.175)$$

$${}^2C_n^{(0)} = -\frac{h^2 [{}^2S_{n+2} - {}^2T_{n+2}] \lambda_2^{n+2}}{2(n+1)} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.176)$$

$${}^2D_n^{(0)} = \frac{h^2 [{}^2U_{n+2} + {}^2V_{n+2}] \lambda_2^{n+2}}{2(n+1)} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.177)$$

Otros términos obtenidos siguiendo la relación anterior.

$${}^1B_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^2B_k^{(p)k} \eta_n^{21} + {}^2D_k^{(p)k} \tau_n^{21} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.178)$$

$${}^1C_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^2A_k^{(p)k} \kappa_{n+2}^{21} + {}^2C_k^{(p)k} \nu_{n+2}^{21} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.179)$$

$${}^1D_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^2B_k^{(p)k} \theta_{n+2}^{21} + {}^2D_k^{(p)k} \psi_{n+2}^{21} \quad (n \geq 0) \dots\dots\dots (2.180)$$

$${}^2A_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^1A_k^{(p)k} \alpha_n^{12} + {}^1C_k^{(p)k} \gamma_n^{12} \quad (n \geq 0) \quad (2.181)$$

$${}^2B_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^1B_k^{(p)k} \eta_n^{12} + {}^1D_k^{(p)k} \tau_n^{12} \quad (n \geq 1) \quad (2.182)$$

$${}^2C_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^1A_k^{(p)k} \kappa_{n+2}^{12} + {}^1C_k^{(p)k} \nu_{n+2}^{12} \quad (n \geq 0) \quad (2.183)$$

$${}^2D_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^1B_k^{(p)k} \theta_{n+2}^{12} + {}^1D_k^{(p)k} \psi_{n+2}^{12} \quad (n \geq 0) \quad (2.184)$$

Se emplearán los siguientes coeficientes con la finalidad de simplificar las ecuaciones anteriores disminuyendo los parámetros de las Series eliminando valores que equivalen a cero.

$${}^k\gamma_0^{21} = 2(k+1)\lambda_1^2 \quad (2.185)$$

$${}^k\gamma_0^{12} = 2(k+1)\lambda_2^2 \quad (2.186)$$

$${}^0\alpha_n^{21} = -\frac{n-1}{n}\lambda_1^{2n} \quad (n \geq 2) \quad (2.187)$$

$${}^0\alpha_n^{12} = -\frac{n-1}{n}\lambda_2^{2n} \quad (n \geq 2) \quad (2.188)$$

$${}^k\alpha_n^{21} = (n-1) \binom{k+n-1}{n} \lambda_1^{2n} \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad (2.189)$$

$${}^k\gamma_n^{21} = (n-1) \binom{k+n}{n} \lambda_1^{2n} - n \binom{k+n+1}{n+1} \lambda_1^{2n+2} \quad (n \geq 1, k \geq 0) \quad (2.190)$$

$${}^k\gamma_n^{12} = (n-1) \binom{k+n}{n} \lambda_2^{2n} - n \binom{k+n+1}{n+1} \lambda_2^{2n+2} \quad (n \geq 1, k \geq 0) \quad (2.191)$$

$${}^0\kappa_n^{21} = \lambda_1^{2n-2} \quad (n \geq 2) \quad (2.192)$$

$${}^0\kappa_n^{12} = \lambda_2^{2n-2} \quad (n \geq 2) \quad (2.193)$$

$${}^k\kappa_n^{21} = -n \binom{k+n-1}{n} \lambda_1^{2n-2} \quad (n \geq 2, k \geq 1) \quad (2.194)$$

$${}^k\kappa_n^{12} = -n \binom{k+n-1}{n} \lambda_2^{2n-2} \quad (n \geq 2, k \geq 1) \quad (2.195)$$

$${}^k\nu_n^{21} = -n \binom{k+n}{n} \lambda_1^{2n-2} + (n+1) \binom{k+n+1}{n+1} \lambda_1^{2n} \quad (n \geq 2, k \geq 0) \quad (2.196)$$

$${}^k\nu_n^{12} = -n \binom{k+n}{n} \lambda_2^{2n-2} + (n+1) \binom{k+n+1}{n+1} \lambda_2^{2n} \quad (n \geq 2, k \geq 0) \quad (2.197)$$

$${}^0\eta_n^{21} = {}^0\alpha_n^{21} \quad {}^0\eta_n^{12} = {}^0\alpha_n^{12} \quad (n \geq 1) \quad (2.198)$$

$${}^k\eta_n^{21} = -{}^k\alpha_n^{21} \quad {}^k\eta_n^{12} = -{}^k\alpha_n^{12} \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad (2.199)$$

$${}^k\tau_n^{21} = -{}^k\gamma_n^{21} \quad {}^k\tau_n^{12} = -{}^k\gamma_n^{12} \quad (n \geq 1, k \geq 0) \dots\dots\dots (2.200)$$

$${}^0\theta_n^{21} = {}^0\kappa_n^{21} \quad {}^0\theta_n^{12} = {}^0\kappa_n^{12} \quad (n \geq 1) \dots\dots\dots (2.201)$$

$${}^k\theta_n^{21} = {}^k\kappa_n^{21} \quad {}^k\theta_n^{12} = {}^k\kappa_n^{12} \quad (n \geq 1, k \geq 1) \dots\dots\dots (2.202)$$

$${}^k\psi_n^{21} = -{}^k\nu_n^{21} \quad {}^k\psi_n^{12} = -{}^k\nu_n^{12} \quad (n \geq 1, k \geq 0) \dots\dots\dots (2.203)$$

El resto de los parámetros son cero; por lo que sustituyendo estos coeficientes nuevamente en la Función del Esfuerzo final de Airy (2.66). El esfuerzo alrededor del agujero 1 son nuevamente derivadas para las ecuaciones (2.67), (2.93), (2.94). El esfuerzo radial alrededor del agujero 1 adoptara la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= S_{rr} + \frac{P_1 \lambda_1^2}{\rho_1^2} \\ &+ P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 + \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{{}^1A_0}{\rho_1^2} \right. \\ &+ {}^2A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^1A_n \rho_1^{-n-2} \cos n\theta_1 \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} {}^2A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^1B_n \rho_1^{-n-2} \sin n\theta_1 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} {}^2B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4) {}^1C_n \rho_1^{-n-2} \cos(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^2C_n \left\{ -2(n \right. \\ &+ 1) - 2 \binom{n+2}{2} \rho_1 \cos \theta_1 \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[-\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 + \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k \right. \\ &- 2) \rho_1^k \cos k\theta_1 \left. \right\} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4) {}^1D_n \rho_1^{-n-2} \sin(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^2D_n \left\{ 2 \binom{n+2}{2} \rho_1 \sin \theta_1 \right. \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 - \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k \right. \\ &- 2) \rho_1^k \sin k\theta_1 \left. \right\} \left. \right\} \dots\dots\dots (2.204) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{r\theta} \\
& = S_{r\theta} \\
& + P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (1-k) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 \\
& + \frac{1}{h^2} \left\{ -2A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^1 A_n \rho_1^{-n-2} \sin n\theta_1 \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^1 B_n \rho_1^{-n-2} \cos n\theta_1 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} 2B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)^1 C_n \rho_1^{-n-2} \sin(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n \left\{ -2 \binom{n+2}{2} \rho_1 \sin \theta_1 \right. \\
& + \left. \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 - \binom{n+k+1}{k+1} k(k+1) \rho_1^k \sin k\theta_1 \right] \right\} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)^1 D_n \rho_1^{-n-2} \cos(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2D_n \left\{ -2 \binom{n+2}{2} \rho_1 \cos \theta_1 \right. \\
& \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 - \binom{n+k+1}{k+1} k(k+1) \rho_1^k \cos k\theta_1 \right] \right\} \dots\dots\dots (2.205)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\theta\theta} \\
& = S_{\theta\theta} - \frac{P_1 \lambda_1^2}{\rho_1^2} \\
& - P_2 \lambda_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 + \frac{1}{h^2} \left\{ -\frac{1A_0}{\rho_1^2} \right. \\
& - 2A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^1 A_n \rho_1^{-n-2} \cos n\theta_1 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^1 B_n \rho_1^{-n-2} \sin n\theta_1 \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} 2B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)^1 C_n \rho_1^{-n-2} \cos(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n \left\{ -2(n \right. \\
& + 1) - 6 \binom{n+2}{2} \rho_1 \cos \theta_1 \\
& + \left. \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \cos k\theta_1 - \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k+2) \rho_1^k \cos k\theta_1 \right] \right\} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)^1 D_n \rho_1^{-n-2} \sin(n+2)\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2D_n \left\{ 6 \binom{n+2}{2} \rho_1 \sin \theta_1 \right. \\
& \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[-\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_1^{k-2} \sin k\theta_1 + \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k+2) \rho_1^k \sin k\theta_1 \right] \right\} \dots\dots\dots (2.206)
\end{aligned}$$

Aplicando los componentes de los esfuerzos en coordenadas polares

$$S_{rr} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2\theta + S_{xy} \sin 2\theta \dots\dots\dots (2.207)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2} \cos 2\theta - S_{xy} \sin 2\theta \dots\dots\dots (2.208)$$

$$S_{r\theta} = \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2} \sin 2\theta + S_{xy} \cos 2\theta \dots\dots\dots (2.209)$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr} \\
& = S_{rr} + \frac{P_2 \lambda_2^2}{\rho_2^2} \\
& + P_1 \lambda_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 + \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{{}^1A_0}{\rho_2^2} \right. \\
& + {}^2A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^1A_n \rho_2^{-n-2} \cos n\theta_2 \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} {}^1A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^1B_n \rho_2^{-n-2} \sin n\theta_2 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4) {}^2C_n \rho_2^{-n-2} \cos(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \left\{ -2(n \right. \\
& + 1) - 2 \binom{n+2}{2} \rho_2 \cos \theta_2 \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \left[- \binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 + \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k-2) \rho_2^k \cos k\theta_2 \right\} \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4) {}^2D_n \rho_2^{-n-2} \sin(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \left\{ 2 \binom{n+2}{2} \rho_2 \sin \theta_2 \right. \\
& \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 - \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k-2) \rho_2^k \sin k\theta_2 \right] \right\} \dots\dots\dots (2.210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{r\theta} \\
& = S_{r\theta} \\
& + P_1 \lambda_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} (1-k) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 \\
& + \frac{1}{h^2} \left\{ -{}^1A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^2A_n \rho_2^{-n-2} \sin n\theta_2 \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^2B_n \rho_2^{-n-2} \cos n\theta_2 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) {}^2C_n \rho_2^{-n-2} \sin(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \left\{ -2 \binom{n+2}{2} \rho_2 \sin \theta_2 \right. \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 - \binom{n+k+1}{k+1} k(k+1) \rho_2^k \sin k\theta_2 \right\} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) {}^2D_n \rho_2^{-n-2} \cos(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \left\{ -2 \binom{n+2}{2} \rho_2 \cos \theta_2 \right. \\
& \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 - \binom{n+k+1}{k+1} k(k+1) \rho_2^k \cos k\theta_2 \right] \right\} \dots\dots\dots (2.211)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\theta\theta} \\
& = S_{\theta\theta} - \frac{P_2 \lambda_2^2}{\rho_2^2} \\
& - P_1 \lambda_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 + \frac{1}{h^2} \left\{ -\frac{{}^2A_0}{\rho_2^2} \right. \\
& - {}^1A_0 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^2A_n \rho_2^{-n-2} \cos n\theta_2 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1A_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) {}^2B_n \rho_2^{-n-2} \sin n\theta_2 \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} {}^1B_n \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) {}^2C_n \rho_1^{-n-2} \cos(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1C_n \left\{ -2(n \right. \\
& + 1) - 6 \binom{n+2}{2} \rho_2 \cos \theta_2 \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \cos k\theta_2 - \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k+2) \rho_2^k \cos k\theta_2 \right\} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) {}^2D_n \rho_2^{-n-2} \sin(n+2)\theta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^1D_n \left\{ 6 \binom{n+2}{2} \rho_2 \sin \theta_2 \right. \\
& \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[- \binom{n+k}{k} k(k-1) \rho_2^{k-2} \sin k\theta_2 + \binom{n+k+1}{k+1} (k+1)(k+2) \rho_2^k \sin k\theta_2 \right] \right\} \dots\dots\dots (2.212)
\end{aligned}$$

CAPÍTULO III. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Debido al ángulo pequeño entre los dos pozos, el problema de la unión en los multilaterales ha sido comúnmente modelado usando dos agujeros circulares en una placa infinita, suponiendo que las condiciones de tendencia prevalecen en todo el plano. Las tensiones aplicadas incluyen esfuerzo de sobrecarga, esfuerzos principales horizontales del campo, y presiones de lodo de perforación dentro de los pozos.

La solución analítica para un plano infinito con dos agujeros circulares iguales, bajo un plano general de esfuerzos ha sido derivada por Ling^[26], obteniendo los siguientes resultados.

Ling's λ	$S_H=S_h=1, \alpha=0 \text{ deg}$		$S_H=1, S_h=0, \alpha=0 \text{ deg}$	$S_H=1, S_h=0, \alpha=90 \text{ deg}$	
	$\theta=0 \text{ deg.}$	$\theta=180 \text{ deg}$	$\theta=\pm 90 \text{ deg}$	$\theta=0 \text{ deg.}$	$\theta=180 \text{ deg}$
1.5	2.255	2.887	2.623	3.151	3.264
2	2.158	2.411	2.703	3.066	3.020
3	2.080	2.155	2.825	3.020	2.992
5	2.033	2.049	2.927	3.004	2.997
8	2.014	2.018	2.970	3.001	2.999
∞	2.000	2.000	3.000	3.000	3.000

Tabla 1. Resultados obtenidos por Ling^[26], para el esfuerzo Tangencial en la pared del pozo. Donde λ es definida como la distancia de centro a centro de cada pozo.

La solución de Ling^[26] se puede considerar como un caso especial cuando ambas presiones internas son cero y cuando ambos agujeros circulares son de igual diámetro. Las tablas 1 y 2 muestran que las dos soluciones dan resultados idénticos para el esfuerzo tangencial en el límite del agujero.

H ($a_1=a_2=1$)	$S_H=S_h=1, \alpha=0 \text{ deg}$		$S_H=1, S_h=0, \alpha=0 \text{ deg}$	$S_H=1, S_h=0, \alpha=90 \text{ deg}$	
	$\theta=0 \text{ deg.}$	$\theta=180 \text{ deg.}$	$\theta=\pm 90 \text{ deg}$	$\theta=0 \text{ deg.}$	$\theta=180 \text{ deg.}$
3	2.255	2.887	2.623	3.151	3.264
4	2.158	2.411	2.703	3.066	3.020
6	2.080	2.155	2.825	3.020	2.992
10	2.033	2.049	2.927	3.004	2.997
16	2.014	2.018	2.970	3.001	2.999
200	2.000	2.000	3.000	3.000	3.000

Tabla 2. Nueva Solución muestra resultados idénticos a la solución de Ling^[26]. Donde h es definida como la distancia de centro a centro de cada pozo. Diámetro de Pozo 1= Diámetro de Pozo 2.

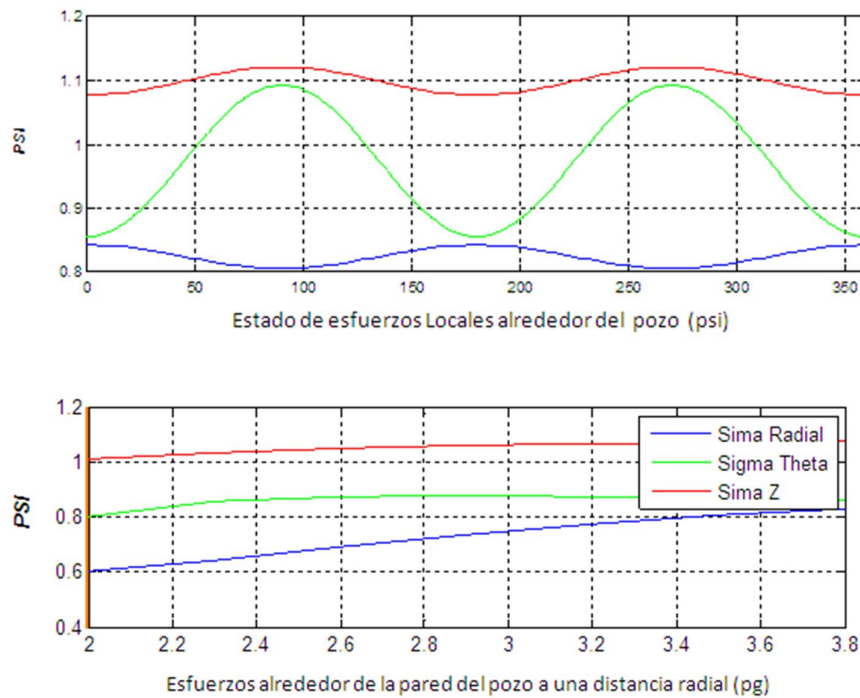
También es evidente en la última línea de resultados de la tabla 2 que la solución recién derivada converge a la solución clásica de Kirsch^[25] para un solo agujero cuando los agujeros están muy apartados el uno del otro.

Haddon^[18] mostro una solución analítica para un plano infinito con dos orificios circulares en virtud de la desigualdad uniaxial en un plano de esfuerzos utilizando una técnica de cartografía. Esta solución es aplicable cuando no hay presión interna dentro de los agujeros, y cuando el esfuerzo principal en el infinito es cero. La tabla 3 muestra que las dos soluciones obtienen resultados idénticos para el esfuerzo tangencial en las fronteras del agujero. Las pequeñas diferencias en el tercer decimal podría deberse a que Haddon^[18] presuntamente utilizo una precisión de 10^{-4} mientras que los nuevos resultados obtenidos se han calculado con una precisión de 10^{-6}

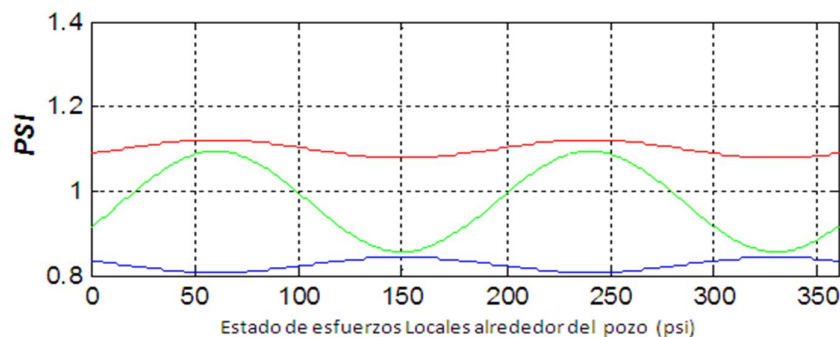
θ Deg	Esfuerzo Tangencial Agujero 1		Esfuerzo Tangencial Agujero 2	
	Haddon	Hoang and Abousleiman	Haddon	Hoang and Abousleiman
0	1.273	1.272	2.089	2.089
15	-0.694	-0.694	-0.067	-0.067
30	-0.711	-0.711	-1.563	-1.563
45	-0.710	-0.710	-1.932	-1.932
60	-0.464	-0.464	-1.335	-1.335
75	0.207	0.207	-0.137	-0.137
90	1.159	1.159	1.283	1.283
105	2.128	2.128	2.585	2.585
120	2.840	2.840	3.489	3.489
135	3.092	3.092	3.812	3.812
150	2.811	2.811	3.501	3.501
165	2.065	2.065	2.639	2.639
180	1.049	1.049	1.432	1.432
195	0.029	0.029	0.159	0.159
210	-0.728	-0.728	-0.902	-0.902
225	-1.030	-1.030	-1.531	-1.531
240	-0.808	-0.808	-1.618	-1.618
255	-0.138	-0.138	-1.170	-1.170
270	0.770	0.766	-0.282	-0.282
285	1.667	1.667	0.900	0.900
300	2.289	2.289	2.209	2.209
315	2.577	2.557	3.408	3.408
330	2.862	2.862	4.101	4.101
345	3.262	3.262	3.736	3.735

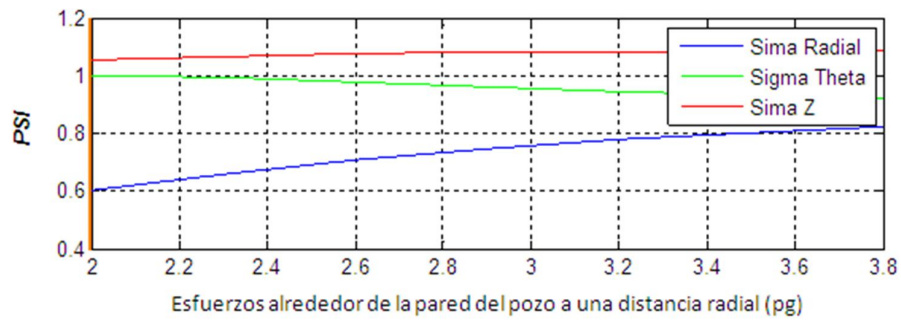
Tabla 3. Comparación con la solución de Haddon^[18]. Con parámetros $h=4.5$, $a_1=2.5$, $a_2=1$, $S_H=1$, $S_h=0$, $P_1=P_2=0$, and $\alpha=45$ grados. Se destacan los resultados diferentes.

Se planteará un ejemplo sencillo para demostrar la solución derivada en esta tesis. Mostrando en las primeras 4 gráficas los 3 principales esfuerzos para un solo pozo, investigando 4 orientaciones del campo de esfuerzos $\alpha = 0$ grados, $\alpha = 30$ grados, $\alpha = 60$ grados, $\alpha = 90$ grados. La primera orientación implica que la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal máximo. El último caso aplica para cuando la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal mínimo. Los otros dos casos consideran orientaciones intermedias. Utilizando los parámetros que se muestran a continuación: $S_1=1$, $S_2=0.8$, $P_1=0.6$ $a_1=2$. Analizando el comportamiento de los esfuerzos a 3.8pg. de distancia de la pared del pozo.

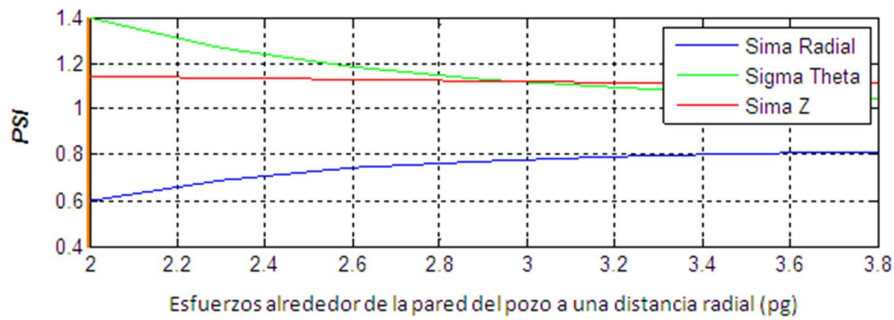
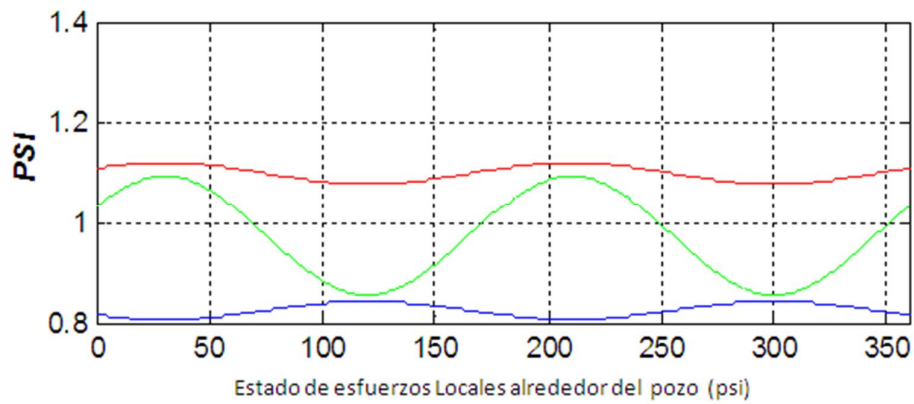


Gráficas 1. Orientación de Esfuerzos locales con $\alpha = 0$ grados

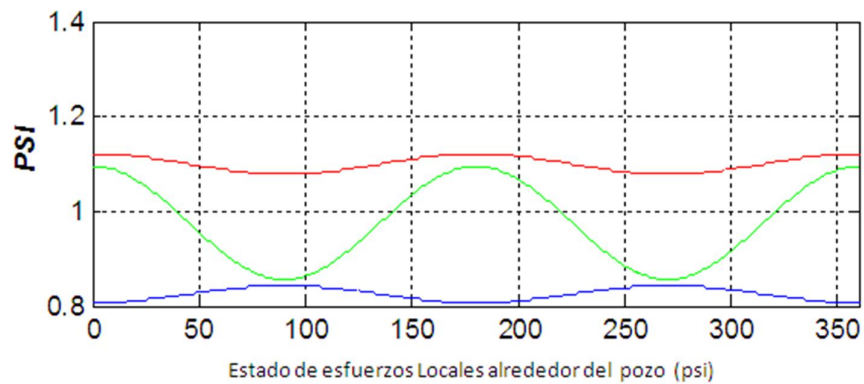




Gráficas 2. Orientación de Esfuerzos locales con $\alpha= 30$ grados



Gráficas 3. Orientación de Esfuerzos locales con $\alpha= 60$ grados





Gráficas 4. Orientación de Esfuerzos locales con $\alpha= 90$ grados

Como se puede observar el esfuerzo radial es el más bajo y normalmente inverso al esfuerzo tangencial que así mismo se muestra como el más alto en las orientaciones intermedias mientras que para las orientaciones principales donde el esfuerzo horizontal máximo actúa de la misma forma para ambos agujeros se muestra el esfuerzo axial por arriba de este valor; por lo tanto deducimos que el esfuerzo tangencial es el más importante para nuestro análisis en cuanto a la variación del esfuerzo horizontal máximo y mínimo recordando que solo tomaremos en cuenta los esfuerzos normales o orientaciones principales. Evitando así el análisis de esfuerzos de corte.

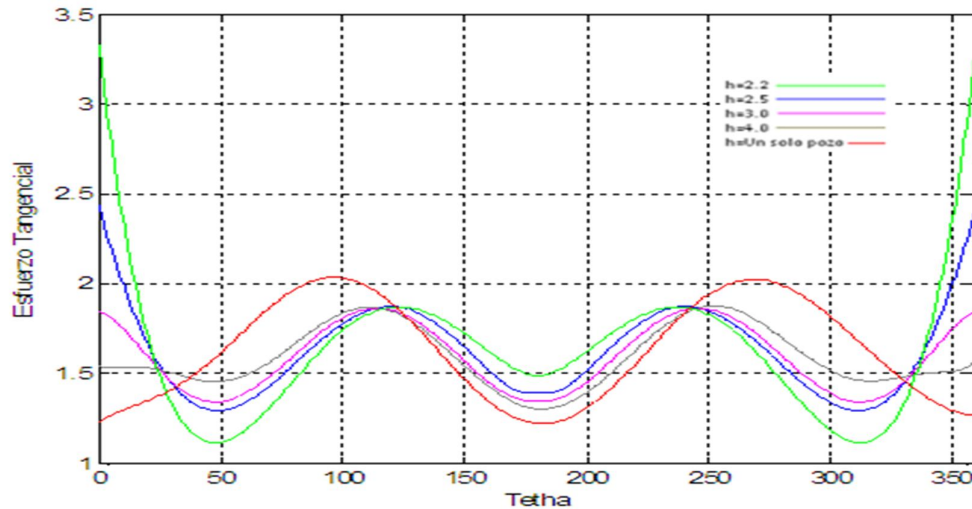
A continuación graficaremos la distribución de esfuerzo tangencial en el límite de los agujeros, los parámetros son seleccionados como se muestra a continuación: $S_1=1$, $S_2=0.8$, P_1 y $P_2=0.2$ y $a_1=1$.

LOS EFECTOS DE ORIENTACIÓN EN EL CAMPO DE ESFUERZOS.

Considerando 2 agujeros de igual radio, nombrado $a_1=a_2=1$. Se investigarán 4 orientaciones del campo de esfuerzos: $\alpha= 0$ grados, $\alpha= 30$ grados, $\alpha= 60$ grados, $\alpha= 90$ grados. De la misma manera la primera orientación implica que la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal máximo. El último caso aplica para cuando la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal mínimo. Los otros dos casos consideran orientaciones intermedias.

Debido a la simetría, los dos agujeros presentan la misma distribución de esfuerzos. La gráfica 5 muestra el esfuerzo tangencial en el límite de ambos agujeros para $\alpha= 0$ grados, para varias distancias de separación $h= 0.2$, 0.5 , 1.0 y 2.0 . Por lo que las distancias de centro a centro correspondientes son 2.2 ,

2.5, 3.0 y 4.0 respectivamente. La solución para un agujero simple, se presenta como la línea base para la comparación.



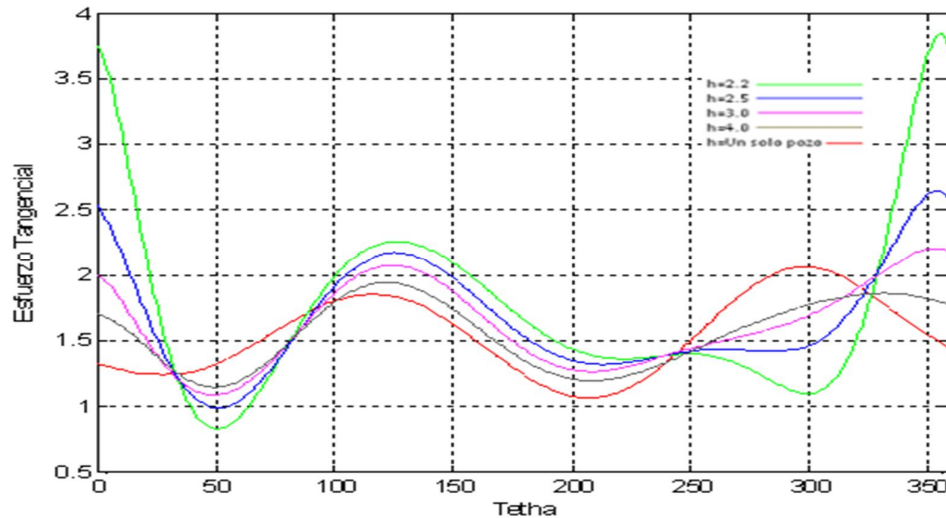
Gráfica 5. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

De manera interesante se observa que $h=3$ y $h=4$, proporcionan factores de concentración de esfuerzos más bajos comparados con la solución de un solo agujero. En otras palabras, el esfuerzo tangencial máximo en el límite del agujero, no siempre incrementa cuando la distancia de separación decrece entre los agujeros. Mientras que la distancia decrece, el máximo esfuerzo en $\theta=90$ grados, se transporta del otro agujero hacia $\theta=180$ grados. La alta concentración de esfuerzos también se comienza a desarrollar alrededor de $\theta=0$ grados. Para distancias de separación más pequeñas de aproximadamente 1, el área de alrededor de $\theta=0$ grados se convierte en la región más crítica.

Para una distancia de separación de (0.5) es decir $h=2.5$, la tensión tangencial máxima en el límite es 15.9% más alto que el valor máximo de 2 para la solución de un agujero simple. Para $h=2.2$, la tensión tangencial máxima incrementa por un 67.2%.

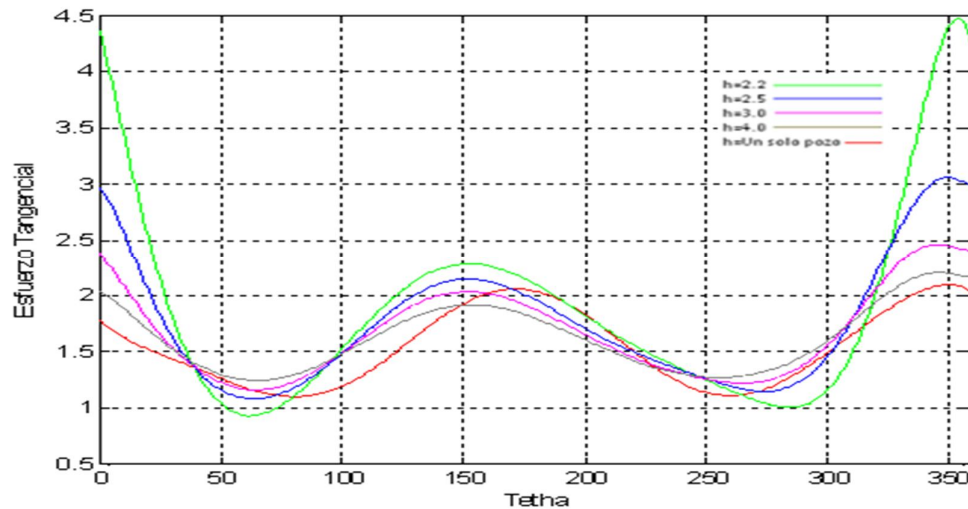
La gráfica 6 muestra el esfuerzo tangencial en las fronteras para cualquier agujero con un valor de $\alpha=30$ grados para el mismo conjunto de distancias de separación. El esfuerzo máximo inicialmente en un $\alpha=90$ grados se mueve hacia un $\alpha=180$ grados y el aumento de la magnitud. Al mismo tiempo, el

máximo valor que en un principio es $\alpha = 270$ grados se transforma en un $\alpha = 0$ grados. La variación de esfuerzo en torno a una distribución con un $\alpha = 270$ grados es muy complejo. Para cualquiera de las distancias de separación considerado, el máximo esfuerzo tangencial en el límite de los agujeros a un $\alpha = 30$ grados es siempre más alto que para $\alpha = 0$ grados. Por ejemplo, con $h=2.5$, el valor máximo es 36.5% mayor en comparación con el caso de un solo agujero. Para $h=2.2$, el aumento del esfuerzo tangencial máximo es de 93.7%



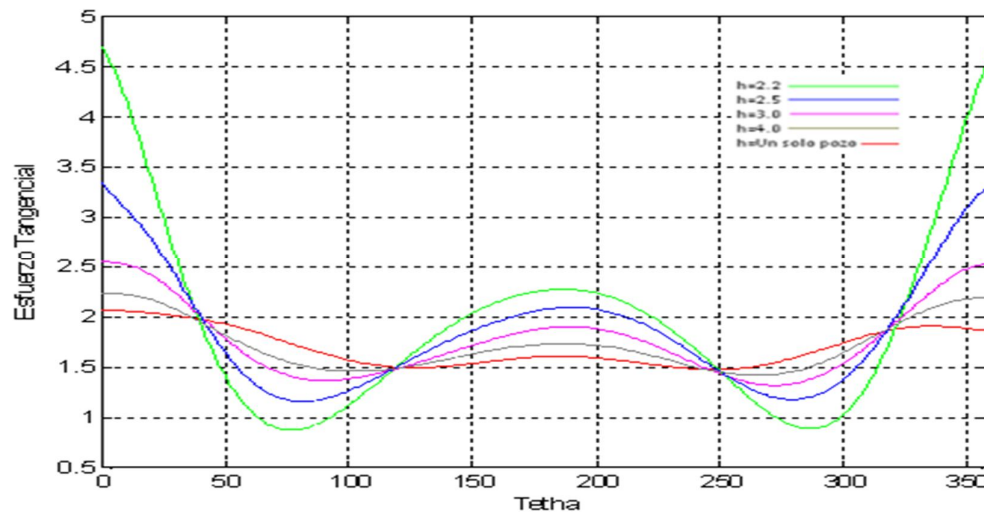
Gráfica 6. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=30$ grados, $P_1=P_2=0.2$

La gráfica 7 ilustra la distribución de esfuerzos para $\alpha = 60$ grados, incluso con mayor hincapié en que para una concentración de esfuerzos en $\alpha = 30$ grados. Cuando $h=2.5$, el máximo esfuerzo tangencial en la frontera aumenta un 57.7% en comparación con el esfuerzo en un solo agujero. Para una distancia de separación de 0.2, el valor máximo llega a 126.2% superior a la solución de un solo agujero.



Gráfica 7. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=60$ grados, $P_1=P_2=0.2$

Para el caso de $\alpha=90$ grados se ve en la gráfica 8, donde el máximo valor del esfuerzo tangencial en el agujero se encuentra en una frontera $\alpha=0$ grados, para todas las distancias de separación consideradas. Para una distancia de 0.5, el máximo valor incrementa en un 60% comparado con el caso de un solo agujero. Para una distancia de separación de 0.2, la cifra correspondiente en la figura es 134.7%



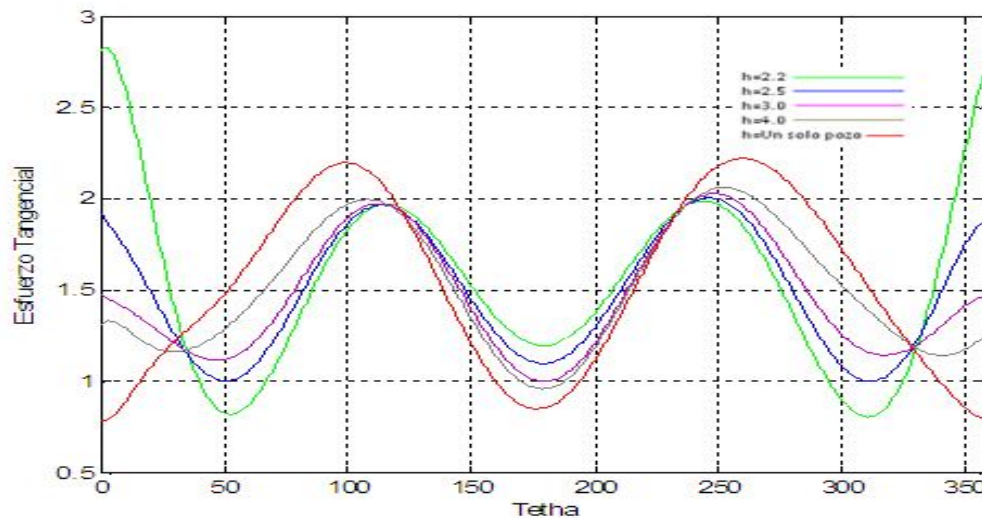
Gráfica 8. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=90$ grados, $P_1=P_2=0.2$

En resumen, la distribución de esfuerzos varía significativamente con la orientación de los esfuerzos. La interpolación de los casos anteriores, indica

que la parte más estable es cuando el centro de la línea central se ajusta con el máximo esfuerzo, lo cual había sido ya observado por Bargui y Absouleiman^[5].

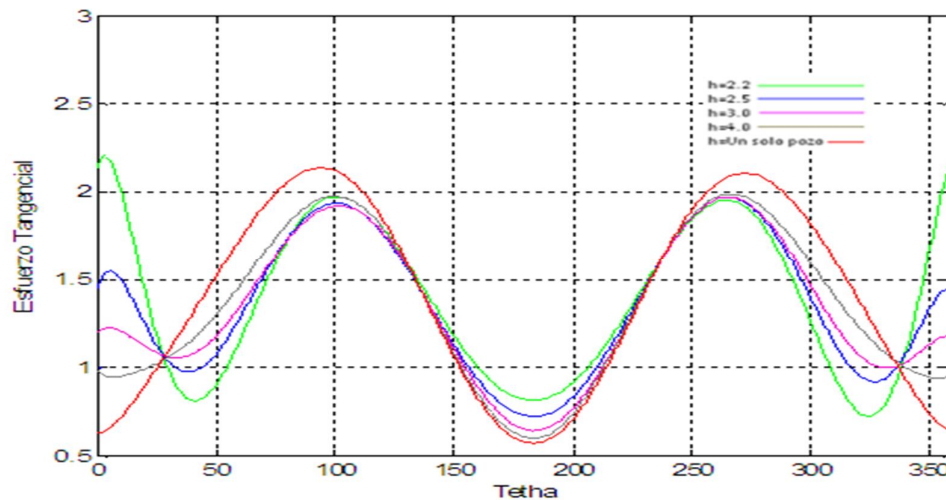
Para analizar los efectos de la relación relativa de esfuerzos aplicados. Los dos valores más bajos del esfuerzo menor principal, son considerados en este análisis, $S_2=0.7$ y $S_2=0.6$. Al ángulo α se le asigna el cero para minimizar la concentración de tensión basado en las conclusiones descritas de análisis previos. Todos los demás parámetros se mantienen intactos.

La gráfica 9 muestra el esfuerzo tangencial de ambos agujeros para $S_2=0.7$ para las mismas distancias de separación. Las tendencias observadas en la figura 9, para $S_2=0.8$ son repetidas pero con efectos menos pronunciados para la distancias decrecientes de centro a centro. Para $h=2.5$, el esfuerzo tangencial máximo es aún más bajo que para el caso de un agujero simple. Para una distancia de separación de $h=2.0$, el valor máximo es solo un 301% más alto comparado a el caso de un solo agujero.



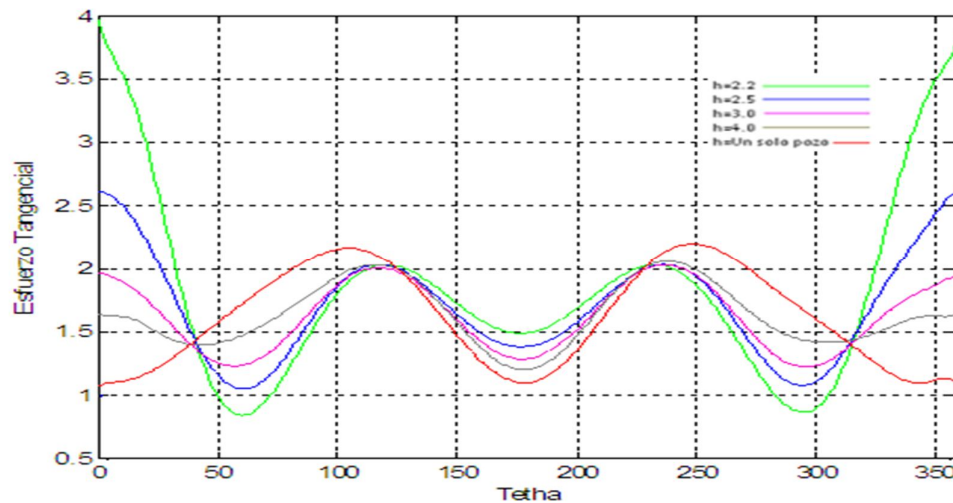
Gráfica 9. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.7$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

La gráfica 10 describe la distribución del esfuerzo tangencial para $S_2=0.6$, nuevamente se observan las mismas tendencias pero con aun menor concentración de tensión. Para $h=2.2$, el esfuerzo tangencial máximo es aún más bajo que aquel de la solución de un solo agujero. En otras palabras, los dos agujeros ayudan a estabilizar el uno al otro; dos agujeros juntos son más estables que uno solo para todas las distancias de separación consideradas.



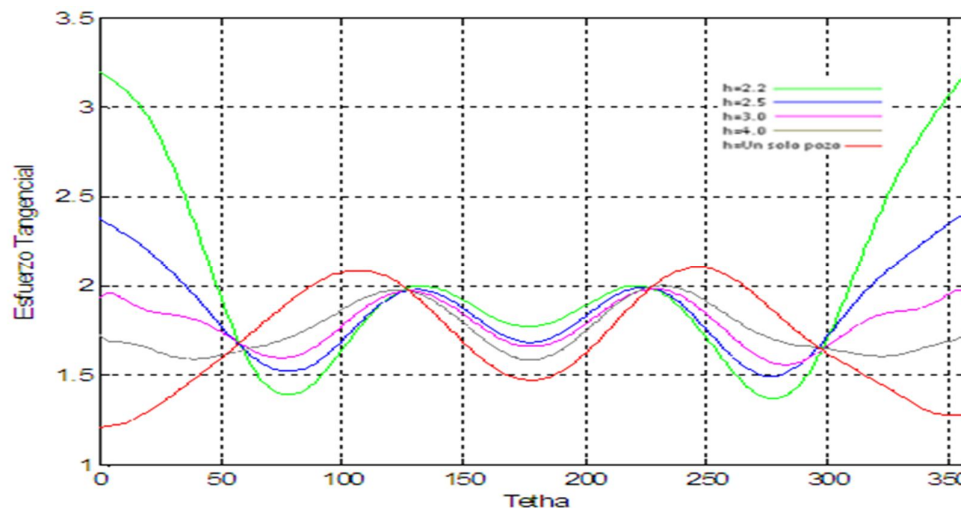
Gráfica 10. Esfuerzo tangencial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.6$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

Los efectos de presiones dentro de los agujeros. Si se consideran presiones más bajas en el agujero dos, es decir $P_2=0.1$ y $P_2=0$. El ángulo α es considerado cero, todos los demás parámetros se mantienen intactos. Debido a que los dos agujeros ya no tienen la misma distribución de esfuerzos, se consideran por separado en este análisis. La gráfica 11 presenta el esfuerzo tangencial en el límite del primer agujero cuando $P_2=0.1$. Las tendencias observadas en la gráfica 5 para $P_2=0.2$ también se presentan pero con efectos más pronunciados; para la misma distancia de separación, la mínima para $P_2=0.1$ es más baja y la máxima es más alta. La máxima presión en el límite es 28.0% y 98.5% más alta que para un agujero simple para $h=2.5$ y $h=2.2$, respectivamente.



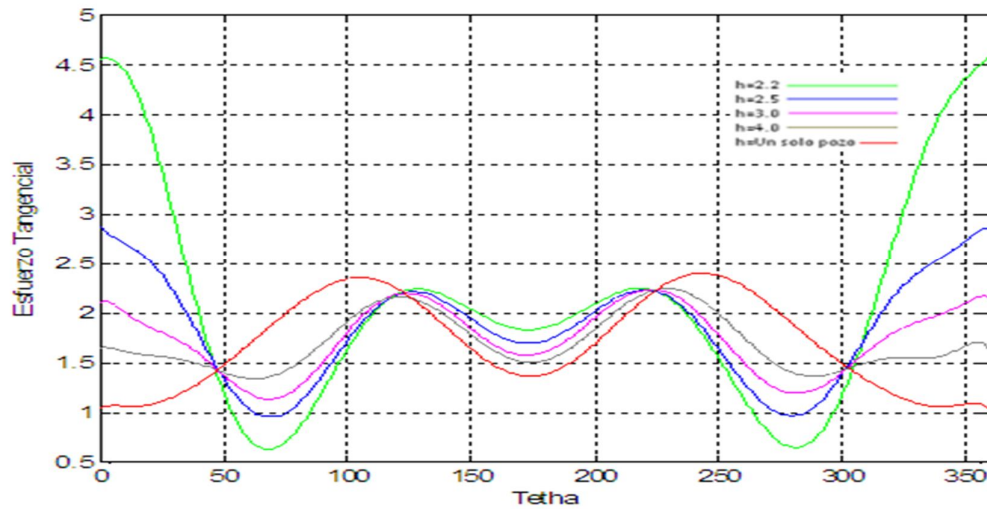
Gráfica 11. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$

La gráfica 12 ilustra la distribución del esfuerzo tangencial para el agujero 2 con $P_2=0.1$. Se observan las mismas tendencias como para $P_2=0.2$, pero con efectos menos pronunciado. La tensión máxima en el límite es solo 11.5% y 50.5% más alta que la del agujero simple $h=2.5$ y $h=2.2$, respectivamente.



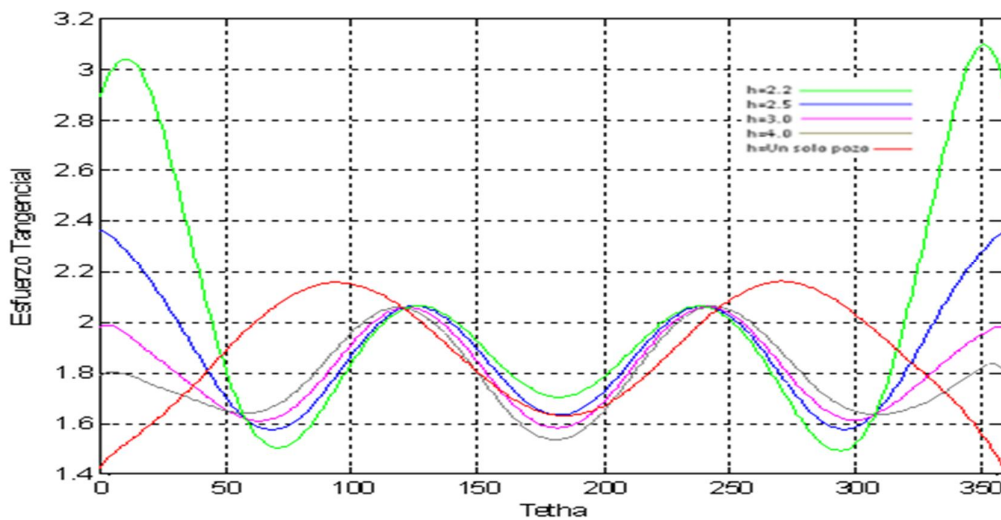
Gráfica 12. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$

Conclusiones similares pueden ser descritas para el caso de $P_2=0$. La gráfica 13 muestra la distribución de esfuerzos en el límite del agujero 1. El incremento de esfuerzo máximo relativo para el caso de un solo agujero va de un 40.2% hasta 129.9% para $h=2.5$ y $h=2.2$, respectivamente.



Gráfica 13. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0$.

La gráfica 14 muestra la distribución de esfuerzos para el agujero 2, excepto para el caso de $h=2.2$, se observan las mismas tendencias como para $P_2=0.1$ pero con efectos aún más definidos. Para $h=2.2$, la distribución de esfuerzos es compleja cerca de $\theta=0$ grados. Ahí existen dos máximas simétricas cerca de $\theta=0$ grados en un mínimo local.

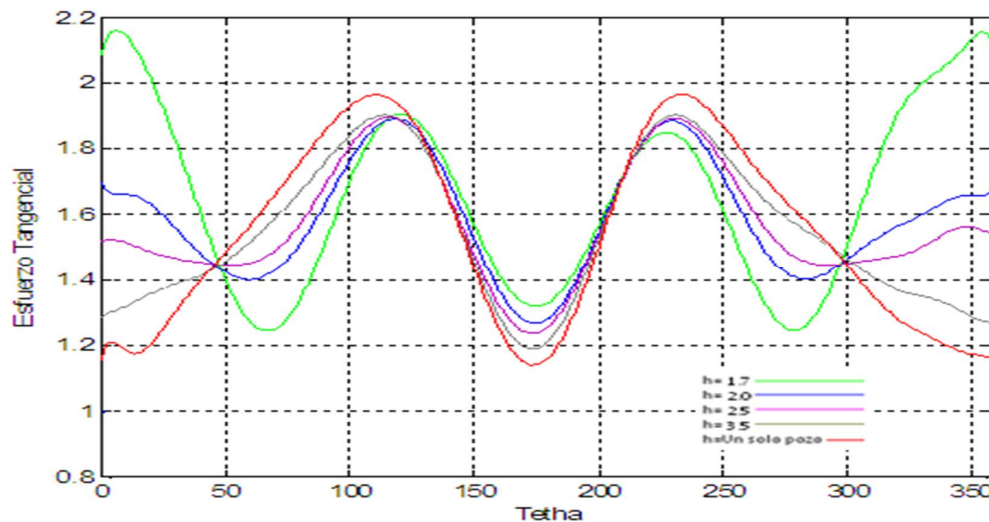


Gráfica 14. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$

Analizando los efectos de diámetro del agujero 2.

Todas las condiciones de carga se mantienen igual que el primer análisis, es decir, $S_1=1$, $S_2=0.8$, y $P_1=P_2=0.2$, α es nuevamente puesta en cero. El radio del agujero principal es $a_1=1$. Solo el tamaño del agujero 2 varia con dos valores más pequeños $a_2=0.5$ y $a_2=0.25$.

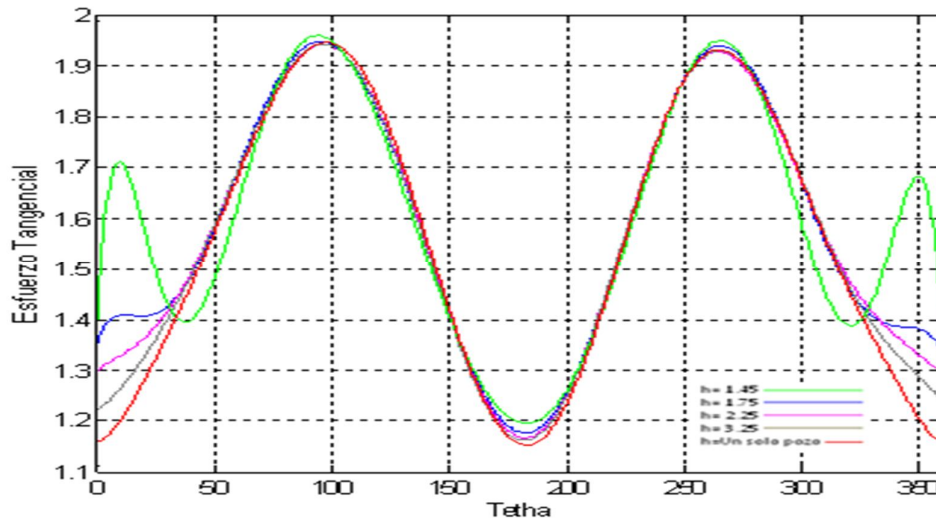
La gráfica 15 muestra el esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1 para $a_2=0.5$. Usando el mismo conjunto de distancias de separación de 0.2, 0.5, 1.0 y 2.0, por lo que las nuevas distancias de centro a centro son $h=1.7$, 2.0, 2.5 y 3.5. La distribución de esfuerzos para ángulos entre 100 y 260 grados varia un poco con la distancia de separación. La razón principal es que el agujero 1 es 2 veces más grande que el agujero 2, por lo tanto, las regiones lejos del agujero 2 no se afectan mucho. Estas son de cierta forma protegidas de los efectos causados por el segundo agujero. Para $h=1.7$, hay dos máximas una cerca de la otra y simétricas cerca de $\theta=0$ grados mientras que $\theta=0$ grados en si es un mínimo local.



Gráfica 15. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

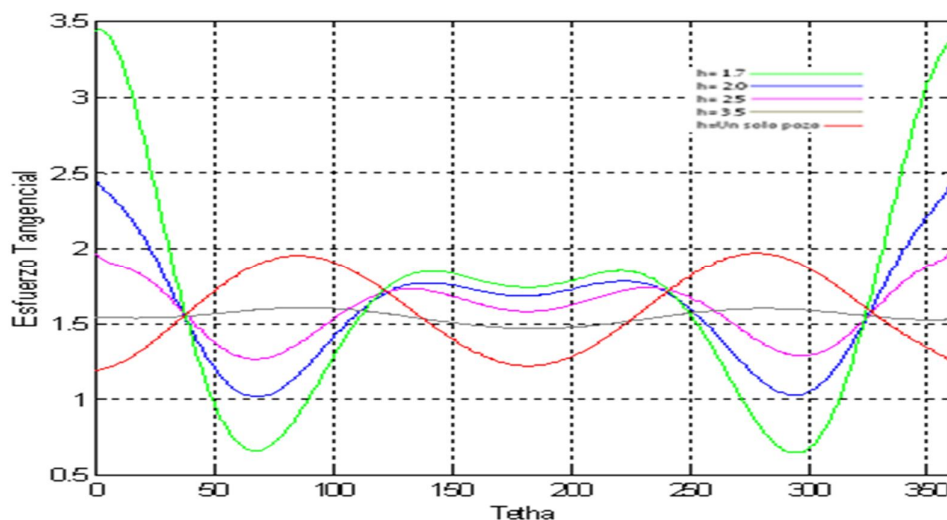
La gráfica 16, presenta el esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1 para $a_2=0.25$. Las mismas tendencias son observadas para este caso. El efecto protector es mucho mayor, porque el agujero 1 es ahora cuatro veces más grande que el agujero 2. La mayor parte de la distribución de esfuerzos permanece esencialmente es la misma independiente de la distancia de separación. Solo una pequeña región directamente apuntando al agujero 2

tiene distribución de esfuerzos dependientes en gran parte de la distancia. Para una distancia de separación de 0.2 hay dos máximas simétricas cerca de $\theta=0$ grados, similar al caso de $a_2=0.5$. Sin embargo estas son mucho más distinguidas para $a_2=0.25$.

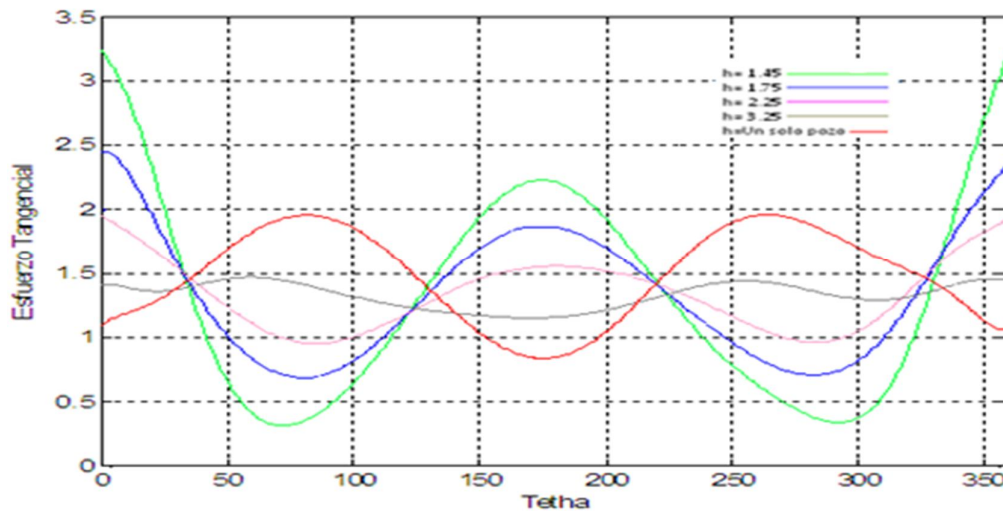


Gráfica 16. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

Las gráficas 17 y 18 muestran la distribución de esfuerzos para el agujero 2 cuando; $a_2=0.5$ y $a_2=0.25$, respectivamente. Estas siguen tendencias similares; mientras que la distancia de separación decrece, dos máximas locales tienden a desarrollarse a $\theta=0$ grados y $\theta=180$ grados.



Gráfica 17. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$



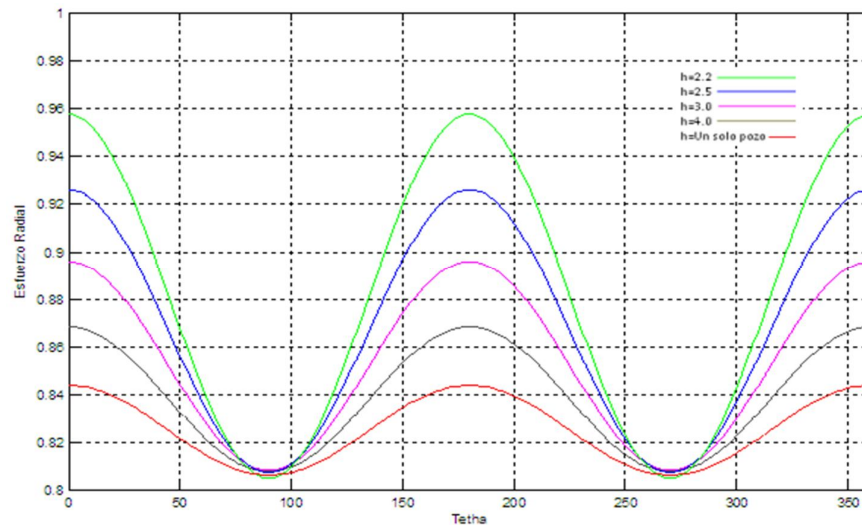
Gráfica 18. Esfuerzo tangencial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

LA ORIENTACIÓN DEL ESFUERZO RADIAL.

Basado en el mismo criterio y los mismos datos utilizados para obtener la orientación del esfuerzo tangencial anteriormente. Tomando en cuenta que el esfuerzo Radial también se ve afectado según la distancia de separación entre ambos agujeros, no así el esfuerzo axial o el esfuerzo de sobre carga que actúa debido a la profundidad y en pozos direccionales, recordando que para este modelado solo son pozos verticales con dirección de esfuerzos.

Considerando 2 agujeros de igual radio, nombrado $a_1=a_2=1$. Se investigarán 4 orientaciones del campo de esfuerzos: $\alpha=0$ grados, $\alpha=30$ grados, $\alpha=60$ grados, $\alpha=90$ grados. La primera orientación implica que la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal máximo. El último caso aplica para cuando la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo principal mínimo. Los otros dos casos consideran orientaciones intermedias.

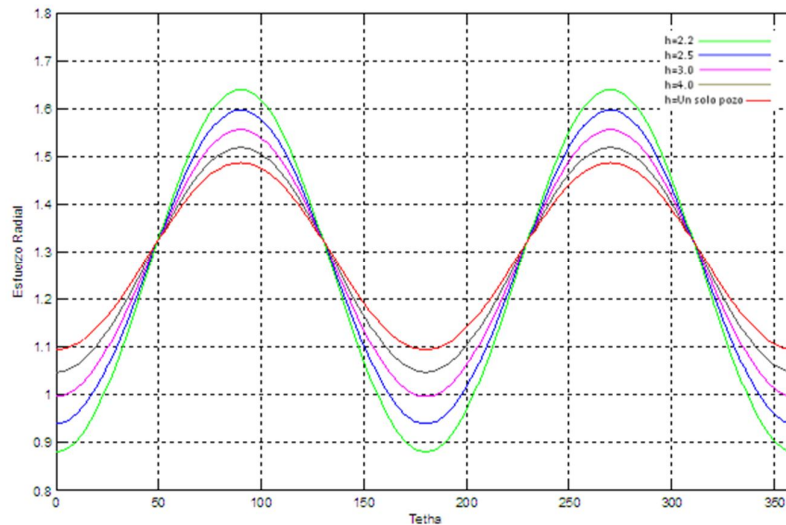
Debido a la simetría, los dos agujeros presentan la misma distribución de esfuerzos. La gráfica 19 muestra el esfuerzo radial en el límite de ambos agujeros para $\alpha=0$ grados, para varias distancias de separación $h=0.2, 0.5, 1.0$ y 2.0 . Por lo que las distancias de centro a centro correspondientes son $2.2, 2.5, 3.0$ y 4.0 respectivamente. La solución para un agujero simple, se presenta como la línea base para la comparación.



Gráfica 19. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

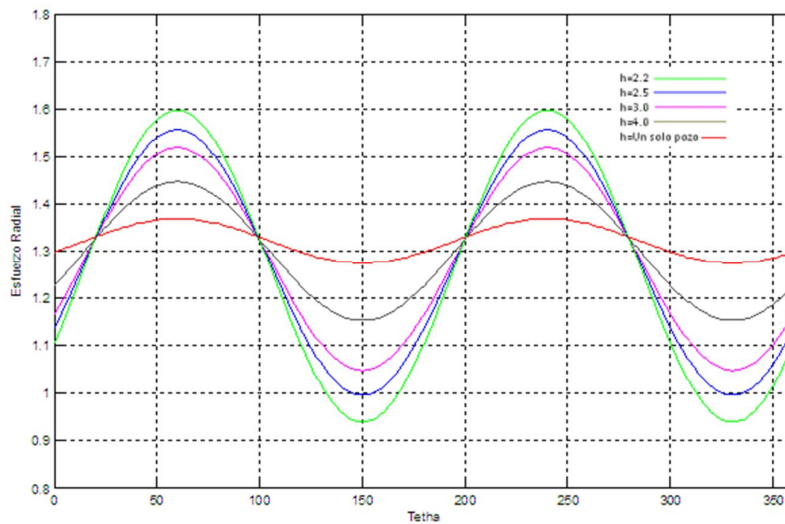
De manera interesante se observa que $h=3$ y $h=4$, proporcionan factores de concentración de esfuerzos más altos comparados con la solución para un solo agujero. En otras palabras, el esfuerzo radial máximo en el límite del agujero, no siempre disminuye cuando la distancia de separación es mayor entre los agujeros. También se observa de manera interesante que el esfuerzo radial es inversamente proporcional al esfuerzo tangencial, observándose como graficas senoidales y cosenoidales respectivamente.

La gráfica 20 muestra el esfuerzo radial en las fronteras para cualquier agujero con un valor de $\alpha=30$ grados para el mismo conjunto de distancias de separación. El esfuerzo máximo se observa en un $\alpha=120$ grados se mueve hacia un $\alpha=180$ grados así mismo el aumento de la magnitud. Al mismo tiempo, el mínimo valor que en un principio es $\alpha=90$ grados se mueve hacia $\alpha=75$ grados. La variación de esfuerzo en torno en comparación con el esfuerzo tangencial a cualquiera de las distancias también se observa en valores más pequeños e inversamente proporcionales.



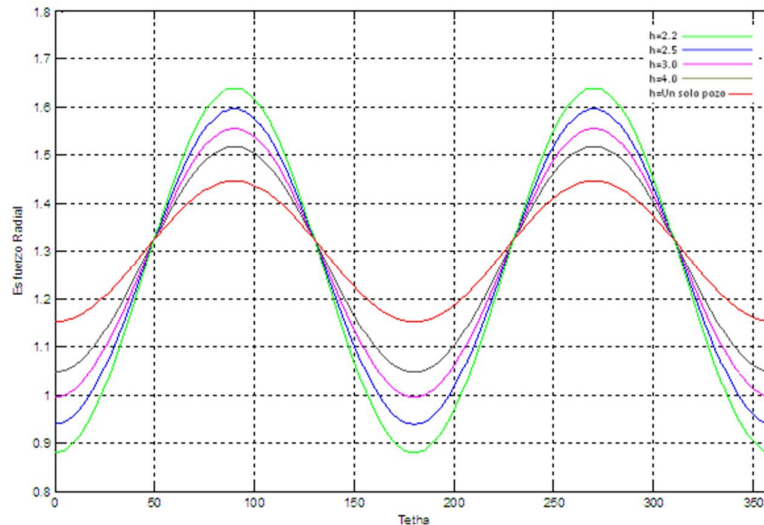
Gráfica 20. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=30$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

La gráfica 21 ilustra la distribución de esfuerzos para $\alpha=60$ grados, con valores muy similares a la concentración de esfuerzos en $\alpha=30$ grados.



Gráfica 21. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=60$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

Para el caso de $\alpha=90$ grados se ve en la gráfica 22, donde el mínimo valor del esfuerzo radial en el agujero se encuentra en una frontera $\alpha=0$ grados, para todas las distancias de separación consideradas.

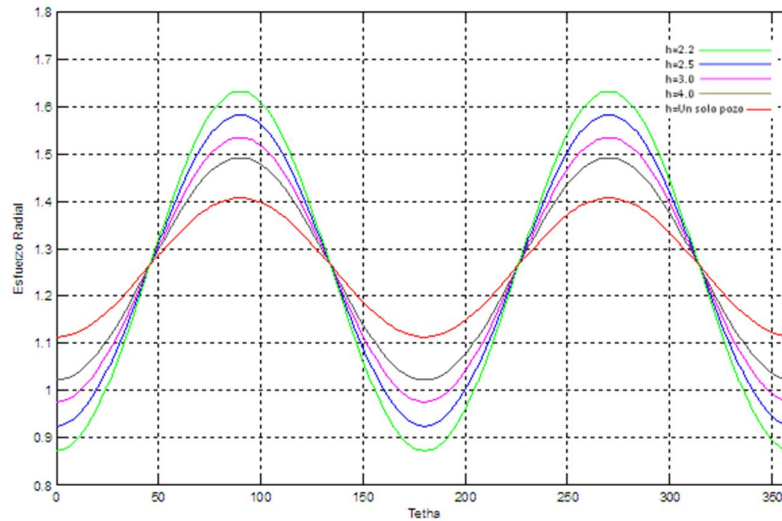


Gráfica 22. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=90$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

De nueva cuenta se observa que la distribución de esfuerzos varía significativamente con la orientación de los esfuerzos.

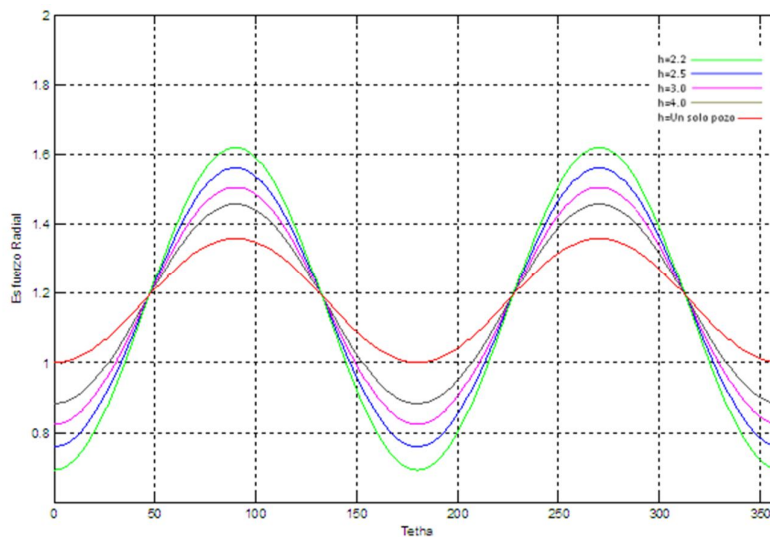
Para analizar los efectos de la relación relativa de esfuerzos aplicados. Los dos valores más bajos del esfuerzo menor principal, son considerados en este análisis, $S_2=0.7$ y $S_2=0.6$. Al ángulo α se le asigna el cero para minimizar la concentración de tensión basado en las conclusiones descritas de análisis previos y continuar analizando de manera análoga la diferencia entre Tangencial y Radial por lo que todos los demás parámetros se mantienen intactos.

La gráfica 23 muestra el esfuerzo radial de ambos agujeros para $S_2=0.7$ para las mismas distancias de separación. Para $h=2.5$, el esfuerzo radial máximo es aún más alto que para el caso de un agujero simple. Para una distancia de separación de $h=4.0$, el valor máximo es considerablemente más alto en comparación a el caso de un solo agujero.



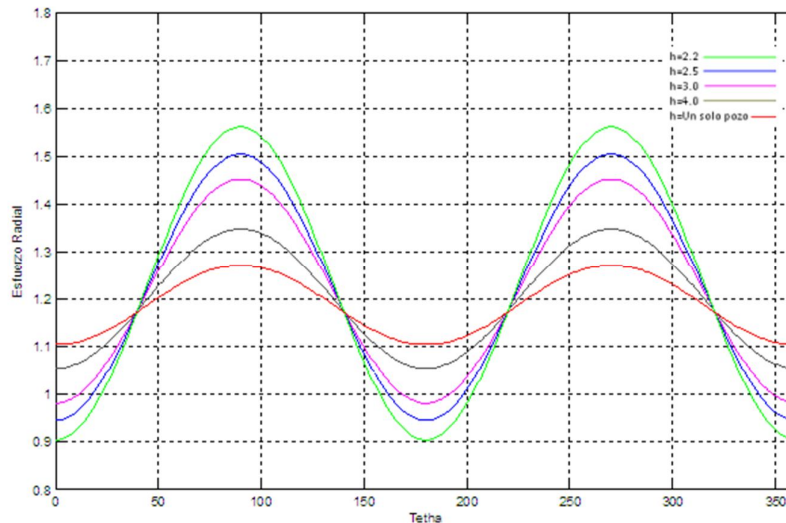
Gráfica 23. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.7$, $\alpha=0$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

La gráfica 24 describe la distribución del esfuerzo radial para $S_2=0.6$, nuevamente se observan las mismas tendencias pero con una menor concentración de tensión. Para $h=2.2$, el esfuerzo radial máximo es aún más alto que aquel de la solución de un solo agujero. En otras palabras, los dos agujeros ayudan a estabilizar el uno al otro; es decir dos agujeros juntos son más inestables que uno solo para todas las distancias de separación consideradas.



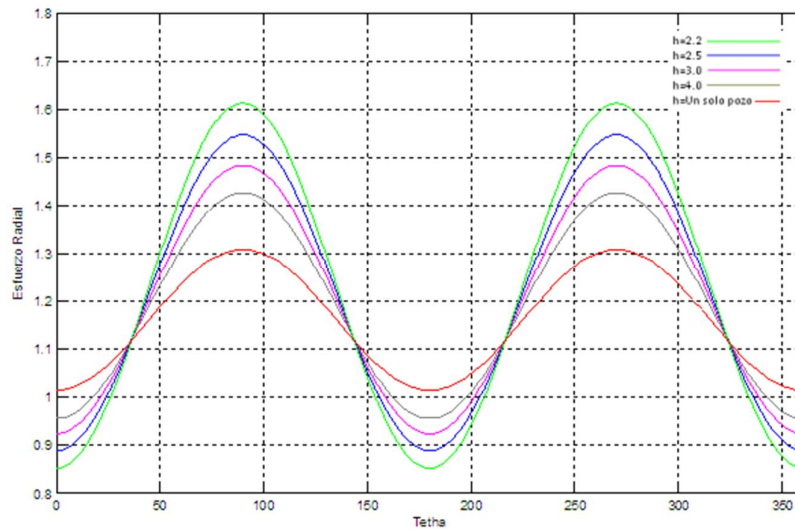
Gráfica 24. Esfuerzo radial en el límite de cualquier agujero; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.6$, $\alpha=0$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

Observando los efectos de presiones dentro de los agujeros. Si se consideran presiones más bajas en el agujero dos, es decir $P_2=0.1$ y $P_2=0$. El ángulo α es considerado cero, todos los demás parámetros se mantienen intactos. Debido a que los dos agujeros ya no tienen la misma distribución de esfuerzos, se consideran por separado en este análisis. La gráfica 25 presenta el esfuerzo radial en el límite del primer agujero cuando $P_2=0.1$. Observamos que el esfuerzo radial continua aumentando como en las gráficas anteriores aun cuando la presión dentro de los agujeros varié no así como se mostró en el esfuerzo tangencial donde se notaba una variación con respecto a la distancia de los agujeros siendo el límite del agujero el más inestable de acuerdo al esfuerzo radial.



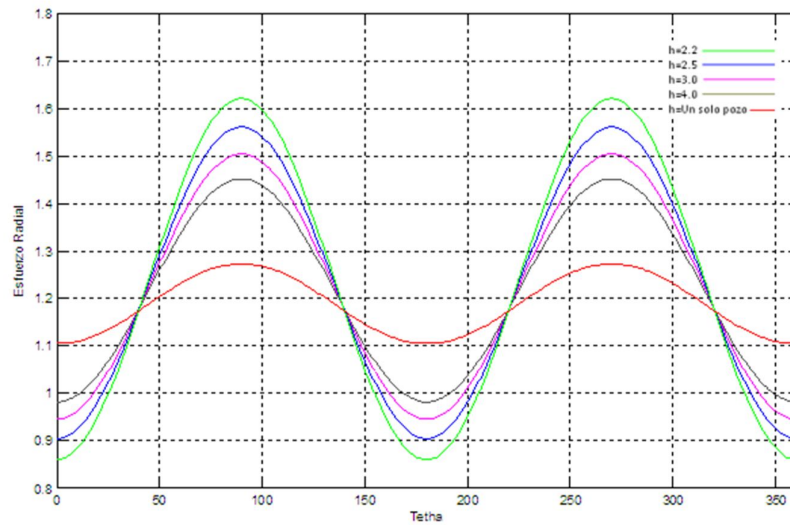
Gráfica 25. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$

La gráfica 26 muestra la distribución del esfuerzo radial para el agujero 2 con $P_2=0.1$. Se observan las mismas tendencias como para $P_2=0.2$, pero con efectos menos pronunciado con valores más bajos. Donde de nueva cuenta se observa que el valor del esfuerzo radial a la para un solo pozo es más alto pero se mantiene de forma constante para todo el agujero a diferencia de cuando existe un pozo en su cercanía.



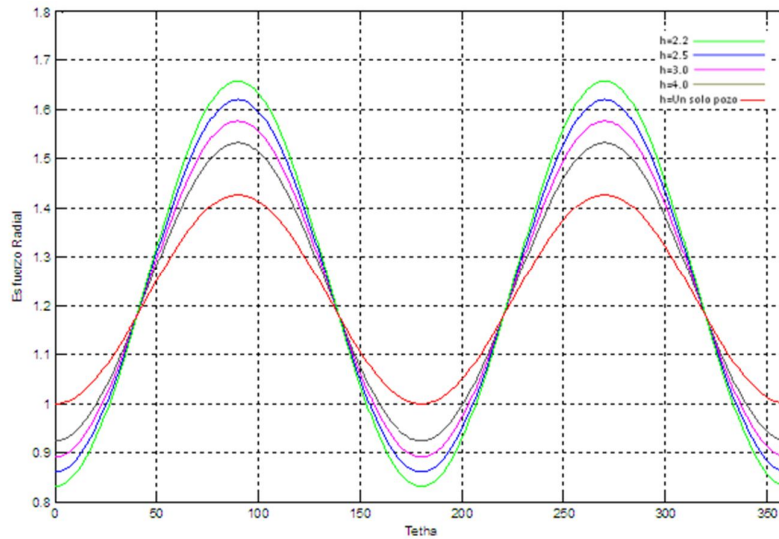
Gráfica 26. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0.1$

Pueden ser descritas conclusiones similares para el caso de $P_2=0$. La gráfica 27 muestra la distribución de esfuerzos en el límite del agujero 1. El incremento de esfuerzo máximo relativo para el caso de un solo agujero



Gráfica 27. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0$.

La gráfica 28 muestra la distribución de esfuerzos para el agujero 2, excepto para el caso de $h=2.2$, se observan las mismas tendencias como para $P_2=0.1$ pero con efectos aún más definidos.

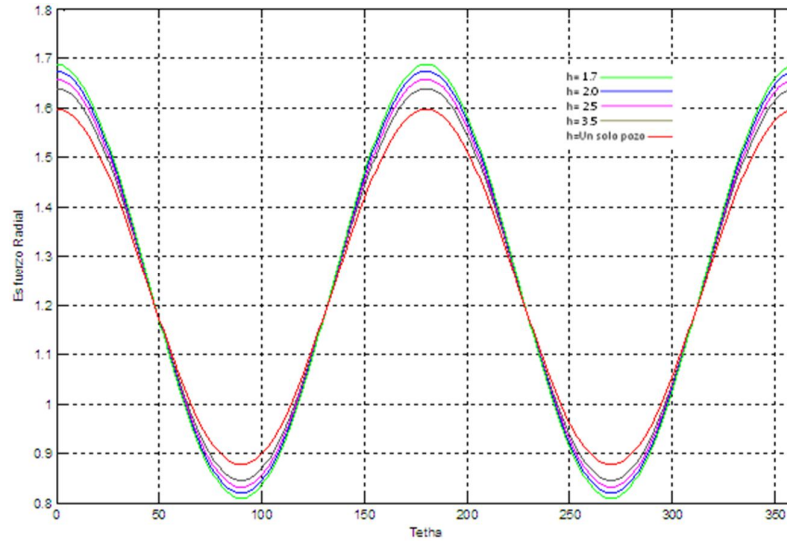


Gráfica 28. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=a_2=1$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=0.2$, $P_2=0$.

Ahora simétricamente se verifican los efectos de diámetro del agujero 2.

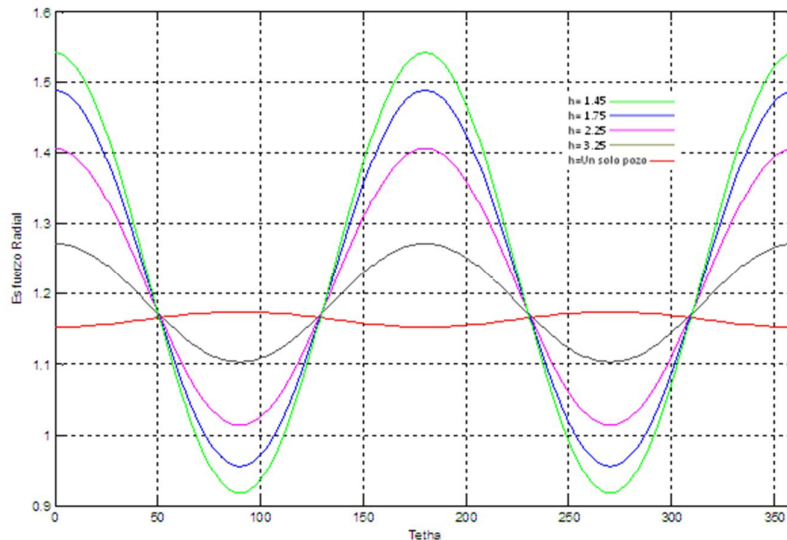
Todas las condiciones de carga se mantienen igual que el primer análisis, es decir, $S_1=1$, $S_2=0.8$, y $P_1=P_2=0.2$, α es nuevamente puesta en cero. El radio del agujero principal es $a_1=1$. Solo el tamaño del agujero 2 varía con dos valores más pequeños $a_2=0.5$ y $a_2=0.25$.

La gráfica 29 muestra el esfuerzo radial en el límite del agujero 1 para $a_2=0.5$. Usando el mismo conjunto de distancias de separación de 0.2, 0.5, 1.0 y 2.0, por lo que las nuevas distancias de centro a centro son $h=1.7$, 2.0, 2.5 y 3.5. La distribución de esfuerzos donde se observan homogéneas alrededor de todo el agujero, por lo tanto, las regiones lejos del agujero 2 no se afectan.



Gráfica 29. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

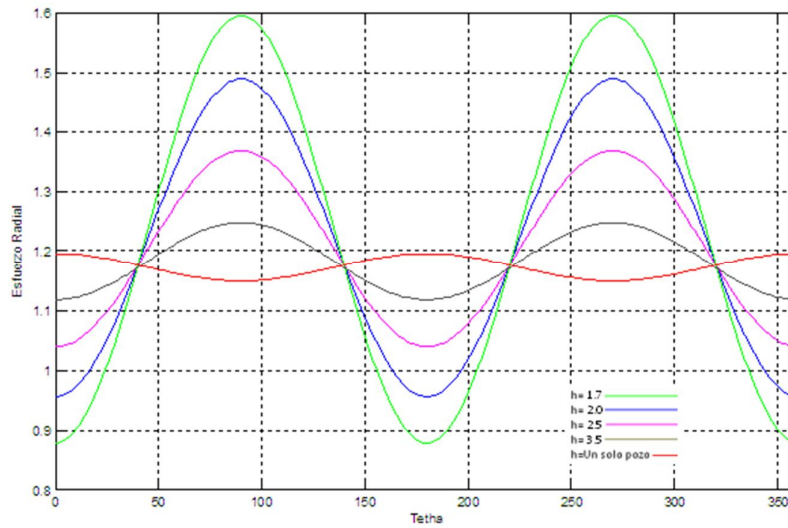
La gráfica 30, presenta el esfuerzo radial en el límite del agujero 1 para $a_2=0.25$. Las mismas tendencias son observadas para este caso. La distancia se convierte en factor principal para el aumento del esfuerzo radial. Por lo que de nuevo se observa que el esfuerzo radial sigue siendo crítico en el límite de los agujeros aun cuando estos varíen en su diámetro



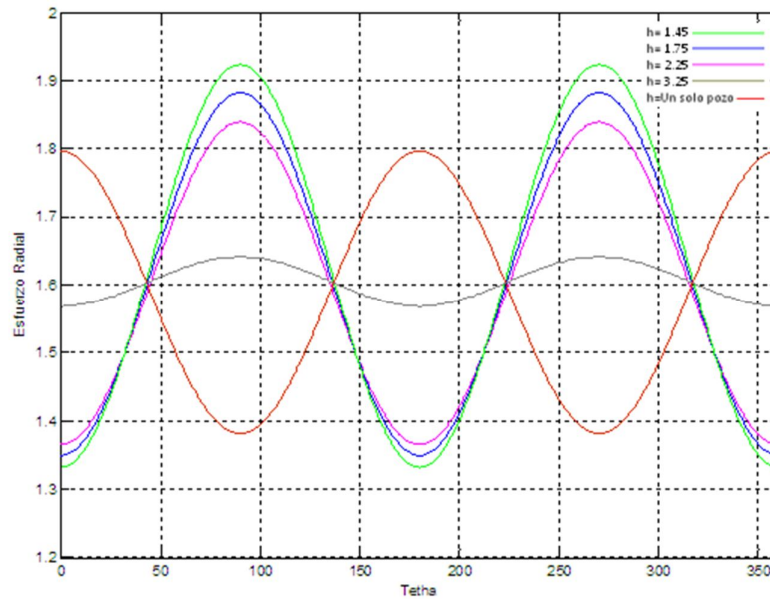
Gráfica 30. Esfuerzo radial en el límite del agujero 1; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados,
 $P_1=P_2=0.2$

Las gráficas 31 y 32 muestran la distribución de esfuerzos para el agujero 2 cuando; $a_2=0.5$ y $a_2=0.25$, respectivamente. Estas siguen tendencias similares;

mientras que la distancia de separación decrece, parecen aumentar su esfuerzo radial pero a mantenerse más estable durante todo el agujero.



Gráfica 31. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.5$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$



Gráfica 32. Esfuerzo radial en el límite del agujero 2; para $a_1=1$, $a_2=0.25$, $S_1=1$, $S_2=0.8$, $\alpha=0$ grados, $P_1=P_2=0.2$

CRITERIO DE FALLA

Se aplicara el análisis de sensibilidad para los 2 casos principales de la orientación del esfuerzo horizontal máximo tomando casos similares para calibrar los resultados obtenidos de las gráficas anteriores. Así mismo se comparara la estabilidad del agujero para cuando existe un pozo multilateral como para cuando existe un solo agujero.

Siendo el primer caso para cuando el esfuerzo horizontal máximo se presenta en forma paralela a la línea de centro a centro de los pozos.

Por lo tanto aplicando el análisis de sensibilidad de Drucker-Prager, para determinar la estabilidad de la unión de los pozos multilaterales, para dos agujeros de igual radio $a_1=a_2=1$. Tomando los valores en *MPa*. Obtenidos en las gráficas 5 y 19 donde se muestra la distribución del esfuerzo tangencial y radial en el límite de dos agujeros respectivamente para una ángulo $\alpha= 0^\circ$ y la distancia de separación de 0.2 o lo que correspondería a 2.2 como distancia de centro a centro de pozos; por ser esta la distancia más inestable o por presentar los valores de esfuerzos más altos debido a la cercanía de los mismos. Los valores del esfuerzo Axial son considerados constantes por analizar diversos ángulos a una misma profundidad y para fines prácticos de 4.9 MPa.

De acuerdo a una serie de ensayos en laboratorio de compresión triaxial en una arenisca silíceo obtenemos los valores el ángulo de fricción interna " ϕ " y el valor de cohesión " c "

$$\phi = 30^\circ$$

$$c = 10 \text{ MPa}$$

Por lo que:

$$B = \frac{\tan\phi}{\sqrt{(9 + 12\tan^2\phi)}} = \frac{\tan 30}{\sqrt{(9 + 12\tan^2 30)}} = 0.16$$

$$A = \frac{3c}{\sqrt{(9 + 12\tan^2\phi)}} = \frac{3(10)}{\sqrt{(9 + 12\tan^2 30)}} = 8.32$$

Análisis de Sensibilidad Método de Drucker-Prager [MPa]					
Cara del Pozo	$\alpha= 0$	$\alpha= 90$	$\alpha= 180$	$\alpha= 270$	$\alpha= 360$
Esfuerzo Tangencial	3.3	1.7	1.5	1.7	3.3
Esfuerzo Radial	0.96	0.82	0.96	0.82	0.96
Esfuerzo Axial	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9
$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$					
Drucker-Prager	-7.80	-7.36	-7.35	-7.36	-7.80

Tabla 4. Análisis de sensibilidad en el límite de ambos agujeros aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las gráficas 5 y 19 así como de datos de laboratorio para A y B.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la Tabla 4, los valores de inestabilidad se representan en planta como se ve en la Figura 10.

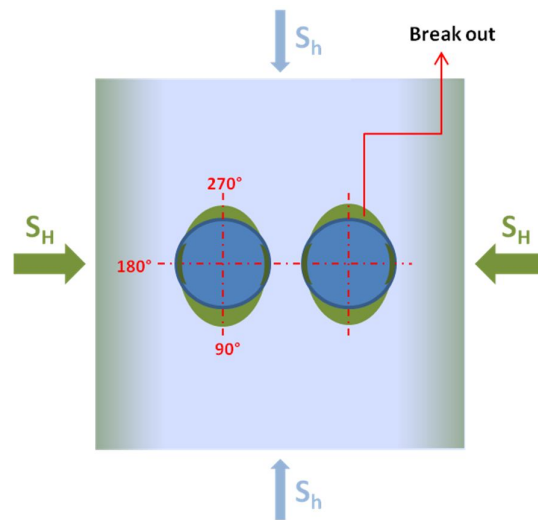


Figura 10. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para la unión de los pozos multilaterales. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 0^\circ$. Tabla 4.

Por lo que se deduce que la unión de los pozos multilaterales es inestable para este caso, tomando en cuenta que en las gráficas obtenidas se observa la inestabilidad debido a que los valores de esfuerzos también son más altos.

También se observa que a 180° es decir cuando la pared del pozo principal no está frente a su ramal sufre menos inestabilidad.

Para el segundo caso se aplicara el mismo análisis con estas mismas condiciones para cuando existe un solo agujero y de esta forma verificar que tanto afecta la presencia del agujero ramal en la estabilidad de un solo agujero.

Análisis de Sensibilidad Método de Drucker-Prager [MPa]					
Cara del Pozo	$\alpha=0$	$\alpha=90$	$\alpha=180$	$\alpha=270$	$\alpha=360$
Esfuerzo Tangencial	1.27	2.1	1.20	2.0	1.27
Esfuerzo Radial	0.845	0.805	0.845	0.805	0.845
Esfuerzo Axial	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9
$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$					
Drucker-Prager	-7.21	-7.49	-7.18	-7.44	-7.21

Tabla 5. Análisis de sensibilidad para un solo agujero aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las gráficas 5 y 19 así como de datos de laboratorio para A y B.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la Tabla 5, los valores de inestabilidad se representan en planta como se ve en la Figura 11.

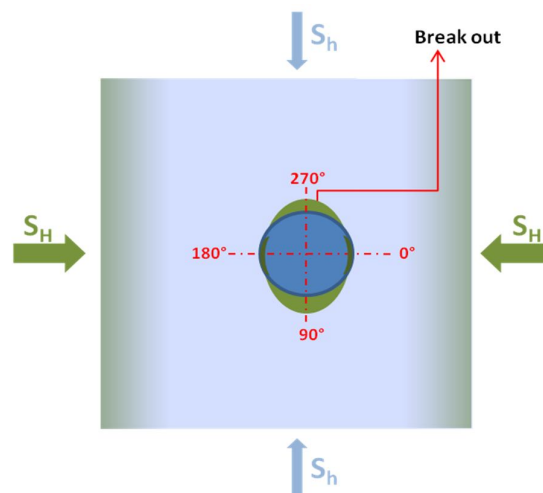


Figura 11. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para un solo pozo. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha=0^\circ$. Tabla 5.

De la misma forma se observa que existe inestabilidad con valores menores y aumenta en los ángulos de dirección donde se presenta el *break out*. Por lo que se puede deducir que la inestabilidad depende en su mayoría de la orientación de los esfuerzos para cuando existe un solo agujero.

El tercer caso para cuando el esfuerzo horizontal máximo se presenta en forma perpendicular a la línea de centro a centro de los pozos. Es decir para cuando la línea de centro a centro se alinea con el esfuerzo horizontal mínimo a un ángulo $\alpha = 90^\circ$

De nueva cuenta se tomaran los mismos valores considerados en los casos anteriores y los valores *MPa*. obtenidos en las gráficas 8 y 22 donde se muestra la distribución del esfuerzo tangencial y radial en el límite de dos agujeros respectivamente

Análisis de Sensibilidad Método de Drucker-Prager [MPa]					
Cara del Pozo	$\alpha = 0$	$\alpha = 90$	$\alpha = 180$	$\alpha = 270$	$\alpha = 360$
Esfuerzo Tangencial	4.7	0.9	2.3	0.9	4.7
Esfuerzo Radial	0.88	1.62	0.89	1.62	0.88
Esfuerzo Axial	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9
$\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$					
Drucker-Prager	-8.21	-7.37	-7.58	-7.37	-8.21

Tabla 6. Análisis de sensibilidad en el límite de ambos agujeros aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las gráficas 8 y 22 así como de datos de laboratorio para A y B.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la Tabla 6, los valores de inestabilidad se representan en planta como se ve en la Figura 12.

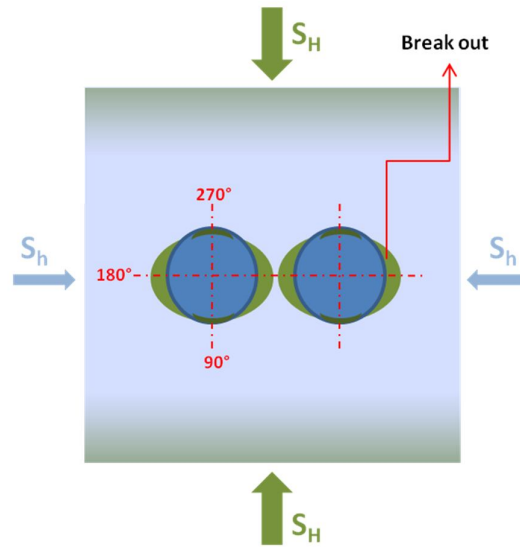


Figura 12. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para la unión de los pozos multilaterales. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha = 90^\circ$. Tabla 6.

Por lo que deducimos que la unión de los pozos multilaterales es inestable para este caso, tomando en cuenta que en las gráficas obtenidas también se muestra la inestabilidad debido a la orientación que tiene el *break out*, y a los valores de esfuerzos más altos. También se observa que a 180° es decir cuando la pared del pozo principal no está frente al pozo ramal sufre una inestabilidad pero en menor medida que frente al pozo ramal, pese a que geoméricamente la deformación del agujero se presenta igual.

Aplicaremos un cuarto caso donde se analizara el caso anterior para un solo agujero para de nueva cuenta analizar la influencia del agujero ramal.

Análisis de Sensibilidad Método de Drucker-Prager [MPa]					
Cara del Pozo	$\alpha= 0$	$\alpha= 90$	$\alpha= 180$	$\alpha= 270$	$\alpha= 360$
Esfuerzo Tangencial	2.10	1.60	1.55	1.58	1.80
Esfuerzo Radial	1.15	1.43	1.17	1.43	1.15
Esfuerzo Axial	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9
$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$					
Drucker-Prager	-7.67	-7.63	-7.48	-7.62	-7.39

Tabla 7. Análisis de sensibilidad para un solo agujero aplicando el Método de Drucker-Prager, obteniendo los valores de las gráficas 8 y 22 así como de datos de laboratorio para A y B.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la Tabla 7, los valores de inestabilidad se representan en planta como se ve en la Figura 13.

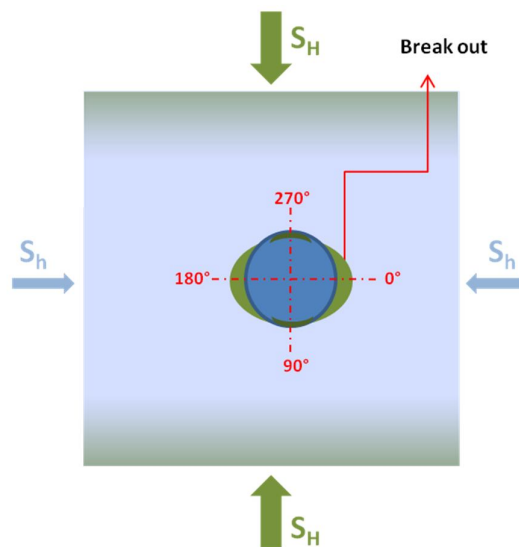


Figura 13. Vista de planta del análisis de sensibilidad obtenido de la Ecuación de Drucker-Prager para un solo pozo. Con una orientación del esfuerzo horizontal máximo $\alpha= 90^\circ$. Tabla 7.

De la misma forma se observa que existe inestabilidad en todo el agujero, siendo menor a 180° donde se observa la dirección del *break out*. Por lo que se

concluye como se ve en los resultados de la tabla 5 que la inestabilidad del agujero depende en gran medida a la distribución de esfuerzos y se ve afectada en mayor medida cuando se tiene un ramal en la dirección en que se genera el *break out*.

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES.

El mantenimiento de un pozo estable durante la perforación de pozos es una de las tareas principales en la industria petrolera, ya que los problemas de inestabilidad asociados al pozo resultan en altos costos, un impacto severo en el cronograma de perforación e inclusive puede poner en peligro al personal asociado a las tareas de perforación. Esto se vuelve más crítico cuando se habla de pozos multilaterales por el riesgo y la complejidad de los mismos al buscar lograr la integridad mecánica e hidráulica en la unión de los pozos multilaterales

La resistencia a la fractura de las formaciones es un factor dominante en la construcción de pozos, ya que las profundidades de asentamiento de las tuberías de revestimiento están gobernadas por las presiones de poro y fractura, dando estas una ventana operacional para el peso de lodo en cada una de las etapas de la perforación. Todo esto se vuelve más complicado cuando se habla de estabilidad de pozos multilaterales dando paso a los 6 Niveles de Terminación que maneja la TAML siendo la zona más importante durante la perforación la unión de los pozos multilaterales.

Casi todas las soluciones que existen para estudiar la estabilidad de agujeros en la unión de los pozos multilaterales son solo aplicables a las condiciones de esfuerzos en los límites de los agujeros, lo cual no siempre es aplicable para casos de ingeniería petrolera como lo podrían ser para ingeniería industrial e incluso para ingeniería mecánica en el estudio de placas de un solo material y un solo espesor, en un intento de cubrir un rango más amplio se desarrolló esta tesis; es decir tocar un plano infinito con distribución de esfuerzos, con dos agujeros de igual o distintos tamaños y con presión interna entre ellos.

- En esta tesis se planteó una solución analítica para la distribución de esfuerzos en una placa infinita e isotrópica sometida a esfuerzos de campo, con 2 agujeros circulares de algún tamaño y se validó teóricamente con otros resultados publicados usando datos experimentales de laboratorio.
- Se desarrolló analíticamente la solución para 2 pozos de igual o diferente diámetro, como la descrita por Ling y Haddon mostrando los mismos resultados.
- El análisis muestra que el máximo esfuerzo tangencial en el límite del agujero no siempre incrementa con el aumento de diámetro del ramal, pero si con la separación entre estos; así también muestra que la inestabilidad del agujero depende en gran medida de la orientación de los esfuerzos, el material que se esté perforando y las presiones internas de cada agujero.

- El análisis muestra que el esfuerzo radial en la mayoría de los casos excepto cuando el diámetro del agujero 2 es menor al del agujero principal, es inversamente proporcional al valor del esfuerzo tangencial y que el máximo esfuerzo radial depende de la presión interna de los agujeros y no así de la separación de centro a centro “h”.
- Los efectos que presenta α es el más importante para determinar la estabilidad en la unión de los pozos multilaterales ya que la solución muestra que esta unión es más inestable cuando las líneas de centro a centro de los pozos son perpendiculares al esfuerzo principal máximo.
- La solución también muestra que en el límite del pozo secundario, para cuando el diámetro es menor al pozo principal el esfuerzo tangencial en este es mayor, es decir es más inestable que en el límite del pozo principal.
- Del análisis de sensibilidad de Drucker-Prager observamos que la estabilidad en la unión de los pozos multilaterales es negativa es decir sufre colapso o es muy inestable como Gráficamente se muestra en las páginas 75 y 78. Y concluimos que la inestabilidad del pozo depende en gran medida de la formación que predomine donde se encuentre la unión de los pozos multilaterales, así como de la presión interna de los agujeros y la orientación de los esfuerzos, siendo estos dos últimos parámetros posibles de controlar durante la planeación de la perforación de un pozo ramal; buscando perforar el pozo ramal en dirección al mínimo esfuerzo horizontal y planeando una densidad del fluido de control que nos ayude a controlar la presión interna de los agujeros
- Estos resultados derivados de esta solución analítica servirán de base para un desarrollo posterior en donde haya otros parámetros así como para el establecimiento y calibración de la solución numérica.

APÉNDICES.

Apéndice A:

CONCEPTOS BÁSICOS.

En esta sección denominada "A" analizaremos los pasos empleados para el desarrollo de nuestro modelo analítico, iniciando con la teoría básica y nuestro planteamiento para la solución de nuestras ecuaciones. Así como un breve ejemplo de la teoría matemática empleada en dicho desarrollo.

Números Reales

1,2,3,....

Números Imaginarios

$$\sqrt{-1} = i$$

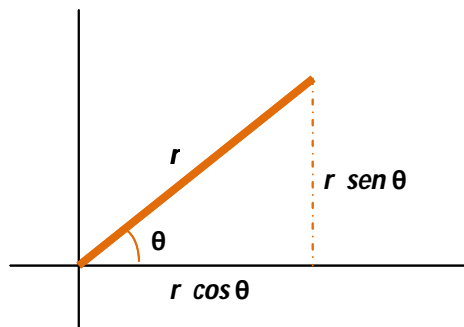
Números Complejos (Número Real más Número Imaginario)

A + i B ó bien **1 + 2 i**

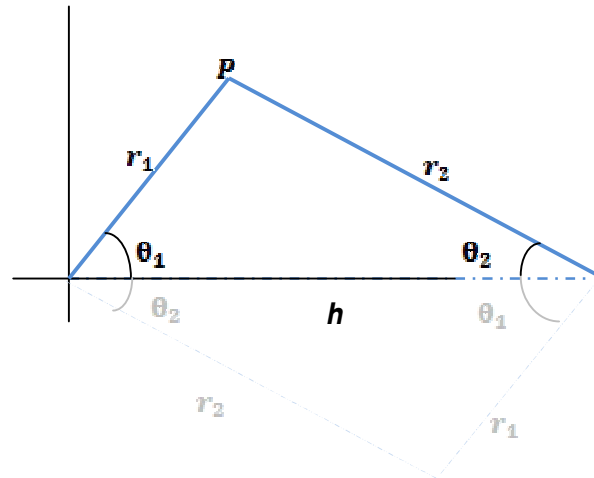
Se pueden representar de dos formas:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) Coordenadas Rectangulares | x,y = 1,2 i |
| 2) Coordenadas Polares | r, e^{iθ} = r cosθ + i r senθ |

Donde:



Entonces aplicando esto a nuestro proyecto de estabilidad de Pozos.



Escalando dividiendo cada lado entre h

$$\rho_1 = \frac{r_1}{h} \quad y \quad \rho_2 = \frac{r_2}{h}$$

Serie de TAYLOR para logaritmos.

Ejemplo:

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (-1)^{k+1} x^k$$

Como se requiere que sea $\ln(1 - x)$; entonces:

$$\ln[1 + (-x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (-1)^k (-1) (-x)^k$$

$$\ln[1 + (-x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (-1)^k (-1) (-1)^k (x)^k$$

$$\therefore \ln[1 + (-x)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (-1) (-1)^{2k} (x)^k$$

Como todo número negativo elevado al cuadrado es positivo; es decir:

$$1 = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\therefore \ln[1 + (-x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right) (-1)(-1)^{2k}(x)^k \\ &\rightarrow \ln[1 + (-x)] = - \sum_{k=1}^{\infty} x^k\end{aligned}$$

Binomio Generalizado de NEWTON $(1 - x)^{-n}$

Ejemplo:

$$(1 - x)^{-n} = \frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k$$

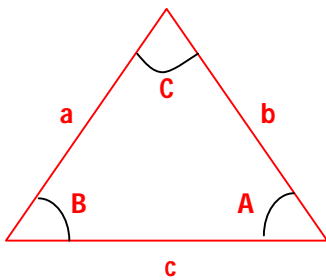
Es decir:

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{(i - j)! * j!}$$

Poniendo como ejemplo, lo siguiente:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5 - 3)! * 3!} = \frac{120}{2! * 3!} = \frac{120}{2 * 6} = 10$$

LEY de Cosenos



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

Apéndice B:

NOMENCLATURA

En esta sección denominada “B” mostraremos la nomenclatura empleada en los capítulos presentados.

Letras Mayúsculas:

O_1 = centro del agujero 1

O_2 = centro del agujero 2

P_1 = presión interna en el agujero 1

P_2 = presión interna en el agujero 2

S_1 = esfuerzo Mayor principal

S_2 = esfuerzo menor principal

Letras minúsculas:

a_1 = radio del agujero 1

a_2 = radio del agujero 2

h = distancia del centro del pozo 1 a centro del pozo 2

r_1 = coordenadas radiales para el centro del agujero 1

r_2 = coordenadas radiales para el centro del agujero 2

$r = 1, 2$ = número de agujero

n = número de caso

X = ecuación o termino

c = cohesión

Símbolos griegos:

α = ángulo que forma S_H con la línea de centro a centro

ρ_1 = coordenadas radiales adimensionales para el centro del agujero 1

ρ_2 = coordenadas radiales adimensionales para el centro del agujero 2

λ_1 = radio adimensional para el agujero 1

λ_2 = radio adimensional para el agujero 2

θ_1 = coordenadas angulares para el centro del agujero 1

θ_2 = coordenadas angulares para el centro del agujero 2

ϕ = ángulo de fricción interna de la roca

ϕ_f = función final del esfuerzo de Airy

ϕ_0 = función del esfuerzo de Airy para cuando no existen agujeros

ϕ_1 = función del esfuerzo de Airy adicional para el agujero 1

ϕ_2 = función del esfuerzo de Airy adicional para el agujero 2

σ_{rr} = esfuerzo radial

$\sigma_{\theta\theta}$ = esfuerzo tangencial

$\sigma_{r\theta}$ = esfuerzo de corte o cizalla

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] Aadnoy, B.S. 1988. "Modeling of the Stability of Highly Inclined Boreholes in Anisotropic Rock Formations". SPE Drilling Engineering, pp. 259-268.
- [2] Aadnoy, B. and Chenevert, M.E. , 1987, "Stability of Highly Inclined Boreholes", paper SPE/IADC 16052 presented at the SPE/IADC Drilling conference held in New Orleans, Louisiana, pp.25-41.
- [3] Abousleiman, Y. et. al. 1999. " Time Dependent Coupled Process in Wellbore Design and Stability: PBORE- 3D" paper SPE 56759 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in Houston, Texas.
- [4] A. Biot, 1941. "General theory of three-dimensional consolidation", Journal of Applied Physics Volume 12, pp. 155-164.
- [5] Bargui H. and Absouleiman Y., 2000, "2D and 3D Elastic and Poroelastic Stress Analyses for Multilateral Wellbore Junctions" Pacific Rocks 2000 "Rocks Around the Rim", Doe T., Ed. Girard, J. Liebman, M., and Breeds, C., eds., A. Balkema, Rotterdam, pp. 261-268.
- [6] Bradley, W.B. 1979. "Failure of Inclined Boreholes", Journal of Energy Resources Technology, Transaction of the ASME. Volume 101, pp. 232-239.
- [7] Bratli 1986. "Method for Real-Time Evaluation of Formation Strength", The 42nd U.S. Rock Mechanics Symposium (USRMS),
- [8] Charlez, P.A. 1991. "Rock Mechanics Theoretical Fundamentals" Volume1, Editions Technip, Paris.
- [9] Charlez y Roates; 1997 "The Impact of Constitutive Laws on Wellbore Stability: A General Review," paper SPE 28058 JPT Drilling & Completion (June 1997b) pp. 119-127.
- [10] Chen W.F., and Saleeb. A.F. 1982,: Constitutive Equations for Engineering Materials Volume 1; Elasticity and Modeling John Wiley & Sons. New York; pp. 481-486.
- [11] Cheng A.H. Wriggers P (2004), 'Finite element analysis of pile driving using large-slip frictional contact', Computers and Geotechnics, 32, 17-26, 2005.
- [12] Cui. I., Cheng A.H.-D., and Absouleiman. Y.,. 1997. "Poroelastic Solution for an Inclined Borehole" Journal of Applied Mechanics, Volume 64. pp. 33-39.

- [13] Desai, C.S, and H.J. Siriwardana. 1984, 'Thin-layer elements for interfaces and joints', International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 8, 19-43.
- [14] Detournay, E. and Cheng, A. 1988. "Poroelastic Response of a Borehole in a Non-hydrostatic Stress Field", International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics, Volume 25, No.3 pp. 171-182.
- [15] Fairhurst, 1968, "Experimental Physics and Rock Mechanics; Results of laboratory study", Consulted internationally on a wide variety of problems in rocks. Minneapolis U.S.A. ISBN 90 5809 213 5
- [16] Fonseca, C. 1998. "Chemical-Mechanical Modeling of Wellbore Instability in Shales". Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, Austin, Texas.
- [17] Green, A. E., 1940. "General Bi-Harmonic Analysis for a Plate Containing Circular Holes" proceedings of the Royal Society of London, Series A, Volume 176. Issue 964, pp.121-139.
- [18] Haddon R.A.W., 1967. "Stresses in an Infinite Plate with Two Unequal Circular Holes", Quart Journ. Mechanic and Applied Math. Volume XX Pt. 3, pp.277-291.
- [19] Hoang S. and Absouleiman Y. "Stresses in an Infinite Plate Subjected to Non-hydrostatic State of Stress with Two Equal and Unequal Circular Holes" Journal of Applied Mechanics, ASME. submitted.
- [20] Hogg, C. 1997. " Comparison of Multilateral Completion Scenarios and their Application", paper SPE 38493 presented at the Offshore Europe Conference held in Aberdeen, Scotland.
- [21] Howland, R.C.J., and Knight, R.C., 1939, "Stress Functions for a Plate Containing Groups of Circular Holes", Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, 238, pp. 357-392.
- [22] Iwaki, T., and Miyao, K., 1980, "Stress Concentration in a Plate with Two Unequal Circular Holes", Int. J. Eng. Sci., 18(8), pp. 1077-1090.
- [23] Jaeger, J.C. and Cook, N.G.W. 1979: Fundamentals of Rock Mechanics, Third Edition. Chapman and Hall, London.
- [24] Jefferey, G.B., 1921. "Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates", Philos. Trans. R. Soc. London, Series A, 221, pp. 265-293.
- [25] Kirsch, G., 1898. "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Volume 42 pp. 797-807.

[26] Ling, C. B., 1948. "On the Stresses in a Plate Containing Two Circular Holes", *Journal of Applied Physics*, Volume 19, pp. 77-82.

[27] McLean y Addis, 1990. "The Role of the Intermediate Principal Stress in Wellbore Stability Studies; Evidence from Hollow Cylinder Test", *International Journal of Rock Mechanics Sciences and Geomechanics*, Volume 30, pp. 1027-1030.

[28] Ong, S.H., and Roegiers, J.C. 1993. "Influence of Anisotropies in Borehole Stability", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics*, Volume 30, No. 7, pp. 1069-1075.

[29] Papanastasiou. P. Sibai M., Heiland J., Shao, J-F., Cook J., Fourmaintraux, D. Onaisi A., Jeffryes B. and Charlez P., "Stability of a Multilateral Junction: Experimental Results and Numerical Modeling" paper SPE/ISRM 78212 presented at the 2002 SPE/ISRM Rock Mechanics Conference, Irving, TX. Oct. 20-23.

[30] Savin G.N. 1961, "Stress Concentration Around Holes", Pergamon, New York.

[31] Shwartz F.W. 1984. An analysis of the influence of fracture geometry on mass transport in fractured media. *Water Resour Res* 20(9):1,241-1,252.

[31] Skempton, A.W., 1970. "The Consolidation of clays by Gravitational Compaction". *Quarterly Journal of the Geologic Society of London* 125, pp. 373-411.

[33] Terzaghi, 1923. Die Berechnung der Durchlassigkeit des Tonen aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Sber. Wien. Akad. Wiss.* 132, Nos. 3 & 4.

[34] Ting K., Chen K.T., and Yang W., 1999, "Applied Alternating Method to Analyze the Stress Concentration Around Interacting Multiple Circular Holes in an Infinite Domain" *Int. J Solids Struct.*, Volume 36, pp. 533-556.

[35] Ukadgaonker, V.G., and Patil D.B., 1993, "Stress Analysis of a Plate Containing Two Elliptical Holes Subjected to Uniform Pressures and Tangential

[36] Van Mises and Jaeger, 'State of Stress induced by cylindrical sliding contacts with frictional heating. Department of Engineering Science, Oxford University

[37] Veeken (1989), "Rock mechanics issues in completion and stimulation operations". *Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. American Rock Mechanics Association